УДК 512.543.76

В. В. БЕНЯШ-КРИВЕЦ[1], *И. О. ГОВОРУШКО*[2]

МНОГООБРАЗИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУПП БАУМСЛАГА – СОЛИТЕРА В СЛУЧАЕ НЕ ВЗАИМНО ПРОСТЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ

[1]*Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь, e-mail: benyash@bsu.by*
[2]*Белорусский государственный педагогический университет им. М. Танка, Минск, Беларусь, e-mail: govorushko88@gmail.com*

Исследуются многообразия представлений групп Баумслага – Солитера $BS(p,q)$ в случае, когда p и q не являются взаимно простыми. Найдены неприводимые компоненты этих многообразий, вычислены их размерности, а также доказана их рациональность.

Ключевые слова: группа Баумслага – Солитера, многообразие представлений, размерность многообразия, неприводимая компонента многообразия.

V. V. BENIASH-KRYVETS[1], *I. O. GOVORUSHKO*[2]

REPRESENTATION VARIETY OF BAUMSLAG-SOLITAR GROUPS IN THE CASE OF NOT COPRIME EXPONENTS

[1]*Belarusian State University, Minsk, Belarus, e-mail: benyash@bsu.by*
[2]*Belarusian State Pedagogikal University named after M. Tank, Minsk, Belarus, e-mail: govorushko88@gmail.com*

Representation varieties of Baumslag – Solitar groups $BS(p,q)$ are investigated in the case when p and q are not coprime. Irreducible components of these varieties are found, their dimensions are calculated and their rationality is proved.

Kewords: Baumslag – Solitar group, representation variety, dimension of a variety, irreducible component of a variety.

Введение. Пусть G – группа с образующими $g_1,\ldots,g_m$ и K – алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики. Тогда любому представлению $\rho: G \to GL_n(K)$ можно поставить в соответствие набор элементов $(\rho(g_1),\ldots,\rho(g_m)) \in GL_n(K)^m$. Очевидно, что этот набор удовлетворяет всем определяющим соотношениям группы G. Поэтому соответствие $\rho \mapsto (\rho(g_1),\ldots,\rho(g_m))$ задает биекцию между множеством $\mathrm{Hom}(G, GL_n(K))$ и K-точками некоторого аффинного K-многообразия $R_n(G) \subset GL_n(K)^m$, называемого многообразием n-мерных представлений группы G. Мы будем пользоваться стандартными обозначениями и результатами, изложенными в работе [1].

Группы Баумслага – Солитера $BS(p,q)$ имеют копредставление

$$BS(p,q) = \langle a,t \,|\, ta^p t^{-1} = a^q \rangle,$$

где p и q не равны нулю. Эти группы предложены Г. Баумслагом и Д. Солитером в [2] как примеры нехопфовых конечно представленных групп, т. е. групп, которые изоморфны своей собственной факторгруппе. Легко видеть, что $BS(p,q) \cong BS(-p,-q)$ и $BS(p,q) \cong BS(q,p)$. В дальнейшем мы будем рассматривать группы $BS(p,q)$ такие, что $p > |q| > 1$. В [3] получено описание многообразий представлений $R_n(BS(p,q))$ групп Баумслага – Солитера $BS(p,q)$ в случае, когда p и q – взаимно простые числа.

В предлагаемой работе мы исследуем многообразия представлений $R_n(BS(p,q))$ в случае, когда $(p,q) = d > 1$.

Введем следующие обозначения. Обозначим через $\Omega(p,q)$ следующее множество матриц:

$$\Omega(p,q)=\{A\in GL_n(K)\,\big|\,A^p \text{ и } A^q \text{ сопряжены}\}.$$

Положим $p_1=\dfrac{p}{d},\ q_1=\dfrac{q}{d}$. Пусть $A\in\Omega(p_1,q_1)$ – фиксированная матрица и пусть $B_0\in GL_n(K)$ такая матрица, что $B_0A^{p_1}B_0^{-1}=A^{q_1}$. Обозначим через $Z(A)$ централизатор матрицы A в $GL_n(K)$ и рассмотрим морфизм

$$f_A: Z(A)\times GL_n(K)\to GL_n(K)\times GL_n(K),\ (C,X)\mapsto(XAX^{-1},XB_0CX^{-1}). \tag{1}$$

Замыкание в топологии Зарисского образа $\operatorname{Im} f_A$ обозначим $W(A)$. В [2] доказано, что каждое многообразие $W(A)$ является неприводимой компонентой многообразия $R_n(BS(p_1,q_1))$ размерности n^2 и этими компонентами исчерпываются все неприводимые компоненты $R_n(BS(p_1,q_1))$.

Рассмотрим морфизм

$$h: R_n(BS(p,q))\to R_n(BS(p_1,q_1)),\ (A,B)\mapsto(A^d,B). \tag{2}$$

Л е м м а 1. *Морфизм h сюръективен.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $(A_1,B_1)\in R_n(BS(p_1,q_1))$, то существует матрица $A\in GL_n(K)$ такая, что $A^d=A_1$. Тогда

$$B_1A^pB_1^{-1}=B_1(A^d)^{p_1}B_1^{-1}=B_1A_1^{p_1}B_1^{-1}=A_1^{q_1}=(A^d)^{q_1}=A^q,$$

следовательно, $(A,B_1)\in R_n(BS(p,q))$ и $h(A,B_1)=(A_1,B_1)$. Лемма доказана.

Пусть $C_0\in\Omega(p,q)$ – фиксированная матрица, $A=C_0^d$ и $B_0\in GL_n(K)$ такая матрица, что $B_0A^{p_1}B_0^{-1}=A^{q_1}$. Рассмотрим отображение

$$g_{C_0}: Z(A)\times GL_n(K)\to GL_n(K)\times GL_n(K),\ (Z,X)\mapsto(XC_0X^{-1},XB_0ZX^{-1}). \tag{3}$$

Обозначим через $H(C_0)$ замыкание в топологии Зарисского образа $\operatorname{Im} g_{C_0}$.

Л е м м а 2. *$H(C_0)$ не зависит от выбора матрицы B_0 в определении морфизма g_{C_0} и $H(C_0)\subset R_n(BS(p,q))$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $B_1\in GL_n(K)$ – другая матрица, такая, что $B_1A^{p_1}B_1^{-1}=A^{q_1}$ и g'_{C_0} – соответствующий морфизм. Тогда $B_1=B_0Z_1$, где $Z_1\in Z(A^{p_1})$. По лемме 1 из [2] $Z(A^{p_1})=Z(A)$. Тогда произвольный элемент вида $(XC_0X^{-1},XB_1ZX^{-1})=(XC_0X^{-1},XB_0(Z_1Z)X^{-1})\in\operatorname{Im} g'_{C_0}$ содержится в $\operatorname{Im} g_{C_0}$. Аналогично доказывается противоположное включение $\operatorname{Im} g_{C_0}\subset\operatorname{Im} g'_{C_0}$. Значит, $\operatorname{Im} g_{C_0}=\operatorname{Im} g'_{C_0}$, что и требуется.

По построению $(C_0,B_0Z)\in R_n(BS(p,q))$, а значит, и все сопряженные представления (XC_0X^{-1},XB_0ZX^{-1}) лежат в $R_n(BS(p,q))$. Следовательно, $\operatorname{Im} g_{C_0}\subset R_n(BS(p,q))$. Поэтому замыкание $H(C_0)=\overline{\operatorname{Im} g_{C_0}}$ содержится в $R_n(BS(p,q))$. Лемма 2 доказана.

Справедлива

Т е о р е м а. *Каждое множество $H(C)$, где $C\in\Omega(p,q)$, является неприводимой компонентой многообразия представлений $R_n(BS(p,q))$ и этими множествами исчерпываются все неприводимые компоненты $R_n(BS(p,q))$. Размерность неприводимой компоненты $H(C)$ многообразия $R_n(BS(p,q))$ равна $n^2+\dim Z(C^d)-\dim Z(C)$.*

В дальнейшем через $Cl(B)=\{XBX^{-1}\mid X\in GL_n(K)\}$ будем обозначать класс сопряженности матрицы B.

Л е м м а 3. *$h^{-1}(W(A))\subset\bigcup\limits_{\{C\mid C^d\in\overline{Cl(A)}\}}H(C)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $(C,D)\in h^{-1}(W(A))$. Тогда $(C^d,D)\in W(A)$. Следовательно, $C^d\in\overline{Cl(A)}$ и $D=B_0Z$, где $Z\in Z(C^d)$ и B_0 такая матрица, что $B_0(C^d)^{p_1}B_0^{-1}=(C^d)^{q_1}$. Значит, $(C,D)=(C,B_0Z)\in\operatorname{Im} g_C\subset H(C)$. Лемма 3 доказана.

Л е м м а 4. $R_n(BS(p,q)) = \bigcup\limits_{C\in\Omega(p,q)} H(C)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу леммы 1 морфизм h сюръективен, поэтому объединение замкнутых множеств $h^{-1}(W(A))$ совпадает с $R_n(BS(p,q))$. По лемме 3 каждое из многообразий $h^{-1}(W(A))$ содержится в объединении замкнутых неприводимых множеств вида $H(C)$, где $C\in\Omega(p,q)$ и $C^d\in\overline{Cl(A)}$. Лемма 4 доказана.

Л е м м а 5. *Размерность многообразия $H(C)$ равна $n^2+\dim Z(C^d)-\dim Z(C)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Найдем слои морфизма g_C. Пусть $(A_1,B_1)=g_C(Z_1,X_1)\in \operatorname{Im} g_C$, где $Z_1\in Z(C^d)$. Тогда

$$X_1CX_1^{-1}=A_1,\ X_1B_0Z_1X_1^{-1}=B_1.$$

Тогда слой $g_C^{-1}(A_1,B_1)$ состоит из пар матриц $(Z_2,X_2)\in Z(C^d)\times GL_n(K)$ таких, что

$$X_2CX_2^{-1}=A_1=X_1CX_1^{-1},\qquad X_2B_0Z_2X_2^{-1}=B_1=X_1B_0Z_1X_1^{-1}. \tag{4}$$

Из первого равенства в (4) получаем $X_1^{-1}X_2=D\in Z(C)\subset Z(C^d)$, т. е. $X_2=X_1D$. Теперь из второго равенства в (4) имеем $Z_2=B_0^{-1}D^{-1}B_0Z_1D$. Заметим, что если D – произвольная матрица из $Z(C)$, то пара матриц (Z_2,X_2), где $X_2=X_1D$, $Z_2=B_0^{-1}D^{-1}B_0Z_1D$, лежит в слое $g_C^{-1}(A_1,B_1)$. Действительно, равенство $X_2CX_2^{-1}=A_1$ очевидно из построения. Проверим, что справедливо равенство $(B_0Z_2)A_1^p(B_0Z_2)^{-1}=A_1^q$. Подставив вместо Z_2 его значение и учитывая, что $B_0C^pB_0^{-1}=C^q$, получим

$$(B_0Z_2)C^p(B_0Z_2)^{-1}=(D^{-1}B_0Z_1D)(C^d)^{p_1}(D^{-1}B_0Z_1D)^{-1}=D^{-1}B_0(C^d)^{p_1}B_0^{-1}D=D^{-1}C^qD=C^q. \tag{5}$$

Из (5) следует, что $Z_2\in Z(C^p)$. По лемме 1 из [2] $Z(C^p)=Z(C^d)$, следовательно, $Z_2\in Z(C^d)$. Таким образом, имеем биективный морфизм

$$\alpha: Z(C)\to g_C^{-1}(A_1,B_1),\quad D\mapsto (B_0^{-1}D^{-1}B_0Z_1D, X_1D).$$

Значит, $\dim g_C^{-1}(A_1,B_1)=\dim Z(C)$, т. е. все слои морфизма g_C имеют одинаковую размерность, равную $\dim Z(C)$. По теореме о размерности слоев морфизма [4, с. 97] получаем

$$\dim H(C)=\dim(Z(C^d)\times GL_n(K))-\dim Z(C)=n^2+\dim Z(C^d)-\dim Z(C).$$

Лемма 5 доказана.

Л е м м а 6. *Пусть $C\in\Omega(p,q)$ и $A=C^d$. Тогда $\overline{h(H(C))}=W(A)$, где морфизм h определен в* (2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Образ морфизма f_A, определенного в (1), состоит из элементов вида

$$(XAX^{-1}, XB_0ZX^{-1})=(XC^dX^{-1}, XB_0ZX^{-1}), \tag{6}$$

где $Z\in Z(A)=Z(C^d)$. Образ морфизма g_C, определенного в (3), состоит из элементов вида

$$(XCX^{-1}, XB_0ZX^{-1}), \tag{7}$$

где $Z\in Z(A)=Z(C^d)$. Из (7) следует, что $h(\operatorname{Im} g_C)$ состоит из элементов вида $(XC^dX^{-1}, XB_0ZX^{-1})$. Тогда из (6) получаем $h(\operatorname{Im} g_C)=\operatorname{Im} f_A$. Переходя к замыканиям, получаем требуемое равенство $\overline{h(H(C))}=W(A)$. Лемма 6 доказана.

Л е м м а 7. *Если $C_0,C_1\in\Omega(p,q)$ и матрицы C_0 и C_1 подобны, то $H(C_0)=H(C_1)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $C_1=YC_0Y^{-1}$ и $B_0\in GL_n(K)$ такая матрица, что $B_0(C_0^d)^{p_1}B_0^{-1}=(C_0^d)^{q_1}$. Тогда $Z(C_1^d)=YZ(C_0^d)Y^{-1}$ и матрица $B_1=YB_0Y^{-1}$ обладает свойством $B_1(C_1^d)^{p_1}B_1^{-1}=(C_1^d)^{q_1}$. Рассмотрим произвольный элемент $(XC_1X^{-1}, XB_1TX^{-1})\in\operatorname{Im} g_{C_1}$, где $T\in Z(C_1^d)$. Так как

$$(XC_1X^{-1}, XB_1TX^{-1})=((XY)C_0(XY)^{-1}, (XY)(B_0Y^{-1}TY)(XY)^{-1})$$

и элемент $Y^{-1}TY \in Z(C_0^d)$, то $(XC_1X^{-1}, XB_1TX^{-1}) \in \operatorname{Im} g_{C_0}$. Значит, $\operatorname{Im} g_{C_1} \subset \operatorname{Im} g_{C_0}$, откуда $H(C_1) \subset H(C_0)$. Противоположное включение доказывается аналогично. Лемма 7 доказана.

Л е м м а 8. *Если $(A, B) \in H(C)$, то спектры матриц A и C равны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\sigma_i(X)$ обозначает i-й коэффициент характеристического полинома матрицы X и пусть $\lambda_i = \sigma_i(C)$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда для любой точки $(A_1, B_1) \in \operatorname{Im} g_C$ мы имеем $\sigma_i(A_1) - \lambda_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$, поскольку матрицы C и A_1 подобны. Это означает, что регулярная на $H(C)$ функция $\sigma_i(X) - \lambda_i$ обращается в нуль на $\operatorname{Im} g_C$. Следовательно, $\sigma_i(X) - \lambda_i$ обращается в нуль на $H(C)$. Поэтому $\sigma_i(A) - \lambda_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Таким образом, характеристические полиномы у C и A совпадают, т. е. C и A имеют одинаковые спектры. Лемма 8 доказана.

Л е м м а 9. *Если $C_0, C_1 \in \Omega(p, q)$ и матрицы C_0 и C_1 имеют разные спектры, то $H(C_0) \cap H(C_1) = \varnothing$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о непосредственно следует из леммы 8.

Л е м м а 10. *Пусть $A, B \in GL_n(K)$ и $A \in \overline{Cl(B)}$. Тогда спектры матриц A и B равны и для любого $\lambda \in K^*$ и любого натурального k справедливо неравенство* $\operatorname{rank}(A - \lambda E)^k \le \operatorname{rank}(B - \lambda E)^k$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Равенство спектров A и B фактически доказано при доказательстве леммы 8. Докажем неравенство для рангов матриц. Установим сначала, что если $A, B \in M_n(K)$ – произвольные (не обязательно невырожденные) матрицы порядка n и $A \in \overline{Cl(B)}$, то $\operatorname{rank} A \le \operatorname{rank} B$. Для матрицы $X = (x_{ij})$ обозначим через $M_t(X)$ некоторый фиксированный минор порядка t. Допустим, что $\operatorname{rank} B = s$. Тогда все миноры порядка $s+1$ матрицы B равны нулю. В частности, регулярная функция $M_{s+1}(X)$ тождественно равна нулю на $Cl(B)$, а значит, и на замыкании $\overline{Cl(B)}$. Так как $A \in \overline{Cl(B)}$, то $M_{s+1}(A) = 0$, т. е. все миноры порядка $s+1$ матрицы A равны нулю. Значит, $\operatorname{rank} A \le s = \operatorname{rank} B$.

Пусть теперь $\lambda \in K^*$. Тогда $A - \lambda E \in \overline{Cl(B - \lambda E)}$ и для любого натурального k $(A - \lambda E)^k \in \overline{Cl(B - \lambda E)^k}$. В силу доказанного выше справедливо неравенство $\operatorname{rank}(A - \lambda E)^k \le \operatorname{rank}(B - \lambda E)^k$. Лемма 10 доказана.

Л е м м а 11. *Если $C_0, C_1 \in \Omega(p, q)$, матрицы C_0 и C_1 имеют равные спектры и матрицы C_0^d и C_1^d не подобны, то многообразия $H(C_0)$ и $H(C_1)$ не содержатся друг в друге.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим противное. Пусть $H(C_0) \subset H(C_1)$. Положим $A = C_0^d$, $B = C_1^d$. По условию A и B не подобны. Значит, многообразия $W(A)$ и $W(B)$ не содержатся друг в друге. С другой стороны, по лемме 6 имеем $\overline{h(H(C_1))} = W(B) \supset \overline{h(H(C_0))} = W(A)$ – противоречие. Лемма 11 доказана.

Следующая лемма завершает доказательство теоремы.

Л е м м а 12. *Если $C_0, C_1 \in \Omega(p, q)$, матрицы C_0 и C_1 имеют равные спектры и матрицы C_0^d и C_1^d подобны, то многообразия $H(C_0)$ и $H(C_1)$ не содержатся друг в друге.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Без ограничения общности можно считать, что $C_0^d = C_1^d = A$, где $A \in \Omega(p_1, q_1)$. Допустим, что $H(C_0) \subset H(C_1)$. Тогда $C_0 \in \overline{Cl(C_1)}$. Пусть $J_{n_1}(\lambda), \ldots, J_{n_k}(\lambda)$ – все блоки Жордана матрицы A с собственным значением λ и $n_1 \ge n_2 \ge \ldots \ge n_k$. Тогда C_0 и C_1 содержат блоки Жордана $J_{n_1}(\lambda_1), \ldots, J_{n_k}(\lambda_k)$, где $\lambda_i^d = \lambda$, $i = 1, \ldots, k$. Так как C_0 и C_1 не подобны, то найдется собственное значение λ_i, такое, что C_0 содержит несколько блоков Жордана с собственным значением λ_i, скажем, $J_{m_1}(\lambda_i), \ldots, J_{m_s}(\lambda_i)$, $m_1 \ge m_2 \ge \ldots \ge m_s$, а C_1 содержит блоки Жордана с собственным значением λ_i вида $J_{u_1}(\lambda_i), \ldots, J_{u_a}(\lambda_i)$, $u_1 \ge u_2 \ge \ldots \ge u_a$. При этом найдется индекс j такой, что $m_1 = u_1, \ldots, m_{j-1} = u_{j-1}$, а $m_j > u_j$. Но тогда мы получим, что

$$\operatorname{rank}(C_0 - \lambda_i)^{m_j - 1} > \operatorname{rank}(C_1 - \lambda_i)^{m_j - 1},$$

а это противоречит лемме 10. Лемма 12 доказана.

Из лемм 7, 9, 11 и 12 получаем

С л е д с т в и е. *Число неприводимых компонент многообразия* $R_n(BS(p,q))$ *равно числу классов сопряженных матриц в множестве* $\Omega(p,q)$.

Список использованной литературы

1. *Lubotzky, A.* Varieties of representations of finitely generated groups / A. Lubotzky, A. Magid // Memoirs AMS. – 1985. – Vol. 58, N 336. – P. 1–116.
2. *Baumslag, G.* Some two-generator one-relator non-hopfian groups / G. Baumslag, D. Solitar // Bull. AMS. – 1962. – Vol. 68, N 3. – P. 199–201.
3. *Беняш-Кривец, В. В.* О многообразиях представлений групп Баумслага – Солитера / В. В. Беняш-Кривец, И. О. Говорушко // Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. – 2014. –№ 2. –С. 43–45.
4. *Шафаревич, И. Р.* Основы алгебраической геометрии: в 2 т. / И. Р. Шафаревич. – М.: Наука, 1988. – Т. 1.

Поступила в редакцию 25.11.2015