ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 512.622.42
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2024-60-4-280-294

Поступила в редакцию 30.07.2024
Received 30.07.2024

М. М. Чернявский

Витебский государственный университет имени П. М. Машерова, Витебск, Республика Беларусь

АНАЛИЗ КОРНЕЙ ТРИНОМИАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ

Аннотация. Разработан простой и единообразный метод, позволяющий устанавливать число и локализацию действительных решений трехчленных (триномиальных) алгебраических уравнений произвольной степени с действительными коэффициентами. Метод основан на том, что при помощи определенных подстановок трехчленное уравнение приводится к уравнению с одним параметром, представимым в виде явной функции от коэффициентов первоначального уравнения, и свойства решений исходного уравнения зависят только от значений этого параметра.

Ключевые слова: алгебраические уравнения, трехчленные уравнения, локализация корней, действительный корень

Для цитирования. Чернявский, М. М. Анализ корней триномиальных полиномов / М. М. Чернявский // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2024. – Т. 60, № 4. – С. 280–294. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2024-60-4-280-294

Mikhail M. Chernyavsky

Vitebsk State University named after P. M. Masherov, Vitebsk, Republic of Belarus

ANALYSIS OF ROOTS OF TRINOMIAL POLYNOMIALS

Abstract. In the article we develop a simple and uniform method that allows one to calculate the number and localization of real solutions of three-term (trinomial) algebraic equations of arbitrary degree with real coefficients. The method is based on the fact that using certain substitutions, a three-term equation is reduced to an auxiliary equation with one parameter, represented as an explicit function of the coefficients of the initial equation, and the properties of the solutions of the initial equation depend only on the values of this parameter.

Keywords: algebraic equations, trinomial equations, root localization, real root

For citation. Chernyavsky M. M. Analysis of roots of trinomial polynomials. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series,* 2024, vol. 60, no. 4, pp. 280–294 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2024-60-4-280-294

Введение. Основным объектом исследования в данной работе являются триномиальные (трехчленные) алгебраические уравнения, т. е. уравнения вида

$$x^n + px^m + q = 0 \quad (n > m > 0,\ p \neq 0,\ q \neq 0).$$

Это очень известный класс уравнений. Специальные их случаи – квадратные и биквадратные уравнения – входят в школьную программу. Напомним также, что любое уравнение пятой степени может быть приведено к триномиальному виду

$$x^5 + px + q = 0 \quad (p \neq 0,\ q \neq 0),$$

и, значит, это класс уравнений не разрешимых в радикалах. Последнее наблюдение указывает на богатство и нетривиальность класса триномиальных уравнений.

Такие уравнения являются популярным объектом исследований. Только с начала XXI в. опубликованы десятки статей, посвященных разным аспектам их анализа. Значительная часть работ посвящена чисто алгебраическим вопросам, возникающим в связи с такими уравнениями: группам Галуа, вычислению и исследованию дискриминантов, неприводимости триномиальных полиномов, анализу разрешимости в различных полях, выражению корней уравнений в символьном виде через коэффициенты (= формулы типа формул Виета) и др. Большое число исследований также посвящено описанию локализации комплексных корней и их норм для конкретных типов триномиальных уравнений, разложениям корней в ряды и т. п. (см., напр., [1–15]).

Настоящая работа посвящена другому направлению анализа триномиальных уравнений и, в силу естественных ограничений объема статьи, мы не приводим здесь полного списка статей по вышеупомянутым темам.

Трехчленные алгебраические уравнения с произвольными действительными коэффициентами p и q возникают во многих приложениях. Например, при анализе устойчивости движения самолета; в задаче о равновесии тонкостенной панели, обтекаемой потоком газа; при определении равновесной температуры летательного аппарата [16]; в задачах финансовой математики [17, 18]. И в этих задачах важным является определение числа действительных корней трехчленного уравнения и их локализация по коэффициентам p и q. Так, в [17] и [18] для некоторых конкретных типов триномиальных уравнений такой анализ проведен.

Среди крупных исследований последних двух десятилетий, посвященных анализу и методам решения алгебраических уравнений, необходимо выделить монографию Г. П. Кутищева [19]. В ней в главе 8 представлены известные вплоть до настоящего момента методы поиска решений трехчленных алгебраических уравнений с действительными коэффициентами. В частности, предложена общая схема определения числа и локализации действительных корней таких уравнений на основе анализа поведения некоторых *определяющих функций* (т. е. рациональных функций, корни которых связаны с корнями исходного алгебраического уравнения), зависящих от чисел m и n и коэффициентов исходного уравнения [19, с. 160–161]. На этой базе получены явно выписанные критерии для некоторых частных случаев исследуемых уравнений. Неполнота проведенного анализа (не исследованы случаи появления кратных корней у таких уравнений, что является для них принципиальной ситуацией (см. раздел 3 данной статьи)) возможно связана с громоздкостью используемых конструкций (определяющие функции нетривиально зависят от большого числа параметров), что усложняет их исследование.

В настоящей статье разработан простой и единообразный метод, позволяющий устанавливать число и локализацию действительных решений трехчленных (триномиальных) алгебраических уравнений произвольной степени с действительными коэффициентами. Метод основан на том, что при помощи определенных подстановок трехчленное уравнение приводится к уравнению с одним параметром, представимым в виде явной функции от коэффициентов первоначального уравнения, и свойства решений исходного уравнения зависят только от значений этого параметра.

На этой основе проведен полный анализ таких уравнений в данном направлении. Результаты статьи являются естественным развитием и уточнением результатов работы [20].

1. Анализ корней триномиального уравнения. Проанализируем расположение и характер (кратности) вещественных корней произвольного трехчленного (триномиального) алгебраического уравнения с действительными коэффициентами

$$x^n + px^m + q = 0 \quad (n > m > 0,\, p \neq 0,\, q \neq 0). \tag{1}$$

В процессе анализа этих уравнений будем использовать следующую классификацию [19, с. 189]. В зависимости от четности степеней n и m неизвестного трехчленные алгебраические уравнения подразделяются на 4 типа: нечетно-нечетные, четно-нечетные, нечетно-четные и четно-четные уравнения соответственно.

Нечетно-нечетные уравнения.

Т е о р е м а 1. *Пусть в уравнении*

$$x^n + px^m + q = 0 \quad (n > m > 0,\; p \neq 0,\; q \neq 0) \tag{2}$$

m, n – нечетные числа.

Необходимым и достаточным условием существования трех действительных различных корней уравнения (2) *является неравенство*

$$-q\left(\frac{p}{q}\right)^{n/m} > \frac{n-m}{m}\left(\frac{n}{n-m}\right)^{n/m}.$$

При этом, если $p < 0$, $q < 0$, то один из этих корней положителен, а два – отрицательны; а если $p < 0$, $q > 0$, то один из этих корней отрицателен, а два – положительны.

Необходимым и достаточным условием существования единственного действительного корня является неравенство

$$-q\left(\frac{p}{q}\right)^{n/m} < \frac{n-m}{m}\left(\frac{n}{n-m}\right)^{n/m}.$$

При выполнении равенства

$$-q\left(\frac{p}{q}\right)^{n/m} = \frac{n-m}{m}\left(\frac{n}{n-m}\right)^{n/m}$$

существует один кратный корень x_* кратности два, для которого выполняются равенства

$$x_*^{n-m} = -\frac{pm}{n}, \qquad x_*^{n} = \frac{qm}{n-m}, \tag{3}$$

т. е (так как n – нечетное число) $x_* = \left(\dfrac{qm}{n-m}\right)^{1/n}$ *и один простой корень.*

Во всех случаях корни задаются решениями определяющего уравнения

$$\frac{t^n}{t^m+1} = -q\left(\frac{p}{q}\right)^{n/m}$$

и подстановкой

$$x = t(q/p)^{1/m} \quad (t \neq 0).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. После подстановки

$$x = t(q/p)^{1/m} \quad (t \neq 0) \tag{4}$$

в уравнение (2) получаем равенство

$$\frac{t^n}{t^m+1} = -q\left(\frac{p}{q}\right)^{n/m}. \tag{5}$$

Функцию $f(t) := \dfrac{t^n}{t^m+1}$ принято называть *определяющей функцией*, а уравнение (5) – *определяющим уравнением*. Так как

$$f'(t) = \frac{t^{n-1}[(n-m)t^m + n]}{(t^m+1)^2}$$

и $(n-1)$ – четное число, то f возрастает при $t > -1$ и имеет локальный минимум при

$$t_* = \left(\frac{n}{m-n}\right)^{1/m} < -1. \tag{6}$$

При этом справа и слева от t_* функция f строго монотонна.

Схематично графики всех определяющих функций f при произвольных нечетных m и n будут выглядеть похожими друг на друга. Например, на рис. 1 изображен график определяющей функции $f(t) = \dfrac{t^3}{t+1}$.

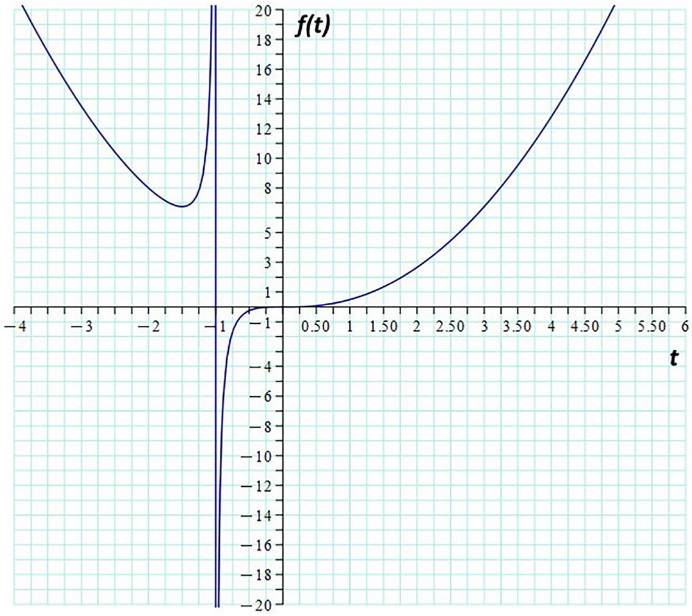

Рис. 1. График функции $f(t)=\dfrac{t^3}{t+1}$

Fig. 1. Graph of function $f(t)=\dfrac{t^3}{t+1}$

Непосредственным вычислением из (5) и (6) получаем, что

$$f(t_*)=\frac{t_*^n}{t_*^m+1}=\frac{m-n}{m}\left(\frac{n}{m-n}\right)^{n/m}=\frac{m-n}{m}t_*^m. \tag{7}$$

Проверим равенства (3). Согласно (4) имеем

$$x_*^{n-m}=t_*^{n-m}(q/p)^{\frac{n-m}{m}}. \tag{8}$$

Кроме того, из (6), (5) и (7) вытекает, что

$$t_*^{n-m}=\left(\frac{n}{m-n}\right)^{\frac{n-m}{m}}=\left(\frac{n}{m-n}\right)^{n/m}\cdot\frac{m-n}{m}\cdot\frac{m}{n}=-q\left(\frac{p}{q}\right)^{n/m}\cdot\frac{m}{n}. \tag{9}$$

Отсюда и из (8) получаем

$$x_*^{n-m}=-q\left(\frac{p}{q}\right)^{n/m}\cdot\frac{m}{n}\cdot\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{n-m}{m}}=-q\left(\frac{q}{p}\right)^{-n/m}\cdot\frac{m}{n}\cdot\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{n}{m}}\cdot\frac{p}{q}=-\frac{pm}{n}, \tag{10}$$

и первое равенство в (3) установлено.

Проверим второе равенство в (3). Из (5) и (7) заключаем, что

$$-q\left(\frac{p}{q}\right)^{n/m}=t_*^n\cdot\frac{m-n}{m}.$$

Отсюда и из (4) получаем

$$\frac{qm}{n-m}=t_*^n\cdot\left(\frac{q}{p}\right)^{n/m}=x_*^n,$$

т. е. выполняется второе равенство в (3). Приведенные наблюдения доказывают теорему 1.

Четно-нечетные уравнения.

Т е о р е м а 2. *Пусть в уравнении*

$$x^n + px^m + q = 0 \quad (n > m > 0,\ p \neq 0,\ q \neq 0) \tag{11}$$

n – четное число, а m – нечетное.

При выполнении одного из неравенств

$$-q\left(\frac{p}{q}\right)^{n/m} > 0, \quad -q\left(\frac{p}{q}\right)^{n/m} < \frac{m-n}{m}\left(\frac{n}{m-n}\right)^{n/m}$$

уравнение (11) *имеет два действительных решения. Если*

$$0 > -q\left(\frac{p}{q}\right)^{n/m} > \frac{m-n}{m}\left(\frac{n}{m-n}\right)^{n/m},$$

то уравнение (11) *действительных решений не имеет. Если выполнено равенство*

$$-q\left(\frac{p}{q}\right)^{n/m} = \frac{m-n}{m}\left(\frac{n}{m-n}\right)^{n/m},$$

то уравнение (11) *имеет корень* x_* *кратности два, для которого выполняются равенства*

$$x_*^{n-m} = -\frac{pm}{n}, \qquad x_*^n = \frac{qm}{n-m}, \tag{12}$$

т. е., так как $(n-m)$ *– нечетное число,* $x_* = \left(-\dfrac{pm}{n}\right)^{1/(n-m)}$.

Во всех случаях корни задаются решениями определяющего уравнения

$$\frac{t^n}{t^m+1} = -q\left(\frac{p}{q}\right)^{n/m}$$

и подстановкой

$$x = t(q/p)^{1/m} \quad (t \neq 0).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как и в доказательстве теоремы 1, после подстановки $x = t(q/p)^{1/m}$ $(t \neq 0)$ в уравнение (11) получаем равенство

$$f(t) := \frac{t^n}{t^m+1} = -q\left(\frac{p}{q}\right)^{n/m}.$$

Так как

$$f'(t) = \frac{t^{n-1}[(n-m)t^m + n]}{(t^m+1)^2}$$

и $(n-1)$ – нечетное число, то для этой определяющей функции f точка $t = 0$ является локальным минимумом $f(0) = 0$ (эта точка, по условиям рассматриваемой задачи, нас не интересует), и f строго монотонна справа и слева от 0; а точка

$$t_* = \left(\frac{n}{m-n}\right)^{1/m} < -1$$

является локальным максимумом, и f строго монотонна справа и слева от t_*.

В точке t_* имеет место равенство

$$\frac{t_*^n}{t_*^m+1} = \frac{m-n}{m}\left(\frac{n}{m-n}\right)^{n/m} = \frac{m-n}{m}t_*^n < 0.$$

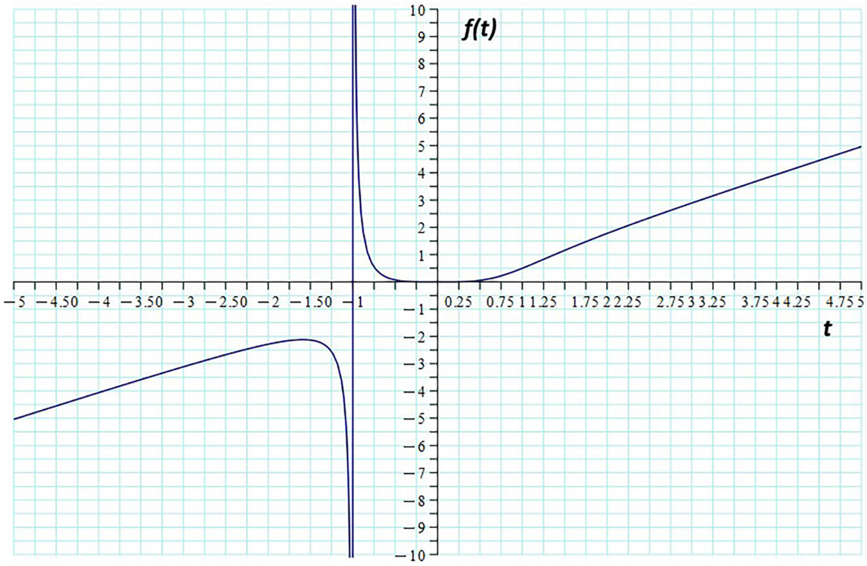

Рис. 2. График функции $f(t)=\dfrac{t^4}{t^3+1}$

Fig. 2. Graph of function $f(t)=\dfrac{t^4}{t^3+1}$

Равенства (12) проверяются теми же рассуждениями, которыми проверяются равенства (3) в доказательстве теоремы 1. Приведенные наблюдения доказывают теорему 2. Для наглядности на рис. 2 изображен график определяющей функции $f(t)=\dfrac{t^4}{t^3+1}$.

Нечетно-четные уравнения. Рассмотрим нечетно-четные уравнения (1) (n – нечетное, m – четное). Здесь возникает необходимость проанализировать возможные ситуации в зависимости от знаков коэффициентов p и q.

Т е о р е м а 3. *Пусть в уравнении*

$$x^n+px^m+q=0 \quad (n>m>0,\ p\neq 0,\ q\neq 0) \tag{13}$$

n – нечетное число, а m – четное число, и коэффициенты p и q одного знака. Тогда уравнение (13) *имеет единственный действительный корень. Этот корень отрицателен при положительных значениях коэффициентов p, q и положителен при отрицательных p, q.*

Во всех случаях корни задаются решениями определяющего уравнения

$$\frac{t^n}{t^m+1}=-q\left(\frac{p}{q}\right)^{n/m}$$

и подстановкой

$$x=t(q/p)^{1/m} \quad (t\neq 0).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $p>0$, $q>0$. Тогда подстановка $x=t(q/p)^{1/m}$ $(t\neq 0)$ приводит уравнение (13) к равенству

$$t^n\left(\frac{q}{p}\right)^{n/m}+pt^m\frac{q}{p}+q=0 \Leftrightarrow t^n\left(\frac{q}{p}\right)^{n/m}+q(t^m+1)=0.$$

Следовательно, окончательно имеем

$$f(t):=\frac{t^n}{t^m+1}=-q\left(\frac{p}{q}\right)^{n/m}. \tag{14}$$

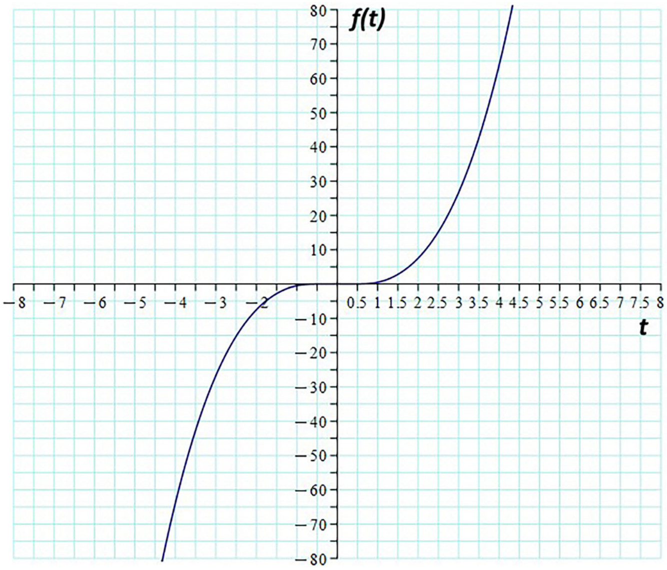

Рис. 3. График функции $f(t) = \dfrac{t^7}{t^4+1}$

Fig. 3. Graph of function $f(t) = \dfrac{t^7}{t^4+1}$

К точно такому же выражению приходим, полагая $p < 0$, $q < 0$. Так как

$$f'(t) = \frac{t^{n-1}[(n-m)t^m + n]}{(t^m+1)^2}$$

и $(n - 1)$, m – четные числа, то f – строго монотонно возрастающая функция и $f(t) \overset{t\to\pm\infty}{\to} \pm\infty$.

В качестве примера, иллюстрирующего рассматриваемую ситуацию, приведем график определяющей функции $f(t) = \dfrac{t^7}{t^4+1}$ (рис. 3).

Т е о р е м а 4. *Пусть в уравнении*

$$x^n + px^m + q = 0 \quad (n > m > 0,\ p \neq 0,\ q \neq 0) \tag{15}$$

n – нечетное число, а m – четное число, и коэффициенты p и q имеют разные знаки.

При выполнении одного из неравенств

$$q\left(-\frac{p}{q}\right)^{n/m} > \frac{n-m}{m}\left(\frac{n}{n-m}\right)^{n/m}, \quad q\left(-\frac{p}{q}\right)^{n/m} < -\frac{n-m}{m}\left(\frac{n}{n-m}\right)^{n/m}$$

уравнение (15) *имеет три различных действительных решения.*

При выполнении двойного неравенства

$$-\frac{n-m}{m}\left(\frac{n}{n-m}\right)^{n/m} < q\left(-\frac{p}{q}\right)^{n/m} < \frac{n-m}{m}\left(\frac{n}{n-m}\right)^{n/m}$$

уравнение (15) *имеет единственный действительный корень.*

Если имеет место одно из равенств

$$q\left(-\frac{p}{q}\right)^{n/m} = \frac{n-m}{m}\left(\frac{n}{n-m}\right)^{n/m}, \quad q\left(-\frac{p}{q}\right)^{n/m} = -\frac{n-m}{m}\left(\frac{n}{n-m}\right)^{n/m},$$

то уравнение (15) *имеет двукратный действительный корень* x_*, *для которого выполняются равенства*

$$x_*^{n-m} = -\frac{pm}{n}, \quad x_*^n = \frac{qm}{n-m}, \tag{16}$$

т. е., так как $(n - m)$ *и* n *– нечетные числа,*

$$x_* = \left(-\frac{pm}{n}\right)^{1/(n-m)} = \left(\frac{qm}{n-m}\right)^{1/n},$$

и простой действительный корень.

Во всех случаях корни задаются решениями определяющего уравнения

$$\frac{t^n}{t^m - 1} = q\left(-\frac{p}{q}\right)^{n/m}$$

и подстановкой

$$x = t(-q/p)^{1/m} \quad (t \neq 0).$$

Доказательство. Пусть $p > 0$, $q < 0$. После подстановки

$$x = t(-q/p)^{1/m} = t(-q)^{1/m} / p^{1/m} \quad (t \neq 0)$$

в уравнение (15) получаем

$$t^n \frac{(-q)^{n/m}}{p^{n/m}} + pt^m \frac{(-q)^{m/m}}{p^{m/m}} + q = 0 \Leftrightarrow t^n \frac{(-q)^{n/m}}{p^{n/m}} - q(t^m - 1) = 0.$$

То есть

$$\frac{t^n}{t^m - 1} = q\left(-\frac{p}{q}\right)^{n/m} < 0.$$

Значит, при $p > 0$, $q < 0$ нас интересуют только отрицательные значения определяющей функции $f(t) := \dfrac{t^n}{t^m - 1}$.

Если $p < 0$, $q > 0$, то подстановка

$$x = t(-q/p)^{1/m} = tq^{1/m} / (-p)^{1/m} \quad (t \neq 0)$$

в уравнение (15) приводит к соотношениям

$$t^n \frac{q^{n/m}}{(-p)^{n/m}} + pt^m \frac{q^{m/m}}{(-p)^{m/m}} + q = 0 \Leftrightarrow t^n \frac{q^{n/m}}{(-p)^{n/m}} - q(t^m - 1) = 0.$$

То есть

$$\frac{t^n}{t^m - 1} = q\left(-\frac{p}{q}\right)^{n/m} > 0.$$

Значит, при $p < 0$, $q > 0$ нас интересуют только положительные значения определяющей функции $f(t) := \dfrac{t^n}{t^m - 1}$.

Во всех случаях определяющее уравнение имеет вид

$$f(t) := \frac{t^n}{t^m - 1} = q\left(-\frac{p}{q}\right)^{n/m} \tag{17}$$

и используется подстановка

$$x = t(-q/p)^{1/m} \quad (t \neq 0). \tag{18}$$

Так как n – нечетное число, а m – четное, то функция f нечетная ($f(t) = –f(–t)$).

Так как

$$f'(t) = \frac{t^{n-1}[(n-m)t^m - n]}{(t^m - 1)^2}$$

и $(n – 1)$ и m – четные числа, то

$$t_* = \left(\frac{n}{n-m}\right)^{1/m} \tag{19}$$

является точкой локального минимума, а

$$t_{**} = -\left(\frac{n}{n-m}\right)^{1/m} = -t_* \tag{20}$$

– точкой локального максимума. При этом в точке локального минимума выполняется равенство

$$f(t_*) = \frac{t_*^n}{t_*^m - 1} = \frac{n-m}{m}\left(\frac{n}{n-m}\right)^{n/m} = \frac{n-m}{m} t_*^n, \tag{21}$$

а в точке локального максимума – равенство

$$f(t_{**}) = \frac{t_{**}^n}{t_{**}^m - 1} = -\frac{n-m}{m}\left(\frac{n}{n-m}\right)^{n/m} = \frac{n-m}{m} t_{**}^n. \tag{22}$$

Здесь мы учли, что n – нечетное число.

Справа и слева от точек t_* и t_{**} f строго монотонна, и f строго монотонно убывает на интервале $(−1, 1)$.

Проиллюстрируем рассматриваемую ситуацию на примере определяющей функции $f(t) = \dfrac{t^7}{t^4 - 1}$ (рис. 4).

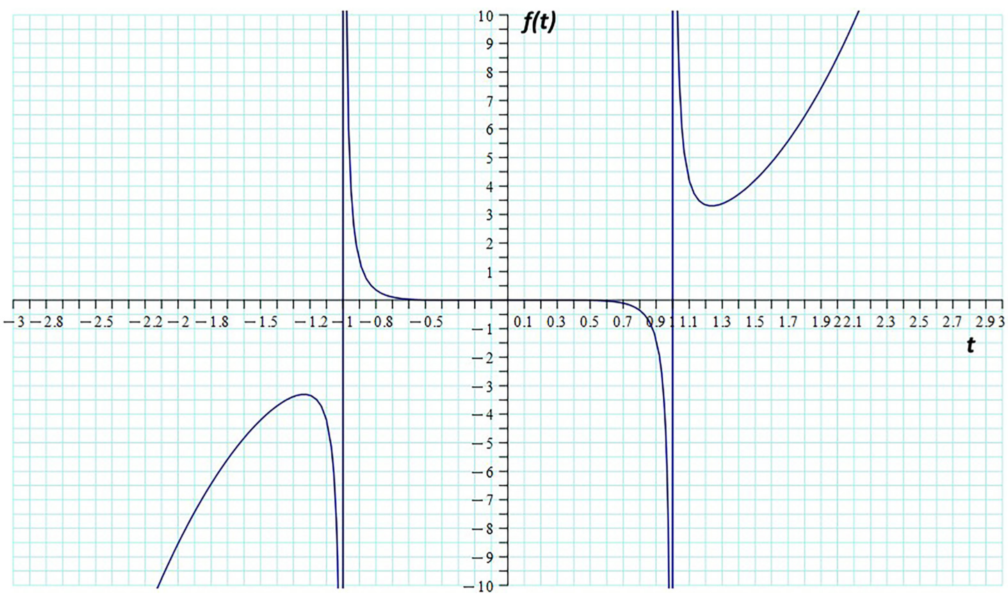

Рис. 4. График функции $f(t) = \dfrac{t^7}{t^4 - 1}$

Fig. 4. Graph of function $f(t) = \dfrac{t^7}{t^4 - 1}$

Проверим равенства (16). Используем сначала точку t_*. Из (17) и (21) следует, что

$$q\left(-\frac{p}{q}\right)^{n/m}=\frac{n-m}{m}t_*^n. \tag{23}$$

Отсюда, учитывая, что согласно (18) $x_*=t_*(-q/p)^{1/m}$, получаем

$$\frac{qm}{n-m}=t_*^n(-q/p)^{n/m}=x_*^n, \tag{24}$$

что устанавливает второе из равенств (16).

С другой стороны, используя (19), (21) и (17), получаем

$$t_*^{n-m}=\left(\frac{n}{n-m}\right)^{\frac{n-m}{m}}=\left(\frac{n}{n-m}\right)^{n/m}\cdot\frac{n-m}{m}\cdot\frac{m}{n}=q\left(-\frac{p}{q}\right)^{n/m}\cdot\frac{m}{n}.$$

Отсюда с учетом (18) следует, что

$$x_*^{n-m}=t_*^{n-m}\left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{n-m}{m}}=q\left(-\frac{p}{q}\right)^{n/m}\cdot\frac{m}{n}\cdot\left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{n-m}{m}}=-\frac{pm}{n},$$

что устанавливает первое из равенств (16).

Если мы используем точку t_{**} и положим, учитывая (18),

$$x_*:=t_{**}(-q/p)^{1/m},$$

то, действуя, как и выше (см. (23), (24)), из (17) и (22) получаем второе из равенств (16). Кроме того, используя (20), (22) и (17), аналогично вышеприведенным выкладкам имеем

$$t_{**}^{n-m}=q\left(-\frac{p}{q}\right)^{n/m}\cdot\frac{m}{n},\qquad x_*^{n-m}=t_{**}^{n-m}\left(-\frac{q}{p}\right)^{\frac{n-m}{m}}=-\frac{pm}{n},$$

что устанавливает первое из равенств (16). Приведенные наблюдения доказывают теорему 4.

Четно-четные уравнения. Пусть в уравнении

$$x^n+px^m+q=0\quad(n>m>0,\ p\neq 0,\ q\neq 0) \tag{25}$$

n и m – четные числа. Очевидно, что при $p>0$, $q>0$ это уравнение действительных корней не имеет.

Если $p<0$, $q<0$, то подстановка $x=t(q/p)^{1/m}$ $(t\neq 0)$ приводит уравнение (25) к равенству

$$f(t):=\frac{t^n}{t^m+1}=-q\left(\frac{p}{q}\right)^{n/m}>0,$$

которое влечет существование двух действительных решений. Более сложная ситуация возникает, когда p и q имеют разные знаки.

Теорема 5. *Пусть в уравнении* (25) *n и m – четные числа, и p и q имеют разные знаки. Тогда при выполнении неравенства*

$$q\left(-\frac{p}{q}\right)^{n/m}>\frac{n-m}{m}\left(\frac{n}{n-m}\right)^{n/m}$$

уравнение (25) *имеет четыре действительных решения, два из которых отрицательны, а два – положительны.*

При условии

$$0<q\left(-\frac{p}{q}\right)^{n/m}<\frac{n-m}{m}\left(\frac{n}{n-m}\right)^{n/m}$$

уравнение (25) *действительных корней не имеет.*

Если

$$q\left(-\frac{p}{q}\right)^{n/m} < 0,$$

то уравнение (25) *имеет два действительных корня.*

Если имеет место равенство

$$q\left(-\frac{p}{q}\right)^{n/m} = \frac{n-m}{m}\left(\frac{n}{n-m}\right)^{n/m}$$

(*заметим, что в этом случае должно быть* $p < 0$, $q > 0$), *то уравнение* (25) *имеет два кратных корня* x_1, x_2; $x_2 = -x_1$. *Кратность каждого корня* x_i ($i = 1,2$) *равна двум, и выполняются равенства*

$$x_i^{\,n-m} = -\frac{pm}{n}, \quad x_i^{\,n} = \frac{qm}{n-m} \quad (i = 1, 2), \tag{26}$$

т. е., так как $(n-m)$, n – *четные числа,*

$$x_1 = \left(-\frac{pm}{n}\right)^{1/(n-m)} = \left(\frac{qm}{n-m}\right)^{1/n}, \quad x_2 = -\left(-\frac{pm}{n}\right)^{1/(n-m)} = -\left(\frac{qm}{n-m}\right)^{1/n}.$$

Во всех случаях корни задаются решениями определяющего уравнения

$$\frac{t^n}{t^m - 1} = q\left(-\frac{p}{q}\right)^{n/m}$$

и подстановкой

$$x = t(-q/p)^{1/m} \quad (t \neq 0).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В рассматриваемом случае подстановка

$$x = t(-q/p)^{1/m} \quad (t \neq 0) \tag{27}$$

приводит к равенству

$$f(t) := \frac{t^n}{t^m - 1} = q\left(-\frac{p}{q}\right)^{n/m}. \tag{28}$$

Так как n, m – четные числа, то определяющая функция f – четная: $\big(f(t) = f(-t)\big)$.

Так как

$$f'(t) = \frac{t^{n-1}[(n-m)t^m - n]}{(t^m - 1)^2}$$

и $(n-1)$ – нечетное число, а m – четное число, то у функции f точка 0 является локальным максимумом $f(0) = 0$ (точка 0 по условиям рассматриваемой задачи нас не интересует) и имеется два локальных минимума в точках

$$t_{*1} = \left(\frac{n}{n-m}\right)^{1/m} > 1, \quad t_{*2} = -\left(\frac{n}{n-m}\right)^{1/m} = -t_{*1} < -1. \tag{29}$$

Значения f в этих точках совпадают:

$$f(t_{*1}) = f(t_{*2}) = \frac{n-m}{m}\left(\frac{n}{n-m}\right)^{n/m} = \frac{n-m}{m} t_{*1}^{\,n} = \frac{n-m}{m} t_{*2}^{\,n} > 0. \tag{30}$$

Для иллюстрации приведем график определяющей функции $f(t) = \dfrac{t^4}{t^2 - 1}$ (рис. 5).

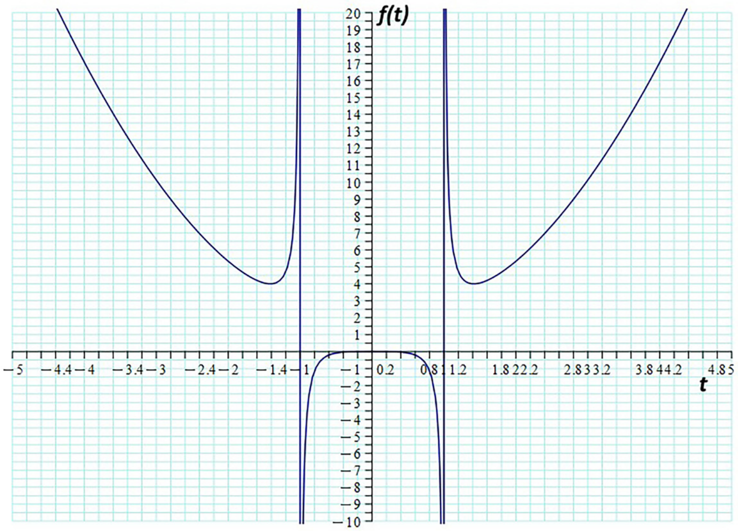

Рис. 5. График функции $f(t)=\dfrac{t^4}{t^2-1}$

Fig. 5. Graph of function $f(t)=\dfrac{t^4}{t^2-1}$

Проверка равенств (26) осуществляется тем же рассуждением, что и проверка соответствующих равенств в доказательстве теоремы 4 с использованием равенств (27), (28), (29), (30). Эти наблюдения доказывают теорему 5.

2. Аналитическая связь между модулем и аргументом комплексных корней трехчленных алгебраических уравнений. Так как комплексные корни полиномов с действительными коэффициентами образуют комплексно-сопряженные пары, то важным является вычисление модулей и аргументов хотя бы для некоторых из них. В данном разделе мы устанавливаем явную аналитическую зависимость между модулем и аргументом всех комплексных корней трехчленных алгебраических уравнений произвольной степени с действительными коэффициентами. Нетривиальным фактом является то, что эта связь не зависит от коэффициента *p*.

Теорема 7. *Пусть* $x_*=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)\in\mathbb{C}$ *– корень уравнения с действительными коэффициентами*

$$x^n+px^m+q=0 \quad (n>m,\ p\neq 0,\ q\neq 0). \tag{31}$$

Тогда

$$r^n=\frac{q\sin m\varphi}{\sin\big((n-m)\varphi\big)}. \tag{32}$$

Доказательство. Подставляя число $x_*=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ в уравнение (31), получим

$$r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)+pr^m(\cos m\varphi+i\sin m\varphi)+q=0.$$

Выделяя действительную и мнимую составляющие левой части данного уравнения и приравнивая их к нулю, получим эквивалентную систему уравнений

$$r^n\cos n\varphi+pr^m\cos m\varphi+q=0; \tag{33}$$

$$r^n\sin n\varphi+pr^m\sin m\varphi=0. \tag{34}$$

Из уравнения (34) выражаем $p=-r^{n-m}\sin n\varphi/\sin m\varphi$ и подставляем в уравнение (33):

$$r^n\cos n\varphi-\frac{r^{n-m}\sin n\varphi}{\sin m\varphi}r^m\cos m\varphi+q=0,$$

что преобразуется к виду

$$r^n\left(\frac{\sin m\varphi\cos n\varphi-\cos m\varphi\sin n\varphi}{\sin m\varphi}\right)=-q \quad\Leftrightarrow\quad r^n\sin(m\varphi-n\varphi)=-q\sin m\varphi,$$

откуда окончательно получаем

$$r^n=\frac{q\sin m\varphi}{\sin\big((n-m)\varphi\big)}.$$

Доказательство завершено.

3. Кратный корень определяет все. В заключение отметим полезное простое наблюдение, касающееся кратных корней произвольных (т. е. комплексных) триномиальных уравнений: кратный корень такого уравнения однозначно определяет само уравнение (для любых заданных m и n) и, соответственно, задает все (вещественные и комплексные) корни этого уравнения. Имеет место следующее

Предложение. *Пусть $x_*\in\mathbb{C}$ – корень кратности 2 трехчленного алгебраического уравнения*

$$x^n+px^m+q=0 \quad (n>m>0,\ p,q\in\mathbb{C},\ p\neq 0,\ q\neq 0).$$

Тогда

$$p=-\frac{n}{m}x_*^{n-m},\quad q=\frac{n-m}{m}x_*^{n}. \tag{35}$$

Корней кратности большей, чем 2, у триномиальных уравнений не бывает.

Доказательство. Корень $x_*\in\mathbb{C}$ кратности 2 является нулем исходного многочлена и его производной, т. е. удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{cases} x_*^n+p\,x_*^m+q=0,\\ n\,x_*^{n-1}+p\,m\,x_*^{m-1}=0.\end{cases}$$

Отсюда вытекают формулы (35).

Если же мы предположим, что x_* является корнем как минимум кратности 3, то он должен быть нулем исходного многочлена, его первой производной и второй производной, т. е. должен удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} x_*^n+p\,x_*^m+q=0,\\ n\,x_*^{n-1}+p\,m\,x_*^{m-1}=0,\\ n(n-1)x_*^{n-2}+p\,m(m-1)x_*^{m-2}=0.\end{cases}$$

Однако данная система несовместна (из первых двух уравнений вытекают формулы (35), первая из которых противоречит третьему уравнению).

Благодарности. Исследование выполнено при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант № 20231184) и в рамках Государственной программы научных исследований «Конвергенция-2025» (задание № 20210494).

Acknowledgements. The research was carried out with financial support from the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (grant no. 20231184) and in the framework of the State Program of Scientific Research "Convergence-2025" (task no. 20210494).

Список использованных источников

1. Cohen, S. D. Galois Groups of Trinomials / S. D. Cohen, A. Movahhedi, A. Salinier // J. Algebr. – 1999. – Vol. 222, № 2. – P. 561–573. https://doi.org/10.1006/jabr.1999.8033

2. Mukhopadhyay, A. Counting squarefree discriminants of trinomials under abc / A. Mukhopadhyay, M. R. Murty, K. Srinivas // Proc. Am. Math. Soc. – 2009. – Vol. 137, № 10. – P. 3219–3226. https://doi.org/10.1090/s0002-9939-09-09831-1

3. Bremner, A. Cyclic sextic trinomials x^6+Ax+B / A. Bremner, B. K. Spearman // Int. J. Number Theory. – 2010. – Vol. 6, № 1. – P. 161–167. https://doi.org/10.1142/S1793042110002843

4. Сергеев, А. Э. Параметрические триномы со знакопеременной группой Галуа / А. Э. Сергеев, Л. Н. Потемкина // Науч. журн. КубГАУ. – 2012. – № 76 (2). – С. 216–225.

5. Patsolic, J. Trinomials defining quintic number fields / J. Patsolic, J. Rouse // Int. J. Number Theory. – 2017. – Vol. 13, № 7. – P. 1881–1894. https://doi.org/10.1142/S1793042117501032

6. Eagle, A. Series for all the Roots of a Trinomial Equation / A. Eagle // Am. Math. Monthly. – 1939. – Vol. 46, № 7. – P. 422–425. https://doi.org/10.2307/2303036

7. Cella, O. Power series and zeroes of trinomial equations / O. Cella, G. Lettl // Aequ. Math. – 1992. – Vol. 43, № 1. – P. 94–102. https://doi.org/10.1007/BF01840478

8. Kennedy, E. C. Bounds for the Roots of a Trinomial Equation / E. C. Kennedy // Am. Math. Monthly. – 1940. – Vol. 47, № 7. – P. 468–470. https://doi.org/10.1080/00029890.1940.11991003

9. Kim, S.-H. Certain Trinomial Equation and Lacunary Polynomials / S.-H. Kim // Commun. Korean Math. Soc. – 2009. – Vol. 24, № 2. – P. 239–245. https://doi.org/10.4134/CKMS.2009.24.2.239

10. Szabo, P. G. On the roots of the trinomial equation / P. G. Szabo // Cent. Eur. J. Oper. Res. – 2010. – Vol. 18, № 1. – P. 97–104. https://doi.org/10.1007/s10100-009-0130-2

11. Theobald, T. Norms of roots of trinomials / T. Theobald, T. de Wolf // Math. Ann. – 2016. – Vol. 366, № 1–2. – P. 219–247. https://doi.org/10.1007/s00208-015-1323-8

12. Brilleslyper, M. A. Counting Interior Roots of Trinomials / M. A. Brilleslyper, L. E. Schaubroeck // Math. Mag. – 2018. – Vol. 91, № 2. – P. 142–150. https://doi.org/10.1080/0025570X.2017.1420332

13. Howell, R. Locating trinomial zeros / R. Howell, D. Kyle // Involve, J. Math. – 2018. – Vol. 11, № 4. – P. 711–720. https://doi.org//10.2140/involve.2018.11.711

14. Koiran, P. Root separation for trinomials / P. Koiran // J. Symb. Comput. – 2019. – Vol. 95. – P. 151–161. https://doi.org/10.1016/j.jsc.2019.02.004

15. Bilu, Y. Trinomials with given roots / Y. Bilu, F. Luca // Indag. Math. – 2020. – Vol. 31, № 1. – P. 33–42. https://doi.org/10.1016/j.indag.2019.09.001

16. Кравченко, В. Ф. Аналитический метод решения трехчленных алгебраических уравнений с помощью элементарных функций K_{ml} / В. Ф. Кравченко // Уч. зап. ЦАГИ. – 1988. – Т. 19, № 4. – С. 135–144.

17. Botta, V. Roots of Some Trinomial Equations / V. Botta // Proc. Ser. Brazilian Soc. Comput. Appl. Math. – 2017. – Vol. 5, № 1. – P. 1–5. https://doi.org/10.5540/03.2017.005.01.0024

18. Botta, V. On the behavior of roots of trinomial equations / V. Botta, J. V. da Silva // Acta Math. Hung. – 2019. – Vol. 157, № 1. – P. 54–62. https://doi.org/10.1007/s10474-018-0896-6

19. Кутищев, Г. П. Решение алгебраических уравнений произвольной степени: теория, методы, алгоритмы / Г. П. Кутищев. – М.: Изд-во ЛКИ, 2019. – 232 с.

20. Трубников, Ю. В. О распределении корней трехчленных алгебраических уравнений произвольной степени / Ю. В. Трубников, М. М. Чернявский // Вес. Віцеб. дзярж. ун-та. – 2020. – № 1 (106). – С. 21–33.

References

1. Cohen S. D., Movahhedi A., Salinier A. Galois Groups of Trinomials. *Journal of Algebra*, 1999, vol. 222, no. 2, pp. 561–573. https://doi.org/10.1006/jabr.1999.8033

2. Mukhopadhyay A., Murty M. R., Srinivas K. Counting squarefree discriminants of trinomials under abc. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 2009, vol. 137, no. 10, pp. 3219–3226. https://doi.org/10.1090/s0002-9939-09-09831-1

3. Bremner A., Spearman B. K. Cyclic sextic trinomials x^6+Ax+B. *International Journal of Number Theory*, 2010, vol. 6, no. 1, pp. 161–167. https://doi.org/10.1142/S1793042110002843

4. Sergeev A. E., Potemkina L. N. Parametric trinomials with alternating Galois group. *Nauchnyi zhurnal KubGAU = Scientific journal of KubSAU*, 2012, no. 76 (2), pp. 216–225 (in Russian).

5. Patsolic J., Rouse J. Trinomials defining quintic number fields. *International Journal of Number Theory*, 2017, vol. 13, no. 7, pp. 1881–1894. https://doi.org/10.1142/S1793042117501032

6. Eagle A. Series for all the Roots of a Trinomial Equation. *The American Mathematical Monthly*, 1939, vol. 46, no. 7, pp. 422–425. https://doi.org/10.2307/2303036

7. Cella O., Lettl G. Power series and zeroes of trinomial equations. *Aequationes Mathematicae*, 1992, vol. 43, no. 1, pp. 94–102. https://doi.org/10.1007/BF01840478

8. Kennedy E. C. Bounds for the Roots of a Trinomial Equation. *The American Mathematical Monthly*, 1940, vol. 47, no. 7, pp. 468–470. https://doi.org/10.1080/00029890.1940.11991003

9. Kim S.-H. Certain Trinomial Equation and Lacunary Polynomials. *Communications of the Korean Mathematical Society*, 2009, vol. 24, no. 2, pp. 239–245. https://doi.org/10.4134/CKMS.2009.24.2.239

10. Szabo P. G. On the roots of the trinomial equation. *Central European Journal of Operations Research*, 2010, vol. 18, no. 1, pp. 97–104. https://doi.org/10.1007/s10100-009-0130-2

11. Theobald T., de Wolff T. Norms of roots of trinomials. *Mathematische Annalen*, 2016, vol. 366, no. 1–2, pp. 219–247. https://doi.org/10.1007/s00208-015-1323-8

12. Brilleslyper M. A., Schaubroeck L. E. Counting Interior Roots of Trinomials. *Mathematics Magazine*, 2018, vol. 91, no. 2, pp. 142–150. https://doi.org/10.1080/0025570X.2017.1420332

13. Howell R., Kyle D. Locating trinomial zeros. *Involve, a Journal of Mathematics*, 2018, vol. 11, no. 4, pp. 711–720. https://doi.org//10.2140/involve.2018.11.711

14. Koiran P. Root separation for trinomials. *Journal of Symbolic Computation*, 2019, vol. 95, pp. 151–161. https://doi.org/10.1016/j.jsc.2019.02.004

15. Bilu Y., Luca F. Trinomials with given roots. *Indagationes Mathematica*, 2020, vol. 31, no. 1, pp. 33–42. https://doi.org/10.1016/j.indag.2019.09.001

16. Kravchenko V. F. Analytical method for solving trinomial algebraic equations using elementary functions K_{ml}. *Uchenye zapiski TsAGI = Scientific Notes of the Central Aerohydrodynamic Institute*, 1988, vol. 19, no. 4, pp. 135–144 (in Russian).

17. Botta V. Roots of Some Trinomial Equations. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, 2017, vol. 5, no. 1, pp. 1–5. https://doi.org/10.5540/03.2017.005.01.0024

18. Botta V., da Silva J. V. On the behavior of roots of trinomial equations. *Acta Mathematica Hungarica*, 2019, vol. 157, no. 1, pp. 54–62. https://doi.org/10.1007/s10474-018-0896-6

19. Kutischev G. P. *Solving Algebraic Equations of Arbitrary Degree: Theory, Methods, Algorithms*. Moscow, LKI Publ., 2019. 232 p. (in Russian).

20. Trubnikov Yu. V., Chernyavsky M. M. On the distribution of roots of trinomial algebraic equations of arbitrary degree. *Vesnik Vitsebskaga dzyarzhaunaga universiteta = Bulletin of Vitebsk State University*, 2020, no. 1 (106), pp. 21–33 (in Russian).

Информация об авторе

Чернявский Михаил Михайлович – старший преподаватель кафедры инженерной физики, Витебский государственный университет имени П. М. Машерова (пр. Московский, 33, 210038, Витебск, Республика Беларусь). E-mail: misha360ff@mail.ru

Information about the author

Mikhail M. Chernyavsky – Senior Lecturer at the Department of Engineering Physics, Vitebsk State University named after P. M. Masherov (33, Moskovskii Ave., 210038, Vitebsk, Republic of Belarus). E-mail: misha360ff@mail.ru