ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 519.65
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2024-60-4-295-302

Поступила в редакцию 25.07.2024
Received 25.07.2024

**М. В. Игнатенко**

*Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь*

# ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ, ЗАДАННЫХ НА ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ БАНАХОВЫХ АЛГЕБРАХ

**Аннотация.** Работа посвящена проблеме интерполирования операторов, заданных на банаховых алгебрах функций. Получены интерполяционные операторные многочлены в формах Лагранжа и Ньютона произвольной фиксированной степени как решения соответствующих задач однократного операторного интерполирования, содержащие операцию умножения элементов функциональной алгебры. Построение интерполяционных формул ньютоновой структуры основано на аппарате операторных разделенных разностей. Указаны классы операторных многочленов, типичных для рассматриваемых функциональных банаховых алгебр, относительно которых представленные интерполяционные формулы являются инвариантными. Получены явные представления погрешности операторного интерполирования. Рассмотрены частные случаи формул линейной интерполяции, когда операция умножения задается различными правилами свертки элементов функциональной алгебры. Построены соответствующие интерполяционные формулы первого порядка, которые содержат преобразования Фурье или Лапласа и являются точными для линейных операторных многочленов специального вида.

**Ключевые слова:** банахова алгебра функций, операторы свертки, операторное интерполирование типа Лагранжа, дельта-функция Дирака, преобразование Фурье, функция Хевисайда, преобразование Лапласа

**Для цитирования.** Игнатенко, М. В. Интерполяционные формулы для операторов, заданных на функциональных банаховых алгебрах / М. В. Игнатенко // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2024. – Т. 60, № 4. – С. 295–302. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2024-60-4-295-302

**Marina V. Ignatenko**

*Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus*

## INTERPOLATION FORMULAS FOR OPERATORS DEFINED ON FUNCTIONAL BANACH ALGEBRAS

**Abstract.** This article is devoted to the problem of interpolation of operators defined on Banach algebras of functions. Interpolation operator polynomials in the Lagrange and Newton forms of arbitrary fixed degree, containing the operation of multiplying elements of functional algebra, are obtained as solutions of the corresponding problems of single operator interpolation. The construction of interpolation formulas of the Newton's structure is based on apparatus of operator separated differences. Classes of operator polynomials are indicated that are typical for functional Banach algebras under consideration, with respect to which the presented interpolation formulas are invariant. Explicit representations of the operator interpolation error are obtained. Special cases of linear interpolation formulas are considered, when the multiplication operation is given by various rules for convolution of elements of functional algebra. Corresponding first-order interpolation formulas are constructed, which contain the Fourier or Laplace transforms and are exact for linear operator polynomials of a special form.

**Keywords:** Banach algebra, convolution operator, operator interpolation of Lagrange type, Dirac delta function, Fourier transform, Heaviside function, Laplace transform

**For citation.** Ignatenko M. V. Interpolation formulas for operators defined on functional Banach algebras. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2024, vol. 60, no. 4, pp. 295–302 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2024-60-4-295-302

**Введение.** Операторы непрерывной и дискретной свертки находят широкое применение при решении различных математических и прикладных задач. Они используются для цифровой обработки изображений, сигналов и во многих других областях (см., напр., [1–3]). В частности, дискретные свертки применялись в задаче интерполирования функций от многих и бесконечных матричных переменных [4, 5]. Такой подход является эффективным и при построении приближенных методов интерполяционного типа для операторов в функциональных пространствах.

Целью данной работы является применение аппарата умножения элементов функциональной банаховой алгебры, в том числе когда умножение определяется некоторой сверткой элементов алгебры, в рассматриваемой лагранжевой задаче теории интерполирования операторов. В ней получены интерполяционные операторные многочлены в формах Лагранжа и Ньютона произвольной фиксированной степени как решения соответствующих задач однократного операторного интерполирования, содержащие операцию умножения элементов функциональной алгебры. Построение интерполяционных формул ньютоновой структуры основано на аппарате операторных разделенных разностей. Указаны классы операторных многочленов, типичных для рассматриваемых функциональных банаховых алгебр, относительно которых представленные интерполяционные формулы являются инвариантными. Получены явные представления погрешности операторного интерполирования. Рассмотрены частные случаи формул линейной интерполяции, когда операция умножения задается различными правилами свертки элементов функциональной алгебры. Построены соответствующие интерполяционные формулы первого порядка, которые содержат преобразования Фурье или Лапласа и являются точными для линейных операторных многочленов специального вида.

Пусть $B$ – функциональная банахова алгебра [6–8] над полем комплексных чисел с операцией умножения «$\circ$». Обозначим $x^{-1}$ обратный элемент к $x \in B$, $e$ – нейтральный элемент относительно умножения, а 0 – нулевой элемент алгебры, тогда $x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x \equiv e,$ $x \circ e = e \circ x \equiv x,$ $x \circ 0 = 0 \circ x \equiv 0.$

Под операторным многочленом $P_n : B \to B$ степени $n$ будем понимать оператор

$$P_n(x) = z + \sum_{i=1}^{n} y_i \circ \underbrace{x \circ x \circ \ldots \circ x}_{i}, \tag{1}$$

где $z$ и $y_i$, $i = 1, 2, \ldots, n,$ – фиксированные элементы алгебры $B$.

Рассмотрим оператор $F : B \to B$ и некоторые различные фиксированные точки $x_0, x_1, \ldots, x_n \in B$ – узлы интерполирования. Задача лагранжевой (однократной) интерполяции операторов состоит в построении многочлена $L_n(F; x) : B \to B$ вида (1), совпадающего в узлах с интерполируемым оператором $F(x)$: $L_n(F; x_k) = F(x_k),$ $k = 0, 1, \ldots, n.$

Через $l_{nk}(x)$ обозначим многочлен $l_{nk} : B \to B$ степени $n$ вида

$$l_{nk}(x) = (x - x_0) \circ (x - x_1) \circ \ldots \circ (x - x_{k-1}) \circ (x - x_{k+1}) \circ \ldots \circ (x - x_n), \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Пусть для $l_{nk}(x_k)$ существуют обратные элементы $l_{nk}^{-1}(x_k) \in B,$ $k = 0, 1, \ldots, n.$

**Формула линейной интерполяции.** Сначала приведем интерполяционные операторные многочлены первой степени.

У т в е р ж д е н и е. *Операторный многочлен*

$$L_1(F; x) = F(x_0) + [F(x_1) - F(x_0)] \circ (x - x_0) \circ (x_1 - x_0)^{-1} \tag{2}$$

*удовлетворяет интерполяционным условиям*

$$L_1(F; x_k) = F(x_k), \quad k = 0, 1. \tag{3}$$

*Линейная интерполяционная формула* (2) *инвариантна относительно многочленов*

$$P_1(x) = z + y \circ x, \tag{4}$$

*где z и y – фиксированные элементы алгебры B.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Убедимся в справедливости интерполяционных равенств (3). Очевидно, что

$$(x_0 - x_0) \circ (x_1 - x_0)^{-1} = 0 \circ (x_1 - x_0)^{-1} \equiv 0, \quad [F(x_1) - F(x_0)] \circ 0 \equiv 0.$$

Следовательно,

$$L_1(F; x_0) = F(x_0) + [F(x_1) - F(x_0)] \circ \{(x_0 - x_0) \circ (x_1 - x_0)^{-1}\} = F(x_0).$$

Далее

$$L_1(F; x_1) = F(x_0) + [F(x_1) - F(x_0)] \circ (x_1 - x_0) \circ (x_1 - x_0)^{-1} = F(x_1),$$

так как $(x_1 - x_0) \circ (x_1 - x_0)^{-1} \equiv e,$ а $[F(x_1) - F(x_0)] \circ e \equiv F(x_1) - F(x_0).$

Покажем, что формула (2) точна для многочленов вида (4). Для этого в равенстве (2) положим $F(x) = P_1(x)$. Получим

$$L_1(P_1;x) = P_1(x_0) + [P_1(x_1) - P_1(x_0)] \circ (x - x_0) \circ (x_1 - x_0)^{-1} =$$

$$= P_1(x_0) + [z + y \circ x_1 - z - y \circ x_0] \circ (x - x_0) \circ (x_1 - x_0)^{-1} = P_1(x_0) + y \circ (x_1 - x_0) \circ (x_1 - x_0)^{-1} \circ (x - x_0) =$$

$$= P_1(x_0) + y \circ (x - x_0) = P_1(x_0) + y \circ x - y \circ x_0 + z - z = P_1(x_0) + P_1(x) - P_1(x_0) = P_1(x).$$

Утверждение доказано.

Несложно убедиться, что формула линейной интерполяции (2) также может быть представлена в виде

$$L_1(F;x) = F(x_0) \circ (x - x_1) \circ (x_0 - x_1)^{-1} + F(x_1) \circ (x - x_0) \circ (x_1 - x_0)^{-1}. \tag{5}$$

**Интерполяционные формулы высшего порядка.** Рассмотрим далее интерполяционные многочлены произвольной фиксированной степени, частным случаем которых является линейный многочлен (2), или, что то же, (5).

Теорема 1. *Операторный многочлен в форме Лагранжа*

$$L_n(F;x) = \sum_{k=0}^{n} F(x_k) \circ l_{nk}(x) \circ l_{nk}^{-1}(x_k) \tag{6}$$

*удовлетворяет интерполяционным условиям*

$$L_n(F;x_j) = F(x_j), \quad j = 0, 1, ..., n. \tag{7}$$

Доказательство. Операторный многочлен $L_n(F;x)$ как линейная комбинация многочленов $l_{nk}(x)$ степени $n$ также является многочленом степени не выше $n$. Убедимся в справедливости интерполяционных равенств (7) непосредственными вычислениями. Поскольку

$$l_{nk}(x_j) \circ l_{nk}^{-1}(x_k) = \begin{cases} 0, & j \neq k; \\ e, & j = k, \end{cases}$$

$F(x_k) \circ 0 \equiv 0,$ а $F(x_j) \circ e \equiv F(x_j),$ то $L_n(F;x_j) = F(x_j),$ $j = 0, 1, ..., n.$ Теорема 1 доказана.

В частности, полагая $n = 1$ в равенстве (6), приходим к линейной формуле (5).

В силу коммутативности и ассоциативности свертки равенство (6) может быть записано различными способами, отличающимися порядком выполнения операций умножения, например, $L_n(F;x) = \sum_{k=0}^{n} F(x_k) \circ \left\{ l_k(x) \circ l_k^{-1}(x_k) \right\}$ или $L_n(F;x) = \sum_{k=0}^{n} \left\{ F(x_k) \circ l_k^{-1}(x_k) \right\} \circ l_k(x).$

Заметим, что один из подходов к построению интерполяционных формул основан на применении аппарата разделенных разностей для операторов. Операторы разделенных разностей строятся, вообще говоря, неоднозначно, и их структура в значительной степени зависит от вида искомого интерполяционного многочлена.

Известно [4, 5], что общая схема построения интерполяционных формул в форме Ньютона по заданным формулам Лагранжа состоит в следующем. Пусть для оператора $F$ от переменной $x$ и узлов $x_0, x_1, ..., x_n$ построена некоторая интерполяционная формула Лагранжа

$$L_n(F;x) = \sum_{k=0}^{n} \varphi_{nk}(x) F(x_k), \quad n = 1, 2, ..., \tag{8}$$

где $\varphi_{nk}(x_j) = \delta_{kj}$ – символ Кронекера, $k, j = 0, 1, ..., n$. Тогда соответствующая (8) интерполяционная формула в форме Ньютона $H_n(F;x) \equiv L_n(F;x)$ $(n = 1, 2, ...)$ имеет вид

$$H_n(F;x) = F(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \Delta H_k(x), \tag{9}$$

где слагаемое $\Delta H_k(x) = L_k(F;x) - L_{k-1}(F;x),$ $k = 1, 2, ..., n,$ $L_0(F;x) \equiv F(x_0).$ Во многих конкретных случаях $\Delta H_k(x),$ $k = 1, 2, ..., n,$ может быть записано в виде явных и удобных для применения формул.

Получим аналог для операторного многочлена Лагранжа (6) в форме Ньютона. Так как в этом случае слагаемое

$$\Delta H_k(x) = L_k(F;x) - L_{k-1}(F;x) =$$

$$= \left\{ \sum_{j=0}^{k} F(x_j) \circ (x_j - x_0)^{-1} \circ (x_j - x_1)^{-1} \circ \ldots \circ (x_j - x_{j-1})^{-1} \circ (x_j - x_{j+1})^{-1} \circ \ldots \circ (x_j - x_k)^{-1} \right\} \circ$$

$$\circ (x - x_0) \circ (x - x_1) \circ \ldots \circ (x - x_{k-1}), \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{10}$$

то справедлива формула Ньютона (9) с учетом представления (10).

Пусть $F[x_0, x_1, \ldots, x_k]$ – операторы разделенных разностей порядка $k$ относительно элементов $x_0, x_1, \ldots, x_k$ алгебры $B$, которые рекуррентно определяются правилом

$$F[x_0, x_1, \ldots, x_k] = (F[x_1, x_2, \ldots, x_k] - F[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}]) \circ (x_k - x_0)^{-1}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Тогда формула (9) с учетом слагаемых (10) преобразуется к виду

$$H_n(F;x) = F(x_0) + \sum_{k=1}^{n} F[x_0, x_1, \ldots, x_k] \circ (x - x_0) \circ (x - x_1) \circ \ldots \circ (x - x_{k-1}), \tag{11}$$

где операторы разделенных разностей

$$F[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \sum_{j=0}^{k} F(x_j) \circ (x_j - x_0)^{-1} \circ (x_j - x_1)^{-1} \circ \ldots \circ (x_j - x_{j-1})^{-1} \circ$$

$$\circ (x_j - x_{j+1})^{-1} \circ \ldots \circ (x_j - x_k)^{-1}, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{12}$$

В частности, полагая $n = 1$ в равенстве (11), приходим к линейной формуле

$$H_1(F;x) = F(x_0) + [F(x_1) - F(x_0)] \circ (x - x_0) \circ (x_1 - x_0)^{-1},$$

тождественной представлению (2), полученному ранее в утверждении, или, что то же, представлению (5). Таким образом, приходим к следующей теореме 2.

Т е о р е м а 2. *Операторный многочлен в форме Ньютона* (11), *где разделенные разности* $F[x_0, x_1, \ldots, x_k]$ *порядка k относительно элементов* $x_0, x_1, \ldots, x_k$ *алгебры B*, $k = 1, 2, \ldots, n$, *определяются по формуле* (12), *удовлетворяет интерполяционным условиям*

$$H_n(F;x_j) = F(x_j), \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

С учетом инвариантности линейной формулы (2) относительно линейных многочленов (4) можно доказать, например, методом математической индукции, что интерполяционная формула $n$-го порядка (11) в форме Ньютона и, следовательно, соответствующая ей формула в форме Лагранжа (6) точны для операторных многочленов $P_n : B \to B$ степени $n$ вида (1).

Получим явное представление погрешности интерполирования многочленом (11).

Т е о р е м а 3. *Погрешность интерполирования* $R_n(F;x) = F(x) - H_n(F;x)$, *где* $H_n(F;x)$ – *многочлен вида* (11), *задается равенством*

$$R_n(F;x) = (x - x_0) \circ (x - x_1) \circ \ldots \circ (x - x_n) \circ$$

$$\circ \left\{ \sum_{j=0}^{n+1} F(x_j) \circ (x_j - x_0)^{-1} \circ (x_j - x_1)^{-1} \circ \ldots \circ (x_j - x_{j-1})^{-1} \circ \left(x_j - x_{j+1}\right)^{-1} \circ \ldots \circ (x_j - x_{n+1})^{-1} \right\}, \tag{13}$$

где $x_{n+1} = x$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, в узлах $x_j$ при $j = 0, 1, \ldots, n$ имеем $R_n(F;x_j) = 0$. В случае $x = x_{n+1}$, применяя формулу (12) для операторов разделенных разностей $F[x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}]$, получаем

$$R_n(F;x_{n+1}) = (x_{n+1} - x_0) \circ (x_{n+1} - x_1) \circ \ldots \circ (x_{n+1} - x_n) \circ$$

$$\circ \left\{ \sum_{j=0}^{n+1} F(x_j) \circ (x_j - x_0)^{-1} \circ (x_j - x_1)^{-1} \circ \ldots \circ (x_j - x_{j-1})^{-1} \circ (x_j - x_{j+1})^{-1} \circ \ldots \circ (x_j - x_{n+1})^{-1} \right\} =$$

$$= F[x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}] \circ (x_{n+1} - x_0) \circ (x_{n+1} - x_1) \circ \ldots \circ (x_{n+1} - x_n) = F(x_{n+1}) - H_n(F;x_{n+1}).$$

Таким образом, формула (13) действительно задает погрешность интерполирования оператора $F(x)$ многочленом $H_n(F;x)$ вида (11).

В частности, полагая $n = 1$ и $x_2 = x$ в равенстве (13), получим представление погрешности интерполирования $R_1(F;x) = F(x) - L_1(F;x)$, где $L_1(F;x)$ – многочлен вида (2), в виде

$$R_1(F;x) = (x - x_0) \circ (x - x_1) \circ$$
$$\circ \left\{ F(x_0) \circ (x_0 - x_1)^{-1} \circ (x_0 - x)^{-1} + F(x_1) \circ (x_1 - x_0)^{-1} \circ (x_1 - x)^{-1} + F(x) \circ (x - x_0)^{-1} \circ (x - x_1)^{-1} \right\}.$$

**Частные случаи формул линейной интерполяции.** Рассмотрим частные случаи функциональных банаховых алгебр, где операция умножения «∘» двух функций $x(t)$ и $y(t)$ определяется правилом свертки

$$(x \circ y)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(s) y(t - s) ds \tag{14}$$

или

$$(x \circ y)(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t x(s) y(t - s) ds. \tag{15}$$

**1.** Пусть $B$ – банахова алгебра функций, в которой умножение задается формулой свертки (14). Роль единицы $e(t)$ в этом случае выполняет дельта-функция Дирака $\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{ist\} ds$, поскольку

$$(x \circ \delta)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(s) \delta(t - s) ds = x(t).$$

Обозначим

$$\Phi[x](t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(s) \exp\{its\} ds$$

– преобразование Фурье функции $x$. Тогда справедливо тождество

$$x(s) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi[x](t) \exp\{-its\} dt,$$

известное как формула обращения.

Найдем представление обратного элемента $x^{-1}$ функции $x \in B$, для которой $\Phi[x] \neq 0$.

Л е м м а 1. *Обратный элемент $x^{-1}$ к функции $x \in B$, удовлетворяющей условию $\Phi[x] \neq 0$, представим в виде*

$$x^{-1}(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\{-its\}}{\Phi[x](t)} dt. \tag{16}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что преобразованием Фурье дельта-функции является константа $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, т. е. $\Phi[\delta] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Кроме того, по свойству Фурье-образа свертки $\Phi[x]\Phi[x^{-1}] = \Phi[x \circ x^{-1}] = \Phi[\delta]$, откуда следует, что $\Phi[x^{-1}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\Phi[x]}$ для $x \in B$, где $\Phi[x] \neq 0$. Подставив полученное выражение $\Phi[x^{-1}]$ через $\Phi[x]$ в формулу обращения для $x^{-1}$(s), получим

$$x^{-1}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi[x^{-1}](t) \exp\{-its\} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\{-its\}}{\sqrt{2\pi}\,\Phi[x](t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\{-its\}}{\Phi[x](t)} dt.$$

Лемма 1 доказана.

Если в формулу (16) подставить выражение, определяющее преобразование Фурье, то она примет вид

$$x^{-1}(s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\{-it(s+\tau)\}}{x(\tau)}dt\,d\tau.$$

В частности, если $x(s)=\alpha\delta(s)$, где $\alpha\in R,\ \alpha\neq 0$, то, применяя правило (16), получим, что $x^{-1}(s)=\frac{\sqrt{2\pi}}{\alpha}\delta(s)$. При этом $\Phi[x]=\frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}}$, $\Phi[x^{-1}]=\frac{1}{\alpha}$, поэтому $\Phi[x]\Phi[x^{-1}]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, а $\Phi[x\circ x^{-1}]=\Phi[\delta]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, т. е. формула $\Phi[x\circ x^{-1}]=\Phi[x]\Phi[x^{-1}]$ справедлива.

Если, например, $x(s)=\alpha\exp\{-is^2\}$, где $\alpha\in R,\ \alpha\neq 0$, то по правилу (16) обратный элемент представляется в виде $x^{-1}(s)=\frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\exp\{is^2\}$. При этом $\Phi[x](s)=$ $=\alpha\frac{1-i}{2}\exp\left\{\frac{is^2}{4}\right\}$, $\Phi[x^{-1}](s)=\frac{1}{\alpha}\frac{1+i}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{is^2}{4}\right\}$, следовательно, $\Phi[x]\Phi[x^{-1}]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}=\Phi[x\circ x^{-1}]$, т. е. формула свойства Фурье-образа свертки также справедлива.

Рассмотрим частный случай формул линейной интерполяции (2) с операцией умножения, определяемой сверткой (14).

С л е д с т в и е 1. *Операторный многочлен*

$$L_1(F;x)=F(x_0)+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left[F\left(x_1(u-t)\right)-F\left(x_0(u-t)\right)\right]\left(x(t-s)-x_0(t-s)\right)}{\Phi[x_1(v)-x_0(v)]\exp\{ivs\}}dv\,ds\,dt \tag{17}$$

*удовлетворяет интерполяционным условиям* (3). *Линейная интерполяционная формула* (17) *инвариантна относительно многочленов*

$$P_1\left(x(t)\right)=z(t)+\int_{-\infty}^{\infty}y(s)x(t-s)ds, \tag{18}$$

*где z и y – фиксированные элементы алгебры B.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства следствия 1 достаточно установить, что равенства (2) и (4) с учетом правила умножения (14) представляются в виде (17) и (18) соответственно. Действительно, в силу определения свертки (14), операторный многочлен

$$L_1(F;x)=F(x_0)+(x_1-x_0)^{-1}\circ(x-x_0)\circ[F(x_1)-F(x_0)]=$$

$$=F(x_0)+\int_{-\infty}^{\infty}\left(x(t-s)-x_0(t-s)\right)\left(x_1(s)-x_0(s)\right)^{-1}ds\circ[F(x_1)-F(x_0)]=$$

$$=F(x_0)+\int_{-\infty}^{\infty}\left[F\left(x_1(u-t)\right)-F\left(x_0(u-t)\right)\right]\int_{-\infty}^{\infty}\left(x(t-s)-x_0(t-s)\right)\left(x_1(s)-x_0(s)\right)^{-1}ds\,dt=$$

$$=F(x_0)+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left[F\left(x_1(u-t)\right)-F\left(x_0(u-t)\right)\right]\left(x(t-s)-x_0(t-s)\right)}{\Phi[x_1(v)-x_0(v)]\exp\{ivs\}}dv\,ds\,dt,$$

а $P_1\left(x(t)\right)=z(t)+(y\circ x)(t)=z(t)+\int_{-\infty}^{\infty}y(s)x(t-s)ds$. Следствие 1 доказано.

**2.** Пусть $B = B(R)$ – банахова алгебра функций, в которой умножение задается формулой свертки (15). Роль единицы $e(t)$ в этом случае выполняет функция Хевисайда $h(t)=\begin{cases}0, & t<0;\\ 1, & t\geq 0,\end{cases}$ поскольку

$$(x\circ h)(t)=\frac{d}{dt}\int_0^t x(s)h(t-s)ds=\frac{d}{dt}\int_0^t x(s)ds=x(t).$$

Обозначим $\Lambda[x](t)=\int\limits_0^\infty \exp\{-st\}x(s)ds$ – преобразование Лапласа функции $x$. Тогда справедливо тождество

$$x(s)\equiv\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\Lambda[x](t)\exp\{st\}dt, \tag{19}$$

где $\sigma\in R$.

Найдем представление обратного элемента $x^{-1}$ функции $x\in B$, для которой $\Lambda[x]\neq 0$.

Лемма 2. *Обратный элемент $x^{-1}$ к функции $x\in B$, удовлетворяющей условию $\Lambda[x]\neq 0$, представим в виде*

$$x^{-1}(s)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\exp\{st\}}{t\,\Lambda[x](t)}dt. \tag{20}$$

Доказательство. Заметим, что преобразование Лапласа от функции Хевисайда дает функцию $\Lambda[h](s)=\frac{1}{s}$, $s\neq 0$. Кроме того, по свойству Лаплаcа-образа свертки справедливо равенство $\Lambda[x]\Lambda[x^{-1}]=\Lambda[x\circ x^{-1}]=\Lambda[h]$, откуда следует, что $\Lambda[x^{-1}](s)=\frac{1}{s\,\Lambda[x](s)}$ для $x\in B(R)$, где $\Lambda[x]\neq 0$. Подставив полученное выражение $\Lambda[x^{-1}]$ через $\Lambda[x]$ в формулу обращения (19) для обратного элемента $x^{-1}$, получим

$$x^{-1}(s)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\Lambda[x^{-1}](t)\exp\{st\}dt=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\exp\{st\}}{t\,\Lambda[x](t)}dt.$$

Лемма 2 доказана.

Если в формулу (20) подставить выражение, определяющее преобразование Лапласа, то она примет вид

$$x^{-1}(s)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\exp\{st\}}{t\,\Lambda[x](t)}dt=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{1}{t}\int\limits_0^\infty\frac{\exp\{(s+v)t\}}{x(v)}dvdt.$$

Рассмотрим еще один частный случай формул линейной интерполяции (2) с операцией умножения, определяемой сверткой (15).

Следствие 2. *Операторный многочлен*

$$L_1(F;x)=F(x_0)+\frac{1}{2\pi i}\frac{d}{dt}\int\limits_0^t\left[F\left(x_1(t-s)\right)-F\left(x_0(t-s)\right)\right]\times$$

$$\times\frac{d}{ds}\int\limits_0^s\left(x(s-v)-x_0(s-v)\right)\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\exp\{v\theta\}}{\theta\,\Lambda[x_1-x_0](\theta)}d\theta\,dv\,ds \tag{21}$$

*удовлетворяет интерполяционным условиям* (3). *Линейная интерполяционная формула* (21) *инвариантна относительно многочленов*

$$P_1\left(x(t)\right)=z(t)+\frac{d}{dt}\int\limits_0^t x(s)y(t-s)ds, \tag{22}$$

*где $z$ и $y$ – фиксированные элементы алгебры $B$.*

Доказательство. Для доказательства следствия 2 достаточно проверить, что равенства (2) и (4) с учетом правила умножения (15) представляются в виде (21) и (22) соответственно. Действительно, в силу определения свертки (15), операторный многочлен

$$L_1(F;x)=F(x_0)+(x_1-x_0)^{-1}\circ(x-x_0)\circ[F(x_1)-F(x_0)]=$$

$$=F(x_0)+\frac{d}{ds}\int\limits_0^s\left(x(s-v)-x_0(s-v)\right)\left(x_1(v)-x_0(v)\right)^{-1}dv\circ\left[F(x_1)-F(x_0)\right]=$$

$$= F(x_0) + \frac{d}{dt}\int_0^t \left[ F\left(x_1(t-s)\right) - F\left(x_0(t-s)\right) \right] \frac{d}{ds}\int_0^s \left( x(s-v) - x_0(s-v) \right)\left( x_1(v) - x_0(v) \right)^{-1} dv\, ds =$$

$$= F(x_0) + \frac{1}{2\pi i}\frac{d}{dt}\int_0^t \left[ F\left(x_1(t-s)\right) - F\left(x_0(t-s)\right) \right] \frac{d}{ds}\int_0^s \left( x(s-v) - x_0(s-v) \right) \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{\exp\{v\theta\}}{\theta\, \Lambda[x_1 - x_0](\theta)} d\theta dv\, ds,$$

а $P_1(x) = z + y \circ x = z + \frac{d}{dt}\int_0^t x(s) y(t-s) ds.$ Следствие 2 доказано.

В заключение отметим, что представленные результаты могут быть использованы в теоретических исследованиях как основа построения приближенных методов интерполяционного типа для решения некоторых нелинейных операторных уравнений, встречающихся как в математике, так и различных прикладных областях естествознания. Достаточно полная теория интерполирования операторов, заданных на множествах функций и матриц, изложена в монографиях [4, 5].

**Благодарности.** Работа выполнена в рамках Государственной программы научных исследований «Конвергенция-2025», подпрограмма «Математические модели и методы», задание 1.4.01.2.

**Acknowledgments.** This work was supported by the State Program of Scientific Research "Convergence-2025", subprogram "Mathematical models and methods", task 1.4.01.2.

## Список использованных источников

1. Гахов, Ф. Д. Уравнения типа свертки / Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский. – М.: Наука, 1978. – 296 с.
2. Гельфанд, И. М. Коммутативные нормированные кольца / И. М. Гельфанд, Д. А. Райков, Г. Е. Шилов. – М.: Физматлит, 1960. – 316 с.
3. Васильев, И. Л. Разностные уравнения первого порядка с переменными коэффициентами в банаховых модулях последовательностей / И. Л. Васильев, Д. А. Новичкова // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2012. – Т. 56, № 2. – С. 5–9.
4. Янович, Л. А. Основы теории интерполирования функций матричных переменных / Л. А. Янович, М. В. Игнатенко; Нац. акад. наук Беларуси, Ин-т математики. – Минск: Беларус. навука, 2016. – 281 с.
5. Янович, Л. А. Интерполяционные методы аппроксимации операторов, заданных на функциональных пространствах и множествах матриц / Л. А. Янович, М. В. Игнатенко; Нац. акад. наук Беларуси, Ин-т математики. – Минск: Беларус. навука, 2020. – 476 с.
6. Наймарк, М. А. Нормированные кольца / М. А. Наймарк. – М.: Наука, 1968. – 664 с.
7. Хелемский, А. Я. Лекции по функциональному анализу / А. Я. Хелемский. – М.: МЦНМО, 2004. – 560 с.
8. Хелемский, А. Я. Банаховы и полинормированные алгебры: общая теория, представления, гомологии / А. Я. Хелемский. – М.: Наука, 1989. – 464 с.

## References

1. Gakhov F. D., Chersky Yu. I. *Equations of Convolution Type*. Moscow, Nauka Publ., 1978. 296 p. (in Russian.).
2. Gelfand I. M., Raikov D. A., Shilov G. E. *Commutative Normed Rings*. Moscow, Fizmatlit Publ., 1960. 316 p. (in Russian.).
3. Vasiliev I. L., Novichkova D. A. First-order difference equations with variable coefficients in Banach modules of sequences. *Doklady Natsional'noy akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2012, vol. 56, no. 2, pp. 5–9 (in Russian).
4. Yanovich L. A., Ignatenko M. V. *Bases of the Theory of Interpolation of Functions of Matrix Variables*. Minsk, Belaruskaya navuka Publ., 2016. 281 p. (in Russian).
5. Yanovich L. A., Ignatenko M. V. *Interpolation Methods for Approximation of Operators Defined on Function Spaces and Sets of Matrices*. Minsk, Belaruskaya navuka Publ., 2020. 476 p. (in Russian).
6. Naimark M. A. *Normalized Rings*. Moscow, Nauka Publ., 1968. 664 p. (in Russian).
7. Helemsky A. Ya. *Lectures on Functional Analysis*. Moscow, MTsNMO Publ., 2004. 560 p. (in Russian.).
8. Helemsky A. Ya. *Banachs and Polynormed Algebras: General Theory, Representations, Homology*. Moscow, Nauka Publ., 1989. 464 p. (in Russian).

## Информация об авторе

**Игнатенко Марина Викторовна** – кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой веб-технологий и компьютерного моделирования, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: ignatenkomv@bsu.by. https://orcid.org/0000-0002-8029-1842

## Information about the author

**Marina V. Ignatenko** – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Head of Web-Technologies and Computer Simulation Department, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: ignatenkomv@bsu.by. https://orcid.org/0000-0002-8029-1842