ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)

МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

УДК 517.5 Поступила в редакцию 13.11.2024
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2025-61-1-7-16 Received 13.11.2024

П. Г. Поцейко

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Республика Беларусь

ОБ ОЦЕНКАХ РАВНОМЕРНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ РАЦИОНАЛЬНЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРОМ ФУРЬЕ – ЧЕБЫШЁВА

Аннотация. Решается задача нахождения новых оценок равномерных приближений рациональным интегральным оператором Фурье – Чебышёва на классах функций Маркова; функций со степенной особенностью; сопряженных функций с плотностью, имеющей степенную особенность; сингулярных интегралов с ядром Коши, весом Чебышёва второго рода и плотностью, имеющей степенную особенность. В ряде случаев найденные оценки имеют более высокий порядок убывания в сравнении с уже известными ранее соответствующими результатами.

Ключевые слова: рациональные интегральные операторы Фурье – Чебышёва, равномерные приближения, функции Маркова, сопряженные функции, сингулярные интегралы с ядром Коши

Для цитирования. Поцейко, П. Г. Об оценках равномерных приближений некоторых классов функций рациональным интегральным оператором Фурье – Чебышёва / П. Г. Поцейко // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. – 2025. – Т. 61, № 1. – С. 7–16. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2025-61-1-7-16

Pavel G. Patseika

Yanka Kupala State University of Grodno, Grodno, Republic of Belarus

ON ESTIMATES OF UNIFORM APPROXIMATIONS OF SOME CLASSES OF FUNCTIONS BY THE FOURIER – CHEBYSHEV RATIONAL INTEGRAL OPERATOR

Abstract. The problem of finding new estimates of uniform approximations by the Fourier – Chebyshev rational integral operator on classes of Markov functions, functions with a power singularity, conjugate functions with a density having a power singularity, and singular integrals with a Cauchy kernel, Chebyshev weight of the second kind and density having a power singularity. In some cases, the estimates found have a greater descending order, in comparison with the previously known corresponding results.

Keywords: Fourier – Chebyshev rational integral operators, uniform approximations, Markov functions, conjugate functions, singular integrals with Cauchy kernel

For citation. Patseika P. G. On estimates of uniform approximations of some classes of functions by the Fourier – Chebyshev rational integral operator. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2025, vol. 61, no. 1, pp. 7–16 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2025-61-1-7-16

Введение. В 1979 г. Е. А. Ровба [1] построил интегральный оператор на отрезке [–1,1], ассоциированный с системой рациональных функций Чебышёва – Маркова, который является естественным обобщением частичных сумм полиномиального ряда Фурье – Чебышёва. Он получил название рационального интегрального оператора Фурье – Чебышёва. Образом введенного оператора является рациональная функция вида

$$\frac{p_n(x)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(1+a_k x)}, \quad p_n(x)\in\mathbb{P}_n,$$

где параметры a_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, либо являются действительными и $|a_k| < 1$, либо попарно комплексно сопряженными и выбираются заранее специальным образом соответственно решаемой задаче.

Введенный рациональный интегральный оператор нашел широкое применение при решении задач рациональной аппроксимации как с фиксированным количеством геометрически различных полюсов, так и с произвольным количеством полюсов на некоторых классах непрерывных на отрезке [–1,1] функций [2–6]. При этом нередко интегральные представления соответствующих мажорант равномерных приближений содержат интегралы следующего вида:

$$I_n(B) = \int_0^1 \frac{u^{s-1}}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}}} g(u) |\pi_n(u)| du, \quad s \in (0, +\infty), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

$$\pi_n(u) = \prod_{k=1}^{n} \frac{\beta_k - u}{\beta_k + u}, \quad \beta_k \in (0, 1],$$

где $B = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ – набор параметров подынтегральной функции, $g(u)$ – непрерывная на отрезке [0,1] функция.

Интегралы предполагаются существующими при любых значениях входящих в них параметров. Вычисление в явном виде таких интегралов представляет собой определенные трудности. Отсюда естественным образом возникает задача получения оценок интегралов $I_n(B)$. В случае, когда среди параметров β_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, не более m различных, задача решена в приведенных выше работах. Для этого широко применялся метод Лапласа [7, 8] исследования асимптотического поведения интегралов. В случае, когда нет ограничений на количество геометрически различных параметров β_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, интегральные представления (1) исследованы, на наш взгляд, недостаточно.

В работе [9] (см. также [10]) была доказана

Т е о р е м а 1 [9]. *Для любых* $\alpha > 0$ и $n \in \mathbb{N}$ *существует произведение* $\pi_n(u)$ *с нулями лишь на* (0,1] *такое, что*

$$u^{\alpha} \left|\pi_n(u)\right| \le \nu(\alpha) e^{-\pi\sqrt{n\alpha}}, \quad 0 \le u \le 1, \tag{2}$$

где $\nu(\alpha)$ – *некоторая положительная величина, не зависящая от n, но зависящая от* α.

Теорема 1 нашла широкое применение при решении различных аппроксимационных задач. Поскольку подынтегральная функция интеграла (1) содержит произведение $\pi_n(u)$, то представляет интерес исследование мажоранты интеграла (1) с использованием оценки (2).

Целью настоящей работы является получение оценок равномерных приближений рациональным интегральным оператором Фурье – Чебышёва на некоторых классах непрерывных функций на отрезке [–1,1] путем нахождения мажоранты интегралов $I_n(B)$ без ограничений на количество геометрически различных параметров $\beta_k, k = 1, 2, \ldots, n$.

Оценка интеграла $I_n(B)$. Установим оценку сверху интеграла $I_n(B)$. Отметим, что для существования интеграла (1) и интеграла справа в последней оценке при любых значениях параметра $s \in (0, +\infty)$ будем полагать, что $g(u) \sim (1-u)^p g_1(1)$ при $u \to 1$, где $p = [s/2]$ – целая часть числа $s/2$, $|g_1(u)| \le M$.

Т е о р е м а 2. *Существует такой набор параметров* β_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, *что при любом* $s \in (0, +\infty)$ *для интеграла* $I_n(B)$ *имеет место оценка сверху*

$$I_n(B) \le M \frac{\pi}{\sqrt{s}} \nu(s) \sqrt{n} e^{-\pi\sqrt{sn}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right), \quad n \to \infty, \tag{3}$$

где $\nu(s)$ – *величина из оценки* (2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Интеграл (1) представим в виде

$$I_n(B) = \int_0^1 \frac{u^{s-1-r}}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}}} g(u) u^r \left|\prod_{k=1}^{n} \frac{\beta_k - u}{\beta_k + u}\right| du, \quad s \in (0, +\infty), \quad n \in \mathbb{N},$$

где $r = r(n)$ – некоторая положительная величина, зависящая от n. Ее явное представление будет установлено ниже. Воспользовавшись оценкой (2), из последнего представления находим, что

$$I_n(B) \le \nu(r) \mathrm{e}^{-\pi\sqrt{nr}} \int_0^1 \frac{u^{s-1-r}}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}}} g(u)du, \quad s \in (0,+\infty), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Используя представление функции $g(u) = (1-u)^p g_1(u)$, приходим к оценке

$$I_n(B) \le M\nu(r) \mathrm{e}^{-\pi\sqrt{nr}} \int_0^1 \frac{u^{s-1-r}}{(1-u)^{\frac{s}{2}-p}} du, \quad s \in (0,+\infty), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Интеграл в оценке справа вычисляется в явном виде

$$\int_0^1 \frac{u^{s-1-r}}{(1-u)^{\frac{s}{2}-p}} du = \frac{\Gamma\left(1+p-\frac{s}{2}\right)\Gamma(s-r)}{\Gamma\left(1+p+\frac{s}{2}-r\right)},$$

где $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера.

Будем полагать, что $r = s - \rho_n$, где $\rho_n \to +0$ при $n \to \infty$. В этом случае последнее соотношение после несложных преобразований и асимптотических разложений примет вид

$$\int_0^1 \frac{u^{\rho_n-1}}{(1-u)^{\frac{s}{2}-p}} du = \frac{\Gamma\left(1+p-\frac{s}{2}\right)\Gamma(\rho_n)}{\Gamma\left(1+p-\frac{s}{2}+\rho_n\right)} = \Gamma(\rho_n)\big(1+O(\rho_n)\big), \quad n \to \infty.$$

Из известного свойства гамма-функции $\Gamma(\rho_n)\Gamma(1-\rho_n) = \pi / \sin \pi\rho_n$ и таких же асимптотических разложений получим

$$\Gamma(\rho_n) = \frac{1}{\rho_n} + O(1), \quad \rho_n \to +0,$$

причем второстепенный член асимптотического разложения неотрицательный. С учетом последнего асимптотического равенства оценка (4) примет вид

$$I_n(B) \le M\nu(s) \mathrm{e}^{-\pi\sqrt{n(s-\rho_n)}} \left(\frac{1}{\rho_n} + O(1)\right), \quad s \in (0,+\infty), \quad n \to \infty. \tag{5}$$

Выберем число ρ_n, $\rho_n > 0$, таким образом, чтобы функция $\mu(\rho_n) = \mathrm{e}^{-\pi\sqrt{n(s-\rho_n)}} \big/ \rho_n$ была минимальной. Найдем

$$\mu'(\rho_n) = \frac{\mathrm{e}^{-\pi\sqrt{n(s-\rho_n)}}}{\rho_n^2} \left(\frac{\pi n \rho_n}{2\sqrt{n(s-\rho_n)}} - 1\right) = 0.$$

Следовательно, оптимальный параметр ρ_n удовлетворяет квадратному уравнению

$$\pi^2 n \rho_n^2 + 4\rho_n - 4s = 0, \quad \rho_n > 0.$$

Отсюда находим, что

$$\rho_n^* = \frac{2}{\pi^2 n}\left(\sqrt{1+\pi^2 ns} - 1\right) = \frac{2\sqrt{s}}{\pi\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \to \infty.$$

Учитывая асимптотическое разложение с оптимальным параметром ρ_n^*

$$\mathrm{e}^{-\pi\sqrt{n(s-\rho_n^*)}} = \mathrm{e}^{-\pi\sqrt{ns}}\left(2+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right), \quad n\to\infty,$$

из неравенства (5) придем к оценке (3). Теорема 2 доказана.

Отметим, что при решении задач рациональной аппроксимации в [11, 12] также возникала необходимость оценки сверху интеграла, схожего с интегралом (1), с применением неравенства (2). При этом использовался прием, где $\rho_n^* = 1/\sqrt{n}$. По-видимому, такой выбор не влияет на порядок оценки, а лишь на константу в оценке (3).

В последующих разделах нашей работы применим результаты теоремы 2 для получения оценок равномерных рациональных приближений интегральным оператором Фурье – Чебышёва на некоторых классах непрерывных на отрезке [–1,1] функций.

Аппроксимации функций Маркова. В работе [2] исследовались аппроксимации на отрезке [–1,1] рациональным интегральным оператором Фурье – Чебышёва $s_n(\cdot,\cdot)$ с набором параметров $A=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$, $\alpha_k\in[0,1)$, $k=1,2,\ldots,n$, функции Маркова

$$\hat{\mu}(z) = \int\limits_{\mathrm{supp}\mu}\frac{d\mu(t)}{t-z}, \quad z\in\mathbb{C}.$$

В частности, когда мера удовлетворяет условию

$$\mathrm{supp}\mu = [1,a], \quad d\mu(t)\asymp(t-1)^{\gamma}dt, \quad t\in[1,a], \tag{6}$$

для равномерных приближений

$$\varepsilon_n(A) = \|\hat{\mu}(x)-s_n(\hat{\mu},x)\|_{C[-1,1]}, \quad n\in\mathbb{N},$$

установлена оценка

$$\varepsilon_n(A)\le 2^{1+\gamma}\int\limits_0^D\frac{u^{2\gamma-1}}{(1+u)(1-u^2)^{\gamma}}\left|\prod_{k=1}^n\frac{\beta_k-u}{\beta_k+u}\right|du, \quad \beta_k=\frac{1-\alpha_k}{1+\alpha_k}, \quad D\in(0,1]. \tag{7}$$

Интеграл справа представляет собой интеграл из теоремы 2 при $s = 2\gamma$ с $M = 1$. Отсюда следует

Т е о р е м а 3. *Для равномерных рациональных приближений на отрезке* [–1,1] *функций Маркова с мерой, удовлетворяющей условию* (6), *существует такой набор параметров A^* для рационального интегрального оператора Фурье – Чебышёва, что справедлива оценка сверху*

$$\varepsilon_n(A^*)\le\frac{2^{\gamma+\frac{1}{2}}\pi}{\sqrt{\gamma}}\nu(2\gamma)\sqrt{n}\mathrm{e}^{-\pi\sqrt{2\gamma n}}\left(1+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right), \quad n\to\infty,$$

где $\nu(s)$ *– величина из оценки* (2).

Известно [13, 14], что функция $f_\gamma(x)=(1-x)^{\gamma}$, $x\in[-1,1]$, представляется в виде

$$(1-x)^{\gamma} = -\frac{\sin\pi\gamma}{\pi}\hat{\mu}(x)+g(z),$$

где $\hat{\mu}(x)$ – функция Маркова, удовлетворяющая условию теоремы 3, $g(z)$ – голоморфная в круге радиуса $a > 1$ с центром в начале координат функция. На основании последнего представления и результата, содержащегося в теореме 3, получим

С л е д с т в и е. *Для равномерных приближений функции $f_\gamma(x)$ на отрезке* [–1,1] *существует такой набор параметров A^* для рационального интегрального оператора Фурье – Чебышёва, что справедлива оценка сверху*

$$\varepsilon_n(f_\gamma,A^*)\le\frac{2^{\gamma+\frac{1}{2}}|\sin\pi\gamma|}{\sqrt{\gamma}}\nu(2\gamma)\sqrt{n}\mathrm{e}^{-\pi\sqrt{2\gamma n}}\left(1+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right), \quad n\to\infty.$$

Интересно сравнить оценку, установленную в теореме 3, с порядковой оценкой наилучших равномерных рациональных приближений функций Маркова, удовлетворяющей условию (6), на отрезке [–1,1], установленную в [14]:

$$R_n(\hat{\mu},[-1,1]) \asymp e^{-2\pi\sqrt{\gamma n}}, \quad n \to \infty.$$

Укажем также на результат работы [15], содержащий двухстороннюю оценку наилучших равномерных рациональных приближений функции Маркова, удовлетворяющей условию (6), на отрезке [–1,1] частичными суммами рядов Фурье по системе рациональных функций Джрбашяна – Китбаляна [16]:

$$c_1 e^{-2\pi\sqrt{\gamma n}} \le \Lambda_n(\hat{\mu},\,[-1,1]) \le c_2\sqrt{n}e^{-2\pi\sqrt{\gamma n}},$$

где c_1, c_2 – некоторые положительные величины, не зависящие от n.

Отметим работу [17], в которой исследованы наилучшие равномерные рациональные приближения четного и нечетного продолжения функций со степенной особенностью при помощи функций Маркова.

Аппроксимации сопряженных функций. В [3] исследовались аппроксимации сопряженных функций на отрезке [–1,1]

$$\hat{f}(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(t)dt}{(t-x)\sqrt{1-t^2}}, \quad x \in (-1,1).$$

Здесь интеграл понимается в смысле главного значения по Коши и для его существования достаточно, чтобы плотность $f(t)$ удовлетворяла условию Липшица любого порядка. Для решения задач аппроксимации на классах сопряженных на отрезке [–1,1] функций на основании рационального интегрального оператора Фурье – Чебышёва был введен соответствующий сопряженный оператор

$$\hat{s}_n(f,x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{s_n(f,t)dt}{(t-x)\sqrt{1-t^2}}, \quad x \in (-1,1).$$

В случае, когда плотность сопряженной функции представляется в виде $f_\gamma(x) = (1-x)^\gamma$, $\gamma \in (0,+\infty)\setminus\mathbb{N}$, $x \in [-1,1]$, для приближений

$$\hat{\varepsilon}_n(f_\gamma,x,A) = \hat{f}_\gamma(x) - \hat{s}_n(f_\gamma,x), \quad x \in [-1,1],$$

было найдено интегральное представление

$$\hat{\varepsilon}_n(f_\gamma,x,A) = -\frac{2^{1-\gamma}\sin\pi\gamma}{\pi}\int_0^1\frac{(1-t)^{2\gamma}t^{-\gamma}}{\sqrt{1-2t\cos u+t^2}}\sin\left(\arg\frac{\xi\omega_n(\xi)}{1-t\xi}\right)\prod_{k=1}^{n}\frac{t-\alpha_k}{1-\alpha_k t}dt, \quad x = \cos u.$$

Из последнего интегрального представления естественным образом следует, что для равномерных приближений

$$\hat{\varepsilon}_n(f_\gamma,A) = \|\hat{f}_\gamma(x) - \hat{s}_n(f_\gamma,x)\|_{C[-1,1]}, \quad n \in \mathbb{N},$$

справедлива следующая оценка сверху:

$$\hat{\varepsilon}_n(f_\gamma,A) \le \frac{2^{1-\gamma}|\sin\pi\gamma|}{\pi}\int_0^1(1-t)^{2\gamma-1}t^{-\gamma}\left|\prod_{k=1}^{n}\frac{t-\alpha_k}{1-\alpha_k t}\right|dt, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Выполнив в интеграле справа замену переменного интегрирования по формуле $t = (1-u)/(1+u)$, $dt = -2du/(1+u)^2$, получим

$$\hat{\varepsilon}_n(f_\gamma,A) \le \frac{2^{1+\gamma}|\sin\pi\gamma|}{\pi}\int_0^1\frac{u^{2\gamma-1}}{(1+u)(1-u^2)^\gamma}\left|\prod_{k=1}^{n}\frac{\beta_k-u}{\beta_k+u}\right|du, \quad \beta_k = \frac{1-\alpha_k}{1+\alpha_k}.$$

Интеграл справа представляет собой интеграл из теоремы 2 при $s = 2\gamma$. Отсюда следует

Теорема 4. *Для равномерных рациональных приближений сопряженной функции на отрезке* $[-1,1]$ *с плотностью* $f_\gamma(x)$ *существует такой набор параметров* A^* *для сопряженного рационального интегрального оператора Фурье – Чебышёва, что справедлива оценка сверху*

$$\hat{\varepsilon}_n(f_\gamma, A^*) \le \frac{2^{\gamma+\frac{1}{2}}|\sin\pi\gamma|}{\sqrt{\gamma}}\nu(2\gamma)\sqrt{n}\mathrm{e}^{-\pi\sqrt{2\gamma n}}\left(1+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right), \quad n\to\infty,$$

где $\nu(2\gamma)$ *– величина из оценки* (2).

Из теоремы 4 и следствия приходим к равенству мажорант соответственно равномерных рациональных приближений функции $f_\gamma(x)$ и сопряженной функции с плотностью $f_\gamma(x)$:

$$\varepsilon_n^*(f_\gamma, A^*) = \hat{\varepsilon}_n^*(f_\gamma, A^*), \quad n\in\mathbb{N}.$$

Рациональные аппроксимации функций со степенной особенностью. Пусть на отрезке $[-1,1]$ задана функция $f_s(x) = |x|^s$, $s\in(0,+\infty)\setminus\mathbb{N}$. Исследуем ее приближения рациональным интегральным оператором Фурье – Чебышёва при произвольном выборе полюсов. Введем следующие обозначения:

$$\varepsilon_{2n}(f_s, x, A) = |x|^s - s_{2n}(|\cdot|^s, x), \quad x\in[-1,1],$$

$$\varepsilon_{2n}(f_s, A) = \left\| |x|^s - s_{2n}(|\cdot|^s, x)\right\|_{C[-1,1]}, \quad n\in\mathbb{N},$$

где $A = \{z_1, z_2, \dots, z_{2n}\}$ представляет собой множество параметров аппроксимирующей рациональной функции, заданных следующим образом:

$$z_k = i\alpha_k, \quad \alpha_k\in[0,1), \quad k=1,2,\dots,n, \quad \alpha_k = -\alpha_{n+k},$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_r = 0, \quad r = \left[\frac{s}{2}\right], \quad n > r,$$

где символ $[\cdot]$ обозначает целую часть числа.

Решение задачи нахождения оценки сверху равномерных приближений $\varepsilon_{2n}(f_s, A)$ содержится в [4]. В нашей работе предложим несколько иной подход. С этой целью заметим, что для равномерных приближений в [4] было найдено соотношение

$$\varepsilon_{2n}(f_s, A) \le \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right|\left|\int_0^1 \frac{u^{s-1}}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}}}\left(\frac{1-u}{1+u}\right)^r \left|\prod_{k=1}^m \frac{\beta_k - u}{\beta_k + u}\right| du\right|, \quad n\in\mathbb{N},$$

где

$$\beta_k = \frac{1-\alpha_{r+k}^2}{1+\alpha_{r+k}^2}, \quad n = m + r, \quad n > r, \quad r = \left[\frac{s}{2}\right].$$

Интеграл справа в последней оценке представляет собой интеграл из теоремы 2. Отсюда следует

Теорема 5. *Для равномерных рациональных приближений функции* $f_s(x)$ *на отрезке* $[-1,1]$ *существует такой набор параметров* A^* *для рационального интегрального оператора Фурье – Чебышёва, что справедлива оценка сверху*

$$\varepsilon_{2n}(f_s, A^*) \le \frac{2}{\sqrt{s}}\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right|\nu(s)\sqrt{n}\mathrm{e}^{-\pi\sqrt{sn}}\left(1+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right), \quad n\to\infty, \tag{8}$$

где $\nu(s)$ *– величина из оценки* (2).

Отметим, что отличительной особенностью оценки, полученной в теореме 5, в сравнении с соответствующей оценкой, найденной в работе [4]:

$$\varepsilon_{2n}(f_s, A^*) \le c_3(s)\sqrt{n}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}\sqrt{sn}}, \quad n \to \infty, \tag{9}$$

является более высокий порядок малости. Вместе с тем в оценке (8) неизвестно явное представление параметров аппроксимирующей рациональной функции, при которой она достигается, тогда как оценка (9) достигается для некоторой модификации параметров, введенных в [18], а именно параметров α_k^*, $k = 1,2,\ldots,n$, для каждого фиксированного $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\alpha_1^* = \alpha_2^* = \ldots = \alpha_r^* = 0, \quad r = \left[\frac{s}{2}\right],$$

$$\alpha_{r+k}^* = \sqrt{\frac{1-\beta_k^2}{1+\beta_k^2}}, \quad \beta_k^* = \mathrm{e}^{-\frac{\pi k}{2\sqrt{sm}}}, \quad k = 1,2,\ldots,m, \quad n = m + r. \tag{10}$$

Интересно сравнить оценку (8) с асимптотической оценкой наилучших равномерных рациональных приближений функции $|x|^s$, $s \in (0,+\infty) \setminus \mathbb{N}$, на отрезке [–1,1], установленную в [19]:

$$R_{n,n}(|x|^s, [-1,1]) = 4^{1+\frac{s}{2}}\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right|\mathrm{e}^{-\pi\sqrt{sn}}\left(1+o(1)\right), \quad n \to \infty,$$

где $R_{n,n}(|x|^s, [-1,1])$ – наилучшие равномерные рациональные приближения функции $|x|^s$ на отрезке [–1,1].

В [20, с. 96] содержится соотношение, выражающее зависимость между наилучшими равномерными полиномиальными приближениями исследуемых функций:

$$E_{2n}(|x|^{2\gamma}, [-1,1]) = \frac{1}{2^\gamma}E_n\left((1-x)^\gamma, [-1,1]\right).$$

Рассуждая аналогичным образом и исходя из оценки равномерных рациональных приближений функции $f_\gamma(x) = (1-x)^\gamma$ на отрезке [–1,1], содержащейся в следствии, можно получить оценку (8). Действительно,

$$\varepsilon_{2n}^*(f_s, A^*) = \frac{1}{2^\gamma}\varepsilon_n^*(f_\gamma, A^*) = \frac{2}{\sqrt{s}}\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right|\nu(s)\sqrt{n}\mathrm{e}^{-\pi\sqrt{sn}}\left(1+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right), \quad s = 2\gamma, \quad n \to \infty,$$

где $\varepsilon_n^*(\cdot, A^*)$ – мажоранты равномерных рациональных приближений соответствующих функций.

Аппроксимации сингулярных интегралов с ядром Коши и весом Чебышёва второго рода. Будем рассматривать сингулярные интегралы вида

$$\tilde{f}(x) = \int_{-1}^{1}\frac{f(t)}{t-x}\sqrt{1-t^2}\,dt, \quad x \in [-1,1], \tag{11}$$

понимаемые в смысле главного значения по Коши, где плотность *f*(*t*) удовлетворяет условию Липшица любого порядка. Исследуем равномерную рациональную аппроксимацию этих функций на отрезке [–1,1] рациональными интегральными операторами Фурье – Чебышёва в случае, когда плотность $f_s(x) = |x|^s$, $s \in (0,+\infty) \setminus \mathbb{N}$. Положим

$$\varepsilon_{2n-1}(\tilde{f}_s, A) = \|\tilde{f}_s(x) - s_{2n-1}(\tilde{f}_s, x)\|_{C[-1,1]}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где

$$\tilde{f}_s(x) = \int_{-1}^{1}\frac{|t|^s}{t-x}\sqrt{1-t^2}\,dt, \quad x \in [-1,1],$$

$A = (z_1, z_2, \ldots, z_{2n-1})$ – набор параметров аппроксимирующей рациональной функции, заданных следующим образом:

$$z_k = i\alpha_k, \quad \alpha_k \in [0,1), \quad k = 1,2,\ldots,n-1, \quad \alpha_k = -\alpha_{n+k}, \quad z_{2n-1} = 0,$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_r = 0, \quad r = \left[\frac{s}{2}\right], \quad n > r.$$

Известно [5, 6], что для равномерных приближений $\varepsilon_{2n-1}(\tilde{f}_s, A)$ имеет место оценка

$$\varepsilon_{2n-1}(\tilde{f}_s, A) \le 2\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right| \int_0^1 \frac{u^{s-1}}{(1+u)^2(1-u^2)^{\frac{s}{2}}} \left(\frac{1-u}{1+u}\right)^r \left|\prod_{k=1}^{n_1} \frac{\beta_k - u}{\beta_k + u}\right| du, \quad n \in \mathbb{N},$$

где

$$\beta_k = \frac{1-\alpha_{r+k}^2}{1+\alpha_{r+k}^2}, \quad n = n_1 + r + 1, \quad r = \left[\frac{s}{2}\right].$$

Интеграл в правой части последней оценки удовлетворяет условиям теоремы 2. Следовательно, имеет место

Т е о р е м а 6. *Для равномерных рациональных приближений сингулярного интеграла* (11) *с плотностью $f_s(x)$ на отрезке* [–1,1] *существует такой набор параметров A^* для рационального интегрального оператора Фурье – Чебышёва, что справедлива оценка сверху*

$$\varepsilon_{2n-1}(\tilde{f}_s, A^*) \le \frac{2\pi}{\sqrt{s}}\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right| \nu(s)\sqrt{n}\,e^{-\pi\sqrt{sn}}\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right), \quad n \to \infty, \tag{12}$$

где $\nu(s)$ – величина из оценки (2).

Отметим, что в работе [6] также исследовались равномерные рациональные аппроксимации сингулярного интеграла (11) с плотностью $f_s(x)$ на отрезке [–1,1] рациональным интегральным оператором Фурье – Чебышёва с произвольным количеством полюсов. С использованием параметров аппроксимирующей рациональной функции вида (10) была установлена оценка сверху

$$\varepsilon_{2n-1}(\tilde{f}_s, A^*) \le c_4(s)\sqrt{n}\,e^{-\frac{\pi}{2}\sqrt{sn}}, \quad n \to \infty.$$

Она уступает по скорости оценке, полученной в теореме 6, являясь менее точной. Вместе с тем, в отличие от последней оценки, явный вид параметров аппроксимирующей рациональной функции, при которых достигается оценка (12), неизвестен.

Заключение. Исследованы равномерные приближения рациональным интегральным оператором Фурье – Чебышёва на некоторых классах непрерывных на отрезке [–1,1] функций. Воспользовавшись тем фактом, что мажоранты равномерных приближений в ряде случаев содержат схожий интеграл, зависящий от параметров аппроксимирующей рациональной функции, была найдена его оценка методами, опирающимися на результаты [9, 10]. В дополнение уже известных соотношений были найдены новые оценки равномерных рациональных приближений на классах функций Маркова; функций со степенной особенностью; сопряженных функций с плотностью, имеющей степенную особенность; сингулярных интегралов с ядром Коши, весом Чебышёва второго рода и плотностью, имеющей степенную особенность. В ряде случаев найденные оценки имеют больший порядок убывания в сравнении с полученными ранее.

Благодарности. Автор выражает признательность профессору Е. А. Ровбе за ряд полезных замечаний и помощь в работе.

Acknowledgements. The author is grateful to Professor E. A. Rovba for a number of useful comments and assistance in the work.

Список использованных источников

1. Ровба, Е. А. Об одном прямом методе в рациональной аппроксимации / Е. А. Ровба // Доклады Академии наук БССР. – 1979. – Т. 23, № 11. – С. 968–971.

2. Поцейко, П. Г. Об одном рациональном интегральном операторе типа Фурье – Чебышёва и аппроксимации функций Маркова / П. Г. Поцейко, Е. А. Ровба, К. А. Смотрицкий // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. – 2020. – № 2. – С. 6–27. https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-2-6-27

3. Поцейко, П. Г. Сопряженный рациональный оператор Фурье – Чебышёва и его аппроксимационные свойства / П. Г. Поцейко, Е. А. Ровба // Известия вузов. Математика. – 2022. – № 3. – С. 44–60. https://doi.org/10.26907/0021-3446-2022-3-44-60

4. Поцейко, П. Г. Об оценках равномерных приближений рациональными интегральными операторами Фурье – Чебышёва при определенном выборе полюсов / П. Г. Поцейко, Е. А. Ровба // Математические заметки. – 2023. – Т. 113, вып. 6. – С. 876–894. https://doi.org/10.4213/mzm13621

5. Поцейко, П. Г. О приближениях одного сингулярного интеграла на отрезке рациональными интегральными операторами Фурье – Чебышёва / П. Г. Поцейко, Е. А. Ровба // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2024. – Т. 68, № 2. – С. 95–104. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2024-68-2-95-104

6. Поцейко, П. Г. О приближениях одного сингулярного интеграла на отрезке рациональными интегральными операторами Фурье – Чебышёва / П. Г. Поцейко, Е. А. Ровба // Математический сборник. – 2024. – Т. 215, № 7. – С. 96–137. https://doi.org/10.4213/sm10030

7. Евграфов, М. А. Асимптотические оценки и целые функции / М. А. Евграфов. – М.: Наука, 1979. – 320 с.

8. Федорюк, М. В. Асимптотика. Интегралы и ряды / М. В. Федорюк. – М.: Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 544 с.

9. Вячеславов, Н. С. О наименьших уклонениях функции sign x и ее первообразных от рациональных функций в метриках L_p, $0 < p \leq \infty$ / Н. С. Вячеславов // Математический сборник. – 1977. – Т. 103 (145), № 1 (5). – С. 24–36.

10. Ковалевская, Е. В. Построение экстремальных произведений Бляшке / Е. В. Ковалевская, А. А. Пекарский // Веснiк Гродзенскага дзяржаўнага ўнiверсiтэта iмя Янкi Купалы. Серыя 2. Матэматыка. Фiзiка. Iнфарматыка, вылiчальная тэхнiка i кiраванне. – 2017. – Т. 7, № 1. – С. 6–14.

11. Ровба, Е. А. О приближении функции $|\sin x|$ рациональными рядами Фурье / Е. А. Ровба // Математические заметки. – 1989. – Т. 46, № 2. – С. 52–59.

12. Ровба, Е. А. О рациональной интерполяции функции $|x|^\alpha$ по расширенной системе узлов Чебышёва – Маркова / Е. А. Ровба, В. Ю. Медведева // Весцi Нацыянальнай акадэмii навук Беларусi. Серыя фiзiка-матэматычных навук. – 2019. – Т. 55, № 4. – С. 391–405. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-4-391-405

13. Andersson, J. E. Best rational approximation to Markov functions / J. E. Andersson // Journal of Approximation Theory. – 1994. – Vol. 76, iss. 2. – P. 219–232. https://doi.org/10.1006/jath.1994.1015

14. Пекарский, А. А. Наилучшие равномерные рациональные приближения функций Маркова / А. А. Пекарский // Алгебра и анализ. – 1995. – Т. 7, вып. 2. – С. 121–132.

15. Пекарский, А. А. Равномерные приближения функций Стилтьеса посредством ортопроекции на множество рациональных функций / А. А. Пекарский, Е. А. Ровба // Математические заметки. – 1999. – Т. 65, вып. 3. – С. 362–368.

16. Джрбашян, М. М. Об одном обобщении полиномов Чебышёва / М. М. Джрбашян, А. А. Китбалян // Доклады Академии наук Армянской ССР. – 1964. – Т. 38, № 5. – С. 263–270.

17. Мардвилко, Т. С. Равномерная рациональная аппроксимация нечетного и четного преобразований Коши / Т. С. Мардвилко // Математический сборник. – 2025. – Т. 216, № 2. – С. 110–127. https://doi.org/10.4213/sm10116

18. Newman, D. I. Rational approximation to $|x|$ / D. I. Newman // Michigan Mathematical Journal. – 1964. – Vol. 11, iss. 1. – P. 11–14. https://doi.org/10.1307/mmj/1028999029

19. Stahl, H. Best uniform rational approximation of x^α on [0, 1] / H. Stahl // Bulletin of the American Mathematical Society. – 1993. – Vol. 28. – P. 116–122. https://doi.org/10.1090/s0273-0979-1993-00351-3

20. Бернштейн, С. Н. Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной. Часть 1 / С. Н. Бернштейн. – М.; Л.: Гл. ред. общетехн. лит., 1937. – 200 с.

References

1. Rovba E. A. On one direct method in rational approximation. *Doklady Akademii nauk BSSR* [Doklady of the Academy of Sciences of BSSR], 1979, vol. 23, no. 11, pp. 968–971 (in Russian).

2. Potseiko P. G., Rovba E. A., Smotritskii K. A. On one rational integral operator of Fourier–Chebyshev type and approximation of Markov functions. *Zhurnal Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika. Informatika = Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*, 2020, vol. 2, pp. 6–27 (in Russian). https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-2-6-27

3. Potseiko P. G., Rovba Y. A. Conjugate Rational Fourier–Chebyshev Operator and Its Approximation Properties. *Russian Mathematics*, 2022, vol. 66, pp. 35–49. https://doi.org/10.3103/s1066369x22030094

4. Potseiko P. G., Rovba Y. A. On Estimates of Uniform Approximations by Rational Fourier–Chebyshev Integral Operators for a Certain Choice of Poles. *Mathematical Notes*, 2023, vol. 113, pp. 815–830. https://doi.org/10.1134/s0001434623050231

5. Potsejko P. G., Rovba E. A. On approximations of a singular integral on a segment by Fourier–Chebyshev'srational integral operators. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2024, vol. 68, no. 2, pp. 95–104 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2024-68-2-95-104

6. Potseiko P. G., Rovba E. A. Approximations of one singular integral on an interval by Fourier–Chebyshev rational integral operators. *Sbornik: Mathematics*, 2024, vol. 215, iss. 7, pp. 953–992. https://doi.org/10.4213/sm10030e

7. Evgrafov M. A. *Asymptotic Estimates and Entire Functions*. Moscow, Nauka Publ., 1979, 320 p. (in Russian).

8. Fedoriuk M. V. *Asymptotics. Integrals and Series*. Moscow, Main Editorial Board of Physical and Mathematical Literature, 1987. 544 p. (in Russian).

9. Vjačeslavov N. S. On the least deviations of the function sign x and its primitives from the rational functions in the L_p metrics, $0 < p \leq \infty$. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1977, vol. 103, iss. 1, pp. 19–31. https://doi.org/10.1070/sm1977v032n01abeh002313

10. Kovalevskaya E. V., Pekarskii A. A. Construction of extremal Blaschke products. *Vesnik Grodzenskaga dzyarzhaunaga universiteta imya Yanki Kupaly. Seryya 2. Matematyka. Fizika. Infarmatyka, Vylichal'naya tekhnika i kiravanne = Vesnik of Yanka Kupala State University of Grodno. Series 2. Mathematics. Physics. Informatics, Computer Technology and Control*, 2017, vol. 7, iss. 1, pp. 6–14.

11. Rovba E. A. An approximation of $|\sin x|$ by rational Fourier series. *Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR*, 1989, vol. 46, pp. 788–794. https://doi.org/10.1007/BF01158146

12. Rovba Y. A., Medvedeva V. Ju. Rational interpolation of the function $|x|^\alpha$ by an extended system of Chebyshev – Markov nodes. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2019, vol. 55, no. 4, pp. 391–405 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-4-391-405

13. Andersson J. E. Best rational approximation to Markov functions. *Journal of Approximation Theory*, 1994, vol. 76, iss. 2, pp. 219–232. https://doi.org/10.1006/jath.1994.1015

14. Pekarskii A. A. Best uniform rational approximations of Markov functions. *Algebra i analiz = St. Petersburg Mathematical Journal*, 1996, vol. 7, iss. 2, pp. 277–285.

15. Pekarskii A. A., Rovba E. A. Uniform approximations of Stieltjes functions by orthogonal projection on the set of rational functions. *Mathematical Notes*, 1999, vol. 65, no. 3, pp. 302–307. https://doi.org/10.1007/bf02675071

16. Dzhrbashyan M. M., Kitbalyan A. A. On one generalization of Chebyshev polynomials. *Doklady Akademii nauk Armyanskoi SSR* [Doklady of the Academy of Sciences of the Armenian SSR], 1964, vol. 38, iss. 5, pp. 263–270 (in Russian).

17. Mardvilko T. S. Uniform rational approximation of odd and even Cauchy transforms. *Sbornik: Mathematics*, 2025, vol. 216, iss. 2, pp. 110–127. https://doi.org/10.4213/sm10116

18. Newman D. I. Rational approximation to $|x|$. *Michigan Mathematical Journal*, 1964, vol. 11, iss. 1, pp. 11–14. https://doi.org/10.1307/mmj/1028999029

19. Stahl H. Best uniform rational approximation of x^α on [0, 1]. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1993, vol. 28, pp. 116–122. https://doi.org/10.1090/s0273-0979-1993-00351-3

20. Bernshtein S. N. *Extremal Properties of Polynomials and Best Approximation of Continuous Functions of One Real Variable. Part 1.* Moscow, Leningrad, Main Editorial Board of General Technical Literature, 1937. 200 p. (in Russian).

Информация об авторе

Поцейко Павел Геннадьевич – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры фундаментальной и прикладной математики, Гродненский государственный университет имени Янки Купалы (ул. Ожешко, 22, 230023, Гродно, Республика Беларусь). E-mail: pahamatby@gmail.com. https://orcid.org/0000-0001-7835-0500

Information about the author

Pavel G. Patseika – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Associate Professor of the Department of Fundamental and Applied Mathematics, Yanka Kupala State University of Grodno (22, Ozheshko Str., 230023, Grodno, Republic of Belarus). E-mail: pahamatby@gmail.com. https://orcid.org/0000-0001-7835-0500