ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 519.173
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2025-61-1-17-22

Поступила в редакцию 11.09.2024
Received 11.09.2024

П. С. Гринчук

Институт тепло- и массообмена имени А. В. Лыкова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь

ПРИБЛИЖЕННОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ПЕРКОЛЯЦИОННОЙ КОНСТАНТЫ

Аннотация. Получено приближенное аналитическое выражение для топологической перколяционной константы, характеризующей наиболее общие топологические свойства фракталов, прежде всего такие, как связность вблизи порога перколяции.

Ключевые слова: теория перколяции, фрактал, гипотеза Александера – Орбаха

Для цитирования. Гринчук, П. С. Приближенное аналитическое выражение для топологической перколяционной константы / П. С. Гринчук // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. – 2025. – Т. 61, № 1. – С. 17–22. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2025-61-1-17-22

Pavel S. Grinchuk

A. V. Luikov Heat and Mass Transfer Institute of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus

APPROXIMATE ANALYTICAL EXPRESSION FOR THE TOPOLOGICAL PERCOLATION CONSTANT

Abstract. In this paper, we obtain an approximate analytical expression for the topological percolation constant, which characterizes the most general topological properties of fractals, primarily such as connectivity near the percolation threshold.

Keywords: percolation theory, fractal, Alexander – Orbach conjecture

For citation. Grinchuk P. S. Approximate analytical expression for the topological percolation constant. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2025, vol. 61, no. 1, pp. 17–22 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2025-61-1-17-22

Теория перколяции описывает геометрический фазовый переход в разупорядоченных системах [1] и фактически является дополнением фрактальной геометрии при описании многих процессов в реальных системах [2]. Такие системы гетерогенны и, как правило, состоят из элементов с принципиально разными свойствами. Например, это может быть смесь из диэлектрических и металлических шариков. При добавлении к диэлектрическим шарикам металлических, при определенной концентрации последних, в системе возникает макроскопическая электрическая проводимость. Теория перколяции описывает возникновение макроскопической проводимости в такой системе. Перколяционный кластер (ПК) является наиболее интересным объектом. Это кластер, который объединяет в себе только узлы одного сорта (например, только металлические шары), так что с любого узла ПК можно уйти на бесконечность, двигаясь только по узлам данного кластера. Перколяционный кластер обладает целым набором фрактальных свойств [3]. У него можно выделить несколько подсистем, главные из которых – скелет и поверхность [4]. Удаление узлов скелета приводит к разрыву макроскопической связности. Поверхность перколяционного кластера – это совокупность узлов кластера, рядом с которыми находятся узлы другого сорта.

Для целого ряда задач, описываемых теорией перколяции, обнаружены фрактальные объекты, фрактальная размерность которых близка к величине 4/3. Так, например, для двумерной решеточной задачи узлов фрактальная размерность доступной поверхности двумерного ПК $D_{\text{ext}} = 4/3$ [5]. Для другого близкого класса задач двумерной инвазивной перколяции, которая описывает фронт просачивающейся жидкости в пористом теле, фрактальная размерность поверхности инвазивного ПК $D_{\text{g}} \approx 1{,}37$ [6], что тоже согласуется с величиной 4/3.

Переход золь-гель для полимеров описывается с помощью перколяционных моделей [7], а формирующиеся случайные рельефы для поверхности и формы длинных полимерных молекул – с помощью методологии случайных блужданий [8, 9]. Наиболее точно это делает модель случайных блужданий без самопересечений. Фрактальная размерность траектории случайных блужданий без самопересечений в двумерном пространстве равна 4/3 [10]. Эта же фрактальная размерность и перколяционные модели возникают в задачах формирования пятен в фотосфере Солнца, описания цветных шумов в солнечном ветре, описания перехода в сверхпроводящее состояние (дробное уравнение Гинзбурга – Ландау) [11], роста сетей метро в мегаполисах [12] и ряда других.

Все эти объекты связаны через фундаментальные топологические свойства перколяционных систем и их фрактальности, понимание которых появилось совсем недавно. Речь идет об описании новых качеств фрактального перколяционного кластера и связанной с этим гипотезе Александера – Орбаха [13, 14].

Вблизи порога перколяции протекание происходит по фрактальному множеству (перколяционному кластеру), геометрия которого определяется исключительно законами критичности [11, 15]. Это условие критичности приводит к независимости геометрических характеристик фрактала от микроскопических свойств среды на мелких масштабах. Данное явление интерпретируется как универсальность фрактальной геометрии перколирующих множеств на пороге протекания. Наиболее яркая математическая формулировка этого свойства универсальности известна как гипотеза Александера – Орбаха [14, 15]. Это гипотеза о равенстве спектральной размерности фрактального множества (т. е. эффективного числа внутренних степеней свободы данного множества) 4/3 в точке перколяционного перехода во всех объемлющих целых размерностях пространства d не ниже 2 [13–15].

Гипотеза Александера – Орбаха была доказана в пространствах размерности больше 6 с помощью теории среднего поля. Но в объемлющих пространствах с размерностью от 2 до 5 ее доказательство столкнулось с трудностями. Прогресс в понимании проблемы был достигнут благодаря построению топологической теории фрактальных множеств [11, 16] и связан с трудами российского ученого А. В. Милованова (Институт космических исследований РАН, Москва, Россия).

Ключевым моментом, позволившим продвинуться в решении проблемы, стало соединение фрактальной геометрии и дифференциальной топологии. Благодаря этому были созданы новые математические объекты, такие как дробное евклидово пространство и фрактальное многообразие. Оказалось, что перколирующие фрактальные структуры представляют собой то, что можно назвать дробным шаром. Это подразумевает существование диффеоморфного отображения. На пороге протекания спектральная размерность такого дробного шара минимальна. При этом должно выполняться условие связности, т. е. целостности шара как топологического объекта. Спектральная размерность такого шара C_f должна быть достаточно низкой.

В работе [16] доказывается теорема об универсальном значении. Согласно этой теореме, спектральная размерность стягиваемого фрактального множества на пороге перколяции равна $C_f \approx 1{,}327\ldots$ для размерностей пространства $2 \le d \le 5$. В данном случае множество называется стягиваемым, если прямое отображение множества самое на себя гомотопно отображению этого множества, переводящего его в точку [17]. Данное условие стягиваемости эквивалентно условию отсутствия петель (самопересечений) при построении деревьев Кэли в теории среднего поля или отсутствию самопересечений перколяционного кластера в задачах перколяции на решетках Бете.

В очень важной для данного вопроса работе [16] показано, что константа C_f определяется как наименьшее из двух возможных решений трансцендентного уравнения:

$$C_f \frac{\pi^{C_f/2}}{\Gamma(C_f/2+1)} = \pi. \tag{1}$$

Здесь Γ обозначает гамма-функцию Эйлера. Доказанная в [16] теорема об универсальном значении позволяет рассматривать параметр C_f как фундаментальную топологическую константу, характеризующую геометрию перколяционного кластера и перколяционного перехода в пространствах с низкой размерностью $2 \le d \le 5$ [11].

Числовая величина константы C_f имеет фундаментальный математический смысл [11, 16]. Это минимальное дробное число степеней свободы, необходимое частице для достижения бесконечно удаленной точки при случайных блужданиях в евклидовом пространстве. В работах [8, 18, 19] число C_f названо постоянной протекания. Фактически это новая фундаментальная константа, характеризующая наиболее общие топологические свойства фракталов, прежде всего такие, как связность в окрестности особой точки – порога перколяции. Константа C_f немного меньше величины 4/3. Поэтому можно сказать, что топологическая теория фракталов опровергает гипотезу Александера – Орбаха в пространствах размерности $2 \le d \le 5$. Очень интересно отметить, что небольшое отклонение величины $C_f \approx 1{,}327...$ от 4/3 ($\Delta \approx 0{,}006$) обеспечивает сходимость ренорм-группового разложения термодинамических величин в точке перколяционного перехода [11].

Ввиду большого значения новой топологической перколяционной константы для широкого круга задач представляет интерес найти не только ее числовое значение, но и получить для нее хотя бы приближенное аналитическое выражение на основе рассмотрения уравнения (1).

Численное решение уравнения (1) с точностью до 7 знаков после запятой дает величину

$$C_f \approx 1{,}3265102(8), \tag{2}$$

так что $\Delta = 4/3 - C_f \approx 0{,}0068230(5)$. Значение C_f в уравнении (2) будем использовать как реперную точку.

Преобразуем уравнение (1) с помощью рекуррентных соотношений для гамма-функции:

$$2\pi^{C_f/2-1} = \Gamma(C_f/2). \tag{3}$$

Ключевым моментом приближенного решения является известное нам малое отличие перколяционной константы C_f от 4/3. Можно попытаться ввести малый параметр $x = C_f - 4/3$, построить разложение Тейлора по этому параметру и разрешить алгебраическое уравнение более высокого порядка относительно x. Оказалось, что ряд Тейлора сходится крайне медленно для данного уравнения (1). Такой подход контрпродуктивен. Воспользуемся фактом медленного изменения гамма-функции в окрестности точки 2/3. Тогда может быть справедливо следующее нулевое приближение:

$$2\pi^{C_f/2-1} \approx \Gamma(2/3). \tag{4}$$

Преобразуя уравнение (4), получаем следующее выражение для перколяционной константы:

$$C_{f,0} \approx 2\log_\pi\left\{\frac{\pi}{2}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\right\}. \tag{5}$$

Числовое значение константы в нулевом приближении равно

$$C_{f,0} \approx 1{,}3186206(2), \qquad \Delta_0 = C_{f,0} - C_f \approx 7{,}88 \cdot 10^{-3}. \tag{6}$$

Дальнейшая подстановка выражения (5) в (3) может улучшить аналитическую оценку. При этом дополнительно разложим гамма-функцию в ряд по малому параметру x и учтем только первое линейное слагаемое:

$$2\pi^{C_f/2-1} \approx \Gamma(2/3)\left(1 + \frac{\Gamma'\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}\left\{\frac{C_f}{2} - \frac{2}{3}\right\}\right), \tag{7}$$

или с учетом определения дигамма-функции $\psi^{(0)}(2/3)$:

$$2\pi^{C_f/2-1} \approx \Gamma(2/3)\left(1 + \psi^{(0)}(2/3)\left\{\frac{C_f}{2} - \frac{2}{3}\right\}\right). \tag{8}$$

В результате решения уравнения (8) получаем следующую поправку к выражению (5):

$$C_{f,1} \approx \phi C_{f,0} = 2\log_{\pi}\left\{\frac{\pi}{2}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\right\}\left[\frac{1-\dfrac{2}{3}\dfrac{\psi^{(0)}\left(\frac{2}{3}\right)}{\ln\left(\frac{\pi}{2}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\right)}}{1-\dfrac{\psi^{(0)}\left(\frac{2}{3}\right)}{\ln(\pi)}}\right]. \tag{9}$$

Наконец, дигамма-функция от 2/3 может быть вычислена точно:

$$\psi^{(0)}(2/3) = -\gamma + \frac{\pi}{2\sqrt{3}} + \frac{3}{2}\ln 3. \tag{10}$$

Здесь $\gamma = 0{,}5772156649\ldots$ – постоянная Эйлера. Тогда окончательно имеем приближенное аналитическое выражение для топологической перколяционной константы:

$$C_{f,1} \approx \phi C_{f,0} = 2\log_{\pi}\left\{\frac{\pi}{2}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\right\}\left[\frac{1-\dfrac{1}{3\sqrt{3}}\dfrac{\pi+3\sqrt{3}\ln 3-2\sqrt{3}\gamma}{\ln\left(\frac{\pi}{2}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\right)}}{1-\dfrac{1}{3\sqrt{3}}\dfrac{\pi+3\sqrt{3}\ln 3-2\sqrt{3}\gamma}{\ln\pi}}\right], \tag{11}$$

где сомножитель ϕ имеет вид

$$\phi = \frac{1-\dfrac{1}{3\sqrt{3}}\dfrac{\pi+3\sqrt{3}\ln 3-2\sqrt{3}\gamma}{\ln\left(\frac{\pi}{2}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\right)}}{1-\dfrac{1}{3\sqrt{3}}\dfrac{\pi+3\sqrt{3}\ln 3-2\sqrt{3}\gamma}{\ln\pi}} \approx 1{,}005128. \tag{12}$$

Выражение (11) дает числовое значение

$$C_{f,1} \approx 1{,}32538, \tag{13}$$

отличающееся от численного решения (2) трансцендентного уравнения (1) на величину порядка $\Delta_1 = C_{f,1} - C_f \approx 1{,}1 \cdot 10^{-3}$. Интересно отметить, что топологическая перколяционная константа оказалась связанной с постоянной Эйлера.

Благодарности. Работа выполнена в рамках Государственной программы научных исследований «Энергетические и ядерные процессы и технологии», подпрограмма «Энергетические процессы и технологии» (задание 2.31).

Acknowledgements. The work was carried out in the framework of the State Scientific Research Program "Energy and Nuclear Processes and Technologies", subprogram "Energy Processes and Technologies" (task 2.31).

Список использованных источников

1. Stauffer, D. Introduction to Percolation Theory / Stauffer D., Aharony A. – New York: Taylor & Francis, 2018. – 192 p. https://doi.org/10.1201/9781315274386

2. Sahimi, M. Applications of Percolation Theory / M. Sahimi. – London: CRC Press, 1994. – 276 p. https://doi.org/10.1201/9781482272444

3. Grinchuk, P. S. Cluster size distribution in percolation theory and fractal Cantor dust / P. S. Grinchuk // Physical Review E. – 2007. – Vol. 75, № 4. – Art. ID 041118. https://doi.org/10.1103/physreve.75.041118

4. Grinchuk, P. S. Surfaces of percolation systems in lattice problems / P. S. Grinchuk, O. S. Rabinovich // Physical Review E. – 2003. – Vol. 67, № 4. – Art. ID 046103. https://doi.org/10.1103/physreve.67.046103

5. Grossman, T. Accessible external perimeters of percolation clusters / T. Grossman, A. Aharony // Journal of Physics A: Mathematical and General. – 1987. – Vol. 20, № 17. – P. L1193. https://doi.org/10.1088/0305-4470/20/17/011

6. Dynamics of invasion percolation / L. Furuberg, J. Feder, A. Aharony, T. Jossang // Physical Review Letters. – 1988. – Vol. 61, № 18. – Art. ID 2117. https://doi.org/10.1103/physrevlett.61.2117

7. Sahimi, M. Percolation and polymer morphology and rheology / M. Sahimi // Complex Media and Percolation Theory. Encyclopedia of Complexity and Systems Science Series / eds.: M. Sahimi, A. G. Hunt. – New York: Springer, 2021. https://doi.org/10.1007/978-1-0716-1457-0_388

8. Milovanov, A. V. Fracton pairing mechanism for unconventional superconductors: Self-assembling organic polymers and copper-oxide compounds / A. V. Milovanov, J. J. Rasmussen // Physical Review B. – 2002. – Vol. 66, № 13. – Art. ID 134505. https://doi.org/10.1103/physrevb.66.134505

9. Зосимов, В. В. Фракталы в волновых процессах / В. В. Зосимов, Л. М. Лямшев // Успехи физических наук. – 1995. – Т. 165, № 4. – С. 361–402. https://doi.org/10.3367/ufnr.0165.199504a.0361

10. Lawler, G. F. The Dimension of the Planar Brownian Frontier is 4/3 / G. F. Lawler, O. Schramm, W. Werner // Mathematical Research Letters. – 2001. – Vol. 8, №. 4. – P. 401–411. https://doi.org/10.4310/mrl.2001.v8.n4.a1

11. Зелёный, Л. М. Фрактальная топология и странная кинетика: от теории перколяции к проблемам космической электродинамики / Л. М. Зелёный, А. В. Милованов // Успехи физических наук. – 2004. – Т. 174, № 8. – С. 809–853. https://doi.org/10.3367/ufnr.0174.200408a.0809

12. Grinchuk, P. Fractal power law and polymer-like behavior for the metro growth in megacities / P. Grinchuk, S. Danilova-Tretiak // Chaos, Solitons & Fractals. – 2025. – Vol. 194. – Art. ID 116137. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2025.116137

13. Alexander, S. Density of states on fractals: «fractons» / S. Alexander, R. Orbach // Journal de Physique Lettres. – 1982. – Vol. 43, № 17. – P. 625–631. https://doi.org/10.1051/jphyslet:019820043017062500

14. Orbach, R. Dynamics of fractal networks / R. Orbach // Science. – 1986. – Vol. 231, № 4740. – P. 814–819. https://doi.org/10.1126/science.231.4740.814

15. Nakayama, T. Dynamical properties of fractal networks: Scaling, numerical simulations, and physical realizations / T. Nakayama, K. Yakubo, R. L. Orbach // Reviews of Modern Physics. – 1994. – Vol. 66, № 2. – P. 381. https://doi.org/10.1103/revmodphys.66.381

16. Milovanov, A. V. Topological proof for the Alexander-Orbach conjecture / A. V. Milovanov. – Physical Review E. – 1997. – Vol. 56, № 3. – Art. ID 2437. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.56.2437

17. Фоменко, А. Т. Курс гомотопической топологии / А. Т. Фоменко, Д. Б. Фукс. – М.: Наука, 1989. – 528 с.

18. Milovanov, A. V. Percolation in sign-symmetric random fields: Topological aspects and numerical modeling / A. V. Milovanov, G. Zimbardo // Physical Review E. – 2000. – Vol. 62, № 1. – P. 250. https://doi.org/10.1103/physreve.62.250

19. Milovanov, A. V. Critical conducting networks in disordered solids: ac universality from topological arguments / A. V. Milovanov, J. J. Rasmussen // Physical Review B. – 2001. – Vol. 64, № 21. – P. 212203. https://doi.org/10.1103/physrevb.64.212203

References

1. Stauffer D., Aharony A. *Introduction to Percolation Theory*. New York, Taylor & Francis, 2018. 192 p. https://doi.org/10.1201/9781315274386

2. Sahimi M. *Applications of Percolation Theory*. London, CRC Press, 1994. 276 p. https://doi.org/10.1201/9781482272444

3. Grinchuk P. S. Cluster size distribution in percolation theory and fractal Cantor dust. *Physical Review E*, 2007, vol. 75, no. 4, art. ID 041118. https://doi.org/10.1103/physreve.75.041118

4. Grinchuk P. S., Rabinovich O. S. Surfaces of percolation systems in lattice problems. *Physical Review E*, 2003. vol. 67, no. 4, art. ID 046103. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.67.046103

5. Grossman T., Aharony A. Accessible external perimeters of percolation clusters. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1987, vol. 20, no. 17, pp. L1193. https://doi.org/10.1088/0305-4470/20/17/011

6. Furuberg L., Feder J., Aharony A., Jossang T. Dynamics of invasion percolation. *Physical Review Letters*, 1988, vol. 61, no. 18, art. ID 2117. https://doi.org/10.1103/physrevlett.61.2117

7. Sahimi M. Percolation and Polymer Morphology and Rheology. Sahimi M., Hunt A. G. (eds.). *Complex Media and Percolation Theory. Encyclopedia of Complexity and Systems Science Series*. New York, Springer, 2021. https://doi.org/10.1007/978-1-0716-1457-0_388

8. Milovanov A. V., Rasmussen J. J. Fracton pairing mechanism for unconventional superconductors: Self-assembling organic polymers and copper-oxide compounds. *Physical Review B*, 2002. vol. 66, no. 13, art. ID 134505. https://doi.org/10.1103/physrevb.66.134505

9. Zosimov V. V., Lyamshev L. M. Fractals in wave processes. *Physics-Uspekhi*, 1995, vol. 38, no. 4, pp. 347–384. https://doi.org/10.1070/pu1995v038n04abeh000080

10. Lawler G. F., Schramm O., Werner W. The Dimension of the Planar Brownian Frontier is 4/3. *Mathematical Research Letters*, 2001, vol. 8, no. 4, pp. 401–411. https://doi.org/10.4310/mrl.2001.v8.n4.a1

11. Zelenyi L. M., Milovanov A. V. Fractal topology and strange kinetics: from percolation theory to problems in cosmic electrodynamics. *Physics-Uspekhi*, 2004, vol. 47, no. 8, pp. 749–788. https://doi.org/10.1070/pu2004v047n08abeh001705

12. Grinchuk P., Danilova-Tretiak S. Fractal power law and polymer-like behavior for the metro growth in megacities. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2025, vol. 194, art. ID 116137. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2025.116137

13. Alexander S., Orbach R. Density of states on fractals: «fractons». *Journal de Physique Lettres*, 1982, vol. 43, no. 17, pp. 625–631. https://doi.org/10.1051/jphyslet:019820043017062500

14. Orbach R. Dynamics of fractal networks. *Science*, 1986, vol. 231, no. 4740, pp. 814–819. https://doi.org/10.1126/science.231.4740.814

15. Nakayama T., Yakubo K., Orbach R. L. Dynamical properties of fractal networks: Scaling, numerical simulations, and physical realizations. *Reviews of Modern Physics*, 1994, vol. 66, no. 2, pp. 381. https://doi.org/10.1103/revmodphys.66.381

16. Milovanov A. V. Topological proof for the Alexander-Orbach conjecture. *Physical Review E*, 1997, vol. 56, no. 3, art. ID 2437. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.56.2437

17. Fomenko A. T., Fuks D. B. *Homotopical Topology*. Moscow, Nauka Publ., 1989. 528 p. (in Russian).

18. Milovanov A. V., Zimbardo G. Percolation in sign-symmetric random fields: Topological aspects and numerical modeling. *Physical Review E*, 2000, vol. 62, no. 1, pp. 250. https://doi.org/10.1103/physreve.62.250

19. Milovanov A. V., Rasmussen J. J. Critical conducting networks in disordered solids: ac universality from topological arguments. *Physical Review B*, 2001, vol. 64, no. 21, pp. 212203. https://doi.org/10.1103/physrevb.64.212203

Информация об авторе

Гринчук Павел Семенович – член-корреспондент Национальной академии наук Беларуси, доктор физико-математических наук, заведующий отделением теплофизики, Институт тепло- и массообмена имени А. В. Лыкова Национальной академии наук Беларуси (ул. П. Бровки, 15, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: gps@hmti.ac.by

Information about the author

Pavel S. Grinchuk – Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Belarus, Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Head of the Thermophysics department, A. V. Luikov Heat and Mass Transfer Institute of the National Academy of Sciences of Belarus (15, P. Brovka Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: gps@hmti.ac.by