

ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)

ФИЗИКА
PHYSICS

УДК 535.317;535.313;681.701
<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2025-61-1-23-33>

Поступила в редакцию 16.01.2025
Received 16.01.2025

Н. А. Хило, В. Н. Белый

*Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси,
Минск, Республика Беларусь*

**ВЕКТОРНЫЕ ПУЧКИ БЕССЕЛЕВА ТИПА
С КВАДРАТУРНЫМ СООТНОШЕНИЕМ ФАЗ
ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО И МАГНИТНОГО ПОЛЕЙ**

Аннотация. Рассмотрены особенности распространения векторных пучков Бесселя – Гаусса (БГ), отличительной чертой которых является квадратурное соотношение фаз электрического и магнитного полей. Выражение для векторных пучков БГ получены на основе общего подхода в виде линейной суперпозиции известных точных решений уравнений Максвелла. Путем подбора весовой функции суперпозиции найдены формулы для всех компонент электрического и магнитного поля БГ пучка, а также выражения для квадратичных функций поля, таких как линейная плотность энергии, импульса и момента импульса по направлению распространения пучка. Рассмотрен важный частный случай, когда весовые функции суперпозиции не зависят от азимутального модового индекса m вихревого пучка. Для этого случая найдено выражение для отношения линейной плотности момента импульса к линейной плотности энергии БГ пучка с квадратурным соотношением фаз электрического и магнитного полей. Из полученного выражения следует, что линейная плотность момента импульса на один фотон для непараксиального пучка значительно отличается от величины $\hbar(m + 1)$ для больших углов конуса (порядка нескольких десятков градусов). Данный результат важен, в частности, для корректной оценки углового момента поля на основе измерений фотоприемниками с прямым детектированием азимутального индекса m , которые разрабатываются в последнее время. Также показано, что при увеличении угла конуса БГ пучка его поляризация отличается от круговой, а продольная компонента возрастает. При этом функциональная зависимость поперечных и продольной компонент от радиальной координаты различная. Полученные результаты важны при разработке компактных элементов систем оптической связи, микроскопии, лазерных твизеров и др.

Ключевые слова: непараксиальные пучки Бесселя – Гаусса, угловой орбитальный момент, дислокации волнового фронта

Для цитирования. Хило, Н. А. Векторные пучки бесселева типа с квадратурным соотношением фаз электрического и магнитного полей / Н. А. Хило, В. Н. Белый // Вестці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. – 2025. – Т. 61, № 1. – С. 23–33. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2025-61-1-23-33>

Nikolai A. Khilo, Vladimir N. Belyi

*B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus,
Minsk, Republic of Belarus*

**VECTOR BESSEL-LIKE BEAMS WITH QUADRATURE PHASES
OF ELECTRIC AND MAGNETIC FIELDS**

Abstract. The peculiarities of propagation of vector Bessel – Gaussian (BG) beams, the distinguishing feature of which is the quadrature of phases of electric and magnetic fields, are considered. The expression for vector BG beams is obtained on the basis of common approach in a form of linear superposition of known accurate solutions of the Maxwell equations. By selection of weight function of superposition there are found the equations for all components of electric and magnetic field of the BG beam, and also expressions for square field functions, such as linear density of energy, pulse and pulse moments along the direction of beam propagation. The particular case is considered when weight functions of the

superposition do not depend on azimuthal mode index m of the vortex beam. For this case the expression is found for the ratio of linear density of the pulse moment to linear density of BG beam energy with a quadrature of electric and magnetic fields. From the equation obtained it follows that linear density of the pulse moment per one photon for non-paraxial beams essentially differs from the value $\hbar(m + 1)$ for large cone angles (of about several tens of degrees). Particularly, this result is important for the correct estimation of angular momentum of the field on the basis of measurement by the photoreceivers with direct detection of azimuthal index m , which are being developed in the recent time. It is also shown that when increasing the cone angle of BG beam its polarization differs from angular one, and the longitudinal component increases. Here the functional dependence of transverse and longitudinal components on radial coordinate is different. The obtained results are important when developing compact elements for the optical communication systems, microscopy, laser tweezers and others.

Keywords: non-paraxial Bessel – Gaussian beams, angular orbital momentum, wavefront dislocation

For citation. Khilo N. A., Belyi V. N. Vector Bessel-like beams with quadrature phases of electric and magnetic fields. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2025, vol. 61, no. 1, pp. 23–33 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2025-61-1-23-33>

Введение. Векторная природа световых пучков проявляется тогда, когда их свойства зависят от состояния поляризации пучка, включая наличие продольной компоненты. Наиболее отчетливо векторность проявляется в условиях острой фокусировки, когда диаметр пучка резко уменьшается, его расходимость увеличивается, а продольная компонента поля возрастает. Например, радиально поляризованные пучки могут быть сфокусированы в фокальное пятно размером, меньшим длины волны [1, 2]. Как следствие, остро сфокусированные пучки находят широкое применение в микроскопии высокого разрешения, фотолитографии, оптических твизерах, нелинейной оптике, лазерной обработке материалов и др. (см., напр., [3–5]).

Важно отметить, что векторную природу световых пучков, конкретно – продольную компоненту электрического и магнитного полей, необходимо учитывать не только в условиях их фокусировки. В настоящее время привлекают большой интерес так называемые вихревые пучки, т. е. световые поля с вихревой дислокацией волнового фронта [6, 7]). Важнейшей особенностью таких пучков является наличие у них орбитального углового момента, который зависит от произведения поперечных и продольных компонент электрического и магнитного полей. В связи с большими перспективами применения вихревых пучков, например, в оптической связи [8–10], актуальной задачей является расчет и исследование углового момента для вихревых пучков с различной пространственной структурой, например, пучков Лагерра – Гаусса (ЛГ) и Бесселя – Гаусса (БГ). Указанные пучки характеризуются тем, что в общем случае их состояние поляризации зависит от поперечной координаты, а также является различным для электрического и магнитного полей пучка. Это усложняет расчеты углового момента, а также их интерпретацию, и поэтому становится важной проблема оптимального выбора конкретного типа векторного пучка из множества возможных решений уравнений Максвелла. В статьях [7, 11, 12] угловой момент был рассчитан для непараксиальных световых пучков с поперечно-независимым состоянием поляризации электрического поля. При этом, однако, продольная компонента электрического вектора такого пучка, а также его магнитное поле являются поперечно неоднородными по поляризации и значительно более сложными по пространственной структуре.

Бесселевы пучки с квадратурным соотношением фаз электрического и магнитного полей. В настоящей работе проведен расчет углового момента пучка бесселева типа, представляющего собой интеграл суперпозиции точных решений уравнений Максвелла для бесселевых пучков. При этом критерий выбора исходного решения состоял в том, чтобы состояние поляризации как электрического, так и магнитного полей было круговым в пределе равного нулю угла конуса БСП. Анализ показал, что этому критерию удовлетворяют БСП с квадратурным соотношением фаз электрического и магнитного полей, т. е. $\vec{E} = \pm i\vec{B}$. Для иллюстрации метода исходим из точных решений уравнений Максвелла (см., напр., [13, 14]), в частности, для ТН- и ТЕ-поляризованных бесселевых пучков, которые запишем в виде [15] (опущен общий множитель $e^{i[k_z z + (m+1)\varphi]}$)

$$\begin{aligned}
 \vec{E}^{TE} &= \vec{e}_\rho (J_{m+2} + J_m) - i\vec{e}_\varphi (J_{m+2} - J_m), \\
 \vec{B}^{TE} &= -i\vec{e}_\rho \frac{k_z}{k_0} (J_m - J_{m+2}) + \vec{e}_\varphi \frac{k_z}{k_0} (J_{m+2} + J_m) - \vec{e}_z \frac{2q}{k_0} J_{m+1}, \\
 \vec{E}^{TH} &= \vec{e}_\rho \frac{k_z}{k_0} (J_m - J_{m+2}) + \vec{e}_\varphi \frac{ik_z}{k_0} (J_{m+2} + J_m) - \vec{e}_z \frac{2iq}{k_0} J_{m+1}, \\
 \vec{B}^{TH} &= -i\vec{e}_\rho (J_{m+2} + J_m) + \vec{e}_\varphi (J_m - J_{m+2}),
 \end{aligned} \tag{1}$$

где $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$ – орты цилиндрической системы координат, J_m – функции Бесселя.

Сумма и разность ТЕ- и ТН-пучков $\vec{E}^{(\pm)} = \vec{E}^{TE} \pm \vec{E}^{TH}$ равна (без учета общего множителя $e^{i[k_z z + (m+1)\varphi]}$)

$$\begin{aligned}
 \vec{E}^{(+)} &= \vec{e}_\rho \left(J_m \left(1 + \frac{k_z}{k_0} \right) + J_{m+2} \left(1 - \frac{k_z}{k_0} \right) \right) + i\vec{e}_\varphi \left(J_m \left(1 + \frac{k_z}{k_0} \right) - J_{m+2} \left(1 - \frac{k_z}{k_0} \right) \right) - i\vec{e}_z \frac{2q}{k_0} J_{m+1}, \\
 \vec{E}^{(-)} &= \vec{e}_\rho \left(J_{m+2} \left(1 + \frac{k_z}{k_0} \right) + J_m \left(1 - \frac{k_z}{k_0} \right) \right) - i\vec{e}_\varphi \left(J_{m+2} \left(1 + \frac{k_z}{k_0} \right) - J_m \left(1 - \frac{k_z}{k_0} \right) \right) + i\vec{e}_z \frac{2q}{k_0} J_{m+1}.
 \end{aligned} \tag{2}$$

При этом $\vec{B}^{(\pm)} = \mp i\vec{E}^{(\pm)}$, т. е. имеет место квадратурное соотношение фаз электрического и магнитного полей [16].

С учетом соотношения между ортами цилиндрической ($\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi$) и декартовой (\vec{e}_x, \vec{e}_y) систем координат $\vec{e}_\rho \pm i\vec{e}_\varphi = e^{\mp i\varphi} (\vec{e}_x \pm i\vec{e}_y)$ из (2) находим в декартовой системе

$$\begin{aligned}
 \vec{E}^{(+)} &= J_m \left(1 + \frac{k_z}{k_0} \right) \vec{e}_+ e^{im\varphi} + J_{m+2} \left(1 - \frac{k_z}{k_0} \right) \vec{e}_- e^{i(m+2)\varphi} - \frac{2iq}{k_0} J_{m+1} \vec{e}_z e^{i(m+1)\varphi}, \\
 \vec{E}^{(-)} &= J_{m+2} \left(1 + \frac{k_z}{k_0} \right) \vec{e}_- e^{i(m+2)\varphi} + J_m \left(1 - \frac{k_z}{k_0} \right) \vec{e}_+ e^{im\varphi} + \frac{2iq}{k_0} J_{m+1} \vec{e}_z e^{i(m+1)\varphi}.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Отметим, что аргумент у бesselевых функций J_m в формулах (1)–(3) равен qr . При этом q и k_z являются поперечным и продольным волновыми числами БП, связанными соотношением $k_z^2 + q^2 = k_0^2$, где $k_0 = 2\pi/\lambda$, $q = k_0 \sin \gamma$, $k_z = k_0 \cos \gamma$, где γ – угол конуса БП.

Из (2), (3) следует, что поляризация (\pm) БП неоднородная, т. е. изменяется по поперечному сечению пучка. При уменьшении угла конуса, когда $k_z \rightarrow k_0$, поляризация пучков (3) стремится соответственно к правой \vec{e}_+ и левой \vec{e}_- циркулярной. Далее ограничимся рассмотрением в (3) пучка с индексом «+», так как расчеты для бesselевых пучков с индексом «-» полностью аналогичны. Таким образом, исходный векторный БСП имеет вид

$$\vec{E}^{(+)}(\rho, \varphi, z) = \left(J_m(q\rho) \left(1 + \frac{k_z}{k_0} \right) \vec{e}_+ e^{-i\varphi} + J_{m+2}(q\rho) \left(1 - \frac{k_z}{k_0} \right) \vec{e}_- e^{i\varphi} - \frac{2iq}{k_0} J_{m+1}(q\rho) \vec{e}_z \right) e^{i(m+1)\varphi + ik_z z}. \tag{4}$$

Суперпозиции векторных БСП. Для получения формул, описывающих пространственно ограниченные пучки бesselева типа, перейдем к линейной суперпозиции БП (4) вида

$$\vec{E}(\rho, \varphi, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{k_0} A(q) \int_0^{2\pi} \exp(qr_0 \cos(\varphi_1)) \vec{E}^{(+)}(\rho, \varphi - \varphi_1, z) d\varphi_1 q dq. \tag{5}$$

Вид весовой функции $A(q)$, а также параметра r_0 , будет конкретизирован далее при переходе к пучкам Бесселя – Гаусса. Подставляя в (5) выражение для $\vec{E}^{(+)}(\rho, \varphi, z)$ из (4) и интегрируя по азимутальному углу с использованием интегрального представления модифицированных функций Бесселя $I_m(x) = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \exp(x \cos \varphi + im\varphi) d\varphi$, получим 3 компоненты вектора \vec{E} . В цилиндрической системе координат эти компоненты равны

$$\begin{aligned}
 E_\rho &= e^{i(m+1)\varphi} \int_0^{k_0} A(q) \left(\left(1 + \frac{k_z}{k_0}\right) I_m(qr_0) J_m(q\rho) + \left(1 - \frac{k_z}{k_0}\right) I_{m+2}(qr_0) J_{m+2}(q\rho) \right) e^{ik_z z} q dq, \\
 E_\varphi &= e^{i(m+1)\varphi} i \int_0^{k_0} A(q) \left(\left(1 + \frac{k_z}{k_0}\right) I_m(qr_0) J_m(q\rho) - \left(1 - \frac{k_z}{k_0}\right) I_{m+2}(qr_0) J_{m+2}(q\rho) \right) e^{ik_z z} q dq, \\
 E_z &= -i e^{i(m+1)\varphi} \int_0^{k_0} A(q) \frac{2q}{k_0} I_{m+1}(qr_0) J_{m+1}(q\rho) e^{ik_z z} q dq.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Очевидно, что переход к линейной суперпозиции БСП не изменяет соотношение $\vec{B} = -i\vec{E}$ между векторами электрического и магнитного поля, которое можно трактовать как смещение фаз между этими векторами на 90° . Следствием такого соотношения векторов \vec{E} и \vec{B} является отсутствие в квадратичных формах поля, таких как энергия, импульс и момент импульса, поля высокочастотных слагаемых, что не требует усреднения по времени для выделения стационарных или медленно изменяющихся компонент [16].

Как следствие, для рассматриваемого здесь светового пучка бесселева типа функции плотности энергии W , импульса \vec{p} и момента импульса \vec{j} можно рассчитать по следующим формулам:

$$W = \frac{1}{8\pi} (\vec{E}'^2 + B'^2) = \frac{1}{8\pi} \vec{E} \vec{E}^*, \quad \vec{p} = \frac{1}{4\pi c} \vec{E}' \times \vec{B}' = \frac{i}{8\pi c} \vec{E} \times \vec{E}^*, \quad \vec{j} = \vec{r} \times \vec{p} = \frac{i}{8\pi c} \vec{r} \times (\vec{E} \times \vec{E}^*). \tag{7}$$

Здесь штрих у вектора означает его вещественную часть.

Линейные плотности энергии, импульса и момента импульса. Если подставить вектор электрического поля из (6) в функции (7), то можно видеть, что их структура значительно упрощается при проведении дополнительного интегрирования по поперечному сечению пучка. Получаемые при этом интегралы

$$W^\perp = 2\pi \int_0^\infty W(\rho) \rho d\rho, \quad \vec{P}^\perp = 2\pi \int_0^\infty \vec{p}(\rho) \rho d\rho, \quad \vec{J}^\perp = 2\pi \int_0^\infty \vec{j}(\rho) \rho d\rho \tag{8}$$

имеют физический смысл линейных плотностей соответственно энергии, импульса и момента импульса по направлению распространения пучка. Эффективность такого подхода была впервые продемонстрирована в работе [12] применительно к пучку также бесселева типа, но с другой пространственной и поляризационной структурой.

Поставляя (6) в (7) и интегрируя по радиальной координате с учетом известного определения дельта-функции в цилиндрических координатах

$$f_{m,m}(q, q_1) = \int_0^\infty J_m(q\rho) J_m(q_1\rho) \rho d\rho = \delta(q - q_1)/q, \tag{9}$$

получим для линейных плотностей энергии и z -компоненты импульса P_z^\perp выражения вида

$$\begin{aligned}
 W^\perp &= \frac{1}{2} \int_0^{k_0} |A(q)|^2 \left(\left(1 + \frac{k_z}{k_0}\right)^2 I_m(qr_0)^2 + \left(1 - \frac{k_z}{k_0}\right)^2 I_{m+2}(qr_0)^2 + \frac{2q^2}{k_0^2} I_{m+1}(qr_0)^2 \right) q dq, \\
 P_z^\perp &= \frac{i}{4c} \int_0^\infty (E_\rho E_\varphi^* - E_\varphi^* E_\rho) \rho d\rho = \frac{1}{2c} \int_0^{k_0} |A(q)|^2 \left(\left(1 + \frac{k_z}{k_0}\right)^2 I_m(qr_0)^2 - \left(1 - \frac{k_z}{k_0}\right)^2 I_{m+2}(qr_0)^2 \right) q dq.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Расчет z -компоненты линейной плотности углового момента

$$J_z^\perp = \frac{i}{4c} \int_0^\infty \rho (E_z E_\rho^* - E_z^* E_\rho) \rho d\rho \tag{11}$$

более сложный из-за появления интегралов вида

$$f_{m+1,m}(q, q_1) = \int_0^{\infty} J_{m+1}(q\rho) J_m(q_1\rho) \rho^2 d\rho, \quad f_{m+1,m+2}(q, q_1) = \int_0^{\infty} J_{m+1}(q\rho) J_{m+2}(q_1\rho) \rho^2 d\rho. \quad (12)$$

Для расчета первого интеграла в (12) можно провести дифференцирование по q функции $f_{m,m}(q, q_1)$ в (9) и воспользоваться известной формулой для производной от функции Бесселя по ее аргументу $J'_m(q\rho) = -J_{m+1}(q\rho) + \frac{m}{q\rho} J_m(q\rho)$. Тогда получим

$$f_{m+1,m} = \frac{m}{q_1^2} \delta(q - q_1) + \frac{1}{q_1} \frac{\partial \delta(q - q_1)}{\partial q_1}. \quad (13)$$

Расчет второго интеграла в (12) проводится аналогично, что дает

$$f_{m+1,m+2} = \frac{m+2}{q_1^2} \delta(q - q_1) - \frac{1}{q_1} \frac{\partial \delta(q - q_1)}{\partial q_1}. \quad (14)$$

Подстановка (13), (14) в (11) дает $J_z^\perp = J_{1z}^\perp + J_{2z}^\perp$, где

$$J_{1z}^\perp = \frac{m+1}{ck_0} \int_0^{k_0} A^2 I_{m+1} I_m \left(1 + \frac{k_z}{k_0}\right) q dq + \frac{1}{ck_0} \int_0^{k_0} \frac{\partial}{\partial q} (q A I_{m+1}) A I_m \left(1 + \frac{k_z}{k_0}\right) q dq, \quad (15)$$

$$J_{2z}^\perp = \frac{m+1}{ck_0} \int_0^{k_0} A^2 I_{m+1} I_{m+2} \left(1 - \frac{k_z}{k_0}\right) q dq - \frac{1}{ck_0} \int_0^{k_0} \frac{\partial}{\partial q} (q A I_{m+1}) A I_{m+2} \left(1 - \frac{k_z}{k_0}\right) q dq.$$

Отметим, что производные под интегралами в (15) появились в результате интегрирования производных от дельта-функции, причем $A \equiv A(q)$.

Приближение m -независимости модифицированной функции Бесселя. По формулам (10) и (15) можно численно рассчитать линейные плотности энергии, линейного и углового моментов при любом выборе весовой функции $A(q)$ и параметра r_0 , совместимого с условием конечности указанных линейных плотностей.

Отметим, что эти достаточно сложные формулы могут быть значительно упрощены, если модифицированные функции Бесселя (ФБ) $I_m(x)$ перестают зависеть от индекса m . Такая возможность существует вследствие известного поведения $I_m(x)$ при больших значениях аргумента

$$I_m(x) \sim \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \left(1 - \frac{4m^2 - 1}{8x} + \frac{(4m^2 - 1)(4m^2 - 9)}{2!(8x)^2} - \dots \right). \quad (16)$$

Из (16) следует, что $I_m(x) \sim e^x / \sqrt{2\pi x} \equiv I(x)$ при условии

$$\frac{4m^2 - 1}{8x} \equiv \mu \ll 1, \quad (17)$$

где аргумент $x = qr_0$ и μ – относительная погрешность.

Далее, ориентируясь на векторные БГ пучки, введем в формулы характерные для этих пучков параметры, а именно: полуширину гауссовой огибающей w_0 , поперечное волновое число $q_0 = k_0 \sin \gamma_0$ и соответствующий ему угол конуса бесселевой функции γ_0 . Для этого положим $r_0 = q_0 w_0^2 / 2$, откуда $x = qq_0 w_0^2 / 2$, а неравенство (17) примет вид

$$\mu = \frac{m^2 - 1/4}{qq_0 w_0^2} \ll 1. \quad (18)$$

При выполнении неравенства (18) формулы (10) и (15) сводятся к более простому виду:

$$\begin{aligned} W^\perp &= 2 \int_0^{k_0} (AI)^2 q dq, \quad P_z^\perp = \frac{2}{c} \int_0^{k_0} (AI)^2 \frac{k_z}{k_0} q dq, \\ J_z^\perp &= \frac{2(m+1)}{\omega} \int_0^{k_0} (AI)^2 q dq + \frac{1}{\omega} \int_0^{k_0} (qAI)^2 \frac{q}{k_z k_0} dq. \end{aligned} \quad (19)$$

Множитель 2 в (19) появился из-за использования векторов циркулярной поляризации $\vec{e}_\rho \pm i\vec{e}_\varphi$ и $\vec{e}_x \pm i\vec{e}_y$, с модулем, равным двум. При получении формулы (19) для углового момента считалось, что на границах области интегрирования функция qAI обращается в нуль.

Отношение линейных плотностей момента импульса и энергии, согласно (19), равно

$$\frac{J_z^\perp}{W^\perp} = \frac{(m+1)}{\omega} + \frac{\int_0^{k_0} (AI)^2 \frac{q^2}{k_z k_0} q dq}{2\omega \int_0^{k_0} (AI)^2 q dq}. \quad (20)$$

В параксиальном пределе $q \rightarrow 0$ из (20) получим

$$\frac{J_z^\perp}{W^\perp} = \frac{\hbar(m+1)}{\hbar\omega}, \quad (21)$$

т. е. известное соотношение [7] для циркулярно поляризованных пучков с фазовой дислокацией порядка m , смысл которого заключается в том, что на один фотон приходится угловой момент импульса, равный $\hbar m$. Отклонение от этого соотношения для непараксиальных мод, в частности мод Лагерра – Гаусса, исследовалось в [11].

Переход к непараксиальным пучкам Бесселя – Гаусса. Величина второго слагаемого в (19) может быть оценена численно, для чего необходимо конкретизировать весовую функцию $A(q)$. С ориентацией на БГ пучки выберем $A(q)$ в виде

$$A(q) = \frac{w_0^2}{2} \exp\left(-\frac{q^2 w_0^2}{4} - \frac{q_0^2 w_0^2}{4}\right). \quad (22)$$

Тогда произведение AI под интегралами в (19), (20) будет иметь вид, близкий к смещенной гауссовой функции:

$$AI = \frac{w_0^2}{2} \frac{\exp\left(-(q - q_0)^2 w_0^2 / 4\right)}{\sqrt{\pi q q_0 w_0^2}}, \quad (23)$$

а амплитуды (6) можно записать в виде

$$\begin{aligned} E_\rho &= e^{i(m+1)\varphi} w_0^2 \int_0^{k_0} \frac{\exp\left(-(q - q_0)^2 w_0^2 / 4\right)}{2\sqrt{\pi q q_0 w_0^2}} \left(\left(1 + \frac{k_z}{k_0}\right) J_m(q\rho) + \left(1 - \frac{k_z}{k_0}\right) J_{m+2}(q\rho) \right) e^{ik_z z} q dq, \\ E_\varphi &= i e^{i(m+1)\varphi} w_0^2 \int_0^{k_0} \frac{\exp\left(-(q - q_0)^2 w_0^2 / 4\right)}{2\sqrt{\pi q q_0 w_0^2}} \left(\left(1 + \frac{k_z}{k_0}\right) J_m(q\rho) - \left(1 - \frac{k_z}{k_0}\right) J_{m+2}(q\rho) \right) e^{ik_z z} q dq, \\ E_z &= -i e^{i(m+1)\varphi} w_0^2 \int_0^{k_0} \frac{q}{k_0} \frac{\exp\left(-(q - q_0)^2 w_0^2 / 4\right)}{\sqrt{\pi q q_0 w_0^2}} J_{m+1}(q\rho) e^{ik_z z} q dq. \end{aligned} \quad (24)$$

На рис. 1 и 2 показаны пространственные распределения интенсивности трех компонент векторных БГП (24), а также весовой функции (23) для пучков с различными углами конуса.

Рис. 1 относится к случаю приближенного параксиального БГ пучка, где угол конуса равен 5° . Интенсивность азимутальной компоненты в данном случае практически совпадает с интенсивностью радиальной, а мощность продольной компоненты составляет менее процента мощности поперечных компонент.

Для БГ пучков с большим углом конуса $\gamma_0 = 30^\circ$ соответствующие распределения интенсивности показаны на рис. 2.

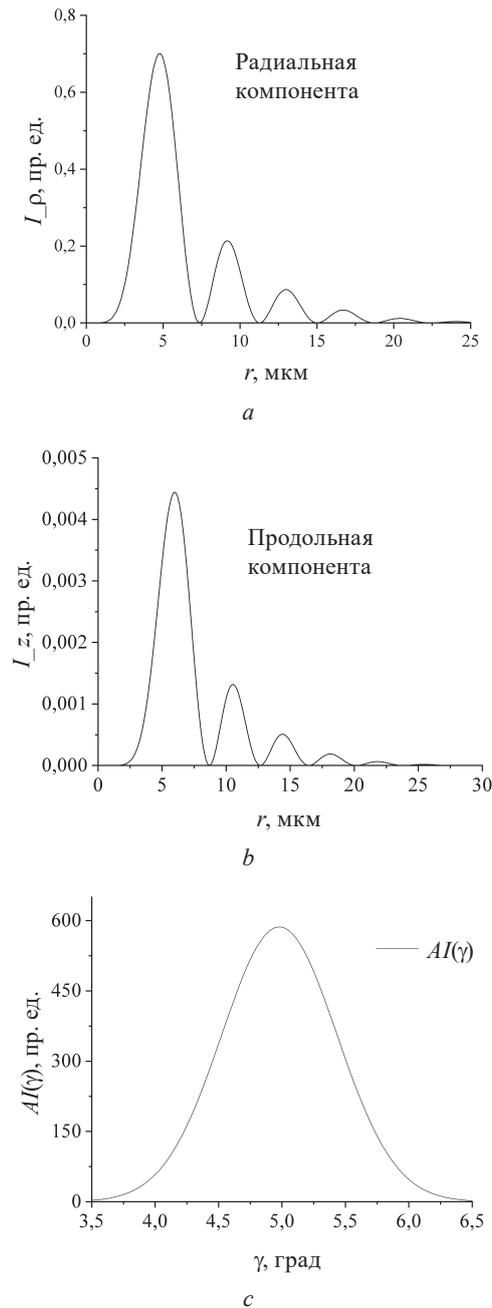


Рис. 1. Распределение интенсивности радиальной (a) и продольной (b) компонент, а также весовой функции AI (c), векторного БГ пучка. Параметры: $\gamma_0 = 5^\circ$, $w_0 = 18$ мкм, $m = 3$, $\mu_{\max} = 2,3$ %

Fig. 1. Intensity distribution of radial (a) and longitudinal (b) components, and also weight function AI (c) of a vector BG beam. Parameters: $\gamma_0 = 5^\circ$, $w_0 = 18$ μm , $m = 3$, $\mu_{\max} = 2.3$ %

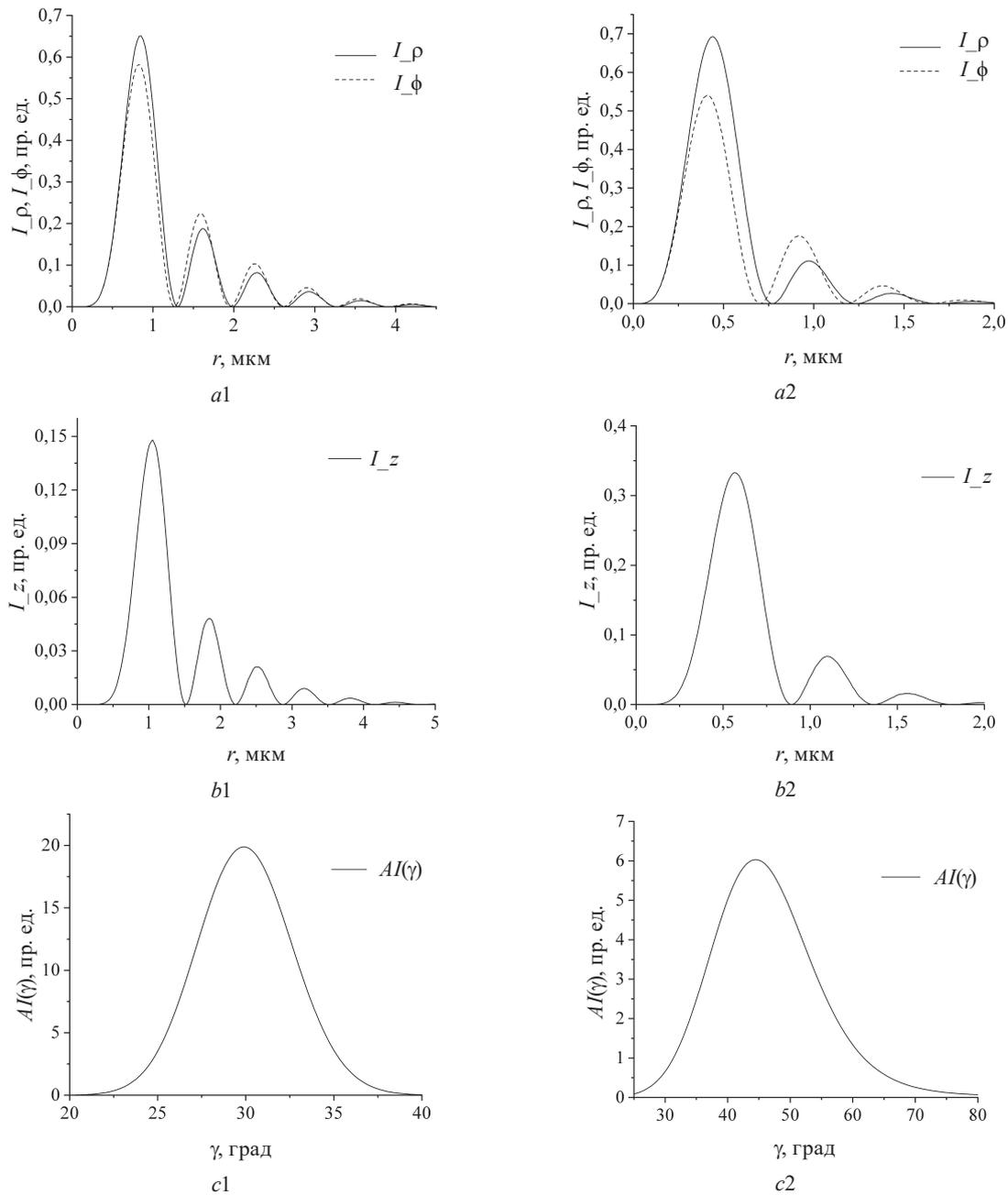


Рис. 2. Распределение интенсивности радиальной и азимутальной компонент ($a1, a2$), продольной компоненты ($b1, b2$), а также весовой функции AI ($c1, c2$) векторного БГ пучка. Параметры: $\gamma_0 = 30^\circ, w_0 = 3,5 \text{ мкм}, m = 3, \mu_{\max} = 2,2 \%$ ($a1-c1$) и $\gamma_0 = 45^\circ, w_0 = 1,5 \text{ мкм}, m = 2, \mu_{\max} = 2,4 \%$ ($a2-c2$)

Fig. 2. Intensity distribution of radial and azimuthal component ($a1, a2$), longitudinal component ($b1, b2$), and also weight function AI ($c1, c2$) of a vector BG beam. Parameters: $\gamma_0 = 30^\circ, w_0 = 3.5 \text{ }\mu\text{m}, m = 3, \mu_{\max} = 2.2 \%$ ($a1-c1$) and $\gamma_0 = 45^\circ, w_0 = 1.5 \text{ }\mu\text{m}, m = 2, \mu_{\max} = 2.4 \%$ ($a2-c2$)

Из сравнения графиков следует, что по мере увеличения угла конуса возрастает различие радиальной и азимутальной компонент, что означает отклонение поляризации поперечной составляющей поля от круговой. Также видно, что при увеличении угла конуса возрастает мощность продольной компоненты, при этом смещение ее энергетического центра несколько превышает соответствующую величину для поперечной компоненты поля. Отметим также увеличение угловой ширины весовой функции суперпозиции векторных БП, формирующих пучок Бесселя – Гаусса. Число колец БГ пучков здесь небольшое, что регулируется выбором малой

полуширины w_0 . Однако минимальное значение w_0 ограничено неравенством (18), которое можно представить в виде

$$\mu = \frac{m^2 - 1/4}{\sin(\gamma) \sin(\gamma_0) (k_0 w_0)^2} \ll 1. \quad (25)$$

Из (25) также следует, что при заданных γ_0 и w_0 m -независимость $I_m(x)$ реализуется только для малых порядков дислокации m .

Отношение линейных плотностей момента импульса и энергии рассчитывается по формуле (20), которую с учетом обозначения $\delta = \frac{1}{2} \int_0^{k_0} (AI)^2 \frac{q^2}{k_z k_0} q dq \cdot \left(\int_0^{k_0} (AI)^2 q dq \right)^{-1}$ удобно переписать в виде

$$j_{1,z}^\perp = \hbar((m+1) + \delta). \quad (26)$$

Здесь $j_{1,z}^\perp$ – момент импульса, приходящийся на один фотон. Напомним, что выше рассматривался случай правой циркулярной поляризации параксиального БГ пучка. Для левой циркулярной поляризации в (26) необходимо заменить $m+1 \rightarrow m-1$.

Для трех наборов параметров, соответствующих рис. 1 и 2, величина $j_{1,z}^\perp$ в единицах \hbar оказывается равной 1,001, 1,036 и 1,124 соответственно. Как видим, для остро сфокусированных БГП отклонение углового момента от случая параксиального пучка может быть значительным.

Заключение. Получены общие формулы, описывающие вихревые пространственно ограниченные пучки Бесселя типа. Метод получения основан на создании линейной суперпозиции точных решений уравнений Максвелла для бесселевых пучков. Рассмотрены пучки с квадратурным соотношением амплитуд электрического и магнитного полей, когда эти поля отличаются лишь сдвигом фаз на $\pi/2$. Конкретный выбор весовой функции в суперпозиции позволил перейти к векторным пучкам Бесселя – Гаусса. В параксиальном приближении эти пучки переходят в известные БГ пучки с циркулярной поляризацией. Для непараксиальных БГ пучков получены формулы для линейных плотностей энергии, импульса и момента импульса поля. Найдено отношение линейных плотностей момента импульса и энергии, обобщающее известное отношение для параксиальных пучков. Отклонение величины углового орбитального момента, приходящегося на один фотон, от величины $\hbar m$ может быть значительным, что необходимо учитывать в различных практических применениях непараксиальных БГ пучков. В частности, это актуально при использовании метода прямого измерения углового момента фотоприемником, который развивается в последнее время [17, 18].

Список использованных источников

1. Dorn, R. Sharper Focus for a Radially Polarized Light Beam / R. Dorn, S. Quabis, G. Leuchs // Physical Review Letters. – 2003. – Vol. 91, № 23. – P. 233901. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.91.233901>
2. Youngworth, K. S. Focusing of high numerical aperture cylindrical-vector beams / K. S. Youngworth, T. G. Brown // Optics Express. – 2000. – Vol. 7, № 2. – P. 77–87. <https://doi.org/10.1364/oe.7.000077>
3. Zhan, Q. Focus shaping using cylindrical vector beams / Q. Zhan, J. R. Leger // Optics Express. – 2002. – Vol. 10, № 7. – P. 324–331. <https://doi.org/10.1364/oe.10.000324>
4. Madhi, D. Cylindrically polarized Bessel–Gauss beams / D. Madhi, M. Ornigotti, A. Aiello // Journal of Optics. – 2015. – Vol. 17, № 2. – P. 025603. <https://doi.org/10.1088/2040-8978/17/2/025603>
5. Ultra-secure optical encryption based on tightly focused perfect optical vortex beams / Q. Yang, Z. Xie, M. Zhang [et al.] // Nanophotonics. – 2022. – Vol. 11, № 5. – P. 1063–1070. <https://doi.org/10.1515/nanoph-2021-0786>
6. Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes / L. Allen, M. W. Beijersbergen, R. J. Spreeuw, J. P. Woerdman // Physical Review A. – 1992. – Vol. 45, № 11. – P. 8185–8189. <https://doi.org/10.1103/physreva.45.8185>
7. Allen, L. The orbital angular momentum of light / L. Allen, M. J. Padgett, M. Babiker // Progress in Optics. – Amsterdam: Elsevier, 1999. – Vol. 39. – P. 291–372. [https://doi.org/10.1016/S0079-6638\(08\)70391-3](https://doi.org/10.1016/S0079-6638(08)70391-3)
8. Free-Space Information Transfer Using Light Beams Carrying Orbital Angular Momentum / G. Gibson, J. Courtial, M. J. Padgett [et al.] // Optics Express. – 2004. – Vol. 12, № 22. – P. 5448–5456. <https://doi.org/10.1364/opex.12.005448>

9. Optical communications using orbital angular momentum beams / A. E. Willner, H. Huang, Y. Yan [et al.] // *Advances in Optics and Photonics*. – 2015. – Vol. 7, № 1. – P. 66–106. <https://doi.org/10.1364/AOP.7.000066>
10. Twisted light transmission over 143 km / M. Krenn, J. Handsteiner, M. Fink [et al.] // *Proceedings of the National Academy of Sciences*. – 2016. – Vol. 113, № 48. – P. 13648–13653. <https://doi.org/10.1073/pnas.1612023113>
11. Barnett, S. M. Orbital angular momentum and nonparaxial light beams / S. M. Barnett, L. Allen // *Optics Communications*. – 1994. – Vol. 110, № 5–6. – P. 670–678. [https://doi.org/10.1016/0030-4018\(94\)90269-0](https://doi.org/10.1016/0030-4018(94)90269-0)
12. Barnett, S. M. Optical angular-momentum flux* / S. M. Barnett // *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*. – 2002. – Vol. 4, № 2. – P. S7. <https://doi.org/10.1088/1464-4266/4/2/361>
13. Orbital angular momentum of a high-order Bessel light beam / K. Volke-Sepulveda, V. Garcés-Chávez, S. Chávez-Cerda [et al.] // *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*. – 2002. – Vol. 4, № 2. – P. S82. <https://doi.org/10.1088/1464-4266/4/2/373>
14. Bouchal, Z. Non-diffractive vector Bessel beams / Z. Bouchal, M. Olivik J. // *Journal of Modern Optics*. – 1995. – Vol. 42, № 8. – P. 1555. <https://doi.org/10.1080/09500349514551361>
15. Khilo, N. A. Diffraction and order conversion of Bessel beams in uniaxial crystals / N. A. Khilo // *Optics Communications*. – 2012. – Vol. 285, № 5. – P. 503–509. <https://doi.org/10.1016/j.optcom.2011.11.014>
16. Lekner, J. Invariants of three types of generalized Bessel beams / J. Lekner // *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics*. – 2004. – Vol. 6. – P. 837. <https://doi.org/10.1088/1464-4258/6/9/004>
17. Photocurrent detection of the orbital angular momentum of light / Zh. Ji, W. Liu, S. Krylyuk [et al.] // *Science*. – 2020. – Vol. 368, № 6492. – P. 763–767. <https://doi.org/10.1126/science.aba9192>
18. On-chip photodetection of angular momentums of vortex structured light / M. Dai, C. Wang, F. Sun, Q. J. Wang // *Nature Communications*. – 2024. – Vol. 15. – P. 5396. <https://doi.org/10.1038/s41467-024-49855-0>

References

1. Dorn R., Quabis S., Leuchs G. Sharper Focus for a Radially Polarized Light Beam. *Physical Review Letters*, 2003, vol. 91, no. 23, pp. 233901. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.91.233901>
2. Youngworth K. S., Brown T. G. Focusing of high numerical aperture cylindrical-vector beams. *Optics Express*, 2000, vol. 7, no. 2, pp. 77–87. <https://doi.org/10.1364/oe.7.000077>
3. Zhan Q., Leger J. R. Focus shaping using cylindrical vector beams. *Optics Express*, 2002, vol. 10, no. 7, pp. 324–331. <https://doi.org/10.1364/oe.10.000324>
4. Madhi D., Ornigotti M., Aiello A. Cylindrically polarized Bessel–Gauss beams. *Journal of Optics*, 2015, vol. 17, no. 2, pp. 025603. <https://doi.org/10.1088/2040-8978/17/2/025603>
5. Yang Q., Xie Z., Zhang M., Ouyang X., Xu Y., Cao Ya., Wang S. [et al.]. Ultra-secure optical encryption based on tightly focused perfect optical vortex beams. *Nanophotonics*, 2022, vol. 11, no. 5, pp. 1063–1070. <https://doi.org/10.1515/nanoph-2021-0786>
6. Allen L., Beijersbergen M. W., Spreeuw R. J., Woerdman J. P. Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes. *Physical Review A*, 1992, vol. 45, no. 11, pp. 8185–8189. <https://doi.org/10.1103/physreva.45.8185>
7. Allen L., Padgett M. J., Babiker M. The orbital angular momentum of light. *Progress in Optics*. Vol. 39. Amsterdam, Elsevier, 1999, pp. 291–372. [https://doi.org/10.1016/S0079-6638\(08\)70391-3](https://doi.org/10.1016/S0079-6638(08)70391-3)
8. Gibson G., Courtial J., Padgett M. J., Vasnetsov M., Pas'ko V., Barnett S. M., Franke-Arnold S. Free-Space Information Transfer Using Light Beams Carrying Orbital Angular Momentum. *Optics Express*, 2004, vol. 12, no. 22, pp. 5448–5456. <https://doi.org/10.1364/opex.12.005448>
9. Willner A. E., Huang H., Yan Y., Ren Y., Ahmed N., Xie G., Bao C. [et al.]. Optical communications using orbital angular momentum beams. *Advances in Optics and Photonics*, 2015, vol. 7, no. 1, pp. 66–106. <https://doi.org/10.1364/AOP.7.000066>
10. Krenn M., Handsteiner J., Fink M., Fickler R., Ursin R., Malik M., Zeilinger A. Twisted light transmission over 143 km. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 2016, vol. 113, no. 48, pp. 13648–13653. <https://doi.org/10.1073/pnas.1612023113>
11. Barnett S. M., Allen L. Orbital angular momentum and nonparaxial light beams. *Optics Communications*, 1994, vol. 110, no. 5–6, pp. 670–678. [https://doi.org/10.1016/0030-4018\(94\)90269-0](https://doi.org/10.1016/0030-4018(94)90269-0)
12. Barnett S. M. Optical angular-momentum flux*. *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*, 2002, vol. 4, no. 2, pp. S7. <https://doi.org/10.1088/1464-4266/4/2/361>
13. Volke-Sepulveda K., Garcés-Chávez V., Chávez-Cerda S., Arlt J., Dholakia K. Orbital angular momentum of a high-order Bessel light beam. *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*, 2002, vol. 4, no. 2, pp. S82. <https://doi.org/10.1088/1464-4266/4/2/373>
14. Bouchal Z., Olivik M. Non-diffractive vector Bessel beams. *Journal of Modern Optics*, 1995, vol. 42, no. 8, pp. 1555. <https://doi.org/10.1080/09500349514551361>
15. Khilo N. A. Diffraction and order conversion of Bessel beams in uniaxial crystals. *Optics Communications*, 2012, vol. 285, no. 5, pp. 503–509. <https://doi.org/10.1016/j.optcom.2011.11.014>
16. Lekner J. Invariants of three types of generalized Bessel beams. *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics*, 2004, vol. 6, pp. 837. <https://doi.org/10.1088/1464-4258/6/9/004>

17. Ji Zh., Liu W., Krylyuk S., Fan X., Zhang Zh., Pan A., Feng L. [et al.]. Photocurrent detection of the orbital angular momentum of light. *Science*, 2020, vol. 368, no. 6492, pp. 763–767. <https://doi.org/10.1126/science.aba9192>

18. Dai M., Wang C., Sun F., Wang Q. J. On-chip photodetection of angular momentums of vortex structured light. *Nature Communications*, 2024, vol. 15, pp. 5396. <https://doi.org/10.1038/s41467-024-49855-0>

Информация об авторах

Хило Николай Анатольевич – кандидат физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник, Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси (пр. Независимости, 68-2, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: n.khilo@dragon.bas-net.by. <http://orcid.org/0000-0001-5550-1708>

Бельй Владимир Николаевич – академик Национальной академии наук Беларуси, доктор физико-математических наук, заведующий центром «Диагностические системы», Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси (пр. Независимости, 68-2, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: v.belyi@dragon.bas-net.by. <http://orcid.org/0000-0002-7543-3682>

Information about the authors

Nikolai A. Khilo – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Leading Researcher, B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (68-2, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: n.khilo@dragon.bas-net.by. <http://orcid.org/0000-0001-5550-1708>

Vladimir N. Belyi – Academician of the National Academy of Sciences of Belarus, Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Head of the Center “Diagnostic systems”, B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (68-2, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: v.belyi@dragon.bas-net.by. <http://orcid.org/0000-0002-7543-3682>