

ISSN 1561-2430 (Print)

ISSN 2524-2415 (Online)

УДК 519.8;621.3:007;621.3:001.891.57

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2025-61-1-74-88>

Поступила в редакцию 28.08.2024

Received 28.08.2024

Н. Н. Гущинский, М. Я. Ковалев, Б. М. Розин*Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси,
Минск, Республика Беларусь***ОПТИМИЗАЦИЯ НЕОДНОРОДНОЙ ЗАРЯДНОЙ ИНФРАСТРУКТУРЫ
И РАСПИСАНИЯ ЗАРЯДКИ ЭЛЕКТРОБУСОВ ДЛЯ ГОРОДСКИХ МАРШРУТОВ**

Аннотация. Рассматривается задача оптимизации комплектации узлов городской транспортной сети разнотипными зарядными станциями и суточного расписания зарядки для парка разнотипных электробусов с аккумуляторными батареями. Зарядные станции депо должны обеспечивать медленную зарядку в ночное время батарей электробусов до максимального уровня, зарядные станции терминалов маршрутов – быструю частичную подзарядку батарей, достаточную для выполнения электробусами очередных рейсов их дневных заданий в пределах представительного периода дня. В качестве критерия оптимальности принята минимизация суммарной суточной стоимости зарядных станций, износа батарей электробусов и потребленной электроэнергии. Разработана математическая модель задачи в форме смешанного целочисленного линейного программирования. Исследованы средства повышения эффективности модели за счет дополнительных ограничений и выделено наиболее эффективное подмножество таких ограничений. Проведенный компьютерный эксперимент со случайно генерируемыми задачами подтвердил хорошую работоспособность модели для задач средней и большой размерности.

Ключевые слова: электробус, аккумуляторная батарея, зарядная станция, смешанное целочисленное линейное программирование

Для цитирования. Гущинский, Н. Н. Оптимизация неоднородной зарядной инфраструктуры и расписания зарядки электробусов для городских маршрутов / Н. Н. Гущинский, М. Я. Ковалев, Б. М. Розин // Весті Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Сeryя фізіка-матэматычных навук. – 2025. – Т. 61, № 1. – С. 74–88. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2025-61-1-74-88>

Nikolai N. Guschinsky, Mikhail Y. Kovalyov, Boris M. Rozin*United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus***OPTIMIZATION OF HETEROGENEOUS CHARGING INFRASTRUCTURE
AND CHARGING SCHEDULE OF ELECTRIC BUSES FOR CITY ROUTES**

Abstract. The problem of optimizing the equipment of urban transport network nodes with charging stations of various types and the daily charging schedule for them for a fleet of battery electric buses is considered. Charging stations of depots should provide slow charging of electric bus batteries at night to the maximum level, charging stations of route terminals are intended for fast partial recharging of batteries, sufficient for electric buses to perform next trips of their daytime tasks within a representative period of the day. The criterion of optimality is the minimization of the total daily cost of charging stations, wear of electric bus batteries and consumed electricity. A mathematical model of the problem in the form of mixed integer linear programming has been developed. The means of increasing the efficiency of the model through additional constraints have been studied, and the most efficient subset of such constraints has been identified. A computer experiment with randomly generated problem instances has confirmed a good performance of the model for medium and large-scale problems.

Keywords: electric bus, battery, charging station, mixed integer linear programming

For citation. Guschinsky N. N., Kovalyov M. Y., Rozin B. M. Optimization of heterogeneous charging infrastructure and charging schedule of electric buses for city routes. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2025, vol. 61, no. 1, pp. 74–88 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2025-61-1-74-88>

Введение. В последние годы значительное внимание уделяется различным аспектам планирования зарядной инфраструктуры для подзарядки городского электротранспорта, в частности электробусов (ЭБ), оборудованных аккумуляторными батареями (далее – *батарея*) [1, 2]. Применяемые технологии зарядки таких электробусов отличаются большим разнообразием.

ем – они могут заряжаться на стационарных зарядных станциях (ЗС) только в депо; в депо и на терминалах маршрутов; в депо, на терминалах и на промежуточных автобусных остановках (URL: <https://zeeus.eu/uploads/publications/documents/zeeus-report2017-2018-final.pdf>). На практике основными альтернативами технологий зарядки ЭБ являются частые зарядки аккумуляторных батарей небольшой емкости на терминалах и остановках маршрутов либо редкие зарядки батарей большой емкости только в депо. Для зарядки на маршруте обычно требуются зарядные станции большой мощности (до 400–500 кВт), в то время как для зарядки в депо могут использоваться ЗС меньшей мощности (80–100 кВт) [1, 2].

Каждая из этих альтернатив имеет свои достоинства и недостатки. С одной стороны, при зарядке только в депо затраты на зарядную инфраструктуру и нагрузка на городскую энергосеть сокращаются, однако при этом необходимо оснащение электробусов батареями большой емкости, обеспечивающими увеличенный запас хода на одном заряде, что снижает их пассажировместимость и увеличивает расход энергии. С другой стороны, зарядка только на маршруте дает возможность уменьшить размер батарей и время зарядки, но требует больших инвестиций в зарядную инфраструктуру [3]. С целью сбалансированного сокращения недостатков этих альтернатив целесообразно рассмотреть смешанную технологию зарядки, сочетающую медленную зарядку электробусов в депо в ночное время на зарядных станциях малой мощности и быструю подзарядку станциями повышенной мощности на терминалах при обслуживании маршрутов. Такой подход расширяет возможности сглаживания пиковых нагрузок на городскую энергосеть и оптимизации износа батарей за счет использования переменных тарифов на электроэнергию и балансировки расписания зарядки ЭБ во времени и пространстве на ЗС, размещенных в различных позициях транспортной сети [4].

Рассматривается обслуживание парком разнотипных электробусов набора замкнутых круговых маршрутов транспортной сети с одним депо. Каждый маршрут проходит через не более чем 2 терминала, в которых электробусы проводят значительное время. Обслуживание маршрута в течение дня сводится к выполнению согласно заданному расписанию последовательности поездов (*рейсов*) между местами размещения зарядных станций (депо, терминалы), при каждом посещении которых электробус полностью либо частично восстанавливает *уровень заряда* (УЗ) своей батареи, измеряемый в долях ее энергетической емкости. С этой целью депо оборудуется несколькими однотипными зарядными станциями медленной зарядки, а каждый из терминалов – несколькими однотипными ЗС быстрой зарядки. Предполагается, что при однократном посещении депо электробусы в ночное время полностью восстанавливают уровень заряда своей батареи, а при каждом посещении любого терминала маршрута (начального либо альтернативного) УЗ батареи ЭБ пополняется до уровня, достаточного для выполнения рейса до следующей зарядки. В качестве начального любому ЭБ может быть назначен любой из терминалов маршрута.

Первый и последний рейсы последовательности между депо и одним из терминалов являются вспомогательными (без пассажиров) и выполняются без промежуточных остановок, тогда как (сервисные) рейсы между терминалами маршрута в прямом и обратном направлении предназначены для перевозки пассажиров и, как правило, включают фиксированные последовательности промежуточных краткосрочных остановок для их посадки / высадки. Затраты энергии и время в пути всех сервисных рейсов одного направления (от начального терминала до альтернативного либо от альтернативного до начального) одного и того же маршрута одинаковы. Другие маршруты могут содержать терминалы данного маршрута, но их рейсы отличаются последовательностями промежуточных остановок – один и тот же терминал может принадлежать нескольким маршрутам. В таком случае электробусы этих маршрутов совместно используют ресурсы зарядных станций данного терминала. Если маршрут содержит единственный терминал, то все сервисные рейсы на этом маршруте идентичны, они начинаются и заканчиваются в этом терминале и содержат фиксированную последовательность промежуточных остановок. Каждому ЭБ парка назначается дневное задание, определяющее единственный маршрут обслуживания, последовательность рейсов, характеризующуюся начальным терминалом после депо и общим числом рейсов, а также моментами выхода / возвращения ЭБ в депо и расписанием прихода / ухода на тер-

миналы маршрута в течение суток. Терминал маршрута, из которого электробус возвращается в депо, однозначно определяется назначенным начальным терминалом и общим числом рейсов в его дневном задании.

Функционирование парка электробусов и зарядной инфраструктуры должно удовлетворять ряду условий, включающих наряду с обязательным соблюдением каждым ЭБ парка заданного расписания, также поддержание УЗ его батареи в заданном диапазоне, исключающее преждевременный выход ее из строя, и восстановление исходного УЗ батареи перед выходом ЭБ из депо на следующий день в связи с цикличностью суточного процесса обслуживания. Зарядная инфраструктура каждого терминала должна обеспечивать подзарядку ЭБ всех маршрутов, содержащих данный терминал, при каждом их посещении в пределах временных интервалов между приходом и уходом каждого из них в соответствии с дневным расписанием.

Мы ограничимся обеспечением условий функционирования парка и зарядной инфраструктуры депо в ночном периоде, а терминалов – в *представительном периоде* конкретного дня с наибольшей интенсивностью обслуживания пассажиропотока, выделяемого из интервала «часов пик», для которого характерна наибольшая частота рейсов на маршрутах и, соответственно, интенсивность использования ЗС терминалов. В качестве такового конкретного дня выбирается день (для Европы, как правило, рабочий день февраля), характеризующийся наибольшим расходом ЭБ электроэнергии вследствие неблагоприятных погодных условий и дорожной обстановки. Пропускная способность зарядной инфраструктуры, обеспечивающая функционирование парка ЭБ в представительном периоде такого дня, дает возможность обеспечить его функционирование в другом периоде любого дня года с меньшими частотами рейсов. Такой подход также позволяет уменьшить сложность рассматриваемой задачи за счет рассмотрения условий функционирования зарядной инфраструктуры терминалов для части дневного расписания с наибольшей частотой рейсов.

Зарядка электробусов в депо и при каждом посещении терминала выполняется однократно на одной из нескольких зарядных станций без прерываний, причем в любой момент времени к ЗС может быть подключен только один ЭБ. Подзарядка ЭБ осуществляется при каждом посещении любого терминала обслуживаемого им маршрута, в том числе перед первым выходом на маршрут после депо и перед возвращением в депо после завершения последнего сервисного рейса по маршруту. Зависимость изменения уровня заряда электробуса в допустимом диапазоне аппроксимируется линейно убывающей функцией от пройденного расстояния при движении по маршруту с постоянной средней скоростью и возрастающей линейной функцией от времени зарядки на ЗС в промежутках между рейсами при не полностью заряженной батарее или постоянной функцией, равной максимальному УЗ, при заряженной батарее.

Каждый маршрут могут обслуживать электробусы нескольких типов. Однотипные ЭБ парка оборудуются батареями одинаковой емкости. В процессе функционирования их батареи изнашиваются. Основными факторами, влияющими на износ батареи, являются уровни заряда, при которых осуществляются ее зарядка и разрядка, скорости зарядки и разрядки, а также температура батареи [5, 6]. Как правило, производителем батареи специфицируются: диапазон УЗ, при котором батарея может функционировать достаточно продолжительное время; экспериментальные характеристики достижимого числа циклов ее зарядки и разрядки за период эксплуатации в зависимости от глубины разряда, скоростей зарядки и разрядки (при нормальной температуре). Методы определения стоимости износа батарей на базе таких экспериментальных характеристик приведены в [6–8].

Емкость батареи, применяемые скорости ее разрядки и зарядки на различных зарядных станциях для каждого типа электробуса предполагаются заданными и неизменными в течение всего периода эксплуатации. Величины среднего расхода электроэнергии (соответственно, средние потери УЗ) на 1 км маршрута для каждого типа ЭБ в представительный период времени также предполагаются известными. Они считаются одинаковыми для однотипных ЭБ. Тарифы на электроэнергию зависят от времени суток и, как правило, в ночное время они ниже, чем в дневные часы.

В работе рассматриваются два типа расписаний: заданное расписание движения электробусов по маршрутам и расписание их зарядки на зарядных станциях депо и терминалов, которое требуется определить. Исследуется задача комплексной оптимизации для заданного парка электробусов состава идентичных ЗС медленной зарядки в депо и идентичных ЗС быстрой зарядки на каждом из терминалов маршрутов. При решении этой задачи также определяются полное расписание зарядки ЭБ на ЗС депо в ночное время и расписание зарядки на ЗС терминалов в представительном периоде дня с минимальной суммарной суточной стоимостью всех зарядных станций, износа батарей парка электробусов и потребленной электроэнергии при обеспечении обслуживания городских маршрутов согласно заданному суточному расписанию.

Для сокращения сложности рассматриваемой задачи за счет учета только части расписания событий зарядки электробусов парка в представительном периоде принимается предположение об эквивалентности зависимостей изменения уровня заряда однотипных ЭБ, обслуживающих один и тот же маршрут с дневными заданиями, характеризуемыми одинаковым начальным терминалом при выполнении одинаково направленных сервисных рейсов. Это позволяет разбить подмножество электробусов парка каждого маршрута на группы (кластеры) эквивалентности с одинаковыми зависимостями изменения УЗ в идентичных сервисных рейсах. При этом длительности зарядки любого ЭБ из одного кластера при любом посещении после сервисного рейса одного и того же терминала считаются одинаковыми.

Математическая постановка задачи. Обозначим через R множество городских маршрутов, обслуживаемых заданным парком электробусов $J = \{1, \dots, n\}$; тип $e(j)$ каждого ЭБ $j \in J$ соответствует одному из типов множества $EB = \{e_1, e_2, \dots, \bar{e}\}$. Подзарядка ЭБ производится однократно без прерываний в интервале $[T_D, \bar{T}_D]$ ночного периода, $12 \leq T_D \leq 24 \leq \bar{T}_D \leq 36$, $\bar{T}_D - T_D \leq 12$, в единственном депо D на идентичных станциях cd медленной зарядки и в дневное время на терминалах множества Θ_r каждого маршрута $r \in R$, $1 \leq |\Theta_r| \leq 2$, $\bigcup_{r \in R} \Theta_r = \Theta$, идентичными станциями с быстрой зарядки.

Представим транспортную сеть обслуживаемых электробусами маршрутов из R взвешенным ориентированным мультиграфом $G = (U, V)$ с множеством вершин $U = \{\Theta \cup \{D\}\}$ и множеством дуг $V = \{(\alpha, \beta) | \alpha, \beta \in U\}$. Любая дуга $(\alpha, \beta) \in V$ соответствует рейсам электробусов по одному из маршрутов в их дневных заданиях, указывает направление их движения в рейсах и характеризуется длиной $L_{\alpha, \beta}$, в общем случае $L_{\alpha, \beta} \neq L_{\beta, \alpha}$. Каждую пару вершин сети могут соединять несколько дуг различной длины, принадлежащих различным маршрутам.

В табл. 1 приведены данные трех маршрутов № 27, 43 и 59 г. Минска, которые обслуживаются электробусами. Для обозначения терминалов маршрутов использованы их сокращенные наименования: ДС Курасовщина – *Кур*, ДС Дружная – *Др*, ДС Серова – *Сер*, Долгобродская – *Дол*, Депо троллейбусного парка № 2 – D^1 .

Множество событий зарядки электробусов парка в депо в ночное время включает по одному событию зарядки для каждого ЭБ $j \in J$. Для каждого терминала рассматривается подмножество событий зарядки ЭБ, посещающих этот терминал в течение заданного представительного периода дня.

Для сокращения размерности задачи предполагаем:

- 1) длительности зарядки ЭБ при посещении одного и того же терминала после любого сервисного рейса идентичны, но могут отличаться от длительности зарядки на другом терминале;
- 2) ЭБ парка можно разбить на кластеры эквивалентности с идентичными характеристиками расхода УЗ и длительностями зарядки на одном и том же терминале после одинаковых сервисных рейсов при совпадении типа ЭБ, маршрута обслуживания и первого посещаемого после депо терминала.

При этих предположениях найденная длительность зарядки при любом посещении фиксированного терминала для одного электробуса из кластера определит длительности зарядки на этом терминале для всех ЭБ этого кластера. Тогда для определения расписания зарядки на ЗС терминала в выбранном диапазоне достаточно, чтобы подмножество событий зарядки этого тер-

¹ Государственное предприятие «Минсктранс»: [сайт]. URL: <https://www.minsktrans.by>; Справочник маршрутов Минска: [сайт]. URL: <https://wikiroutes.info/minsk/catalog>.

минала включало хотя бы одно событие зарядки хотя бы одного ЭБ каждого кластера для этого терминала. Это позволяет сузить размер рассматриваемого представительного периода и/или мощности рассматриваемых подмножеств событий зарядки на терминалах.

Таблица 1. Характеристики маршрутов № 27, 43 и 59, обслуживаемых электробусами

Table 1. Characteristics of routes no. 27, 43 and 59 served by electric buses

Номер маршрута	Последовательность вершин	Расстояние между вершинами, км	Минимальный интервал между рейсами, мин
27	Кур – Др	7,4	7
	Др – Кур	7,44	10
	Д – Кур	12,28	–
	Кур – Д	11,62	–
43	Сер – Др	7,38	4
	Др – Сер	8,01	6
	Д – Сер	12,78	–
	Сер – Д	11,59	–
59	Сер – Дол	11,99	5
	Дол – Сер	12,81	4
	Д – Дол	2,51	–
	Д – Сер	11,89	–
	Сер – Д	11,08	–
	Дол – Д	2,47	–

Сопоставим вершине D оргграф $Gd = (Jd, Vd)$ событий однократной зарядки каждого электробуса парка на одной из зарядных станций в депо в ночном диапазоне $[T_D, \bar{T}_D]$, где Jd – множество событий зарядки в депо ЭБ (индекс события зарядки $j \in Jd$ соответствует индексу ЭБ $j \in J$); Vd – множество дуг (i, j) для пар событий $i, j \in Jd$, которые могут быть выполнены последовательно на одной ЗС. Доопределим множество Jd до двухполюсника, добавив две искусственные вершины $0d, fd$ (источник и сток) и дуги $(0d, j)$, соединяющие источник с каждым $j \in Jd$, а также дуги (j, fd) , соединяющие каждый $j \in Jd$ со стоком. Тогда каждый путь из источника $0d$ в сток fd по дугам в этом оргграфе соответствует одной зарядной станции в депо, на которой последовательно выполняются события зарядки, принадлежащие этому пути (см., напр., [9]). Аналогично, каждому терминалу $v \in \Theta$ сопоставим оргграф $Gv = (RP_v \cup \{0v\} \cup \{fv\}, Vst_v)$ событий зарядки из множества RP_v в заданном представительном периоде на ЗС этого терминала для ЭБ подмножества $R_v \subseteq R$ маршрутов, содержащих этот терминал, источника $0v$ и стока fv . Дуги из множества Vst_v этого оргграфа определяют возможность последовательного выполнения пар событий зарядки из RP_v на одной из ЗС, а также соединяют $0v$ с каждым событием зарядки и каждое событие зарядки с fv . Каждый путь из источника $0v$ в сток fv по дугам в этом оргграфе соответствует одной ЗС терминала v .

Каждому маршруту $r \in R$ сопоставляются: подмножество Θ_r терминалов маршрута, где $1 \leq |\Theta_r| \leq 2$; для $\Theta_r = \{v, \mu\}$; пара сервисных рейсов (v, μ) , (μ, v) , которая может составлять один из возможных сервисных циклов ЭБ $((v, \mu), (\mu, v))$ либо $((\mu, v), (v, \mu))$ в зависимости от задаваемого в дневном задании для ЭБ терминалов порядка обхода $D \rightarrow v \rightarrow \mu$, либо $D \rightarrow \mu \rightarrow v$ после депо (для $\Theta_r = \{v\}$ единственным сервисным циклом будет рейс (v, v) , начинающийся и заканчивающийся в единственном терминале v); длины $L_{a,b}$ дуг между вершинами маршрута, км, $a, b \in \{D\} \cup \Theta_r$; подмножество $J_r \subseteq J$ ЭБ, обслуживающих маршрут, $\bigcup_{r \in R} J_r = J$, $J_\eta \cap J_\mu = \emptyset$, при $\eta \neq \mu, \eta, \mu \in R$.

Тип электробусов $e \in EB$ характеризуется:

- энергетической емкостью E_e батареи, кВт·ч;
- диапазоном $[\underline{s}_e, \bar{s}_e]$ допустимых значений s относительного УЗ батареи по отношению к E_e , $0 \leq \underline{s}_e \leq \bar{s}_e \leq 1$;
- средним удельным расходом cl_e энергии (заряда) на маршрутах, кВт·ч/км;
- постоянными скоростями Cr_e^D, Cr_e^{st} увеличения относительного значения уровня заряда батареи (зарядки) на станции cd в депо и на станции c на любом терминале соответственно (обо-

значаюцца велічынямі xC (1/ч), дзе x – велічыня скорасці, абратная максімальнаму часу (ч) зарадкай поўнастью разражанага батареі пры даннай скорасці, напрыклад, $2C$ – абазначае поўную зарадку разражанага батареі за 0,5 ч);

– пастаяннай скорасцю Cr_e^{tr} зніжэння адноснага значэння ўзровень зарада батареі (разрадка) ад пройдзенага адстання пры пастаяннай сярэдняй скорасці руху;

– максімальнымі даўжынямі τ_e^{\max} , t_e^{\max} зарадка ад узровень зарада \underline{s}_e да \bar{s}_e у дэпо і на тэрмінале адпаведна;

– кусочна-лінейнымі функцыямі $\tilde{C}_e^D(s)$, $\tilde{C}_e^{st}(s)$, $\tilde{C}_e^{tr}(s)$ кумулятыўнай кошту зносу батареі ЭБ, зададзенымі на інтэрвале $[0,1]$ значэнняў s УЗ пры зарадка ў дэпо, на тэрміналах альбо разрадка на маршрутах адпаведна.

Замечание 1. Функцыі $\tilde{C}_e^D(s)$, $\tilde{C}_e^{st}(s)$, $\tilde{C}_e^{tr}(s)$ вызначаюцца (см., напр., [7, 8, 10]) з выкарыстаннем прадстаўляемых вытворца батареі эксперыментальных характэрыстык АСС(DoD) дасяжымага ліку цыклаў зарадка / разрадка батареі за перыяд яе эксплуатацыі ад глыбіні DoD яе разрады ($DoD = 1 - s$) і прымяняемых велічынь Cr_e^D , Cr_e^{st} адпаведна скорасці зарадка ў дэпо і на тэрмінале альбо разрадка Cr_e^{tr} , а таксама інвэстыцыйнай кошту батареі.

В табл. 2 прыведзены характэрыстыкі электробусов двух тыпов вытворства ОАО «Белкоммунмаш»¹ (г. Мінск), існуючых на маршрутах у сталіцы.

Таблица 2. Характеристики электробусов производства ОАО «Белкоммунмаш»

Table 2. Characteristics of electric buses produced by JSC “Belkommunmash”

Тип электробуса	Число пассажиров, чел.	Диапазон хода на одном заряде, км	Средний расход энергии (кВт·ч/км)	Емкость батареи, кВт·ч	Максимальное время зарядки в депо, ч	Максимальное время зарядки на терминалах, мин	Стоимость батареи, евро
E433	153	15	1,85	48	1,4	5,25	20 640
E420	87	15	1,6	48	1,4	5,25	20 640

Приведем используемые далее соответствия между параметрами задачи:

– $j = j(v,k)$ – индекс электробуса, соответствующий событию зарядки с индексом $k \in RP_v$ на терминале v в представительном периоде, $v \in \Theta$;

– $p = p(v,k)$ – номер рейса электробуса $j(v,k)$, предшествующего событию зарядки с индексом $k \in RP_v$, $v \in \Theta$;

– $e(j)$ – тип $e \in EB$ электробуса $j, j \in J$;

– $r(j)$ – маршрут $r \in R$, обслуживаемый электробусом $j, j \in J$;

– $v^D(j)$ – первый по порядку посещения после депо терминал для задания электробуса j , $v^D(j) \in \Theta_{r(j)}, j \in J$.

Каждому $j \in J$ сопоставляются:

– набор $(r(j), e(j), v^D(j), N_j)$ параметров дневного задания, включающий маршрут $r(j)$ обслуживания с множеством $\Theta_{r(j)} = \{v^D(j), v^A(j)\}$ терминалов, тип электробуса $e(j) \in EB$, начальный терминал $v^D(j)$ после депо и общее число N_j рейсов;

– порядок $SC^{r(j)} = (v^D(j), v^A(j))$ обхода терминалов маршрута $r(j)$ из множества $\Theta_{r(j)}$, где начальному после депо терминалу $v^D(j)$ сопоставляется порядковый индекс 1, а альтернативному $v^A(j)$ – индекс 2;

– кластер $CL_{r(j),\omega}$ ЭБ маршрута $r(j)$ с индексом $\omega \in \{1, \dots, \bar{\omega}_{r(j)}\}$, соответствующий кортежу $sp(j) = (r(j), e(j), v^D(j))$, $r(j) \in R$, $\bigcup_{r \in R} \bigcup_{\omega=1}^{\bar{\omega}_r} CL_{r,\omega} = J$, где $CL_{r,\omega'} \cap CL_{r,\omega''} = \emptyset$ при $\omega', \omega'' \in \{1, \dots, \bar{\omega}_r\}$, $\omega' \neq \omega''$, $r \in R$;

– моменты td_j^D , ta_j^D первого выхода из депо на маршрут и возвращения в депо в конце рабочего дня соответственно;

¹ БКМ Холдинг: [сайт]. URL: <https://holdingbkm.com>.

– моменты ta_{vk}^{st} , td_{vk}^{st} прибытия электробуса $j = j(v,k)$ в терминал / отправления из терминала $v \in \Theta_{r(j)}$ после рейса с номером $p(v,k)$ (ЭБ $j(v,k)$ и его рейс $p(v,k)$ однозначно определяются событием зарядки $k \in RP_v$) в представительном периоде для всех событий зарядки с индексами $k \in RP_v$, соответствующих ЭБ $j(v,k)$;

– длины $L_{a,b}$ дуг маршрута $r(j)$ (км), $a, b \in \{D, v^D(j), v^A(j)\}$, $a \neq b$, верхние границы τ_j^{\max} , t_j^{\max} длительностей зарядки электробуса j в депо и на терминале соответственно.

З а м е ч а н и е 2. Последний посещаемый электробусом j в дневном задании терминал $v^F(j) = v^D(j)$ для четного N_j , $v^F(j) = v^A(j)$ для нечетного N_j .

З а м е ч а н и е 3. Все моменты времени в суточном цикле функционирования парка электробусов располагаются в пределах 24 ч при выборе в качестве начала цикла момента первого выхода первого электробуса на маршрут. При сохранении календарного начала шкалы моменты прихода / выхода электробусов из депо располагаются на 36-часовой шкале времени.

Каждому терминалу $v \in \Theta$ соответствуют:

– подмножество $R_v \subseteq R$ маршрутов, обслуживаемых ЭБ с подзарядкой на этом терминале;

– подмножество $J(v) = \bigcup_{r \in R_v} J_r \subseteq J$ электробусов, обслуживающих маршруты $r \in R_v$;

– диапазон $[\gamma st, \delta st]$ времени зарядки в представительный период для всех $j \in J(v)$, $0 \leq \gamma st < \delta st \leq 24$;

– номера μ_j , g_j первого и последнего рейсов $p(v,k)$ в дневных заданиях электробусов $j = j(v,k) \in J(v)$, для которых моменты прихода и ухода на терминал v принадлежат представительному периоду, $\gamma st \leq ta_{vk}^{st} < td_{vk}^{st} \leq \delta st$, $1 \leq \mu_j \leq g_j \leq N_j$ (для некоторых $j \in J(v)$ такие рейсы могут отсутствовать);

– множество RP_v событий зарядки для ЭБ $j(v,k) \in J(v)$ после рейсов с номерами $p(v,k)$, удовлетворяющими условиям $\mu_{j(v,k)} \leq p(v,k) \leq g_{j(v,k)}$.

Стоимостные характеристики: EC^D – тариф на электроэнергию в ночное время (для депо); EC^{st} – тариф на электроэнергию в дневное время (для терминалов); CC^D – годовая инвестиционная и операционная стоимость одной ЗС типа cd для депо; CC^{st} – годовая инвестиционная и операционная стоимость одной ЗС типа c для терминалов.

Переменные задачи. Введем следующие управляемые переменные задачи:

– u_j^D – задержка начала зарядки электробуса j в депо относительно момента его прихода в депо, t_j^D – длительность зарядки ЭБ j в депо, $j \in J$;

– $z_{ij}^D \in \{0,1\}$, $i, j \in \{0d\} \cup Jd \cup \{fd\}$, $z_{ij}^D = 1$, если и только если событие зарядки в депо с индексом j выполняется после события зарядки с индексом i на одной ЗС, $(i, j) \in Vd$, $i \neq j$;

– u_{vk}^{st} – задержка начала события $k \in RP_v$ зарядки электробуса $j(v,k)$ на терминале v относительно момента ta_{vk}^{st} его прихода на этот терминал в представительном периоде, $v \in \Theta$, $j \in J$;

– t_{jp}^{st} – длительность зарядки электробуса j на терминале по завершении рейса p , $j \in J$, $p = 1, \dots, N_j - 1$;

– $z_{vkl}^{st} \in \{0,1\}$, $v \in \Theta$, $k, l \in \{0v\} \cup RP_v \cup \{fv\}$, $z_{vkl}^{st} = 1$, если и только если событие зарядки $l \in RP_v$ на терминале v выполняется после события зарядки с индексом k ($l \neq k$) на одной ЗС;

– sa_{jp} – уровень заряда электробуса j при прибытии после рейса p на терминал ($1 \leq p \leq N_j - 1$) либо в депо ($p = N_j$), $sa_{jp} \in [0,1]$, $j \in J$, $p = 1, \dots, N_j$;

– sd_{jp} – уровень заряда электробуса j при отправлении после рейса p и соответствующей зарядки из терминала $v \in \{v^D(j), v^A(j)\}$, $1 \leq p \leq N_j - 1$ либо из депо (при $p = N_j$), $sd_{jp} \in [0,1]$, $j \in J$, $p = 1, \dots, N_j$.

Приведем дополнительно используемые далее соответствия между параметрами задачи:

– $\xi(p) = (p + v^D(j)) \bmod |TD^{r(j)}| + 1$ – индекс элемента последовательности $TD^{r(j)} = (TD_1^{r(j)}, TD_2^{r(j)})$ (при $|\Theta_{r(j)}| = 2$) расстояний до терминалов $v^D(j)$, $v^A(j)$ от предыдущих терминалов $v^A(j)$, $v^D(j)$ согласно индексам последовательности $SC^{r(j)}$, $p = 2, \dots, N_j - 1$; здесь и далее число $z \bmod y$ равно остатку от деления z/y натуральных чисел z и y , $|Y|$ – число элементов множества либо последовательности Y ;

– $\zeta(p) = (N_j - 1 + v^D(j)) \bmod |DTD^{r(j)}| + 1$ – индекс элемента последовательности $DTD^{r(j)} = (DTD_1^{r(j)}, DTD_2^{r(j)})$ (при $|\Theta_{r(j)}| = 2$) расстояний от терминалов $v^D(j), v^A(j)$ до депо согласно индексу последовательности $SC^{r(j)}, p = 2, \dots, N_j - 1$;

– соответствие длин $L_p(j)$ рейсов p дневного задания ЭБ j длинам дуг транспортной сети: $L_1(j) = L_{D,v^D(j)}, L_{N_j}(j) = L_{v^F(j),D}$, где $v^F(j) = v^D(j)$ для четного $N_j, v^F(j) = v^A(j)$ для нечетного $N_j, L_{2k}(j) = L_{v^D(j),v^A(j)}, k = 1, \dots, \lfloor (N_j - 1)/2 \rfloor$, при $N_j > 2, L_{2k+1}(j) = L_{v^A(j),v^D(j)}, k = 1, \dots, \lfloor N_j/2 \rfloor - 1$, при $N_j > 3$.

Целевая функция. Суточные инвестиционные и операционные затраты на зарядную станцию каждого типа определяются произведениями $\frac{CC^D}{365} \sum_{j \in Jd} z_{0d,j}^D, \frac{CC^{st}}{365} \sum_{v \in \Theta} \sum_{k \in RP_v} z_{v,0v,k}^{st}$ суточных долей стоимостей ЗС для депо и терминалов на количество соответствующих ЗС. Последние определяются как количество последовательностей дуг в двухполусных сетях событий зарядки, выходящих из вершины-источника, т. е. $\sum_{j \in Jd} z_{0d,j}^D$ для депо и $\sum_{k \in RP_v} z_{v,0v,k}^{st}$ для терминала $v \in \Theta$ (см., напр., [9]).

Суточные затраты парка электробусов на электроэнергию складываются из произведений $EC^D E_{e(j)} Cr_{e(j)}^D t_j^D$ мощностей, длительностей зарядки каждого ЭБ j и ночного тарифа в депо и произведений $EC^{st} E_{e(j)} Cr_{e(j)}^{st} t_{jp}^{st}$ мощностей, длительностей зарядки на терминалах после рейсов $p = 1, \dots, N_j - 1$ и дневного тарифа для каждого ЭБ $j \in J$.

Как было отмечено выше, целевая функция задачи включает наряду с инвестиционными и операционными затратами на зарядную инфраструктуру и потребленную электроэнергию также стоимость износа батарей парка электробусов. Способ расчета стоимости износа батареи электробуса на любом отрезке траектории ее уровня заряда на основе кусочно-линейных функций $\tilde{C}_e^D(s), \tilde{C}_e^{st}(s), \tilde{C}_e^{tr}(s)$ кумулятивного износа в зависимости от значения УЗ $s_d \in [0,1]$ и скорости зарядки при нормальной температуре окружающей среды приведен, например, в работах [6–8, 10].

Математическая формулировка задачи. Требуется найти

$$\begin{aligned} \min & \left(EC^D \sum_{j \in J} E_{e(j)} Cr_{e(j)}^D t_j^D + EC^{st} \sum_{j \in J} \sum_{p=1}^{N_j-1} E_{e(j)} Cr_{e(j)}^{st} t_{jp}^{st} + \frac{CC^D}{365} \sum_{j \in Jd} z_{0d,j}^D + \right. \\ & \left. + \frac{CC^{st}}{365} \sum_{v \in \Theta} \sum_{k \in RP_v} z_{v,0v,k}^{st} + \sum_{i \in J} (\tilde{C}_e^D(sd_{j,N_j}) - \tilde{C}_e^D(sa_{j,N_j})) + \right. \\ & \left. + \sum_{j \in J} \sum_{p=1}^{N_j-1} (\tilde{C}_e^{st}(sd_{jp}) - \tilde{C}_e^{st}(sa_{jp})) + \sum_{j \in J} \sum_{p=1}^{N_j} (\tilde{C}_e^{tr}(sd_{j,p-1}) - \tilde{C}_e^{tr}(sa_{jp})) \right) \end{aligned} \quad (1)$$

при условиях:

$$ta_j^D + u_j^D + t_j^D \leq ta_i^D + u_i^D + M_1(1 - z_{ji}^D), \quad i, j \in J, \quad i \neq j, \quad (2)$$

$$\sum_{j \in Jd \cup \{fd\}} z_{ij}^D - \sum_{j \in \{0d\} \cup Jd} z_{ji}^D = 0, \quad i \in Jd, \quad (3)$$

$$\sum_{i \in \{0d\} \cup Jd, i \neq j} z_{ij}^D = 1, \quad j \in Jd, \quad (4)$$

$$\sum_{i \in Jd \cup \{fd\}, i \neq j} z_{ji}^D = 1, \quad j \in Jd, \quad (5)$$

$$\underline{T}_D \leq ta_j^D + u_j^D, \quad j \in J, \quad (6)$$

$$ta_j^D + u_j^D + t_j^D \leq \min\{\bar{T}_D, td_j^D + 24\}, \quad j \in J, \quad (7)$$

$$ta_{vk}^{st} + u_{vk}^{st} + t_{j(v,k),p(v,k)}^{st} \leq ta_{vl}^{st} + u_{vl}^{st} + M_2(1 - z_{vkl}^{st}), \quad v \in \Theta, \quad k, l \in RP_v, \quad k \neq l, \quad (8)$$

$$t_{j,1}^{st} = t_{j^*,1}^{st}, \quad j \in CL_{r(j),\omega}, \quad \omega = 1, \dots, \bar{\omega}_{r(j)}, \quad r(j) \in R, \quad (9)$$

$$t_{j,p}^{st} = t_{j^{**},2}^{st}, \quad p = 2, 4, \dots, 2\zeta_j^{**}, \quad j \in CL_{r(j),\omega}, \quad \omega = 1, \dots, \bar{\omega}_{r(j)}, \quad r(j) \in R, \quad (10)$$

$$t_{j,p}^{st} = t_{j^*,3}^{st}, \quad p = 3, 5, \dots, 2\zeta_j^* + 1, \quad j \in CL_{r(j),\omega}, \quad \omega = 1, \dots, \bar{\omega}_{r(j)}, \quad r(j) \in R, \quad (11)$$

$$\sum_{k \in RP_v \cup \{fv\}} z_{vkl}^{st} - \sum_{k \in \{0v\} \cup RP_v} z_{vkl}^{st} = 0, \quad v \in \Theta, \quad l \in RP_v, \quad (12)$$

$$\sum_{l \in \{0v\} \cup RP_v, l \neq k} z_{vkl}^{st} = 1, \quad v \in \Theta, \quad k \in RP_v, \quad (13)$$

$$\sum_{l \in RP_v \cup \{fv\}, l \neq k} z_{vkl}^{st} = 1, \quad v \in \Theta, \quad k \in RP_v, \quad (14)$$

$$ta_{vk}^{st} + u_{vk}^{st} + t_{j(v,k),p(v,k)}^{st} \leq td_{vk}^{st}, \quad v \in \Theta, \quad k \in RP_v, \quad (15)$$

$$sd_{jp} = sa_{jp} + Cr_{e(j)}^{st} t_{jp}^{st}, \quad j \in J, \quad p = 1, \dots, N_j - 1, \quad (16)$$

$$E_{e(j)} sa_{j1} = E_{e(j)} sd_{j,N_j} - cl_{e(j)} L_{D,v^D(j)}, \quad j \in J, \quad (17)$$

$$E_{e(j)} sa_{jp} = E_{e(j)} sd_{j,p-1} - cl_{e(j)} TD_{\xi(p)}^{r(j)}, \quad j \in J, \quad p = 2, \dots, N_j - 1, \quad (18)$$

$$E_{e(j)} sa_{j,N_j} = E_{e(j)} sd_{j,N_j-1} - cl_{e(j)} DTD_{\zeta(N_j)}^{r(j)}, \quad j \in J, \quad (19)$$

$$sd_{j,N_j} = sa_{j,N_j} + Cr_{e(j)}^D t_j^D, \quad j \in J, \quad (20)$$

$$sd_{j,N_j} = \bar{s}_{e(j)}, \quad j \in J, \quad (21)$$

$$\underline{s}_{e(j)} \leq sd_{jp} \leq \bar{s}_{e(j)}, \quad p = 1, \dots, N_j, \quad j \in J, \quad (22)$$

$$\underline{s}_{e(j)} \leq sa_{jp} \leq \bar{s}_{e(j)}, \quad p = 1, \dots, N_j, \quad j \in J, \quad (23)$$

$$0 \leq t_j^D \leq \tau_j^{\max}, \quad j \in J, \quad (24)$$

$$0 \leq t_{jp}^{st} \leq t_j^{\max}, \quad p = 1, \dots, N_j - 1, \quad j \in J, \quad (25)$$

$$0 \leq u_j^D, \quad j \in J, \quad (26)$$

$$0 \leq u_{vk}^{st}, \quad v \in \Theta, \quad k \in RP_v, \quad (27)$$

$$z_{ij}^D \in \{0, 1\}, \quad i, j \in Jd, \quad (28)$$

$$z_{vkl}^{st} \in \{0, 1\}, \quad v \in \Theta, \quad k, l \in RP_v, \quad (29)$$

где

$$M_1 > ta_j^D, \quad j \in J, \quad M_2 > ta_{vk}^{st}, \quad v \in \Theta, \quad k \in RP_v,$$

$$j^* = \arg \max \left\{ N_j \mid j = j(v^D(j), k) \in CL_{r(j),\omega}, k \in RP_{v^D(j)} \right\},$$

$$j^{**} = \arg \max \left\{ N_j \mid j = j(v^A(j), k) \in CL_{r(j),\omega}, k \in RP_{v^A(j)} \right\},$$

$$\zeta_j^* = \max \{ \zeta \mid 2\zeta + 1 \leq N_j - 1 \},$$

$$\zeta_j^{**} = \max \{ \zeta \mid 2\zeta \leq N_j - 1 \}.$$

При $|\Theta_{r(j)}| = 1$ в (18) $TD_{\xi(p)}^{r(j)} = L_{v^D(j),v^D(j)}$, в (19) $DTD_{\zeta(N_j)}^{r(j)} = L_{v^D(j),D}$.

Целевая функция (1) представляет собой общую суточную стоимость: а) потраченной при зарядке электроэнергии в депо (первое слагаемое) и на терминалах маршрутов (второе слагаемое); б) всех зарядных станций в депо (третье слагаемое) и на терминалах (четвертое слагаемое); в) износа батарей парка при зарядке в депо (пятое слагаемое), на терминалах (шестое слагаемое) и при разрядке на маршрутах (седьмое слагаемое).

Условия (2), (8) гарантируют отсутствие пересечения пар событий зарядки различных электробусов по времени, выполняемых на одной ЗС депо либо терминала соответственно.

Условия (9)–(11) обеспечивают равенство длительностей зарядки на терминале для всех электробусов из одного кластера после любого предшествующего сервисного рейса длительности события зарядки из множества событий представительного периода для ЭБ этого кластера с наибольшим дневным числом рейсов.

Условия (3), (12) являются потоковыми для сети событий зарядки депо либо терминала соответственно.

Соотношения (4), (13) обеспечивают для каждого ЭБ ровно одно предшествующее событие зарядки в депо либо на терминале соответственно, в то время как соотношения (5), (14) – только одно последующее событие зарядки для депо либо для терминала соответственно.

Ограничения (6) обуславливают начало зарядки любого ЭБ в депо не ранее нижней границы диапазона ночного времени зарядки. Ограничения (7) гарантируют завершение зарядки любого ЭБ в депо в пределах ночного диапазона зарядки и до момента выхода его из депо на следующий день. Ограничения (15) обуславливают завершение зарядки любого ЭБ на терминале до заданного расписанием момента выхода на маршрут.

Условия (16) устанавливают, что уровень заряда ЭБ при выходе из терминала увеличивается по сравнению с уровнем его заряда при приходе в этот терминал после любого рейса с номером p на долю заряда, полученную при зарядке в этом терминале.

Условия (17) устанавливают, что уровень энергии ЭБ при первом приходе в терминал после первого рейса из депо меньше уровня его энергии при выходе из депо на величину энергии, потраченной в первом рейсе.

Условия (18) для двух терминалов на маршруте устанавливают, что уровень энергии ЭБ при приходе в терминал после рейса p уменьшается на величину энергии, потраченной в рейсе p по сравнению с уровнем энергии при выходе из предыдущего терминала после рейса $p - 1$ и соответствующей зарядки.

Условия (19) для двух терминалов на маршруте устанавливают, что уровень энергии при приходе электробуса в депо после выполнения дневного задания меньше уровня его энергии при выходе в последний рейс на величину энергии, потраченной в последнем рейсе. В случае единственного терминала в (18) вычитается энергия, потраченная в единственном сервисном рейсе, а в (19) – энергия, потраченная при возвращении из этого терминала в депо.

Ограничения (20) устанавливают, что уровень заряда ЭБ при выходе из депо по сравнению с его УЗ при приходе в депо увеличивается на долю заряда, полученную при зарядке в депо. Ограничения (21) обеспечивают восстановление уровня заряда ЭБ при первом выходе из депо до максимально возможного из заданного диапазона значений. Ограничения (22)–(29) задают области значений переменных задачи.

Задача (1)–(29) является задачей смешанного целочисленного линейного программирования (СЦЛП). Переменные u_j^D , u_{vk}^{st} , sd_{jp} , sa_{jp} , t_j^D и t_{jp}^{st} являются действительными, остальные z_{ij}^D и z_{vkl}^{st} – булевы. Далее формулировку (1)–(29) рассматриваемой задачи будем именовать Модель 1.

Дополнительные ограничения. Для решения задач СЦЛП обычно используют универсальные решатели такого класса задач, как, например, IBM ILOG CPLEX, Gurobi Optimizer (URL: <https://www.gurobi.com>). Для повышения эффективности поиска решений часто применяют дополнительные (усиливающие) ограничения, позволяющие сократить перебор допустимых целочисленных решений.

Здесь исследуются 2 типа таких ограничений. Дополнительные ограничения первого типа имеют вид

$$\underline{m}^D \leq \sum_{j \in Jd} z_{0d,j}^D \leq \bar{m}^D, \quad (30)$$

$$\underline{m}_v^{st} \leq \sum_{k \in RP_v} z_{v,0v,k}^{st} \leq \bar{m}_v^{st}, \quad v \in \Theta, \quad (31)$$

где \underline{m}^D , \underline{m}_v^{st} – нижние и \bar{m}^D , \bar{m}_v^{st} – верхние оценки количества зарядных станций для депо D и терминала $v \in \Theta$.

Для вычисления нижних оценок \underline{m}^D , \underline{m}_v^{st} используются формулы

$$\underline{m}^D = \left\lfloor \sum_{j \in J} \underline{t}_j^D / \Delta T^D \right\rfloor, \quad \underline{m}_v^{st} = \left\lfloor \sum_{k \in RP_v} \underline{t}_{jp(v,k)}^{st} / \Delta T^v \right\rfloor,$$

где ΔT^D , ΔT^v – допустимые длины интервалов времени зарядки, \underline{t}_j^D , \underline{t}_{jp}^{st} – нижние оценки длительностей событий зарядки ЭБ в депо либо на терминале соответственно. Формулы вычисления нижних оценок \underline{t}_j^D , \underline{t}_{jp}^{st} несложны и здесь не приводятся. Следует отметить, что в большинстве реальных задач полученные оценки $\underline{m}_v^{st} \leq 1$, и, следовательно, можно без вычислений положить $\underline{m}_v^{st} = 1$.

Для определения верхних оценок \bar{m}^D , \bar{m}_v^{st} используется адаптированный к рассматриваемой задаче эвристический алгоритм, предложенный в [8], для задачи построения циклического расписания обслуживания требований минимальным числом приборов с фиксированными длительностями операций и допустимыми окнами. В качестве таких фиксированных длительностей в алгоритме используются верхние оценки \bar{t}_j^D , \bar{t}_{jp}^{st} длительностей событий зарядки ЭБ $j \in J$ в депо либо длительностей событий $k \in RP_v$ зарядки ЭБ $j = j(v,k)$ в представительном периоде после рейсов $p = p(v,k)$ на терминале v . Формула получения оценки \bar{t}_j^D тривиальна, оценки \bar{t}_{jp}^{st} определяются из рекуррентных соотношений, которые здесь для краткости не приводятся. Отметим, что характерное время получения оценки \bar{m}^D для $|J| = 50$ и 1000 итераций алгоритма составило 1,5 с. Следует также отметить, что это время относится к этапу построения модели СЛЦП.

Модель 1 задачи, дополненную ограничениями (30)–(31), будем обозначать как Модель 2.

Рассматривались также естественные ограничения второго типа на переменные порядка событий зарядки на зарядных станциях:

$$z_{ij}^D + z_{ji}^D \leq 1, \quad i, j \in Jd, \quad i \neq j, \quad (32)$$

$$z_{v lk}^{st} + z_{v kl}^{st} \leq 1, \quad v \in \Theta, \quad l, k \in RP_v, \quad l \neq k, \quad (33)$$

где (32) относятся к событиям зарядки в депо, а (33) – на терминалах.

Модель 1, дополненную ограничениями (30)–(33), будем обозначать Модель 3.

Целесообразность использования приведенных выше дополнительных ограничений в Моделях 2 и 3 для повышения эффективности поиска и качества получаемых решений задачи исследовалась в рамках вычислительного эксперимента, описанного в следующем разделе.

Вычислительный эксперимент. Цель эксперимента заключалась в сравнительном исследовании: а) работоспособности предложенных Моделей 1, 2 и 3 оптимизации зарядной инфраструктуры на тестовом примере; б) влияния на эффективность получения и качество получаемого решения дополнительных ограничений (30)–(31) в Модели 2 и (30)–(33) в Модели 3 при увеличении размеров транспортной сети и парка электробусов. Под качеством решения понималась величина относительной погрешности к оптимальному значению задачи, а под эффективностью – компьютерное время получения решения. Использовалась некоммерческая версия универсального решателя задач СЛЦП Gurobi 9.5.1.

Сравнение работоспособности Моделей 1, 2 и 3 проведено для тестового (базового) примера трех маршрутов № 27, 43 и 59 г. Минска (см. табл. 1) с четырьмя терминалами, которые обслуживаются парком из 34 электробусов двух типов (22 – типа Е433 и 12 – типа Е420) (см. табл. 2). Для зарядки в депо и на терминалах используются зарядные станции СЗА-1 со сроком эксплуа-

тации 10 лет, ориентировочной инвестиционной стоимостью 830 тыс. руб. и годовой операционной стоимостью 12 тыс. руб., что составляет 37 060 евро в год (далее все стоимости и значения целевой функции указаны в евро).

Применяемая мощность зарядки ЗС в депо составляет 24 кВт, на терминале – 384 кВт. Характеристики электробусов и зарядных станций предоставлены ОАО «Белкоммунмаш», данные по стоимости батарей приведены из [5]. Применяемые скорости зарядки батарей ЭБ обоих типов: 0,5С в депо и 8С на терминалах маршрутов. Применяемый диапазон $[\underline{s}_e, \bar{s}_e]$ допустимых уровней заряда батарей составляет $[0,3; 1]$. Функции $\tilde{C}_e^D(s)$, $\tilde{C}_e^{st}(s)$, $\tilde{C}_e^{tr}(s)$ для $Cr_e^D = 0,5С$, $Cr_e^{st} = 8С$ и $dr_e = 1С$ в настоящей работе строились посредством интерполяции на основе эмпирических зависимостей достижимого числа циклов зарядки (разрядки) за период службы литиевых батарей типа LFP от глубины разряда, предоставленных ОАО «Белкоммунмаш».

В результате для Моделей 1, 2, 3 получено решение с одинаковым оптимальным значением целевой функции 3021,54, для которого суточные стоимости составили: потребляемой энергии в депо – 42,55; потребляемой энергии на терминалах – 1682,85; зарядных станций в депо – 304,60; зарядных станций на терминалах – 406,14; износа батарей при зарядке в депо – 12,13; износа батарей при зарядке на терминалах – 380,60; износа батарей при разрядке в движении – 192,66. Необходимое количество зарядных станций в депо было 3, а общее количество на терминалах – 4. Для Модели 1 погрешность решения за 30 мин составила 3,36 %. Для Моделей 2 и 3 погрешность равнялась 0 %, причем время решения для Модели 2 достигало 6,95 с, для Модели 3 – 8,45 с.

Для сравнения эффективности Моделей 2 и 3 проводились эксперименты на сериях из 50 случайно генерируемых экземпляров исходных данных задачи с фиксированным набором ($|R|$, $|\Theta|$, $|J|$) характеристик транспортной сети и парка ЭБ. Выполнено 4 серии экспериментов (3, 4, 30), (5, 8, 50), (7, 12, 70), (10, 16, 100).

Параметры дневных заданий электробусов каждого примера в серии генерировались случайно на базе их дневных заданий упомянутого выше тестового примера транспортной сети с 34 ЭБ с учетом разбиения электробусов на 5 кластеров $CL_{r,\omega}$, $\omega = 1, \dots, \bar{\omega}_r$, $r \in R$ (электробусы кластера индексировались составным индексом маршрута r и номера $j \in J_r$):

$$CL_{27,1} = \{27 \sim 1, \dots, 27 \sim 7\}, sp(j) = (27, E420, Kyp);$$

$$CL_{27,2} = \{27 \sim 8, \dots, 27 \sim 13\}, sp(j) = (27, E433, Kyp);$$

$$CL_{43,1} = \{43 \sim 1, \dots, 43 \sim 4, 43 \sim 5, \dots, 43 \sim 8\}, sp(j) = (43, E420, Cep);$$

$$CL_{59,1} = \{59 \sim 1, 59 \sim 2, 59 \sim 3, 59 \sim 6, 59 \sim 7, 59 \sim 8, 59 \sim 9\}, sp(j) = (59, E420, Cep);$$

$$CL_{59,2} = \{59 \sim 4, 59 \sim 5, 59 \sim 10, 59 \sim 11, 59 \sim 12, 59 \sim 13\}, sp(j) = (59, E433, Дол).$$

Подмножества $J_r = \{1, 2, \dots, z_r\}$ электробусов, для каждого $r \in R$, выбирались равновероятно из кластеров ЭБ выбранного соответствующего «базового» маршрута из тестового примера, $J = \bigcup_{r \in R} J_r$.

Диапазон ночной зарядки в депо выбран [21, 9] ч, где 9 ч соответствуют 33 ч в линейной шкале. Диапазон представительного периода составлял [7, 9] ч.

Каждый новый маршрут $r \in R$ строился на основе одного из «базовых» маршрутов тестового примера. Целое число $|J_r|$ ЭБ, обслуживающих маршрут r , выбиралось равновероятно из диапазона [8, 12], и ЭБ подмножества J_r выбирались равновероятно из каждого кластера, соответствующего «базовому» маршруту. Каждому новому маршруту r сопоставлялось подмножество $\Theta_r \subseteq \Theta$ из двух терминалов θ_{r1} , θ_{r2} , которые использовались для подзарядки ЭБ маршрута. На любом терминале могло пересекаться не более двух маршрутов, причем два маршрута могли пересекаться не более, чем на одном терминале.

Расстояния $L_{\theta_{r1}, \theta_{r2}}$ и $L_{\theta_{r2}, \theta_{r1}}$ между терминалами $\theta_{r1}, \theta_{r2} \in \Theta_r$ маршрута $r \in R$ выбирались случайно из диапазона [7, 14] км так, что расстояние $L_{\theta_{r1}, \theta_{r2}}$ могло отличаться от расстояния $L_{\theta_{r2}, \theta_{r1}}$ не более, чем на 10 %. Расстояния $L_{D, \theta_{r1}}$, $L_{D, \theta_{r2}}$ между депо и терминалом (любым из двух) маршрута $r \in R$, а также расстояния $L_{\theta_{r1}, D}$, $L_{\theta_{r2}, D}$ между последним терминалом (любым из двух) выбирались из диапазона [2, 12] км.

Формирование параметров дневных заданий электробусов парка основывалось на определении длительности $T_{rw} = ta_w^D - td_w^D$ дневного задания (пребывания вне депо) любого ЭБ w . T_{rw} вы-

биралось равновероятно из диапазона [10, 18] ч. В качестве интервала между выходом соседних электробусов маршрута r принимался интервал λ_ξ выхода для выбранного электробуса «базового» маршрута ξ . Момент td_w^D выхода из депо первого по порядку ЭБ w для маршрута r определялся случайно из диапазона $td_w^D \in [td_w^D - 0,2, td_w^D + 0,2]$ на базе момента td_ξ^D выхода первого ЭБ «базового» маршрута ξ , что соответствует предельному отклонению 12 мин. Момент выхода электробуса с порядковым номером σ определялся как $td_w^D + \sigma \cdot \lambda_\xi$. Минимальные длительности $\tau_{\theta_{r1}}, \tau_{\theta_{r2}}$ интервалов пребывания ЭБ w на терминалах $\theta_{r1}, \theta_{r2} \in \Theta_r$ маршрута $r \in R$ для представительного периода выбирались из диапазона [5, 12] мин (или [0,0833; 0,2] ч). Общее количество N_w рейсов для каждого электробуса w маршрута определялось исходя из длительности T_{rw} дневного задания; выбранных данных маршрута $L_{\theta_{r1},\theta_{r2}}, L_{\theta_{r2},\theta_{r1}}, L_{D,\theta_{r1}}, L_{D,\theta_{r2}}$; средней скорости $V = 16$ км/ч на маршруте; средней скорости $2V = 32$ км/ч на вспомогательных (пустых) рейсах между депо и терминалами; минимальных длительностей $\tau_{\theta_{r1}}, \tau_{\theta_{r2}}$ и поправочного коэффициента ρ отношения средней длительности пребывания ЭБ на терминалах в течение дня к минимальным длительностям в представительном периоде (выбирался равновероятно из диапазона [1,5; 2,5]). Формулы расчета величин N_w здесь не приводятся для краткости изложения.

Моменты ta_{wp}^{st} и td_{wp}^{st} времени прихода и ухода электробуса w нового маршрута для терминалов θ_{r1}, θ_{r2} после рейса $p = 1, \dots, N_w - 1$ в представительном периоде определялись с использованием момента td_w^D выхода ЭБ из депо; длин $L_{D,\theta_{r1}}, L_{\theta_{r1},D}, L_{\theta_{r1},\theta_{r2}}, L_{\theta_{r2},\theta_{r1}}$ дуг маршрута; средней скорости $V = 16$ км/ч ЭБ на сервисных рейсах маршрута и средней скорости $2V = 32$ км/ч ЭБ на вспомогательных рейсах между депо и терминалами θ_{r1}, θ_{r2} ; минимальных длительностей $\tau_{\theta_{r1}}, \tau_{\theta_{r2}}$ пребывания на соответствующих терминалах.

Выбор генерируемых электробусов $w = 1,2, \dots, z_r$ для нового маршрута r осуществлялся попеременно из набора кластеров «базового» маршрута.

В табл. 3 приведены результаты решения для Моделей 2 и 3 четырех серий из 50 сгенерированных примеров с параметрами: (3, 4, 30), (5, 8, 50), (7, 12, 70) и (10, 16, 100).

Таблица 3. Результаты решения серий задач (3, 4, 30), (5, 8, 50), (7, 12, 70), (10, 16, 100)

Table 3. Results of solving the series of problems (3, 4, 30), (5, 8, 50), (7, 12, 70), (10, 16, 100)

Показатель	Серия							
	(3, 4, 30)		(5, 8, 50)		(7, 12, 70)		(10, 16, 100)	
	Модель 2	Модель 3	Модель 2	Модель 3	Модель 2	Модель 3	Модель 2	Модель 3
Min objVal	2301,37	2301,37	3799,29	3900,82	5622,67	5622,67	8367,9	8331,43
Max objVal	3527,13	3527,12	5391,44	5391,44	7509,65	7509,65	11072,5	11096,2
Mean objVal	2796,01	2795,34	4432,84	4441,43	6729,54	6729,54	9522,35	9543,01
SD objVal	282,68	284,21	326	315,04	464,78	464,78	578,35	593,74
Min Gap, %	0	0	0	0	0	0	1,01	1,01
Max Gap, %	7,47	7,86	4,63	4,53	3,79	3,79	5,1	5,26
Mean Gap, %	1,535	1,472	1,191	1,333	1,708	1,71	2,584	2,762
SD Gap, %	2,261	2,248	1,36	1,384	0,928	0,936	0,897	0,984
Min Time	7,75	10,09	63,36	35,23	164,01	312,5	1782,28	1781,68
Max Time	1798,64	1798,17	1797,03	1797,95	1799,56	1795,77	1793,03	1797,32
Mean Time	1025,88	1050,47	1232,41	1230,02	1691,06	1683,38	1787,29	1787,25
SD Time	795,05	801,56	712,54	719,34	361,956	354,36	2,451	3,053
Min NSTDP	1	1	2	2	3	3	5	5
Max NSTDP	3	3	4	4	6	6	8	8
Mean NSTDP	2,12	2,12	2,68	2,76	4,2	4,2	6,14	6,32
SD NSTDP	0,431	0,431	0,508	0,472	0,693	0,693	0,8	0,786
Min NSTST	4	4	8	8	12	12	16	16
Max NSTST	6	6	10	10	15	15	20	20
Mean NSTST	4,58	4,56	8,44	8,42	12,96	12,96	17,66	17,7
SD NSTST	0,695	0,668	0,535	0,533	0,72	0,72	0,992	1,044
NOP	27	24	22	21	5	5	0	0

Использованные в таблице сокращения: Min – минимальное значение показателя в серии; Max – максимальное значение показателя в серии; Mean – среднее значение показателя в серии; SD – стандартное отклонение показателя в серии; objVal – значение целевой функции; Gap – погрешность решения; Time – время решения; NSTDP – количество зарядных станций в депо; NSTST – общее количество зарядных станций на терминалах; NOP – количество решенных задач с доказанной оптимальностью.

Результаты экспериментов и их обсуждение.

1. Модели 2 и 3 превосходят Модель 1 как по эффективности нахождения решения при заданном лимите компьютерного времени, так и по погрешности решения относительно оптимального значения задачи.

2. Модель 2 содержит существенно меньшее число ограничений по сравнению с Моделью 3. При этом Модель 2 превосходит в среднем Модель 3 по оптимальному значению, величине погрешности оптимального значения, по количеству решенных задач с доказанной оптимальностью и лишь незначительно уступает Модели 3 по времени решения задач.

Таким образом, проведенные эксперименты позволяют сделать вывод о целесообразности включения дополнительных ограничений в Модели 2 и 3 и превосходстве в среднем по основным показателям дополнительных ограничений Модели 2 над ограничениями Модели 3.

Заключение. Разработаны математические модели смешанного целочисленного линейного программирования для задачи оптимизации неоднородной зарядной инфраструктуры и расписания зарядки электробусов нескольких типов, обслуживающих городские маршруты. На основе масштабных случайных экспериментов исследовано влияние на эффективность получения и качество получаемого решения различных дополнительных ограничений модели и выделено наилучшее в среднем подмножество дополнительных ограничений. Эксперименты подтвердили хорошую работоспособность и эффективность предложенной Модели 2 для рассматриваемых задач средней и большой размерности. В дальнейшем целесообразно расширить предложенный подход на нелинейные зависимости уровня заряда от времени зарядки / разрядки, более точно отражающие реальный процесс.

Благодарности. Авторы выражают благодарность И. А. Шатернику, разработавшему первую версию программной реализации предложенной модели для решения рассматриваемой задачи.

Acknowledgements. The authors express their gratitude to I. A. Shaternik, who developed the first version of the software implementation of the proposed model for solving the problem under consideration.

Список использованных источников

1. Dirks, N. On the integration of battery electric buses into urban bus networks / N. Dirks, M. Schiffer, G. Walther // *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*. – 2022. – Vol. 139. – P. 103628. <https://doi.org/10.1016/j.trc.2022.103628>
2. Battery capacity and recharging needs for electric buses in city transit service / Z. Gao, Z. Lin, T. J. LaClair [at al.] // *Energy*. – 2017. – Vol. 122. – P. 588–600. <https://doi.org/10.1016/j.energy.2017.01.101>
3. The electric bus fleet transition problem / S. Pelletier, O. Jabali, J. E. Mendoza, G. Laporte // *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*. – 2019. – Vol. 109. – P. 174–193. <https://doi.org/10.1016/j.trc.2019.10.012>
4. Zheng, Z. On the role of battery degradation in en-route charge scheduling for an electric bus system / Z. Zheng, S. Wang, X. Qu // *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*. – 2022. – Vol. 161. – P. 102727. <https://doi.org/10.1016/j.tre.2022.102727>
5. Göhlich, D. Conceptual design of urban e-bus systems with special focus on battery technology / D. Göhlich, T.-A. Fay, S. Park // *Proceedings of the Design Society: International Conference on Engineering Design*. – 2019. – Vol. 1, iss. 1. – P. 2823–2832. <https://doi.org/10.1017/dsi.2019.289>
6. Han, S. A practical battery wear model for electric vehicles charging applications / Sekyung Han, Soohee Han, Hirohisa Aki // *Applied Energy*. – 2014. – Vol. 113. – P. 1100–1108. <https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2013.08.062>
7. Pelletier, S. Charge scheduling for electric freight vehicles / S. Pelletier, O. Jabali, G. Laporte // *Transportation Research Part B: Methodological*. – 2018. – Vol. 115. – P. 246–269. <https://doi.org/10.1016/j.trb.2018.07.010>
8. Cost minimizing decisions on equipment and charging schedule for electric buses in a single depot / N. Guschinsky, M. Y. Kovalev, E. Pesch, B. Rozin // *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*. – 2023. – Vol. 180. – P. 103337. <https://doi.org/10.1016/j.tre.2023.103337>
9. Electric bus fleet size and mix problem with optimization of charging infrastructure / M. Rogge, E. van der Hurk, A. Larsen, D. U. Sauer // *Applied Energy*. – 2018. – Vol. 211. – P. 282–295. <https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2017.11.051>
10. Розин, Б. М. Об оптимизации смешанной зарядной инфраструктуры электробусов для городских маршрутов / Б. М. Розин, И. А. Шатерник // *Информатика*. – 2022. – Т. 19, № 2. – С. 68–84. <https://doi.org/10.37661/1816-0301-2022-19-2-68-84>

References

1. Dirks N., Schiffer M., Walther G. On the integration of battery electric buses into urban bus networks. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 2022, vol. 139, pp. 103628. <https://doi.org/10.1016/j.trc.2022.103628>
2. Gao Z., Lin Z., LaClair T. J., Liu C., Li J.-M., Birky A. K., Ward J. Battery capacity and recharging needs for electric buses in city transit service. *Energy*, 2017, vol. 122, pp. 588–600. <https://doi.org/10.1016/j.energy.2017.01.101>
3. Pelletier S., Jabali O., Mendoza J. E., Laporte G. The electric bus fleet transition problem. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 2019, vol. 109, pp. 174–193. <https://doi.org/10.1016/j.trc.2019.10.012>
4. Zheng Z., Wang S., Qu X. On the role of battery degradation in en-route charge scheduling for an electric bus system. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 2022, vol. 161, pp. 102727. <https://doi.org/10.1016/j.tre.2022.102727>
5. Göhlich D., Fay T.-A., Park S. Conceptual design of urban e-bus systems with special focus on battery technology. *Proceedings of the Design Society: International Conference on Engineering Design*, 2019, vol. 1, iss. 1, pp. 2823–2832. <https://doi.org/10.1017/dsi.2019.289>
6. Han Sekyung, Han Soohee, Aki H. A practical battery wear model for electric vehicles charging applications. *Applied Energy*, 2014, vol. 113, pp. 1100–1108. <https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2013.08.062>
7. Pelletier S., Jabali O., Laporte G. Charge scheduling for electric freight vehicles. *Transportation Research Part B: Methodological*, 2018, vol. 115, pp. 246–269. <https://doi.org/10.1016/j.trb.2018.07.010>
8. Guschinsky N., Kovalev M. Y., Pesch E., Rozin B. Cost minimizing decisions on equipment and charging schedule for electric buses in a single depot. *Transportation Research Part E*, 2023, vol. 180, pp. 103337. <https://doi.org/10.1016/j.tre.2023.103337>
9. Rogge M., Hurk E. van der, Larsen A., Sauer D. U. Electric bus fleet size and mix problem with optimization of charging infrastructure. *Applied Energy*, 2018, vol. 211, pp. 282–295. <https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2017.11.051>
10. Rozin B. M., Shaternik I. A. On optimization of the mixed charging infrastructure of electric buses for urban routes. *Informatika = Informatics*, 2022, vol. 19, no 2, pp. 68–84 (in Russian). <https://doi.org/10.37661/1816-0301-2022-19-2-68-84>

Информация об авторах

Гущинский Николай Николаевич – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории математической кибернетики, Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 6, Минск, 220012, Республика Беларусь). E-mail: gyshin@newman.bas-net.by

Ковалев Михаил Яковлевич – член-корреспондент Национальной академии наук Беларуси, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник лаборатории математической кибернетики, Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 6, Минск, 220012, Республика Беларусь). E-mail: kovalyov_my@newman.bas-net.by

Розин Борис Матвеевич – кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории математической кибернетики, Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 6, Минск, 220012, Республика Беларусь). E-mail: rozin@newman.bas-net.by

Information about the authors

Nikolai N. Guschinsky – Ph. D. (Physics and Mathematics), Leading Researcher of the Mathematical Cybernetics Laboratory, United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences (6, Surganov Str., 220012, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: gyshin@newman.bas-net.by

Mikhail Y. Kovalyov – Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Belarus, Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Principal Researcher of the Mathematical Cybernetics Laboratory, United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences (6, Surganov Str., 220012, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: kovalyov_my@newman.bas-net.by

Boris M. Rozin – Ph. D. (Engineering), Leading Researcher of the Mathematical Cybernetics Laboratory, United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus (6, Surganov Str., 220012, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: rozin@newman.bas-net.by