ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)

МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 514.765 Поступила в редакцию 26.12.2024
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2025-61-2-95-105 Received 26.12.2024

В. В. Балащенко, В. Н. Куница

Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь

ЛЕВОИНВАРИАНТНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ *f*-СТРУКТУРЫ НА ТРЕХМЕРНЫХ РАЗРЕШИМЫХ ГРУППАХ ЛИ

Аннотация. Исследуются трехмерные разрешимые группы Ли с точки зрения обобщенной эрмитовой геометрии. Соответствующие трехмерные разрешимые алгебры Ли впервые были классифицированы Г. М. Мубаракзяновым в 1963 г. Используя классификацию в несколько иных обозначениях, мы строим базовые левоинвариантные метрические *f*-структуры ранга 2 на всех трехмерных разрешимых группах Ли, снабженных стандартной левоинвариантной римановой метрикой. Доказано, что все рассмотренные *f*-структуры принадлежат одному или нескольким классам обобщенных почти эрмитовых структур. В результате это дает возможность предъявить новые примеры левоинвариантных киллинговых, приближенно келеровых, обобщенных приближенно келеровых и эрмитовых *f*-структур на разрешимых группах Ли.
Ключевые слова: разрешимая группа Ли, разрешимая алгебра Ли, левоинвариантная метрическая *f*-структура, приближенно келерова *f*-структура, эрмитова *f*-структура, обобщенная эрмитова геометрия

Для цитирования. Балащенко, В. В. Левоинвариантные метрические *f*-структуры на трехмерных разрешимых группах Ли / В. В. Балащенко, В. Н. Куница // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. – 2025. – Т. 61, № 2. – С. 95–105. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2025-61-2-95-105

Vitaly V. Balashchenko, Victoria N. Kunitsa

Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus

LEFT-INVARIANT METRIC *f*-STRUCTURES ON THREE-DIMENSIONAL SOLVABLE LIE GROUPS

Abstract. In the paper, we investigate three-dimensional solvable Lie groups from the point of view of the generalized Hermitian geometry. The corresponding three-dimensional solvable Lie algebras were firstly classified by G. M. Mubarakzyanov in 1963. Using the classification in somewhat different notations, we construct basic left-invariant metric *f*-structures of rank 2 on all three-dimensional solvable Lie groups equipped with the standard left-invariant Riemannian metric. It was proved that all the considered *f*-structures belong to one or several classes of generalized almost Hermitian structures. As a result, it gives the opportunity to present new examples of left-invariant Killling, nearly Kähler, generalized nearly Kähler and Hermitian *f*-structures on solvable Lie groups.
Keywords: solvable Lie group, solvable Lie algebra, left-invariant metric *f*-structure, nearly Kähler *f*-structure, Hermitian *f*-structure, generalized Hermitian geometry

For citation. Balashchenko V. V., Kunitsa V. N. Left-invariant metric *f*-structures on three-dimensional solvable Lie groups. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2025, vol. 61, no. 2, pp. 95–105 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2025-61-2-95-105

Введение. Среди дифференциально-геометрических структур важными объектами исследования являются аффинорные структуры на гладких многообразиях, т. е. гладкие тензорные поля типа (1,1), реализованные в виде полей эндоморфизмов, действующих в касательном расслоении к многообразию. Различных структур такого вида немало, однако к числу классиче-

© Балащенко В. В., Куница В. Н., 2025

ских и богатых приложениями традиционно относят почти комплексные структуры, структуры почти произведения, почти контактные структуры и ряд других. Что касается обобщений упомянутых структур, то с 1960-х гг. значительную роль стали играть f-структуры Кентаро Яно [1] ($f^3 + f = 0$), которые обобщают почти комплексные и почти контактные структуры и одновременно порождают структуры почти произведения. Вместе с согласованной (псевдо)римановой метрикой на многообразии *метрические f-структуры* включают классы *почти эрмитовых структур* и *метрических почти контактных структур*, роль которых в дифференциальной геометрии и ее многочисленных приложениях чрезвычайно велика. В свою очередь метрические f-структуры являются важнейшим объектом в обширной концепции *обобщенной эрмитовой геометрии* – области современной дифференциальной геометрии, развиваемой с середины 1980-х гг. (см., напр., [2–4]).

Что касается дифференциальной геометрии однородных многообразий групп Ли, то исследования инвариантных структур на таких многообразиях продолжают оставаться актуальными в связи с рядом задач дифференциальной геометрии, теории гамильтоновых систем, теоретической физики. Отметим здесь значительную роль исследований, относящихся к теории обобщенных симметрических пространств (в частности, однородных k-симметрических пространств), основы которой были заложены и развиты в работах геометров Беларуси, России, Великобритании, США, Чехии и других стран (см., напр., [5–10]). Особенно эффективным оказалось применение метода канонических структур, что позволило в случае естественно редуктивной римановой метрики обнаружить на однородных k-симметрических пространствах обширный класс инвариантных f-структур, реализующих основные классы в обобщенной эрмитовой геометрии [11–18].

Отметим далее, что многие важные (в известном смысле модельные) примеры возникают при построении и изучении левоинвариантных структур на группах Ли. В силу этого класс нильпотентных групп Ли, включающий группы Гейзенберга и их обобщения, а также более широкий класс разрешимых групп Ли являются перспективными и входят в число основных объектов исследования однородных многообразий, риманова метрика которых не является естественно редуктивной.

В данной статье основным объектом исследования являются левоинвариантные метрические f-структуры на 3-мерных разрешимых группах Ли. С использованием известной классификации соответствующих 3-мерных разрешимых алгебр Ли построены все базовые метрические относительно стандартной римановой метрики f-структуры ранга 2 на указанных группах Ли. Для каждой из этих групп Ли вычислена связность Леви-Чивиты данной левоинвариантной римановой метрики, с помощью которой установлена принадлежность построенных левоинвариантных метрических f-структур основным классам в обобщенной эрмитовой геометрии.

Заметим, что 3-мерные группы Ли являются объектом интенсивных исследований в однородной римановой геометрии и ее приложениях. В частности, в серии работ на таких группах изучаются метрики Эйнштейна, лоренцевы метрики, солитоны Риччи и др. (см., напр., [19–21]).

1. Метрические *f*-структуры на гладких многообразиях. Классическими примерами аффинорных структур являются почти комплексные структуры $J(J^2 = -id)$, структуры почти произведения $P(P^2 = id)$ и ряд других. В 1960-х гг. К. Яно [1] ввел f-структуры, определяемые условием $f^3 + f = 0$. Было доказано [22], что число $r = \dim \operatorname{Im} f$ постоянно для всех точек из M. Это число является четным и называется *рангом* f-структуры, а число $\dim \operatorname{Ker} f = \dim M - r$ называют *дефектом* f-структуры и обозначают $\operatorname{def} f$. Отметим, что частный случай $\operatorname{def} f = 0$ дает почти комплексные структуры $f = J$, а случай $\operatorname{def} f = 1$ приводит к классу почти контактных структур.

Задание f-структуры на M порождает пару взаимно дополнительных распределений $\mathrm{L} = \operatorname{Im} f$ и $\mathrm{M} = \operatorname{Ker} f$, которые называют *первым* и *вторым фундаментальными распределениями* f-структуры соответственно. При этом эндоморфизмы $l = -f^2$ и $m = id + f^2$ являются взаимно дополнительными проекторами на распределения L и M соответственно [23]. Отметим также, что ограничение F заданной f-структуры на распределение L задает на нем почти комплексную структуру, т. е. $\mathrm{F}^2 = -id$.

Пусть далее на многообразии M задана риманова метрика $g = <\,,\,>$. В этом случае f-структура на (M, g) называется *метрической*, если $< fX, Y > + < X, fY > = 0$ для всех гладких векторных полей X, Y на M (см., напр., [2, 3]). Для метрического f-многообразия первое $\mathrm{L} = \mathrm{Im}\, f$ и второе $\mathrm{M} = \mathrm{Ker}\, f$ фундаментальные распределения взаимно ортогональны. При этом ограничение (F, g) метрической f-структуры на L есть почти эрмитова структура, т. е. $\mathrm{F}^2 = -id$, $< \mathrm{F}X, \mathrm{F}Y > = < X, Y >$ для всех $X, Y \in \mathrm{L}$. В частных случаях $\mathrm{def}\, f = 0$ и $\mathrm{def}\, f = 1$ получаем почти эрмитовы структуры и почти контактные метрические структуры соответственно.

Упомянутые выше почти эрмитовы структуры, метрические почти контактные структуры, метрические f-структуры легли в основу широкого научного направления, заложенного работами В. Ф. Кириченко в 1980-х гг. Основным объектом здесь стали *обобщенные почти эрмитовы структуры* (*GAH*-структуры; generalized almost Hermitian structures) произвольного ранга r. Такое направление стали называть *обобщенной эрмитовой геометрией*. Не вдаваясь в детали общего определения *GAH*-структуры ранга r, ограничимся рассмотрением важнейшего частного случая *GAH*-структур ранга 1, т. е. метрических f-структур.

Фундаментальную роль в геометрии *GAH*-структур (в частности, метрических f-структур) играет специальной тензор T типа (2,1), называемый *композиционным тензором.* Такой тензор позволяет задать алгебраическую структуру так называемой *присоединенной Q-алгебры* в модуле гладких векторных полей на многообразии M посредством формулы $X * Y = T(X, Y)$ [3, 4]. На основании естественных свойств присоединенной Q-алгебры стало возможным определить некоторые классы *GAH*-структур. Заметим, что для метрических f-структур такой тензор был в точности вычислен в работе [3]:

$$T(X,Y) = \frac{1}{4} f\left(\nabla_{fX}(f) fY - \nabla_{f^2X}(f) f^2 Y\right), \tag{1}$$

где ∇ – связность Леви-Чивиты риманова многообразия (M, g), X, Y – гладкие векторные поля на M.

Приведем здесь некоторые из классов метрических структур, указав для них определяющие условия:

Kf – келерова f-структура: $\nabla f = 0$;

Hf – эрмитова f-структура: $T(X,Y) = 0$, т. е. $\mathrm{X}(M)$ – абелева Q-алгебра;

$\mathrm{G}_1 f$ – f-структура класса G_1: $T(X,X) = 0$, т. е. $\mathrm{X}(M)$ – антикоммутативная Q-алгебра;

Kill$f$ – киллингова f-структура: $\nabla_X(f)X = 0$;

NKf – приближенно келерова f-структура или *NKf*-структура (nearly Kähler f-structure): $\nabla_{fX}(f) fX = 0$;

GNKf – обобщенная приближенно келерова f-структура или *GNKf*-структура: $f(\nabla_{fX}(f) fX) = 0$.

Классы Kf, Hf, $\mathrm{G}_1 f$ были введены (в более общей ситуации) в [2] (см. также [24]). Киллинговы f-многообразия Kill$f$ впервые введены и описаны в [25, 26]. Класс NKf был введен в [14, 15].

Приведем включения между классами метрических f-структур:

$$\mathrm{K}f \subset \mathrm{H}f \subset \mathrm{G}_1 f; \qquad \mathrm{K}f \subset \mathrm{Kill}f \subset \mathrm{NK}f \subset \mathrm{GNK}f.$$

Следует заметить, что в частном случае $f = J$ получаем соответствующие классы почти эрмитовых структур, описанных в [27]. Особо следует отметить, что для $f = J$ классы Kill$f$, NKf и GNKf дают в точности важнейший и широко известный класс NK приближенно келеровых структур (nearly Kähler stuctures). Значительная содержательная информация о классах метрических f-структур содержится в монографии [4].

2. Инвариантные *f*-структуры на однородных пространствах и группах Ли. Инвариантные структуры на однородных многообразиях групп Ли играют особую роль в дифференциальной геометрии, поскольку позволяют использовать развитую алгебро-геометрическую технику групп Ли и алгебр Ли. В частности, в теории почти эрмитовых структур широкий класс инвариантных примеров был построен на основе канонической почти комплексной структуры, которой обладают однородные пространства, порожденные автоморфизмами групп Ли порядка 3 (*однородные 3-симметрические пространства*) [6, 9, 28].

Что касается обобщенной эрмитовой геометрии, то здесь длительный период отсутствовали содержательные инвариантные примеры. Ситуация качественно изменилась после обнаружения широкого запаса канонических структур классического типа на *регулярных* Φ*-пространствах* (в частности, на *однородных k-симметрических пространствах*) [11]. Это позволило предъявить обширный ресурс примеров метрических *f*-структур, отмеченных выше классов H*f*, NK*f* и др. [12–15]. Более того, в работе [16] были построены инвариантные *GAH*-структуры произвольного ранга *r*.

Пусть G/H – однородное редуктивное пространство связной группы Ли G, $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ – соответствующее редуктивное разложение алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G, где через $\mathfrak{h}$ обозначена подалгебра Ли в $\mathfrak{g}$, отвечающая подгруппе Ли H. Здесь линейное подпространство $\mathfrak{m}$ в $\mathfrak{g}$ отождествляется, как обычно, с касательным пространством $T_o(G/H)$ в точке $o = H$. Рассмотрим на G/H инвариантную относительно группы G риманову метрику $g = <,>$ и инвариантную метрическую *f*-структуру. Такие структуры полностью определяются своими значениями в точке o, инвариантными относительно $Ad_G(H)$. Условимся в связи с этим в дальнейшем не различать в обозначениях инвариантные структуры на G/H и их значения в точке o.

Связность Леви-Чивиты инвариантной римановой метрики $g = <,>$ на G/H задается формулой [29, с. 187]

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X,Y]_{\mathfrak{m}} + U(X,Y), \tag{2}$$

где U – симметрическое билинейное отображение из $\mathfrak{m} \times \mathfrak{m}$ в $\mathfrak{m}$, определяемое из равенства

$$2 < U(X,Y), Z > = < X, [Z,Y]_{\mathfrak{m}} > + < [Z,X]_{\mathfrak{m}}, Y > \tag{3}$$

для всех $X, Y, Z \in \mathfrak{m}$.

Инвариантная метрическая *f*-структура на G/H порождает разложение $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2$, где подпространства $\mathfrak{m}_1 = \mathrm{Im}\, f$ и $\mathfrak{m}_2 = \mathrm{Ker}\, f$ полностью определяют первое и второе фундаментальные распределения соответственно, причем эти подпространства ортогональны относительно метрики g. В случае естественно редуктивной метрики значительная информация о классах метрических *f*-структур получена в работах [12–15, 17, 18, 30].

Значительный интерес представляет ситуация, когда метрика g не является естественно редуктивной. Такими случаями являются, например, многие группы Ли с левоинвариантными римановыми метриками. Группу Ли G с действием левыми сдвигами можно рассматривать как однородное пространство G/H с тривиальной группой $H = \{e\}$. Таким образом, возникает тривиальное редуктивное разложение $\mathfrak{g} = \{0\} \oplus \mathfrak{g}$, т. е. $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}$, и инвариантная метрическая *f*-структура становится левоинвариантной. При этом $\mathfrak{g} = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2$ – соответствующее такой *f*-структуре разложение алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Важными классами групп Ли являются нильпотентные и разрешимые группы Ли. Связь левоинвариантных *f*-структур с обобщенной эрмитовой геометрией отражена в серии работ. Например, на трехмерной разрешимой группе Ли гиперболических движений плоскости построена каноническая *f*-структура, которая принадлежит классу H*f*, но не входит в класс NK*f* [15]. Рассмотрена также серия нильпотентных групп Ли индекса 2. В частности, на 6-мерной обобщенной группе Гейзенберга представлены канонические *f*-структуры классов NK*f* и H*f* [31], а в работе [32] исследованы в этом смысле канонические *f*-структуры на 5-мерной матричной группе Гейзенберга. Широкий класс левоинвариантных эрмитовых *f*-структур указан на 6-мерных филиформных группах Ли [33].

3. Геометрия трехмерных разрешимых групп Ли. Перейдем к построению и исследованию левоинвариантных *f*-структур на 3-мерных группах Ли. Такие структуры полностью определяются заданием операторов *f* на соответствующих алгебрах Ли.

Пусть e_1, e_2, e_3 – базис алгебры Ли. Будем рассматривать на группе Ли левоинвариантную риманову метрику, задаваемую тем условием, что указанный базис является ортонормированным.

Классификация 3-мерных разрешимых алгебр Ли была впервые получена в работе Г. М. Мубаракзянова [34] и затем использовалась во многих других исследованиях. Будем здесь использовать классификацию, следуя обозначениям работы [35].

Следует отметить, что указанная выше левоинвариантная риманова метрика для трехмерных разрешимых групп Ли не является естественно редуктивной. Поэтому существенным этапом исследования является вычисление связности Леви-Чивиты для каждого из рассмотренных ниже классов групп Ли в терминах соответствующих алгебр Ли.

3.1. Связность Леви-Чивиты на трехмерных разрешимых группах Ли. Рассмотрим последовательно все трехмерные разрешимые алгебры Ли, используя их классификацию.

3.1.1. Рассмотрим однопараметрическое семейство попарно неизоморфных алгебр Ли $\mathfrak{r}_{(3,\lambda)}$. Такие алгебры Ли определяются следующими коммутаторными соотношениями: $[e_1, e_2] = e_2$; $[e_1, e_3] = \lambda e_3$, где λ – параметр.

При значении параметра $\lambda = -1$ эта алгебра Ли соответствует группе Ли движений в двумерном пространстве Минковского. Если параметр $\lambda = 1$, то отвечающая этой алгебре Ли разрешимая группа Ли действует просто и транзитивно на вещественном гиперболическом пространстве. Наконец, при $\lambda = 0$ $\mathfrak{r}_{(0,3)} = R \times \mathit{aff}(R)$, при этом коммутаторные соотношения имеют вид $[e_1, e_2] = e_2$.

Используя (3) для базисных векторов $\mathfrak{r}_{(3,\lambda)}$, можем вычислить:

$$U(e_1,e_1)=0,\quad U(e_1,e_2)=\frac{-e_2}{2},\quad U(e_1,e_3)=\frac{-\lambda e_3}{2},\quad U(e_2,e_2)=e_1,$$
$$U(e_2,e_3)=0,\quad U(e_3,e_3)=\lambda e_1. \tag{4}$$

Представляя векторы X, Y, принадлежащие соответствующей алгебре Ли, в виде $X = x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3$ и $Y=y_1e_1+y_2e_2+y_3e_3$, с использованием (2), (4) получим:

$$\nabla_X Y = e_1(x_2y_2+\lambda x_3y_3)-e_2x_2y_1-e_3\lambda x_3y_1.$$

3.1.2. Далее рассмотрим однопараметрическое семейство попарно неизоморфных алгебр Ли $\mathfrak{r}'_{(3,\lambda)}:[e_1,e_2]=\lambda e_2-e_3;[e_1,e_3]=e_2+\lambda e_3$, где λ – параметр, при $\lambda = 0$ – это алгебра Ли группы Ли движений двумерного евклидова пространства. Используя аналогичные вычисления, получим:

$$U(e_1,e_1)=0,\quad U(e_1,e_2)=-\frac{\lambda e_2+e_3}{2},\quad U(e_1,e_3)=\frac{e_2-\lambda e_3}{2},\quad U(e_2,e_2)=\lambda e_1,$$
$$U(e_2,e_3)=0,\quad U(e_3,e_3)=\lambda e_1,$$

$$\nabla_X Y = e_1\big(\lambda(x_2y_2+x_3y_3)\big)+e_2(-\lambda x_2y_1+x_1y_3)-e_3(x_1y_2+\lambda x_3y_1).$$

3.1.3. Следующей рассмотренной алгеброй Ли стала 3-мерная алгебра Ли Гейзенберга $\mathfrak{h}:[e_1,e_2]=e_3$. Для данной алгебры Ли получим:

$$U(e_1,e_1)=0,\quad U(e_1,e_2)=0,\quad U(e_1,e_3)=\frac{-e_2}{2},\quad U(e_2,e_2)=0,$$
$$U(e_2,e_3)=\frac{e_1}{2},\quad U(e_3,e_3)=0,$$

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}e_1(x_2y_3+x_3y_2)-\frac{1}{2}e_2(x_1y_3+x_3y_1)+\frac{1}{2}e_3(x_1y_2-x_2y_1).$$

3.1.4. Последняя рассмотренная алгебра Ли $\mathfrak{r}_3$ задается соотношениями $[e_1, e_2] = e_2$; $[e_1, e_3] = e_2 + e_3$. Формулы связности Леви-Чивиты выглядят для нее следующим образом:

$$U(e_1,e_1)=0,\quad U(e_1,e_2)=-\frac{e_2+e_3}{2},\quad U(e_1,e_3)=\frac{-e_3}{2},\quad U(e_2,e_2)=e_1,$$
$$U(e_2,e_3)=\frac{e_1}{2},\quad U(e_3,e_3)=e_1,$$

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}e_1(x_2y_3+x_3y_2+2x_2y_2+2x_3y_3)+\frac{1}{2}e_2(-2x_2y_2+x_1y_3-x_3y_1)+\frac{1}{2}e_3(-x_1y_2-x_2y_1-2x_3y_1).$$

3.2. Геометрия базовых *f*-структур ранга 2. Рассмотрим левоинвариантные метрические *f*-структуры на трехмерных разрешимых группах Ли. Ограничим наше исследование *f*-структурами, которые порождаются координатными подпространствами базиса e_1, e_2, e_3 (так называемые базовые *f*-структуры). Таких структур (с точностью до знака) 3, они имеют следующий вид:

$$f_1(e_1)=e_3,\quad f_1(e_2)=0,\quad f_1(e_3)=-e_1,$$
$$f_2(e_1)=0,\quad f_2(e_2)=-e_3,\quad f_2(e_3)=e_2,$$
$$f_3(e_1)=e_2,\quad f_3(e_2)=-e_1,\quad f_3(e_3)=0.$$

Исследуем принадлежность данных *f*-структур классам обобщенной эрмитовой геометрии для каждой из перечисленных выше разрешимых 3-мерных групп Ли.

3.2.1. Начнем с *f*-структуры f_1 на алгебре $\mathfrak{r}_{(3,\lambda)}$. Используя прежние обозначения, из определения этой *f*-структуры следует, что $f_1X=-x_3e_1+x_1e_3$, $f_1^2X=-x_1e_1-x_3e_3$. Выясним, принадлежит ли f_1 классу NK*f*. Для этого нужно вычислить

$$\nabla_{f_1X}(f_1)(f_1X)=\nabla_{f_1X}f_1^2X-f_1(\nabla_{f_1X}f_1X).$$

Получаем, что

$$\nabla_{f_1X}f_1^2X=\frac{1}{2}\Big[f_1X,f_1^2X\Big]+U\Big(f_1X,f_1^2X\Big)=$$
$$=\frac{1}{2}\lambda e_3\left(x_3^2+x_1^2\right)-\frac{1}{2}\lambda e_3\left(x_3^2-x_1^2\right)-\lambda e_1x_1x_3=-\lambda e_1x_1x_3+\lambda e_3x_1^2,$$

$$f_1(\nabla_{f_1X}f_1X)=f_1\left(\frac{1}{2}[f_1X,f_1X]+U(f_1X,f_1X)\right)=$$
$$=\frac{1}{2}f_1\left((-x_1x_3\lambda e_3+x_1x_3\lambda e_3)+\frac{1}{2}\lambda e_3(x_1x_3+x_1x_3)+\lambda e_1x_1^2\right)=f_1(\lambda e_1x_1^2+\lambda e_3x_1x_3)=-\lambda e_1x_1x_3+\lambda e_3x_1^2.$$

Таким образом, $\nabla_{f_1X}(f_1)(f_1X)=0$, т. е. структура f_1 является приближенно келеровой.

Далее проверим, является ли f_1 киллинговой *f*-структурой. Вычислим

$$\nabla_X(f_1)X=\nabla_Xf_1X-f_1(\nabla_XX),\qquad \nabla_Xf_1X=\lambda e_1x_1x_3+\lambda e_3x_3^2,$$
$$f_1(\nabla_XX)=\lambda e_1x_1x_3+e_3\left(\lambda x_3^2+x_2^2\right),$$

тогда $\nabla_X(f_1)X=e_3x_2^2\neq 0$. Следовательно, $f_1\notin \mathrm{Kill}f$.

Рассмотрим теперь принадлежность f_1 классу эрмитовых *f*-структур. Для этого нужно вычислить композиционный тензор *T*, задаваемый равенством (1). Для дальнейших вычислений удобно обозначить выражение из формулы (1) следующим образом:

$$S(f)=\nabla_{fX}(f)fY-\nabla_{f^2X}(f)f^2Y.$$

Вычислим это выражение для структуры f_1 с учетом $f_1^3=-f_1$ и используя введенные ранее обозначения:

$$S(f_1)=\nabla_{f_1X}(f_1)f_1Y-\nabla_{f_1^2X}(f_1)f_1^2Y=\nabla_{f_1X}f_1^2Y-f_1\left(\nabla_{f_1X}f_1^2Y\right)+\nabla_{f_1X}f_1Y+f_1\left(\nabla_{f_1^2X}f_1^2Y\right)=$$
$$=-\lambda e_1x_1y_3+\lambda e_3x_1y_1-(-\lambda e_1x_1y_3+\lambda e_3x_1y_1)+\lambda e_1x_3y_1+\lambda e_3x_3y_3-\lambda e_1x_3y_1-\lambda e_3x_3y_3=0.$$

Отсюда для f_1 получим $T(X,Y)=\dfrac{1}{4}f_1(0)=0$, следовательно, f_1 является эрмитовой *f*-структурой.

Далее на этой же группе исследуем принадлежность классам обобщенной эрмитовой геометрии структуры f_2. Используя прежние обозначения и методы вычислений, получим:

$$\nabla_{f_2X}(f_2)(f_2X)=e_1(\lambda x_2x_3-x_2x_3)=0$$

при λ = 1. Значит, $f_2 \in \mathrm{NK}f$ при λ = 1. Нетрудно заметить, что $f_2\left(\nabla_{f_2X}(f_2)(f_2X)\right)=0$ при любых λ. Отсюда следует, что f_2 является обобщенной приближенно келеровой f-структурой при любых значениях параметра λ.

Проверим f_2 на принадлежность классу киллинговых f-структур; $\nabla_X(f_2)X = e_1(x_2x_3 - -\lambda x_2x_3)+\lambda x_1x_3 + e_3x_1x_2 \neq 0$. Отсюда $f_2 \notin \mathrm{Kill}f$. Выясним, принадлежит ли f_2 классу эрмитовых f-структур. $S(f_2)$ попадает в ядро отображения f_2, следовательно, $T(X,Y)=\dfrac{1}{4}f_2\left(S(f_2)\right)=0$. Таким образом, $f_2 \in \mathrm{H}f$.

Исследуем на этой же группе последнюю f-структуру f_3. Результаты для этого случая такие: $\nabla_{f_3X}(f_3)(f_3X)=0$. $S(f_3)$ попадает в ядро отображения f_3; $\nabla_X(f_3)X = -\lambda e_2x_3^2+\dfrac{1}{2}\lambda e_3x_2x_3$. Следовательно, $f_3 \in \mathrm{NK}f$, $f_3 \in \mathrm{H}f$ при любых λ и $f_3 \in \mathrm{Kill}f$ при λ = 0.

Полученные результаты сформулируем в виде следующей теоремы.

Т е о р е м а 1. *Для трехмерной группы Ли, соответствующей алгебре Ли* $\mathfrak{r}_{(3,\lambda)}$, *имеют место следующие результаты:*

1) f_1 является приближенно келеровой f-структурой;

2) f_2 принадлежит классу приближенно келеровых f-структур при λ = 1 *и обобщенных приближенно келеровых f-структур при любом параметре* λ;

3) f_3 принадлежит классу киллинговых f-структур при λ = 0 *и приближенно келеровых f-структур при любом параметре* λ;

4) все три структуры принадлежат классу эрмитовых f-структур.

3.2.2. Рассмотрим f-структуры f_1, f_2, f_3 для алгебры Ли $\mathfrak{r}'_{(3,\lambda)}$.

Для f-структуры f_1: $\nabla_{f_1X}(f_1)(f_1X)=e_2x_3^2$, $S(f_1)=e_2(x_3y_3-x_1y_1)$. Отсюда получаем $f_1 \in \in \mathrm{GNK}f$, $f_1 \in \mathrm{H}f$.

Перейдем к f-структуре f_2. Здесь результаты вычислений таковы: $\nabla_X(f_2)X=-\lambda(e_2x_1x_3+ + e_3x_1x_2)$, $\nabla_{f_2X}(f_2)(f_2X)=0$. Более громоздкие вычисления с учетом коммутаторных соотношений позволяют заметить, что $S(f_2)$ попадает в ядро отображения f_2.

Далее исследуем на принадлежность классам обобщенной эрмитовой геометрии структуры f_3. После проведенных вычислений получим:

$$\nabla_{f_3X}f_3^2X=-\lambda e_1x_1x_2+\lambda e_2x_1^2-e_3x_2^2,\ f(\nabla_{f_3X}f_3X)=-\lambda e_1x_1x_2+\lambda e_2x_1^2,\ S(f_3)=-e_3(x_2y_2+x_1y_1).$$

Отсюда получим, что f_3 является обобщенной приближенно келеровой и эрмитовой f-структурой.

Итак, установлены следующие результаты.

Т е о р е м а 2. *На трехмерной группе Ли, соответствующей алгебре Ли* $\mathfrak{r}_{(3,\lambda)}$:

1) f_2 является киллинговой f-структурой при λ = 0 *и приближенно келеровой f-структурой при любом значении параметра* λ;

2) f_1 и f_3 являются обобщенными приближенно келеровыми f-структурами;

3) все три структуры принадлежат классу эрмитовых f-структур.

3.2.3. Рассмотрим далее указанные f-структуры на алгебре Ли группы Гейзенберга.

Представим результаты вычислений для f_1:

$$\nabla_{f_1X}(f_1)(f_1X)=\frac{1}{2}e_2\left(x_3^2-x_1^2\right),$$

$S(f_1)$ попадает в ядро отображения f_1. Следовательно, $f_1 \in \mathrm{GNK}f$, $f_1 \in \mathrm{H}f$.

Результаты вычисления для f_2 выглядят следующим образом:

$$\nabla_{f_2X}(f_2)(f_2X)=\frac{1}{2}e_1\left(x_2^2-x_3^2-x_2x_3\right),$$

$S(f_2)$ попадает в ядро отображения f_2. Таким образом, f_2 является обобщенной приближенно келеровой и эрмитовой f-структурой.

После проведенных вычислений для f_3 получим следующее:

$$\nabla_{f_3X}(f_3)(f_3X)=\frac{1}{2}e_3\left(x_1^2+x_2^2\right),$$

$S(f_3)$ попадает в ядро отображения f_3. Следовательно, $f_3 \in GNKf$, $f_3 \in Hf$.

Подведем итог.

Т е о р е м а 3. *На трехмерной группе Ли Гейзенберга все три левоинвариантные f-структуры являются обобщенными приближенно келеровыми и эрмитовыми f-структурами.*

3.2.4. Закончим наше исследование проверкой на принадлежность классам обобщенной эрмитовой геометрии *f*-структур f_1, f_2, f_3 на алгебре Ли $\mathfrak{r}_3$. Приведем последовательно результаты вычислений для всех трех *f*-структур.

$f_1:\ \nabla_{f_1X}(f_1)(f_1X)=\frac{1}{2}e_2\left(x_1^2+x_2^2\right),\ S(f_1)=\frac{1}{2}e_2(x_1y_1+x_3y_3)$. Отсюда получим, что $f_1 \in \mathrm{GNK}f$, $f_1 \in \mathrm{H}f$.

$f_2:\ \nabla_{f_2X}(f_2)(f_2X)=\frac{1}{2}e_1\left(x_2^2-x_3^2\right)$, $S(f_2)$ попадает в ядро отображения f_2. Следовательно, $f_2 \in \mathrm{GNK}f, f_2 \in \mathrm{H}f$.

$f_3:\ \nabla_{f_3X}(f_3)(f_3X)=\frac{1}{2}e_3\left(x_1^2-x_2^2\right)$, $S(f_3)$ попадает в ядро отображения f_3. Получаем, что $f_3 \in \mathrm{GNK}f, f_3 \in \mathrm{H}f$.

Сформулируем все полученные результаты для данной разрешимой группы Ли.

Т е о р е м а 4. *На трехмерной группе Ли, соответствующей алгебре Ли* $\mathfrak{r}_3$, *все три левоинвариантные f-структуры являются обобщенными приближенно келеровыми и эрмитовыми f-структурами.*

Благодарности. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Государственной программы научных исследований на 2021–2025 годы «Конвергенция-2025», подпрограмма «Математические модели и методы», НИР «Структуры на линейных алгебраических группах, обобщенных главных *G*-расслоениях, однородных многообразиях и группах Ли» (№ гос. регистрации 20211882).

Acknowledgements. The work was carried out with partial financial support from the State Program of Scientific Research for 2021–2025 "Convergence 2025", subprogram "Mathematical models and methods", research project "Structures on linear algebraic groups, generalized principal G-bundles, homogeneous manifolds and Lie groups" (state registration number 20211882).

Список использованных источников

1. Yano, K. On a structure defined by a tensor field *f* of type (1, 1) satisfying $f^3+f=0$ / K. Yano // North-Holland Mathematics Studies. – 1982. – Vol. 70. – P. 251–261. https://doi.org/10.1016/s0304-0208(08)72251-5

2. Кириченко, В. Ф. Квазиоднородные многообразия и обобщенные почти эрмитовы структуры / В. Ф. Кириченко // Известия АН СССР. Серия математическая. – 1983 – Т. 47, № 6. – С. 1208–1223.

3. Кириченко, В. Ф. Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории почти контактных многообразий / В. Ф. Кириченко // Итоги науки и техники. Проблемы геометрии. – 1986. – Т. 18. – С. 25–71.

4. Кириченко, В. Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях / В. Ф. Кириченко. – М.: МПГУ, 2003. – 495 с.

5. Степанов, Н. А. Основные факты теории φ-пространств / Н. А. Степанов // Известия вузов. Математика. – 1967. – № 3. – С. 88–95.

6. Wolf, J. A. Homogeneous spaces defined by Lie group automorphisms / J. A. Wolf, A. Gray // Journal of Differential Geometry. – 1968. – Vol. 2, № 1. – P. 77–114. https://doi.org/10.4310/jdg/1214501139

7. Феденко, А. С. Пространства с симметриями / А. С. Феденко. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 168 с.

8. Ковальский, О. Обобщенные симметрические пространства / О. Ковальский. – М.: Мир, 1984. – 240 с.

9. Степанов, Н. А. Однородные 3-циклические пространства / Н. А. Степанов // Известия вузов. Математика. – 1967. – № 12. – С. 65–74.

10. Gray, A. Riemannian manifolds with geodesic symmetries of order 3 / A. Gray // Journal of Differential Geometry. – 1972. – Vol. 7, № 3–4. – P. 343–369. https://doi.org/10.4310/jdg/1214431159

11. Балащенко, В. В. Канонические аффинорные структуры классического типа на регулярных Ф-пространствах / В. В. Балащенко, Н. А. Степанов // Математический сборник. – 1995. – Т. 186, № 11. – С. 3–34.

12. Балащенко, В. В. Естественно редуктивные киллинговы *f*-многообразия / В. В. Балащенко // Успехи математических наук. – 1999. – Т. 54, № 3. – С. 151–152.

13. Балащенко, В. В. Однородные эрмитовы *f*-многообразия / В. В. Балащенко // Успехи математических наук. – 2001. – Т. 56, № 3. – С. 159–160.

14. Балащенко, В. В. Однородные приближенно келеровы *f*-многообразия / В. В. Балащенко // Доклады РАН. – 2001. – Т. 376, № 4. – С. 439–441.

15. Balashchenko, V. V. Invariant nearly Kähler *f*-structures on homogeneous spaces / V. V. Balashchenko // Global Differential Geometry: The Mathematical Legacy of Alfred Gray. – 2001. – Vol. 288. – P. 263–267. https://doi.org/10.1090/conm/288/04831

16. Балащенко, В. В. Обобщенная эрмитова геометрия на однородных Ф-пространствах конечного порядка / В. В. Балащенко, Д. В. Вылегжанин // Известия вузов. Математика. – 2004. – № 10. – С. 33–44.

17. Балащенко, В. В. Приближенно келеровы и эрмитовы *f*-структуры на однородных *k*-симметрических пространствах / В. В. Балащенко, А. С. Самсонов // Доклады РАН. – 2010. – Т. 432, № 3. – С. 295–298.

18. Самсонов, А. С. Приближенно келеровы и эрмитовы *f*-структуры на однородных Ф-пространствах порядка *k* в случае специальных метрик / А. С. Самсонов // Сибирский математический журнал. – 2011. – Т. 52, № 6. – С. 1373–1388.

19. Клепиков, П. Н. Трехмерные неунимодулярные группы Ли с римановой метрикой инвариантного солитона Риччи и полусимметрической метрической связностью / П. Н. Клепиков, Е. Д. Родионов, О. П. Хромова // Известия вузов. Математика. – 2022. – № 5. – С. 80–85. https://doi.org/10.26907/0021-3446-2022-5-80-85

20. Клепиков, П. Н. Уравнение Эйнштейна на трехмерных метрических группах Ли с векторным кручением / П. Н. Клепиков, Е. Д. Родионов, О. П. Хромова // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. – 2020. – Т. 181, №. 1. – С. 41–53. https://doi.org/10.36535/0233-6723-2020-181-41-53

21. Хромова, О. П. О симметрических потоках Риччи полусимметрических связностей на трехмерных метрических группах Ли / О. П. Хромова, В. В. Балащенко // Известия Алтайского государственного университета. – 2023. – № 1. – С. 141–144.

22. Stong, R. E. The rank of an *f*-structure / R. E. Stong // Kodai Mathematical Seminar Reports. – 1977. – Vol. 29, № 1–2. – P. 207–209. https://doi.org/10.2996/kmj/1138833583

23. Яно, К. *CR*-подмногообразия в келеровом и сасакиевом многообразиях / К. Яно, М. Кон. – М.: Наука, 1990. – 189 с.

24. Singh, K. D. Some *f*(3,ε) structure manifolds / K. D. Singh, Singh Rakeshwar // Demonstratio Mathematica. – 1977. – Vol. 10, № 3–4. – P. 637–645. https://doi.org/10.1515/dema-1977-3-411

25. Грицанс, А. С. О геометрии киллинговых *f*-многообразий / А. С. Грицанс // Успехи математических наук. – 1990. – Т. 45, № 4. – С. 149–150.

26. Грицанс, А. С. О строении киллинговых *f*-многообразий / А. С. Грицанс // Известия вузов. Математика. – 1992. – № 6. – С. 49–57.

27. Gray, A. The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants / A Gray, L. M. Hervella // Annali di Matematica Pura ed Applicata. – 1980. – Vol. 123. – P. 35–58. https://doi.org/10.1007/bf01796539

28. Gray, A. Riemannian manifolds with geodesic symmetries of order 3 / A. Gray // Journal of Differential Geometry. – 1972. – Vol. 7, № 3–4. – P. 343–369. https://doi.org/10.4310/jdg/1214431159

29. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М.: Наука, 1981. – Т. 2. – 415 с.

30. Балащенко, В. В. Инвариантные *f*-структуры на естественно редуктивных однородных пространствах / В. В. Балащенко // Известия вузов. Математика. – 2008. – № 4. – С. 3–15.

31. Balashchenko, V. V. Invariant structures on the 6-dimensional generalized Heisenberg group / V. V. Balashchenko // Kragujevac Journal of Mathematics. – 2011. – Vol. 35, № 2. – P. 209–222.

32. Балащенко, В. В. Левоинвариантные *f*-структуры на 5-мерной группе Гейзенберга H(2,1) / В. В. Балащенко, П. А. Дубовик // Вестник БГУ. Серия 1. Математика и информатика. – 2013. – № 3. – С. 112–117.

33. Дубовик, П. А. Эрмитовы *f*-структуры на 6-мерных филиформных группах Ли / П. А. Дубовик // Известия вузов. Математика. – 2016. – № 7. – С. 34–43.

34. Мубаракзянов, Г. М. О разрешимых алгебрах Ли / Г. М. Мубаракзянов // Известия вузов. Математика. – 1963. – Т. 32, № 1. – С. 114–129.

35. Product structures on four dimensional solvable Lie algebras / A. Andrada, M. L. Barberis, I. G. Dotti, G. P. Ovando // Homology, Homotopy and Applications. – 2005. – Vol. 7, № 1. – P. 9–37. https://doi.org/10.4310/hha.2005.v7.n1.a2

References

1. Yano K. On a structure defined by a tensor field f of type (1,1) satisfying $f^3 + f = 0$. *North-Holland Mathematics Studies*, 1982, vol. 70, pp. 251–261. https://doi.org/10.1016/s0304-0208(08)72251-5

2. Kirichenko V. F. Quasihomogeneous manifolds and generalized almost Hermite structures. *Mathematics of the USSR–Izvestiya*, 1984, vol. 23, no. 3, pp. 473–486.

3. Kirichenko V. F. Methods of generalized Hermitian geometry in the theory of almost contact manifolds. *Journal of Soviet Mathematics*, 1988, vol. 42, no. 5, pp. 1885–1919. https://doi.org/10.1007/BF01094419

4. Kirichenko V. F. *Differential-Geometric Structures on Manifolds.* Moscow, Moscow City University, 2003. 495 p. (in Russian).

5. Stepanov N. A. Basic facts of the theory of φ-spaces. *Izvestiya vuzov. Matematika = Soviet Mathematics (Iz. VUZ)*, 1967, no. 3, pp. 88–95 (in Russian).

6. Wolf J. A., Gray A. Homogeneous spaces defined by Lie group automorphisms. *Journal of Differential Geometry*, 1968, vol. 2, no. 1, pp. 77–114. https://doi.org/10.4310/jdg/1214501139

7. Fedenko A. S. *Spaces with Symmetries.* Moscow, Editorial URSS Publ., 2004. 168 p. (in Russian).

8. Kowalski O. *Generalized Symmetric Spaces.* Berlin, Springer-Verlag, 1980. 187 p. https://doi.org/10.1007/bfb0103325

9. Stepanov N. A. Homogeneous 3-cyclic spaces. *Izvestiya vuzov. Matematika = Soviet Mathematics (Iz. VUZ)*, 1967, no. 12, pp. 65–74 (in Russian).

10. Gray A. Riemannian manifolds with geodesic symmetries of order 3. *Journal of Differential Geometry*, 1972, vol. 7, no. 3–4, pp. 343–369. https://doi.org/10.4310/jdg/1214431159

11. Balashchenko V. V., Stepanov N. A. Canonical affinor structures of classical type on regular Φ-spaces. *Sbornik: Mathematics, Sbornik: Mathematics*, 1995, vol. 186, no. 11, pp. 1551–1580. https://doi.org/10.1070/SM1995v186n11ABEH000083

12. Balashchenko V. V. Naturally reductive Killing *f*-manifolds. *Russian Mathematical Surveys*, 1999, vol. 54, no. 3, pp. 623–625. https://doi.org/10.1070/rm1999v054n03ABEH000155

13. Balashchenko V. V. Homogeneous Hermitian *f*-manifolds. *Russian Mathematical Surveys*, 2001, vol. 56, no. 3, pp. 575–577. https://doi.org/10.1070/RM2001v056n03ABEH000401

14. Balashchenko V. V. Homogeneous Nearly Kähler *f*-Manifolds. *Doklady Mathematics*, 2001, vol. 63, no. 1, pp. 56–58.

15. Balashchenko V. V. Invariant nearly Kähler *f*-structures on homogeneous spaces. *Global Differential Geometry: The Mathematical Legacy of Alfred Gray*, 2001, vol. 288, pp. 263–267. https://doi.org/10.1090/conm/288/04831

16. Balashchenko V. V., Vylegzhanin, D. V. Generalized Hermitian geometry on homogeneous Φ-spaces of finite order. *Russian Mathematics (Iz. VUZ)*, 2004, vol. 48, no. 10, pp. 30–40.

17. Balashchenko V. V., Samsonov A. S. Nearly Kähler and Hermitian *f*-structures on homogeneous *k*-symmetric spaces. *Doklady Mathematics*, 2010, vol. 81, no. 3, pp. 386– 389. https://doi.org/10.1134/s1064562410030130

18. Samsonov A. S. Nearly Kähler and Hermitian *f*-structures on homogeneous Φ-spaces of order *k* with special metrics. *Siberian Mathematical Journal*, 2011, vol. 52, no. 6, pp. 1373–1388. https://doi.org/10.1134/s0037446611060140

19. Klepikov P. N., Rodionov E. D., Khromova O. P. Three-dimensional nonunimodular Lie groups with a Riemannian metric of an invariant Ricci soliton and a semi-symmetric metric connection. *Russian Mathematics (Iz. VUZ)*, 2022, vol. 66, no. 5, pp. 65–69.

20. Klepikov P. N., Rodionov E. D., Khromova O. P. Einstein's equation on three-dimensional metric Lie groups with vector torsion. Proceedings of the International Conference. *Journal of Mathematical Sciences*, 2023, vol. 276, pp. 733–745. https://doi.org/10.1007/s10958-023-06796-1

21. Khromova O. P., Balashchenko V. V. Symmetric Ricci flows of semisymmetric connections on three-dimensional metrical Lie groups: An Analysis. *Izvestiya Altaiskogo gosudarstvennogo universiteta = Izvestiya of Altai State University*, 2023, no. 1, pp. 141–144 (in Russin).

22. Stong R. E. The rank of an *f*-structure. *Kodai Mathematical Seminar Reports*, 1977, vol. 29, no. 1–2, pp. 207–209. https://doi.org/10.2996/kmj/1138833583

23. Yano K., Kon M. *CR Submanifolds of Kaehlerian and Sasakian Manifolds.* Boston, Birkhäuser, 1983. 208 p. https://doi.org/10.1007/978-1-4684-9424-2

24. Singh K. D., Singh Rakeshwar. Some *f*(3,ε) structure manifolds. *Demonstratio Mathematica*, 1977, vol. 10, no. 3–4, pp. 637–645. https://doi.org/10.1515/dema-1977-3-411

25. Gritsans A. S. On the geometry of Killing ff-manifolds. *Russian Mathematical Surveys*, 1990, vol. 45 no. 4, pp. 168–169. https://doi.org/10.1070/RM1990v045n04ABEH002365

26. Gritsans A. S. On construction of Killing *f*-manifolds. *Russian Mathematics (Iz. VUZ)*, 1992, vol. 36, no. 6, pp. 46–54.

27. Gray A., Hervella L. M. The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 1980, vol. 123, pp. 35–58. https://doi.org/10.1007/bf01796539

28. Gray A. Riemannian manifolds with geodesic symmetries of order 3. *Journal of Differential Geometry*, 1972, vol. 7, no. 3–4, pp. 343–369. https://doi.org/10.4310/jdg/1214431159

29. Kobayashi S., Nomizu K. *Foundations of differential geometry. Vol. 2.* Moscow, Nauka Publ., 1981. 414 p.

30. Balashchenko V. V. Invariant *f*-structures on naturally reductive homogeneous spaces. *Russian Mathematics (Iz. VUZ)*, 2008, vol. 52, no. 4, pp. 1–12.

31. Balashchenko V. V. Invariant structures on the 6-dimensional generalized Heisenberg group. *Kragujevac Journal of Mathematics*, 2011, vol. 35, no. 2, pp. 209–222.

32. Balashchenko V. V., Dubovik P. A. Left-invariant *f*-structures on the 5-dimensional Heisenberg group H(2,1). *Vestnik BGU. Seriya 1, Fizika. Matematika. Informatika = Bulletin of the Belarusian State University. Series 1, Physics. Mathematics. Informatics*, 2013, no. 3, pp. 112–117 (in Russian)

33. Dubovik P. A. Hermitian *f*-structures on 6-dimensional filiform Lie groups. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 2016, vol. 60, iss. 7, pp. 29–36. https://doi.org/10.3103/S1066369X16070057

34. Mubarakzjanov G. M. On solvable Lie algebras. *Izvestiya vuzov. Matematika = Soviet Mathematics (Iz. VUZ)*, 1963, no. 1, pp. 114–123.

35. Andrada A., Barberis M. L., Dotti L. G., Ovando G. P. Product structures on four dimensional solvable Lie algebras. *Homology, Homotopy and Applications*, 2005, vol. 7, no. 1, pp. 9–37. https://doi.org/10.4310/hha.2005.v7.n1.a2

Информация об авторах

Балащенко Виталий Владимирович – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра геометрии, топологии и методики преподавания математики, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: vitaly.balashchenko@gmail.com

Куница Виктория Николаевна – аспирант, кафедра геометрии, топологии и методики преподавания математики, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: vikakunica@gmail.com

Information about the authors

Vitaly V. Balashchenko – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Geometry, Topology and Methods of Teaching Mathematics, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: vitaly.balashchenko@gmail.com

Victoria N. Kunitsa – Postgraduate Student, Department of Geometry, Topology and Methods of Teaching Mathematics, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: vikakunica@gmail.com