

ФИЗИКА

PHYSICS

УДК 539.12

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2025-61-2-118-127>

Поступила в редакцию 12.11.2024

Received 12.11.2024

В. И. Лашкевич

*Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого,
Гомель, Республика Беларусь*

**ВКЛАДЫ В АНОМАЛЬНЫЙ МАГНИТНЫЙ МОМЕНТ ЛЕПТОНОВ
ОТ ПОЛЯРИЗАЦИИ ВАКУУМА, ОПИСЫВАЕМОГО СМЕШАННЫМИ
ДИАГРАММАМИ В РАМКАХ МЕТОДА МЕЛЛИНА – БАРНСА**

Аннотация. Исследуется явный вид электромагнитных поправок третьего порядка по постоянной тонкой структуре α^3 к аномальному магнитному моменту лептона a_L ($L = e, \mu, \tau$) от вклада графа вершины шестого порядка с вставкой поляризации вакуума четвертого порядка. Подход основывается на последовательном применении дисперсионных соотношений для поляризационного оператора и преобразования Меллина – Барнса для пропагаторов массивных частиц. Получены явные аналитические выражения для поправок к a_L при $r = m_e/m_L > 1$. Найдены асимптотические разложения в пределе как малых, так и больших значений отношения масс лептонов ($r = m_e/m_L$), $r \ll 1$ и $r \rightarrow \infty$. Полученные разложения сравниваются с соответствующими выражениями, приведенными в литературе.

Ключевые слова: аномальные магнитные моменты лептонов, квантово-электродинамические поправки высших порядков, преобразование Меллина – Барнса

Для цитирования. Лашкевич, В. И. Вклады в аномальный магнитный момент лептонов от поляризации вакуума, описываемого смешанными диаграммами в рамках метода Меллина – Барнса / В. И. Лашкевич // Весті Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. – 2025. – Т. 61, № 2. – С. 118–127. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2025-61-2-118-127>

Vasil I. Lashkevich

Sukhoi State Technical University of Gomel, Gomel, Republic of Belarus

**CONTRIBUTIONS TO THE ANOMALOUS MAGNETIC MOMENT OF LEPTONS
FROM VACUUM POLARIZATION DESCRIBED BY MIXED DIAGRAMS IN THE FRAMEWORK
OF THE MELLIN – BARNES METHOD**

Abstract. The explicit form of the third-order electromagnetic corrections in the fine structure constant α^3 to the anomalous magnetic moment of lepton a_L ($L = e, \mu, \tau$) from the contribution of the sixth – order vertex graph with insertion of fourth – order vacuum polarization. The approach is based on the consistent application of dispersion relations for the polarization operator and the Mellin – Barnes transform for massive particle propagators. Explicit analytical expressions for the corrections to a_L are obtained at $r = m_e/m_L > 1$. Asymptotic expansions are found in the limit of both small and large values of the lepton mass ratio ($r = m_e/m_L$), $r \ll 1$ and $r \rightarrow \infty$. The expansions obtained are compared with the corresponding expressions given in the literature.

Keywords: anomalous magnetic moments of the leptons, higher-order quantum electromagnetic corrections, Mellin – Barnes transform

For citation. Lashkevich V. I. Contributions to the anomalous magnetic moment of leptons from vacuum polarization described by mixed diagrams in the framework of the Mellin – Barnes method. *Vesti Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2025, vol. 61, no. 2, pp. 118–127 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2025-61-2-118-127>

Введение. Теоретическое и экспериментальное изучение аномальных магнитных моментов лептонов играет в настоящее время важную роль в развитии представлений о взаимодействии элементарных частиц и свойствах теории, их описывающих, поскольку аномальные магнитные моменты лептонов чувствительны к структуре вакуума КХД и обнаружение рассогласования между теоретическими предсказаниями и экспериментальными результатами должно сигнализировать об открытии взаимодействий или частиц, не присутствующих в Стандартной модели. Напомним, что взаимодействие лептона (L) с фотонами приводит к сдвигу гиромагнитного отношения g_L от значения $g_0 = 2$, предсказанного теорией Дирака [1]. Величина сдвига характеризуется аномалией $a_L \equiv (g_0 - 2) / 2 \neq 0$, которая хотя по величине и мала, но представляет собой большой научный интерес, поскольку экспериментальные значения a_L для электрона и мюона получены с очень высокой точностью (для электрона $\sim 10^{-10}$ [2] и $\sim 10^{-6}$ для мюона [3]), тем самым открывая возможности для серьезной проверки Стандартной модели.

Как правило, окончательные численные теоретические значения a_L , которые на сегодняшний день требуют включить радиационные поправки до десятого порядка по заряду e (пятого порядка по постоянной тонкой структуре α), находят с помощью специальных алгоритмов (см., напр., [4–6]), позволяющих достичь очень высокой точности компьютерных вычислений. Выполнение таких расчетов требует много компьютерного времени, при этом детальный анализ вкладов в a_L от различных механизмов затруднен. В связи с этим появляется интерес рассмотреть хотя бы подкласс фейнмановских диаграмм, вклады которых в a_L удавалось бы выразить в аналитическом замкнутом виде. Одним из таких подклассов являются диаграммы со вставками фотонного поляризационного оператора, состоящие только из лептонных петель, – так называемые диаграммы пузырькового типа. Явные выражения для поправок к a_L от таких диаграмм вплоть до 10-го порядка были недавно получены в работах [7–9] и были основаны на последовательном применении дисперсионных соотношений для поляризованного оператора и преобразовании Меллина – Барнса для пропагаторов массивных частиц (более подробно об этом см. в [7]).

Цель настоящей работы – получить явные аналитические выражения для другого подкласса диаграмм. Рассматриваемые диаграммы со вставкой поляризации вакуума четвертого порядка определяют вклад в a_L шестого порядка (рис. 1). Как и ранее, выражения будут получены для любых лептонов и во всем интервале отношения масс лептонов, $0 < m_\ell / m_L < \infty$, где m_ℓ соответствует массе лептонов из поляризационного оператора, а m_L – массе рассматриваемого лептона L . Следует отметить, что в [11] впервые был выполнен расчет вклада в a_L от изображенных на рис. 1 диаграмм в виде разложения при $r = m_\ell / m_L \ll 1$, а в [10] приведены асимптотические разложения как случая $r \ll 1$, так и $r \gg 1$. Будет показана согласованность полученных точных выражений с соответствующими асимптотическими разложениями.

Электродинамический вклад в аномальный магнитный момент a_L обычно записывается в виде суммы

$$a_L^{(\text{QED})} = A_1 \left(\frac{m_L}{m_L} \right) + A_2 \left(\frac{m_\ell}{m_L} \right) + A_3 \left(\frac{m_{\ell_1}}{m_L}, \frac{m_{\ell_2}}{m_L} \right),$$

где каждое слагаемое может представляться как разложение по постоянной тонкой структуры α . Разложение для масс-зависящей части A_2 имеет вид

$$A_2(m_\ell / m_L) = A_2^{(4)}(t) \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 + A_2^{(6)}(t) \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^3 + A_2^{(8)}(t) \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^4 + A_2^{(10)}(t) \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^5 + \dots$$

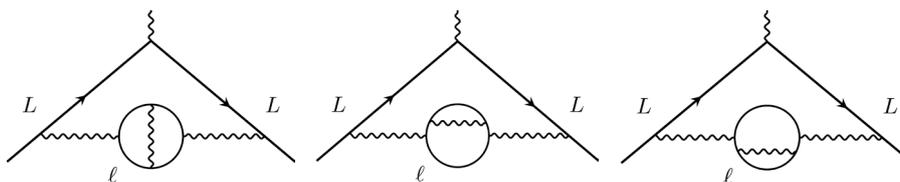


Рис. 1. Вершинные графы шестого порядка со вставкой поляризации вакуума четвертого порядка

Fig. 1. Sixth-order vertex graphs with fourth-order vacuum polarization insertion

Исследуемые в настоящей работе поправки к a_L , от изображенных на рис. 1 диаграмм, связаны с коэффициентом $A_{2,L}^{(6)}(t)$. Этот коэффициент также включает поправки от поляризации вакуума только двумя лептонными петлями, точные аналитические выражения для которых, полученные в рамках подхода, использующего представление Меллина – Барнса, приведены в [7]. Соответствующие выражения были известны и ранее [10], однако в работе [7] они представлены в несколько другом виде, демонстрируя, что при $r \leq 1$ и $r \geq 1$ – это единая аналитическая функция. Диаграммы, изображенные на рис. 1, содержащие внутри лептонной петли фотонную линию, назовем, в отличие от диаграмм, содержащих одни лептонные петли, диаграммами смешанного типа.

Теоретические основы. Исходное выражение для вклада в аномальный магнитный момент лептона, от изображенных на рис. 1 диаграмм, имеет вид [11]

$$A_{2,L}^{(6)}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{ds}{s} \int_0^1 \frac{(1-x)x^2}{x^2 + \frac{s(1-x)t}{m^2}} \text{Im} \Pi^{(4)}(s) dx, \tag{1}$$

где t есть квадрат отношения масс лептонов $t = m^2/M^2$. $\text{Im} \Pi^{(4)}(s)$ – мнимая часть вставки поляризации вакуума в четвертом порядке

$$\frac{1}{\pi} \text{Im} \Pi^{(4)}(s) = F_4(u) \theta(s - 4m^2). \tag{2}$$

Функция $F_4(u)$ определяется выражением [11]

$$F_4(u) = \ln \left(\frac{1+u}{1-u} \right) \left[\frac{11}{16} + \frac{11u^2}{24} - \frac{7u^4}{48} + \left(\frac{1}{2} + \frac{u^2}{3} - \frac{u^4}{6} \right) \ln \left(\frac{(1+u)^3}{8u^2} \right) \right] + \\ + u \left[\frac{5}{8} - \frac{3u^2}{8} - \left(\frac{1}{2} - \frac{u^2}{6} \right) \ln \left(\frac{64u^4}{(1-u^2)^3} \right) \right] + 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{u^2}{3} - \frac{u^4}{6} \right) \left[2 \text{Li}_2 \left(\frac{1-u}{1+u} \right) + \text{Li}_2 \left(-\frac{1-u}{1+u} \right) \right], \tag{3}$$

где $u = \sqrt{1 - 4m^2/s}$, $\text{Li}_2(x)$ обозначает полилогарифмическую функцию второго порядка.

Преобразование Меллина – Барнса для функции $\frac{1}{1+y}$ имеет вид

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+y} y^{z-1} dy = \Gamma(z) \Gamma(1-z). \tag{4}$$

Осуществляя обратное преобразование, получим

$$\frac{1}{1+y} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(z) \Gamma(1-z) y^{-z} dz. \tag{5}$$

С учетом (5) подынтегральное выражение в (1) примет вид

$$\frac{(1-x)x^2}{x^2 + \frac{s(1-x)t}{m^2}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(\frac{4m^2}{s} \right)^z (4t)^{-z} x^{2z} (1-x)^{1-z} \Gamma(z) \Gamma(1-z) dz, \tag{6}$$

тогда выражение (1) принимает вид интеграла Меллина – Барнса

$$A_{2,L}^{(6)}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} (4t)^{-z} R(z) dz, \tag{7}$$

где

$$R(z) = \Gamma(z) \Gamma(1-z) \int_0^1 x^{2z} (1-x)^{1-z} dx \int_{4m^2}^{\infty} \left(\frac{4m^2}{s} \right)^z F_4(u) \frac{1}{s} ds. \tag{8}$$

Поскольку интеграл по x в (8) равен

$$\int_0^1 x^{2z} (1-x)^{1-z} dx = \frac{\Gamma(2-z)\Gamma(1+2z)}{\Gamma(3+z)}, \tag{9}$$

а интеграл по s равен

$$\int_{4m^2}^{\infty} \left(\frac{4m^2}{s}\right)^z F_4(u) \frac{1}{s} ds = 2 \int_0^1 (1-u^2)^{z-1} u F_4(u) du, \tag{10}$$

то выражение (7) с учетом (9) и (10) примет вид

$$A_{2,L}^{(6)}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} t^{-z} R_1(z) dz, \tag{11}$$

$$R_1(z) = \frac{\sqrt{\pi} (1-z) \Gamma(1-z) \Gamma\left(\frac{1}{2}+z\right)}{(1+z)(2+z)\sin(\pi z)} Q_1(z), \tag{12}$$

$$Q_1(z) = 2 \int_0^1 (1-u^2)^{z-1} u F_4(u) du. \tag{13}$$

Вычисляя интеграл (13), приходим к выражению

$$R_1(z) = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} R_2(z), \tag{14}$$

где

$$\begin{aligned} R_2(z) = & -\frac{(72 + 408z + 852z^2 + 749z^3 + 199z^4 - 72z^5 - 36z^6)(1-z)}{6z^2(1+z)^2(2+z)^3(1+2z)^2(3+2z)} + \frac{(1-z)(2+3z)}{3z(1+z)(2+z)^2(1+2z)} \times \\ & \times [\psi(z+1/2) - 3\psi(z) - 2\gamma_E + 2\ln(2)] + \\ & + \frac{1-z}{3\left(\frac{1}{2}+z\right)(2+z)} \left[\frac{-4}{1+z} {}_3F_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}, \frac{3}{2}+z; 1\right) + \frac{z}{\left(\frac{3}{2}+z\right)\left(\frac{5}{2}+z\right)} {}_3F_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}, \frac{7}{2}+z; 1\right) \right] + \\ & + \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{4}{z} - \frac{1}{2+z}\right) \frac{(1-z)\Gamma\left(\frac{1}{2}+z\right)}{\sqrt{\pi}(1+z)(2+z)\Gamma(z)}. \end{aligned} \tag{15}$$

Здесь γ_E – постоянная Эйлера, $\psi(z)$ – пси-функция, ${}_pF_q(a_1, a_2, \dots, a_p; b_1, b_2, \dots, b_q; z)$ – обобщенная гипергеометрическая функция.

Далее, интеграл (11) вычисляется по теореме Коши о вычетах, замыкая контур интегрирования поочередно в правую ($t > 1$) и левую ($t < 1$) полуплоскости.

Аналитические расчеты. Правая полуплоскость ($t > 1$). Поскольку функция $R_1(z)$ имеет в правой полуплоскости при $z = 1$ полюс первого порядка, а при $z = 2, 3, \dots, n, \dots$ – полюсы второго порядка, то

$$\text{Res} \left[R_1(z) t^{-z} \right]_{(z=1)} = -\frac{41}{486} \frac{1}{t}, \tag{16}$$

$$\text{Res} \left[R_1(z) t^{-z} \right]_{(z=n)} = \frac{d}{dz} \left(R_2(z) t^{-z} \right)_{z=n}, \tag{17}$$

тогда $A_{2,L}^{(6)}(t)$ можно записать так:

$$A_{2,L}^{(6)}(t) = \frac{41}{486t} - \sum_{n=2}^{\infty} \text{Res} \left[R_1(z) t^{-z} \right]_{(z=n)}. \quad (18)$$

Суммируя все вычеты при $z = 1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots$, приходим к выражению

$$A_{2,L}^{(6)}(t) = \frac{41}{486} \frac{1}{t} - [C_1(t) + C_2(t) + C_3(t) \ln(t) + S(t)]; \quad (19)$$

$$C_1 = -\frac{919}{144} - \frac{181}{2430t} + \frac{33}{4}t - \left(\frac{8}{9} + 10t\right) \sqrt{t} \left[\text{Li}_2\left(\sqrt{\frac{1}{t}}\right) - \text{Li}_2\left(-\sqrt{\frac{1}{t}}\right) \right] + \frac{16}{9} \sqrt{t} \times \\ \times \left[\text{Li}_3\left(\sqrt{\frac{1}{t}}\right) - \text{Li}_3\left(-\sqrt{\frac{1}{t}}\right) \right] + \left(-\frac{7}{4} + 4t + \frac{115}{36}t^2\right) \text{Li}_2\left(\frac{1}{t}\right) + \left(1 + \frac{4}{3}t + \frac{23}{9}t^2\right) \text{Li}_3\left(\frac{1}{t}\right) + 6t^2 \text{Li}_4\left(\frac{1}{t}\right), \quad (20)$$

$$C_2 = \frac{\pi^2}{3} \left\{ \frac{11}{144t} + \frac{7}{4} - 5t + \frac{748}{9}t^2 \left(\frac{t^2}{\sqrt{1-\frac{1}{t}}(t-1)^2} - 1 \right) + \frac{1}{72} \frac{-19232t^3 + 20388t^2 - 6854t - 367}{\sqrt{1-\frac{1}{t}}(t-1)^2} - \right. \\ \left. - 26t \ln \left[\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1-\frac{1}{t}} \right) \right] - \frac{460}{3}t^2 \ln \left[\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1-\frac{1}{t}} \right) \right] + 26t {}_4F_3 \left(-\frac{1}{2}, 1, 1, 1; 2, 2, 2; \frac{1}{t} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{54t} {}_4F_3 \left(1, 1, \frac{3}{2}, 3; 4, 4, 4; \frac{1}{t} \right) + \frac{1}{9t} {}_6F_5 \left(\frac{3}{2}, 3, 3, 3, 3, 3; 1, 1, 4, 4, 4; \frac{1}{t} \right) \right\}, \quad (21)$$

$$C_3 = -\frac{7}{2} + \frac{127}{36}t - \left(\frac{4}{9} + 5t\right) \sqrt{t} \left[\ln \left(1 + \sqrt{\frac{1}{t}} \right) - \ln \left(1 - \sqrt{\frac{1}{t}} \right) \right] + \frac{2}{9} \left\{ 2\sqrt{t} \left[\text{Li}_2\left(\sqrt{\frac{1}{t}}\right) - \text{Li}_2\left(-\sqrt{\frac{1}{t}}\right) \right] \right\} - \\ - \left(-\frac{7}{4} + 4t + \frac{115}{36}t^2 \right) \ln \left(1 - \frac{1}{t} \right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}t + \frac{23}{18}t^2 \right) \text{Li}_2\left(\frac{1}{t}\right) + 2t^2 \text{Li}_3\left(\frac{1}{t}\right) + \\ + \pi^2 \left\{ \frac{1}{6} - \frac{5}{3}t + \frac{103}{9}t^2 - \frac{1}{18} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{t}}} (53 - 259t + 206t^2) - 5t {}_3F_2 \left(-\frac{1}{2}, 1, 1; 2, 2; \frac{1}{t} \right) + 8t^2 \ln \left(\frac{1}{2} \left[1 + \sqrt{1-\frac{1}{t}} \right] \right) \right\}, \quad (22)$$

$$S(t) = \frac{1}{3} \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ -8 \left[\frac{(4n^3 + n^2 - 14n - 9)}{(1+n)^2(2+n)(1+2n)} + \frac{(n-1)\ln(t)}{(1+n)} \right] {}_3F_2 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}, \frac{3}{2} + n; 1 \right) + \right. \\ \left. + 8 \left[\frac{(16n^5 + 28n^4 - 104n^3 - 225n^2 - 60n + 30)}{(2+n)(1+2n)(3+2n)^2(5+2n)^2} + \frac{(n-1)n\ln(t)}{(3+2n)(5+2n)} \right] \times \right. \\ \left. \times {}_3F_2 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}, \frac{7}{2} + n; 1 \right) + \frac{8(n-1)}{(n+1)} \left[X \left(\frac{3}{2} + n \right) - \frac{n(n+1)}{(3+2n)(5+2n)} X \left(\frac{7}{2} + n \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{(2n+1)!! \pi^2}{2^{(n+2)}(n+2)!} (n-1)(8+3n) [\psi(n) - \psi(n+1/2)] + \frac{(n-1)(2+3n)}{n(1+n)(2+n)} \times \right. \\ \left. \times [(3\psi^{(1)}(n) - \psi^{(1)}(n+1/2))] + \left[\frac{2(9n^5 + 11n^4 - 17n^3 - 31n^2 - 15n - 2)}{n^2(1+n)^2(2+n)^2(1+2n)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(n-1)(2+3n)\ln(t)}{n(1+n)(2+n)} \right] (\psi(n+1/2) - 3\psi(n) - 2\gamma_E + 2\ln(2)) \right\} \frac{t^{-n}}{(n+2)(2n+1)}, \quad (23)$$

где для производной от гипергеометрической функции введено обозначение

$$X(\text{const}+n) \equiv \frac{\partial}{\partial z} \left[{}_3F_2 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}, \text{const}+z; 1 \right) \right]_{z=n}. \tag{24}$$

Если разложить в ряд и ограничиться четырьмя слагаемыми, то получаем

$$\begin{aligned} A_{2,L}^{(6)}(t) = & \frac{41}{486} \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} \left(-\frac{449}{10800} \ln(t) + \frac{49}{768} \zeta(3) - \frac{19871}{324000} \right) + \\ & + \frac{1}{t^3} \left(-\frac{62479}{1323000} \ln(t) + \frac{119}{1920} \zeta(3) - \frac{665873}{8890560} \right) + \\ & + \frac{1}{t^4} \left(-\frac{19963}{293932800} - \frac{25993}{583200} \ln(t) + \frac{245}{4608} \zeta(3) \right) + O\left(\frac{1}{t^5}\right). \end{aligned} \tag{25}$$

В работе [10] было получено выражение, которое полностью совпадает с (25), если ограничиться членами до $1/t^3$ включительно.

Отметим, что известно выражение для $A_{2,L}^{(6)}(t)$ при $t = 1$ [12]:

$$\begin{aligned} A_{2,L}^{(6)}(1) = & \frac{673}{108} - \frac{41\pi^2}{81} - \frac{7\pi^4}{270} - \frac{4}{9} \pi^2 \ln(2) - \frac{4}{9} \pi^2 \ln^2(2) + \frac{4\ln^4(2)}{9} + \frac{32}{3} \text{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{13\zeta(3)}{18} \approx \\ & \approx 0,05287065 \dots \end{aligned} \tag{26}$$

Это выражение мы используем при численной проверке.

Левая полуплоскость $t < 1$. Для нахождения вычетов в левой полуплоскости необходимо аналитически продолжить гипергеометрические функции ${}_3F_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}, \frac{3}{2} + z; 1\right)$ и ${}_3F_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}, \frac{7}{2} + z; 1\right)$ во всю левую полуплоскость. Функция ${}_3F_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}, \frac{3}{2} + z; 1\right)$ определена при $\text{Re } z > -1$, а функция ${}_3F_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}, \frac{7}{2} + z; 1\right)$ при $\text{Re } z > -3$. Рассмотрим вопрос аналитического продолжения более подробно.

Гипергеометрическая функция ${}_3F_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}, \frac{3}{2} + z; 1\right)$ возникла при вычислении интеграла

$$F(z) = \int_0^1 (1-y^2)^z \frac{1}{y} \ln\left(\frac{1-y}{1+y}\right) dy, \tag{27}$$

который равен

$$\int_0^1 (1-y^2)^z \frac{1}{y} \ln\left(\frac{1-y}{1+y}\right) dy = -\frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1+z) {}_3F_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}, \frac{3}{2} + z; 1\right)}{\Gamma\left(z + \frac{3}{2}\right)}. \tag{28}$$

Вычислим интеграл $F(z)$ другим способом, приводя его вычисление к функциональному уравнению, из которого можно получить выражение, пригодное для аналитического продолжения в левую полуплоскость. Соответствующее функциональное уравнение имеет вид

$$F(z) = F(z-1) + \frac{\sqrt{\pi}}{2z} \frac{\Gamma(z)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + z\right)}. \tag{29}$$

Решение этого уравнения можно записать следующим образом:

$$F(z) = -\sqrt{\pi} \Gamma(z+1) {}_3F_2\left(1, 1+z, 1+z; \frac{3}{2} + z, 2+z; 1\right) / 2(1+z) \Gamma\left(\frac{3}{2} + z\right). \tag{30}$$

Сравнивая (28) и (30), получаем равенство

$${}_3F_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}, \frac{3}{2} + z; 1\right) = \frac{{}_3F_2\left(1, 1 + z, 1 + z; \frac{3}{2} + z, 2 + z; 1\right)}{2(z + 1)}, \quad (31)$$

которое имеет место только при $\operatorname{Re} z > -1$, тогда как гипергеометрическая функция в правой части определена во всей левой полуплоскости за исключением полюсов. Таким образом, выражение (31) и является аналитическим продолжением в левую полуплоскость.

Аналогично для гипергеометрической функции $F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}, \frac{7}{2} + z; 1\right)$ соответствующее выражение примет вид

$${}_3F_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}, \frac{7}{2} + z; 1\right) = \frac{1}{2(z + 3)} {}_3F_2\left(1, 3 + z, 3 + z; z + 4, \frac{7}{2} + z; 1\right), \quad (32)$$

где равенство имеет место только при $\operatorname{Re} z > -3$.

Подставляя в (21) новые выражения (31)–(32) с учетом явных выражений для гипергеометрий

$$\begin{aligned} {}_3F_2\left(1, 1 + z, 1 + z; \frac{3}{2} + z, 2 + z; 1\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z + 1)_n}{\left(z + \frac{3}{2}\right)_n} \frac{z + 1}{n + z + 1}, \\ {}_3F_2\left(1, 3 + z, 3 + z; \frac{7}{2} + z, 4 + z; 1\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z + 3)_n}{\left(z + \frac{7}{2}\right)_n} \frac{z + 3}{n + z + 3}, \end{aligned} \quad (33)$$

где $(a)_n$ – символ Похгаммера, получим

$$\begin{aligned} R_2^{(\text{лев})}(z) &= -\frac{2(1-z)}{3\left(\frac{1}{2} + z\right)(2+z)(z+1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)_n}{\left(z + \frac{3}{2}\right)_n} \frac{1}{z+n+1} + \frac{z(1-z)}{6\left(\frac{1}{2} + z\right)\left(\frac{3}{2} + z\right)(2+z)\left(\frac{5}{2} + z\right)} \times \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+3)_n}{\left(z + \frac{7}{2}\right)_n} \frac{z+3}{n+z+3} + \frac{(1-z)\left(\frac{4\pi^2}{z} - \frac{\pi^2}{2+z}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} + z\right)}{12\sqrt{\pi}(1+z)(2+z)\Gamma(z)} + \frac{(1-z)}{3z(1+z)(2+z)^2(1+2z)} \times \\ &\times \left(-\frac{72 + 408z + 852z^2 + 749z^3 + 199z^4 - 72z^5 - 36z^6}{2z(1+z)(2+z)(1+2z)(3+2z)} + (2+3z)[\psi(z+1/2) - 3\psi(z) - 2\gamma_E + 2\ln(2)] \right). \end{aligned} \quad (34)$$

Новое выражение для $R_1(z)$ примет вид

$$R_1^{(\text{лев})}(z) = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} R_2^{(\text{лев})}(z). \quad (35)$$

Отметим, что функция (35) имеет в левой полуплоскости полюсы в точках $z = -1, -2, -3, \dots, m, \dots, -1/2, -3/2, \dots, -(2m+1)/2, \dots$.

Особенность выражения (34) заключается в том, что при вычислении вычетов в полюсах необходимо суммирование по n , так как в суммах функция имеет полюсы одинакового порядка при различных значениях n . Суммируя все вычеты, получим

$$A_{2,L}^{(6)}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \operatorname{Res} \left[R_1^{(\text{лев})}(z) t^{-z} \right]_{(z=-m)} + \sum_{m=0}^{\infty} \operatorname{Res} \left[R_1^{(\text{лев})}(z) t^{-z} \right]_{(z=-(2m+1)/2)}. \quad (36)$$

Из-за того, что при вычислении вычетов функции (34) необходимо суммирование по n , выражение (36) имеет очень громоздкий вид, так как содержит двойные суммы. Мы не приводим

здесь окончательный результат, а ограничимся асимптотическим разложением и анализом его области применимости.

Итак, если в формуле (36) ограничиться вкладом полюсов в точках $z = 0, -1, -2, -3, -1/2, -3/2, -5/2$, то приходим к выражению

$$\begin{aligned}
 A_{2,L}^{(6)}(t) = & -\frac{1}{8}\ln(t) + \frac{1}{2}\zeta(3) - \frac{5}{12} + \pi^2 \left(\frac{79}{27} - \frac{13}{18}\pi - \frac{16}{9}\ln(2) \right) \sqrt{t} + \left(\frac{3}{2}\ln^2(t) + \frac{3}{2}\ln(t) + \frac{35}{3} + \pi^2 - 9\zeta(3) \right) t + \\
 & + \pi^2 \left(\frac{35}{12}\pi - \frac{50}{9} \right) t^{\frac{3}{2}} + \left[\frac{1}{2}\ln^3(t) - \frac{27}{8}\ln^2(t) + \left(\frac{107}{8} + \pi^2 - 2\zeta(3) \right) \ln(t) - \frac{4}{9}\pi^2 \ln^2(2) - \frac{5}{54}\pi^4 + \right. \\
 & + \frac{32}{3}\text{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{4}{9}\ln^4(2) + 15\zeta(3) - \frac{9}{4}\pi^2 - \frac{3739}{144} \left. \right] t^2 - \frac{7}{3}\pi^2 \left(\frac{11}{15} - \frac{1}{16}\pi \right) t^{\frac{5}{2}} + \\
 & + \left(\frac{29}{45}\ln^2(t) - \frac{1127}{450}\ln(t) + \frac{42343}{10125} + \frac{58\pi^2}{135} \right) t^3 + O(t^{\frac{7}{2}}) \quad (t \ll 1).
 \end{aligned}
 \tag{37}$$

В работе [10] было получено выражение, которое полностью совпадает с (37), если ограничиться членами до t^2 включительно.

Численные расчеты. В качестве проверки полученных выражений мы сравнили численные значения, определенные по точным аналитическим формулам с вычислениями по исходной формуле (1), и получили отличное согласие. Так, например, при $t = 1/2$ получаемое из точного выражения значение коэффициента при учете в сумме 200 слагаемых равно $A_{2,L}^{(6)}(1/2) \approx 0,0869775151079$, и все приведенные цифры в точности совпадают с численным значением, получаемым непосредственно из (1). При $t = 4$ при учете в суммах 100 слагаемых, получаемое значение $A_{2,L}^{(6)}(4) \approx 0,0170868120248674$ также совпадает с численным расчетом интеграла (1). Отметим, что для получения по точным формулам численных значений с высокой точностью при t , близких к 1, потребуется учесть в суммах большое число слагаемых (тысячи и более). Для получения значения при $t = 1$ трех значащих цифр в сумме (23) потребуется учесть не менее 150 слагаемых, тогда соответствующее значение коэффициента равно $A_{2,L}^{(6)}(1) \approx 0,0528$ – оно согласуется с точным значением (26) до трех значащих цифр.

Далее сравним результаты, получаемые по точным формулам и по асимптотическим (25), (37). При таком сравнении для наглядности мы используем переменную $r = m_\ell / m_L$, т. е. переменная $t = r^2$. Результаты сравнения приведены из рис. 2, a ($r \leq 1$) и b ($r \geq 1$). Сплошная линия – точный расчет, а пунктирная соответствует расчету по приближенным формулам. На рис. 2, a кружочками обозначены значения $A_{2,L}^{(6)}(r)$ при физических массах лептонов.

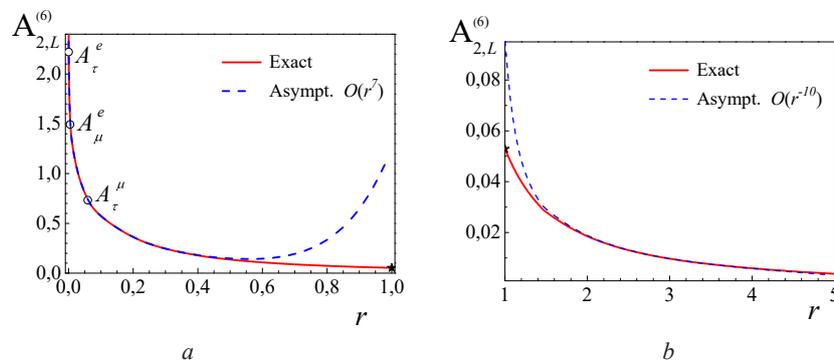


Рис. 2. Сравнение асимптотических разложений с точными расчетами $A_{2,L}^{(6)}(r)$. Сплошная линия – точный результат, пунктирные линии – разложение (37) при $r \ll 1$ (a) и (25) при $r \gg 1$ (b)

Fig. 2. Comparison of the results for the asymptotic expansions with the exact calculations of the coefficient $A_{2,L}^{(6)}(r)$. The solid line is the exact result, the dotted lines are the asymptotic expansion (37) for $r \ll 1$ (a) and (25) for $r \gg 1$ (b)

Как видно из рис. 2, расчеты по приближенной формуле (37) практически совпадают с точными в интервале $0 < r < 0,2$, также получено хорошее согласие между точным расчетом и расчетом по формуле (25) для $2 < r < \infty$.

В таблице приведены результаты численных оценок для физических значений лептонных масс с учетом их погрешностей [13]. Расчеты по асимптотическим формулам (25) и (37) дают результаты, полностью совпадающие с приведенными в таблице значениями $A_{2,L}^{(6)}(r)$.

Численные значения коэффициента $A_{2,L}^{(6)}(t = r^2)$ для лептонов с учетом неопределенности их масс [13]

The numerical values of the coefficient $A_{2,L}^{(6)}(t = r^2)$ for leptons taking into account the uncertainty of their masses [13]

m_ℓ/m_L	m_e/m_τ	m_e/m_μ	m_μ/m_τ	m_τ/m_μ	m_μ/m_e	m_τ/m_e
r	0,000287585(19)	0,00483633169(11)	0,0594635(40)	16,8170(11)	206,7682830(46)	3477,23(23)
A_2	2,221266(1)	1,49367182(1)	0,73239(3)	0,00002955(4)	1,9730051(1) 10^{-6}	6,97(1) 10^{-9}

Заклучение. Получены явные аналитические выражения для поправок к a_L при $r = m_\ell / m_L > 1$ от вклада графа вершины шестого порядка с вставкой поляризации вакуума четвертого порядка. Точные аналитические выражения (19)–(24), несмотря на их громоздкость, позволяют легко проводить численные расчеты с любой наперед заданной точностью. Найдены асимптотические разложения в пределе как малых, так и больших значений отношения масс лептонов $r \ll 1$ и $r \rightarrow \infty$. Полученные разложения сравниваются с соответствующими выражениями, приведенными в литературе, и отмечается полное согласие с ними, если ограничиться меньшим числом слагаемых. Показано, что асимптотические разложения (25) и (37) вполне могут быть использованы для оценки рассматриваемой поправки третьего порядка α^3 к аномальному магнитному моменту для любого лептона (e , μ и τ).

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Международной программы сотрудничества между Республикой Беларусь и ОИЯИ. Автор выражает благодарность О. П. Соловцовой и Л. П. Каптарю за ценные замечания, высказанные в ходе обсуждения работы.

Acknowledgements. This work was supported by the International Program of Cooperation between the Republic of Belarus and JINR. The author expresses his gratitude to O. P. Solovtsova and L. P. Kaptari for the discussion and valuable comments.

Список использованных источников

1. Dirac, P. A. M. The quantum theory of the electron / P. A. M. Dirac // Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character. – 1928. – Vol. 117, № 778. – P. 610–624. <https://doi.org/10.1098/rspa.1928.0023>
2. Determination of the fine-structure constant with an accuracy of 81 parts per trillion / L. Morel, Z. Yao, P. Cladé, S. Guellati-Khélifa // Nature. – 2020. – Vol. 588. – P. 61–65. <https://doi.org/10.1038/s41586-020-2964-7>
3. Measurement of the Positive Muon Anomalous Magnetic Moment to 0.20 ppm / D. P. Aguillard, T. Albahri, D. Allspach [et al.]; Muon $g - 2$ Collaboration // Physical Review Letters. – 2023. – Vol. 131. – Art. ID 161802. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.131.161802>
4. Laporta, S. High-precision calculation of the 4-loop QED contribution to the slope of the Dirac form factor / S. Laporta // Physics Letters B. – 2020. – Vol. 800. – Art. ID 135137. <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2019.135137>
5. Volkov, S. Calculation of the total 10-th order QED contribution to the lepton magnetic moments / S. Volkov // Arxiv [Preprint]. – 2024. – Mode of access: <https://arxiv.org/abs/2404.00649> [hep-ph]; <https://doi.org/10.48550/arXiv.2404.00649>
6. Volkov, S. Calculation of lepton magnetic moments in quantum electrodynamics: A justification of the flexible divergence elimination method / S. Volkov // Physical Review D. – 2024. – Vol. 109. – Art. ID 036012. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.109.036012>
7. Solovtsova, O. P. Lepton anomaly from QED diagrams with vacuum polarization insertions within the Mellin–Barnes representation / O. P. Solovtsova, V. I. Lashkevich, L. P. Kaptari // European Physical Journal Plus. – 2023. – Vol. 138. – Art. ID 212. <https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-023-03834-4>
8. Solovtsova, O. P. Contributions of QED diagrams with vacuum polarization insertions to the lepton anomaly within the Mellin–Barnes representation / O. P. Solovtsova, V. I. Lashkevich, L. P. Kaptari // Physics of Particles and Nuclei. – 2024. – Vol. 55. – P. 725–730. <https://doi.org/10.1134/S1063779624700072>
9. Solovtsova, O. P. Analytical calculations of the tenth order QED radiative corrections to lepton anomalies within the Mellin–Barnes representation / O. P. Solovtsova, V. I. Lashkevich, L. P. Kaptari // Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics. – 2024. – Vol. 51. – Art. ID 055001. <https://doi.org/10.1088/1361-6471/ad2e32>

10. Laporta, S. The analytical contribution of the sixth order graphs with vacuum polarization insertions to the muon ($g-2$) in QED / S. Laporta // *Il Nuovo Cimento A*. – 1993. – Vol. 106. – P. 675–683. <https://doi.org/10.1007/bf02787236>
11. Lautrup, B. E. Calculation of the sixth-order contribution from the fourth-order vacuum polarization to the difference of the anomalous magnetic moments of muon and electron / B. E. Lautrup, E. de Rafael // *Physical Review*. – 1968. – Vol. 174. – P. 1835–1842. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.174.1835>
12. Migraco, J. A. Fourth-order vacuum polarization contribution to the sixth-order electron magnetic moment / J. A. Migraco, E. Remiddi // *Il Nuovo Cimento A*. – 1969. – Vol. 60. – P. 519–529. <https://doi.org/10.1007/bf02757285>
13. CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 2018 / E. Tiesinga, P. J. Mohr, D. B. Newell, B. N. Taylor // *Reviews of Modern Physics*. – 2021. – Vol. 93, № 2. – Art. ID 025010. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.93.025010>

References

1. Dirac P. A. M. The quantum theory of the electron. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 1927, vol. 117, no. 778, pp. 610–624. <https://doi.org/10.1098/rspa.1928.0023>
2. Morel L., Yao Z., Cladé P., Guellati-Khélifa S. Determination of the fine-structure constant with an accuracy of 81 parts per trillion. *Nature*, 2020, vol. 588, pp. 61–65. <https://doi.org/10.1038/s41586-020-2964-7>
3. Aguillard D. P., Albahri T., Allspach D., Anisenkov A., Badgley K., Baeßler S., Bailey I. [et al.] (Muon $g - 2$ Collaboration). Measurement of the Positive Muon Anomalous Magnetic Moment to 0.20 ppm. *Physical Review Letters*, 2023, vol. 131, art. ID 161802. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.131.161802>
4. Laporta S. High-precision calculation of the 4-loop QED contribution to the slope of the Dirac form factor. *Physics Letters B*, 2020, vol. 800, art. ID 135137. <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2019.135137>
5. Volkov S. Calculation of the total 10-th order QED contribution to the lepton magnetic moments. *Arxiv* [Preprint], 2024. Available at: <https://arXiv:2404.00649> [hep-ph]. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2404.00649>
6. Volkov S. Calculation of lepton magnetic moments in quantum electrodynamics: A justification of the flexible divergence elimination method. *Physical Review D*, 2024, vol. 109, art. ID 036012. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.109.036012>
7. Solovtsova O. P., Lashkevich V. I., Kaptari L. P. Lepton anomaly from QED diagrams with vacuum polarization insertions within the Mellin–Barnes representation. *European Physical Journal Plus*, 2023, vol. 138, art. ID 212. <https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-023-03834-4>
8. Solovtsova O. P., Lashkevich V. I., Kaptari L. P. Contributions of QED diagrams with vacuum polarization insertions to the lepton anomaly within the Mellin–Barnes representation. *Physics of Particles and Nuclei*, 2024, vol. 55, pp. 725–730. <https://doi.org/10.1134/S1063779624700072>
9. Solovtsova O. P., Lashkevich V. I., Kaptari L. P. Analytical calculations of the tenth order QED radiative corrections to lepton anomalies within the Mellin–Barnes. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 2024, vol. 51, art. ID 055001. <https://doi.org/10.1088/1361-6471/ad2e32>
10. Laporta S. The analytical contribution of the sixth order graphs with vacuum polarization insertions to the muon ($g-2$) in QED. *Il Nuovo Cimento A*, 1993, vol. 106, pp. 675–683. <https://doi.org/10.1007/bf02787236>
11. Lautrup B. E., Rafael E. Calculation of the sixth-order contribution from the fourth-order vacuum polarization to the difference of the anomalous magnetic moments of muon and electron. *Physical Review*, 1968, vol. 174, pp. 1835–1842. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.174.1835>
12. Migraco J. A., Remiddi E. Fourth-order vacuum polarization contribution to the sixth-order electron magnetic moment. *Il Nuovo Cimento A*, 1969, vol. 60, pp. 519–529. <https://doi.org/10.1007/bf02757285>
13. Tiesinga E., Mohr P. J., Newell D. B., Taylor B. N. CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 2018. *Reviews of Modern Physics*, 2021, vol. 93, no. 2, art. ID 025010. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.93.025010>

Информация об авторе

Лашкевич Василий Иванович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого (пр. Октября, 48, 246029, Гомель, Республика Беларусь). E-mail: lashkevich@gstu.by

Information about the author

Vasil I. Lashkevich – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor of the Higher Mathematics Department, Sukhoi State Technical University of Gomel (Oktyabr'ya Ave., 48, 246746, Gomel, Republic of Belarus). E-mail: lashkevich@gstu.by