ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 519.21+519.6
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2025-61-3-195-202

Поступила в редакцию 27.02.2025
Received 27.02.2025

А. Д. Егоров

Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь

О ВЫЧИСЛЕНИИ МОМЕНТОВ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ЛИНЕЙНЫХ СДУ СКОРОХОДА НА ПРОСТРАНСТВЕ ПУАССОНА

Аннотация. Известное представление решения линейного стохастического дифференциального уравнения Скорохода на пространстве Пуассона со случайными коэффициентами и начальным условием содержит в качестве неизвестного параметра семейство преобразований вероятностного пространства ведущего случайного процесса, определяемого решением интегрального стохастического уравнения. В работе рассматриваются случаи, когда решение этого интегрального уравнения может быть найдено в явном виде. Получены явные решения в двух случаях в классе линейных уравнений Скорохода на пространстве Пуассона со случайными коэффициентами и начальным условием, линейно зависящими от времени первого скачка ведущего процесса. Оцениваются первые три момента решения исходных СДУ и приводится численный пример. Полученные формулы вычисления моментов решения СДУ Скорохода с ведущим процессом Пуассона могут быть использованы при построении приближенных формул для вычисления математических ожиданий нелинейных функционалов от решения, аналогичных рассмотренным ранее для уравнений Скорохода с ведущим винеровским процессом.

Ключевые слова: стохастические дифференциальные уравнения, пространство Пуассона, уравнения Скорохода, моменты решений, приближенные вычисления

Для цитирования. Егоров, А. Д. О вычислении моментов решений одного класса линейных СДУ Скорохода на пространстве Пуассона // А. Д. Егоров // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. – 2025. – Т. 61, № 3. – С. 195–202. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2025-61-3-195-202

Alexandr D. Egorov

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus

ON CALCULATION OF MOMENTS OF THE SOLUTIONS TO ONE CLASS OF LINEAR SKOROHOD SDE ON POISSON SPACE

Abstract. The known representation of the solution of the linear stochastic differential equation of Skorohod on Poisson space with random coefficients and an initial condition contains as an unknown parameter a family of transformations of the probability space of the leading random process determined by the solution of the integral stochastic equation. In this paper, we consider cases when the solution of this integral equation can be found in explicit form. Explicit solutions are obtained in two cases in the class of linear Skorohod equations on Poisson space with random coefficients and an initial condition linearly dependent on the time of the first jump of the leading process. The first three moments of the solution of the original SDEs are estimated and a numerical example is given. The obtained formulas for calculating the moments of the solution of Skorohod SDE with the leading Poisson process can be used in constructing approximate formulas for calculating the mathematical expectations of nonlinear functionals of the solution, similar to those considered earlier for Skorohod equations with the leading Wiener process.

Keywords: stochastic differential equations, Skorohod equations, Poisson space, moments of solutions, approximate evaluation

For citation. Egorov A. D. On calculation of moments of the solutions to one class of linear Skorohod SDE on Poisson space. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2025, vol. 61, no. 3, pp. 195–202 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2025-61-3-195-202

Предварительные сведения. Линейные стохастические дифференциальные уравнения Скорохода со случайными коэффициентными функциями и начальными условиями с ведущим пуассоновским процессом рассматриваются в данном проекте в рамках определений и теории, представленных в работах [1–3] по стохастическому анализу на пуассоновском пространстве. В [1, 2] получено представление решения линейного СДУ Скорохода со случайными коэффициентными функциями и начальным условием с ведущим пуассоновским случайным воздействием. Решение получено в аналитическом виде, однако содержит в качестве неизвестного параметра семейство преобразований вероятностного пространства ведущего случайного процесса, определяемого диффузионным коэффициентом в виде решения вспомогательного стохастического интегрального уравнения. В настоящей статье рассматриваются частные случаи, когда решение этого интегрального уравнения находится в явном виде. Полученные формулы вычисления моментов решения СДУ Скорохода с ведущим процессом Пуассона могут быть использованы при построении приближенных формул для вычисления математических ожиданий нелинейных функционалов от решения, аналогичных рассмотренным в [4–6] для уравнений Скорохода с ведущим винеровским процессом.

Приведем необходимые для последующего изложения основные определения и сведения из упомянутых работ. В качестве вероятностного пространства рассматривается пространство B последовательностей $\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots)$, $\omega_k\in R$, с нормой $\|\omega\|_B=\sup\limits_{k\ge1}\frac{|\omega_k|}{k}$ и вероятностной мерой P такой, что функционалы $\tau_k:B\to R$, $\omega\to\tau_k(\omega)=\omega_k$, $k\ge1$, являются независимыми одинаково распределенными экспоненциальными случайными величинами. Пуассоновский процесс N_t, $t\in R_+$, задается как $N_t=\sum\limits_{k\ge0}1_{[T_k,\infty)}(t)$, $T_k=\sum\limits_{i=1}^{k}\tau_i$, $k\ge1$, – время k-го скачка процесса. Определяются: пространство гладких функционалов

$$S=\{f_n(\tau_1,\ldots,\tau_n):f_n\in C_c^\infty(R_+^n)\},$$

оператор

$$D:L_2(B)\to L_2(B)\otimes H$$

как расширение оператора

$$DF=\left(\partial_k f_n(\tau_1,\ldots,\tau_n)\right),\quad F\in S,\quad \partial_k f_n(x_1,\ldots,x_n)=\frac{\partial}{\partial x_k}f_n(x_1,\ldots,x_n),$$

где H – пространство суммируемых с квадратом последовательностей, и оператор

$$\tilde{D}:S\to L_2(B\times[0,1]),\quad \tilde{D}F=-\sum_{k=1}^{\infty}1_{[T_{k-1},T_k)}(t)\partial_k f_n(\tau_1,\ldots,\tau_n)$$

и его соответствующее расширение на $L_2(B)$. Интеграл Скорохода определяется как оператор $\delta:L^1(B\times[0,1])\to L^1(B)$, сопряженный оператору $\tilde{D}:L_2(B)\to L_2(B\times[0,1])$. Для интеграла Скорохода по центрированному пуассоновскому процессу используются также обозначения $\delta(F)=\int\limits_0^1 F_s\delta\tilde{N}_s$.

В работах [1, 2] для уравнения

$$X_t=X_0-\int_0^t\sigma_sX_s\delta\tilde{N}_s+\int_0^t b_sX_sds,\quad t\in[0,1],\tag{1}$$

где σ_s, b_s – случайные функции, функционально зависящие от пуассоновского процесса; $X_0\in L^\infty(B)$; получено решение в виде

$$X_t=X_0(\phi_{0,t})\exp\left\{\int_0^t\tilde{D}_s\sigma_s(\phi_{s,t})ds+\int_0^t\sigma_s(\phi_{s,t})ds+\int_0^t b_s(\phi_{s,t})ds\right\}\prod_{0\le T_k\le t}\left(1-\sigma_{T_k}(\phi_{T_k,t})\right),\tag{2}$$

где преобразование $\phi_{s,t}$ находится как решение интегрального стохастического уравнения

$$\phi_{s,t}\omega=\omega-\left(\int_s^t i_r(e_k)\sigma_r(\phi_{r,t}\omega)dr\right)_{k\ge1},\quad 0\le s<t\le1,\tag{3}$$

$$i_r(u)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k1_{[T_{k-1},T_k)}(r),\quad u=(u_k),\ (e_k),\quad k=1,2,\ldots,$$

– канонический базис в пространстве квадратично суммируемых последовательностей.

В общем случае получить явное решение уравнения (3) невозможно. Вопрос получения каких-либо аппроксимаций $\phi_{s,t}\omega$ для их использования в (2) до настоящего времени не рассматривается ввиду сложности задачи получения удовлетворительных оценок их точности, подходящих для использования для аппроксимации решения в (1). Поэтому представляет интерес и определенное значение решения этой задачи для конкретных коэффициентных функций уравнения (1). Используя аналогию с линейными СДУ Скорохода с ведущим винеровским процессом, нами рассмотрены частные случаи уравнения (1), для которых решение уравнения (3) может быть найдено в явном виде.

Основные результаты.

1. Пусть $\sigma_s(\omega) = \sigma(s,\omega) = a(s) + \lambda T_1(\omega)$, где $T_1(\omega)$ – время первого скачка процесса $N_t, t \in [0,1]$, $a(s) \in L_2[0,1]$, $\lambda \in R$. В соответствии с приведенным выше определением $T_k(\omega) = \sum_{i=1}^{k} \omega_i(\omega)$, $k \ge 1$, имеем $T_k(\phi_{s,t}\omega) = \sum_{i=1}^{k} (\phi_{s,t}\omega)_i$, и, в частности, $T_1(\phi_{s,t}\omega) = (\phi_{s,t}\omega)_1$. В этом случае уравнение (3) запишется в виде

$$\phi_{s,t}\omega = \omega - \left(\int_s^t i_r(e_k)\big(a(r) + \lambda T_1(\phi_{r,t}\omega)\big) dr \right)_{k \ge 1}, \quad 0 \le s < t \le 1, \tag{4}$$

или (в координатной форме пространства B)

$$(\phi_{s,t}\omega)_k = \omega_k - \int_s^t 1_{[T_{k-1}(\omega), T_k(\omega))}(r)\big(a(r) + \lambda(\phi_{r,t}\omega)_1\big) dr, \quad k \ge 1, \quad 0 \le s < t \le 1. \tag{5}$$

Полученная система уравнений (4) (соответственно (5)) для $(\phi_{s,t}\omega)_k$, $k \ge 1$, решается последовательно в явном виде. При $k = 1$ получаем уравнение

$$(\phi_{s,t}\omega)_1 = \omega_1 - \int_s^t 1_{[0, T_1(\omega))}(r)\big(a(r) + \lambda(\phi_{r,t}\omega)_1\big) dr, \quad 0 \le s < t \le 1,$$

из которого $(\phi_{s,t}\omega)_1$ может быть найдено. В самом деле, для $s \ge T_1(\omega)$ получаем $(\phi_{s,t}\omega)_1 = \omega_1$, а при $s < T_1(\omega)$ получаем линейное уравнение

$$(\phi_{s,t}\omega)_1 = \omega_1 - \int_s^{t \wedge T_1(\omega)} \big(a(r) + \lambda(\phi_{r,t}\omega)_1\big) dr, \quad 0 \le s < t \le 1, \tag{6}$$

относительно $(\phi_{s,t}\omega)_1$, решение которого имеет вид

$$(\phi_{s,t}\omega)_1 = \omega_1 \exp\big\{\lambda\big(s - t \wedge T_1(\omega)\big)\big\} - \int_s^{t \wedge T_1(\omega)} a(r) \exp\{\lambda(s - r)\} dr. \tag{7}$$

В самом деле, после подстановки (7) в правую часть (6) будем иметь

$$\omega_1 - \int_s^{t \wedge T_1(\omega)} a(r) dr - \lambda \int_s^{t \wedge T_1(\omega)} \omega_1 \exp\big\{\lambda\big(r - t \wedge T_1(\omega)\big)\big\} dr -$$
$$-\lambda \int_s^{t \wedge T_1(\omega)} \left(\int_r^{t \wedge T_1(\omega)} a(u) \exp\{\lambda(r - u)\} du \right) dr =$$
$$= \omega_1 - \int_s^{t \wedge T_1(\omega)} a(r) dr - \omega_1 \Big(1 - \exp\big\{\lambda\big(s - t \wedge T_1(\omega)\big)\big\}\Big) + \lambda \int_s^{t \wedge T_1(\omega)} \left(\int_r^{t \wedge T_1(\omega)} a(u) e^{-\lambda u} du \right) e^{\lambda r} dr$$

(интегрируем по частям внешний интеграл в двойном интеграле)

$$-\int_s^{t \wedge T_1(\omega)} a(r) dr + \omega_1 \exp\big\{\lambda\big(s - t \wedge T_1(\omega)\big)\big\} - \int_s^{t \wedge T_1(\omega)} a(r) \exp\{\lambda(s - r)\} dr + \int_s^{t \wedge T_1(\omega)} a(r) dr =$$
$$= \omega_1 \exp\big\{\lambda\big(s - t \wedge T_1(\omega)\big)\big\} - \int_s^{t \wedge T_1(\omega)} a(r) \exp\{\lambda(s - r)\} dr.$$

Далее из (5), используя (7), получаем: если $s < T_1(\omega)$ (и, значит, $s < T_k(\omega)$, $k \ge 2$), то

$$(\phi_{s,t}\omega)_k = \omega_k - \int_s^t 1_{[T_{k-1}(\omega),T_k(\omega))}(r)\big(a(r)+\lambda(\phi_{r,t}\omega)_1\big)dr =$$

$$= \omega_k - \int\limits_{T_{k-1}(\omega)}^{t\wedge T_k(\omega)} \left(a(r) + \omega_1 \exp\{(r - t\wedge T_1(\omega))\} - \int\limits_{r}^{t\wedge T_1(\omega)} a(r_1)\exp\{\lambda(r-r_1)\}dr_1 \right) dr;$$

если $T_{k-1}(\omega) \le s < T_k(\omega),\ \ k \ge 2,$ то

$$(\phi_{s,t}\omega)_k = \omega_k - \int\limits_{s}^{t\wedge T_k(\omega)} \big(a(r) + \lambda\omega_1\big)dr,$$

если $s \ge T_k(\omega),\ \ k \ge 2,$ то $(\phi_{s,t}\omega)_k = \omega_k.$

Заметим, что в рассматриваемом здесь случае $\sigma_s(\omega) = \sigma(s,\omega) = a(s) + \lambda T_1(\omega)$ значение $(\phi_{s,t}\omega)_k$ для $k \ge 2$ не используется.

2. Положим $\sigma_s(\omega) = \sigma(s,\omega) = c(s)T_1(\omega),\ s \in [0,1],$ и рассмотрим уравнение

$$X_t = X_0 - \int\limits_0^t c(s)T_1(\omega)X_s\delta\tilde{N}_s, \quad t \in [0,1].$$

В этом случае уравнение (3) запишется в виде

$$\phi_{s,t}\omega = \omega - \left(\int_s^t i_r(e_k)\big(c(s)T_1(\phi_{r,t}\omega)\big)dr\right)_{k\ge1}, \quad 0 \le s < t \le 1,$$

или (в координатной форме пространства B)

$$(\phi_{s,t}\omega)_k = \omega_k - \lambda\int_s^t 1_{[T_{k-1}(\omega),T_k(\omega))}(r)\big(c(r)(\phi_{r,t}\omega)_1\big)dr, \quad k \ge 1, \quad 0 \le s < t \le 1. \tag{8}$$

Полученная система уравнений (8) для $(\phi_{s,t}\omega)_k,\ k \ge 1,$ решается последовательно для $k = 1,2,\ldots$. При $k = 1$ получаем уравнение

$$(\phi_{s,t}\omega)_1 = \omega_1 - \int_s^t 1_{[0,T_1(\omega))}(r)c(r)(\phi_{r,t}\omega)_1 dr, \quad 0 \le s < t \le 1, \tag{9}$$

которое решается в явном виде. При s ≥ $T_1(\omega)$ решение (9) имеет вид $(\phi_{s,t}\omega)_1 = \omega_1,$ а при s < $T_1(\omega)$ имеем линейное уравнение

$$(\phi_{s,t}\omega)_1 = \omega_1 - \int_s^{t\wedge T_1(\omega)} c(s)(\phi_{r,t}\omega)_1 dr, \quad 0 \le s < t \le 1, \tag{10}$$

решение которого имеет вид

$$(\phi_{s,t}\omega)_1 = \omega_1 \exp\left\{-\int\limits_s^{t\wedge T_1} c(r)dr\right\}. \tag{11}$$

В самом деле, подставим полученное выражение (11) в правую часть (10):

$$\omega_1 - \omega_1\int_s^{t\wedge T_1(\omega)} c(r)\exp\left\{-\lambda\int\limits_r^{t\wedge T_1} c(\tau)d\tau\right\}dr = \omega_1 - \omega_1\int_s^{t\wedge T_1(\omega)} \frac{d}{dr}\exp\left\{-\int\limits_r^{t\wedge T_1} c(\tau)d\tau\right\}dr =$$

$$= \omega_1 - \omega_1\lambda\int_s^{t\wedge T_1(\omega)} \frac{1}{\lambda}\frac{d}{dr}\exp\left\{-\lambda\int\limits_r^{t\wedge T_1}(1-\tau)d\tau\right\}dr = \omega_1 - \omega_1\left(1 - \exp\left\{-\int\limits_s^{t\wedge T_1} c(\tau)d\tau\right\}\right) = (\phi_{s,t}\omega)_1.$$

Вычислим далее $\int\limits_0^t \tilde{D}_s\sigma_s(\phi_{s,t})ds$ и $\int\limits_0^t \sigma_s(\phi_{s,t})ds$ из (2). При $s < T_1(\omega) < t$ имеем

$$\tilde{D}_s\sigma_s(\phi_{s,t}\omega) = \tilde{D}_s\big(c(s)T_1\big)(\phi_{s,t}\omega)_1 = \begin{cases} -1_{[0,T_1)}(s)c(s), \text{ если } s < T_1(\omega), \\ 0, \text{ если } s \ge T_1(\omega). \end{cases}$$

Отсюда получаем

$$\int_0^t \tilde{D}_s \sigma_s\left((\phi_{s,t})_1\right) ds = -\int_0^{T_1(\omega)} c(s) ds,$$

$$\int_0^t c(s)\sigma_s\left((\phi_{s,t})_1\right) ds = \int_0^{T_1(\omega)} c(s)\sigma_s\left((\phi_{s,t})_1\right) ds + \int_{T_1(\omega)}^t c(s)\sigma_s\left((\phi_{s,t})_1\right) ds =$$

$$= \omega_1 \int_0^{T_1(\omega)} c(s)\exp\left\{-\int_s^{T_1(\omega)} c(r)dr\right\} ds + \omega_1 \int_{T_1(\omega)}^t c(s)ds = \omega_1\left(1-\exp\left\{-\int_0^{T_1(\omega)} c(r)dr\right\}\right) + \omega_1 \int_{T_1(\omega)}^t c(s)ds.$$

При $T_1(\omega) \geq t$ имеем

$$(\phi_{s,t}\omega)_1 = \omega_1 \exp\left\{-\int_s^t c(r)dr\right\},$$

$$\tilde{D}_s \sigma_s\left((\phi_{s,t}\omega)_1\right) = -1_{[0,T_1)}(s)c(s), \quad \int_0^t \tilde{D}_s \sigma_s(\phi_{s,t}) ds = -\int_0^t c(s)ds,$$

$$\int_0^t \sigma_s\left((\phi_{s,t})_1\right) ds = \omega_1 \int_0^t c(s)\exp\left\{-\int_s^t c(r)dr\right\} ds = \omega_1\left(1-\exp\left\{-\int_0^t c(r)dr\right\}\right).$$

Подставляя полученные выражения для $\int_0^t \tilde{D}_s \sigma_s(\phi_{s,t}) ds$ и $\int_0^t \sigma_s(\phi_{s,t}) ds,$ с учетом

$$\prod_{0\leq T_k\leq t}\left(1+\sigma_{T_k}(\phi_{T_k,t})\right) = \prod_{k=1}^{N_t}\left(1-\sigma_{T_k}(\phi_{T_k,t})\right) = \prod_{k=1}^{N_t}\left(1-c(T_k)(\phi_{T_k,t})_1\right) = \prod_{k=1}^{N_t}\left(1-c(T_k)T_1\right)$$

получаем представление решения X_t при $T_1(\omega) < t$:

$$X_t = X_0(\phi_{0,t})\exp\left\{-\int_0^t c(s)ds + \omega_1\left(1-\exp\left\{-\int_0^{T_1(\omega)} c(r)dr\right\}\right) + \omega_1 \int_{T_1(\omega)}^t c(s)ds\right\} \prod_{k=1}^{N_t}\left(1+c(T_k)T_1\right).$$

При $T_1(\omega) \geq t$ имеем

$$X_t = X_0(\phi_{0,t})\exp\left\{-\int_0^t c(s)ds + \omega_1\left(1-\exp\left\{-\int_0^t c(r)dr\right\}\right)\right\},$$

где мы учли, что $N_t = 0$ при $T_1(\omega) \geq t$.

3. Численные результаты получены для уравнения с коэффициентной функцией $\sigma_s(\omega) = \lambda T_1(\omega)$, где $T_1(\omega)$ – время первого скачка процесса N_t, $t \in [0,1]$, $\lambda \in [0,1]$. В этом случае уравнение (5) при $k = 1$ запишется в виде

$$(\phi_{s,t}\omega)_1 = \omega_1 - \lambda \int_s^t 1_{[0,T_1(\omega))}(r)(\phi_{r,t}\omega)_1 dr, \quad 0 \leq s < t \leq 1,$$

решение которого имеет вид $(\phi_{s,t}\omega)_1 = \omega_1 \exp\left\{\lambda\left(s - t \wedge T_1(\omega)\right)\right\}$ при $s < T_1(\omega)$, $(\phi_{s,t}\omega)_1 = \omega_1$ при $s \geq T_1(\omega)$.

В случае $T_1(\omega) < t$ имеем

$$\tilde{D}_s \sigma_s\left((\phi_{s,t})_1\right) = -\lambda 1_{[0,T_1(\omega))}(s), \quad \int_{[0,T_1)} \tilde{D}_s \sigma_s\left((\phi_{s,t})_1\right) ds = -\lambda T_1(\omega),$$

$$\int_{[0,T_1)} \sigma_s\left((\phi_{s,t})_1\right) ds = \omega_1\left(1-e^{-\lambda T_1(\omega)}\right), \quad \int_{T_1}^t \sigma_s\left((\phi_{s,t})_1\right) ds = \lambda\omega_1(t-T_1).$$

Если $T_1(\omega) \geq t$, то

$$(\phi_{s,t}\omega)_1 = \omega_1 \exp\{\lambda(s-t)\}, \quad \tilde{D}_s \sigma_s\left((\phi_{s,t})_1\right) = -\lambda 1_{[0,T_1)}(s),$$

$$\int_0^t \tilde{D}_s \sigma_s\left((\phi_{s,t})_1\right) ds = -\lambda t, \quad \int_0^t \sigma_s\left((\phi_{s,t})_1\right) ds = \omega_1(1-e^{-\lambda t}).$$

Отсюда с учетом

$$\prod_{0\le T_k\le t}\left(1-\sigma_{T_k}(\phi_{T_k,t})\right)=\prod_{k=1}^{N_t}\left(1-\sigma_{T_k}(\phi_{T_k,t})\right)=\prod_{k=1}^{N_t}\left(1-\lambda(\phi_{T_k,t})_1\right)=\prod_{k=1}^{N_t}(1-\lambda\omega_1)=(1-\lambda\omega_1)^{N_t},$$

(в данном случае $(\phi_{s,t}\omega)_1=\omega_1$ при $s\ge T_1(\omega)$ и, значит, $(\phi_{T_k,t}\omega)_1=\omega_1$ при $k\ge 2$) решение уравнения

$$X_t=X_0-\lambda\int_0^t T_1(\omega)X_s\delta\tilde{N}_s(\omega),\quad X_0(\omega)=T_1(\omega),\quad t\in[0,1],$$

при $T_1(\omega)<t$ имеет вид

$$X_t=X_0\left((\phi_{0,t})_1\right)\exp\left\{-\lambda T_1+\omega_1(1-e^{-\lambda T_1})+\lambda\omega_1(t-T_1)\right\}(1-\lambda T_1)^{N_t},$$

а при $T_1(\omega)\ge t$ имеет вид

$$X_t=X_0\left((\phi_{0,t})_1\right)\exp\left\{-\lambda t+\omega_1(1-e^{-\lambda t})\right\}.$$

Описание алгоритма вычисления моментов от решения. Рассматриваем частный случай $\sigma_s(\omega)=\lambda T_1(\omega)$ и $X_0(\phi_{0,t})=1$. Введем обозначения:

$$f_1(T_1,N_t)=\exp\left\{-\lambda t+\omega_1(1-e^{-\lambda t})\right\}\ \text{для}\ T_1(\omega)\ge t,$$

$$f_2(T_1,N_t)=\exp\left\{-\lambda T_1+\omega_1(1-e^{-\lambda t})+\lambda\omega_1(t-T_1)\right\}(1-\lambda T_1)^{N_t}\ \text{для}\ T_1(\omega)<t.$$

Тогда имеем

$$E[X_t]=E\left[X_t 1_{\{T_1\ge t\}}\right]+E\left[X_t 1_{\{T_1<t\}}\right]=E\left[f_1(T_1,N_t)1_{\{T_1\ge t\}}\right]+E\left[f_2(T_1,N_t)1_{\{T_1<t\}}\right]=$$
$$=E\left[f_1(T_1,N_t)1_{\{N_t=0\}}\right]+\sum_{k=1}^{\infty}E\left[f_2(T_1,N_t)1_{\{N_t=k\}}\right],\quad t\in[0,1],\tag{12}$$

где

$$E\left[f_1(T_1,N_t)1_{\{N_t=0\}}\right]=E\left[\exp\left\{-\lambda t+\omega_1(1-e^{-\lambda t})\right\}1_{\{\omega_1>t\}}\right],\tag{13}$$

$$E\left[f_2(T_1,N_t)1_{\{N_t=k\}}\right]=E\left[\exp\left\{-\lambda T_1+\omega_1(1-e^{-\lambda t})+\lambda\omega_1(t-T_1)\right\}(1-\lambda T_1)^k 1_{[T_k,T_{k-1})}1_{\{T_1<t\}}\right].\tag{14}$$

Заметим, что N_t имеет конечное число скачков на [0,1], так что сумма в (12) конечна с вероятностью 1.

Математическое ожидание в (13) вычисляется непосредственно по экспоненциальному распределению величины ω_1. Для вычисления математического ожидания в (14) используем формулу

$$E\left[f(T_1,\dots,T_n)\right]=\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty e^{-u}f(u_1,\dots,u_n)\,1_{\{0\le u_1<\cdots<u_n\}}du_1\cdots du_n,$$

где $T_1,\dots,T_n$ – времена скачка $T_k=\sum_{i=1}^k\tau_i$, $k\ge 1$, пуассоновского процесса N_t с интенсивностью 1, $f(u_1,\dots,u_n)$ – интегрируемая функция, вытекающую из

$$E[f(\tau_1,\dots,\tau_n)]=\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty e^{-(v_1+\cdots+v_n)}f(v_1,\dots,v_n)\,dv_1\cdots dv_n,$$

где $\tau_1,\dots,\tau_n$ – независимые одинаково распределенные экспоненциальные случайные величины.

Численные результаты.

П р и м е р. $\sigma_s(\omega)=T_1(\omega)$, $X_0(\phi_{0,t})=1$. Приведенные ниже графики, описывающие поведение трех первых моментов решения уравнения, построены по численным результатам, полученным при учете вкладов слагаемых при k = 1, 2, 3 с использованием стандартного кратного интегрирования из Wolfram Mathematica.

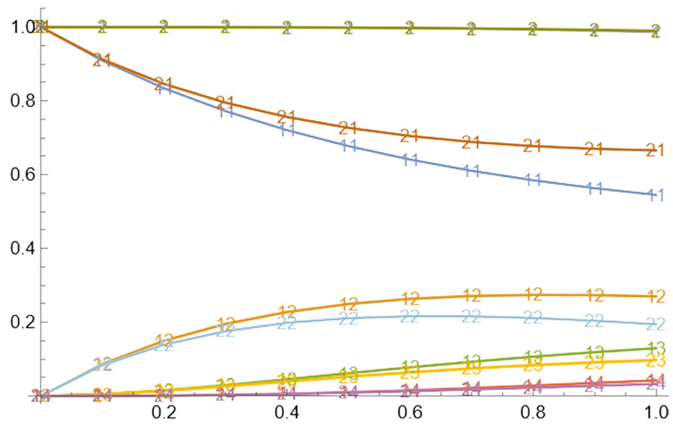

Рис. 1. Приближенные значения первого момента $M_1(t)=E[X_t]$, $t\in[0,1]$, при $k\le 3$ в (12) для $\lambda=0{,}5$, $\lambda=0{,}9$ и вклады слагаемого $E[f_1(T_1,N_t)1_{\{N_t=0\}}]$ и первых трех слагаемых суммы (обозначены соответственно $1k$ и $2k$, $k=1,2,3,4$)

Fig. 1. Approximate values of the first moment $M_1(t)=E[X_t]$, $t\in[0,1]$, at $k\le 3$ in (12) at $\lambda=0.5$, $\lambda=0.9$, and the contributions of the term $E[f_1(T_1,N_t)1_{\{N_t=0\}}]$ and contributions of the first three terms of the sum (designated accordingly $1k$ and $2k$, $k=1,2,3,4$)

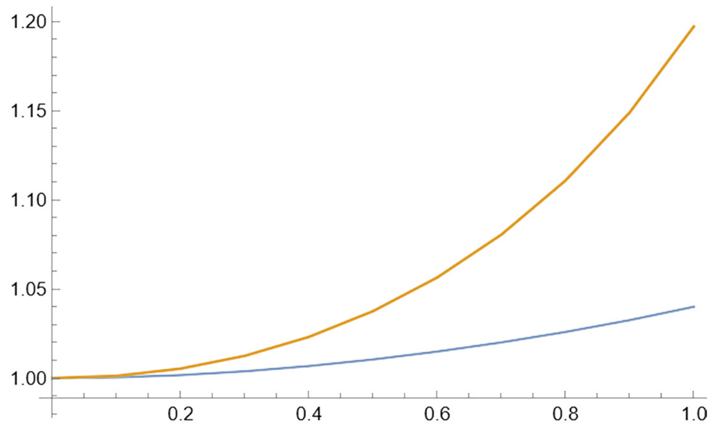

Рис. 2. Приближенные значения моментов $M_2(t)=E[X_t^2]$ и $M_3(t)=E[X_t^3]$ при $k\le 3$ и $\lambda=0{,}2$ в (12)

Fig. 2. Approximate values of moments $M_2(t)=E[X_t^2]$ and $M_3(t)=E[X_t^3]$ at $k\le 3$ and $\lambda=0.2$ in (12)

На рис. 1 для иллюстрации величин вкладов отдельных слагаемых показаны графики их изменения на временном отрезке [0,1] при вычислении первого момента. Полученные приближенные значения первого момента для $\lambda=0{,}5$, $\lambda=0{,}9$ на графике неразличимы (не зависят от λ), что соответствует факту равенства первого момента решения математическому ожиданию начального условия $X_0(\phi_{0,t})=1$.

На рис. 2 приведены приближенные значения второго и третьего моментов при $\lambda=0{,}2$ (для $\lambda\le 3$ эти моменты конечны для всех $t\in[0,1]$). Заметим, например, что при $\lambda=0{,}4$ полученное приближенное значение $M_1(0{,}9)\approx 3{,}66391$, в то время как уже при $\lambda=0{,}450516$ $M_1(0{,}9)\approx 209217$.

Список использованных источников

1. Privault, N. Linear Skorohod stochastic differential equations on Poisson space / N. Privault // Stochastic Analysis and Related Topics V / eds.: Körezlioğlu H., Øksendal B., Üstünel A. S. Stochastic. – Boston: Birkhäuser, 1996 – P. 237–253. – (Progress in Probability; vol 38). https://doi.org/10.1007/978-1-4612-2450-1_12

2. Privault, N. Hypothesis testing and Skorohod stochastic integration / N. Privault // Journal of Applied Probability. – 2000. – Vol. 37, № 2. – P. 560–574. https://doi.org/10.1239/jap/1014842559

3. Privault, N. Chaotic and variational calculus in discrete and continuous time for the Poisson processes / N. Privault // Stochastics and Stochastics Reports. – 1994. – Vol. 51, № 1–2. – P. 83–109. https://doi.org/10.1080/17442509408833946

4. Егоров, А. Д. Приближенные формулы для вычисления математического ожидания функционалов от решения линейного уравнения Скорохода / А. Д. Егоров // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. – 2021. – Т. 57, № 2. – С. 198–205. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-2-198-205

5. Egorov, A. D. On the calculation of functionals from the solution to linear SDE with first-order chaos in coefficients / A. D. Egorov // Computer Data Analysis and Modeling: Stochastic and Data Science: Proceedings of the XIII International Conference, Minsk, Sept. 6–10, 2022. – Minsk, 2022. – P. 26–30.

6. Егоров, А. Д. О вычислении функционалов от решения линейного СДУ Скорохода с хаосом первого порядка в коэффициентах / А. Д. Егоров // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. – 2023. – Т. 59, № 3. – С. 201–212. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2023-59-3-201-212

References

1. Privault N. Linear Skorohod stochastic differential equations on Poisson space. Körezlioğlu H., Øksendal B., Üstünel A. S. (eds). *Stochastic Analysis and Related Topics V. Progress in Probability*, *vol. 38*. Boston, Birkhäuser, 1996, pp. 237–253. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-2450-1_12

2. Privault N. Hypothesis testing and Skorohod stochastic integration. *Journal of Applied Probability*, 2000, vol. 37, no. 2, pp. 560–574. https://doi.org/10.1239/jap/1014842559

3. Privault N. Chaotic and variational calculus in discrete and continuous time for the Poisson processes. *Stochastics and Stochastics Reports*, 1991, vol. 51, no. 1–2, pp. 83–109. https://doi.org/10.1080/17442509408833946

4. Egorov A. D. Approximate formulas for the evaluation of the mathematical expectation of functionals from the solution to the linear Skorohod equation. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2021, vol. 57, no. 2, pp. 198–205 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-2-198-205

5. Egorov A. D. On the calculation of functionals from the solution to linear SDE with first-order chaos in coefficients. *Computer Data Analysis and Modeling: Stochastic and Data Science. Proceedings of the XIII International Conference, Minsk, Sept. 6–10, 2022*. Minsk, 2022, pp. 26–30.

6. Egorov A. D. On the calculation of functionals from the solution of the linear Skorohod SDE with first-order chaos in the coefficients. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2023, vol. 59, no. 3, pp. 201–212 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2023-59-3-201-212

Информация об авторе

Егоров Александр Дмитриевич – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: egorov@im.bas-net.by

Information about the author

Alexandr D. Egorov – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Chief Researcher, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: egorov@im.bas-net.by