

ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 519.6

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2025-61-3-231-243>

Поступила в редакцию 18.12.2024
Received 18.12.2024

М. М. Чуйко¹, О. М. Королёва²

¹Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь

²Белорусский национальный технический университет, Минск, Республика Беларусь

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ КОНВЕКЦИИ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В НЕРЕГУЛЯРНЫХ ОБЛАСТЯХ

Аннотация. Построен конечно-разностный вычислительный алгоритм решения уравнений конвекции несжимаемой жидкости в приближении Буссинеска, заданных в двумерных нерегулярных областях с использованием обобщенных криволинейных координат. Физическая область отображается в расчетную область (единичный квадрат) в пространстве обобщенных координат. Уравнения смешанной конвекции в естественных переменных записываются в обобщенных криволинейных координатах и аппроксимируются в расчетной области на равномерных неразнесенных разностных сетках. Построенный вычислительный алгоритм основан на разностных схемах расщепления. Полученные результаты отображаются на неравномерную разностную сетку, построенную в физической области. Приведены результаты решения краевых задач тепло- и массопереноса несжимаемой жидкости в областях сложной формы.

Ключевые слова: смешанная конвекция, обобщенные криволинейные координаты, конечно-разностные методы, разностные схемы расщепления

Для цитирования. Чуйко, М. М. Численное решение двумерных задач конвекции несжимаемой жидкости в нерегулярных областях / М. М. Чуйко, О. М. Королёва // Весті Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. – 2025. – Т. 61, № 3. – С. 231–243. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2025-61-3-231-243>

Mikhail M. Chuiko¹, Olga M. Korolyova²

¹Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus

²Belarusian National Technical University, Minsk, Republic of Belarus

NUMERICAL SOLUTION OF TWO-DIMENSIONAL PROBLEMS OF INCOMPRESSIBLE FLUID CONVECTION IN IRREGULAR DOMAINS

Abstract. A finite-difference computational algorithm for solving the equations of convective flows of incompressible fluid in two-dimensional irregular domains using generalized curvilinear coordinates is constructed. The physical domain is mapped into a computational domain (unit square) in the space of generalized coordinates. The equations of mixed convection in primitive variables are written in generalized curvilinear coordinates and approximated in the computational domain on uniform non-staggered grids. The constructed computational algorithm is based on splitting difference schemes. The obtained results are mapped onto a nonuniform difference grid in the physical domain. The results of solving boundary value problems of heat and mass transfer of incompressible fluid in domains of complex shape are presented.

Keywords: mixed convection, generalized curvilinear coordinates, finite-difference methods, splitting difference schemes

For citation. Chuiko M. M., Korolyova O. M. Numerical solution of two-dimensional problems of incompressible fluid convection in irregular domains. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2025, vol. 61, no. 3, pp. 231–243 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2025-61-3-231-243>

Введение. Рассматривается модель конвекции несжимаемой жидкости в приближении Буссинеска, которая выводится из общих уравнений Навье – Стокса сжимаемой жидкости в предположении, что плотность жидкости не зависит от давления, но может зависеть от температуры. При этом отклонения плотности от среднего значения настолько малы, что это отклонение учитывается лишь в члене с подъемной силой уравнения движения [1].

Основу уравнений конвекции составляют уравнения Навье – Стокса. Методы численного решения уравнений конвекции, как и уравнений Навье – Стокса, делятся на две основные группы.

Первая связана с введением функции тока и вихря скорости, исключением из уравнений давления и решением уравнений в переменных «функция тока, вихрь» [2, 3]. При необходимости давление восстанавливается из уравнения Пуассона, полученного из уравнений движения.

Вторую группу составляют методы решения уравнений Навье – Стокса в естественных переменных «скорость – давление». При использовании естественных переменных выделяют две группы методов: использующие разнесенные сетки (разновидности метода «маркеров и ячеек» и семейство алгоритмов SIMPLE) и методы, которые используют совмещенные (неразнесенные) сетки, предполагающие, что значения скорости и давления определяются в одних и тех же узлах – в центрах контрольных объемов (ячеек) [4]. Большая часть вычислительных алгоритмов разработана для решения задач в регулярных областях (границы области совпадают с координатными линиями используемой системы координат).

Один из подходов к решению дифференциальных уравнений в сложных областях состоит в построении конечно-разностных методов с использованием декартовых разностных сеток: метод фиктивных областей (fictitious domains method), метод скошенных ячеек (cut-cell method) [5], метод погруженной границы (immersed boundary method) [6], метод погруженных интерфейсов (immersed interface method) [7]. Однако при использовании декартовых сеток возникает необходимость применения сложных интерполяций при аппроксимации краевых условий на криволинейной границе, что может приводить к локальной потере точности численного решения.

Другим подходом к приближенному решению уравнений в частных производных в областях сложной формы является введение обобщенных криволинейных координат, отображающих исходную область в физическом пространстве в параметрический квадрат в расчетном пространстве криволинейных координат [8, 9]. Исходные уравнения преобразуются к новым независимым переменным и решаются в расчетном пространстве на прямоугольной разностной сетке, что позволяет использовать классические методы теории разностных схем [10, 11].

Введение обобщенных координат на дискретном уровне предполагает построение в нерегулярной области согласованной с границей области разностной сетки [12], являющейся преобразованием прямоугольной сетки в параметрическом квадрате. Координаты узлов построенной сетки используются для аппроксимации входящих в полученные уравнения метрических коэффициентов. Отклонение от ортогональности и равномерности разностной сетки в физической области может влиять на гладкость и точность численного решения.

Обобщенные криволинейные координаты, согласованные с границами двумерных нерегулярных областей, использовались в [13, 14] для построения конечно-разностных методов второго порядка по пространственным переменным для решения смешанных краевых задач для уравнения Пуассона и теплопроводности.

В [15] для расчета нестационарных несжимаемых течений жидкости в прямоугольной области в естественных переменных на неразнесенных сетках предложен способ регуляризации разностного уравнения неразрывности, устраняющий осцилляции решения, характерные для неразнесенных сеток. В [16] предложены разностные схемы для решения уравнений Навье – Стокса в нерегулярных областях на неразнесенных сетках, основанные на аппроксимациях второго порядка в целых узлах. При построении вычислительного алгоритма использовалась аппроксимация диффузионного оператора со смешанными производными, а для устранения осцилляций дискретного решения в уравнение неразрывности вводился регуляризирующий член, содержащий давление. Предложенный в данной работе вычислительный алгоритм для расчета смешанной (естественной и/или вынужденной) конвекции несжимаемой жидкости в нерегулярных областях является обобщением результатов, полученных в [16] для случая изотермических течений.

Для решения систем девятиточечных уравнений с симметричной матрицей при определении поправки давления использовался метод сопряженных градиентов, а для решения несимметричных задач при определении скоростей и температур – модифицированный сильно неявный метод.

Вычислительный алгоритм опробован на ряде тестовых задач и показал свою эффективность при получении как стационарных, так и нестационарных решений. Проведено сравнение полученных в ходе численных экспериментов параметров установившихся течений с известными в литературе результатами решения тестовых задач.

Постановка задачи. Рассмотрим уравнение конвекции – диффузии в двумерной нерегулярной области Ω_{xy} с граничными условиями первого и второго рода

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + C(\mathbf{v})\mathbf{v} + \text{grad } p - \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{v} - \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} \mathbf{e}\theta = \mathbf{f}(x, y, t), \quad (x, y) \in \Omega_{xy}, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + C(\mathbf{v})\theta - \frac{1}{\text{Pr Re}} \Delta \theta = 0, \quad (3)$$

$$\mathbf{v}(x, y, 0) = \mathbf{v}^0(x, y), \quad \theta(x, y, 0) = \theta^0(x, y), \quad (x, y) \in \Omega_{xy}, \quad (4)$$

$$\mathbf{v}(x, y, t) = \mathbf{v}_0(x, y, t), \quad (x, y) \in \partial\Omega_{xy}, \quad t > 0, \quad (5)$$

$$\theta(x, y, t)|_{\Gamma_1} = \theta_0(x, y, t), \quad \Gamma_1 \in \partial\Omega_{xy}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_2} = \mu(x, y, t), \quad \Gamma_2 \in \partial\Omega_{xy} - \Gamma_1, \quad (7)$$

где $\mathbf{v} = (u, v)^T$; p, θ – скорость, давление и температура; $\partial\Omega_{xy}$ – граница области Ω_{xy} ; $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль к границе; $C(\mathbf{v}), \Delta$ – конвективный и диффузионный операторы; $\text{Re}, \text{Pr}, \text{Gr}$ – числа Рейнольдса, Прандтля и Грасгофа соответственно. Уравнения (1)–(5) используются для описания как естественной, так и вынужденной конвекции. Краевые условия (6)–(7) могут соответствовать, например, заданному распределению температуры на участке Γ_1 границы $\partial\Omega_{xy}$ и заданному тепловому потоку на участке Γ_2 .

Будем использовать кососимметричную форму записи конвективных слагаемых в виде полусуммы дивергентной и недивергентной форм

$$C(\mathbf{v})u = \frac{1}{2}((\mathbf{v} \cdot \text{grad})u + \text{div}(\mathbf{v}u)).$$

В дифференциальном случае, при выполнении условия несжимаемости (2), дивергентная, недивергентная и кососимметричная формы конвективных слагаемых эквивалентны.

Для однозначного определения давления используется дополнительное условие

$$\int_{\Omega_{xy}} p(x, y, t) dx dy = 0. \quad (8)$$

Численное решение задач в областях сложной формы удобно искать в криволинейной системе координат, координатные линии которых совпадают с границами области [8, 9]. Введем в рассмотрение некоторое расчетное пространство $\Omega_{\xi\eta}$, в котором определена криволинейная система координат (ξ, η) . Предположим, что существует невырожденное взаимно однозначное преобразование $\xi = \xi(x, y), \eta = \eta(x, y)$, отображающее физическую область сложной формы Ω_{xy} в прямоугольник $\Omega_{\xi\eta} = \{(\xi, \eta): 0 < \xi, \eta < 1\}$ в плоскости обобщенных криволинейных координат.

Начально-краевая задача (1)–(7) запишется в виде

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + C_{\xi\eta}(\mathbf{v})\mathbf{v} + \text{grad}_{\xi\eta} p - \frac{1}{\text{Re}} \Delta_{\xi\eta} \mathbf{v} - \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} \mathbf{e}\theta = \tilde{\mathbf{f}}(\xi, \eta, t), \quad (\xi, \eta) \in \Omega_{\xi\eta}, \quad t > 0, \quad (9)$$

$$\text{div}_{\xi\eta} \mathbf{v} = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + C_{\xi\eta}(\mathbf{v})\theta - \frac{1}{\text{Pr Re}} \Delta_{\xi\eta} \theta = 0, \quad (11)$$

$$\mathbf{v}(\xi, \eta, 0) = \tilde{\mathbf{v}}^0(\xi, \eta), \quad \theta(\xi, \eta, 0) = \tilde{\theta}^0(\xi, \eta), \quad (\xi, \eta) \in \Omega_{\xi\eta}, \quad (12)$$

$$\mathbf{v}(\xi, \eta, t) = \tilde{\mathbf{v}}_0(\xi, \eta, t), \quad t > 0, \quad (13)$$

$$\theta(\xi, \eta, t)|_{\Gamma_1} = \tilde{\theta}_0(\xi, \eta, t), \quad \Gamma_1 \in \partial\Omega_{\xi\eta}, \quad (14)$$

$$B_{11} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + B_{12} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = g_{22}^{1/2} \tilde{\mu}(\xi, \eta, t), \quad (\xi, \eta) \in \Gamma_{2,\xi\eta}, \quad \xi = 0, 1, \quad (15)$$

$$B_{21} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + B_{22} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = g_{11}^{1/2} \tilde{\mu}(\xi, \eta, t), \quad (\xi, \eta) \in \Gamma_{2,\xi\eta}, \quad \eta = 0, 1, \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} C_{\xi\eta}(\mathbf{v})u &= \frac{1}{2}((\mathbf{v} \cdot \text{grad}_{\xi\eta})u + \text{div}_{\xi\eta}(\mathbf{v}u)), \\ \text{grad}_{\xi\eta} p &= \frac{1}{|J^{-1}|} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial p}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial p}{\partial \eta}, -\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial p}{\partial \eta} \right), \\ \text{div}_{\xi\eta} \mathbf{v} &= \frac{1}{|J^{-1}|} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} u \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} u \right) - \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} v \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} v \right) \right), \\ \Delta_{\xi\eta} u &= \frac{1}{|J^{-1}|} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \left(B_{11} \frac{\partial u}{\partial \xi} + B_{12} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(B_{21} \frac{\partial u}{\partial \xi} + B_{22} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \right), \\ B_{11} &= \frac{g_{22}}{|J^{-1}|}, \quad B_{12} = B_{21} = -\frac{g_{12}}{|J^{-1}|}, \quad B_{22} = \frac{g_{11}}{|J^{-1}|}, \\ g_{11} &= \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2, \quad g_{12} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta}, \quad g_{22} = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2, \\ |J^{-1}| &= \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta}, \end{aligned}$$

$$\tilde{\mathbf{f}}(\xi, \eta, t) = \mathbf{f}(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta), t), \quad \tilde{u}^0(\xi, \eta) = u^0(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)), \quad \tilde{\mu}(\xi, \eta, t) = \mu(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta), t).$$

Для сокращения выкладок запишем задачу (9)–(10) в виде

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} + C_{\xi\eta}(\mathbf{v})\mathbf{v} + P\mathbf{v} + N\mathbf{v} - \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} \mathbf{e}\theta = \tilde{\mathbf{f}}, \quad t > 0, \quad (17)$$

где

$$P\mathbf{v} = \text{grad}_{\xi\eta} p, \quad N\mathbf{v} = -\frac{1}{\text{Re}} \Delta_{\xi\eta} \mathbf{v}.$$

Разностная схема, аппроксимация краевых условий. Введение обобщенных координат на дискретном уровне предполагает построение в нерегулярной области Ω_{xy} разностной сетки, согласованной с границей $\partial\Omega_{xy}$, которая является прообразом равномерной по обоим направлениям прямоугольной сетки в параметрическом квадрате $\Omega_{\xi\eta}$. В расчетной прямоугольной области $\Omega_{\xi\eta}$ введем равномерную по обоим направлениям разностную сетку $\bar{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h$,

$$\bar{\omega}_h = \{(\xi_i, \eta_j), \quad \xi_i = ih_\xi, \quad i = \overline{0, N}, \quad \xi_N = 1, \quad \eta_j = jh_\eta, \quad j = \overline{0, M}, \quad \eta_M = 1\},$$

а на отрезке $[0, T]$ – равномерную временную сетку с постоянным шагом τ

$$\bar{\omega}_\tau = \{t_n = n\tau, \quad n = 0, 1, \dots, N_0, \quad \tau N_0 = T\},$$

где ω_h – множество внутренних узлов, а γ_h – множество граничных узлов. Будем использовать стандартные обозначения теории разностных схем [17]:

$$y = y_i^n = y(x_i, t_n), \quad \hat{y} = y_i^{n+1} = y(x_i, t_{n+1}), \quad y^{(\sigma)} = \sigma \hat{y} + (1 - \sigma)y,$$

$$y_{\bar{x},i} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h}, \quad y_{x,i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}, \quad y_{0,x} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \quad y_{t,i} = \frac{\hat{y}_i - y_i}{\tau}.$$

На разностной сетке $\omega_{h\tau} = \omega_h \times \omega_\tau$ метрические коэффициенты, якобиан обратного преобразования $|J^{-1}|$, а также операторы grad_h и div_h аппроксимируются с использованием центральных разностей второго порядка внутри области $\Omega_{\xi\eta}$ и направленных разностей первого порядка на границе $\partial\Omega_{\xi\eta}$:

$$g_{11,h} = \begin{cases} \left(x_0\right)_\xi^2 + \left(y_0\right)_\xi^2, & (\xi, \eta) \in \omega_{h\tau}, \\ (x_\xi)^2 + (y_\xi)^2, & \xi = 0, \\ (x_{\bar{\xi}})^2 + (y_{\bar{\xi}})^2, & \xi = 1, \end{cases} \quad g_{22,h} = \begin{cases} \left(x_0\right)_\eta^2 + \left(y_0\right)_\eta^2, & (\xi, \eta) \in \omega_{h\tau}, \\ (x_\eta)^2 + (y_\eta)^2, & \eta = 0, \\ (x_{\bar{\eta}})^2 + (y_{\bar{\eta}})^2, & \eta = 1, \end{cases}$$

$$g_{12,h} = \begin{cases} x_0 x_0 + y_0 y_0, & (\xi, \eta) \in \omega_{h\tau}, \\ \xi_\eta & \xi_\eta \\ x_\xi x_0 + y_\xi y_0, & \xi = 0, \\ \eta & \eta \\ x_{\bar{\xi}} x_0 + y_{\bar{\xi}} y_0, & \xi = 1, \\ \eta & \eta \\ x_0 x_\eta + y_0 y_\eta, & \eta = 0, \\ \xi & \xi \\ x_0 x_{\bar{\eta}} + y_0 y_{\bar{\eta}}, & \eta = 1, \\ \xi & \xi \end{cases} \quad |J^{-1}|_h = \begin{cases} x_0 y_0 - y_0 x_0, & (\xi, \eta) \in \omega_{h\tau}, \\ \xi_\eta & \xi_\eta \\ x_\xi y_0 - y_\xi x_0, & \xi = 0, \\ \eta & \eta \\ x_{\bar{\xi}} y_0 - y_{\bar{\xi}} x_0, & \xi = 1, \\ \eta & \eta \\ x_0 y_\eta - y_0 x_\eta, & \eta = 0, \\ \xi & \xi \\ x_0 y_{\bar{\eta}} + y_0 x_{\bar{\eta}}, & \eta = 1, \\ \xi & \xi \end{cases}$$

$$\beta_{11} = g_{22,h} / |J^{-1}|_h, \quad \beta_{12} = \beta_{21} = -g_{12,h} / |J^{-1}|_h, \quad \beta_{22} = g_{11,h} / |J^{-1}|_h,$$

$$\text{grad}_h p = \frac{1}{|J^{-1}|_h} \begin{pmatrix} y_0 p_0 - y_0 p_0, -x_0 p_0 + x_0 p_0 \\ \eta_\xi & \xi_\eta \end{pmatrix}, \quad (\xi, \eta) \in \omega_{h\tau},$$

$$\text{div}_h \mathbf{v} = \begin{cases} \frac{1}{|J^{-1}|_h} \left(\left(y_0 u \right)_\xi - \left(y_0 u \right)_\eta - \left(x_0 v \right)_\xi + \left(x_0 v \right)_\eta \right), & (\xi, \eta) \in \omega_{h\tau}, \\ \frac{1}{|J^{-1}|_h} \left(\left(y_0 u \right)_\xi - (y_\xi u)_\eta - \left(x_0 v \right)_\xi + (x_\xi v)_\eta \right), & \xi = 0, \\ \frac{1}{|J^{-1}|_h} \left(\left(y_0 u \right)_\xi - (y_{\bar{\xi}} u)_\eta - \left(x_0 v \right)_\xi + (x_{\bar{\xi}} v)_\eta \right), & \xi = 1, \\ \frac{1}{|J^{-1}|_h} \left((y_\eta u)_\xi - \left(y_0 u \right)_\eta - (x_\eta v)_\xi + \left(x_0 v \right)_\eta \right), & \eta = 0, \\ \frac{1}{|J^{-1}|_h} \left((y_{\bar{\eta}} u)_\xi - \left(y_0 u \right)_\eta - (x_{\bar{\eta}} v)_\xi + \left(x_0 v \right)_\eta \right), & \eta = 1. \end{cases}$$

На равномерной по времени сетке с временным шагом τ запишем неявную разностную схему для задачи (17) с линеаризованным конвективным членом

$$\frac{\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^n}{\tau} + C_h(\mathbf{v}^n)\mathbf{v}^{n+1} + P_h\mathbf{v}^{n+1} + N_h\mathbf{v}^{n+1} - \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2}\mathbf{e}\theta^n = \tilde{\mathbf{f}}^n, \quad (18)$$

$$\text{div}_h \mathbf{v}^{n+1} = 0,$$

где разностные операторы имеют вид

$$P_h \mathbf{v} = \text{grad}_h p, \quad C_h(\mathbf{v})u = \frac{1}{2}((\mathbf{v} \cdot \text{grad}_h)u + \text{div}_h(\mathbf{v}u)),$$

$$N_h \mathbf{v} = -\frac{1}{2\text{Re}|J^{-1}|_h} \left((\beta_{11}\mathbf{v}_\xi + \beta_{12}\mathbf{v}_\eta)\bar{\xi} + (\beta_{11}\mathbf{v}_\xi + \beta_{12}\mathbf{v}_\eta)_\xi + (\beta_{21}\mathbf{v}_\xi + (\beta_{22}\mathbf{v}_\eta))_{\bar{\eta}} + (\beta_{21}\mathbf{v}_\xi + \beta_{22}\mathbf{v}_\eta)_\eta \right).$$

Для реализации схемы (18) применяется метод стабилизирующей поправки [16]. В результате вычислительный алгоритм нахождения скоростей и давлений на каждом временном слое разбивается на 3 этапа.

На первом этапе для нахождения промежуточного значения скоростей $\mathbf{v}^{n+1/2}$ используется разностная схема

$$\frac{\mathbf{v}^{n+1/2} - \mathbf{v}^n}{\tau} + C_h(\mathbf{v}^n)\mathbf{v}^{n+1/2} + \text{grad}_h p^n + N_h\mathbf{v}^{n+1/2} - \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2}\mathbf{e}\theta^n = \tilde{\mathbf{f}}^n.$$

На втором этапе решается задача для расчета поправки давления. Для ее получения на втором дробном шаге по времени рассмотрим уравнение

$$\frac{\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^{n+1/2}}{\tau} + \text{grad}_h \delta p = 0, \quad \delta p = p^{n+1} - p^n$$

или

$$\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}^{n+1/2} - \tau \text{grad}_h \delta p = 0,$$

из которого и условия несжимаемости $\text{div}_h \mathbf{v}^{n+1} = 0$ получаем следующее эллиптическое уравнение на расширенном шаблоне для расчета поправки давления (оператор дивергенции аппроксимируется центральными разностями внутри области и направленными разностями первого порядка на границе):

$$\tilde{\Lambda}_h \delta p = \frac{1}{\tau} \text{div}_h \mathbf{v}^{n+1/2}, \quad (19)$$

где

$$\tilde{\Lambda}_h p = \text{div}_h \text{grad}_h p = \tilde{\Lambda}_\xi p + \tilde{\Lambda}_\eta p,$$

$$\tilde{\Lambda}_\xi p = \begin{cases} \frac{1}{h_\xi} \left(\beta_{11}p_0 + \beta_{12}p_0 \right)_{1,j}, & i = 0, \\ \frac{1}{2h_\xi} \left(\beta_{11}p_0 + \beta_{12}p_0 \right)_{2,j}, & i = 1, \\ \left[\left(\beta_{11}p_0 + \beta_{12}p_0 \right)_0 \right]_{\xi,i,j}, & i = \overline{2, N-2}, \\ -\frac{1}{2h_\xi} \left(\beta_{11}p_0 + \beta_{12}p_0 \right)_{N-2,j}, & i = N-1, \\ -\frac{1}{h_\xi} \left(\beta_{11}p_0 + \beta_{12}p_0 \right)_{N-1,j}, & i = N, \end{cases} \quad \tilde{\Lambda}_\eta p = \begin{cases} \frac{1}{h_\eta} \left(\beta_{21}p_0 + \beta_{22}p_0 \right)_{i,1}, & j = 0, \\ \frac{1}{2h_\eta} \left(\beta_{21}p_0 + \beta_{22}p_0 \right)_{i,2}, & j = 1, \\ \left[\left(\beta_{21}p_0 + \beta_{22}p_0 \right)_0 \right]_{\eta,i,j}, & j = \overline{2, M-2}, \\ -\frac{1}{2h_\eta} \left(\beta_{21}p_0 + \beta_{22}p_0 \right)_{i,M-2}, & j = M-1, \\ -\frac{1}{h_\eta} \left(\beta_{21}p_0 + \beta_{22}p_0 \right)_{i,M-1}, & j = M. \end{cases}$$

Решение уравнения (19) распадается на решение четырех дискретных эллиптических задач на непересекающихся множествах узлов сетки $\bar{\omega}_{h\tau}$, приводящих к появлению осцилляций дискретного решения. Для решения этой проблемы в уравнение неразрывности вводится регуляризатор, содержащий давление

$$\operatorname{div}_h \mathbf{v}^{n+1} = \tau(\Lambda_h - \tilde{\Lambda}_h)p^{n+1}, \quad (20)$$

где

$$\Lambda_h p = \Lambda_\xi p + \Lambda_\eta p,$$

$$\Lambda_\xi p = \begin{cases} \frac{1}{h_\xi}(\beta_{11}p_{\bar{\xi}} + \beta_{12}p_{\bar{\eta}})_{1,j}, & i = 0, \\ \frac{1}{2} \left[\frac{1}{h_\xi}(\beta_{11}p_\xi + \beta_{12}p_\eta) + (\beta_{11}p_{\bar{\xi}} + \beta_{12}p_{\bar{\eta}})_\xi \right]_{i,j}, & i = 1, \\ \frac{1}{2} \left[(\beta_{11}p_{\bar{\xi}} + \beta_{12}p_{\bar{\eta}})_\xi + (\beta_{11}p_\xi + \beta_{12}p_\eta)_{\bar{\xi}} \right]_{i,j}, & i = \overline{2, N-2}, \\ \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{h_\xi}(\beta_{11}p_{\bar{\xi}} + \beta_{12}p_{\bar{\eta}}) + (\beta_{11}p_{\bar{\xi}} + \beta_{12}p_{\bar{\eta}})_{\bar{\xi}} \right]_{i,j}, & i = N-1, \\ -\frac{1}{h_\xi}(\beta_{11}p_\xi + \beta_{12}p_\eta)_{N-1,j}, & i = N, \end{cases}$$

$$\Lambda_\eta p = \begin{cases} \frac{1}{h_\eta}(\beta_{21}p_{\bar{\xi}} + \beta_{22}p_{\bar{\eta}})_{i,1}, & j = 0, \\ \frac{1}{2} \left[\frac{1}{h_\eta}(\beta_{21}p_\xi + \beta_{22}p_\eta) + (\beta_{21}p_{\bar{\xi}} + \beta_{22}p_{\bar{\eta}})_\eta \right]_{i,j}, & j = 1, \\ \frac{1}{2} \left[(\beta_{21}p_{\bar{\xi}} + \beta_{22}p_{\bar{\eta}})_\eta + (\beta_{21}p_\xi + \beta_{22}p_\eta)_{\bar{\eta}} \right]_{i,j}, & j = \overline{2, M-2}, \\ \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{h_\eta}(\beta_{21}p_{\bar{\xi}} + \beta_{22}p_{\bar{\eta}}) + (\beta_{21}p_{\bar{\xi}} + \beta_{22}p_{\bar{\eta}})_{\bar{\eta}} \right]_{i,j}, & j = M-1, \\ -\frac{1}{h_\eta}(\beta_{21}p_\xi + \beta_{22}p_\eta)_{i,M-1}, & j = M. \end{cases}$$

В результате подстановки (19) в (20) на втором этапе вычислительного алгоритма получим сеточную эллиптическую задачу для нахождения поправки давления

$$\Lambda_h \delta p = \frac{1}{\tau} \operatorname{div}_h \mathbf{v}^{n+1/2} - (\Lambda_h - \tilde{\Lambda}_h)p^n.$$

На третьем шаге вычисляются давления и скорости на следующем временном слое:

$$p^{n+1} = p^n + \delta p, \quad \mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}^{n+1/2} - \tau \operatorname{grad}_h \delta p.$$

Для определения температуры в узлах разностной сетки $\omega_{h\tau} = \omega_h \times \omega_\tau$ используем разностное уравнение с аппроксимацией смешанных производных из [17] на семиточечном шаблоне:

$$\frac{\theta^{n+1} - \theta^n}{\tau} + C_h(\mathbf{v}^{n+1})\theta^{n+1} - \frac{1}{\operatorname{PrRe}} N_h \theta^{n+1} = 0, \quad (21)$$

$$C_h(\mathbf{v}^{n+1})\theta^{n+1} = \frac{1}{2} \left((\mathbf{v}^{n+1} \cdot \operatorname{grad}_h) \theta^{n+1} + \operatorname{div}_h(\mathbf{v}\theta)^{n+1} \right),$$

$$N_h \theta = \frac{1}{2|J^{-1}|_h} \left((\beta_{11}\theta_\xi + \beta_{12}\theta_\eta)_{\bar{\xi}} + (\beta_{11}\theta_{\bar{\xi}} + \beta_{12}\theta_{\bar{\eta}})_\xi + (\beta_{21}\theta_\xi + \beta_{22}\theta_\eta)_{\bar{\eta}} + (\beta_{21}\theta_{\bar{\xi}} + \beta_{22}\theta_{\bar{\eta}})_\eta \right).$$

Разностная схема (21) аппроксимирует (11) со вторым порядком по пространственным переменным и первым порядком по временной переменной.

В граничных узлах $(\xi_i, \eta_j) \in \Gamma_{1,\xi\eta}$ краевые условия первого рода аппроксимируются точно $\theta_{ij} = \theta_0(\xi_i, \eta_j, t_{n+1})$, а краевые условия второго рода (14)–(15) в узлах $(\xi_i, \eta_j) \in \Gamma_{2,\xi\eta}$ – с первым порядком по пространственным переменным:

$$\begin{aligned} \left(\beta_{11}\hat{u}_\xi + \beta_{12}\hat{u}_\eta \right)_{0,j} &= \left(g_{22}^{1/2} \hat{\mu} \right)_{0,j}, \quad (\xi_0, \eta_j) \in \Gamma_{2,\xi\eta}, \quad \left(\beta_{11}\hat{u}_{\bar{\xi}} + \beta_{12}\hat{u}_{\bar{\eta}} \right)_{N,j} = \left(g_{22}^{1/2} \hat{\mu} \right)_{N,j}, \\ &(\xi_N, \eta_j) \in \Gamma_{2,\xi\eta}, \\ \left(\beta_{21}\hat{\theta}_0 + \beta_{22}\hat{\theta}_\eta \right)_{i,0} &= \left(g_{11}^{1/2} \hat{\mu} \right)_{i,0}, \quad (\xi_i, \eta_0) \in \Gamma_{2,\xi\eta}, \quad \left(\beta_{21}\hat{\theta}_0 + \beta_{22}\hat{\theta}_{\bar{\eta}} \right)_{i,M} = \left(g_{11}^{1/2} \hat{\mu} \right)_{i,M}, \\ &(\xi_i, \eta_M) \in \Gamma_{2,\xi\eta}. \end{aligned}$$

Численный эксперимент. Проверка алгоритма проводилась на решении двумерной задачи о конвекции в полости отличного от прямоугольного сечения Ω_{xy} (рис. 1), когда боковые стенки AD и BC поддерживаются при заданных постоянных температурах:

$$\theta(x, y, t)|_{(x,y) \in AD} = 1, \quad \theta(x, y, t)|_{(x,y) \in BC} = 0, \quad t > 0,$$

а верхняя и нижняя стенки DC и AB теплоизолированы:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{(x,y) \in AB \cup DC} = 0, \quad t > 0.$$

Границы области Ω_{xy} считаются твердыми и непроницаемыми, и поэтому задаются условия прилипания и непротекания, которые на неподвижных стенках имеют вид

$$\mathbf{v}(x, y, t)|_{\partial\Omega_{xy}} = \mathbf{0}, \quad t > 0,$$

а в случае подвижных границ (задачи моделирования вынужденных конвективных течений в камерах с подвижными стенками) скорость жидкости на границе совпадает со скоростью подвижной границы.

В начальный момент $t = 0$ жидкость покоится, формулируются следующие начальные условия:

$$\mathbf{v}(x, y, 0) = \mathbf{0}, \quad \theta(x, y, 0) = 0, \quad (x, y) \in \Omega_{xy}.$$

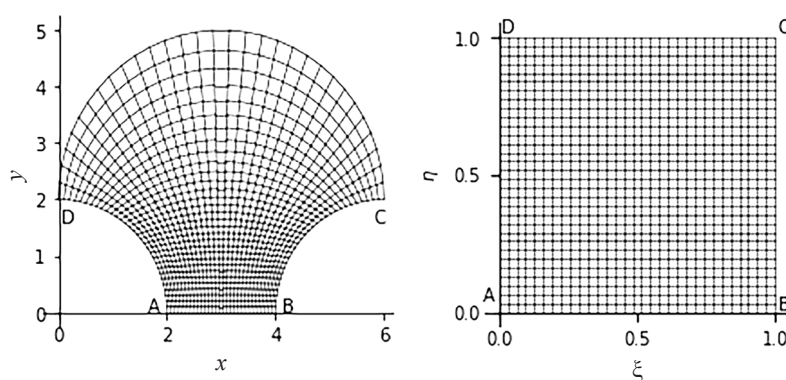


Рис. 1. Физическая область Ω_{xy} и расчетная область $\Omega_{\xi\eta}$

Fig. 1. Physical domain Ω_{xy} and computational domain $\Omega_{\xi\eta}$

На рис. 1 представлены примеры разностных сеток 32×32 , построенных в физической Ω_{xy} и расчетной $\Omega_{\xi\eta}$ областях. Для решения систем девятиточечных разностных уравнений на каждом временном слое, аппроксимирующих уравнения неразрывности, использовался модифицированный сильно неявный метод MSIM [18], а для решения разностных уравнений для поправки давления – метод сопряженных градиентов [19]. В расчетах критерием окончания итерационных процессов являлось выполнение условия

$$\left| u_{ij}^{m+1} - u_{ij}^m \right| < \varepsilon_1 \left| u_{ij}^m \right| + \varepsilon_2, \quad i = \overline{0, N}, \quad j = \overline{0, M}, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-6}, \quad m = 0, 1, \dots, \quad u_{ij}^0 = u_{ij}^n,$$

а критерием выхода на стационар – условие

$$\|\mathbf{v}_\tau\| = \left(\sum_{ij} (u_\tau^2 + v_\tau^2) |J^{-1}| h_\xi h_\eta \right)^{\frac{1}{2}} \leq 10^{-4}, \quad \mathbf{v}_\tau = (u_\tau, v_\tau) = \left(\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau}, \frac{v^{n+1} - v^n}{\tau} \right).$$

На рис. 2 представлены результаты расчетов (линии тока и изотермы) установившихся течений для вариантов естественной конвекции с числом Прандтля $Pr = 1$, числом Рейнольдса $Re = 1$ и числами Грасгофа $Gr = 10^3$, $Gr = 10^4$ и $Gr = 10^5$. При $Gr = 10^3$ начинает сказываться влияние конвективного переноса. Дальнейшее увеличение числа Грасгофа приводит к более интенсивному перемешиванию жидкости. Приведенные результаты получены на разностной сетке 128×128 .

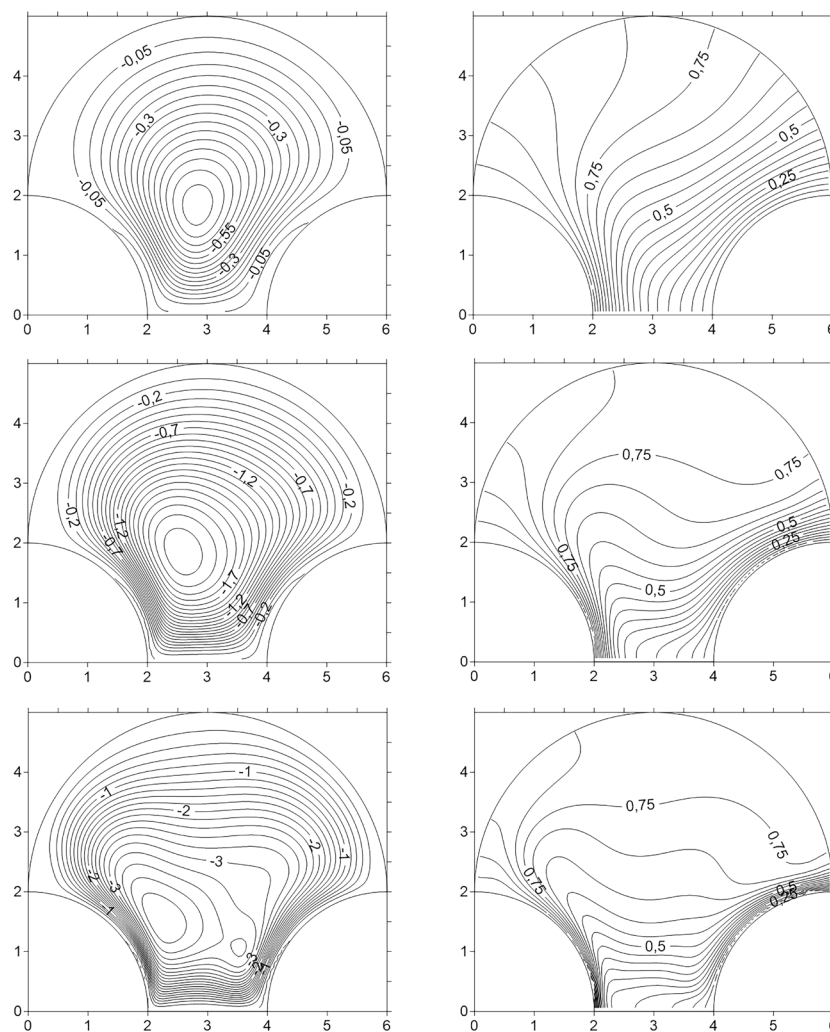


Рис. 2. Линии тока и изотермы для $Gr = 10^3, 10^4, 10^5$

Fig. 2. Stream lines and isotherms for $Gr = 10^3, 10^4, 10^5$

Интенсивность конвективного переноса характеризуется величиной $\max|\psi(x,y)|$, данные о временах установления, минимальных и максимальных значениях функций тока $\psi(x,y)$ приведены в табл. 1.

Таблица 1. Результаты расчета естественной конвекции в области Ω_{xy} для различных чисел Грасгофа

Table 1. Results of calculation of natural convection in Ω_{xy} domain for different Gragsof numbers

Gr	t	$\min \psi(x,y)$	$(x,y)_{\min}$	$\max \psi(x,y)$	$(x,y)_{\max}$
1000	18,30	-0,77936	(2,802, 1,799)	0,01949	(4,055, 0,785)
10 000	15,74	-2,1697	(2,567, 1,843)	0,05049	(4,055, 0,688)
100 000	12,12	-3,971	(2,207, 1,546)	0,07926	(4,044, 0,543)

Предложенный метод опробован на ряде тестовых задач из [20]. На рис. 3 приведены изотермы и линии тока установившихся течений естественной конвекции для случая $Re = 1$, $Ra = 10^6$, где число Релея $Ra = Pr \times Gr$.

На границах двух областей, представляющих собой равнобедренную трапецию и трапецию с боковой стороной $x(y) = 0,1 \sin \pi(2y-1)$, задавались условия прилипания, верхняя и нижняя стенки считались теплоизолированными, на левой границе задавалась температура $\theta_l = 1$, а на правой – $\theta_p = 0$. Расчеты проводились на разностных сетках 128×128 .

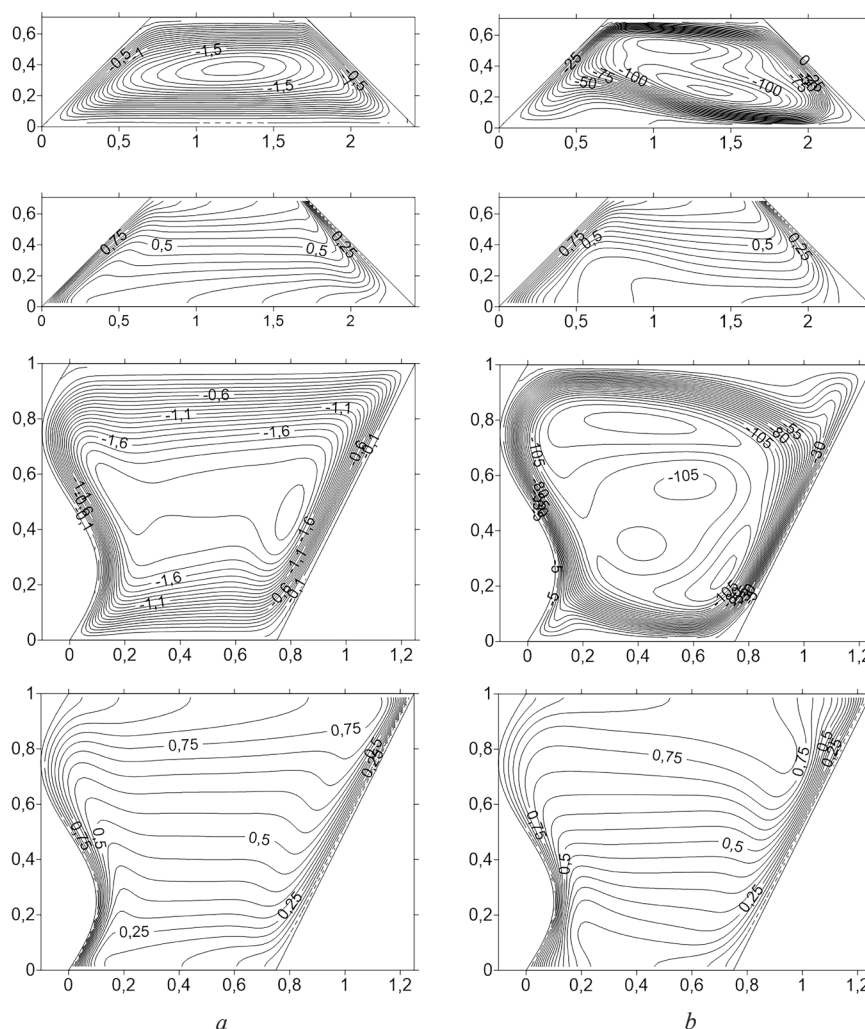


Рис. 3. Линии тока и изотермы для $Re = 1$, $Ra = 10^6$: $a - Gr = 10^5$, $Pr = 10$; $b - Gr = 10^7$, $Pr = 0,1$

Fig. 3. Stream lines and isotherms for $Re = 1$, $Ra = 10^6$: $a - Gr = 10^5$, $Pr = 10$; $b - Gr = 10^7$, $Pr = 0.1$

Уменьшение числа Прандтля до $Pr = 0,1$ и увеличение числа Грасгофа до $Gr = 10^7$ приводит к увеличению диффузии тепла, возникновению большей силы плавучести, что в свою очередь приводит к увеличению интенсивности конвективных течений жидкости между холодной и теплой стенками. Следует отметить ортогональность изотерм к теплоизолированным границам областей.

Сравнение полученных минимальных и максимальных значений функций тока с приведенными в [20] представлено в табл. 2. Для расчетов конвективных течений в [20] использовались разностные сетки 1024×1024 .

Таблица 2. Сравнение результатов расчета естественной конвекции с результатами из [19]

Table 2. Comparison of the numerical results of natural convection calculation with the results from [19]

Область Domain	Метод Method	Pr = 10, Gr = 10^5		Pr = 0,1, Gr = 10^7	
		min ψ	max ψ	min ψ	max ψ
Trapezoid	Present	-1,9741	$2,8150 \times 10^{-2}$	-121,36	2,1040
	Li et al. [20]	-1,9128	$1,4335 \times 10^{-3}$	-123,80	0,43428
Sine-type	Present	-2,0435	$1,3862 \times 10^{-2}$	-127,11	3,3125
	Li et al. [20]	-2,0131	$7,9361 \times 10^{-3}$	-129,71	0,56866

Следует отметить, что для нахождения значений сеточных функции тока по найденным значениям скоростей (для визуализации результатов расчетов) в области Ω_{xy} решалась задача Дирихле для уравнения Пуассона

$$\Delta\psi = -\omega(x, y), \quad \omega(x, y) = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (x, y) \in \Omega_{xy}, \quad \psi(x, y)|_{\partial\Omega_{xy}} = 0. \quad (22)$$

Задача (22), записанная в обобщенных криволинейных координатах, аппроксимировалась в расчетной области $\Omega_{\xi\eta}$ с помощью разностной схемы

$$\frac{1}{2} \left((\beta_{11}\psi_{\xi} + \beta_{12}\psi_{\eta})_{\bar{\xi}} + (\beta_{11}\psi_{\bar{\xi}} + \beta_{12}\psi_{\bar{\eta}})_{\xi} + (\beta_{21}\psi_{\xi} + \beta_{22}\psi_{\eta})_{\bar{\eta}} + (\beta_{21}\psi_{\bar{\xi}} + \beta_{22}\psi_{\bar{\eta}})_{\eta} \right) =$$

$$= y_0 v_0 - y_0 v_0 + x_0 u_0 - x_0 u_0, \quad (\xi, \eta) \in \omega_h, \quad \psi(\xi, \eta) = 0, \quad (\xi, \eta) \in \gamma_h.$$

Апробация предложенного в статье метода на тестовых задачах показала его эффективность при получении как стационарных, так и нестационарных решений.

Список использованных источников

1. Математическое моделирование конвективного теплообмена на основе уравнений Навье – Стокса / В. И. Полежаев, А. В. Бунэ, Н. А. Везуб [и др.]. – М.: Наука, 1987. – 272 с.
2. Роуч, П. Вычислительная гидродинамика / П. Роуч. – М.: Мир, 1980. – 618 с.
3. Берковский, Б. М. Вычислительный эксперимент в конвекции / Б. М. Берковский, В. К. Полевилов. – Минск: Университетское, 1988. – 167 с.
4. Armfield, S. W. Finite difference solutions of the Navier–Stokes equations on staggered and nonstaggered grids / S. W. Armfield // Computers & Fluids. – 1991. – Vol. 20, № 1. – P. 1–17. [https://doi.org/10.1016/0045-7930\(91\)90023-B](https://doi.org/10.1016/0045-7930(91)90023-B)
5. Chung, M.-H. Cartesian cut cell approach for simulating incompressible flows with rigid bodies of arbitrary shape / M.-H. Chung // Computers & Fluids. – 2006. – Vol. 35, № 6. – P. 607–623. <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2005.04.005>
6. An accurate cartesian grid method for viscous incompressible flows with complex immersed boundaries / T. Ye, R. Mittal, H. S. Udaykumar, W. Shyy // Journal of Computational Physics. – 1999. – Vol. 156, № 2. – P. 209–240. <https://doi.org/10.1006/jcph.1999.6356>
7. Li, Z. An overview of the immersed interface method and its applications / Z. Li // Taiwanese Journal of Mathematics. – 2003. – Vol. 7, № 1. – P. 1–49. <https://doi.org/10.11650/twjm/1500407515>
8. Флетчер, К. Вычислительные методы в динамике жидкостей: в 2 т.: пер. с англ. / К. Флетчер. – М.: Мир, 1991. – Т. 2. – 552 с.
9. Андерсон, Д. Вычислительная гидромеханика и теплообмен: в 2 т.: пер. с англ. / Д. Андерсон, Дж. Таннехилл, Р. Плетчер. – М.: Мир, 1990. – 728 с.
10. Zang, Y. A non-staggered grid, fractional step method for time-dependent incompressible Navier-Stokes equations in general curvilinear coordinate systems / Y. Zang, R. L. Street, J. R. Koseff // Journal of Computational Physics. – 1994. – Vol. 114, № 1. – P. 8–33. <https://doi.org/10.1006/jcph.1994.1146>

11. Koshizuka, S. A staggered differencing technique on boundary-fitted curvilinear grids for incompressible flows along curvilinear or slant walls / S. Koshizuka, Y. Oka, S. Kondo // *Computational Mechanics*. – 1990. – Vol. 7. – P. 123–136. <https://doi.org/10.1007/BF00375926>
12. Thompson, J. F. *Numerical Grid Generation: Foundations and Applications* / J. F. Thompson, Z. U. A. Warsi, C. W. Mastin. – Elsevier North-Holland, 1985. – 483 p.
13. Чуйко, М. М. Решение смешанной краевой задачи для уравнения Пуассона в нерегулярных двумерных областях / М. М. Чуйко, О. М. Королёва // *Информатика*. – 2023. – Т. 20, № 2. – С. 111–120. <https://doi.org/10.37661/1816-0301-2023-20-2-111-120>
14. Чуйко, М. М. Численное решение смешанной краевой задачи для уравнения теплопроводности в двумерных областях сложной формы // М. М. Чуйко, О. М. Королёва // *Весті Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Сeryя фізіка-матэматычных навук*. – 2024. – Т. 60, № 3. – С. 216–224. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2024-60-3-216-224>
15. Вабищевич, П. Н. Методы расчета нестационарных несжимаемых течений в естественных переменных на неразнесенных сетках / П. Н. Вабищевич, А. Н. Павлов, А. Г. Чурбанов // *Математическое моделирование*. – 1996. – Т. 8, № 7. – С. 81–108.
16. Chuiko, M. Incompressible fluid flow computation in an arbitrary two-dimensional region on nonstaggered grids / M. Chuiko, A. Lapanik // *Computational Methods in Applied Mathematics*. – 2005. – Vol. 5, № 3. – P. 242–258. <https://doi.org/10.2478/cmam-2005-0012>
17. Самарский, А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М.: Наука, 1997. – 380 с.
18. Schneider, G. E. A modified strongly implicit procedure for the numerical solution of field problem / G. E. Schneider, M. Zedan // *Numerical Heat Transfer*. – 1981. – Vol. 4, № 1. – P. 1–19. <https://doi.org/10.1080/01495728108961775>
19. Samarskii, A. *Computational Heat Transfer. Vol. 2. The Finite Difference Methodology* / A. Samarskii, P. Vabishchevich. – Wiley, 1996. – 432 p.
20. Li, J. Benchmark solutions for two-dimensional fluid flow and heat transfer problems in irregular regions using multigrid method / J. Li, B. Yu, M. Wang // *Advances in Mechanical Engineering*. – 2015. – Vol. 7, № 11. – P. 1–17. <https://doi.org/10.1177/1687814015618611>

References

1. Polezhaev V. I., Bune A. V., Verezub N. A., Glushko G. S., Gryaznov V. L., Dubovik K. G. [et al.]. *Mathematical Modelling of Convective Heat and Mass Transfer on the Basis of the Navier-Stokes Equations*. Moscow: Nauka Publ., 1987. 272 p. (in Russian).
2. Roache P. J. *Computational Fluid Dynamics*. Hermosa, Albuquerque, 1976. 446 p.
3. Berkovsky B. M., Polevikov V. K. *Computational Experiment in Convection*. Minsk, Universitetskoe Publ., 1988. 167 p. (in Russian).
4. Armfield S. W. Finite difference solutions of the Navier-Stokes equations on staggered and nonstaggered grids. *Computers & Fluids*, 1991, vol. 20, no. 1, pp. 1–17. [https://doi.org/10.1016/0045-7930\(91\)90023-B](https://doi.org/10.1016/0045-7930(91)90023-B)
5. Chung M.-H. Cartesian cut cell approach for simulating incompressible flows with rigid bodies of arbitrary shape. *Computers & Fluids*, 2006, vol. 35, no. 6, pp. 607–623. <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2005.04.005>
6. Ye T., Mittal R., Udaykumar H. S., Shyy W. An accurate cartesian grid method for viscous incompressible flows with complex immersed boundaries. *Journal of Computational Physics*, 1999, vol. 156, no. 2, pp. 209–240. <https://doi.org/10.1006/jcph.1999.6356>
7. Li Z. An overview of the immersed interface method and its applications. *Taiwanese Journal of Mathematics*, 2003, vol. 7, no. 1, pp. 1–49. <https://doi.org/10.11650/twjm/1500407515>
8. Fletcher C. A. J. *Computational Techniques for Fluid Dynamics. Vol. 2*. Springer, 1988. 494 p.
9. Anderson D., Tannehill J., Pletcher R. *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*. New York, Hemisphere Publ., 1984. 599 p.
10. Zang Y., Street R. L., Koseff J. R. A non-staggered grid, fractional step method for time-dependent incompressible Navier-Stokes equations in general curvilinear coordinate systems. *Journal of Computational Physics*, 1994, vol. 114, no. 1, pp. 18–33. <https://doi.org/10.1006/jcph.1994.1146>
11. Koshizuka S., Oka Y., Kondo S. A staggered differencing technique on boundary-fitted curvilinear grids for incompressible flows along curvilinear or slant walls. *Computational Mechanics*, 1990, vol. 7, pp. 123–136. <https://doi.org/10.1007/BF00375926>
12. Thompson J. F., Warsi Z. U. A., Mastin C. W. *Numerical Grid Generation: Foundations and Applications*. Elsevier North-Holland, 1985. 483 p.
13. Chuiko M. M., Korolyova O. M. Solution of the mixed boundary problem for the Poisson equation on two-dimensional irregular domains. *Informatika = Informatics*, 2023, vol. 20, no. 2, pp. 111–120 (in Russian). <https://doi.org/10.37661/1816-0301-2023-20-2-111-120>
14. Chuiko M. M., Korolyova O. M. Numerical solution of the mixed boundary value problem for the heat equation in two-dimensional domains of complex shape. *Vestsi Natsyyanal'nei akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2024, vol. 60, no. 3, pp. 216–224 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2024-60-3-216-224>
15. Vabishchevich P., Pavlov V., Churbanov A. Numerical methods for unsteady incompressible flows using primitive variables and non-staggered grids. *Matematicheskoe modelirovanie = Mathematical Models and Computer Simulation*, 1996, vol. 8, no. 7, pp. 81–108 (in Russian).

16. Chuiko M., Lapanik A. Incompressible fluid flow computation in an arbitrary two-dimensional region on non-staggered grids. *Computational Methods in Applied Mathematics*, 2005, vol. 5, no. 3, pp. 242–258. <https://doi.org/10.2478/cmam-2005-0012>
17. Samarskii A. A. *The Theory of Difference Schemes*. New York, 2001. 786 p.
18. Schneider G. E., Zedan M. A modified strongly implicit procedure for the numerical solution of field problem. *Numerical Heat Transfer*, 1981, vol. 4, no. 1, pp. 1–19. <https://doi.org/10.1080/01495728108961775>
19. Samarskii A., Vabishchevich P. *Computational Heat Transfer. Vol. 2. The Finite Difference Methodology*. Wiley, 1996. 432 p.
20. Li J., Yu B., Wang M. Benchmark solutions for two-dimensional fluid flow and heat transfer problems in irregular regions using multigrid method. *Advances in Mechanical Engineering*, 2015, vol. 7, no. 11, pp. 1–17. <https://doi.org/10.1177/1687814015618611>

Информация об авторах

Чуйко Михаил Матвеевич – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник отдела вычислительной математики, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: mikhail.chuiko@gmail.com

Королёва Ольга Михайловна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Белорусский национальный технический университет (пр. Независимости, 65, 220013, Минск, Республика Беларусь). E-mail: korolyovaola@gmail.com

Information about the authors

Mikhail M. Chuiko – Ph. D. (Physics and Mathematics), Leading Researcher of the Department of Computational Mathematics, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: mikhail.chuiko@gmail.com

Olga M. Korolyova – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, Belarusian National Technical University (65, Nezavisimosti Ave., 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: korolyovaola@gmail.com