ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)

МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

УДК 512.542 Поступила в редакцию 23.10.2025
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2025-61-4-271-287 Received 23.10.2025

В. Г. Сафонов[1], И. Н. Сафонова[2]

[1]Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь
[2]Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь

О σ-ЛОКАЛЬНЫХ КЛАССАХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Аннотация. Для различных разбиений множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел исследуются свойства обобщенно локальных классов (формаций, классов Фиттинга) конечных групп. Доказаны критерии σ-локальности α-локального класса групп, где σ и α – некоторые различные разбиения множества $\mathbb{P}$. Изучены свойства произведений обобщенно локальных классов, а также их алгебр. Для σ-разрешимого σ-локального класса получены достаточные условия коммутативности порожденной им σ-алгебры.

Ключевые слова: конечная группа, σ-локальная формация, σ-локальный класс Фиттинга, σ-алгебра формаций, σ-алгебра классов Фиттинга, полугруппа классов групп

Для цитирования. Сафонов, В. Г. О σ-локальных классах конечных групп / В. Г. Сафонов, И. Н. Сафонова // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. – 2025. – Т. 61, № 4. – С. 271–287. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2025-61-4-271-287

Vasily G. Safonov[1], Inna N. Safonova[2]

[1]Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus
[2]Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus

ON σ-LOCAL CLASSES OF FINITE GROUPS

Abstract. For various partitions of the set $\mathbb{P}$ of all prime numbers, properties of generalized local classes (formations, Fitting classes) of finite groups are investigated. Criteria for σ-locality of an α-local class of groups are proved, where σ and α are some distinct partitions of $\mathbb{P}$. Properties of products of generalized local classes, as well as their algebras, are studied. For a σ-soluble σ-local class, sufficient conditions for the commutativity of the σ-algebra generated by it are obtained.

Keywords: finite group, σ-local formation, σ-local Fitting class, σ-algebra of formations, σ-algebra of Fitting classes, semigroup of classes of groups

For citation. Safonov V. G., Safonova I. N. On σ-local classes of finite groups. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2025, vol. 61, no. 4, pp. 271–287 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2025-61-4-271-287

Введение. Все рассматриваемые группы являются конечными. Мы придерживаемся терминологии и обозначений, принятых в [1–6].

Интенсивное развитие в последнее десятилетие теории σ-свойств групп (т. е. свойств групп, связанных с разбиением σ множества всех простых чисел), заложенной в работах А. Н. Скибы [4, 5], вызвало необходимость изучения классов групп, определяемых разбиением σ. Среди подходов, которые были найдены и развиты на этом пути, весьма полезными оказались некоторые новые аспекты теории формаций, основанные на понятии σ-локальной, или, иначе, обобщенно локальной, формации, впервые предложенном А. Н. Скибой [6]. Так, в работах [6–10] изучен ряд общих свойств σ-локальных формаций, а также даны их приложения при изучении мета-σ-нильпотентных и σ-разрешимых классов групп, замкнутых относительно произведений заданных систем подгрупп. Отметим, что именно σ-локальные формации оказались основным инструментом при решении некоторых старых задач теории групп, одной из которых являлась задача Л. А. Шеметкова [11, с. 47, проблема 7] о расширении теории Крамера [12], о факторизациях разрешимых групп на классы произвольных групп. Решение данной задачи получено З. Чи, А. Н. Скибой [8] методами σ-локальных формаций. Кроме того, в [9, 10] был изучен ряд свойств решеток кратно σ-локальных формаций. В частности, доказано, что множество l_n^σ всех n-кратно σ-локальных формаций конечных групп является полной алгебраической модулярной решеткой, а также изучены некоторые свойства полугруппы всех формаций такого типа. Позже А. А. Царевым [13] было показано, что каждое тождество решетки всех формаций выполняется в решетке l_n^σ, а также что для любого неотрицательного целого числа n решетка l_n^σ является модулярной, но не дистрибутивной. В [14] была установлена дистрибутивность решетки всех тотально σ-локальных формаций. Н. Н. Воробьевым, И. И. Стаселько и А. О. Ходжагулыевым изучены свойства прямых разложений n-кратно σ-локальных формаций [15], а также доказана $\mathfrak{G}$-отделимость решетки таких формаций [16].

Цикл работ И. Н. Сафоновой [17–25] посвящен изучению τ-замкнутых кратно σ-локальных формаций, в которых разработаны оригинальные методы исследования и конструирования формаций такого типа и их решеток, позволившие построить теорию функторно замкнутых кратно σ-локальных формаций. В частности, изучить основные свойства τ-замкнутых n-кратно σ-локальных формаций [18]; получить критерии τ-замкнутости n-кратно σ-локальной формации [23] и n-кратной σ-локальности непустой τ-замкнутой формации [19, 25]; установить основные свойства (полнота, σ-индуктивность, модулярность, алгебраичность, отделимость) решетки всех τ-замкнутых n-кратно σ-локальных формаций [20, 22, 24]; решить проблему Л. А. Шеметкова о классификации критических формаций в классе σ-локальных формаций [17, 21]. В недавних работах И. Н. Сафоновой и В. В. Скрундь [26–29] получено описание структурного строения приводимых σ-локальных формаций конечного $\mathfrak{H}_\sigma$-дефекта, а также структурного строения приводимых σ-локальных формаций конечной l_σ-длины, изучены свойства наибольшего τ-замкнутого подкласса n-кратно σ-локальной формации, доказан критерий для $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$-критических формаций и получено описание минимальных τ-замкнутых σ-локальных не σ-разрешимых и не σ-нильпотентных формаций.

В теории классов конечных групп хорошо известен некий параллелизм результатов теории формаций, или корадикальных классов групп, и результатов теории радикальных классов, или, иначе, классов Фиттинга. В. Го, Л. Чжаном и Н. Т. Воробьевым [30] было введено понятие σ-локального класса Фиттинга, изучены основные свойства таких классов, способы их задания с помощью специальных функций (функций Хартли), а также свойства радикальных произведений классов такого типа. В работе Н. Н. Воробьева и И. И. Стаселько [31] исследовались свойства решетки σ-локальных классов Фиттинга. В частности, было установлено, что решетка всех σ-локальных классов Фиттинга является индуктивной.

Отметим также, что σ-локальные формации и классы Фиттинга используются не только как инструмент для изучения σ-свойств групп, алгебры их σ-локальных классов, но и нашли применение в теории формальных языков в работах А. А. Царева и А. В. Кухарева [13, 32].

В настоящей работе нами исследуются свойства обобщенно локальных классов групп (формаций и классов Фиттинга) при различных разбиениях σ и α множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел. Доказаны критерии σ-локальности α-локального класса групп, изучены свойства произведений обобщенно локальных классов, а также их алгебр, получены необходимые и достаточные условия коммутативности σ-алгебры, порожденной σ-разрешимым σ-локальным классом.

Обобщенно локальные формации. Класс групп $\mathfrak{F}$ называют *формацией*, если он замкнут относительно гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация. Тогда для любой группы G через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначают $\mathfrak{F}$-корадикал группы G, т. е. наименьшую нормальную подгруппу G, факторгруппа по которой принадлежит формации $\mathfrak{F}$.

Формация $\mathfrak{F}$ называется *(нормально) наследственной*, если $H \in \mathfrak{F}$ всякий раз, когда $G \in \mathfrak{F}$ и H – (нормальная) подгруппа группы G.

Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – некоторые классы групп. *Произведение* $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ классов групп $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ определяется условием $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{H}$ тогда и только тогда, когда в G имеется такая нормальная подгруппа N, что $G/N \in \mathfrak{F}$. Если при этом $\mathfrak{H}$ – формация, то *корадикальное произведение* $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{H}$ классов $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ определяется следующим образом: $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{H} = (G \mid G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{F})$.

Следующая лемма описывает свойства произведений формаций групп, которые мы будем использовать в данной работе, как правило, не ссылаясь явно на данные утверждения.

Лемма 1 (см., напр., [1, гл. II; 3, гл. IV.; 33, 2.2.11]). *Пусть $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{M}$ – формации. Тогда справедливы утверждения:* (1) $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F} \circ \mathfrak{H}$, *если $\mathfrak{F}$ непусто*; (2) *если формация $\mathfrak{F}$ нормально наследственная, то* $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{H} = \mathfrak{F}\mathfrak{H}$, *и* $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F} \circ \mathfrak{H}$, *если $\mathfrak{H}$ непусто*; (3) $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{H}$ *– формация*; (4) $G^{\mathfrak{F} \circ \mathfrak{H}} = (G^{\mathfrak{H}})^{\mathfrak{F}}$ *для всех* $G \in \mathfrak{G}$; (5) $(\mathfrak{F} \circ \mathfrak{H}) \circ \mathfrak{M} = \mathfrak{F} \circ (\mathfrak{H} \circ \mathfrak{M})$.

Напомним некоторые понятия и обозначения теории σ-свойств групп и их классов [4–6].

Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ – некоторое разбиение множества всех простых чисел $\mathbb{P}$, G – группа, $\mathfrak{F}$ – класс групп. Тогда $\sigma(G) = \{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(G) \neq \varnothing\}$; $\sigma(\mathfrak{F}) = \cup_{G \in \mathfrak{F}} \sigma(G)$.

Группу G называют [4, 5] σ-*примарной*, если G является σ_i-группой для некоторого i; σ-*нильпотентной*, если G – прямое произведение σ-примарных групп; σ-*разрешимой*, если каждый главный фактор группы G является σ-примарным.

Символами $\mathfrak{S}_\sigma$ и $\mathfrak{N}_\sigma$ обозначают классы всех σ-разрешимых и σ-нильпотентных групп соответственно, $\mathfrak{G}_\pi$ – класс всех π-групп, где $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$.

Всякая функция f вида $f : \sigma \to$ {формации групп} называется [6] *формационной* σ-*функцией*. Для любой формационной σ-функции f класс $LF_\sigma(f)$ определяется следующим образом:

$$LF_\sigma(f) = \left(G \mid G = 1 \text{ либо } G \neq 1 \text{ и } G / O_{\sigma_i',\sigma_i}(G) \in f(\sigma_i) \text{ для всех } \sigma_i \in \sigma(G)\right),$$

где $O_{\sigma_i',\sigma_i}(G)$ обозначает $\mathfrak{G}_{\sigma_i'}\mathfrak{G}_{\sigma_i}$-радикал группы G.

Если для некоторой формационной σ-функции f имеет место равенство $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$, то класс $\mathfrak{F}$ называют σ-*локальным* [6], а f называют σ-*локальным определением* $\mathfrak{F}$.

Если f – формационная σ-функция, то $\mathrm{Supp}(f) = \{\sigma_i \in \sigma \mid f(\sigma_i) \neq \varnothing\}$ – носитель f.

Формационную σ-функцию f называют [6] *внутренней*, если $f(\sigma_i) \subseteq LF_\sigma(f)$ для всех i; *полной*, если $f(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i)$ для всех i. Полное внутреннее σ-локальное определение формации называют ее *каноническим* σ-*локальным определением*.

Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ и $\alpha = \{\alpha_j \mid j \in J\}$ – некоторые разбиения множества $\mathbb{P}$. Тогда, если для каждого $i \in I$ существует $j = j(i) \in J$ такое, что $\sigma_i \subseteq \alpha_j$, пишут [34, p. 1803], что $\sigma \leq \alpha$.

Для классических разбиений $\sigma^1 = \{\{2\},\{3\},\{5\},\ldots\}$, $\sigma^\pi = \{\pi, \pi'\}$ (π – непустое подмножество $\mathbb{P}$) и $\sigma^{1\pi} = \{\{p_1\},\{p_2\},\ldots,\{p_n\},\pi'\}$ $(\pi = \{p_1, p_2, \ldots p_n\} \subseteq \mathbb{P})$ имеет место $\sigma^1 \leq \sigma^{1\pi} \leq \sigma^\pi$.

Теорема 1. *Пусть* $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ *и* $\alpha = \{\alpha_j \mid j \in J\}$ *– некоторые разбиения множества всех простых чисел. Тогда в том и только в том случае всякая* α-*локальная формация является* σ-*локальной, когда* $\sigma \leq \alpha$. *В частности, поскольку для всякого разбиения* σ *множества простых чисел имеет место* $\sigma^1 \leq \sigma$, *то всякая* σ-*локальная формация является локальной.*

Доказательство. Необходимость. Допустим, что $\sigma \not\leq \alpha$, но всякая α-локальная формация является σ-локальной. Тогда существует такое $i \in I$, что $\sigma_i \not\subseteq \alpha_j$ для любого $j \in J$. Пусть $\alpha_k \in \alpha$ такое, что $\sigma_i \cap \alpha_k \neq \varnothing$. Ввиду [10, пример 1.2 (iii)] формация $\mathfrak{G}_{\alpha_k}$ является α-локальной. Значит, по условию теоремы формация $\mathfrak{G}_{\alpha_k}$ является σ-локальной. Тогда $\mathfrak{G}_{\alpha_k} = LF_\sigma(g)$, где g – некоторое σ-локальное определение формации $\mathfrak{G}_{\alpha_k}$. Не ограничивая общности, ввиду [35, лемма 2.4] можем считать, что формационная σ-функция g является внутренней, т. е. $g(\sigma_i) \subseteq LF_\sigma(g) = \mathfrak{G}_{\alpha_k}$. Поскольку $\sigma_i \cap \alpha_k \neq \varnothing$, то $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{G}_{\alpha_k})$ и $g(\sigma_i) \neq \varnothing$ по [35, лемма 2.3 (1)]. Так как формация $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ наследственная, то $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \subseteq \mathfrak{G}_{\sigma_i} g(\sigma_i)$. Поэтому по [19, теорема 1.1 (ii)] имеем

$$\mathfrak{G}_{\sigma_i} \subseteq \mathfrak{G}_{\sigma_i} g(\sigma_i) \subseteq LF_\sigma(g) = \mathfrak{G}_{\alpha_k}.$$

Отсюда $\sigma_i \subseteq \alpha_k$. Противоречие. Поэтому $\sigma \leq \alpha$.

Достаточность. Пусть теперь $\sigma \leq \alpha$ и $\mathfrak{F} = LF_\alpha(f)$ – неединичная α-локальная формация, где f – некоторое внутреннее α-локальное определение формации $\mathfrak{F}$. Так как σ и α – разбиения множества $\mathbb{P}$ и $\sigma \leq \alpha$, то для любого α_j имеем $\alpha_j = \cup_{\sigma_i \subseteq \alpha_j} \sigma_i$.

Покажем, что $\mathfrak{F}$ является σ-локальной формацией. Пусть h – такая формационная σ-функция, что $h(\sigma_i)=\mathfrak{G}_{\alpha_j}f(\alpha_j)$ для любого $\sigma_i \subseteq \alpha_j$. В силу [19, теорема 1.1 (ii)] имеем $h(\sigma_i)=\mathfrak{G}_{\alpha_j}f(\alpha_j)\subseteq\mathfrak{F}$. Пусть $\mathfrak{H}=LF_\sigma(h)$. Заметим, что $\sigma(\mathfrak{H})=\{\sigma_i\in\sigma \mid \sigma_i\subseteq\alpha_j\in\alpha(\mathfrak{F})\}$. Действительно, если $\alpha_j\in\alpha(\mathfrak{F})$, то в силу [35, лемма 2.3 (1)] $f(\alpha_j)\neq\varnothing$. Значит, $h(\sigma_i)\neq\varnothing$ для любого $\sigma_i\subseteq\alpha_j\in\alpha(\mathfrak{F})$. Поэтому $\sigma_i\in\sigma(\mathfrak{H})$ опять же по [35, лемма 2.3 (1)]. Отсюда $\{\sigma_i\in\sigma \mid \sigma_i\subseteq\alpha_j\in\alpha(\mathfrak{F})\}\subseteq\sigma(\mathfrak{H})$. С другой стороны, если $\sigma_i\in\sigma(\mathfrak{H})$, то $h(\sigma_i)\neq\varnothing$ ввиду [35, лемма 2.3 (1)]. Значит, $f(\alpha_j)\neq\varnothing$ и в силу [35, лемма 2.3(1)] $\alpha_j\in\alpha(\mathfrak{F})$ для любого α_j такого, что $\sigma_i\subseteq\alpha_j$. Следовательно, имеет место включение $\sigma(\mathfrak{H})\subseteq\{\sigma_i\in\sigma \mid \sigma_i\subseteq\alpha_j\in\alpha(\mathfrak{F})\}$. Таким образом, $\sigma(\mathfrak{H})=\{\sigma_i\in\sigma \mid \sigma_i\subseteq\alpha_j\in\alpha(\mathfrak{F})\}$.

Покажем теперь, что $\mathfrak{F}=\mathfrak{H}$. Допустим, что $\mathfrak{F}\setminus\mathfrak{H}\neq\varnothing$, и пусть G – группа минимального порядка из $\mathfrak{F}\setminus\mathfrak{H}$. Тогда G – монолитическая группа с монолитом $P=G^{\mathfrak{H}}$.

Рассмотрим прежде случай, когда P – α-примарная группа. Тогда P – α_j-группа для некоторого $\alpha_j\in\alpha(\mathfrak{F})$ и $O_{\alpha_j',\alpha_j}(G)=O_{\alpha_j}(G)$. Поскольку $G\in\mathfrak{F}$, то

$$G/O_{\alpha_j}(G)=G/O_{\alpha_j',\alpha_j}(G)\in f(\alpha_j)\subseteq\mathfrak{G}_{\alpha_j}f(\alpha_j)=h(\sigma_i)$$

для всякого $\sigma_i\subseteq\alpha_j$. Следовательно, $G\in h(\sigma_i)$ для всякого $\sigma_i\in\sigma(P)$. Поэтому $G/O_{\sigma_i',\sigma_i}(G)\in h(\sigma_i)$. Но $P=G^{\mathfrak{H}}$. Последнее противоречит [19, лемма 3.4]. Значит, группа P – не α-примарна. Тогда $O_{\alpha_j',\alpha_j}(G)=1$ для любого $\alpha_j\in\alpha(P)$. Следовательно, $G\simeq G/O_{\alpha_j',\alpha_j}(G)\in f(\alpha_j)\subseteq\mathfrak{G}_{\alpha_j}f(\alpha_j)=h(\sigma_i)$ для всякого $\sigma_i\subseteq\alpha_j$. Поэтому $G\in h(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i\in\sigma(P)$. Но тогда $G/O_{\sigma_i',\sigma_i}(G)\in h(\sigma_i)$ для всякого $\sigma_i\in\sigma(P)$, что невозможно в силу [19, лемма 3.4]. Полученное противоречие показывает, что данный случай также невозможен. Поэтому $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{H}$.

Пусть теперь $\mathfrak{H}\not\subseteq\mathfrak{F}$ и A – группа минимального порядка из $\mathfrak{H}\setminus\mathfrak{F}$. Тогда A – монолитическая группа с монолитом $R=A^{\mathfrak{F}}$.

Допустим, что R – σ-примарная группа. Тогда R – σ_i-группа для некоторого i и, следовательно, $O_{\sigma_i}(A)=O_{\sigma_i',\sigma_i}(A)$. Поскольку $A\in\mathfrak{H}$, имеем

$$A/O_{\sigma_i}(A)=A/O_{\sigma_i',\sigma_i}(A)\in h(\sigma_i)=\mathfrak{G}_{\alpha_j}f(\alpha_j),$$

где $\sigma_i\subseteq\alpha_j\in\alpha(R)$. Значит, $A\in\mathfrak{G}_{\sigma_i}\left(\mathfrak{G}_{\alpha_j}f(\alpha_j)\right)=(\mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{G}_{\alpha_j})f(\alpha_j)=\mathfrak{G}_{\alpha_j}f(\alpha_j)\subseteq\mathfrak{F}$, что противоречит выбору A. Следовательно, R – не σ-примарная группа. Тогда $O_{\sigma_i',\sigma_i}(A)=1$ для любого $\sigma_i\in\sigma(R)$. Поэтому $A\simeq A/O_{\sigma_i',\sigma_i}(A)\in h(\sigma_i)=\mathfrak{G}_{\alpha_j}f(\alpha_j)\subseteq\mathfrak{F}$. И мы снова получаем противоречие с выбором группы A. Значит, $\mathfrak{H}\subseteq\mathfrak{F}$, и поэтому $\mathfrak{H}=\mathfrak{F}$.

Вторая часть утверждения теоремы является следствием ее первой части. Теорема доказана.

Т е о р е м а 2. *Пусть* $\sigma=\{\sigma_i \mid i\in I\}$ *и* $\alpha=\{\alpha_j \mid j\in J\}$ *– некоторые разбиения множества* $\mathbb{P}$, $\mathfrak{F}=LF_\alpha(t)$, *где t – внутреннее* α*-локальное определение* $\mathfrak{F}$. *Тогда:*

(1) *если* $\sigma\leq\alpha$, *то* $\mathfrak{F}$ *– σ-локальна и* $\mathfrak{F}=LF_\sigma(f)$, *где f – каноническое* σ*-локальное определение формации* $\mathfrak{F}$, *при этом* $f(\sigma_i)=\mathfrak{G}_{\alpha_j}t(\alpha_j)$ *для любого* $\sigma_i\subseteq\alpha_j$;

(2) *если* $\sigma\not\leq\alpha$, *но для всякого* $\sigma_i\in\sigma(\mathfrak{F})$ *найдется* $j=j(i)\in J$ *такое, что* $\sigma_i\subseteq\alpha_j$, *то формация* $\mathfrak{F}$ *– σ-локальна и* $\mathfrak{F}=LF_\sigma(f)$, *где f – каноническое* σ*-локальное определение* $\mathfrak{F}$, *при этом* $f(\sigma_i)=\mathfrak{G}_{\alpha_j}t(\alpha_j)$ *для всех* $\sigma_i\in\sigma(\mathfrak{F})$, $\sigma_i\subseteq\alpha_j$ *и* $f(\sigma_i)=\varnothing$ *для всех* $\sigma_i\notin\sigma(\mathfrak{F})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. (1) Пусть $\mathfrak{F}=LF_\alpha(t)$, где t – внутреннее α-локальное определение формации $\mathfrak{F}$. Поскольку $\sigma\leq\alpha$, то в силу теоремы 1 формация $\mathfrak{F}$ является σ-локальной. Кроме того (см. доказательство теоремы 1), $\mathfrak{F}=LF_\sigma(f)$, где f – такое внутреннее σ-локальное определение $\mathfrak{F}$, что $f(\sigma_i)=\mathfrak{G}_{\alpha_j}t(\alpha_j)$ для любого $\sigma_i\subseteq\alpha_j$. Так как при этом для любого i

$$\mathfrak{G}_{\sigma_i}f(\sigma_i)=\mathfrak{G}_{\sigma_i}\left(\mathfrak{G}_{\alpha_j}t(\alpha_j)\right)=(\mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{G}_{\alpha_j})t(\alpha_j)=\mathfrak{G}_{\alpha_j}t(\alpha_j)=f(\sigma_i),$$

то f – каноническое σ-локальное определение $\mathfrak{F}$. Следовательно, утверждение (1) верно.

(2) Пусть $\sigma\not\leq\alpha$, но для всякого $\sigma_i\in\sigma(\mathfrak{F})$ найдется $j=j(i)\in J$ такое, что $\sigma_i\subseteq\alpha_j$. Тогда $\sigma(\mathfrak{F})\subset\sigma$. Пусть f – такая формационная σ-функция, что $f(\sigma_i)=\mathfrak{G}_{\alpha_j}t(\alpha_j)$ для всех $\sigma_i\in\sigma(\mathfrak{F})$, $\sigma_i\subseteq\alpha_j$ и $f(\sigma_i)=\varnothing$ для всех $\sigma_i\notin\sigma(\mathfrak{F})$. Пусть $\mathfrak{H}=LF_\sigma(f)$. Ввиду [35, лемма 2.3 (1)] имеем $\sigma(\mathfrak{H})=\sigma(\mathfrak{F})$.

Покажем, что $\mathfrak{H} = \mathfrak{F}$. Предположим вначале, что $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H} \neq \varnothing$, и пусть A – группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$. Тогда A – монолитическая группа с монолитом $N = A^{\mathfrak{H}}$.

Допустим, что N – α-примарная группа. Тогда N – α_j-группа для некоторого $\alpha_j \in \alpha(\mathfrak{F})$ и $O_{\alpha_j',\alpha_j}(A) = O_{\alpha_j}(A)$. Поскольку $A \in \mathfrak{F}$, то $A / O_{\alpha_j}(A) = A / O_{\alpha_j',\alpha_j}(A) \in t(\alpha_j) \subseteq \mathfrak{G}_{\alpha_j} t(\alpha_j) = f(\sigma_i)$ для всякого $\sigma_i \subseteq \alpha_j$. Значит, $A \in f(\sigma_i)$ для всякого $\sigma_i \in \sigma(N)$. Поэтому $A / O_{\sigma_i',\sigma_i}(A) \in f(\sigma_i)$. Получили противоречие с [19, лемма 3.4], поскольку $N = A^{\mathfrak{H}}$. Следовательно, N – не α-примарная группа. Поэтому $O_{\alpha_j',\alpha_j}(A) = 1$ для любого $\alpha_j \in \alpha(N)$. Но тогда имеем

$$A \simeq A / O_{\alpha_j',\alpha_j}(A) \in t(\alpha_j) \subseteq \mathfrak{G}_{\alpha_j} t(\alpha_j) = f(\sigma_i)$$

для всякого $\sigma_i \subseteq \alpha_j$. Следовательно, $A \in f(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \sigma(N)$, и мы снова получаем, что $A / O_{\sigma_i',\sigma_i}(A) \in f(\sigma_i)$ для всякого $\sigma_i \in \sigma(N)$. Последнее противоречит [19, лемма 3.4]. Поэтому данный случай невозможен и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

Пусть теперь $\mathfrak{H} \not\subseteq \mathfrak{F}$ и B – группа минимального порядка из $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда B – монолитическая группа с монолитом $R = B^{\mathfrak{F}}$. Допустим, что R – σ-примарная группа. Тогда R – σ_i-группа для некоторого i, и, следовательно, $O_{\sigma_i}(B) = O_{\sigma_i',\sigma_i}(B)$. Поскольку $B \in \mathfrak{H}$, то

$$B / O_{\sigma_i}(B) = B / O_{\sigma_i',\sigma_i}(B) \in f(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\alpha_j} t(\alpha_j),$$

где $\sigma_i \subseteq \alpha_j \in \alpha(R)$. Значит, $B \in \mathfrak{G}_{\sigma_i}\left(\mathfrak{G}_{\alpha_j} t(\alpha_j)\right) = (\mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{G}_{\alpha_j}) t(\alpha_j) = \mathfrak{G}_{\alpha_j} t(\alpha_j) \subseteq \mathfrak{F}$, что противоречит выбору группы B. Следовательно, группа R – не σ-примарна. Тогда $O_{\sigma_i',\sigma_i}(B) = 1$ для любого $\sigma_i \in \sigma(R)$. Поэтому $B \simeq B / O_{\sigma_i',\sigma_i}(B) \in f(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\alpha_j} t(\alpha_j) \subseteq \mathfrak{F}$. И мы снова получаем противоречие с выбором группы B. Значит, $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H} = \mathfrak{F}$. Поскольку при этом для любого i

$$\mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}\left(\mathfrak{G}_{\alpha_j} t(\alpha_j)\right) = (\mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{G}_{\alpha_j}) t(\alpha_j) = \mathfrak{G}_{\alpha_j} t(\alpha_j) = f(\sigma_i),$$

то f – каноническое σ-локальное определение $\mathfrak{F}$ и, следовательно, утверждение (2) теоремы верно. Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть* $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ *и* $\alpha = \{\alpha_j \mid j \in J\}$ *– некоторые разбиения множества* $\mathbb{P}$ *и пусть* $\mathfrak{M} = LF_\alpha(m)$, $\mathfrak{H} = LF_\sigma(h)$, *где* m *– внутреннее* α*-локальное определение формаций* $\mathfrak{M}$, h *– внутреннее* σ*-локальное определение* $\mathfrak{H}$. *Тогда, если* $\sigma \leq \alpha$, *произведения* $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \circ \mathfrak{H}$ *и* $\mathfrak{L} = \mathfrak{H} \circ \mathfrak{M}$ *– σ-локальные формации и* $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$, $\mathfrak{L} = LF_\sigma(l)$, *где* f *и* l *– такие внутренние формационные σ-функции, что*

$$f(\sigma_i) = \begin{cases} \mathfrak{G}_{\alpha_j} m(\alpha_j) \circ \mathfrak{H}, & \text{если } \sigma_i \in \sigma(\mathfrak{M}) \text{ и } \sigma_i \subseteq \alpha_j, \\ h(\sigma_i), & \text{если } \sigma_i \in \sigma \setminus \sigma(\mathfrak{M}), \end{cases}$$

$$l(\sigma_i) = \begin{cases} h(\sigma_i) \circ \mathfrak{M}, & \text{если } \sigma_i \in \sigma(\mathfrak{H}), \\ \mathfrak{G}_{\alpha_j} m(\alpha_j), & \text{если } \sigma_i \in \sigma \setminus \sigma(\mathfrak{H}) \text{ и } \sigma_i \subseteq \alpha_j. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\sigma \leq \alpha$. Ввиду теоремы 2 формация $\mathfrak{M}$ является σ-локальной и $\mathfrak{M} = LF_\sigma(t)$, где t – каноническое σ-локальное определение формации $\mathfrak{M}$, при этом $t(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\alpha_j} m(\alpha_j)$ для любого $\sigma_i \subseteq \alpha_j$. Применяя теперь [10, теорема 1.14], имеем $\mathfrak{M} \circ \mathfrak{H} = LF_\sigma(f)$, $\mathfrak{H} \circ \mathfrak{M} = LF_\sigma(l)$, где f и l – такие формационные σ-функции, что

$$f(\sigma_i) = \begin{cases} t(\sigma_i) \circ \mathfrak{H} = \mathfrak{G}_{\alpha_j} m(\alpha_j) \circ \mathfrak{H}, & \text{если } \sigma_i \in \sigma(\mathfrak{M}) \text{ и } \sigma_i \subseteq \alpha_{\mathrm{j}}, \\ h(\sigma_i), & \text{если } \sigma_i \in \sigma \setminus \sigma(\mathfrak{M}), \end{cases}$$

$$l(\sigma_i) = \begin{cases} h(\sigma_i) \circ \mathfrak{M}, & h(\sigma_i) \circ \mathfrak{M}, \\ t(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\alpha_j} m(\alpha_j), & \text{если } \sigma_i \in \sigma \setminus \sigma(\mathfrak{H}) \ и \ \sigma_i \subseteq \alpha_j. \end{cases}$$

Поскольку формационные σ-функции h и t являются внутренними, то $f(\sigma_i) = t(\sigma_i) \circ \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M} \circ \mathfrak{H}$ при всех $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{M})$ и $\sigma_i \subseteq \alpha_j$, а также $f(\sigma_i) = h(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M} \circ \mathfrak{H}$ при всех $\sigma_i \in \sigma \setminus \sigma(\mathfrak{M})$. Аналогично, $l(\sigma_i) = h(\sigma_i) \circ \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H} \circ \mathfrak{M}$ при всех $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{H})$, а также $l(\sigma_i) = t(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H} \circ \mathfrak{M}$

при всех $\sigma_i \in \sigma \setminus \sigma(\mathfrak{H})$ и $\sigma_i \subseteq \alpha_j$. Поэтому внутренними являются и формационные σ-функции *f* и *l*. Таким образом, $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$ и $\mathfrak{L} = LF_\sigma(l)$, где *f* и *l* – внутренние формационные σ-функции, удовлетворяющие условию теоремы. Теорема доказана.

Частичные σ-алгебры формаций. Пусть θ – полная решетка формаций, σ – некоторое разбиение множества простых чисел $\mathbb{P}$, $\sigma(\theta) = \cup_{\mathfrak{F}\in\theta}\sigma(\mathfrak{F})$. Формации из θ называют θ-формациями.

Формационную σ-функцию *f* называют θ-*значной,* если $f(\sigma_i) \in \theta$ для всех $\sigma_i \in \mathrm{Supp}(f)$.

Через θ_σ будем обозначать множество всех σ-локальных формаций, которые имеют хотя бы одно θ-значное σ-локальное определение, т. е. $\theta_\sigma = \{\mathfrak{F} = LF_\sigma(f) \mid f(\sigma_i) \in \theta$ для любого $\sigma_i \in \mathrm{Supp}(f)\}$.

По определению формация всех единичных групп $(1) = LF_\sigma(n)$, где $n(\sigma_i) = \varnothing$ для всех *i*, принадлежит θ_σ.

Следуя [2, с. 12], полную решетку формаций θ будем называть: 1) *частичной* σ-*алгеброй формаций*, если $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \in \theta$ для любого $\sigma_i \in \sigma(\theta)$ и для всякой формации $\mathfrak{F} \in \theta$ имеет место $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \circ \mathfrak{F} \in \theta$; 2) σ-*алгеброй формаций*, если θ – такая частичная σ-алгебра формаций, что $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{H} \in \theta$ для любых $\mathfrak{F}, \mathfrak{H} \in \theta$.

Предложение 1. *Пусть θ – такая полная решетка формаций, что* $\theta_\sigma \subseteq \theta$. *Тогда:* (1) *если θ – частичная σ-алгебра формаций, то* θ_σ *также является частичной σ-алгеброй формаций;* (2) *если θ – σ-алгебра формаций, то* θ_σ *также является σ-алгеброй формаций.*

Доказательство. (1) Поскольку θ – решетка формаций, то в силу [10, лемма 2.2] пересечение любой совокупности формаций из θ_σ снова принадлежит θ_σ. Пусть $\mathfrak{F}$ – такая θ-формация, что для любой θ-формации $\mathfrak{M}$ имеет место $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. И пусть *f* – такая формационная σ-функция, что $f(\sigma_i) = \mathfrak{F}$ для любого $\sigma_i \in \sigma$. Тогда $LF_\sigma(f) \in \theta_\sigma$. Пусть $\mathfrak{H}$ – произвольная θ_σ-формация. Тогда, очевидно, $\mathfrak{H} \subseteq LF_\sigma(f)$. Следовательно, θ_σ – полная решетка формаций.

Пусть теперь $\sigma_i \in \sigma$ и $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$, где *f* – θ-значное σ-локальное определение формации $\mathfrak{F}$. Поскольку θ – решетка формаций и $\theta_\sigma \subseteq \theta$ по условию, то ввиду [35, лемма 2.4] мы можем считать, что *f* – внутренняя формационная σ-функция. Покажем, что $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{F} \in \theta_\sigma$. Действительно, ввиду [21, лемма 2.1] имеем $\mathfrak{G}_{\sigma_i} = LF_\sigma(m)$, где *m* – такое σ-локальное определение $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$, что $m(\sigma_i) = (1)$ и $m(\sigma_j) = \varnothing$ для любого $j \neq i$. Так как $(1) \in \theta$, то *m* является θ-значным σ-локальным определением $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$. По [10, теорема 1.14] имеем $\mathfrak{H} = LF_\sigma(h)$, где *h* – такое σ-локальное определение $\mathfrak{H}$, что $h(\sigma_i) = m(\sigma_i) \circ \mathfrak{F} = (1)\mathfrak{F} = \mathfrak{F} \in \theta_\sigma \subseteq \theta$ и $h(\sigma_j) = f(\sigma_j) \in \theta$ для любого $\sigma_j \in \sigma(\mathfrak{F}) \setminus \{\sigma_i\}$. Отсюда $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{F} \in \theta_\sigma$. Таким образом, θ_σ является частичной σ-алгеброй формаций, т. е. имеет место (1).

(2) Ввиду утверждения (1) достаточно доказать, что для любых формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{F}$ из θ_σ их произведение $\mathfrak{M} \circ \mathfrak{F}$ принадлежит θ_σ. Пусть $\mathfrak{M} = LF_\sigma(m)$ и $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$, где *m* и *f* – внутренние θ-значные σ-локальные определения формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{F}$ соответственно, $\mathfrak{H} = \mathfrak{M} \circ \mathfrak{F}$. Тогда по [10, теорема 1.14] имеем $\mathfrak{H} = LF_\sigma(h)$, где *h* – такое σ-локальное определение формации $\mathfrak{H}$, что $h(\sigma_i) = m(\sigma_i) \circ \mathfrak{F}$ для любого $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{M})$ и $h(\sigma_i) = f(\sigma_i)$ для любого $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F}) \setminus \sigma(\mathfrak{M})$. Так как по условию $\theta_\sigma \subseteq \theta$, то $h(\sigma_i) = m(\sigma_i) \circ \mathfrak{F} \in \theta$. Значит, *h* – θ-значное σ-локальное определение формации $\mathfrak{H}$. Следовательно, $\mathfrak{H} \in \theta_\sigma$. Поэтому θ_σ – σ-алгебра формаций и утверждение (2) верно. Предложение доказано.

Следствие 1. *При всяком разбиении σ множества* $\mathbb{P}$ *полная решетка* l_σ *всех σ-локальных формаций является σ-алгеброй формаций.*

Пусть σ – некоторое разбиение множества $\mathbb{P}$, θ – σ-алгебра формаций, $\mathfrak{M} \in \theta_\sigma$. Через $\theta_\sigma(\mathfrak{M})$ будем обозначать множество всех θ_σ-формаций из $\mathfrak{M}$. В частности, если θ – решетка всех формаций, то вместо символа $\theta_\sigma(\mathfrak{M})$ будем использовать символ $A_\sigma(\mathfrak{M})$, т. е. $A_\sigma(\mathfrak{M})$ – множество всех σ-локальных формаций из $\mathfrak{M} \in l_\sigma$.

Напомним (см. [36] и [1, с. 57]), что умножение формаций в $\mathfrak{M}$ определяется следующим образом: $\mathfrak{F} \underset{\mathfrak{M}}{\circ} \mathfrak{H} = \mathfrak{F} \circ \mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}$.

Лемма 2. *Пусть σ – некоторое разбиение множества* $\mathbb{P}$, *θ – σ-алгебра формаций,* $\mathfrak{M} \in \theta_\sigma$. *Тогда справедливы следующие утверждения:* (1) $\theta_\sigma(\mathfrak{M})$ *является σ-алгеброй формаций;* (2) *если* $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$ *и* $\mathfrak{H} = LF_\sigma(h)$ *– формации из* $\theta_\sigma(\mathfrak{M})$, *где f и h – некоторые внутренние θ-значные σ-локальные определения формаций* $\mathfrak{F}$ *и* $\mathfrak{H}$ *соответственно, то* $\mathfrak{F} \underset{\mathfrak{M}}{\circ} \mathfrak{H} = LF_\sigma(l)$, *где l – такая внутренняя θ-значная формационная σ-функция, что*

$$l(\sigma_i)=\begin{cases}\big(f(\sigma_j)\circ\mathfrak{H}\big)\cap m(\sigma_i), & \text{если } \sigma_j\in\sigma(\mathfrak{F}),\\ h(\sigma_j)\cap m(\sigma_i), & \text{если } \sigma_j\in\sigma\setminus\sigma(\mathfrak{F}).\end{cases}$$

Доказательство. (1) Поскольку формация $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ является наследственной, то с учетом [19, теорема 1.1] $\mathfrak{G}_{\sigma_i}\subseteq\mathfrak{M}$ для любого $\sigma_i\in\sigma(\mathfrak{M})$. Так как при этом формация $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ σ-локальна [10, пример 1.2 (iii)] и $\mathfrak{G}_{\sigma_i}=LF_\sigma(g)$, где $g(\sigma_i)=\mathfrak{G}_{\sigma_i}\in\theta$ и $g(\sigma_k)=\varnothing$ для любого $k\neq j$, то $\mathfrak{G}_{\sigma_i}\in\theta_\sigma(\mathfrak{M})$. Ввиду предложения 1(2) θ_σ является σ-алгеброй формаций. Поэтому для любой формации $\mathfrak{L}\in\theta_\sigma(\mathfrak{M})$ имеем $\mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{L}\in\theta_\sigma$, и, следовательно, $\mathfrak{G}_{\sigma_i}\underset{\mathfrak{M}}{\circ}\mathfrak{L}=\mathfrak{G}_{\sigma_i}\circ\mathfrak{L}\cap\mathfrak{M}=\mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{L}\cap\mathfrak{M}\in\theta_\sigma(\mathfrak{M})$.

Пусть $\mathfrak{F}=LF_\sigma(f)$ и $\mathfrak{H}=LF_\sigma(h)$ – формации из $\theta_\sigma(\mathfrak{M})$, где f и h – некоторые внутренние θ-значные σ-локальные определения формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ соответственно. Тогда в силу [10, теорема 1.14] имеем $\mathfrak{F}\circ\mathfrak{H}=LF_\sigma(x)$, где x – такая формационная σ-функция, что

$$x(\sigma_i)=\begin{cases}f(\sigma_j)\circ\mathfrak{H}, & \text{если } \sigma_j\in\sigma(\mathfrak{F}),\\ h(\sigma_j), & \text{если } \sigma_j\in\sigma\setminus\sigma(\mathfrak{F}).\end{cases}$$

Заметим, что x является внутренним θ-значным σ-локальным определением формации $\mathfrak{F}\circ\mathfrak{H}$. Пусть m – некоторое внутреннее θ-значное σ-локальное определение формации $\mathfrak{M}$. И пусть $\mathfrak{L}=LF_\sigma(x)\cap\mathfrak{M}$. В силу [35, лемма 2.2] имеем $\mathfrak{L}=LF_\sigma(l)$, где $l(\sigma_i)=x(\sigma_i)\cap m(\sigma_i)$ для любого j. Значит, l – внутреннее θ-значное σ-локальное определение формации $\mathfrak{L}$, при этом

$$l(\sigma_i)=\begin{cases}\big(f(\sigma_j)\circ\mathfrak{H}\big)\cap m(\sigma_i), & \text{если } \sigma_j\in\sigma(\mathfrak{F}),\\ h(\sigma_j)\cap m(\sigma_i), & \text{если } \sigma_j\in\sigma\setminus\sigma(\mathfrak{F}).\end{cases}$$

Следовательно, $\mathfrak{L}=\mathfrak{F}\circ\mathfrak{H}\cap\mathfrak{M}=\mathfrak{F}\underset{\mathfrak{M}}{\circ}\mathfrak{H}\in\theta_\sigma(\mathfrak{M})$. Таким образом, $\theta_\sigma(\mathfrak{M})$ – σ-алгебра.

(2) См. доказательство (1). Лемма доказана.

Теорема 4. *Пусть σ и α – некоторые разбиения множества* $\mathbb{P}$, θ – α-*алгебра формаций,* $\mathfrak{M}\in\theta_\alpha$. *Тогда, если* θ – σ-*алгебра формаций и* $\sigma\le\alpha$, *то* $\theta_\alpha(\mathfrak{M})$ – σ-*подалгебра в* $\theta_\sigma(\mathfrak{M})$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}_s=LF_\alpha(f_s)$ – формация из $\theta_\alpha(\mathfrak{M})$, где f_s – некоторое внутреннее θ-значное α-локальное определение формации $\mathfrak{F}_s$, $s=1,2$. По теореме 2 (1) формация $\mathfrak{F}_s$ является σ-локальной и $\mathfrak{F}_s=LF_\sigma(t_s)$, где t_s – каноническое σ-локальное определение $\mathfrak{F}_s$, при этом $t_s(\sigma_i)=\mathfrak{G}_{\alpha_j}f_s(\alpha_j)$ для любого $\sigma_i\subseteq\alpha_j$. Поскольку по условию теоремы θ – α-алгебра формаций, то произведение $\mathfrak{G}_{\alpha_j}f_s(\alpha_j)$ является θ-формацией. Значит, t – θ-значное σ-локальное определение формации $\mathfrak{F}_s$. Следовательно, $\mathfrak{F}_s\in\theta_\sigma(\mathfrak{M})$. Поэтому $\theta_\alpha(\mathfrak{M})\subseteq\theta_\sigma(\mathfrak{M})$.

В силу леммы 2 (2) имеем $\mathfrak{F}_1\underset{\mathfrak{M}}{\circ}\mathfrak{F}_2=LF_\sigma(x)$, где x – такая внутренняя θ-значная формационная σ-функция, что

$$x(\sigma_i)=\begin{cases}\big(t_1(\sigma_i)\circ\mathfrak{H}\big)\cap m(\sigma_i), & \text{если } \sigma_i\in\sigma(\mathfrak{F}),\\ t_2(\sigma_i)\cap m(\sigma_i), & \text{если } \sigma_i\in\sigma\setminus\sigma(\mathfrak{F}).\end{cases}$$

Поэтому $\mathfrak{F}_1\underset{\mathfrak{M}}{\circ}\mathfrak{F}_2\in\theta_\sigma(\mathfrak{M})$ и $\theta_\alpha(\mathfrak{M})$ – σ-подалгебра в $\theta_\sigma(\mathfrak{M})$. Теорема доказана.

Следствие 2. *Пусть σ и α – некоторые разбиения множества* $\mathbb{P}$. *Тогда, если* $\sigma\le\alpha$, *полугруппа* $A_\alpha(\mathfrak{M})$ *всех α-локальных формаций является подполугруппой полугруппы* $A_\sigma(\mathfrak{M})$ *всех σ-локальных формаций.*

Напомним понятие прямого разложения класса групп (см. [2, с. 171]). Пусть $\{\mathfrak{F}_j\mid j\in J\}$ – некоторый непустой набор подклассов $\mathfrak{F}_j\subseteq\mathfrak{F}$ такой, что $\mathfrak{F}_{j_1}\cap\mathfrak{F}_{j_2}=(1)$ для любого $j_1\neq j_2$ из J. Если, кроме того, каждая группа $G\in\mathfrak{F}$ имеет вид $G=A_{j_1}\times\ldots\times A_{j_t}$, где $A_{j_1}\in\mathfrak{F}_{j_1},\ldots,A_{j_t}\in\mathfrak{F}_{j_t}$ для некоторого $j_1,\ldots,j_t\in J$, то пишут, что $\mathfrak{F}=\oplus_{j\in J}\mathfrak{F}_j$ (в частности, $\mathfrak{F}=\mathfrak{F}_1\oplus\ldots\oplus\mathfrak{F}_t$, если $J=\{1,\ldots,t\}$).

Лемма 3. *Пусть* $\mathfrak{F}=LF_\sigma(f)$, $\Pi=\sigma(\mathfrak{F})$. *Тогда* $\mathfrak{F}\cap\mathfrak{N}_\sigma=\mathfrak{N}_\Pi$ *и* $\Pi=\{\sigma_i\mid f(\sigma_i)\neq\varnothing\}$.

Доказательство. Ввиду [35, лемма 2.3(1)] имеем $\Pi=\{\sigma_i\mid f(\sigma_i)\neq\varnothing\}$. Поскольку формация $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ является наследственной, то $\mathfrak{G}_{\sigma_i}\subseteq\mathfrak{G}_{\sigma_i}(f(\sigma_i)\cap\mathfrak{F})$ и по [35, лемма 2.3 (5)] имеем

$$\mathfrak{G}_{\sigma_i} \subseteq \mathfrak{G}_{\sigma_i}(f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{F}$$

для всякого $\sigma_i \in \Pi$. Поэтому $\mathfrak{N}_\Pi = \oplus_{\sigma_i \in \Pi} \mathfrak{G}_i \subseteq \mathfrak{F}$. С другой стороны, поскольку $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}_\sigma \subseteq \mathfrak{N}_\Pi$, то мы имеем искомое равенство $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}_\sigma = \mathfrak{N}_\Pi$. Лемма доказана.

Теорема 5. *Пусть θ – σ-алгебра формаций, $\mathfrak{M} \in \theta_\sigma$ – некоторая σ-разрешимая формация. Тогда и только тогда σ-алгебра $\theta_\sigma(\mathfrak{M})$ является коммутативной полугруппой, когда $\mathfrak{M}$ σ-нильпотентна.*

Доказательство. Необходимость. Пусть выполняются условия теоремы и σ-алгебра $\theta_\sigma(\mathfrak{M})$ является коммутативной полугруппой. Покажем, что в этом случае формация $\mathfrak{M}$ σ-нильпотентна. Действительно, если $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{N}_\sigma$, то по [26, следствие 3.9] в формацию $\mathfrak{M}$ входит по меньшей мере одна минимальная σ-локальная не σ-нильпотентная подформация $\mathfrak{L}$. В силу [21, следствие 2.9] имеем $\mathfrak{L} = l_\sigma \mathrm{form}(G)$ и выполняется одно из следующих условий: 1) G – простая не σ-примарная группа; 2) $G = P \rtimes K$, где $P = C_G(P)$ – p-группа, $p \in \sigma_i$, а K – простая σ_j-группа, $j \neq i$. Поскольку формация $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{M}$, то $\mathfrak{L}$ – σ-разрешима. Следовательно, группа G удовлетворяет условию 2) и $\sigma(\mathfrak{L}) = \{\sigma_i, \sigma_j\} \subseteq \sigma(\mathfrak{M})$. Значит, $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ и $\mathfrak{G}_{\sigma_j}$ – σ-локальные подформации из $\mathfrak{M}$ в силу [10, пример 1.2 (iii)] и, очевидно, $\mathfrak{G}_{\sigma_i}, \mathfrak{G}_{\sigma_j} \in \theta_\sigma(\mathfrak{M})$. Значит, имеет место $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \underset{\mathfrak{M}}{\circ} \mathfrak{G}_{\sigma_j} = \mathfrak{G}_{\sigma_j} \underset{\mathfrak{M}}{\circ} \mathfrak{G}_{\sigma_i}$. Поскольку $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{G}_{\sigma_j} \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{G}_{\sigma_i} \underset{\mathfrak{M}}{\circ} \mathfrak{G}_{\sigma_j}$, то $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{G}_{\sigma_j} \underset{\mathfrak{M}}{\circ} \mathfrak{G}_{\sigma_i}$. Следовательно, $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{G}_{\sigma_j}\mathfrak{G}_{\sigma_i}$. Поэтому группа G принадлежит формации $\mathfrak{G}_{\sigma_j}\mathfrak{G}_{\sigma_i}$. Значит, $G^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}} \in \mathfrak{G}_{\sigma_j}$. Из описания группы G следует, что $G^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}} = G$ и $G \notin \mathfrak{G}_{\sigma_j}$. Полученное противоречие показывает, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}_\sigma$.

Достаточность. Пусть теперь формация $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}_\sigma$ и пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – некоторые σ-локальные подформации из $\theta_\sigma(\mathfrak{M})$. Полугруппой σ-алгебра $\theta_\sigma(\mathfrak{M})$ является в силу [10, теорема 1.13)]. Покажем, что $\theta_\sigma(\mathfrak{M})$ коммутативна. Действительно, ввиду леммы 3 имеем

$$\mathfrak{F} \circ \mathfrak{H} \cap \mathfrak{N}_\sigma = \mathfrak{N}_{\sigma(\mathfrak{F} \cup \mathfrak{H})} \text{ и } \mathfrak{H} \circ \mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}_\sigma = \mathfrak{N}_{\sigma(\mathfrak{H} \cup \mathfrak{F})}.$$

Следовательно, поскольку $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{H} \cap \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}_\sigma$ и $\mathfrak{H} \circ \mathfrak{F} \cap \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}_\sigma$, то

$$\mathfrak{F} \underset{\mathfrak{M}}{\circ} \mathfrak{H} = \mathfrak{F} \circ \mathfrak{H} \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{F} \circ \mathfrak{H} \cap \mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_\sigma = (\mathfrak{F} \circ \mathfrak{H} \cap \mathfrak{N}_\sigma) \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{N}_{\sigma(\mathfrak{F} \cup \mathfrak{H})} \cap \mathfrak{M} =$$

$$= \mathfrak{N}_{\sigma(\mathfrak{H} \cup \mathfrak{F})} \cap \mathfrak{M} = (\mathfrak{H} \circ \mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}_\sigma) \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{H} \circ \mathfrak{F} \cap \mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_\sigma = \mathfrak{H} \circ \mathfrak{F} \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{H} \underset{\mathfrak{M}}{\circ} \mathfrak{F}.$$

Таким образом, $\mathfrak{F} \underset{\mathfrak{M}}{\circ} \mathfrak{H} = \mathfrak{H} \underset{\mathfrak{M}}{\circ} \mathfrak{F}$ и $\theta_\sigma(\mathfrak{M})$ – коммутативная полугруппа. Теорема доказана.

Следствие 3 [37, теорема 3.2]. *Пусть $\mathfrak{M}$ – разрешимая локальная формация. Тогда и только тогда $A_l(\mathfrak{M})$ является коммутативной полугруппой, когда $\mathfrak{M}$ нильпотентна.*

Обобщенно локальные классы Фиттинга. Напомним, что класс групп $\mathfrak{H}$ называется *классом Фиттинга*, если он замкнут относительно взятия нормальных подгрупп и произведения нормальных $\mathfrak{H}$-подгрупп. Для непустого класса Фиттинга $\mathfrak{H}$ каждая группа G имеет наибольшую нормальную $\mathfrak{H}$-подгруппу $G_\mathfrak{H}$, которая называется *$\mathfrak{H}$-радикалом группы G.*

Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга и $\mathfrak{H}$ – класс групп. Тогда *радикальное произведение* $\mathfrak{F} \lozenge \mathfrak{H}$ классов $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ определяется следующим образом: $\mathfrak{F} \lozenge \mathfrak{H} = (G \mid G / G_\mathfrak{F} \in \mathfrak{H})$.

Свойства радикальных произведений классов групп описывает лемма 4. Используя их в данной работе, мы, как правило, не будем явно ссылаться на утверждения данной леммы.

Лемма 4 ([3, гл. IX, 1.12; 33, предложение 2.2.11]). *Пусть $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{M}$ – классы Фиттинга. Тогда справедливы утверждения:* (1) $\mathfrak{F} \lozenge \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{H}$ *и* $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F} \lozenge \mathfrak{H}$, *если $\mathfrak{H}$ непусто;* (2) *если класс $\mathfrak{H}$ – гомоморф, то* $\mathfrak{F} \lozenge \mathfrak{H} = \mathfrak{F}\mathfrak{H}$ *и* $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F} \lozenge \mathfrak{H}$, *если $\mathfrak{F}$ непусто;* (3) $\mathfrak{F} \lozenge \mathfrak{H}$ *– класс Фиттинга;* (4) *для всех* $G \in \mathfrak{G}$, *$\mathfrak{H}$-радикал группы* $G / G_\mathfrak{F}$ *равен* $G_{\mathfrak{F} \lozenge \mathfrak{H}} / G_\mathfrak{F}$; (5) $(\mathfrak{F} \lozenge \mathfrak{H}) \lozenge \mathfrak{M} = \mathfrak{F} \lozenge (\mathfrak{H} \lozenge \mathfrak{M})$.

Напомним [30], что всякую функцию f вида $f: \sigma \to$ {классы Фиттинга} называют *σ-функцией Хартли*, или *H_σ-функцией.* Для любой H_σ-функции f класс $LR_\sigma(f)$ определяют следующим образом: $LR_\sigma(f) = (G \mid G = 1$ либо $G \neq 1$ и $G^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{G}_{\sigma_{i'}}} \in f(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \sigma(G))$, где $G^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{G}_{\sigma_{i'}}}$ – $\mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{G}_{\sigma_{i'}}$-корадикал группы G.

Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга. Если найдется такая H_σ-функция f, что $\mathfrak{F} = LR_\sigma(f)$, то говорят [30], что класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является *σ-локальным*, а f – *σ-локальное задание класса* $\mathfrak{F}$.

H_σ-функцию h называют [30, определение 1.3] *внутренней*, если $h(\sigma_i) \subseteq LR_\sigma(h)$ для всех i; *полной*, если $h(\sigma_i) = h(\sigma_i)\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ для всех i; *полной внутренней*, если h является полной и внутренней H_σ-функцией.

Доказательство следующей леммы осуществляется прямой проверкой.

Лемма 5. *Пусть* $\mathfrak{H} = LR_\sigma(h)$ *и* t *– такая* H_σ*-функция, что* $t(\sigma_i) = h(\sigma_i) \cap \mathfrak{H}$ *для всех* i. *Тогда* t *– внутреннее σ-локальное задание класса Фиттинга* $\mathfrak{H}$.

Лемма 6. *Пусть* $\mathfrak{H} = LR_\sigma(h)$ *– σ-локальный класс Фиттинга,* G *– группа и* $G_\mathfrak{H} \neq G$. *Тогда найдется такое* $\sigma_i \in \sigma(G/G_\mathfrak{H})$, *что* $G^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{G}_{\sigma_i'}} \notin h(\sigma_i)$.

Доказательство. Пусть $\sigma_i \in \sigma(G)$ такое, что $G^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{G}_{\sigma_i'}} \notin h(\sigma_i)$ и $H = G_\mathfrak{H}$. Тогда, поскольку $H \in \mathfrak{H}$, то $H^{\mathfrak{G}_{\sigma_j}\mathfrak{G}_{\sigma_j'}} \in h(\sigma_j)$ при всяком $\sigma_j \in \sigma(H)$. Пусть $\sigma_j \in \sigma(H) \setminus \sigma(G/H)$. Тогда в силу [30, лемма 2.9] имеет место $G^{\mathfrak{G}_{\sigma_j}\mathfrak{G}_{\sigma_j'}} = H^{\mathfrak{G}_{\sigma_j}\mathfrak{G}_{\sigma_j'}}$. Значит, $G^{\mathfrak{G}_{\sigma_j}\mathfrak{G}_{\sigma_j'}} \in h(\sigma_j)$ для любого $\sigma_j \in \sigma(H) \setminus \sigma(G/H)$. Поэтому $\sigma_i \in \sigma(G/H)$. Лемма доказана.

Теорема 6. *Пусть* $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ *и* $\alpha = \{\alpha_j \mid j \in J\}$ *– некоторые разбиения множества* $\mathbb{P}$. *Тогда в том и только в том случае всякий α-локальный класс Фиттинга является σ-локальным, когда* $\sigma \leq \alpha$. *В частности, поскольку для всякого разбиения σ имеет место* $\sigma^1 \leq \sigma$, *то любой σ-локальный класс Фиттинга является локальным.*

Доказательство. Необходимость. Допустим, что $\sigma \not\leq \alpha$, но всякий α-локальный класс Фиттинга является σ-локальным. Тогда найдется такое $i \in I$, что $\sigma_i \not\subseteq \alpha_j$ для любого $j \in J$. Пусть $\alpha_k \in \alpha$ такое, что $\sigma_i \cap \alpha_k \neq \varnothing$. Ввиду [30, пример 1.2] класс Фиттинга $\mathfrak{G}_{\alpha_k}$ является α-локальным. Поэтому по условию теоремы класс Фиттинга $\mathfrak{G}_{\alpha_k}$ является также и σ-локальным. Тогда $\mathfrak{G}_{\alpha_k} = LR_\sigma(g)$, где g – некоторое σ-локальное задание класса Фиттинга $\mathfrak{G}_{\alpha_k}$. Учитывая лемму 5, мы можем считать, что H_σ-функция g является внутренней, т. е. $g(\sigma_i) \subseteq LR_\sigma(g) = \mathfrak{G}_{\alpha_k}$. Поскольку $\sigma_i \cap \alpha_k \neq \varnothing$, то $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{G}_{\alpha_k})$ и $g(\sigma_i) \neq \varnothing$ по [30, лемма 3.1 (a)]. Так как класс Фиттинга $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ является наследственным, то $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \subseteq g(\sigma_i)\mathfrak{G}_{\sigma_i}$. Тогда, в силу [30, лемма 3.2], имеем

$$\mathfrak{G}_{\sigma_i} \subseteq g(\sigma_i)\mathfrak{G}_{\sigma_i} \subseteq LR_\sigma(g) = \mathfrak{G}_{\alpha_k}.$$

Отсюда $\sigma_i \subseteq \alpha_k$. Противоречие. Следовательно, $\sigma \leq \alpha$.

Достаточность. Пусть $\sigma \leq \alpha$ и $\mathfrak{F} = LR_\alpha(f)$ – неединичный α-локальный класс Фиттинга, где f – некоторое внутреннее α-локальное задание $\mathfrak{F}$. Покажем, что класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ σ-локален. Пусть h – такая H_σ-функция, что $h(\sigma_i) = f(\alpha_j)\mathfrak{G}_{\alpha_j}$ для любого $\sigma_i \subseteq \alpha_j$. Ввиду [30, лемма 3.2] имеем $h(\sigma_i) = f(\alpha_j)\mathfrak{G}_{\alpha_j} \subseteq \mathfrak{F}$. Так как σ и α – разбиения множества $\mathbb{P}$ и $\sigma \leq \alpha$, то для любого α_j имеем $\alpha_j = \cup_{\sigma_i \subseteq \alpha_j} \sigma_i$.

Пусть $\mathfrak{H} = LR_\sigma(h)$. Заметим, что $\sigma(\mathfrak{H}) = \{\sigma_i \in \sigma \mid \sigma_i \subseteq \alpha_j \in \alpha(\mathfrak{F})\}$. Действительно, если $\alpha_j \in \alpha(\mathfrak{F})$, то в силу [30, лемма 3.1 (a)] имеем $f(\alpha_j) \neq \varnothing$. Следовательно, $h(\sigma_i) \neq \varnothing$ для любого $\sigma_i \subseteq \alpha_j \in \alpha(\mathfrak{F})$. Тогда $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{H})$ по [30, лемма 3.1 (a)]. Значит, $\{\sigma_i \in \sigma \mid \sigma_i \subseteq \alpha_j \in \alpha(\mathfrak{F})\} \subseteq \sigma(\mathfrak{H})$. Обратно, если $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{H})$, то, применяя [30, лемма 3.1 (a)], имеем $h(\sigma_i) \neq \varnothing$. Следовательно, $f(\alpha_j) \neq \varnothing$ для всякого α_j такого, что $\sigma_i \subseteq \alpha_j$. Тогда $\alpha_j \in \alpha(\mathfrak{F})$ в силу [30, лемма 3.1 (a)]. Поэтому $\sigma(\mathfrak{H}) \subseteq \{\sigma_i \in \sigma \mid \sigma_i \subseteq \alpha_j \in \alpha(\mathfrak{F})\}$. Таким образом, $\sigma(\mathfrak{H}) = \{\sigma_i \in \sigma \mid \sigma_i \subseteq \alpha_j \in \alpha(\mathfrak{F})\}$.

Докажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Допустим, что $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H} \neq \varnothing$ и пусть G – группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$. Тогда G – комонолитическая группа с комонолитом $P = G_\mathfrak{H}$.

Пусть G/P – α-примарная группа. Тогда G/P – α_j-группа для некоторого $\alpha_j \in \alpha(\mathfrak{F})$ и $G^{\mathfrak{G}_{\alpha_j}\mathfrak{G}_{\alpha_j'}} = G^{\mathfrak{G}_{\alpha_j}}$. Поскольку $G \in \mathfrak{F}$, то $G^{\mathfrak{G}_{\alpha_j}} = G^{\mathfrak{G}_{\alpha_j}\mathfrak{G}_{\alpha_j'}} \in f(\alpha_j) \subseteq f(\alpha_j)\mathfrak{G}_{\alpha_j} = h(\sigma_i)$ для всякого $\sigma_i \subseteq \alpha_j$. Значит, $G \in h(\sigma_i)$ для всякого $\sigma_i \in \sigma(G/P)$. Поэтому $G^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{G}_{\sigma_i'}} \in h(\sigma_i)$. Но $P = G_\mathfrak{H}$. Последнее противоречит лемме 6. Значит, группа G/P – не α-примарна. Тогда $G^{\mathfrak{G}_{\alpha_j}\mathfrak{G}_{\alpha_j'}} = G$ для любого $\alpha_j \in \alpha(G/P)$. Следовательно, $G = G^{\mathfrak{G}_{\alpha_j}\mathfrak{G}_{\alpha_j'}} \in f(\alpha_j) \subseteq f(\alpha_j)\mathfrak{G}_{\alpha_j} = h(\sigma_i)$ для всякого $\sigma_i \subseteq \alpha_j$. Поэтому $G \in h(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \sigma(G/P)$. Но тогда $G^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{G}_{\sigma_i'}} \in h(\sigma_i)$ для всякого $\sigma_i \in \sigma(G/P)$, и мы снова получаем противоречие с леммой 6. Поэтому $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

Предположим теперь $\mathfrak{H} \not\subseteq \mathfrak{F}$ и A – группа минимального порядка из $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда A – комонолитическая группа с комонолитом $R = A_{\mathfrak{F}}$. Допустим, что A/R – σ-примарная группа. Тогда A/R – σ_i-группа для некоторого i и, следовательно, $A^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}} = A^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{G}_{\sigma_i'}}$. Поскольку $A \in \mathfrak{H}$, то $A^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}} = A^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{G}_{\sigma_i'}} \in h(\sigma_i) = f(\alpha_j)\mathfrak{G}_{\alpha_j}$, где $\sigma_i \subseteq \alpha_j \in \alpha(A/R)$. Следовательно, $A \in \left(f(\alpha_j)\mathfrak{G}_{\alpha_j}\right)\mathfrak{G}_{\sigma_i} = f(\alpha_j)(\mathfrak{G}_{\alpha_j}\mathfrak{G}_{\sigma_i}) = f(\alpha_j)\mathfrak{G}_{\alpha_j} \subseteq \mathfrak{F}$, что противоречит выбору A. Значит, A/R – не σ-примарная группа. Тогда $A^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{G}_{\sigma_i'}} = A$ для любого $\sigma_i \in \sigma(A/R)$. Поэтому $A = A^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{G}_{\sigma_i'}} \in h(\sigma_i) = f(\alpha_j)\mathfrak{G}_{\alpha_j} \subseteq \mathfrak{F}$. И мы снова получаем противоречие с выбором группы A. Поэтому $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H} = \mathfrak{F}$.

Вторая часть утверждения теоремы является следствием первой ее части. Теорема доказана.

Т е о р е м а 7. *Пусть* $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ *и* $\alpha = \{\alpha_j \mid j \in J\}$ *– некоторые разбиения* $\mathbb{P}$, $\mathfrak{F} = LR_\alpha(t)$, *где t – внутреннее* α*-локальное задание* $\mathfrak{F}$. *Тогда:* (1) *если* $\sigma \le \alpha$, *то класс Фиттинга* $\mathfrak{F}$ *–* σ*-локален и* $\mathfrak{F} = LR_\sigma(f)$, *где f – полное внутреннее* σ*-локальное задание* $\mathfrak{F}$, *при этом* $f(\sigma_i) = t(\alpha_j)\mathfrak{G}_{\alpha_j}$ *для любого* $\sigma_i \subseteq \alpha_j$; (2) *если* $\sigma \not\le \alpha$, *но для всякого* $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})$ *найдется* $j = j(i) \in J$ *такое, что* $\sigma_i \subseteq \alpha_j$, *то класс Фиттинга* $\mathfrak{F}$ *–* σ*-локален и* $\mathfrak{F} = LR_\sigma(f)$, *где f – полное внутреннее* σ*-локальное задание* $\mathfrak{F}$, *при этом* $f(\sigma_i) = t(\alpha_j)\mathfrak{G}_{\alpha_j}$ *для всех* $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})$, $\sigma_i \subseteq \alpha_j$ *и* $f(\sigma_i) = \varnothing$ *для всех* $\sigma_i \notin \sigma(\mathfrak{F})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. (1) Пусть $\mathfrak{F} = LR_\alpha(t)$, где t – внутреннее α-локальное задание класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Поскольку $\sigma \le \alpha$, то в силу теоремы 6 класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является σ-локальным. Кроме того (см. доказательство теоремы 6), $\mathfrak{F} = LR_\sigma(f)$, где f – такая внутренняя H_σ-функция, что $f(\sigma_i) = t(\alpha_j)\mathfrak{G}_{\alpha_j}$ для любого $\sigma_i \subseteq \alpha_j$. Так как при этом для любого i

$$f(\sigma_i)\mathfrak{G}_{\sigma_i} = \left(t(\alpha_j)\mathfrak{G}_{\alpha_j}\right)\mathfrak{G}_{\sigma_i} = t(\alpha_j)(\mathfrak{G}_{\alpha_j}\mathfrak{G}_{\sigma_i}) = t(\alpha_j)\mathfrak{G}_{\alpha_j} = f(\sigma_i),$$

то f – полное внутреннее σ-локальное задание $\mathfrak{F}$. Значит, утверждение (1) верно.

(2) Пусть $\sigma \not\le \alpha$, но для всякого $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})$ найдется $j = j(i) \in J$ такое, что $\sigma_i \subseteq \alpha_j$. Тогда $\sigma(\mathfrak{F}) \subset \sigma$. Пусть f – такая H_σ-функция, что $f(\sigma_i) = t(\alpha_j)\mathfrak{G}_{\alpha_j}$ для всех $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})$, $\sigma_i \subseteq \alpha_j$ и $f(\sigma_i) = \varnothing$ для всех $\sigma_i \notin \sigma(\mathfrak{F})$. Пусть $\mathfrak{H} = LR_\sigma(f)$. Ввиду [30, лемма 3.1 (a)] имеем $\sigma(\mathfrak{H}) = \sigma(\mathfrak{F})$.

Покажем, что $\mathfrak{H} = \mathfrak{F}$. Предположим вначале, что $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H} \ne \varnothing$ и пусть A – группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$. Тогда A – комонолитическая группа с комонолитом $N = A_{\mathfrak{H}}$.

Допустим, что A/N – α-примарная группа. Тогда A/N – α_j-группа для некоторого $\alpha_j \in \alpha(\mathfrak{F})$ и $A^{\mathfrak{G}_{\alpha_j}\mathfrak{G}_{\alpha_j'}} = A^{\mathfrak{G}_{\alpha_j}}$. Поскольку $A \in \mathfrak{F}$, то $A^{\mathfrak{G}_{\alpha_j}} = A^{\mathfrak{G}_{\alpha_j}\mathfrak{G}_{\alpha_j'}} \in t(\alpha_j) \subseteq t(\alpha_j)\mathfrak{G}_{\alpha_j} = f(\sigma_i)$ для всякого $\sigma_i \subseteq \alpha_j$. Значит, $A \in f(\sigma_i)$ для всякого $\sigma_i \in \sigma(A/N)$. Поэтому $A^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{G}_{\sigma_i'}} \in f(\sigma_i)$. Но поскольку $N = A_{\mathfrak{H}}$, то последнее противоречит лемме 6. Следовательно, A/N – не α-примарная группа. Поэтому $A^{\mathfrak{G}_{\alpha_j}\mathfrak{G}_{\alpha_j'}} = A$ для любого $\alpha_j \in \alpha(A/N)$. Значит,

$$A = A^{\mathfrak{G}_{\alpha_j}\mathfrak{G}_{\alpha_j'}} \in t(\alpha_j) \subseteq t(\alpha_j)\mathfrak{G}_{\alpha_j} = f(\sigma_i)$$

для всякого $\sigma_i \subseteq \alpha_j$. Поэтому $A \in f(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \sigma(A/N)$, и мы снова получаем, что $A^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{G}_{\sigma_i'}} \in f(\sigma_i)$ для всякого $\sigma_i \in \sigma(A/N)$. Последнее противоречит лемме 6. Поэтому данный случай невозможен и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

Пусть теперь $\mathfrak{H} \not\subseteq \mathfrak{F}$ и B – группа минимального порядка из $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда B – комонолитическая группа с комонолитом $R = B_{\mathfrak{F}}$. Допустим, что B/R – σ-примарная группа. Тогда B/R – σ_i-группа для некоторого i и, следовательно, $B^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}} = B^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{G}_{\sigma_i'}}$. Поскольку $B \in \mathfrak{H}$, то

$$B^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}} = B^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{G}_{\sigma_i'}} \in f(\sigma_i) = t(\alpha_j)\mathfrak{G}_{\alpha_j},$$

где $\sigma_i \subseteq \alpha_j \in \alpha(B/R)$. Значит, $B \in \left(t(\alpha_j)\mathfrak{G}_{\alpha_j}\right)\mathfrak{G}_{\sigma_i} = t(\alpha_j)(\mathfrak{G}_{\alpha_j}\mathfrak{G}_{\sigma_i}) = t(\alpha_j)\mathfrak{G}_{\alpha_j} \subseteq \mathfrak{F}$, что противоречит выбору группы B. Следовательно, группа B/R – не σ-примарна. Тогда $B^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{G}_{\sigma_i'}} = B$ для любого $\sigma_i \in \sigma(B/R)$. Поэтому $B = B^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{G}_{\sigma_{i'}}} \in f(\sigma_i) = t(\alpha_j)\mathfrak{G}_{\alpha_j} \subseteq \mathfrak{F}$. И мы снова получаем противоречие с выбором группы *B*. Значит, $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H} = \mathfrak{F}$. Поскольку при этом для любого *i*

$$f(\sigma_i)\mathfrak{G}_{\sigma_i} = \left(t(\alpha_j)\mathfrak{G}_{\alpha_j}\right)\mathfrak{G}_{\sigma_i} = t(\alpha_j)(\mathfrak{G}_{\alpha_j}\mathfrak{G}_{\sigma_i}) = t(\alpha_j)\mathfrak{G}_{\alpha_j} = f(\sigma_i),$$

то *f* – полное внутреннее σ-локальное задание $\mathfrak{F}$. Следовательно, утверждение (2) теоремы верно. Теорема доказана.

Теорема 8. *Пусть* $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ *и* $\alpha = \{\alpha_j \mid j \in J\}$ *– некоторые разбиения множества всех простых чисел* $\mathbb{P}$ *и пусть* $\mathfrak{X} = LR_\alpha(x)$, $\mathfrak{H} = LR_\sigma(h)$, *где x – внутренняя* H_α*-функция класса Фиттинга* $\mathfrak{X}$, *h – внутренняя* H_σ*-функция класса Фиттинга* $\mathfrak{H}$. *Тогда, если* $\sigma \le \alpha$, *то произведения* $\mathfrak{F} = \mathfrak{X}\Diamond\mathfrak{H}$ *и* $\mathfrak{M} = \mathfrak{H}\Diamond\mathfrak{X}$ *являются σ-локальными классами Фиттинга и* $\mathfrak{M} = LR_\sigma(m)$, $\mathfrak{F} = LR_\sigma(f)$, *где f и m – такие внутренние* H_σ*-функции, что*

$$f(\sigma_i) = \begin{cases} \mathfrak{X}\Diamond h(\sigma_i), & \text{если } \sigma_i \in \sigma(\mathfrak{H}), \\ x(\alpha_j)\mathfrak{G}_{\alpha_j}, & \text{если } \sigma_i \in \sigma \setminus \sigma(\mathfrak{H}) \text{ и } \sigma_i \subseteq \alpha_j, \end{cases}$$

$$m(\sigma_i) = \begin{cases} \mathfrak{H}\Diamond x(\alpha_j)\mathfrak{G}_{\alpha_j}, & \text{если } \sigma_i \in \sigma(\mathfrak{X}) \text{ и } \sigma_i \subseteq \alpha_j, \\ h(\sigma_i), & \text{если } \sigma_i \in \sigma \setminus \sigma(\mathfrak{X}). \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\sigma \le \alpha$. Ввиду теоремы 7 (1) класс Фиттинга $\mathfrak{X}$ является σ-локальным и $\mathfrak{X} = LR_\sigma(t)$, где *t* – полное внутреннее σ-локальное задание класса Фиттинга $\mathfrak{X}$, при этом $t(\sigma_i) = x(\alpha_j)\mathfrak{G}_{\alpha_j}$ для любого $\sigma_i \subseteq \alpha_j$. Применяя теперь [30, теорема 1.2], имеем $\mathfrak{F} = LR_\sigma(f)$, $\mathfrak{M} = LR_\sigma(m)$, где *f* и *m* – такие H_σ-функции, что

$$f(\sigma_i) = \begin{cases} \mathfrak{X}\Diamond h(\sigma_i), & \text{если } \sigma_i \in \sigma(\mathfrak{H}), \\ t(\sigma_i) = x(\alpha_j)\mathfrak{G}_{\alpha_j}, & \text{если } \sigma_i \in \sigma \setminus \sigma(\mathfrak{H}) \text{ и } \sigma_i \subseteq \alpha_j, \end{cases}$$

$$m(\sigma_i) = \begin{cases} \mathfrak{H}\Diamond t(\sigma_i) = \mathfrak{H}\Diamond x(\alpha_j)\mathfrak{G}_{\alpha_j}, & \text{если } \sigma_i \in \sigma(\mathfrak{X}) \text{ и } \sigma_i \subseteq \alpha_j, \\ h(\sigma_i), & \text{если } \sigma_i \in \sigma \setminus \sigma(\mathfrak{X}). \end{cases}$$

Поскольку H_σ-функции *h* и *t* являются внутренними, то, очевидно, внутренними являются и H_σ-функции *f* и *m*. Теорема доказана.

Частичные σ-алгебры классов Фиттинга. Пусть θ – полная решетка классов Фиттинга и пусть σ – некоторое разбиение множества простых чисел $\mathbb{P}$. Классы Фиттинга из θ будем называть θ-классами Фиттинга.

Для всякой H_σ-функции *h* символ Supp(*h*) обозначает носитель *h*, т. е. Supp(*h*) = $= \{\sigma_i \in \sigma \mid h(\sigma_i) \ne \varnothing\}$. H_σ-функцию *h* называют θ-*значной,* если $h(\sigma_i) \in \theta$ для всех $\sigma_i \in \mathrm{Supp}(h)$.

Через θ^σ будем обозначать множество всех σ-локальных классов Фиттинга, которые имеют хотя бы одно θ-значное σ-локальное задание, т. е.

$$\theta^\sigma = \{\mathfrak{H} = LR_\sigma(h) \mid h(\sigma_i) \in \theta \text{ для любого } \sigma_i \in \mathrm{Supp}(h)\}.$$

Класс (1) всех единичных групп является σ-локальным классом Фиттинга [30, пример 1.2 (i)] и $(1) = LR_\sigma(n)$, где $n(\sigma_i) = \varnothing$ для всех *i*. По определению класс (1) принадлежит θ^σ.

Полную решетку классов Фиттинга θ будем называть: 1) *частичной σ-алгеброй классов Фиттинга*, если $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \in \theta$ для любого $\sigma_i \in \sigma(\theta)$ и для любого класса Фиттинга $\mathfrak{H} \in \theta$ имеет место $\mathfrak{H}\Diamond\mathfrak{G}_{\sigma_i} \in \theta$; 2) *σ-алгеброй классов Фиттинга*, если θ – такая частичная σ-алгебра классов Фиттинга, что $\mathfrak{H}\Diamond\mathfrak{X} \in \theta$ для любых $\mathfrak{H}, \mathfrak{X} \in \theta$.

Лемма 7. *Пусть* $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}_{\sigma_i}$ *– класс всех* σ_i*-групп. Тогда* $\mathfrak{H} = LR_\sigma(h)$, *где h – такая* H_σ*-функция, что* $m(\sigma_i) = (1)$ *и* $m(\sigma_j) = \varnothing$ *для любого* $j \ne i$.

Доказательство осуществляется прямой проверкой.

Предложение 2. *Пусть θ – такая полная решетка классов Фиттинга, что* $\theta^\sigma \subseteq \theta$. *Тогда имеют место утверждения:* (1) *если θ – частичная σ-алгебра классов Фиттинга, то* θ^σ *также является частичной σ-алгеброй классов Фиттинга;* (2) *если θ – σ-алгебра классов Фиттинга, то* θ^σ *также является σ-алгеброй классов Фиттинга.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку θ – решетка классов Фиттинга, то в силу [30, предложение 7.3] пересечение любой совокупности классов Фиттинга из θ^σ снова принадлежит θ^σ. Пусть $\mathfrak{F}$ – такой класс Фиттинга из θ, что для любого θ-класса Фиттинга $\mathfrak{M}$ имеет место $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. И пусть f – такая H_σ-функция, что $f(\sigma_i) = \mathfrak{F}$ для любого $\sigma_i \in \sigma$. Тогда $LR_\sigma(f) \in \theta^\sigma$. Пусть $\mathfrak{H}$ – произвольный θ^σ-класс Фиттинга. Тогда, очевидно, $\mathfrak{H} \subseteq LR_\sigma(f)$. Значит, θ^σ – полная решетка классов Фиттинга.

Пусть $\sigma_i \in \sigma$ и $\mathfrak{F} \in \theta^\sigma$. Пусть $\mathfrak{F} = LR_\sigma(f)$, где f – θ-значное σ-локальное задание класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Поскольку θ – решетка классов Фиттинга, то ввиду леммы 5 мы можем считать, что f – внутренняя H_σ-функция. Покажем, что $\mathfrak{H} = \mathfrak{F}\mathfrak{G}_{\sigma_i} \in \theta^\sigma$. Действительно, ввиду леммы 7 имеем $\mathfrak{G}_{\sigma_i} = LR_\sigma(m)$, где m – такое σ-локальное задание $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$, что $m(\sigma_i) = (1)$ и $m(\sigma_j) = \varnothing$ для любого $j \neq i$. Так как $(1) \in \theta$, то m является θ-значным σ-локальным заданием $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$. По [30, теорема 1.2] имеем $\mathfrak{H} = LR_\sigma(h)$, где h – такое σ-локальное задание $\mathfrak{H}$, что $h(\sigma_i) = \mathfrak{F}\Diamond m(\sigma_i) = \mathfrak{F}\Diamond(1) = \mathfrak{F} \in \theta$ и $h(\sigma_j) = f(\sigma_j) \in \theta$ для любого $\sigma_j \in \sigma(\mathfrak{F}) \setminus \{\sigma_i\}$. Отсюда $\mathfrak{H} = \mathfrak{F}\mathfrak{G}_{\sigma_i} \in \theta^\sigma$. Таким образом, θ^σ является частичной σ-алгеброй формаций, т. е. имеет место утверждение (1).

(2) Ввиду утверждения (1) θ^σ является частичной σ-алгеброй классов Фиттинга. Пусть $\mathfrak{M} = LR_\sigma(m)$ и $\mathfrak{F} = LR_\sigma(f)$, где m и f – внутренние θ-значные σ-локальные задания классов Фиттинга $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{F}$ соответственно, $\mathfrak{H} = \mathfrak{M}\Diamond\mathfrak{F}$. По [30, теорема 1.14] имеем $\mathfrak{H} = LR_\sigma(h)$, где h – такое σ-локальное задание класса Фиттинга $\mathfrak{H}$, что $h(\sigma_i) = \mathfrak{M}\Diamond f(\sigma_i)$ для любого $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})$ и $h(\sigma_i) = m(\sigma_i)$ для любого $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{M}) \setminus \sigma(\mathfrak{F})$. Так как по условию $\theta^\sigma \subseteq \theta$, то $h(\sigma_i) = \mathfrak{M}\Diamond f(\sigma_i) \in \theta$. Значит, h – θ-значное σ-локальное задание класса Фиттинга $\mathfrak{H}$. Следовательно, $\mathfrak{H} \in \theta^\sigma$. Поэтому θ^σ является σ-алгеброй классов Фиттинга и утверждение (2) верно. Предложение доказано.

Пусть σ – некоторое разбиение множества $\mathbb{P}$, θ – σ-алгебра классов Фиттинга, $\mathfrak{M} \in \theta^\sigma$. Через $\theta^\sigma(\mathfrak{M})$ будем обозначать множество всех θ^σ-классов Фиттинга из $\mathfrak{M}$. В частности, если θ – решетка всех классов Фиттинга, то вместо символа $\theta^\sigma(\mathfrak{M})$ будем использовать символ $A^\sigma(\mathfrak{M})$, т. е. $A^\sigma(\mathfrak{M})$ – множество всех σ-локальных классов Фиттинга из $\mathfrak{M} \in l^\sigma$.

Умножение классов Фиттинга в $\mathfrak{M}$ определим следующим образом: $\mathfrak{F} \underset{\mathfrak{M}}{\Diamond} \mathfrak{H} = \mathfrak{F}\Diamond\mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}$.

Л е м м а 8. *Пусть* σ *– некоторое разбиение множества* $\mathbb{P}$, θ – σ-*алгебра классов Фиттинга,* $\mathfrak{M} \in \theta^\sigma$. *Тогда:* (1) $\theta^\sigma(\mathfrak{M})$ *является* σ-*алгеброй классов Фиттинга;* (2) *если* $\mathfrak{F} = LR_\sigma(f)$ *и* $\mathfrak{H} = LR_\sigma(h)$ *– классы Фиттинга из* $\theta^\sigma(\mathfrak{M})$, *где f и h – некоторые внутренние* θ-*значные* σ-*локальные задания классов Фиттинга* $\mathfrak{F}$ *и* $\mathfrak{H}$ *соответственно, то* $\mathfrak{F} \underset{\mathfrak{M}}{\Diamond} \mathfrak{H} = LR_\sigma(l)$, *где l – такая внутренняя* θ-*значная* H_σ-*функция, что*

$$l(\sigma_j) = \begin{cases} \left(\mathfrak{F}\Diamond h(\sigma_i)\right) \cap m(\sigma_i), & \text{если } \sigma_i \in \sigma(\mathfrak{H}), \\ f(\sigma_i) \cap m(\sigma_i), & \text{если } \sigma_i \in \sigma \setminus \sigma(\mathfrak{H}). \end{cases}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. (1) Поскольку для любого σ_i класс Фиттинга $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ является наследственным, то ввиду [30, лемма 3.2] для любого $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{M})$ имеем $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \subseteq \mathfrak{M}$. Так как при этом класс Фиттинга $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ σ-локален и ввиду [30, пример 1.2 (ii)] $\mathfrak{G}_{\sigma_i} = LR_\sigma(g)$, где $g(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} \in \theta$ и $g(\sigma_k) = \varnothing$ для любого $k \neq i$, то $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \in \theta^\sigma(\mathfrak{M})$. В силу предложения 2 (2) θ^σ является σ-алгеброй классов Фиттинга. Поэтому для любого класса Фиттинга $\mathfrak{L} \in \theta^\sigma(\mathfrak{M})$ имеем $\mathfrak{L}\mathfrak{G}_{\sigma_i} \in \theta^\sigma$ и, следовательно, $\mathfrak{L} \underset{\mathfrak{M}}{\Diamond} \mathfrak{G}_{\sigma_i} = \mathfrak{L}\Diamond\mathfrak{G}_{\sigma_i} \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{L}\mathfrak{G}_{\sigma_i} \cap \mathfrak{M} \in \theta^\sigma(\mathfrak{M})$. Пусть $\mathfrak{F} = LR_\sigma(f)$ и $\mathfrak{H} = LR_\sigma(h)$ – классы Фиттинга из $\theta^\sigma(\mathfrak{M})$, где f и h – некоторые внутренние θ-значные σ-локальные задания классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ соответственно. Тогда в силу [30, теорема 1.2] имеем $\mathfrak{F}\Diamond\mathfrak{H} = LR_\sigma(x)$, где x – такая H_σ-функция, что

$$x(\sigma_i) = \begin{cases} \mathfrak{F}\Diamond h(\sigma_i), & \text{если } \sigma_i \in \sigma(\mathfrak{H}), \\ f(\sigma_i), & \text{если } \sigma_i \in \sigma \setminus \sigma(\mathfrak{H}). \end{cases}$$

Заметим, что x является внутренним θ-значным σ-локальным заданием класса Фиттинга $\mathfrak{F}\Diamond\mathfrak{H}$. Пусть m – некоторое внутреннее θ-значное σ-локальное задание класса Фиттинга $\mathfrak{M}$. И пусть

$\mathfrak{L} = LR_\sigma(x) \cap \mathfrak{M}$. Ввиду [30, предложение 7.3] имеем $\mathfrak{L} = LR_\sigma(l)$, где $l(\sigma_i) = x(\sigma_i) \cap m(\sigma_i)$ для любого i. Значит, l – внутреннее θ-значное σ-локальное задание класса $\mathfrak{L}$, при этом

$$l(\sigma_i) = \begin{cases} \left(\mathfrak{F}\Diamond h(\sigma_i)\right) \cap m(\sigma_i), & \text{если } \sigma_i \in \sigma(\mathfrak{H}), \\ f(\sigma_i) \cap m(\sigma_i), & \text{если } \sigma_i \in \sigma \setminus \sigma(\mathfrak{H}). \end{cases}$$

Следовательно, $\mathfrak{L} = \mathfrak{F}\Diamond\mathfrak{H} \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{F} \underset{\mathfrak{M}}{\Diamond} \mathfrak{H} \in \theta^\sigma(\mathfrak{M})$. Таким образом, $\theta^\sigma(\mathfrak{M})$ – σ-алгебра.

(2) См. доказательство (1). Лемма доказана.

Т е о р е м а 9. *Пусть σ и α – некоторые разбиения множества $\mathbb{P}$, θ – α-алгебра классов Фиттинга, $\mathfrak{M} \in \theta^\alpha$. Тогда если θ – σ-алгебра классов Фиттинга и $\sigma \le \alpha$, то $\theta^\alpha(\mathfrak{M})$ – σ-подалгебра в $\theta^\sigma(\mathfrak{M})$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathfrak{F}_s = LR_\alpha(f_s)$ – класс Фиттинга из $\theta^\alpha(\mathfrak{M})$, где f_s – некоторое внутреннее θ-значное α-локальное задание класса Фиттинга $\mathfrak{F}_s$, s = 1, 2. По теореме 2 (1) класс Фиттинга $\mathfrak{F}_s$ является σ-локальным и $\mathfrak{F}_s = LR_\sigma(t_s)$, где t_s – полное внутреннее σ-локальное задание класса Фиттинга $\mathfrak{F}_s$, при этом $t_s(\sigma_i) = f_s(\alpha_j)\mathfrak{G}_{\alpha_j}$ для любого $\sigma_i \subseteq \alpha_j$. Поскольку по условию теоремы θ – α-алгебра классов Фиттинга, то произведение $f_s(\alpha_j)\mathfrak{G}_{\alpha_j}$ является θ-классом Фиттинга. Значит, t – θ-значное σ-локальное задание класса Фиттинга $\mathfrak{F}_s$. Следовательно, $\mathfrak{F}_s \in \theta^\sigma(\mathfrak{M})$. Поэтому $\theta^\alpha(\mathfrak{M}) \subseteq \theta^\sigma(\mathfrak{M})$.

Пусть m – некоторое внутреннее θ-значное σ-локальное задание класса Фиттинга $\mathfrak{M}$. В силу леммы 8(2) имеем $\mathfrak{F}_1 \underset{\mathfrak{M}}{\Diamond} \mathfrak{F}_2 = LR_\sigma(x)$, где x – такая внутренняя θ-значная H_σ-функция, что

$$x(\sigma_i) = \begin{cases} \left(\mathfrak{F}_1\Diamond f_2(\sigma_i)\right) \cap m(\sigma_i), & \text{если } \sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F}_2), \\ f_1(\sigma_i) \cap m(\sigma_i), & \text{если } \sigma_i \in \sigma \setminus \sigma(\mathfrak{F}_2). \end{cases}$$

Поэтому $\mathfrak{F}_1 \underset{\mathfrak{M}}{\Diamond} \mathfrak{F}_2 \in \theta^\sigma(\mathfrak{M})$ и $\theta^\alpha(\mathfrak{M})$ – σ-подалгебра в $\theta^\sigma(\mathfrak{M})$. Теорема доказана.

С л е д с т в и е 4. *Пусть σ и α – некоторые разбиения множества $\mathbb{P}$. Тогда, если $\sigma \le \alpha$, то полугруппа $A^\alpha(\mathfrak{M})$ всех α-локальных классов Фиттинга является подполугруппой полугруппы $A^\sigma(\mathfrak{M})$ всех σ-локальных классов Фиттинга.*

Л е м м а 9. *Пусть $\mathfrak{H} = LR_\sigma(h)$. Если $G^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}} \in h(\sigma_i) \cap \mathfrak{H}$ для некоторого $\sigma_i \in \sigma(G)$, то $G \in \mathfrak{H}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \subseteq \mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{G}_{\sigma_{i'}}$, то $G^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{G}_{\sigma_{i'}}} \subseteq G^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}}$. Значит, $G^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{G}_{\sigma_{i'}}} \in h(\sigma_i)$. Далее, так как $G / G^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}}$ – $\sigma_{j'}$-группа для любого $j \ne i$, то в силу [30, лемма 2.9] имеем $(G^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}})^{\mathfrak{G}_{\sigma_j}\mathfrak{G}_{\sigma_{j'}}} = G^{\mathfrak{G}_{\sigma_j}\mathfrak{G}_{\sigma_{j'}}}$. Теперь поскольку $G^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}} \in \mathfrak{H}$, то $G^{\mathfrak{G}_{\sigma_j}\mathfrak{G}_{\sigma_{j'}}} \in h(\sigma_j)$ для любого $j \ne i$. Поэтому $G \in \mathfrak{H}$. Лемма доказана.

Л е м м а 10. *Пусть $\mathfrak{F} = LR_\sigma(f)$, $\Pi = \sigma(\mathfrak{F})$. Тогда $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}_\sigma = \mathfrak{N}_\Pi$ и $\Pi = \{\sigma_i \mid f(\sigma_i) \ne \varnothing\}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ввиду [30, лемма 3.1 (а)] имеем $\Pi = \{\sigma_i \mid f(\sigma_i) \ne \varnothing\}$. Поскольку $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ – наследственный класс Фиттинга, то $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \subseteq (f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F})\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ и с учетом [30, лемма 3.2] имеем

$$\mathfrak{G}_{\sigma_i} \subseteq (f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F})\mathfrak{G}_{\sigma_i} \subseteq \mathfrak{F}$$

для всякого $\sigma_i \in \Pi$. Поэтому $\mathfrak{N}_\Pi = \oplus_{\sigma_i \in \Pi}\mathfrak{G}_i \subseteq \mathfrak{F}$. С другой стороны, поскольку $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}_\sigma \subseteq \mathfrak{N}_\Pi$, то $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}_\sigma = \mathfrak{N}_\Pi$. Лемма доказана.

Т е о р е м а 10. *Пусть $\mathfrak{M}$ – некоторый σ-локальный класс Фиттинга σ-разрешимых групп. Тогда и только тогда σ-алгебра $\theta^\sigma(\mathfrak{M})$ является коммутативной полугруппой σ-локальных классов Фиттинга, когда $\mathfrak{M}$ содержится в классе всех σ-нильпотентных групп.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть σ-алгебра $\theta^\sigma(\mathfrak{M})$ является коммутативной полугруппой. Покажем, что тогда класс Фиттинга $\mathfrak{M}$ σ-нильпотентен.

Пусть m – некоторое внутреннее θ-значное σ-локальное задание класса Фиттинга $\mathfrak{M}$. Допустим, что $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{N}_\sigma$ и пусть G – группа минимального порядка из $\mathfrak{M} \setminus \mathfrak{N}_\sigma$. Тогда G – комонолитическая группа с комонолитом $R = G_{\mathfrak{N}_\sigma}$. Поскольку $\mathfrak{M}$ – σ-разрешимый класс, то

G/R – σ-примарная группа, т. е. G/R – σ_i-группа для некоторого $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{M})$. Понятно, что $1 \neq R \supseteq H := G^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}} = G^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{G}_{\sigma_{i'}}}$. Пусть $\sigma_j \in \sigma(H)$, где $j \neq i$, и X – холлова σ_j-подгруппа группы H. Поскольку $G \in \mathfrak{M}$, то $H = G^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{G}_{\sigma_{i'}}} \in m(\sigma_i)$. Ввиду σ-нильпотентности H подгруппа X нормальна в H, следовательно, $X \in m(\sigma_i)$.

Пусть P – неединичная σ_i-группа и $B = X \wr P = K \rtimes P$ – регулярное сплетение групп X и P, где K – база сплетения B. Тогда, очевидно, $K = B^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{G}_{\sigma_{i'}}} = B^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}}$. Поскольку $X \in m(\sigma_i)$, то $K \in m(\sigma_i)$ как прямое произведение групп, изоморфных X. Поэтому $B^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}} = K \in m(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{M}$. Применяя теперь лемму 9 заключаем, что $B \in \mathfrak{M}$. Кроме того, в силу [30, лемма 3.1] имеем $\sigma_i, \sigma_j \in \sigma(\mathfrak{M})$ и, значит, $\mathfrak{G}_{\sigma_i}, \mathfrak{G}_{\sigma_j} \in \theta^{\sigma}(\mathfrak{M})$. По условию теоремы имеем $\mathfrak{G}_{\sigma_j} \underset{\mathfrak{M}}{\Diamond} \mathfrak{G}_{\sigma_i} = \mathfrak{G}_{\sigma_i} \underset{\mathfrak{M}}{\Diamond} \mathfrak{G}_{\sigma_j}$. Поскольку $B \in \mathfrak{G}_{\sigma_j} \Diamond \mathfrak{G}_{\sigma_i} \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{G}_{\sigma_j} \underset{\mathfrak{M}}{\Diamond} \mathfrak{G}_{\sigma_i}$, то $B \in \mathfrak{G}_{\sigma_i} \underset{\mathfrak{M}}{\Diamond} \mathfrak{G}_{\sigma_j}$. Поэтому группа B принадлежит классу Фиттинга $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \Diamond \mathfrak{G}_{\sigma_j}$. Значит, $B / B_{\mathfrak{G}_{\sigma_i}} \in \mathfrak{G}_{\sigma_j}$. Из построения группы B следует, что $B_{\mathfrak{G}_{\sigma_i}} = 1$ и $B \simeq B / B_{\mathfrak{G}_{\sigma_i}} \notin \mathfrak{G}_{\sigma_j}$. Полученное противоречие показывает, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}_{\sigma}$.

Достаточность. Пусть теперь класс Фиттинга $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}_{\sigma}$ и пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – некоторые σ-локальные классы Фиттинга из $\theta^{\sigma}(\mathfrak{M})$. Понятно, что σ-алгебра $\theta^{\sigma}(\mathfrak{M})$ является полугруппой. Покажем, что $\theta^{\sigma}(\mathfrak{M})$ коммутативна. Действительно, ввиду леммы 10 имеем $\mathfrak{F} \Diamond \mathfrak{H} \cap \mathfrak{N}_{\sigma} = \mathfrak{N}_{\sigma(\mathfrak{F} \cup \mathfrak{H})}$ и $\mathfrak{H} \Diamond \mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}_{\sigma} = \mathfrak{N}_{\sigma(\mathfrak{H} \cup \mathfrak{F})}$. Значит, поскольку $\mathfrak{F} \Diamond \mathfrak{H} \cap \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}_{\sigma}$ и $\mathfrak{H} \Diamond \mathfrak{F} \cap \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}_{\sigma}$, то

$$\mathfrak{F} \underset{\mathfrak{M}}{\Diamond} \mathfrak{H} = \mathfrak{F} \Diamond \mathfrak{H} \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{F} \Diamond \mathfrak{H} \cap \mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_{\sigma} = (\mathfrak{F} \Diamond \mathfrak{H} \cap \mathfrak{N}_{\sigma}) \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{N}_{\sigma(\mathfrak{F} \cup \mathfrak{H})} \cap \mathfrak{M} =$$

$$= \mathfrak{N}_{\sigma(\mathfrak{H} \cup \mathfrak{F})} \cap \mathfrak{M} = (\mathfrak{H} \Diamond \mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}_{\sigma}) \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{H} \Diamond \mathfrak{F} \cap \mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_{\sigma} = \mathfrak{H} \Diamond \mathfrak{F} \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{H} \underset{\mathfrak{M}}{\Diamond} \mathfrak{F}.$$

Поэтому $\mathfrak{F} \underset{\mathfrak{M}}{\Diamond} \mathfrak{H} = \mathfrak{H} \underset{\mathfrak{M}}{\Diamond} \mathfrak{F}$ и $\theta^{\sigma}(\mathfrak{M})$ – коммутативная полугруппа. Теорема доказана.

Следствие 5 [37, теорема 3.2]. *Пусть $\mathfrak{M}$ – разрешимый локальный класс Фиттинга. Тогда и только тогда $A^{l}(\mathfrak{M})$ является коммутативной полугруппой, когда $\mathfrak{M}$ нильпотентна.*

Благодарности. Исследования выполнены при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф23РНФ-237).

Acknowledgements. The research was carried out with the financial support of the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (project no. Ф23РНФ-237).

Список использованных источников

1. Шеметков, Л. А. Формации алгебраических систем / Л. А. Шеметков, А. Н. Скиба. – М.: Наука, 1989. – 255 с.

2. Скиба, А. Н. Алгебра формаций / А. Н. Скиба. – Мн.: Бел. навука, 1997. – 240 с.

3. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p. https://doi.org/10.1515/9783110870138

4. Skiba, A. N. On σ-properties of finite groups I / A. N. Skiba // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 4. – С. 89–96.

5. Skiba, A. N. On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups / A. N. Skiba // Journal of Algebra. – 2015. – Vol. 436. – P. 1–16. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2015.04.010

6. Skiba, A. N. On one generalization of the local formations / A. N. Skiba // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 1. – P. 79–82.

7. Чи, З. О Σ_t^{σ} -замкнутых классах конечных групп / З. Чи, А. Н. Скиба // Украинский математический журнал. – 2018. – Т. 70, № 12. – С. 1707–1716. https://doi.org/10.1007/s11253-019-01619-6

8. Chi, Z. A generalization of Kramer's theory / Z. Chi, A. N. Skiba // Acta Mathematica Hungarica. – 2019. – Vol. 158, № 1. – P. 87–99. https://doi.org/10.1007/s10474-018-00902-5

9. Chi, Z. On one application of the theory of *n*-multiply σ-local formations of finite groups / Z. Chi, V. G. Safonov, A. N. Skiba // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 2. – С. 85–88.

10. Chi, Z. On *n*-multiply σ-local formations of finite groups / Z. Chi, V. G. Safonov, A. N. Skiba // Communications in Algebra. – 2019. – Vol. 47, № 3. – P. 957–968. https://doi.org/10.1080/00927872.2018.1498875

11. Шеметков, Л. А. Формации конечных групп / Л. А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 271 с.

12. Kramer, O. U. Endliche Gruppen mit Untergruppen mit paarweise teilerfremden Indizes / O. U. Kramer // Mathematische Zeitschrift. – 1974. – Vol. 139. – P. 63–68. https://doi.org/10.1007/bf01194145

13. Tsarev, A. Laws of the lattices of σ-local formations of finite groups / A. Tsarev // Mediterranean Journal of Mathematics. – 2020. – Vol. 17, № 3. – Art. ID 75. https://doi.org/10.1007/s00009-020-01510-w

14. Safonova, I. N. On some properties of the lattice of totally σ-local formations of finite groups / I. N. Safonova, V. G. Safonov // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. – 2020. – № 3. – С. 6–16. https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-3-6-16

15. Воробьев, Н. Н. О прямых разложениях кратно σ-локальных формаций / Н. Н. Воробьев, И. И. Стаселько, А. О. Ходжагулыев // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2020. –№ 3. – С. 10–13.

16. Воробьев, Н. Н. Отделимые решетки кратно σ-локальных формаций / Н. Н. Воробьев, И. И. Стаселько, А. О. Ходжагулыев // Сибирский математический журнал. – 2021. – Т. 62, № 4. – С. 721–735. https://doi.org/10.33048/smzh.2021.62.402

17. Сафонова, И. Н. О минимальных σ-локальных не-$\mathfrak{H}$-формациях конечных групп / И. Н. Сафонова // Проблемы физики, математики и техники. – 2020. – № 4 (45). – С. 105–112.

18. Safonova, I. N. Some properties of *n*-multiply σ-local formations of finite groups / I. N. Safonova // Asian-European Journal of Mathematics. – 2022. – Vol. 15, № 7. – Art. ID 2250138. https://doi.org/10.1142/S1793557122501388

19. Safonova, I. N. A criterion for σ-locality of a non-empty formation / I. N. Safonova // Communications in Algebra. – 2022. – Vol. 50, № 6. – P. 2366–2376. https://doi.org/10.1080/00927872.2021.2006210

20. Safonova, I. N. On properties of the lattice of all τ-closed *n*-multiply σ-local formations / I. N. Safonova // Communications in Algebra. – 2023. – Vol. 51, № 10. – P. 4454–4461. https://doi.org/10.1080/00927872.2023.2210678

21. Сафонова, И. Н. О критических σ-локальных формациях конечных групп / И. Н. Сафонова // Труды Института математики. – 2023. – Т. 31, № 2. – С. 63–80.

22. Safonova, I. N. On σ-inductive lattices of *n*-multiply σ-local formations of finite groups / I. N. Safonova // Journal of Algebra and Its Applications. – 2024. – Vol. 23, № 1. – Art. ID 2450017. https://doi.org/10.1142/S0219498824500178

23. Safonova, I. N. On the τ-closedness of *n*-multiply σ-local formation / I. N. Safonova // Advances in Group Theory and Applications. – 2024. – Vol. 18. – P. 123–136. https://doi.org/10.32037/agta-2024-005

24. Safonova, I. N. On separability of the lattice of τ-closed *n*-multiply σ-local formations / I. N. Safonova // Communications in Algebra. – 2024. – Vol. 52, № 2. – P. 3309–3318. https://doi.org/10.1080/00927872.2024.2317458

25. Сафонова, И. Н. О *n*-кратной σ-локальности непустой τ-замкнутой формации конечных групп / И. Н. Сафонова // Труды Института математики НАН Беларуси. – 2024. – Т. 32, № 1. – С. 32–38.

26. Сафонова, И. Н. О σ-локальных формациях конечных групп с ограниченным $\mathfrak{H}_\sigma$-дефектом / И. Н. Сафонова, В. В. Скрундь // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – №1 (62). – С. 87–101.

27. Safonova, I. N. On the largest τ-closed subclass of an *n*-multiply σ-local formation / I. N. Safonova, V. V. Skrundz // Communications in Algebra. – 2025, 28 Aug. (Published online). https://doi.org/10.1080/00927872.2025.2547696

28. Сафонова, И. Н. О $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$-критических формациях конечных групп / И. Н. Сафонова, В. В. Скрундь // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 3 (64). – С. 99–111.

29. Сафонова, И. Н. Минимальные τ-замкнутые σ-локальные не $\mathfrak{H}$-формации конечных групп / И. Н. Сафонова, В. В. Скрундь // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2025. – Т. 69, № 5. – С. 359–366. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2025-69-5-359-366

30. Guo, W. On σ-local Fitting classes / W. Guo, L. Zhang, N. T. Vorob'ev // Journal of Algebra. – 2020. – Vol. 542. – P. 116–129. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2019.10.009

31. Воробьев, Н. Н. Об индуктивности решетки σ-локальных классов Фиттинга / Н. Н. Воробьев, И. И. Стаселько // Математические заметки. – 2025. – Т. 117, № 6. – P. 849–860.

32. Tsarev, A. Classes of monoids with applications: formations of languages and multiply local formations of finite groups / A. Tsarev, A. Kukharev // Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. Series 2. – 2021. – Vol. 70, № 3. – P. 1257–1268. https://doi.org/10.1007/s12215-020-00556-9

33. Ballester-Bolinches, A. Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L. M. Ezquerro. – Dordrecht: Springer, 2006. – 385 p. https://doi.org/10.1007/1-4020-4719-3

34. On finite Sylow tower and σ-tower groups / J. Cai, I. N. Safonova, A. N. Skiba, Z. Wang // Quaestiones Mathematicae. – 2023. – Vol. 46, № 9. – P. 1799–1813. https://doi.org/10.2989/16073606.2022.2120840

35. Zhang, Ch. On Σ_t^σ-closed classes of finite groups / Ch. Zhang, A. N. Skiba // Ukrainian Mathematical Journal. – 2019. – Vol. 70. – P. 1966–1977. https://doi.org/10.1007/s11253-019-01619-6

36. Мальцев, А. И. Об умножении классов алгебраических систем / А. И. Мальцев // Сибирский математический журнал. – 1967. – Т. 8, № 2. – С. 346–365.

37. Сафонов, В. Г. О коммутативных полугруппах разрешимых тотально ω-насыщенных формаций / В. Г. Сафонов, И. Н. Сафонова // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 4 (25). – С. 80–86.

References

1. Shemetkov L. A., Skiba A. N. *Formations of algebraic systems*. Moscow: Nauka Publ., 1989. 255 p. (in Russian).

2. Skiba A. N. *Algebra of formations*. Minsk: Belaruskaya navuka Publ., 1997. 240 p. (in Russian).

3. Doerk K., Hawkes T. *Finite Soluble Groups*. Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1992. 891 p. https://doi.org/10.1515/9783110870138

4. Skiba A. N. On σ-properties of finite groups I. *Problemy fiziki, matematiki i tekhniki = Problems of Physics, Mathematics and Technics,* 2014, no. 4, pp. 89–96.

5. Skiba A. N. On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups. *Journal of Algebra*, 2015, vol. 436, pp. 1–16. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2015.04.010

6. Skiba A. N. On one generalization of the local formations. *Problemy fiziki, matematiki i tekhniki = Problems of Physics, Mathematics and Technics*, 2018, no. 1, pp. 79–82.

7. Chi Z., Skiba A. N. On Σ_t^σ-closed classes of finite groups. *Ukrainian Mathematical Journal*, 2018, vol. 70, no. 12, pp. 1966–1977. https://doi.org/10.1007/s11253-019-01619-6

8. Chi Z., Skiba A. N. A generalization of Kramer's theory. *Acta Mathematica Hungarica*, 2019, vol. 158, no. 1, pp. 87–99. https://doi.org/10.1007/s10474-018-00902-5

9. Chi Z., Safonov V. G., Skiba A. N. On one application of the theory of *n*-multiply σ-local formations of finite groups. *Problemy fiziki, matematiki i tekhniki = Problems of Physics, Mathematics and Technics*, 2018, no. 2, pp. 85–88.

10. Chi Z., Safonov V. G., Skiba A. N. On *n*-multiply σ-local formations of finite. *Communications in Algebra*, 2019, vol. 47, no. 3, pp. 957–968. https://doi.org/10.1080/00927872.2018.1498875

11. Shemetkov L. A. *Formations of Finite Groups*. Moscow, Nauka Publ., 1978. 271 p. (in Russian).

12. Kramer O. U. Endliche Gruppen mit Untergruppen mit paarweise teilerfremden Indizes. *Mathematische Zeitschrift*, 1974, vol. 139, pp. 63–68. https://doi.org/10.1007/bf01194145

13. Tsarev A. Laws of the lattices of σ-local formations of finite groups. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 2020, vol. 17, no. 3, art. ID 75. https://doi.org/10.1007/s00009-020-01510-w

14. Safonova I. N., Safonov V. G. On some properties of the lattice of totally σ-local formations of finite groups. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*, 2020, no. 3, pp. 6–16. https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-3-6-16

15. Vorob'ev N. N., Staselko I. I., Hojagulyyev A. O. On direct decompositions of multiply σ-local formations. *Vesnik Vitsebskaga Dzyarzhaŷnaga Universiteta*, 2020, vol. 3, no. 108, pp. 10–13 (in Russian).

16. Vorob'ev N. N., Stasel'ko I. I., Hojagulyyev A. O. Separated lattices of multiply σ-local formations. *Siberian Mathematical Journal*, 2021, vol. 62, no. 4, pp. 586–597. https://doi.org/10.1134/S0037446621040029

17. Safonova I. N. On minimal σ-local non-$\mathfrak{H}$-formations of finite groups. *Problemy fiziki, matematiki i tekhniki = Problems of Physics, Mathematics and Technics*, 2020, no. 4 (45), pp. 105–112 (in Russian).

18. Safonova I. N. Some properties of *n*-multiply σ-local formations of finite groups. *Asian-European Journal of Mathematics*, 2022, vol. 15, no. 7, art. ID 2250138. https://doi.org/10.1142/S1793557122501388

19. Safonova I. N. A criterion for σ-locality of a non-empty formation. *Communications in Algebra*, 2022, vol. 50, no. 6, pp. 2366–2376. https://doi.org/10.1080/00927872.2021.2006210

20. Safonova I. N. On properties of the lattice of all τ-closed *n*-multiply σ-local formations. *Communications in Algebra*, 2023, vol. 51, no. 10, pp. 4454–4461. https://doi.org/10.1080/00927872.2023.2210678

21. Safonova I. N. On critical σ-local formations of finite groups. *Trudy Instituta matematiki = Proceedings of the Institute of Mathematics*, 2023, vol. 31, no. 2, pp. 63–80 (in Russian).

22. Safonova I. N. On σ-inductive lattices of *n*-multiply σ-local formations of finite groups. *Journal of Algebra and Its Applications*, 2024, vol. 23, no. 1, art. ID 2450017. https://doi.org/10.1142/ S0219498824500178

23. Safonova I. N. On the τ-closedness of *n*-multiply σ-local formation. *Advances in Group Theory and Applications*, 2024, vol. 18, pp. 123–136. https://doi.org/10.32037/agta-2024-005

24. Safonova I. N. On separability of the lattice of τ-closed *n*-multiply σ-local formations. *Communications in Algebra*, 2024, vol. 52, no. 2, pp. 3309–3318. https://doi.org/10.1080/00927872.2024.2317458

25. Safonova I. N. On *n*-multiply σ-locality of a nonempty τ-closed formation of finite groups. *Trudy Instituta matematiki Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Proceedings of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus,* 2024, vol. 32, no. 1, pp. 32–38 (in Russian).

26. Safonova I. N., Skrundz V. V. On σ-local formations of finite groups with bounded $\mathfrak{H}_\sigma$-defect. *Problemy fiziki, matematiki i tekhniki = Problems of Physics, Mathematics and Technics*, 2025, no. 1 (62), pp. 87–101 (in Russian).

27. Safonova I. N., Skrund V. V. On the largest τ-closed subclass of an *n*-multiply σ-local formation. *Communications in Algebra.* Published online: 28 Aug 2025. https://doi.org/10.1080/ 00927872.2025.2547696

28. Safonova I. N., Skrund V. V. On $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$-critical formations of finite groups. *Problemy fiziki, matematiki i tekhniki = Problems of Physics, Mathematics and Technics*, 2025, no. 3 (64), pp. 99–111 (in Russian).

29. Safonova I. N., Skrund V. V. Minimal τ-closed σ-local non-$\mathfrak{H}$-formations of finite groups. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus,* 2025, vol. 69, no. 5, pp. 359–366 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2025-69-5-359-366

30. Guo W., Zhang L., Vorob'ev N. T. On σ-local Fitting classes. *Journal of Algebra*, 2020, vol. 542, pp. 116–129. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2019.10.009

31. Vorob'ev N. N., Staselka I. I. Inductivity of the Lattice of σ-Local Fitting Classes. *Mathematical Notes*, 2025, vol. 117, no. 6, pp. 939–949. https://doi.org/10.1134/S0001434625602965

32. Tsarev A., Kukharev A. Classes of monoids with applications: formations of languages and multiply local formations of finite groups. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. Series 2*, 2021, vol. 70, no. 3, pp. 1257–1268. https://doi.org/10.1007/s12215-020-00556-9

33. Ballester-Bolinches A., Ezquerro L. M. *Classes of Finite Groups*. Dordrecht, Springer, 2006. 385 p. https://doi.org/10.1007/1-4020-4719-3

34. Cai J., Safonova I. N., Skiba A. N., Wang Z. On finite Sylow tower and σ-tower groups. *Quaestiones Mathematicae*, 2023, vol. 46, no. 9, pp. 1799–1813. https://doi.org/10.2989/16073606.2022.2120840

35. Zhang Ch., Skiba A. N. On Σ_t^σ-closed classes of finite groups. *Ukrainian Mathematical Journal*, 2019, vol. 70, pp. 1966–1977. https://doi.org/10.1007/s11253-019-01619-6

36. Mal'tsev A. I. On the multiplication of classes of algebraic systems. *Sibirskii matematicheskii zhurnal* [Siberian Mathematical Journal], 1967, vol. 8, no. 2, pp. 346–365 (in Russian).

37. Safonov V. G. Safonova I. N. On commutative semigroups of soluble totally ω-saturated formations. *Problemy fiziki, matematiki i tekhniki = Problems of Physics, Mathematics and Technics*, 2015, no. 4 (25), pp. 80–86 (in Russian).

Информация об авторах

Сафонов Василий Григорьевич – доктор физико-математических наук, профессор, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: vgsafonov@im.bas-net.by. https://orcid.org/0000-0003-0682-3107

Сафонова Инна Николаевна – кандидат физико-математических наук, доцент, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: in.safonova@mail.ru. https://orcid.org/0000-0001-6896-7208

Information about the authors

Vasily G. Safonov – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: vgsafonov@im.bas-net.by/ https://orcid.org/0000-0003-0682-3107

Inna N. Safonova – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: in.safonova@mail.ru. https://orcid.org/0000-0001-6896-7208