ISSN 1561-2430 (print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 517.958
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2025-61-4-288-298

Поступила в редакцию 20.05.2025
Received 20.05.2025

И. И. Столярчук

ООО «Нэкстсофт», Минск, Республика Беларусь

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ С ЛИНЕЙНЫМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ ПОЛИНОМАМИ В ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

Аннотация. Исследовано доказательство корректности постановки смешанной задачи для уравнения колебания струны в полуполосе с дифференциальными полиномами в граничных условиях. Для данной задачи выводятся условия существования единственного достаточно гладкого решения в полуполосе в целом. Показано, что она сводится к решению задач Коши для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Изучены случаи, когда гладкость решения задачи с ростом времени ухудшается и когда этого не происходит. Для обоих случаев выведены достаточные условия ухудшения (сохранения) гладкости, основанные на коэффициентах граничных условий. Также с помощью метода характеристик выведены необходимые и достаточные условия согласования на исходные данные при заданной гладкости исходных функций, при которых существует единственное классическое решение поставленной задачи. Полученные результаты приведены как для однородного исходного уравнения, так и для случая, когда исходное уравнение является неоднородным.

Ключевые слова: уравнение колебания струны, метод характеристик, дифференциальный полином, классическое решение, смешанная задача, условия согласования

Для цитирования. Столярчук, И. И. Классическое решение смешанной задачи для уравнения колебания струны с линейными дифференциальными полиномами в граничных условиях / И. И. Столярчук // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. – 2025. – Т. 61, № 4. – С. 288–298. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2025-61-4-288-298

Ivan I. Stolyarchuk

Nextsoft Ltd., Minsk, Republic of Belarus

CLASSICAL SOLUTION OF THE MIXED PROBLEM FOR THE STRING OSCILLATION EQUATION WITH LINEAR DIFFERENTIAL POLYNOMIALS IN BOUNDARY CONDITIONS

Abstract. The proof of the well-posedness of the mixed problem for the string oscillation equation in the half-strip with differential polynoms in the boundary conditions. The conditions of the existence of the unique and smooth enough solution are obtained in the half strip in general. It is shown that it is reduced to the solution of the initial-value problems for the ordinary linear differential equations with variable coefficients. The case when the solution smoothness is reduced during the increasing of the time and the case when it doesn't happen are studied. For both cases the sufficient conditions for smooth reduction (conservation) are obtained. These conditions are based on the coefficients in boundary conditions. Also, with the help of the characteristics method the necessary and sufficient matching conditions are obtained. These conditions guarantee the existence and uniqueness of the classical solution of the given problem when given functions are smooth enough. The obtained results are given for both homogeneous initial equation and inhomogeneous one.

Keywords: string oscillation equation, characteristics method, differential polynomials, classical solution, mixed problem, matching conditions

For citation. Stolyarchuk I. I. Classical solution of the mixed problem for the string oscillation equation with linear differential polynomials in boundary conditions. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2025, vol. 61, no. 4, pp. 288–298 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2025-61-4-288-298

Введение. При построении математических моделей большого числа процессов окружающего мира получаются смешанные задачи для гиперболических уравнений второго порядка с разного типа условиями. Гладкие условия Коши рассматривались, например, в работе [1], негладкие условия Коши – в [2]. Условия первого рода типа Дирихле изучались в [3], а в [4, 5] исследовалась смешанная задача для уравнения типа Клейна – Гордона – Фока с косыми производными в граничных условиях. В [6] была рассмотрена задача с производными высоких порядков в граничных условиях для гиперболического уравнения, которое может быть факторизовано на композицию операторов первого порядка. В [7] авторы изучали смешанную задачу для волнового уравнения с производными высоких порядков в условии на левой границе и с условием типа Дирихле на правой границе. Во всех этих задачах были получены необходимые и достаточные условия согласования для существования единственного гладкого решения при выполнении некоторых требований на гладкость исходных функций.

Возникает вопрос о возможности изучения еще более общей смешанной задачи, а именно: смешанной задачи для уравнения колебания струны, где граничные условия представляют собой дифференциальные полиномы. Введение данных полиномов в граничные условия существенно усложняет исследование смешанной задачи в сравнении со смешанной задачей с условиями первого рода или с косыми производными в граничных условиях. Особенность рассматриваемой задачи состоит в том, что обыкновенные дифференциальные уравнения, которые возникают в процессе исследования граничных условий, в общем случае не имеют явного решения. Однако, несмотря на это, нам удалось доказать существование и единственность решения. В данной работе используется метод характеристик, с помощью которого доказывается существование и единственность классического решения поставленной задачи, выводятся условия согласования на заданные функции, а также показывается, что гладкость решения может убывать с ростом временной переменной.

Постановка задачи. Задача рассматривается на плоскости двух независимых переменных $\mathbf{x}=(x_0,x_1)$.

В области $Q=(0;T)\times(0;l), l\in(0;+\infty)$ задается уравнение колебания струны

$$Lw=\partial_{x_0}^2 w-a^2\partial_{x_1}^2 w=f, \tag{1}$$

где f – некоторая заданная функция, $T=(s+1)l/a, s\in\mathbb{N}_0$. К уравнению (1) присоединяются условия Коши

$$w(0,x_1)=\varphi(x_1),\quad \partial_{x_0}w(0,x_1)=\psi(x_1),\quad x_1\in[0;l], \tag{2}$$

и граничные условия с дифференциальными полиномами

$$\sum_{|\alpha|\leqslant n} r_j^{(\alpha)}(x_0)\frac{\partial^{|\alpha|}w}{\partial^{\alpha_0}x_0\partial^{\alpha_1}x_1}(x_0,j)=\widetilde{\mu^{(j)}}(x_0),\quad j\in\{0,l\}, \tag{3}$$

где $r_j^{(\alpha)}$, $\widetilde{\mu^{(j)}}$ – заданные функции, $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_0,\alpha_1)$ – мультииндекс, $\alpha_i\in\mathbb{N}_0$, $i\in\{0,1\}$ и $|\boldsymbol{\alpha}|=\alpha_0+\alpha_1$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$. Условия на функции f, φ, ψ, $r_j^{(\alpha)}$, $\widetilde{\mu^{(j)}}$ будут уточнены в дальнейшем. Пусть для функций $r_j^{(\alpha)}$ существуют такие $\nu_j\in\mathbb{N}_0$, что $\nu_j\leq n, j=\overline{1,4}$, для которых справедливы следующие условия:

$$\begin{aligned}
&\nu_1=\max_{0\leq\nu\leq n}\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=\nu}(-a)^{\alpha_0}r_0^{(\boldsymbol{\alpha})}(x_0)\neq 0,\quad \nu_2=\max_{0\leq\nu\leq n}\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=\nu}(a)^{\alpha_0}r_l^{(\boldsymbol{\alpha})}(x_0)\neq 0,\\
&\nu_3=\max_{0\leq\nu\leq n}\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=\nu}(a)^{\alpha_0}r_0^{(\boldsymbol{\alpha})}(x_0)\neq 0,\quad \nu_4=\max_{0\leq\nu\leq n}\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=\nu}(-a)^{\alpha_0}r_l^{(\boldsymbol{\alpha})}(x_0)\neq 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

Общее решение неоднородного уравнения. Следуя [8; 9, с. 136–138], общее решение уравнения (1) представимо в виде

$$w(\mathbf{x})=u(\mathbf{x})+w_p(\mathbf{x}), \tag{5}$$

где $u(\mathbf{x})$ – общее решение однородного уравнения $Lu=\partial_{x_0}^2u-a^2\partial_{x_1}^2u=0$, а $w_p(\mathbf{x})$ – некоторое частное решение уравнения (1). В работе [8] доказано утверждение о существовании решения задачи (1) с однородными начальными условиями без продолжения функции f за границу области Q. Сформулируем его в виде леммы.

Лемма 1. *Пусть* $f(\mathbf{x})\in C^{n-1}(\overline{Q})$. *Тогда решение задачи* (1)–(3) *существует в классе* $C^n(\overline{Q})$.

Исходя из вида (5), задача (1)–(3) сводится к решению задачи для однородного уравнения $Lu = 0$, т. е. задачи

$$\partial_{x_0}^2 u - a^2 \partial_{x_1}^2 u = 0, \tag{6}$$

с начальными условиями

$$u(0, x_1) = \varphi(x_1), \partial_{x_0} u(0, x_1) = \psi(x_1), \quad x_1 \in [0; l] \tag{7}$$

и граничными условиями

$$\sum_{|\alpha| \le n} r_j^{(\alpha)}(x_0) \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial^{\alpha_0} x_0 \partial^{\alpha_1} x_1}(x_0, j) = \mu^{(j)}(x_0), \quad j \in \{0, l\}, \tag{8}$$

где

$$\mu^{(j)}(x_0) = \widetilde{\mu^{(j)}}(x_0) - \sum_{|\alpha| \le n} r_j^{(\alpha)}(x_0) \frac{\partial^{|\alpha|} w_p}{\partial^{\alpha_0} x_0 \partial^{\alpha_1} x_1}(x_0, j), \quad j \in \{0, l\}.$$

Общее решение уравнения (6) записывается как

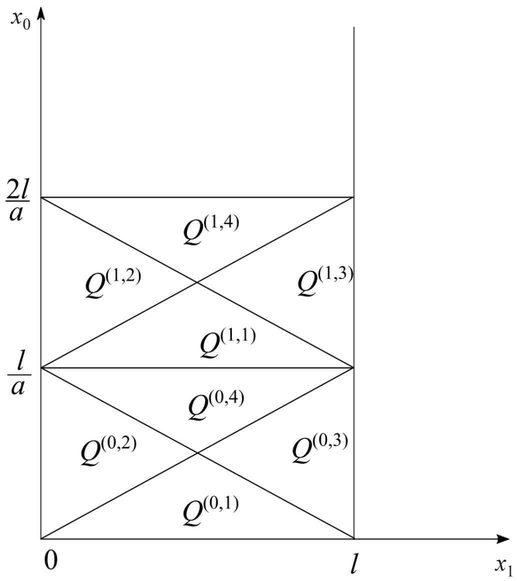
$$u(\mathbf{x}) = p(x_1 - a x_0) + g(x_1 + a x_0), \tag{9}$$

где p, g – некоторые произвольные достаточно гладкие функции. Суть метода характеристик заключается в их нахождении на каждом из подмножеств $\overline{Q^{(k,j)}}$, $j = \overline{1,4}$, где $\overline{Q} = \bigcup_{k=0}^{s} \bigcup_{j=1}^{4} \overline{Q^{(k,j)}}$. Разбиение множества $\overline{Q}$ приведено на рисунке.

Решение на множестве $\overline{Q^{(k)}}$ будем обозначать $u^{(k)}(\mathbf{x})$, и $u^{(k)}(\mathbf{x}) = p^{(k)}(x_1 - a x_0) + g^{(k)}(x_1 + a x_0)$, где $p^{(k)}$, $g^{(k)}$ – некоторые произвольные достаточно гладкие функции.

О п р е д е л е н и е. Кусочно-заданную функцию $u(\mathbf{x}) = \bigcup_{k=0}^{s} u^{(k)}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \overline{Q^{(k)}}$, из класса $C^m(\overline{Q})$, $m \ge n$, будем называть решением задачи (6)–(8), если при ее подстановке в уравнение (6) и условия (7), (8) они обращаются в тождества.

В дальнейшем смысл термина «решение» будем понимать в смысле данного определения.



Разбиение множества $\overline{Q}$

Splitting of $\overline{Q}$ set

Задача (6)–(8) на $\overline{Q^{(k)}}$. Рассмотрим *условия Коши* в области $Q^{(k)}$:

$$u(\mathbf{x})|_{x_0=kl/a} = \varphi^{(k)}(x_1), \quad \partial_{x_0} u(\mathbf{x})|_{x_0=kl/a} = \psi^{(k)}(x_1), \quad x_1 \in [0;l]. \tag{10}$$

Изначально заданы только $\varphi^{(0)} = \varphi$ и $\psi^{(0)} = \psi$, остальные функции мы получаем из решения в области $Q^{(k-1,4)}$ для $k = 1, 2, \ldots$.

Л е м м а 2. *Решение* $u^{(k)}(\mathbf{x})$ *задачи* (6), (10) *существует единственно в классе* $C^n(\overline{Q^{(k,1)}})$, *непрерывно зависит от функций* $\varphi^{(k)}(x_1)$, $\psi^{(k)}(x_1)$ *и задается формулой Даламбера*

$$u^{(k)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\Big(\varphi^{(k)}(x_1 - ax_0 + kl) + \varphi^{(k)}(x_1 + ax_0 - kl)\Big) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x_1 - ax_0 + kl}^{x_1 + ax_0 - kl} \psi^{(k)}(z)dz \tag{11}$$

тогда и только тогда, когда $\varphi^{(k)} \in C^n([0;l])$, $\psi^{(k)} \in C^{n-1}([0;l])$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть $u^{(k)}(\mathbf{x})$ из класса $C^n(\overline{Q^{(k,1)}})$. Тогда в силу первого из условий (10) справедливо, что $u^{(k)}(kl/a, x_1) = \varphi^{(k)}(x_1)$, откуда следует, что $\varphi^{(k)} \in C^n([0;l])$. Аналогично показывается, что $\psi^{(k)} \in C^{n-1}([0;l])$.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть $\varphi^{(k)} \in C^n([0;l])$, $\psi^{(k)} \in C^{n-1}([0;l])$. Найдем решение задачи (6), (10) в области $Q^{(k,1)}$. Функции $p^{(k)}(z)$ и $g^{(k)}(y)$, где $z \in [-kl; -(k-1)l]$, $y \in [kl; (k+1)l]$, имеют вид

$$p^{(k)}(z) = \frac{1}{2}\Big(\varphi^{(k)}(z + kl) - \Psi^{(k)}(z + kl) - C\Big), \tag{12}$$

$$g^{(k)}(y) = \frac{1}{2}\Big(\varphi^{(k)}(y - kl) + \Psi^{(k)}(y - kl) + C\Big), \tag{13}$$

где $\Psi^{(k)}(z) = \dfrac{1}{a}\int\limits_l^z \psi^{(k)}(y)dy$.

Исходя из формул (12), (13), получаем решение задачи на множестве $\overline{Q^{(k,1)}}$, задаваемое формулой (10) (хорошо известная формула Даламбера [9, с. 138–140]). Принадлежность решения $u^{(k)}(\mathbf{x})$ классу $C^n(\overline{Q^{(k,1)}})$ следует из того, что сумма двух функций из класса $C^n(\overline{Q^{(k,1)}})$ будет также функцией из класса $C^n(\overline{Q^{(k,1)}})$. Непрерывная зависимость $u^{(k)}(\mathbf{x})$ от начальных функций следует из формулы Даламбера как сумма непрерывных на компакте функций. Лемма доказана.

Рассмотрим решение задачи (6)–(8) в области $Q^{(k,2)}$. В области $Q^{(k,2)}$ функция $g^{(k)}$ будет определяться по формуле (13), а функция $p^{(k)}$ будет неопределена на $z \in [-(k+1)l, -kl]$. Воспользуемся условием на левой границе:

$$\sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \leqslant n} r_0^{(\boldsymbol{\alpha})}(x_0) \frac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|} u}{\partial^{\alpha_0} x_0 \partial^{\alpha_1} x_1}(x_0, 0) = \mu^{(0)}(x_0). \tag{14}$$

С учетом того, что $u^{(k)}(\mathbf{x}) = p^{(k)}(x_1 - ax_0) + g^{(k)}(x_1 + ax_0)$, данное условие можно переписать в виде

$$\sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \leqslant n} r_0^{(\boldsymbol{\alpha})}(x_0) \frac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|}}{\partial^{\alpha_0} x_0 \partial^{\alpha_1} x_1}\Big(p^{(k)}(x_1 - ax_0) + g^{(k)}(x_1 + ax_0)\Big)|_{x_1=0} = \mu^{(0)}(x_0).$$

Перенесем известные слагаемые в одну сторону, и заметим, что

$$\frac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|}}{\partial^{\alpha_0} x_0 \partial^{\alpha_1} x_1} p^{(k)}(x_1 - ax_0) = (-a)^{\alpha_0} d^{|\boldsymbol{\alpha}|} p^{(k)}(x_1 - ax_0).$$

Вводя замену $-ax_0 = z$, получим

$$\sum_{\nu=0}^{\bar{n}} R_0^{\nu}(z) d^{\nu} p^{(k)}(z) = P^{(k)}(z), z \in [-(k+1)l, -kl], \tag{15}$$

где

$$P^{(k)}(z)=\mu^{(0)}\left(-\frac{z}{a}\right)-\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\le n}(-a)^{\alpha_0}r_0^{(\boldsymbol{\alpha})}\left(-\frac{z}{a}\right)\frac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|}}{\partial^{\alpha_0}z\partial^{\alpha_1}x_1}\left(g^{(k)}(x_1-z)\right)|_{x_1=0}, \tag{16}$$

$$R_0^{\nu}(z)=\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=\nu}(-a)^{\alpha_0}r_0^{(\boldsymbol{\alpha})}\left(-\frac{z}{a}\right), \tag{17}$$

$\overline{n}\in\mathbb{N}_0$ – максимальный порядок производной функции $p^{(k)}$ в уравнении такой, что $\overline{n}\le n$.

Л е м м а 3. *Пусть выполняются условия* (4) *и* $\mu^{(0)}\in C^{n-\overline{n}}([0;T])$, $r_0^{(\alpha)}\in C^n([0;T])$. *Тогда решение задачи* (6), (14) *существует и единственно в классе* $C^n(\overline{Q^{(k,1)}\bigcup Q^{(k,2)}})$ *тогда и только тогда, когда* $\varphi^{(k)}\in C^{n+\Delta_n}([0;l])$, $\psi^{(k)}\in C^{n-1+\Delta_n}([0;l])$ *и выполнены условия согласования*

$$\sum_{\nu=0}^{\overline{n}-1}C_\nu^{(0)}d^j\beta_\nu^{(0)}(-kl)+d^j\int_{-kl}^{z}P^{(k)}(\tau)\gamma(z-\tau)d\tau\,|_{z=-kl}=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\left((-1)^{j+1}-1\right)d^j\varphi^{(k)}(0)+\left((-1)^{j+1}+1\right)d^j\Psi^{(k)}(0)\right), \tag{18}$$

где $j=\overline{\overline{n},n}$, $\Delta_n=\operatorname{Re}LU(\underline{n}-\overline{n})$, *где*

$$\operatorname{Re}LU(x)=\begin{cases}0, x<0,\\ x, x\ge 0,\end{cases}$$

а $\underline{n}$ *– максимальный порядок производной функции* $g^{(k)}$, *которая входит в правую часть* $P^{(k)}$, *а константы* $C_\nu^{(0)}$ *выбираются из условий*

$$\begin{gathered}\sum_{\nu=0}^{\overline{n}-1}\beta_\nu^{(0)}(-kl)C_\nu^{(0)}=\frac{1}{2}\left(\varphi^{(k)}(0)-\Psi^{(k)}(0)-C\right),\\ \sum_{\nu=0}^{\overline{n}-1}C_\nu^{(0)}d^j\beta_\nu^{(0)}(-kl)=\frac{1}{2}\left(\left((-1)^{j+1}-1\right)d^j\varphi^{(k)}(0)-\left((-1)^{j+1}+1\right)d^j\Psi^{(k)}(0)\right),\quad j=\overline{1,\overline{n}-1},\end{gathered} \tag{19}$$

а $\beta_0^{(0)}(z),\ldots,\beta_{\overline{n}-1}^{(0)}(z)$ *– фундаментальная система решений уравнения* (15).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Д о с т а т о ч н о с т ь. Уравнение (15) является обыкновенным линейным дифференциальным уравнением относительно неизвестной функции $p^{(k)}(z)$. Пусть коэффициенты $R_0^{\nu}(z)$ этого уравнения достаточно гладкие, тогда справедлива теорема о существовании фундаментальной системы решений:

$$\boldsymbol{\beta}^{(0)}(z)=\left(\beta_0^{(0)}(z),\ldots,\beta_{\overline{n}-1}^{(0)}(z)\right). \tag{20}$$

Общее решение уравнения (15) записывается в виде [10, с. 367]

$$p^{(k)}(z)=\sum_{\nu=0}^{\overline{n}-1}C_\nu^{(0)}\beta_\nu^{(0)}(z)+\int_{-kl}^{z}P^{(k)}(\tau)\gamma(z-\tau)d\tau, \tag{21}$$

где $\gamma(z)$ – решение специальной задачи Коши для уравнения (15) при нулевой правой части с условиями

$$d^i\gamma(0)=0,\quad i=\overline{0,\overline{n}-2},\quad d^{\overline{n}-1}\gamma(0)=1, \tag{22}$$

$C_\nu^{(0)}$ – некоторые константы. В силу условий (4) порядок уравнения (21) постоянен на всем отрезке $z\in[-(k+1)l,-kl]$. Для нахождения свободных переменных $C_\nu^{(0)}$ потребуем выполнения условий гладкости функции $p^{(k)}$ в точке $z=-kl$, которая определена по формулам (12) и (21), а также их производных. Данные условия задаются формулой (19). Более того, только при таком выборе констант $C_\nu^{(0)}$ полученная функция $p^{(k)}$ будет из класса $C^{\overline{n}}([-(k+1)l;-(k-1)l]$. Отметим, что при

$\bar{n}=1$ будет только первое условие. Задача Коши (15), (19) имеет единственное решение, если выполнены условия на непрерывность коэффициентов уравнения (15).

Докажем, что $p^{(k)}=\tilde{p}^{(k)}-\dfrac{C}{2}$, где функция $\tilde{p}^{(k)}$ не содержит свободной постоянной *C*. Заметим, что в функции $p^{(k)}(z)$ из выражения (16) свободная константа *C* содержится только в одном слагаемом при $|\boldsymbol{\alpha}|=0$, тогда $P^{(k)}(z)=\widetilde{P^{(k)}}(z)-r_0^{(0,0)}(z)\dfrac{C}{2}$, где функция $\widetilde{P^{(k)}}(z)$ не содержит свободной постоянной *C*.

Задачу Коши (15), (19) можно представить в виде суммы следующих двух задач:

$$\sum_{\nu=0}^{\bar{n}} R_0^{\nu}(z)d^{\nu}\tilde{p}^{(k)}(z)=\widetilde{P^{(k)}}(z), \quad z\in[-(k+1)l,-kl], \tag{23}$$

$$\begin{gathered}\tilde{p}^{(k)}(-kl)=\frac{1}{2}\Big(\varphi^{(k)}(0)-\Psi^{(k)}(0)\Big),\\ d^{j}\tilde{p}^{(k)}(-kl)=\frac{1}{2}\Big(\Big((-1)^{j+1}-1\Big)d^{j}\varphi^{(k)}(0)-\Big((-1)^{j+1}+1\Big)d^{j}\Psi^{(k)}(0)\Big),\\ j=\overline{1,\bar{n}-1}.\end{gathered} \tag{24}$$

Отметим, что $\tilde{p}^{(k)}(z)$ не содержит свободной константы *C*, так как она отсутствует в правой части и в начальных условиях задачи (23), (24).

И вторая задача:

$$\sum_{\nu=0}^{\bar{n}} R_0^{\nu}(z)d^{\nu}p_1^{(k)}(z)=-r_0^{(0,0)}(z)\frac{C}{2}, \quad z\in[-(k+1)l,-kl], \tag{25}$$

$$\begin{gathered}p_1^{(k)}(-kl)=-\frac{C}{2},\\ d^{j}p_1^{(k)}(-kl)=0,\ j=\overline{1,\bar{n}-1}.\end{gathered} \tag{26}$$

Решение задачи (25), (26) существует и единственно, с другой стороны, легко проверить, что $p_1^{(k)}(z)=-\dfrac{C}{2}$. Таким образом, действительно, $p^{(k)}=\tilde{p}^{(k)}-\dfrac{C}{2}$. Заметим, что приведенные выше рассуждения верны и при $r_0^{(0,0)}(z)\equiv 0$.

Рассмотрим поведение гладкости функции $p^{(k)}$ в зависимости от правой части $P^{(k)}$. Заметим, что гладкость решения $p^{(k)}$ уравнения (15) на единицу выше гладкости коэффициентов уравнения и его правой части [10, с. 153–154]. В функции $P^{(k)}(z)$ фигурируют функция $g^{(k)}$ и ее производные, которые определяются из начальных условий по формуле (13). В формуле (16) могут фигурировать производные функции $g^{(k)}$ до порядка *n* включительно. Пусть

$$\underline{n}=\max\left(\nu\,|\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=\nu}a^{\alpha 0}r_0^{(\boldsymbol{\alpha})}\left(-\frac{z}{a}\right)\neq 0,\ 0\le\nu\le n\right)$$

– максимальный порядок производной функции $g^{(k)}$, которая входит в правую часть $P^{(k)}$. В силу условий (4) значение $\underline{n}$ постоянно на всем отрезке $z\in[-(k+1)l,-kl]$. При таких условиях функция $p^{(k)}$, которая определяется по формуле (21), будет $C^{n-\underline{n}}$ гладкости. Для повышения гладкости данной функции требуется повысить требования на гладкость функции $g^{(k)}$, а следовательно, и $\varphi^{(k)}$, $\Psi^{(k)}$. Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) известно, что если $r_0^{(\alpha)}\in C^n$, $P^k\in C^n$, то его решение класса C^n. Таким образом, чтобы функция $P^{(k)}$ была из класса C^n, усилим требования на гладкость заданных функций:

$$\varphi^{(k)}\in C^{n+\Delta n}([0;l]), \quad \psi^{(k)}\in C^{n-1+\Delta n}([0;l]), \quad \mu^{(0)}\in C^{n-\bar{n}}([0;T]), \quad r_0^{(\alpha)}\in C^{n}([0;T]).$$

Осталось решить вопрос с условиями согласования. Условия Коши дают гладкость в точке $z=-kl$ только до порядка $0\le\bar{n}\le n-1$. Для того чтобы функция $p^{(k)}$ была из класса

$C^n([-(k+1)l;-(k-1)l])$, потребуем выполнения условий согласования в точке $z=-kl$ для производных функции $p^{(k)}$ от порядка $\overline{n}$ до n по формуле (18).

Заметим, что если $\underline{n}>\overline{n}$, то для решения смешанной задачи требуется повышенная гладкость на $\varphi^{(k)}$, $\psi^{(k)}$, а также на μ, r при меньших значениях x_0.

Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть $u^{(k)}(\mathbf{x})$ принадлежит классу $C^n(\overline{Q^{(k,1)}\cup Q^{(k,2)}})$. Тогда в силу леммы 2 функции $\varphi^{(k)}\in C^{n+\Delta_n}([0;l])$, $\psi^{(k)}\in C^{n-1+\Delta_n}([0;l])$. При этом, так как функция $u^{(k)}(\mathbf{x})$ гладкая до порядка n на всем множестве $Q^{(k,1)}\cup Q^{(k,2)}$, то она гладкая в каждой точке, в том числе и на $Q^{(k,1)}\bigcap Q^{(k,2)}$, а гладкость на этом пересечении обеспечивается условиями согласования (18) и выбором констант по формуле (19). Лемма доказана.

Заметим, что при $\overline{n}=0$ уравнение (15) превращается в обычное функциональное уравнение, которое решается, как в случае первой смешанной задачи. Условия Коши (19) исчезают, в формуле (18) $j=\overline{0,n}$, при этом $p^{(k)}(z)=P^{(k)}(z)/r_0^{(0,0)}(z)$. Утверждение леммы 2 при этом остается в силе.

Задача в области $Q^{(k,3)}$ решается аналогично. Из граничного условия на правой границе получается дифференциальное уравнение

$$\sum_{\nu=0}^{\overline{m}} R_l^{\nu}(y)d^{\nu}g^{(k)}(y)=G^{(k)}(y),\quad y\in[(k+1)l,(k+2)l],\tag{27}$$

где

$$G^{(k)}(y)=\mu^{(l)}\left(\frac{y-l}{a}\right)-\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\le n}(a)^{\alpha 0}r_0^{(\boldsymbol{\alpha})}\left(-\frac{y-l}{a}\right)\frac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|}}{\partial^{\alpha_0}y\partial^{\alpha_1}x_1}\Big(p^{(k)}(x_1+l-y)\Big)|_{x_1=l},\tag{28}$$

$$R_l^{\nu}(y)=\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=\nu}(a)^{\alpha 0}r_l^{(\boldsymbol{\alpha})}\left(\frac{y-l}{a}\right),\tag{29}$$

$\overline{m}\in\mathbb{N}_0$ – максимальный порядок производной функции $g^{(k)}$ в уравнении такой, что $\overline{m}\le n$. Его общее решение записывается как

$$g^{(k)}(y)=\sum_{\nu=0}^{\overline{m}-1}C_\nu^{(l)}\beta_\nu^{(l)}(y)+\int_{(k+1)l}^{y}G^{(k)}(\tau)\gamma(y-\tau)d\tau,\tag{30}$$

где $\boldsymbol{\beta}^{(l)}(y)=\left(\beta_0^{(l)}(y),...\beta_{\overline{m}-1}^{(l)}(y)\right)$ – фундаментальная система решений; $\gamma(y)$ – решение специальной задачи Коши для однородного уравнения (27) с условиями

$$d^i\gamma(0)=0,\quad i=\overline{0,\overline{m}-2},\quad d^{\overline{m}-1}\gamma(0)=1.\tag{31}$$

Для задачи в области $Q^{(k,3)}$ справедлива следующая

Л е м м а 4. *Пусть выполняются условия* (4) *и* $\mu^{(l)}\in C^{n-\overline{m}}([0;T])$, $r_l^{(\alpha)}\in C^n([0;T])$. *Тогда решение задачи* (6), (27) *существует и единственно в классе* $C^n(Q^{(k,1)}\cup Q^{(k,3)})$ *тогда и только тогда, когда* $\varphi^{(k)}\in C^{n+\Delta_m}([0;l])$, $\psi^{(k)}\in C^{n-1+\Delta_m}([0;l])$ *и выполнены условия согласования*

$$\sum_{\nu=0}^{\overline{m}-1}C_\nu^{(l)}d^j\beta_\nu^{(l)}\big((k+1)l\big)+d^j\int_{(k+1)l}^{y}G^{(k)}(\tau)\gamma(y-\tau)d\tau\,|_{y=(k+1)l}=$$
$$=\frac{1}{2}\Big(\Big((-1)^{j+1}-1\Big)d^j\varphi^{(k)}(l)-\Big((-1)^{j+1}-1\Big)d^j\Psi^{(k)}(l)\Big),\tag{32}$$

где $j=\overline{\overline{m},n}$; $\Delta_m=ReLU(\underline{m}-\overline{m})$; *а* $\underline{m}$ *– максимальный порядок производной функции* $p^{(k)}$, *которая входит в правую часть* $G^{(k)}$, *а константы* $C_\nu^{(l)}$ *выбираются из условий*

$$\begin{gathered}\sum_{\nu=0}^{\overline{m}-1}\beta_\nu^{(l)}\big((k+1)l\big)C_\nu^{(l)}=\frac{1}{2}\Big(\varphi^{(k)}(l)-\Psi^{(k)}(l)-C\Big),\\ \sum_{\nu=0}^{\overline{m}-1}C_\nu^{(l)}d^{\,j}\beta_\nu^{(l)}\big((k+1)l\big)=\frac{1}{2}\Big(\Big((-1)^{j+1}-1\Big)d^{\,j}\varphi^{(k)}(l)-\Big((-1)^{j+1}+1\Big)d^{\,j}\Psi^{(k)}(l)\Big),\quad j=\overline{1,\overline{n}-1}.\end{gathered}\tag{33}$$

Доказательство повторяет доказательство леммы 3.

Аналогично случаю с условием на левой границе, утверждение данной леммы справедливо при $\overline{m}=0$.

В области $Q^{(k,4)}$ решение строится с помощью суммы функций $p^{(k)}(z)$, определенной по формуле (21) и $g^{(k)}(y)$, определенной по формуле (30). Пусть $\Delta=\max(\Delta_m,\Delta_n)$.

Лемма 5. *Пусть выполняются условия* (4) *и* $\mu^{(0)}\in C^{n-\overline{n}}([0;T])$, $\mu^{(l)}\in C^{n-\overline{m}}([0;T])$, $r_0^{(\alpha)}\in C^n([0;T])$, $r_l^{(\alpha)}\in C^n([0;T])$, $\varphi^{(k)}\in C^{n+\Delta}([0;l])$, $\psi^{(k)}\in C^{n-1+\Delta}([0;l])$. *Тогда решение задачи* (6)–(8) *существует и единственно в классе* $C^n(Q^{(k,4)})$.

Доказательство данной леммы следует из вида общего решения уравнения (9) и существования единственной функций $p^{(k)}(z)$ из граничного условия на левой границе и существования единственной функции $g^{(k)}(y)$ из граничного условия на правой границе.

Леммы 2–5 дают условия на существование единственного решения на отдельных частях множества $\overline{Q^{(k)}}$. Для получения условий существования единственного решения на всем множестве $\overline{Q^{(k)}}$ объединим результаты лемм 2–5 в виде утверждения.

Утверждение. *Пусть выполняются условия* (4) *и функции* $\mu^{(0)}\in C^{n-\overline{n}}([0;T])$, $\mu^{(l)}\in C^{n-\overline{m}}([0;T])$, $r_0^{(\alpha)}\in C^n([0;T])$, $r_l^{(\alpha)}\in C^n([0;T])$. *Решение задачи* (6)–(8) *существует и единственно в классе* $C^n(\overline{Q^{(k)}})$ *тогда и только тогда, когда* $\varphi^{(k)}\in C^{n+\Delta}([0;l])$, $\psi^{(k)}\in C^{n-1+\Delta}([0;l])$ *и выполняются условия согласования* (18), (23), *а константы* $C_\nu^{(0)}$, $C_\nu^{(l)}$ *выбираются из условий* (19) *и* (33) *соответственно.*

Доказательство. Необходимость. Пусть решение $u^{(k)}(\mathbf{x})$ задачи (6)–(8) существует и единственно в классе $C^n(\overline{Q^{(k)}})$, тогда в силу леммы 2 будут выполняться условия $\varphi^{(k)}\in C^{n+\Delta}([0;l])$, $\psi^{(k)}\in C^{n-1+\Delta}([0;l])$, а в силу лемм 3, 4 – условия согласования (18) и (32).

Достаточность. При выполнении условий на функции из граничных условий утверждения, а также условий $\varphi^{(k)}\in C^{n+\Delta}([0;l])$, $\psi^{(k)}\in C^{n-1+\Delta}([0;l])$ и условий согласования (18) и (32) получим, что решение $u^{(k)}(\mathbf{x})$ задачи (6)–(8) существует и единственно в классе $C^n(\overline{Q^{(k)}})$. Утверждение доказано.

Решение задачи в полуполосе. В предыдущем пункте была решена задача (6)–(8) в каждой из подобластей $\overline{Q}^{(k)}$. Выведем теперь условия принадлежности решения $u(\mathbf{x})$ задачи (6)–(8) классу $C^n(\overline{Q^{(k)}\cup Q^{(k-1)}})$.

Лемма 6. *Пусть выполняются условия* (4) *и* $u^{(k-1)}(\mathbf{x})$ – *решение задачи* (6)–(8) *на множестве* $\overline{Q^{(k-1)}}$, *и выполнены условия* $\mu^{(0)}\in C^{n-\overline{n}+\Delta}([0;T])$, $\mu^{(l)}\in C^{n-\overline{m}+\Delta}([0;T])$, $r_l^{(\alpha)}\in C^{n+\Delta}([0;T])$, $r_0^{(\alpha)}\in C^{n+\Delta}([0;T])$. *Тогда функция*

$$u^{(k,k-1)}(\mathbf{x})=\begin{cases}u^{(k)}(\mathbf{x}), & (\mathbf{x})\in\overline{Q^{(k)}},\\ u^{(k-1)}(\mathbf{x}), & (\mathbf{x})\in\overline{Q^{(k-1)}}\end{cases}\tag{34}$$

будет $n+\Delta$ *раз непрерывно дифференцируемой на* $\overline{Q^{(k,1)}\cup Q^{(k-1)}}$ *и будет решением задачи* (6)–(8) *на этом же множестве тогда и только тогда, когда* $\varphi^{(k-1)}\in C^{n+2\Delta}([0;l])$, $\psi^{(k-1)}\in C^{n-1+2\Delta}([0;l])$ *и начальные условия на слое* k *определены как*

$$\begin{gathered}\varphi^{(k)}(x_1)=u^{(k-1)}\left(\frac{kl}{a},x_1\right)=p^{(k-1)}(x_1-kl)+g^{(k-1)}(x_1+kl),\\ \psi^{(k)}(x_1)=\partial_{x_0}u^{(k-1)}\left(\frac{kl}{a},x_1\right)=-adp^{(k-1)}(x_1-kl)+adg^{(k-1)}(x_1+kl),\quad x_1\in[0;l].\end{gathered}\tag{35}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть решение $u^{(k-1,k)}(\mathbf{x})\in C^{n+\Delta}\overline{(Q^{(k,1)}\cup Q^{(k-1)})}$. Тогда выполняются условие на гладкость $u^{(k-1)}(kl/a,x_1)=u^{(k)}(kl/a,x_1)$ и на производные этих функций до порядка n + Δ включительно. Отсюда следует определение начальных функций по формуле (35). А из лемм 2–5 следует условие на гладкость функций $\varphi^{(k-1)}\in C^{n+2\Delta}([0;l])$, $\psi^{(k-1)}\in C^{n-1+2\Delta}([0;l])$.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть выполнены условия $\varphi^{(k-1)}\in C^{n+2\Delta}([0;l])$, $\psi^{(k-1)}\in C^{n-1+2\Delta}([0;l])$, тогда $u^{(k-1)}(\mathbf{x})$ – решение задачи (6)–(8) на множестве $\overline{Q^{(k-1)}}$ принадлежит классу $C^{n+\Delta}\overline{(Q^{(k-1)})}$. С учетом леммы 2 и определения начальных условий по формуле (34) функция $u^{(k)}(\mathbf{x})\in C^{n+\Delta}\overline{(Q^{(k,1)})}$. Также условий (35) оказывается достаточно для того, чтобы решение $u^{(k-1,k)}(\mathbf{x})$ было из класса $C^{n+\Delta}\overline{(Q^{(k,1)}\cup Q^{(k-1)})}$. Лемма доказана.

З а м е ч а н и е. Условия согласования (18), (32) для некоторого k выполняются, если выполняются условия согласования (18), (32) для $k-1$.

Сформулируем лемму о существовании и единственности решения смешанной задачи (6)–(8) на всем множестве $\overline{Q}$.

Л е м м а 7. *Пусть выполняются условия* (4) *и* $\mu^{(0)}\in C^{n-\overline{n}+s\Delta}([0;T])$, $\mu^{(l)}\in C^{n-\overline{m}+s\Delta}([0;T])$, $r_l^{(\alpha)}\in C^{n+s\Delta}([0;T])$, $r_0^{(\alpha)}\in C^{n+s\Delta}([0;T])$. *Тогда решение задачи* (6)–(8) *в классе* $C^n(\overline{Q})$ *существует и единственно тогда и только тогда, когда* $\varphi\in C^{n+(s+1)\Delta}([0;l])$, $\psi\in C^{n-1+(s+1)\Delta}([0;l])$ *и выполняются условия согласования* (18), *где* $j=\overline{\overline{n},n+s\Delta}$, *и условия* (32), *где* $j=\overline{\overline{m},n+s\Delta}$ *при* $k=0$, *а константы* $C_\nu^{(0)}$, $C_\nu^{(l)}$ *выбираются из условий* (19) *и* (33) *соответственно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Напомним, что $T=(s+1)l/a, s\in\mathbb{N}_0$. Доказательство данной леммы проводится по индукции по номеру области k, исходя из леммы 6 и утверждения. Процедура начинается с множества $\overline{Q^{(0)}}$, в котором с использованием начальных условий (7) строится решение по формуле Даламбера. Далее из граничных условий (8) и лемм 3, 4 показывается, что решения граничных задач существуют и единственны. Из леммы 5 находится решение в области $\overline{Q^{(0,4)}}$. Лемма 6 позволяет выбрать новые начальные условия на множестве $\overline{Q^{(1)}}$, и далее процесс будет продолжаться до номера области s.

В работах [4] и [5] были доказаны теоремы о разрешимости смешанной задачи для уравнения типа Клейна – Гордона – Фока с косыми производными в граничных условиях. При этом полученные результаты существенно зависели от коэффициентов граничных условий. Покажем, что результаты упомянутых работ следуют из доказанной леммы 7. В случае характеристических производных, рассмотренных в [5], выполняется $n=1$, $\overline{n}=\overline{m}=0$, $\underline{n}=\underline{m}=1$, откуда $\Delta_n=\Delta_m=1$, а следовательно, значение $\Delta=1$ и скорость, с которой ухудшается гладкость решения, также равна единице. Для случая нехарактеристической первой производной, рассмотренной в [4], справедливы соотношения $n=1$, $\overline{n}=\underline{n}=\overline{m}=\underline{m}=1$, следовательно, $\Delta=0$ и ухудшения гладкости не происходит.

Используя результаты леммы 7, можно доказать теорему о разрешимости задачи (1)–(3) для неоднородного уравнения.

Т е о р е м а. *Пусть выполняются условия* (4) *и* $f\in C^{n-1+s\Delta}(\overline{Q})$, $\mu^{(0)}\in C^{n-\overline{n}+s\Delta}([0;T])$, $\mu^{(l)}\in C^{n-\overline{m}+s\Delta}([0;T])$, $r_l^{(\alpha)}\in C^{n+s\Delta}([0;T])$, $r_0^{(\alpha)}\in C^{n+s\Delta}([0;T])$. *Тогда решение задачи* (1)–(3) *в классе* $C^n(\overline{Q})$ *существует и единственно тогда и только тогда, когда* $\varphi\in C^{n+(s+1)\Delta}([0;l])$, $\psi\in C^{n-1+(s+1)\Delta}([0;l])$, и *выполняются условия согласования* (18), *где* $j=\overline{\overline{n},n+s\Delta}$, *и условия* (32), *где* $j = \overline{\overline{m}, n + s\Delta}$ *при* $k - 0$, *а константы* $C_\nu^{(0)}$, $C_\nu^{(l)}$ *выбираются из условий* (19) *и* (33) *соответственно, где выражение* $\mu^{(j)}(x_0)$ *и его производные заменяются на*

$$\widetilde{\mu^{(j)}}(x_0) - \sum_{|\alpha| \le n} r_j^{(\alpha)}(x_0) \frac{\partial^{|\alpha|} w_p}{\partial^{\alpha_0} x_0 \partial^{\alpha_1} x_1}(x_0, j), \quad j \in \{0, l\}.$$

Доказательство данного утверждения следует из лемм 1 и 7, так как условие $f \in C^{n-1+s\Delta}(\overline{Q})$ гарантирует выполнение условий существования гладкого решения w_p. В силу условий (4), Δ_m, Δ_n, а следовательно, и $\Delta = \max(\Delta_m, \Delta_n)$, определены и постоянны для всех $x_0 \in [0; T]$.

Заключение. Рассмотрена смешанная задача для волнового уравнения с дифференциальными полиномами в граничных условиях. Доказано существование единственного решения в полуполосе при достаточных условиях гладкости на исходные функции задачи при выполнении необходимых и достаточных условий согласования на заданные функции задачи и специального выбора произвольных констант, которые возникают при разрешении граничных условий.

Список использованных источников

1. Корзюк, В. И. Решение задачи Коши гиперболического уравнения для однородного дифференциального оператора в случае двух независимых переменных / В. И. Корзюк, И. С. Козловская // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2011. – Т. 55, № 5. – С. 9–13.

2. Корзюк, В. И. Классическое решение смешанных задач для одномерного волнового уравнения с негладкими условиями Коши / В. И. Корзюк, С. И. Пузырный // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. – 2016. – Т. 52, № 2. – С. 22–31.

3. Корзюк, В. И. Классическое решение первой смешанной задача в полуполосе для линейного гиперболического уравнения второго порядка / В. И. Корзюк, Е. С. Чеб, А. А. Карпечина // Труды Института математики. – 2012. – Т. 20, № 2. – С. 64–74.

4. Корзюк, В. И. Классическое решение смешанной задачи для уравнения типа Клейна – Гордона – Фока в полуполосе с косыми производными в граничных условиях / В. И. Корзюк, И. И. Столярчук // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. – 2018. – Т. 54, № 4. – С. 391–403. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-391-403

5. Корзюк, В. И. Классическое решение смешанной задачи для уравнения типа Клейна – Гордона – Фока с характеристическими косыми производными в граничных условиях / В. И. Корзюк, И. И. Столярчук // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. – 2019. – Т. 55, № 1. – С. 7–21. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-1-7-21

6. Staliarchuk, I. The classical solution of the mixed problem for the second-order hyperbolic equation with high order derivatives in boundary conditions / I. Staliarchuk // Global and Stochastic Analysis. – 2018. – Vol. 5, № 1. – P. 57–65.

7. Корзюк, В. И. Классическое решение смешанной задачи для одномерного волнового уравнения с производными высокого порядка в граничных условиях / В. И. Корзюк, С. Н. Наумовец // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2016. – Т. 60, № 3. – С. 11–17.

8. Корзюк, В. И. Классическое решение смешанных задач для уравнения Клейна – Гордона – Фока с нелокальными условиями / В. И. Корзюк, И. И. Столярчук // Труды Института математики. – 2018. – Т. 26, № 1. – С. 54–70.

9. Корзюк, В. И. Уравнения математической физики / В. И. Корзюк. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Ленанд, 2021. – 479 с.

10. Матвеев, Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений / Н. М. Матвеев. – М.: Высш. шк., 1967. – 565 с.

References

1. Korzyuk V. I., Kozlovskay I. S. Solution of the Cauchy problem of a hyperbolic equation with a homogeneous differential operator in the case of two independent variables. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2011, vol. 55, no. 5, pp. 9–13 (in Russian).

2. Korzyuk V. I., Pyzirnii S. I. Classical solution of mixed problems for one-dimensional wave equation with non-smooth Cauchy conditions. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2016, vol. 52, no. 2, pp. 22–31 (in Russian).

3. Korzyuk V. I., Cheb E. S., Karpechyna A. A. Classical solution of the first mixed problem in a half-strip for a second order linear hyperbolic equation *Trudy Instituta matematiki = Proceedings of the Institute of Mathematics*, 2012, vol. 20, no. 2. pp. 64–74 (in Russian).

4. Korzyuk V. I., Stolyarchuk I. I. Classical solution of the mixed problem for the Klein – Gordon – Fock type equation in the half-strip with curve derivatives at boundary conditions. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizi-*

ka-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series, 2018, vol. 54, no. 4, pp. 391–403 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-391-403

5. Korzyuk V. I., Stolyarchuk I. I. Classical solution of the mixed problem for the Klein – Gordon – Fock type equation with characteristic oblique derivatives at boundary conditions. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2019, vol. 55, no. 1, pp. 7–21 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-1-7-21

6. Staliarchuk I. The classical solution of the mixed problem for the second-order hyperbolic equation with high order derivatives in boundary conditions. *Global and Stochastic Analysis*, 2018, vol. 5, no. 1. pp. 57–65.

7. Korzyuk V. I., Naumavets S. N. Classical solution of a mixed problem for a one-dimensional wave equation with high-order derivatives in the boundary conditions. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of t he National Academy of Sciences of Belarus*, 2016, vol. 60, no. 3, pp . 11–17 (in Russian).

8. Korzyuk V. I. Stolyarchuk I. I. Classical solution to the mixed problem for the Klein-Gordon-Fock equation with the unlocal conditions. *Trudy Instituta matematiki = Proceedings of the Institute of Mathematics*, 2018, vol. 26, no. 1, pp. 56–72 (in Russian).

9. Korzyuk V. I. *Equations of Mathematical Physics. 2nd ed*. Moscow: Lenand Publ., 2021. 479 p. (in Russian).

10. Matveev N. M. *Methods of Integration of Ordinary Differential Equations*. Moscow: Vysshaya shkola Publ., 1967. 565 p. (in Russian).

Информация об авторе

Столярчук Иван Игоревич – кандидат физико-математических наук, ООО «Нэкстсофт» (ул. Кульман, 9, 220100, Минск, Республика Беларусь). E-mail: stolyarchuk.ivan.i@gmail.com. https://orcid.org/0000-0001-6839-7997

Information about the author

Ivan I. Stolyarchuk – Ph. D. (Physics and Mathematics), Nextsoft Ltd. (9, Kulman Str., 220100, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: stolyarchuk.ivan.i@gmail.com. https://orcid.org/0000-0001-6839-7997