ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 519.177
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2025-61-4-299-306

Поступила в редакцию 12.06.2025
Received 12.06.2025

В. И. Бенедиктович

Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь

СЛОЖНОСТЬ РАСПОЗНАВАНИЯ ЖЕСТКОСТИ В КЛАССЕ ($2t + 1$)-РЕГУЛЯРНЫХ ГРАФОВ

Аннотация. Известно, что в общем случае проблема распознавания t-ЖЕСТКОСТИ графа является coNP-полной. Кроме того, для многих подклассов графов задача распознавания t-ЖЕСТКОСТИ остается NP-трудной, в частности, в классе r-регулярных графов, где $r \geq 3t$ для любого целого числа $t \geq 1$. Сложность распознавания t-ЖЕСТКОСТИ r-регулярных графов остается открытой, когда $2t \leq r < 3t$, а когда $r = 2t + 1$ сложность распознавания является особенно интригующей. В последнем случае была выдвинута гипотеза, что она остается NP-трудной. В данной статье мы устанавливаем справедливость этой гипотезы.

Ключевые слова: вершинный разрез графа, t-ЖЕСТКОСТЬ графа, coNP-полнота проблемы распознавания

Для цитирования. Бенедиктович, В. И. Сложность распознавания жесткости в классе ($2t + 1$)-регулярных графов / В. И. Бенедиктович // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. – 2025. – Т. 61, № 4. – С. 299–306. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2025-61-4-299-306

Vladimir I. Benediktovich

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus

THE COMPLEXITY OF THE DECISION PROBLEM OF TOUGHNESS IN THE CLASS OF ($2t + 1$)-REGULAR GRAPHS

Abstract. It is known that the decision problem of t-TOUGHNESS of a graph is coNP-complete in general. Moreover, in many subclasses of graphs, the decision problem of t-TOUGHNESS remains NP-hard, in particular, in the class of r-regular graphs, where $r \geq 3t$ for any integer number $t \geq 1$. The complexity of the decision problem of t-TOUGHNESS for r-regular graphs remains open when $2t \leq r < 3t$, and when $r = 2t + 1$ the complexity of the decision problem is particularly intriguing. In the latter case it has been conjectured, that it remains NP-hard. In this paper, we establish the validity of this conjecture.

Keywords: vertex cut of a graph, t-toughness of a graph, coNP-completeness of the decision problem

For citation. Benediktovich V. I. The complexity of the decision problem of toughness in the class of ($2t + 1$)-regular graphs. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2025, vol. 61, no. 4, pp. 299–306 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2025-61-4-299-306

Мы будем рассматривать всюду простые конечные неориентированные графы. Через $c(G)$ будем обозначать число компонент связности графа G. В 1973 г. В. Хватал ввел новый инвариант графа, который в отличие от связности графа учитывает, как удаление любого вершинного разреза влияет на количество полученных компонент связности. Он обнаружил некоторые взаимосвязи между этим параметром и существованием гамильтонова цикла в графе, а также получил несколько результатов относительно этого нового инварианта. Жесткость графа является критической мерой его устойчивости к удалению вершин, отражающей, сколько компонент остается после таких удалений, количественно определяет уязвимость графа и имеет важное значение для понимания его структурных свойств и при анализе уязвимости коммуникационной сети к сбоям.

Происхождение этого понятия было вызвано следующим наблюдением: если граф G имеет гамильтонов цикл, то при удалении из графа произвольного множества S мощности s, полученный граф $G - S$ имеет не более s связных компонент. Результатом похожего характера является известный критерий Татта о 1-факторе, который утверждает, что граф G четного порядка имеет совершенное паросочетание тогда и только тогда, когда для каждого подмножества $S \subseteq V(G)$

мощности s число компонентов $G - S$ нечетного порядка не превышает s. В обеих этих ситуациях число компонент $G - S$ является критическим.

Напомним, что подмножество $S \subset V(G)$ называется *вершинным разрезом* графа G, если выполняется условие $c(G - S) > 1$.

Определение. Для рационального числа t неполный граф G называется *t-жестким*, если для любого вершинного разреза $S \subset V(G)$ выполняется неравенство $|S| \geq t \cdot c(G - S)$.

Жесткостью неполного графа G является максимальное $t \in \mathbb{Q}$, такое, что G является t-жестким и обозначается через $\tau(G)$. Следовательно, для неполного графа G

$$\tau(G) = \min\left\{\frac{|S|}{c(G-S)} : S \subset V(G), c(G-S) > 1\right\}.$$

Поскольку полный граф K_n порядка $n \geq 1$ не имеет вершинного разреза, то для него полагают $\tau(K_n) = +\infty$.

На практике проще применять альтернативное определение жесткости графа. Пусть G – граф порядка n и вершинной связности $\kappa(G)$, отличный от полного графа. Положим $c_p = \max\limits_{|S|=p} c(G - S)$ и $t_p = \dfrac{p}{c_p}$. Тогда G является *t-жестким* для $0 \leq t \leq \min\limits_{\kappa(G)\leq p} t_p$ и его *жесткость* равна $\tau(G) = \min\limits_{\kappa(G)\leq p} t_p$. Заметим, что при этом нет необходимости рассматривать значения p, которые больше $n - \alpha(G)$, где $\alpha(G)$ – число независимости графа G, поскольку иначе имеем $t_p > t_{n-\alpha(G)}$, что вытекает из того, что для любого вершинного разреза S графа G справедливо неравенство $c(G - S) \leq \alpha(G)$.

Согласно Пламеру, вершинный разрез $S \subset V$ графа G, на котором достигается минимум $\tau(G) = |S| / c(G - S)$, называется *жестким множеством*. Иногда 1-жесткий граф называют просто жестким графом. Например, граф Петерсена является 4/3-жестким графом, цикл длины не меньше 4 является 1-жестким.

Из определения немедленно следует, что для неполного графа G справедливо неравенство

$$\tau(G) \leq \frac{\kappa(G)}{2}.$$

Исторически сложилось, что большая часть исследований в области изучения жесткости графов основывалась на ряде гипотез, выдвинутых В. Хваталом. Самая сложная из них все еще остается открытой – существует ли конечная константа t_0, такая, что каждый t_0-жесткий граф является гамильтоновым. Последние 50 лет исследования по нахождению жесткости графов также были сосредоточены на вопросах ее вычислительной сложности. Сложность проблемы распознавания жесткости графа впервые также была поднята В. Хваталом. Проблема распознавания жесткости формулируется следующим образом.

Проблема *t*-ЖЕСТКОСТЬ графа.

Условие: дан граф G и положительное рациональное число t.

Вопрос: справедливо ли неравенство $\tau(G) \geq t$?

Ответ на него дает следующее утверждение.

Теорема 1 [1]. *Проблема t-ЖЕСТКОСТЬ графа является coNP-полной.*

Отметим, что доказательство этой теоремы разбивается на 2 этапа: сначала к задаче НЕ-1-ЖЕСТКОСТЬ полиномиально сводится задача k-НЕЗАВИСИМОЕ МНОЖЕСТВО, которая, как известно, является NP-полной, т. е. для заданного графа G строится граф G' такой, что число независимости $\alpha(G) \geq k$ тогда и только тогда, когда $\tau(G') < 1$. Затем задача НЕ-1-ЖЕСТКОСТЬ полиномиально сводится к задаче НЕ-t-ЖЕСТКОСТЬ, т. е. для графа G' строится граф G'' такой, что $\tau(G') < 1$ тогда и только тогда, когда $\tau(G'') < t$.

Оказывается, что для многих подклассов графов задача распознавания t-ЖЕСТКОСТЬ графа остается NP-трудной. Например, распознать t-жесткость графа является NP-трудной задачей даже в классе графов, имеющих достаточно высокую минимальную степень, чтобы гарантировать свойство t-жесткости графа в следующем смысле.

Т е о р е м а 2 [2]. *Пусть $t \geq 1$ – рациональное число. Если минимальная степень $\delta \geq \left(\frac{t}{t+1}\right)n$, то G является t-жестким. С другой стороны, для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ проблема t-ЖЕСТКОСТЬ для графа G с $\delta \geq \left(\frac{t}{t+1} - \varepsilon\right)n$ является уже coNP-полной.*

Другим интересным классом графов является класс *двудольных* графов. Нетрудно заметить, что $\tau(G) \leq 1$ для любого двудольного графа G – достаточно в качестве вершинного разреза S выбрать долю меньшей мощности. Тем не менее проблема 1-ЖЕСТКОСТЬ не становится легче для двудольных графов. В 1996 г. Д. Кратч и другие смогли свести проблему 1-ЖЕСТКОСТЬ для произвольного графа к проблеме 1-ЖЕСТКОСТЬ для двудольных графов, используя классическую конструкцию Нэш-Вильямса.

Т е о р е м а 3 [3]. *Проблема t-ЖЕСТКОСТЬ остается coNP-полной в классе двудольных графов.*

Как следствие получается, что проблема 1-ЖЕСТКОСТЬ графа также является NP-трудной в классе K_3-свободных графов.

Еще одним важным классом графов, который исследовался на нахождение жесткости, является класс *регулярных* графов. Отметим, что жесткость r-регулярного графа G не превосходит $r/2$, поскольку справедливо неравенство $\tau(G) \leq \frac{\kappa(G)}{2} \leq \frac{r}{2}$. Сначала проблема 1-ЖЕСТКОСТЬ изучалась для кубических графов [4], а затем результаты исследований были обобщены в виде следующего утверждения.

Т е о р е м а 4 [5]. *Для любого целого числа $t \geq 1$ и любого целого $r \geq 3t$ проблема t-ЖЕСТКОСТЬ является coNP-полной в классе r-регулярных графов.*

Сложность распознавания t-жесткости r-регулярных графов остается открытой, когда $2t \leq r < 3t$, а сложность распознавания в случае $r = 2t + 1$ является особенно интригующей. Там же [5] была выдвинута следующая гипотеза.

Г и п о т е з а. Для любого целого числа $t \geq 1$ проблема t-ЖЕСТКОСТЬ остается NP-трудной для $(2t + 1)$-регулярных графов.

В данной статье мы устанавливаем справедливость этой гипотезы.

Напомним, что t-регулярный остовной подграф называется *t-фактором*. Связный 2-регулярный остовной подграф является гамильтоновым циклом, а 1-фактор графа G также называется его *совершенным паросочетанием*.

Реберная k-раскраска графа – это такое разбиение его ребер на k (цветных) классов, что никакие смежные ребра не принадлежат одному и тому же классу. Наименьшее возможное количество цветов в раскраске ребер графа называется его *хроматическим индексом*. Так как ребра k-регулярного графа не могут быть раскрашены менее чем в k цветов, хроматический индекс k-регулярного реберно k-раскрашенного графа равен k. Очевидно, что дополнение 1-фактора кубического графа является его 2-фактором. В общем случае такой 2-фактор может иметь циклы произвольной длины, но особый интерес представляют 2 случая – когда все циклы имеют четную длину и когда существует в точности один (т. е. гамильтонов) цикл. Оказывается, первый случай тесно связан с раскраской его ребер. При этом 2-фактор, в котором все циклы имеют четную длину, называется *четным* 2-фактором.

Если Δ – максимальная степень вершин графа, то по теореме Визинга хроматический индекс равен либо Δ, либо $\Delta + 1$. Этот факт разбивает графы на два класса: класс 1 и класс 2 соответственно. В [6] было обнаружено, что хорошо известная проблема четырех красок эквивалентна тому, что простые связные планарные кубические графы без мостов относятся к классу 1, т. е. имеют хроматический индекс 3. Простые связные кубические графы без мостов могут относиться и к классу 2, т. е. иметь хроматический индекс 4.

Т е о р е м а 5 [7]. *Кубический граф G реберно 3-раскрашиваем тогда и только тогда, когда он имеет четный 2-фактор.*

Т е о р е м а 6. *Задача 1-ЖЕСТКОСТЬ остается coNP-полной для 2-связных реберно 3-раскрашиваемых кубических графов.*

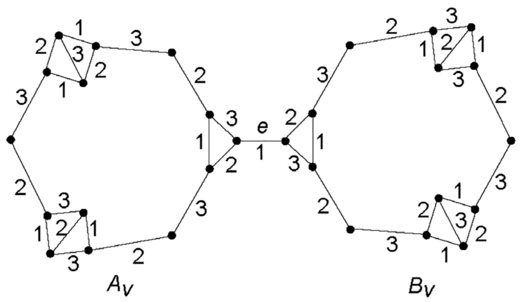

Рис. 1. Граф H_v с правильной реберной 3-раскраской

Fig. 1. Graph H_v with a regular edge 3-coloring

Доказательство. Как было уже сказано, задача 1-ЖЕСТКОСТЬ остается coNP-полной для кубических графов (теорема 1.8 [4]). Поэтому мы полиномиально сведем задачу 1-ЖЕСТКОСТЬ для кубического графа G к задаче 1-ЖЕСТКОСТЬ для 2-связного реберно 3-раскрашиваемого кубического графа $H = H(G)$ с помощью аналогичного метода, который использовался в доказательстве теоремы 1.8 [4]. А именно: каждой вершине $v \in V(G)$ мы ставим в соответствие в графе H граф H_v, изображенный на рис. 1, который состоит из двух подграфов A_v и B_v, соединенных ребром e, с указанной на рис. 1 раскраской его ребер в цвета 1, 2 и 3.

Каждому ребру vw графа G мы ставим в соответствие в графе H два ребра, которые соединяют вершину степени 2 в A_v с вершиной степени 2 в B_w, а также вершину степени 2 в A_w с вершиной степени 2 в B_v. Эти добавленные ребра мы раскрасим в графе H в цвет 1. В результате, очевидно, получим 2-связный реберный 3-раскрашиваемый кубический граф $H = H(G)$. Поскольку такое соответствие является частным случаем соответствия, предложенного в доказательстве теоремы 1.8 [4], то будет справедливо следующее

Утверждение. *G является 1-жестким тогда и только тогда, когда $H(G)$ является 1-жестким.*

Таким образом, задача 1-ЖЕСТКОСТЬ остается coNP-полной для 2-связных реберно 3-раскрашиваемых кубических графов. Теорема доказана.

Теорема 7. *Для любого целого числа $t \geq 1$ проблема t-ЖЕСТКОСТЬ остается coNP-полной для $(2t + 1)$-регулярных графов.*

Доказательство. Сведем задачу 1-ЖЕСТКОСТЬ для 2-связных реберно 3-раскрашиваемых кубических графов к задаче t-ЖЕСТКОСТЬ для $(2t + 1)$-регулярных графов, где $t \geq 1$ – целое число.

Пусть G – любой 1-жесткий 2-связный 3-реберно-раскрашиваемый кубический граф. Согласно теореме 5 ребра графа G можно разбить на 1-фактор и четный 2-фактор, состоящий из четных циклов.

Построим $H = H(G)$ следующим образом. Каждая вершина $v \in V(G)$ в графе G заменяется на полный граф K_t в графе H. Такой граф будем обозначать через K_t^v. Для смежных вершин u и v в графе G *m-соединением* графов K_t^v и K_t^w в графе H будем называть ребра паросочетания P_{vw} между вершинами графов K_t^v и K_t^w. При этом ребро uv графа G назовем *m-ребром*. Аналогично, для смежных вершин u и v в графе G *c-соединением* графов K_t^v и K_t^w в графе H будем называть ребра полного двудольного графа $K_{t,t}^{vw} = K\left(V(K_t^v), V(K_t^w)\right)$ в графе H между вершинами графов K_t^v и K_t^w. При этом ребро uv графа G назовем *c-ребром*. Тогда в 1-факторе графа G каждое ребро vw мы заменим m-соединением в графе H, а в четном 2-факторе графа G мы *попеременно* заменим каждое ребро vw на c-соединение и m-соединение в графе H. Таким образом, c-соединение представляет собой совокупность t^2 ребер, а m-соединение представляет собой совокупность t независимых ребер, и каждый подграф K_t^v в графе H имеет одно c-соединение и два m-соединения с тремя другими различными подграфами K_t^u графа H, где $u \underset{G}{\sim} v$. Следовательно, построенный граф H является $(2t + 1)$-регулярным.

Покажем, что из 2-связности исходного графа G следует, что построенный граф H является $2t$-связным. Для этого по теореме Уитни достаточно показать, что любая пара различных вершин графа H может быть соединена по крайней мере $2t$ непересекающимися цепями. Возможны следующие случаи.

Случай 1. Пара различных вершин x, y графа H лежит в одном и том же графе K_t^v. Тогда в самом графе K_t^v имеется $t - 1$ xy-цепь плюс для c-ребра vw t xy-цепей вида $\{\langle xzy\rangle \mid z \in K_t^w\}$ и для двух m-ребер vu две xy-цепи вида $\{\langle xzsy\rangle \mid z, s \in K_t^u, xz, sy \in P_{vu}\}$, всего $2t + 1$ цепь.

Случай 2. Пара вершин x и y графа H лежит в разных графах K_t^v и K_t^w, причем вершины v и w графа G лежат на одном и том же четном цикле C 2-фактора графа G.

Подслучай 2.1. Вершины v и w несмежны в графе G. Пусть vu, wg – m-ребра, а vf, wh – c-ребра цикла C. Тогда можно построить t непересекающихся xy-цепей вида

$$\left\{\langle xzs\cdots ry\rangle \mid z \in K_t^v, s \in K_t^u, zs \in P_{vu},\ r \in K_t^h\right\}$$

и t непересекающихся xy-цепей вида

$$\left\{\langle yzs\cdots rx\rangle \mid z \in K_t^w, s \in K_t^g, zs \in P_{wg},\ r \in K_t^f\right\},$$

всего получаем $2t$ непересекающихся xy-цепей (рис. 2).

Подслучай 2.2. Вершины v и w графа G смежны, причем ребро vw графа G является c-ребром, а ребра vu, wh – m-ребра цикла C. В этом случае построим $2t - 1$ непересекающихся xy-цепей вида

$$xy; \left\{\langle xzy\rangle \mid z \in K_t^v\right\}, \left\{\langle xzy\rangle \mid z \in K_t^w\right\}$$

и одну цепь вида

$$\langle xz\cdots ry\rangle \mid z \in K_t^u, \quad r \in K_t^h, \quad xz \in P_{vu}, \quad ry \in P_{wh},$$

всего получаем $2t$ непересекающихся xy-цепей (рис. 3, *a*).

Подслучай 2.3. Вершины v и w графа G смежны, причем ребро vw графа G является m-ребром, а ребра vu, wh – c-ребра цикла C. В этом случае построим t непересекающихся xy-цепей вида

$$\left\{\langle xzsy\rangle \mid z \in K_t^v, s \in K_t^w, zs \in P_{vw}\right\}$$

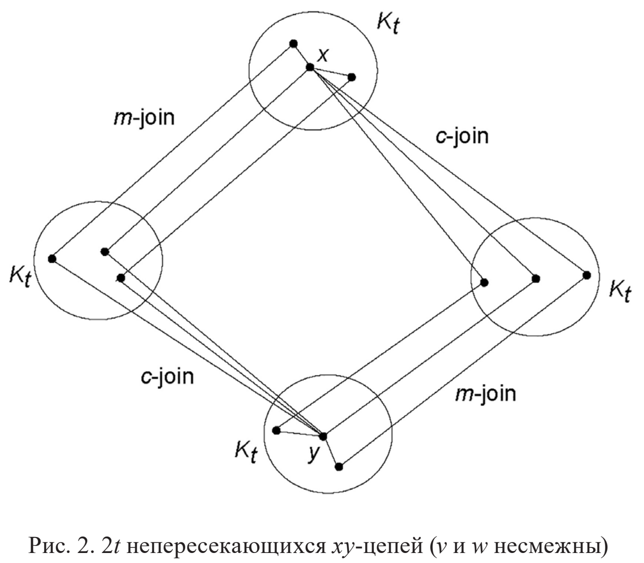

Рис. 2. $2t$ непересекающихся xy-цепей (v и w несмежны)

Fig. 2. $2t$ disjoint xy-paths (v and w are not adjacent)

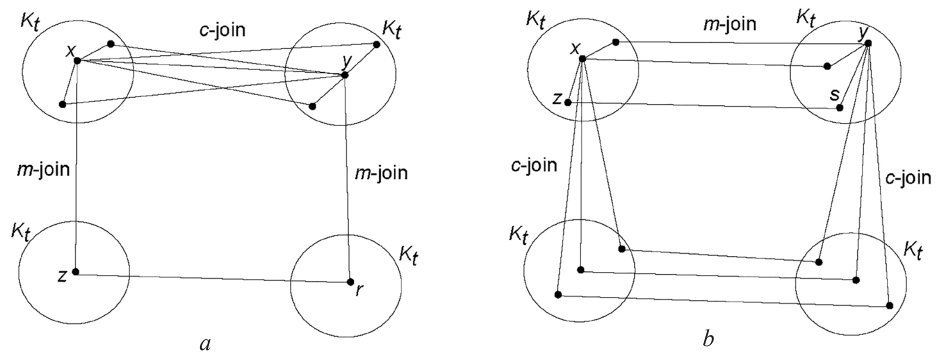

Рис. 3. $2t$ непересекающихся xy-цепей (v и w смежны)

Fig. 3. $2t$ disjoint xy-paths (v and w are adjacent)

и t непересекающихся xy-цепей вида

$$\left\{ \langle xz \cdots sy \rangle \mid z \in K_t^u, s \in K_t^h \right\},$$

всего получаем $2t$ непересекающихся xy-цепей (рис. 3, *b*).

Случай 3. Пара вершин x и y графа H лежит в разных графах K_t^v и K_t^w, причем вершины $v \in C_1$, $w \in C_2$, $C_1 \neq C_2$, где C_1, C_2 – различные четные циклы 2-фактора графа G. Поскольку исходный граф G 2-связен, то, согласно теореме Уитни, существуют две непересекающиеся vw-цепи. Нетрудно видеть, что (если нужно, взяв дополнение цепей в циклах C_1 и C_2) можно построить две vw-цепи таким образом, чтобы каждой концевой вершине v и w было инцидентно одно c-ребро, принадлежащее одной из двух vw-цепей. Причем эти два конечных c-ребра могут принадлежать только одной vw-цепи, а у второй vw-цепи конечными ребрами могут быть оба m-ребра. Тогда так же, как и выше, для каждой пары m- и c-ребер, инцидентных вершинам v и w в графе G, можно построить $2t$ непересекающихся xy-цепей в графе H.

Таким образом, H является $2t$-связным.

Чтобы завершить доказательство, теперь покажем, что G является 1-жестким тогда и только тогда, когда H является t-жестким.

Предположим, что G не является 1-жестким, т. е. существует вершинный разрез $X \subseteq V(G)$, удовлетворяющий неравенству $c(G - X) > |X|$. Пусть $Y \subseteq V(H)$ состоит из полных графов K_t^x, $x \in X$, соответствующих вершинам из X. Легко видеть, что Y также является вершинным разрезом, причем $c(H - Y) = c(G - X) > |X| = \frac{|Y|}{t}$, и, следовательно, H не является t-жестким, противоречие.

Обратно, предположим, что граф H не является t-жестким. Тогда существует вершинный разрез $Y \subseteq V(H)$, удовлетворяющий неравенству $c(H - Y) > \frac{|Y|}{t}$. Будем говорить, что граф K_t^v в H не расщепляется разрезом Y, если он не пересекается с Y.

Покажем, что без ограничения общности можно считать, что каждый полный граф K_t^v в графе H полностью содержится в разрезе Y или не расщепляется им.

Действительно, выберем разрез $Y \subseteq V(H)$, такой, что $c(H - Y) > \frac{|Y|}{t}$ и разрез Y *расщепляет наименьшее число* графов K_t^v, входящих в граф H. Если разрез Y не расщепляет ни один граф K_t^v, то доказывать нечего, поэтому предположим, что A является некоторым графом K_t^v, который расщепляется разрезом Y, и пусть B_1 и B_2 обозначают графы K_t^w, которые m-соединены с A. Возможны следующие случаи.

Случай 1. B_1 и B_2 не расщепляются разрезом Y. Пусть $Y' = Y - (A \cap Y)$. Тогда $|Y'| < |Y|$, в то время как $c(H - Y') = c(H - Y)$, поскольку граф A по-прежнему c-соединен с теми же графами K_t^u, что и $A - Y$. Таким образом, мы имеем

$$\frac{|Y'|}{c(H-Y')} < \frac{|Y|}{c(H-Y)} < t, \text{ или } c(H-Y') > \frac{|Y'|}{t}.$$

Поскольку Y является разрезом и $c(H-Y') = c(H-Y)$, то Y' также является разрезом в H. Поскольку Y' расщепляет меньшее количество графов K_t, чем Y, то это нарушает условие выбора Y.

Случай 2.1. B_1 и B_2 расщепляются Y и $|A \cap Y| + |B_1 \cap Y| + |B_2 \cap Y| < t$. Положим $Y' = Y - (A \cap Y) - (B_1 \cap Y) - (B_2 \cap Y)$.

Тогда $|Y'| < |Y|$ и $c(H-Y') = c(H-Y)$, поскольку $A - Y$, $B_1 - Y$ и $B_2 - Y$ принадлежат одной и той же компоненте связности графа $H - Y$, и A (соответственно, B_1 и B_2) c-соединен со своими смежными графами K_t, кроме B_1 и B_2 (соответственно, A). Таким образом, мы получаем $\frac{|Y'|}{c(H-Y')} < \frac{|Y|}{c(H-Y)} < t$, или $c(H-Y') > \frac{|Y'|}{t}$. Поскольку Y является вершинным разрезом и $c(H-Y') = c(H-Y)$, то Y' также является вершинным разрезом в H. Снова Y' расщепляет меньшее число графов K_t, чем Y, что нарушает условие выбора Y.

Случай 2.2. B_1 и B_2 расщепляются Y и $|A \cap Y| + |B_1 \cap Y| + |B_2 \cap Y| \geq t$. Положим $Y' = Y - (A \cap Y) - Z$, где $Z \subseteq (B_1 \cap Y) \cup (B_2 \cap Y)$ – любое подмножество мощности $|Z| = t - |A \cap Y| > 0$. Поскольку H является $2t$-связным и Y является вершинным разрезом в H, имеем $|Y'| = |Y| - t \geq 2t - t = t$. Заметим, что $c(H-Y') \geq c(H-Y) - 1$, так как стягивая две компоненты, содержащие $A - Y$, $B_1 - Y$ и $B_2 - Y$, мы можем потерять не более одной компоненты. Поскольку $c(H-Y) > \frac{|Y|}{t}$, получаем $\frac{|Y'|}{c(H-Y')} \leq \frac{|Y|-t}{c(H-Y)-1} < t$, или $c(H-Y') > \frac{|Y'|}{t} \geq 1$. Таким образом, Y' является вершинным разрезом в H. Поскольку Y' расщепляет меньшее количество графов K_t, чем Y, то это нарушает условие выбора Y.

Чтобы закончить доказательство теоремы 7, предположим, что $X \subseteq V(G)$ обозначает подмножество вершин в G, которые соответствуют графам K_t^x, входящим в Y. Тогда X является вершинным разрезом в G и имеет место $c(G-X) = c(H-Y) > \frac{|Y|}{t} = |X|$, и, следовательно, G не является 1-жестким графом, противоречие. Это доказывает теорему 7.

Благодарности. Работа выполнена в рамках Государственной программы фундаментальных исследований «Конвергенция – 2025» при финансовой поддержке НАН Беларуси.

Acknowledgements. The work was carried out in the framework of the State Program for Fundamental Research "Convergence – 2025" with the financial support of the National Academy of Sciences of Belarus.

Список использованных источников

1. Bauer, D. Recognizing tough graphs is NP-hard / D. Bauer, S. L. Hakimi, E. Schmeichel // Discrete Applied Mathematics. – 1990. – Vol. 28, № 3. – P. 191–195. https://doi.org/10.1016/0166-218x(90)90001-s

2. Bauer, D. On the complexity of recognizing tough graphs / D. Bauer, A. Morgana, E. Schmeichel // Discrete Mathematics. – 1994. – Vol. 124, № 1–3. – P. 13–17. https://doi.org/10.1016/0012-365x(92)00047-u

3. Kratsch, D. Toughness, hamiltonicity and split graphs / D. Kratsch, J. Lehel, H. Müller // Discrete Mathematics. – 1996. – Vol. 150, № 1–3. – P. 231–245. https://doi.org/10.1016/0012-365x(95)00190-8

4. The complexity of recognizing tough cubic graphs / D. Bauer, J. van den Heuvel, A. Morgana, E. Schmeichel // Discrete Applied Mathematics. – 1997. – Vol. 79, № 1–3. – P. 35–44. https://doi.org/10.1016/s0166-218x(97)00030-9

5. The complexity of toughness in regular graphs / D. Bauer, J van den Heuvel, A. Morgana, E. Schmeichel // Congressus Numerantium. – 1998. – Vol. 130. – P. 47–61.

6. Tait, P. G. On the colouring of maps / P. G. Tait // Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. – 1880. – Vol. 10, № 4. – P. 501–503. https://doi.org/10.1017/S0370164600044229

7. Isaacs, R. Infinite families of nontrivial trivalent graphs which are not Tait colorable / R. Isaacs // The American Mathematical Monthly. – 1975. – Vol. 82, № 3. – P. 221–239. https://doi.org/10.1080/00029890.1975.11993805

References

1. Bauer D., Hakimi S. L., Schmeichel E. Recognizing tough graphs is NP-hard. *Discrete Applied Mathematics*, 1990, vol. 28, no. 3, pp. 191–195. https://doi.org/10.1016/0166-218x(90)90001-s

2. Bauer D., Morgana A., Schmeichel E. On the complexity of recognizing tough graphs. *Discrete Mathematics*, 1994, vol. 124, no. 1–3, pp. 13–17. https://doi.org/10.1016/0012-365x(92)00047-u

3. Kratsch D., Lehel J., Müller H. Toughness, hamiltonicity and split graphs *Discrete Mathematics*, 1996, vol. 150, no. 1–3, pp. 231–245. https://doi.org/10.1016/0012-365x(95)00190-8

4. Bauer D., Heuvel J. van den, Morgana A., Schmeichel E. The complexity of recognizing tough cubic graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 1997, vol. 79, no. 1–3, pp. 35–44. https://doi.org/10.1016/s0166-218x(97)00030-9

5. Bauer D., Heuvel J. van den, Morgana A., Schmeichel E. The complexity of toughness in regular graphs. *Congressus Numerantium*, 1998, vol. 130, pp. 47–61.

6. Tait P. G. On the colouring of maps. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 1880, vol. 10, no. 4, pp. 501–503. https://doi.org/10.1017/S0370164600044229

7. Isaacs R. Infinite families of nontrivial trivalent graphs which are not Tait colorable. *The American Mathematical Monthly*, 1975, vol. 82, no. 3, pp. 221–239. https://doi.org/10.1080/00029890.1975.11993805

Информация об авторе

Бенедиктович Владимир Иванович – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: vbened@im.bas-net.by

Information about the author

Vladimir I. Benediktovich – Ph. D. (Physics and Mathematics), Leading Researcher, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: vbened@im.bas-net.by