

ISSN 1561-2430 (Print)

ISSN 2524-2415 (Online)

УДК 537.533.7

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2025-61-4-330-342>

Поступила в редакцию 13.06.2025

Received 13.06.2025

**С. В. Анищенко***Институт ядерных проблем Белорусского государственного университета,  
Минск, Республика Беларусь***ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ РЕНТГЕНОВСКОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ  
В СИММЕТРИЧНОЙ ГЕОМЕТРИИ БРЭГГА**

**Аннотация.** Проведен детальный анализ теоретических моделей, используемых для интерпретации экспериментов по генерации параметрического рентгеновского излучения (ПРИ) релятивистскими заряженными частицами в симметричной геометрии Брэгга. Продемонстрировано, что динамическая теория ПРИ находится в хорошем согласии с экспериментальными результатами, полученными в области энергий электронов 900 МэВ на синхротроне «Сириус». Важнейшим преимуществом динамической теории ПРИ перед кинематической оказалось правильное описание первичной экстинкции и интерференции между двумя типами волн (быстрой и медленной), генерируемых в процессе параметрического рентгеновского излучения в кристалле. В ультрарелятивистской области энергий получено аналитическое выражение для полного числа квантов, испускаемых электроном в телесный угол, где интенсивность ПРИ оказывается максимальной.

**Ключевые слова:** параметрическое рентгеновское излучение, динамическая дифракция, кинематическая дифракция, геометрия Брэгга

**Для цитирования.** Анищенко, С. В. Параметрическое рентгеновское излучение в симметричной геометрии Брэгга / С. В. Анищенко // Весті Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Сэрыя фізіка-матэматычных навук. – 2025. – Т. 61, № 4. – С. 330–342. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2025-61-4-330-342>

**Sergei V. Anishchenko***Institute for Nuclear Problems of Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus***PARAMETRIC X-RAY RADIATION IN SYMMETRIC BRAGG GEOMETRY**

**Abstract.** A detailed analysis of theoretical models used to interpret experiments with parametric X-ray radiation (PXR) emitted by relativistic charged particles in symmetric Bragg geometry is carried out. It is shown that the dynamical theory of PXR is in good agreement with the experimental results obtained at the Sirius synchrotron for 900 MeV electrons. The most important advantage of the PXR dynamical theory over the kinematical one is the correct description of the primary extinction and interference between two types of waves (fast and slow), generated within parametric X-ray radiation in a crystal. At ultrarelativistic energies, an analytical expression is obtained for the total number of quanta emitted by an electron into the solid angle where PXR intensity has a maximum.

**Keywords:** parametric X-ray radiation, dynamical diffraction, kinematical diffraction, Bragg geometry

**For citation.** Anishchenko S. V. Parametric X-ray radiation in symmetric Bragg geometry. *Vesti Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2025, vol. 61, no. 4, pp. 330–342 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2025-61-4-330-342>

**Введение.** Одной из важнейших задач современной физики является создание источников рентгеновского излучения для фундаментальных и прикладных исследований [1]. В этой связи становится актуальной разработка источников параметрического рентгеновского излучения (ПРИ), генерируемого при прохождении равномерно движущихся заряженных частиц через кристалл [2, 3]. Несомненным преимуществом указанных источников перед многими другими является плавная перестройка частоты генерации, осуществляемая поворотом кристалла.

Известно, что в рентгеновском диапазоне частот много больших характерных атомных, диэлектрическая проницаемость вещества имеет универсальный вид  $\epsilon(\omega) = 1 - \omega_p^2 / \omega^2$  ( $\omega_p$  – плазменная частота). Как следствие, показатель преломления в рассматриваемом диапазоне меньше единицы. По этой причине эффект Вавилова – Черенкова в рентгеновском диапазоне отсутству-

ет. Тем не менее в работе [4] впервые было показано, что при релятивистском движении заряженной частицы в кристалле возможно образование спонтанного и индуцированного излучения Вавилова – Черенкова. Эффект обусловлен тем, что в кристалле вследствие дифракции показатель преломления может стать больше единицы. Более детальная теория эффекта была дана в работах [5, 6]. При этом в [5] рассмотрение проводилось для кристаллической пластики конечной толщины, что позволило правильно учесть переходные эффекты, которые, как известно [7], присутствуют в излучении Вавилова – Черенкова при наличии границ раздела (подробнее см. в [8]).

Рентгеновское излучение, испускаемое равномерно движущейся заряженной частицей в кристалле, получило название параметрического [4–6]. Отметим, что механизм генерации параметрического излучения во многом аналогичен тому, который имеет место в приборах микроволновой электроники: лампах бегущей и обратной волны [9]. В возникновении ПРИ важнейшую роль играют эффекты, обусловленные динамической дифракцией электромагнитных волн в кристалле [10]. Согласно [8] динамическая дифракция приводит к сильному непертурбативному взаимодействию электромагнитных волн, испускаемых под малыми и большими углами к скорости частицы и связанных друг с другом условием Брэгга – Вульфа. Указанное взаимодействие в узких спектрально-угловых диапазонах приводит к существенному изменению электродинамических свойств периодической среды по сравнению с аморфным веществом. В результате становятся возможными явления первичной экстинкции (бездиссипативное затухание электромагнитных волн в кристалле в геометрии Брэгга) и изменение показателей преломления [4], часть из которых становится больше единицы. Благодаря первичной экстинкции происходит эффективное отражение псевдофотонов от кристалла в геометрии Брэгга. Превышение показателями преломления единицы делает возможным черенковский синхронизм между частицей и электромагнитными волнами, испускаемыми не только под большими, но и малыми углами к скоростям частиц [11].

Несмотря на то что важнейшую роль в генерации параметрического рентгеновского излучения играет динамическая дифракция, в литературе можно встретить и другой подход к описанию ПРИ, получивший название кинематического [12, 13]. В рамках этого подхода дифракционное взаимодействие между волнами описывается в соответствии с теорией возмущений. Однако если толщина кристалла становится сравнимой с глубиной экстинкции, на которой амплитуды волн, участвующих в дифракции, становятся сравнимыми по амплитуде, то указанный подход перестает быть применимым. В этом случае для корректного описания экспериментов необходимо применять динамическую теорию. Кроме того, в кинематической теории отсутствует компонента ПРИ, испускаемая под малыми углами к скорости частицы, предсказанная динамической теорией [11] и надежно обнаруженная экспериментально [14, 15].

Еще одно приближение, часто встречающееся в литературе, связано с независимым рассмотрением двух вкладов в ПРИ: дифрагированного переходного, связанного с пересечением границы кристалл – вакуум, и квазичеренковского, обусловленного движением частицы в кристалле [16, 17]. Такое разделение было бы оправдано в отсутствие интерференционных эффектов. В общем случае, однако, интерференция между двумя вкладами имеет место, и для корректной интерпретации экспериментов нужно использовать общие формулы динамической теории [2, 8, 11].

В этой связи представляется важным провести детальное сравнение предсказаний различных теорий с результатами экспериментов, в частности проведенных на синхротроне «Сириус» и посвященных измерению полного числа квантов ПРИ в симметричной геометрии Брэгга [18]. (Подробные обзоры экспериментальных работ по генерации параметрического рентгеновского излучения в различных геометриях можно найти в монографии [19] и статье [20].) Привлекательность именно этого эксперимента для проверки различных теорий ПРИ неслучайна. Во-первых, полное число зарегистрированных квантов в нем значительно отклонилось от предсказаний кинематической теории. Во-вторых, многократное рассеяние в этом эксперименте несущественно, что позволяет избежать дополнительных усложнений, обусловленных взаимодействием релятивистских заряженных частиц с атомами среды. И, в-третьих, использование в эксперименте [18] толстой кристаллической пластинки существенно упрощает интерпретацию

экспериментальных данных – вследствие поглощения рентгеновских лучей их многократные переотражения от границ кристалл – вакуум не играют роли.

**Динамическая теория.** В пренебрежении квантово-механической отдачей спектрально-угловое распределение фотонов, испускаемых заряженной частицей, дается следующей формулой:

$$\frac{\partial^2 N_s}{\partial \Omega \partial \omega} = \frac{\alpha_e \omega^2}{4\pi^2} \iint \left[ \vec{E}_{-\vec{k}}^{(+s)}(\vec{r}(t_1)) \vec{v}(t_1) \right] \left[ \vec{E}_{-\vec{k}}^{(+s)*}(\vec{r}(t_2)) \vec{v}(t_2) \right] e^{i\omega(t_1-t_2)} dt_1 dt_2, \quad (1)$$

где  $\vec{E}_{-\vec{k}}^{(+s)}$  – решение однородных уравнений Максвелла ( $\vec{E}_{-\vec{k}}^{(+s)}$  равны величинам  $\vec{E}_{\vec{k}}^{(-s)*}$ , участвующим в разложении функции Грина уравнений Максвелла [8]), описывающее рассеяние фотона с волновым вектором  $-\vec{k}$  и поляризацией  $\vec{e}_s$  на мишени;  $\vec{r}(t)$  и  $\vec{v}(t)$  – радиус-вектор и скорость частицы;  $\alpha_e \approx 1/137$  – постоянная тонкой структуры. А значит, чтобы найти спектрально-угловое распределение ПРИ, нам фактически необходимо решить задачу о дифракции электромагнитных волн на кристалле (рис. 1). Отметим, что задача о рассеянии рентгеновского излучения на кристаллической пластинке как в геометрии Лауэ, так и Брэгга рассмотрена, например, в [10].

Рассмотрим в рамках двухволновой динамической теории дифракцию плоской монохроматической волны с волновым вектором  $-\vec{k}$ , частотой  $\omega = ck$  и единичным вектором поляризации  $\vec{e}_s$  на кристаллической пластинке толщины  $L$  в геометрии Брэгга. Вследствие малости диэлектрической восприимчивости мы можем пренебречь отраженными волнами от границ кристалл – вакуум и рассматривать только 7 волн. Падающая  $-\vec{k}$ , дифрагированная  $-\vec{k}_{\tau}$  и прошедшая сквозь пластинку волны распространяются в вакууме. (Волновой вектор, прошедшей сквозь кристалл волны, совпадает с вектором  $-\vec{k}$ .) Четыре волны распространяются в среде: двум из них соответствуют волновые векторы  $-\vec{k}_{\mu s} \approx -\vec{k}$ , а двум другим  $-\vec{k}_{\tau \mu s} = -\vec{k}_{\mu s} - \vec{\tau} \approx -\vec{k} - \vec{\tau}$  ( $\vec{\tau}$  – вектор обратной решетки,  $\mu = 1, 2$ ). Расщепление падающей из вакуума волны  $-\vec{k}$  на две  $-\vec{k}_{\mu s}$  обусловлено сильной связью между электромагнитными волнами в кристалле [10].

Волновой вектор  $-\vec{k}_{\tau}$  дифрагированной волны, колеблющейся с той же частотой  $\omega$ , что и падающая, дается выражением  $-\vec{k}_{\tau} = -\vec{k}_{\parallel} - \vec{\tau}_{\parallel} - \sqrt{k^2 - (\vec{k}_{\parallel} + \vec{\tau}_{\parallel})^2} \vec{N}$  (символом  $\parallel$  обозначаются компоненты векторов, параллельные пластинке;  $\vec{N}$  – нормальный к пластинке единичный вектор). В частном случае симметричной дифракции  $\vec{\tau}_{\parallel} = 0$  и  $-\vec{k}_{\tau} = -\vec{k}_{\parallel} - \sqrt{k^2 - k_{\parallel}^2} \vec{N}$ .

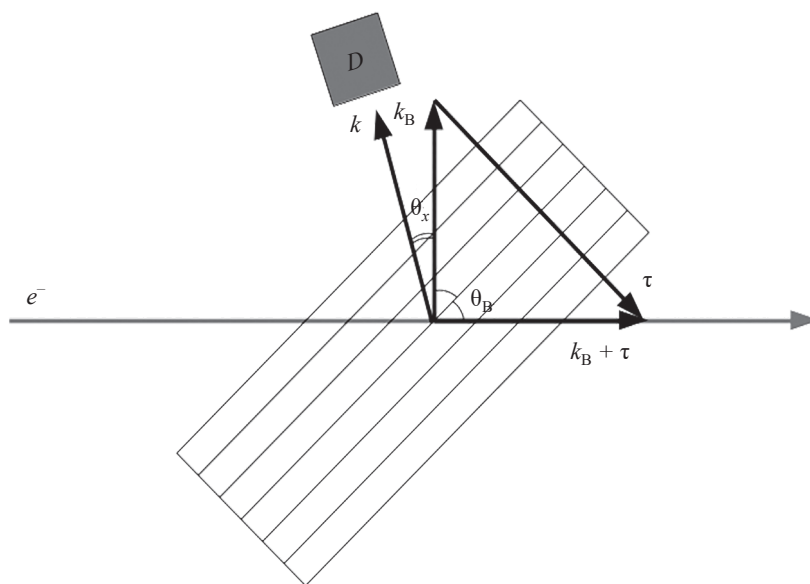


Рис. 1. Параметрическое рентгеновское излучение под большими углами к скорости заряженной частицы в геометрии Брэгга

Fig. 1. Parametric X-ray radiation at large angles to the particle velocity in Bragg geometry

Приступим к установлению явного вида волновых векторов в среде. Величина связи между волнами, распространяющимися в кристалле, определяется зависящей от частоты диэлектрической восприимчивостью  $\chi(\omega, \vec{r}) = \sum_{\vec{\tau}} \chi_{\vec{\tau}}(\omega) e^{i\vec{\tau} \cdot \vec{r}}$ . Явный вид векторов  $-\vec{k}_{\mu s}$  и  $-\vec{k}_{\bar{\tau} \mu s}$  в среде можно установить, отыскав решения однородных уравнений Максвелла в пространстве Фурье:

$$\begin{aligned} \left( \frac{k_{\mu s}^2}{\omega^2} - 1 - \chi_0 \right) \vec{E}_{-\vec{k}_{\mu s}} - C_s \chi_{\vec{\tau}} \vec{E}_{-\vec{k}_{\bar{\tau} \mu s}} &= 0, \\ \left( \frac{k_{\bar{\tau} \mu s}^2}{\omega^2} - 1 - \chi_0 \right) \vec{E}_{-\vec{k}_{\bar{\tau} \mu s}} - C_s \chi_{-\vec{\tau}} \vec{E}_{-\vec{k}_{\mu s}} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $\vec{E}_{-\vec{k}_{\mu s}}$  и  $\vec{E}_{-\vec{k}_{\bar{\tau} \mu s}}$  – амплитуды волн, соответствующие волновым векторам  $-\vec{k}_{\mu s}$  и  $-\vec{k}_{\bar{\tau} \mu s}$ . Параметр  $C_s$  равен единице, если векторы  $\vec{e}_s$  и  $\vec{e}_{\bar{\tau} s}$ , являющиеся единичными векторами поляризации падающей волны и дифрагированной, направлены перпендикулярно плоскости дифракции, образованной векторами  $\vec{k}$  и  $\vec{k}_{\bar{\tau}}$  (случай  $\sigma$ -поляризации). Если векторы  $\vec{e}_s$  и  $\vec{e}_{\bar{\tau} s}$  лежат в плоскости дифракции, то  $C_s = \vec{e}_s \vec{e}_{\bar{\tau} s} = \cos(2\theta_B)$ , где  $\theta_B$  – угол Брэгга (случай  $\pi$ -поляризации). Для обозначения двух поляризаций будем использовать следующие обозначения:  $s = \sigma$  ( $\sigma$ -поляризация) и  $s = \pi$  ( $\pi$ -поляризация).

Система уравнений (2) разрешима, если ее детерминант равен нулю, а волновые векторы  $-\vec{k}_{\mu s}$ , как следствие, имеют следующий вид [2, 8, 11]:

$$-\vec{k}_{\mu s} = -\vec{k} + \frac{\omega \epsilon_{\mu s}}{c \gamma_0} \vec{N}, \quad (3)$$

где

$$\epsilon_{\mu s} = \frac{1}{4} [(1 + \beta_1) \chi_0 - \beta_1 \alpha_B] \pm \frac{1}{4} \sqrt{[(\beta_1 - 1) \chi_0 - \beta_1 \alpha_B]^2 + 4 \beta_1 C_s^2 \chi_{\vec{\tau}} \chi_{-\vec{\tau}}}. \quad (4)$$

Здесь  $\alpha_B = (2\vec{k} \vec{\tau} + \tau^2) / k^2$  – параметр, который характеризует условия выполнения дифракции Брэгга (при точном выполнении условий брэгговской дифракции  $\alpha_B = 0$ );  $\beta_1 = \gamma_0 / \gamma_1$ ,  $\gamma_0 = -\vec{k} \vec{N} / k > 0$ ,  $\gamma_1 = -\vec{k}_{\bar{\tau}} \vec{N}_s / k < 0$ . Знак «+» соответствует  $\mu = 1$ , а знак «–» –  $\mu = 2$ . В частном случае симметричной дифракции ( $\beta_1 = -1$ )

$$\epsilon_{\mu s} = \frac{1}{4} \alpha_B \pm \frac{1}{4} \left( (\alpha_B - 2\chi_0)^2 - 4C_s^2 \chi_{\vec{\tau}} \chi_{-\vec{\tau}} \right)^{1/2}. \quad (5)$$

Обратим внимание, что закон распространения электромагнитных волн в кристалле существенно меняется при  $\alpha_B \approx (\beta_1 - 1) \chi_0 / \beta_1$  (см. (4)): поправка к волновому вектору (3) приобретает большую мнимую часть ( $\text{Im} \epsilon_{\mu s} \approx \pm |C_s \chi_{\vec{\tau}}| \sqrt{|\beta_1|} / 2$ ), что приводит к быстрому бездиссипативному затуханию (дифракционному отражению) падающей волны в кристалле в узкой области шириной  $\Delta \alpha_B \approx 4 |C_s \chi_{\vec{\tau}}| / \sqrt{|\beta_1|}$ . Глубина экстинкции, на которой происходит затухание интенсивности в  $e$  раз, равна  $L_e = \frac{2c}{|C_s \chi_{\vec{\tau}}| \omega_b}$ . Вдали от указанной области величины  $\epsilon_{\mu s}$  имеют следующие асимптотики:

$$\begin{aligned} \epsilon_{1s} &\approx \frac{-\beta_1 \alpha_B - \chi_0}{2}, \\ \epsilon_{2s} &\approx \frac{\chi_0}{2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Причем вторая ветвь электромагнитных колебаний в асимптотической области совпадает с электромагнитными колебаниями в аморфной среде.

Для иллюстрации сказанного рассмотрим дифракцию, соответствующую геометрии Брэгга,  $\sigma$ -поляризованного рентгеновского излучения с энергией квантов, равной  $\hbar \omega \approx 6,46$  кэВ, падающего под углом  $\pi/4$  на поверхность кремниевой пластинки. Пусть кристаллографические плоско-

сти кремния с индексами Миллера (4,0,0) параллельны поверхности пластинки, что при указанной энергии квантов соответствует симметричной дифракции и углу Брэгга  $\theta_B = \pi/4$ . Выбор описанной симметричной схемы дифракции не случаен. Именно она была реализована в одном из экспериментов по генерации ПРИ, проведенных на томском синхротроне «Сириус» [18]. При указанной схеме дифракции диэлектрические восприимчивости равны  $\chi_0 \approx -2,36 \cdot 10^{-5} + 8,25 \cdot 10^{-7} i$  и  $|\chi_{\bar{\tau}}| = 1,03 \cdot 10^{-5}$ , а глубины экстинкции  $L_e$  и поглощения  $(L_a = 2c / \text{Im}\chi_{\bar{\tau}}\omega_b) - 5$  и  $74$  мкм соответственно. (Значение  $\chi_{\bar{\tau}}$  получено путем умножения модуля диэлектрической восприимчивости  $|\chi_{\bar{\tau}}| = 1,21 \cdot 10^{-5}$  [21] при 0 К на температурный фактор Дебая – Уолера  $e^{-W} \approx 0,85$ , рассчитанного для 293 К.)

Однородные уравнения Максвелла (2) позволяют найти отношение амплитуд  $\vec{E}_{-\vec{k}\mu s}$  и  $\vec{E}_{-\vec{k}\bar{\tau}\mu s}$  в среде. Однако для построения решения  $\vec{E}_{-\vec{k}}^{(+)}$  этого недостаточно: нужно еще задать граничные условия [2, 8, 11]. В геометрии Брэгга на границе кристалл – вакуум со стороны влета заряженной частицы амплитуда падающей волны  $-\vec{k}$  равняется сумме амплитуд двух волн  $-\vec{k}_{\mu s}$ , а амплитуда дифрагированной волны  $-\vec{k}_{\bar{\tau}}$  – сумме амплитуд двух волн  $-\vec{k}_{\bar{\tau}\mu s}$ . На противоположной стороне пластинки сумма амплитуд двух волн  $-\vec{k}_{\mu s}$  равна амплитуде проходящей волны, а сумма амплитуд двух волн  $\vec{k}_{\bar{\tau}\mu s}$  равна нулю. Указанные граничные условия дают возможность записать решение однородных уравнений Максвелла, описывающее рассеяние волны  $\vec{e}_s e^{-i\vec{k}\vec{r}}$  на кристалле в геометрии Брэгга:

$$E_{-\vec{k}}^{(+)\text{s}} = \sum_{\mu} \gamma_{\mu s}^0 \left[ \Theta(-z) e^{-i\vec{k}\vec{r}} + \Theta(z) \Theta(L-z) e^{-i\vec{k}_{\mu s}\vec{r}} + \Theta(z-L) e^{i\omega \epsilon_{\mu s} L / c \gamma_0} e^{-i\vec{k}\vec{r}} \right] + \\ + \sum_{\mu} \gamma_{\mu s}^{\bar{\tau}} \left[ \Theta(-z) e^{-i\vec{k}_{\bar{\tau}}\vec{r}} + \Theta(z) \Theta(L-z) e^{-i\vec{k}_{\bar{\tau}\mu s}\vec{r}} \right], \quad (7)$$

где

$$\gamma_{1(2)s}^0 = \frac{2\epsilon_{2(1)s} - \chi_0}{(2\epsilon_{2(1)s} - \chi_0) - (2\epsilon_{1(2)s} - \chi_0) \exp\left(-i \frac{\omega L}{c \gamma_0} (\epsilon_{2(1)s} - \epsilon_{1(2)s})\right)}, \\ \gamma_{1(2)s}^{\bar{\tau}} = \frac{-\beta_1 C_s \chi_{\bar{\tau}}}{(2\epsilon_{2(1)s} - \chi_0) - (2\epsilon_{1(2)s} - \chi_0) \exp\left(-i \frac{\omega L}{c \gamma_0} (\epsilon_{2(1)s} - \epsilon_{1(2)s})\right)}. \quad (8)$$

Подставляя  $E_{-\vec{k}}^{(+)\text{s}}$  в (1), получим спектрально-угловое распределение фотонов, испущенных под большим углом к скорости частицы в геометрии Брэгга [2, 8, 11]:

$$\frac{\partial^2 N_s}{\partial \Omega \partial \omega} = \frac{\alpha_e \omega}{4\pi^2 c^2} (\vec{e}_{\bar{\tau}s} \vec{v})^2 \left| \sum_{\mu} \gamma_{\mu s}^{\bar{\tau}} \left( \frac{1}{\omega - \vec{k}_{\bar{\tau}} \vec{v}} - \frac{1}{\omega - \vec{k}_{\bar{\tau}\mu s} \vec{v}} \right) \left( e^{i(\omega - \vec{k}_{\bar{\tau}\mu s} \vec{v})T} - 1 \right) \right|^2. \quad (9)$$

Для толстых кристаллов ( $L \gg L_a$ ) коэффициент  $\gamma_{1s}^{\bar{\tau}}$  и экспонента  $e^{i(\omega - \vec{k}_{\bar{\tau}2s} \vec{v})T}$  стремятся к нулю, а  $\gamma_{2s}^{\bar{\tau}} = -\frac{\beta_1 C_s \chi_{\bar{\tau}}}{2\epsilon_{1s} - \chi_0}$ . Как следствие, спектрально-угловое распределение принимает следующий вид:

$$\frac{\partial^2 N_s}{\partial \Omega \partial \omega} = \frac{\alpha_e \omega}{4\pi^2 c^2} (\vec{e}_{\bar{\tau}s} \vec{v})^2 \left| \gamma_{2s}^{\bar{\tau}} \left( \frac{1}{\omega - \vec{k}_{\bar{\tau}} \vec{v}} - \frac{1}{\omega - \vec{k}_{\bar{\tau}2s} \vec{v}} \right) \right|^2, \quad (10)$$

где

$$\gamma_{2s}^{\bar{\tau}} = \frac{-\beta_1 C_s \chi_{\bar{\tau}}}{2\epsilon_{2s} - \chi_0}. \quad (11)$$

Обратим внимание, что в выражении (10) присутствуют 2 вклада. Первый вклад, пропорциональный  $\frac{1}{\omega - \vec{k}_{\vec{\tau}} \vec{v}}$ , обусловлен движением частицы вне кристалла. Именно он ассоциируется с дифрагированной переходной компонентой в излучении (в кинематической теории дифрагированная переходная компонента отсутствует). Второй вклад  $\sim \frac{1}{\omega - \vec{k}_{\vec{\tau}2s} \vec{v}}$  связан с движением частицы в среде. Благодаря ему становится возможным черенковский синхронизм.

Более глубокий анализ спектрально-углового распределения ПРИ можно провести, если в явном виде задать угловые и частотные зависимости входящих в (10) величин. Пусть отклонение от точного условия Брэгга задается с помощью разности  $\Delta\omega = \omega - \omega_B$  и двух углов  $\theta_x$  и  $\theta_y$ . Причем  $\theta_y$  – угол между плоскостью, образованной векторами  $\vec{v}$  и  $\vec{\tau}$  и вектором  $\vec{k}$ , а  $\theta_x$  – угол, характеризующий угловое отклонение вектора  $\vec{k}$  от  $\vec{k}_B$  в плоскости дифракции (см. рис. 1). Тогда, раскладывая по малым величинам  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  и  $\Delta\omega/\omega_B$ , найдем

$$\begin{aligned}\alpha_B &\approx -2\theta_x \sin 2\theta_B + 2(\theta_x^2 + \theta_y^2) \sin^2 \theta_B - \frac{4\Delta\omega}{\omega_B} \sin^2 \theta_B, \\ \omega - \vec{k}_{\vec{\tau}} &\approx \frac{\omega_B}{2} (\theta_x^2 + \theta_y^2 + 1/\gamma_e^2), \\ \omega - \vec{k}_{\vec{\tau}2s} \vec{v} &\approx \frac{\omega_B}{2} \left( \frac{1}{\gamma_e^2} + 2\theta_x \sin 2\theta_B + (\theta_x^2 + \theta_y^2) \cos 2\theta_B + \frac{4\Delta\omega}{\omega_B} \sin^2 \theta_B + 2\epsilon_{\mu s} \right).\end{aligned}\quad (12)$$

Подстановка  $\alpha_B$  в коэффициент  $\gamma_{2s}^{\vec{\tau}}$  (см. (10)), зависящий от  $\epsilon_{1s} = \epsilon_{1s}(\alpha_B)$ , показывает, что существует узкая спектральная область, именуемая столиком Дарвина, шириною  $\frac{\Delta\omega_D}{\omega_B} \sim \frac{\omega_B \chi_{\vec{\tau}}}{2 \sin^2 \theta_B \sqrt{|\beta_1|}}$ . В этой области  $|\gamma_{2s}^{\vec{\tau}}| \sim 1$  и наблюдается интенсивное отражение псевдофотонов.

**Кинематическая теория.** В настоящем разделе выведем формулы кинематической теории ПРИ из формул динамической. Для этого в выражении (10) сделаем ряд упрощений. Во-первых, отбросим член, ответственный за дифрагированную переходную компоненту ПРИ. Во-вторых, заменим  $\epsilon_{\mu s}$  (4) асимптотическими выражениями (6). И, в-третьих, положим коэффициент  $\gamma_{2s}^{\vec{\tau}}$  медленно меняющимся с частотой по сравнению с резонансным множителем  $\frac{1}{\omega - \vec{k}_{\vec{\tau}2s} \vec{v}}$ , резко возрастающим в условиях черенковского синхронизма

$$\omega - \vec{k}_{\vec{\tau}2s} \vec{v} \approx 0, \quad (13)$$

наступающего при

$$\frac{\Delta\omega_0}{\omega_B} \approx -\frac{1}{4 \sin^2 \theta_B} \left( \frac{1}{\gamma^2} + 2\theta_x \sin 2\theta_B + (\theta_x^2 + \theta_y^2) \cos 2\theta_B + \chi_0 \right). \quad (14)$$

Последнее позволяет пренебречь изменением частоты в  $\gamma_{2s}^{\vec{\tau}}$ , заменив  $\Delta\omega$  на  $\Delta\omega_0$ :

$$\gamma_{2s}^{\vec{\tau}} = \frac{-C_s \chi_{\vec{\tau}}}{2\epsilon_{1s} - \chi_0} \approx \frac{-2C_s \chi_{\vec{\tau}}}{1/\gamma_e^2 + \theta_x^2 + \theta_y^2 - \chi_0}. \quad (15)$$

Заметим, что резонансный множитель  $\frac{1}{\omega - \vec{k}_{\vec{\tau}2s} \vec{v}}$  не обращается в бесконечность вследствие наличия мнимой части у диэлектрической восприимчивости  $\chi_0$ .

Интегрирование (10) с учетом сделанных приближений и суммирование по двум поляризациям приводят к хорошо известной кинематической формуле для углового распределения ПРИ в толстом кристалле [12, 13]:

$$\frac{dN_{\text{kin}}}{d\Omega} = \frac{\alpha_e}{4\pi c} \omega_B \tilde{L}_a \frac{|\chi_{\vec{\tau}}|^2}{\sin^2 \theta_B} \frac{\theta_x^2 \cos^2 2\theta_B + \theta_y^2}{(\theta_x^2 + \theta_y^2 + \theta_{\text{ph}}^2)^2}. \quad (16)$$



Здесь  $\theta_{\text{ph}}^2 = |\chi_0| + \gamma^{-2}$  – параметр, определяющий угловую ширину ПРИ в рамках кинематической теории;  $\tilde{L}_a$  – характерная глубина поглощения фотонов с учетом их косого падения. В условиях уже рассмотренной выше симметричной дифракции на кристаллографических плоскостях кремния с индексами Миллера (4,0,0)  $\tilde{L}_a = L_a \sin \theta_B \approx 52$  мкм.

Отметим, что учет многократного рассеяния в рамках кинематической теории приводит к появлению в выражении для  $\theta_{\text{ph}}^2$  небольшой поправки [12, 13]:  $\theta_{\text{ph}}^2 = |\chi_0| + \gamma^{-2} + \theta_{\text{ms}}^2$ , определяемой среднеквадратичным углом многократного рассеяния  $\theta_{\text{ms}}$  на длине поглощения  $L_a$ . При энергии электронов, равной 900 МэВ, что соответствует условиям проведения экспериментов на синхротроне «Сириус»,  $\theta_{\text{ms}} \sim 0,4$  мрад. В то же время  $\theta_{\text{ph}} \approx 4,9$  мрад, т. е.  $\theta_{\text{ms}} \ll \theta_{\text{ph}}$ , а значит, многократное рассеяние в данном случае не играет никакой роли.

Интегрируя угловое распределение по области, ограниченной угловым радиусом  $\theta_d$ , находим полное число испущенных квантов, совпадающее с выражением, полученным ранее [12, 13]:

$$N_{\text{kin}} = \frac{\alpha_e \omega_B (1 + \cos^2 2\theta_B)}{32\pi c \sin^2 \theta_B} |\chi_\tau|^2 \tilde{L}_a Y(\theta_d / \theta_{\text{ph}}), \quad (17)$$

где

$$Y(x) = 4\pi \left( -1 + \frac{1}{1+x^2} + \ln(1+x^2) \right) \quad (18)$$

– вспомогательная функция.

**Сравнение динамической и кинематической теорий с экспериментом.** Воспользуемся динамической и кинематической теориями для интерпретации экспериментов, проведенных на синхротроне «Сириус» [18], в которых регистрировалось полное число квантов в симметричной геометрии Брэгга, испущенных под большим углом к скорости частиц (рис. 1). (Следует отметить, что ранее подробное сравнение предсказаний динамической и кинематической теорий проводилось при интерпретации экспериментальных результатов, полученных на микротроне в Майнце [22].) Энергия электронов, ускоренных в синхротроне и падающих под углом  $\pi/4$ , совпадающим с  $\theta_B$ , на толстую кремниевую пластинку ( $L = 400$  мкм), составляла 900 МэВ. Кристаллографические плоскости с индексами Миллера (4,0,0), на которых происходила дифракция, располагались параллельно поверхности пластинки. Как следствие, при падении электронов на мишень возникали две связанные волны с энергией квантов  $\hbar\omega \approx 6,5$  кэВ. Одна распространялась под малыми углами к скоростям частиц, другая – в направлении, определяемом вектором обратной решетки. Последняя компонента и регистрировалась детектором с угловым радиусом  $\theta_d = 27$  мрад. Полное число зарегистрированных квантов, испущенных одним электроном, с учетом ослабления их потока в системе вывода в 2,4 раза оказалось равным  $N_{\text{exp}} = (2,3 \pm 0,4) \cdot 10^{-7}$  [18].

Численное интегрирование спектрально-углового распределения (10), полученного в рамках динамической теории дифракции с учетом ослабления излучения в 2,4 раза, приводит к  $N_{\text{dyn}} \approx 2,6 \cdot 10^{-7}$  квантам на один электрон. В то же время кинематическая теория дает значение  $N_{\text{kin}} \approx 3,2 \cdot 10^{-7}$ , превышающее экспериментальное на 2,3 стандартных отклонений.

Различие в предсказаниях кинематической и динамической теорий не исчерпывается разницей в полном числе квантов, которая, как показывают расчеты, имеет место во всем диапазоне энергий (рис. 2). (Экстраполяция результатов расчетов, выполненных в рамках двух теорий, в область больших значений фактора Лоренца ( $\gamma_e > 10^4$ ) показывает, что предсказываемые значения полного числа квантов сравниваются только при  $\gamma_e \approx 7 \cdot 10^4$ . Ниже указанной величины  $N_{\text{kin}} > N_{\text{dyn}}$ , выше –  $N_{\text{kin}} < N_{\text{dyn}}$ .) Благодаря наличию дифрагированного переходного вклада в излучение, динамическая теория предсказывает существенное возрастание распределения в области малых углов  $\theta_{x,y} \sim 1/\gamma_e$  (рис. 3). Напомним, что в кинематической теории указанная компонента в излучении отсутствует.

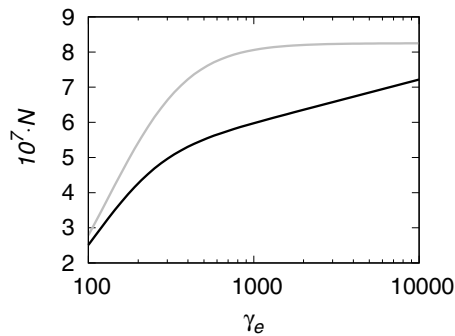


Рис. 2. Зависимость числа испущенных квантов от фактора Лоренца.  
Черная кривая соответствует динамической, серая – кинематической теории

Fig. 2. Dependence of the number of emitted quanta on Lorentz factor.  
Black curve corresponds to the dynamical theory, gray curve corresponds to the kinematical theory

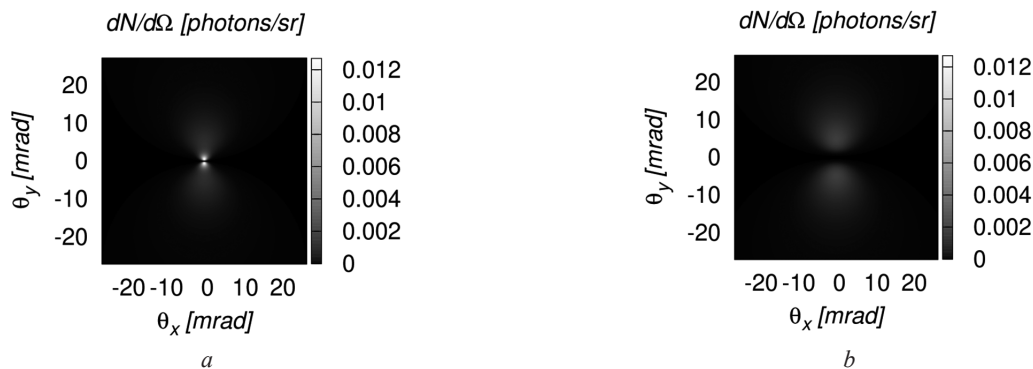


Рис. 3. Угловые распределения ПРИ, рассчитанные в рамках динамической (a) и кинематической (b) теорий

Fig. 3. Angular distributions of PXR calculated in the framework of dynamical (a) and kinematical (b) theories

Рассчитаем полное число фотонов, испускаемых в малый угол  $\theta_d \sim 1/\gamma_e \ll \theta_{ph}$ , отбросив квазичеренковский вклад в излучение. Оказывается, в этом случае спектрально-угловое распределение (10) допускает интегрирование в явном виде как по углам, так и по частотам, что позволяет найти полное число испущенных  $\sigma$ -поляризованных

$$N_\sigma = \frac{\alpha_e |\chi_{\bar{\tau}}|}{6\pi^2 \sin^2(\theta_B)} X\left(\frac{\text{Im}\chi_0}{|\chi_{\bar{\tau}}|}\right) Y(\gamma_e \theta_d) \quad (19)$$

и  $\pi$ -поляризованных

$$N_\pi = \frac{\alpha_e |\chi_{\bar{\tau}}| \cos^2(2\theta_B)}{6\pi^2 \sin^2(\theta_B)} X\left(\frac{\text{Im}\chi_0}{|\chi_{\bar{\tau}}|}\right) Y(\gamma_e \theta_d) \quad (20)$$

квантов. В полученных выражениях  $Y(x)$  и

$$X(x) = \frac{1}{4} x \left( -3\pi - 4(-1+x^2)E(-1/x^2) + 4(1+x^2)K(-1/x^2) \right) \quad (21)$$

– вспомогательные функции. Причем  $X(x)$ , зависящая от эллиптических интегралов 1-го ( $E$ ) и 2-го ( $K$ ) рода, отвечает за подавление излучения с ростом  $\text{Im}\chi_0$ , а функция  $Y(\gamma_e \theta_d)$ , логарифмически возрастающая при  $\gamma_e \theta_d \gg 1$ , описывает зависимость числа квантов от фактора Лоренца  $\gamma_e$ .



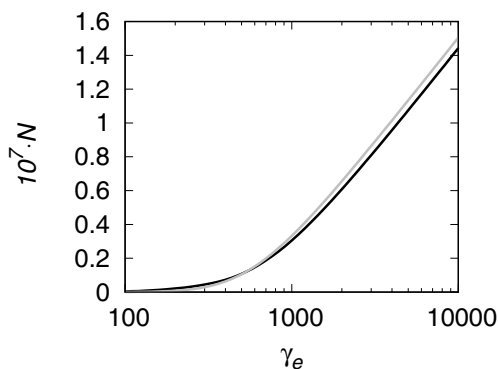


Рис. 4. Зависимость числа квантов, испущенных электроном в малый угловой конус ( $\theta_d = 2,7$  мрад), от фактора Лоренца. Черная кривая соответствует результатам моделирования, серая – аналитическому выражению, полученному в рамках динамической теории

Fig. 4. Dependence of the number of quanta emitted by an electron into a small angular cone ( $\theta_d = 2.7$  mrad) on Lorentz factor. Black curve corresponds to the simulation results, gray curve corresponds to the analytical expression obtained in the framework of dynamical theory

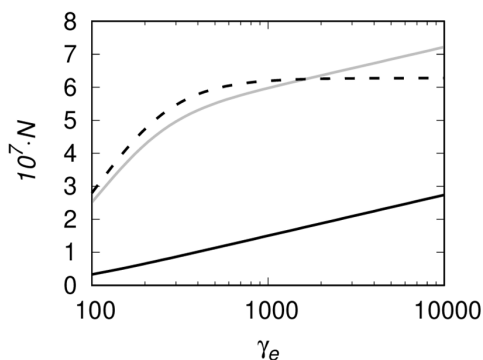


Рис. 5. Зависимость числа испущенных квантов, вычисленная в рамках динамической теории, от фактора Лоренца. Серая кривая соответствует полному числу квантов, черная сплошная – дифрагированному переходному вкладу, черная пунктирная – квазичеренковскому

Fig. 5. Dependence of the number of emitted quanta calculated in the framework of dynamical theory on Lorentz factor. Gray curve corresponds to the total number of quanta, solid black curve corresponds to the diffracted transition contribution, dotted black curve corresponds to the quasi-Cherenkov contribution

На рис. 4 представлены зависимости числа квантов, испускаемых в малый угол  $\theta_d = 2,7$  мрад от энергии частиц, полученные в результате численного интегрирования спектрально-углового распределения (10). При больших энергиях отчетливо прослеживается логарифмическая зависимость числа испущенных квантов от фактора Лоренца. Небольшое расхождение между результатами моделирования и теоретической кривой связаны с наличием в (10) квазичеренковского вклада, которым мы пренебрегли при выводе выражения (19).

Как следует из кривых, изображенных на рис. 4, при энергии электронов, равной 900 МэВ ( $\gamma_e \approx 1760$ ), число испущенных квантов с учетом их поглощения в системе вывода излучения составляет  $N_{\text{т}} \approx 2,5 \cdot 10^8$  на одну частицу, что примерно в 10 раз меньше числа квантов, зарегистрированного на эксперименте [18] в угле  $\theta_d = 27$  мрад. Учитывая, что при переходе от  $\theta_d = 27$  мрад к  $\theta_d = 2,7$  мрад телесный угол уменьшился в 100 раз, мы можем заключить, что средняя угловая плотность испущенных квантов при  $\theta_d \sim 2,7$  мрад в 10 раз больше, чем при  $\theta_d = 27$  мрад.

Рассмотрим теперь, какую роль играет интерференция дифрагированной переходной и квазичеренковской компонент. Для этого обратимся к рис. 5, на котором кроме зависимости полного числа испущенных квантов от фактора Лоренца приведены кривые для каждого из двух вкладов. Если бы интерференция между отдельными компонентами отсутствовала, то полное

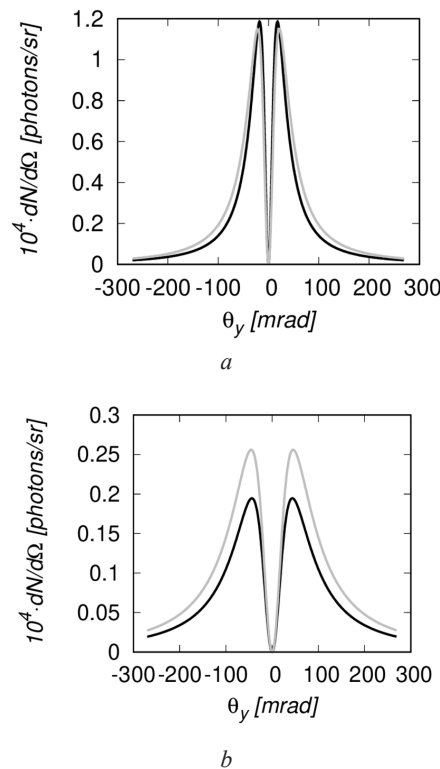


Рис. 6. Угловые распределения ПРИ, рассчитанные в рамках динамической (черные кривые) и кинематической (серые кривые) теорий: *a* – кривые, соответствующие  $\theta_x = 0$  мрад; *b* –  $\theta_x = 40$  мрад

Fig. 6. Angular distributions of PXR calculated in the framework of the dynamical (black curves) and kinematical (gray curves) theories: *a* are the curves corresponding to  $\theta_x = 0$  mrad; *b* are the curves corresponding to  $\theta_x = 40$  mrad

число испущенных квантов равнялось бы сумме двух вкладов. Однако, как это особенно видно при  $\gamma_e \sim 1 \cdot 10^3 - 2 \cdot 10^3$ , указанное простое соотношение несправедливо: сумма двух вкладов превышает полное число квантов на 30 %. Таким образом, интерференция между дифрагированной переходной и квазичеренковской компонентами делает в общем случае проблематичным независимое рассмотрение двух вкладов в ПРИ, иногда встречающееся в литературе [16, 17]. Обратим внимание также на поведение отдельных вкладов в излучение. В области малых энергий доминирует квазичеренковская компонента. Но с увеличением энергии квазичеренковский вклад перестает расти. Вклад дифрагированной переходной компоненты продолжает увеличиваться. Поскольку дифрагированная переходная компонента в кинематической теории не учитывается, то и соответствующий рост в кинематической теории отсутствует (см. рис. 2).

Обратим внимание еще на одно обстоятельство, касающееся применимости кинематической теории. В работе [13] подчеркивалось, что кинематическая теория применима, если  $\gamma_e^{-1} \gg |\chi_{\bar{\tau}}|$ . Действительно, если говорить о качественном совпадении угловых распределений, рассчитанных в рамках более общей динамической и приближенной кинематической теорий, то согласие имеется, о чем свидетельствуют результаты расчетов (рис. 6), выполненные для вышеописанной геометрии и энергии электронов 30 МэВ ( $1/\gamma_e \approx 1,7 \cdot 10^{-3} \gg |\chi_{\bar{\tau}}| \approx 1,03 \cdot 10^{-5}$ ). Тем не менее при отклонении  $\theta_x$  от нуля динамическая теория приводит к более низким значениям углового распределения квантов, чем кинематическая. Разница же в полном числе квантов, испущенных заряженной частицей в конус с угловым радиусом  $\theta_d = 270$  мрад составляет 30 %:  $N_{\text{kin}} = 1,35 \cdot 10^{-6}$  и  $N_{\text{dyn}} = 1,04 \cdot 10^{-6}$ .

**Заключение.** При количественном анализе экспериментов по генерации ПРИ в симметричной геометрии Брэгга чрезвычайно важным оказывается учет двух интерферирующих друг

с другим вкладом в излучение: дифрагированного переходного и квазичеренковского, рассчитанных в рамках теории динамической дифракции. Использование кинематического приближения и пренебрежение интерференцией между двумя вкладами приводит к значительному расхождению с экспериментальными данными. Последнее продемонстрировано путем сравнения теорий с экспериментальными результатами, полученными на синхротроне «Сириус». Только динамическая теория правильно описывает первичную экстинкцию электромагнитных волн в кристалле и учитывает интерференцию между дифрагированным переходным и квазичеренковским вкладами в параметрическое излучение.

Проведенный в настоящей работе анализ позволил получить аналитическое выражение для полного числа испущенных квантов в случае, когда дифрагированная переходная компонента ПРИ значительно превышает квазичеренковскую. Данное условие реализуется при больших значениях фактора Лоренца  $\gamma_e$  в конусе с угловым радиусом порядка  $\sim 1/\gamma_e$ .

**Благодарности.** Автор выражает благодарность профессору В. Г. Барышевскому за ценные замечания и обсуждение полученных результатов.

**Acknowledgements.** The author is grateful to Professor V. G. Baryshevsky for valuable comments and discussion of the obtained results.

### Список использованных источников

1. Fetisov, G. V. X-ray diffraction methods for structural diagnostics of materials: progress and achievements / G. V. Fetisov // *Physics-Uspekhi*. – 2020. – Vol. 63. – P. 2–32. <https://doi.org/10.3367/ufne.2018.10.038435>
2. Baryshevsky, V. Parametric X-ray Radiation in Crystals. Theory, Experiment and Applications / V. Baryshevsky, I. Feranchuk, A. Ulyanenko. – Berlin: Springer, 2005. – 182 p. <https://doi.org/10.1007/b95327>
3. Free-electron interactions with van der Waals heterostructures: a source of focused X-ray radiation / X. Shi, Y. Kurman, M. Shentais [et al.] // *Light: Science & Applications*. – 2023. – Vol. 12. – Art. ID 148. <https://doi.org/10.1038/s41377-023-01141-2>
4. Барышевский, В. Г. О рассеянии света потоком электронов, проходящих через кристалл / В. Г. Барышевский // Доклады Академии наук БССР. – 1971. – Т. 15, № 4. – С. 306–308.
5. Baryshevsky, V. G. Transition radiation of  $\gamma$ -rays in crystal / V. G. Baryshevsky, I. D. Feranchuk // *Soviet Physics JETP*. – 1972. – Vol. 34, № 3. – P. 502–504.
6. Garibyan, G. M. Quantum microscopic theory of radiation by a charged particle moving uniformly in a crystal / G. M. Garibyan, C. Yang // *Soviet Physics JETP*. – 1972. – Vol. 34, № 3. – P. 495–501.
7. Пафомов, В. Е. Излучение заряженной частицы при наличии границ раздела / В. Е. Пафомов // Труды ФИАН. – М.: Наука, 1969. – Т. 44: Ядерная физика и взаимодействие частиц с веществом. – С. 28–167.
8. Барышевский, В. Г. Каналирование, излучение и реакции в кристаллах при высоких энергиях / В. Г. Барышевский. – Мн.: БГУ, 1982. – 256 с.
9. Трубецков, Д. И. Лекции по высокочастотной электронике для физиков: в 2 т. / Д. И. Трубецков, А. Е. Храмов. – М.: Физматлит, 2003. – Т. 1. – 493 с.
10. Пинскер, З. Р. Рентгеновская кристаллооптика / З. Р. Пинскер. – М.: Наука, 1982. – 392 с.
11. Baryshevsky, V. G. Parametric X-ray radiation at a small angle near the velocity direction of the relativistic particle / V. G. Baryshevsky // *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms*. – 1997. – Vol. 122, № 1. – P. 13–18. [https://doi.org/10.1016/S0168-583X\(96\)00686-6](https://doi.org/10.1016/S0168-583X(96)00686-6)
12. Feranchuk, I. D. Theoretical investigation of the parametric X-ray features / I. D. Feranchuk, A. V. Ivashin // *Journal de Physique*. – 1985. – Vol. 46, № 11. – P. 1981–1986. <https://doi.org/10.1051/jphys:019850046011098100>
13. Nitta, H. Theoretical notes on parametric X-ray radiation / H. Nitta // *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms*. – 1996. – Vol. 115, № 1–4. – P. 401–404. [https://doi.org/10.1016/0168-583X\(96\)00163-2](https://doi.org/10.1016/0168-583X(96)00163-2)
14. Forward diffracted parametric X radiation from a silicon single crystal / H. Backe, A. Rueda, W. Lauth [et al.] // *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms*. – 2005. – Vol. 234, № 1–2. – P. 138–147. <https://doi.org/10.1016/j.nimb.2005.01.014>
15. Experimental observation of parametric X-ray radiation directed along the propagation velocity of relativistic electrons in a tungsten crystal / N. Aleinik, A. N. Baldin, E. A. Bogomazova [et al.] // *Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*. – 2004. – Vol. 80, № 6. – P. 393–397. <https://doi.org/10.1134/1.1830655>
16. Caticha, A. Transition-diffracted radiation and the Cerenkov emission of x rays / A. Caticha // *Physical Review A*. – 1989. – Vol. 40, № 8. – P. 4322–4329. <https://doi.org/10.1103/physreva.40.4322>
17. Angular distribution of X-ray radiation by 500 MeV electrons in a tungsten crystal / Y. N. Adishev, S. N. Arishev, A. V. Vnukov [et al.] // *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms*. – 2003. – Vol. 201, № 1. – P. 114–122. [https://doi.org/10.1016/S0168-583X\(02\)01310-1](https://doi.org/10.1016/S0168-583X(02)01310-1)
18. Experimental study of the influence of multiple scattering on the parametric X-rays characteristics / V. P. Afanasenko, V. G. Baryshevsky, A. S. Lobko [et al.] // *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators*,

Spectrometers, Detectors and Associated Equipment 1993. – Vol. 334, № 2–3. – P. 631–637. [https://doi.org/10.1016/0168-9002\(93\)90831-2](https://doi.org/10.1016/0168-9002(93)90831-2)

19. Лобко, А. С. Экспериментальные исследования параметрического рентгеновского излучения / А. С. Лобко. – Мн.: БГУ, 2006. – 211 с.

20. Coherent interactions of free electrons and matter: toward tunable compact x-ray sources / A. Balanov, A. Gorlach, V. Baryshevsky [et al.] // *Advances in Optics and Photonics*. – 2025. – Vol. 17, № 4. – P. 726–788. <https://doi.org/10.1364/aop.559742>

21. X-ray Server. – URL: <https://x-server.gmca.aps.anl.gov/x0h.html> (date of access: 01.02.2025).

22. Baryshevsky, V. G. On parametric x-ray radiation / V. G. Baryshevsky, O. M. Lugovskaya // *Physics of Atomic Nuclei*. – 2023. – Vol. 66. – P. 409–415. <https://doi.org/10.1134/1.1553515>

## References

1. Fetisov G. V. X-ray diffraction methods for structural diagnostics of materials: progress and achievements. *Physics-Uspekhi*, 2020, vol. 63, pp. 2–32. <https://doi.org/10.3367/ufne.2018.10.038435>

2. Baryshevsky V., Feranchuk I., Ulyanenko A. *Parametric X-ray Radiation in Crystals. Theory, Experiment and Applications*. Berlin, Springer, 2005. 182 p. <https://doi.org/10.1007/b95327>

3. Xihang Shi, Kurman Y., Shentis M., Liang Jie Wong, García de Abajo F. J., Kaminer I. Free-electron interactions with van der Waals heterostructures: a source of focused X-ray radiation. *Light: Science & Applications*, 2023, vol. 12, art. ID 148. <https://doi.org/10.1038/s41377-023-01141-2>

4. Baryshevsky V. G. Scattering of light by the electron flux passing through a crystal. *Doklady Akademii nauk BSSR* [Doklady of the Academy of Sciences of BSSR], 1971, vol. 15, no. 4, pp. 306–308 (in Russian).

5. Baryshevsky V. G., Feranchuk I. D. Transition radiation of  $\gamma$ -rays in crystal. *Soviet Physics JETP*, 1972, vol. 34, no. 3, pp. 502–504.

6. Garibyan G. M., Yang C. Quantum microscopic theory of radiation by a charged particle moving uniformly in a crystal. *Soviet Physics JETP*, 1972, vol. 34, no. 3, pp. 495–501.

7. Pafomov V. E. Radiation produced by a charged particle in the presence of boundaries. *Trudy FIAN* [Proceedings of the Lebedev Physical Institute]. Vol. 44. *Nuclear Physics and Particle-Matter Interactions*. Moscow, Nauka Publ., 1969, pp. 28–167 (in Russian).

8. Baryshevsky V. G. *Channeling, Radiation and Reactions in Crystals at High Energies*. Minsk, Belarusian State University, 1982. 256 p. (in Russian).

9. Trubeckov D. I., Hramov A. E. *Lectures on High-Frequency Electronics for Physicists. Vol. 1*. Moscow, Fizmatlit Publ., 2003. 493 p. (in Russian).

10. Pinsker Z. K. *X-ray Crystal Optics*. Moscow, Nauka Publ., 1982. 392 p. (in Russian).

11. Baryshevsky V. G. Parametric X-ray radiation at a small angle near the velocity direction of the relativistic particle. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms*, 1997, vol. 122, no. 1, pp. 13–18. [https://doi.org/10.1016/S0168-583X\(96\)00686-6](https://doi.org/10.1016/S0168-583X(96)00686-6)

12. Feranchuk I. D., Ivashin A. V. Theoretical investigation of the parametric X-ray features. *Journal de Physique*, 1985, vol. 46, no. 11, pp. 1981–1986. <https://doi.org/10.1051/jphys:0198500460110198100>

13. Nitta H. Theoretical notes on parametric X-ray radiation. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms*, 1996, vol. 115, no. 1–4, pp. 401–404. [https://doi.org/10.1016/0168-583X\(96\)00163-2](https://doi.org/10.1016/0168-583X(96)00163-2)

14. Backe H., Rueda A., Lauth W., Clawiter N., El-Ghazaly M., Kunz P., Weber T. Forward diffracted parametric X radiation from a silicon single crystal. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms*, 2005, vol. 234, no. 1–2, pp. 138–147. <https://doi.org/10.1016/j.nimb.2005.01.014>

15. Aleinik N., Baldin A. N., Bogomazova E. A., Vnukov I. E., Kalinin B. N., Kubankin A. S., Nasonov N. N. [et al.]. Experimental observation of parametric X-ray radiation directed along the propagation velocity of relativistic electrons in a tungsten crystal. *Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*, 2004, vol. 80, no. 6. pp. 393–397. <https://doi.org/10.1134/1.1830655>

16. Caticha A. Transition-diffracted radiation and the Čerenkov emission of x rays. *Physical Review A*, 1989, vol. 40, no. 8, pp. 4322–4329. <https://doi.org/10.1103/physreva.40.4322>

17. Adishev Y. N., Arishev S. N., Vnukov A. V., Vukolov A. V., Potylitsyn A. P., Kuznetsov S. I., Zabaev V. N. [et al.]. Angular distribution of X-ray radiation by 500 MeV electrons in a tungsten crystal. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms*, 2003, vol. 201, no. 1, pp. 114–122. [https://doi.org/10.1016/S0168-583X\(02\)01310-1](https://doi.org/10.1016/S0168-583X(02)01310-1)

18. Afanasenko V. P., Baryshevsky V. G., Lobko A. S., Panov V. V., Zuevsky R. F. Experimental study of the influence of multiple scattering on the parametric X-rays characteristics. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, 1993, vol. 334, no. 1–2, pp. 631–637. [https://doi.org/10.1016/0168-9002\(93\)90831-2](https://doi.org/10.1016/0168-9002(93)90831-2)

19. Lobko A. S. *Experimental Investigations of Parametric X-ray Radiation*. Minsk, Belarusian State University, 2006. 211 p. (in Russian).

20. Balanov A., Gorlach A., Baryshevsky V., Feranchuk I., Nitta H., Hayakawa Y., Shchagin A. [et al.]. Coherent interactions of free electrons and matter: toward tunable compact x-ray sources. *Advances in Optics and Photonics*, 2025, vol. 17, no. 4, pp. 726–788. <https://doi.org/10.1364/aop.559742>

21. *X-ray server*. Available at: <https://x-server.gmca.aps.anl.gov/x0h.html> (accessed 01.02.2025).

22. Baryshevsky V. G., Lugovskaya O. M. On parametric x-ray radiation. *Physics of Atomic Nuclei*, 2023, vol. 66, pp. 409–415. <https://doi.org/10.1134/1.1553515>

### Информация об авторе

**Анищенко Сергей Владимирович** – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории физики высоких плотностей энергии, Институт ядерных проблем Белорусского государственного университета (ул. Бобруйская, 11, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: [sanishchenko@mail.ru](mailto:sanishchenko@mail.ru)

### Information about the author

**Sergei V. Anishchenko** – Ph. D. (Physics and Mathematics), Senior Researcher, High energy density physics laboratory, Institute for Nuclear Problems of Belarusian State University (11, Bobruiskaya Str., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: [sanishchenko@mail.ru](mailto:sanishchenko@mail.ru)