

ISSN 1561-2430 (Print)

ISSN 2524-2415 (Online)

УДК 517.968.73

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2026-62-1-15-26>

Поступила в редакцию 12.10.2025

Received 12.10.2025

Г. А. Расолько¹, В. М. Волков², М. В. Игнатенко¹¹Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь²Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь

ПРЯМОЙ СПЕКТРАЛЬНЫЙ МЕТОД ЧЕБЫШЕВА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ КРЫЛА

Аннотация. Рассмотрено обобщенное интегро-дифференциальное уравнение Прандтля, в котором сингулярные интегралы содержат как искомое решение, так и его производную. Для решения данной задачи построены прямые численные методы, основанные на представлении решения и переменных коэффициентов уравнения в виде интерполяционных многочленов Чебышева. Разработанный подход, использующий известные спектральные соотношения, позволяет получить аналитические выражения для сингулярной составляющей задачи и сводит ее решение к системе линейных алгебраических уравнений для коэффициентов интерполяционного многочлена. Построены две вычислительные схемы решения с использованием полиномов Чебышева первого и второго рода соответственно. На примере модельной задачи показано, что обе схемы обеспечивают хорошую обусловленность алгебраической задачи и обладают высокой точностью, демонстрируя экспоненциальную скорость сходимости погрешности.

Ключевые слова: сингулярное уравнение, интегро-дифференциальное уравнение, ортогональный базис полиномов Чебышева, спектральный метод Чебышева, обобщенное уравнение Прандтля

Для цитирования. Расолько, Г. А. Прямой спектральный метод Чебышева для решения обобщенного уравнения крыла / Г. А. Расолько, В. М. Волков, М. В. Игнатенко // Весті Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. – 2026. – Т. 62, № 1. – С. 15–26. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2026-62-1-15-26>

Galina A. Rasolka¹, Vasily M. Volkov², Marina V. Ignatenko¹¹Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus²Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus

DIRECT SPECTRAL CHEBYSHEV METHOD FOR SOLVING THE GENERALIZED WING EQUATION

Abstract. The generalized Prandtl integro-differential equation is considered, in which the singular integrals contain both the unknown solution and its derivative. Direct numerical methods for solving this problem are constructed, based on representing the solution and the variable coefficients of the equation in the form of Chebyshev interpolation polynomials. The developed approach, which utilizes known spectral relations, makes it possible to obtain analytical expressions for the singular component of the problem and reduces its solution to a system of linear algebraic equations for the coefficients of the interpolation polynomial. Two computational schemes for the solution are constructed using Chebyshev polynomials of the first and second kind, respectively. Using a model problem as an example, it is shown that both schemes ensure good conditioning of the algebraic problem and possess high accuracy, demonstrating an exponential convergence rate of the error.

Keywords: singular equation, integro-differential equation, orthogonal basis of Chebyshev polynomials, spectral Chebyshev method, generalized Prandtl equation

For citation. Rasolko G. A., Volkov V. M., Ignatenko M. V. Direct spectral Chebyshev method for solving the generalized wing equation. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2026, vol. 62, no. 1, pp. 15–26 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2026-62-1-15-26>

Введение. Рассмотрим разрешимое полное обобщенное уравнение крыла [1, 2]

$$\frac{\Gamma(x)}{B(x)} - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma'(t)}{t-x} dt + \int_{-1}^1 \frac{s(x,t)}{t-x} \Gamma(t) dt + \int_{-1}^1 g(x,t) \Gamma'(t) dt = f(x), \quad -1 < x < 1. \quad (1)$$

Здесь $B(x)$, $s(x,t)$, $g(x,t)$ и $f(x)$ – известные функции ($s(x,t)$ удовлетворяет условию Гельдера по обоим переменным); $\Gamma(x)$ – искомая функция, удовлетворяющая краевым условиям на границе интервала; $\Gamma(\pm 1) = 0$.

Важно отметить, что ядро обобщенного уравнения крыла – уравнения Прандтля – имеет сингулярность, что порождает существенные трудности при численном решении подобных задач. Весьма эффективный способ обработки подобного рода сингулярностей состоит не в использовании квадратурных формул [3], а в представлении решения задачи и коэффициентов уравнения в виде интерполяционных многочленов с использованием многочленов Чебышева (см., напр., [2, 4–8]). Данный прием с учетом известных спектральных соотношений [9, с. 188],

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}} \frac{dt}{t-x} &= U_{n-1}(x), \\ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} U_{n-1}(t) \frac{dt}{t-x} &= -T_n(x), \quad -1 < x < 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned} \quad (2)$$

где $T_n(x)$, $U_n(x)$ – многочлены Чебышева степени n первого и второго рода соответственно, позволяет вычислить аналитически сингулярную составляющую входящих в уравнение интегралов и получить высокую скорость сходимости приближенного решения задачи [5]. Спектральные методы на основе многочленов Чебышева для некоторых частных случаев уравнения Прандтля построены в работах [6–8], где показана их высокая эффективность.

Постановка задачи и некоторые предварительные сведения. Предварительно в (1) выполним преобразование сингулярного интеграла $\int_{-1}^1 \frac{s(x,t)}{t-x} \Gamma(t) dt$ в соответствии с [10, с. 315]:

$$\int_{-1}^1 \frac{s(x,t)}{t-x} \Gamma(t) dt = \int_{-1}^1 \frac{s(x,t) - s(x,x) + s(x,x)}{t-x} \Gamma(t) dt = \frac{b(x)}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma(t)}{t-x} dt + \int_{-1}^1 v(x,t) \Gamma(t) dt,$$

где $b(x) = \pi s(x,x)$, $v(x,t) = \frac{s(x,t) - s(x,x)}{t-x}$.

Далее будем рассматривать уравнение (1) в виде

$$\frac{\Gamma(x)}{B(x)} - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma'(t)}{t-x} dt + \frac{b(x)}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma(t)}{t-x} dt + \int_{-1}^1 g(x,t) \Gamma'(t) dt + \int_{-1}^1 v(x,t) \Gamma(t) dt = f(x), \quad |x| < 1. \quad (3)$$

Здесь $B(x)$, $b(x)$, $g(x,t)$, $v(x,t)$ и $f(x)$ – известные функции; $\Gamma(x)$ – искомая функция, удовлетворяющая краевым условиям

$$\Gamma(\pm 1) = 0. \quad (4)$$

Полагаем, что производная решения задачи принадлежит классу функций $h(0)$ по Мусхелишвили – классу функций с интегрируемой особенностью в окрестности точек $x = \pm 1$ [10, с. 31], т. е. $\psi(x) \in h(0)$, если на отрезке $[-1 + \varepsilon_1, 1 - \varepsilon_2]$ $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, $\psi(x)$ удовлетворяет условию Гельдера и в окрестности точек ± 1 допускает интегрируемую особенность.

Относительно условий разрешимости задачи (3), (4) имеет место

Теорема. Пусть функции $B(x)$, $b(x)$, $v(x,t)$, $g(x,t)$, входящие в уравнение (3), удовлетворяют условию

$$\rho = \max_{|x| \leq 1} \left| \sqrt{1-x^2} / B(x) \right| + \|b\|_C + \frac{\pi}{2} \|v\|_C + \frac{2}{\pi} \|g\|_C < 1.$$

Тогда граничная задача (3), (4) имеет единственное решение в классе функций $\Gamma'(x) \in h(0)$ при любой $f(x) \in C[-1, 1]$.

Доказательство теоремы проводится по аналогии с [11].

Построение вычислительных схем. Для построения приближенной схемы решения задачи (3), (4) используем интерполяционный многочлен для функции $f(x)$ по узлам Чебышева первого рода [12, с. 89]:

$$f(x) \approx f_n(x) = \sum_{j=0}^n {}^0 c_j T_j(x), \quad (5)$$

где

$$c_j = \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^n f(x_k) T_j(x_k), \quad j=0, 1, \dots, n, \quad x_k = \cos \frac{2k+1}{2n+2} \pi, \quad k=0, 1, \dots, n.$$

Здесь и далее $\sum_{j=0}^n {}^0 a_j = \frac{1}{2} a_0 + a_1 + \dots + a_n$.

Используя известные свойства многочленов Чебышева (см. [12, с. 23])

$$T_0(x) = U_0(x), \quad 2T_1(x) = U_1(x), \quad 2T_j(x) = U_j(x) - U_{j-2}(x), \quad j \geq 2,$$

несложно получить аналогичное приближенное представление функции $f(x)$ в виде разложения по многочленам Чебышева второго рода:

$$f_n(x) = \sum_{j=0}^n f_j U_j(x), \quad (6)$$

где

$$x_k = \cos \frac{2k+1}{2n+2} \pi, \quad k=0, 1, \dots, n, \quad G_j = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f(x_k) T_j(x_k), \quad j=0, 1, \dots, n;$$

$$f_j = G_j - G_{j+2}, \quad j=0, 1, \dots, n-2, \quad f_{n-1} = G_{n-1}, \quad f_n = G_n.$$

При построении вычислительных схем используем интерполяционные многочлены функции двух переменных в виде разложения по многочленам Чебышева, полученные на основании (5) и (6):

$$g_{n,n}(x, t) = \sum_{m=0}^n T_m(x) \sum_{j=0}^n \sigma_{m,j} T_j(t),$$

$$\sigma_{m,j} = \frac{\delta_j}{n+1} \sum_{r=1}^{n+1} T_j(x_r) \frac{\delta_m}{n+1} \sum_{l=1}^{n+1} T_m(x_l) g(x_l, x_r), \quad (7)$$

$$\delta_i = \begin{cases} 1, & i=0, \\ 2, & i>0, \end{cases} \quad x_p = \cos \frac{2p-1}{2n+2} \pi, \quad p=1, 2, \dots, n+1,$$

и

$$v_{n,n}(x, t) = \sum_{m=0}^n T_m(x) \sum_{j=0}^n \eta_{m,j} U_j(t),$$

$$\eta_{m,j} = \frac{\delta_j}{(n+1)^2} \sum_{r=1}^{n+1} T_m(x_r) \sum_{l=1}^{n+1} T_j((x_l) - \beta_j T_{j+2}(x_l)) v(x_l, x_r), \quad (8)$$

$$\delta_j = \begin{cases} 1, & j=0, \\ 2, & j>0, \end{cases} \quad \beta_j = \begin{cases} 1, & 0 \leq j \leq n-2, \\ 0, & j=n-1, n, \end{cases}$$

$$x_k = \cos \frac{2k-1}{2n+2} \pi, \quad k=1, 2, \dots, n+1.$$

В дальнейшем нам понадобится

Утверждение 1. Для $|x| < 1$ имеет место равенство

$$J_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left(\sqrt{1-t^2} T_k(t) \right)' \frac{dt}{t-x} = \begin{cases} -U_0(x), & k=0, \\ -U_1(x), & k=1, \\ -(k+1)T_k(x) - U_{k-2}(x), & k \geq 2, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -U_0(x), & k=0, \\ -U_1(x), & k=1, \\ \frac{k-1}{2} U_{k-2}(x) - \frac{k+1}{2} U_k(x), & k \geq 2. \end{cases} \quad (9)$$

Доказательство. При $k = 0$ формула (9) очевидно верна на основании (2) и того факта, что $U_{-1}(x) = 0$.

Пусть $k \geq 1$. Вычислим производную от подынтегральной функции и используем соотношение [12]: $x T_k(x) = (1 - x^2)U_{k-1}(x) - T_{k-1}(x)$. Тогда

$$J_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left((k+1)\sqrt{1-t^2}U_{k-1}(t) - \frac{T_{k-1}(t)}{\sqrt{1-t^2}} \right) \frac{dt}{t-x}.$$

Применим (2), учтем соотношение $2T_k(x) = U_k(x) - U_{k-2}(x)$ и получим, что

$$J_k(x) = -(k+1)T_k(x) - U_{k-2}(x) = \frac{k-1}{2}U_{k-2}(x) - \frac{k+1}{2}U_k(x).$$

Утверждение доказано.

По аналогии можно доказать следующее

Утверждение 2. Для $x \in (-1, 1)$ справедливы формулы

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} T_k(t) \frac{dt}{t-x} = \begin{cases} -T_1(x), & k=0, \\ -\frac{1}{2}T_2(x), & k=1, \\ \frac{1}{2}T_{k-1}(x) - \frac{1}{2}T_{k+1}(x), & k \geq 2. \end{cases} \quad (10)$$

Приближенное решение задачи (3), (4). Приближенное решение задачи (3), (4) будем искать как решение следующего уравнения:

$$\begin{aligned} K(\Gamma_n; x) \equiv & \frac{\Gamma_n(x)}{B(x)} - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma'_n(t)}{t-x} dt + \frac{b(x)}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma_n(t)}{t-x} dt + \int_{-1}^1 g_{n,n}(x, t) \Gamma'_n(t) dt + \\ & + \int_{-1}^1 v_{n,n}(x, t) \Gamma_n(t) dt = F_n(x), \quad -1 < x < 1, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\Gamma_n(x)$ – искомая функция, удовлетворяющая краевым условиям $\Gamma_n(\pm 1) = 0$, $g_{n,n}(x, t)$; $v_{n,n}(x, t)$ – интерполяционные многочлены (7), (8) для функций $g(x, t)$, $v(x, t)$ соответственно; $F_n(x)$ – некоторая функция из класса $C[-1, 1]$ такая, что $F_n(x_j) = f(x_j)$, $x_j = \cos \frac{j+1}{n+2}$, $j = 0, 1, \dots, n$.

Схема 1. Пусть

$$\Gamma_n(x) = \sqrt{1-x^2} \sum_{k=0}^n c_k U_k(x), \quad (12)$$

где c_k , $k = 0, 1, \dots, n$, – неизвестные постоянные.

Отсюда далее получим

$$\Gamma'_n(x) = \left(\sqrt{1-x^2} \sum_{k=0}^n c_k U_k(x) \right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sum_{k=0}^n c_k (k+1) T_{k+1}(x). \quad (13)$$

Интегралы, входящие в (11), вычисляются явно. Рассмотрим первые два. Имеем

$$I_1(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma'_n(t)}{t-x} dt = \sum_{k=0}^n c_k (k+1) \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_{k+1}(t)}{\sqrt{1-t^2}} \frac{dt}{t-x} = \sum_{k=0}^n c_k (k+1) U_k(x). \quad (14)$$

Аналогично подсчитаем

$$I_2(x) = \frac{b(x)}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma_n(t)}{t-x} dt = b(x) \sum_{k=0}^n c_k \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} U_k(t) \frac{dt}{t-x} = -b(x) \sum_{k=0}^n c_k T_{k+1}(x). \quad (15)$$

Вычислим последовательно регулярные интегралы

$$I_3(x) = \int_{-1}^1 g_{n,n}(x,t) \Gamma'_n(t) dt, \quad I_4(x) = \int_{-1}^1 v_{n,n}(x,t) \Gamma_n(t) dt.$$

При вычислении интеграла $I_3(x)$ используем (13), интерполяционный многочлен (7), учтем [12] свойство $2T_m(x)T_n(x) = T_{m+n}(x) + T_{m-n}(x)$, а также свойства ортогональности многочленов Чебышева:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_j(t)T_p(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \begin{cases} 0, & j \neq p, \\ 1, & j = p = 0, \\ \frac{1}{2}, & j = p \neq 0, \end{cases} \quad \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} U_p(t) dt = \begin{cases} \frac{1}{2}, & p = 0, \\ -\frac{1}{2}, & p = -2, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

и получим

$$\begin{aligned} I_3(x) &= \int_{-1}^1 \left(\sum_{m=0}^n T_m(x) \sum_{j=0}^n \sigma_{m,j} T_j(t) \left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \sum_{k=0}^n c_k(k+1) T_{k+1}(t) \right) \right) dt = \\ &= \sum_{k=0}^n c_k(k+1) \sum_{m=0}^n T_m(x) \sum_{j=0}^n \sigma_{m,j} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} T_{k+1}(t) T_j(t) dt = \\ &= \frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^{n-1} c_k(k+1) \sum_{m=0}^n T_m(x) \sigma_{m,k+1}, \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_{m,j} &= \frac{\delta_j}{n+1} \sum_{r=1}^{n+1} T_j(x_r) \frac{\delta_m}{n+1} \sum_{l=1}^{n+1} T_m(x_l) g(x_l, x_r), \\ \delta_i &= \begin{cases} 1, & i = 0, \\ 2, & i > 0, \end{cases} \quad x_p = \cos \frac{2p-1}{2n+2} \pi, \quad p = 1, 2, \dots, n+1. \end{aligned}$$

Аналогично вычислим $I_4(x)$, используя (12), интерполяционный многочлен (8) и свойство [12] $2(1-x^2)U_m(x)U_n(x) = T_{m-n}(x) - T_{m+n+2}(x)$:

$$\begin{aligned} I_4(x) &= \int_{-1}^1 \left(\sum_{m=0}^n T_m(x) \sum_{j=0}^n \eta_{m,j} U_j(t) \right) \left(\sqrt{1-t^2} \sum_{k=0}^n c_k U_k(t) \right) dt = \\ &= \sum_{k=0}^n c_k \sum_{m=0}^n T_m(x) \sum_{j=0}^n \eta_{m,j} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{(T_{k-j}(t) - T_{k+j+2}(t))}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^n c_k \sum_{m=0}^n T_m(x) \eta_{m,k}, \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} \eta_{m,j} &= \frac{\delta_j}{(n+1)^2} \sum_{r=1}^{n+1} T_m(x_r) \sum_{l=1}^{n+1} T_j((x_l) - \beta_j T_{j+2}(x_l)) v(x_l, x_r), \\ \delta_j &= \begin{cases} 1, & j = 0, \\ 2, & j > 0, \end{cases} \quad \beta_j = \begin{cases} 1, & 0 \leq j \leq n-2, \\ 0, & j = n-1, n, \end{cases} \quad x_k = \cos \frac{2k-1}{2n+2} \pi, \quad k = 1, 2, \dots, n+1. \end{aligned}$$

Таким образом, собирая вместе (14)–(17), имеем

$$\begin{aligned} K(\Gamma_n; x) &= \sum_{k=0}^n c_k \frac{\sqrt{1-x^2}}{B(x)} U_k(x) + \sum_{k=0}^n c_k(k+1) U_k(x) - b(x) \sum_{k=0}^n c_k T_{k+1}(x) + \\ &+ \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{\pi(k+1)}{2} \sum_{m=0}^n T_m(x) \sigma_{m,k+1} + \frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^n c_k \sum_{m=0}^n T_m(x) \eta_{m,k} = F_n(x), \quad -1 < x < 1. \end{aligned} \quad (18)$$

Из уравнения (18) следует система линейных алгебраических уравнений для вычисления $c_0, c_1, \dots, c_n$, которая получается путем последовательной подстановки в (18) вместо x нулей многочлена Чебышева второго рода $x_i = \cos \frac{i+1}{n+2}$, $i = 0, 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n c_k \left(\frac{\sqrt{1-x_i^2}}{B(x_i)} U_k(x_i) + (k+1)U_k(x_i) - b(x_i)T_{k+1}(x_i) \right) + \\ & + \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{\pi(k+1)}{2} \sum_{m=0}^n T_m(x_i) \sigma_{m,k+1} + \frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^n c_k \sum_{m=0}^n T_m(x_i) \eta_{m,k} = F_n(x_i), \\ & i = 0, 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (19)$$

Уравнение (11) и эквивалентное ему уравнение (18) равносильны, так как, выполняя действия, приводящие (11) к (18) в обратном порядке, из (18) получим уравнение (11) (см., напр., [13, с. 535]). Следовательно, система (19), полученная из (18), разрешима и имеет единственное решение c_k , $k = 0, 1, \dots, n$.

Приближенное решение задачи (3), (4) – функция $\Gamma_n(x)$ – вычисляется по (12) в произвольной точке $x \in [-1, 1]$.

З а м е ч а н и е 1. При вычислении интеграла $I_4(x)$ был использован интерполяционный многочлен (8), однако можно воспользоваться и многочленом (7). Тогда интеграл

$$\begin{aligned} I_4(x) &= \int_{-1}^1 \left(\sum_{m=0}^n T_m(x) \sum_{j=0}^n \vartheta_{m,j} T_j(t) \right) \left(\sqrt{1-t^2} \sum_{k=0}^n c_k U_k(t) \right) dt = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n c_k \sum_{m=0}^n T_m(x) \sum_{j=0}^n \vartheta_{m,j} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} (U_{k-j}(t) + U_{k+j}(t)) dt = \\ &= c_0 \frac{\pi}{2} \sum_{m=0}^n T_m(x) \vartheta_{m,0} + \frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^n c_k \sum_{m=0}^n T_m(x) \vartheta_{m,k}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \vartheta_{m,j} &= \frac{\delta_j}{n+1} \sum_{r=1}^{n+1} T_j(x_r) \frac{\delta_m}{n+1} \sum_{l=1}^{n+1} T_m(x_l) v(x_l, x_r), \\ \delta_i &= \begin{cases} 1, & i = 0, \\ 2, & i > 0, \end{cases} \quad x_p = \cos \frac{2p-1}{2n+2} \pi, \quad p = 1, 2, \dots, n+1. \end{aligned}$$

Таким образом, подобно предыдущему, имеем

$$\begin{aligned} K(\Gamma_n; x) &= \sum_{k=0}^n c_k \frac{\sqrt{1-x^2}}{B(x)} U_k(x) + \sum_{k=0}^n c_k (k+1) U_k(x) - b(x) \sum_{k=0}^n c_k T_{k+1}(x) + \\ &+ \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{\pi(k+1)}{2} \sum_{m=0}^n T_m(x) \sigma_{m,k+1} + c_0 \frac{\pi}{2} \sum_{m=0}^n T_m(x) \vartheta_{m,0} + \\ &+ \frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^n c_k \sum_{m=0}^n T_m(x) \vartheta_{m,k} = F_n(x), \quad -1 < x < 1. \end{aligned} \quad (20)$$

Из уравнения (20) следует система линейных алгебраических уравнений для вычисления $c_0, c_1, \dots, c_n$, которая получается путем последовательной подстановки в (20) вместо x нулей многочлена Чебышева второго рода $x_i = \cos \frac{i+1}{n+2}$, $i = 0, 1, \dots, n$:

$$c_0 \left(\frac{\sqrt{1-x_i^2}}{B(x_i)} + 1 - b(x_i)x_i + \frac{\pi}{2} \sum_{m=0}^n T_m(x_i) (\sigma_{m,1} + \vartheta_{m,0}) \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=1}^{n-1} c_k \left(\left(\frac{\sqrt{1-x_i^2}}{B(x_i)} + k + 1 \right) U_k(x_i) - b(x_i) T_{k+1}(x_i) + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{m=0}^n T_m(x_i) \left(\frac{\pi(k+1)}{2} \sigma_{m,k+1} + \frac{\pi}{4} \vartheta_{m,k} \right) \right) + \\
& + c_n \left(\left(\frac{\sqrt{1-x_i^2}}{B(x_i)} + n + 1 \right) U_n(x_i) - b(x_i) T_{n+1}(x_i) + \frac{\pi}{4} \sum_{m=0}^n T_m(x_i) \vartheta_{m,n} \right) = F_n(x_i), \\
& i = 0, 1, \dots, n.
\end{aligned} \tag{21}$$

С х е м а 2. Пусть

$$\Gamma_n(x) = \sqrt{1-x^2} \sum_{k=0}^n c_k T_k(x), \tag{22}$$

где c_k , $k = 0, 1, \dots, n$, – неизвестные постоянные.

Интегралы, входящие в (11), и в данном случае вычисляются явно. В первом интеграле применим (9):

$$\begin{aligned}
I_1(x) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma'_n(t)}{t-x} dt = -\sum_{k=0}^n c_k \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left(\sqrt{1-t^2} T_k(t) \right)' \frac{dt}{t-x} = \\
&= c_0 + c_1 U_1(x) + \sum_{k=2}^n c_k ((k+1) T_k(x) + U_{k-2}(x)).
\end{aligned} \tag{23}$$

На основании (10) с учетом свойства [12] $T_{n+2}(x) - T_n(x) = 2(x^2 - 1)U_n(x)$ получаем

$$I_2(x) = \frac{b(x)}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma_n(t)}{t-x} dt = -b(x) \left(c_0 T_1(x) + \frac{1}{2} c_1 T_2(x) + (x^2 - 1) \sum_{k=2}^n c_k U_{k-1}(x) \right). \tag{24}$$

Вычислим последовательно регулярные интегралы

$$I_3(x) = \int_{-1}^1 g_{n,n}(x, t) \Gamma'_n(t) dt, \quad I_4(x) = \int_{-1}^1 v_{n,n}(x, t) \Gamma_n(t) dt.$$

Так как, согласно [12], имеет место $-x T_k(x) = (1 - x^2) U_{k-1}(x) - T_{k-1}(x)$, то

$$\Gamma'_n(x) = \sum_{k=1}^n c_k (k+1) \sqrt{1-x^2} U_{k-1}(x) - \sum_{k=0}^n c_k \frac{T_{k-1}(x)}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{25}$$

Используя интерполяционный многочлен (7) для функции $g(x, t)$, представление (25) и выполняя некоторые элементарные вычисления с учетом свойств [12] $2 U_m(x) T_n(x) = U_{m-n}(x) + U_{m+n}(x)$ и ортогональности многочленов Чебышева, получим

$$\begin{aligned}
I_3(x) &= \int_{-1}^1 g_{n,n}(x, t) \Gamma'_n(t) dt = -c_0 \frac{\pi}{2} \sum_{m=0}^n T_m(x) \sigma_{m,1} - \\
&- c_1 \frac{\pi}{2} \sum_{m=0}^n T_m(x) \sigma_{m,2} + c_n \frac{\pi}{4} (n-1) \sum_{m=0}^n T_m(x) \sigma_{m,n-1} + \\
&+ \sum_{k=2}^{n-1} c_k \frac{\pi}{4} \left((k-1) \sum_{m=0}^n T_m(x) \sigma_{m,k-1} - (k+1) \sum_{m=0}^n T_m(x) \sigma_{m,k+1} \right),
\end{aligned} \tag{26}$$

где

$$\sigma_{m,j} = \frac{\delta_j}{n+1} \sum_{r=1}^{n+1} T_j(x_r) \frac{\delta_m}{n+1} \sum_{l=1}^{n+1} T_m(x_l) g(x_l, x_r),$$

$$\delta_i = \begin{cases} 1, & i = 0, \\ 2, & i > 0, \end{cases} \quad x_p = \cos \frac{2p-1}{2n+2} \pi, \quad p = 1, 2, \dots, n+1.$$

Аналогично, используя интерполяционный многочлен (8) для функции $v(x, t)$, вычислим

$$\begin{aligned} I_4(x) &= \int_{-1}^1 v_{n,n}(x, t) \Gamma_n(t) dt = \\ &= \int_{-1}^1 \left(\sum_{m=0}^n T_m(x) \sum_{j=0}^n \eta_{m,j} U_j(t) \right) \left(\sqrt{1-t^2} \sum_{k=0}^n c_k T_k(t) \right) dt = \\ &= \sum_{k=0}^n c_k \sum_{m=0}^n T_m(x) \sum_{j=0}^n \eta_{m,j} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} (U_{j-k}(t) + U_{j+k}(t)) dt = \\ &= c_0 \frac{\pi}{2} \sum_{m=0}^n T_m(x) \eta_{m,0} + c_1 \frac{\pi}{4} \sum_{m=0}^n T_m(x) \eta_{m,1} + \\ &\quad + \frac{\pi}{4} \sum_{k=2}^n c_k \sum_{m=0}^n T_m(x) (\eta_{m,k} - \eta_{m,k-2}), \end{aligned} \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned} \eta_{m,j} &= \frac{\delta_j}{(n+1)^2} \sum_{r=1}^{n+1} T_m(x_r) \sum_{l=1}^{n+1} (T_j(x_l) - \beta_j T_{j+2}(x_l)) v(x_l, x_r), \\ \delta_j &= \begin{cases} 1, & j = 0, \\ 2, & j > 0, \end{cases} \quad \beta_j = \begin{cases} 1, & 0 \leq j \leq n-2, \\ 0, & j = n-1, n, \end{cases} \\ x_k &= \cos \frac{2k-1}{2n+2} \pi, \quad k = 1, 2, \dots, n+1. \end{aligned}$$

Таким образом, на основании (22)–(27) получаем, что

$$\begin{aligned} K(\Gamma_n; x) &= \sum_{k=0}^n c_k \frac{\sqrt{1-x^2}}{B(x)} T_k(x) + c_0 + c_1 U_1(x) + \sum_{k=2}^n c_k ((k+1)T_k(x) + U_{k-2}(x)) - \\ &\quad - b(x) \left(c_0 T_1(x) + \frac{1}{2} c_1 T_2(x) + (x^2 - 1) \sum_{k=2}^n c_k U_{k-1}(x) \right) - \\ &\quad - c_0 \frac{\pi}{2} \sum_{m=0}^n T_m(x) \sigma_{m,1} - c_1 \frac{\pi}{2} \sum_{m=0}^n T_m(x) \sigma_{m,2} + c_n \frac{\pi}{4} (n-1) \sum_{m=0}^n T_m(x) \sigma_{m,n-1} + \\ &\quad + \sum_{k=2}^{n-1} c_k \frac{\pi}{4} \left((k-1) \sum_{m=0}^n T_m(x) \sigma_{m,k-1} - (k+1) \sum_{m=0}^n T_m(x) \sigma_{m,k+1} \right) + \\ &\quad + c_0 \frac{\pi}{2} \sum_{m=0}^n T_m(x) \eta_{m,0} + c_1 \frac{\pi}{4} \sum_{m=0}^n T_m(x) \eta_{m,1} + \frac{\pi}{4} \sum_{k=2}^n c_k \sum_{m=0}^n T_m(x) (\eta_{m,k} - \eta_{m,k-2}) = \\ &= F_n(x), \quad -1 < x < 1. \end{aligned} \quad (28)$$

Из уравнения (28) следует система линейных алгебраических уравнений для вычисления $c_0, c_1, \dots, c_n$, которая получается путем последовательной подстановки в (28) вместо x нулей многочлена Чебышева второго рода $x_i = \cos \frac{i+1}{n+2}$, $i = 0, 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n c_k \frac{\sqrt{1-x_i^2}}{B(x_i)} T_k(x_i) + c_0 \left(1 - b(x_i) x_i + \frac{\pi}{2} \sum_{m=0}^n T_m(x_i) (\eta_{m,0} - \sigma_{m,1}) \right) + \\ + c_1 \left(-\frac{b(x_i)}{2} T_2(x_i) + \frac{\pi}{4} \sum_{m=0}^n T_m(x_i) (\eta_{m,1} - 2\sigma_{m,2}) \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + c_2 \left(3T_2(x_i) + 1 - b(x_i)(x_i^2 - 1)U_1(x_i) + \frac{\pi}{4} \sum_{m=0}^n T_m(x_i)(\eta_{m,2} + \sigma_{m,1} - 3\sigma_{m,3}) \right) + \\
& + \sum_{k=3}^{n-1} c_k \left((k+1)T_k(x_i) + U_{k-2}(x_i) - b(x_i)(x_i^2 - 1)U_{k-1}(x_i) \right) + \\
& + \frac{\pi}{4} \left(\sum_{m=0}^n T_m(x_i)(\eta_{m,k} - \eta_{m,k-2} + (k-1)\sigma_{m,k-1} - (k+1)\sigma_{m,k+1}) \right) + \\
& + c_n \left((n+1)T_n(x_i) + U_{n-2}(x_i) - b(x_i)(x_i^2 - 1)U_{n-1}(x_i) + \right. \\
& \left. + \frac{\pi}{4} \sum_{m=0}^n T_m(x_i)[\eta_{m,n} - \eta_{m,n-2} + (n-1)\sigma_{m,n-1}] \right) = F_n(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n.
\end{aligned} \tag{29}$$

Уравнение (11) и эквивалентное ему уравнение (28) равносильны, так как, выполняя действия, приводящие (11) к (28) в обратном порядке, из (28) получим уравнение (11) [13]. Следовательно, система (29), полученная из (28), разрешима и имеет единственное решение c_k , $k = 0, 1, \dots, n$.

Приближенное решение задачи (3), (4) – функция $\Gamma_n(x)$ – вычисляется по (22) в произвольной точке $x \in [-1, 1]$.

З а м е ч а н и е 2. При вычислении интеграла $I_4(x)$ был использован интерполяционный многочлен (8), однако можно воспользоваться и многочленом (7). Тогда интеграл

$$\begin{aligned}
I_4(x) &= \int_{-1}^1 v_{n,n}(x, t) \Gamma_n(t) dt = \int_{-1}^1 \left(\sum_{m=0}^n T_m(x) \sum_{j=0}^n \rho_{m,j} T_j(t) \right) \left(\sqrt{1-t^2} \sum_{k=0}^n c_k T_k(t) \right) dt = \\
&= \sum_{k=0}^n c_k \sum_{m=0}^n T_m(x) \sum_{j=0}^n \rho_{m,j} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} (T_{j-k}(t) + T_{j+k}(t)) dt,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\rho_{m,j} &= \frac{\delta_j}{n+1} \sum_{r=1}^n T_j(x_r) \frac{\delta_m}{n+1} \sum_{l=1}^{n+1} T_m(x_l) v(x_l, x_r), \\
\delta_i &= \begin{cases} 1, & i = 0, \\ 2, & i > 0, \end{cases} \quad x_p = \cos \frac{2p-1}{2n+2} \pi, \quad p = 1, 2, \dots, n+1.
\end{aligned}$$

Следовательно, с учетом (10) получаем

$$\begin{aligned}
I_4(x) &= c_0 \frac{\pi}{4} \sum_{m=0}^n T_m(x) [2\rho_{m,0} - \rho_{m,2}] + c_1 \frac{\pi}{8} \sum_{m=0}^n T_m(x) (\rho_{m,1} - \rho_{m,3}) + \\
&+ c_2 \frac{\pi}{4} \sum_{m=0}^n T_m(x) (\rho_{m,2} - \rho_{m,0}) + \sum_{k=3}^n c_k \frac{\pi}{8} \sum_{m=0}^n T_m(x) [2\rho_{m,k} - \rho_{m,k-2}].
\end{aligned}$$

Таким образом, подобно предыдущему, имеем

$$\begin{aligned}
K(\Gamma_n; x) &= \sum_{k=0}^n c_k \frac{\sqrt{1-x^2}}{B(x)} T_k(x) + c_0 + c_1 U_1(x) + \sum_{k=2}^n c_k ((k+1)T_k(x) + U_{k-2}(x)) - \\
&- b(x) \left(c_0 x + \frac{c_1}{2} T_2(x) + (x^2 - 1) \sum_{k=2}^n c_k U_{k-1}(x) \right) - c_0 \frac{\pi}{2} \sum_{m=0}^n T_m(x) \sigma_{m,1} - c_1 \frac{\pi}{2} \sum_{m=0}^n T_m(x) \sigma_{m,2} + \\
&+ c_n \frac{\pi}{4} (n-1) \sum_{m=0}^n T_m(x) \sigma_{m,n-1} + \sum_{k=2}^{n-1} c_k \frac{\pi}{4} \left((k-1) \sum_{m=0}^n T_m(x) \sigma_{m,k-1} - (k+1) \sum_{m=0}^n T_m(x) \sigma_{m,k+1} \right) + \\
&+ c_0 \frac{\pi}{4} \sum_{m=0}^n T_m(x) [2\rho_{m,0} - \rho_{m,2}] + c_1 \frac{\pi}{8} \sum_{m=0}^n T_m(x) (\rho_{m,1} - \rho_{m,3}) + \\
&+ c_2 \frac{\pi}{4} \sum_{m=0}^n T_m(x) (\rho_{m,2} - \rho_{m,0}) + \sum_{k=3}^n c_k \frac{\pi}{8} \sum_{m=0}^n T_m(x) [2\rho_{m,k} - \rho_{m,k-2}] = F_n(x), \quad -1 < x < 1.
\end{aligned}$$

Отсюда следует система линейных алгебраических уравнений для вычисления $c_0, c_1, \dots, c_n$, которая получается путем последовательной подстановки вместо x нулей многочлена Чебышева первого рода $x_i = \cos \frac{i+1}{n+2}$, $i = 0, 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n c_k \frac{\sqrt{1-x_i^2}}{B(x_i)} T_k(x_i) + c_0 \left(1 - b(x_i)x_i + \frac{\pi}{4} \sum_{m=0}^n T_m(x_i)(2\rho_{m,0} - 2\sigma_{m,1} - \rho_{m,2}) \right) + \\ & + c_1 \left(-\frac{b(x_i)}{2} T_2(x_i) + U_1(x_i) + \frac{\pi}{8} \sum_{m=0}^n T_m(x_i)(\rho_{m,1} - \rho_{m,3} - 4\sigma_{m,2}) \right) + \\ & + c_2 \left(3T_2(x_i) + 1 - b(x_i)(x_i^2 - 1)U_1(x_i) + \frac{\pi}{4} \sum_{m=0}^n T_m(x_i)(\rho_{m,2} - \rho_{m,0} + \sigma_{m,1} - 3\sigma_{m,3}) \right) + \\ & + \sum_{k=3}^{n-1} c_k \left((k+1)T_k(x_i) + U_{k-2}(x_i) - b(x_i)(x_i^2 - 1)U_{k-1}(x_i) \right) + \\ & + \frac{\pi}{8} \left(\sum_{m=0}^n T_m(x_i)(2(k-1)\sigma_{m,k-1} - 2(k+1)\sigma_{m,k+1} + 2\rho_{m,k} - \rho_{m,k-2}) \right) + \\ & + c_n \left((n+1)T_n(x_i) + U_{n-2}(x_i) - b(x_i)(x_i^2 - 1)U_{n-1}(x_i) + \right. \\ & \left. + \frac{\pi}{8} \sum_{m=0}^n T_m(x_i)[2\rho_{m,n} - \rho_{m,n-2} + 2(n-1)\sigma_{m,n-1}] \right) = F_n(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (30)$$

Результаты численного эксперимента. Приведем результаты численного эксперимента, проведенного согласно построенным численным схемам. Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(x)}{B(x)} - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma'(t)}{t-x} dt + \frac{b(x)}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma(t)}{t-x} dt + \int_{-1}^1 g(x,t)\Gamma'(t)dt + \int_{-1}^1 v(x,t)\Gamma(t)dt = f(x), \quad |x| < 1, \\ & B(x) = \sqrt{1-x^2} \frac{1+4x^2}{1+2x^2}, \quad b(x) = \frac{x^2}{x+2}, \\ & v(x,t) = \frac{x}{20x+40} \frac{1}{t^2+1}, \quad g(x,t) = \frac{1}{20x-40} \frac{t}{t^2+2}, \\ & f(x) = \frac{(32x^5 - 32x^3 + 6x)(2x^2 + 1)}{4x^2 + 1} - \frac{x^2(32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1)}{x+2} + \\ & + 192x^5 - 192x^3 + 36x. \end{aligned} \quad (31)$$

Известно, что решением задачи (31), (4) является функция

$$\Gamma(x) = \sqrt{1-x^2} (32x^5 - 32x^3 + 6x) = \sqrt{1-x^2} U_5(x).$$

Несложно убедиться, что производная данной функции $\Gamma'(x) \in h(0)$.

Как показывают расчеты, уже при сравнительно небольших значениях n (начиная с 5) достигается предельная точность приближенного решения, погрешность которого ограничена снизу лишь с вычислительной погрешностью.

Решая системы уравнений (19), (21), (29) или (30) при $n = 5$ и $n = 35$, приближенное решение $\Gamma_n(x)$ отличается от точного решения $\Gamma(x)$ в точках $x = -0,99, -0,98, \dots, 0,99$ не более чем на $1,5 \cdot 10^{-15}$. Число обусловленности матрицы систем при размерности n равной 5 и 35 соответственно $\text{cond}(C_5) \leq 11$ и $\text{cond}(C_{35}) \leq 290$, что позволяет грубо оценить зависимость числа обусловленности от размерности как $\text{cond}(C_n) \cong O(n)$.

Представленные результаты численных экспериментов позволяют оценить эмпирически скорость сходимости построенных численных алгоритмов как линейную. Естественно, что это весьма частный пример, не претендующий на сколь-нибудь значимые обобщения. Вместе с тем

априорные оценки погрешности численных методов решения подобных задач, полученные, например, в работах [2, 14], представляются весьма осторожными и указывают на необходимость дальнейших исследований в направлении их оптимизации.

Таким образом, развитая в данной работе приближенная методика обладает высокой эффективностью в классе сингулярных интегро-дифференциальных уравнений прандтлевского типа. На примере тестовой задачи продемонстрировано, что дискретная модель, основанная на представлении решения в виде разложения по многочленам Чебышева, приводит к хорошо обусловленной системе линейных алгебраических уравнений для коэффициентов разложения, а сходимость погрешности приближенного решения может достигать линейной скорости относительно степени интерполяционного многочлена.

В заключение отметим, что представленные результаты могут быть использованы как в теоретических научных исследованиях, так и в инженерных расчетах, а также в образовательных программах по вычислительной математике. Итоги работы создают основу для дальнейшего развития спектральных методов, их адаптации к новым постановкам и интеграции в современные вычислительные комплексы.

Благодарности. Работа выполнена в рамках Государственной программы научных исследований «Конвергенция-2025», подпрограмма «Математические модели и методы», задание 1.4.01.2.

Acknowledgments. This work was supported by the State Program of Scientific Research “Convergence-2025”, subprogram “Mathematical models and methods”, task 1.4.01.2.

Список использованных источников

1. Голубев, В. В. Лекции по теории крыла / В. В. Голубев. – М.: Наука, 1949. – 480 с.
2. Габдулхаев, Б. Г. Прямые методы решения уравнения теории крыла / Б. Г. Габдулхаев // Известия высших учебных заведений. Математика. – 1974. – № 2. – С. 29–44.
3. Иванов, В. В. Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений / В. В. Иванов. – Киев: Наукова думка, 1968. – 287 с.
4. Elliott, D. A comprehensive approach to the approximate solution of singular integral equations over the arc $(-1,1)$ / D. Elliott // The Journal of Integral Equations and Applications. – 1989. – Vol. 2, № 1. – P. 59–94. <https://doi.org/10.1216/jie-1989-2-1-59>
5. Sahlan, M. N. Operational matrices of Chebyshev polynomials for solving singular Volterra integral equations / M. N. Sahlan, H. Feyzollahzadeh // Mathematical Sciences. – 2017. – Vol. 11, № 2. – P. 165–171. <https://doi.org/10.1007/s40096-017-0222-4>
6. Расолько, Г. А. Численное решение сингулярного интегро-дифференциального уравнения Прандтля методом ортогональных многочленов / Г. А. Расолько // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. – 2018. – № 3. – С. 68–74.
7. Расолько, Г. А. К численному решению сингулярного интегро-дифференциального уравнения Прандтля методом ортогональных многочленов / Г. А. Расолько // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. – 2019. – № 1. – С. 58–68. <https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-1-58-68>
8. Расолько, Г. А. Об одном методе численного решения некоторых сингулярных интегро-дифференциальных уравнений / Г. А. Расолько, С. М. Шешко, М. А. Шешко // Дифференциальные уравнения. – 2019. – Т. 55, № 9. – С. 1285–1292. <https://doi.org/10.1134/S0374064119090115>
9. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М.: Наука, 1973. – 297 с.
10. Мусхелишвили, Н. И. Сингулярные интегральные уравнения / Н. И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1968. – 513 с.
11. Rasolko, G. A. Chebyshev spectral method for one class of singular integro-differential equations / G. A. Rasolko, V. M. Volkov // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2025. – Vol. 65, № 2. – P. 339–348. <https://doi.org/10.1134/s0965542524701963>
12. Пашковский, С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева / С. Пашковский. – М.: Наука, 1983. – 384 с.
13. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – М.: Наука, 1989. – 543 с.
14. Ожегова, А. В. О сходимости в интегральной метрике приближенных решений обобщенного уравнения теории крыла / А. В. Ожегова, Л. А. Сурай // Вестник КГТУ им. А. Н. Туполева. – 2014. – № 1. – С. 64–67.

References

1. Golubev V. V. *Lectures on Wing Theory*. Moscow, Nauka Publ., 1949. 480 p. (in Russian).
2. Gabdulkaev B. G. Direct methods for solving the equation of wing theory. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Matematika = Russian Mathematics*, 1974, no. 2, pp. 29–44 (in Russian).

3. Ivanov V. V. *Theory of Approximate Methods and its Application to the Numerical Solution of Singular Integral Equations*. Kyiv, Naukova dumka Publ., 1968. 287 p. (in Russian).
4. Elliott D. A comprehensive approach to the approximate solution of singular integral equations over the arc $(-1,1)$. *The Journal of Integral Equations and Applications*, 1989, vol. 2, no. 1, pp. 59–94. <https://doi.org/10.1216/jie-1989-2-1-59>
5. Sahlan M. N., Feyzollahzadeh H. Operational matrices of Chebyshev polynomials for solving singular Volterra integral equations. *Mathematical Sciences*, 2017, vol. 11, no. 2, pp. 165–171. <https://doi.org/10.1007/s40096-017-0222-4>
6. Rasolko G. A. Numerical solution of singular integro-differential Prandtl equation by the method of orthogonal polynomials. *Zhurnal Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika. Informatika = Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*, 2018, no. 3, pp. 68–74 (in Russian).
7. Rasolko G. A. To the numerical solution of singular integro-differential Prandtl equation by the method of orthogonal polynomials. *Zhurnal Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika. Informatika = Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*, 2019, no. 1, pp. 58–68 (in Russian). <https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-1-58-68>
8. Rasolko G. A., Sheshko S. M., Sheshko M. A. Numerical Method for Some Singular Integro-Differential Equations. *Differential Equations*, 2019. vol. 55, no. 9, pp. 1242–1249. <https://doi.org/10.1134/S0012266119090118>
9. Bateman G., Erdelyi A. *Higher Transcendental Functions*. Moscow, Nauka Publ., 1973. 297 p. (in Russian).
10. Muskhelishvili N. I. *Singular Integral Equations*. Moscow, Nauka Publ., 1968. 513 p. (in Russian).
11. Rasolko G. A., Volkov V. M. Chebyshev spectral method for one class of singular integro-differential equations. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2025, vol. 65, no. 2, pp. 339–348. <https://doi.org/10.1134/s0965542524701963>
12. Pashkovsky S. *Computational Applications of Chebyshev Polynomials and Series*. Moscow, Nauka Publ., 1983. 384 p. (in Russian).
13. Kolmogorov A. N., Fomin S. V. *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*. Moscow, Nauka Publ., 1989. 543 p. (in Russian).
14. Ozhegova A. V., Surai L. A. On the convergence in the integral metric of approximate solutions of the generalized equation of wing theory. *Vestnik KGTU im. A. N. Tupoleva = Bulletin of KSTU named after A. N. Tupolev*, 2014. no. 1, pp. 64–67.

Информация об авторах

Расолько Галина Алексеевна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: rasolka@bsu.by. <https://orcid.org/0000-0002-4055-7343>

Волков Василий Михайлович – доктор физико-математических наук, доцент, главный научный сотрудник, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: volkov@tut.by. <https://orcid.org/0000-0003-0350-4186>

Игнатенко Марина Викторовна – кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой веб-технологий и компьютерного моделирования, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: ignatenkomv@bsu.by. <https://orcid.org/0000-0002-8029-1842>

Information about the authors

Galina A. Rasolka – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Associate Professor of Web-Technologies and Computer Simulation Department, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: rasolka@bsu.by. <https://orcid.org/0000-0002-4055-7343>

Vasily M. Volkov – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Chief Researcher, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Sarganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: volkov@tut.by. <https://orcid.org/0000-0003-0350-4186>

Marina V. Ignatenko – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Head of Web-Technologies and Computer Simulation Department, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: ignatenkomv@bsu.by. <https://orcid.org/0000-0002-8029-1842>