

ISSN 1561-2430 (Print)

ISSN 2524-2415 (Online)

УДК 517.956.25

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2026-62-1-27-37>

Поступила в редакцию 29.01.2026

Received 29.01.2026

Д. С. Жалукевич

Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ СЕМЕЙСТВ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Аннотация. Исследованы инфинитезимальные преобразования эквивалентности 16 семейств квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка функции двух переменных. Для семейств уравнений $u_{tt} + u_{xx} = f(t, x, u)$, $u_{tt} + u_{xx} = f(x, u)$ проведена симметричная редукция.

Ключевые слова: эллиптическое уравнение Клейна – Гордона, уравнение Брату, квазилинейные уравнения, преобразования эквивалентности, редукция дифференциальных уравнений

Для цитирования. Жалукевич, Д. С. Преобразования эквивалентности семейств квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка функции двух переменных / Д. С. Жалукевич // Весті Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. – 2026. – Т. 62, № 1. – С. 27–37. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2026-62-1-27-37>

Dzianis S. Zhalukevich

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus

EQUIVALENCE TRANSFORMATIONS OF FAMILIES OF QUASI-LINEAR ELLIPTIC EQUATIONS OF THE SECOND ORDER OF A FUNCTION OF TWO VARIABLES

Abstract. In this work, we search for infinitesimal equivalence transformations of 16 families of quasi-linear elliptic equations of the second order in two variables. A symmetry reduction has been performed for the families of equations $u_{tt} + u_{xx} = f(t, x, u)$, $u_{tt} + u_{xx} = f(x, u)$.

Keywords: elliptic Klein – Gordon equation, Bratu equation, quasi-linear equations, equivalence transformations, reduction of differential equations

For citation. Zhalukevich D. S. Equivalence transformations of families of quasi-linear elliptic equations of the second order of a function of two variables. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2026, vol. 62, no. 1, pp. 27–37 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2026-62-1-27-37>

Введение. В данной работе ищутся преобразования эквивалентности 16 семейств квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка функции двух переменных методом, рассмотренным в публикациях [1, 2].

Запишем общий вид квазилинейного эллиптического уравнения второго порядка функции двух переменных

$$u_{tt} + u_{xx} = f(t, x, u, u_t, u_x). \quad (1)$$

Среди эллиптических уравнений Клейна – Гордона (1) можно выделить следующие частные виды уравнений: уравнение Пуассона, уравнение Гельмгольца (стационарное уравнение Шредингера), нелинейное уравнение Гельмгольца, уравнение Брату, эллиптическое уравнение синус-Гордона, эллиптическое уравнение шинус-Гордона, стационарные гиперболические и параболические уравнения на плоскости (t, x) . Эти уравнения описывают стационарные процессы и применяются в науке и технике, на пример в таких областях, как дифференциальная геометрия, теория волн, квантовая теория поля, космология, гидро- и газодинамика, сверхпроводимость, дислокация кристаллов, волны в ферромагнитных материалах, нелинейная оптика, физика плазмы, физика низких температур и многих других.

Групповая классификация уравнений (1) была проведена в [3, 4], в данном же исследовании методом из работ [1, 2] изучены преобразования эквивалентности семейства 16 уравнений:

$$\begin{aligned} u_{tt} + u_{xx} &= f(t, x, u, u_t, u_x), & u_{tt} + u_{xx} &= f(x, u, u_t, u_x), & u_{tt} + u_{xx} &= f(t, x, u_t, u_x), \\ u_{tt} + u_{xx} &= f(t, x, u, u_x), & u_{tt} + u_{xx} &= f(u, u_t, u_x), & u_{tt} + u_{xx} &= f(x, u_t, u_x), \\ u_{tt} + u_{xx} &= f(x, u, u_x), & u_{tt} + u_{xx} &= f(x, u, u_t), & u_{tt} + u_{xx} &= f(t, x, u_x), \\ u_{tt} + u_{xx} &= f(t, x, u), & u_{tt} + u_{xx} &= f(u_t, u_x), & u_{tt} + u_{xx} &= f(u, u_x), \\ u_{tt} + u_{xx} &= f(x, u_x), & u_{tt} + u_{xx} &= f(x, u_t), & u_{tt} + u_{xx} &= f(x, u), & u_{tt} + u_{xx} &= f(u), \end{aligned}$$

а также проведена редукция для семейств уравнений

$$u_{tt} + u_{xx} = f(t, x, u), \quad u_{tt} + u_{xx} = f(x, u).$$

В [5–7] был выполнен симметричный анализ преобразований эквивалентности для нелинейных волновых уравнений $u_{tt} - u_{xx} = f(u, u_t, u_x)$. Групповая классификация семейств квазилинейных гиперболических уравнений $u_{tt} - u_{xx} = f(t, x, u, u_t, u_x)$ и их подклассов была решена в [8–15].

Вычисление инфинитезимальных точечных симметрий. Преобразования эквивалентности для семейства уравнения (1) имеют вид

$$\tilde{t} = T(t, x, u, \varepsilon), \quad \tilde{x} = X(t, x, u, \varepsilon), \quad \tilde{u} = U(t, x, u, \varepsilon), \quad \tilde{f} = F(t, x, u, u_t, u_x, f, \varepsilon), \quad (2)$$

где $\varepsilon \in \mathbb{R}$.

Построение группы преобразований эквивалентности сводится к определению ее инфинитезимальных преобразований

$$\tilde{t} = t + \varepsilon \tau(t, x, u) + o(\varepsilon), \quad (3)$$

$$\tilde{x} = x + \varepsilon \xi(t, x, u) + o(\varepsilon), \quad (4)$$

$$\tilde{u} = u + \varepsilon \eta(t, x, u) + o(\varepsilon), \quad (5)$$

$$\tilde{f}(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{u}_{\tilde{t}}, \tilde{u}_{\tilde{x}}) = f(t, x, u, u_t, u_x) + \varepsilon \Phi(t, x, u, u_t, u_x, f) + o(\varepsilon). \quad (6)$$

Инфинитезимальные преобразования для производных u_t, u_x, u_{tx} имеют вид

$$\tilde{u}_{\tilde{t}} = u_t + \varepsilon \Gamma_0 + o(\varepsilon), \quad (7)$$

$$\tilde{u}_{\tilde{x}} = u_x + \varepsilon \Gamma_1 + o(\varepsilon), \quad (8)$$

$$\tilde{u}_{\tilde{t}\tilde{t}} = u_{tt} + \varepsilon \Gamma_{00} + o(\varepsilon), \quad (9)$$

$$\tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}} = u_{xx} + \varepsilon \Gamma_{11} + o(\varepsilon). \quad (10)$$

Явные формулы продолжения для инфинитезимальных преобразований производных (7)–(10) имеют вид

$$\Gamma_0 = D_t(\eta) - D_t(\tau)u_t - D_t(\xi)u_x, \quad (11)$$

$$\Gamma_1 = D_x(\eta) - D_x(\tau)u_t - D_x(\xi)u_x, \quad (12)$$

$$\Gamma_{00} = D_{tt}(\eta) - D_{tt}(\tau)u_t - 2D_t(\tau)u_{tt} - D_{tt}(\xi)u_x - 2D_t(\xi)u_{tx}, \quad (13)$$

$$\Gamma_{11} = D_{xx}(\eta) - D_{xx}(\tau)u_t - 2D_x(\tau)u_{tx} - D_{xx}(\xi)u_x - 2D_x(\xi)u_{xx}, \quad (14)$$

где

$$D_t = \partial_t + u_t \partial_u, \quad (15)$$

$$D_x = \partial_x + u_x \partial_u, \quad (16)$$

$$D_{tt} = \partial_t^2 + 2u_t \partial_{tu} + u_{tt} \partial_u + u_t^2 \partial_u^2, \quad (17)$$

$$D_{xx} = \partial_x^2 + 2u_x \partial_{xu} + u_{xx} \partial_u + u_x^2 \partial_u^2. \quad (18)$$

Лемма 1. *Инфинитезимальные преобразования эквивалентности семейств уравнений $u_{tt} + u_{xx} = f(t, x, u, u_t, u_x)$ принадлежат следующей (бесконечномерной) алгебре Ли векторных полей:*

$$X = \tau(t, x) \frac{\partial}{\partial t} + \xi(t, x) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(t, x, u) \frac{\partial}{\partial u},$$

где $\tau_t = \xi_x$, $\tau_x = -\xi_t$, а функция $\eta(t, x, u)$ является произвольной.

Доказательство. В выражениях (13) и (14) коэффициент равен нулю при u_{tx} , т. е. $D_t(\xi) + D_x(\tau) = \xi_t + \xi_u u_t + \tau_x + \tau_u u_x = 0$. Значит, $\tau_x + \xi_t = 0$, $\tau_u = \xi_u = 0$. Следовательно, $\tau(t, x)$, $\xi(t, x)$, $\eta(t, x, u)$.

Исходя из леммы 1, выражения (11)–(14) для уравнения (1) имеют вид

$$\Gamma_0 = D_t(\eta) - \tau_t u_t - \xi_t u_x, \quad (19)$$

$$\Gamma_1 = D_x(\eta) - \tau_x u_t - \xi_x u_x, \quad (20)$$

$$\Gamma_{00} = D_{tt}(\eta) - \tau_{tt} u_t - 2\tau_{t u_t} - \xi_{tt} u_x, \quad (21)$$

$$\Gamma_{11} = D_{xx}(\eta) - \tau_{xx} u_t - \xi_{xx} u_x - 2\xi_{x u_{xx}}. \quad (22)$$

Первое и второе продолжения векторного поля X для уравнений (1) имеют вид

$$X^{(1)} = X + \Gamma_0 \frac{\partial}{\partial u_t} + \Gamma_1 \frac{\partial}{\partial u_x}, \quad (23)$$

$$X^{(2)} = X^{(1)} + \Gamma_{00} \frac{\partial}{\partial u_{tt}} + \Gamma_{11} \frac{\partial}{\partial u_{xx}}. \quad (24)$$

Поддействовав оператором (24) на уравнение $J = u_{tt} + u_{xx} - f(t, x, u, u_t, u_x)$, т. е. $X^{(2)}(J) = 0$, получим определяющее уравнение для точечных симметрий

$$\Gamma_{00} + \Gamma_{11} = \tau f_t + \xi f_x + \eta f_u + \Gamma_0 f_{u_t} + \Gamma_1 f_{u_x}. \quad (25)$$

Подставив (19)–(22) в определяющее уравнение (25), получим

$$\begin{aligned} & D_{tt}(\eta) + D_{xx}(\eta) - \Delta \tau u_t - \Delta \xi u_x - 2\tau_{t u_{tt}} - 2\xi_{x u_{xx}} = \\ & = \tau f_t + \xi f_x + \eta f_u + (D_t(\eta) - \tau_t u_t - \xi_t u_x) f_{u_t} + (D_x(\eta) - \tau_x u_t - \xi_x u_x) f_{u_x}, \end{aligned} \quad (26)$$

где $\Delta = \partial_t^2 + \partial_x^2$.

Подставив (15)–(18), (1) в (26), получим

$$\begin{aligned} & \Delta \eta + 2\eta_{tu_t} + 2\eta_{xu_x} + \eta_{uu} (u_t^2 + u_x^2) + (\eta_u - 2\tau_t) f = \\ & = \tau f_t + \xi f_x + \eta f_u + (\eta_t + (\eta_u - \tau_t) u_t - \xi_t u_x) f_{u_t} + (\eta_x - \tau_x u_t + (\eta_u - \xi_x) u_x) f_{u_x}, \end{aligned} \quad (27)$$

где функции τ и ξ удовлетворяют условиям Коши – Римана

$$\tau_t = \xi_x, \tau_x = -\xi_t. \quad (28)$$

Лемма доказана.

Используя лемму 1 и выражения (27), (28), можно вычислять точечные симметрии для подклассов уравнений (1). Однако в данной работе мы не будем этого делать, а далее перейдем к вычислению преобразований эквивалентности.

Вычисление инфинитезимальных преобразований эквивалентности семейств уравнений. Перейдем к описанию инфинитезимальных преобразований эквивалентности семейств уравнений (1) и его подклассов, рассмотренных в [1, 2]. На основании леммы 1 и выражений (19)–(23) запишем векторное поле для преобразования эквивалентности семейств уравнений (1) в виде

$$Y = X^{(1)} + \Phi \frac{\partial}{\partial f}, \quad (29)$$

где векторное поле X определено в лемме 1, а

$$\Phi = \Delta\eta + 2\eta_{tu}u_t + 2\eta_{xu}u_x + \eta_{uu}(u_t^2 + u_x^2) + (\eta_u - 2\tau_t)f, \quad (30)$$

где $\Delta = \partial_t^2 + \partial_x^2$.

Тогда можно переформулировать лемму 1 следующим образом.

Лемма 2. *Инфинитезимальные преобразования эквивалентности семейств уравнений $u_{tt} + u_{xx} = f(t, x, u, u_t, u_x)$ порождаются векторными полями*

$$Y = \tau(t, x) \frac{\partial}{\partial t} + \xi(t, x) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(t, x, u) \frac{\partial}{\partial u} + \left(\Delta\eta + 2\eta_{tu}u_t + 2\eta_{xu}u_x + \eta_{uu}(u_t^2 + u_x^2) + \right. \\ \left. + (\eta_u - 2\tau_t)f \right) \frac{\partial}{\partial f} + (\eta_t + (\eta_u - \tau_t)u_t - \xi_t u_x) \frac{\partial}{\partial u_t} + (\eta_x - \tau_x u_t + (\eta_u - \xi_x)u_x) \frac{\partial}{\partial u_x},$$

где $\tau_t = \xi_x$, $\tau_x = -\xi_t$, а функция $\eta(t, x, u)$ является произвольной.

Продолжение векторного поля Y на пространство 1-струй функции $f(t, x, u, u_t, u_x)$ имеет вид

$$Y^{(1)} = Y + \Phi_1 \frac{\partial}{\partial f_t} + \Phi_2 \frac{\partial}{\partial f_x} + \Phi_3 \frac{\partial}{\partial f_u} + \Phi_4 \frac{\partial}{\partial f_{u_t}} + \Phi_5 \frac{\partial}{\partial f_{u_x}}, \quad (31)$$

где

$$\Phi_1 = \Delta\eta_t + 2\eta_{tuu}u_t + 2\eta_{txu}u_x + \eta_{tuu}(u_t^2 + u_x^2) + (\eta_{tu} - 2\tau_{tt})f + (2\eta_u - 5\tau_t)f_t - \\ - \xi_t f_x - \eta_t f_u - (\eta_{tt} + (\eta_{tu} - \tau_{tt})u_t - \xi_{tt}u_x)f_{u_t} - (\eta_{tx} - \tau_{tx}u_t + (\eta_{tu} - \xi_{tx})u_x)f_{u_x}, \quad (32)$$

$$\Phi_2 = \Delta\eta_x + 2\eta_{txu}u_t + 2\eta_{xxu}u_x + \eta_{xuu}(u_t^2 + u_x^2) + (\eta_{xu} - 2\tau_{tx})f - \tau_x f_t + (2\eta_u - 4\tau_t - \xi_x)f_x - \\ - \eta_x f_u - (\eta_{tx} + (\eta_{xu} - \tau_{tx})u_t - \xi_{tx}u_x)f_{u_t} - (\eta_{xx} - \tau_{xx}u_t + (\eta_{xu} - \xi_{xx})u_x)f_{u_x}, \quad (33)$$

$$\Phi_3 = \Delta\eta_u + 2\eta_{uuu}u_t + 2\eta_{xuu}u_x + \eta_{uuu}(u_t^2 + u_x^2) + \eta_{uu}f + \\ + (\eta_u - 4\tau_t)f_u - (\eta_{tu} + \eta_{uu}u_t)f_{u_t} - (\eta_{xu} + \eta_{uu}u_x)f_{u_x}, \quad (34)$$

$$\Phi_4 = 2\eta_{tu} + 2\eta_{uu}u_t - \tau_t f_{u_t} + \tau_x f_{u_x}, \quad (35)$$

$$\Phi_5 = 2\eta_{xu} + 2\eta_{uu}u_x + \xi_t f_{u_t} + (\xi_x - 2\tau_t)f_{u_x}. \quad (36)$$

Рассмотрим для семейств уравнений (1) те же классы уравнений, что и в [1, 2], а результат вычислений векторных полей занесем в табл. 1.

Таблица 1. Векторные поля преобразований эквивалентности

Table 1. Vector fields of equivalence transformations

№	$u_{tt} + u_{xx} = f(t, x, u, u_t, u_x)$	$Y = \sum_i \mu_i Y_i$
1	$f = f(x, u, u_t, u_x)$	$Y_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y_3 = t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} - 2f \frac{\partial}{\partial f} - u_t \frac{\partial}{\partial u_t} - u_x \frac{\partial}{\partial u_x},$ $Y_\infty = \eta(x, u) \frac{\partial}{\partial u} + \left(\eta_{xx} + 2\eta_{xu}u_x + \eta_{uu}(u_t^2 + u_x^2) + \eta_u f \right) \frac{\partial}{\partial f} + \eta_u u_t \frac{\partial}{\partial u_t} + (\eta_x + \eta_u u_x) \frac{\partial}{\partial u_x}$
2	$f = f(t, x, u_t, u_x),$ $f = f(t, x, u)$	$Y_1 = u \frac{\partial}{\partial u} + f \frac{\partial}{\partial f} + u_t \frac{\partial}{\partial u_t} + u_x \frac{\partial}{\partial u_x},$ $Y_\infty = \tau(t, x) \frac{\partial}{\partial t} + \xi(t, x) \frac{\partial}{\partial x} + \beta(t, x) \frac{\partial}{\partial u} + (\Delta\beta - 2\tau_t f) \frac{\partial}{\partial f} +$ $+ (\beta_t - \tau_t u_t - \xi_t u_x) \frac{\partial}{\partial u_t} + (\beta_x - \tau_x u_t - \xi_x u_x) \frac{\partial}{\partial u_x}, \quad \tau_t = \xi_x, \quad \tau_x = -\xi_t$

Продолжение табл. 1

№	$u_{tt} + u_{xx} = f(t, x, u, u_t, u_x)$	$Y = \sum_i u_i Y_i$
3	$f = f(t, x, u, u_x)$	$Y_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y_3 = t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} - 2f \frac{\partial}{\partial f} - u_t \frac{\partial}{\partial u_t} - u_x \frac{\partial}{\partial u_x},$ $Y_\infty = (\alpha(x)u + \beta(t, x)) \frac{\partial}{\partial u} + (\Delta\beta + \alpha''u + 2\alpha'u_x + \alpha f) \frac{\partial}{\partial f} + (\beta_t + \alpha u_t) \frac{\partial}{\partial u_t} + (\alpha'u + \beta_x + \alpha u_x) \frac{\partial}{\partial u_x}$
4	$f = f(u, u_t, u_x)$	$Y_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y_3 = t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} - 2f \frac{\partial}{\partial f} - u_t \frac{\partial}{\partial u_t} - u_x \frac{\partial}{\partial u_x}, \quad Y_4 = x \frac{\partial}{\partial t} - t \frac{\partial}{\partial x} + u_x \frac{\partial}{\partial u_t} - u_t \frac{\partial}{\partial u_x},$ $Y_\infty = \eta(u) \frac{\partial}{\partial u} + \left(\eta^{(2)}(u_t^2 + u_x^2) + \eta^{(1)}f \right) \frac{\partial}{\partial f} + \eta^{(1)}u_t \frac{\partial}{\partial u_t} + \eta^{(1)}u_x \frac{\partial}{\partial u_x}$
5	$f = f(x, u_t, u_x)$	$Y_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y_3 = \frac{\partial}{\partial u}, \quad Y_4 = t \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u_t}, \quad Y_5 = t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} - 2f \frac{\partial}{\partial f} - u_t \frac{\partial}{\partial u_t} - u_x \frac{\partial}{\partial u_x},$ $Y = u \frac{\partial}{\partial u} + f \frac{\partial}{\partial f} + u_t \frac{\partial}{\partial u_t} + u_x \frac{\partial}{\partial u_x}, \quad Y_\infty = \beta(x) \frac{\partial}{\partial u} + \beta'' \frac{\partial}{\partial f} + \beta' \frac{\partial}{\partial u_x}$
6	$f = f(x, u, u_x)$	$Y_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y_3 = t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} - 2f \frac{\partial}{\partial f} - u_t \frac{\partial}{\partial u_t} - u_x \frac{\partial}{\partial u_x},$ $Y_\infty = (\alpha(x)u + \beta(x)) \frac{\partial}{\partial u} + (\alpha''u + \beta'' + 2\alpha'u_x + \alpha f) \frac{\partial}{\partial f} + \alpha u_t \frac{\partial}{\partial u_t} + (\alpha'u + \beta' + \alpha u_x) \frac{\partial}{\partial u_x}$
7	$f = f(x, u, u_t),$ $f = f(x, u)$	$Y_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y_3 = t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} - 2f \frac{\partial}{\partial f} - u_t \frac{\partial}{\partial u_t} - u_x \frac{\partial}{\partial u_x},$ $Y_4 = u \frac{\partial}{\partial u} + f \frac{\partial}{\partial f} + u_t \frac{\partial}{\partial u_t} + u_x \frac{\partial}{\partial u_x}, \quad Y_\infty = \beta(x) \frac{\partial}{\partial u} + \beta'' \frac{\partial}{\partial f} + \beta' \frac{\partial}{\partial u_x}$
8	$f = f(t, x, u_x)$	$Y_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y_3 = t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} - 2f \frac{\partial}{\partial f} - u_t \frac{\partial}{\partial u_t} - u_x \frac{\partial}{\partial u_x},$ $Y_4 = u \frac{\partial}{\partial u} + f \frac{\partial}{\partial f} + u_t \frac{\partial}{\partial u_t} + u_x \frac{\partial}{\partial u_x}, \quad Y_\infty = \beta(t, x) \frac{\partial}{\partial u} + \Delta\beta \frac{\partial}{\partial f} + \beta_t \frac{\partial}{\partial u_t} + \beta_x \frac{\partial}{\partial u_x}$
9	$f = f(u_t, u_x)$	$Y_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y_3 = t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} - 2f \frac{\partial}{\partial f} - u_t \frac{\partial}{\partial u_t} - u_x \frac{\partial}{\partial u_x}, \quad Y_4 = x \frac{\partial}{\partial t} - t \frac{\partial}{\partial x} + u_x \frac{\partial}{\partial u_t} - u_t \frac{\partial}{\partial u_x},$ $Y_5 = \frac{\partial}{\partial u}, \quad Y_6 = t \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u_t}, \quad Y_7 = x \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u_x}, \quad Y_8 = u \frac{\partial}{\partial u} + f \frac{\partial}{\partial f} + u_t \frac{\partial}{\partial u_t} + u_x \frac{\partial}{\partial u_x}$
10	$f = f(u, u_x)$	$Y_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y_3 = t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} - 2f \frac{\partial}{\partial f} - u_t \frac{\partial}{\partial u_t} - u_x \frac{\partial}{\partial u_x}, \quad Y_4 = \frac{\partial}{\partial u},$ $Y_5 = u \frac{\partial}{\partial u} + f \frac{\partial}{\partial f} + u_t \frac{\partial}{\partial u_t} + u_x \frac{\partial}{\partial u_x}$
11	$f = f(x, u_x)$	$Y_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y_3 = t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} - 2f \frac{\partial}{\partial f} - u_t \frac{\partial}{\partial u_t} - u_x \frac{\partial}{\partial u_x}, \quad Y_4 = \frac{\partial}{\partial u},$ $Y_5 = u \frac{\partial}{\partial u} + f \frac{\partial}{\partial f} + u_t \frac{\partial}{\partial u_t} + u_x \frac{\partial}{\partial u_x}, \quad Y_6 = t \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u_t}, \quad Y_7 = t^2 \frac{\partial}{\partial u} + 2 \frac{\partial}{\partial f} + 2t \frac{\partial}{\partial u_t},$ $Y_\infty = \beta(x) \frac{\partial}{\partial u} + \beta'' \frac{\partial}{\partial f} + \beta' \frac{\partial}{\partial u_x}$
12	$f = f(x, u_t)$	$Y_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y_3 = t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} - 2f \frac{\partial}{\partial f} - u_t \frac{\partial}{\partial u_t} - u_x \frac{\partial}{\partial u_x}, \quad Y_4 = u \frac{\partial}{\partial u} + f \frac{\partial}{\partial f} + u_t \frac{\partial}{\partial u_t} + u_x \frac{\partial}{\partial u_x},$ $Y_5 = t \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u_t}, \quad Y_6 = tx \frac{\partial}{\partial u} + x \frac{\partial}{\partial u_t} + t \frac{\partial}{\partial u_x}, \quad Y_\infty = \beta(x) \frac{\partial}{\partial u} + \beta'' \frac{\partial}{\partial f} + \beta' \frac{\partial}{\partial u_x}$

Окончание табл. 1

№	$u_{tt} + u_{xx} = f(t, x, u, u_t, u_x)$	$Y = \sum_i \mu_i Y_i$
13	$f = f(u)$	$Y_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y_3 = t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} - 2f \frac{\partial}{\partial f} - u_t \frac{\partial}{\partial u_t} - u_x \frac{\partial}{\partial u_x}, \quad Y_4 = \frac{\partial}{\partial u},$ $Y_5 = x \frac{\partial}{\partial t} - t \frac{\partial}{\partial x} + u_x \frac{\partial}{\partial u_t} - u_t \frac{\partial}{\partial u_x}, \quad Y_6 = u \frac{\partial}{\partial u} + f \frac{\partial}{\partial f} + u_t \frac{\partial}{\partial u_t} + u_x \frac{\partial}{\partial u_x}$

Вычисление специальных инфинитезимальных преобразований эквивалентности семейств уравнений. Предположим теперь, что $\Phi(t, x, u, u_t, u_x, f)$ в выражении (6) не зависит от f , т. е. перейдем к вычислению специальных преобразований эквивалентности. Тогда на основании леммы 2 и условия $\eta_u = 2\tau_t$ получим следующую лемму.

Лемма 3. Инфинитезимальные специальные преобразования эквивалентности семейств уравнений $u_{tt} + u_{xx} = f(t, x, u, u_t, u_x)$ порождаются векторными полями

$$Y = \tau(t, x) \frac{\partial}{\partial t} + \xi(t, x) \frac{\partial}{\partial x} + (2\tau_t u + \beta(t, x)) \frac{\partial}{\partial u} + (2\Delta\tau_t u + \Delta\beta + 4\tau_{tt} u_t + 4\tau_{tx} u_x) \frac{\partial}{\partial f} +$$

$$+ (2\tau_{tt} u + \beta_t + \tau_t u_t - \xi_t u_x) \frac{\partial}{\partial u_t} + (2\tau_{tx} u + \beta_x - \tau_x u_t + \xi_x u_x) \frac{\partial}{\partial u_x},$$

где $\tau_t = \xi_x$, $\tau_x = -\xi_t$, а функция $\beta(t, x)$ является произвольной.

Рассмотрим частные случаи семейств уравнений (1), что и в пункте 3, результат занесем в табл. 2.

Таблица 2. Векторные поля специальных преобразований эквивалентности

Table 2. Vector fields of special equivalence transformations

№	$u_{tt} + u_{xx} = f(t, x, u, u_t, u_x)$	$Y = \sum_i \mu_i Y_i$
1	$f = f(x, u, u_t, u_x),$ $f = f(x, u, u_x),$ $f = f(x, u, u_t),$ $f = f(x, u)$	$Y_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y_3 = t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} + 2u \frac{\partial}{\partial u} + u_t \frac{\partial}{\partial u_t} + u_x \frac{\partial}{\partial u_x},$ $Y_\infty = \beta(x) \frac{\partial}{\partial u} + \beta'' \frac{\partial}{\partial f} + \beta' \frac{\partial}{\partial u_x}$
2	$f = f(t, x, u_t, u_x),$ $f = f(t, x, u)$	$Y_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y_3 = t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} + 2u \frac{\partial}{\partial u} + u_t \frac{\partial}{\partial u_t} + u_x \frac{\partial}{\partial u_x},$ $Y_4 = x \frac{\partial}{\partial t} - t \frac{\partial}{\partial x} + u_x \frac{\partial}{\partial u_t} - u_t \frac{\partial}{\partial u_x}, \quad Y_\infty = \beta(t, x) \frac{\partial}{\partial u} + \Delta\beta \frac{\partial}{\partial f} + \beta_t \frac{\partial}{\partial u_t} + \beta_x \frac{\partial}{\partial u_x}$
3	$f = f(t, x, u, u_x),$ $f = f(t, x, u_x)$	$Y_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y_3 = t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} + 2u \frac{\partial}{\partial u} + u_t \frac{\partial}{\partial u_t} + u_x \frac{\partial}{\partial u_x},$ $Y_\infty = \beta(t, x) \frac{\partial}{\partial u} + \Delta\beta \frac{\partial}{\partial f} + \beta_t \frac{\partial}{\partial u_t} + \beta_x \frac{\partial}{\partial u_x}$
4	$f = f(u, u_t, u_x),$ $f = f(u)$	$Y_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y_3 = t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} + 2u \frac{\partial}{\partial u} + u_t \frac{\partial}{\partial u_t} + u_x \frac{\partial}{\partial u_x},$ $Y_4 = x \frac{\partial}{\partial t} - t \frac{\partial}{\partial x} + u_x \frac{\partial}{\partial u_t} - u_t \frac{\partial}{\partial u_x}, \quad Y_5 = \frac{\partial}{\partial u}$
5	$f = f(x, u_t, u_x)$	$Y_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y_3 = t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} + 2u \frac{\partial}{\partial u} + u_t \frac{\partial}{\partial u_t} + u_x \frac{\partial}{\partial u_x},$ $Y_4 = \frac{\partial}{\partial u}, \quad Y_5 = t \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u_t}, \quad Y_\infty = \beta(x) \frac{\partial}{\partial u} + \beta'' \frac{\partial}{\partial f} + \beta' \frac{\partial}{\partial u_x}$

Окончание табл. 2

№	$u_{tt} + u_{xx} = f(t, x, u, u_t, u_x)$	$Y = \sum_i \mu_i Y_i$
6	$f = f(u_t, u_x)$	$Y_1 = \frac{\partial}{\partial t}, Y_2 = \frac{\partial}{\partial x}, Y_3 = t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} + 2u \frac{\partial}{\partial u} + u_t \frac{\partial}{\partial u_t} + u_x \frac{\partial}{\partial u_x},$ $Y_4 = x \frac{\partial}{\partial t} - t \frac{\partial}{\partial x} + u_x \frac{\partial}{\partial u_t} - u_t \frac{\partial}{\partial u_x}, Y_5 = \frac{\partial}{\partial u}, Y_6 = t \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u_t}, Y_7 = x \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u_x}$
7	$f = f(u, u_x)$	$Y_1 = \frac{\partial}{\partial t}, Y_2 = \frac{\partial}{\partial x}, Y_3 = t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} + 2u \frac{\partial}{\partial u} + u_t \frac{\partial}{\partial u_t} + u_x \frac{\partial}{\partial u_x}, Y_4 = \frac{\partial}{\partial u}$
8	$f = f(x, u_x)$	$Y_1 = \frac{\partial}{\partial t}, Y_2 = \frac{\partial}{\partial x}, Y_3 = t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} + 2u \frac{\partial}{\partial u} + u_t \frac{\partial}{\partial u_t} + u_x \frac{\partial}{\partial u_x}, Y_4 = \frac{\partial}{\partial u},$ $Y_5 = t \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u_t}, Y_6 = t^2 \frac{\partial}{\partial u} + 2 \frac{\partial}{\partial f} + 2t \frac{\partial}{\partial u_t}, Y_\infty = \beta(x) \frac{\partial}{\partial u} + \beta'' \frac{\partial}{\partial f} + \beta' \frac{\partial}{\partial u_x}$
9	$f = f(x, u_t)$	$Y_1 = \frac{\partial}{\partial t}, Y_2 = \frac{\partial}{\partial x}, Y_3 = t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} + 2u \frac{\partial}{\partial u} + u_t \frac{\partial}{\partial u_t} + u_x \frac{\partial}{\partial u_x},$ $Y_4 = t \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u_t}, Y_5 = tx \frac{\partial}{\partial u} + x \frac{\partial}{\partial u_t} + t \frac{\partial}{\partial u_x}, Y_\infty = \beta(x) \frac{\partial}{\partial u} + \beta'' \frac{\partial}{\partial f} + \beta' \frac{\partial}{\partial u_x}$

Симметричная редукция преобразований эквивалентности. Из табл. 1 видно, что уравнение $u_{tt} + u_{xx} = f(x, u)$ обладает бесконечномерной алгеброй эквивалентности. Эта бесконечномерная алгебра эквивалентности является подалгеброй эквивалентности для уравнения $u_{tt} + u_{xx} = f(t, x, u)$. Исходя из табл. 1, для уравнения $u_{tt} + u_{xx} = f(x, u)$ выберем следующую пятимерную подалгебру:

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y_3 = \frac{\partial}{\partial u},$$

$$Y_4 = u \frac{\partial}{\partial u} + f \frac{\partial}{\partial f} + u_t \frac{\partial}{\partial u_t} + u_x \frac{\partial}{\partial u_x}, \quad Y_5 = t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} - 2f \frac{\partial}{\partial f} - u_t \frac{\partial}{\partial u_t} - u_x \frac{\partial}{\partial u_x}.$$

На основании этого проведем редукцию для следующего уравнения:

$$u_{tt} + u_{xx} = f(t, x, u). \quad (37)$$

Общая симметрия уравнения (37) запишется в виде

$$Y = (\mu_1 + \mu_5 t) \frac{\partial}{\partial t} + (\mu_2 + \mu_5 x) \frac{\partial}{\partial x} + (\mu_3 + \mu_4 u) \frac{\partial}{\partial u} + (\mu_4 - 2\mu_5) f \frac{\partial}{\partial f} +$$

$$+ (\mu_4 - \mu_5) u_t \frac{\partial}{\partial u_t} + (\mu_4 - \mu_5) u_x \frac{\partial}{\partial u_x},$$

где $\mu_i = \text{const}$, $i = \overline{1, 5}$. Таким образом, инвариантные относительно Y решения задаются следующим уравнением характеристик:

$$\frac{dt}{\mu_1 + \mu_5 t} = \frac{dx}{\mu_2 + \mu_5 x} = \frac{du}{\mu_3 + \mu_4 u} = \frac{df}{(\mu_4 - 2\mu_5) f} = \frac{du_t}{(\mu_4 - \mu_5) u_t} = \frac{du_x}{(\mu_4 - \mu_5) u_x}. \quad (38)$$

Приведем примеры симметричных редукций, определяя при этом для заданной одномерной подалгебры в алгебре симметрий уравнения, допускающие эту одномерную подалгебру в качестве симметрий, а также соответствующее редуцированное уравнение, которое в одном случае является обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка.

1. Рассмотрим генератор $Y = Y_1 + \nu Y_4$, $\nu = \text{const}$, $\nu \neq 0$. Решая уравнения характеристик (38) для Y , получим следующие инварианты: $I_1 = x$, $I_2 = e^{-\nu t} u$, $I_3 = e^{-\nu t} f$. Положим $I_3 = g(I_1, I_2)$, тогда для функции f получим условие $f = e^{\nu t} g(x, e^{-\nu t} u)$, а уравнение (37) примет вид

$$u_{tt} + u_{xx} = e^{\upsilon t} g(x, e^{-\upsilon t} u). \quad (39)$$

Далее положим, что $I_2 = y(I_1)$, и получим замену вида

$$u = e^{\upsilon t} y(x). \quad (40)$$

Подставив (40) в уравнение (39), получим

$$y'' = -\upsilon^2 y + g(x, y). \quad (41)$$

2. Рассмотрим генератор $Y = \upsilon Y_3 + Y_5$, $\upsilon = \text{const}$. Решая уравнения характеристик (38) для Y , получим следующие инварианты: $I_1 = \frac{x}{t}$, $I_2 = u - \upsilon \ln t$, $I_3 = t^2 f$. Положим $I_3 = g(I_1, I_2)$, тогда для функции f получим условие $f = t^{-2} g\left(\frac{x}{t}, u - \upsilon \ln t\right)$, а уравнение (37) примет вид

$$u_{tt} + u_{xx} = t^{-2} g\left(\frac{x}{t}, u - \upsilon \ln t\right). \quad (42)$$

Далее положим, что $I_2 = y(I_1)$, и получим замену вида

$$u = \upsilon \ln t + y(z), \quad z = \frac{x}{t}. \quad (43)$$

Подставив (43) в уравнение (42), получим

$$y^{(2)} = -\frac{2z}{1+z^2} y^{(1)} + \frac{g(z, y) + \upsilon}{1+z^2}. \quad (44)$$

3. Рассмотрим генератор $Y = \upsilon Y_4 + Y_5$, $\upsilon = \text{const}$. Решая уравнения характеристик (38) для Y , получим следующие инварианты: $I_1 = \frac{x}{t}$, $I_2 = t^{-\upsilon} u$, $I_3 = t^{2-\upsilon} f$. Положим $I_3 = g(I_1, I_2)$, тогда для функции f получим условие $f = t^{\upsilon-2} g\left(\frac{x}{t}, t^{-\upsilon} u\right)$, а уравнение (37) примет вид

$$u_{tt} + u_{xx} = t^{\upsilon-2} g\left(\frac{x}{t}, t^{-\upsilon} u\right). \quad (45)$$

Далее положим, что $I_2 = y(I_1)$, и получим замену вида

$$u = t^{\upsilon} y(z), \quad z = \frac{x}{t}. \quad (46)$$

Подставив (46) в уравнение (45), получим

$$y^{(2)} = \frac{2(\upsilon-1)z}{1+z^2} y^{(1)} + \frac{g(z, y) - \upsilon(\upsilon-1)y}{1+z^2}. \quad (47)$$

4. Рассмотрим генератор $Y = Y_1 + \upsilon Y_2 + \mu Y_3$, $\upsilon = \text{const}$, $\upsilon \neq 0$, $\mu = \text{const}$. Решая уравнения характеристик (38) для Y , получим следующие инварианты: $I_1 = x - \upsilon t$, $I_2 = u - \mu t$, $I_3 = f$. Положим $I_3 = g(I_1, I_2)$, тогда для функции f получим условие $f = g(x - \upsilon t, u - \mu t)$, а уравнение (37) примет вид

$$u_{tt} + u_{xx} = g(x - \upsilon t, u - \mu t). \quad (48)$$

Далее положим, что $I_2 = y(I_1)$, и получим замену вида

$$u = \mu t + y(z), \quad z = x - \upsilon t. \quad (49)$$

Подставив (49) в уравнение (48), получим

$$y^{(2)} = \frac{g(z, y)}{1+\upsilon^2}. \quad (50)$$

5. Рассмотрим генератор $Y = Y_1 + \upsilon Y_2 + \mu Y_4$, $\upsilon = \text{const}$, $\upsilon \neq 0$, $\mu = \text{const}$. Решая уравнения характеристик (38) для Y , получим следующие инварианты: $I_1 = x - \upsilon t$, $I_2 = e^{-\mu t} u$, $I_3 = e^{-\mu t} f$. Положим $I_3 = g(I_1, I_2)$, тогда для функции f получим условие $f = e^{\mu t} g(x - \upsilon t, e^{-\mu t} u)$, а уравнение (37) примет вид

$$u_{tt} + u_{xx} = e^{\mu t} g(x - \upsilon t, e^{-\mu t} u). \quad (51)$$

Далее положим, что $I_2 = y(I_1)$, и получим замену вида

$$u = e^{\mu t} y(z), \quad z = x - \upsilon t. \quad (52)$$

Подставив (52) в уравнение (51), получим уравнение

$$y^{(2)} = \frac{2\mu\upsilon}{1+\upsilon^2} y^{(1)} + \frac{g(z, y) - \mu^2 y}{1+\upsilon^2}. \quad (53)$$

Вышеизложенный результат вычислений (39)–(53) занесем в табл. 3.

Таблица 3. Редукция уравнений $u_{tt} + u_{xx} = f(t, x, u)$

Table 3. Reduction of equations $u_{tt} + u_{xx} = f(t, x, u)$

№	$Y = \sum_{i=1}^5 \mu_i Y_i$, $u_{tt} + u_{xx} = f(t, x, u)$	$u = \alpha y(z) + \beta$	$y^{(2)} = F(z, y, y^{(1)})$
1	$Y = Y_1 + \upsilon Y_4$, $\upsilon = \text{const}$, $\upsilon \neq 0$, $u_{tt} + u_{xx} = e^{\upsilon t} g(x, e^{-\upsilon t} u)$	$u = e^{\upsilon t} y(x)$	$y'' = -\upsilon^2 y + g(x, y)$
2	$Y = \upsilon Y_3 + Y_5$, $\upsilon = \text{const}$, $u_{tt} + u_{xx} = t^{-2} g\left(\frac{x}{t}, u - \upsilon \ln t\right)$	$u = \upsilon \ln t + y(z)$, $z = \frac{x}{t}$	$y^{(2)} = -\frac{2z}{1+z^2} y^{(1)} + \frac{g(z, y) + \upsilon}{1+z^2}$
3	$Y = \upsilon Y_4 + Y_5$, $\upsilon = \text{const}$, $u_{tt} + u_{xx} = t^{\upsilon-2} g\left(\frac{x}{t}, t^{-\upsilon} u\right)$	$u = t^\upsilon y(z)$, $z = \frac{x}{t}$	$y^{(2)} = \frac{2(\upsilon-1)z}{1+z^2} y^{(1)} + \frac{g(z, y) - \upsilon(\upsilon-1)y}{1+z^2}$
4	$Y = Y_1 + \upsilon Y_2 + \mu Y_3$, $\upsilon = \text{const}$, $\upsilon \neq 0$, $\mu = \text{const}$, $u_{tt} + u_{xx} = g(x - \upsilon t, u - \mu t)$	$u = \mu t + y(z)$, $z = x - \upsilon t$	$y^{(2)} = \frac{g(z, y)}{1+\upsilon^2}$
5	$Y = Y_1 + \upsilon Y_2 + \mu Y_4$, $\upsilon = \text{const}$, $\upsilon \neq 0$, $\mu = \text{const}$, $u_{tt} + u_{xx} = e^{\mu t} g(x - \upsilon t, e^{-\mu t} u)$	$u = e^{\mu t} y(z)$, $z = x - \upsilon t$	$y^{(2)} = \frac{2\mu\upsilon}{1+\upsilon^2} y^{(1)} + \frac{g(z, y) - \mu^2 y}{1+\upsilon^2}$

Используя данные табл. 3, запишем табл. 4 редукций для уравнения $u_{tt} + u_{xx} = f(x, u)$, учитывая тот факт, что уравнение (37) симметрично относительно замены t на x .

Таблица 4. Редукция уравнений $u_{tt} + u_{xx} = f(t, u)$

Table 4. Reduction of equations $u_{tt} + u_{xx} = f(t, u)$

№	$Y = \sum_{i=1}^5 \mu_i Y_i$, $u_{tt} + u_{xx} = f(t, u)$	$u = \alpha y(z) + \beta$	$y^{(2)} = F(z, y, y^{(1)})$
1	$Y = Y_1 + \upsilon Y_4$, $\upsilon = \text{const}$, $\upsilon \neq 0$, $u_{tt} + u_{xx} = e^{\upsilon t} g(e^{-\upsilon t} u)$	$u = e^{\upsilon t} y(x)$	$y'' = -\upsilon^2 y + g(y)$
2	$Y = \upsilon Y_3 + Y_5$, $\upsilon = \text{const}$, $u_{tt} + u_{xx} = t^{-2} g(u - \upsilon \ln t)$	$u = \upsilon \ln t + y(z)$, $z = \frac{x}{t}$	$y^{(2)} = -\frac{2z}{1+z^2} y^{(1)} + \frac{g(y) + \upsilon}{1+z^2}$
3	$Y = \upsilon Y_4 + Y_5$, $\upsilon = \text{const}$, $u_{tt} + u_{xx} = t^{\upsilon-2} g(t^{-\upsilon} u)$	$u = t^\upsilon y(z)$, $z = \frac{x}{t}$	$y^{(2)} = \frac{2(\upsilon-1)z}{1+z^2} y^{(1)} + \frac{g(y) - \upsilon(\upsilon-1)y}{1+z^2}$

Окончание табл. 4

№	$Y = \sum_{i=1}^5 \mu_i Y_i, \quad u_{tt} + u_{xx} = f(t, u)$	$u = \alpha y(z) + \beta$	$y^{(2)} = F(z, y, y^{(1)})$
4	$Y = Y_1 + \nu Y_2 + \mu Y_3, \quad \nu = \text{const}, \quad \nu \neq 0, \quad \mu = \text{const},$ $u_{tt} + u_{xx} = g(u - \mu t)$	$u = \mu t + y(z),$ $z = x - \nu t$	$y^{(2)} = \frac{g(y)}{1 + \nu^2}$
5	$Y = Y_1 + \nu Y_2 + \mu Y_4, \quad \nu = \text{const}, \quad \nu \neq 0, \quad \mu = \text{const},$ $u_{tt} + u_{xx} = e^{\mu t} g(e^{-\mu t} u)$	$u = e^{\mu t} y(z),$ $z = x - \nu t$	$y^{(2)} = \frac{2\mu\nu}{1 + \nu^2} y^{(1)} + \frac{g(y) - \mu^2 y}{1 + \nu^2}$

Заключение. Найдены алгебры преобразований эквивалентности и алгебры специальных преобразований эквивалентности для следующих 16 семейств уравнений:

$$\begin{aligned}
 u_{tt} + u_{xx} &= f(t, x, u, u_t, u_x), & u_{tt} + u_{xx} &= f(x, u, u_t, u_x), & u_{tt} + u_{xx} &= f(t, x, u_t, u_x), \\
 u_{tt} + u_{xx} &= f(t, x, u, u_x), & u_{tt} + u_{xx} &= f(u, u_t, u_x), & u_{tt} + u_{xx} &= f(x, u_t, u_x), \\
 u_{tt} + u_{xx} &= f(x, u, u_x), & u_{tt} + u_{xx} &= f(x, u, u_t), & u_{tt} + u_{xx} &= f(t, x, u_x), \\
 u_{tt} + u_{xx} &= f(t, x, u), & u_{tt} + u_{xx} &= f(u_t, u_x), & u_{tt} + u_{xx} &= f(u, u_x), \\
 u_{tt} + u_{xx} &= f(x, u_x), & u_{tt} + u_{xx} &= f(x, u_t), & u_{tt} + u_{xx} &= f(x, u), & u_{tt} + u_{xx} &= f(u).
 \end{aligned}$$

В итоге было определено, что для преобразований эквивалентности конечномерными алгебрами обладают уравнения $u_{tt} + u_{xx} = f(u_t, u_x)$, $u_{tt} + u_{xx} = f(u, u_x)$, $u_{tt} + u_{xx} = f(u)$, а для специальных преобразований эквивалентности конечномерными алгебрами обладают уравнения $u_{tt} + u_{xx} = f(u, u_t, u_x)$, $u_{tt} + u_{xx} = f(u_t, u_x)$, $u_{tt} + u_{xx} = f(u, u_x)$, $u_{tt} + u_{xx} = f(u)$, причем максимальная алгебра эквивалентности восьмимерная, но есть также и алгебры семимерные, шестимерные, пятимерные и четырехмерные. Также была проведена редукция для семейств уравнений $u_{tt} + u_{xx} = f(t, x, u)$, $u_{tt} + u_{xx} = f(x, u)$, результаты которой приведены в табл. 3 и 4.

Следует отметить, что алгебры преобразований эквивалентности совпадают для семейств уравнений $u_{tt} + u_{xx} = f(t, x, u)$, $u_{tt} + u_{xx} = f(t, x, u_t, u_x)$, $u_{tt} + u_{xx} = f(x, u)$, $u_{tt} + u_{xx} = f(x, u, u_t)$. Для специальных преобразований эквивалентности алгебры совпадают для семейств уравнений $u_{tt} + u_{xx} = f(t, x, u)$, $u_{tt} + u_{xx} = f(t, x, u_t, u_x)$, $u_{tt} + u_{xx} = f(t, x, u_x)$, $u_{tt} + u_{xx} = f(t, x, u, u_x)$, $u_{tt} + u_{xx} = f(u)$, $u_{tt} + u_{xx} = f(u, u_t, u_x)$, $u_{tt} + u_{xx} = f(x, u)$, $u_{tt} + u_{xx} = f(x, u, u_t)$, $u_{tt} + u_{xx} = f(x, u, u_x)$, $u_{tt} + u_{xx} = f(x, u, u_t, u_x)$.

Список использованных источников

1. Zhalukevich, D. S. Equivalence transformations of families of second-order quasi-linear hyperbolic equations of two variables / D. S. Zhalukevich // Arxiv [Preprint] – 2025. – URL: https://www.researchgate.net/publication/398918025_Equivalence_transformations_of_families_of_second-order_quasi-linear_hyperbolic_equations_of_two_variables.
2. Zhalukevich, D. S. Reduction of nonlinear Klein-Gordon equations for a function of two variables / D. S. Zhalukevich // Arxiv [Preprint] – 2025. – URL: https://www.researchgate.net/publication/399149445_Reduction_of_nonlinear_Klein-Gordon_equations_for_a_function_of_two_variables.
3. Lahno, V. Group classification of quasilinear elliptic-type equations. I. Invariance with respect to Lie algebras with nontrivial Levi decomposition / V. Lahno, S. V. Spichak // Ukrainian Mathematical Journal. – 2007. – Vol. 59. – P. 1719–1736. <https://doi.org/10.1007/s11253-008-0021-z>
4. Lahno, V. Group classification of quasilinear elliptic-type equations. II. Invariance under solvable Lie algebras / V. Lahno, S. V. Spichak // Ukrainian Mathematical Journal. – 2011. – Vol. 63. – P. 236–253. <https://doi.org/10.1007/s11253-011-0501-4>
5. Torrisi, M. On equivalence transformations applied to a non-linear wave equation / M. Torrisi, R. Tracina, A. Valenti // Modern Group Analysis: Advanced Analytical and Computational Methods in Mathematical Physics. – Netherlands, Kluwer Academic Publishers, 1993. – P. 367–375. https://doi.org/10.1007/978-94-011-2050-0_39
6. Tracina, R. Invariants of a family of nonlinear wave equations / R. Tracina // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2004. – Vol. 9, № 1. – P. 127–133. [https://doi.org/10.1016/S1007-5704\(03\)00021-2](https://doi.org/10.1016/S1007-5704(03)00021-2)
7. Torrisi, M. On the linearization of semilinear wave equations / M. Torrisi, R. Tracina, A. Valenti // Nonlinear Dynamics. – 2004. – Vol. 36. – P. 97–106. <https://doi.org/10.1023/b:nody.0000034649.74389.09>
8. Boyko, V. M. Realizations of Lie algebras on the line and the new group classification of $(1 + 1)$ -dimensional generalized nonlinear Klein – Gordon equations / V. M. Boyko, O. V. Lokaziuk, R. O. Popovych // Journal of Mathematical Physics. – 2021. – Vol. 11. – Art. ID 127. <https://doi.org/10.1007/s13324-021-00550-z>

9. Lahno, V. The Group Classification of One Class of Nonlinear Wave Equations / V. Lahno, O. Magda // *Arxiv* [Preprint]. – 2003. – URL: <https://arxiv.org/abs/math-ph/0310049>; <https://doi.org/10.48550/arXiv.math-ph/0310049>
10. Lahno, V. Group classification of nonlinear wave equations / V. Lahno, R. Zhdanov // *Journal of Mathematical Physics*. – 2005. – Vol. 46, № 5. – Art. 053301. <https://doi.org/10.1063/1.1884886>
11. Lahno, V. Group classification and exact solutions of nonlinear wave equations / V. Lahno, R. Zhdanov, O. Magda // *Acta Applicandae Mathematicae*. – 2006. – Vol. 91. – P. 253–313 <https://doi.org/10.1007/s10440-006-9039-0>
12. Popovych, R. O. Point and contact equivalence groupoids of two-dimensional quasilinear hyperbolic equations / R. O. Popovych // *Applied Mathematics Letters*. – 2021. – Vol. 116. – Art. ID 107068. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2021.107068>
13. Lie, S. Diskussion der Differentialgleichung $d^2z/dxdy = F(z)$ / S. Lie // *Archiv for Mathematik og Naturvidenskab*. – 1881. – Vol. 5. – P. 282–306.
14. Pucci, E. Group properties of a class of semilinear hyperbolic equations / E. Pucci, M. C. Salvatori // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. – 1986. – Vol. 21, № 2. – P. 147–155. [https://doi.org/10.1016/0020-7462\(86\)90027-2](https://doi.org/10.1016/0020-7462(86)90027-2)
15. Azad, H. Group classification, optimal system and optimal reductions of a class of Klein Gordon equations / H. Azad, M. T. Mustafa, M. Ziad // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. – 2010. – Vol. 15, № 5. – P. 1132–1147. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2009.05.045>

References

1. Zhalukevich D. S. Equivalence transformations of families of second-order quasi-linear hyperbolic equations of two variables. *Arxiv* [Preprint], 2025. Available at: https://www.researchgate.net/publication/398918025_Equivalence_transformations_of_families_of_second-order_quasi-linear_hyperbolic_equations_of_two_variables.
2. Zhalukevich D. S. Reduction of nonlinear Klein-Gordon equations for a function of two variables. *Arxiv* [Preprint], 2025. Available at: https://www.researchgate.net/publication/399149445_Reduction_of_nonlinear_Klein-Gordon_equations_for_a_function_of_two_variables.
3. Lahno V., Spichak S. V. Group classification of quasilinear elliptic-type equations. I. Invariance with respect to Lie algebras with nontrivial Levi decomposition. *Ukrainian Mathematical Journal*, 2007, vol. 59, pp. 1719–1736. <https://doi.org/10.1007/s11253-008-0021-z>
4. Lahno V., Spichak S. V. Group classification of quasilinear elliptic-type equations. II. Invariance under solvable Lie algebras. *Ukrainian Mathematical Journal*, 2011, vol. 63, pp. 236–253. <https://doi.org/10.1007/s11253-011-0501-4>
5. Torrisi M., Tracina R., Valenti A. On equivalence transformations applied to a non-linear wave equation. *Modern Group Analysis: Advanced Analytical and Computational Methods in Mathematical Physics*. Netherlands. Kluwer Academic Publ., 1993, pp. 367–375 https://doi.org/10.1007/978-94-011-2050-0_39
6. Tracina R. Invariants of a family of nonlinear wave equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2004, vol. 9, no. 1, pp. 127–133. [https://doi.org/10.1016/S1007-5704\(03\)00021-2](https://doi.org/10.1016/S1007-5704(03)00021-2)
7. Torrisi M., Tracina R., Valenti A. On the linearization of semilinear wave equations. *Nonlinear Dynamics*, 2004, vol. 36, pp. 97–106. <https://doi.org/10.1023/b:nody.0000034649.74389.09>
8. Boyko V. M., Lokaziuk O. V., Popovych R. O. Realizations of Lie algebras on the line and the new group classification of $(1 + 1)$ -dimensional generalized nonlinear Klein – Gordon equations. *Journal of Mathematical Physics*, 2021, vol. 11, art. ID 127. <https://doi.org/10.1007/s13324-021-00550-z>
9. Lahno V., Magda O. The Group Classification of One Class of Nonlinear Wave Equations. *Arxiv* [Preprint], 2003. Available at: <https://arxiv.org/abs/math-ph/0310049>; <https://doi.org/10.48550/arXiv.math-ph/0310049>
10. Lahno V., Zhdanov R. Group classification of nonlinear wave equations. *Journal of Mathematical Physics*, 2005, vol. 46, no. 5, art. ID 053301. <https://doi.org/10.1063/1.1884886>
11. Lahno V., Zhdanov R., Magda O. Group classification and exact solutions of nonlinear wave equations. *Acta Applicandae Mathematicae*, 2006, vol. 91, pp. 253–313. <https://doi.org/10.1007/s10440-006-9039-0>
12. Popovych R. O. Point and contact equivalence groupoids of two-dimensional quasilinear hyperbolic equations. *Applied Mathematics Letters*, 2021, vol. 116, art. ID 107068. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2021.107068>
13. Lie S. Diskussion der Differentialgleichung $d^2z/dxdy = F(z)$. *Archiv for Mathematik og Naturvidenskab*, 1881, vol. 5, pp. 282–306.
14. Pucci E., Salvatori M. C. Group properties of a class of semilinear hyperbolic equations. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1986, vol. 21, no. 2, pp. 147–155. [https://doi.org/10.1016/0020-7462\(86\)90027-2](https://doi.org/10.1016/0020-7462(86)90027-2)
15. Azad H., Mustafa M. T., Ziad M. Group classification, optimal system and optimal reductions of a class of Klein Gordon equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2010, vol. 15, no. 5, pp. 1132–1147. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2009.05.045>

Информация об авторе

Жалукевич Денис Станиславович – соискатель, отдел дифференциальных уравнений, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: den.zhal@yandex.by. <https://orcid.org/0000-0001-5021-550X>

Information about the author

Dzianis S. Zhalukevich – Applicant, Department of Differential Equations, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: den.zhal@yandex.by. <https://orcid.org/0000-0001-5021-550X>