

ISSN 1561-2430 (Print)
 ISSN 2524-2415 (Online)
 УДК 517.5

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2026-62-2-102-108>

Поступила в редакцию 15.03.2026

Received 15.03.2026

Т. С. Мардвилко

Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь

ВЛОЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВ БЕСОВА ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ С ГЛАДКОЙ ПО ДИНИ ГРАНИЦЕЙ

Аннотация. Исследовано непрерывное вложение пространств Бесова аналитических функций в ограниченных областях с гладкой по Дини границей. Доказанное вложение согласовано и обобщает известные вложения пространств Бесова для круга и полуплоскости. Показана независимость определения пространств Бесова аналитических в рассматриваемых областях функций от порядка производной, входящей в его определение.

Ключевые слова: пространства Бесова и Бермана, гладкая по Дини кривая, разбиения типа Уитни, конформные отображения

Для цитирования. Мардвилко, Т. С. Вложения пространств Бесова для областей с гладкой по Дини границей / Т. С. Мардвилко // Весті Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. – 2026. – Т. 62, № 2. – С. 102–108. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2026-62-2-102-108>

Tatsiana S. Mardvilko

Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus

EMBEDDINGS OF BESOV SPACES FOR DOMAINS WITH DINI SMOOTH BOUNDARY

Abstract. The main result of the paper is the continuous embedding of Besov spaces of analytic functions in bounded domains with a Dini-smooth boundary. The proved embedding is consistent with and generalizes the known embeddings of Besov spaces for the circle and the half-plane. The independence of the definition of Besov spaces analytic in the considered domains of functions from the order of the derivative included in its definition is shown.

Keywords: Besov and Bergman spaces, Dini-smooth curve, Whitney-type decompositions, conformal mappings

For citation. Mardvilko T. S. Embeddings of Besov spaces for domains with Dini smooth boundary. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2026, vol. 62, no. 2, pp. 102–108 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2026-62-2-102-108>

Введение. Пусть $G \subset \mathbb{C}$ – ограниченная односвязная область со спрямляемой границей ∂G . Через $\rho(z, \partial G)$ обозначим расстояние от точки z до границы ∂G , т. е. $\rho(z, \partial G) = \min\{|z - \xi| : \xi \in \partial G\}$.

Будем говорить, что $f \in L_{p,\mu}(G)$, если f измерима относительно плоской меры Лебега m_2 в G и конечна квазинорма

$$\|f\|_{L_{p,\mu}(G)} = \left(\int_G |f(z)|^p (\rho(z, \partial G))^{p\mu-1} dm_2(z) \right)^{1/p}, \quad p > 0, \quad \mu > 0.$$

Пространством Бермана будем называть подпространство $L_{p,\mu}(G)$, состоящее из аналитических в G функций, и обозначать $A_{p,\mu}(G)$. При этом для $f \in A_{p,\mu}(G)$ полагаем $\|f\|_{A_{p,\mu}(G)} = \|f\|_{L_{p,\mu}(G)}$.

Далее будем считать, что $z_0 \in G$ – фиксированная точка. Для $\alpha, \tau \in (0, +\infty)$ введем пространство Бесова $B_\tau^\alpha(G)$ аналитических в G функций f , удовлетворяющих условию

$$\|f\|_{B_\tau^\alpha(G)} = \sum_{k=0}^{s-1} |f^{(k)}(z_0)| + \|f^{(s)}\|_{A_{\tau,s-\alpha}(G)} < \infty, \quad s = [\alpha] + 1,$$

где $[\alpha]$ – целая часть α .

Для дальнейшего изложения введем некоторые понятия [1, гл. 10]. Пусть ограниченная односвязная область G ограничена спрямляемой кривой ∂G длины l . Будем предполагать, что ∂G ориентирована в положительном направлении относительно G и на ∂G введена естественная параметризация $z = z(s) : [0, l] \rightarrow \partial G$ и $z(0) = z(l) = z_*$, где $z_* \in \partial G$ – фиксированная точка. Функцию $z = z(s)$ продолжим l -периодически на $\mathbb{R}$. Предположим, что ∂G в каждой точке имеет касательную. В каждой точке $z = z(s)$, $s \in \mathbb{R}$, к ∂G проведем касательную ось в направлении выбранной ориентации и через $\beta(s)$ обозначим угол, образованный этой касательной и действительной осью. Если окажется, что функция $\beta(s)$ непрерывна на $\mathbb{R}$, то кривую ∂G называют гладкой.

Кривая ∂G называется гладкой по Дини, если функция $\beta(s)$ непрерывна по Дини на $\mathbb{R}$, т. е. ее модуль непрерывности

$$\omega(\delta, \beta) = \max \{ |\beta(s_2) - \beta(s_1)| : s_1, s_2 \in \mathbb{R}, 0 \leq s_2 - s_1 \leq \delta \}, \quad \delta \geq 0,$$

удовлетворяет условию

$$\int_0^l \frac{\omega(\delta, \beta)}{\delta} d\delta < \infty.$$

Основным результатом нашего исследования является следующая теорема вложения пространств Бесова в областях, ограниченных гладкими по Дини кривыми.

Теорема 1. Пусть G – область, ограниченная гладкой по Дини кривой ∂G , $\alpha_1, \alpha_2, \tau_1, \tau_2 \in (0, +\infty)$ и

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_1} > 0.$$

Тогда для пространств Бесова имеет место следующее непрерывное вложение:

$$B_{\tau_2}^{\alpha_2}(G) \subset B_{\tau_1}^{\alpha_1}(G).$$

Вложения пространств Бесова для круга и полуплоскости хорошо известны (см., напр., [2; 3]).

Через $c, c_1, c_2, \dots$ будем обозначать положительные постоянные. При необходимости в скобках будем указывать параметры, от которых они зависят.

Разбиения типа Уитни и конформные отображения. Пусть $K \subset \mathbb{C}$ – ограниченное замкнутое множество. Через $d(K)$ и $d_0(K)$ обозначим соответственно диаметр наименьшего замкнутого круга, содержащего K , и диаметр наибольшего замкнутого круга, содержащегося в K .

Семейство $\mathcal{Z}$ односвязных замкнутых областей Q с кусочно-гладкими границами называется разбиением типа Уитни области G , если выполняются следующие условия:

- (i) любые две области семейства $\mathcal{Z}$ могут пересекаться лишь по границе;
- (ii) объединение всех областей семейства $\mathcal{Z}$ суть G ;
- (iii) существуют положительные постоянные c_1 и c_2 такие, что для любой области $Q \in \mathcal{Z}$ выполняются неравенства

$$c_1 \rho(Q, \partial G) \leq d_0(Q) \leq d(Q) \leq c_2 \rho(Q, \partial G).$$

Примером такого разбиения служат квадраты Уитни (подробнее об этом см. в [4, гл. VI]) с $c_1 = \sqrt{2}/8$ и $c_2 = 1$. Для удобства мы будем предполагать, что наша область G разбита на квадраты Уитни. Можем считать, что квадраты Уитни каким-то образом занумерованы, т. е. $G = \bigcup Q_j$. Из свойств квадратов Уитни [4] следует, что если $Q \in \mathcal{Z}$, то количество квадратов, касающихся Q , не больше 12, и если Q_j и Q_k касаются один другого, то

$$\frac{1}{4} d(Q_j) \leq d(Q_k) \leq 4 d(Q_j).$$

Теорема 2 [5]. Пусть p и μ – положительные числа и $f \in A_{p, \mu}(G)$. Тогда

$$c_3 \|f\|_{A_{p, \mu}}^p \leq \sum_{Q \in \mathcal{Z}} \left((d(Q))^{\mu + \frac{1}{p}} \|f\|_{C(Q)} \right)^p \leq c_4 \|f\|_{A_{p, \mu}}^p.$$

Положим $D = \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$. Через $z = \varphi(w)$ обозначим функцию Римана, конформно отображающую круг D на область G и удовлетворяющую условиям $\varphi(0) = z_0$, $\varphi'(0) > 0$, для некоторой фиксированной точки $z_0 \in G$. В геометрической теории функций хорошо известны соотношения [6, с. 11; 1, р. 22]

$$\frac{1}{4} \frac{\rho(\varphi(w), \partial G)}{1 - |w|} \leq |\varphi'(w)| \leq 4 \frac{\rho(\varphi(w), \partial G)}{1 - |w|}, \quad w \in D. \quad (1)$$

Для области G , ограниченной спрямляемой кривой Жордана, функция $z = \varphi(w)$ непрерывно продолжается из D в $\bar{D}$, при этом $\varphi'(w)$ принадлежит пространству Харди $H_1(D)$ [7, гл. II; 8, гл. X]. Дополнительные ограничения на границу области отражаются на дифференциальных свойствах функции $z = \varphi(w)$. Нам понадобится следующая теорема Варшавского (см. [1, теорема 10.2]).

Теорема 3. Если кривая ∂G является гладкой в смысле Дини, то $\varphi'(w)$ непрерывно продолжается из круга D в его замыкание $\bar{D}$ и при этом $\varphi'(w) \neq 0$ для $|w| = 1$.

Из теоремы 3 следует, что существует $M \geq 1$ такое, что $\frac{1}{M} \leq |\varphi'(w)| \leq M$ при $w \in \bar{D}$. Через $w = \psi(z)$ будем обозначать обратное к φ отображение. Поскольку $\psi'(z) = \frac{1}{\varphi'(w)}$, то имеем также $\frac{1}{M} \leq |\psi'(z)| \leq M$ при $z \in \bar{G}$. Кратко эти условия будем записывать так:

$$|\varphi'(w)| \asymp 1, \quad |\psi'(z)| \asymp 1. \quad (2)$$

Пространства Бергмана. Следующая теорема имеется, например, в [2; 9]. Мы приводим ее в удобном для нас виде.

Теорема 4. Пусть $p, \mu \in (0, +\infty)$, $s \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(0) = 0$, $k = 0, 1, \dots, s-1$. Функция $f \in A_{p, \mu}(D)$ тогда и только тогда, когда $f^{(s)} \in A_{p, \mu+s}(D)$. При этом квазинормы

$$\|f\|_{A_{p, \mu}(D)}, \quad \|f^{(s)}\|_{A_{p, \mu+s}(D)}$$

эквивалентны.

Лемма 1. Пусть $p, \mu \in (0, +\infty)$, $G \subset \mathbb{C}$ – ограниченная односвязная область со спрямляемой границей ∂G . Если $f \in A_{p, \mu}(G)$, то $f' \in A_{p, \mu+1}(G)$ и выполнено неравенство

$$\|f'\|_{A_{p, \mu+1}(G)} \leq c \|f\|_{A_{p, \mu}(G)}, \quad c = c(G, p, \mu) > 0.$$

Доказательство. Пусть $z \in Q_k \in \mathcal{Z}$. Если z принадлежит нескольким квадратам семейства $\mathcal{Z}$, то возьмем любой. Построим множество $\Pi_z = \bigcup \{Q_j \in \mathcal{Z} : \rho(Q_j, Q_k) = 0\}$, т. е. Π_z будет состоять из Q_k и окаймляющих его квадратов.

Пусть $\{\Gamma_j\}$ – семейство сторон квадратов Уитни, составляющих $\partial \Pi_z$. Применяя интегральную формулу Коши и свойства разбиений типа Уитни, имеем

$$|f'(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Pi_z} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z)^2} \right| \leq \sum_{\Gamma_l} \|f\|_{C(\Gamma_l)} |\Gamma_l|^{-1} \leq 3\sqrt{2} \sum_{Q_j} \|f\|_{C(Q_j)} d(Q_j)^{-1}. \quad (3)$$

Учитывая, что количество квадратов Q_j , касающихся Q_k , не более 12, из (3), пользуясь свойствами разбиений типа Уитни и теоремой 2, получим

$$\int_G |f'(z)|^p (\rho(z, \partial G))^{p(\mu+1)-1} dm_2(z) \leq c_5 \sum_{Q \in \mathcal{Z}} \|f\|_{C(Q)}^p d(Q)^{p\mu+1}. \quad (4)$$

Из (4) и теоремы 2 имеем

$$\int_G |f'(z)|^p (\rho(z, \partial G))^{p(\mu+1)-1} dm_2(z) \leq c_6 \int_G |f(z)|^p (\rho(z, \partial G))^{p\mu-1} dm_2(z).$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть $p, \mu \in (0, +\infty)$, G – область, ограниченная гладкой по Дини кривой ∂G , и $f(z_0) = 0$, $z_0 \in G$. Если $f' \in A_{p, \mu+1}(G)$, то $f \in A_{p, \mu}(G)$ и выполнено

$$\|f\|_{A_{p, \mu}(G)} \leq c \|f'\|_{A_{p, \mu+1}(G)}, \quad c = c(G, z_0, p, \mu) > 0.$$

Доказательство. Пусть $f(z_0) = 0$ и $f' \in A_{p, \mu+1}(G)$, т. е.

$$\int_G |f'(z)|^p (\rho(z, \partial G))^{p(\mu+1)-1} dm_2(z) < \infty, \quad p > 0, \quad \mu > 0. \quad (5)$$

Покажем, что условие (5) эквивалентно условию

$$\int_G |f(z)|^p (\rho(z, \partial G))^{p\mu-1} dm_2(z) < \infty. \quad (6)$$

Из соотношений (1) имеем $\rho(z, \partial G) \asymp |\varphi'(w)|(1-|w|)$ для $z \in G$. Следовательно, делая в интеграле (5) замену переменной $z = \varphi(w)$, с учетом (1) получим

$$\begin{aligned} \int_G |f'(z)|^p (\rho(z, \partial G))^{p(\mu+1)-1} dm_2(z) &= \int_D |f'_z(\varphi(w))|^p (\rho(\varphi(w), \partial G))^{p(\mu+1)-1} |\varphi'(w)|^2 dm_2(w) \asymp \\ &\asymp \int_D |f'_z(\varphi(w))|^p (|\varphi'(w)|(1-|w|))^{p(\mu+1)-1} |\varphi'(w)|^2 dm_2(w) \asymp \\ &\asymp \int_D \left| (f(\varphi(w)))'_w \right|^p ((1-|w|))^{p(\mu+1)-1} dm_2(w). \end{aligned}$$

При последнем переходе мы воспользовались тем, что для областей, ограниченных гладкой по Дини кривой, выполнены соотношения (2).

Пользуясь теоремой 4 и делая обратную замену $\varphi(w) = z$, имеем

$$\begin{aligned} \int_D \left| (f(\varphi(w)))'_w \right|^p ((1-|w|))^{p(\mu+1)-1} dm_2(w) &\asymp \int_D |f(\varphi(w))|^p ((1-|w|))^{p\mu-1} dm_2(w) \asymp \\ &\asymp \int_G |f(z)|^p (\rho(z, \partial G))^{p\mu-1} dm_2(z). \end{aligned} \quad (7)$$

При получении (7) мы вновь воспользовались соотношениями (1) и (2).

Таким образом, из приведенных рассуждений следует, что если ∂G – гладкая по Дини и $f(z_0) = 0$, где $z_0 \in G$ – фиксированная точка, то

$$\int_G |f'(z)|^p (\rho(z, \partial G))^{p(\mu+1)-1} dm_2(z) \asymp \int_G |f(z)|^p (\rho(z, \partial G))^{p\mu-1} dm_2(z).$$

Лемма 2 доказана.

Теорема 5. Пусть $p, \mu \in (0, +\infty)$, $s \in \mathbb{N}$, G – область, ограниченная гладкой по Дини кривой ∂G , и $f^{(k)}(z_0) = 0$, $k = 0, 1, \dots, s-1$, $z_0 \in G$. Функция $f \in A_{p, \mu}(G)$ тогда и только тогда, когда $f^{(s)} \in A_{p, \mu+s}(G)$. При этом квазинормы

$$\|f\|_{A_{p, \mu}(G)}, \quad \|f^{(s)}\|_{A_{p, \mu+s}(G)}$$

эквивалентны.

Доказательство. Для $s = 1$ утверждение теоремы верно в силу лемм 1 и 2. Для $s \geq 2$ эквивалентность рассматриваемых квазинорм доказывается индукцией.

Вложение пространств Бесова. Для пространств Бесова в круге D известно [10, гл. 6; 11] следующее непрерывное некомпактное вложение:

$$B_{\tau_2}^{\alpha_2}(D) \subset B_{\tau_1}^{\alpha_1}(D) \quad \text{при} \quad \alpha_2 - \alpha_1 = \frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_1} > 0.$$

Отметим также работу Е. М. Дынькина [12], где рассмотрен другой подход к определению пространств Бесова и, в частности, приводится теорема вложения для пространств из [12].

В этом разделе мы докажем теорему вложения для пространств Бесова в случае областей, ограниченных гладкими по Дини кривыми. Нам понадобится следующая лемма о поведении коэффициентов Тейлора функций из пространств Бергмана.

Лемма 3. Пусть $f(z)$ аналитична в круге $|z - z_0| \leq r$, где $z_0 \in \mathbb{C}$ и $r > 0$. Тогда для любого $k \in \mathbb{N}_0$ справедливо неравенство

$$|f^{(k)}(z_0)| \leq c(p, k) r^{-k - \frac{2}{p}} \left(\int_{|z - z_0| < r} |f(z)|^p dm_2(z) \right)^{1/p}.$$

Доказательство. Для функции $g(w)$, аналитичной в $\bar{D}$, $0 < p < \infty$ и $k \in \mathbb{N}_0$, имеет место следующая оценка коэффициентов Тейлора (см., напр., [13, § 3.3]):

$$|g^{(k)}(0)| \leq c(p, k) \left(\int_D |g(w)|^p dm_2(w) \right)^{1/p}. \quad (8)$$

Пусть $f(z)$ аналитична в круге $|z - z_0| \leq r$. Тогда функция $g(w) = f(z_0 + rw)$ аналитична в $\bar{D}$ и $g^{(k)}(w) = r^k f^{(k)}(z_0 + rw)$. Используя (8), получаем

$$r^k |f^{(k)}(z_0)| \leq c(p, k) \left(\frac{1}{r^2} \int_{|z - z_0| < r} |f(z)|^p dm_2(z) \right)^{1/p}.$$

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. Пусть $f \in A_{p, \mu}(G)$, $z_0 \in G$, $s \in \mathbb{N}$ и

$$T_{s-1}(f, z) = \sum_{k=0}^{s-1} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k. \quad (9)$$

Тогда

$$\|T_{s-1}(f, \cdot)\|_{A_{p, \mu}(G)} \leq c \|f\|_{A_{p, \mu}(G)}, \quad (10)$$

где $c = c(G, z_0, p, \mu, s) > 0$.

Доказательство. Положим $r = \frac{1}{2} \rho(z_0, \partial G)$. Тогда, согласно лемме 3, имеем

$$\begin{aligned} |f^{(k)}(z_0)| &\leq c_1 r^{-k - \frac{2}{p}} \left(\int_{|z - z_0| < r} |f(z)|^p dm_2(z) \right)^{1/p} \leq \\ &\leq c_2 r^{-k - \frac{2}{p}} \left(\frac{1}{r^{p\mu-1}} \int_{|z - z_0| < r} |f(z)|^p \rho(z, \partial G)^{p\mu-1} dm_2(z) \right)^{1/p} \leq \\ &\leq c_2 r^{-k - \frac{1}{p} - \mu} \left(\int_{|z - z_0| < r} |f(z)|^p \rho(z, \partial G)^{p\mu-1} dm_2(z) \right)^{1/p} \leq c_3 \|f\|_{A_{p, \mu}(G)}, \end{aligned}$$

где $c_3 = c_3(G, z_0, p, \mu, k) > 0$.

Из полученной оценки для $|f^{(k)}(z_0)|$ и (9) следует (10), тем самым лемма 4 доказана.

С л е д с т в и е. Для функций $f \in A_{p,\mu}(G)$ квазинормы $\|f\|_{A_{p,\mu}(G)}$ и $\sum_{k=0}^{s-1} |f^{(k)}(z_0)| + \|f - T_{s-1}(f, \cdot)\|_{A_{p,\mu}(G)}$ эквивалентны.

Т е о р е м а 6. Пусть G – область, ограниченная гладкой по Дини кривой ∂G , $p, \mu \in (0, +\infty)$ и $s \in \mathbb{N}$. Тогда для $f \in A_{p,\mu}(G)$ квазинорма $\|f\|_{A_{p,\mu}(G)}$ эквивалентна квазинорме $\|f^{(s)}\|_{A_{p,\mu+s}(G)} + \sum_{k=0}^{s-1} |f^{(k)}(z_0)|$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение теоремы следует из следствия и теоремы 5.

Л е м м а 5 [14]. Пусть $0 < \alpha < \beta < \infty$, $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность неотрицательных чисел и $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{\alpha} < \infty$. Тогда

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{\beta} \right)^{1/\beta} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{\alpha} \right)^{1/\alpha}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1. Поскольку $\alpha_2 > \alpha_1 > 0$, то, положив $s = [\alpha_2] + 1$, находим $[\alpha_1] + 1 \leq s$.

Применяя теорему 2 и лемму 5, получим

$$\begin{aligned} \|f\|_{B_{\tau_1}^{\alpha_1}} &\leq c_1 \left(\sum_{k=0}^{s-1} |f^{(k)}(z_0)| + \left(\int_G |f^{(s)}(z)|^{\tau_1} (\rho(z, \partial G))^{\tau_1(s-\alpha_1)-1} dm_2(z) \right)^{1/\tau_1} \right) \leq \\ &\leq c_2 \left(\sum_{k=0}^{s-1} |f^{(k)}(z_0)| + \left(\sum_{Q \in \mathcal{Z}} \|f^{(s)}\|_{C(Q)}^{\tau_1} (d(Q))^{\tau_1(s-\alpha_1)+1} \right)^{1/\tau_1} \right) \leq \\ &\leq c_3 \left(\sum_{k=0}^{s-1} |f^{(k)}(z_0)| + \left(\sum_{Q \in \mathcal{Z}} \|f^{(s)}\|_{C(Q)}^{\tau_2} (d(Q))^{\tau_2(s-\alpha_1)+\frac{\tau_2}{\tau_1}} \right)^{1/\tau_2} \right). \end{aligned}$$

Из условия $\frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_1} = \alpha_2 - \alpha_1$ следует, что $\frac{\tau_2}{\tau_1} = \tau_2(\alpha_1 - \alpha_2) + 1$. Отсюда, снова применяя теорему 2, имеем

$$\|f\|_{B_{\tau_1}^{\alpha_1}} \leq c_3 \left(\sum_{k=0}^{s-1} |f^{(k)}(z_0)| + \left(\sum_{Q \in \mathcal{Z}} \|f^{(s)}\|_{C(Q)}^{\tau_2} (d(Q))^{\tau_2(s-\alpha_2)+1} \right)^{1/\tau_2} \right) \leq c_4 \|f\|_{B_{\tau_2}^{\alpha_2}}.$$

Теорема 1 доказана.

Список использованных источников

1. Pommerenke, Ch. Univalent Functions / Ch. Pommerenke. – Göttingen: Vandenhoeck and Ruprecht, 1975. – 376 p.
2. Hedenmalm, H. Theory of Bergman Spaces / H. Hedenmalm, B. Korenblum, K. Zhu. – New York: Springer-Verlag, 2000. – 289 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0497-8>
3. Rochberg, R. Decomposition theorems for Bergman spaces and the IR applications / R. Rochberg // Operators and Function Theory / ed. S. C. Power. – Springer Dordrecht, 1985. – P. 225–277. https://doi.org/10.1007/978-94-009-5374-1_8
4. Stein, E. M. Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions / E. M. Stein. – Princeton, New Jersey: University Press, 1971. – 287 p. <https://doi.org/10.1515/9781400883882>
5. Мардвилко, Т. С. Прямая и обратная теоремы рациональной аппроксимации в пространстве Бергмана / Т. С. Мардвилко, А. А. Пекарский // Математический сборник. – 2011. – Т. 202, № 9. – С. 77–96. <https://doi.org/10.4213/sm7742>
6. Белый, В. И. Современные методы геометрической теории функций комплексного переменного в задачах аппроксимации / В. И. Белый // Алгебра и анализ. – 1997. – Т. 9, № 3. – С. 3–40.
7. Гарнетт, Дж. Ограниченные аналитические функции: пер. с англ. / Дж. Гарнетт. – М.: Мир, 1984. – 469 с.
8. Голузин, Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного / Г. М. Голузин. – М.: Наука, 1966. – 628 с.

9. Duren, P. *Theory of H_p Spaces* / P. Duren. – New York: Academic Press, 1970. – 258 p.
10. Zhu, K. *Spaces of Holomorphic Functions in the Unit Ball* / K. Zhu. – New York: Springer, 2005. – 271 p. <https://doi.org/10.1007/0-387-27539-8>
11. Oswald, P. On Besov-Hardy-Sobolev spaces of analytic functions in the unit disc / P. Oswald // *Czechoslovak Mathematical Journal*. – 1983. – Vol. 33, № 3. – P. 408–426. <https://doi.org/10.21136/cmj.1983.101891>
12. Дынькин, Е. М. О классах B_p^s при $0 < p < 1$ / Е. М. Дынькин // Доклады Академии наук СССР. – 1984. – Т. 275, № 5. – С. 1063–1066.
13. Duren, P. *Bergman Spaces* / P. Duren, A. Schuster. – American Mathematical Soc., 2004. – 318 p. – (Mathematical Surveys and Monographs, vol. 100). <https://doi.org/10.1090/surv/100>
14. Харди, Г. Г. Неравенства: пер. с англ. / Г. Г. Харди, Дж. Е. Литтльвуд, Г. Полиа. – М.: Гос. Изд-во иностр. лит., 1948. – 456 с.

References

1. Pommerenke Ch. *Univalent Function*. Vandenhoeck and Ruprecht, Göttingen, 1975. 376 p.
2. Hedenmalm H. *Theory of Bergman Spaces*. New York, Springer, 2000, 289 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0497-8>
3. Rochberg R. Decomposition theorems for Bergman spaces and the IR applications. Power S. C. (ed.). *Operators and Function Theory*. Springer Dordrecht, 1985, pp. 225–277. https://doi.org/10.1007/978-94-009-5374-1_8
4. Stein E. M. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions (PMS-30)*. Princeton, New Jersey: University Press, 1971. 287 p. <https://doi.org/10.1515/9781400883882>
5. Mardvilko T. S., Pekarskii A. A. Direct and inverse theorems of rational approximation in the Bergman space. *Sbornik: Mathematics*, 2011, vol. 202, no. 9, pp. 1327–1346. <https://doi.org/10.1070/sm2011v202n09abeh004189>
6. Belyi V. I. Modern methods of the geometric theory of functions of a complex variable in approximation problems. *St. Petersburg Mathematical Journal*, 1998, vol. 9, no. 3. pp. 421–453.
7. Garnett J. B. *Bounded Analytic Function. Revised First Edition*. New York, Springer, 2007. XIV, 463 p.
8. Goluzin G. M. *Geometrical Theory of Functions of a Complex Variable. Translations of Mathematical Monographs, vol. 26*. Am. Math. Soc., 1969. 676 p. <https://doi.org/10.1090/mmono/026>
9. Duren P. *Theory of H_p Spaces*. New York, Academic Press, 1970, 258 p.
10. Zhu K. *Spaces of Holomorphic Functions in the Unit Ball*. New York, Springer, 2005. 271 p. <https://doi.org/10.1007/0-387-27539-8>
11. Oswald P. On Besov-Hardy-Sobolev spaces of analytic functions in the unit disc. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 1983, vol. 33, no. 3. pp. 408–426. <https://doi.org/10.21136/cmj.1983.101891>
12. Dyn'kin E. M. On the classes B_p^s for $0 < p < 1$. *Doklady akademii nauk SSSR* [Doklady of the Academy of Sciences of USSR], 1984, vol. 275, no. 5. pp. 1063–1066 (in Russian).
13. Duren P., Schuster A. *Bergman Spaces. Mathematical Surveys and Monographs, vol. 100*. Am. Math. Soc., 2004. 318 p. <https://doi.org/10.1090/surv/100>
14. Hardy G. H., Littlewood J. E., Pólya G. *Inequalities*. Tokyo, Cambridge University Press, 1934. 329 p.

Информация об авторе

Мардвилко Татьяна Сергеевна – кандидат физико-математических наук, доцент, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: mardvilko@mail.ru

Information about the author

Tatsiana S. Mardvilko – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: mardvilko@mail.ru