МАТЭМАТЫКА

УДК 517.977

И. В. ГАЙШУН[1], В. В. ГОРЯЧКИН[2], В. В. КРАХОТКО[2]

ОЦЕНКА РЕШЕНИЙ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ С ИНТЕРВАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

[1]*Институт математики НАН Беларуси*
[2]*Белорусский государственный университет*

(Поступила в редакцию 11.07.2014)

Введение. Многомерные дискретные системы находят широкое применение в различных разделах науки и техники (см., напр. [1–4]). Ряд теоретических результатов, относящихся к таким системам, изложен в монографии [4]. Предлагаемая статья посвящена многомерным дискретным системам, у которых коэффициенты точно неизвестны и могут изменяться произвольным образом в некоторых интервалах.

В работе приняты следующие обозначения. Если A – матрица с действительными элементами a_{ij}, то запись $A \geq 0$ $(A > 0,\ A \leq 0,\ A < 0)$ означает, что $a_{ij} \geq 0$ $(a_{ij} > 0,\ a_{ij} \leq 0,\ a_{ij} < 0)$; $|A|$ – это матрица с элементами $|a_{ij}|$.

1. Многомерные дискретные системы с неопределенными коэффициентами. Пусть A_0, D_0, B_0 – фиксированные матрицы с действительными элементами размеров $n\times n,\ n\times n,\ n\times m$; ΔA, ΔD, ΔB – заданные неотрицательные матрицы таких же размеров. Рассматриваются многомерные дискретные системы

$$x(t+1, s) = Ax(t, s+1) + Dx(t, s) + Bu(t, s), \tag{1}$$

коэффициенты которых неизвестны и удовлетворяют неравенствам

$$|A - A_0| \leq \Delta A,\ |D - D_0| \leq \Delta D,\ |B - B_0| \leq \Delta B. \tag{2}$$

Независимые переменные t и s изменяются в множестве $\boldsymbol{Z}_+$ – положительных целых чисел и в множестве $\boldsymbol{Z}$ целых чисел соответственно. Функция u: $\boldsymbol{Z}_+ \times \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{R}^m$ трактуется как управление, принимающее значения в множестве $\boldsymbol{U} \subset \boldsymbol{R}^m$.

При любом начальном условии $x(0, s) = \alpha(s)$ и при фиксированных матрицах A, D, B и фиксированном управлении $u(t, s)$ система (1) имеет единственное решение, которое определяется следующим образом [5]:

$$x(t, s) = \sum_{j=0}^{t} G(t, j)\alpha(s+j) + \sum_{i=0}^{t-1}\sum_{j=0}^{t-i-1} G(t-i-1, j)Bu(i, s+j), \tag{3}$$

где матрицы $G(i, j)$ находятся из рекуррентных соотношений

$$\begin{gathered} G(i+1, j) = AG(i, j-1) + DG(i, j), \\ G(0, 0) = E,\ G(i, j) = 0\ (j < 0 \text{ или } i < j). \end{gathered} \tag{4}$$

Далее предполагается, что начальное условие $\alpha(s)$ может изменяться согласно неравенству

$$|\alpha(s) - \alpha_0(s)| \leq \Delta\alpha(s), \tag{5}$$

где $\alpha_0(s)$ и $\Delta\alpha(s)$ – известные n-вектор функции, при этом $\Delta\alpha(s)$ – вектор с неотрицательными компонентами.

Выберем какое-либо управление $u = u(t, s)$. Совокупность всех решений системы (1), когда матрицы A, D, B независимо пробегают неравенства (2), а функция $\alpha(s)$ – неравенство (5), обозначим через $\boldsymbol{X}(t, s, u)$ и назовем пучком решений. Сечением в точке $(\tau, \sigma) \in \boldsymbol{Z}_+ \times \boldsymbol{Z}$ этого пучка назовем множество $\boldsymbol{X}(\tau, \sigma, u) \subset \boldsymbol{R}^n$, полученное из семейства $\boldsymbol{X}(t, s, u)$ при $t = \tau$, $s = \sigma$.

2. Оценка сечения пучка решений. Пусть $\boldsymbol{X}(\tau, \sigma, u)$ – сечение пучка решений. Рассмотрим задачу построения параллелепипеда $\boldsymbol{P}(u) \subset \boldsymbol{R}^n$ с ребрами, параллельными координатным осям, содержащего множество $\boldsymbol{X}(\tau,\sigma,u)$. Для решения этой задачи нам потребуется ряд вспомогательных утверждений.

Обозначим через $G_0(i, j)$, $G_{|0|}(i, j)$, $\hat{G}(i, j)$ матрицы, полученные при $A = A_0$, $D = D_0$; $A = |A_0|$, $D = |D_0|$; $A = |A_0| + \Delta A$, $D = |D_0| + \Delta D$.

Л е м м а 1. *Для любых матриц A, D, удовлетворяющих неравенствам* (2), *справедливы оценки*

$$| G(i, j) - G_0(i, j) | \le \hat{G}(i, j) - G_{|0|}(i, j);$$

$$| G(i, j) | - \hat{G}(i, j) \le 0;$$

кроме того,

$$| G_0(i, j) | - G_{|0|}(i, j) \le 0 \tag{6}$$

$$(i = 0,1,2,..., j = 0,1,2,...).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем неравенства (6). Для этого воспользуемся математической индукцией по индексу i. Очевидно, при $i = 0$ это неравенство выполняется. Предположим, что оно выполняется при некотором i и проверим его для $i + 1$. Но это действительно так, поскольку

$$| G_0(i + 1, j) | - G_{|0|}(i + 1, j) \le | A_0|(|G_0(i, j - 1)| - G_{|0|}(i, j - 1)) + |D_0|(|G_0(i, j)| - G_{|0|}(i, j)) \le 0.$$

Остальные неравенства, фигурирующие в лемме, доказываются аналогично.

Очевидно, $\Delta G(i, j) = \hat{G}(i, j) - G_{|0|}(i, j) \ge 0$, поэтому из леммы 1 следует, что $|G(i, j) - G_0(i, j)| \le \Delta G(i, j)$.

Л е м м а 2. *Для любых матриц A, D, B, удовлетворяющих неравенствам* (2), *имеет место неравенство*

$$| G(i, j)B - G_0(i, j)B_0 | \le (|G_0(i, j)| + \Delta G(i, j))\Delta B + \Delta G(i, j)|B_0|.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о вытекает из следующих соотношений:

$$| G(i, j)B - G_0(i, j)B_0 | = | G(i, j)B - G_0(i, j)B + G_0(i, j)B - G_0(i, j)B_0 | \le$$
$$\le \Delta G(i, j)|B| + |G_0(i, j)|\Delta B \le (|G_0(i, j)| + \Delta G(i, j))\, \Delta B + \Delta G(i, j)|B_0|.$$

Фиксируем числа τ, σ и введем в рассмотрение вектор-столбцы

$$\alpha = (\alpha(\sigma), \alpha(\sigma + 1), \dots, \alpha(\sigma + \tau)),\ \alpha_0 = (\alpha_0(\sigma), \alpha_0(\sigma + 1), \dots, \alpha_0(\sigma + \tau)),$$

$$\Delta\alpha = (\Delta\alpha(\sigma), \Delta\alpha(\sigma + 1), \dots, \Delta\alpha(\sigma + \tau)),$$

$$u = (u(0, \sigma), \dots, u(0, \sigma + \tau - 1), u(1, \sigma), \dots, u(\tau - 1, \sigma))$$

и матрицы

$$L = (G(\tau, 0), G(\tau, 1), \dots, G(\tau, \tau)),\ L_0 = (G_0(\tau, 0), G_0(\tau, 1), \dots, G_0(\tau, \tau)),$$

$$M = (G(\tau - 1, 0)B, \dots, G(\tau - 1, \tau - 1)B, G(\tau - 2, 0)B, \dots, G(0, 0)B),$$

$$M_0 = (G_0(\tau - 1, 0)B_0, \dots, G_0(\tau - 1, \tau - 1)B_0, G_0(\tau - 2, 0)B_0, \dots, G_0(0, 0)B_0).$$

В силу лемм 1, 2 справедливы оценки

$$|L - L_0| \le \Delta L,\ |M - M_0| \le \Delta M,$$

где

$$\Delta L = (\Delta G(\tau, 0), \Delta G(\tau, 1), \dots, \Delta G(\tau, \tau)),$$

$$\Delta M = ((|G_0(\tau-1, 0)| + \Delta G(\tau-1, 0))\Delta B + \Delta G(\tau-1, 0)|B_0|, \ldots,$$
$$(|G_0(\tau-1, \tau-1)| + \Delta G(\tau-1, \tau-1))\,\Delta B + \Delta G(\tau-1, \tau-1)\,|B_0|,$$
$$(|G_0(\tau-2, 0)| + \Delta G(\tau-2, 0))\,\Delta B + \Delta G(\tau-2, 0)\,|B_0|, \ldots, (|G_0(0, 0)| + \Delta G(0, 0))\,\Delta B + \Delta G(0, 0)|B_0|).$$

Кроме того, произвольный элемент $x(\tau, \sigma, u)$ сечения $\boldsymbol{X}(\tau, \sigma, u)$ пучка решений может быть представлен в виде

$$x(\tau, \sigma, u) = L\alpha + Mu.$$

Оценим разность $|\, x(\tau, \sigma, u) - x_0(\tau, \sigma, u)$, где $x_0(\tau, \sigma, u)$ – решение системы (1) при $A = A_0$, $D = D_0$, $B = B_0$, $\alpha(s) = \alpha_0(s)$.

Воспользовавшись леммой 2, получим

$$|\, x(\tau, \sigma, u) - x_0(\tau, \sigma, u)\,| \le (|L_0| + \Delta L)\Delta\alpha + \Delta L|\alpha_0| + \Delta M|u|.$$

Это значит, что справедлива

Т е о р е м а. *Сечение* $\boldsymbol{X}(\tau, \sigma, u)$ *пучка решений* $\boldsymbol{X}(t, s, u)$ *содержится в параллелепипеде*

$$\boldsymbol{P}(u) = \{x \in \boldsymbol{R}^n : |x - x_0(\tau, \sigma, u)\,| \le g + \Delta M|u|\},$$

где $g = (|L_0| + \Delta L)\,\Delta\alpha + \Delta L|\,\alpha_0|$.

3. Задача терминального управления. Пусть задан многогранник

$$\boldsymbol{F} = \{x \in \boldsymbol{R}^n : Kx \le f\},$$

где K – $(q \times n)$-матрица, f – q-вектор-столбец.

Задача терминального управления заключается в следующем: выбрать такое управление $u^0 = u^0(t, s)$, при котором сечение $\boldsymbol{X}(\tau, \sigma, u^0)$ в фиксированной точке (τ, σ) содержится в множестве $\boldsymbol{F}$. Однако, как легко убедиться, сформулированная задача разрешима не всегда. Поэтому поставим задачу терминального управления несколько иначе.

Пусть ε – q-вектор с неотрицательными координатами и $\boldsymbol{F}_\varepsilon = \{x \in \boldsymbol{R}^n : Kx \le f + \varepsilon\}$ – ε-окрестность множества $\boldsymbol{F}$. Требуется указать такое управление $u^* = u^*(t, s)$, что $\boldsymbol{X}(\tau, \sigma, u^*) \subset \boldsymbol{F}_\varepsilon$ и сумма $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_q$ – минимальна. Минимальность суммы $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_q$ означает следующее: если для некоторого другого управления $\hat{u} = \hat{u}(t, s)$ справедливо включение $\boldsymbol{X}(\tau, \sigma, \hat{u}) \subset \boldsymbol{F}_\eta$, то $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_q < \eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_q$.

Сформулированная задача попадания в минимальную окрестность множества $\boldsymbol{F}$ является достаточно сложной. Поэтому рассмотрим более простую задачу о включении параллелепипеда $\boldsymbol{P}(u)$, построенного в предыдущем разделе, в минимальную окрестность $\boldsymbol{F}_\varepsilon$. Ясно, что условие $\boldsymbol{P}(u) \subset \boldsymbol{F}_\varepsilon$ обеспечивает требование $\boldsymbol{X}(\tau, \sigma, u) \subset \boldsymbol{F}_\varepsilon$, т. е. разрешима задача терминального управления.

Используя результаты работ [6, 7], нетрудно прийти к выводу, что задача включения параллелепипеда $\boldsymbol{P}(u)$ в множество $\boldsymbol{F}_\varepsilon$ эквивалентна задаче нелинейного программирования

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_q \to \min, \tag{7}$$
$$KM_0u + |\,K|\Delta M|u| - \varepsilon \le f - KL_0\alpha_0 - |\,K|g = \xi,$$
$$\varepsilon \ge 0,\ u \in \boldsymbol{U},$$

где минимум берется по переменным u, ε.

В случае, когда $\boldsymbol{U}$ многогранник, следуя [7], введем в рассмотрение задачу линейного программирования

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_q \to \min, \tag{8}$$
$$KM_0u + |\,K|\Delta Mw - \varepsilon \le \xi,$$
$$\varepsilon \ge 0,\ |u| \le w,\ u \in \boldsymbol{U},$$

в которой минимизация проводится по переменным u, ε, w. Связь между задачами (7) и (8) описывается следующими утверждениями, доказанными работе [7, с. 145].

1. Пусть $\boldsymbol{P}_1$ и $\boldsymbol{P}_2$ – множества планов задач (7) и (8). Тогда $\boldsymbol{P}_1$ есть ортогональная проекция множества $\boldsymbol{P}_2$ на подпространство переменных u, ε, w.

2. Оптимальный план u^*, ε^*, w^* задачи (8) существует, при этом пара u^*, ε^* является решением задачи (7).

Сформулированные утверждения дают конструктивный способ решения задачи терминального управления попадания в минимальную окрестность множества $\boldsymbol{F}$.

Литература

1. *Прэтт У.* Цифровая обработка изображений: в 2 кн. М., 1982. Кн. 1.
2. *Прэтт У.* Цифровая обработка изображений: в 2 кн. М., 1982. Кн. 2.
3. *Kaczorek T.* Two-dimensional linear systems. Berlin, 1985.
4. *Гайшун И. В.* Многомерные системы управления. Минск, 1996.
5. *Гайшун И. В., Горячкин В. В.* // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1989. № 4. С. 3–8.
6. *Ащепков Л. Т.* // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1980. № 2. С. 510–513.
7. *Ащепков Л. Т., Бадам У.* Модели и методы повышения живучести управляемых систем. Владивосток, 2006.

I. V. GAISHUN, V. V. GORYACHKIN, V. V. KRAKHOTKO

ESTIMATES OF SOLUTIONS OF TWO-PARAMETER DISCRETE SYSTEMS WITH INTERVAL COEFFICIENTS

Summary

External evaluations of trajectories for a stationary two-parameter discrete system with interval coefficients were obtained, with the use of which a constructive method of management, resulting in a minimum set of solutions in a neighborhood of a given polyhedron, was proposed.