

ISSN 1561-2430 (Print)
 ISSN 2524-2415 (Online)
 УДК 519.177

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2026-62-2-109-116>

Поступила в редакцию 13.04.2026

Received 13.04.2026

В. И. Бенедиктович

Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь

ПАНЦИКЛИЧНОСТЬ 1-ЖЕСТКИХ ГРАФОВ

Аннотация. Более 50 лет назад В. Хватал ввел новый инвариант для графа, который измеряет, насколько крепко связаны друг с другом различные части графа, и назвал его жесткостью графа. С тех пор было получено множество результатов, в основном касающихся взаимосвязи между условиями жесткости и существованием в нем циклических структур, в частности, выяснению гамильтоновости и панциклическости графа. Многие важные результаты были получены с использованием спектральной теории графов. В 1976 г. Дж. Бонди выдвинул метагипотезу, согласно которой почти любое нетривиальное условие на графе, из которого следует, что граф гамильтонов, также влечет, что граф является панциклическим. Мы подтверждаем метагипотезу Бонди для 1-жестких графов в терминах спектрального радиуса.

Ключевые слова: гамильтоновость, панциклическость, матрица смежности, спектральный радиус графа, t -жесткий граф

Для цитирования. Бенедиктович, В. И. Панциклическость 1-жестких графов / В. И. Бенедиктович // Весті Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. – 2026. – Т. 62, № 2. – С. 109–116. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2026-62-2-109-116>

Vladimir I. Benediktovich

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus

PANCYCLICITY OF 1-TOUGH GRAPHS

Abstract. More than 50 years ago, Chvátal introduced a new graph invariant that measures how tightly different parts of the graph are connected to each other, which he called graph toughness. From then on a lot of research has been obtained, mainly related to the relationship between toughness conditions and the existence of cyclic structures, in particular, determining whether the graph is Hamiltonian and pancyclic. Many important results have been obtained using spectral graph theory. Bondy in 1976, has suggested the metaconjecture that almost any nontrivial condition on a graph which implies that the graph is Hamiltonian also implies that the graph is pancyclic. We confirm the Bondy's metaconjecture for 1-tough graphs in terms of spectral radius.

Keywords: Hamiltonicity, pancyclicity, adjacency matrix, spectral radius of a graph, t -tough graph

For citation. Benediktovich V. I. Pancyclicity of 1-tough graphs. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk* = *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2026, vol. 62, no. 2, pp. 109–116 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2026-62-2-109-116>

Мы будем рассматривать всюду простые конечные неориентированные графы.

Пусть G и H – два непересекающихся графа. Обозначим через $G + H$ дизъюнктное объединение G и H , которое является графом с множеством вершин $V(G) \cup V(H)$ и множеством ребер $E(G) \cup E(H)$. Дизъюнктное объединение k копий графа G обозначается через kG . Обозначим через $G \vee H$ соединение графов G и H , которое получается из дизъюнктного объединения $G + H$ добавлением ребер, соединяющих каждую вершину графа G с каждой вершиной графа H . Далее будем рассматривать (n, m) -граф G порядка n и размера m . Будем обозначать через $\delta(G)$ минимальную степень графа G , через $c(G)$ – число компонент графа G , а через $G[X]$ – подграф G , индуцированный подмножеством вершин X . Подмножество C вершин связного графа G называется вершинным разрезом графа G , если граф $G[V \setminus C]$ несвязен.

Граф G называется гамильтоновым, если он имеет простой цикл, содержащий все вершины графа G . Граф G называется панциклическим, если он содержит простые циклы всех длин от 3 до n . Хорошо известно, что проблемы распознавания гамильтоновости и панциклическости графа являются NP-полными.

В 1973 г. В. Хватал ввел новый числовой инвариант графа – жесткость $\tau(G)$ графа G , который в отличие от связности графа учитывает, как удаление любого вершинного разреза влияет на количество полученных компонент связности. Ученый обнаружил некоторые взаимосвязи между этим параметром и существованием гамильтонова цикла в графе, а также получил несколько результатов относительно этого нового инварианта. Жесткость графа является критической мерой его устойчивости к удалению вершин, отражающей, сколько компонент остается после таких удалений, определяет уязвимость графа и имеет важное значение для понимания его структурных свойств и анализа уязвимости коммуникационной сети.

Напомним, что для некоторого действительного числа t граф G называется t -жестким, если для любого вершинного разреза S справедливо неравенство $t \cdot c(G - S) \leq |S|$.

Жесткостью $\tau(G)$ графа G называется наибольшее значение t , при котором G является t -жестким. Если G – полный граф K_n , то полагают $\tau(K_n) = +\infty$. Если G не является полным графом, то его жесткость равна

$$\tau(G) = \min \left\{ \frac{|S|}{c(G - S)} : S \subseteq V(G), c(G - S) \geq 2 \right\},$$

где минимум берется по всем вершинным разрезам G .

Исторически большинство исследований жесткости графа основывалось на ряде гипотез, изложенных в [1]. Самая сложная из них до сих пор остается открытой: существует ли константа t_0 такая, что каждый t_0 -жесткий граф содержит гамильтонов цикл? Долгое время считалось, что эта гипотеза должна быть верна для $t_0 = 2$. Но в 2000 г. было показано, что гипотеза 2-жесткости неверна [2]. С другой стороны, теперь известно, что более общая гипотеза t_0 -жесткости верна для ряда классов графов, включая планарные графы, графы без клешней и хордовые графы. Ранние исследования в этой области были сосредоточены на достаточных условиях на степени графа, которые в сочетании с определенным уровнем жесткости привели бы к существованию длинных циклов.

Другое направление исследований включало поиск условий жесткости для существования определенных k -факторов в графах. Например, если G – неполный граф четного порядка и $\tau(G) \geq 1$, то G имеет совершенное паросочетание. Другим важным результатом является

Теорема 1 [3]. Пусть G – неполный k -жесткий граф порядка не менее $k + 1$, причем $k \cdot |G|$ – четно. Тогда G имеет k -фактор.

В частности, каждый 2-жесткий граф порядка не менее 3 содержит 2-фактор, и для любого $\varepsilon > 0$ существует $(2 - \varepsilon)$ -жесткий граф без 2-фактора, а значит, негамильтонов.

Исследования жесткости графа также были сосредоточены на вопросах вычислительной сложности. Так, было показано, что проблема распознавания, будет ли граф t -жестким, является coNP-полной для любого фиксированного рационального числа $t > 0$ [4]. Кроме того, для многих подклассов графов задача распознавания t -жесткости остается NP-трудной, в частности, в классе r -регулярных графов, где $r \geq 3t$ для любого целого числа $t \geq 1$. Сложность распознавания t -жесткости r -регулярных графов остается открытой в случае, когда $2t \leq r < 3t$, а сложность распознавания в случае $r = 2t + 1$ долгое время оставалась особенно интригующей. Недавно для последнего случая нами была установлена coNP-полнота проблемы распознавания t -жесткости графа [5].

В 1952 г. Г. Дирак показал, что если граф G имеет $n \geq 3$ вершин, и каждая вершина имеет степень не менее $n/2$, то G является гамильтоновым. В 1971 г. Дж. Бонди усилил этот результат, показав, что условие Дирака влечет, что либо G является полным двудольным графом $K_{n/2, n/2}$, либо G является панциклическим. В 1973 г. ученый выдвинул следующую метатегипотезу, которая оказала значительное влияние на исследования циклической структуры графов.

Метатегипотеза [6]. Почти любое нетривиальное условие на графе, влекущее его гамильтоновость, также влечет его панциклическость. (Может существовать простое семейство исключительных графов.)

Метатегипотеза Бонди все еще остается открытой для многих условий гамильтоновости, и существуют даже условия, для которых она неверна. Однако для нескольких интересных результатов по гамильтоновости метатегипотеза Бонди оказалась справедливой.

Например, помимо усиления утверждения Дирака, Э. Шмайхель и С. Хаками показали, что при хорошо известном достаточном условии Хватала простой граф является либо панциклическим, либо двудольным [7]. Немного позже, например, известное утверждение [8] о гамильтоновости связного, локально связного графа без клешней, в 1981 г. было усилено до панциклическости графа [9]. Нами была установлена справедливость метагипотезы Бонди для t -жестких графов в случае, когда $t \in \{1; 2; 3\}$ в терминах числа ребер, спектрального радиуса и спектрального радиуса беззнакового лапласиана графа [10].

Напомним, что спектральным радиусом $\rho(G)$ графа G называется наибольшее собственное значение его матрицы смежности $A(G) = (a_{ij})$, где $a_{ij} = 1$, если вершины i и j смежны, и $a_{ij} = 0$ – иначе.

В данной статье мы продолжаем подтверждение метагипотезы Бонди для 1-жестких графов в терминах их спектрального радиуса.

Пусть K_{n-4}^{+3} – граф, полученный из $3K_1 + K_{n-4}$ путем добавления трех независимых ребер между $3K_1$ и K_{n-4} , и пусть $M_n = K_1 \vee K_{n-4}^{+3}$. В 2023 г. в [11] было доказано следующее утверждение.

Теорема 2 [11]. Пусть G – связный 1-жесткий граф порядка $n \geq 18$ с $\delta(G) \geq 2$. Если $\rho(G) \geq \rho(M_n)$, то G гамильтонов, кроме случая, когда $G \cong M_n$.

Мы усиливаем данный результат в виде следующей теоремы.

Теорема 3. Пусть G – связный 1-жесткий граф порядка $n \geq 18$ с $\delta(G) \geq 2$. Если $\rho(G) \geq \rho(M_n)$, то G является панциклическим или двудольным графом, кроме случая, когда $G \cong M_n$.

Для доказательства теоремы нам понадобятся следующие вспомогательные леммы.

Лемма 1 [12]. Пусть G – связный граф порядка $n \geq 13$ с $\delta(G) \geq 3$. Если

$$m \geq \binom{n-2}{2} + 6,$$

то G является гамильтоново-связным, кроме случая, когда $G \cong K_3 \vee (K_{n-5} + 2K_2)$.

Пусть $E_1 = \{u_1v_1, u_2v_2, \dots, u_pv_p\}$, где $p \geq 1$, и пусть $G(E_1)$ – граф с множеством вершин $V(G)$ и множеством ребер $E_1 \cup E(G)$. Если $E_1 \subseteq E(G)$, то $G(E_1) = G$.

Лемма 2 [11]. Предположим, что G – связный граф порядка $n \geq 15$. Если $m \geq \binom{n-1}{2}$ и $\delta(G) \geq 4$, то для любых ребер $e, f \in E(G)$ граф G имеет гамильтонов цикл, содержащий ребра e, f .

Лемма 3 [13; 14]. Пусть G – граф с n вершинами и m ребрами, причем $\delta \geq 1$. Тогда

$$\rho(G) \leq \frac{\delta-1}{2} + \sqrt{2m - n\delta + \frac{(\delta+1)^2}{4}},$$

при этом равенство достигается тогда и только тогда, когда G является либо δ -регулярным графом, либо графом, в котором каждая вершина имеет степень, равную δ , либо $n-1$.

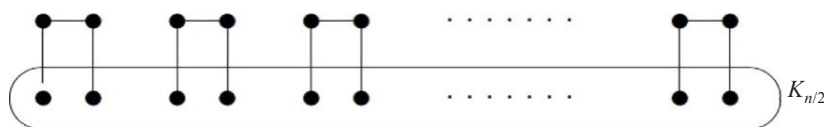
Лемма 4 [14]. Для неотрицательных целых чисел p и q , где $2q \leq p(p-1)$ и $0 \leq x \leq p-1$, функция

$$f(x) = (x-1)/2 + \sqrt{2q - px + (1+x)^2/4}$$

убывает относительно x .

Лемма 5 [15]. Пусть G – связный 1-жесткий граф порядка $n \geq 3$ со степенной последовательностью $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$, и пусть θ – наименьшее целое число, для которого $d_\theta \geq \frac{n}{2}$. Если $1 \leq \theta \leq \delta + 2$, то либо G гамильтонов, либо $G \cong M_n$.

Пусть G – граф со степенной последовательностью $\delta(G) = d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$, а t – некоторое положительное целое число.

Граф S_n Graph S_n

Сформулируем следующий предикат $P(t)$ для степенной последовательности графа G :

$$P(t): \forall i, \quad i < \frac{n}{2}, \quad d_i \leq i \Rightarrow d_{n-i+t} \geq n - i.$$

Справедливы следующие утверждения.

Лемма 6 [16]. Пусть $t \in \{1; 2; 3\}$. Если t -жесткий граф удовлетворяет предикату $P(t)$, то он гамильтонов.

Лемма 7 [16]. Пусть t – положительное целое число. Если t -жесткий граф G удовлетворяет предикату $P(t)$ и является гамильтоновым, то G является панциклическим, или двудольным.

Обозначим через S_n граф, полученный из клики $K_{n/2}$ и совершенного паросочетания P на $n/2$ вершинах добавлением совершенного паросочетания между $K_{n/2}$ и P (рисунок).

Лемма 8 [16]. Пусть гамильтонов граф G порядка n содержит не менее $n/2$ вершин степени не менее $n/2$. Тогда граф G является панциклическим, двудольным или графом S_n .

Лемма 9 [17]. Пусть G – связный граф, и H – собственный подграф графа G . Тогда имеет место строгое неравенство $\rho(H) < \rho(G)$.

Доказательство теоремы 3. Предположим противное. Пусть 1-жесткий граф G не является ни панциклическим, ни двудольным, удовлетворяя условиям теоремы. Тогда он не удовлетворяет предикату $P(1)$, поскольку в противном случае, согласно лемме 6, он был бы гамильтоновым и, следовательно, по лемме 7, панциклическим или двудольным. Таким образом, существует положительное целое число k такое, что $1 \leq k < \frac{n}{2}$, $d_k \leq k$ и $d_{n-k+1} \leq n - k - 1$. Тогда, так как $2 \leq \delta(G) \leq d_k \leq k$, имеем

$$\begin{aligned} 2m &= \sum_{i=1}^k d_i + \sum_{i=k+1}^{n-k+1} d_i + \sum_{i=n-k+2}^n d_i \leq k^2 + (n - 2k + 1)(n - k - 1) + (k - 1)(n - 1) = \\ &= n^2 - (2k + 1)n + 3k^2. \end{aligned} \quad (1)$$

Из лемм 3 и 4 и условия $2 \leq \delta$ получаем неравенство

$$\rho(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m - 2n + \frac{9}{4}}. \quad (2)$$

Заметим, что по условию теоремы и согласно лемме 9 имеем нижнюю оценку для спектрального радиуса

$$\rho(G) \geq \rho(M_n) > \rho(K_{n-3}) = n - 4.$$

Комбинируя последнее неравенство с неравенством (2), получаем

$$2m > n^2 - 7n + 18, \quad (3)$$

поэтому

$$m \geq \binom{n-3}{2} + 4.$$

Поскольку $k < \frac{n}{2}$, то $n \geq 2k + 1$. Если $k \geq 4$, то, согласно (1) и (3), имеем

$$(2k-6)(2k+1) \leq (2k-6)n = (2k+1)n - 7n \leq 3k^2 + n^2 - 2m - 7n < 3k^2 - 18, \quad (4)$$

откуда получаем $k < \frac{10 + \sqrt{52}}{2}$, и поэтому $k \leq 8$. Из неравенства (4) получаем

$$n < \frac{3k^2 - 18}{2k - 6} = \frac{1}{2} \left(3k + 9 + \frac{9}{k-3} \right) < 18$$

для $4 \leq k \leq 8$, что невозможно, поскольку по условию $n \geq 18$.

Далее рассмотрим оставшиеся случаи $k = 2$ и $k = 3$.

Заметим, что в силу условий теоремы граф G не является подграфом M_n , поскольку иначе, в силу леммы 9 и условия $G \not\cong M_n$, выполнялось бы строгое неравенство $\rho(G) < \rho(M_n)$, что противоречило бы условию $\rho(G) \geq \rho(M_n)$.

Пусть $\theta \geq 1$ – наименьшее целое число, для которого $d_\theta \geq \frac{n}{2}$ в G . Далее разделим доказательство на следующие 2 случая.

С л у ч а й 1. $k = 2$.

Так как $\delta \geq 2$ и $d_2 \leq 2$, то имеем $d_1 = d_2 = \delta = 2$. Пусть v_1, v_2, v_3 – вершины графа G такие, что $d_G(v_i) = d_i$ для $1 \leq i \leq 3$.

Если $d_3 \leq 5$, то, поскольку $m \geq \binom{n-3}{2} + 4$, получаем

$$m(G - \{v_1, v_2, v_3\}) \geq \binom{n-3}{2} + 4 - 9 = \binom{n-3}{2} - 5,$$

поэтому

$$d_4 \geq \binom{n-3}{2} - 5 - \binom{n-4}{2} = n - 9 \geq \frac{n}{2}.$$

Для $n \geq 18$ это означает, что $\theta = 4$. Так как $\delta = 2$, то $\theta - \delta = 2$. Тогда, согласно лемме 5, граф G – гамильтонов. А поскольку число вершин степени, по крайней мере, $n/2$ не менее, чем $n - 3 \geq n/2$ при $n \geq 18$, то по лемме 8 граф G является панциклическим либо двудольным, что приводит к противоречию.

Таким образом, мы можем предполагать, что $d_3 \geq 6$, и поэтому $\delta(G - \{v_1, v_2\}) \geq 4$. Поскольку $m \geq \binom{n-3}{2} + 4$, то отсюда следует, что

$$m(G - \{v_1, v_2\}) \geq \binom{n-3}{2}. \quad (5)$$

Если $v_1 v_2 \in E(G)$, то $N_G(v_1) \cap N_G(v_2) = \emptyset$, так как в противном случае имеем $N_G(v_1) \cap N_G(v_2) = \{u\}$, и вершина u является точкой сочленения, что невозможно, поскольку тогда жесткость графа G была бы $\tau(G) \leq \frac{1}{2}$.

Пусть $w_1 \in N_G(v_1) \setminus \{v_2\}$ и $w_2 \in N_G(v_2) \setminus \{v_1\}$. Тогда из неравенства (5) и леммы 2 следует, что граф $G(w_1 w_2) - \{v_1, v_2\}$ имеет гамильтонов цикл C_1 , содержащий ребро $w_1 w_2$. Отсюда получаем, что граф G имеет гамильтонов цикл $C_1 - w_1 w_2 + w_1 v_1 + v_1 v_2 + v_2 w_2$.

Если $v_1 v_2 \notin E(G)$, то предположим, что $N_G(v_1) = \{w_1, w_2\}$ и $N_G(v_2) = \{w_3, w_4\}$. Тогда из неравенства (5) и леммы 2 следует, что граф $G(w_1 w_2, w_3 w_4) - \{v_1, v_2\}$ имеет гамильтонов цикл C_2 , содержащий ребра $w_1 w_2$ и $w_3 w_4$, и, следовательно, граф G имеет гамильтонов цикл $C_2 - w_1 w_2 - w_3 w_4 + w_1 v_1 + w_2 v_1 + w_3 v_2 + w_4 v_2$.

Покажем теперь, что в обоих случаях граф G содержит, по крайней мере, $n/2$ вершин степени не менее $n/2$.

Пусть $a_1 \leq \dots \leq a_n$ и $b_1 \leq \dots \leq b_n$ – две упорядоченные по неубыванию числовые последовательности длины n , удовлетворяющие некоторому свойству P . Говорят, что последовательность $\{a_i\}$ *мажорирует* последовательность $\{b_i\}$, если $a_i \geq b_i$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$. Кроме того, последовательность $\{a_i\}$, удовлетворяющая свойству P , называется *наибольшей*, если не существует последовательности, удовлетворяющей свойству P , которая мажорирует последовательность $\{a_i\}$.

Нетрудно видеть, что наибольшей степенной последовательностью графа G , которая удовлетворяет свойству $P = \text{«менее } n/2 \text{ вершин имеют степень менее } n/2\text{»}$, является следующей:

$$\left(2, 2, \underbrace{\frac{n}{2}-1, \dots, \frac{n}{2}-1}_{\frac{n}{2}-1}, \underbrace{\frac{n}{2}, \dots, \frac{n}{2}}_{\frac{n}{2}-1} \right).$$

Тогда для такой степенной последовательности получаем, что

$$2m = 4 + \left(\frac{n}{2} - 1 \right)^2 + \frac{n}{2} \left(\frac{n}{2} - 1 \right) = \frac{n^2}{2} - \frac{3}{2}n + 5,$$

что при условии $n \geq 18$ строго меньше, чем

$$n^2 - 7n + 20 = 2 \left(\binom{n-3}{2} + 4 \right) \leq 2m,$$

противоречие. Тогда по лемме 8 из гамильтоновости графа G следует его панцикличность либо двудольность, противоречие.

С л у ч а й 2. $k = 3$.

Поскольку $d_3 \leq 3$, существуют 3 вершины v_1, v_2 и v_3 такие, что $d_G(v_i) \leq 3$ для $1 \leq i \leq 3$. Откуда, используя неравенство (3), получаем

$$m(G - \{v_1, v_2, v_3\}) \geq \binom{n-3}{2} + 4 - 9 = \binom{n-3}{2} - 5,$$

и, следовательно,

$$d_4 \geq \binom{n-3}{2} - 5 - \binom{n-4}{2} = n - 9 \geq \frac{n}{2}$$

для $n \geq 18$, что влечет $\theta = 4$. Кроме того, заметим, что $2 \leq \delta \leq 3$, и, следовательно, $\theta - \delta \leq 2$. Таким образом, согласно лемме 5, граф G содержит гамильтонов цикл. А поскольку при $n \geq 18$ справедливо неравенство $n - 3 \geq n/2$, то, согласно лемме 8, граф G является панциклическим или двудольным, что приводит к противоречию. Это завершает доказательство теоремы 3.

Следует отметить, что доказанная теорема усиливает не только результат, полученный в [11], но и улучшает собственную оценку для спектрального радиуса графа, полученную нами ранее для t -жестких графов в [10].

Благодарности. Работа выполнена в рамках Государственной программы фундаментальных исследований «Междисциплинарные и синергетические исследования» («Конвергенция-2030»), задание «Модели, алгоритмы и вычислительная сложность задач дискретной математики», НИР «Модели, алгоритмы и вычислительная сложность комбинаторных и оптимизационных задач» при финансовой поддержке Национальной академии наук Беларуси.

Acknowledgments. This work is carried out in the framework of the State Program for Fundamental Research «Interdisciplinary and synergistic research» (“Convergence-2030”), assignment “Models, Algorithms, and Computational Complexity of Discrete Mathematics Problems”, research work “Models, Algorithms, and Computational Complexity of Combinatorial and Optimization Problems” with the financial support of the National Academy of Sciences of Belarus.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Chvátal, V. Tough graphs and Hamiltonian circuits / V. Chvátal // *Discrete Mathematics*. – 1973. – Vol. 5, № 3. – P. 215–228. [https://doi.org/10.1016/0012-365X\(73\)90138-6](https://doi.org/10.1016/0012-365X(73)90138-6)
2. Bauer, D. Not every 2-tough graph is Hamiltonian / D. Bauer, H. J. Broersma, H. J. Veldman // *Discrete Applied Mathematics*. – 2000. – Vol. 99, № 1–3. – P. 317–321. [https://doi.org/10.1016/S0166-218X\(99\)00141-9](https://doi.org/10.1016/S0166-218X(99)00141-9)
3. Toughness and the existence of k -factors / H. Enomoto, B. Jackson, P. Katerinis, A. Saito // *Journal of Graph Theory*. – 1985. – Vol. 9, № 1. – P. 87–95. <https://doi.org/10.1002/jgt.3190090106>
4. Bauer, D. Recognizing tough graphs is NP-hard / D. Bauer, S. L. Hakimi, E. Schmeichel // *Discrete Applied Mathematics*. – 1990. – Vol. 28, № 3. – P. 191–195. [https://doi.org/10.1016/0166-218x\(90\)90001-s](https://doi.org/10.1016/0166-218x(90)90001-s)
5. Бенедиктович, В. И. Сложность распознавания жесткости в классе $(2t + 1)$ -регулярных графов // Весті Національної академії наук Беларусі. Серія фізика-математичних наук. – 2025. – Т. 61, № 4. – С. 299–305. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2025-61-4-299-306>
6. Bondy, J. A. Pancyclic graphs: Recent results, infinite and finite sets / J. A. Bondy // *Infinite and Finite Sets*. – North-Holland Pub. Co., 1975. – P. 181–187. – (Colloquia mathematica Societatis János Bolyai; vol. 10).
7. Schmeichel, E. Pancyclic graphs and a conjecture of Bondy and Chvátal / E. Schmeichel, S. L. Hakimi // *Journal of Combinatorial Theory. Series B*. – 1974. – Vol. 17, № 1. – P. 22–34. [https://doi.org/10.1016/0095-8956\(74\)90043-4](https://doi.org/10.1016/0095-8956(74)90043-4)
8. Oberly, D. J. Every connected, locally connected nontrivial graph with no induced claw is Hamiltonian / D. J. Oberly, D. P. Sumner // *Journal of Graph Theory*. – 1979. – Vol. 3, № 4. – P. 351–356. <https://doi.org/10.1002/jgt.3190030405>
9. Clark, L. Hamiltonian properties of connected locally connected graphs / L. Clark // *Congressus Numerantium*. – 1981. – Vol. 32. – P. 199–204.
10. Benediktovich, V. I. Spectral conditions of pancyclicity for t -tough graphs / V. I. Benediktovich // *Discrete Applied Mathematics*. – 2025. – Vol. 365. – P. 130–137. – <https://doi.org/10.1016/j.dam.2025.01.004>
11. Fana, D. Toughness, hamiltonicity and spectral radius in graphs / D. Fana, H. Lina, H. Lu // *European Journal of Combinatorics*. – 2023. – Vol. 110. – Art. ID 103701. <https://doi.org/10.1016/j.ejc.2023.103701>
12. Zhou, Q. Some sufficient spectral conditions on Hamilton-connected and traceable graphs / Q. Zhou, L. Wang // *Linear Multilinear Algebra*. – 2017. – Vol. 65, № 2. – P. 224–234. <https://doi.org/10.1080/03081087.2016.1182463>
13. Hong, Y. A sharp upper bound of the spectral radius of graphs / Y. Hong, J. Shu, K. Fang // *Journal of Combinatorial Theory. Series B*. – 2001. – Vol. 81, № 2. – P. 177–183. <https://doi.org/10.1006/jctb.2000.1997>
14. Nikiforov, V. Some inequalities for the largest eigenvalue of a graph / V. Nikiforov // *Combinatorics, Probability and Computing*. – 2002. – Vol. 11, № 2. – P. 179–189. <https://doi.org/10.1017/S0963548301004928>
15. Ainouche, A. Dirac's type sufficient conditions for Hamiltonicity and pancyclicity / A. Ainouche // *Graphs and Combinatorics*. – 2009. – Vol. 25, № 2. – P. 129–137. <https://doi.org/10.1007/s00373-008-0835-3>
16. Hoàng, C. Hamiltonian degree conditions for tough graphs / C. Hoàng // *Discrete Mathematics*. – 1995. – Vol. 142, № 1–3. – P. 121–139. [https://doi.org/10.1016/0012-365X\(93\)E0214-O](https://doi.org/10.1016/0012-365X(93)E0214-O)
17. Brouwer, A. E. Spectra of Graphs / A. E. Brouwer, W. H. Haemers. – New York: Springer, 2011. – 250 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-1939-6>

References

1. Chvátal V. Tough graphs and Hamiltonian circuits. *Discrete Mathematics*, 1973, vol. 5, no. 3, pp. 215–228. [https://doi.org/10.1016/0012-365X\(73\)90138-6](https://doi.org/10.1016/0012-365X(73)90138-6)
2. Bauer D., Broersma H. J., Veldman H. J. Not every 2-tough graph is Hamiltonian. *Discrete Applied Mathematics*, 2000, vol. 99, no. 1–3, pp. 317–321. [https://doi.org/10.1016/S0166-218X\(99\)00141-9](https://doi.org/10.1016/S0166-218X(99)00141-9)
3. Enomoto H., Jackson B., Katerinis P., Saito A. Toughness and the existence of k -factors. *Journal of Graph Theory*, 1985, vol. 9, no. 1, pp. 87–95. <https://doi.org/10.1002/jgt.3190090106>
4. Bauer D., Hakimi S. L., Schmeichel E. Recognizing tough graphs is NP-hard. *Discrete Applied Mathematics*, 1990, vol. 28, no. 3, pp. 191–195. [https://doi.org/10.1016/0166-218x\(90\)90001-s](https://doi.org/10.1016/0166-218x(90)90001-s)
5. Benediktovich V. I. The complexity of the decision problem of toughness in the class of $(2t + 1)$ -regular graphs. *Vestsi Natsyynal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2025, vol. 61, no. 4, pp. 299–306 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2025-61-4-299-306>
6. Bondy J. A. Pancyclic graphs: Recent results, infinite and finite sets. *Infinite and Finite Sets. Colloquia mathematica Societatis János Bolyai*; vol. 10. North-Holland Pub. Co., 1975, pp. 181–187.
7. Schmeichel E., Hakimi S. L. Pancyclic graphs and a conjecture of Bondy and Chvátal. *Journal of Combinatorial Theory. Series B*, 1974, vol. 17, no. 1, pp. 22–34. [https://doi.org/10.1016/0095-8956\(74\)90043-4](https://doi.org/10.1016/0095-8956(74)90043-4)
8. Oberly D. J., Sumner D. P. Every connected, locally connected nontrivial graph with no induced claw is Hamiltonian. *Journal of Graph Theory*, 1979, vol. 3, no. 4, pp. 351–356. <https://doi.org/10.1002/jgt.3190030405>
9. Clark L. Hamiltonian properties of connected locally connected graphs. *Congressus Numerantium*, 1981, vol. 32, pp. 199–204.
10. Benediktovich V. I. Spectral conditions of pancyclicity for t -tough graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 2025, vol. 365, pp. 130–137. – <https://doi.org/10.1016/j.dam.2025.01.004>
11. Fana D., Lina H., Lu H. Toughness, hamiltonicity and spectral radius in graphs. *European Journal of Combinatorics*, 2023, vol. 110, art. ID 103701. <https://doi.org/10.1016/j.ejc.2023.103701>

12. Zhou Q., Wang L. Some sufficient spectral conditions on Hamilton-connected and traceable graphs. *Linear Multilinear Algebra*, 2017, vol. 65, no. 2, pp. 224–234. <https://doi.org/10.1080/03081087.2016.1182463>
13. Hong Y., Shu J., Fang K. A sharp upper bound of the spectral radius of graphs. *Journal of Combinatorial Theory. Series B*, 2001, vol. 81, no. 2, pp. 177–183. <https://doi.org/10.1006/jctb.2000.1997>
14. Nikiforov V. Some inequalities for the largest eigenvalue of a graph. *Combinatorics, Probability and Computing*, 2002, vol. 11, no. 2, pp. 179–189. <https://doi.org/10.1017/S0963548301004928>
15. Ainouche A. Dirac's type sufficient conditions for Hamiltonicity and pancyclicity. *Graphs and Combinatorics*, 2009, vol. 25, no. 2, pp. P. 129–137. <https://doi.org/10.1007/s00373-008-0835-3>
16. Hoàng C. Hamiltonian degree conditions for tough graphs. *Discrete Mathematics*, 1995, vol. 142, no. 1–3, pp. 121–139. [https://doi.org/10.1016/0012-365X\(93\)E0214-O](https://doi.org/10.1016/0012-365X(93)E0214-O)
17. Brouwer A. E., Haemers W. H. *Spectra of Graphs*. New York, Springer, 2011. 250 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-1939-6>

Информация об авторе

Бенедиктович Владимир Иванович – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: vbened@im.bas-net.by

Information about the author

Vladimir I. Benediktovich – Ph. D. (Physics and Mathematics), Leading Researcher, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: vbened@im.bas-net.by