УДК 517.5

В. Н. РУСАК, И. В. РЫБАЧЕНКО

КОСИНУС-ДРОБИ ЧЕБЫШЕВА – МАРКОВА В ПРИБЛИЖЕННОМ ИНТЕГРИРОВАНИИ

Белорусский государственный университет

(Поступила в редакцию 30.05.2014)

Наименее уклоняющиеся от нуля алгебраические дроби систематически применяются в теории рациональной аппроксимации (см., напр., [1]), в частности при нахождении экстремальных оценок для производных рациональных функций, при построении рациональных операторов и нахождении порядковых оценок их уклонений в различных пространствах. В данной статье косинус-дроби Чебышева – Маркова применяются при построении квадратурных формул типа Гаусса, точных на рациональных функциях с фиксированными знаменателями.

Пусть $q_{2n-1}(x)=\prod_{j=1}^{2n-1}(1+a_jx)$, где числа a_j либо действительные и $|a_j|<1$, либо попарно комплексно-сопряженные. Введем косинус-дробь Чебышева – Маркова, полагая

$$M_n(x)=\cos\varphi_{2n}(x),\quad x\in[-1,1],\quad \varphi_{2n}(-1)=2n\pi,$$

$$\varphi'_{2n}(x)=-\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\left(1+\sum_{j=1}^{2n-1}\frac{\sqrt{1-a_j^2}}{1+a_jx}\right)=-\frac{\lambda_n(x)}{2\sqrt{1-x^2}},\tag{1}$$

где действительная часть всех радикалов берется положительной. Как хорошо известно, $M_n(x)=\mu_n(x)/\sqrt{q_{2n-1}(x)}$, где $\mu_n(x)$ — алгебраический полином, имеющий на (–1,1) n различных простых нулей $\{x_\nu\}$, $\nu=\overline{1,n}$, $-1<x_1<x_2<\ldots<x_n<1$.

Л е м м а 1. *Косинус-дроби Чебышева – Маркова удовлетворяют условиям ортогональности*

$$\int_{-1}^{1}\frac{\cos\varphi_{2n}(x)}{\sqrt{q_{2n-1}(x)}}\frac{x^k}{\sqrt{1-x^2}}dx=0,\quad k=\overline{0,n-1}.\tag{2}$$

Данная лемма 1 принадлежит С. Н. Бернштейну, доказательство имеется в работе [2].

В пространстве $C[-1,1]$ непрерывных функций определим интерполяционный оператор L_n, полагая

$$L_n(x,f)=\sum_{m=1}^{n}f(x_m)l_m(x),\quad l_m(x)=\frac{M_n(x)}{(x-x_m)M'_n(x_m)}.\tag{3}$$

Этот оператор отображает $C[-1,1]$ в пространство алгебраических дробей

$$p_{n-1}(x)\Big/\sqrt{q_{2n-1}(x)},\tag{4}$$

причем каждая функция вида (4) отображается в себя, в частности, если полином $p_{n-1}(x)\equiv 1$, то выполняется равенство

$$\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{q_{2n-1}(x_m)}}\frac{M_n(x)}{(x-x_m)M'_n(x_m)}=\frac{1}{\sqrt{q_{2n-1}(x)}}.\tag{5}$$

Л е м м а 2. *Справедливы равенства при всех* $k=\overline{1,n}$:

$$\int_{-1}^{1}\frac{M_n^2(x)}{(x-x_k)^2}\frac{dx}{(M_n'(x_k))^2\sqrt{1-x^2}}=\sqrt{q_{2n-1}(x_k)}\int_{-1}^{1}\frac{M_n(x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{q_{2n-1}(x)}(x-x_k)M_n'(x_k)}. \tag{6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего проверим, что фундаментальные дроби $l_m(x)$ взаимно ортогональны с чебышевским весом. Действительно, учитывая (1), (3) и (2), найдем

$$\int_{-1}^{1}\frac{l_m(x)l_j(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_{-1}^{1}\frac{M_n(x)}{M_n'(x_m)M_n'(x_j)}\frac{M_n(x)}{(x-x_m)(x-x_j)}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=\int_{-1}^{1}M_n(x)\frac{p_{n-2}(x)}{\sqrt{q_{2n-1}(x)}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=0,\quad m\neq j, \tag{7}$$

и, таким образом, ортогональность $l_m(x)$ и $l_j(x)$ установлена. Умножим теперь равенство (5) на $l_k(x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ и проинтегрируем с учетом (7), тогда

$$\int_{-1}^{1}\frac{M_n(x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{q_{2n-1}(x)}(x-x_k)M_n'(x_k)}=\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{q_{2n-1}(x_m)}}\int_{-1}^{1}\frac{M_n(x)}{(x-x_m)M_n'(x_m)}\frac{M_n(x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}}{(x-x_k)M_n'(x_k)}dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{q_{2n-1}(x_k)}}\int_{-1}^{1}\frac{M_n^2(x)}{(x-x_k)^2}\frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}}{\left(M_n'(x_k)\right)^2}dx,$$

что равносильно соотношению (6).

З а м е ч а н и е 1. В полиномиальном случае, когда все $a_j=0$, $j=\overline{1,2n-1}$, соответственно $q_{2n-1}(x)\equiv 1$, равенство (6) из леммы 2 принимает вид

$$\int_{-1}^{1}\frac{l_k^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_{-1}^{1}\frac{l_k(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

Л е м м а 3. *При всех k,* $k=\overline{1,n}$*, выполняются равенства*

$$\int_{-1}^{1}\frac{M_n^2(x)dx}{(x-x_k)^2\left(M_n'(x_k)\right)^2\sqrt{1-x^2}}=\frac{2\pi}{\lambda_n(x_k)}. \tag{8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как установлено в [1], с помощью замены $x=(1-y^2)/(1+y^2)$, отображающей $(-\infty,\infty)$ в дважды пробегаемый отрезок [–1,1], алгебраические дроби $M_n(x)$ преобразуются в косинус-дроби Бернштейна так, что

$$\cos\varphi_{2n}(x)=\cos\Phi_{2n}(y)=p_{2n}(y)/\sqrt{h_{4n}(y)},$$

$$h_{4n}(y)=\prod_{j=1}^{2n}\left(y^2+\frac{1+a_j}{1-a_j}\right),\quad -\infty<y<\infty,\quad a_{2n}=0, \tag{9}$$

где $p_{2n}(y)$ – четный алгебраический полином степени не выше $2n$. Полином $h_{4n}(y)$ является положительным на действительной оси, и его корни попарно комплексно-сопряженные, а также расположены симметрично относительно мнимой оси. Обозначим через $\{z_\nu\}$, $\nu=\overline{1,2n}$, те корни полинома $h_{4n}(y)$, для которых $\operatorname{Im} z_\nu>0$. Тогда выполняются равенства

$$h_{4n}(y)=\prod_{\nu=1}^{2n}(z_\nu-y)(\overline{z}_\nu-y),\quad \cos\Phi_{2n}(y)=\frac{1}{2}\left(\prod_{\nu=1}^{2n}\frac{z_\nu-y}{|z_\nu-y|}+\prod_{\nu=1}^{2n}\frac{\overline{z}_\nu-y}{|\overline{z}_\nu-y|}\right). \tag{10}$$

Отметим дополнительно, что если $x=(1-y^2)/(1+y^2)$, то

$$q_{2n-1}(x)=\prod_{j=1}^{2n-1}(1-a_j)\cdot h_{4n}(y)/(1+y^2)^{2n}, \qquad (11)$$

и нули $\{x_\nu\}_{\nu=1}^{n}$ косинус-дроби Чебышева — Маркова связаны с положительными нулями $\{y_\nu\}$ косинус-дроби $\cos\Phi_{2n}(y)$ равенствами

$$x_\nu=(1-y_\nu^2)/(1+y_\nu^2),\quad y_\nu>0,\quad \nu=\overline{1,n}. \qquad (12)$$

Выполняя замену переменной интегрирования в интеграле, входящем в правую часть (6), с учетом соотношений (9–12) получим

$$J_k=\int_{-1}^{1}\frac{M_n(x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{q_{2n-1}(x)}(x-x_k)}dx=\frac{1+y_k^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\Phi_{2n}(y)}{\sqrt{q_{2n-1}(x)}}\frac{dy}{y_k^2-y^2}=$$

$$=\frac{1+y_k^2}{2\left(\prod_{j=1}^{2n-1}(1-a_j)\right)^{\frac{1}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\Phi_{2n}(y)}{\sqrt{h_{4n}(y)}}\frac{(1+y^2)^n}{y_k^2-y^2}dy=$$

$$=\frac{(1+y_k^2)}{4\left(\prod_{j=1}^{2n-1}(1-a_j)\right)^{\frac{1}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\prod_{\nu=1}^{2n}(z_\nu-y)+\prod_{\nu=1}^{2n}(\overline{z}_\nu-y)}{\prod_{\nu=1}^{n}(z_\nu-y)(\overline{z}_\nu-y)}\frac{(1+y^2)^n}{y_k^2-y^2}dy. \qquad (13)$$

Будем считать $\operatorname{Im} z>0$ и найдем с помощью вычетов интеграл

$$J_k(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\prod_{\nu=1}^{2n}(z_\nu-y)+\prod_{\nu=1}^{2n}(\overline{z}_\nu-y)}{\prod_{\nu=1}^{n}(z_\nu-y)(\overline{z}_\nu-y)}\frac{(1+y^2)^n}{y^2-z^2}dy=$$

$$=\frac{\pi i}{z}\left(1+z^2\right)^n\left(\frac{\prod_{\nu=1}^{2n}(z_\nu-z)}{\prod_{\nu=1}^{2n}(z_\nu-z)(\overline{z}_\nu-z)}+\frac{\prod_{\nu=1}^{2n}(\overline{z}_\nu+z)}{\prod_{\nu=1}^{2n}(\overline{z}_\nu+z)(z_\nu+z)}\right).$$

Теперь воспользуемся равенством $J_k(y_k)=\lim\limits_{z\to y_k}J_k(z)$, подставим $J_k(y_k)$ в (13) и найдем, учитывая (11) и симметричность $\{z_\nu\}$ относительно мнимой оси

$$J_k=\frac{(1+y_k^2)(-\pi i)}{4\left(\prod_{j=1}^{2n-1}(1-a_j)\right)^{\frac{1}{2}}}\frac{(1+y_k^2)^n}{y_k}\left(\frac{\prod_{\nu=1}^{2n}(z_\nu-y_k)}{\prod_{\nu=1}^{2n}(z_\nu-y_k)(\overline{z}_\nu-y_k)}+\frac{\prod_{\nu=1}^{2n}(\overline{z}_\nu+y_k)}{\prod_{\nu=1}^{2n}(\overline{z}_\nu+y_k)(z_\nu+y_k)}\right)=$$

$$=-\frac{\pi i}{4y_k}\frac{(1+y_k^2)^{n+1}}{\left(\prod_{j=1}^{2n-1}(1-a_j)\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{h_{4n}(y_k)}}\left(\prod_{\nu=1}^{2n}\frac{z_\nu-y_k}{|z_\nu-y_k|}+\prod_{\nu=1}^{2n}\frac{\overline{z}_\nu+y_k}{|\overline{z}_\nu+y_k|}\right)=$$

$$=-\frac{\pi i}{2y_k}\frac{1+y_k^2}{\sqrt{q_{2n-1}(x_k)}}\prod_{\nu=1}^{2n}\frac{z_\nu-y_k}{|z_\nu-y_k|}. \qquad (14)$$

Обозначим $\omega_{n,k}=\prod_{\nu=1}^{2n}(z_\nu-y_k)/|z_\nu-y_k|$, тогда в силу (10) $\omega_{n,k}+\overline{\omega_{n,k}}=0$. С другой стороны, в нулях косинус-дроби $\cos\Phi_{2n}(y)$ выполняется равенство $\sin\Phi_{2n}(y_k)=\operatorname{sign}M'_n(x_k)$, или $\omega_{n,k}-\overline{\omega_{n,k}}=2i\operatorname{sign}M'_n(x_k)$, поэтому $\omega_{n,k}=i\operatorname{sign}M'_n(x_k)$. Соответственно равенство (14) будет иметь вид

$$J_k=-\frac{\pi i}{2y_k}\frac{1+y_k^2}{\sqrt{q_{2n-1}(x_k)}}i\operatorname{sign}M'_n(x_k)=$$

$$=\frac{\pi(1+y_k^2)}{\sqrt{q_{2n-1}(x_k)}2y_k}\operatorname{sign}M'_n(x_k)=\frac{\pi}{\sqrt{1-x_k^2}}\frac{\operatorname{sign}M'_n(x_k)}{\sqrt{q_{2n-1}(x_k)}}. \tag{15}$$

Из соотношений (6), (13), (15) и (1) получим

$$\int_{-1}^{1}\frac{M_n^2(x)dx}{(x-x_k)^2\left(M'_n(x_k)\right)^2\sqrt{1-x^2}}=\frac{\sqrt{q_{2n-1}(x_k)}}{M'_n(x_k)}\frac{\pi}{\sqrt{1-x_k^2}}\frac{\operatorname{sign}M'_n(x_k)}{\sqrt{q_{2n-1}(x_k)}}=$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{1-x_k^2}\cdot\left|M'_n(x_k)\right|}=\frac{\pi}{\sqrt{1-x_k^2}}\frac{2\sqrt{1-x_k^2}}{\lambda_n(x_k)}=\frac{2\pi}{\lambda_n(x_k)},$$

и доказательство леммы 3 полностью завершено.

З а м е ч а н и е 2. Равенство (5) останется правильным, если его правую часть умножить на полином $p_{n-1}(x)$ степени не выше n–1, а m-е слагаемое левой части умножить на $p_{n-1}(x_m)$.

Пусть, как и в (1), $q_{2n-1}(x)$ – фиксированный полином, положительный на отрезке $[-1,1]$, и

$$r_{2n-1}(x)=p_{2n-1}(x)/q_{2n-1}(x) \tag{16}$$

– правильная рациональная функция, $M_n(x)$ – косинус-дробь Чебышева – Маркова. Введем рациональные функции

$$A_k(x)=M_n^2(x)\left(M'_n(x_k)(x-x_k)\right)^{-2}\left(1-M''_n(x_k)\left(M'_n(x_k)\right)^{-1}(x-x_k)\right),$$

$$B_k(x)=M_n^2(x)\left(M'_n(x_k)\right)^{-2}(x-x_k)^{-1}. \tag{17}$$

Л е м м а 4. *Рациональная функция $r_{2n-1}(x)$ вида* (16) *определяется по своим значениям и значениям производной в точках $\{x_k\}_{k=1}^n$ единственным образом и имеет представление*

$$r_{2n-1}(x)=\sum_{k=1}^{n}r_{2n-1}(x_k)A_k(x)+\sum_{k=1}^{n}r'_{2n-1}(x_k)B_k(x). \tag{18}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, при всех k и i имеем $B_k(x_i)=0$. Если $k\neq i$, то очевидными являются равенства

$$A_k(x_i)=0, A'_k(x_i)=0, B'_k(x_i)=0.$$

В свою очередь соотношения $A_k(x_k)=1$, $A'_k(x_k)=0$, $B'_k(x_k)=1$ проверяются с помощью правила Лопиталя. Если бы существовала другая рациональная функция вида (16) $r^*_{2n-1}(x)$ такая, что

$$r^*_{2n-1}(x_k)=r_{2n-1}(x_k),\quad r^{*\prime}{}_{2n-1}(x_k)=r'_{2n-1}(x_k),\quad k=\overline{1,n},$$

то их разность $r_{2n-1}(x)-r^*_{2n-1}(x)$ была бы рациональной функцией, имеющей n двойных нулей, что невозможно ввиду того, что в числителе ее находится полином степени не выше $2n$ – 1.

Отметим важный частный случай формулы (18), когда $r_{2n-1}(x)\equiv 1$, и она принимает вид

$$\sum_{k=1}^{n}A_k(x)=1. \tag{19}$$

Будем рассматривать квадратурные формулы с чебышевским весом

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + \rho_n(f) \tag{20}$$

в пространстве $C[-1,1]$. Через $R_{2n-1}(f)$ обозначим наилучшее равномерное приближение функции $f(x)$ рациональными функциями вида (16).

Т е о р е м а. *Если* $\{x_k\}_{k=1}^{n}$ *– нули косинус-дроби* $M_n(x) = \cos\varphi_{2n}(x)$ *и коэффициенты* $A_k = 2\pi/\lambda_n(x_k)$, *то квадратурная формула* (20) *точна на рациональных функциях* (16), *и для любой функции* $f(x) \in C[-1,1]$ *выполняется неравенство*

$$|\rho_n(f)| \le 2\pi \cdot R_{2n-1}(f).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пользуясь леммами 4 и 1, а также соотношениями (17) и леммой 3, найдем равенство

$$\int_{-1}^{1} \frac{r_{2n-1}(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sum_{k=1}^{n} \left(r_{2n-1}(x_k) \int_{-1}^{1} \frac{A_k(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx + r'_{2n-1}(x_k) \int_{-1}^{1} \frac{B_k(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} r_{2n-1}(x_k) \int_{-1}^{1} M_n^2(x) \left(M'_n(x_k)(x-x_k) \right)^{-2} \left(1 - \frac{M''_n(x_k)}{M'_n(x_k)}(x-x_k) \right) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} r_{2n-1}(x_k) \int_{-1}^{1} \frac{M_n^2(x)}{\left(M'_n(x_k)(x-x_k) \right)^2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2\pi}{\lambda_n(x_k)} r_{2n-1}(x_k),$$

которое означает, что остаток $\rho_n(r_{2n-1}) = 0$, т. е. квадратурная формула (20) с $A_k = 2\pi/\lambda_n(x_k)$ точна на рациональных функциях (16). В частности, отметим равенство

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2\pi}{\lambda_n(x_k)} = \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx = \pi,$$

вытекающее также и из соотношения (19).

Пусть $f(x) \in C[-1,1]$ и $r^*_{2n-1}(x)$ – рациональная функция наилучшего приближения. В силу неотрицательности коэффициентов $A_k = 2\pi/\lambda_n(x_k)$ и точности квадратурной формулы для $r^*_{2n-1}(x)$ будем иметь

$$|\rho_n(f)| = \left| \int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx - \sum_{k=1}^{n} \frac{2\pi}{\lambda_n(x_k)} f(x_k) \right| =$$

$$= \left| \int_{-1}^{1} \frac{f(x) - r^*_{2n-1}(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx + \sum_{k=1}^{n} \frac{2\pi}{\lambda_n(x_k)} \left(r^*_{2n-1}(x_k) - f(x_k) \right) \right| \le$$

$$\le R_{2n-1}(f) \cdot \left(\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \sum_{k=1}^{n} \frac{2\pi}{\lambda_n(x_k)} \right) =$$

$$= 2R_{2n-1}(f) \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 2\pi \cdot R_{2n-1}(f).$$

З а м е ч а н и е 3. Квадратурные формулы для отрезка $[-1,1]$, точные на рациональных функциях

$$p_{2n-1}(x) \Big/ \prod_{j=1}^{n-1} (1 + a_j x)^2 ,$$

содержатся в теореме. Заметим, однако, что они были получены ранее в работе [3] на основе лагранжевой интерполяции.

Литература

1. *Русак В. Н.* Рациональные функции как аппарат приближения. Минск, 1979.
2. *Бернштейн С. Н.* Собрание сочинений. М., 1952. Т. 1., ст. № 42.
3. *Ровба Е. А.* Интерполяция и ряды Фурье в рациональной аппроксимации. Гродно, 2001.

V. N. RUSAK, I. V. RYBACHENKO

CHEBYSHEV-MARKOV'S COSINE-FRACTIONS IN THE APPROXIMATE INTEGRATION

Summary

Gauss-type quadrature formulas for rational functions with simple poles have been investigated.