

УДК 517.925:517.977

А. К. ДЕМЕНЧУК

## УПРАВЛЕНИЕ АСИНХРОННЫМ СПЕКТРОМ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ПРАВЫМ БЛОКОМ НЕПОЛНОГО РАНГА

*Институт математики НАН Беларуси*

*(Поступила в редакцию 28.03.2014)*

Рассмотрим линейную систему управления

$$\dot{x} = A(t)x + Bu, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad n \geq 2, \quad (1)$$

где  $A(t)$  – непрерывная  $\omega$ -периодическая  $(n \times n)$ -матрица,  $B$  – постоянная  $(n \times n)$ -матрица. Будем считать, что управление задается в виде линейной по фазовым переменным обратной связи

$$u = U(t)x \quad (2)$$

с непрерывной  $\omega$ -периодической  $(n \times n)$ -матрицей  $U(t)$ . Задача выбора такой матрицы  $U(t)$  (коэффициента обратной связи), чтобы замкнутая система

$$\dot{x} = (A(t) + BU(t))x \quad (3)$$

имела сильно нерегулярные периодические решения с заданным спектром частот  $L$  (целевым множеством), названа задачей управления спектром нерегулярных колебаний с целевым множеством  $L$  (задачей управления асинхронным спектром) [1].

В работе [1] получено решение сформулированной задачи для системы (1) с невырожденной матрицей  $B$ , а также с вырожденной матрицей  $B$  и нулевым средним значением  $\hat{A}$  матрицы коэффициентов  $A(t)$ . В работе [2] рассмотрен случай совпадения рангов матрицы  $B$  и расширенной  $(n \times 2n)$ -матрицы, составленной из  $B$  и  $\hat{A}$ . Для блочно-треугольного усреднения матрицы коэффициентов в [3] задача решена в некритическом случае, а в [4] – в критическом случае при наличии некоторых стационарных элементов матрицы коэффициентов. Решение поставленной задачи получено в [5–7] в предположении полного столбцового ранга двух блоков нестационарной части матрицы коэффициентов, а в [8] – с линейно независимыми столбцовыми базисами этих блоков.

В настоящей работе устанавливаются условия разрешимости задачи управления асинхронным спектром для системы (1) с правым блоком неполного столбцового ранга.

Пусть  $L = \{\lambda_1, \dots, \lambda_{r'}\}$  – целевое множество частот, элементы которого попарно различны, соизмеримы между собой и несоизмеримы с  $2\pi/\omega$ . В таком случае найдется наибольшее положительное вещественное  $\lambda$ , которому будут кратны числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_{r'}$ , т. е.  $\lambda_j = k_j \lambda$  ( $k_j \in \mathbb{N}$ ;  $j = \overline{1, r'}$ ). Обозначим  $\Omega = 2\pi/\lambda$ , при этом отношение чисел  $\omega$  и  $\Omega$  иррационально.

Будем рассматривать случай вырожденной матрицы  $B$

$$\text{rank } B = r < n, \quad (n - r = d). \quad (4)$$

Обозначим через  $B_{d,n}$  и  $B_{r,n}$  матрицы, составленные соответственно из  $d$  первых и  $r$  остальных строк матрицы  $B$ . Можно считать, что первые  $d$  строк матрицы  $B$  нулевые, т. е.

$$B_{d,n} = 0, \quad (5)$$

так как в противном случае этого можно добиться линейным неособенным стационарным преобразованием. Отметим, что в силу (4), (5) ранг матрицы  $B_{r,n}$  также равен  $r$ .

Представим матрицу коэффициентов  $A(t)$  в блочном виде, учитывая структуру матрицы  $B$ . Пусть  $A_{d,d}^{(11)}(t)$ ,  $A_{r,d}^{(21)}(t)$  – ее левый верхний и нижний, а  $A_{d,r}^{(12)}(t)$ ,  $A_{r,r}^{(22)}(t)$  – правые верхний и нижний блоки (нижние индексы указывают размерность блоков). Соответственно такому представлению усредненную матрицу  $\hat{A} = \frac{1}{\omega} \int_{\omega_0}^{\omega} A(\tau) d\tau$  в свою очередь разобьем на такие же четыре блока  $\hat{A}_{d,d}^{(11)}$ ,  $\hat{A}_{r,d}^{(21)}$ ,  $\hat{A}_{d,r}^{(12)}$ ,  $\hat{A}_{r,r}^{(22)}$  соответствующих размерностей. Далее будем считать, что матрица  $\hat{A}$  имеет нижнюю блочно-треугольную форму, т. е.

$$\hat{A}_{d,r}^{(12)} = 0, \quad (6)$$

причем имеет место критический случай, когда у левого верхнего блока  $\hat{A}_{d,d}^{(11)}$  имеются чисто мнимые собственные числа

$$\pm i\lambda_j \quad (\lambda_j \in L; j=1, \dots, d'; d' \leq [d/2]). \quad (7)$$

Отметим, что в некритическом случае поставленная задача решена в работе [3].

Наряду с системой (3) рассмотрим также систему

$$\dot{x} = (\hat{A} + B\hat{U})x, \quad (\tilde{A}(t) + B\tilde{U}(t))x = 0, \quad (8)$$

где  $\hat{U}$  – среднее значение коэффициента обратной связи  $U(t)$ ,  $\tilde{U}(t) = U(t) - \hat{U}$ ,  $\tilde{A}(t) = A(t) - \hat{A}$ . С учетом предположений (5), (6) систему (8) можно записать в виде

$$\dot{x}^{[d]} = \hat{A}_{d,d}^{(11)} x^{[d]}, \quad \dot{x}_{[r]} = \left( \hat{A}_{r,d}^{(21)} + B_{r,n} \hat{U}_{n,d} \right) x^{[d]} + \left( \hat{A}_{r,r}^{(22)} + B_{r,n} \hat{U}_{n,r} \right) x_{[r]},$$

$$\tilde{A}_{d,d}^{(11)}(t) x^{[d]} + A_{d,r}^{(12)}(t) x_{[r]} = 0, \quad \left( \tilde{A}_{r,d}^{(21)}(t) + B_{r,n} \tilde{U}_{n,d}(t) \right) x^{[d]}(t) + \left( \tilde{A}_{r,r}^{(22)}(t) + B_{r,n} \tilde{U}_{n,r}(t) \right) x_{[r]}(t) = 0, \quad (9)$$

где векторы  $x = \text{col}(x^{[d]}, x_{[r]})$ ,  $x^{[d]} = \text{col}(x_1, \dots, x_d)$ ,  $x_{[r]} = \text{col}(x_{d+1}, \dots, x_n)$  и матрицы  $\hat{U} = \{\hat{U}_{n,d}, \hat{U}_{n,r}\}$ ,  $\tilde{U}(t) = \{\tilde{U}_{n,d}(t), \tilde{U}_{n,r}(t)\}$ .

Как отмечено выше, случай, когда оба блока  $\tilde{A}_{d,d}^{(11)}$  и  $A_{d,r}^{(12)}$  матрицы  $\tilde{A}(t)$  имеют полный столбцовый ранг, изучен в работах [5–7]. Поэтому предположим, что верхний левый блок имеет полный столбцовый ранг, а верхний правый – неполный, т. е. выполнены соотношения

$$\text{rank}_{\text{col}} \tilde{A}_{d,d}^{(11)} = r_1 = d, \quad \text{rank}_{\text{col}} A_{d,r}^{(12)} = r_2 < r. \quad (10)$$

Если базисные столбцы правого блока образуют со столбцами левого блока линейно независимую систему, решение поставленной задачи управления можно получить на основании [8]. Учитывая это обстоятельство, далее будем считать, что для  $(d \times n)$ -матрицы  $\{\tilde{A}_{d,d}^{(11)}, A_{d,r}^{(12)}\}$ , составленной из столбцов блоков  $\tilde{A}_{d,d}^{(11)}(t)$ ,  $A_{d,r}^{(12)}(t)$ , выполняется условие

$$\text{rank}_{\text{col}} \{\tilde{A}_{d,d}^{(11)}, A_{d,r}^{(12)}\} < d + r_2. \quad (11)$$

В силу второго условия в (10) найдется постоянная неособенная  $(r \times r)$ -матрица  $Q$  такая, что у матрицы  $A_{d,r}^{(12)}(t)Q$  первые  $d_2 = r - r_2$  столбцов нулевые, в то время как остальные  $r_2$  столбцов будут линейно независимыми. Введем замену переменных

$$x_{[r]} = Qw, \quad (12)$$

которая приводит систему (9) к системе

$$\begin{aligned} \dot{x}^{[d]} &= \hat{A}_{d,d}^{(11)} x^{[d]}, \quad \dot{w} = \hat{P}x^{[d]} + \hat{H}w, \\ \tilde{A}_{d,d}^{(11)}(t) x^{[d]} + A_{d,r}^{(12)}(t) Qw &= 0, \quad \tilde{P}(t) x^{[d]} + \tilde{H}(t) Qw = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $\hat{P} = Q^{-1}(\hat{A}_{r,d}^{(21)} + B_{r,n} \hat{U}_{n,d})$ ,  $\hat{H} = Q^{-1}(\hat{A}_{r,r}^{(22)} + B_{r,n} \hat{U}_{n,r})Q$ ,  $\tilde{P}(t) = Q^{-1}(\tilde{A}_{r,d}^{(21)}(t) + B_{r,n} \tilde{U}_{n,d}(t))$ ,  $\tilde{H}(t) = Q^{-1}(\tilde{A}_{r,r}^{(22)}(t) + B_{r,n} \tilde{U}_{n,r}(t))Q$ . Обозначим матрицу, составленную из последних  $r_2$  столбцов

матричного коэффициента  $A_{d,r}^{(12)}(t)Q$  третьей системы в (13), через  $C(t)$ . Согласно второму неравенству в (9),  $(d \times r_2)$ -матрица  $C(t)$  имеет полный столбцовый ранг. Пусть  $w = \text{col}(w^{[d_2]}, w_{[r_2]})$ ,  $w^{[d_2]} = \text{col}(w_1, \dots, w_{d_2})$ ,  $w_{[r_2]} = \text{col}(w_{d_2+1}, \dots, w_r)$ . Учитывая структуру вектора  $w$ , представим матрицу  $\hat{H}$  в блочном виде таком, что матрицы  $\hat{H}_{d_2, d_2}^{(11)}$  и  $\hat{H}_{r_2, d_2}^{(21)}$  – ее левые верхний и нижний, а матрицы  $\hat{H}_{d_2, r_2}^{(12)}$  и  $\hat{H}_{r_2, r_2}^{(22)}$  – правые верхний и нижний блоки соответственно (нижние индексы указывают размер блоков). Тогда система (13) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}^{[d]} &= \hat{A}_{d,d}^{(11)} x^{[d]}, \\ \dot{w}^{[d_2]} &= \hat{H}_{d_2, d_2}^{(11)} w^{[d_2]} + \hat{H}_{d_2, r_2}^{(12)} w_{[r_2]} + \hat{P}_1 x^{[d]}, \quad \dot{w}_{[r_2]} = \hat{H}_{r_2, d_2}^{(21)} w^{[d_2]} + \hat{H}_{r_2, r_2}^{(22)} w_{[r_2]} + \hat{P}_2 x^{[d]}, \\ \tilde{A}_{d,d}^{(11)}(t)x^{[d]} + C(t)w_{[r_2]} &= 0, \quad \tilde{P}(t)x^{[d]} + \tilde{H}(t)w = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

где матрицы  $\hat{P}_1, \hat{P}_2$  составлены соответственно из  $d_2$  первых и оставшихся  $r_2$  строк матрицы  $\hat{P}$ .

Из условий (10), (11) вытекает, что пересечение векторных подпространств  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  пространства  $\Pi$  непрерывных  $\omega$ -периодических вектор-функций, образованных линейными оболочками столбцов соответственно блоков  $\tilde{A}_{d,d}^{(11)}(t)$  и  $C(t)$ , нетривиально, т. е., другими словами,  $\dim(\Pi_1 \cap \Pi_2) = s$ ,  $1 \leq s \leq \min\{d, r_2\}$ . В таком случае между столбцами этих блоков имеется зависимость вида

$$\tilde{A}_{d,d}^{(11)}(t)F = C(t)G, \quad (15)$$

где  $F$  – постоянная  $(d \times s)$ -матрица,  $G$  – постоянная  $(r_2 \times s)$ -матрица,  $\text{rank } F = \text{rank } G = s$ .

Зависимость вида (15) в [7] определена как двусторонняя. В частных случаях, когда в линейной комбинации (15) присутствует матричный коэффициент только при левом (правом) блоке, зависимость такого рода будет левосторонней (правосторонней), т. е. односторонней. Отметим, что при односторонней зависимости пересечением подпространств  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  является одно из этих подпространств.

Так как ранг матрицы  $F$  равен  $s$ , то у нее найдется отличный от нуля минор порядка  $s$ . Без ограничения общности будем считать, что этот минор является главным, поскольку в противном случае этого можно добиться подходящим линейным невырожденным преобразованием строк матрицы  $F$ . Пусть  $F_1$  –  $(s \times s)$ -матрица, составленная из первых  $s$  строк матрицы  $F$ , а  $F_2$  –  $(d-s) \times s$ -матрица, составленная из остальных строк. Согласно сделанному допущению,  $\det F_1 \neq 0$ . Матрицу  $\tilde{A}_{d,d}^{(11)}(t)$  разобьем по вертикали на два блока  $\tilde{A}_1^{(11)}(t)$  и  $\tilde{A}_2^{(11)}(t)$  размерностей  $d \times s$  и  $d \times (d-s)$ . Представим двустороннюю зависимость (15) в виде

$$\tilde{A}_1^{(11)}(t)F_1 + \tilde{A}_2^{(11)}(t)F_2 = C(t)G,$$

откуда находим

$$\tilde{A}_1^{(11)}(t) = -\tilde{A}_2^{(11)}(t)F_2F_1^{-1} + C(t)GF_1^{-1}. \quad (16)$$

С учетом принятых обозначений четвертая система в (14) примет вид

$$\tilde{A}_1^{(11)}(t)x'^{[d]} + \tilde{A}_2^{(11)}(t)x''^{[d]} + C(t)w_{[r_2]} = 0,$$

где векторы  $x'^{[d]} = \text{col}(x'^{[d]}, x''^{[d]})$ ,  $x'^{[d]} = \text{col}(x_1^{[d]}, \dots, x_s^{[d]})$ ,  $x''^{[d]} = \text{col}(x_{s+1}^{[d]}, \dots, x_d^{[d]})$ . Подставляя в последнее равенство вместо  $\tilde{A}_1^{(11)}(t)$  зависимость (16), получим

$$\left(-\tilde{A}_2^{(11)}(t)F_2F_1^{-1} + C(t)GF_1^{-1}\right)x'^{[d]} + \tilde{A}_2^{(11)}(t)x''^{[d]} + C(t)w_{[r_2]} = 0,$$

откуда находим

$$\tilde{A}_2^{(11)}(t)\left(-F_2F_1^{-1}x'^{[d]} + x''^{[d]}\right) + C(t)\left(GF_1^{-1}x'^{[d]} + w_{[r_2]}\right) = 0.$$

Поскольку столбцы матриц  $\tilde{A}_2^{(11)}(t)$  и  $C(t)$  линейно независимы, то последняя система имеет сильно нерегулярные периодические решения тогда и только тогда, когда выполняются равенства

$-F_2 F_1^{-1} x'^{[d]} + x''^{[d]} = 0$ ,  $GF_1^{-1} x'^{[d]} + w_{[r_2]} = 0$ . Пусть матрица  $\hat{A}_{d,d}^{(11)}$  разбита соответственно представлению вектора  $x^{[d]} = \text{col}(x^{[d]}, x^{[d]})$  на четыре блока  $\hat{A}_{11}^{(11)}$ ,  $\hat{A}_{12}^{(11)}$ ,  $\hat{A}_{21}^{(11)}$ ,  $\hat{A}_{22}^{(11)}$ . Тогда система (14) запишется в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}^{[d]} &= \hat{A}_{11}^{(11)} x'^{[d]} + \hat{A}_{12}^{(11)} x''^{[d]}, \quad \dot{x}''^{[d]} = \hat{A}_{21}^{(11)} x'^{[d]} + \hat{A}_{22}^{(11)} x''^{[d]}, \\ \dot{w}^{[d_2]} &= \hat{H}_{d_2, d_2}^{(11)} w^{[d_2]} + \hat{H}_{d_2, r_2}^{(12)} w_{[r_2]} + \hat{P}_1 x^{[d]}, \\ \dot{w}_{[r_2]} &= \hat{H}_{r_2, d_2}^{(21)} w^{[d_2]} + \hat{H}_{r_2, r_2}^{(22)} w_{[r_2]} + \hat{P}_2 x^{[d]}, \\ \tilde{P}(t)x^{[d]} + \tilde{H}(t)w &= 0, \quad x''^{[d]} = F_2 F_1^{-1} x'^{[d]}, \quad w_{[r_2]} = -GF_1^{-1} x'^{[d]}, \end{aligned}$$

откуда получаем

$$\begin{aligned} \dot{x}^{[d]} &= (\hat{A}_{11}^{(11)} + \hat{A}_{12}^{(11)} F_2 F_1^{-1}) x'^{[d]}, \quad (F_2 F_1^{-1} (\hat{A}_{11}^{(11)} + \hat{A}_{12}^{(11)} F_2 F_1^{-1}) - (\hat{A}_{21}^{(11)} + \hat{A}_{22}^{(11)} F_2 F_1^{-1})) x'^{[d]} = 0, \\ \dot{w}^{[d_2]} &= \hat{H}_{d_2, d_2}^{(11)} w^{[d_2]} + (-\hat{H}_{d_2, r_2}^{(12)} GF_1^{-1} + \hat{P}_1 + \hat{P}_2 F_2 F_1^{-1}) x'^{[d]}, \\ GF_1^{-1} \dot{x}^{[d]} &= \hat{H}_{r_2, d_2}^{(21)} w^{[d_2]} + (\hat{H}_{r_2, r_2}^{(22)} GF_1^{-1} + \hat{P}_2 + \hat{P}_2 F_2 F_1^{-1}) x'^{[d]}, \\ \tilde{P}(t)x^{[d]} + \tilde{H}(t)w &= 0, \quad x''^{[d]} = F_2 F_1^{-1} x'^{[d]}, \quad w_{[r_2]} = -GF_1^{-1} x'^{[d]}, \end{aligned} \quad (17)$$

где матрицы  $\hat{P}_1$ ,  $\hat{P}_2$  образованы первыми  $s$  столбцами матриц  $\hat{P}_1$ ,  $\hat{P}_2$ , а  $\hat{P}_{21}$ ,  $\hat{P}_{22}$  – оставшимися  $d - s$  столбцами указанных матриц.

В силу [9] частотные спектры сильно нерегулярных периодических решений систем (8) и (17) совпадают.

**Л е м м а.** Пусть выполнены предположения (4)–(7), (10), (11) и (15). Тогда задача управления асинхронным спектром для системы (1) сводится к нахождению  $\omega$ -периодической матрицы  $U(t) = \hat{U} + \tilde{U}(t)$  такой, что система (17) имеет сильно нерегулярное периодическое решение  $x^{[d]}(t)$ ,  $w(t)$ , при этом нерегулярное решение замкнутой системы (3) имеет вид  $x(t) = \text{col}(x^{[d]}(t), Qw(t))$ .

Заметим, что если у матрицы  $\hat{A}_{11}^{(11)} + \hat{A}_{12}^{(11)} F_2 F_1^{-1}$  имеются чисто мнимые собственные числа

$$\pm i\lambda_j \quad (\lambda_j \in L; j = 1, \dots, l; 0 \leq 2l \leq s), \quad (18)$$

которым соответствует  $p_j$  групп элементарных делителей, то первая система в (17) имеет семейство  $\Omega$ -периодических решений

$$x^{[d]}(t) = \sum_{j=1}^l a_j \cos \lambda_j t + b_j \sin \lambda_j t, \quad (19)$$

где коэффициенты  $a_j$ ,  $b_j$  зависят от  $2l'$  произвольных вещественных постоянных ( $p_1 + \dots + p_l = l'$ ).

Имеет место

**Т е о р е м а.** Пусть в системе (1) у матрицы  $B$  первые  $d$  строк нулевые, а остальные строки линейно независимы, матрица коэффициентов  $A(t)$  удовлетворяет условиям (10), (11), (15), а ее усреднение допускает нижнее блочно-треугольное представление (6) в критическом случае (7).

Задача управления асинхронным спектром с целевым множеством  $L$  для системы (1) с обратной связью (2) разрешима тогда и только тогда, когда выполняется тождество

$$\left( F_2 F_1^{-1} \left( \hat{A}_{11}^{(11)} + \hat{A}_{12}^{(11)} F_2 F_1^{-1} \right) - \hat{A}_{21}^{(11)} - \hat{A}_{22}^{(11)} F_2 F_1^{-1} \right) x'^{[d]}(t) \equiv 0 \quad (20)$$

и имеет место оценка

$$|L| \leq [s/2] + [(r - r_2)/2]. \quad (21)$$

**Н е о б х о д и м о с т ь.** Пусть поставленная задача разрешима, т. е. найдется непрерывный  $\omega$ -периодический матричный коэффициент  $U(t)$  обратной связи (2) такой, что замкнутая система (3) имеет сильно нерегулярное периодическое решение  $x(t)$  с целевым множеством частот  $L$ . Докажем, что при сделанных предположениях (4)–(7), (10), (11) и (15) условия теоремы являются необходимыми.

Согласно лемме, вектор  $x(t) = \text{col}\left(x^{[d_1]}(t), x^{[d_2]}(t), Q\text{col}\left(w^{[d_2]}(t), w_{[r_2]}(t)\right)\right)$  удовлетворяет также системе (17). Пусть матрица  $\hat{A}_{11}^{(11)} + \hat{A}_{12}^{(11)} F_2 F_1^{-1}$  имеет  $0 \leq l \leq [s/2]$  пар чисто мнимых собственных чисел (18). Тогда компонента  $x^{[d_1]}(t)$  нерегулярного решения  $x(t)$  имеет вид (19) и мощность ее частотного спектра не превосходит величины  $[s/2]$ . Если таких собственных чисел нет, то  $x^{[d_1]}(t) \equiv 0$ . Поскольку  $x^{[d_1]}(t)$  удовлетворяет второй системе в (17), то выполняется тождество (20).

Третья система в (17) является линейной неоднородной и имеет нерегулярное решение  $w^{[d_2]}(t)$ . Поскольку частотный спектр ее неоднородной части определяется вектором  $x^{[d_1]}(t)$ , а соответствующая однородная система является стационарной, то частотный спектр решения  $w^{[d_2]}(t)$  содержит не более  $[(r-r_2)/2]$  частот, отличных от чисел  $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ . Оставшиеся компоненты  $x^{[d_1]}(t), w_{[r_2]}(t)$  нерегулярного решения системы (17) линейно выражаются через  $x^{[d_1]}(t)$ . Поэтому их частотные спектры могут содержать только числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ . Значит, для мощности частотного спектра нерегулярного решения  $x(t)$  системы (3) имеет место оценка (21).

**Д о с т а т о ч н о с т ь.** Пусть выполнены условия теоремы. Требуемый для решения поставленной задачи  $\omega$ -периодический коэффициент обратной связи управления (2) представим в каноническом виде  $U(t) = \hat{U} + \tilde{U}(t)$ . При сделанных предположениях (4)–(7), (10), (11) и (15) в смысле существования нерегулярных колебаний системы (3) и (17) эквивалентны.

Поскольку матрица  $\hat{A}_{11}^{(11)} + \hat{A}_{12}^{(11)} F_2 F_1^{-1}$  имеет собственные числа (18), то вектор  $x^{[d_1]}(t)$ , определяемый равенством (19), является решением первой системы в (17). Кроме этого, в силу тождества (20)  $x^{[d_1]}(t)$  удовлетворяет также и второй системе в (17).

Пусть  $\hat{H}_{d_2, d_2}^{(11)}$  – некоторая  $d_2 \times d_2$ -матрица, имеющая собственные числа

$$\pm i\lambda_j \quad (\lambda_j \in L; j = l+1, \dots, l+m; 0 < m \leq [d_2/2]). \quad (22)$$

Выберем матрицы  $\hat{H}_{d_2, r_2}^{(12)}, \hat{P}_{11}, \hat{P}_{12}$  таким образом, чтобы выполнялось равенство

$$-\hat{H}_{d_2, r_2}^{(12)} G F_1^{-1} + \hat{P}_{11} + \hat{P}_{12} F_2 F_1^{-1} = 0. \quad (23)$$

Этого всегда можно добиться, так как, по меньшей мере,  $\hat{P}_{11}$  линейно выражается через  $\hat{H}_{d_2, r_2}^{(12)}$  и  $\hat{P}_{12}$ . С учетом (22), (23) третья система в (17) будет иметь периодическое решение

$$w^{[d_2]}(t) = \sum_{j=l+1}^{l+m} a_j \cos \lambda_j t + b_j \sin \lambda_j t, \quad (24)$$

где коэффициенты  $a_j, b_j$  зависят от  $2m$  произвольных вещественных постоянных, а частоты  $\lambda_j$  принадлежат целевому множеству  $L$ .

Далее положим

$$\hat{H}_{r_2, d_2}^{(21)} = 0, \quad (25)$$

а матрицы  $\hat{H}_{r_2, r_2}^{(22)}, \hat{P}_{21}, \hat{P}_{22}$  выберем так, чтобы выполнялось равенство

$$\hat{H}_{r_2, r_2}^{(22)} G F_1^{-1} + \hat{P}_{21} + \hat{P}_{22} F_2 F_1^{-1} = G F_1^{-1} \left( \hat{A}_{11}^{(11)} + \hat{A}_{12}^{(11)} F_2 F_1^{-1} \right). \quad (26)$$

Этого также всегда можно добиться, поскольку, в частности,  $\hat{P}_{21}$  линейно выражается через остальные матрицы. В силу (25), (26) четвертая система в (17) превращается в тождество.

Определим векторы  $x^{[d_1]}(t)$  и  $w_{[r_2]}(t)$  следующим образом:

$$x^{[d_1]}(t) = F_2 F_1^{-1} x^{[d]}(t), \quad w_{[r_2]}(t) = G F_1^{-1} x^{[d]}(t). \quad (27)$$

Тогда  $x^{[d]}(t)$  и  $w_{[r_2]}(t)$  будут удовлетворять последним двум равенствам в системе (17).

Если выбрать матрицы

$$\tilde{P}(t) \equiv 0, \quad \tilde{H}(t) \equiv 0, \quad (28)$$

то пятая система в (17) становится тождеством.

В итоге вектор

$$\text{col}\left(x^{[d]}(t), x^{[d]}(t), w^{[d_2]}(t), w_{[r_2]}(t)\right) \quad (29)$$

будет  $\Omega$ -периодическим решением системы (17).

Из построенных выше матриц с учетом (22), (23), (25), (26) образуем матрицы

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} \hat{P}_{11} & \hat{P}_{12} \\ \hat{P}_{21} & \hat{P}_{22} \end{pmatrix}, \quad \hat{H} = \begin{pmatrix} \hat{H}_{d_2, d_2}^{(11)} & \hat{H}_{d_2, r_2}^{(12)} \\ \hat{H}_{r_2, d_2}^{(21)} & \hat{H}_{r_2, r_2}^{(22)} \end{pmatrix} \quad (30)$$

и рассмотрим матричные уравнения

$$B_{r,n} \hat{Y}_{n,d} = -\hat{A}_{r,d}^{(21)} + Q\hat{P}, \quad (31)$$

$$B_{r,n} \hat{Y}_{n,r} = -\hat{A}_{r,r}^{(22)} + Q\hat{H} \quad (32)$$

с неизвестными матрицами  $\hat{Y}_{n,d}$  и  $\hat{Y}_{n,r}$  размерностей  $n \times d$  и  $n \times r$  соответственно.

Пусть  $E_{r,r}$  – единичная  $(r \times r)$ -матрица. Так как ранг матрицы  $B_{r,n}$  равен  $r$ ,  $r < n$ , то система  $B_{r,n}Y_0 + E_{r,r} = 0$  разрешима относительно  $(n \times r)$ -матрицы  $Y_0$ . Пусть  $Y_0$  – какое-либо ее решение. Тогда матрицы  $\hat{Y}_{n,d} = Y_0(\hat{A}_{r,d}^{(21)} - Q\hat{P})$  и  $\hat{Y}_{n,r} = Y_0(\hat{A}_{r,r}^{(22)} - Q\hat{H})$  будут решениями уравнений (31) и (32). Для выбора стационарной составляющей коэффициента обратной связи положим

$$\hat{U} = \{\hat{Y}_{n,d}, \hat{Y}_{n,r}\}. \quad (33)$$

Рассмотрим также матричные уравнения

$$B_{r,n} \tilde{Y}_{n,d} = -\tilde{A}_{r,d}^{(21)}(t) + Q\tilde{P}(t), \quad (34)$$

$$B_{r,n} \tilde{Y}_{n,r}(t) = -\tilde{A}_{r,r}^{(22)}(t) + Q\tilde{H}(t), \quad (35)$$

где  $\tilde{Y}_{n,d}$  и  $\tilde{Y}_{n,r}$  – неизвестные  $\omega$ -периодические матрицы размерностей  $n \times d$  и  $n \times r$  соответственно, а  $\tilde{P}(t)$  и  $\tilde{H}(t)$  согласно (28) тождественно равны нулю. В таком случае  $Y_{n,d}(t) = Y_0 \tilde{A}_{r,d}^{(21)}(t)$  и  $Y_{n,r}(t) = Y_0 \tilde{A}_{r,r}^{(22)}(t)$  будут решениями уравнений (34) и (35). Для выбора нестационарной составляющей коэффициента обратной связи положим

$$\tilde{U}(t) = \{\tilde{Y}_{n,d}(t), \tilde{Y}_{n,r}(t)\}. \quad (36)$$

Согласно лемме, вектор

$$x(t) = \text{col}\left(x^{[d]}(t), F_2 F_1^{-1} x^{[d]}(t), Q \text{col}\left(w^{[d_2]}(t), G F_1^{-1} x^{[d]}(t)\right)\right), \quad (37)$$

где  $x^{[d]}(t)$ ,  $w^{[d_2]}(t)$  определяются равенствами (19) и (24), является сильно нерегулярным решением замкнутой системы (3).

Таким образом, при выполнении условий теоремы для системы (1) разрешима задача управления асинхронным спектром. Требуемый коэффициент обратной связи управления (2) имеет канонический вид  $U(t) = \hat{U} + \tilde{U}(t)$ , слагаемые которого определяются равенствами (33) и (36). Сильно нерегулярное периодическое решение с целевым множеством частот  $L$  замкнутой управления (2) системы (3) представлено тригонометрическим многочленом вида (37).

Теорема доказана.

Работа выполнена в Институте математики НАН Беларуси в рамках ГПНИ «Конвергенция».

## Літэратура

1. *Деменчук А. К.* // Докл. НАН Беларусі. 2009. Т. 53, № 4. С. 37–42.
2. *Деменчук А. К.* // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 9. С. 1241–1246.
3. *Деменчук А. К.* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2011. № 4. С. 11–16.
4. *Деменчук А. К.* // Докл. НАН Беларусі. 2011. Т. 55, № 5. С. 35–39.
5. *Деменчук А. К.* // Докл. НАН Беларусі. 2012. Т. 56, № 4. С. 27–31.
6. *Деменчук А. К.* // Тр. Ин-та математики НАН Беларусі. 2013. Т. 21, № 2. С. 22–29.
7. *Деменчук А. К.* // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50, № 4. С. 439–445.
8. *Деменчук А. К.* // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49, № 1. С. 3–8.
9. *Грудо Э. И.* // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 9. С. 1499–1504.

*A. K. DEMENCHUK*

### **CONTROL PROBLEM OF AN ASYNCHRONOUS SPECTRUM OF LINEAR SYSTEMS WITH A RIGHT BLOCK OF IMPERFECT RANK**

#### **Summary**

We consider a linear control periodic system with reverse communication. It is supposed that a right block of coefficient matrix has an imperfect column rank. The control problem of an asynchronous spectrum is solved.