УДК 513.6

А. А. БОНДАРЕНКО

БИРАЦИОНАЛЬНАЯ КОМПОЗИЦИЯ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ НАД ПОЛЕМ ФУНКЦИЙ

Белорусский государственный университет

(Поступила в редакцию 30.05.2014)

Пусть K – поле характеристики $\neq 2$, $X = (x_1, \ldots, x_m)$, $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ и $Z = (z_1, \ldots, z_{m+n})$ – независимые наборы переменных над K, $f(X)$ и $g(Y)$ – невырожденные квадратичные формы над полем K.

О п р е д е л е н и е. Если произведение $f(X) \cdot g(Y)$ бирационально эквивалентно над K квадратичной форме $h(Z)$ над K, т. е. $f(X) \cdot g(Y)$ представляется квадратичной K – формой $h(Z)$ над $K(X,Y)$ и $x_i, y_j \in K(Z)$, то будем говорить, что квадратичные формы $f(X)$ и $g(Y)$ образуют бирациональную композицию $h(Z)$ над полем K.

Первые результаты по проблеме композиции восходят к Гурвицу, который изучал задачу о «сумме квадратов»: найти наименьшее t при заданных m и n, чтобы выполнялось тождество $(x_1^2 + \ldots + x_m^2)(y_1^2 + \ldots + y_n^2) = \Phi_1^2 + \ldots + \Phi_t^2$, где Φ_i – билинейные формы от $x_1, \ldots, x_m$ и $y_1, \ldots, y_n$ над K. Классические результаты Гурвица и Радона по этой задаче хорошо известны (см. [1, 2]). Обзор [3] посвящен результатам и методам в изучении такой композиции квадратичных форм. Пфистер продолжил рассматривать такие тождества, но полагал, что Φ_i – рациональные функции от $x_1, \ldots, x_m$ и $y_1, \ldots, y_n$. Им описаны мультипликативные квадратичные формы [4]. В работе [5] получены первые общие теоремы о бирациональной композиции квадратичных форм над полем K. Полное решение проблемы бирациональной композиции квадратичных форм над локальными полями получено в [6], над конечными полями – в [7].

Пусть F – глобальное поле положительной характеристики $\neq 2$, т. е. F – конечное расширение поля $F_q(t)$, где F_q – конечное поле и t трансцендентно над F_q, $\mathrm{char} F_q \neq 2$. Часто F называют полем функций.

Основная цель настоящей статьи – решение проблемы бирациональной композиции над полем функций F, $\mathrm{char} F \neq 2$.

Решение проблемы бирациональной композиции $f(X)$ и $g(Y)$ над полем F, если $f(X)$ либо $g(Y)$ изотропна над F следует из теоремы 1 статьи [5]: произведение $f(X) \cdot g(Y)$ бирационально эквивалентно $h(Z)$ над F тогда и только тогда, когда $h(Z)$ – любая ненулевая квадратичная форма размерности $m + n$, невырожденная часть которой изотропна над F.

Полное решение проблемы бирациональной композиции, когда обе квадратичные формы $f(X)$ и $g(Y)$ анизотропные над полем функций F дает

Т е о р е м а. *Пусть $f(X)$ и $g(Y)$ – анизотропные квадратичные формы над полем функций F,* $\mathrm{char}\, F \neq 2$, *размерности m и n, $m \leq n$. Тогда $1 \leq m \leq n \leq 4$, бирациональная композиция $h(Z)$ над F квадратичных форм $f(X)$ и $g(Y)$ определена однозначно с точностью до F-эквивалентности следующим образом:*

если 1) $1 = m \leq n \leq 4$, то бирациональная композиция существует всегда и $h(z_1, \ldots, z_{n+1}) = ag(z_1, \ldots, z_n)$, где $a \in D_F(f)$;

2) *$m = n = 2$ и $m = n = 3$, то бирациональная композиция существует тогда и только тогда, когда $f(X)$ и $g(Y)$ эквивалентны с точностью до множителя над F, и если $m = n = 2$, то $h(z_1, z_2, z_3, z_4) = a \cdot g(z_1, z_2)$, где $a \in D_F(f)$, если $m = n = 3$, то $h(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) = \lambda(z_1^2 + \alpha z_2^2 + \beta z_3^2 + \alpha\beta z_4^2)$,* где *$g(Y) \sim \lambda f(X)$, $f(X) \sim a(x_1^2 + \alpha x_2^2 + \beta x_3^2)$;*

3) $m = n = 4$, *то бирациональная композиция существует тогда и только тогда, когда* $f(X)$ *и* $g(Y)$ *эквивалентны с точностью до множителя над* F *одной той же пфистеровой форме, и если* $f(X) \sim a(x_1^2 + ax_2^2 + \beta x_3^2 + \alpha\beta x_4^2)$, $g(Y) \sim b(y_1^2 + ay_2^2 + \beta y_3^2 + a\beta y_4^2)$, *то*, $h(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8) = ab(z_1^2 + az_2^2 + \beta z_3^2 + a\beta z_4^2)$;

4) $m = 2$, $n = 3$, *то бирациональная композиция существует тогда и только тогда, когда* $f(X)$ *является с точностью до множителя над* F *подформой* $g(Y)$, *и если* $f(X) \sim a(x_1^2 + ax_2^2)$, $g(Y) \sim b(y_1^2 + ay_2^2 + \beta y_3^2)$, *то* $h(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) = ab((z_1^2 + az_2^2 + \beta z_3^2 + a\beta z_4^2)$;

5) $m = 2$, 3 *и* $n = 4$, *то бирациональная композиция существует тогда и только тогда, когда* $g(Y)$ *эквивалентна с точностью до множителя над* F *пфистеровой форме и* $f(X)$ *с точностью до множителя над* F *является подформой* $g(Y)$, *и если* $f(X) \sim a(x_1^2 + ax_2^2)$ *при* $m = 2$, $f(X) \sim a(x_1^2 + ax_2^2 + \beta x_3^2)$ *при* $m = 3$ *и* $g(Y) \sim b(y_1^2 + ay_2^2 + \beta y_3^2 + a\beta y_4^2)$, *то* $h(z_1,\dots z_{m+n}) = ab(z_1^2 + az_2^2 + \beta z_3^2 + a\beta z_4^2)$.

Основные понятия и обозначения традиционны (см. [8–11]).

1. Докажем утверждения о квадратичных формах над произвольным полем, которые будем использовать при доказательстве основной теоремы. Они представляют и самостоятельный интерес.

П р е д л о ж е н и е 1. *Пусть* $f(X)$ *и* $g(Y)$ – *анизотропные квадратичные формы размерности* m *и* n *над полем* K *образуют бирациональную композицию* $h(Z)$, $m \le n$, $f(X)$ – *пфистерова квадратичная форма,* h_1 – *невырожденная часть* h. *Тогда* $h_1 \sim \beta_1 f + \dots + \beta_k f$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как h – бирациональная композиция квадратичных форм $f(X)$ и $g(Y)$ над K, то согласно лемме 1 из [5] $D_{K(X)}h \ni \beta_1 f(X)$, где $\beta_1 \in D_K g$. И поэтому (см. [10, теорема 2.1])

$$h_1 \sim \beta_1 f + h_2. \tag{1}$$

Если h_2 – нулевая квадратичная форма, то теорема доказана. Если $h_2 \neq 0$, то продолжаем доказательство.

Пусть $K(U) = K(u_1, \dots, u_m)$, где $u_1, \dots, u_m$ – независимые переменные над K. Квадратичная форма $f(X)$ пфистерова, поэтому по теореме 4.1 из [10] $f(U)\cdot f(X) \sim f(V)$ над $K(U)$, где $V = (v_1, \dots, v_m)$ – независимый набор переменных над K. Квадратичные формы $f(X)$ и $g(Y)$ анизотропны над K, и следовательно, анизотропны над $K(U)$, образуют бирациональную композицию $h(Z)$ над K, и следовательно, над $K(U)$, и $f(U)\cdot f(X)\cdot g(Y) = f(U)h(Z)$, и следовательно, $f(V)\cdot g(Y) \sim f(U)h(Z)$ над $K(U)$. Бирациональная композиция анизотропных квадратичных форм определена однозначно с точностью до эквивалентности согласно теореме 2 из [5], поэтому $f(U)h_1(z)$ эквивалентны $h_1(Z)$ над $K(U)$. Из (1) получаем

$$f(U)h_1(Z) \sim \beta_1 f(U)f(X) + f(U)h_2. \tag{2}$$

Но, как только что замечено, $f(U)h_1(Z)$ эквивалентно $h_1(Z)$ над $K(U)$ и $f(U)\,f(X)$ эквивалентно $f(X)$ над $K(U)$, а следовательно, по теореме 4 (см. [8, гл. 4]) из (1) и (2) получаем, что $f(U)h_2$ эквивалентно h_2 над $K(U)$.

Пусть $\beta_2 \in D_K(h_2)$, тогда квадратичная форма $\beta_2^{-1}h_2$ представляет 1 над K и $f(U) \in G_{K(U)}(\beta_2^{-1}h_2) \subset D_{K(U)}(\beta_2^{-1}h_2)$, где $G_{K(U)}(\beta_2^{-1}h_2)$ – группа подобий квадратичной формы $\beta_2^{-1}h_2$, последнее включение имеет место для всех форм, представляющих 1 (см. замечание 3.3 из [10]). А поэтому по теореме 2.1 из [10] $\beta_2^{-1}h_2 \sim f + h_3$, а следовательно, $h_2 \sim \beta_2 f + \beta_2 h_3$ и $h_1 \sim \beta_1 f + \beta_2 f + \beta_2 h_3$.

Если $\beta_2 h_3$ – нулевая квадратичная форма, то теорема доказана, если нет, то с $\beta_2 h_3$ работаем так же, как с h_2, и получаем $\beta_2 h_3 \sim \beta_3 f + \beta_3 h_4$.

Размерность квадратичных форм h_k все время уменьшается на m и на некотором шаге h_{k+1} будет нулевой квадратичной формой. Размерность h_k не может быть меньше m, ибо в этом случае $fh_k \sim h_k$, и следовательно, $h_k \sim \beta_k f + \beta_k h_{k+1}$ и этого не может быть, если $\dim h_k < m$.

В итоге получаем

$$h_1 \sim \beta_1 f + \beta_2 f + \dots + \beta_k f.$$

В дальнейшем будет полезно

П р е д п о л о ж е н и е 2. *Пусть* $f(X)$ *и* $g(Y)$ – *анизотропные квадратичные формы над* K *размерности* m *и* n *образуют бирациональную композицию* $h(Z)$ *и* $f(X)\cdot g(Y) \in D_{K(X,Y)}q$, *где* $q = q(U)$ –

анизотропная квадратичная форма над K. Тогда h_1 – подформа q и $\operatorname{rang} h \le \operatorname{rang} q$, *где h_1 – невырожденная часть h.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Можно считать, что $h(Z) = h_1(z_1, \ldots, z_r)$, где h_1 – невырожденная часть h и $r = \operatorname{rang} h$, $q(U) = q(u_1, \ldots, u_t)$, где $t = \operatorname{rang} q$. Учитывая, что $h(Z)$ – бирациональная композиция $f(X)$ и $g(Y)$, имеем $h_1(z_1, \ldots, z_r) \in D_{K(Z)}q$, следовательно, $h_1(z_1, \ldots, z_r) \in D_{L(z_1, \ldots, z_r)}q$, где $L = K(z_{r+1}, \ldots, z_{m+n})$. По теореме 2 из [5] h_1 – анизотропная квадратичная форма над K, q – по условию анизотропная квадратичная форма над K. Поэтому h_1 и q – анизотропные квадратичные формы над L и $h_1 \in D_{L(z_1, \ldots, z_r)}q$. А следовательно, по теореме 2.1 из [10] h_1 – подформа q. А значит, $\operatorname{rang} q \ge \operatorname{rang} h$. И предположение доказано.

2. Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы.

Из утверждения 66.2 (см. [11, с. 188]) следует, что если квадратичная форма над F анизотропна, то ее размерность не превосходит 4. Поэтому $1 \le m \le n \le 4$, и возможности для m и n исчерпываются следующими случаями:

1) $m = 1$, $n \le 4$;
2) $m = n = 2$ и $m = n = 3$;
3) $m = n = 4$;
4) $m = 2$ и $n = 3$;
5) $m = 2,3$ и $n = 4$.

Из теоремы 2 статьи [5] следует, что если квадратичные формы образуют бирациональную композицию $h(Z)$ над F, то $h(Z)$ определена однозначно с точностью до эквивалентности над F. Укажем необходимые и достаточные условия на $f(X)$ и $g(Y)$ в случаях 1)–5), когда они образуют бирациональную композицию над F, и укажем квадратичную форму $h(Z)$, бирационально эквивалентную произведению $f(X)$ и $g(Y)$ над F. Это и докажет нашу теорему.

В случае 1) по определению $h(Z)$ – квадратичная форма от $(n + 1)$ переменной. Если $f(X) = ax_1^2$, то $f(X)g(Y) = ax_1^2 g(y_1 \ldots y_n) = ag(z_1, \ldots, z_n)$, где $a \in D_K(f)$, $n = 1, 2, 3$ либо 4 и

$$\begin{cases} z_1 = x_1 y_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_n = x_1 y_n \\ z_{n+1} = x_1. \end{cases} \tag{3}$$

Из (3) следует, что

$$\begin{cases} x_1 = z_{n+1} \\ y_1 = \dfrac{z_1}{z_{n+1}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = \dfrac{z_n}{z_{n+1}}. \end{cases}$$

Это доказывает бирациональную эквивалентность над F произведения $f(X)g(Y)$ и квадратичной формы $h(z_1, \ldots, z_{n+1}) = ag(z_1, \ldots, z_n)$.

Случай 2), если $m = n = 2$, следует из теоремы 1 из [6] с учетом замечания 2 к этой теореме. А именно, бирациональная композиция $f(X)$ и $g(Y)$ существует тогда и только тогда, когда $f(X)$ и $g(Y)$ эквивалентны с точностью до множителя над F и $h(z_1, z_2, z_3, z_4) = ag(z_1, z_2)$, где $a \in D_K(f)$.

Случай 2), если $m = n = 3$, следует из теоремы статьи [12]. А именно, бирациональная композиция анизотропных тернарных квадратичных форм $f(X)$ и $g(Y)$ существует тогда и только тогда, когда $f(X)$ и $g(Y)$ эквивалентны с точностью до множителя над F. И если $g(Y) \sim \lambda f(X)$, $f(X) \sim a(x_1^2 + ax_2^2 + \beta x_3^2)$, то $h(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) = \lambda(z_1^2 + \alpha z_2^2 + \beta z_3^2 + \alpha\beta z_4^2)$.

Отметим общее наблюдение для всех случаев, когда существует бирациональная композиция $f(X)$ и $g(Y)$ над F. Так как $f(X)$ и $g(Y)$ анизотропные над F квадратичные формы, то невырожденная часть h_1 их бирациональной композиции h, согласно теореме 2 из [5], – анизотропная квадратичная форма над F. Следовательно, $\dim h_1 = \text{rang}h_1 = \text{rang}h \le 4$. Пусть $f(X) = af_1(X)$ и $g(Y) = bg_1(Y)$, где $1 \in D_K f_1$ и $1 \in D_k g_1$. Если бирациональная композиция $f_1(X)$ и $g_1(Y)$ равна q, то бирациональная композиция $f(X)$ и $g(Y)$, очевидно, равна $h = abq$. Согласно лемме 1 из [5], $f_1(X) \in D_{K(X)}q_1$ и $g_1(Y) \in D_{K(Y)}q_1$, где q_1 – невырожденная часть q, и следовательно, $f_1(X)$ и $g_1(Y)$ по теореме 2.1 из [10] подформы q_1. Отметим, что существование бирациональной композиции $f(X)$ и $g(Y)$ над F равносильно существованию бирациональной композиции $f_1(X)$ и $g_1(Y)$ над F.

Теперь перейдем к случаю 3): $m = n = 4$. В этом случае f_1 и g_1 ранга 4, а следовательно, по только что проведенному наблюдению, $\text{rang}q_1 = 4$, и значит, $q_1 \sim f_1$ и $q_1 \sim g_1$ над F. Согласно теореме 4.1 из [10], f_1, g_1 и h_1 – эквивалентные пфистеровы формы над F. А это и означает, что $f(X)$ и $g(Y)$ эквивалентны одной и той же пфистеровой форме с точностью до множителя над F.

Докажем достаточность условия в случае 3). Пусть $f(X) \sim a(x_1^2 + \alpha x_2^2 + \beta x_3^2 + \alpha\beta x_4^2)$ и $g(Y) \sim b(y_1^2 + \alpha y_2^2 + \beta y_3^2 + \alpha\beta y_4^2)$ эквивалентны с точностью до множителя над F одной и той же пфистеровой форме. Тогда $f(X)g(Y) = abf_1(X)g_1(Y)$ и бирациональная композиция $f_1(X)$ и $g_1(Y)$ согласно следствию 2 из [5] равна $q(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8) = z_1^2 + \alpha z_2^2 + \beta z_3^2 + \alpha\beta z_4^2$. Следовательно, бирациональная композиция $f(X)$ и $g(Y)$ равна $h = abq = ab(x_1^2 + \alpha x_2^2 + \beta x_3^2 + \alpha\beta x_4^2)$.

В случае 4) $m = 2$ и $n = 3$, пусть $f(X) = af_1(X) = a(x_1^2 + \alpha x_2^2)$, $g(Y) = bg_1(Y)$, где $1 \in D_K g_1$, и существует бирациональная композиция $f(X)$ и $g(Y)$, равная h, и f_1 и g_1, равная q, то $h = abq$. Очевидно, $f_1 = x_1^2 + \alpha x_2^2$ – пфистерова квадратичная форма и, по определению, q – квадратичная форма размерности 5. Согласно предложению 1, невырожденная часть q – квадратичная форма $q_1 \sim f + \beta f \sim \langle 1, \alpha, \beta, \alpha\beta \rangle$, ибо ранг q – четное число между 3 и 5. Далее, согласно лемме 1 из [5], $g_1(Y) \in D_{K(Y)}q_1$, а следовательно, $q_1 \sim g_1 + \langle\gamma\rangle$ (см. [10], теорему 2.1). Но q_1 – пфистерова форма и $\gamma \in D_K q_1 = G_K q_1$, поэтому $\gamma q_1 \sim q_1 \sim \gamma g_1 + \langle 1\rangle$. Но $q_1 \sim \langle 1\rangle + \langle\alpha, \beta, \alpha\beta\rangle$, следовательно, по теореме 4 из [8, гл. 4] $\gamma g_1 \sim \langle\alpha, \beta, \alpha\beta\rangle$, а значит, $g_1 \sim \gamma\beta\langle 1, \alpha\rangle + \langle\gamma\alpha\rangle$. Последнее означает, что $f_1 = \langle 1, \alpha\rangle$ – подформа g_1 с точностью до множителя из F, а значит, f – подформа g с точностью до множителя из F. И необходимость доказана.

Докажем достаточность в случае 4). Пусть $f(X) \sim a(x_1^2 + \alpha x_2^2)$, $f(X)$ является подформой $g(Y)$ с точностью до множителя, поэтому $g(Y) \sim b(y_1^2 + \alpha y_2^2 + \beta y_3^2)$. Тогда $f(X)g(Y) = ab\left[\left(x_1^2 + \alpha x_2^2\right)\left(y_1^2 + \alpha y_2^2\right) + \beta(x_1 y_3)^2 + \beta\alpha(x_2 y_3)^2\right] = ab(z_1^2 + \alpha z_2^2 + \beta z_3^2 + \alpha\beta z_4^2) = h(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)$, где

$$\begin{cases} z_1 = x_1 y_1 + \alpha x_2 y_2 \\ z_2 = x_2 y_1 - x_1 y_2 \\ z_3 = x_1 y_3 \\ z_4 = x_2 y_3 \\ z_5 = y_3. \end{cases} \tag{4}$$

Из (4) x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 рационально выражаются через z_1, z_2, z_3, z_4, z_5. Это и завершает доказательство случая 4).

Перейдем к рассмотрению последнего случая 5). Пусть вначале $m = 2$ и $n = 4$. Тогда $f(X) = af_1(X) = a(x_1^2 + \alpha x_2^2)$, $g(Y) = bg_1(Y)$, где $1 \in D_K g_1$, и существует бирациональная композиция $f(X)$ и $g(Y)$, равная h, и f_1 и g_1, равные q, то $h = abq$. Невырожденная часть q квадратичная форма q_1 анизотропна и поэтому $\text{rang}\, q = \dim q_1 \le 4$. Но g_1 – подформа q и $\dim g_1 = 4$, поэтому, как уже было, $g_1 \sim q_1$ над F. Согласно предположению 1, как и в предыдущем случае, квадратичная форма $q_1 \sim \langle 1, \alpha, \beta, \alpha\beta\rangle$, т. е. является формой пфистера. Квадратичная форма f_1 является подформой квадратичной формы q_1. Следовательно, $g(Y) = ag_1(Y)$ эквивалентна с точностью до множителя над F пфистеровой форме q_1, а $f(X)$ является эквивалентной с точностью до множителя над F подформе квадратичной формы $g(Y)$. А это и доказывает необходимость.

Докажем достаточность. Пусть $f(X) = a(x_1^2 + \alpha x_2^2) = af_1$, можем считать $g(Y) = b(y_1^2 + \alpha y_2^2 + \beta y_3^2 + \alpha\beta y_4^2) = bg_1(Y)$. Тогда $f(X) \cdot g(Y) = abf_1 g_1$, где g_1 – пфистерова квадратичная форма, а f_1 – ее подформа. Поэтому, согласно следствию 2 из [5], существует бирациональная композиция $f_1(X)$ и $g_1(Y)$, равная $q(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) = z_1^2 + \alpha z_2^2 + \beta z_3^2 + \alpha\beta z_4^2$. А тогда бирациональная композиция $f(X)$ и $g(Y)$ равна $h(Z) = abq(Z)$.

И наконец, последний случай $m = 3$, $n = 4$, $f(X) = af_1(X) = a(x_1^2 + \alpha x_2^2 + \beta x_3^2)$, $g(Y) = bg_1(Y)$, где $1 \in D_K g_1(Y)$. Существует бирациональная композиция $f(X)$ и $g(Y)$ над F, равная h, а $f_1(X)$ и $g_1(Y)$ равна q. Как и в предыдущем случае, невырожденная часть квадратичной формы q – квадратичная форма q_1 размерности 4 и $g_1 \sim q_1$ над F, а квадратичная форма f_1 – подформа g_1 , т. е. g_1 можно считать эквивалентной квадратичной форме <1, α, β, γ> и $g_1(y_1, y_2, y_3, 0) \sim$ <1, α, β>. Так как q – бирациональная композиция f_1 и g_1, то $f_1(X) \cdot g_1(Y) \in D_{K(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, y_4)} q_1 = D_{K(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3)(y_4)} q_1$. А тогда по теореме 2.3 из [10] $f_1(X) \cdot g_1(Y) \in D_{K(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3)[y_4]} q_1$. И можем в последнем представлении $f_1(X) g_1(Y)$ формой q_1 положить $y_4 = 0$. Тогда получим $f_1(X)\, g_1(y_1, y_2, y_3, 0) \in D_{K(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3)} q_1$. Согласно теореме из [12], существует бирациональная композиция f_1 = <1, α, β> и $g_1(y_1, y_2, y_3, 0) =$ $= y_1^2 + \alpha y_2^2 + \beta y_3^2$, равная $m(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) = z_1^2 + \alpha z_2^2 + \beta z_3^2 + \alpha\beta z_4^2$. А тогда по предположению 2 квадратичная форма <1, α, β, αβ> является подформой q_1. А так как $\dim q_1 = 4$, то $q_1 \sim$ <1, α, β, αβ>, т. е. q_1 является пфистеровой формой. Следовательно, $g(Y) = bg_1(Y)$ является с точностью до множителя над F пфистеровой квадратичной формой, а $f(X)$ – подформой $g(Y)$ с точностью до множителя над F. И необходимость доказана.

Рассмотрим достаточность в последнем случае. Пусть $f(X) = a(x_1^2 + \alpha x_2^2 + \beta x_3^2) = af_1(X)$ и $g(Y) = b(y_1^2 + \alpha y_2^2 + \beta y_3^2 + \alpha\beta y_4^2) = bg_1(Y)$, т. е. $g(Y)$ – пфистерова квадратичная форма с точностью до постоянного множителя над F, а $f(X)$ – ее подформа с точностью до постоянного множителя над F. $f(X) \cdot g(Y) = abf_1(X) \cdot g_1(Y)$, где $g_1(Y)$ – пфистерова квадратичная форма над F, а $f_1(X)$ – ее подформа. Тогда, согласно следствию 2 из [5], бирациональная композиция $f_1(X)$ и $g_1(Y)$ с точностью до эквивалентности над F равна $q(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7) = z_1^2 + \alpha z_2^2 + \beta z_3^2 + \alpha\beta z_4^2$. А тогда бирациональная композиция $f(X)$ и $g(Y)$ равна $h(Z) = abq(Z)$. И теорема полностью доказана.

Литература

1. *Hurwitz A.* // Math. Ann. 1923. Bd. 88, N 1/2. S. 1–25.
2. *Radon J.* // Abh. Math. Sem. Univer. Humburg. 1922. Bd. 1, N 1. S. 1–14
3. *Lam K. Y.* // Quadratic and hermition Forms. CMS Conf. Proc. Vol. 4. Providence, 1984. P. 173–192
4. *Pfister A.* // Arch. Math. 1965. Bd. 16, N 1. P. 363–370.
5. *Бондаренко А. А.* // Весцi НАН Беларусi. Сер фiз.-мат. навук. 2007. № 4. С. 56–61.
6. *Бондаренко А. А.* // Мат. заметки. 2009. Т. 85, № 5. С. 661–670.
7. *Бондаренко А. А.* // Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. 2010. № 3. С. 90–93.
8. *Серр Ж.-П.* Курс арифметики. М., 1972.
9. *Lam T. Y.* Algebric theory of quadratic forms. Bengamin, 1973.
10. *Knebush M., Scharlau W.* Algebric Theory of quadratic forms. Generic methods and pfister forms. DMV Sem1. Boston, 1980.
11. *O'Meara O. T.* Introduction to Quadratic Forms. Berlin, 1971.
12. *Бондаренко А. А.* // Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. 2012. № 2. С. 106–110.

A. A. BONDARENKO

BIRATIONAL COMPOSITION OF QUADRATIC FORMS OVER A FUNCTION FIELD

Summary

Let $f(X)$ and $g(Y)$ be nonsingular quadratic forms over a field K having dimensions m and n, char$K \neq 2$. The following problem of a birational compositions $f(X)$ and $g(Y)$ is considered: under which conditions is the product $f(X)\, g(Y)$ birationally equivalent over K to a quadratic form $h(Z)$ of dimension $m+n$ over K?

The main result of the paper is a complete solution of the birational composition problem for quadratic forms $f(X)$ and $g(Y)$ over the function field F, char $F \neq 2$.