УДК 513.51

Е. А. РОВБА, Е. В. ДИРВУК

РАЦИОНАЛЬНАЯ КВАЗИ-ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ЭРМИТА – ФЕЙЕРА

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы

(Поступила в редакцию 11.07.2014)

Введение. Интерполирование рациональными функциями на отрезке $[-1,1]$ по специальным системам узлов впервые было рассмотрено В. Н. Русаком [1] в 1962 г. В качестве узлов интерполирования выбирались нули рациональных функций Чебышева – Маркова, частным случаем которых являются классические узлы Чебышева первого рода. В работе [2] были построены рациональные интерполяционные функции типа Эрмита – Фейера.

Позже В. Н. Русак, Т. С. Мардвилко, Н. В. Гриб и др. использовали подобные интерполяционные функции для оценки рациональных приближений некоторых классов функций (см., напр., [3]).

Рациональная квази-интерполяция Эрмита – Фейера впервые была рассмотрена в работе Г. Мина [4]. В этой работе был построен соответствующий интерполяционный процесс и доказана его равномерная сходимость для функций $f \in C[-1,1]$ при весьма жестких условиях на полюсы – полюсы аппроксимирующих рациональных функций не должны иметь предельных точек на отрезке $[-1,1]$. В таком случае рациональные функции ведут себя подобно полиномам. Специфические свойства, аппроксимирующие рациональные функции, проявляются именно в том случае, когда полюса располагаются вблизи промежутка, на котором рассматривается приближение.

В настоящей работе построены интерполяционные рациональные функции типа Эрмита – Фейера на основании иных подходов в сравнении с [4]. В основе нашего метода лежат идеи работ [2, 5]. При этом доказывается равномерная сходимость рассматриваемого интерполяционного процесса для функции $f \in C[-1,1]$ при условии полноты соответствующей системы рациональных функций. В качестве узлов интерполирования выбираются нули рациональных функций Чебышева – Маркова второго рода.

Построение квази-интерполяционного процесса Эрмита – Фейера. Пусть числа a_k, $k = 0,1,\ldots,\ n-1$, являются действительными и $a_k \in (-1,1)$ либо попарно комплексно-сопряженными, $a_0 = 0$. Обозначим через $U_n(x)$ рациональную функцию Чебышева – Маркова второго рода (см., напр., [6])

$$U_n(x) = \frac{\sin \mu_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}, \mu_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \arccos \frac{x+a_k}{1+a_k x},$$

причем

$$\mu_n{}'(x) = -\frac{\lambda_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}, \lambda_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sqrt{1+a_k^2}}{1+a_k x}. \tag{1}$$

Функция $U_n(x)$ является рациональной порядка $n-1$ и имеет $n-1$ нулей на интервале $(-1,1)$:

$$-1 < x_{n-1} < x_{n-2} < \ldots < x_1 < 1, \mu_n(x_k) = k\pi, k = 1,2,\ldots,n-1.$$

Полагаем, что $x_0 = 1$ и $x_n = -1$. Тогда для всякой функции *f*, определенной на отрезке $[-1,1]$, можно построить следующую рациональную функцию:

$$H_n(x,f) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) A_k(x) + \sum_{k=1}^{n-1} y_k B_k(x), \tag{2}$$

где y_k, $k=1,2,\ldots,\ n-1$, – произвольные действительные числа. Функции $A_k(x)$ и $B_k(x)$ определяются следующим образом:

$$A_k(x)=\frac{(1-x^2)(1-x_kx)}{\lambda_n(x)\lambda_n(x_k)}\left(\frac{U_n(x)}{x-x_k}\right)^2,\ k=1,2,\ldots,\ n-1;; \tag{3}$$

$$A_0(x)=\frac{1+x}{2\lambda_n(x)\lambda_n(1)}U_n^2(x),\ \ A_n(x)=\frac{1-x}{2\lambda_n(x)\lambda_n(-1)}U_n^2(x);$$

$$B_k(x)=\frac{(1-x^2)(1-x_k^2)}{\lambda_n(x)\lambda_n(x_k)}\frac{U_n^2(x)}{x-x_k},\ k=1,2,\ldots,\ n-1. \tag{4}$$

Покажем, что функция $H_n(x,f)$ обладает свойствами:

$$\begin{aligned}&H_n(x_k,f)=f(x_k),\ k=0,1,\ldots,n;\\&H_n{}'(x_k,f)=y_k,\ k=1,2,\ldots,n-1.\end{aligned} \tag{5}$$

Действительно, при $k=1,2,\ldots,n-1$, воспользовавшись правилом Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to x_k}A_k(x)=\frac{(1-x_k^2)^2}{\lambda_n^2(x_k)}\left(\lim_{x\to x_k}\frac{\sin\mu_n(x)}{\sqrt{1-x^2}\,(x-x_k)}\right)^2=\frac{1-x_k^2}{\lambda_n^2(x_k)}\left(\lim_{x\to x_k}\frac{\cos\mu_n(x)(-\lambda_n(x))}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2=1.$$

Аналогично

$$\lim_{x\to x_k}A_k(x)=1,\ k=0,n.$$

Если же $j,k=0,1,\ldots,n,\ j\neq k$, то легко видеть, что

$$A_k(x_j)=0,\ \ A_k{}'(x_j)=0.$$

Покажем теперь, что и

$$\lim_{x\to x_k}A_k{}'(x)=0,\ k=1,2,\ldots,n-1. \tag{6}$$

Из равенств (2) получим

$$A_k{}'(x)=\frac{-x_k\lambda_n(x)-(1-x_kx)\lambda_n{}'(x)}{\lambda_n^2(x)\lambda_n(x_k)}\left(\frac{\sin\mu_n(x)}{x-x_k}\right)^2+2\frac{1-x_kx}{\lambda_n(x)\lambda_n(x_k)}\frac{\sin\mu_n(x)}{x-x_k}\left(\frac{\sin\mu_n(x)}{x-x_k}\right)'. \tag{7}$$

Теперь нетрудно найти, что

$$\lim_{x\to x_k}\frac{\sin\mu_n(x)}{x-x_k}=-\cos\mu_n(x_k)\frac{\lambda_n(x)}{\sqrt{1-x_k^2}}, \tag{8}$$

$$\lim_{x\to x_k}\left(\frac{\sin\mu_n(x)}{x-x_k}\right)'=\frac{1}{2}\cos\mu_n(x_k)\mu_n{}''(x_k),\ \ \mu_n{}''(x)=-\frac{x\lambda_n(x)+(1-x^2)\lambda_n{}'(x)}{(1-x^2)^{3/2}}.$$

Воспользовавшись этими равенствами, из (7) получим соотношения (6).

Таким образом, в итоге мы имеем:

$$\begin{aligned}&A_k(x_j)=\begin{cases}1,\ j=k,\\0,\ j\neq k,\ \ k=0,1,\ldots,n;\end{cases}\\&A_k{}'(x_j)=0,\quad k,j=1,2,\ldots,n-1.\end{aligned} \tag{9}$$

Что касается функции $B_k(x)$ (см. (4)), то очевидно

$$\begin{aligned}&B_k(x_j)=0,\quad j,k=0,1,\ldots,n;\\&B_k{}'(x_j)=0,\ \ j,k=1,2,\ldots,n-1,\ \ j\neq k.\end{aligned} \tag{10}$$

Легко найти

$$\lim_{x\to x_k} B_k'(x) = \left(\frac{1-x_k^2}{\lambda_n(x_k)}\right)^2 \lim_{x\to x_k}\left(\frac{U_n^2(x)}{x-x_k}\right)' = \left(\frac{1-x_k^2}{\lambda_n(x_k)}\right)^2 \lim_{x\to x_k}\left(\frac{2U_n(x)U_n'(x)}{x-x_k} - \left(\frac{U_n(x)}{x-x_k}\right)^2\right)'.$$

Учитывая равенство (8) и то, что

$$U_n'(x) = \frac{-\cos\mu_n(x)\lambda_n(x)\sqrt{1-x^2} + x\sin\mu_n(x)}{(1-x^2)^{3/2}},$$

отсюда получим

$$\lim_{x\to x_k} B_k'(x) = \left(\frac{1-x_k^2}{\lambda_n(x_k)}\right)^2 \lim_{x\to x_k}\frac{U_n(x)}{x-x_k}\left(\frac{-\cos\mu_n(x)\lambda_n(x)}{1-x_k^2} - \frac{U_n(x)}{x-x_k}\right) = 1, \tag{11}$$

$k = 1, 2, ..., n-1.$

На основании равенств (9)–(11) получим требуемые свойства (5) функции $H(x, f)$.

Из равенств (5) следует, что, во-первых, функция $H(x, f)$ является квази-интерполяционной, так как добавляются в качестве узлов точки $x_0 = 1$ и $x_n = -1$ (см., напр., [7]), во-вторых, безусловно является функцией типа Эрмита – Фейера (см., напр., [8]).

Пусть $b_1, b_2, ..., b_{n-1}$ – нули функции $\lambda_n(x)$, см. (1). Ясно, что эти числа находятся вне отрезка $[-1,1]$.

Л е м м а 1. *Функция $H_n(x, f)$ является рациональной порядка не выше $2n-1$ и точной для всякой рациональной функции вида*

$$r_{2n-1}(x) = \frac{p_{2n-1}(x)}{\prod_{k=1}^{n-1}(x-b_k)(1+a_k x)}, \tag{12}$$

где $p_{2n-1}(x)$ – произвольный полином степени не выше $2n-1$.

Действительно, на основании равенства (2) и формул (3), (4) нетрудно посчитать, что

$$H_n(x, f) = \frac{q_{2n-1}(x)}{\prod_{k=1}^{n-1}(x-b_k)(1+a_k x)},$$

где $q_{2n-1}(x)$ – некоторый полином степени не выше $2n-1$. Тогда для всякой функции $r_{2n-1}(x)$ вида (12) равенство

$$H_n(x, r_{2n-1}) \equiv r_{2n-1}(x)$$

следует из условий (5).

Сходимость квази-интерполяционного процесса Эрмита – Фейера. Полагаем $y_k = 0$, $k = 1, 2, ..., n-1$. Тогда

$$H_n(x, f) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) A_k(x). \tag{13}$$

Очевидно, оператор

$$H_n : C[-1,1] \to C[-1,1]$$

является линейным, положительным и точным для всякой функции $r_{2n-1}(x)$ вида (12), в частности

$$H_n(x, 1) \equiv 1. \tag{14}$$

Т е о р е м а. *Если ряд*

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(1-|c_n|),\ c_n = a_n^{-1} - \sqrt{a_n^{-2}-1},\ |c_n| < 1,\ n \in \mathbb{N}, \tag{15}$$

расходится, то для любой функции $f \in C[-1,1]$ соответствующая последовательность $\{H_n(x, f)\}$ равномерно сходится к функции f на отрезке $[-1,1]$.

Отметим, что расходимость ряда (13) является необходимым и достаточным условием замкнутости системы функции $\left\{\dfrac{1}{1+a_k x}\right\}_{k=0}^{\infty}$ в $C[-1,1]$ (см. [9, с. 294]).

В качестве вспомогательного результата приведем следующую лемму.

Л е м м а 2. *Справедливо равенство*

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda_n(x_0)}+\frac{1}{\lambda_n(x_n)}\right)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\lambda_n(x_k)}=1. \tag{16}$$

Равенство (16) содержится в работе [10].

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы. Из соотношений (13) и (14) следует, что

$$f(x)-H_n(x,f)=\sum_{k=0}^{n}\big(f(x)-f(x_k)\big)A_k(x).$$

Зададим произвольное число ε, $\varepsilon>0$. Тогда найдется число δ, $0<\delta(\varepsilon)\le 1$, такое, что

$$\forall x',x''\in[-1,1],\ \left|x'-x''\right|<\delta\Rightarrow\left|f(x')-f(x'')\right|<\varepsilon.$$

Пусть $x\in[-1,1]$. Обозначим через $\Omega_x=\left\{k:k=0,1,...,n,\ \left|x-x_k\right|<\delta\right\}$, $C\Omega_x=\left\{0,1,...,n\right\}\setminus\Omega_x$. Тогда

$$\left|f(x)-H_n(x,f)\right|\le\varepsilon\sum_{k\in\Omega_x}A_k(x)+2M\sum_{k\in C\Omega_x}A_k(x), \tag{17}$$

где $M=\|f\|_{C[-1,1]}$.

Так как $A(x)\ge 0,\ x\in[-1,1],\ k=0,1,...,n$, то из равенства (14) следует, что

$$\sum_{k\in\Omega_x}A_k(x)\le 1,$$

и остается оценить вторую сумму в правой части неравенства (17).

Здесь заметим, что в случае, когда $k\in C\Omega_x,\ \left|x-x_k\right|\ge\delta$. Воспользовавшись неравенством

$$(1-x^2)U_n^2(x)\le 1,\ x\in[-1,1],$$

из (3) получим

$$A_k(x)\le\frac{2}{\delta^2\lambda_n(x)\lambda_n(x_k)},\ k\ne 0,n.$$

Если, например, $\left|x-x_0\right|\ge\delta$, то

$$A_0(x)=\frac{1}{2\lambda_n(1)\lambda_n(x)}\frac{\sin^2\mu_n(x)}{1-x}\le\frac{1}{2\lambda_n(1)\lambda_n(x)\delta^2}.$$

Аналогично поступаем в случае, если $n\in C\Omega_x$. Таким образом, имеем

$$\sum_{k\in C\Omega_x}A_k(x)\le\frac{2}{\lambda_n(x)\delta^2}\left(\frac{1}{2\lambda_n(1)}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\lambda_n(x_k)}+\frac{1}{2\lambda_n(-1)}\right).$$

Теперь воспользуемся леммой 2 и перейдем к неравенству (17). В итоге получим

$$\left|f(x)-H_n(x,f)\right|\le\varepsilon+\frac{2}{\lambda_n(x)\delta^2}.$$

Остается заметить, что условие (15) обеспечивает равномерную сходимость к нулю последовательности $\left\{\lambda_n^{-1}(x)\right\}$ на отрезке $[-1,1]$. Теорема доказана.

Литература

1. *Русак В. Н.* // Докл. АН БССР. 1962. Т. 4, № 9. С. 548–550.
2. *Ровба Е. А.* Интерполяция и ряды Фурье в рациональной аппроксимации. Гродно, 2001.
3. *Гриб Н. В.* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз-мат. навук. 2013. № 4. С. 92–100.
4. *Min G.* // J. of Computation and Applied Mathematics. 1998. № 94. P. 1–12.
5. *Ровба Е. А.* // Мат. заметки. 1993. Вып. 2. Т. 53, № 3. С. 114–121.
6. *Русак В. Н.* Рациональные функции как аппарат приближения. Минск, 1979.
7. *Szisz P.* // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 1959. Vol. 10. P. 413–439.
8. *Szabados J., Vertesi P.* Interpolation of Functions. Singapore, 1990.
9. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. М., 1965.
10. *Ровба Е. А., Смотрицкий К. А.* // Докл. НАН Беларуси. 2008. Т. 52, № 5. С. 11–15.

Y. A. ROVBA, Y. V. DIRVUK

RATIONAL QUASI-INTERPOLATION HERMITE – FEJER

Summary

In this paper we studied the question of constructing rational interpolation operators of Hermite – Fejer. Uniform convergence of considered interpolation process for function on condition of completeness of system of rational functions is thus proved. Also, we proved uniform convergence for considered interpolation process for functions $f(x) \in C[-1,1]$ of complete system of rational functions The rational interpolating functions construction with nodes in the zeros of Chebyshev – Markov polynomials of the second kinds.