УДК 519.6

П. И. СОБОЛЕВСКИЙ, С. В. БАХАНОВИЧ

ПАРАМЕТРИЗОВАННЫЙ ТАЙЛИНГ: ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРАНИЦ ЛОКАЛЬНЫХ ЦИКЛОВ В НЕПОЛНЫХ ТАЙЛАХ

Институт математики НАН Беларуси

(Поступила в редакцию 27.04.2015)

Введение. При разработке программных продуктов на практике широко используется тайлинг [1–8] как одно из наиболее эффективных средств оптимизации программ. Суть тайлинга состоит в увеличении зернистости алгоритма: множество операций алгоритма разбивается на группы-тайлы, каждый тайл рассматривается как зерно вычислений или макрооперация. Техника тайлинга позволяет существенно повысить эффективность использования многоуровневой памяти компьютера и, кроме этого, помогает оптимизировать операции обмена данными в параллельных приложениях для вычислительных систем с распределенной памятью.

В результате применения тайлинга гнезда циклов программы преобразуются к гнездам циклов, содержащим большее (как правило, двукратное) количество вложенных циклов. Множество циклов можно условно разделить на две группы: глобальные циклы, задающие порядок выполнения операций алгоритма на уровне тайлов, и локальные циклы, описывающие порядок выполнения операций в рамках одного тайла.

При разбиении множества операций на тайлы возникают тайлы различного типа: полные, неполные и пустые. С математической точки зрения тайлы представляются набором граничных условий. Последние напрямую определяют границы локальных циклов, соответствующих тайлу, и могут быть заданы как в обобщенном виде, так и в частном случае для каждого типа тайлов. Полные тайлы имеют более простые граничные условия. Выделение и раздельная программная реализация полных и неполных тайлов позволяет в ряде случаев дополнительно оптимизировать программный код по сравнению с реализацией тайлов в общем виде с обобщенными граничными условиями.

В данной работе исследуются аспекты применения параметризованного тайлинга к алгоритмам, область вычисления которых представима выпуклым многогранником. Предложена структура множества неполных тайлов, построены формулы для определения этого множества. Также получены формулы, определяющие границы изменения локальных циклов в неполных тайлах. Эти формулы позволяют минимизировать время расчета границ локальных циклов при реализации тайлинга в последовательных и параллельных программах.

Тайлинг. Тайлинг (tiling) – это преобразование вычислительного алгоритма с целью укрупнения зернистости путем объединения определенного числа мелких операций алгоритма в крупные зерна вычислений – тайлы. При тайлинге укрупнение зернистости осуществляется покрытием области вычислений однотипными n-мерными параллелепипедами (тайлами) [1–8]. Далее будем предполагать, что область вычислений алгоритма (индексное множество) – это n-мерный выпуклый многогранник, описание которого в декартовой системе координат в арифметическом пространстве Z^n имеет вид

$$V = \left\{ J \in Z^n \mid LJ \geq I \right\} = \left\{ J \in Z^n \mid l_s \cdot J \geq I_s,\ s = 1, 2, \ldots, m \right\}, \tag{1}$$

где целочисленная матрица $L = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_m \end{pmatrix} \in Z^{m\times n}$ и целочисленный вектор $I = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_m \end{pmatrix} \in Z^m$ являются параметрами, определяющими область вычислений, при этом l_s – нормальные векторы гиперплоскостей $l_s \cdot J = I_s$, $s = 1,2,\ldots,m$, содержащих грани многогранника. Каждой точке области вычислений V соответствует ограниченный набор операций алгоритма. В данной работе все векторные равенства и неравенства понимаются в обычном смысле («выполняются для каждой координаты»).

Разбиение арифметического пространства Z^n, а следовательно, и области вычислений V алгоритма, на тайлы осуществляется нелинейным отображением $Z^n \xrightarrow{f} Z^n$ [1]:

$$J^{gl} = f\left(J\right) = \left\lfloor R^{-1}H(J - J^{\vec{0}}) \right\rfloor,\ J \in Z^n. \tag{2}$$

Отображение f определяется тремя параметрами $H \in Z^{n\times n}$, $R \in Z^{n\times n}$, $J^{\vec{0}} \in Z^n$ и позволяет идентифицировать тайлы вектором $J^{gl} \in Z^n$. При определении этих параметров мы не рассматриваем вопросы корректности тайлинга, возникающие при наличии информационных зависимостей между операциями алгоритма. В рамках настоящей работы предполагается, что параметры тайлинга выбраны уже с учетом его корректности. Кроме того, в данной работе предполагается, что параметры тайлинга R, H и $J^{\vec{0}}$, имея определенный геометрический смысл, ограничены следующими условиями.

1. H – нижняя треугольная матрица с единицами на главной диагонали; составлена построчно из нормальных векторов $h_1 = \left(1,0,\ldots,0\right)$, $h_k = \left(h_{k1}, h_{k2},\ldots,h_{kk-1},1,0,\ldots,0\right) \in Z^n$, $k = 2,3,\ldots,n$, гиперплоскостей, проходящих через целочисленные точки пространства Z^n. Векторы h_k, $k = 1,2,\ldots,n$, определяют параллелепипеидальную форму тайла.

2. $R = \mathrm{diag}\left(r_1, r_2,\ldots,r_n\right)$ – диагональная матрица, определяющая размеры тайла, где r_k – количество различных параллельных гиперплоскостей с нормальными векторами h_k, $k = 1,2,\ldots,n$, которые проходят через все целочисленные точки одного тайла. Обозначим дополнительно $\vec{R} = \left(r_1, r_2,\ldots,r_n\right)$, $\vec{1} = \left(1,1,\ldots,1\right)$.

3. Точку тайла J^{gl}, в которой достигается наименьшее значение функции HJ, будем называть начальной точкой тайла и обозначать $J^{\vec{0},gl}$. В формуле (2) целочисленный вектор $J^{\vec{0}} \in Z^n$ определяет начальную точку нулевого тайла $J^{gl} = \vec{0}$. Если точка $J^{\vec{0}}$ определена, то начальная точка $J^{\vec{0},gl}$ любого тайла $J^{gl} \in Z^n$ определяется условием $RJ^{gl} = H(J^{\vec{0},gl} - J^{\vec{0}})$ и равна $J^{\vec{0},gl} = J^{\vec{0}} + H^{-1}RJ^{gl}$.

Далее будем использовать обозначение $\left(X\right)_k$ для k-й координаты любого вектора (векторнозначной функции) X, стоящего в скобках.

Каждый тайл J^{gl} состоит из $\prod_{m=1}^{n} r_m$ целочисленных точек (точек с целочисленными координатами). Обозначим множество этих точек

$$\mathrm{Tile}\left(J^{gl}\right) = \left\{J \in Z^n \mid J^{gl} = \left\lfloor R^{-1}H(J - J^{\vec{0}}) \right\rfloor\right\} = \left\{J \in Z^n \mid \vec{0} \le H\left(J - J^{\vec{0},gl}\right) \le \vec{R} - \vec{1}\right\}, \tag{3}$$

а множество точек из области V, принадлежащих тайлу $J^{gl} \in Z^n$, обозначим $V^{loc}\left(J^{gl}\right)$:

$$V^{loc}\left(J^{gl}\right) = \mathrm{Tile}\left(J^{gl}\right) \cap V = \left\{J \in Z^n \mid \vec{0} \le H\left(J - J^{\vec{0},gl}\right) \le \vec{R} - \vec{1},\ J \in V\right\}. \tag{4}$$

Из приведенных определений следует, что множество тайлов, имеющих с областью V непустое пересечение (множество тайлов, покрывающих область вычислений), которое будем обозначать V^{gl}, можно представить в виде

$$V^{gl}=\left\{J^{gl}\in Z^n \mid \mathrm{Tile}\left(J^{gl}\right)\cap V\neq\varnothing\right\}=\left\{J^{gl}\in Z^n \mid J^{gl}=\left\lfloor R^{-1}H(J-J^{\vec{0}})\right\rfloor,\ J\in V\right\}. \tag{5}$$

О п р е д е л е н и е [3]. Тайл J^{gl} будем называть пустым, если $V^{loc}\left(J^{gl}\right)=\varnothing$, неполным, если $V^{loc}\left(J^{gl}\right)\neq\mathrm{Tile}\left(J^{gl}\right)$, и будем называть полным, если $V^{loc}\left(J^{gl}\right)=\mathrm{Tile}\left(J^{gl}\right)$.

Применение тайлинга в приложениях требует определения множеств $V^{gl}, V^{loc}\left(J^{gl}\right)$ в виде

$$\begin{gathered}V^{gl}=\left\{J^{gl}\in Z^n \mid q_k^{gl}\left(J^{gl}\right)\le J_k^{gl}\le Q_k^{gl}\left(J^{gl}\right),\ k=1,2,\ldots,n\right\},\\ V^{loc}\left(J^{gl}\right)=\left\{J\in Z^n \mid q_k^{loc}\left(J,J^{gl}\right)\le J_k\le Q_k^{loc}\left(J,J^{gl}\right),\ k=1,2,\ldots,n\right\},\end{gathered} \tag{6}$$

с явным определением зависимости граничных значений координат точек $J^{gl}\in V^{gl}$ и граничных значений координат точек $J\in V^{loc}\left(J^{gl}\right)$ от параметров тайлинга, а также параметров, определяющих область вычислений, и координат соответствующих точек с меньшими номерами. В общем случае, когда область вычислений имеет вид (1), определения (4) и (5) не содержат явных выражений для этих границ.

Во многих вычислительных алгоритмах область вычислений представляет собой выпуклый многогранник вида (1) с явным определением функций, описывающих зависимость границ изменения координат точек этого многогранника от целочисленного вектора I, характеризующего грани многогранника, и от значений координат этих точек с меньшими номерами:

$$V=\left\{J\in Z^n \mid LJ\ge I\right\}=\left\{J\in Z^n \mid F^-\left(I,J\right)\le J\le F^+\left(I,J\right)\right\}, \tag{7}$$

где целочисленные вектор-функции $F^{\pm}\left(I,J\right)$ с координатами $F_k^{\pm}\left(I,J\right)=F_k^{\pm}\left(I,J_1,J_2,\ldots,J_{k-1}\right)$ $k=1,2,\ldots,n,$ удовлетворяют неравенствам $F_k^-\left(I,J_1,J_2,\ldots,J_{k-1}\right)\le F_k^+\left(I,J_1,J_2,\ldots,J_{k-1}\right)$ при всех допустимых значениях параметров $I\in Z^m,\ J_i\in Z,\ i=1,2,\ldots,k-1,\ k=1,2,\ldots,n.$ Для таких областей в работе [4] построено множество полных тайлов $V^{gl,-}\subseteq V^{gl}$:

$$\begin{gathered}V^{gl,-}=\left\{J^{gl}\in \boldsymbol{Z}^n \mid LJ^{\vec{0},gl}\ge I_-\right\}=\left\{J^{gl}\in \boldsymbol{Z}^n \mid \left\lceil q^{gl,-}\left(J^{gl}\right)\right\rceil\le J^{gl}\le\left\lfloor Q^{gl,-}\left(J^{gl}\right)\right\rfloor\right\},\\ q^{gl,-}\left(J^{gl}\right)=R^{-1}\left(F^-\left(I_-,J^{\vec{0},gl}\right)+\left(H-E\right)J^{\vec{0},gl}-HJ^{\vec{0}}\right),\ \ I_-=I-\left(LH^{-1}\right)_-\left(\vec{R}-\vec{1}\right),\\ Q^{gl,-}\left(J^{gl}\right)=R^{-1}\left(F^+\left(I_-,J^{\vec{0},gl}\right)+\left(H-E\right)J^{\vec{0},gl}-HJ^{\vec{0}}\right)=\\ =q^{gl,-}\left(J^{gl}\right)+R^{-1}\left(F^+\left(I_-,J^{\vec{0},gl}\right)-F^-\left(I_-,J^{\vec{0},gl}\right)\right),\end{gathered} \tag{8}$$

в котором полные тайлы представимы в виде

$$\begin{gathered}V^{loc,-}\left(J^{gl}\right)=\left\{J\in Z^n \mid q^{loc,-}\left(J,J^{gl}\right)\le J\le Q^{loc,-}\left(J,J^{gl}\right)\right\},\\ q^{loc,-}\left(J,J^{gl}\right)=HJ^{\vec{0},gl}-\left(H-E\right)J,\quad Q^{loc,-}\left(J,J^{gl}\right)=q^{loc,-}\left(J,J^{gl}\right)+\vec{R}-\vec{1}.\end{gathered} \tag{9}$$

В этой же работе построены три аппроксимации множества тайлов $V^{gl,0}\supseteq V^{gl}$, $V^{gl,+}\supseteq V^{gl}$ и $V^{gl,0+}\supseteq V^{gl}$:

$$\begin{gathered}V^{gl,0}=\left\{J^{gl}\in Z^n \mid \left\lceil q^{gl,0}\left(J^{gl}\right)\right\rceil\le J^{gl}\le\left\lfloor Q^{gl,0}\left(J^{gl}\right)\right\rfloor\right\},\\ q^{gl,0}\left(J^{gl}\right)=R^{-1}(m-HJ^{\vec{0}}-\vec{R}+\vec{1}),\quad Q^{gl,0}\left(J^{gl}\right)=R^{-1}(M-HJ^{\vec{0}});\end{gathered} \tag{10}$$

$$V^{gl,+}=\left\{J^{gl}\in \boldsymbol{Z}^n \mid LJ^{\vec{0},gl}\ge I_+,\ J^{\vec{0},gl}=J^{\vec{0}}+H^{-1}RJ^{gl}\right\}=$$
$$=\left\{J^{gl}\in \boldsymbol{Z}^n \mid \left\lceil q^{gl,+}\left(J^{gl}\right)\right\rceil\le J^{gl}\le\left\lfloor Q^{gl,+}\left(J^{gl}\right)\right\rfloor\right\}, \tag{11}$$
$$q^{gl,+}\left(J^{gl}\right)=R^{-1}\left(F^-\left(I_+,J^{\vec{0},gl}\right)+\left(H-E\right)J^{\vec{0},gl}-HJ^{\vec{0}}\right),\ I_+=I-\left(LH^{-1}\right)_+\left(\vec{R}-\vec{1}\right),$$
$$Q^{gl,+}\left(J^{gl}\right)=R^{-1}\left(F^+\left(I_+,J^{\vec{0},gl}\right)+\left(H-E\right)J^{\vec{0},gl}-HJ^{\vec{0}}\right),$$
$$V^{gl,0+}=\left\{J^{gl}\in \boldsymbol{Z}^n \mid \left\lceil q^{gl,0+}\left(J^{gl}\right)\right\rceil\le J^{gl}\le\left\lfloor Q^{gl,0+}\left(J^{gl}\right)\right\rfloor\right\}, \tag{12}$$
$$q^{gl,0+}\left(J^{gl}\right)=R^{-1}\left(\max\left(m-HJ^{\vec{0}}-\vec{R}+\vec{1},F^-\left(I_+,J^{\vec{0},gl}\right)+\left(H-E\right)J^{\vec{0},gl}-HJ^{\vec{0}}\right)\right),$$
$$Q^{gl,0+}\left(J^{gl}\right)=R^{-1}\left(\min\left(M-HJ^{\vec{0}},F^+\left(I_+,J^{\vec{0},gl}\right)+\left(H-E\right)J^{\vec{0},gl}-HJ^{\vec{0}}\right)\right).$$

Для приведенных выше трех аппроксимаций множество точек, принадлежащих тайлу $J^{gl}\in V^{gl,*}$, где $V^{gl,*}$ – любая из аппроксимаций, имеет вид

$$V^{loc,*}\left(J^{gl}\right)=\left\{J\in Z^n \mid q^{loc,*}\left(J,J^{gl}\right)\le J\le Q^{loc,*}\left(J,J^{gl}\right)\right\},\ J^{gl}\in V^{gl,*}, \tag{13}$$
$$q^{loc,*}\left(J,J^{gl}\right)=\max\left(F^-\left(I,J\right),q^{loc,-}\left(J,J^{gl}\right)\right), Q^{loc,*}\left(J,J^{gl}\right)=\min\left(F^+\left(I,J\right),\ Q^{loc,-}\left(J,J^{gl}\right)\right).$$

Каждая из этих аппроксимаций удовлетворяет условиям (6). В работе [4] также определены критерии точности построенных аппроксимаций. Точность аппроксимаций оценивается разностью количества тайлов в аппроксимирующем множестве $V^{gl,*}$ и множестве V^{gl}. Чем меньше эта разность, тем точнее аппроксимация. Аппроксимацию $V^{gl,*}\supseteq V^{gl}$ будем называть точной, если множество $V^{gl,*}$ не содержит пустых тайлов.

Определение границ локальных циклов. При программной реализации тайлов граничные значения локальных циклов могут быть расчитаны по формулам (13) независимо от типа тайла. Тем не менее расчет границ локальных циклов может быть оптимизирован за счет выделения и раздельной программной реализации полных и неполных тайлов.

С точки зрения оптимизации расчета границ, полные тайлы имеют важную особенность – как следует из формулы (9), граничные значения локальных циклов $q_k^{loc,-}\left(J,J^{gl}\right)$, $Q_k^{loc,-}\left(J,J^{gl}\right)$, $k=1,2,\dots,n$, не зависят от параметров области вычислений и в связи с этим требуют выполнения меньшего количества операций по их расчету. Выделение полных тайлов и использование для расчета их границ формул (9) может существенно уменьшить время реализации этих тайлов, особенно в случае их небольших размеров.

Что касается неполных тайлов, то они также имеют потенциал с точки зрения оптимизации расчета границ локальных циклов. Ниже представлены формулы, описывающие множество неполных тайлов в точных аппроксимациях и его структуру. Также приведены формулы, которые позволяют часть граничных значений локальных циклов неполных тайлов вычислять по формулам типа (9).

Пусть аппроксимация множества тайлов $V^{gl,*}$ является точной и множество полных тайлов $V^{gl,-}$ не пусто, при этом для любого набора значений координат J_s^{gl}, $s=1,2,\dots,k-1$, удовлетворяющих условию $\left\lceil q_s^{gl,-}\left(J^{gl}\right)\right\rceil\le J_s^{gl}\le\left\lfloor Q_s^{gl,-}\left(J^{gl}\right)\right\rfloor$, имеет место неравенство $\left\lceil q_k^{gl,-}\left(J^{gl}\right)\right\rceil\le\left\lfloor Q_k^{gl,-}\left(J^{gl}\right)\right\rfloor$.

Множество неполных тайлов $V^{gl,*\backslash-}=V^{gl,*}\setminus V^{gl,-}$ в точной аппроксимации $V^{gl,*}$ состоит из тайлов, идентифицированных векторами $J^{gl}\in V^{gl,*}$, у которых хотя бы одна координата J_k^{gl}, $k=1,2,\dots n$, принимает значения, не принадлежащие целочисленному промежутку $\left[\left\lceil q_k^{gl,-}\left(J^{gl}\right)\right\rceil,\left\lfloor Q_k^{gl,-}\left(J^{gl}\right)\right\rfloor\right]$.

Это означает, что для любого неполного тайла $J^{gl}\in V^{gl,*\backslash-}$ существует такое значение k, что первые $k-1$ координат вектора J^{gl} удовлетворяют условию $\left\lceil q_s^{gl,-}\left(J^{gl}\right)\right\rceil \le J_s^{gl} \le \left\lfloor Q_s^{gl,-}\left(J^{gl}\right)\right\rfloor$, $s=1,2,\ldots,k-1$, а координата J_k^{gl} удовлетворяет одному из взаимоисключающих неравенств $\left\lceil q_k^{gl,*}\left(J^{gl}\right)\right\rceil \le J_k^{gl} \le \left\lceil q_k^{gl,-}\left(J^{gl}\right)\right\rceil - 1$ или $\left\lfloor Q_k^{gl,-}\left(J^{gl}\right)\right\rfloor + 1 \le J_k^{gl} \le \left\lfloor Q_k^{gl,*}\left(J^{gl}\right)\right\rfloor$. Данный факт позволяет, как показано ниже, фрагментировать и структурировать множество неполных тайлов.

Определим в точной аппроксимации $V^{gl,*}$ два множества неполных тайлов $V_{pr}^{gl,*\backslash-}$ и $V_{ep}^{gl,*\backslash-}$ («пролог» и «эпилог» в терминологии статьи [6]):

$$V_{pr}^{gl,*\backslash-} = \bigcup_{k=1}^{n} V_{pr,k}^{gl,*\backslash-}, \quad V_{ep}^{gl,*\backslash-} = \bigcup_{k=1}^{n} V_{ep,k}^{gl,*\backslash-},$$

$$V_{pr,k}^{gl,*\backslash-} = \Big\{ J^{gl} \in \boldsymbol{Z}^n \mid \left\lceil q_s^{gl,-}\left(J^{gl}\right)\right\rceil \le J_s^{gl} \le \left\lfloor Q_s^{gl,-}\left(J^{gl}\right)\right\rfloor,\ s=1,2,\ldots,k-1,$$

$$\left\lceil q_k^{gl,*}\left(J^{gl}\right)\right\rceil \le J_k^{gl} \le \left\lceil q_k^{gl,-}\left(J^{gl}\right)\right\rceil - 1,\ \left\lceil q_s^{gl,*}\left(J^{gl}\right)\right\rceil \le J_s^{gl} \le \left\lfloor Q_s^{gl,*}\left(J^{gl}\right)\right\rfloor,\ s=k+1,\ldots,n \Big\},$$

$$V_{ep,k}^{gl,*\backslash-} = \Big\{ J^{gl} \in \boldsymbol{Z}^n \mid \left\lceil q_s^{gl,-}\left(J^{gl}\right)\right\rceil \le J_s^{gl} \le \left\lfloor Q_s^{gl,-}\left(J^{gl}\right)\right\rfloor,\ s=1,2,\ldots,k-1,$$

$$\left\lfloor Q_k^{gl,-}\left(J^{gl}\right)\right\rfloor + 1 \le J_k^{gl} \le \left\lfloor Q_k^{gl,*}\left(J^{gl}\right)\right\rfloor,\ \left\lceil q_s^{gl,*}\left(J^{gl}\right)\right\rceil \le J_s^{gl} \le \left\lfloor Q_s^{gl,*}\left(J^{gl}\right)\right\rfloor,\ s=k+1,\ldots,n \Big\}.$$

Покажем, что имеет место разбиение множества $V^{gl,*}$ на непересекающиеся подмножества $V_{pr,k}^{gl,*\backslash-}, V_{ep,k}^{gl,*\backslash-}$ и $V^{gl,-}$, $k=1,2,\ldots,n$.

Так как множество полных тайлов $V^{gl,-}$ по предположению не пусто, то в аппроксимации $V^{gl,*}$ первая координата любого вектора $J^{gl} \in V^{gl,*}$ принимает значения в одном из трех непересекающихся промежутков: либо $\left\lceil q_1^{gl,*}\left(J^{gl}\right)\right\rceil \le J_1^{gl} \le \left\lceil q_1^{gl,-}\left(J^{gl}\right)\right\rceil - 1$, либо $\left\lfloor Q_1^{gl,-}\left(J^{gl}\right)\right\rfloor + 1 \le J_1^{gl} \le \left\lfloor Q_1^{gl,*}\left(J^{gl}\right)\right\rfloor$, либо $\left\lceil q_1^{gl,-}\left(J^{gl}\right)\right\rceil \le J_1^{gl} \le \left\lfloor Q_1^{gl,-}\left(J^{gl}\right)\right\rfloor$. Этот факт определяет разбиение множества $V^{gl,*}$ на три непересекающиеся подмножества

$$V^{gl,*} = \Big\{ J^{gl} \in \boldsymbol{Z}^n \mid \left\lceil q_s^{gl,*}\left(J^{gl}\right)\right\rceil \le J_s^{gl} \le \left\lfloor Q_s^{gl,*}\left(J^{gl}\right)\right\rfloor,\ s=1,2,\ldots,n \Big\} =$$

$$= \Big\{ J^{gl} \in \boldsymbol{Z}^n \mid \left\lceil q_1^{gl,*}\left(J^{gl}\right)\right\rceil \le J_1^{gl} \le \left\lceil q_1^{gl,-}\left(J^{gl}\right)\right\rceil - 1,\ \left\lceil q_s^{gl,*}\left(J^{gl}\right)\right\rceil \le J_s^{gl} \le \left\lfloor Q_s^{gl,*}\left(J^{gl}\right)\right\rfloor,\ s=2,\ldots,n \Big\} \cup$$

$$\cup \Big\{ J^{gl} \in \boldsymbol{Z}^n \mid \left\lfloor Q_1^{gl,-}\left(J^{gl}\right)\right\rfloor + 1 \le J_1^{gl} \le \left\lfloor Q_1^{gl,*}\left(J^{gl}\right)\right\rfloor,\ \left\lceil q_s^{gl,*}\left(J^{gl}\right)\right\rceil \le J_s^{gl} \le \left\lfloor Q_s^{gl,*}\left(J^{gl}\right)\right\rfloor,\ s=2,\ldots,n \Big\} \cup$$

$$\cup \Big\{ J^{gl} \in \boldsymbol{Z}^n \mid \left\lceil q_1^{gl,-}\left(J^{gl}\right)\right\rceil \le J_1^{gl} \le \left\lfloor Q_1^{gl,-}\left(J^{gl}\right)\right\rfloor,\ \left\lceil q_s^{gl,*}\left(J^{gl}\right)\right\rceil \le J_s^{gl} \le \left\lfloor Q_s^{gl,*}\left(J^{gl}\right)\right\rfloor,\ s=2,\ldots,n \Big\} =$$

$$= V_{pr,1}^{gl,*\backslash-} \cup V_{ep,1}^{gl,*\backslash-} \cup$$

$$\cup \Big\{ J^{gl} \in \boldsymbol{Z}^n \mid \left\lceil q_1^{gl,-}\left(J^{gl}\right)\right\rceil \le J_1^{gl} \le \left\lfloor Q_1^{gl,-}\left(J^{gl}\right)\right\rfloor,\ \left\lceil q_s^{gl,*}\left(J^{gl}\right)\right\rceil \le J_s^{gl} \le \left\lfloor Q_s^{gl,*}\left(J^{gl}\right)\right\rfloor,\ s=2,\ldots,n \Big\}.$$

Применяя аналогичное разбиение к последнему из трех множеств по координате J_2^{gl}, получим следующее разбиение множества $V^{gl,*}$ на непересекающиеся множества:

$$V^{gl,*} = V_{pr,1}^{gl,*\backslash-} \cup V_{ep,1}^{gl,*\backslash-} \cup V_{pr,2}^{gl,*\backslash-} \cup V_{ep,2}^{gl,*\backslash-} \cup \Big\{ J^{gl} \in \boldsymbol{Z}^n \mid \left\lceil q_s^{gl,-}\left(J^{gl}\right)\right\rceil \le J_s^{gl} \le \left\lfloor Q_s^{gl,-}\left(J^{gl}\right)\right\rfloor,\ s=1,2,$$

$$\left\lceil q_s^{gl,*}\left(J^{gl}\right)\right\rceil \le J_s^{gl} \le \left\lfloor Q_s^{gl,*}\left(J^{gl}\right)\right\rfloor,\ s=3,\ldots,n \Big\}.$$

Продолжая процесс фрагментации последовательно по координатам J_k^{gl}, $k=3,4,\ldots n$, придем к искомому разбиению аппроксимации множества тайлов

$$V^{gl,*} = \bigcup_{k=1}^{n} \left(V_{pr,k}^{gl,*\backslash-} \cup V_{ep,k}^{gl,*\backslash-} \right) \cup$$

$$\cup \Big\{ J^{gl} \in \boldsymbol{Z}^n \mid \left\lceil q_s^{gl,-}\left(J^{gl}\right)\right\rceil \le J_s^{gl} \le \left\lfloor Q_s^{gl,-}\left(J^{gl}\right)\right\rfloor,\ s=1,2,\ldots,n \Big\} = V_{ep}^{gl,*\backslash-} \cup V_{ep}^{gl,*\backslash-} \cup V^{gl,-}.$$

Описанный выше процесс разбиения множества $V^{gl,*}$ фактически определяет структуру множества неполных тайлов и его представление в следующем виде:

$$V^{gl,*\backslash-}=\bigcup_{k=1}^{n}\left(V_{pr,k}^{gl,*\backslash-}\cup V_{ep,k}^{gl,*\backslash-}\right)=V_{pr}^{gl,*\backslash-}\cup V_{ep}^{gl,*\backslash-}. \qquad (14)$$

Из полученного представления множества $V^{gl,*\backslash-}$ вытекает следующее утверждение о границах неполных тайлов.

Утверждение 1. Пусть область вычислений алгоритма допускает представление (7); $V^{gl,*}$ – точная аппроксимация множества тайлов V^{gl}, определяемая одной из формул (10)–(12), с представлением ее тайлов в виде (13); $V^{gl,-}$ – множество полных тайлов, определяемое формулами (8) и (9). Пусть множество полных тайлов $V^{gl,-}$ не пусто, при этом для любого набора значений координат $J_s^{gl},\ s=1,2,\ldots,k-1$, удовлетворяющих условию $\left\lceil q_s^{gl,-}\left(J^{gl}\right)\right\rceil\le J_s^{gl}\le\left\lfloor Q_s^{gl,-}\left(J^{gl}\right)\right\rfloor$, имеет место неравенство $\left\lceil q_k^{gl,-}\left(J^{gl}\right)\right\rceil\le\left\lfloor Q_k^{gl,-}\left(J^{gl}\right)\right\rfloor$. Тогда множество неполных тайлов представимо в виде (14), а граничные значения локальных циклов в неполных тайлах определяются в явном виде в соответствии с формулами

$$\begin{gathered}
V_{pr,k}^{loc,*/-}\left(J^{gl}\right)=\Big\{J\in\boldsymbol{Z}^n \mid q_s^{loc,-}\left(J,J^{gl}\right)\le J_s\le Q_s^{loc,-}\left(J,J^{gl}\right),\ s=1,2,\ldots,k-1,\\
\max\left(F_k^-(I,J),q_k^{loc,-}\left(J,J^{gl}\right)\right)\le J_k\le Q_k^{loc,-}\left(J,J^{gl}\right),\\
\max\left(F_s^-(I,J),q_s^{loc,-}\left(J,J^{gl}\right)\right)\le J_s\le\min\left(F_s^+(I,J),Q_s^{loc,-}\left(J,J^{gl}\right)\right),\ s=k+1,\ldots,n\Big\},\\
J^{gl}\in V_{pr,k}^{gl,*\backslash-},\ k=1,2,\ldots,n,\\
V_{ep,k}^{loc,*/-}\left(J^{gl}\right)=\Big\{J\in\boldsymbol{Z}^n \mid q_s^{loc,-}\left(J,J^{gl}\right)\le J_s\le Q_s^{loc,-}\left(J,J^{gl}\right),\ s=1,2,\ldots,k-1,\\
q_k^{loc,-}\left(J,J^{gl}\right)\le J_k\le\min\left(F_k^+(I,J),Q_k^{loc,-}\left(J,J^{gl}\right)\right),\\
\max\left(F_s^-(I,J),q_s^{loc,-}\left(J,J^{gl}\right)\right)\le J_s\le\min\left(F_s^+(I,J),Q_s^{loc,-}\left(J,J^{gl}\right)\right),\ s=k+1,\ldots,n\Big\},\\
J^{gl}\in V_{ep,k}^{gl,*\backslash-},\ k=1,2,\ldots,n.
\end{gathered}$$

В соответствии с утверждением 1 при вычислении границ неполного тайла $J^{gl}\in V_{pr,k}^{gl,*\backslash-}$ $\left(J^{gl}\in V_{ep,k}^{gl,*\backslash-}\right)$ могут быть использованы не только общие формулы вида (13), но и более простые формулы вида (9), а также их комбинации. Фактически, для расчета границ первых $k-1$ локальных циклов используются формулы (9), для k-го цикла применяется комбинация формул (9) и (13), для расчета границ оставшихся циклов используются общие формулы вида (13). Таким образом, применение утверждения 1 при программной реализации тайлов позволяет минимизировать количество операций, требуемых для расчета граничных значений локальных циклов в неполных тайлах.

Замечание. Условие точности аппроксимации множества тайлов, используемое в утверждении 1, позволяет оптимизировать расчет границ k-го локального цикла тайла $J^{gl}\in V_{pr,k}^{gl,*\backslash-}\left(J^{gl}\in V_{ep,k}^{gl,*\backslash-}\right)$. Тем не менее данное условие ограничивает область применимости утверждения. Если для расчета границ k-го локального цикла использовать общие формулы вида (13), то требование точности аппроксимации в утверждении можно снять.

В контексте рассматриваемой задачи минимизации времени, затрачиваемого на вычисление границ локальных циклов, определенный интерес представляют области вычислений V, покрываемые только полными тайлами. Одна из таких областей приведена в следующем утверждении. Рассмотрим область вычислений, представимую в виде пересечения двух окаймляющих конусов

$$V=\left\{J\in Z^n \mid m\le HJ,GJ\le M\right\}=\left\{J\in Z^n \mid m-(H-E)J\le J\le M-(G-E)J\right\}, \qquad (15)$$

определяемых двумя нижними треугольными матрицами $H, G \in Z^{n\times n}$ с единицами на главной диагонали, блочная структура которых зависит от целочисленного параметра p, $0 \le p \le n-1$,

$$H = \begin{pmatrix} H_{\le p} & 0_{p\times(n-p)} \\ 0_{(n-p)\times p} & H_{>p} \end{pmatrix},\ G = \begin{pmatrix} G_{\le p} & 0_{p\times(n-p)} \\ 0_{(n-p)\times p} & G_{>p} \end{pmatrix}, \tag{16}$$

где блоки $H_{\le p}$, $G_{\le p} \in Z^{p\times p}$, $G_{>p} = H_{>p} \in Z^{(n-p)\times(n-p)}$ – нижние треугольные матрицы с единицами на главной диагонали, удовлетворяющие условию $m - (H-E)J \le M - (G-E)J$, $J \in V$.

У т в е р ж д е н и е 2. Пусть область вычислений представима в виде пересечения двух окаймляющих конусов (15), определяемых при фиксированном значении целочисленного параметра p, $0 \le p \le n-1$, блочными матрицами вида (16). Тогда аппроксимирующее множество тайлов $V^{gl,+}$, определяемое формулой (11) с параметрами H, $J^{\vec{0}}$, $R = \mathrm{diag}(1,1,\ldots,1,r_{p+1},r_{p+2},\ldots,r_n)$, при условии, что параметры тайлинга удовлетворяют условию

$$\left(R^{-1}\left(m - HJ^{\vec{0}}\right)\right)_k,\ \left(R^{-1}\left(M - HJ^{\vec{0}} + \vec{1}\right)\right)_k \in Z,\quad k = p+1,\ldots,n, \tag{17}$$

осуществляет покрытие области вычислений V полными тайлами.

Доказательство этого утверждения основано на том, что для данной области вычислений имеем

$$\left\lceil q_k^{gl,+}\left(J^{gl}\right)\right\rceil = \begin{cases} \left(m - HJ^{\vec{0}}\right)_k, & k \le p, \\ \left(\left\lfloor R^{-1}\left(m - HJ^{\vec{0}}\right)\right\rfloor\right)_k, & k > p, \end{cases}$$

$$\left\lceil q_k^{gl,-}\left(J^{gl}\right)\right\rceil = \begin{cases} \left(m - HJ^{\vec{0}}\right)_k, & k \ge p, \\ \left(\left\lceil R^{-1}\left(m - HJ^{\vec{0}}\right)\right\rceil\right)_k, & k < p, \end{cases}$$

$$\left\lfloor Q_k^{gl,+}\left(J^{gl}\right)\right\rfloor = \begin{cases} \left(M - GJ^{\vec{0}} - \left(GH^{-1} - E\right)J^{gl}\right)_k, & k \le p, \\ \left(\left\lceil R^{-1}\left(M - HJ^{\vec{0}} + \vec{1}\right)\right\rceil\right)_k - 1, & k > p, \end{cases}$$

$$\left\lfloor Q_k^{gl,-}\left(J^{gl}\right)\right\rfloor = \begin{cases} \left(M - GJ^{\vec{0}} - \left(GH^{-1} - E\right)J^{gl}\right)_k, & k \le p, \\ \left(\left\lfloor R^{-1}\left(M - HJ^{\vec{0}} + \vec{1}\right)\right\rfloor\right)_k - 1, & k > p, \end{cases}$$

и при выполнении условий целочисленности (17) имеют место равенства $\left\lceil q_k^{gl,+}\left(J^{gl}\right)\right\rceil = \left\lceil q_k^{gl,-}\left(J^{gl}\right)\right\rceil$, $\left\lfloor Q_k^{gl,-}\left(J^{gl}\right)\right\rfloor = \left\lfloor Q_k^{gl,+}\left(J^{gl}\right)\right\rfloor$, $k = 1,2,\ldots,n$, из которых следует $V_{pr,k}^{gl,+\backslash-} = \varnothing, V_{ep,k}^{gl,+\backslash-} = \varnothing$, $k = 1,2,\ldots,n.$

П р и м е р. Рассмотрим основную часть алгоритма численного решения задачи Дирихле многомерного уравнения Пуассона методом верхней релаксации:

```
for  J1 = 1  to  N1  do
   for  J2 = 1  to  N2  do
   .......................................
      for  Jn = 1  to  Nn  do
         begin
           y(J2, J3, ..., Jn) = F(y(J2 − 1, J3, ..., Jn), y(J2, J3 − 1, ..., Jn), ..., y(J2, J3, ..., Jn − 1),
                y(J2, J3, ..., Jn), y(J2 + 1, J3, ..., Jn), y(J2, J3 + 1, ..., Jn), ..., y(J2, J3, ..., Jn + 1))
         end
```

Областью вычислений данного алгоритма является n-мерный прямоугольный параллелепипед $V=\left\{J\in \boldsymbol{Z}^n \mid 1\le J_k\le N_k,\ k=1,2,\dots,n\right\}$, допускающий представление в виде (7), где $m=2n$, $F_s^-\left(I,J\right)=I_s=1$, $F_s^+\left(I,J\right)=-I_{n+s}=N_s$, $s=1,\dots,n$. Множество векторов зависимостей состоит из $2n-1$ векторов $\Phi=\{\varphi_1=e_1,\ \varphi_k=e_k,\ \varphi_k^-=e_1-e_k,\ k=2,3,\dots,n\}$.

Определим параметры тайлинга $H\in Z^{n\times n}$, $R\in Z^{n\times n}$ и $J^{\vec{0}}\in Z^n$. Матрицу H составим из следующих нормальных векторов гиперплоскостей: $h_1=e_1$, $h_k=e_1+e_k$, $k=2,3,\dots,n$. При таком выборе матрицы H имеет место неравенство $H\varphi\ge\vec{0}$, $\varphi\in\Phi$, что гарантирует корректность тайлинга. Вычисляя $m=\min\limits_{J\in V}HJ=\left(1,2,\dots,2\right)$, $M=\max\limits_{J\in V}HJ=\left(N_1,N_1+N_2,\dots,N_1+N_n\right)$, определим начальные точки тайлов $J^{\vec{0}}=H^{-1}m=\vec{1}$, $J^{\vec{0},gl}=\vec{1}+H^{-1}RJ^{gl}=\left(1+J_1^{gl},1+r_2J_2^{gl}-J_1^{gl},\dots,1+r_nJ_n^{gl}-J_1^{gl}\right)$. Размеры тайлов будем задавать матрицей $R=\operatorname{diag}\left(1,r_2,\dots,r_n\right)$, $1\le r_k\le r_k^{\max}$, $r_1^{\max}=N_1$, $r_k^{\max}=N_1+N_k-1$, $k=2,3,\dots,n$.

Множество полных тайлов $V^{gl,-}$ в данном примере определяется формулами

$$V^{gl,-}=\left\{J^{gl}\in\boldsymbol{Z}^n\middle|\,0\le J_1^{gl}\le N_1-1,\ \left\lceil J_1^{gl}/r_k\right\rceil\le J_k^{gl}\le\left\lfloor\left(J_1^{gl}+N_k\right)/r_k\right\rfloor-1,\ k=2,3,\dots,n\right\},$$

$$V^{loc,-}\left(J^{gl}\right)=\left\{J\in\boldsymbol{Z}^n \mid J_1=J_1^{gl}+1,\ r_kJ_k^{gl}+2-J_1\le J_k\le r_k\left(J_k^{gl}+1\right)+1-J_1,\ k=2,\dots,n\right\},\ J^{gl}\in V^{gl,-}.$$

Точное аппроксимирующее множество $V^{gl,+}$ определяется формулами

$$V^{gl,+}=\left\{J^{gl}\in\boldsymbol{Z}^n\middle|\,0\le J_1^{gl}\le N_1-1,\ \left\lfloor J_1^{gl}/r_k\right\rfloor\le J_k^{gl}\le\left\lfloor\left(J_1^{gl}+N_k-1\right)/r_k\right\rfloor,\ k=2,3,\dots n\right\},$$

$$V^{loc,+}\left(J^{gl}\right)=\left\{J\in\boldsymbol{Z}^n \mid J_1=J_1^{gl}+1,\right.$$

$$\left.\max\left(1,r_kJ_k^{gl}+2-J_1\right)\le J_k\le\min\left(N_k,r_kJ_k^{gl}+1-J_1+r_k\right),\ k=2,3,\dots,n\right\},\ J^{gl}\in V^{gl,+}.$$

Компоненты $V_{pr,k}^{gl,*\backslash-}$ и $V_{ep,k}^{gl,*\backslash-}$ множества неполных тайлов $V^{gl,+\backslash-}$ имеют вид

$$V_{pr,1}^{gl,+\backslash-}=\varnothing,\quad V_{ep,1}^{gl,+\backslash-}=\varnothing,$$

$$V_{pr,k}^{gl,+\backslash-}=\left\{J^{gl}\in\boldsymbol{Z}^n \mid 0\le J_1^{gl}\le N_1-1, J_1^{gl}/r_k\notin Z,\right.$$

$$\left\lceil J_1^{gl}/r_s\right\rceil\le J_s^{gl}\le\left\lfloor\left(J_1^{gl}+N_s\right)/r_s\right\rfloor-1,\ s=2,3,\dots,k-1,\ \left\lfloor J_1^{gl}/r_k\right\rfloor=J_k^{gl},$$

$$\left.\left\lfloor J_1^{gl}/r_s\right\rfloor\le J_s^{gl}\le\left\lfloor\left(J_1^{gl}+N_s-1\right)/r_s\right\rfloor,\ s=k+1,\dots,n\right\},\ k=2,3,\dots,n,$$

$$V_{pr,k}^{loc,+\backslash-}\left(J^{gl}\right)=\left\{J\in\boldsymbol{Z}^n \mid J_1=J_1^{gl}+1,\right.$$

$$r_sJ_s^{gl}-J_1+2\le J_s\le r_sJ_s^{gl}-J_1+2+r_s-1,\ s=2,3,\dots,k-1,$$

$$\max\left(1,r_kJ_k^{gl}-J_1+2\right)\le J_k\le r_kJ_k^{gl}-J_1+2+r_k-1,$$

$$\left.\max\left(1,r_sJ_s^{gl}-J_1+2\right)\le J_s\le\min\left(N_s,r_sJ_s^{gl}-J_1+2+r_s-1\right),\ s=k+1,\dots,n\right\},$$

$$J^{gl}\in V_{pr,k}^{gl,+\backslash-},\ k=2,3,\dots,n,$$

$$V_{ep,k}^{gl,+\backslash-}=\left\{J^{gl}\in\boldsymbol{Z}^n \mid 0\le J_1^{gl}\le N_1-1,\ \left(J_1^{gl}+N_k\right)/r_k\notin Z,\right.$$

$$\left\lceil J_1^{gl}/r_s\right\rceil\le J_s^{gl}\le\left\lfloor\left(J_1^{gl}+N_s\right)/r_s\right\rfloor-1,\ s=2,3,\dots,k-1,\ \left\lfloor\left(J_1^{gl}+N_k\right)/r_k\right\rfloor=J_k^{gl},$$

$$\left.\left\lfloor J_1^{gl}/r_s\right\rfloor\le J_s^{gl}\le\left\lfloor\left(J_1^{gl}+N_s-1\right)/r_s\right\rfloor,\ s=k+1,\dots,n\right\},\ k=2,3,\dots,n,$$

$$V_{ep,k}^{loc,+\backslash-}\left(J^{gl}\right)=\left\{J\in\boldsymbol{Z}^n \mid J_1=J_1^{gl}+1,\right.$$

$$r_s J_s^{gl} - J_1 + 2 \le J_s \le r_s J_s^{gl} - J_1 + 1 + r_s,\ s = 2,3,\ldots,k-1,$$
$$r_k J_k^{gl} - J_1 + 2 \le J_k \le \min\left(N_k, r_k J_k^{gl} - J_1 + 1 + r_k\right),$$
$$\max\left(1, r_s J_s^{gl} - J_1 + 2\right) \le J_s \le \min\left(N_s, r_s J_s^{gl} - J_1 + 1 + r_s\right),\ s = k+1,\ldots,n\Big\},$$
$$J^{gl} \in V_{ep,k}^{gl,+\backslash-},\ k = 2,3,\ldots,n.$$

Работа выполнена в рамках подпрограммы «Математические методы» Государственной программы научных исследований «Конвергенция».

Литература

1. *Xue J.* Loop Tiling For Parallelism. Norwell, 2000.

2. *Irigoin F., Triolet R.* // Proc. of the ACM SIGPLAN Symp. on Principles of Programming Languages. San Diego, California, Jan. 1988. [S. l.], 1988. P. 319–329.

3. *Renganarayanan L., Kim D., Rajopadhye S., Strout M.* // SIGPLAN Conf. on Programming Language Design and Implementation, New York, NY, USA, 2007. [S. l.], 2007. P. 405–414.

4. *Соболевский П. И., Баханович С. В.* // Докл. НАН Беларуси. 2013. Т. 57, № 1. С. 21–26.

5. *Баханович С. В., Соболевский П. И.* Параметризованный тайлинг: точные аппроксимации и анализ глобальных зависимостей // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2014. Т. 54, № 11. С. 1817–1828.

6. *Hartono A., Baskaran M., Ramanujam J., Sadayappan P.* // 24th Intern. Parallel and Distributed Proc. Symp. (2010 IPDPS Conf.), Atlanta, April 2010. [S. l.], 2010.

7. *Tavarageri S., Hartono A., Baskaran M.* et al. // Proc. 15th Workshop on Compilers for Parallel Computers, Vienna, Austria, July 2010. [S. l.], 2010.

8. *Лиходед Н. А., Соболевский П. И.* // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 2012. № 2. С. 107–113.

P. I. SOBOLEVSKY, S. V. BAKHANOVICH

PARAMETERIZED TILING: THE DEFINITION OF THE BOUNDARIES OF LOCAL LOOPS IN PARTIAL TILES

Summary

The aspects of parameterized tiling in application to algorithms with index domain represented by a convex polyhedron are investigated. The structure of the set of partial tiles is proposed and the formulas to determine this set are constructed. The formula to define the boundaries of local loops in partial tiles is obtained as well. These formulas enable one to minimize the calculation time of local loop boundaries in the implementation of the tiling in sequential and parallel programs.