УДК 519.8

С. Е. БУХТОЯРОВ, В. А. ЕМЕЛИЧЕВ

УСТОЙЧИВОСТЬ ИНВЕСТИЦИОННОЙ ЗАДАЧИ МАРКОВИЦА С КРИТЕРИЯМИ КРАЙНЕГО ОПТИМИЗМА

Белорусский государственный университет

(Поступила в редакцию 30.05.2014)

Настоящая работа лежит в русле направлений, связанных с исследованием количественных характеристик устойчивости множества Парето многокритериальных задач дискретной оптимизации. Одна из таких характеристик, называемая обычно радиусом устойчивости задачи, определяется как предельный уровень возмущений ее параметров в метрическом пространстве, не приводящих к появлению новых оптимумов Парето. Здесь устанавливаются нижняя и верхняя оценки радиуса устойчивости многокритериальной булевой задачи формирования портфеля инвестора с классическими критериями теории принятия решений – критериями крайнего оптимизма по доходности портфеля. При этом анализ устойчивости к возмущениям исходных данных (оценок эффективности инвестиционных проектов) проводится в предположении, что в пространстве портфелей задана произвольная метрика Гёльдера l_p, $1 \le p \le \infty$, а в пространстве состояний финансового рынка и критериальном пространстве доходности – чебышевская метрика l_∞. Ранее аналогичные результаты были получены в работах [1–5] лишь в частных случаях, когда в трехмерном пространстве параметров многокритериальной инвестиционной задачи с критериями Вальда и Сэвиджа в различных комбинациях задавались линейная (l_1) и чебышевская метрики (l_∞). В случае, когда метрика Гёльдера l_p задана в каждом из трех пространств параметров инвестиционной задачи, нижняя и верхняя оценки получены лишь для радиуса устойчивости фиксированного парето-оптимального критерия [6].

1. Постановка задачи и основные определения. Рассмотрим многокритериальный дискретный вариант известной задачи управления инвестициями Марковица [7], основанной на диверсификации как методе снижения риска при отборе проектов. Для этого введем ряд обозначений.

Пусть n – количество альтернативных инвестиционных проектов (активов), $n \ge 2$; m – количество прогнозных состояний (ситуаций) финансового рынка, т. е. число возможных сценариев развития, $m \ge 1$; s – количество показателей экономической эффективности (доходности) инвестиционного проекта, $s \ge 1$. Пусть $x_j = 1$, если j-й проект, $j \in N_n = \{1, 2, ..., n\}$, реализуется, и $x_j = 0$ в противном случае. Инвестиционным портфелем назовем булевый вектор $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$. Через $X \subset \mathbf{E}^n$, где $\mathbf{E} = \{0, 1\}$, $|X| > 1$, будем обозначать множество всех допустимых инвестиционных портфелей, т. е. тех портфелей, реализация которых не превосходит начального капитала инвестора. Инвестиционный портфель x будем оценивать величиной $\sum_{j \in N_n} e_{ijk} x_j$, где e_{ijk} – ожидаемая оценка эффективности вида $k \in N_s$ инвестиционного проекта $j \in N_n$ в случае, когда рынок находится в состоянии $i \in N_m$ [8–10]. В этом контексте исходными данными задачи является трехмерная матрица эффективности проектов E размером $m \times n \times s$ с элементами e_{ijk} из множества $\mathbf{R}$.

На множестве инвестиционных портфелей X зададим векторную целевую функцию $f(x,E) = (f_1(x, E_1), f_2(x, E_2),..., f_s(x, E_s))$, компонентами которой являются критерии крайнего оптимизма по эффективности портфеля (MAXMAX):

$$f_k(x,E_k)=\max_{i\in N_m} e_{ik}x=\max_{i\in N_m}\sum_{j\in N_n} e_{ijk}x_j \to \max_{x\in X}, \quad k\in N_s,$$

где $E_k \in \mathbf{R}^{m\times n}$ – k-е сечение матрицы $E\in\mathbf{R}^{m\times n\times s}$, $e_{ik}=(e_{i1k},e_{i2k},...,e_{ink})$ – i-я строка этого сечения. С помощью такого критерия азартный инвестор оптимизирует эффективность портфеля в предположении, что рынок находится в самом выгодном для него состоянии, а именно, когда доходность портфеля максимальна. Очевидно, что подобный подход основан на стереотипе поведения безоглядного оптимиста («или пан, или пропал», «кто не рискует, тот не выигрывает» и т. п.).

Под векторной (s-критериальной) инвестиционной булевой задачей $Z^s(E)$, $s\in\mathbf{N}$, будем понимать задачу поиска множества Парето, состоящего из парето-оптимальных инвестиционных портфелей

$$P^s(E)=\{x\in X : X(x,E)=\varnothing\},$$

где

$$X(x,E)=\{x'\in X : f(x,E)\le f(x',E)\ ,\ f(x,E)\ne f(x',E)\}.$$

Легко видеть, что в частном случае при $m = 1$ наша задача $Z^s(E)$ превращается в векторную булеву задачу с линейными критериями (на максимум). Такой случай можно интерпретировать как ситуацию, при которой состояние финансового рынка не вызывает сомнений.

В пространстве портфелей $\mathbf{R}^n$ зададим произвольную метрику Гёльдера l_p, $1\le p\le\infty$, а в пространстве состояний рынка $\mathbf{R}^m$ и критериальном пространстве эффективности $\mathbf{R}^s$ – чебышевскую метрику l_∞, т. е. полагаем

$$\| E_k \|_{p\infty}=\left\|\left(\| e_{1k}\|_p,\| e_{2k}\|_p,\ldots,\| e_{mk}\|_p\right)\right\|_\infty,\ k\in N_s,$$

$$\| E \|_{p\infty\infty}=\left\|\left(\| E_1\|_{p\infty},\| E_2\|_{p\infty},\ldots,\| E_s\|_{p\infty}\right)\right\|_\infty,$$

где, как обычно, норма Гёльдера l_p вектора $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbf{R}^n$ задается формулой

$$\| a\|_p=\begin{cases}\left(\sum\limits_{j\in N_n}| a_j|^p\right)^{1/p}, & \text{если } 1\le p<\infty,\\ \max\{| a_j| : j\in N_n\}, & \text{если } p=\infty.\end{cases}$$

При любом $p\in[1,\infty]$ очевидны неравенства

$$\| e_{ik}\|_p\le\| E_k\|_{p\infty}\le\| E\|_{p\infty\infty},\ i\in N_n,\ k\in N_s. \qquad (1)$$

Наряду с числом $p\in[1,\infty]$ будем использовать понятие сопряженного с ним числа q, которое определяется равенством $1/p + 1/q = 1$, причем $q = 1$, если $p = \infty$, и $q = \infty$, если $p = 1$. Поэтому в дальнейшем считаем, что областью изменений чисел p и q является отрезок $[1,\infty]$, а сами числа связаны указанными выше условиями. В этих обозначениях будем полагать, что $1/p = 0$ при $p=\infty$.

Используя (1) и известное неравенство Гёльдера

$$ab\le\| a\|_p\| b\|_q,$$

где $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbf{R}^n$, $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)^T \in \mathbf{R}^n$, для любых портфелей $x, x'\in X$ получаем

$$e_{ik}x-e_{i'k}x'\ge-(\| e_{ik}\|_p\| x\|_q+\| e_{i'k}\|_p\| x'\|_q)\ge-\| E_k\|_{p\infty}(\| x\|_q+\| x'\|_q),\ i,i'\in N_n,\ k\in N_s. \qquad (2)$$

Следуя [1–3, 5], радиусом устойчивости инвестиционной задачи $Z^s(E)$ назовем число

$$\rho=\rho(m,s,p)=\begin{cases}\sup\Xi, & \textit{если } \Xi\ne\varnothing,\\ 0, & \textit{если } \Xi=\varnothing,\end{cases}$$

где

$$\Xi = \left\{ \varepsilon > 0 : \forall E' \in \Omega_p(\varepsilon) \quad \left(P^s(E+E') \subseteq P^s(E) \right) \right\},$$

$$\Omega_p(\varepsilon) = \left\{ E' \in R^{m \times n \times s} : \| E' \|_{p\infty\infty} < \varepsilon \right\}.$$

Множество $\Omega_p(\varepsilon)$ принято называть множеством возмущающих матриц. Таким образом, радиус устойчивости задачи $Z^s(E)$ – это предельный уровень всех тех возмущений элементов матрицы E в метрическом пространстве $\mathbf{R}^{m \times n \times s}$, которые не приводят к появлению новых парето-оптимальных портфелей.

Очевидно, что при выполнении равенства $P^s(E) = X$ включение $P^s(E+E') \subseteq P^s(E)$ выполняется при любых возмущающих матрицах $E' \in \Omega_p(\varepsilon)$ для любого числа $\varepsilon > 0$. Поэтому радиус устойчивости задачи $Z^s(E)$ не ограничен сверху. Задачу $Z^s(E)$, для которой $P^s(E) \neq X$, будем называть нетривиальной.

2. Оценки радиуса устойчивости задачи. Для нетривиальной задачи $Z^s(E)$ положим

$$\varphi = \varphi(m,s,p) = \min_{x \notin P^s(E)} \max_{x' \in P(x,E)} \frac{\Upsilon(x,x')}{\| x \|_q + \| x' \|_q},$$

$$\psi = \psi(m,s) = \min_{x \notin P^s(E)} \max_{x' \in P(x,E)} \frac{\Upsilon(x,x')}{\| x - x' \|_1},$$

где

$$\Upsilon(x,x') = \min\left\{ f_k(x',E_k) - f_k(x,E_k) : k \in N_s \right\},$$

$$P(x,E) = P^s(E) \cap X(x,E).$$

Очевидно, что φ и ψ – неотрицательные числа.

Т е о р е м а. *При любых числах m, $s \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$ и $p \in [1,\infty]$ для радиуса устойчивости $\rho(m,s,p)$ нетривиальной задачи $Z^s(E)$ справедливы следующие оценки:*

$$\varphi(m,s,p) \leq \rho(m,s,p) \leq n^{1/p}\psi(m,s). \tag{3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала убедимся в справедливости неравенства $\rho \geq \varphi$. При $\varphi = 0$ оно очевидно. Пусть $\varphi > 0$. Согласно определению числа φ, для любого портфеля $x \notin P^s(E)$ найдется такой портфель $x^0 \in P(x,E)$, что

$$f_k(x^0,E_k) - f_k(x,E_k) \geq \varphi\left(\| x \|_q + \| x^0 \|_q \right), \; k \in N_s.$$

Отсюда, учитывая (1) и (2), для всякого индекса $k \in N_s$ и любой возмущающей матрицы $E' \in \Omega_p(\varphi)$ с сечением E'_k, $k \in N_s$, имеем

$$f_k(x^0, E_k + E'_k) - f_k(x, E_k + E'_k) = \max_{i \in N_m}(e_{ik} + e'_{ik})x^0 - \max_{i \in N_m}(e_{ik} + e'_{ik})x =$$

$$= \min_{i \in N_m} \max_{i' \in N_m}(e_{i'k}x^0 + e'_{i'k}x^0 - e_{ik}x - e'_{ik}x) \geq f_k(x^0,E_k) - f_k(x,E_k) -$$

$$- \| E'_k \|_{p\infty} \left(\| x \|_q + \| x^0 \|_q \right) \geq \left(\varphi - \| E'_k \|_{p\infty} \right)\left(\| x \|_q + \| x^0 \|_q \right) > 0.$$

Поэтому портфель $x \notin P^s(E+E')$. Откуда заключаем, что при любой возмущающей матрице $E' \in \Omega_p(\varphi)$ справедливо включение $P^s(E+E') \subseteq P^s(E)$. Следовательно, верно неравенство $\rho \geq \varphi$.

Далее докажем неравенство $\rho \leq n^{1/p}\psi$. В соответствии с определением величины ψ найдется такой портфель $x^0 \notin P^s(E)$, что для каждого портфеля $x \in P(x^0,E)$ существует индекс $v = v(x) \in N_s$, удовлетворяющий условию

$$\psi \| x - x^0 \|_1 \geq f_v(x,E_v) - f_v(x^0,E_v). \tag{4}$$

Пусть $\varepsilon > n^{1/p}\psi$. Элементы e^0_{ijk} возмущающей матрицы $E^0 \in \mathbf{R}^{m \times n \times s}$ с сечениями E^0_k, $k \in N_s$, зададим по правилу

$$e_{ijk}^0 = \begin{cases} \delta, \text{ если } i \in N_m,\ x_j^0 = 1,\ k \in N_s, \\ -\delta \ \text{ в противных случаях,} \end{cases}$$

где $\varepsilon / n^{1/p} > \delta > \psi$. Все строки e_{ik}^0, $i \in N_m$, любого k-го сечения E_k^0 одинаковы. Поэтому, обозначив такую строку через A, получаем

$$A(x - x^0) = -\delta \| x - x^0 \|_1, \tag{5}$$

$$\| A \|_p = \| e_{ik}^0 \|_p = n^{1/p}\delta = \| E_k^0 \|_{p\infty} = \| E^0 \|_{p\infty\infty},\ i \in N_m,\ k \in N_s.$$

Поэтому $E^0 \in \Omega_p(\varphi)$. Теперь, учитывая (4) и (5), выводим, что для любого портфеля $x \in X(x^0, E)$ справедливы соотношения

$$f_v(x, E_v + E_v^0) - f_v(x^0, E_v + E_v^0) = \max_{i \in N_m}(e_{iv} + A)x - \max_{i \in N_m}(e_{iv} + A)x^0 =$$

$$= f_v(x, E_v) - f_v(x^0, E_v) + A(x - x^0) \le (\psi - \delta) \| x - x^0 \|_1 < 0.$$

Таким образом, справедливо утверждение

$$\forall x \in P(x^0, E)\ \left(x \notin X(x^0, E + E^0) \right), \tag{6}$$

т. е., если $x \in P(x^0, E)$, то $x \notin X(x^0, E + E^0)$.

Допустим теперь, что портфель $x \notin P(x^0, E)$. Тогда возможны лишь следующие два случая.

С л у ч а й 1. Пусть $f(x, E) = f(x^0, E)$. Тогда для любого индекса $k \in N_s$ согласно равенству (5) имеем

$$f_k(x, E_k + E_k^0) - f_k(x^0, E_k + E_k^0) = \max_{i \in N_m}(e_{ik} + A)x - \max_{i \in N_m}(e_{ik} + A)x^0 =$$

$$= f_k(x, E_k) - f_k(x^0, E_k) + A(x - x^0) = -\delta \| x - x^0 \|_1 < 0.$$

С л у ч а й 2. Существует такой индекс $u \in N_s$, что $f_u(x, E_u) < f_u(x^0, E_u)$. Тогда, вновь используя равенство (5), получаем $f_u(x, E_u + E_u^0) < f_u(x^0, E_u + E_u^0)$.

Таким образом, если $x \notin P(x^0, E)$, то $x \notin X(x^0, E + E^0)$. В результате с учетом (6) выводим, что $X(x^0, E + E^0) = \varnothing$, т. е. x^0 – парето-оптимальный портфель возмущенной задачи $Z^s(E + E^0)$. Поэтому, учитывая $x^0 \notin P^s(E)$, заключаем, что для всякого числа $\varepsilon > n^{1/p}\psi$ существует такая возмущающая матрица $E^0 \in \Omega_p(\varepsilon)$, что $P^s(E + E^0) \not\subseteq P^s(E)$. Следовательно, справедливо неравенство $\rho \le n^{1/p}\psi$. Теорема доказана.

3. Следствия из теоремы. Из теоремы вытекает ряд следствий.

С л е д с т в и е 1. *При любых $m, s \in \mathbf{N}$ справедливы оценки*

$$\min_{x \notin P^s(E)} \max_{x' \in P(x,E)} \frac{\Upsilon(x, x')}{\| x + x' \|_1} = \varphi(m, s, \infty) \le \rho(m, s, \infty) \le \psi(m, s) = \min_{x \notin P^s(E)} \max_{x' \in P(x,E)} \frac{\Upsilon(x, x')}{\| x - x' \|_1}.$$

Отметим, что ранее в [2] были получены аналогичные оценки для радиуса устойчивости векторной инвестиционной задачи с критериями Сэвиджа в случае, когда во всех трех пространствах параметров задачи задавалась одна и та же метрика Чебышева.

Из следствия 1 получаем следующее утверждение, которое свидетельствует о достижимости оценок (3) в случае, когда $p = \infty$.

С л е д с т в и е 2. *Если для всякой пары портфелей $x \in P^s(E)$ и $x' \in P(x, E)$ множество $\{j \in N_n : x_j = x'_j = 1\}$ пусто, то при любых $m, s \in \mathbf{N}$, верна формула*

$$\rho(m, s, \infty) = \varphi(m, s, \infty) = \psi(m, s).$$

При $m = 1$ наша векторная инвестиционная задача $Z^s(E)$ превращается в s-критериальную задачу линейного булева программирования

$$f_k(x, e_k) = e_k x \to \max_{x \in X}, \quad k \in N_s,$$

где $e_k \in \mathbf{R}^{1\times n}$, $k \in N_s$, – k-я строка матрицы $E = [e_{1jk}] \in \mathbf{R}^{1\times n\times s}$, $X \subseteq \mathbf{E}^n$. При этом, как и ранее, в критериальном пространстве $\mathbf{R}^s$ задана метрика Чебышева l_∞, а в пространстве решений $\mathbf{R}^n$ – произвольная метрика Гёльдера l_p, $1 \le p \le \infty$. В этих обозначениях из теоремы вытекает следующий известный [11] результат.

Следствие 3 [11]. *При любых* $s \in \mathbf{N}$, $n \ge 2$ *и* $p \in [1, \infty]$ *справедливо соотношение*

$$\rho(1, s, p) \le n^{1/p} \psi(1, s) = n^{1/p} \min_{x \notin P^s(E)} \max_{x' \in P(x,E)} \min_{k \in N_s} \frac{e_k(x' - x)}{\| x' - x \|_1}.$$

Отметим, что в [11] доказана достижимость этой верхней оценки при $s = 1$, т. е. указан класс скалярных линейных булевых задач, для которых справедливо равенство $\rho(1,1,p) = n^{1/p}\psi(1,1)$ при любых $n \ge 2$ и $p \in [1, \infty]$.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф13К-078).

Литература

1. *Емеличев В. А., Коротков В. В.* // Дискрет. математика. 2012. Т. 24, № 3. С. 3–16.
2. *Емеличев В. А., Коротков В. В.* // Кибернетика и систем. анализ. 2012. № 3. С. 68–77.
3. *Емеличев В. А., Коротков В. В.* // Изв. НАН Азербайджана. Сер. физ.-тех. и мат. наук. 2012. Т. 32, № 6. С. 88–98.
4. *Емеличев В. А., Коротков В. В.* // Тр. Ин-та. математики НАН Беларуси. 2012. Т. 20, № 2. С. 10–17.
5. *Емеличев В. А., Коротков В. В.* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2012. № 1. С. 44–49.
6. *Емеличев В. А., Коротков В. В.* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2012. № 4. С. 42–48.
7. *Markowitz H. M.* Portfolio selection: efficient diversification of investments. New York, 1991.
8. *Бронштейн Е. М., Черняк Д. А.* // Экономика и мат. методы. 2005. Т. 41, № 2. С. 21–28.
9. *Виленский П. Л., Лившиц В. Н., Смоляк С. А.* Оценки эффективности инвестиционных проектов: теория и практика. М., 2008.
10. *Царев В. В.* Оценки экономической эффективности инвестиций. СПб., 2004.
11. *Емеличев В. А., Коротков В. В.* // Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. 2013. № 3. С. 100–103.

S. E. BUKHTOYAROV, V. A. EMELICHEV

STABILITY OF THE MARKOWITZ INVESTMENT PROBLEM WITH EXTREME OPTIMISM CRITERIA

Summary

The multicriteria investment boolean Markowitz problem with extreme optimism criteria is considered. Upper and lower bounds of the radius of the stability of this problem are given in the case of the arbitrary Holder metric l_p, $1 \le p \le \infty$ in the portfolio space and the Chebyshev metric l_∞ in the space of financial market states and in the space of investment project profitability.