МАТЭМАТЫКА

УДК 512.74, 512.552.13

В. И. ЯНЧЕВСКИЙ

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ГРУПП УАЙТХЕДА И ИХ УНИТАРНЫХ АНАЛОГОВ АЛГЕБР АДЗУМАЙИ НАД ПОЛЯМИ ФУНКЦИЙ *p*-АДИЧЕСКИХ КРИВЫХ И СПЕЦИАЛЬНЫМИ ГЕНЗЕЛЕВЫМИ ПОЛЯМИ

Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь,
e-mail: yanch@im.bas-net.by

Описываются группы приведенных и приведенных унитарных норм для слабо разветвленных гензелевых алгебр с делением. Устанавливаются важные свойства приведенных и приведенных унитарных групп Уайтхеда алгебр с делением над полями функций p-адических кривых при пополнении их относительно специальных дискретных нормирований, а также тел так называемых некоммутативных p-адических рациональных функций.

Ключевые слова: группы Уайтхеда алгебр с делением, приведенные группы Уайтхеда алгебр с делением, гензелевы поля, приведенные нормы алгебр Адзумайи над полями, унитарные инволюции алгебр с делением, приведенные унитарные нормы центральных простых алгебр с инволюциями.

V. I. YANCHEVSKIĬ

SOME PROPERTIES OF WHITEHEAD GROUPS AND THEIR UNITARY ANALOGS OF AZUMAYA ALGEBRAS OVER FUNCTION FIELDS OF THE *p*-ADIC CURVES AND OVER SPECIAL HENSELIAN ONES

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus,
e-mail: yanch@im.bas-net.by

The groups of reduced and reduced unitary norms of tamely ramified Henselian division algebras are described. Important properties of reduced and reduced unitary Whitehead groups of division algebras over function fields of p-adic curves after extension scalars to their completions with respect to special discrete valuations and of skew fields of the so-called noncommutative p-adic rational functions are obtained.

Keywords: Whitehead groups of division algebras, reduced Whitehead groups of division algebras, Henselian fields, reduced norms of Azumaya algebras of fields, unitary involutions of division algebras, reduced unitary norms of central simple algebras with involutions.

Пусть F – поле, A – алгебра Адзумайи центральная над F. В теории линейных алгебраических групп классического типа важную роль играют следующие две группы: группа Уайтхеда алгебры A и в случае, когда A обладает унитарной инволюцией, анизотропная унитарная группа Уайтхеда. Ниже для простоты мы предполагаем, что A – алгебра с делением. Нам потребуются следующие определения.

Определение 1. Для всякой центральной F-алгебры Адзумайи с делением A определено отображение приведенной нормы Nrd_A: $A \to F$, которое при ограничении на мультипликативные группы A^* алгебры A и F^* поля F превращается в гомоморфизм этих групп.

Определение 2. Для всякой центральной алгебры с делением A над гензелевым полем F через M_A ниже обозначается идеал нормирования, продолжающего нормирование на F, через U_A – группа обратимых элементов кольца нормирования, а через $\bar{A}$ – алгебра вычетов относительно этого нормирования, и для любого a из кольца нормирования A $\bar{a}$ обозначает его естественный образ в $\bar{A}$.

Определение 3. Группой Уайтхеда $K_1(A)$ алгебры A называется фактор-группа

$$K_1(A) = A^*/ [A^*,A^*],$$

где $A^*= A\backslash\{0\}$, $[A^*,A^*]$ – коммутант группы A^*. Приведенная группа Уайтхеда $SK_1(A)$ алгебры A определяется как фактор-группа

$$SK_1(A) = SL_1(A) / [A^*,A^*],$$

где $SL_1(A)$ – ядро гомоморфизма приведенной нормы Nrd_A: $A^*\to F^*$ (здесь $F^* = F\backslash\{0\}$).

Определение 4. Для алгебры A, обладающей инволюцией τ с нетривиальным ограничением на F, анизотропной унитарной группой Уайтхеда $UK_1(A,\tau)$ называется фактор-группа

$$U(A,\tau) / [U(A,\tau), U(A,\tau)],$$

здесь $U(A,\tau) = \{a\in A^* \mid a\, a^\tau=1\}$ – унитарная группа для пары (A, τ), а $[U(A,\tau), U(A,\tau)]$ – коммутант группы $U(A,\tau)$. Приведенная анизотропная унитарная группа Уайтхеда $SUK_1^{an}(A,\tau)$ определяется как фактор-группа

$$SU(A,\tau) / [\, U(A,\tau), U(A,\tau)],$$

где $SU(A,\tau) = SL_1(A) \cap U(A,\tau)$.

В обоих случаях имеются канонические точные последовательности:

$$1 \to SK_1(A) \to K_1(A) \to \mathrm{Nrd}_A(A^*) \to 1,$$
$$1 \to SUK_1^{an}(A,\tau) \to UK_1(A,\tau) \to \mathrm{Nrd}_A(U(A,\tau)) \to 1.$$

Из этого следует, что изучение групп Уайтхеда $K_1(A)$ и $UK_1(A,\tau)$ сводится к изучению групп $SK_1(A)$, $SUK_1^{an}(A,\tau)$ и групп приведенных норм $\mathrm{Nrd}_A(A^*)$ и приведенных унитарных норм $\mathrm{Nrd}_A(U(A,\tau))$.

Нашей целью является описание специальных свойств вышеупомянутых групп для двух классов алгебр A: алгебр с делением над гензелевыми полями F и тел так называемых некоммутативных рациональных функций.

Остановимся вначале на описании групп приведенных норм. В этой статье мы рассмотрим случай слабо разветвленных центральных над гензелевыми полями F-алгебр с делением. Предварительно заметим, что описание групп приведенных норм для алгебр A, центральных над произвольным полем F, немедленно сводится к соответствующей задаче для алгебр примарных индексов ввиду следующего утверждения из [1].

Предложение. Пусть $A = A_1\otimes_F A_2\otimes_F\ldots\otimes_F A_r$, где A_i – алгебры Адзумайи взаимно простых примарных индексов. Тогда

$$\mathrm{Nrd}_A(A^*) = \bigcap_{i=1}^{r}\mathrm{Nrd}_A(A_i^*),$$

(здесь и далее R^* обозначает мультипликативную группу кольца R).

Кроме того, хорошо известно, что для полной матричной алгебры $M_n(D)$ степени n над алгеброй с делением D имеет место совпадение групп $\mathrm{Nrd}(M_n(D))$ и $\mathrm{Nrd}(D)$, поэтому ниже мы будем предполагать всегда A алгеброй с делением примарного индекса.

Переходя к рассмотрению алгебр с делением над гензелевыми полями, приведем вначале необходимые нам в дальнейшем факты о слабо разветвленных алгебрах с делением центральных над гензелевыми полями F и их приведенных нормах.

Лемма. *Пусть A – алгебра с делением, центральная над гензелевым полем F с полем вычетов $\overline{F}$, примарного индекса взаимно простого с* $\mathrm{char}\,\overline{F}$*, если* $\mathrm{char}\,\overline{F}$ *положительна. Тогда A слабо разветвлена над F, и для всякого обратимого элемента a кольца нормирования алгебры A имеет место следующее соотношение:*

$$\overline{\mathrm{Nrd}_A(a)} = N_{Z(\overline{A})/\overline{F}}\left(\mathrm{Nrd}_{\overline{A}}(\overline{a})\right). \tag{1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала покажем, что A слабо разветвлена над F. Напомним, что для алгебр с делением, центральных над гензелевыми полями, имеет место формула Островского – Дракслa:

$$[A:F] = q^k[\overline{A}:\overline{F}][\Gamma_A:\Gamma_F],$$

где k – неотрицательное целое число, $q^k = (\operatorname{char}\overline{F})^k$, если $\operatorname{char}\overline{F} > 0$, и $q^k = 1$ в противном случае, Γ_A, Γ_F – группы значений алгебры A и поля F соответственно. Нетрудно видеть, что ввиду условий леммы q^k в последней формуле всегда равно 1, поэтому алгебра A бездефектна над F и $Z(\overline{A})/\overline{F}$ – абелево расширение, где $Z(\bar{A})$ – центр алгебры вычетов $\bar{A}$ алгебры A. Поэтому алгебра A слабо разветвлена над F и $[Z(\overline{A}):\overline{F}]\delta^2 = [\Gamma_A:\Gamma_F]$. Следовательно, $\operatorname{ind} A = \operatorname{ind}\overline{A}\left[Z\left(\overline{A}\right):\overline{F}\right]\delta$. Кроме того, известно, что для всякого обратимого элемента a кольца нормирования алгебры A справедлива следующая формула:

$$\overline{\operatorname{Nrd}_A(a)} = N_{Z(\overline{A})/\overline{F}}\left(\operatorname{Nrd}_{\overline{A}}(\overline{a})\right)^{\delta_A},$$

где $\delta_A = \operatorname{ind} A/(\operatorname{ind}\overline{A}[Z(\overline{A}):\overline{F}])$. Далее везде $\delta_A = 1$, поэтому (1) имеет место.

В абелевой фактор-группе Γ_A/Γ_F зафиксируем ее разложение в прямую сумму циклических групп: $\Gamma_A/\Gamma_F = \langle\gamma_1+\Gamma_K\rangle\oplus \ldots \oplus\langle\gamma_r+\Gamma_K\rangle$, и пусть $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_r$ – элементы из A такие, что $v(\Gamma_i) = \gamma_i$, $i = 1,\ldots, r$, а $v(\Gamma_i)$ – значение нормирования в алгебре A элемента Γ_i. В этих обозначениях справедлива следующая

Т е о р е м а 1. *Пусть A – алгебра с делением, центральная над гензелевым полем F с полем вычетов $\overline{F}$, примарного индекса взаимно простого с* $\operatorname{char}\overline{F}$. *Тогда группа приведенных норм алгебры A порождается следующими элементами:* $\operatorname{Nrd}_A(\Gamma_1), \ldots, \operatorname{Nrd}_A(\Gamma_r)$, *подгруппой* $1+M_F$, *где M_F – максимальный идеал кольца нормирования поля F, и группой* $N_{Z/F}(\operatorname{Nrd}_{C_A(Z)}(C_A(Z)^*))$, *где* $\operatorname{Nrd}_{C_A(Z)}(C_A(Z)^*)$ *– группа приведенных норм алгебры $C_A(Z)$ – централизатора в A неразветвленного расширения поля F с полем вычетов $Z(\bar{A})$, а* $N_{Z/F}(\operatorname{Nrd}_{C_A(Z)}(C_A(Z)^*))$ *– образ группы* $\operatorname{Nrd}_{C_A(Z)}(C_A(Z)^*)$ *при гомоморфизме $N_{Z/F}$: $Z^*\to F^*$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Всякий элемент a из A имеет вид

$$a = \Gamma_1^{\alpha_1}\ldots\Gamma_r^{\alpha_r}u_a,$$

где u_a – подходящий обратимый элемент кольца нормирования алгебры A. Теперь уже нетрудно видеть, что нам достаточно описать приведенные нормы для элементов u_a. Заметим, что элемент u_a может быть представлен в виде $z_a t$, где $z_a \in C_A(Z)$, а $t \in (1+M_A)$. Нетрудно теперь видеть, ввиду $\overline{C_A(Z)} = \overline{A}$ и $\operatorname{Nrd}_A(1+M_A) = 1+M_F$, что теорема верна.

П р и м е р 1. Пусть k – глобальное поле положительной характеристики (т. е. поле алгебраических функций от переменной x с коэффициентами в конечном поле) и F – поле формальных степенных рядов от переменной y с коэффициентами в k. Поле F – гензелево относительно дискретного канонического нормирования, связанного с y, и имеет $\overline{F}$ полем вычетов. Пусть алгебра A такая же, как в предыдущей теореме. Поскольку Γ_A/Γ_F – циклическая группа, обозначим через Γ – элемент из A такой, что $v(\Gamma) + \Gamma_F$ – образующая Γ_A/Γ_F. Тогда произвольный элемент $a \in A^*$ имеет вид $\Gamma^\alpha u_a$, где u_a – единица кольца нормирования алгебры A. По модулю группы $1+M_A$ можно считать, что $u_a \in C_A(Z)^*$. Алгебра $C_A(Z)$ неразветвлена над Z и потому, ввиду глобальности $Z(\bar{A})$, группа $\operatorname{Nrd}_{C_A(Z)}(A^*)$ может быть описана как группа, порожденная группой Z^* и группой $1+M_Z$, что влечет: группа $\operatorname{Nrd}_A(A^*)$ порождается группой $N_{Z/F}(Z^*)$ и группой $1+M_F$.

В случае коммутативного $\bar{A}$ получаем в качестве следствия следующее утверждение, дающее более явное описание группы приведенных норм алгебры A.

Т е о р е м а 2. *Пусть алгебра A такая же, как в предыдущей теореме, и $\bar{A}$ – поле. Тогда группа приведенных норм алгебры A порождается следующими элементами* $\operatorname{Nrd}_A(\Gamma_1), \ldots, \operatorname{Nrd}_A(\Gamma_r)$

и подгруппами $1+M_F$, *где* M_F *– максимальный идеал кольца нормирования поля* F, $N_{Z/F}(Z^*)$, *где* $N_{Z/F}(Z^*)$ *– группа ненулевых норм расширения* Z/F, Z *– неразветвленное расширение над* F *с полем вычетов* $Z(\bar{A})$.

Действительно, в этом случае $\overline{A} = \overline{Z}$.

Пример 2. Пусть k – локальное числовое поле. Положим $F = k\langle x\rangle$ – поле формальных степенных рядов от x с коэффициентами в k. Пусть $f \in F$ – формальный степенной ряд вида $\sum_{i=\beta}^{+\infty} k_i x^i$, где $k_i \in k$. Определим на поле F нормирование v следующим образом:

$$v(f) = (v_p(k_\beta), \beta) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z},$$

где v_p – p-адическое нормирование поля k, $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ – линейно упорядоченная группа с лексикографическим порядком, индуцированным естественным упорядочением на группе $\mathbb{Z}$. Тогда всякая центральная F-алгебра с делением A взаимно простого с p индекса удовлетворяет условиям предыдущей теоремы, откуда следует простое описание группы ее приведенных норм.

Рассмотрим теперь группы $\mathrm{Nrd}_A(U(A,\tau))$. Для алгебры с делением A, центральной над гензелевым полем F с унитарной инволюцией τ, повсюду ниже через K будем обозначать поле неподвижных относительно τ элементов из F. Мы также будем предполагать, что Z – τ-инвариантное расширение F (известно, что такое Z всегда существует). Для описания группы $\mathrm{Nrd}_A(U(A,\tau))$ напомним следующие факты об алгебрах с инволюциями и приведенных унитарных нормах. Для простоты ограничимся алгебрами нечетного индекса. В этом случае имеют место следующие утверждения.

Теорема 3. *Пусть A — алгебра с делением нечетного индекса, центральная над гензелевым полем F с унитарной инволюцией τ. Тогда расширение F/K не разветвлено.*

Доказательство. Рассмотрим вначале случай, когда алгебра вычетов $\overline{A}$ – не поле. Предположим, что расширение F/K вполне разветвлено. Тогда редукция $\bar{\tau}$ инволюции τ на $Z(\overline{A})$ тождественна. В самом деле, $Z(\overline{A}) / \overline{K}$ – расширение нечетной степени и $\bar{\tau}$ – $\overline{K}$-автоморфизм порядка, не превосходящего 2. Ввиду некоммутативности алгебры $\overline{A}$, $\bar{\tau}$ – инволюция первого рода на $\overline{A}$, чего не может быть ввиду нечетности степени $\overline{A} / Z(\overline{A})$. Случай коммутативного $\overline{A}$ также не сложен и использует критерий существования унитарных инволюций на циклических алгебрах.

Описание приведенных унитарных норм над произвольным полем F дается следующим утверждением.

Теорема 4. *Пусть A – алгебра с делением нечетного индекса, центральная над гензелевым полем F с унитарной инволюцией τ. Тогда*

$$\mathrm{Nrd}_A(U(A,\tau)) = \mathrm{Nrd}_A(A^*) \cap SL(1, F / K),$$

где $SL(1,F / K) = \{z \in F \mid N_{F/K}(z) = 1\}$.

Повсюду ниже для гензелевых полей F будем предполагать нечетность характеристики $\overline{F}$.

По аналогии с теоремой 1 в случае гензелевых полей F получаем следующее описание группы приведенных унитарных норм.

Теорема 5. *Пусть A – центральная над F алгебра с делением примарного нечетного индекса взаимно простого с характеристикой поля $\overline{F}$ и с унитарной инволюцией τ. Тогда в обозначениях теоремы 1 группа приведенных унитарных норм $\mathrm{Nrd}_A(U(A,\tau))$ совпадает с группой $N_{Z/F}\left(\mathrm{Nrd}_{C_A(Z)}\left(C_A\left(Z^*\right)\right)\right) \cap SL\left(1, F / K\right)$.*

Доказательство. Ввиду теоремы 4 $\mathrm{Nrd}_A(U(A,\tau)) = \mathrm{Nrd}_A(A^*) \cap SL(1,F / K)$. Заметим, что

$$\mathrm{Nrd}_A(A^*) \cap SL(1,F / K) = \mathrm{Nrd}_A(A^*) \cap U_F \cap SL(1,F / K) = \mathrm{Nrd}_A(U_A^*) \cap SL(1,F / K)$$

и

$$N_{Z/F}(\mathrm{Nrd}_{C_A(Z)}(1 + M_{C_A(Z)})) = 1 + M_F. \qquad (*)$$

С учетом равенства (*) и поскольку $\overline{\mathrm{Nrd}_A(U_A^*)} = N_{\overline{Z}/\overline{F}}\left(\mathrm{Nrd}_{\overline{C_A(Z)}}(\overline{C_A(Z)}^*)\right)$ и $\overline{SL(1,F/K)} = SL(1,\overline{F}/\overline{K})$, то

$$\overline{\mathrm{Nrd}_A(U_A^*) \cap SL(1,F/K)} = N_{\overline{Z}/\overline{F}}\left(\mathrm{Nrd}_{\overline{C_A(Z)}}(\overline{C_A(Z)}^*)\right) \cap SL(1,\overline{F}/\overline{K}).$$

Пусть $w \in \mathrm{Nrd}_A(U_A^*) \cap SL(1,F/K)$. Тогда $\overline{w} \in N_{\overline{Z}/\overline{F}}\left(\mathrm{Nrd}_{\overline{C_A(Z)}}(\overline{C_A(Z)}^*)\right) \cap SL(1,\overline{F}/\overline{K})$. Рассмотрим прообраз v элемента $\overline{w}$ в *SL(1,F/K)*. Тогда $v = N_{Z/F}\left(\mathrm{Nrd}_{C_A(Z)}(c)\right)(1+m_F)$, где $c \in C_A(Z)^*$, а $m_F \in M_F$. Ввиду равенства (*) $v \in N_{Z/F}\left(\mathrm{Nrd}_{C_A(Z)}\left(C_A\left(Z^*\right)\right)\right) \cap SL\left(1,F/K\right)$. Таким образом, $w = v(1 + z_F)$ для подходящего $z_F \in M_F$. Из последнего равенства следует, что $(1 + z_F) \in \in SL(1,F/K)$, и снова ввиду равенства (*) получаем, что

$$w \in N_{Z/F}\left(\mathrm{Nrd}_{C_A(Z)}\left(C_A\left(Z^*\right)\right)\right) \cap SL\left(1,F/K\right).$$

Включение $N_{Z/F}\left(\mathrm{Nrd}_{C_A(Z)}\left(C_A\left(Z^*\right)\right)\right) \cap SL\left(1,F/K\right) \subseteq \mathrm{Nrd}_A(A^*) \cap SL(1,F/K)$ очевидно, что завершает доказательство теоремы.

Теорема 6. *Пусть алгебра A такая же, как в предыдущей теореме, и* $\bar{A}$ *– поле. Тогда в обозначениях теоремы* 1 *группа приведенных унитарных норм* $\mathrm{Nrd}_A(U(A,\tau))$ *совпадает с группой* $N_{Z/F}(Z^*) \cap SL(1, F/K)$.

Пример 3. Обратимся к примеру 2. В обозначениях этого примера пусть F обладает неразветвленным квадратичным подрасширением K. В силу теоремы 6 для всякой унитарной F/K-инволюции τ на алгебре A группа приведенных унитарных норм $\mathrm{Nrd}_A(U(A, \tau))$ совпадает с группой $N_{Z/F}(Z^*) \cap SL(1, F/K)$. Как отмечалось выше, достаточно вычислить группу $N_{Z/F}(U_Z) \cap SL(1, F/K)$. Ввиду очевидного равенства $N_{Z/F}(U_Z)=U_F$ описание последнего пересечения сводится к вычислению группы $SL(1, F/K)$, которая, в свою очередь, вычисляется с помощью перехода к редукции. Действительно, конечность $\overline{F}$ и $\overline{K}$ влечет сюръективность отображения $N_{\overline{F}/\overline{K}}$. Ясно тогда, что $SL(1, \overline{F}/\overline{K})$ — циклическая группа, изоморфная фактор-группе $\overline{F}^*/\overline{K}^*$. Заметим в заключение, что гомоморфизм $SL(1, F/K)$ в $SL(1, \overline{F}/\overline{K})$, индуцированный гомоморфизмом редукции, сюръективен. С учетом того факта, что ядро этого гомоморфизма совпадает с $(1+M_F)^{\tau-1}$, получаем из предыдущего полное описание группы $\mathrm{Nrd}_A(U(A, \tau))$.

Пример 4. Возвращаясь к примеру 1, предположим дополнительно, что на алгебре A имеется унитарная инволюция τ. Ввиду доказательства теоремы 5, группа приведенных унитарных норм $\mathrm{Nrd}_A(U(A, \tau))$ совпадает с

$$N_{Z/F}\left(\mathrm{Nrd}_{C_A(Z)}\left(U_{C_A(Z^*)}\right)\right) \cap SL\left(1,F/K\right).$$

Переход к вычетам с учетом формул $\overline{N_{Z/F}\left(\mathrm{Nrd}_{C_A(Z)}\left(U_{C_A(Z^*)}\right)\right)} = N_{\overline{Z}/\overline{F}}(\overline{Z}^*)$ и $\overline{SL\left(1,F/K\right)} = = SL\left(1,\overline{F}/\overline{K}\right)$ влечет

$$\overline{N_{Z/F}\left(\mathrm{Nrd}_{C_A(Z)}\left(U_{C_A(Z^*)}\right)\right) \cap SL\left(1,F/K\right)} = N_{\overline{Z}/\overline{F}}(\overline{Z}^*) \cap SL\left(1,\overline{F}/\overline{K}\right).$$

Далее, рассуждая как в доказательстве теоремы 5 и примера 3 и используя глобальную теорию полей классов, получаем описание группы $SL(1,F/K)$ и группы $N_{Z/F}(Z^*)$, что в силу теоремы 5 приводит к окончательному описанию группы приведенных унитарных норм.

Замечание 1. Отметим, что центры алгебр из примеров 1–4 являются пополнениями полей функций p-адических кривых относительно подходящих нормирований.

Обратимся теперь к свойствам приведенных групп Уайтхеда над полями функций p-адических кривых.

Пусть K – конечное расширение поля p-адических чисел, C – K-определенная гладкая неприводимая проективная алгебраическая кривая, $F = K(C)$ – ее поле K-рациональных функций, A – конечномерная центральная F-алгебра Адзумайи.

Хорошо известно, что в зависимости от арифметических свойств поля F группа $SK_1(A)$ может быть как тривиальной, так и нетривиальной. Следующая гипотеза А. Суслина (долгое время остававшаяся недоказанной) утверждает, что для подходящего регулярного расширения поля F, сохраняющего индекс алгебры A, группа $SK_1(A)$ нетривиальна, если этот индекс не свободен от квадратов. Справедливость этой гипотезы подчеркивает важность установления тривиальности или нетривиальности групп $SK_1(A)$.

Для формулировки дальнейших результатов нам потребуются следующие обозначения.

Пусть S – множество дискретных нормирований поля F, тривиальных на K. Для каждого такого нормирования $v \in S$ через F_v обозначим пополнение поля F относительно v. Рассмотрим естественный гомоморфизм $SK_1(A) \to SK_1(A \otimes_F F_v)$, индуцируемый естественным вложением алгебры A в алгебру $A \otimes_F F_v$. Основное наблюдение, связанное с этим гомоморфизмом, состоит в том, что его ядро совпадает с группой $SK_1(A)$, что немедленно вытекает из следующего утверждения.

Теорема 7. *В вышеприведенных обозначениях группа $SK_1(A \otimes_F F_v)$ тривиальна для любого $v \in S$.*

Доказательство. Пусть $v \in S$. Тогда F_v – пополнение поля F и имеет локальное числовое поле в качестве поля вычетов. В этом случае для алгебры $A \otimes_F F_v$ имеются следующие возможности:

(i) $A \otimes_F F_v$ не разветвлена над F_v. В этом случае, как известно, группа $SK_1(A \otimes_F F_v)$ изоморфна приведенной группе Уайтхеда алгебры вычетов, которая в свою очередь тривиальна ввиду результата Т. Накаямы и Ю. Мацусимы [2];

(ii) алгебра $A \otimes_F F_v$ ветвится над F_v, тогда имеем следующую точную последовательность:

$$1 \to SK_1(\overline{A \otimes_F F_v}) / N \to SK_1(A \otimes_F F_v) \to H^{-1}(G, \mathrm{Nrd}(\overline{A \otimes_F F_v})) \to 1,$$

где N – некоторая нормальная подгруппа в $SK_1(\overline{A \otimes_F F_v})$, а группа G циклична.

Заметим, что второй член точной последовательности тривиален, поскольку алгебра $\overline{A \otimes_F F_v}$ является алгеброй над локально числовым полем, и потому группа $SK_1(\overline{A \otimes_F F_v})$ тривиальна [3]. Кроме того, как известно, $\mathrm{Nrd}(\overline{A \otimes_F F_v}^*) = \overline{F_v}^*$, и потому группа $H^{-1}(G, \mathrm{Nrd}(\overline{A \otimes_F F_v}))$ тривиальна ввиду теоремы 90 Гильберта. Теорема доказана.

Другим основным результатом о группах $SK_1(A)$ является установление их тривиальности в случае тел, так называемых p-адических некоммутативных рациональных функций.

Приведем определение, необходимое для формулировки этого результата.

Пусть B – алгебра с делением с автоморфизмом ν конечного внешнего порядка. В этом случае, как известно, определено кольцо многочленов $B[x, \nu]$ от переменной x относительно ν с коэффициентами в B. Рассмотрим его тело частных $B(x, \nu)$ (см., напр., [3]).

Теорема 8. *Пусть B – конечномерная алгебра с делением над p-адическим полем. Тогда группа $SK_1(B(x,\nu))$ тривиальна.*

Замечание 2. На самом деле имеет место более общий результат, связанный с телами некоммутативных рациональных функций с коэффициентами в алгебрах с делением, центры которых – C_2^0-поля.

Определение 5 (см. [4]). Поле K называется C_2^0-полем, если для его любого конечного расширения L и центральной L-алгебры с делением B отображение $\mathrm{Nrd}: B \to L$ сюръективно.

Справедлива следующая

Теорема 9. *Пусть B – конечномерная алгебра с делением над C_2^0-полем. Тогда группа $SK_1(B(x,\nu))$ тривиальна.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 2 с учетом тривиальности приведенных групп Уайтхеда алгебр над C_2^0-полями и сюръективности отображения приведенной нормы для алгебры *B*.

В заключение остановимся кратко на некоторых свойствах групп $SUK_1^{an}(A,\tau)$. Одной из главных задач, связанной с этими группами, является задача их поведения при расширениях скаляров таких, что расширенные алгебры снова являются алгебрами с унитарными инволюциями. Применительно к нашему случаю алгебр Адзумайи над полями функций *p*-адических кривых с унитарными инволюциями эта задача может быть сформулирована следующим образом.

Задана алгебра Адзумайи A с делением над полем F функций p-адической кривой с унитарной инволюцией τ. *Установить существование регулярного расширения R поля F такого, что алгебра* $A\otimes_F R$ *является алгеброй с делением, а инволюция* τ *продлевается до инволюции алгебры* $A\otimes_F R$ *и алгебра* $A\otimes_F R$ *циклична*.

На самом деле, решение этой задачи немедленно вытекает из решения более общей задачи, рассматривавшейся в [5].

Теорема 10. *Пусть A, F и* τ *такие, как и выше. Тогда существует регулярное расширение поля R/F, сохраняющее индексы центральных простых F-алгебр таких, что* $A\otimes_F R$ *– циклична и обладает унитарной инволюцией* $\tilde{\tau}$, *продолжающей* τ.

Расширение скаляров, возникающее в последней теореме, индуцирует естественный гомоморфизм: $SUK_1^{an}(A,\tau)\rightarrow SUK_1^{an}(A\otimes_F R,\tilde{\tau})$.

Значение этого результата становится понятным, если учесть, что *R* является подполем конечно порожденного чисто трансцендентного расширения поля *F*.

Таким образом, нами получены описания групп приведенных и приведенных унитарных норм для алгебр Адзумайи над гензелевыми полями (в частности, над пополнениями полей функций *p*-адических кривых), а также установлены специальные свойства о приведенных и приведенных унитарных группах Уайтхеда над полями функций *p*-адических кривых.

В заключение автор выражает благодарность А. В. Прокопчуку и А. А. Рыжкову за полезные обсуждения результатов работы.

Список использованной литературы

1. *Янчевский, В. И.* Приведенные нормы простых алгебр над функциональными полями / В. И. Янчевский // Тр. МИАН СССР. – 1990. – Т. 183. – С. 215–222.

2. *Nakayama, T.* Über die multiplikative Gruppe einer *p*-adischen Divisionsalgebra. / T. Nakayama, Y. Matsushima // Proc. Imper. Acad. – 1943. – Vol. 19. – P. 622–628.

3. *Платонов, В. П.* SK_1 для тел некоммутативных рациональных функций / В. П. Платонов, В. И. Янчевский // Докл. АН СССР. – 1979. – Т. 249, № 5. – С. 1064–1068.

4. *Янчевский, В. И.* Коммутанты простых алгебр с сюръективной приведенной нормой / В. И. Янчевский// Докл. АН СССР. – 1975. – Т. 221, № 5. – С. 1056–1058.

5. *Rehmann, U.* Prescribed behavior of central simple algebras after scalar extension / U. Rehmann, S. V. Tikhonov, V. I. Yanchevskiĭ // J. of Algebra. – 2012. – Vol. 351. – P. 279–293.

Поступила в редакцию 31.03.2016