ISSN 1561-2430 (print)

ФИЗИКА

PHYZICS

УДК 539.12

Поступила в редакцию 07.04.2017
Received 07.04.2017

О. В. Веко[1], Е. М. Овсиюк[2], В. М. Редьков[1]

[1]Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
[2]Мозырский государственный педагогический университет им. И. П. Шамякина, Мозырь, Беларусь

НЕРЕЛЯТИВИСТСКАЯ ЧАСТИЦА КОКСА С ВНУТРЕННЕЙ СТРУКТУРОЙ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ: АНАЛИЗ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО

Обобщенное нерелятивистское уравнение Шредингера для скалярной частицы Кокса с внутренней структурой исследовано в присутствии электрического поля на фоне пространства Лобачевского. Проведено разделение переменных. Уравнение, описывающее движение частицы вдоль оси z оказывается существенно более сложным, чем при рассмотрении частицы Кокса в пространстве Минковского. Оно приводится к уравнению с двумя регулярными особыми точками и одной нерегулярной ранга 2, т. е. к конфлюэнтному уравнению Гойна. Физическим бесконечностям $z \pm \infty$ соответствуют соседние особые точки построенного уравнения. Решения найдены в виде степенных рядов, сходимость которых исследована методом Пуанкаре – Перрона. Ряды сходятся во всей физической области переменной $z \in (-\infty, +\infty)$.

Ключевые слова: уравнение Шредингера, спин 0, внутренняя структура частицы Кокса, пространство Лобачевского, электрическое поле, разделение переменных, точные решения, вырожденное уравнение Гойна

O. V. Veko[1], E. M. Ovsiyuk[2], V. M. Red'kov[1]

[1]B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
[2]Mozyr State Pedagogical University named after I. P. Shamyakin, Mozyr, Belarus

COX NONRELATIVISTIC PARTICLE OF INTRINSIC STRUCTURE IN THE ELECTRIC FIELD: ANALYSIS IN THE LOBACHEVSKY SPACE

The generalized Schrődinger equation for the Cox scalar particle is studied in the presence of the electric field on the background of the Lobachevsky space. Separation of variables is performed. The equation describing the motion along the z axis turns out to be much more complicated than that for the Cox particle in the Minkowski space. It is reduced to the second-order differential equation with two regular singularities and one irregular singularity of rank 2 that is identified as the confluent Heun equation. The nearby singular points of the derived equation correspond to the physical domains $z \pm \infty$. The solutions of the equation are constructed with the help of the power series. The series convergence is examined by the Poincare – Perrone method. These series converge in the whole physical domain $z \in (-\infty, +\infty)$.

Keywords: Schrődinger equation, spin zero, intrinsic structure of the Cox particle, Lobachevsky space, electric field, separation of variables, exact solutions, confluent Heun equation

Разделение переменных. В рамках теории обобщенных релятивистских волновых уравнений В. Коксом была предложена [1] модель для скалярной частицы со спином нуль; изложение общего подхода к такого рода обобщенным уравнениям см. в работе [2]. В присутствии электромагнитных полей волновые уравнения с расширенными наборами представлений группы Лоренца после исключения вспомогательных компонент приводят к уравнениям для минимального набора компонент, модифицированных дополнительными членами взаимодействия с внешними электромагнитными полями. Эти дополнительные взаимодействия обусловлены некоторой электромагнитной внутренней структурой, проявляющейся явно во внешних полях. Отметим, что в книге С. С. Швебера [3] обсуждается дополнительный дарвиновский член взаимодействия скалярной частицы с внешним электрическим полем, который связан с распределением заряда по конечному объему частицы. Фактически, теория Кокса – это развитие старой идеи Дарвина.

В серии работ [4–8] исследовалось квантово-механическое поведение частицы Кокса во внешних магнитном и электрическом полях в пространствах с неевклидовой геометрией: моделях Лобачевского и Римана. В частности, было выведено обобщенное нерелятивистское уравнение Шредингера для частицы Кокса в этих моделях.

В настоящей работе мы исследуем нерелятивистскую частицу Кокса во внешнем электрическом поле на фоне геометрии пространства Лобачевского. После разделения переменных в обобщенном уравнении Шредингера основное внимание уделено построению возможных решений уравнения по переменной *z*. Здесь действуют два фактора: более сложное электрическое поле и очень существенное в больших масштабах влияние геометрии пространства Лобачевского. В конце работы исходная релятивистская 20-компонентная теория Кокса обобщается на случай присутствия внешних электромагнитного и гравитационного полей, выведена общековариантная система уравнений типа Прока для скалярной частицы Кокса.

Используем обобщенные цилиндрические координаты $x^a = (t, r, \varphi, z)$:

$$dS^2 = dt^2 - \mathrm{ch}^2 z(dr^2 + \mathrm{sh}^2 r d\varphi^2) - dz^2, \quad \sqrt{-g} = \mathrm{sh}\, r\, \mathrm{ch}^2 z;$$

$$A_0 = -E\rho\, \mathrm{th}\, z, E_3 = \frac{E}{\mathrm{ch}^2 z}, E^3 = -\frac{E}{\mathrm{ch}^2 z}, E_3 E^3 = -E^2\, \mathrm{ch}^{-4} z.$$

Ниже будем использовать операторы

$$i\frac{\hbar c}{\rho}\partial_t - eA_0 = D_t, \qquad i\frac{\hbar}{\rho}\partial_k = D_k, \qquad \frac{i\hbar/\rho}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^k}\sqrt{-g} = \overset{\circ}{D}_k.$$

Исходим из уравнения в виде

$$\left(D_t - c\frac{\Gamma^2 E_i E^i \mu + \Gamma E^j D_j}{2(1+\Gamma^2 E_i E^i)}\right)\Psi = \frac{1}{2M\rho^2}\overset{\circ}{D}_k\left(-g^{kj}\right)\left(D_j + \frac{\Gamma^2 E_j(E^i D_i) + \mu\Gamma E_j}{1+\Gamma^2 E_i E^i}\right)\Psi. \tag{1}$$

Вводим обозначение

$$\gamma(x) = (\Gamma E)\,\mathrm{ch}^{-2} z = \gamma\,\mathrm{ch}^{-2} z.$$

Рассматриваем оператор из левой части уравнения (1):

$$\left(D_t - c\frac{\Gamma^2 E_i E^i \mu + \Gamma E^j D_j}{2(1+\Gamma^2 E_i E^i)}\right) = \frac{\hbar c}{\rho}\left(i\partial_t + \frac{eE\rho}{\hbar c/\rho}\mathrm{th}\, z + \frac{1}{2}\frac{Mc\rho}{\hbar}\frac{\gamma^2(z)}{1-\gamma^2(z)} + \frac{1}{2}\frac{\gamma(z)}{1-\gamma^2(z)}i\partial_z\right)$$

и оператор из правой части уравнения (1):

$$H = -\frac{\hbar^2}{2M\rho^2}\left[\frac{1}{\mathrm{ch}^2 z}\left(\partial_r^2 + \frac{\mathrm{ch}\, r}{\mathrm{sh}\, r}\partial_r + \frac{\partial_\varphi^2}{\mathrm{sh}^2 r}\right) + \left(\partial_z + 2\frac{\mathrm{sh}\, z}{\mathrm{ch}\, z}\right)\left(\frac{1-2\gamma^2(x)}{1-\gamma^2}\partial_z - \frac{Mc\rho}{\hbar}\frac{i\gamma(z)}{1-\gamma^2(z)}\right)\right].$$

Так, для уравнения Шредингера находим представление

$$\frac{\hbar c}{\rho}\left(i\partial_t + \frac{eE\rho}{\hbar c/\rho}\mathrm{th}\, z + \frac{1}{2}\frac{Mc\rho}{\hbar}\frac{\gamma^2(z)}{1-\gamma^2(z)} + \frac{1}{2}\frac{\gamma(z)}{1-\gamma^2(z)}i\partial_z\right)\Psi =$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2M\rho^2}\left[\frac{1}{\mathrm{ch}^2 z}\left(\partial_r^2 + \frac{\mathrm{ch}\, r}{\mathrm{sh}\, r}\partial_r + \frac{\partial_\varphi^2}{\mathrm{sh}^2 r}\right) + \left(\partial_z + 2\frac{\mathrm{sh}\, z}{\mathrm{ch}\, z}\right)\left(\frac{1-2\gamma^2(x)}{1-\gamma^2}\partial_z - \frac{Mc\rho}{\hbar}\frac{i\gamma(z)}{1-\gamma^2(z)}\right)\right]\Psi.$$

Также выполним обусловленную физическими причинами [6] формальную замену iγ → γ и отметим, что два члена, пропорциональных $i\gamma(z)\partial_z$, компенсируют друг друга. В результате приходим к уравнению

$$\frac{\hbar c}{\rho}\left(i\partial_t+\frac{eE\rho}{\hbar c/\rho}\operatorname{th}z-\frac{1}{2}\frac{Mc\rho}{\hbar}\frac{\gamma^2(z)}{1+\gamma^2(z)}\right)\Psi=$$

$$=-\frac{\hbar^2}{2M\rho^2}\left[\frac{1}{\operatorname{ch}^2 z}\left(\partial_r^2+\frac{\operatorname{ch}r}{\operatorname{sh}r}\partial_r+\frac{\partial_\varphi^2}{\operatorname{sh}^2 r}\right)+\left(\partial_z+2\frac{\operatorname{sh}z}{\operatorname{ch}z}\right)\left(\frac{1+2\gamma^2(z)}{1+\gamma^2(z)}\partial_z\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{Mc\rho}{\hbar}\left(\frac{d}{dz}\frac{\gamma(z)}{1+\gamma^2(z)}\right)-\frac{Mc\rho}{\hbar}2\frac{\operatorname{sh}z}{\operatorname{ch}z}\frac{\gamma(z)}{1+\gamma^2(z)}\right]\Psi. \tag{2}$$

Учтем подстановку для волновой функции (W – энергия в обычных единицах)

$$\Psi=\exp(-iwt)\,e^{im\varphi}R(r)Z(z),\qquad w=\frac{W\rho}{\hbar c};$$

вводим обозначения:

$$W=w\frac{\hbar c}{\rho}\frac{1}{\hbar^2/2M\rho^2}=2w\frac{M\rho c}{\hbar},\qquad \nu=eE\rho\frac{1}{\hbar^2/2M\rho^2},$$

$$\frac{1}{2}Mc^2\frac{1}{\hbar^2/2M\rho^2}=\frac{M^2\rho^2c^2}{\hbar^2}=\frac{\rho^2}{\lambda^2}=\mu^2;$$

при этом уравнение (2) дает

$$\operatorname{ch}^2 z\left(W+\nu\operatorname{th}z-\mu^2\frac{\gamma^2(z)}{1+\gamma^2(z)}\right)R(r)Z(z)+\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\operatorname{ch}r}{\operatorname{sh}r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{m^2}{\operatorname{sh}^2 r}\right)R(r)Z(z)+$$

$$+\operatorname{ch}^2 z\left[\left(\frac{\partial}{\partial z}+2\frac{\operatorname{sh}z}{\operatorname{ch}z}\right)\frac{1+2\gamma^2(z)}{1+\gamma^2(z)}\frac{\partial}{\partial z}-\mu\left(\frac{d}{dz}\frac{\gamma(z)}{1+\gamma^2(z)}\right)-2\mu\frac{\operatorname{sh}z}{\operatorname{ch}z}\frac{\gamma(z)}{1+\gamma^2(z)}\right]R(r)Z(z)=0. \tag{3}$$

В этом уравнении переменные разделяются:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{\operatorname{ch}r}{\operatorname{sh}r}\frac{d}{dr}-\frac{m^2}{\operatorname{sh}^2 r}+\Lambda\right)R(r)=0, \tag{4}$$

$$\left[\left(\frac{d}{dz}+2\frac{\operatorname{sh}z}{\operatorname{ch}z}\right)\left(1+\frac{\gamma^2(z)}{1+\gamma^2(z)}\right)\frac{d}{dz}-\right.$$

$$-\mu\left(\frac{d}{dz}\frac{\gamma(z)}{1+\gamma^2(z)}\right)-2\mu\frac{\operatorname{sh}z}{\operatorname{ch}z}\frac{\gamma(z)}{1+\gamma^2(z)}+$$

$$\left.+W+\nu\operatorname{th}z-\mu^2\frac{\gamma^2(z)}{1+\gamma^2(z)}-\frac{\Lambda}{\operatorname{ch}^2 z}\right]Z(z)=0; \tag{5}$$

напоминаем, что $\gamma(z)=\gamma/\operatorname{ch}^2 z$. Уравнение для $Z(z)$ после преобразований примет вид

$$\left(1+\frac{\gamma^2}{\operatorname{ch}^4 z+\gamma^2}\right)\frac{d^2}{dz^2}Z-\left(-1+\gamma^2\frac{\operatorname{ch}^4 z-\gamma^2}{(\operatorname{ch}^4 z+\gamma^2)^2}\right)2\frac{\operatorname{sh}z}{\operatorname{ch}z}\frac{d}{dz}Z+$$

$$+\left[W+\nu z-\frac{\gamma^2\mu^2}{\gamma^2+\operatorname{ch}^4 z}-\frac{\Lambda}{\operatorname{ch}^2 z}-4\mu\gamma^3\frac{\operatorname{sh}z\operatorname{ch}z}{(\gamma^2+\operatorname{ch}^4 z)^2}\right]Z=0. \tag{6}$$

Это уравнение по переменной z намного сложнее того, которое было в случае плоского пространства; и оно свидетельствует о высокой чувствительности внутренней структуры частицы к геометрии фонового пространства.

Решение уравнения по переменной *r*. В уравнении (4) сделаем замену переменных: $x=(1+\operatorname{ch} r)/2, \quad x\in[1,+\infty),$ тогда

$$x(1-x)\frac{d^2R}{dx^2}+(1-2x)\frac{dR}{dx}-\left(w_\perp+\frac{1}{4}\frac{m^2}{x}+\frac{1}{4}\frac{m^2}{1-x}\right)R=0. \tag{7}$$

Используя подстановку $R = x^a(1-x)^bF$, при $a=\pm|m|/2, \quad b=\pm|m|/2$ придем к уравнению гипергеометрического типа с параметрами

$$F=F(\alpha,\beta,\gamma;x), \qquad \alpha=a+b+\frac{1}{2}-i\sqrt{w_\perp-1/4},$$
$$\beta=a+b+\frac{1}{2}+i\sqrt{w_\perp-1/4}, \quad w_\perp>\frac{1}{4}, \qquad \gamma=2a+1. \tag{8}$$

Будем использовать решения, стремящиеся к нулю при $r = 0$:

$$F=u_2=F(\alpha,\beta,\alpha+\beta+1-\gamma,1-x)\,; \tag{9}$$

когда a и b положительные: $a=+|m|/2, \quad b=+|m|/2.$ Полная радиальная функция определяется выражением

$$R=x^a(1-x)^bF(\alpha,\beta,\alpha+\beta+1-\gamma,1-x). \tag{10}$$

Чтобы найти поведение решений на бесконечности $r \to +\infty$, воспользуемся одним из соотношений Куммера

$$u_2=\frac{\Gamma(\alpha+\beta+1-\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta+1-\gamma)\Gamma(\beta)}e^{-i\pi\alpha}u_3+\frac{\Gamma(\alpha+\beta+1-\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha+1-\gamma)\Gamma(\alpha)}e^{-i\pi\beta}u_4,$$
$$u_2=F\left(\alpha,\beta,\alpha+\beta+1-\gamma;1-x\right),$$
$$u_3=(-x)^{-\alpha}F\left(\alpha,\alpha+1-\gamma,\alpha+1-\beta,\frac{1}{x}\right),$$
$$u_4=(-x)^{-\beta}F\left(\beta,\beta+1-\gamma,\beta+1-\alpha,\frac{1}{x}\right).$$

Следовательно, поведение решений при $x \to 1 (r \to +\infty)$ задается равенством (здесь $x\approx\frac{e^r}{4}$)

$$R\approx(-1)^{a+b}\Gamma(\alpha+\beta+1-\gamma)(-x)^{-1/2}\times$$
$$\times\left(\frac{\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta+1-\gamma)\Gamma(\beta)}e^{-i\pi\alpha}(-x)^{+i\sqrt{\lambda-1/4}}+\frac{\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha+1-\gamma)\Gamma(\alpha)}e^{-i\pi\beta}(-x)^{-i\sqrt{\lambda-1/4}}\right).$$

Таким образом, по поперечной радиальной переменной построены решения, являющиеся стоячими волнами. Множитель $e^{-r/2}$ является несущественным для вероятностной интерпретации волновой функции: $dW=\sqrt{-g}\,\psi^*\psi.$

Анализ уравнения по переменной *z*. Исследуем уравнение по переменной z:

$$\left(1+\frac{\gamma^2}{\operatorname{ch}^4 z+\gamma^2}\right)\frac{d^2}{dz^2}Z-\left(-1+\gamma^2\,\frac{\operatorname{ch}^4 z-\gamma^2}{(\operatorname{ch}^4 z+\gamma^2)^2}\right)2\frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}\frac{d}{dz}Z+$$

$$+\left[\varepsilon+\nu\operatorname{th} z-\frac{\gamma^2\mu^2}{\gamma^2+\operatorname{ch}^4 z}-\frac{\Lambda}{\operatorname{ch}^2 z}-4\mu\gamma^3\,\frac{\operatorname{sh} z\operatorname{ch} z}{(\gamma^2+\operatorname{ch}^4 z)^2}\right]Z=0\,. \tag{11}$$

Уравнение сложное, пробуем его упростить, учитывая неравенство $|\gamma|<<1;$ это позволяет получить приближенные соотношения

$$A^2=\operatorname{ch}^4 z,\quad \frac{1}{A+\gamma^2}\approx\frac{1}{A}-\frac{\gamma^2}{A^2},\quad \left(1+\frac{\gamma^2}{\operatorname{ch}^4 z+\gamma^2}\right)\approx 1+\frac{\gamma^2}{\operatorname{ch}^4 z},$$

$$\left(-1+\gamma^2\,\frac{\operatorname{ch}^4 z-\gamma^2}{(\operatorname{ch}^4 z+\gamma^2)^2}\right)\approx\left(-1+\frac{\gamma^2}{\operatorname{ch}^4 z}\right),\quad \frac{\gamma^2\mu^2}{\gamma^2+\operatorname{ch}^4 z}\approx\mu^2\,\frac{\gamma^2}{\operatorname{ch}^4 z},$$

$$4\mu\gamma^3\frac{\operatorname{sh} z\operatorname{ch} z}{(\gamma^2+\operatorname{ch}^4 z)^2}\approx 4\mu^2\,\frac{\gamma^3}{\operatorname{ch}^6 z}\,\frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}\,.$$

Соответственно, уравнение (11) заменяем на более простое

$$\frac{d^2}{dz^2}Z-\left(-1+\frac{\gamma^2}{\operatorname{ch}^4 z}\right)\left(1+\frac{\gamma^2}{\operatorname{ch}^4 z}\right)^{-1}2\frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}\frac{d}{dz}Z+$$

$$+\left[\varepsilon+\nu\operatorname{th} z-\mu^2\,\frac{\gamma^2}{\operatorname{ch}^4 z}-\frac{\Lambda}{\operatorname{ch}^2 z}\right]\left(1+\frac{\gamma^2}{\operatorname{ch}^4 z}\right)^{-1}Z=0\,. \tag{12}$$

Отсюда, пренебрегая пропорциональным Γ^2 членом в выражении в квадратных скобках, получаем

$$\frac{d^2}{dz^2}Z-\left(-1+\frac{2\gamma^2}{\operatorname{ch}^4 z}\right)2\frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}\frac{d}{dz}Z+\left[\left(\varepsilon+\nu\operatorname{th} z-\frac{\Lambda}{\operatorname{ch}^2 z}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{\gamma^2}{\operatorname{ch}^4 z}\left(\mu^2+\varepsilon+\nu\operatorname{th} z-\frac{\Lambda}{\operatorname{ch}^2 z}\right)\right]Z=0\,. \tag{13}$$

Кроме того, очевидно, можно воспользоваться приближенным равенством

$$\left(-1+\frac{2\gamma^2}{\operatorname{ch}^4 z}\right)\approx -1\,;$$

тогда приходим к еще более простому уравнению

$$\left(\frac{d^2}{dz^2}Z+2\frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}\frac{d}{dz}+\varepsilon+\nu\operatorname{th} z-\frac{\Lambda}{\operatorname{ch}^2 z}-\frac{\mu^2\gamma^2}{\operatorname{ch}^4 z}\right)Z=0\,. \tag{14}$$

Введем эффективный квадрат импульса

$$P^2(z)=\varepsilon+\nu\operatorname{th} z-\frac{\Lambda}{\operatorname{ch}^2 z}-\frac{\mu^2\gamma^2}{\operatorname{ch}^4 z}; \tag{15}$$

около точек 0, $\pm\infty$ он ведет себя так:

$$z \to 0, \qquad P^2 \sim \left(\varepsilon - \Lambda - \gamma^2\mu^2\right),$$

$$z \to +\infty,\ P^2 \sim (\varepsilon + \nu), \quad z \to -\infty,\ P^2 \sim (\varepsilon - \nu). \tag{16}$$

Для анализа уравнения (14) вводим новую переменную

$$e^{2z} = x, \quad x \in (0, +\infty), \quad \frac{d}{dz} = 2x\frac{d}{dx},$$

$$\frac{d^2}{dz^2} = 4x^2\frac{d^2}{dx^2} + 4x\frac{d}{dx}, \quad \frac{1}{\mathrm{ch}^2 z} = \frac{4x}{(x+1)^2}, \quad \mathrm{th}\, z = \frac{x-1}{x+1};$$

уравнение примет вид

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{2}{x+1}\frac{d}{dx} + \frac{\varepsilon/4 - \nu/4}{x^2} + \frac{\nu/2 - \Lambda}{x} + \frac{\Lambda - \nu/2}{x+1} + \frac{\Lambda}{(1+x)^2} - \frac{4\mu^2\gamma^2}{(x+1)^4}\right)Z = 0. \tag{17}$$

Около точки $x = 0$ решения ведут себя так:

$$Z'' + 2Z' + \frac{\varepsilon - \nu}{4x^2}Z = 0, \qquad Z(x) = x^A, \qquad A = \frac{1 \pm i\sqrt{\varepsilon - \nu - 1}}{2}. \tag{18}$$

Исследуем точку $x \to \infty$. Делаем замену переменной $X = x^{-1}$ и исследуем точку $X = 0$:

$$\left[\frac{d^2}{dX^2} + \frac{2}{1+X}\frac{d}{dX} + \frac{\varepsilon/4 + \nu/4}{X^2} - \frac{(\nu/2)}{X} + \frac{(\nu/2)}{1+X} - \frac{4\mu^2\gamma^2}{(X+1)^4}\right]Z = 0.$$

Из полученного легко находим асимптотику решений при $X \to 0$:

$$x \to \infty, \quad Z(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^B, \quad B = \frac{1 \pm i\sqrt{\varepsilon + \nu - 1}}{2}. \tag{19}$$

Таким образом, имеем уравнение с двумя регулярными точками $x = 0$, $x = \infty$ и одной нерегулярной точкой $x = -1$ ранга 2; последняя лежит вне физической области изменения координаты $x \in (0, +\infty)$. Это уравнение можно преобразовать к виду конфлюэнтного уравнения Гойна [9–11]. Для этого введем переменную $y = (x + 1)^{-1}$, уравнение примет вид

$$\left(\frac{d^2}{dy^2} + \frac{\varepsilon - \nu}{4}\frac{1}{y^2(y-1)^2} + \left(\Lambda - \frac{\nu}{2}\right)\frac{1}{y^2(y-1)} + \frac{\Lambda}{y^2} - 4\mu^2\gamma^2\right)Z = 0. \tag{20}$$

Отметим связь переменой y с исходной переменной z:

$$y = \frac{1}{1 + e^{2z}} = \begin{cases} z \to +\infty, & y \to 0, \\ z \to -\infty, & y \to 1, \\ 1 + e^{2z} \to 0, & y \to \infty. \end{cases}$$

После разложения дробей на простые из (20) получаем

$$\left(\frac{d^2}{dy^2} - 4\mu^2\gamma^2 + \frac{\varepsilon + \nu}{4y^2} + \frac{-2\Lambda + \varepsilon}{2y} + \frac{2\Lambda - \varepsilon}{2(y-1)} + \frac{\varepsilon - \nu}{4(y-1)^2}\right)Z = 0. \tag{21}$$

Исследуем точку $y=\infty$. Для этого перейдем к переменной $Y=y^{-1}$:

$$\left(\frac{d^2}{dY^2}+\frac{2}{Y}\frac{dZ}{dY}-\frac{4\mu^2\gamma^2}{Y^4}+\frac{\varepsilon-\nu}{4(Y-1)^2}+\frac{\Lambda}{Y^2}-\frac{2\Lambda-\nu}{2(Y-1)}+\frac{2\Lambda-\nu}{2Y}\right)Z=0.$$

Особая точка $y=\infty$ является нерегулярной ранга 2. Таким образом, имеем уравнение со структурой особых точек: $\{0,1,\infty_{[2]}\}$.

Введем подстановку $Z=e^{Ay}y^B(y-1)^C F(y)$. При ограничениях на параметры

$$A=\pm 2\mu\gamma,\quad B=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-\varepsilon-\nu+1},\quad C=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-\varepsilon+\nu+1}$$

получаем

$$\frac{d^2F}{dy^2}+\left(2A+\frac{2B}{y}+\frac{2C}{y-1}\right)\frac{dF}{dy}+$$
$$+\left(\frac{1}{2}\frac{4B(A-C)+\varepsilon-2\Lambda}{y}+\frac{1}{2}\frac{4C(A+B)-\varepsilon+2\Lambda}{y-1}\right)F=0; \tag{22}$$

это каноническая форма уравнения для конфлюэнтной функции Гойна [11]

$$\frac{d^2H}{dy^2}+\left(-t+\frac{c}{y}+\frac{d}{y-1}\right)\frac{dH}{dy}+\frac{-tay+\lambda}{y(y-1)}H=0. \tag{23}$$

Физическим бесконечностям $z=\pm\infty$ соответствуют особые точки $y=0$, 1. Решения этого уравнения можно строить в виде степенных рядов либо по переменной y, либо по переменной $(y-1)$.

Сходимость степенных рядов. Исходим из канонической формы конфлюэнтного уравнения (23). Построим основной степенной ряд в окрестности точки $y=0$. Для этого запишем уравнение в виде

$$(y^2-y)\frac{d^2H}{dy^2}+[-t\,y^2+(t+d+c)\,y-c]\frac{dH}{dy}+(\lambda-ta\,y)H=0. \tag{24}$$

Учтем равенства

$$H=\sum_{k=0}^{\infty}d_k y^k,\quad H'=\sum_{k=1}^{\infty}kd_k y^{k-1},\quad H''=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)d_k y^{k-2};$$

уравнение для H дает

$$\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)d_k y^k-\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)d_k y^{k-1}-$$
$$-t\sum_{k=1}^{\infty}kd_k y^{k+1}+(t+d+c)\sum_{k=1}^{\infty}kd_k y^k-c\sum_{k=1}^{\infty}kd_k y^{k-1}+\lambda\sum_{k=0}^{\infty}d_k y^k-ta\sum_{k=0}^{\infty}d_k y^{k+1}=0.$$

Меняем обозначения в индексах суммирования

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)d_n y^n-\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)nd_{n+1}y^n-$$
$$-t\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)d_{n-1}y^n+(t+d+c)\sum_{n=1}^{\infty}nd_n y^n-c\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)d_{n+1}y^n+$$
$$+\lambda\sum_{n=0}^{\infty}d_n y^n-ta\sum_{n=1}^{\infty}d_{n-1}y^n=0.$$

Приравнивая нулю коэффициенты при всех степенях переменной y, получаем трехчленные рекуррентные соотношения:

$$n = 0, \quad c\, d_1 + \lambda\, d_0 = 0\,;$$

$$n = 1, \quad -tad_0 + (t + c + d + \lambda) - 2(1 + c)d_2 = 0\,;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$t\,(n - 1 + a)\, d_{n-1} - [\, n(n - 1 + t + d + c) + \lambda\,]\, d_n + (n + 1)\,(n + c)\, d_{n+1} = 0\,.$$

Рекуррентное соотношение можно представить в виде

$$P_n d_n - (Q_n + \lambda)\, d_{n+1} + R_n\, d_{n+2} = 0\,, \qquad (25)$$

где

$$P_n = t\,(n - 1 + a)\,, \quad Q_n = n(n - 1 + t + d + c)\,, \quad R_n = (n + 1)\,(n + c)\,.$$

Рекуррентное соотношение переписываем в форме

$$\frac{1}{n^2} P_n - \frac{1}{n^2}(Q_n + \lambda)\,\frac{d_{n+1}}{d_n} + \frac{1}{n^2} R_n\, \frac{d_{n+2}}{d_{n+1}}\frac{d_{n+1}}{d_n} = 0\,;$$

при устремлении $n \to \infty$ получаем квадратичное уравнение

$$-r + r^2 = 0, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{d_{n+1}}{d_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{d_{n+2}}{d_{n+1}} = r\,.$$

Отсюда заключаем, что согласно методу Пуанкаре – Перрона минимальный радиус сходимости степенного ряда равен

$$R_{\text{conv}} = \frac{1}{|\,R\,|} = 1\,.$$

Таким образом, степенной ряд сходится в круге радиуса 1, т. е. во всей физической области исходной переменной $z \in (-\infty, +\infty)$. Аналогично можно построить и исследовать сходимость степенного ряда по переменной (y – 1).

Неминимальное взаимодействие с внешними полями. Выполним обобщение теории Кокса на случай присутствия внешних электромагнитного и гравитационного полей. Исходим из полной системы уравнений первого порядка для 20-компонентной волновой функции для скалярной частицы Кокса [1]. Волновая функция включает скаляр, вектор, симметричный неприводимый и антисимметричный тензоры второго ранга.

Учитываем внешние электромагнитное и гравитационное поля, поэтому в исходных уравнениях Кокса все производные заменяем на общековариантные:

$$\lambda_1 D^{\beta}\Phi_{\beta} - \mu\Phi = 0,$$

$$\lambda_1^* D_{\beta}\Phi + \lambda_2 D^{\alpha}\Phi_{[\alpha\beta]} - \lambda_3 D^{\alpha}\Phi_{(\alpha\beta)} - \mu\Phi_{\beta} = 0,$$

$$\lambda_2^*(D_{\alpha}\Phi_{\beta} - D_{\beta}\Phi_{\alpha}) - \mu\Phi_{[\alpha\beta]} = 0,$$

$$\lambda_3^*\left(D_{\alpha}\Phi_{\beta} + D_{\beta}\Phi_{\alpha} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} D^{\rho}\Phi_{\rho} \right) - \mu\Phi_{(\alpha\beta)} = 0, \qquad (26)$$

вспомогательные параметры λ_1, λ_2, λ_3, подчинены условиям

$$\lambda_2\lambda_2^* - \lambda_3\lambda_3^* = 0, \quad \lambda_1\lambda_1^* - \frac{3}{2}\lambda_3\lambda_3^* = 1; \tag{27}$$

символ D_α обозначает удлиненную производную с учетом присутствия внешних электромагнитного и гравитационного полей: $D_\alpha = i\hbar\nabla_\alpha - \frac{e}{c}A_\alpha$, $\mu = Mc$.

С помощью 3-го и 4-го уравнений в (1) исключаем тензоры 2-го ранга из двух оставшихся уравнений:

$$\lambda_1 D^\beta\Phi_\beta - \mu\Phi = 0, \tag{28}$$

$$\lambda_1^* D_\beta\Phi - \mu^{-1}(\lambda_2\lambda_2^* + \lambda_3\lambda_3^*) D^\alpha D_\beta \Phi_\alpha + \frac{1}{2}\mu^{-1}\lambda_3\lambda_3^* \, D_\beta D^\rho \Phi_\rho - \mu\Phi_\beta = 0. \tag{29}$$

С учетом тождества $(\lambda_2\lambda_2^* + \lambda_3\lambda_3^*) = 2\lambda_3\lambda_3^*$ уравнение (29) примет вид

$$\lambda_1^* D_\beta\Phi - \mu^{-1} 2\lambda_3\lambda_3^* D_\alpha D_\beta \Phi^\alpha + \frac{1}{2}\mu^{-1}\lambda_3\lambda_3^* D_\beta D_\alpha \Phi^\alpha - \mu\Phi_\beta = 0. \tag{30}$$

Учитывая соотношение

$$D_\alpha D_\beta \Phi^\alpha = D_\beta D_\alpha \Phi^\alpha + (D_\alpha D_\beta - D_\beta D_\alpha)\Phi^\alpha = D_\beta D_\alpha \Phi^\alpha + \hbar^2\left(-i\frac{e}{\hbar c}F_{\alpha\beta} - R_{\alpha\beta}\right)\Phi^{a\alpha},$$

уравнение (30) преобразуем в следующее:

$$\lambda_1^* D_\beta\Phi + \mu^{-1} 2\lambda_3\lambda_3^* \hbar^2\left(i\frac{e}{c}F_{\alpha\beta} + R_{\alpha\beta}\right)\Phi^\alpha - \frac{3}{2}\mu^{-1}\lambda_3\lambda_3^* D_\beta(D_\alpha\Phi^\alpha) - \mu\Phi_\beta = 0.$$

Учитывая (28), получим

$$\lambda_1\lambda_1^* D_\beta\Phi + \mu^{-1} 2\lambda_3\lambda_3^* \hbar^2\left(i\frac{e}{\hbar c}F_{\alpha\beta} + R_{\alpha\beta}\right)\lambda_1\Phi^\alpha - \frac{3}{2}\lambda_3\lambda_3^* D_\beta\Phi - \mu\lambda_1\Phi_\beta = 0.$$

С учетом $\lambda_1\lambda_1^* - \frac{3}{2}\lambda_3\lambda_3^* = 1$ последнее уравнение приводим к виду

$$D_\beta\Phi + \mu^{-1} 2\lambda_3\lambda_3^* \hbar^2\left(i\frac{e}{\hbar c}F_{\alpha\beta} + R_{\alpha\beta}\right)\lambda_1\Phi^\alpha - \mu\lambda_1\Phi_\beta = 0.$$

Параметр λ_1 может быть внесен под знак волновой функции так: $\lambda_1\Phi_\beta \to \Phi_\beta$; в результате получаем систему уравнений

$$D^\beta\Phi_\beta - \mu\Phi = 0, \quad D_\beta\Phi - i\frac{\hbar^2}{Mc}(2\lambda_3\lambda_3^*)\left(\frac{e}{\hbar c}F_{\beta\alpha} + iR_{\beta\alpha}\right)\Phi^\alpha - \mu\Phi_\beta = 0. \tag{31}$$

Эти уравнения можно переписать компактнее:

$$D^\beta\Phi_\beta = \mu\Phi = 0, \quad D_\beta\Phi = \lambda\left(F_{\beta\alpha} + i\frac{\hbar c}{e}R_{\beta\alpha}\right)\Phi^\alpha + \mu\Phi_\beta, \tag{32}$$

где $\lambda = \dfrac{\hbar^2}{Mc}\dfrac{e}{\hbar c}(2i\lambda_3\lambda_3^*)$.

В отсутствие электромагнитного поля уравнения (7) упрощаются:

$$D^{\beta}\Phi_{\beta} = \mu\Phi, \quad D_{\beta}\Phi = \left(i\lambda \frac{\hbar c}{e} R_{\beta\alpha}(x) + \mu\, g_{\beta\alpha}(x) \right) \Phi^{\alpha}, \tag{33}$$

это чисто геометрическая модификация системы уравнений Прока для скалярной частицы Кокса.

Список использованных источников

1. Cox, W. Higher-rank representations for zero-spin field theories / W. Cox // J. Phys. Math. Gen. – 1982. – Vol. 15, № 2. – P. 627–635.

2. Плетюхов, В. А. Релятивистские волновые уравнения и внутренние степени свободы / В. А. Плетюхов, В. М. Редьков, В. И. Стражев. – Минск: Беларус. навука, 2015. – 328 с.

3. Schweber, S. S. An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory / S. S. Schweber. – NewYork: Harper&Row, Publ., Inc., 1961. – 905 p.

4. Овсиюк, Е. М. Скалярная частица с внутренней структурой в электромагнитном поле в искривленном пространстве-времени / Е. М. Овсиюк. О. В. Веко, К. В. Казмерчук // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 3 (20). – С. 32–36.

5. Quantum mechanical scalar particle with intrinsic structure in external magnetic and electric fields: influence of geometrical background / O. V. Veko [et al.] // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2014. – Vol. 17, № 4. – P. 464–466.

6. Ovsiyuk, E. M. Spin zero Cox's particle with an intrinsic structure: general analysis in external electromagnetic and gravitational fields / E. M. Ovsiyuk // Ukr. J. Phys. – 2015. – Vol. 60, №. 6. – P. 485–496.

7. Veko, O. V. Cox's particle in magnetic and electric fields on the background of hyperbolic Lobachevsky geometry / O. V. Veko // Proc. of the IX Int. Conf. «Methods of non-Euclidean geometry in physics and mathematics», Bolyai–Gauss–Lobachevsky-9 (BGL-9), Minsk, 27–30 Nov. 2015 / ed. by Yu. Kurochkin, V. Red'kov. – Minsk, 2015. – P. 284–294.

8. Veko, O. V. Cox's particle in magnetic and electric fields on the background of hyperbolic Lobachevsky geometry / O. V. Veko // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2016. – Vol. 19, № 1. – P. 50–61.

9. Heun, K. Zur Theorie der Riemann'schen Functionen Zweiter Ordnung mit Verzweigungspunkten / K. Heun // Math. Ann. – 1989. – Vol. 33. – P. 161–179.

10. Ronveaux, A. Heun's Differential Equation / A. Ronveaux. – Oxford: Oxford University Press, 1995. – 380 p.

11. Slavyanov, S. Yu. Special Functions. A Unified Theory Based on Singularities / S. Yu. Slavyanov, W. Lay. – Oxford: Oxford University Press, 2000. – 312 p.

References

1. Cox W. Higher-rank representations for zero-spin field theories. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1982, vol. 15, no. 2, pp. 627–635. Doi: 10.1088/0305-4470/15/2/029

2. Pletyukhov V. A., Red'kov V. M., Strazhev V. I. *Relativistic wave equations and intrinsic degrees of freedom*. Minsk, Belaruskaya navuka, 2015. 328 p. (in Russian).

3. Schweber S. S. *An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory*. New York, Harper&Row, Publishers, Inc., 1961. 905 p.

4. Ovsiyuk E. M., Veko O. V., Kazmerchuk K. V. Scalar particle with intrinsic structure in electromagnetic field in curved space. *Problemy fiziki, matematiki i tekhniki* [Problems of Physics, Mathematics and Technics], 2014, no. 3 (20), pp. 32–36. (in Russian).

5. Veko O. V., Kazmerchuk K. V., Kisel V. V., Ovsiyuk E. M., Red'kov V. M. Quantum mechanical scalar particle with intrinsic structure in external magnetic and electric fields: influence of geometrical background. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, 2014, vol. 17, no. 4, pp. 464–466.

6. Ovsiyuk E. M. Spin zero Cox's particle with an intrinsic structure: general analysis in external electromagnetic and gravitational fields. *Ukrainian Journal of Physics*, 2015, vol. 60, no. 6, pp. 485–496. Doi: 10.15407/ujpe60.06.0485

7. Veko O. V. Cox's particle in magnetic and electric fields on the background of hyperbolic Lobachevsky geometry. Kurochkin Yu., Red'kov V. (eds.) *Proceedings of the IX International Conference «Methods of non-Euclidean geometry in physics and mathematics», Bolyai – Gauss – Lobachevsky-9 (BGL-9), Minsk, 27–30 November 2015*. Minsk, 2015, pp. 284–294.

8. Veko O. V. Cox's particle in magnetic and electric fields on the background of hyperbolic Lobachevsky geometry. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, 2016, vol. 19, no. 1, pp. 50–61.

9. Heun K. Zur Theorie der Riemann'schen Functionen Zweiter Ordnung mit Verzweigungspunkte. *Mathematische Annalen*, 1989, vol. 33, pp. 161–179. Doi:10.1007/bf01443849

10. Ronveaux A. *Heun's Differential Equation*. Oxford, Oxford University Press, 1995. 380 p.

11. Slavyanov S. Yu., Lay W. *Special Functions. A Unified Theory Based on Singularities*. Oxford, Oxford University Press, 2000. 312 p.

Информация об авторах

Веко Ольга Владимировна – аспирант, Институт физики им. Б. И. Степанова, Национальная академия наук Беларуси (пр. Независимости, 68, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: vekoolga@mail.ru

Овсиюк Елена Михайловна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей физики и методики преподавания физики, Мозырский государственный педагогический университет им. И. П. Шамякина (ул. Студенческая, 28, 247760, г. Мозырь, Гомельская обл., Республика Беларусь). E-mail: e.ovsiyuk@mail.ru

Редьков Виктор Михайлович – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Центра теоретической физики Института физики им. Б. И. Степанова, Национальная академия наук Беларуси (пр. Независимости, 68, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: redkov@dragon.bas-net.by

Information about the authors

Veko Olga Vladimirovna – Postgraduate, B. I. Stepanov Institute of Physics, National Acade-my of Sciences of Belarus (68, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: vekoolga@mail.ru

Ovsiyuk Elena Mikhaylovna – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Mozyr State Pedagogical University named after I. P. Shamyakin (28, Studencheskaya Str., 247760, Mozyr, Republic of Belarus). E-mail: e.ovsiyuk@mail.ru

Red’kov Viktor Mikhaylovich – D. Sc. (Physics and Mathematics), Chief Researcher, Center of Theoretical Physics, B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (68, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: redkov@dragon.bas-net.by

Для цитирования

Веко, О. В. Нерелятивистская частица Кокса с внутренней структурой в электрическом поле: анализ в пространстве Лобачевского / О. В. Веко, Е. М. Овсиюк, В. М. Редьков // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2017. – № 2. – С. 71–81.

For citation

Veko O. V., Ovsiyuk E. M., Red’kov V. M. Cox nonrelativistic particle of intrinsic structure in the electric field: analysis in the Lobachevsky space. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series], 2017, no. 2, pp. 71–81. (in Russian).