ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 519.177
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-3-274-285

Поступила в редакцию 21.06.2021
Received 21.06.2021

В. И. Бенедиктович

Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ, ТРАССИРУЕМОСТЬ И СОВЕРШЕННОЕ ПАРОСОЧЕТАНИЕ ГРАФА

Аннотация. Хорошо известно, что задача распознавания существования в графе совершенного паросочетания, как и задачи распознавания его гамильтоновости и трассируемости, является NP-полной. Совсем недавно были получены нижние оценки на размер и спектральный радиус графа, гарантирующие существование в нем совершенного паросочетания. Мы улучшаем эти оценки, во-первых, благодаря использованию имеющихся оценок на размер графа для существования в нем гамильтоновой цепи, во-вторых, благодаря нахождению новых нижних оценок на спектральный радиус графа, являющихся достаточными для наличия свойства трассируемости. Также приводится алгоритм распознавания существования в графе совершенного паросочетания, использующий понятие (κ,τ)-регулярного множества, который становится полиномиальным в классе графов с фиксированным цикломатическим числом.

Ключевые слова: гамильтоновость, трассируемость, совершенное паросочетание, матрица смежности, фактор-матрица смежности, (κ,τ)-регулярное множество, спектр, главный спектр, спектральный радиус графа

Для цитирования. Бенедиктович, В. И. Собственные значения, трассируемость и совершенное паросочетание графа / В. И. Бенедиктович // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2021. – Т. 57, № 3. – С. 274–285. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-3-274-285

Vladimir I. Benediktovich

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

EIGENVALUES, TRACEABILITY, AND PERFECT MATCHING OF A GRAPH

Abstract. It is well known that the recognition problem of the existence of a perfect matching in a graph, as well as the recognition problem of its Hamiltonicity and traceability, is NP-complete. Quite recently, lower bounds for the size and the spectral radius of a graph that guarantee the existence of a perfect matching in it have been obtained. We improve these bounds, firstly, by using the available bounds for the size of the graph for existence of a Hamiltonian path in it, and secondly, by finding new lower bounds for the spectral radius of the graph that are sufficient for the traceability property. Moreover, we develop the recognition algorithm of the existence of a perfect matching in a graph. This algorithm uses the concept of a (κ,τ)-regular set, which becomes polynomial in the class of graphs with a fixed cyclomatic number.

Keywords: Hamiltonicity, traceability, perfect matching, adjacency matrix, adjacency factor matrix, (κ,τ)-regular set, spectrum, main spectrum, spectral radius of a graph

For citation. Benediktovich V. I. Eigenvalues, traceability, and perfect matching of a graph. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2021, vol. 57, no. 3, pp. 274–285 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-3-274-285

Пусть G – простой неориентированный связный граф порядка n и размера m с множеством вершин $V(G)=\{v_1,...,v_n\}$ и множеством ребер $E(G)$. *Матрицей смежности* графа $A(G)=(a_{ij})$ графа G называется квадратная матрица порядка n, такая, что

$$a_{ij}=\begin{cases}1, \text{ если } v_iv_j \in E(G),\\ 0, \text{ если } v_iv_j \notin E(G).\end{cases}$$

Если обозначить через j $(n \times 1)$-вектор-столбец, все компоненты которого равны 1, то i-я компонента вектора A^kj – это *число маршрутов длины k из вершины v_i*. Обозначим через $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ собственные значения матрицы смежности $E(G)$, взятые вместе со своими кратностями. Множество этих собственных значений будем называть *спектром* графа G и обозначать через

$S_p(G)$, а наибольшее собственное значение называется его *спектральным радиусом*, или *индексом*, и обозначается через $\rho(G)$. Для каждого собственного значения $\lambda \in Sp(G)$ обозначим соответствующее ему собственное пространство через $\mathcal{E}_G(\lambda)$.

Пусть задано произвольное разбиение множества вершин $V(G)$ графа G на непустые подмножества

$$V(G) = \bigcup_{i=1}^{s} V_i.$$

Обозначим это разбиение через π. *Фактор-матрицей* (или *матрицей частных*) графа G относительно разбиения π называется квадратная матрица порядка s:

$$A_\pi(G) = A(V_1, V_2, ..., V_s) = (b_{ij})_{s \times s},$$

где b_{ij} – среднее число соседей в множестве V_j вершин из множества V_i для $1 \le i, j \le s,$ т. е.

$$b_{ij} = \frac{\sum_{v \in V_i} \left| N(v) \cap V_j \right|}{\left| V_i \right|}.$$

Кроме того, если для каждой пары i, j число соседей во множестве V_j любой вершины из множества V_i одно и то же, то разбиение называется *равноправным*, а матрица $A_\pi(G)$ называется *матрицей частных равноправного разбиения* π. Известно следующее утверждение.

Утверждение 1 [1]. *Пусть G – произвольный граф. Тогда спектр фактор-матрицы $A_\pi(G)$ произвольного разбиения графа G перемежает спектр графа G. Более того, если матрица является матрицей частных равноправного разбиения* π, *то характеристический многочлен фактор-матрицы $A_\pi(G)$ делит характеристический многочлен матрицы смежности $A(G)$ графа G, причем спектральные радиусы матрицы смежности $A(G)$ и фактор-матрицы $A_\pi(G)$ совпадают.*

Различные собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p,$ каждое из которых имеет соответствующий собственный вектор, не ортогональный вектору j, введенному выше со всеми компонентами, равными 1, называются, как и соответствующие им собственные векторы, *главными*. При этом говорят, что множество $\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p\}$ образует *главный спектр* графа G. Остальные различные собственные значения $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, ..., \lambda_s,$ $s \le n,$ называются *неглавными*. По теореме Фробениуса – Перрона [2] любой граф G содержит главное собственное значение, равное его *индексу*.

Целочисленный многочлен

$$M(G, x) =: \prod_{i=1}^{p} (x - \lambda_i) = x^p - c_0 x^{p-1} - c_1 x^{p-2} - ... - c_{p-2} x - c_{p-1}, \tag{1}$$

корнями которого являются все главные собственные значения графа G, называется *главным характеристическим многочленом* графа G.

Имеет место разложение: $\mathbb{R}^n = Main(G) \oplus \left(Main(G)\right)^\perp,$ где векторное пространство $Main(G)$ натянуто на ортонормированную систему из p главных собственных векторов, относящихся к соответствующим главным собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p,$ а векторное пространство $\left(Main(G)\right)^\perp$ натянуто на ортонормированную систему из остальных $(n - p)$ собственных векторов, ортогональных j. Оба векторных пространства $Main(G)$ и $\left(Main(G)\right)^\perp$ являются A-инвариантными [3]. Более того, пространство $Main(G) = \langle j, Aj, A^2 j, \dots, A^{p-1} j \rangle,$ а матрица $W = (j \; Aj \; A^2 j \; ... \; A^{p-1} j)$ размера $(n \times p)$ называется *матрицей маршрутов* графа G. Для нее справедливо равенство [3]

$$A^p j = W \begin{pmatrix} c_{p-1} \\ \vdots \\ c_1 \\ c_0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Отметим, что спектр матрицы

$$C =: \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & c_{p-1} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & c_{p-2} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & c_{p-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & c_0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

совпадает с главным спектром графа G и определяет матрицу маршрутов, т. е. матрица W является матрицей маршрутов тогда и только тогда, когда выполняется равенство $AW = WC$ [3].

Реберный граф $L(G)$ графа G – это граф, вершинами которого являются ребра графа G, при этом они смежны, если существует в точности одна вершина, инцидентная соответствующим ребрам графа G. Для каждой вершины $v \in V(G)$ ее (*замкнутым*) *окружением* называется множество соседей $N(v) = \{u \in V(G) \mid uv \in E(G)\}$ $\left(N[v] = N(v) \bigcup \{v\}\right)$.

Через $G[K]$ будем обозначать граф, *порожденный* подмножеством вершин $K \subset V(G)$. Подмножество вершин $S \subset V(G)$ называется (κ,τ)-*регулярным*, если граф $G[S]$ является κ-регулярным графом, а для любой вершины $v \in V(G) \setminus S$ число ее соседей в S равно τ, т. е. $\left|N_G(v) \bigcap S\right| = \tau$.

Вектор x_S, у которого i-я компонента равна 1, если $v_i \in S$, и равна 0, если $v_i \notin S$, называется *характеристическим вектором* множества S.

Объединением двух простых графов G и H называется простой граф $G \cup H$ с множеством вершин $V(G) \cup V(H)$ и множеством ребер $E(G) \cup E(H)$. Если графы G и H не пересекаются ($V(G) \cap V(H) = \varnothing$), то их объединение называется *дизъюнктным* и обозначается через $G + H$. Дизъюнктное объединение k копий графа G обозначается через kG. *Соединением* непересекающихся графов G и H называется граф $G \vee H$, получаемый из дизъюнктного объединения $G + H$ добавлением всех ребер, которые соединяют каждую вершину графа G с каждой вершиной графа H.

Цикл или цепь, проходящие через все вершины графа G, называются *гамильтоновыми*. Граф G, содержащий гамильтонов цикл или цепь, называется соответственно *гамильтоновым*, или *трассируемым*. *Совершенным паросочетанием* графа называется множество попарно несмежных ребер, где каждая вершина графа инцидентна какому-либо ребру из этого множества. Как известно, *задачи распознавания* гамильтоновости, трассируемости и существования совершенного паросочетания в заданном графе являются NP-полными.

Поскольку условия n – четно и минимальная степень $\delta \geq 1$ являются тривиальными необходимыми условиями для существования в графе совершенного паросочетания, то в дальнейшем мы будем это предполагать.

Недавно были получены следующие результаты, гарантирующие существование совершенного паросочетания в графе [4].

Т е о р е м а 1 [4]. *Пусть $n \geq 8$ – четное целое число или $n = 4$. Если спектральный радиус графа G порядка n удовлетворяет неравенству*

$$\rho(G) > \theta(n),$$

где $\theta(n)$ – наибольший корень многочлена $f(x) = x^3 - (n-4)x^2 - (n-1)x + 2(n-4)$, то граф имеет совершенное паросочетание. Для $n = 6$, если

$$\rho(G) > \frac{1+\sqrt{33}}{2},$$

граф имеет совершенное паросочетание.

Т е о р е м а 2 [4]. *Пусть $n \geq 8$ – четное целое число или $n = 4$. Если связный граф G порядка n имеет размер*

$$\left|E(G)\right| > \binom{n-2}{2} + 2,$$

то граф имеет совершенное паросочетание. Для $n = 6$ или $n = 8$, если $\left|E(G)\right| > 9$ или $\left|E(G)\right| > 18$ соответственно, граф имеет совершенное паросочетание.

Далее мы покажем, что нижние оценки размера графа и спектрального радиуса могут быть улучшены.

Поскольку из трассируемости графа четного порядка следует существование в нем совершенного паросочетания, то в силу леммы 4 из [5] оценка размера графа в теореме 2 может быть улучшена следующим образом.

Т е о р е м а 3. *Пусть G – граф четного порядка $n \geq 4$, размера m и минимальной степени $\delta \geq 1$. Если*

$$G \notin \{K_1 \vee (K_{n-3} + 2K_1), K_1 \vee (K_{1,3} + K_1), K_{2,4}, K_2 \vee 4K_1, K_1 \vee K_{2,5}, K_3 \vee 5K_1, K_2 \vee (K_{1,4} \vee K_1), K_4 \vee 6K_1\}$$

и выполняется неравенство

$$m \geq \binom{n-2}{2} + 2,$$

то он содержит совершенное паросочетание.

Далее докажем утверждение о трассируемости графа, представляющее самостоятельный интерес.

Т е о р е м а 4. *Пусть G – простой связный граф на $n \geq 8$ вершинах минимальной степени $\delta \geq 1$, отличный от графов из множества $\{K_1 \vee (K_{n-3} + 2K_1), G = K_3 \vee 5K_1\}$. Тогда, если его спектральный радиус $\rho(G) \geq n - 3$, граф G трассируем.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства теоремы 4 нам понадобятся известные факты.

Л е м м а 1 [6]. *Пусть G – простой граф порядка n с m ребрами и минимальной степенью вершин δ. Тогда его спектральный радиус удовлетворяет неравенству*

$$\rho(G) \leq \frac{\delta - 1 + \sqrt{(\delta+1)^2 + 4(2m - \delta n)}}{2}.$$

Л е м м а 2 [6]. *Функция $f(x) = x - 1 + \sqrt{(x+1)^2 + 4(2m - xn)}$ является убывающей функцией на промежутке $[1; n-1]$, где $m \leq n(n-1)/2$.*

Л е м м а 3 [1]. *Пусть G – простой граф и H – его собственный подграф. Тогда $\rho(G) \geq \rho(H)$.*

Л е м м а 4 [7]. *Пусть G – простой граф. Тогда G трассируем тогда и только тогда, когда граф $G \vee K_1$ гамильтонов.*

В силу лемм 1, 2, а также условий теоремы, получаем, что спектральный радиус

$$n - 3 \leq \rho(G) \leq \sqrt{2m - n + 1}.$$

Из этого неравенства после преобразований получаем

$$n^2 - 5n + 8 \leq 2m. \tag{4}$$

Предположим, что граф *G* не является трассируемым. Тогда по лемме 4 граф $G' = G \vee K_1$, порядка $n' = n + 1$, размера $m' = m + n$ и со степенями вершин $d'_i = d_i + 1$, $i = \overline{1, n}$, $d'_{n'} = n$, является негамильтоновым. Поэтому, согласно теореме Хватала [8], существует натуральное число *k* такое, что $d'_k \le k < \dfrac{n'}{2}$ и $d'_{n'-k} \le n' - k - 1$ для неубывающей последовательности степеней графа G': $\delta' = d'_1 \le d'_2 \le \ldots \le d'_{n'}$. Поэтому имеет место

$$2m' = \sum_{i=1}^{n'} d_i \le k \cdot k + (n' - 2k)(n' - k - 1) + k(n' - 1) = (n')^2 + 3k^2 + k - 2kn' - n'. \tag{5}$$

Используя неравенство (4) и зная порядок, размер и степени графа G', получаем:

$$n^2 - 5n + 8 \le 2m \le n^2 + 3k^2 - k - 2kn - n. \tag{6}$$

Откуда следует, что

$$3k^2 + k - 8 \ge (2k - 4)n \ge (2k - 4)2k = 4k^2 - 8k \tag{7}$$

или

$$k^2 - 7k + 8 \le 0,$$

поэтому, поскольку $k \in \mathbb{N}$, имеем $k \in \{2, \ldots, 5\}$. При этом неравенства Хватала можно записать в виде

$$d_k \le k - 1,\ d_{n+1-k} \le n - k - 1$$

для неубывающей последовательности степеней графа G:

$$\delta = d_1 \le d_2 \le \ldots \le d_n.$$

Рассмотрим случай $k = 2$. Тогда $d_1 = d_2 = 1,\ d_{n-1} \le n - 3$ и из неравенства (6) имеем

$$\frac{n(n-5)}{2} + 4 \le m \le \frac{n(n-5)}{2} + 5 = \binom{n-2}{2} + 2.$$

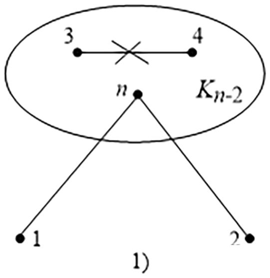
Заметим, что верхняя оценка $\binom{n-2}{2} + 2$ для числа ребер графа G достигается для степенной последовательности $(1;\, 1;\, n-3;\, \ldots;\, n-3;\, n-1)$, соответствующей графу $K_1 \vee (K_{n-3} + 2K_1)$, который входит в список исключений в формулировке теоремы.

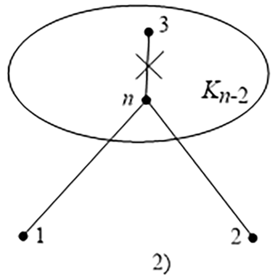
Нетрудно видеть, что графом G с числом ребер $\binom{n-2}{2} + 1$ может быть либо граф $K_{n-2} + K_2$, который является несвязным, либо граф G, который получается из графа $K_1 \vee (K_{n-3} + 2K_1)$ удалением одного ребра.

Покажем, что для таких графов выполняется неравенство $\rho(G) < n - 3$. Граф, который получается из графа $K_1 \vee (K_{n-3} + 2K_1)$, может иметь только одну из следующих степенных последовательностей (см. рисунок):

1) $\left(1;\, 1;\, n-4;\, n-4;\, \underbrace{n-3;\, \ldots;\, n-3}_{n-5};\, n-1\right)$, обозначим соответствующий граф как H_1;

2) $\left(1;\, 1;\, n-4;\, \underbrace{n-3;\, \ldots;\, n-3}_{n-4};\, n-2\right)$, обозначим соответствующий граф как H_2.





Кроме того, покажем, что $\rho(H_1) \ge \rho(H_2)$. Для этого используем понятие преобразования Кельманса [9]. Пусть дан граф Γ и две его фиксированные вершины u, v. Построим новый граф Γ^*, заменив все ребра vx на ребра ux для всех $x \in N(v) \setminus N[u]$. Новый граф Γ^*, полученный таким образом, имеет тот же порядок и размер, что и старый граф Γ, и все вершины, отличные от u, v, сохраняют свою степень. При этом справедливо следующее утверждение.

Л е м м а 5 [9]. *Пусть Γ – произвольный граф и Γ^* – граф, полученный из Γ с помощью преобразования Кельманса. Тогда выполняется неравенство* $\rho(\Gamma) \le \rho(\Gamma^*)$.

Отсюда вытекает утверждение.

Л е м м а 6. *Для графов H_1, H_2 справедливо неравенство:* $\rho(H_1) \ge \rho(H_2)$.

В самом деле, для графа $\Gamma = H_2$ положим $v = 4$, $u = n$. Тогда $N(v) \setminus N[u] = \{3\}$ (см. рисунок), а значит, $\Gamma^* = H_1$ и утверждение следует из леммы 5.

Осталось показать, что $\rho(H_1) < n-3$. Для этого рассмотрим следующее разбиение вершин π: $V(H_1) = \{1;2\} \bigcup \{n\} \bigcup \{3;4\} \bigcup V(K_{n-5})$, которое, очевидно, является равноправным и матрица частных которого имеет вид

$$A_\pi(H_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & n-5 \\ 0 & 1 & 0 & n-5 \\ 0 & 1 & 2 & n-6 \end{pmatrix}.$$

Ее характеристический многочлен равен

$$g(\lambda) = \lambda^4 + (6-n)\lambda^3 + (11-3n)\lambda^2 - 4\lambda + 4n - 20,$$

наибольший корень которого в силу утверждения 1 равен спектральному радиусу $\rho(H_1)$. Нетрудно вычислить, что при $n \ge 8$ справедливы следующие неравенства:

$$\begin{aligned} &g(n-3) = 2n^2 - 12n + 10 > 0; \\ &g'(n-3) = n^3 - 6n^2 + 13n - 16 > 0; \\ &g''(n-3) = 6n^2 - 24n + 22 > 0; \\ &g'''(n-3) = 18n - 36 > 0; \\ &g^{(4)}(n-3) = 12 > 0. \end{aligned}$$

Следовательно, по теореме Фурье – Бюдана [10] на промежутке $[n-3; +\infty)$ нет корней характеристического многочлена $g(\lambda)$, следовательно, $\rho(H_1) < n-3$.

Пусть $k = 3$. Тогда из неравенства (3) получаем, что $n \le 8$, а значит, $n = 8$ и $m \ge 16$. Поскольку $d_3 \le 2$, $d_6 \le 4$, то этим условиям удовлетворяет степенная последовательность (2; 2; 2; 4; 4; 4; 7; 7), которая соответствует графу $G = K_2 \vee (3K_1 \vee K_3)$. Нетрудно проверить, что $\rho(G) = 4{,}61 < 5$, что противоречит условию теоремы.

Пусть $k = 4$. Тогда из неравенства (3) получаем, что $n \le 9$, а значит, $n = 8$. Тогда из (6) получаем, что $16 \le m \le 18$. Поскольку $d_4 \le 3$, $d_5 \le 3$, то максимальное число ребер графа достигается для последовательности степеней (3; 3; 3; 3; 3; 7; 7; 7), которая соответствует графу $G = K_3 \vee 5K_1$, входящему в список исключений в формулировке теоремы.

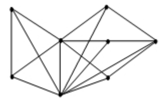
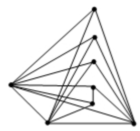
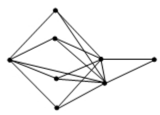
Нетрудно проверить, что в случае $m = 17$ возможны только следующие три степенные последовательности:

1) (3; 3; 3; 3; 3; 5; 7; 7), которая соответствует графу $G = K_2 \vee \left(K_2 + (K_1 \vee 3K_1)\right)$, но для такого графа $\rho(G) = 4{,}69 < 5$;

2) (2; 3; 3; 3; 3; 6; 7; 7), которая соответствует графу $G = K_2 \vee \left(K_1 + (K_1 \vee 4K_1)\right)$, но для такого графа $\rho(G) = 4{,}79 < 5$;

3) (3; 3; 3; 3; 3; 6; 6; 7), которая соответствует графу $G = K_1 \vee (2K_1 \vee 5K_1)$, но для такого графа $\rho(G) = 4{,}62 < 5$, что противоречит условию теоремы.

Для m = 16, кроме подграфов H уже упомянутых выше трех графов, для которых по лемме 3 также справедливо неравенство $\rho(H) < 5$, противоречащее условию теоремы, нетрудно найти еще восемь степенных последовательностей, которым соответствуют графы с соответствующими спектральными радиусами, представленными в таблице.

№	Степенная последовательность	Соответствующий граф	Спектральный радиус
1	(3; 3; 3; 3; 3; 3; 7; 7)	$K_2 \vee 3K_2$	$\rho = 4{,}464$
2	(3; 3; 3; 3; 3; 5; 6; 6)	$5K_1 \vee (K_1 + K_2)$	$\rho = 4{,}544$
3	(2; 2; 3; 3; 3; 5; 7; 7)	$K_2 \vee (2K_1 + K_{1,3})$	$\rho = 4{,}580$
4	(2; 3; 3; 3; 3; 4; 7; 7)	$K_2 \vee (K_1 + K_2 + K_{1,2})$	$\rho = 4{,}533$
5	(1; 3; 3; 3; 3; 6; 6; 7)	$K_1 \vee (K_1 + (K_2 \vee 4K_1))$	$\rho = 4{,}653$
6	(3; 3; 3; 3; 3; 4; 6; 7)		$\rho = 4{,}358$
7	(3; 3; 3; 3; 3; 5; 5; 7)		$\rho = 4{,}321$
8	(2; 3; 3; 3; 3; 5; 6; 7)		$\rho = 4{,}418$

Пусть k = 5. Тогда из неравенства (6) получаем, что $n \le 10$. С другой стороны, $n \ge 2k = 10$. Поэтому n = 10. Тогда из (3) получаем, что $29 \le m \le 30$, причем максимальное число ребер графа достигается для последовательности степеней (4; 4; 4; 4; 4; 4; 9; 9; 9; 9), которая соответствует графу $G = 6K_1 \vee K_4$. Нетрудно проверить, что для такого графа $\rho(G) = 6{,}623 < 7$.

Нетрудно проверить, что условию m = 29 удовлетворяет либо граф H, который получается из графа G удалением одного ребра, а значит, по лемме 3 для графа H также имеет место неравенство $\rho(H) < 7$, либо граф $G = K_3 \vee (K_2 \vee K_{1,4})$, который соответствует степенной последовательности (4; 4; 4; 4; 4; 4; 7; 9; 9; 9), для которого нетрудно проверить, что $\rho(G) = 6{,}378 < 7$. Это противоречит условию теоремы. Теорема 4 доказана.

Поскольку $f(n-3) = -2 < 0$, то $n - 3 < \theta(n)$. Поэтому из теоремы 4 и того, что граф $K_{n-2} + K_2$, единственный несвязный граф, возникающий в доказательстве этой теоремы, содержит совершенное паросочетание, вытекает теорема, улучшающая нижнюю оценку для спектрального радиуса, гарантирующую существование в графе совершенного паросочетания.

Т е о р е м а 5. *Пусть G – простой граф четного порядка $n \ge 10$ и минимальной степени $\delta \ge 1$, отличный от графов из множества $\{K_1 \vee (K_{n-3} + 2K_1),\ G = K_3 \vee 5K_1\}$. Тогда, если его спектральный радиус $\rho(G) \ge n-3$, граф G содержит совершенное паросочетание.*

Далее мы представим алгоритм распознавания существования совершенного паросочетания в графе, основываясь на понятии (κ,τ)-регулярного множества.

Хорошо известны следующие утверждения.

У т в е р ж д е н и е 2 [3]. *Если x_S – характеристический вектор* (κ,τ)*-регулярного множества S графа G с матрицей смежности $A = A(G)$, то справедливо равенство*

$$\big(A - (\kappa - \tau)E\big)x_S = \tau j. \qquad (8)$$

Верно и обратное утверждение: *всякое* (0,1)*-решение системы* (8) *определяет некоторое* (κ,τ)*-регулярное множество S графа G* [11].

У т в е р ж д е н и е 3 [11]. *Граф $G \ne K_2$ имеет совершенное паросочетание тогда и только тогда, когда его реберный граф $L(G)$ содержит* (0,2)*-регулярное множество S.*

У т в е р ж д е н и е 4 [11]. *Пусть G – граф с* (κ,τ)*-регулярным множеством $S \subset V(G)$ и g – частное решение линейной системы уравнений*

$$\big(A-(\kappa-\tau)E\big)x=\tau j,$$

кроме того, $(\kappa-\tau)$ *является собственным вектором кратности t. Тогда характеристический вектор x_S множества S определяется равенством*

$$x_S=g+\sum_{j=1}^{t}\delta_{i_j}q_j,$$

где $\delta_{i_j}\in\{-g_{i_j},1-g_{i_j}\}$, $j=\overline{1,t}$, *а векторы* $\langle q_1,q_2,...,q_t\rangle=\mathcal{E}_G(\kappa-\tau)$, *причем матрица* $V=(q_1\ q_2\ ...\ q_t)$, *столбцы которой составлены из этих векторов, содержит единичную матрицу порядка t, стоящую в строках с номерами из множества индексов* $I=\{i_1,i_2,...,i_t\}$.

Ранее нами была доказана справедливость следующих утверждений [12].

Т е о р е м а 6 [12]. *Пусть граф G с матрицей смежности A имеет* (κ,τ)*-регулярное множество S, тогда для его характеристического вектора x_S имеет место разложение*

$$x_S=g+q, \tag{9}$$

где $g=\sum_{i=0}^{p-1}\alpha_iA^ij$ *и* $q\in\big(Main(G)\big)^{\perp}$, причем

1) $Aq=(\kappa-\tau)q$;

2) $\alpha_{p-1}c_{p-1}-\alpha_0(\kappa-\tau)=\tau,\quad \alpha_i-\alpha_{i+1}(\kappa-\tau)+\alpha_{p-1}c_{p-2-i}=0,\ \ i=\overline{0,p-2}.$ (10)

Решая систему уравнений (6), нетрудно получить, в частности, равенство

$$-\tau=\alpha_{p-1}M\big(G,(\kappa-\tau)\big).$$

Т е о р е м а 7 [12]. *Если граф G с матрицей смежности A имеет* (κ,τ)*-регулярное множество S, где* τ > 0, *то* (κ – τ) *не может быть его главным собственным значением.*

Более того, можно получить явный вид главного собственного значения:

$$\lambda=\tau\frac{u^Tx_{\overline{S}}}{u^Tx_S}+\kappa=\tau\frac{u^Tj}{u^Tx_S}+(\kappa-\tau),$$

где u – главный собственный вектор, относящийся к главному собственному значению λ матрицы смежности A

С л е д с т в и е [12]. *Если* (–2) *– главное собственное значение реберного графа L*(*G*) *графа* $G\neq K_2$, *то он не имеет совершенного паросочетания.*

Кроме решения системы уравнений (10), разложение вектора g из равенства (9) по базису $\{j,Aj,...,A^{p-1}j\}$ пространства $Main(G)$ можно найти также в матричном виде.

При доказательстве теоремы 6 было показано, что если граф G имеет (κ,τ)-регулярное множество, то справедливы два равенства:

i) $\big(A-(\kappa-\tau)E\big)g=\tau j$;

ii) $\big(A-(\kappa-\tau)E\big)q=0$.

Будем различать два случая:

1) $(\kappa-\tau)\notin Sp(G)$;

2) $(\kappa-\tau)\in Sp(G)$.

В случае 1) из ii) следует, что $q=0$, а значит, $x_S=g$. Поэтому в силу невырожденности матрицы $\big(A-(\kappa-\tau)E\big)$ из i) следует $g=x_S=\tau\big(A-(\kappa-\tau)E\big)^{-1}j$, т. е. x_S является *единственным* решением системы $\big(A-(\kappa-\tau)E\big)x=\tau j$.

В случае 2) рассмотрим линейное преобразование пространства $Main(G)$:

$$\varphi:Main(G)\to Main(G),$$
$$x\mapsto\big((\kappa-\tau)E-A\big)x,$$

матрица которого в его базисе $\{j,Aj,...,A^{p-1}j\}$, как нетрудно видеть, имеет вид

$$M_\varphi = \begin{pmatrix} (\kappa-\tau) & 0 & \cdots & 0 & 0 & -c_{p-1} \\ -1 & (\kappa-\tau) & \cdots & 0 & 0 & -c_{p-2} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & -c_{p-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & (\kappa-\tau) & -c_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & (\kappa-\tau)-c_0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $M_\varphi = (\kappa-\tau)E - C$, где C – матрица (3), поэтому матрица M_φ вырождена тогда и только тогда, когда $(\kappa - \tau)$ – собственное значение матрицы C, что равносильно, $(\kappa - \tau)$ – главное собственное значение графа G. Поэтому в силу теоремы 4 и существования (κ,τ)-регулярного множества в графе G матрица M_φ обратима.

Очевидно, равенство i) в базисе $\{j, Aj, ..., A^{p-1}j\}$ эквивалентно равенству

$$M_\varphi \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{p-1} \end{pmatrix} = -\tau \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = -\tau e_1.$$

Откуда получаем

$$g = W \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{p-1} \end{pmatrix} = -\tau W M_\varphi^{-1} e_1.$$

Заметим, что

$$\det M_\varphi = \det\big((\kappa-\tau)E - C\big) = M\big(G, (\kappa-\tau)\big),$$

поэтому

$$M_\varphi^{-1} = \frac{1}{M\big(G,(\kappa-\tau)\big)} M_\varphi^*,$$

где M_φ^* – *присоединенная матрица* для M_φ. Поэтому, чтобы вычислить произведение $M_\varphi^{-1}e_1$, достаточно найти только алгебраические дополнения для элементов первой строки матрицы M_φ. Нетрудно убедиться индукцией по p, что

$$M_\varphi^* e_1 = \begin{pmatrix} (\kappa-\tau)^{p-1} - c_0(\kappa-\tau)^{p-2} - \ldots - c_{p-2} \\ (\kappa-\tau)^{p-2} - c_0(\kappa-\tau)^{p-3} - \ldots - c_{p-3} \\ \vdots \\ (\kappa-\tau) - c_0 \\ 1 \end{pmatrix} =: \overline{\alpha}.$$

Поэтому окончательно получаем:

$$g = -\frac{\tau}{M\big(G,(\kappa-\tau)\big)} W \overline{\alpha},$$

где вектор $g_1 =: W\overline{\alpha}$ называется *дискриминирующим*, а вектор $g = -\dfrac{\tau}{M\left(G,(\kappa-\tau)\right)}W\overline{\alpha}$ – (κ – τ)-*параметрическим вектором* графа *G*.

Отсюда получаем справедливость следующего утверждения.

Т е о р е м а 8 [12]. *Для дискриминирующего вектора* g_1 *произвольного графа G с матрицей смежности A справедливо равенство* $\left(A-(\kappa-\tau)E\right)g_1 = 0$ *тогда и только тогда, когда* (κ – τ) *является его главным собственным значением.*

На основании вышесказанного можно предложить следующий алгоритм.

Алгоритм распознавания существования совершенного паросочетания в графе.

Вход: матрица инцидентности размера $n \times m$ графа *G* порядка *n* и размера *m*.

Выход: ответ: содержит ли граф *G* совершенное паросочетание или нет; если граф *G* содержит совершенное паросочетание, оно выдается.

Шаг 1. Найти матрицу смежности $A = A\left(L(G)\right)$ реберного графа *L*(*G*) графа *G* по формуле

$$A\left(L(G)\right) = (B^T B) - 2E,$$

где $B = (b_{ij})_{n\times m}$ – матрица инцидентности графа *G*:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если вершина } v_i \text{ инцидентна ребру } e_j, \\ 0, \text{ если вершина } v_i \text{ не инцидентна ребру } e_j, \end{cases}$$

а также найти наименьшее натуральное число $p \geq 2$, при котором векторы $j,\ Aj, \dots, A^{p-1}j,\ A^p j$ являются линейно зависимыми.

Шаг 2. Найти коэффициенты $1, c_0, c_1, \dots, c_{p-2}, c_{p-1}$ характеристического многочлена

$$M\left(L(G), x\right) =: \prod_{i=1}^{p}(x-\lambda_i) = x^p - c_0 x^{p-1} - c_1 x^{p-2} - \dots - c_{p-2}x - c_{p-1}$$

графа *L*(*G*) из решения однородной системы уравнений $W_{p+1}x = 0$, где матрица W_{p+1} размера $n\times(p+1)$ получается из матрицы маршрутов $W = (j\ Aj\ A^2 j\ \dots\ A^{p-1}j)$ добавлением еще одного столбца $A^p j$.

Шаг 3. Вычислить дискриминирующий вектор $g_1 =: W\overline{\alpha}$, где

$$\overline{\alpha} = \begin{pmatrix} (-2)^{p-1} - c_0(-2)^{p-2} - \dots - c_{p-2} \\ (-2)^{p-2} - c_0(-2)^{p-3} - \dots - c_{p-3} \\ \vdots \\ (-2) - c_0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Шаг 4. Если $(A+2E)g_1 = 0$, то по теореме 7 число (–2) является главным собственным значением реберного графа *L*(*G*), а значит, согласно следствию, граф *G* не содержит совершенное паросочетание.

Если $(A+2E)g_1 \neq 0$, то возможны 2 случая:

1) (–2) не является собственным значением реберного графа *L*(*G*);

2) (–2) является собственным значением реберного графа *L*(*G*) кратности *t*.

В случае 1) проверить, является ли вектор $g = \dfrac{2}{M\left(L(G),(-2)\right)}g_1$ (0,1)-вектором с *n* ненулевыми компонентами: если да, то граф *G* содержит совершенное паросочетание и (0,1)-вектор *g* – характеристический вектор совершенного паросочетания, иначе – не содержит совершенное паросочетание.

В случае 2) перейти к следующему шагу.

Шаг 5. Решить методом Гаусса систему уравнений $(A+2E)x=0$ и найти фундаментальную систему решений $q_1, q_2, ..., q_t$, соответствующих наборам $e_1, e_2, ..., e_t$, которые принимают свободные неизвестные $x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_t}$ с индексами из некоторого множества $I=\{i_1, i_2, ..., i_t\}$, где $t=\dim\ker(A+2E)$ – дефект матрицы $(A+2E)$. Положить множество $\Lambda =: \left\{(\delta_{i_1}, \delta_{i_2}, ..., \delta_{i_t}) \mid \delta_{i_j} \in \{-g_{i_j}, 1-g_{i_j}\}, i_j \in I\right\}$ и для каждого набора $(\delta_{i_1}, \delta_{i_2}, ..., \delta_{i_t})$ из множества Λ проверить, является ли вектор $g+\sum_{j=1}^{t}\delta_{i_j}q_j$ (0,1)-вектором с n ненулевыми компонентами: если существует такой набор $(\delta_{i_1}, \delta_{i_2}, ..., \delta_{i_t})$, то граф G содержит совершенное паросочетание и (0,1)-вектор g – характеристический вектор этого совершенного паросочетания, иначе – не содержит совершенное паросочетание.

Конец алгоритма.

Оценим вычислительную сложность предложенного алгоритма. Шаг 1 включает умножение матриц, и поэтому требует $O(m^4)$ времени. На шаге 2 можно применить метод исключения Гаусса, и поэтому он требует $O(m^3)$ времени. На шаге 3 выполняется алгоритм умножения матриц, на которое затрачивается $O(m^2)$ времени. Такое же время будет затрачено на выполнение шага 4. Шаг 5 требует в общем случае экспоненциальное время $O(2^t m^3)$. Хорошо известно, что кратность $m(-2, L(G))$ собственного значения (–2) его реберного графа G равна

$$m(-2, L(G)) = \begin{cases} \gamma(G), & \text{если граф } G \text{ двудольный;} \\ \gamma(G)-1, & \text{если граф } G \text{ не двудольный.} \end{cases}$$

Поэтому, например, в классе графов с фиксированным цикломатическим числом $\gamma(G)$ шаг 5 будет выполняться за полиномиальное время.

Таким образом, хотя проблема распознавания существования совершенного паросочетания в графе является, как известно, NP-полной, в классе графов с фиксированным цикломатическим числом она становится полиномиально разрешимой.

Благодарности. Работа профинансирована Институтом математики НАН Беларуси в рамках Государственной программы фундаментальных исследований «Конвергенция» и Белорусским республиканским фондом фундаментальных исследований (проект № Ф20УКА–005).

Acknowledgements. This work was funded by the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus within the framework of the State Program for Fundamental Research “Convergence” and the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (project no. Ф20УКА-005).

Список использованных источников

1. Cvetković, D. An Introduction to the Theory of Graph Spectra / D. Cvetković, P. Rowlinson, S. Simić. – Cambridge University Press, 2011. https://doi.org/10.1017/CBO9780511801518

2. Гантмахер, Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М.: Физматлит, 2010. – 560 с

3. Sciriha, I. Necessary and sufficient conditions for a Hamiltonian graphs / I. Sciriha, D. M. Cardoso // J. Combin. Math. Comb. Comput. – 2012. – Vol. 80. – P. 127–150.

4. Suil, O. Spectral radius and matchings in graphs / O. Suil // Linear Algebra Appl. – 2021. – Vol. 614. – P. 316–324. https://doi.org/10.1016/j.laa.2020.06.004

5. Ning, B. Spectral radius and Hamiltonian properties of graphs / B. Ning, J. Ge // Linear and Multilinear Algebra. – 2015. – Vol. 63, № 8. – P. 1520–1530. https://doi.org/10.1080/03081087.2014.947984

6. Yuan Hong. A sharp upper bound of the spectral radius of graphs / Yuan Hong, Jin-Long Shu, Kunfu Fang // J. Comb. Theory. Ser. B. – 2001. – Vol. 81, № 2. – P. 177–183. https://doi.org/10.1006/jctb.2000.1997

7. Bondy, J. A. Graph Theory / J. A. Bondy, U. S. R. Murty. – New York: Springer, 2008. https://doi.org/10.1007/978-1-84628-970-5

8. Лекции по теории графов / В. А. Емеличев [и др.]. – М.: Наука, 1990. – 384 с.

9. Brouwer, A. E. Spectra of Graphs / A. E. Brouwer, W. H. Haemers. – Springer Universitext, 2012.

10. Прасолов, В. В. Многочлены / В. В. Прасолов. – М.: МЦНМО, 2001. – 336 с.

11. Cardoso, D. M. An overview of (κ,τ)-regular sets and their applications / D. M. Cardoso // Discrete Appl. Math. – 2019. – Vol. 269. – P. 2–10. https://doi.org/10.1016/j.dam.2018.12.020

12. Бенедиктович, В. И. Главные собственные значения графа и его гамильтоновость / В. И. Бенедиктович // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2020. – Т. 56, № 4. – С. 398–407. https://doi. org/10.29235/1561-2430-2020-56-4-398-407

References

1. Cvetković D., Rowlinson P., Simić S. *An Introduction to the Theory of Graph Spectra*. Cambridge University Press, 2011. https://doi.org/10.1017/CBO9780511801518

2. Gantmacher F. R. *The Theory of Matrices*. Moscow, Fizmatlit Publ., 2010. 560 p. (in Russian)

3. Sciriha I., Cardoso D. M. Necessary and sufficient conditions for a Hamiltonian graphs. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 2012, vol. 80, pp. 127–150.

4. Suil O. Spectral radius and matchings in graphs. *Linear Algebra and its Applications,* 2021, vol. 614, pp. 316–324. https://doi.org/10.1016/j.laa.2020.06.004

5. Ning B., Ge J. Spectral radius and Hamiltonian properties of graphs. *Linear and Multilinear Algebra*, 2015, vol. 63, no. 8, pp. 1520–1530. https://doi.org/10.1080/03081087.2014.947984

6. Yuan Hong, Jin-Long Shu, Kunfu Fang. A sharp upper bound of the spectral radius of graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 2001, vol. 81, no. 2, pp. 177–183. https://doi.org/10.1006/jctb.2000.1997

7. Bondy J. A., Murty U. S. R. *Graph Theory*. New York, Springer, 2008. https://doi.org/10.1007/978-1-84628-970-5

8. Emelichev V. A., Melnikov O. I., Sarvanov V. I., Tyshkevich R. I. *Lectures on the Graph Theory*. Moscow, Nauka Publ., 1990. 384 p. (in Russian).

9. Brouwer A. E., Haemers W. H. *Spectra of Graphs*. Springer Universitext, 2012.

10. Prasolov V. V. *Polynomials*. Moscow, MTsNMO Publ., 2001. 336 p. (in Russian).

11. Cardoso D. M. An overview of (κ,τ)-regular sets and their applications. *Discrete Applied Mathematics*, 2019, vol. 269, pp. 2–10. https://doi.org/10.1016/j.dam.2018.12.020

12. Benediktovich V. I. Main eigenvalues of a graph and its Hamiltonicity. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2020, vol. 56, no. 4, pp. 398–407 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-4-398-407

Информация об авторе

Бенедиктович Владимир Иванович – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: vbened@im.bas-net.by

Information about the author

Vladimir I. Benediktovich – Ph. D. (Physics and Mathematics), Leading Researcher, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (Surganov Str., 11, 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: vbened@im.bas-net.by