

ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)

ИНФОРМАТИКА INFORMATICS

УДК 550.388.2
<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2025-61-1-47-62>

Поступила в редакцию 30.08.2024
Received 30.08.2024

А. М. Крот, И. Э. Савиных, А. С. Шапкин

*Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси,
Минск, Республика Беларусь*

РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМОВ И ПРОГРАММ ОЦЕНИВАНИЯ ЭЛЕКТРОННОГО СОДЕРЖАНИЯ И РАДИОТОМОГРАФИЧЕСКОГО ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПОЛЯ КОНЦЕНТРАЦИИ ЭЛЕКТРОНОВ В ИОНОСФЕРЕ НА ОСНОВЕ РАДИОСИГНАЛОВ СПУТНИКОВЫХ СИСТЕМ

Аннотация. Процессы рассеяния, дисперсии и поглощения, сопровождающие распространение электромагнитной волны, приводят к тому, что радиосигнал замедляется и ослабевает при прохождении через электронные скопления в ионосфере. В статье решается задача восстановления поля концентрации электронов на основе радиопросвечивания ионосферы. Рассматривается вывод аналитических соотношений для определения полного электронного содержания (ПЭС) в ионосфере на основе радиосигналов глобальной навигационной спутниковой системы (ГНСС) на двух частотах. Рассмотрены методы вычисления ПЭС как по прямым спутниковым сигналам, так и на основе перекрестной ретрансляции с использованием малогабаритного спутника-ретранслятора формата CubeSat. Приводятся аналитические соотношения и описаны алгоритмы вычисления ПЭС, рассчитанного на основе фазовых и псевдодальностных измерений, которое затем используется для построения алгоритмов вычислительной томографии с целью оценки структур восстановленных изображений электронной плотности. Как итог, в предложенных алгоритмах радиотомографии используются данные ПЭС для создания двумерных изображений поля концентрации электронов в ионосфере, что позволяет оценить как структуру, так и динамику ионосферы.

Ключевые слова: глобальная навигационная спутниковая система, навигационный радиосигнал, полное электронное содержание, поле концентрации электронов в ионосфере, радиотомография ионосферы, алгоритмы восстановления изображений, теорема о проекционном срезе, алгоритм обратного проецирования Радона

Для цитирования. Крот, А. М. Разработка алгоритмов и программ оценивания электронного содержания и радиотомографического восстановления поля концентрации электронов в ионосфере на основе радиосигналов спутниковых систем / А. М. Крот, И. Э. Савиных, А. С. Шапкин // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. – 2025. – Т. 61, № 1. – С. 47–62. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2025-61-1-47-62>

Alexander M. Krot, Irina E. Savinykh, Aliaksandr S. Shapkin

United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus

DEVELOPMENT OF ALGORITHMS AND PROGRAMS FOR ESTIMATION OF ELECTRON CONTENT AND RADIOTOMOGRAPHIC RESTORATION OF THE ELECTRON CONCENTRATION FIELD IN THE IONOSPHERE BASED ON RADIO SIGNALS OF SATELLITE SYSTEMS

Abstract. The processes of scattering, dispersion and absorption accompanying the propagation of an electromagnetic wave lead to the fact that the radio signal slows down and weakens when passing through electron clusters in the ionosphere. The article solves the problem of restoration of the electron concentration field based on ionospheric radiography. The derivation of analytical relationships for determining the total electron content (TEC) in the ionosphere based on radio signals of the global navigation satellite system (GNSS) at two frequencies is considered. The methods for calculating TEC both from direct satellite signals and cross-relaying based on a small-sized CubeSat retransmission satellite are considered. Analytical relationships are given and algorithms for estimating TEC calculated based on phase and pseudo-distance measurements are described. They are then used to construct computing tomography algorithms in order to estimate the structures of the re-

stored electron density images. As a result, the proposed radio tomography algorithms use TEC data to synthesize two-dimensional images of the electron concentration field in the ionosphere which allows the estimation both of the structure and dynamics of the ionosphere.

Keywords: global navigation satellite system, navigation radio signal, total electron content, ionospheric electron concentration field, ionosphere radio tomography, image restoration algorithms, projection slice theorem, Radon back projection algorithm

For citation. Krot A. M., Savinykh I. E., Shapkin A. S. Development of algorithms and programs for estimation of electron content and radiotomographic restoration of the electron concentration field in the ionosphere based on radio signals of satellite systems. *Vestsi Natsyynal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2025, vol. 61, no. 1, pp. 47–62 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2025-61-1-47-62>

Введение. Ионосфера существенно воздействует на распространение радиоволн, в частности сигналов глобальных навигационных спутниковых систем (ГНСС) [1, 2]. Состояние ионосферы описывается множеством параметров: электронной концентрацией, ионным составом, ионной и электронной температурами, скоростью движения частиц и др. Основное влияние на распространение радиоволн оказывает электронная концентрация в ионосфере, за счет которой ионосфера становится диспергирующей средой для радиоволн, где скорость распространения зависит от длины волны. По этой причине происходит задержка и преломление лучей при распространении радиоволн в ионосфере, а для радиоволн большой длины – и их полное отражение в ионосфере. В зависимости от высоты и распределения электронной концентрации ионосферу условно разделяют на слои: D (ниже 90 км), E (от 90 до 130 км), F_1 (от 130 до 200 км) и F_2 (выше 200 км). Максимальная концентрация электронов и ионов расположена в слое F_2 на высотах от 250 до 450 км [1, 3].

На данный момент имеется большой арсенал методов, средств и систем измерения электронной концентрации в ионосфере [1, 4–6]. К их числу следует отнести станции вертикального и наклонного зондирования ионосферы, радиозонды, средства радиозондирования ионосферы со специализированных искусственных спутников Земли с использованием сигналов ГНСС. Основным методом определения электронной концентрации в настоящее время является *радиотомографический* [1]. Он предполагает измерения значений *полного электронного содержания* (ПЭС) как интеграла от электронной концентрации на заданной трассе между передатчиком и приемником с последующим использованием результатов измерений для восстановления зависимости электронной концентрации от географических координат томографическими методами [5–10]. В этой связи определение ПЭС является важной задачей исследования ионосферы.

В последние годы наиболее широко применяется высокоорбитальный метод трансионосферного зондирования на основе приема сигналов навигационных спутников (НС), входящих в ГНСС типа ГЛОНАСС или GPS, посредством двухчастотной навигационной аппаратуры потребителя, расположенной на Земле. Возможно также использование ретранслированных сигналов ГНСС; так, в [9] дано обоснование способа измерения ПЭС для реализации радиотомографического метода зондирования ионосферы за счет ретрансляции навигационных сигналов ГНСС GPS наноспутником формата CubeSat.

1. Описание предлагаемого метода ретрансляции. Иллюстрация содержания предлагаемого способа приведена на рис. 1. В случае использования ретрансляционного метода один или несколько спутников-ретрансляторов выводятся на орбиты высотой 150–1000 км. Общее число спутников-ретрансляторов (СР) определяется требуемым темпом обновления данных для реализации радиотомографии. При равномерном распределении СР по долготе восходящего узла в зоне видимости наземного приемного пункта (ПП) будет находиться, как правило, один СР. Использование одного СР на орбите обеспечивает получение данных 5–6 раз в сутки.

Ретрансляционный метод заключается в приеме сигналов ГНСС GPS спутником-ретранслятором на двух рабочих частотах, фильтрации принятых сигналов, усилении, переносе спектров сигналов на частоты 150/400 МГц, а затем передаче их посредством слабонаправленной антенны на Землю [9]. Прием и обработка ретранслированных сигналов осуществляется одним или несколькими пространственно-разнесенными ПП.

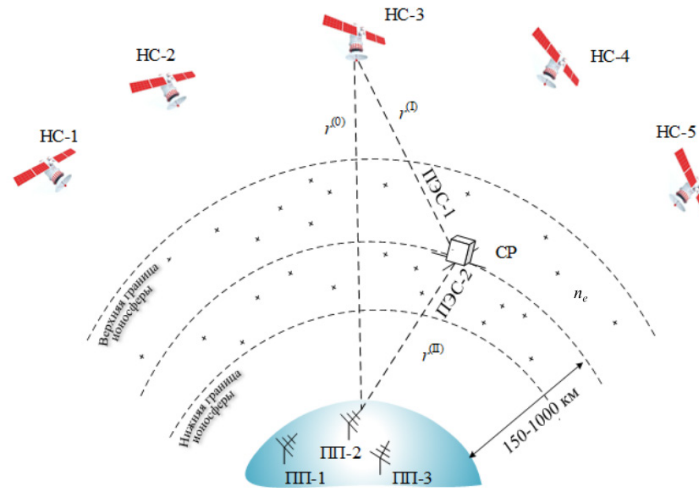


Рис. 1. Способ ретрансляции

Fig. 1. Relaying method

Так как навигационные радиосигналы являются когерентными с известными параметрами, то предлагаемая совокупность технических средств образует многопозиционную радиолокационную систему с большим (до 8–10) числом независимо функционирующих источников когерентных зондирующих сигналов, с единственной «радиолокационной целью» – спутником-ретранслятором и одним или несколькими ПП [9].

Отметим, что при ретрансляции из принимаемых на ПП сигналов можно извлечь аналогичную информацию, как и при приеме прямых навигационных сигналов в двухчастотном приемнике: время задержки и разность фаз сигналов на двух частотах f_1 и f_2 . Для сохранения когерентности перенос ретранслируемых навигационных сигналов необходимо проводить с использованием двух гетеродинов на базе синтезаторов частот, работающих от одного высокостабильного опорного генератора [9].

Выполним ретрансляцию принимаемого аппаратурой СР навигационного радиосигнала системы GPS на частоте $f_1 = 1575,42$ МГц одновременно на две частоты $f_{p1} = 150$ МГц и $f_{p2} = 400$ МГц, выделенных в соответствии с регламентом радиосвязи для геофизических исследований. Аналогичные операции проведем для навигационного сигнала GPS на частоте $f_2 = 1227,6$ МГц. Получим 4 ретранслированных сигнала, принимаемых на наземном ПП [9]:

$$\begin{aligned} s_{f_1, f_{p1}}(t) &: f_1 \rightarrow f_{p1}; & s_{f_1, f_{p2}}(t) &: f_1 \rightarrow f_{p2}; \\ s_{f_2, f_{p1}}(t) &: f_2 \rightarrow f_{p1}; & s_{f_2, f_{p2}}(t) &: f_2 \rightarrow f_{p2}. \end{aligned} \quad (1)$$

2. Вывод аналитических соотношений для определения полного электронного содержания. Считаем, что плоская радиоволна распространяется от космического аппарата – наноспутника (НС), который находится на времязависимом расстоянии $L(t)$ до приемного пункта, вдоль оси z , направленной от космического аппарата до ПП. В этом случае напряженность электрического поля выражается формулой [8]

$$E(L, t) = E_0 \cos \left(\omega \left[t - \int_0^{L(t)} \frac{dz}{-v_{ph}(z)} \right] \right) = E_0 \cos \left(2\pi f \left[t + \frac{1}{c} \int_0^{L(t)} \bar{n}(z) dz \right] \right), \quad (2)$$

где $\bar{n}$ – показатель преломления, v_{ph} – фазовая скорость, c – скорость света, $\omega = 2\pi f$. С учетом того, что ионосферный слой расположен на интервале $[L_0(t), L(t)]$, а атмосферный и тропосферные слои находятся в интервале $[0, L_0(t)]$, оценим время запаздывания (задержки) радиоволны (2):

$$\tau = \frac{1}{c} \int_0^{L_0(t)} \bar{n}(z) dz + \frac{1}{c} \int_{L_0(t)}^{L(t)} \bar{n}(z) dz = \frac{1}{c} \int_0^{L_0(t)} \bar{n}_{tr}(z) dz + \frac{1}{c} \int_{L_0(t)}^{L(t)} \bar{n}_f(z) dz, \quad (3)$$

где $\bar{n}_{tr}$, $\bar{n}_f$ – тропосферный и ионосферный показатели преломления. Для ионосферы показатель преломления определяется формулой Эпплтона – Лассена при учете следующих условий [1, 11]:

- статистическая однородность распределения зарядов, так что в результате пространственный заряд отсутствует;
- пренебрежение тепловым движением частиц (холодная плазма);
- влияние на распространение волны только концентрации электронов;
- отсутствие поляризационного члена Лоренца (лоренцевой поправки [11]);
- однородность внешнего магнитного поля $\vec{B}_0$;
- независимость частоты электронных соударений ν от энергии электрона.

Поскольку основной вклад в формулу Эпплтона – Лассена вносит электрическая составляющая, то на практике влиянием магнитного поля и соударениями можно пренебречь, так что получается известная формула показателя преломления [1], зависящая только от электронной концентрации n_e :

$$\bar{n}_f^2(z) = 1 - \frac{e^2 n_e}{4\pi^2 \varepsilon_0 m_e f^2} = 1 - \frac{e^2 n_e}{\varepsilon_0 m_e \omega^2} = 1 - \left(\frac{\omega_e}{\omega} \right)^2, \quad (4)$$

где $\omega_e = e \sqrt{\frac{n_e}{\varepsilon_0 m_e}}$ – плазменная частота колебаний электронного облака в ионосфере, e – заряд электрона, ε_0 – диэлектрическая постоянная (диэлектрическая проницаемость свободного пространства), m_e – масса электрона.

Учитывая, что $\omega_e \ll \omega$, то, согласно формуле Маклорена, ионосферный и тропосферный показатели преломления соответственно равны [1, 8]

$$\bar{n}_f(z) = \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_e}{\omega} \right)^2} \approx 1 - \frac{\omega_e^2}{2\omega^2} = 1 - \frac{e^2 n_e(z)}{8\pi^2 \varepsilon_0 m_e f^2}; \quad (5)$$

$$\bar{n}_{tr}(z) \approx 1 + \Delta \bar{n}_{tr}(z). \quad (6)$$

Подставляя (5), (6) в уравнение (3), получим фазу принимаемого сигнала (2) [8]

$$\varphi = 2\pi f[t + \tau] = 2\pi f t + 2\pi f \left(\frac{L(t)}{c} + \frac{1}{c} \int_0^{L_0(t)} \Delta \bar{n}_{tr}(z) dz - \frac{A}{c f^2} \int_{L_0(t)}^{L(t)} n_e(z) dz \right), \quad (7)$$

где $A = \frac{e^2}{8\pi^2 \varepsilon_0 m_e} \approx 40,308 \text{ м}^3/\text{с}^2$. Отсюда находим известную формулу вычисления ПЭС (или ТЕС в англоязычной литературе [8]) ионосферного слоя на основе двухчастотных *фазовых измерений* [3, 9]:

$$\text{ТЕС}(t) = \int_{L_0(t)}^{L(t)} n_e(z) dz = -\frac{c}{2\pi A} \cdot \frac{\frac{\varphi_1}{f_1} - \frac{\varphi_2}{f_2}}{\frac{1}{f_1^2} - \frac{1}{f_2^2}} = \frac{1}{A} \left(\frac{f_1^2 f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} \right) (\lambda_1 O_1 - \lambda_2 O_2), \quad (8)$$

где λ_1, λ_2 – длины волн, $O_1 = \frac{\varphi_1}{2\pi}$, $O_2 = \frac{\varphi_2}{2\pi}$ – оборотные (нормированные на оборот) фазы двух радиосигналов.

В случае распространения не монохроматической плоской волны (2), а модулированного навигационного радиосигнала $s(t)$ от ГНСС, его можно представить в виде *волнового пакета* из плоских волн с длинами $\lambda \in \left[\frac{c}{f + \Delta f/2}, \frac{c}{f - \Delta f/2} \right]$. Вследствие явления дисперсии ионосферной среды различные частотные компоненты сигнала испытывают различную задержку, поэтому необходимо использовать групповую задержку, а не фазовую. *Групповая задержка* определяется аналогично (3):

$$\tau^{\text{гп}} = \frac{1}{c} \int_0^{L_0(t)} \bar{n}^{\text{гп}}(z) dz + \frac{1}{c} \int_{L_0(t)}^{L(t)} \bar{n}^{\text{гп}}(z) dz = \frac{1}{c} \int_0^{L_0(t)} \bar{n}_{tr}^{\text{гп}}(z) dz + \frac{1}{c} \int_{L_0(t)}^{L(t)} \bar{n}_f^{\text{гп}}(z) dz, \quad (9)$$

где $\bar{n}_{tr}^{\text{гп}}$, $\bar{n}_f^{\text{гп}}$ – тропосферный и ионосферный групповые показатели преломления. В целом тропосферу считаем недиспергирующей средой, поэтому для нее групповой показатель преломления равен

$$\bar{n}_{tr}^{\text{гп}}(z) = \bar{n}_{tr}(z) \approx 1 + \Delta \bar{n}_{tr}(z). \quad (10)$$

С учетом (5) для ионосферы групповой показатель преломления определяется соотношением [1, с. 44]

$$\bar{n}_f^{\text{гп}} = \frac{\partial}{\partial f}(f \bar{n}_f) \approx 1 + \frac{e^2 n_e(z)}{8\pi^2 \epsilon_0 m_e f^2}. \quad (11)$$

Тогда псевдодальность, измеренная по времени задержки (9), будет определяться выражением

$$D_f = c\tau = L(t) + \int_0^{L_0(t)} \Delta \bar{n}_{tr}(z) dz + \frac{A}{f^2} \int_{L_0(t)}^{L(t)} n_e(z) dz = L(t) + \int_0^{L_0(t)} \Delta \bar{n}_{tr}(z) dz + \frac{A}{f^2} \text{TEC}(t). \quad (12)$$

Аналогично (8), исходя из (12), можно вычислить ПЭС по псевдодальностным измерениям, получая также известное соотношение [3, 4]:

$$\text{TEC}(t) = \frac{1}{A} \cdot \frac{D_{f_1} - D_{f_2}}{\frac{1}{f_1^2} - \frac{1}{f_2^2}} = \frac{1}{A} \left(\frac{f_1^2 f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} \right) (D_{f_2} - D_{f_1}). \quad (13)$$

Соотношения (8), (13) справедливы при прямом приеме сигналов от космических аппаратов ГНСС.

Сейчас рассмотрим расчет ПЭС на трассе «НС–СР» на основе фазовых измерений по ретранслированным сигналам [9]. С целью упрощения дальнейших выкладок считаем, что на рис. 1 НС-3, СР и ПП-2 располагаются на одной линии, что позволяет применить подход, изложенный при выводе выражения (8). В случае ретрансляции сигнал (2) можно представить в виде двух последовательно излученных плоских электромагнитных волн, фазы которых будут соответственно определяться выражениями [9]

$$\varphi^{(\text{I})}(t) = 2\pi f t + \frac{2\pi f}{c} (L(t) - L_p(t)) - \frac{2\pi A}{c} \frac{1}{f} \int_{L_p(t)}^{L(t)} n_e(z) dz, \quad (14)$$

$$\varphi^{(\text{II})}(t) = 2\pi f_p t + \frac{2\pi f_p}{c} L_p(t) - \frac{2\pi A}{c} \frac{1}{f_p} \int_{L_0(t)}^{L_p(t)} n_e(z) dz + \frac{2\pi f_p}{c} \int_0^{L_0(t)} \Delta \bar{n}_{tr} dz + \Delta \varphi^{(\text{I})}(t), \quad (15)$$

где $L(t)$, $L_p(t)$ – соответственно расстояния от ПП до НС и СР; $\Delta \varphi^{(\text{I})}(t) = \varphi(t) - 2\pi f t$ – сдвиг фазы ретранслированного сигнала, обусловленный распространением радиоволны по трассе «НС–СР». В соответствии со схемой (1) можно найти оценку ПЭС на трассе «НС–СР» [9]:

$$\text{TEC}_{f_{p1}}^{(\text{I})}(t) = \frac{\varphi_{f_1, f_{p1}}(t) - \varphi_{f_2, f_{p1}}(t) + \frac{2\pi(f_2 - f_1)}{c} \cdot r^{(\text{I})}(t)}{-\frac{2\pi A}{c} \left(\frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2} \right)} = \frac{\varphi_{f_2, f_{p1}}(t) - \varphi_{f_1, f_{p1}}(t)}{\frac{2\pi A}{c} \cdot \left(\frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2} \right)} - \frac{f_1 f_2}{A} r^{(\text{I})}(t), \quad (16)$$

где $\varphi_{f_1, f_{p1}}(t)$, $\varphi_{f_2, f_{p1}}(t)$ – фазы соответствующих принимаемых сигналов, $r^{(\text{I})}(t) = L(t) - L_p(t)$.

Соотношения (14)–(16) для разности фаз принимаемых на двух частотах сигналов базируются на исходном выражении излучаемой плоской волны (2) и принимаемой плоской волны в точке приема.

3. Алгоритм вычисления полного электронного содержания. Вышеизложенный псевдодальностный метод (13) позволяет получить абсолютное значение ПЭС, однако данные будут

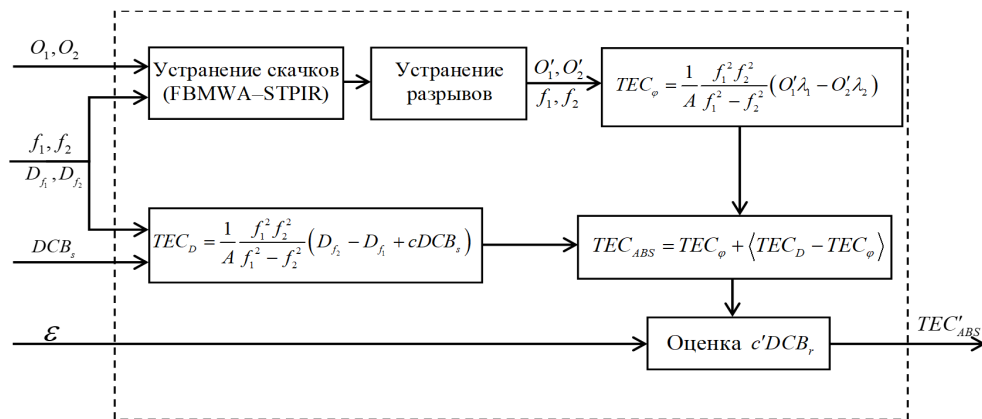


Рис. 2. Упрощенная схема алгоритма оценки абсолютного ПЭС (величины c' и DCB_r определяются в дальнейших выкладках)

Fig. 2. Simplified diagram of the algorithm for estimating absolute TEC (the values c' and DCB_r are determined in further calculations)

крайне зашумленными. Согласно [3] уровень шумовой составляющей при приеме прямых сигналов ГНСС составляет в среднем от 30 до 50 %, а в некоторых случаях может достигать и 100 %, что затрудняет применение данного метода для определения пространственных и временных возмущений ПЭС. Описанный ретрансляционный метод [9] теоретически дает возможность решить данную проблему, но требует большей апробации. Кроме того, вычисленное по псевдодальностным измерениям ПЭС также содержит некоторую аддитивную константу, называемую дифференциальной кодовой задержкой (ДКЗ) [12]. ДКЗ вызывается частотно-зависимыми задержками в аппаратуре спутника и приемника и может достигать нескольких десятков TECU ($1 \text{ TECU} = 10^{16} \text{ электрон/м}^2$) [13]. На практике оценки по дальностным и фазовым (фазоразностным) методам совмещаются, так что в результате получаются более точные абсолютные оценки ПЭС. Опишем используемый далее алгоритм вычисления ПЭС по прямым измерениям [12].

Полагаем, что в каждый момент времени известны следующие характеристики:

- фазовые (оборотная фаза) O_1 и O_2 и псевдодальностные D_1 и D_2 измерения на двух частотах f_1 и f_2 , фазовые (оборотная фаза) после обработки O'_1 и O'_2 ;
- угол места спутника ε ;
- ДКЗ спутника DCB_s .

Принимая во внимание полученные формулы вычисления ПЭС (8), (13), представим алгоритм оценки абсолютного ПЭС в графическом виде (рис. 2).

Алгоритм оценки абсолютного ПЭС состоит из пяти основных шагов.

Шаг 1. Корректировка фазовых измерений. Данные фазовых измерений, полученные от спутников ГНСС, необходимо «очистить» за счет корректировки *разрывов* и *скачков* в значениях [14]. *Скачки* (*cycle slips*) и *разрывы* (*gaps*) представляют собой кратковременный срыв в фазовой синхронизации приемника на спутниковый сигнал. При фазовых измерениях мгновенное значение фазы можно представить в виде суммы целой (неоднозначности фазового измерения) и дробной частей:

$$\varphi = 2\pi(n + l) + \Delta\varphi, \quad (17)$$

где n – неизвестное целое число, l – целое число. При этом n остается постоянным до потери сигнала. После этого неизвестная константа n переопределяется, что приводит к срыву фазовой синхронизации и скачкообразному изменению принимаемого значения фазы. Причины возникновения разрывов и скачков могут быть условно разделены на 3 группы [14]:

- 1) препятствия на пути распространения луча: горы, здания, мосты, деревья и т. д.;
- 2) низкое отношение сигнал / шум, вызванное плохими ионосферными условиями, многолучевостью, низким углом места спутника и т. д.;

3) сбой в работе программного обеспечения приемника или неисправность спутникового генератора.

Для исправления скачка необходимо детектировать его на фоне шумов. Существует достаточно большое количество методов детектирования скачков [14, 15]. Учитывая необходимость проведения точных измерений фазовых характеристик, а также наличия двухчастотного канала приема сигналов ГНСС, целесообразно выбрать метод для одиночной двухчастотной приемной станции. В [15] для данных с относительно большим временным шагом наблюдения (не менее 5 с) комбинация методов FBMWA – STPIR [16] показала наилучший результат, поэтому для детектирования и исправления скачков используется именно она.

Шаг 2. Подсчет относительного ПЭС по фазовым измерениям. В условиях отсутствия априорной информации о сигнале используется формула (8)

$$\text{TEC}_\varphi = \frac{1}{A} \frac{f_1^2 f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} (O_1 \lambda_1 - O_2 \lambda_2). \quad (18)$$

Шаг 3. Уточнение ПЭС по псевдодальностным измерениям. На практике ошибка псевдодальностных измерений связана в первую очередь с ДКЗ приемника и передатчика. На открытом сайте NASA публикуется ежедневная информация о ДКЗ спутников различных ГНСС, поэтому будем считать, что ДКЗ спутников известны, и тогда формула (13) может быть дополнена:

$$\text{TEC}_D = \frac{1}{A} \frac{f_1^2 f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} (D_2 - D_1 + c\text{DCB}_s), \quad (19)$$

где DCB_s – ДКЗ спутника;

Шаг 4. Комбинирование оценок ПЭС, полученных по фазовым и псевдодальностным измерениям. Для совмещения точности оценки ПЭС по фазовым измерениям и абсолютных значений по псевдодальностным фазовые оценки поднимаются до среднего уровня псевдодальностных:

$$\text{TEC}_{abs} = \text{TEC}_\varphi + \langle \text{TEC}_D - \text{TEC}_\varphi \rangle. \quad (20)$$

Шаг 5. Уточнение оценки абсолютного ПЭС за счет оценки ДКЗ приемной станции. Оценка (20) дополняется за счет учета ДКЗ ПП, уточненной на основе метода наименьших квадратов для отклонений вертикального ПЭС [12] (с использованием однослойной модели ионосферы [17]).

Результаты реализации алгоритма вычисления ПЭС представлены на рис. 3.

4. Разработка алгоритмов двумерной радиотомографии для вычисления распределения электронов в ионосфере. Радиотомография ионосферы основана на измерении фазовой задержки электромагнитного сигнала GPS, появляющейся из-за неоднородностей электронных полей в ионосфере. Сопутствующие распространению электромагнитной волны процессы рассеяния, дисперсии и поглощения приводят к тому, что радиосигнал диспергирует и ослабевает при прохождении через облако электронов в ионосфере (согласно закону Бугера), что используется в вычислительной томографии [18]. Данные задержки сигнала по фазе используются для оценивания ПЭС (8), (13) либо (16) с целью последующего применения алгоритмов вычислительной томографии и синтеза изображения электронной плотности. В предлагаемых алгоритмах радиотомографии используются данные ПЭС для создания двумерных изображений поля концентрации электронов в ионосфере, что позволяет оценить как ее структуру, так и динамику [10, 19].

Методы томографии разделяются на итерационные, статистические и детерминированные, основанные на точных математических моделях. К детерминированным относятся методы, основанные на теореме о срезе и на формуле обращения Радона. Проекция является математической операцией, подобной физической операции получения изображения в рентгеновских лучах с помощью коллимированного источника излучения. В результате получается тень, т. е. трехмерная структура неизвестного объекта сводится к двумерному изображению, которое можно измерить [18]. В настоящей статье рассматриваются одномерные проекции двумерных объектов.

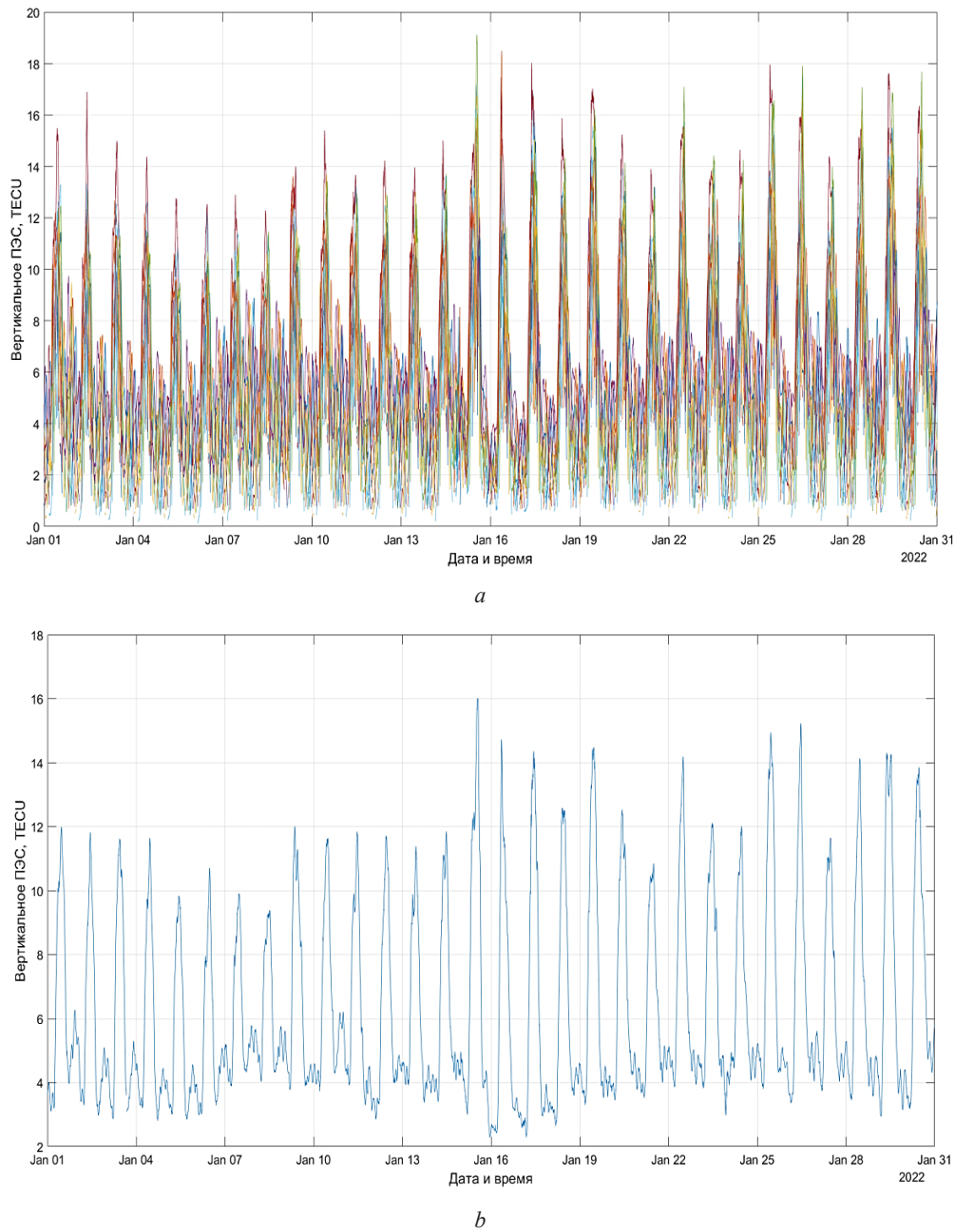


Рис. 3. Результаты оценки ПЭС для минской станции за 1–30 января 2022 г.:
a – все реализации; *b* – взвешенное среднее

Fig. 3. Results of TEC estimation for Minsk station for January 1–30, 2022: *a* – all realizations; *b* – weighted mean

Величину $p_\theta(\hat{x}_1)$ называем *проекцией концентрации* $n(x_1, x_2)$ под углом θ , которая равна интегралу по координате, именуемого ПЭС (10):

$$p_\theta(\hat{x}_1) = \int_{-\infty}^{\infty} n(x_1, x_2) d\hat{x}_2 = \int_{-\infty}^{\infty} n(\hat{x}_1 \cos \theta - \hat{x}_2 \sin \theta, \hat{x}_1 \sin \theta + \hat{x}_2 \cos \theta) d\hat{x}_2, \quad 0 \leq \theta < \pi, \quad (21)$$

где $\hat{x}_1, \hat{x}_2$ – координаты в повернутой системе координат относительно исходной (x_1, x_2) (рис. 4).

ПЭС соответствует семейству линейных интегралов, взятых вдоль ряда линий пучка электромагнитных волн, параллельных друг другу. Различным углам θ в диапазоне $0 \leq \theta < \pi$ соответствуют различные ориентации пучка и различные проекции.

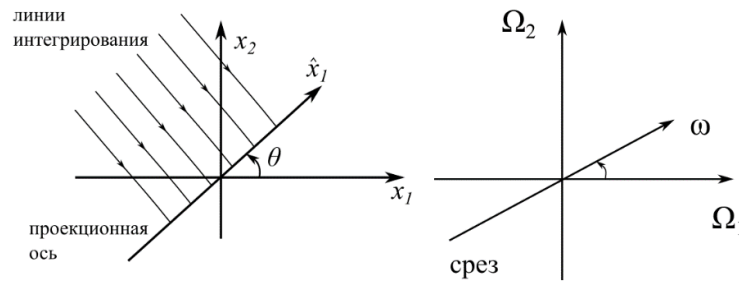


Рис. 4. Связь между проекцией двумерной функции и срезом ее спектра Фурье

Fig. 4. The relationship between the projection of a two-dimensional function and a slice of its Fourier spectrum

После преобразования Фурье функции $p_\theta(\hat{x}_1)$ получаем одномерный спектр $S_\theta(\omega)$:

$$S_\theta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} p_\theta(\hat{x}_1) \exp(-i\omega\hat{x}_1) d\hat{x}_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} n(x_1, x_2) \exp[-i\omega(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta)] dx_1 dx_2, \quad i = \sqrt{-1}. \quad (22)$$

При этом 2D-концентрация $n(x_1, x_2)$ имеет 2D-спектр Фурье $N(\Omega_1, \Omega_2)$. В повернутой (исходной) системе координат (см. рис. 4) находим 1D-спектр Фурье:

$$S_\theta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} n(x_1, x_2) \exp[-i\omega(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta)] dx_1 dx_2 = N(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta). \quad (23)$$

Эту функцию сечения $S_\theta(\omega)$ называем *срезом* $N(\Omega_1, \Omega_2)$ под углом θ , а уравнение (23) описывает *теорему о проекционном срезе* [10, 18, 19]. В этой связи задача восстановления или оценки концентрации $n(x_1, x_2)$ эквивалентна задаче интерполяции двумерного спектра Фурье в целом на основе этих радиальных сечений.

Двумерное распределение концентрации $n(x_1, x_2)$ можно восстановить из двумерного спектра Фурье $N(\Omega_1, \Omega_2)$ посредством двумерного обратного преобразования Фурье:

$$n(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} N(\Omega_1, \Omega_2) e^{i(\Omega_1 x_1 + \Omega_2 x_2)} d\Omega_1 d\Omega_2. \quad (24)$$

При разработке программных средств восстановления функции электронной концентрации $n(x_1, x_2)$ в ионосфере используем дискретное преобразование Фурье (ДПФ) и эффективные алгоритмы его вычисления [20–22].

Допустим, что имеется N проекций $n(x_1, x_2)$ при равноотстоящих углах $\theta_i = \pi i / N$, где $i = 0, 1, \dots, N-1$, а дискретизация проекции выполнена с одной и той же пространственной частотой, при этом вычислено M -точное ДПФ каждой дискретной проекции:

$$S_\theta[k] = \sum_{m=0}^{M-1} p_\theta[m] e^{-\frac{i2\pi}{M}mk}, \quad k = 0, 1, \dots, M-1. \quad (25)$$

Эти значения ДПФ можно трактовать как отсчеты *двумерного преобразования Фурье* по регулярному полярному растру (рис. 5).

Для компьютерной реализации необходимо провести преобразование от полярного растра с известными значениями (рис. 5, а) к квадратному (рис. 5, б) с интерполяцией недостающих значений. В результате получается квадратный растр коэффициентов двумерного ДПФ, к которому необходимо применить обратное ДПФ в соответствии с соотношением

$$n[m_1, m_2] = \frac{1}{M^2} \sum_{k_2=-M/2+1}^{M/2} \left(\sum_{k_1=-M/2+1}^{M/2} N[k_1, k_2] e^{i\frac{2\pi}{M}m_1 k_1} \right) e^{i\frac{2\pi}{M}m_2 k_2}, \quad (26)$$

$$m_1, m_2 = -(M/2-1), \dots, 0, \dots, M/2-1,$$

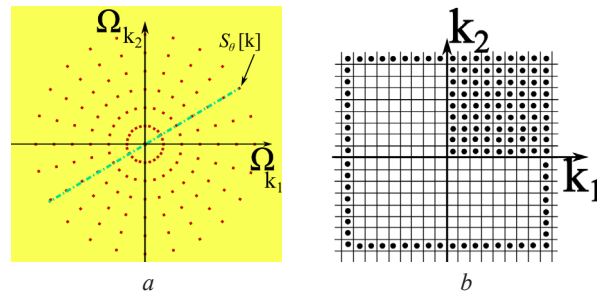


Рис. 5. Отсчеты коэффициентов двумерного ДПФ: *a* – полученные в области пространственных частот (полярный растр отсчетов) путем дискретизации по пространству всех проекций с одинаковой частотой дискретизации; *b* – квадратный растр отсчетов в частотно-пространственной области, сформированной посредством интерполяции отсчетов полярного растра

Fig. 5. Samples of two-dimensional DFT coefficients: *a* – obtained in the domain of spatial frequencies (polar raster of samples) by sampling over the space of all projections with the same sampling frequency; *b* – a square raster of samples in the frequency-spatial domain formed by interpolation of polar raster samples

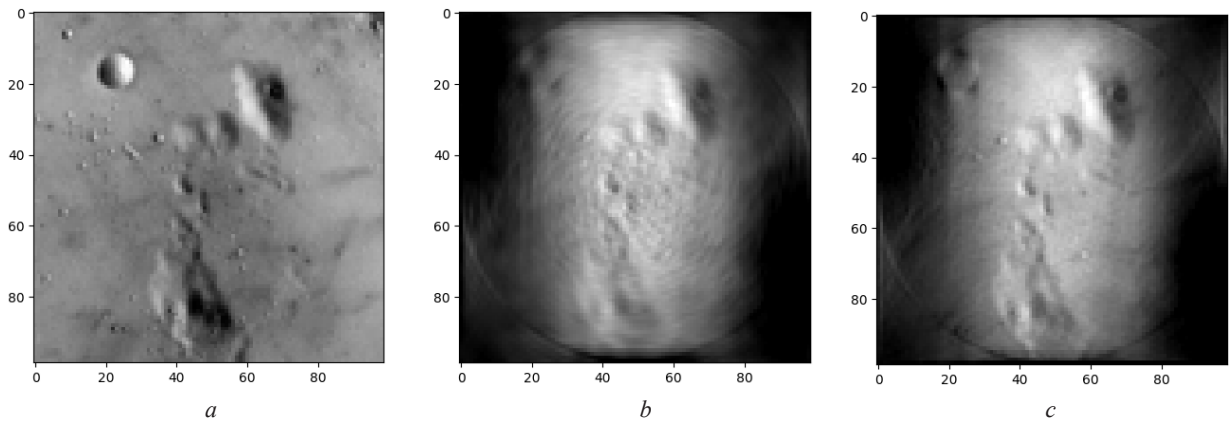


Рис. 6. Тестовое исходное (*a*) и восстановленные 2D-изображения с угловым шагом 5° (*b*) и 1° (*c*)

Fig. 6. Test original (*a*) and restored 2D-images with angular step of 5° (*b*) and 1° (*c*)

и использовать эти результаты для оценки отсчетов $n[m_1, m_2]$, $m_1, m_2 = -M/2 + 1, \dots, 0, \dots, M/2$ (см. рис. 5, *b*). Вычисление ДПФ выполнялось на основе эффективных алгоритмов быстрого преобразования Фурье (БПФ) по расщепленному основанию, разработанных авторами работ [20–22].

С целью проверки работоспособности алгоритма (22)–(26) ниже приводятся примеры восстановления тестового изображения (рис. 6) на основе набора проекций с угловым шагом 5° и 1° с помощью метода, основанного на теореме о срезе. Из-за разреженности отсчетов по мере удаления от центра качество изображения несколько ухудшается. Можно наблюдать тенденцию улучшения качества изображения по мере уменьшения шага дискретизации отбора проекций и, соответственно, увеличения количества данных. Для восстановления изображения в случае шага в 5° используется только 36 проекций, тогда как при использовании шага в 1° необходимо уже 180 проекций.

Если в двумерной спектральной плоскости перейти к полярным координатам (см. рис. 4), то формула (24) в полярных координатах (ω , θ) примет вид

$$\begin{aligned} n(x_1, x_2) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty N(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta) e^{i\omega(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta)} |\omega| d\omega d\theta = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty S_\theta(\omega) e^{i\omega(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta)} |\omega| d\omega d\theta. \end{aligned} \quad (27)$$

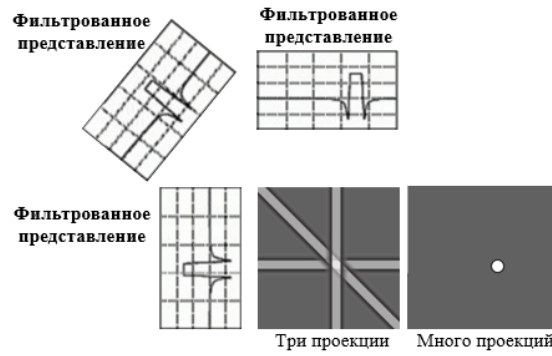


Рис. 7. Алгоритм обратного проецирования на примере трех обратных проекций

Fig. 7. The back projection algorithm using the example of three back projections

Внутренний интеграл в (27) представляет собой обратное *одномерное* преобразование Фурье произведения $S_0(\omega)$ и $|\omega|$:

$$g_\theta(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_0(\omega) |\omega| e^{i\omega(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta)} d\omega. \quad (28)$$

Соотношение (28) реализует фильтр от функции проецирования p_θ , при этом частотный отклик $|\omega|$ является производной от преобразования Гильберта функции $p_\theta(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta)$. С использованием (28) вычисление искомой концентрации $n(x_1, x_2)$ по алгоритму обратной проекции, основанному на формуле обращения Радона, записывается следующим образом [18]:

$$n(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi g_\theta(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta) d\theta. \quad (29)$$

Путем дискретизации формулы обращения Радона (29) нетрудно вывести алгоритмы обратной проекции. Их отличительной особенностью является возможность реализации полностью в пространственной области (рис. 7).

Дискретизация формулы обращения Радона основана на предположении, что заданы проекции под углами $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{N-1}$, такими, что

$$\begin{cases} \Delta\theta_i = \theta_i - \theta_{i-1}, & i = 1, \dots, N-1; \\ \Delta\theta_0 = \theta_0 - \theta_{N-1} + \pi. \end{cases} \quad (30)$$

Из формулы обращения Радона (29) следует, что искомую 2D-функцию концентрации $n(x_1, x_2)$ можно аппроксимировать суммой

$$n(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=0}^{N-1} \Delta\theta_i g_i(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta), \quad (31)$$

где $g_i(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta) = g_i(\hat{x}_1)$ – функция в повернутой системе координат $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$, т. е. результат фильтрации согласно (28):

$$g_i(t) = p_{\theta_i}(t) * k(t), \quad (32)$$

$$F\{k(t)\} = |\omega|, \quad (33)$$

где знак «*» – символ свертки функций.

Равенства (30)–(33) можно интерпретировать следующим образом. Одномерная проекция под углом θ_i пропускается через одномерный фильтр с импульсным $k(t)$ и частотным $|\omega|$ откликами. Заметим, что все проекции ($i = 0, 1, \dots, N-1$) пропускаются через один и тот же фильтр, выходом которого является функция g_i . Используя повернутую систему координат $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$, получим, что

$$g_i(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta) = g_i(\hat{x}_1). \quad (34)$$

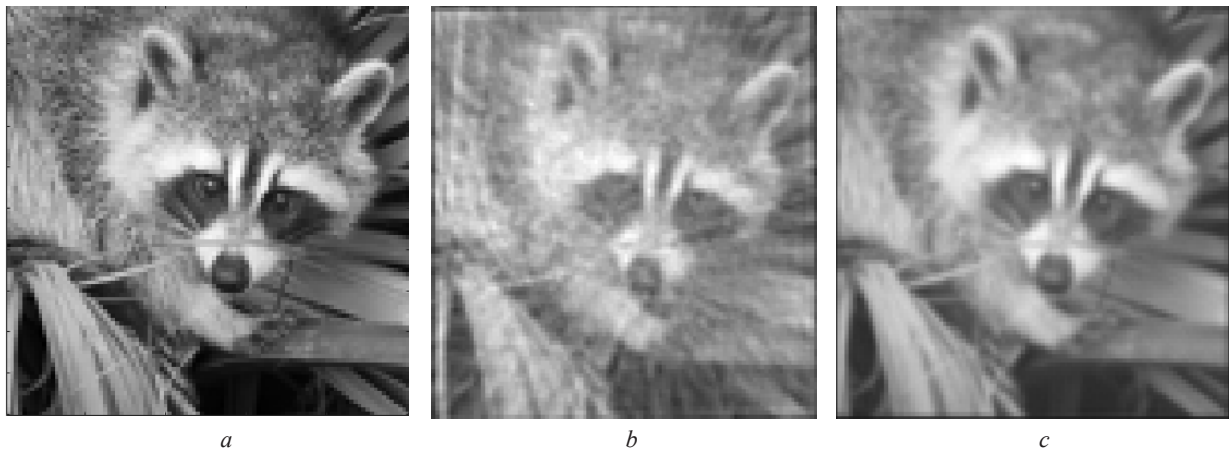


Рис. 8. Тестовое исходное (a) и восстановленные 2D-изображения с угловым шагом 10° (b) и с угловым шагом 1° (c)

Fig. 8. Test original (a) and restored 2D-images with angular step of 10° (b) and with angular step of 1° (c)

В этой связи сигнал g_i в (34) можно представить как *двумерный сигнал*, отфильтрованный по переменной $\hat{x}_1$, и однородный по переменной $\hat{x}_2$. Поскольку операция восстановления двумерной функции начинается с одномерной функции (для получения двумерной), то эта операция называется *обратной проекцией* [10, 18, 19]. С целью проверки работоспособности процедуры восстановления изображений методом обратных проекций проверен вычислительный эксперимент, результаты которого представлены на рис. 8.

Воспользуемся формулами расчета ПЭС по фазовым (8) и псевдодальностным (13) измерениям и схемой уточнения полученных оценок ПЭС (см. рис. 3) применительно к данным в формате RINEX на основе радиосигналов от ГНСС GPS с целью реконструкции 2D-изображений участков ионосферы методом, основанным на теореме о проекционном срезе и алгоритмах БПФ. Для данного метода диапазон полярных углов ограничен интервалом $0^\circ \leq \theta < 180^\circ$, а в связи с тем, что количество спутников ГНСС ограничено, необходимо дополнительно использовать процедуры интерполяции данных на основе алгоритмов машинного обучения (ARIMA) и искусственных нейронных сетей глубокого обучения. На рис. 9 показаны результаты восстановления двумерного изображения концентрации электронов в ионосфере на основе вычисленных оценок ПЭС, полученных радиопросвечиванием ионосферы с использованием радиосигналов от ГНСС, и метода, основанного на теореме о проекционном срезе.

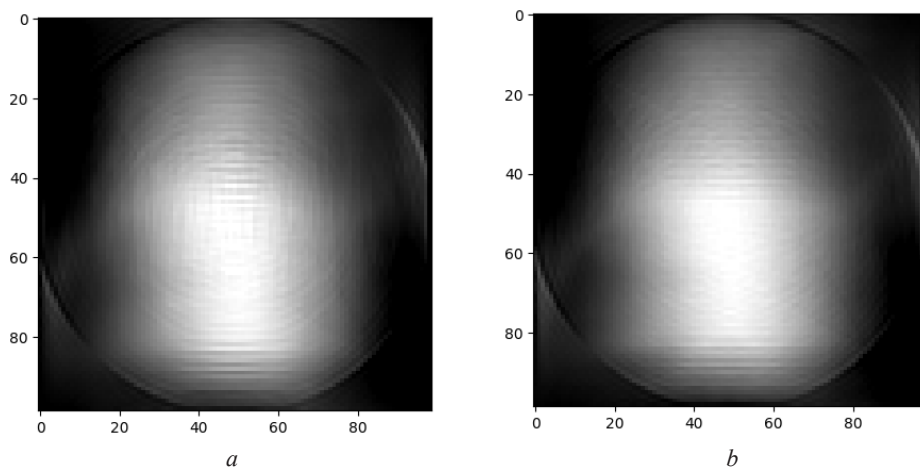


Рис. 9. Восстановление 2D-изображений участка ионосферы с угловым шагом 10° (a) и 5° (b)

Fig. 9. Restoration of 2D images of the domain of ionosphere with angular step of 10° (a) and 5° (b)

Заключение. Радиотомографические средства оценивания концентрации электронов в ионосфере являются чрезвычайно перспективными, поскольку не требуют построения специальных радиотехнических систем, а используют в своей основе уже имеющиеся ГНСС типа GPS или ГЛОНАСС. Для повышения качества радиотомографической обработки могут применяться спутники формата CubSat. В работе выведены соотношения и алгоритм оценки ПЭС как при прямом распространении радиосигналов от космических аппаратов, так и на основе ретрансляции с использованием спутника-ретранслятора CubSat. Приводится метод двухступенчатой ретрансляции, при применении которой на частоты 150/400 МГц примечательными являются следующие обстоятельства.

1. За счет ретрансляции одного и того же навигационного сигнала с частоты f_1 или f_2 на две другие частоты 150/400 МГц и последующего вычитания в выражениях, аналогичных (13), оценок суммарной дальности

$$\text{TEC}_{f_1}^{(\text{II})} = \frac{D_{f_1, f_{p1}} - D_{f_1, f_{p2}}}{A \left(\frac{1}{f_{p1}^2} - \frac{1}{f_{p2}^2} \right)}; \quad \text{TEC}_{f_2}^{(\text{II})} = \frac{D_{f_2, f_{p1}} - D_{f_2, f_{p2}}}{A \left(\frac{1}{f_{p1}^2} - \frac{1}{f_{p2}^2} \right)}$$

в результирующем выражении взаимно компенсируются как геометрические дальности между элементами системы, так и ионосферная ошибка, обусловленная ПЭС на трассе «НС–СР».

2. За счет ретрансляции на более низкие частоты существенно увеличивается чувствительность метода определения ПЭС по псевдодальностным измерениям, так как величина ПЭС в 1 TECu будет соответствовать разности суммарных псевдодальностей $D_{f_1, f_{p1}} - D_{f_1, f_{p2}} = D_{f_2, f_{p1}} - D_{f_2, f_{p2}} = 15,4$ м, в то время как при использовании классического метода на основе приема навигационных сигналов на частотах f_1, f_2 при ПЭС 1 TECu разность дальностей будет соответствовать всего 0,1 м, что весьма сложно для измерения.

3. Так как измерения $\text{TEC}_{f_1, n}^{(\text{II})}$, $\text{TEC}_{f_2, n}^{(\text{II})}$ по набору радиосигналов ($n = 1, \dots, N_{\text{GPS}}$) НС, которые одновременно наблюдаются на СР и ПП, являются независимыми, то можно провести процедуру осреднения:

$$\overline{\text{TEC}}^{(\text{II})} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{N_{\text{GPS}}} \sum_{n=1}^{N_{\text{GPS}}} \text{TEC}_{f_1, n}^{(\text{II})} + \frac{1}{N_{\text{GPS}}} \sum_{n=1}^{N_{\text{GPS}}} \text{TEC}_{f_2, n}^{(\text{II})} \right).$$

В результате проведенных исследований были построены и программно реализованы (на языках программирования Python и Fortran) алгоритмы вычислительной радиотомографии на основе двух различных методов восстановления, а именно посредством теоремы о проекционном срезе (см. рис. 6) и метода обратных проекций (см. рис. 8). С использованием процедур оценивания ПЭС, изложенных в разделах 2 и 3, программно реализована процедура восстановления 2D-изображений участка ионосферы на основе теоремы о проекционном срезе и разработанных эффективных алгоритмов БПФ (см. рис. 9).

Благодарности. Работа выполнена в рамках договора на опытно-конструкторскую работу «Разработать алгоритмические и программные средства обработки радиотомографических данных низкоорбитального контроля ионосферы» в рамках мероприятия 8 подпрограммы 6 «Исследование и использование космического пространства в мирных целях» Государственной программы «Наукоемкие технологии и техника» на 2021–2025 годы и договора № 9СГ3.3-220 задания «Разработать аппаратно-программный и алгоритмический комплекс радиометрического анализа динамических состояний ионосферы» на выполнение научно-исследовательских работ в рамках мероприятия 3.3 научно-технической программы Союзного государства «Разработка базовых элементов орбитальных и наземных средств в интересах создания многоспутниковых группировок малоразмерных космических аппаратов наблюдения земной поверхности и околоземного космического пространства» («Комплекс-СГ»).

Acknowledgments. The work was carried out in the framework of the contract for the experimental design work “Develop algorithmic and software tools for processing radiotomographic data of low-orbit ionosphere monitoring” in the framework of event 8 of Subprogram 6 “Exploration and use of outer space for peaceful purposes” of the State Program “High-tech and Technology” for 2021–2025 and contract no. 9СГ3.3-220 of the task “Develop a hardware, software and algorithmic complex for radiometric analysis of dynamic states of the ionosphere” for the performance of research work in the framework of event 3.3 of the Scientific and Technical Program of the Union State “Development of basic elements of orbital and ground-based facilities in the interests of creating multi-satellite constellations of small-sized spacecrafts for observing the Earth’s surface and near-Earth space” (“Complex-SG”).

Список использованных источников

1. Дэвис, К. Радиоволны в ионосфере: пер. с англ. / К. Дэвис. – М.: Мир. – 1973. – 502 с.
2. ГЛОНАСС. Принципы построения и функционирования / Р. В. Бакитко, Е. Н. Болденков, Н. Т. Булавский [и др.]; под ред. А. И. Перова, В. Н. Харисова. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Радиотехника, 2010. – 800 с.
3. Куницын, В. Е. Радиотомография ионосферы / В. Е. Куницын, Е. Д. Терещенко, Е. С. Андреева. – М.: Физматлит, 2007. – 336 с.
4. Афраймович, Э. Л. GPS-мониторинг верхней атмосферы Земли / Э. Л. Афраймович, Н. П. Первалова. – Иркутск: ГУ НЦ ВСНЦ СО РАМН, 2006. – 480 с.
5. Романов, А. А. Измерение полного электронного содержания ионосферы Земли с помощью многочастотного когерентного зондирующего сигнала / А. А. Романов, А. В. Новиков, А. А. Романов // Вопросы электромеханики. Труды НПП ВНИИЭМ. – 2009. – Т. 111, № 4. – С. 31–36.
6. Семейство наноспутников изучения ионосферы на базе платформы SamSat разработки Самарского университета / И. В. Белоконов, Е. А. Болтов, Н. А. Елисов [и др.] // Восьмой Белорусский космический конгресс, Минск, 25–27 окт. 2022 г.: материалы конгресса: в 2 т. – Минск, 2022. – Т. 1. – С. 167–170.
7. Определение концентрации электронов в ионосфере над территорией Республики Беларусь по данным глобальных навигационных спутниковых систем / А. О. Наумов, П. А. Хмарский, Н. И. Бышнев [и др.] // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-тэхнічных навук. – 2024. – Т. 69, № 1. – С. 53–64. <https://doi.org/10.29235/1561-8358-2024-69-1-53-64>
8. Beacon satellite receiver for ionospheric tomography / J. Vierinen, J. Norberg, M. S. Lehtinen [et al.] // Radio Science. – 2014. – Vol. 49, № 12. – P. 1141–1152. <https://doi.org/10.1002/2014RS005434>
9. Способ оценивания полного электронного содержания в ионосфере на основе ретрансляции сигналов глобальной навигационной спутниковой системы GPS / И. В. Белоконов, А. М. Крот, С. В. Козлов [и др.] // Информатика. – 2023. – Т. 20, № 4. – С. 7–27. <https://doi.org/10.37661/1816-0301-2023-20-2-7-27>
10. Krot, A. M. Development of radiotomography algorithms for the study of electron clouds in the ionosphere and structures in the dusty plasma using low-orbital satellite systems / A. M. Krot, I. E. Savinykh // Proceedings of 15th Moscow Solar system Symposium (15M-S³), Space Research Institute, Moscow, Russia, 21–25 October, 2024. – М., 2024. – P. 230–231.
11. Ратклифф, Дж. А. Магнито-ионная теория и ее приложения к ионосфере: пер. с англ. / Дж. А. Ратклифф. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 248 с.
12. Шапкин, А. С. Алгоритм оценки абсолютного полного электронного содержания ионосферы по данным двухчастотных фазовых и дальностных спутниковых измерений / А. С. Шапкин // Информатика. – 2024. – Т. 21, № 1. – С. 48–64. <https://doi.org/10.37661/1816-0301-2024-21-1-48-64>
13. Variability of GPS/GLONASS differential code biases / A. A. Mylnikova, Yu. V. Yasyukevich, V. E. Kunitsyn, A. M. Padokhin // Results in Physics. – 2015. – Vol. 5. – P. 9–10. <https://doi.org/10.1016/j.rinp.2014.11.002>
14. Hofmann-Wellenhof, B. Global Positioning System: Theory and Practice / B. Hofmann-Wellenhof, H. Lichtenegger, J. Collins. – Springer Vienna, 2001. – XXIV, 382 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-7091-6199-9>
15. Study on cycle-slip detection and repair methods for a single dual-frequency global positioning system (GPS) receiver / La Van Hieu, V. G. Ferreira, Xiufeng He, Xu Tang // Boletim de Ciências Geodésicas. – 2014. – Vol. 20, № 4. – P. 984–1004. <https://doi.org/10.1590/s1982-21702014000400054>
16. Cycle slip detection and repair for undifferenced GPS observations under high ionospheric activity / Changsheng Cai, Zhizhao Liu, Pengfei Xia, Wujiao Dai // GPS Solutions. – 2013. – Vol. 17. – P. 247–260. <https://doi.org/10.1007/s10291-012-0275-7>
17. Ya'acob, N. Determination of GPS total electron content using single layer model (SLM) ionospheric mapping function / N. Ya'acob, M. Abdullah, M. Ismail // International Journal of Computer Science and Network Security. – 2008. – Vol. 8, № 9. – P. 154–160.
18. Даджион, Д. Цифровая обработка многомерных сигналов: пер. с англ. / Д. Даджион, Р. Мерсеро. – М.: Мир, 1988. – 488 с.
19. Савиных, И. Э. Радиотомографический анализ ионосферы детерминистскими методами / И. Э. Савиных // Фундаментальные и прикладные космические исследования: материалы XXI конф., Москва, 10–12 апр. 2024 г. – М., 2024. – С. 157–158.
20. Крот, А. М. Синтез алгоритмов БПФ по расщепляемому основанию для действительных и эрмитово-симметричных последовательностей / А. М. Крот, Е. Б. Минервина // Известия ВУЗов СССР. Радиоэлектроника. – 1989. – Т. 32, № 12. – С. 12–17.
21. Krot, A. M. Comment: Conjugate pair fast Fourier transform / A. M. Krot, H. B. Minervina // Electronics Letters. – 1992. – Vol. 28, № 12. – P. 1143–1144. <https://doi.org/10.1049/el:19920721>
22. Крот, А. М. Быстрые алгоритмы и программы цифровой спектральной обработки сигналов и изображений / А. М. Крот, Е. Б. Минервина. – Минск: Навука і тэхніка, 1995. – 407 с.

References

1. Davies K. *Ionospheric Radio Waves*. Blaisdell Publ. Co., Waltham, Massachusetts etc., 1969. 502 p.
2. Bakit'ko R. V., Boldenkov E. N., Bulavskii N. T., Dvorkin V. V., Efimenko V. S., Kosenko V. E. [et al.]. *GLONASS. Principles of Construction and Functioning*. 4th ed. Moscow, Radiotekhnika Publ., 2010. 800 p. (in Russian).
3. Kunitsyn V. E., Tereshchenko E. D., Andreeva E. S. *Radio Tomography of the Ionosphere*. Moscow, Fizmatlit Publ., 2007. 336 p. (in Russian).
4. Afraimovich E. L., Perevalova N. P. *GPS Monitoring of the Earth's Upper Atmosphere*. Irkutsk, GU NTs VSNTs SO RAN, 2006. 480 p. (in Russian).
5. Romanov A. A., Novikov A. A. Measurement of the total electron content of the Earth's ionosphere using a multi-frequency coherent sounding signal. *Voprosy ehlektromekhaniki. Trudy NPP VNIIEHM = Electromechanical Matters. VNIIEHM Studies*, 2009, vol. 111, no. 4, pp. 31–36 (in Russian).
6. Belokonov I. V., Boltov E. A., Elisov N. A., Lomaka I. A., Nikolaev P. N., Shafran S. V. Family of nanosatellites for studying the ionosphere based on the SamSat platform developed by Samara University. *Vos'moi Belorusskii kosmicheskii kongress, Minsk, 25–27 okt. 2022 g.: materialy kongressa. T. 1* [Eighth Belarusian Space Congress: Minsk, October 25–27, 2022. Materials of the Congress. Vol. 1]. Minsk, 2022, pp. 167–170 (in Russian).
7. Naumov A. O., Khmarskiy P. A., Byshnev N. I., Piatrouski M. A. Determination of total electron content in the ionosphere over the territory of the Republic of Belarus based on global navigation satellite systems data. *Vesti Natsyyanal'nei akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-tekhnichnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physical-technical series*, 2024, vol. 69, no. 1, pp. 53–64 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-8358-2024-69-1-53-64>
8. Vierinen J., Norberg J., Lehtinen M. S., Amm O., Roininen L., Väänänen A., Erickson P. J., McKay-Bukowski D. Beacon satellite receiver for ionospheric tomography. *Radio Science*, 2014, vol. 49, no. 2, pp. 1141–1152. <https://doi.org/10.1002/2014RS005434>
9. Belokonov I. V., Krot A. M., Kozlov S. V., Kapliarchuk Y. A., Savinykh I. E., Shapkin A. S. A method for estimating the total electron content in the ionosphere based on the retransmission of signals from the global navigation satellite system GPS. *Informatika = Informatics*, 2023, vol. 20, no. 2, pp. 7–27 (in Russian). <https://doi.org/10.37661/1816-0301-2023-20-2-7-27>
10. Krot A. M., Savinykh I. E. Development of radiotomography algorithms for the study of electron clouds in the ionosphere and structures in the dusty plasma using low-orbital satellite systems. *Proceedings of 15th Moscow Solar system Symposium (15M-S³), Space Research Institute, Moscow, Russia, 21–25 October, 2024*. Moscow, 2024, pp. 230–231.
11. Ratcliffe J. A. *The Magneto-Ionic Theory and its Applications to the Ionosphere*. Cambridge, CUP Publ., 1959. 206 p.
12. Shapkin A. S. Algorithm for estimating the absolute total electron content of the ionosphere from dual-frequency phase and range satellite measurements. *Informatika = Informatics*, 2024, vol. 21, no. 1, pp. 48–64 (in Russian). <https://doi.org/10.37661/1816-0301-2024-21-1-48-64>
13. Mylnikova A. A., Yasyukevich Yu. V., Kunitsyn V. E., Padokhin A. M. Variability of GPS/GLONASS differential code biases. *Results in Physics*, 2015, vol. 5, pp. 9–10. <https://doi.org/10.1016/j.rinp.2014.11.002>
14. Hofmann-Wellenhof B., Lichtenegger H., Collins J. *Global Positioning System: Theory and Practice*. Springer Vienna, 2001. XXIV, 382 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-7091-6199-9>
15. La Van Hieu, Ferreira V. G., Xiufeng He, Xu Tang. Study on cycle-slip detection and repair methods for a single dual-frequency global positioning system (GPS) receiver. *Boletim de Ciências Geodésicas*, 2014, vol. 20, no. 4, pp. 984–1004. <https://doi.org/10.1590/s1982-21702014000400054>
16. Changsheng Cai, Zhizhao Liu, Pengfei Xia, Wujiao Dai. Cycle slip detection and repair for undifferenced GPS observations under high ionospheric activity. *GPS Solutions*, 2013, vol. 17, pp. 247–260. <https://doi.org/10.1007/s10291-012-0275-7>
17. Ya'acob N., Abdullah M., Ismail M. Determination of GPS total electron content using single layer model (SLM) ionospheric mapping function. *International Journal of Computer Science and Network Security*, 2008, vol. 8, no. 9, pp. 154–160.
18. Dudgeon D. E., Mersereau R. M. *Multidimensional Digital Signal Processing*. New Jersey, Prentice-Hall, 1984. 488 p.
19. Savinykh I. E. Radiotomographic analysis of ionosphere by deterministic methods. *Fundamental'nye i prikladnye kosmicheskie issledovaniya: materialy XXI konferentsii, Moskva, 10–12 aprelya 2024 g.* [Fundamental and Applied Space Research. Proceedings of XXI Conference, Moscow, 10–12 April 2024]. Moscow, 2024, pp. 157–158 (in Russian).
20. Krot A. M., Minervina H. B. Synthesis of fast-Fourier-transform (FFT) split-radix algorithms for real-valued and Hermite-symmetrical series. *Radioelectronics and Communication Systems*, 1989, vol. 32, no. 12, pp. 10–15.
21. Krot A. M., Minervina H. B. Comment: Conjugate pair fast Fourier transform. *Electronics Letters*, 1992, vol. 28, no. 12, pp. 1143–1144. <https://doi.org/10.1049/el:19920721>
22. Krot A. M., Minervina E. B. *Fast Algorithms and Programs for Digital Spectral Processing of Signals and Images*. Minsk, Navuka i tekhnika Publ., 1995. 407 p. (in Russian).

Информация об авторах

Крот Александр Михайлович – доктор технических наук, профессор, заведующий лабораторией моделирования самоорганизующихся систем, Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 6, 220012, Минск, Республика Беларусь). E-mail: alxkrot@newman.bas-net.by. <https://orcid.org/0000-0003-0705-010X>

Савиных Ирина Эдуардовна – магистрант, лаборатория моделирования самоорганизующихся систем, Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 6, 220012, Минск, Республика Беларусь). E-mail: rct.savinykh@gmail.com

Шапкин Александр Сергеевич – аспирант, лаборатория моделирования самоорганизующихся систем, Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 6, 220012, Минск, Республика Беларусь). E-mail: shap1kin2@gmail.com

Information about the authors

Alexander M. Krot – Dr. Sc. (Engineering), Professor, Head of the Laboratory of Self-Organization System Modeling, United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus (6, Surganov Str., 220012, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: alxkrot@newman.basnet.by. <https://orcid.org/0000-0003-0705-010X>

Irina E. Savinykh – Master Student, Laboratory of Self-Organization System Modeling, United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus (6, Surganov Str., 220012, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: rct.savinykh@gmail.com

Aliaksandr S. Shapkin – Postgraduate Student, Laboratory of Self-Organization System Modeling, United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus (6, Surganov Str., 220012, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: shap1kin2@gmail.com