УДК 517.968

Г. А. РАСОЛЬКО

К ПРИБЛИЖЕННОМУ РЕШЕНИЮ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА С МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ ЯДРОМ КОШИ МЕТОДОМ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Белорусский государственный университет

(Поступила в редакцию 06.06.2014)

1. В данной статье предлагаются алгоритмы приближенного решения сингулярного интегрального уравнения первого рода со специальной правой частью

$$\frac{1}{\pi^2}\iint_D \frac{\varphi(t,\tau)}{(t-x)(\tau-y)}dtd\tau = f(x,y)\ln\frac{1-x}{1+x}\ln\frac{1-y}{1+y}, \quad (x,y)\in D=(-1,1)\times(-1,1), \tag{1}$$

где $f(x,y)-$ заданная функция, непрерывная по Гельдеру в $\overline{D}$, $\varphi-$ искомая функция в двух классах функций.

Уравнение применяется в аэроупругости [1]. Решение указанного уравнения зависит от класса функций, в котором оно разыскивается [2, 3].

Уточним определения классов функций по Мусхелишвили.

Мы говорим, что функция $\varphi(x,y)\in h(-1)\times h(-1)$, если она в любой замкнутой области из *D*, не содержащей граничных точек, принадлежит классу Гельдера, а вблизи граничных точек представима в виде $\varphi(x,y)=(x-1)^{\alpha_1}(y-1)^{\alpha_2}\varphi_0(x,y)$, где $\varphi_0(x,y)\in H, -1<\alpha_1,\alpha_2\le 0$.

Функция $\varphi(x,y)\in h(1)\times h(1)$, если она в любой замкнутой области из *D*, не содержащей граничных точек, принадлежит классу Гельдера, а вблизи граничных точек представима в виде $\varphi(x,y)=(x+1)^{\alpha_1}(y+1)^{\alpha_2}\varphi_0(x,y)$, где $\varphi_0(x,y)\in H, -1<\alpha_1,\alpha_2\le 0$.

2. Пусть решение уравнения (1) разыскивается в классе функций $\varphi(x,y)\in h(-1)\times h(-1)$, тогда оно имеет вид [3]

$$\varphi(x,y)=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}\frac{1}{\pi^2}\iint_D f(t,\tau)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\sqrt{\frac{1-\tau}{1+\tau}}\ln\frac{1-t}{1+t}\ln\frac{1-\tau}{1+\tau}\frac{dtd\tau}{(t-x)(\tau-y)}. \tag{2}$$

Для построения приближенного решения уравнения (1) в заданном классе аппроксимируем функцию $f(x,y)$ интерполяционным многочленом $f_{n,m}(x,y)$, построенным по узлам – нулям многочлена Чебышева первого рода.

Приближенное решение $\varphi_{n,m}(x,y)$ уравнения (1) найдем как точное решение уравнения

$$\frac{1}{\pi^2}\iint_D \varphi_{n,m}(t,\tau)\frac{dtd\tau}{(t-x)(\tau-y)} = f_{n,m}(x,y)\ln\frac{1-x}{1+x}\ln\frac{1-y}{1+y}, \quad -1<x,y<1. \tag{3}$$

Выполним далее обращение уравнения в заданном классе и получим

$$\varphi_{n,m}(x,y)=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}\frac{1}{\pi^2}\iint_D f_{n,m}(t,\tau)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\sqrt{\frac{1-\tau}{1+\tau}}\ln\frac{1-t}{1+t}\ln\frac{1-\tau}{1+\tau}\frac{dtd\tau}{(t-x)(\tau-y)}. \tag{4}$$

При построении вычислительной схемы методом ортогональных многочленов будем использовать следующие квазиспектральные соотношения для сингулярного интеграла со степенно-логарифмической особенностью, полученные в [4, 5] для $x\in(-1,1)$ и $k\ge 0$:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\ln\frac{1-t}{1+t}U_k(t)\frac{dt}{t-x}=-\pi\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}U_k(x)+4U_{k-1}(x)-$$
$$-\sum_{j=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]}\sum_{m=0}^{j-1}\frac{8}{2m+1}U_{k-2j}(x)+\sum_{j=1}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}\left(\sum_{m=0}^{j}\frac{8}{2m+1}-\frac{4}{2j+1}\right)U_{k-1-2j}(x); \qquad (5)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\ln\frac{1-t}{1+t}T_k(t)\frac{dt}{t-x}=-\pi\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}T_k(x)+2U_{k-1}(x)-$$
$$-\sum_{j=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]}\frac{4}{2j-1}U_{k-2j}(x)+\sum_{j=1}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}\frac{8j}{4j^2-1}U_{k-1-2j}(x); \qquad (6)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\ln\frac{1-t}{1+t}T_k(t)\frac{dt}{t-x}=-\pi\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}T_k(x)+\sum_{j=0}^{\left[\frac{k-2}{2}\right]}{}^{0}\alpha_j T_{k-2-2j}(x)-$$
$$-\sum_{j=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}{}^{0}\beta_j T_{k-1-2j}(x),\ \ \alpha_j=\sum_{m=0}^{j}\frac{-8}{2m+1},\quad \beta_j=\alpha_j+\frac{4}{2j+1}; \qquad (7)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\ln\frac{1-t}{1+t}U_k(t)\frac{dt}{t-x}=-\pi\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}U_k(x)+\sum_{j=0}^{\left[\frac{k-2}{2}\right]}{}^{0}\delta_j T_{k-2-2j}(x)-$$
$$-\sum_{j=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}{}^{0}\gamma_j T_{k-1-2j}(x),\quad \delta_j=\sum_{m=0}^{j}\frac{-16(j+1-m)}{2m+1},\quad \gamma_0=-8,\gamma_j=(\delta_{j-1}+\delta_j)/2,\ j>0, \qquad (8)$$

где $T_k(x)$, $U_k(x)$ – многочлены Чебышева первого и второго рода соответственно,

$$\sum_{j=0}^{m}{}^{0}\rho_j T_{m-j}\equiv\rho_0T_m+\rho_1T_{m-1}+\dots+\rho_{m-1}T_1+\frac{1}{2}\rho_mT_0.$$

Для построения интерполяционного многочлена $f_{n,m}(x,y)$ введем обозначения:

$$x_k=\cos\frac{2k-1}{2n+2}\pi,\ k=1,2,\dots,n+1,\quad y_k=\cos\frac{2k-1}{2m+2}\pi,\ k=1,2,\dots,m+1,\quad \zeta_p=\begin{cases}1, & p=0,\\ 2, & p\ge 1.\end{cases}$$

Пусть [6]

$$f(x,y)\approx f_{n,m}(x,y)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}f^*_{i,j}T_i(x)T_j(y),\ \ f^*_{i,j}=\frac{1}{(n+1)(m+1)}\sum_{p=1}^{n+1}\zeta_iT_i(x_p)\sum_{r=1}^{m+1}\zeta_jT_j(y_r)f(x_p,y_r). \qquad (9)$$

Применяя в (4) свойство линейности интеграла и переходя от кратных интегралов к повторным, используя (7) и учитывая (9), из (4) получим равенство

$$\varphi_{n,m}(x,y)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left[-\pi T_i(x)+\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\left(\sum_{p=0}^{\left[\frac{i-2}{2}\right]}{}^{0}\alpha_pT_{i-2-2p}(x)-\sum_{p=0}^{\left[\frac{i-1}{2}\right]}{}^{0}\beta_pT_{i-1-2p}(x)\right)\right]\Bigg[-\pi T_j(y)+$$
$$+\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}\left(\sum_{p=0}^{\left[\frac{j-2}{2}\right]}{}^{0}\alpha_pT_{j-2-2p}(y)-\sum_{p=0}^{\left[\frac{j-1}{2}\right]}{}^{0}\beta_pT_{j-1-2p}(y)\right)\Bigg]f^*_{i,j},\ \ \alpha_p=\sum_{m=0}^{p}\frac{-8}{2m+1},\ \beta_p=\alpha_p+\frac{4}{2p+1}. \qquad (10)$$

Используя (6) и учитывая (9), из (4) получим другое равенство:

$$\varphi_{n,m}(x,y)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left[-\pi T_i(x)+\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\left(\sum_{p=0}^{\left[\frac{i-1}{2}\right]}\delta_p U_{i-1-2p}(x)+\sum_{p=1}^{\left[\frac{i}{2}\right]}\gamma_p U_{i-2p}(x)\right)\right]\times\left[\quad -\pi T_j(y)+\right.$$

$$\left.+\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}\left(\sum_{q=0}^{\left[\frac{j-1}{2}\right]}\delta_p U_{j-1-2p}(y)+\sum_{p=1}^{\left[\frac{j}{2}\right]}\gamma_p U_{j-2p}(y)\right)\right]f_{i,j}^{*},\quad \delta_p=\begin{cases}2, & p=0,\\ \dfrac{8p}{4p^2-1}, & p>0,\end{cases}\ \gamma_p=\frac{-4}{2p-1}. \tag{11}$$

Пусть далее

$$f(x,y)\approx f_{n,m}(x,y)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}f_{i,j}^{*}U_i(x)U_j(y),$$

$$\sigma_i=\begin{cases}1, & i=\overline{0,n-2},\\ 0, & i=n-1,n,\end{cases}\qquad \sigma_j=\begin{cases}1, & j=\overline{0,m-2},\\ 0, & j=m-1,m,\end{cases} \tag{12}$$

$$f_{i,j}^{*}=\frac{1}{(n+1)(m+1)}\sum_{p=1}^{n+1}(T_i(x_p)-\sigma_i T_{i+2}(x_p))\sum_{r=1}^{m+1}(T_j(y_r)-\sigma_j T_{j+2}(y_r))f(x_p,y_r).$$

По аналогии с (10), (11), используя (5) и учитывая (12), из (4) получим для $\varphi_{n,m}(x,y)$ равенство

$$\varphi_{n,m}(x,y)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left[-\pi U_i(x)+\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\left(\sum_{p=0}^{\left[\frac{i-2}{2}\right]}\alpha_p U_{i-2-2p}(x)-\sum_{p=0}^{\left[\frac{i-1}{2}\right]}\beta_p U_{i-1-2p}(x)\right)\right]\left[\quad -\pi U_j(y)+\right.$$

$$\left.+\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}\left(\sum_{p=0}^{\left[\frac{j-2}{2}\right]}\alpha_p U_{j-2-2p}(y)-\sum_{p=0}^{\left[\frac{j-1}{2}\right]}\beta_p U_{j-1-2p}(y)\right)\right]f_{i,j}^{*},\ \alpha_p=\sum_{m=0}^{p}\frac{-8}{2m+1},\ \beta_p=\alpha_p+\frac{4}{2p+1}. \tag{13}$$

Используя (8) и учитывая (12), из (4) получим решение уравнения в таком виде:

$$\varphi_{n,m}(x,y)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left[-\pi U_i(x)+\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\left(-\sum_{p=0}^{\left[\frac{i-1}{2}\right]}{}^{0}\gamma_p T_{i-1-2p}(x)+\sum_{p=0}^{\left[\frac{i-2}{2}\right]}{}^{0}\delta_p T_{i-2-2p}(x)\right)\right]\times$$

$$\times\left[-\pi U_j(y)+\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}\left(-\sum_{p=0}^{\left[\frac{j-1}{2}\right]}{}^{0}\gamma_p T_{j-1-2p}(y)+\sum_{p=0}^{\left[\frac{j-2}{2}\right]}{}^{0}\delta_p T_{j-2-2p}(y)\right)\right]f_{i,j}^{*}, \tag{14}$$

$$\delta_p=\sum_{m=0}^{p}\frac{-16(p+1-m)}{2m+1},\ p\ge 0,\quad \gamma_0=-8,\ \gamma_p=\frac{\delta_{p-1}+\delta_p}{2},\ p>0.$$

Приведем оценки погрешности приближенного решения эквивалентных вычислительных алгоритмов (10), (11) и (13), (14).

Мы говорим, что функция $f(x,y)\in W^r H^{\mu}, r\ge 0,$ если она по каждой переменной имеет производные до порядка r и r-я производная из класса $H(\mu), 0<\mu\le 1$.

На основании (2) и (4) с учетом оценки сингулярного интеграла со степенно-логарифмической особенностью, указанной в [7, 8], имеет место

Т е о р е м а 1. *Пусть функция* $f(x,y)$, *являющаяся правой частью уравнения* (1), *принадлежит классу* $W^r H^{\mu}$, $r\ge 0$, $0<\mu\le 1$. *Пусть далее* $f(x,y)$ *аппроксимируется интерполяционными* *многочленами* (9) *или* (12) *по узлам Чебышева первого рода,* $\varphi(x,y)$, $\varphi_{n,m}(x,y)$ *означают соответственно точное и приближенное решения уравнений* (1) *и* (3) *в классе функций* $h(-1)\times h(-1)$. *Тогда*

$$\sqrt{(1-x)(1-y)}\left\|\varphi(x,y)-\varphi_{n,m}(x,y)\right\|_{\infty}\le M_1\frac{\ln^4(k)}{k^{r+\mu}},\ x\in[-\delta,\delta]\subset(-1,1),\ y\in[-\gamma,\gamma]\subset(-1,1).$$

Здесь $k=\min(n,m)$, константа M_1 не зависит от k. Доказательство проводится по схеме работы [8].

3. Рассмотрим далее решение уравнения (1) в классе $\varphi(x,y)\in h(1)\times h(1)$.

Как и ранее, при построении вычислительных схем методом ортогональных многочленов будем использовать следующие квазиспектральные соотношения, полученные в [4, 5] для $x\in(-1,1)$ и $k\ge 0$:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\ln\frac{1-t}{1+t}U_k(t)\frac{dt}{t-x}=-\pi\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}U_k(x)-4U_{k-1}(x)-\\&-\sum_{j=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]}\sum_{m=0}^{j-1}\frac{8}{2m+1}U_{k-2j}(x)-\sum_{j=1}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}\left(\sum_{m=0}^{j}\frac{8}{2m+1}-\frac{4}{2j+1}\right)U_{k-1-2j}(x);\end{aligned}\tag{15}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\ln\frac{1-t}{1+t}T_k(t)\frac{dt}{t-x}=-\pi\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}T_k(x)-2U_{k-1}(x)-\\&-\sum_{j=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]}\frac{4}{2j-1}U_{k-2j}(x)-\sum_{j=1}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}\frac{8j}{4j^2-1}U_{k-1-2j}(x);\end{aligned}\tag{16}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\ln\frac{1-t}{1+t}T_k(t)\frac{dt}{t-x}=-\pi\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}T_k(x)+\sum_{j=0}^{\left[\frac{k-2}{2}\right]}{}^{0}\alpha_jT_{k-2-2j}(x)+\sum_{j=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}{}^{0}\beta_jT_{k-1-2j}(x),\\&\alpha_j=\sum_{m=0}^{j}\frac{-8}{2m+1},\ j\ge 0,\quad \beta_j=\alpha_j+\frac{4}{2j+1},\ j\ge 0;\end{aligned}\tag{17}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\ln\frac{1-t}{1+t}U_k(t)\frac{dt}{t-x}=-\pi\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}U_k(x)+\sum_{j=0}^{\left[\frac{k-2}{2}\right]}{}^{0}\delta_jT_{k-2-2j}(x)+\sum_{j=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}{}^{0}\gamma_jT_{k-1-2j}(x),\\&\delta_j=\sum_{m=0}^{j}\frac{-16(j+1-m)}{2m+1},\ j\ge 0,\quad \gamma_0=-8,\ \gamma_j=(\delta_{j-1}+\delta_j)/2,\ j>0.\end{aligned}\tag{18}$$

Решение уравнения (1) класса функций $\varphi(x,y)\in h(1)\times h(1)$ имеет вид

$$\varphi(x,y)=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\sqrt{\frac{1-y}{1+y}}\frac{1}{\pi^2}\iint_D f(t,\tau)\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}}\ln\frac{1-t}{1+t}\ln\frac{1-\tau}{1+\tau}\frac{dtd\tau}{(t-x)(\tau-y)}.\tag{19}$$

Приближенное решение $\varphi_{n,m}(x,y)$ найдем как точное решение уравнения

$$\frac{1}{\pi^2}\iint_D\varphi_{n,m}(t,\tau)\frac{dtd\tau}{(t-x)(\tau-y)}=f_{n,m}(x,y)\ln\frac{1-x}{1+x}\ln\frac{1-y}{1+y},\quad -1<x,y<1.\tag{20}$$

Выполним далее обращение уравнения (20) в заданном классе:

$$\varphi_{n,m}(x,y)=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\sqrt{\frac{1-y}{1+y}}\frac{1}{\pi^2}\iint_D f_{n,m}(t,\tau)\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}}\ln\frac{1-t}{1+t}\ln\frac{1-\tau}{1+\tau}\frac{dtd\tau}{(t-x)(\tau-y)}.\tag{21}$$

Аналогично предыдущему построим алгоритмы численного решения уравнения (1).

Пусть имеет место (9). Применяя в (21) свойство линейности интеграла и переходя от кратных интегралов к повторным, используя (17), из (21) получим равенство

$$\varphi_{n,m}(x,y)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left[-\pi T_i(x)+\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\left(\sum_{p=0}^{\left[\frac{i-2}{2}\right]}{}^{0}\alpha_p T_{i-2-2p}(x)+\sum_{p=0}^{\left[\frac{i-1}{2}\right]}{}^{0}\beta_p T_{i-1-2p}(x)\right)\right]\times$$

$$\times\left[-\pi T_j(y)+\sqrt{\frac{1-y}{1+y}}\left(\sum_{p=0}^{\left[\frac{j-2}{2}\right]}{}^{0}\alpha_p T_{j-2-2p}(y)+\sum_{p=0}^{\left[\frac{j-1}{2}\right]}{}^{0}\beta_p T_{j-1-2p}(y)\right)\right]f_{i,j}^{*}, \tag{22}$$

$$\alpha_p=\sum_{m=0}^{p}\frac{-8}{2m+1},\ p\ge 0,\ \beta_p=\alpha_p+\frac{4}{2p+1},\ p\ge 0.$$

По аналогии, используя (16) и учитывая (9), из (21) получим такое равенство:

$$\varphi_{n,m}(x,y)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left[-\pi T_i(x)+\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\left(\sum_{p=0}^{\left[\frac{i-1}{2}\right]}\delta_p U_{i-1-2p}(x)+\sum_{p=1}^{\left[\frac{i}{2}\right]}\gamma_p U_{i-2p}(x)\right)\right]\times$$

$$\times\left[-\pi T_j(y)+\sqrt{\frac{1-y}{1+y}}\left(\sum_{q=0}^{\left[\frac{j-1}{2}\right]}\delta_p U_{j-1-2p}(y)+\sum_{p=1}^{\left[\frac{j}{2}\right]}\gamma_p U_{j-2p}(y)\right)\right]f_{i,j}^{*},\ \delta_p=\begin{cases}-2, & p=0,\\ -\dfrac{8p}{4p^2-1}, & p>0,\end{cases} \tag{23}$$

$$\gamma_p=\frac{-4}{2p-1},\ p>0.$$

Используя же (15) и учитывая (12), из (21) получим для $\varphi_{n,m}(x,y)$ равенство

$$\varphi_{n,m}(x,y)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left[-\pi U_i(x)+\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\left(\sum_{p=0}^{\left[\frac{i-2}{2}\right]}\alpha_p U_{i-2-2p}(x)+\sum_{p=0}^{\left[\frac{i-1}{2}\right]}\beta_p U_{i-1-2p}(x)\right)\right]\times$$

$$\times\left[-\pi U_j(y)+\sqrt{\frac{1-y}{1+y}}\left(\sum_{p=0}^{\left[\frac{j-2}{2}\right]}\alpha_p U_{j-2-2p}(y)+\sum_{p=0}^{\left[\frac{j-1}{2}\right]}\beta_p U_{j-1-2p}(y)\right)\right]f_{i,j}^{*}, \tag{24}$$

$$\alpha_p=\sum_{m=0}^{p}\frac{-8}{2m+1},\ p\ge 0,\ \beta_p=\alpha_p+\frac{4}{2p+1},\ p\ge 0.$$

Используя (18) и учитывая (12), из (21) приходим к следующему виду решения уравнения:

$$\varphi_{n,m}(x,y)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left[-\pi U_i(x)+\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\left(\sum_{p=0}^{\left[\frac{i-1}{2}\right]}{}^{0}\gamma_p T_{i-1-2p}(x)+\sum_{p=0}^{\left[\frac{i-2}{2}\right]}{}^{0}\delta_p T_{i-2-2p}(x)\right)\right]\times$$

$$\times\left[-\pi U_j(y)+\sqrt{\frac{1-y}{1+y}}\left(\sum_{p=0}^{\left[\frac{j-1}{2}\right]}{}^{0}\gamma_p T_{j-1-2p}(y)+\sum_{p=0}^{\left[\frac{j-2}{2}\right]}{}^{0}\delta_p T_{j-2-2p}(y)\right)\right]f_{i,j}^{*}, \tag{25}$$

$$\delta_p=\sum_{m=0}^{p}\frac{-16(p+1-m)}{2m+1},\ p\ge 0,\quad \gamma_0=-8,\ \gamma_p=\frac{\delta_{p-1}+\delta_p}{2},\ p>0.$$

На основании (19) и (21) с учетом оценки сингулярного интеграла со степенно-логарифмической особенностью, указанной в [7, 8], имеет место

Т е о р е м а 2. *Пусть функция* $f(x,y)$, *являющаяся правой частью уравнения* (1), *принадлежит классу* $W^r H^\mu$, $r \geq 0$, $0 < \mu \leq 1$. *Пусть далее* $f(x,y)$ *аппроксимируется интерполяционными многочленами* (9) *или* (12) *по узлам Чебышева первого рода,* $\varphi(x,y)$, $\varphi_{n,m}(x,y)$ *– соответственно точное и приближенное решения уравнений* (1) и (20) *в классе функций* $h(1)\times h(1)$. *Тогда*

$$\sqrt{(1+x)(1+y)}\left\|\varphi(x,y)-\varphi_{n,m}(x,y)\right\|_\infty \leq M_2 \frac{\ln^4(k)}{k^{r+\mu}},\ x\in[-\delta,\delta]\subset(-1,1),\ y\in[-\gamma,\gamma]\subset(-1,1).$$

Литература

1. *Bisplinghof R. L., Ashley H., Halfman R. L.* Aeroelasticity. Mineola, 1996.
2. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М., 1968.
3. *Шешко М. А., Расолько Г. А.* // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25, № 5. С. 911–915.
4. *Расолько Г. А.* // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 2012. № 3. С. 27–31.
5. *Расолько Г. А.* // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 2013. № 3. С. 27–31.
6. *Пашковский С.* Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. М., 1983.
7. *Шешко М. А., Якименко Т. С.* // Изв. вузов. Математика. 1979. № 6. С. 82–84.
8. *Шешко М. А.* Сингулярные интегральные уравнения с ядром Коши и Гильберта и их приближенное решение. Люблин, 2003.

G. A. RASOLKO

APPROXIMATE SOLUTION OF AN INTEGRAL FIRST-KIND EQUATION WITH THE MULTIPLICATIVE CAUCHY KERNEL BY THE METHOD OF ORTHOGONAL POLYNOMIALS

Summary

Numerical methods for solving singular integral first-kind equations with a special form of the right-hand side are developed. The proposed schemes are based on the decomposition of singular integrals with power-logarithmic singularity in Chebyshev's polynomials of first and second kind. Accuracy estimates of the considered methods are presented.