

ВЕСЦІ

НАЦЫЯНАЛЬНАЯ АКАДЭМІЯ НАВУК БЕЛАРУСІ

СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК 2015 № 1

ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ

СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК 2015 № 1

ЗАСНАВАЛЬНІК – НАЦЫЯНАЛЬНАЯ АКАДЭМІЯ НАВУК БЕЛАРУСІ

Часопіс выдаецца са студзеня 1965 г.

Выходзіць чатыры разы ў год

ЗМЕСТ

Апанасевіч П. А., Кілін С. Я. Міжнародны год свят і аптычных тэхналогій 5

МАТЭМАТЫКА

Корзюк В. И., Козловская И. С., Наумовец С. Н. Классическое решение первой смешанной задачи одномерного волнового уравнения с условиями типа Коши 7

Васьковський М. М. Существование слабых решений стохастических дифференциальных уравнений с запаздыванием и стандартным и дробным броуновскими движениями 22

Белокурский М. С. Решение задачи Еругина о существовании нерегулярных решений линейной системы с нулевым средним периодического коэффициента 35

Крук Ю. С., Дудовская Ю. Е. Стационарное распределение вероятностей состояний замкнутой сети с неактивными заявками и многорежимными стратегиями обслуживания 43

Жук Е. Е. Статистическое отнесение реализаций стационарных временных рядов к классам, определенным в пространстве ковариационных функций 47

Каянович С. С. Разрешимость дифференциальной модели стержневого течения 52

Лещёв А. Е. К слабым условиям оптимальности второго порядка 60

Кулаженко Ю. И., Селькин М. В. О полуабелевости n -арных групп 68

ФІЗІКА

*К 60-летію Інстытута фізікі ім. Б. І. Степанова
Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі*

Овсюк Е. М., Веко О. В., Редьков В. М. О моделировании среды со свойствами идеального зеркала по отношению к свету и частицам со спином $1/2$	76
Кудряшов В. В., Баран А. В. Влияние спин-орбитальных взаимодействий Рашбы и Дрессельхауса на состоянии электрона в круговых квантовых кольцах	86
Буй А. А., Дашкевич В. И., Орлович В. А. Непрерывный диодно накачиваемый Nd:KGd(WO ₄) ₂ /КТР-лазер с внутрирезонаторным удвоением частоты	92
Солоневич С. В., Лепарский В. Е., Мащенко А. Г., Рыжевич А. А. Метод формирования перестраиваемой световой биллушки	99

ІНФАРМАТЫКА

*К 50-летію Аб'ядиначанага інстытута праблем інфарматыкі
Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі*

Середин Э. Н., Залесский Б. А. Фильтрация и корреляционная обработка изображений с помощью технологии CUDA	106
Прокопович Г. А. Адаптивная нейросетевая система управления автономным мобильным роботом на основе метода обучения с учителем в <i>online</i> режиме	117

КАРОТКІЯ ПАВЕДАМЛЕННІ

Гончаренко А. М. К теории солитонов в отрицательных средах	123
---	-----

ІЗВЕСТЫЯ НАЦЫЯНАЛЬНАЙ АКАДЕМІІ НАУК БЕЛАРУСІ 2015 № 1

Серія фізіка-матэматычных навук

На руском, беларуском і англійскім мовах

Журнал зарэгістраваны ў Міністэрстве інфармацыі Рэспублікі Беларусь,
свідцтва аб рэгістрацыі № 392 ад 18.05.2009

Камп'ютарная вёрстка *В. Л. Смольскай*

Здадзена ў набор 10.03.2015. Падпісана да друку 25.03.2015. Выхад у свет 30.03.2015. Фармат 60×84¹/₈. Папера афсетная.

Друк лічбавы. Ум. друк. арк. 14,88. Ул.-выд. арк. 16,4. Тыраж 70 экз. Заказ 50.

Кошт нумару: індывідуальная падпіска – 70 150 руб.; ведамасная падпіска – 169 991 руб.

Выдавец і паліграфічнае выкананне:

Рэспубліканскае ўнітарнае прадпрыемства «Выдавецкі дом «Беларуская навука». Пасведчанне аб дзяржаўнай
рэгістрацыі выдаўца, вытворцы, распаўсюджвальніка друкаваных выданняў № 1/18 ад 02.08.2013.

ЛП 02330/455 ад 30.12.2013. Вул. Ф. Скарыны, 40, 220141, г. Мінск.

© Выдавецкі дом «Беларуская навука».

Весці НАН Беларусі. Серія фізіка-матэматычных навук, 2015

PROCEEDINGS OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF BELARUS

PHYSIC AND MATHEMATICS SERIES 2015 N 1

FOUNDED IS THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF BELARUS

The Journal has been published since January 1965

Issued four times a year

CONTENTS

Apanasevich P. A., Kilin S. Ya. International Light and Optical Technology Year 5

MATHEMATICS

Korzyuk V. I., Kozlovskaya I. S., Naumavets S. N. Classical solution to the first mixed problem for the one-dimensional wave equation with the Cauchy-type conditions 7

Vaskouski M. M. Existence of weak solutions of stochastic delay differential equations driven by standard and fractional Brownian motions 22

Belokurski M. S. Solution of Erugin's problem on the existence of irregular solutions of the linear system with zero mean of periodic coefficient 35

Kruk J. S., Dudovskaya Yu. E. Stationary distribution of a closed queueing network with non-active customers and multimode service strategies 43

Zhuk E. E. Statistical assignment of realizations of the stationary time series to the classes determined in a space of covariance functions 47

Kayanovich S. S. Solvability of the differential model of pivotal flow 52

Leschov A. E. Weak second-order optimality conditions 60

Kulazhenko Yu. I., Selkin M. V. About semiabelian of n -ary groups 68

PHYSICS

*To the 60th Anniversary of the B. I. Stepanov Physics Institute
of the National Academy of Sciences of Belarus*

Ovsiyuk E. M., Veko O. V., Red'kov V. M. Modeling of a medium with the property of a perfect mirror for the light and spin 1/2 particles 76

Kudryashov V. V., Baran A. V. Influence of the Rashba and Dresselhaus spin-orbit interactions on the electron states in circular quantum rings 86

Bui A. A., Dashkevich U. I., Orlovich V. A. Continuous-wave diode-pumped Nd:KGdW/KTP laser with intra-cavity frequency doubling	92
Solonevich S. V. , Leparskii V. E., Mashchenko A. G., Ryzhevich A. A. Method for tunable light bitrap shaping	99

INFORMATICS

To the 50th Anniversary of the Joint Informatics Problem Institute of the National Academy of Sciences of Belarus

Seredin E. N., Zalesky B. A. Filtration and correlation processing of images by the CUDA technology	106
Prakapovich R. A. Adaptive neural network control system of an autonomous robotic vehicle based on online supervised learning	117

SHORT COMMUNICATIONS

Goncharenko A. M. To the theory of solitons in negative media	123
--	-----

МЕЖДУНАРОДНЫЙ ГОД СВЕТА И ОПТИЧЕСКИХ ТЕХНОЛОГИЙ

20 декабря 2013 г. Генеральная Ассамблея Организации Объединенных Наций объявила 2015 г. Международным годом света и оптических технологий (основанных на использовании света). Это решение было инициировано обращениями многих научных и общественных организаций разных стран и континентов, поддержанных Генеральным собранием Организации Объединенных Наций по вопросам образования, науки и культуры (ЮНЕСКО). 19–20 января 2015 г. в штаб-квартире ЮНЕСКО состоялась церемония открытия Международного года света и оптических технологий (МГСИОТ), на которой видные ученые и политики разных стран в своих выступлениях широко осветили роль света в жизни человека, вопросы истории науки о свете (оптики), состояние и перспективы развития оптических технологий.

Решение объявить Международным годом света и оптических технологий именно 2015-й объясняется тем, что он является юбилейным для целого ряда крупных событий, ставших вехами истории оптики. Так, 1000 лет тому назад выдающийся ученый того времени Ибн аль-Хайсам издал первую книгу по оптике; 400 лет тому назад – в 1615 г. была создана первая оптическая технология – прототип солнечного двигателя; 200 лет тому назад – в 1815 г. О. Ж. Френель опубликовал статью, в которой впервые развил волновую теорию света; 150 лет тому назад – в 1865 г. Дж. К. Максвелл убедительно обосновал электромагнитную природу света; 100 лет тому назад – в 1915 г. А. Эйнштейн развил общую теорию относительности, в которой свет играет исключительно важную роль в определении пространства и времени; и наконец 50 лет тому назад – в 1965 г. был открыт микроволновой фон Вселенной.

Этот перечень наиболее важных событий в истории развития оптики и оптических технологий, для которых текущий год является юбилейным, можно продолжить. Но наряду с этим все же следует признать, что основной мотивацией объявления 2015 г. Международным годом света и оптических технологий стало то, что свет имеет огромное значение в жизни человека. Прежде всего он является основным носителем информации об окружающем нас мире и важнейшим фактором, определяющим состояние и развитие этого мира. Свет – источник всего живого на Земле. Оптические технологии – мощнейший инструмент познания мира, включая космос, и воздействия на состояние и развитие различных процессов и объектов. Это и определяет важность привлечения к свету и оптическим технологиям повышенного внимания. В настоящее время существует мнение, что в XXI в. оптические технологии сыграют в развитии экономики и культуры не меньшую роль, чем электронные в XX в. Убедительным основанием для такого утверждения являются результаты и темпы развития оптических технологий во второй половине прошлого столетия, что связано с открытием лазеров и бурным развитием лазерной техники, позволяющей получать оптическое излучение с ранее недоступными параметрами.

В этой связи следует отметить, что создание лазеров является прямым следствием достижений оптической науки в XIX – первой половине XX в. Именно в этот период было убедительно доказано, что свет – это электромагнитные волны (иначе говоря, электромагнитное излучение), которые испускают движущиеся электрические заряды, распространяющиеся с предельно большой скоростью и несущие энергию, величина которой жестко связана с длиной волны. До создания лазеров светом называлось только электромагнитное излучение, воспринимаемое человеческим глазом, т. е. видимое излучение, которое заполняет очень узкий диапазон длин волн: от 0,75 мкм (красный

свет) до 0,4 мкм (фиолетовый свет). В настоящее время понятие «свет» (в частности, входящее и в название МГСнОТ) наряду с видимым излучением включает инфракрасное (диапазон длин волн от 0,75 до 100 мкм) и ультрафиолетовое (длины волн 0,4–0,01 мкм) излучение, т. е. всю область длин волн, в которой методы получения и управления параметрами излучения в основном совпадают с методами получения и управления параметрами видимого излучения.

Современная оптика – это интегрированная область науки, технологий и промышленности. Тенденции развития лазерной физики и современной оптики, часто называемой фотоникой, ставят перед учеными сложнейшие задачи перехода на новый уровень освоения уникальных возможностей света для освоения наномира, интеграции оптики с наноэлектроникой, генерации и управления одиночными фотонами, повышения точности всех оптических приборов и измерений: от космической целевой аппаратуры до диагностики клеток, субклеточных и молекулярных структур; развития технологического применения лазеров в различных областях человеческой деятельности.

В Беларуси исследования по оптике и развитие оптических технологий фактически были начаты и интенсивно проводятся в настоящее время в Институте физики НАН Беларуси, созданном в 1955 г. Оптический профиль этого института определило то, что его организаторами были крупные ученые Б. И. Степанов и А. Н. Севченко, работавшие до этого в Ленинграде в Государственном оптическом институте – головной оптической организации СССР. До этого в БССР в указанном направлении только доцент Белорусского государственного университета Ф. И. Фёдоров проводил теоретические исследования по оптике кристаллов. За истекший период были созданы и активно работают известные научные школы, связанные с оптическим направлением: оптики и лазерной физики (основатель Б. И. Степанов); молекулярной и атомной физики (основатели Н. А. Борисевич, А. Н. Севченко); физики плазмы (основатель М. А. Ельяшевич); теоретической физики (основатель Ф. И. Фёдоров); научная школа электроники и оптоэлектроники, возглавляемая академиком В. А. Пилиповичем. Результаты деятельности Института отмечены двумя Ленинскими премиями, семью Государственными премиями СССР, четырнадцатью Государственными премиями БССР и Республики Беларусь и другими престижными наградами.

В стране работают предприятия оптической и оптоэлектронной промышленности – ОАО «Пеленг», компании холдинга БелОМО (ММЗ им. С. И. Вавилова, НТЦ «ЛЭМТ», ОАО «Диапроектор»), Сморгонский завод оптического станкостроения, ОАО «Завод “Оптик”», УП «КБТЭМ-ОМО» концерна «Планар» и ряд других. Учреждения высшего образования страны – БГУ, БНТУ, Гомельский и Гродненский госуниверситеты готовят кадры по оптическим специальностям. Поэтому не случайно за республикой в научно-промышленной общественности закрепилось название «оптическая держава». В рамках празднования Международного года света и оптических технологий в стране намечен ряд мероприятий, среди которых важное место занимает очередной Съезд белорусских физиков.

2015 г. – не только Года света, но и юбилейный год для нашего журнала, которому исполнилось 50 лет. Его тематика значительно шире оптической, но этому направлению журнал уделяет много внимания, как в силу исторического развития оптической и лазерной тематики в структуре научных исследований в стране, так и учитывая их значение в развитии науки и технологий.

Открывая серию юбилейных номеров, редакция благодарит всех авторов статей, публиковавшихся в «Известиях Национальной академии наук Беларуси. Серия физико-математических наук», и приветствует новых, планирующих представить результаты своих исследований для публикации на страницах нашего журнала, который является ведущим изданием в нашей стране по вопросам математики, физики и информатики.

П. А. Апанасевич, С. Я. Килин

МАТЭМАТЫКА

УДК 517.956.3

В. И. КОРЗЮК^{1,2}, И. С. КОЗЛОВСКАЯ^{1,2}, С. Н. НАУМОВЕЦ^{2,3}КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПЕРВОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ
ОДНОМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С УСЛОВИЯМИ ТИПА КОШИ¹Институт математики НАН Беларуси²Белорусский государственный университет³Брестский государственный технический университет

(Поступила в редакцию 09.02.2015)

Введение. Решение смешанных задач методом характеристик имеет ряд преимуществ в сравнении с другими методами исследования. Так, для гиперболических уравнений он позволяет найти решения в аналитическом виде и расширить разновидность решаемых задач.

В данном случае, кроме традиционных условий Коши, для смешанных задач рассматриваются условия типа Коши, где присутствует производная второго порядка. С физической точки зрения это означает, что в начальный момент времени задаются не только значения и скорости точек, но и их ускорения. Близкими к настоящей работе можно назвать статьи [1–12], где строятся аналитические решения смешанных задач для гиперболических уравнений второго порядка с условиями Коши.

1. Постановка задачи. В замыкании $\bar{Q} = [0, \infty) \times [0, l]$ области $Q = (0, \infty) \times (0, l)$ двух независимых переменных $x = (x_0, x_1) \in \bar{Q} \subset \mathbb{R}^2$ рассмотрим одномерное волновое уравнение

$$Lu = \left(\partial_{x_0}^2 - a^2 \partial_{x_1}^2 \right) u(x) = f(x), \quad (x) \in \bar{Q}, \quad (1)$$

где a^2, l – положительные действительные числа, $\partial_{x_0}^2 = \partial^2 / \partial x_0^2$, $\partial_{x_1}^2 = \partial^2 / \partial x_1^2$ – частные производные по x_0 и x_1 второго порядка. К уравнению (1) на границе ∂Q области Q присоединяются условия типа Коши и граничные условия на боковых ее частях

$$u(0, x_1) = \varphi(x_1), \quad \left(\partial_{x_0}^2 u + \beta \partial_{x_0} u \right) (0, x_1) = \psi(x_1), \quad x_1 \in [0, l], \quad \beta \neq 0, \quad (2)$$

$$u(x_0, 0) = \mu^{(1)}(x_0), \quad u(x_0, l) = \mu^{(2)}(x_0), \quad x_0 \in [0, \infty). \quad (3)$$

Здесь $f: \bar{Q} \ni x \rightarrow f(x)$ – заданная функция на \bar{Q} , $\varphi: [0, l] \ni x_1 \rightarrow \varphi(x_1) \in \mathbb{R}$, $\psi: [0, l] \ni x_1 \rightarrow \psi(x_1) \in \mathbb{R}$ – функции на $[0, l]$, $\mu^{(j)}: [0, \infty) \ni x_0 \rightarrow \mu^{(j)}(x_0) \in \mathbb{R}$, – заданные функции на $[0, \infty)$, гладкость которых будет уточнена ниже, $j = 1, 2$.

Функции $f, \varphi, \psi, \mu^{(j)}, j = 1, 2$, удовлетворяют следующим неоднородным условиям согласования:

$$\begin{aligned} \mu^{(1)}(0) - \varphi(0) = \delta^{(1)}, \quad \frac{1}{\alpha\beta} \left[\psi(0) - a^2 \varphi''(0) - \beta \mu^{(1)'}(0) - f(0, 0) \right] = \delta^{(2)}, \\ \frac{1}{a^2} \left(\mu^{(1)''}(0) - a^2 \varphi''(0) - f(0, 0) \right) = \delta^{(3)}; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \mu^{(2)}(0) - \varphi(l) = \sigma^{(1)}, \quad \frac{1}{\alpha\beta} \left[\beta \mu^{(2)}(0) + a^2 \varphi''(l) - \psi(l) + f(0, l) \right] = \sigma^{(2)}, \\ \frac{1}{a^2} \left(\mu^{(2)''}(0) - a^2 \varphi''(l) - f(0, l) \right) = \sigma^{(3)}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\mu^{(j)'}$ и $\mu^{(j)''}$ – производные функции $\mu^{(j)}$ первого и второго порядков, $j = 1, 2$, φ'' – производная второго порядка функции φ .

Если в условиях согласования (4)–(5) все числа $\sigma^{(j)} = \delta^{(j)} = 0$, $j = 1, 2, 3$, то условия (4)–(5) в этом случае будем называть однородными условиями согласования относительно заданных функций задачи (1)–(3).

Отметим, что для достаточно гладких заданных функций уравнения (1) на множестве \bar{Q} и условий (2), (3) на отрезке $[0, l]$ и полупрямой $[0, \infty)$ существует единственное классическое решение этой задачи тогда и только тогда, когда условия согласования (4), (5) на эти функции являются однородными. В противном случае на определенных характеристиках в области Q решение u задачи (1)–(3) вместе с производными терпят разрывы. Эти разрывы можно записать в виде условий сопряжения, что и будет сделано.

Таким образом, в общем случае задачу (1)–(3) можно заменить на задачу (1)–(5) с условиями сопряжения на характеристиках, где скачки функций и ее производных выражаются через заданные действительные числа $\delta^{(j)}$ и $\sigma^{(j)}$, $j = 1, 2, 3$. Решение задачи (1)–(5) будет выписано в аналитическом виде через функции f , φ , ψ , $\mu^{(1)}$ и $\mu^{(2)}$ с помощью соответствующих формул.

2. Решение уравнения (1). Общее решение уравнения (1) представляет сумму общего решения $u^{(0)}$ однородного уравнения

$$\left(\partial_{x_0}^2 - a^2 \partial_{x_1}^2 \right) u^{(0)}(x) = 0, \quad x \in \bar{Q}, \quad (6)$$

и частного решения v неоднородного уравнения (1).

Действительно, пусть наряду с решением уравнения (1)

$$u(x) = u^{(0)}(x) + v(x) \quad (7)$$

имеется еще решение \tilde{u} этого уравнения. В силу линейности оператора L имеем $Lu = Lu^{(0)} + Lv = f = L\tilde{u}$. Отсюда

$$Lu - L\tilde{u} = L(u - \tilde{u}) = 0,$$

т. е. $\tilde{u}^{(0)} = u - \tilde{u}$ – решение уравнения (6). Следовательно, решение

$$\tilde{u} = u - \tilde{u}^{(0)} = u^{(0)} - \tilde{u}^{(0)} + v$$

представим в виде (7), так как $L(u^{(0)} - \tilde{u}^{(0)}) = 0$.

Частное решение v уравнения (1) находим через решение однородного уравнения (6) w с параметром $\tau \in [0, \infty)$ по формуле

$$v(x) = \int_0^{x_0} w(x_0 - \tau, \tau, x_1) d\tau. \quad (8)$$

Здесь функция $w: (x_0, \tau, x_1) \rightarrow w(x_0, \tau, x_1)$ – решение однородного уравнения

$$\partial_{x_0}^2 w(x_0, \tau, x_1) - a^2 \partial_{x_1}^2 w(x_0, \tau, x_1) = 0, \quad x_1 \in [0, l], \quad (9)$$

удовлетворяющего условиям Коши

$$w(0, \tau, x_1) = 0, \quad \partial_{x_0} w(0, \tau, x_1) = f(\tau, x_1), \quad x_1 \in [0, l], \tau \in [0, \infty), \quad (10)$$

где f – правая часть уравнения (1).

Как известно (см. [13, 14]), общее решение уравнения (9) есть сумма двух произвольных функций, а именно:

$$w(x_0, \tau, x_1) = G^{(1)}(x_1 - ax_0, \tau) + G^{(2)}(x_1 + ax_0, \tau). \quad (11)$$

Подставив выражение (11) в условия Коши (10), получим систему уравнений

$$\begin{aligned} G^{(1)}(x_1, \tau) + G^{(2)}(x_1, \tau) &= 0, \quad x_1 \in [0, l], \\ -a\partial_{x_1 - ax_0} G^{(1)}(x_1 - ax_0, \tau)(x_0 = 0) + a\partial_{x_1 + ax_0} G^{(2)}(x_1 + ax_0, \tau)(x_0 = 0) &= f(\tau, x_1), \end{aligned} \quad (12)$$

или

$$-a\partial_z G^{(1)}(z, \tau) + a\partial_z G^{(2)}(z, \tau) = f(\tau, z), \quad z \in [0, l]. \quad (13)$$

Интегрируя уравнение (13), имеем

$$-G^{(1,0)}(z, \tau) + G^{(2,0)}(z, \tau) = \frac{1}{a} \int_0^z f(\tau, \xi) d\xi + 2C(\tau), \quad (14)$$

где $C(\tau)$ – произвольная функция. Так как в итоге определяем функцию v через w по формуле (8) как частное решение уравнения (1), то полагаем $C(\tau) \equiv 0$. Из системы (12) и (13) определяем частично значения функций $G^{(j)}$, а именно:

$$G^{(j,0)}(z, \tau) = \frac{(-1)^j}{2a} \int_0^z f(\tau, \xi) d\xi, \quad z \in [0, l], \quad j = 1, 2. \quad (15)$$

По условию задачи $x \in \bar{Q}$. Для всех этих значений x области определения $D(x_1 - ax_0) = (-\infty, l]$, $D(x_1 + ax_0) = [0, \infty)$ при $a > 0$. Поэтому области определения $D(G^{(1)}) = (-\infty, l] \times [0, \infty)$, $D(G^{(2)}) = [0, \infty) \times [0, \infty)$, так как функция f определена на \bar{Q} . Функции $G^{(j,0)}$ ($j = 1, 2$) с помощью формул (15) определены только на отрезке $[0, l]$ относительно первого независимого переменного. В связи с этим введем обозначения

$$G^{(j)}(z, \tau) = \begin{cases} G^{(j,0)}(z, \tau), & z \in [0, l], \\ G^{(j,1)}(z, \tau), & z \in D(g^{(j)}) \setminus [0, l], \end{cases} \quad (16)$$

где $D(g^{(1)}) = (-\infty, l]$, $D(g^{(2)}) = [0, \infty)$. Чтобы функции $G^{(j)}$, определяемые формулами (16), принадлежали классу $C^2(D(g^{(j)}))$ относительно первого аргумента, очевидно должны выполняться условия согласования

$$\begin{aligned} \frac{\partial^p}{\partial z^p} G^{(1,0)}(z, \tau)|_{z=0} &= \frac{\partial^p}{\partial z^p} G^{(1,1)}(z, \tau)|_{z=0}, \\ \frac{\partial^p}{\partial z^p} G^{(2,0)}(z, \tau)|_{z=l} &= \frac{\partial^p}{\partial z^p} G^{(2,1)}(z, \tau)|_{z=l}, \quad p = 0, 1, 2. \end{aligned}$$

Таким образом, отсюда получаем, что функция $G^{(1,1)}$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} G^{(1,1)}(0, \tau) &= 0, \quad \frac{\partial G^{(1,1)}}{\partial z}(z, \tau)|_{z=0} = -\frac{1}{2a} f(\tau, 0), \\ \frac{\partial^2 G^{(1,1)}}{\partial z^2}(z, \tau)|_{z=0} &= -\frac{1}{2a} \frac{\partial}{\partial z} f(\tau, z)|_{z=0}, \end{aligned} \quad (17)$$

а функция $G^{(1,1)}$ – условиям

$$\begin{aligned} G^{(2,1)}(l, \tau) &= G^{(2,0)}(l, \tau) = \frac{1}{2a} \int_0^l f(\tau, y) dy, \\ \frac{\partial G^{(2,1)}}{\partial z}(z, \tau)|_{z=l} &= \frac{\partial G^{(2,0)}}{\partial z}(z, \tau)|_{z=l} = \frac{1}{2a} f(\tau, l), \\ \frac{\partial^2 G^{(2,1)}}{\partial z^2}(z, \tau)|_{z=l} &= \frac{1}{2a} \frac{\partial}{\partial z} f(\tau, z)|_{z=l}. \end{aligned} \quad (18)$$

Через функцию w , определяемую соотношениями (11)–(18), введем функцию $v: \bar{Q} \ni (x_0, x_1) \rightarrow v(x_0, x_1) \in \mathbb{R}$, значения которой вычисляются формулой (8), т. е.

$$v(x) = \int_0^{x_0} w(x_0 - \tau, \tau, x_1) d\tau = \int_0^{x_0} G^{(1)}(x_1 - a(x_0 - \tau), \tau) d\tau + \int_0^{x_0} G^{(2)}(x_1 + a(x_0 - \tau), \tau) d\tau. \quad (19)$$

Заметим, что функции $G^{(j,0)}$ на все области определения $D(G^{(j)})$ ($j=1,2$) можно продлить полиномами, а именно:

$$\begin{aligned} G^{(1,1)}(z, \tau) &= -\frac{1}{2a} f(\tau, 0)z - \frac{1}{4a} \frac{\partial}{\partial z} f(\tau, z)|_{z=0} \cdot z^2, \\ G^{(2,1)}(z, \tau) &= \frac{1}{2a} \int_0^l f(\tau, y) dy + \frac{1}{2a} f(\tau, l)(z-l) + \frac{1}{4a} \frac{\partial}{\partial z} f(\tau, z)|_{z=l} \cdot (z-l)^2. \end{aligned}$$

Л е м м а 1. Если функция f принадлежит классу $C^{0,1}(\bar{Q})$ и для $G^{(j)}$, $j=1,2$, выполняются условия (17), (18) (условия согласования), то функция v , определенная формулами (19), (11)–(18), принадлежит классу $C^2(\bar{Q})$, является решением уравнения (1) и удовлетворяет однородным условиям Коши

$$v(0, x_1) = \partial_{x_0} v(0, x_1) = 0. \quad (20)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функция v , определенная через w формулой (19), принадлежит классу $C^2(\bar{Q})$, если $f \in C^{0,1}(\bar{Q})$, что легко видеть из этого выражения и (15).

Подставляя в уравнение (1), убеждаемся, что v из (19) является его решением. Действительно, вычисляя производные, получим

$$\begin{aligned} \partial_{x_0} v(x) &= w(0, x_0, x_1) + \int_0^{x_0} \partial_{x_0 - \tau} w(x_0 - \tau, \tau, x_1) d\tau = \int_0^{x_0} \partial_{x_0 - \tau} w(x_0 - \tau, \tau, x_1) d\tau, \\ \partial_{x_0}^2 v(x) &= f(x) + \int_0^{x_0} \partial_{(x_0 - \tau)}^2 w(x_0 - \tau, \tau, x_1) d\tau, \\ \partial_{x_1} v(x) &= \int_0^{x_0} \partial_{x_1} w(x_0 - \tau, \tau, x_1) d\tau, \\ \partial_{x_1}^2 v(x) &= \int_0^{x_0} \partial_{x_1}^2 w(x_0 - \tau, \tau, x_1) d\tau. \end{aligned} \quad (21)$$

Подставляя полученные выражения производных функции v в уравнение (1), убеждаемся, что v является решением этого уравнения в силу (9).

Условия Коши (20) для функции v следуют из (19), первого условия из (10) и представления производной (21), если рассмотреть эти выражения при $x_0 = 0$.

3. Задача (1)–(5). Однородные условия согласования. Согласно предыдущим рассуждениям, общее решение уравнения (1) представимо в виде

$$\begin{aligned}
u(x) = u^{(0)}(x) + v(x) = g^{(1)}(x_1 - ax_0) + \int_0^{x_0} G^{(1)}(x_1 - ax_0 + a\tau, \tau) d\tau + \\
+ g^{(2)}(x_1 + ax_0) + \int_0^{x_0} G^{(2)}(x_1 + ax_0 - a\tau, \tau) d\tau, \quad x \in \bar{Q},
\end{aligned} \tag{22}$$

где функции $g^{(j)}$ из класса $C^2(D(g^{(j)}))$ с соответствующими областями определения $D(g^{(1)}) = (-\infty, l]$, $D(g^{(2)}) = [0, \infty)$, функции $G^{(j)}$ также из класса $C^2(D(g^{(j)}) \times [0, l])$, если $f \in C^{0,1}(\bar{Q})$.

Так как имеем частное решение v неоднородного уравнения (1), а общее решение u этого уравнения представимо в виде суммы (7), то дальнейшие исследования сводятся к решению однородного уравнения (6) относительно функции $u^{(0)}: \bar{Q} \ni x \rightarrow u^{(0)}(x) \in \mathbb{R}$. В силу (20) решение $u^{(0)}$ должно удовлетворять условиям типа Коши

$$\begin{aligned}
u^{(0)}(0, x_1) = \varphi(x_1), \\
(\partial_{x_0}^2 + \beta \partial_{x_0}) u^{(0)}(0, x_1) = (\partial_{x_0}^2 + \beta \partial_{x_0})(u - v)(0, x_1) = \psi(x_1) - f(0, x_1) = \tilde{\psi}(x_1), \quad x_1 \in [0, l],
\end{aligned} \tag{23}$$

и граничным условиям

$$\begin{aligned}
u^{(0)}(x_0, 0) = \mu^{(1)}(x_0) - v(x_0, 0) = \tilde{\mu}^{(1)}(x_0), \\
u^{(0)}(x_0, l) = \mu^{(2)}(x_0) - v(x_0, l) = \tilde{\mu}^{(2)}(x_0).
\end{aligned} \tag{24}$$

Согласно формулам (19) и (21), имеем соотношения

$$\begin{aligned}
\tilde{\mu}^{(1)}(0) = \mu^{(1)}(0), \quad \tilde{\mu}^{(1)'}(0) = \mu^{(1)'}(0), \quad \tilde{\mu}^{(1)''}(0) = \mu^{(1)''}(0) - f(0, 0), \\
\tilde{\mu}^{(2)}(0) = \mu^{(2)}(0), \quad \tilde{\mu}^{(2)'}(0) = \mu^{(2)'}(0), \quad \tilde{\mu}^{(2)''}(0) = \mu^{(2)''}(0) - f(0, l).
\end{aligned} \tag{25}$$

Из условия согласования (4) и (5) в силу (25) для заданных функций φ , $\tilde{\psi}$, $\tilde{\mu}^{(1)}$, $\tilde{\mu}^{(2)}$ из условий (23) и (24) следуют условия согласования

$$\tilde{\mu}^{(1)}(0) - \varphi(0) = \delta^{(1)}, \quad \frac{1}{\alpha\beta} [\tilde{\psi}(0) - a^2 \varphi''(0) - \beta \tilde{\mu}^{(1)'}(0)] = \delta^{(2)}, \tag{26}$$

$$\frac{1}{a^2} (\tilde{\mu}^{(1)''}(0) - a^2 \varphi''(0)) = \delta^{(3)};$$

$$\tilde{\mu}^{(2)}(0) - \varphi(l) = \sigma^{(1)}, \quad \frac{1}{\alpha\beta} [\beta \tilde{\mu}^{(2)'}(0) + a^2 \varphi''(l) - \tilde{\psi}(l)] = \sigma^{(2)}, \tag{27}$$

$$\frac{1}{a^2} (\tilde{\mu}^{(2)''}(0) - a^2 \varphi''(l)) = \sigma^{(3)}.$$

Таким образом, задача (1)–(5) свелась к смешанной задаче (6), (23), (24), (26), (27) для однородного уравнения относительно функции $u^{(0)}: \bar{Q} \ni x \rightarrow u^{(0)}(x) \in \mathbb{R}$.

Общее решение уравнения (6) представимо в виде суммы двух произвольно выбранных функций (см. [13, 14])

$$u^{(0)}(x) = g^{(1)}(x_1 - ax_0) + g^{(2)}(x_1 + ax_0), \tag{28}$$

где функции $g^{(j)}$ ($j=1, 2$) из класса $C^2(D(g^{(j)}))$.

Из условий (23) имеем систему

$$g^{(1)}(x_1) + g^{(2)}(x_1) = \varphi(x_1), \quad x_1 \in [0, l], \tag{29}$$

$$a^2 g^{(1)''}(x_1) + a^2 g^{(2)''}(x_1) - a\beta g^{(1)'}(x_1) + a\beta g^{(2)'}(x_1) = \tilde{\psi}(x_1), \quad x_1 \in [0, l]. \tag{30}$$

Решаем систему (29)–(30). Интегрируя уравнение (30), получим соотношение

$$g^{(1)'}(x_1) + g^{(2)'}(x_1) - \frac{\beta}{a} g^{(1)}(x_1) + \frac{\beta}{a} g^{(2)}(x_1) = \frac{1}{a^2} \int_0^{x_0} \tilde{\psi}(y) dy + 2C \frac{\beta}{a}. \quad (31)$$

Дифференцируя уравнение (29), получим, что

$$g^{(1)'}(x_1) + g^{(2)'}(x_1) = \varphi'(x_1). \quad (32)$$

Из уравнения (31) и (32) имеем соотношения

$$-g^{(1)}(x_1) + g^{(2)}(x_1) = \frac{1}{\beta a} \int_0^{x_0} \tilde{\psi}(y) dy - \frac{a}{\beta} \varphi'(x_1) + 2C. \quad (33)$$

Решая полученную алгебраическую систему (29) и (33), найдем значения $g^{(j)}(x_1)$, а именно:

$$g^{(j)}(z) = g^{(j,0)}(z) = \frac{1}{2} \varphi(z) - (-1)^j \frac{a}{2\beta} \varphi'(z) + (-1)^j \frac{1}{2a\beta} \int_0^z \tilde{\psi}(\xi) d\xi + (-1)^j C, \quad j=1,2, \quad (34)$$

для $z \in [0, l]$, где C – произвольная из множества \mathbb{R} постоянная, которая появилась в результате интегрирования уравнения (30).

Для других значений аргумента z значения функций $g^{(j)}$ определяются поэтапно, удовлетворяя решение (28) граничным условиям (24). Удовлетворяя первому из условий (24), получим уравнение

$$g^{(1)}(z) + g^{(2)}(-z) = \tilde{\mu}^{(1)}\left(-\frac{z}{a}\right),$$

или

$$g^{(1,1)}(z) = \tilde{\mu}^{(1)}\left(-\frac{z}{a}\right) - g^{(2,0)}(-z), \quad z \in [-l, 0], \quad (35)$$

так как функция $g^{(2)}$ уже определена по формуле (34) для $-z = ax_0 \in [0, l]$. Аналогично, удовлетворяя второму граничному условию из (24), получим соотношение

$$g^{(2,1)}(z) = \tilde{\mu}^{(2)}\left(\frac{z-l}{a}\right) - g^{(1,0)}(2l-z), \quad z \in [l, 2l]. \quad (36)$$

Продолжая этот процесс дальше, через предыдущие значения функции $g^{(j)}$ получим k -ю итерацию с помощью соотношений:

$$g^{(1,k)}(z) = \mu^{(1)}\left(-\frac{z}{a}\right) - g^{(2,k-1)}(-z), \quad z \in [-kl, -(k-1)l], \quad (37)$$

$$g^{(2,k)}(z) = \tilde{\mu}^{(2)}\left(\frac{z-l}{a}\right) - g^{(1,k-1)}(2l-z), \quad z \in [kl, (k+1)l], \quad (38)$$

где $k = 1, 2, 3, \dots$. Из формул (37)–(38) видно, что значения функций $g^{(j)}$, $j = 1, 2$, определены кусочно на соответствующих отрезках через значения заданных функций φ , $\tilde{\psi}$, $\tilde{\mu}^{(j)}$ ($j = 1, 2$), f . Поэтому, если потребовать достаточную гладкость этих функций, то и функции $g^{(j,k)}$ будут на указанных отрезках тоже гладкими, например из класса C^2 , $j = 1, 2$; $k = 0, 1, \dots$. Следовательно, и решение (22) задачи (1)–(3) тоже будет кусочно-гладким. Нам надо, чтобы функция (28) была из класса $C^2(\bar{Q})$ на всем множестве \bar{Q} , так как согласно лемме 1 $v \in C^2(\bar{Q})$, если $f \in C^{0,1}(\bar{Q})$. Для этого потребуем, чтобы функции (34)–(38) и их производные первого и второго порядков совпадали в общих точках соприкосновения.

Вычисляя производные функции $g^{(j,k)}$ ($j=1,2$; $k=1,2,3,\dots$), представленные формулами (37), (38), получим их выражения

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} g^{(1,k)}(z) &= -\frac{1}{a} \tilde{\mu}^{(1)'} \left(-\frac{z}{a} \right) + \frac{d}{d(-z)} g^{(2,k-1)}(-z), \\ \frac{d^2}{dz^2} g^{(1,k)}(z) &= \frac{1}{a^2} \tilde{\mu}^{(1)''} \left(-\frac{z}{a} \right) - \frac{d^2}{d(-z)^2} g^{(2,k-1)}(-z), \end{aligned} \quad (39)$$

$$z \in [-kl, -(k-1)l], \quad k=1,2,\dots,$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} g^{(2,k)}(z) &= \frac{1}{a} \tilde{\mu}^{(2)'} \left(\frac{z-l}{a} \right) + \frac{d}{d(2l-z)} g^{(1,k-1)}(2l-z), \\ \frac{d^2}{dz^2} g^{(2,k)}(z) &= \frac{1}{a^2} \tilde{\mu}^{(2)''} \left(\frac{z-l}{a} \right) - \frac{d^2}{d(2l-z)^2} g^{(1,k-1)}(2l-z), \end{aligned} \quad (40)$$

$$z \in [kl, (k+1)l], \quad k=1,2,\dots$$

Таким образом, чтобы функция $g^{(1)}$ принадлежала $C^2(-\infty, l]$, а $g^{(2)}$ – классу $C^2[0, \infty)$, кроме требований на гладкость заданных функций f , φ , $\tilde{\psi}$, $\tilde{\mu}^{(j)}$ ($j=1,2$) задачи (6), (23), (24), (26), (27) должны выполняться равенства

$$g^{(1,k+1)}(kl) = g^{(1,k)}(kl), \quad \frac{d}{dz} g^{(1,k+1)}(z)|_{z=kl} = \frac{d}{dz} g^{(1,k)}(z)|_{z=kl}, \quad (41)$$

$$\frac{d^2}{dz^2} g^{(1,k+1)}(z)|_{z=kl} = \frac{d^2}{dz^2} g^{(1,k)}(z)|_{z=kl}, \quad k=0, -1, -2, \dots;$$

$$g^{(2,k)}(kl) = g^{(2,k-1)}(kl), \quad \frac{d}{dz} g^{(2,k)}(z)|_{z=kl} = \frac{d}{dz} g^{(2,k-1)}(z)|_{z=kl}, \quad (42)$$

$$\frac{d^2}{dz^2} g^{(2,k)}(z)|_{z=kl} = \frac{d^2}{dz^2} g^{(2,k-1)}(z)|_{z=kl}, \quad k=1,2,3,\dots$$

Если проанализировать соотношения (34)–(42), то можно сделать следующее заключение, которое сформулируем в виде леммы.

Л е м м а 2. Равенства (41) и (42) выполняются тогда и только тогда, когда равенство (41) выполняется только для $k=0$, а (42) – для $k=1$. Кроме этого, равенства (41) и (42) для $k=0$ и $k=1$ выполняются тогда и только тогда, когда условия согласования (26) и (27) являются однородными.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из соотношений (35)–(38) с помощью математической индукции можно сделать заключение, что равенства (41), (42) выполняются все тогда и только тогда, когда некоторые из них справедливы для одного номера k , например, как сказано в лемме, для $k=0$, а вторые – для $k=1$.

А теперь проверим, при каких условиях совпадение значений функций и их производных из (37), (41) осуществляется для $k=0$. Для равенства (41) для $k=0$ запишем через значения заданных в условиях (23), (24) функций:

$$\begin{aligned} g^{(1,1)}(0) &= \tilde{\mu}^{(1)'}(0) - \frac{1}{2}\varphi(0) + \frac{a}{2\beta}\varphi'(0) - C = g^{(1,0)}(0) = \frac{1}{2}\varphi(0) + \frac{a}{2\beta}\varphi'(0) - C, \\ \frac{dg^{(1,1)}(z)}{dz} \Big|_{z=0} &= -\frac{1}{a} \tilde{\mu}^{(1)''}(0) + \frac{1}{2}\varphi'(0) - \frac{a}{2\beta}\varphi''(0) + \frac{1}{2a\beta}\tilde{\psi}(0) = \\ &= \frac{dg^{(1,0)}(z)}{dz} \Big|_{z=0} = \frac{1}{2}\varphi'(0) + \frac{a}{2\beta}\varphi''(0) - \frac{1}{2a\beta}\tilde{\psi}(0), \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2 g^{(1,1)}(z)}{dz^2} \Big|_{z=0} &= \frac{1}{a^2} \tilde{\mu}^{(1)''}(0) - \frac{1}{2} \varphi''(0) + \frac{a}{2\beta} \varphi'''(0) - \frac{1}{2a\beta} \tilde{\psi}'(0) = \\ &= \frac{d^2 g^{(1,0)}(z)}{dz^2} \Big|_{z=0} = \frac{1}{2} \varphi''(0) + \frac{a}{2\beta} \varphi'''(0) - \frac{1}{2a\beta} \tilde{\psi}'(0).\end{aligned}$$

Из равенства (43) и (25) видно, что равенства (41) для $k = 0$ выполняются тогда и только тогда, когда справедливы однородные условия согласования (26), т. е.

$$\begin{aligned}\mu^{(1)}(0) - \varphi(0) &= 0, \quad \psi(0) - a^2 \varphi''(0) - \beta \mu^{(1)'}(0) = 0, \\ \tilde{\mu}^{(1)''}(0) - a^2 \varphi''(0) - f(0,0) &= 0.\end{aligned}\tag{44}$$

А теперь выписываем равенства (42) для $k = 1$ через заданные функции

$$\begin{aligned}g^{(2,1)}(l) &= \tilde{\mu}^{(2)'}(0) - \frac{1}{2} \varphi(l) - \frac{a}{2\beta} \varphi'(l) + \frac{1}{2a\beta_0} \int_0^l \tilde{\psi}(\xi) d\xi + C = \\ &= g^{(2,0)}(l) = \frac{1}{2} \varphi(l) - \frac{a}{2\beta} \varphi'(l) + \frac{1}{2a\beta_0} \int_0^l \tilde{\psi}(\xi) d\xi + C, \\ \frac{dg^{(2,1)}(z)}{dz} \Big|_{z=l} &= \frac{1}{a} \tilde{\mu}^{(2)'}(0) + \frac{1}{2a} \varphi'(l) + \frac{a}{2\beta} \varphi''(l) - \frac{1}{2a\beta} \tilde{\psi}(l) = \\ &= \frac{dg^{(2,0)}(z)}{dz} \Big|_{z=l} = \frac{1}{2} \varphi'(l) - \frac{a}{2\beta} \varphi''(l) + \frac{1}{2a\beta} \tilde{\psi}(l), \\ \frac{d^2 g^{(2,1)}(z)}{dz^2} \Big|_{z=l} &= \frac{1}{a} \tilde{\mu}^{(2)''}(0) - \frac{1}{2} \varphi''(l) - \frac{a}{2\beta} \varphi'''(l) + \frac{1}{2a\beta} \tilde{\psi}'(l) = \\ &= \frac{d^2 g^{(2,0)}(z)}{dz^2} \Big|_{z=l} = \frac{1}{2} \varphi''(l) - \frac{a}{2\beta} \varphi'''(l) + \frac{1}{2a\beta} \tilde{\psi}'(l).\end{aligned}\tag{45}$$

Из равенств (45) и (25) видно, что равенства (42) для $k = 1$ выполняются тогда и только тогда, когда справедливы однородные условия согласования (27), т. е.

$$\begin{aligned}\mu^{(2)}(0) - \varphi(l) &= 0, \quad \psi(l) - a^2 \varphi''(l) - \beta \mu^{(2)'}(0) = 0, \\ \tilde{\mu}^{(2)''}(0) - a^2 \varphi''(l) - f(0,l) &= 0.\end{aligned}\tag{46}$$

Построенные функции $g^{(j,k)} : D(g^{(j,k)}) = \left\{ z \mid z \in \left[(-1)^j kl, (-1)^j kl + l \right] \right\} \ni z \rightarrow g^{(j,k)}(z)$ определяют функции $g^{(j)}$, где

$$g^{(j)}(z) = g^{(j,k)}(z), \quad z \in D(g^{(j,k)}(z)), \quad j = 1, 2, \quad k = 0, 1, 2, \dots\tag{47}$$

Л е м м а 3. Если функции $\varphi \in C^3[0, l]$, $\psi \in C^1[0, l]$, $\mu^{(j)} \in C^2[0, \infty)$, $j = 1, 2$, и выполняются однородные условия согласования (44), (46), то функции $g^{(j)}$, определяемые формулами (47), (34)–(38), имеют вид

$$g^{(j)}(z) = \tilde{g}^{(j)}(z) + (-1)^j C, \quad j = 1, 2,\tag{48}$$

где C – произвольная постоянная. Кроме этого, функции $\tilde{g}^{(j)}$ определяются единственным образом и $\tilde{g}^{(1)} \in C^2(-\infty, l]$, $\tilde{g}^{(2)} \in C^2[0, \infty)$.

Доказательство. В силу условий леммы и формул (34)–(38) следует, что функции $g^{(j,k)}$ принадлежат классам $C^2\left(D\left(g^{(j,k)}\right)\right)$, $j=1,2$, $k=0,1,2,\dots$. Из определения функций $g^{(j)}$ соотношениями (47) леммы 2, равенств (41), (42) и однородных условий согласования (44), (46) следует, что $g^{(1)} \in C^2(-\infty, l]$, $g^{(2)} \in C^2[0, \infty)$.

Далее, начиная с формул (34), функции $g^{(j,k)}$ для каждого $k=1,2,\dots$ определяются соотношениями (37), (38). С помощью математической индукции нетрудно показать, что

$$g^{(j,k)}(z) = \tilde{g}^{(j,k)}(z) + (-1)^j C, \quad (49)$$

где $\tilde{g}^{(j,k)}$ определяются единственным образом. Отсюда соотношения (49) и (47) доказывают и представление (48). Принадлежность функций $\tilde{g}^{(j)}$ классу дважды непрерывно дифференцируемых функций следует из равенств (41), (42) и однородных условий согласования (44), (46).

Т е о р е м а 1. Если функции $\varphi \in C^3[0, l]$, $\psi \in C^1[0, l]$, $f \in C^{0,1}(\bar{Q})$, $\mu^{(j)} \in C^2[0, \infty)$, $j=1,2$, то функция вида (48) является единственным классическим решением из класса $C^2(\bar{Q})$ задачи (6), (23), (24) тогда и только тогда, когда выполняются однородные условия согласования (44), (46), где функции $g^{(j)}$ ($j=1,2$) определяются соотношениями (34)–(38).

Доказательство теоремы 1 следует из предыдущих рассуждений и лемм 1–3.

4. Задача (1)–(5). Неоднородные условия согласования. Рассмотрим теперь задачу (1)–(5) в случае, когда условия (4), (5) являются неоднородными, т. е. однородные условия (44), (46) частично или полностью не выполняются.

Повторяя рассуждения п. 3, для данного случая согласно формулам (22), (8), (11), (28) решение задачи (1)–(5) представляется соотношением

$$\begin{aligned} u(x) &= u^{(0)}(x) + v(x) = g^{(1)}(x_1 - ax_0) + g^{(2)}(x_1 + ax_0) + v(x) = \\ &= F^{(1)}(x_1 - ax_0) + F^{(2)}(x_1 + ax_0), \end{aligned} \quad (50)$$

где

$$\begin{aligned} F^{(1)}(x_1 - ax_0) &= g^{(1)}(x_1 - ax_0) + \int_0^{x_0} G^{(1)}(x_1 - ax_0 + a\tau, \tau) d\tau, \\ F^{(2)}(x_1 + ax_0) &= g^{(2)}(x_1 + ax_0) + \int_0^{x_0} G^{(2)}(x_1 - ax_0 - a\tau, \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Здесь функции $G^{(j)}(z, \tau)$ и $g^{(j)}(z)$, $j=1,2$, определяются поэтапно, без изменений, формулами (15)–(18), (34)–(38).

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} F^{(1)}(z) &= g^{(1)}(z) + \int_0^{x_0} G^{(1)}(z + a\tau, \tau) d\tau, \quad z \in (-\infty, l], \\ F^{(2)}(z) &= g^{(2)}(z) + \int_0^{x_0} G^{(2)}(z - a\tau, \tau) d\tau, \quad z \in [0, \infty), \\ F^{(1,k)}(z) &= g^{(1,k)}(z) + \int_0^{x_0} G^{(1)}(z + a\tau, \tau) d\tau, \quad z \in (-kl, -(k-1)l], \quad k=0,1,\dots, \\ F^{(2,k)}(z) &= g^{(2,k)}(z) + \int_0^{x_0} G^{(2)}(z - a\tau, \tau) d\tau, \quad z \in [kl, (k+1)l], \quad k=0,1,\dots, \end{aligned}$$

где

$$F^{(j)}(z) = F^{(j,k)}(z), \quad z \in \left((-1)^j kl, l + (-1)^j kl\right), \quad k=0,1,\dots, \quad j=1,2.$$

Так как функция

$$v(x) = \int_0^{x_0} \left(G^{(1)}(x_1 - ax_0 + a\tau, \tau) + G^{(1)}(x_1 + ax_0 - a\tau, \tau) \right) d\tau$$

принадлежит классу $C^2(\bar{Q})$, если $f \in C^{0,1}(\bar{Q})$, то

$$\begin{aligned} \frac{d^p}{dz^p} F^{(1,k)}(z) - F^{1,k-1}(z)|_{z=l-kl} &= \frac{d^p}{dz^p} g^{(1,k)}(z) - g^{1,k-1}(z)|_{z=l-kl}, \quad k=1,2,\dots, p=0,1,2, \\ \frac{d^p}{dz^p} F^{(2,k)}(z) - F^{2,k-1}(z)|_{z=kl} &= \frac{d^p}{dz^p} g^{(2,k)}(z) - g^{2,k-1}(z)|_{z=kl}, \quad k=1,2,\dots, p=0,1,2. \end{aligned} \quad (51)$$

Если обратиться к формулам (34)–(38), то согласно равенствам (51) из этих формул получим соотношения через условия согласования (4), (5) вида:

$$\begin{aligned} F^{(1,1)}(0) - F^{(1,0)}(0) &= \mu^{(1)}(0) - \varphi(0) = \delta^{(1)}, \\ F^{(2,1)}(0) - F^{(2,0)}(0) &= \mu^{(2)}(0) - \varphi(l) = \sigma^{(1)}, \\ \frac{d}{dz} [F^{(1,1)}(z) - F^{(1,0)}(z)]|_{z=0} &= \frac{1}{a\beta} [\psi(0) - a^2\varphi''(0) - \beta\mu^{(1)'}(0) - f(0,0)] = \delta^{(2)}, \\ \frac{d}{dz} [F^{(2,1)}(z) - F^{(2,0)}(z)]|_{z=l} &= \frac{1}{a\beta} [\beta\mu^{(2)}(0) + a^2\varphi''(l) - \psi(l) + f(0,l)] = \sigma^{(2)}, \\ \frac{d^2}{dz^2} [F^{(1,1)}(z) - F^{(1,0)}(z)]|_{z=0} &= \frac{1}{a^2} [\mu^{(1)''}(0) - a^2\varphi''(0) - f(0,0)] = \delta^{(3)}, \\ \frac{d^2}{dz^2} [F^{(2,1)}(z) - F^{(2,0)}(z)]|_{z=l} &= \frac{1}{a^2} [\mu^{(2)''}(0) - a^2\varphi''(l) - f(0,l)] = \sigma^{(3)}. \end{aligned} \quad (52)$$

Далее, применяя метод математической индукции, в общем случае доказываются соотношения:

$$\frac{d^p}{dz^p} [F^{(1,k)}(z) - F^{(1,k-1)}(z)]|_{z=kl} = \begin{cases} \delta^{(p+1)}, & k=1,3,5,\dots, \\ (-1)^{p+1} \sigma^{(p+1)}, & k=2,4,6,\dots, \end{cases} \quad (53)$$

$$\frac{d^p}{dz^p} [F^{(2,k)}(z) - F^{(2,k-1)}(z)]|_{z=l-kl} = \begin{cases} \sigma^{(p+1)}, & k=1,3,5,\dots, \\ (-1)^{p+1} \delta^{(p+1)}, & k=2,4,6,\dots, \end{cases} \quad (54)$$

где $p=0,1,2$.

Таким образом, присутствие неоднородных условий согласования нарушает непрерывность функций $F^{(j)}$ или их производных, или всего вместе. Данное заключение можно сформулировать в виде следующего утверждения.

У т в е р ж д е н и е. Если для заданных функций f , φ , $\tilde{\psi}$, $\tilde{\mu}^{(j)}$ ($j=1,2$) не выполняются однородные условия согласования (44), (46), то какими бы гладкими эти функции не были, задача (1)–(3) не имеет классического решения, определенного на $\bar{Q} = [0, \infty) \times [0, l]$.

Пусть заданные функции уравнения (1), граничных условий (2), (3) являются достаточно гладкими и такими, как в теореме 1: $\varphi \in C^3[0, l]$, $\psi \in C^1[0, l]$, $f \in C^{0,1}(\bar{Q})$, $\mu^{(j)} \in C^2[0, \infty)$, $j=1,2$. При данных предположениях через заданные функции определяются $F^{(j)}$ ($j=1,2$). Так как условия согласования (52) являются неоднородными, то для $\delta^{(p+1)}$ и $\sigma^{(p+1)}$, $p=0,1,2$, не равных нулю частично или полностью, получим разрывными $F^{(j)}$ или их производные согласно выражениям (53)–(54).

Рассмотрим сначала согласно формуле (50) частично определенные решения

$$u^{(k,m)}(x) = F^{(1,k)}(x_1 - ax_0) + F^{(2,m)}(x_1 + ax_0) \quad (55)$$

для $(x) \in Q$, где $z = (x_1 - ax_0) \in (-kl, -(k-1)l)$, $\tilde{z} = (x_1 + ax_0) \in (ml, (m+1)l)$. Введем обозначения новых функций:

$$\begin{aligned} r^{(1,k)} : \mathbb{R}^2 \supset Q \supset D(r^{(1,k)}) \ni x \rightarrow r^{(1,k)}(x) &= F^{(1,k)}(x_1 - ax_0) \in \mathbb{R}, \\ r^{(2,m)} : \mathbb{R}^2 \supset Q \supset D(r^{(2,m)}) \ni x \rightarrow r^{(2,m)}(x) &= F^{(2,m)}(x_1 + ax_0) \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$u^{(k,m)}(x) = r^{(1,k)}(x) + r^{(2,m)}(x), \quad (56)$$

где область определения $D(u^{(k,m)})$ функции $u^{(k,m)}$ есть пересечение областей $D(r^{(1,k)})$ и $D(r^{(2,m)})$, т. е. $D(u^{(k,m)}) = D(r^{(1,k)}) \cap D(r^{(2,m)})$. Так как значения аргументов x находятся в пределах области Q , то для большинства индексов k и m $D(u^{(k,m)}) = \emptyset$, \emptyset – пустое множество. Нас интересуют такие функции, для которых $D(u^{(k,m)}) \neq \emptyset$, $k, m \in \{0, 1, \dots\}$.

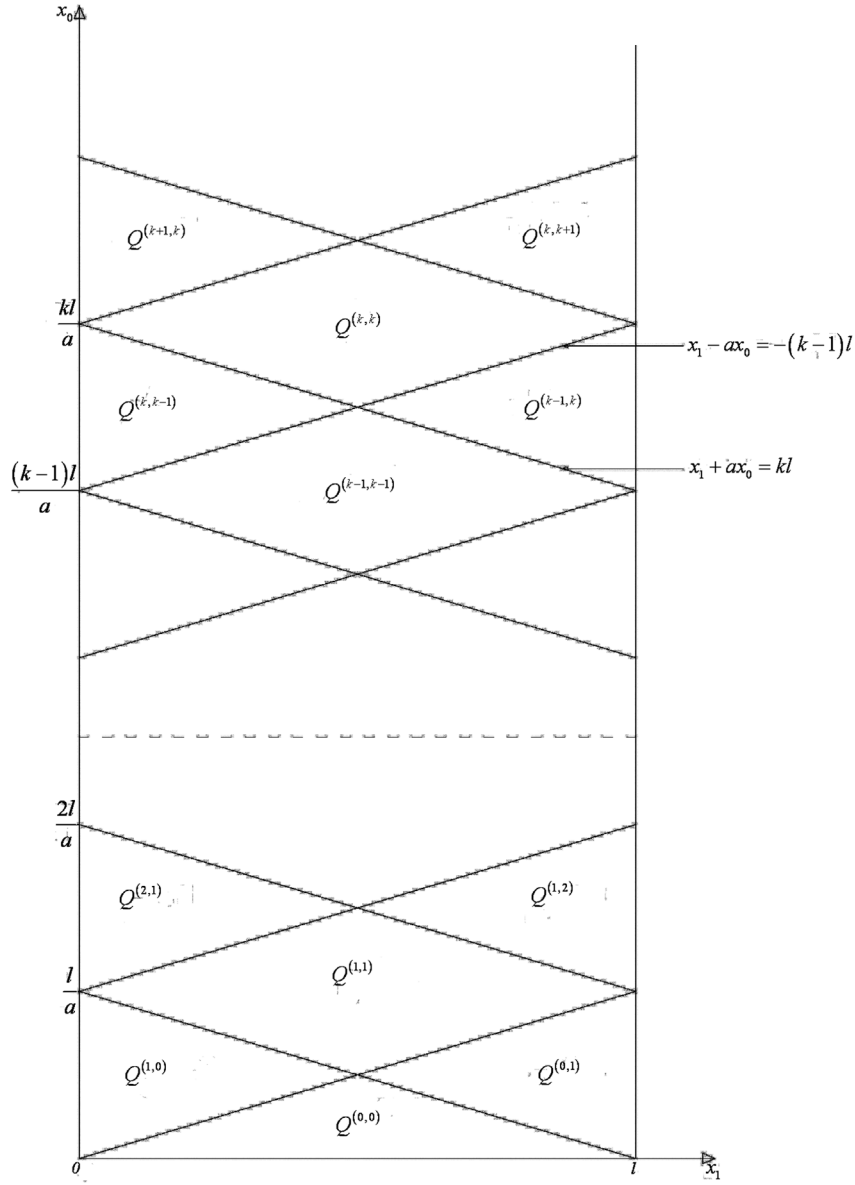
Если проанализировать области определения функций $F^{(j,k)}$, $j = 1, 2, k = 0, 1, 2, \dots$, то в (55) или (56) $D(u^{(k,m)}) = \emptyset$ при условии, что $|k - m| > 1$. Это означает следующее: $D(u^{(k,m)}) \neq \emptyset$ для $k = 1, 2, \dots$, если соответственно $m = k - 1, k, k + 1$, и $D(u^{(0,m)}) \neq \emptyset$, если $m = 0, 1$.

Обозначим через $Q^{(k,m)} = D(u^{(k,m)})$ подобласти области Q , $k = 0, 1, 2, \dots$, $m = k - 1, k, k + 1$, $Q^{(0,-1)} = \emptyset$. Заметим, что граничные точки $z = x_1 - ax_0 = -kl$, $z = x_1 - ax_0 = -(k-1)l$ функций $F^{(1,k)}$ определяют характеристики уравнения в области Q , $k = 1, 2, \dots$, одного семейства, а граничные точки $z = x_1 + ax_0 = ml$, $z = x_1 + ax_0 = (m+1)l$, $m = 1, 2, \dots$, в Q определяют характеристики другого семейства. Данные непересекающиеся подобласти $Q^{(k,m)}$ области Q в декартовой системе координат плоскости \mathbb{R}^2 переменных x_0, x_1 описываются соотношениями:

$$\begin{aligned} Q^{(0,-1)} &= \emptyset, \\ Q^{(0,0)} &= \left\{ x \in Q \mid x_1 \in \left(0, \frac{l}{2}\right], 0 < x_0 < \frac{x_1}{a} \right\} \cup \left\{ x \in Q \mid x_1 \in \left[\frac{l}{2}, l\right), 0 < x_0 < \frac{l - x_1}{a} \right\}, \\ Q^{(k,k-1)} &= \left\{ x \in Q \mid x_1 \in \left(0, \frac{l}{2}\right], \frac{x_1 + (k-1)l}{a} < x_0 < \frac{kl - x_1}{a} \right\}, \quad k = 1, 2, \dots, \\ Q^{(k-1,k)} &= \left\{ x \in Q \mid x_1 \in \left(\frac{l}{2}, l\right), \frac{kl - x_1}{a} < x_0 < \frac{x_1 + (k-1)l}{a} \right\}, \quad k = 1, 2, \dots, \\ Q^{(k,k)} &= \left\{ x \in Q \mid x_1 \in \left(0, \frac{l}{2}\right], \frac{kl - x_1}{a} < x_0 < \frac{x + kl}{a} \right\} \cup \\ &\cup \left\{ x \in Q \mid x_1 \in \left[\frac{l}{2}, l\right), \frac{x + (k-1)l}{a} < x_0 < \frac{(k+1)l - x_1}{a} \right\}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Для наглядности подобласти $Q^{(k,m)}$ представим на рисунке в декартовой системе переменных x_0, x_1 .

Обозначим через \tilde{Q} объединение $Q^{(k,m)}$, а именно: $\tilde{Q} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \bigcup_{m=k-1}^{k+1} Q^{(k,m)}$. Очевидно, что $\tilde{Q} \subset Q$.



Разбиение области Q на подобласти $Q^{(k,m)}$

Наряду с подобластями $Q^{(k,m)}$ области Q обозначим через $\mathfrak{M}^{(j,k)}$ интервалы характеристик уравнения (50), принадлежащие Q и проходящие через точки $\left(k \frac{l}{a}, 0\right)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $j = 1, 2$. Обозначения $\mathfrak{M}^{(j,k)}$ можно рассматривать как подмножества области Q и

$$\mathfrak{M}^{(j,k)} = \left\{ x \in Q \mid x = (-1)^{j-1} at + (k - 2 + j)l, x \in (0, l), k = 1, 2, \dots, j = 1, 2 \right\}.$$

Таким образом, $Q = \tilde{Q} \cup \left(\bigcup_{k=0}^{\infty} \bigcup_{j=1}^2 \mathfrak{M}^{(j,k)} \right)$, $\bar{Q} = \bar{\tilde{Q}}$.

Обозначим через \tilde{u} функцию, заданную на множестве \tilde{Q} следующим образом:

$$\tilde{u}(x) = u^{(k,m)}(x) = F^{(1,k)}(x_1 - ax_0) + F^{(2,m)}(x_1 + ax_0) = r^{(1,k)}(x) + r^{(2,m)}(x), \quad (57)$$

где $k = 0, 1, 2, \dots$, $m = k - 1, k, k + 1$, $u^{(2,-1)}(t, x) \equiv 0$.

Справедлива следующая

Т е о р е м а 2. Пусть функции $\varphi \in C^2[0, l]$, $\psi \in C^3[0, l]$, $f \in C^{0,1}(\bar{Q})$, $\mu^{(j)} \in C^2[0, \infty)$, $j=1, 2$, и $\sum_{p=1}^3 \left[\left(\delta^{(p)} \right)^2 + \left(\sigma^{(p)} \right)^2 \right] \neq 0$. Тогда функция \tilde{u} из класса $C^2(\tilde{Q})$ является единственным решением задачи (1)–(3) тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования (4), (5).

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2 следует из предыдущих рассуждений.

Множество характеристик $\mathfrak{M}^{(j,k)}$ разделим на два класса: $\mathfrak{M}(\sigma) = \left(\bigcup_{s=1}^{\infty} \mathfrak{M}^{(1,2s-1)} \right) \cup \left(\bigcup_{s=1}^{\infty} \mathfrak{M}^{(2,2s)} \right)$, $\mathfrak{M}(\delta) = \left(\bigcup_{s=1}^{\infty} \mathfrak{M}^{(1,2s)} \right) \cup \left(\bigcup_{s=1}^{\infty} \mathfrak{M}^{(2,2s-1)} \right)$.

С л е д с т в и е. Если $\delta^{(1)} \neq 0$ и $\sigma^{(1)} \neq 0$, то в силу соотношений (53), (54) функция \tilde{u} для каждого $k=1, 2, \dots$ и $j=1, 2$ на $\mathfrak{M}^{(j,k)}$ терпит разрыв при переходе через данный интервал характеристики $x_1 = (-1)^{j-1} a_0 + (k-2+j)l$. Кроме того, на множестве $\mathfrak{M}(\delta)$ для каждой ее точки разрыв равен одному и тому же числу $\delta^{(1)}$, а на $\mathfrak{M}(\sigma)$ разрыв равен $\sigma^{(1)}$. Производные первого порядка функции \tilde{u} на множествах $\mathfrak{M}(\delta)$ и $\mathfrak{M}(\sigma)$ терпят разрыв, равный $\delta^{(2)}$ и $\sigma^{(2)}$ соответственно. Аналогично, производные второго порядка решения \tilde{u} на этих множествах терпят разрывы, равные числам $\delta^{(3)}$ и $\sigma^{(3)}$ соответственно.

Т е о р е м а 3. Пусть функции $\varphi \in C^3[0, l]$, $\psi \in C^1[0, l]$, $f \in C^{0,1}(\bar{Q})$, $\mu^{(j)} \in C^2[0, \infty)$, $j=1, 2$, $\delta^{(1)} = \sigma^{(1)} = 0$. Тогда функция \tilde{u} из класса $C(\bar{Q}) \cap C^2(\tilde{Q})$ является единственным решением задачи (1)–(3) тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования (4), (5).

Д о к а з а т е л ь с т в о следует фактически из теоремы 2 и следствия. Действительно, если $\delta^{(1)} = \sigma^{(1)} = 0$, то решение \tilde{u} на множествах $\mathfrak{M}(\delta)$ и $\mathfrak{M}(\sigma)$ является непрерывным. Следовательно, кроме того, что решение $\tilde{u} \in C^2(\tilde{Q})$, оно является непрерывной функцией на замыкании \bar{Q} , $\tilde{u} \in C(\bar{Q})$.

Т е о р е м а 4. Пусть выполняются условия теорем 2, 3 и, кроме того, $\delta^{(2)} = \sigma^{(2)} = 0$. Тогда решение \tilde{u} задачи (1)–(3) принадлежит классу $C^1(\bar{Q}) \cap C^2(\tilde{Q})$ и является единственным тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования (4), (5).

Д о к а з а т е л ь с т в о легко следует из теорем 2, 3 и следствия, так как в этом случае \tilde{u} является непрерывным на $\mathfrak{M}(\delta) \cup \mathfrak{M}(\sigma)$, но в силу (51)–(52) имеет непрерывные производные первого порядка.

З а м е ч а н и е 1. Если $\delta^{(p)} = 0$, $p=1, 2, 3$, то решение \tilde{u} , определяемое формулой (57), задачи (1)–(3) может иметь разрывы вместе со своими производными первого и второго порядков только на $\mathfrak{M}(\sigma)$. В этом случае \tilde{u} принадлежит классу $C^2(\tilde{Q} \cup \mathfrak{M}(\delta))$. Можно сформулировать аналогичные теоремы, где в теоремах 2–4 следует $C^2(\tilde{Q})$ заменить на множество $C^2(\tilde{Q} \cup \mathfrak{M}(\delta))$.

Если $\sigma^{(p)} = 0$, $p=1, 2, 3$, то справедливо аналогичное замечание, где вместо $C^2(\tilde{Q} \cup \mathfrak{M}(\delta))$ в этом случае берется $C^2(\tilde{Q} \cup \mathfrak{M}(\sigma))$.

З а м е ч а н и е 2. Если заданные функции задачи (1)–(3) удовлетворяют неоднородным условиям согласования (4), (5), то решение задачи (1)–(3) сводится к решению соответствующей задачи сопряжения, где условия сопряжения задаются на характеристиках $x_1 - ax_0 = -(k-1)l$ и $x_1 + ax_0 = kl$, $k=1, 2, \dots$.

В качестве условий сопряжения могут быть следующие условия:

$$\left[\left(\frac{\partial^p u}{\partial x_1^p} \right)^+ - \left(\frac{\partial^p u}{\partial x_1^p} \right)^- \right] (x) \Big|_{x_1=ax_0} = \delta^{(p+1)}, \quad ax_0 \in [0, l],$$

$$\left[\left(\frac{\partial^p u}{\partial x_1^p} \right)^+ - \left(\frac{\partial^p u}{\partial x_1^p} \right)^- \right] (x) \Big|_{x_1 = ax_0 - (k-1)l} = \begin{cases} \delta^{(p+1)}, & k = 3, 5, \dots, \\ (-1)^{p+1} (k-1) \sigma^{(p+1)}, & k = 2, 4, 6, \dots, \end{cases} \quad (58)$$

$$ax_0 \in [kl, (k-1)l],$$

$$\left[\left(\frac{\partial^p u}{\partial x_1^p} \right)^+ - \left(\frac{\partial^p u}{\partial x_1^p} \right)^- \right] (x) \Big|_{x_1 = -ax_0 + kl} = \begin{cases} \sigma^{(p+1)}, & k = 1, 3, 5, \dots, \\ (-1)^{p+1} \delta^{(p+1)}, & k = 2, 4, 6, \dots, \end{cases} \quad (59)$$

$$ax_0 \in [kl, (k-1)l],$$

где числа $\delta^{(p+1)}$ и $\sigma^{(p+1)}$, $p = 0, 1, 2$, из условий согласования (52), (53), (54), $()^\pm$ – предельные значения функции u и ее производных $\frac{\partial u}{\partial x_1}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}$ с разных сторон на характеристиках $x_1 - ax_0 = -(k-1)l$ и $x_1 + ax_0 = kl$, т. е.

$$\left(\frac{\partial^p u}{\partial x_1^p} \right)^\pm (x) \Big|_{x_1 = ax_0 - (k-1)l} = \lim_{\Delta x_1 > 0, \Delta x_1 \rightarrow 0} \left(\frac{\partial^p u}{\partial x_1^p} \right) (x) \Big|_{x_1 \pm \Delta x_1 = ax_0 - (k-1)l},$$

$$\left(\frac{\partial^p u}{\partial x_1^p} \right)^\pm (x) \Big|_{x_1 = -ax_0 + kl} = \lim_{\Delta x_1 > 0, \Delta x_1 \rightarrow 0} \left(\frac{\partial^p u}{\partial x_1^p} \right) (x) \Big|_{x_1 \pm \Delta x_1 = -ax_0 + kl}.$$

Теперь задачу (1)–(3) можно сформулировать, используя условия сопряжения (58)–(59) следующим образом.

З а д а ч а. Найти классическое решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям типа Коши (2), граничным условиям (3), условиям сопряжения (58)–(59), в которых числа $\delta^{(j)}$ и $\sigma^{(j)}$, $j = 1, 2, 3$, из соотношений (4)–(5).

Заметим, что такая формулировка рассмотренной задачи с условиями сопряжения более приемлема для ее численной реализации.

Литература

1. Корзюк В. И., Чеб Е. С., Ширма М. С. // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2009. Т. 17, № 2. С. 23–34.
2. Корзюк В. И., Козловская И. С. // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2010. Т. 18, № 2. С. 22–35.
3. Корзюк В. И., Козловская И. С. // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2011. Т. 19, № 1. С. 62–70.
4. Korzyuk V. I., Erofeenko V. T., Sheyka J. V. // Mathematical Modeling and Analysis. 2012. Vol. 17, N 3. P. 309–329.
5. Korzyuk V. I., Kozlovskaya I. S., Kovnatskaya O. A. // Computer Algebra Systems in Teaching and Research. Differential Equations, Dynamical Systems and Celestial Mechanics, Eds.: L. Gdomski et al. Siedlce, Wydawnictwo Collegium Mazovia. 2011. P. 68–78.
6. Корзюк В. И., Козловская И. С., Шейко Ю. В. // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений: материалы 6-й Междунар. конф., посвящ. памяти проф. А. А. Килбаса. AMADE-2011. Минск, 2011. С. 97–108.
7. Корзюк В. И., Чеб Е. С., Карпечина А. А. // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2012. Т. 20, № 2. С. 64–74.
8. Корзюк В. И., Чеб Е. С., Карпечина А. А. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2013. № 1. С. 71–80.
9. Корзюк В. И., Чеб Е. С., Карпечина А. А. // Математическое моделирование и дифференциальные уравнения: тр. третьей междунар. науч. конф., Брест, 17–22 сент. 2012 г. Минск, 2012. С. 177–185.
10. Korzyuk V. I., Kozlovskaya I. S. // Computer Algebra Systems in Teaching and Research. Siedlce, 2013. Vol. 4, N 1. P. 53–65.
11. Корзюк В. И., Козловская И. С. // Докл. НАН Беларуси. 2013. Т. 57, № 5. С. 37–42.
12. Моисеев Е. И., Корзюк В. И., Козловская И. С. // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50, № 10. С. 1373–1385.
13. Корзюк В. И., Козловская И. С. // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48, № 5. С. 700–709.
14. Корзюк В. И., Козловская И. С. // Докл. НАН Беларуси. 2011. Т. 55, № 5. С. 9–13.

**CLASSICAL SOLUTION TO THE FIRST MIXED PROBLEM FOR THE ONE-DIMENSIONAL WAVE EQUATION
WITH THE CAUCHY-TYPE CONDITIONS**

Summary

This article considers the first mixed problem for the one-dimensional wave equation with the second-order Cauchy-type conditions.

The authors of the article prove that the usage of necessary and sufficient homogeneous matching conditions guarantees the classical solution in the middle of the plane between two parallel straight lines. The article gives the classical solution to the one-dimensional wave equation in analytical form if there are Dirichlet conditions at the side boundaries and Cauchy-type conditions at the plane bottom. By the classical solution is understood the function that is determined at all points of closing the defined domain. This function must have all classical derivatives included in the equation. In case of inhomogeneous matching conditions, the correct problem is formulated with the addition of the conjugation conditions.

УДК 517.911.5+519.216.2

М. М. ВАСЬКОВСКИЙ

**СУЩЕСТВОВАНИЕ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ
И СТАНДАРТНЫМ И ДРОБНЫМ БРОУНОВСКИМИ ДВИЖЕНИЯМИ**

Белорусский государственный университет

(Поступила в редакцию 20.02.2015)

Рассмотрим d -мерное стохастическое дифференциальное уравнение с запаздыванием

$$dX(t) = f(t, X(t), S_t X)dt + g(t, X(t), S_t X)dW(t) + b(t, X(t), T_t X)dB^H(t), t \in R_+, \quad (1)$$

где $W(t)$ – r_1 -мерное стандартное броуновское движение, $B^H(t)$ – r_2 -мерное дробное броуновское движение с показателем Херста $H \in (1/2, 1)$, $R_+ = [0, +\infty)$, $T_t X = (X(t - h_1), \dots, X(t - h_k)) \in R^{kd}$, $S_t X = (T_t X, \{X(t + \tau) \mid -h \leq \tau \leq 0\}) \in E$, $E = R^{kd} \times C([-h, 0], R^d)$, $h = h_1 > h_2 > \dots > h_{k-1} > h_k > 0$, $h > 0$ – время запаздывания, $k \geq 1$.

Первая теорема существования слабых решений уравнения (1) без дробного броуновского движения доказана К. Ито и М. Нисиро [1] в предположении, что функции f , g непрерывны и ограничены. Впервые теорема существования решений стохастических дифференциальных уравнений Ито без запаздывания с измеримыми правыми частями получена Н. В. Крыловым [2] при условии, что функции f , g измеримы и ограничены, матрица $\sigma = gg^T$ равномерно положительно определена. В дальнейшем в работах [3–7] условия теоремы Крылова были существенно ослаблены. В статьях [8–11] не налагаются дополнительные условия на матрицу σ , но при этом под слабым решением уравнения (1) понимается слабое решение стохастического дифференциального включения, соответствующего уравнению. В работе [12] доказана теорема существования слабых решений уравнения (1) без дробного броуновского движения с измеримыми по Борелю непрерывными по переменной запаздывания локально ограниченными отображениями f , g . В статьях [13–14] доказаны теоремы существования слабых решений уравнения (1) без запаздывания с измеримыми локально ограниченными коэффициентами f , g и вырожденным оператором диффузии σ . Цель настоящей работы заключается в доказательстве теорем существования слабых решений уравнения (1) с разрывными коэффициентами f , g и вырожденным оператором диффузии σ .

В статье используются следующие обозначения: P^x – закон распределения вероятностей случайной величины x , равенство $P^x = P^y$ означает совпадение законов распределений случайных величин x, y ; $E(x)$ – математическое ожидание случайной величины x ; $|X|$ – евклидова норма вектора $X = (x_1, \dots, x_d) \in R^d$; $\|\varphi\|_E = \|\varphi_1\| + \|\varphi_2\|_{C([-h, 0], R^d)}$, где $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in R^{kd} \times C([-h, 0], R^d)$; $\beta(S)$ – борелевская σ -алгебра на метрическом пространстве S ; μ – мера Лебега на R_+ ; п.н. – почти наверное; B_d^a – замкнутый шар в R^d с центром в нуле радиуса a ; \bar{R}_+ – метрическое пространство $[0, +\infty]$ с метрикой $d_{\bar{R}_+}(x, y) = |x/(1+x) - y/(1+y)|$; $a \wedge b = \min\{a, b\}$; $a \vee b = \max\{a, b\}$; $N_d = \{1, 2, \dots, d\}$; $\sigma_t(\xi)$ – наименьшая σ -алгебра, относительно которой измеримы все случайные величины $\xi(s)$, $0 \leq s \leq t$; $\mathcal{F}(\xi) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \sigma_{t+\varepsilon}(\xi)$ – поток σ -алгебр, порожденный случайным процессом $\xi(t)$; $\text{co}(A)$ – замыкание выпуклой оболочки множества A ; f^i – компонента с номером i векторной функции f ; g^{ij} – элемент матрицы g , находящийся на пересечении строки с номером i и столбца с номером j .

Матрица σ является симметрической неотрицательно определенной, поэтому существуют измеримые по Борелю ортогональная матрица Q и диагональная матрица $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d\}$, такие, что $\sigma = Q\Lambda Q^T$. Пусть $g^* = Q \text{diag}\{\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_d}\}$. Не нарушая общности, будем считать, что в уравнении (1) $g = g^*$. Действительно, существует измеримое по Борелю отображение $(t, X, \varphi) \rightarrow P(t, X, \varphi)$ со значениями в пространстве ортогональных $(d \times d)$ -матриц, что $g^* = gP$. Если $M(t) = \int_0^t g^*(\tau, X(\tau), S_\tau X) dW(\tau)$, то $M(t) = \int_0^t g(\tau, X(\tau), S_\tau X) d\tilde{W}(\tau)$, где $\tilde{W}(t) = \int_0^t P(\tau, X(\tau), S_\tau X) dW(\tau)$ является \mathcal{F}_t -согласованным броуновским движением.

Для любого $(t, X, \varphi) \in R_+ \times R^d \times E$ построим наименьшие выпуклые замкнутые множества $F(t, X, \varphi)$, $A(t, X, \varphi)$, содержащие соответственно точки $f(t, X, \varphi)$, $gg^T(t, X, \varphi)$ и все предельные точки $f(t, X', \varphi)$, $gg^T(t, X', \varphi)$ при $(X', \varphi') \rightarrow (X, \varphi)$.

Для произвольного множества индексов $\{\alpha_1, \dots, \alpha_l\} \subseteq N_d$, $\alpha_1 < \dots < \alpha_l$, определим множество $G(\alpha_1, \dots, \alpha_l)$ следующим образом. Выберем строки матрицы g с номерами $\alpha_1, \dots, \alpha_l$, пусть $\alpha_{l+1} < \dots < \alpha_d$ – номера оставшихся строк. Построим матрицу $\sigma_{\alpha_1, \dots, \alpha_l} = (g_{\alpha_i} g_{\alpha_j}^T)_{i, j=1}^l$, где g_{α_i} – строка с номером α_i матрицы g , а также построим множество $G_1(\alpha_1, \dots, \alpha_l)$, состоящее из всех точек $(t, x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_l})$, таких, что для любой открытой окрестности $U_{(t, x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_l})}$ точки $(t, x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_l})$ существует число $a > 0$, такое, что интеграл

$$\int_{U_{(t, x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_l})}(x_{\alpha_{l+1}}, \dots, x_{\alpha_d}, \varphi) \in D_2^a} \sup (\det \sigma_{\alpha_1, \dots, \alpha_l}(t, x_1, \dots, x_d, \varphi))^{-1} dt dx_{\alpha_1} \dots dx_{\alpha_l}$$

либо не определен, либо равен бесконечности, где $D_2^a = \{(x_{\alpha_{l+1}}, \dots, x_{\alpha_d}, \varphi) | (x_{\alpha_{l+1}}^2 + \dots + x_{\alpha_d}^2)^{1/2} + \|\varphi\| \leq a\}$, и множество $G_2(\alpha_1, \dots, \alpha_l)$, состоящее из всех точек $(t, x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_l})$, принадлежащих дополнению $G_1^c(\alpha_1, \dots, \alpha_l)$ множества $G_1(\alpha_1, \dots, \alpha_l)$, таких, что для любой открытой окрестности $U_{(t, x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_l})}$ точки $(t, x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_l})$ существует число $a > 0$, такое, что функция

$\sup_{(x_{\alpha_{l+1}}, \dots, x_{\alpha_d}, \varphi) \in D_2^a} (\det \sigma_{\alpha_1, \dots, \alpha_l}(t, x_1, \dots, x_d, \varphi))^{-1} : U_{(t, x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_l})} \rightarrow [0, \infty]$ не является измеримой по

Борелю (под дополнением множества $G_1(\alpha_1, \dots, \alpha_l)$ понимаем дополнение в пространстве переменных $(t, x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_l})$, а под открытой окрестностью – окрестность, открытую в пространстве тех же переменных $(t, x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_l})$). Положим $G(\alpha_1, \dots, \alpha_l) = G_1(\alpha_1, \dots, \alpha_l) \cup G_2(\alpha_1, \dots, \alpha_l)$.

З а м е ч а н и е. Если $\{\alpha_1, \dots, \alpha_l\} = \emptyset$, то полагаем $G_1(\alpha_1, \dots, \alpha_l) = G_2(\alpha_1, \dots, \alpha_l) = \emptyset$. Если $\{\alpha_1, \dots, \alpha_l\} = N_d$, то считаем, что

$$\sup_{(x_{\alpha_{l+1}}, \dots, x_{\alpha_d}, \varphi) \in D_2^a} (\det \sigma_{\alpha_1, \dots, \alpha_l}(t, x_1, \dots, x_d, \varphi))^{-1} = (\det \sigma_{\alpha_1, \dots, \alpha_l}(t, x_1, \dots, x_d))^{-1}.$$

О п р е д е л е н и е 1. Скалярная функция $z(t, x_1, \dots, x_d)$ удовлетворяет условию A , если существует множество индексов $\{\alpha_1, \dots, \alpha_l\} \subseteq N_d$, $\alpha_1 < \dots < \alpha_l$, такое, что:

1) функция z при каждом фиксированных $(t, x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_l})$ непрерывна по переменным $(x_{\alpha_{l+1}}, \dots, x_{\alpha_d}, \varphi)$, где $\{\alpha_{l+1}, \dots, \alpha_d\} = N_d \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$;

2) в пространстве переменных $(t, x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_l})$ существует замкнутое множество V , содержащее множество $G(\alpha_1, \dots, \alpha_l)$, такое, что множество

$$\{(t, x_1, \dots, x_d, \varphi) | (t, x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_l}) \in V\}$$

содержится во множестве точек непрерывности отображения z , а функция $\sigma_{\alpha_1, \dots, \alpha_l}$ непрерывна по переменным $(x_{\alpha_{l+1}}, \dots, x_{\alpha_d}, \varphi)$ при каждом фиксированных $(t, x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_l}) \in V^c$.

О п р е д е л е н и е 2. Функция $z(t, X, \varphi_1, \varphi_2)$, $t \in R_+$, $X \in R^d$, $\varphi_1 \in R^{kd}$, $\varphi_2 \in C([-h, 0], R^d)$, со значениями в $R^{d \times l}$, удовлетворяет условию B , если для любого $a > 0$ выполнено условие

$$\lim_{q \downarrow 0} \sup_{(t, X, \varphi_1, \varphi_2), (t, X, \varphi_1, \bar{\varphi}_2) \in \Gamma(0, a), |\varphi_2 - \bar{\varphi}_2| \leq q} |z(t, X, \varphi_1, \varphi_2) - z(t, X, \varphi_1, \bar{\varphi}_2)| = 0,$$

где $\Gamma(0, a) = \{(t, X, \varphi_1, \varphi_2) \in R_+ \times R^d \times R^{kd} \times C([-h, 0], R^d) \mid t + |X| + |\varphi_1| + \|\varphi_2\| \leq a\}$.

О п р е д е л е н и е 3. Функция $z: R_+ \times R^d \times E \rightarrow R^m$ называется *локально ограниченной*, если для любого натурального n существует постоянная C_n , такая, что $|z(t, X, \varphi)| \leq C_n$ для любых $(t, X, \varphi) \in [0, n] \times B_d^n \times E$, $\|\varphi\| \leq n$. Функция $z: R_+ \times R^d \times E \rightarrow R^m$ имеет *линейный порядок роста*, если существует постоянная C такая, что $|z(t, X, \varphi)| \leq C(1 + |X| + \|\varphi\|)$ для любых $(t, X, \varphi) \in R_+ \times R^d \times E$.

О п р е д е л е н и е 4. Функция $z: R_+ \times R^d \times R^{kd} \rightarrow R^m$ удовлетворяет (δ, ρ) -*локальному условию Гёльдера*, если для любого натурального n существует постоянная L_n , такая, что $|z(t, X, \varphi) - z(s, Y, \psi)| \leq L_n(|t - s|^\delta + |X - Y|^\rho + |\varphi - \psi|^\rho)$ для любых $(t, X, \varphi), (s, Y, \psi) \in [0, n] \times B_d^n \times B_{kd}^n$. Функция $z: R_+ \times R^d \times R^{kd} \rightarrow R^m$ удовлетворяет (δ, ρ) -*глобальному условию Гёльдера*, если постоянная L_n не зависит от n .

Для каждых $\alpha \in (0, 1/2)$, $a, b \in R$, $a < b$, определим пространство $\mathcal{H}_\alpha[a, b]$ измеримых функций $z: [a, b] \rightarrow R^d$ с нормой $\|z(\cdot)\|_{\mathcal{H}_\alpha[a, b]} := \sup_{t \in [a, b]} |z(t)|_\alpha < \infty$, где

$$|z(t)|_\alpha = |z(t)| + \int_a^t \frac{|z(t) - z(s)|}{(t-s)^{\alpha+1}} ds.$$

Для произвольных $\alpha \in (0, 1/2)$, $a, b \in R$, $a < b$, через $C^\alpha[a, b]$ обозначим пространство непрерывных по Гёльдеру с показателем α функций $z: [a, b] \rightarrow R^d$ с нормой

$$\|z\|_{C^\alpha[a, b]} = \sup_{t \in [a, b]} |z(t)| + \sup_{a \leq s < t \leq b} \frac{|z(t) - z(s)|}{(t-s)^\alpha}.$$

Пусть $C^{\alpha, p}$ ($\alpha \in (0, 1/2)$, $p \leq 0$) – метрическое пространство измеримых функций $z: [p, \infty) \rightarrow R^d$ с метрикой

$$d_{C^{\alpha, p}}(z_1, z_2) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} (\|z_1 - z_2\|_{C^\alpha[p, n]} \wedge 1).$$

Через $C_0^{\alpha, p}$, соответственно $C_0^\alpha[a, b]$, обозначим множество функций $z \in C^{\alpha, p}$, соответственно $z \in C^\alpha[a, b]$, удовлетворяющих условию

$$\lim_{q \rightarrow +0} \sup_{0 < |t-s| < q} \frac{|z(t) - z(s)|}{(t-s)^\alpha} = 0.$$

Отметим, что множество $C_0^{\alpha, p}$ с метрикой пространства $C^{\alpha, p}$ и множество $C_0^\alpha[a, b]$ с нормой пространства $C^\alpha[a, b]$ соответственно являются полным сепарабельным метрическим и сепарабельным банаховым пространствами.

О п р е д е л е н и е 5. Пусть заданы вероятностная мера ν на $(C^{1/2}[-h, 0], \beta(C^{1/2}[-h, 0]))$ и число $\eta \in (0, 1/2)$. Если существует процесс $X(t)$, $t \geq -h$, заданный на некотором вероятностном пространстве (Ω, \mathcal{F}, P) с потоком σ -алгебр $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, удовлетворяющий условиям:

1) процесс $X(t)$, $t \in [-h, 0]$, является \mathcal{F}_0 -измеримым и для любого $A \in \beta(C^{1/2}[-h, 0])$ выполняется равенство $P((X(t), t \in [-h, 0]) \in A) = \nu(A)$;

2) существует (\mathcal{F}_t) -момент остановки τ со значениями в $(0, +\infty]$ п.н., такой, что процесс $X(t)$, $t \in R_+$, является измеримым \mathcal{F}_t -согласованным, для почти всех $\omega \in \Omega$ траектории процесса $X(t)$

непрерывны по Гёльдеру с показателем η на любом отрезке из $[0, \tau)$, а также $\limsup_{t \rightarrow \tau-0} |X(t)| = \infty$ при $\tau < \infty$;

3) существуют стандартное \mathcal{F}_t -броуновское движение $W(t)$ и \mathcal{F}_0 -измеримое дробное броуновское движение $B^H(t)$;

4) существуют измеримые \mathcal{F}_t -согласованные процессы $v(t)$, $u(t)$, $t \in R_+$, такие, что $v(t, \omega) \in F(t, X(t, \omega), S_t X(\omega))$, $uu^T(t, \omega) \in A(t, X(t, \omega), S_t X(\omega))$ для $(\mu \times P)$ -почти всех $(t, \omega) \in [0, \tau) \times \Omega$;

5) для любого момента остановки σ , $0 \leq \sigma < \tau$, и любого $L \in R_+$ почти наверное выполняется условие

$$\int_0^{L \wedge \sigma} (|v(s)| + |u(s)|^2) ds + \|b(\cdot, X(\cdot), T_s X)\|_{\mathcal{H}_\eta[0, L \wedge \sigma]} < \infty;$$

6) с вероятностью 1 для всех $t \in [0, \tau)$ выполняется соотношение

$$X(t) = X(0) + \int_0^t v(s) ds + \int_0^t u(s) dW(s) + \int_0^t b(s, X(s), T_s X) dB^H(s),$$

то набор $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t, X, v, u, W, B^H, \tau)$ (или, короче, $X(t)$) называется β -слабым решением уравнения (1) с начальным распределением ν , имеющим непрерывные по Гёльдеру порядка η траектории (до момента взрыва τ). Если $v(t, \omega) = f(t, X(t, \omega), S_t X(\omega))$, $u(t, \omega) = g(t, X(t, \omega), S_t X(\omega))$ для $(\mu \times P)$ -почти всех $(t, \omega) \in [0, \tau) \times \Omega$, то β -слабое решение называется слабым решением.

В определении β -слабого решения интеграл по стандартному броуновскому движению – интеграл Ито, интеграл по дробному броуновскому движению – потраекторный интеграл Римана – Стильтеса.

Т е о р е м а 1. Пусть функции $f(t, X, \varphi)$, $g(t, X, \varphi)$ измеримы по Борелю и локально ограничены, функция $b(t, X, \varphi_1)$ удовлетворяет (δ, ρ) -локальному условию Гёльдера, где $\delta > 1 - H$, $\rho > 2 - 2H$. Тогда для любой заданной на $(C^{1/2}[-h, 0], \beta(C^{1/2}[-h, 0]))$ вероятностной меры ν и любого $\eta \in (0, 1/2)$ уравнение (1) имеет β -слабое решение с начальным распределением ν , непрерывными по Гёльдеру с показателем η траекториями и бесконечным моментом взрыва п.н.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем стандартное вероятностное пространство (Ω, \mathcal{F}, P) , где $\Omega = [0, 1)$, \mathcal{F} – σ -алгебра измеримых по Лебегу подмножеств множества Ω , P – мера Лебега на Ω . Определим на этом вероятностном пространстве случайный процесс $\xi(t)$, $t \in [-h, 0]$, с распределением ν , броуновское движение $W(t)$ и дробное броуновское движение $B^H(t)$ с индексом Херста H так, что броуновское движение $W(t)$ не зависит от случайного процесса $\xi(t)$ и дробного броуновского движения $B^H(t)$. Для каждого натурального n разобьем промежутки $[0, +\infty)$ точками $t_i^n = i/n$, $i \in \{0, 1, 2, \dots\}$, положим $k_n(t) = t_i^n$ при $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n)$ и определим процессы $X_n(t, \omega)$, $t \geq -h$, так, что $X_n(t, \omega) = \xi(t, \omega)$ при $t \in [-h, 0]$, а для любых $(t, \omega) \in [t_i^n, t_{i+1}^n) \times \Omega$, $i = 0, 1, 2, \dots$, справедливо равенство

$$X_n(t) = \xi(0) + \int_0^t f(s, X_n(k_n(s)), S_{k_n(s)} X_n) ds + \int_0^t g(s, X_n(k_n(s)), S_{k_n(s)} X_n) dW(s) + \int_0^t b(s, X_n(k_n(s)), T_{k_n(s)} X_n) dB^H(s).$$

Для каждого натурального n и l определим случайные величины

$$\tau_n^l = \inf \{t \in R_+ \mid |X_n(t)| > l\}$$

и случайные процессы

$$X_n^l(t) = X_n(t \wedge \tau_n^l).$$

Если $|X_n(t)| \leq l$ для всех $t \in R_+$, то мы полагаем $\tau_n^l = +\infty$.

Для каждого натурального l и любого $T \in R_+$ определим метрическое пространство $L_{1,l}^{\sigma,T}$ как замкнутый шар с центром в нуле радиуса C_l в пространстве $L_\infty([0, T], R^d)$ с метрикой, порождающей *-слабую топологию пространства $L_\infty([0, T], R^d)$, где C_l – постоянная из условия локальной ограниченности функции f . Через $L_{1,l}^{\sigma,\text{loc}}(R_+, R^d)$ обозначим метрическое пространство, состоящее из функций $h: R_+ \rightarrow R^d$, таких, что при каждом $T \in R_+$ функция $h(t)$, $t \in [0, T]$, принадлежит пространству $L_{1,l}^{\sigma,T}$. Аналогично определим метрическое пространство $L_{1,l}^{\sigma,\text{loc}}(R_+, R^{d \times d})$.

Для каждого натурального l и любого $\eta \in (0, 1/2)$ определим пространство

$$\mathcal{S}_\eta^l = C_0^{\eta, -h} \times L_{1,l}^{\sigma,\text{loc}}(R_+, R^d) \times L_{1,l}^{\sigma,\text{loc}}(R_+, R^{d \times d}) \times C_0^{\eta, 0} \times \bar{R}_+$$

с метрикой

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{S}_\eta^l, \varepsilon}((x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), ((y_1, y_2, y_3, y_4, y_5))) = \\ = d_{C_\eta}(x_1, y_1) + d_{L_{1,l}^{\sigma,\text{loc}}(R_+, R^d)}(x_2, y_2) + d_{L_{1,l}^{\sigma,\text{loc}}(R_+, R^{d \times d})}(x_3, y_3) + d_{C_\eta}(x_4, y_4) + d_{\bar{R}_+}(x_5, y_5). \end{aligned}$$

Для произвольного $\eta \in (0, 1/2)$ определим пространство $\mathcal{S}_\eta = \bigotimes_{l=1}^\infty \mathcal{S}_\eta^l$ с метрикой $d_{\mathcal{S}_\eta}((z_1^l)_{l=1}^\infty, (z_2^l)_{l=1}^\infty) = \sum_{l=1}^\infty 2^{-l} (d_{\mathcal{S}_\eta^l}(z_1^l, z_2^l) \wedge 1)$.

Пространства \mathcal{S}_η^l , \mathcal{S}_η являются полными сепарабельными метрическими. Пусть $v_n^l(s) = f(s, X_n^l(k_n(s)), S_{k_n(s)} X_n^l)$, $q_n^l(s) = g(s, X_n^l(k_n(s)), S_{k_n(s)} X_n^l)$, $r_n^l(s) = b(s, X_n^l(k_n(s)), T_{k_n(s)} X_n^l)$, $w_n^l = q_n^l(q_n^l)^\top$.

Из доказательства теоремы 1 [13] вытекает, что для каждого $\eta \in (0, 1/2)$ последовательность $\Psi_n = (X_n^l, v_n^l, w_n^l, B^H, \tau_n^l)_{l=1}^\infty$, $n \geq 1$, плотна в пространстве \mathcal{S}_η .

По теореме Прохорова [15, с. 16] для любого $\eta \in (0, 1/2)$ из последовательности P^{Ψ_n} , $n \in N$, можно выбрать подпоследовательность $P^{\Psi_{n_k}}$, слабо сходящуюся к некоторой вероятностной мере Θ при $k \rightarrow \infty$ (здесь и далее для упрощения обозначений вместо n_k будем снова писать n). Из доказательства теоремы Скорохода [15, с. 18] следует, что можно построить последовательность случайных величин $\bar{\Psi}_{n_k} = (\bar{X}_{n_k}^l, \bar{v}_{n_k}^l, \bar{w}_{n_k}^l, \bar{B}_{n_k}^H, \bar{\tau}_{n_k}^l)_{l=1}^\infty$, $k \in N$, и случайную величину $\bar{\Psi} = (\bar{X}^l, \bar{v}^l, \bar{w}^l, \bar{B}^H, \bar{\tau}^l)_{l=1}^\infty$ на некотором вероятностном пространстве $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \bar{P})$ со значениями в пространстве \mathcal{S}_η (здесь n_k – некоторая подпоследовательность последовательности натуральных чисел, в дальнейшем вместо n_k будем опять писать n) такие, что выполняются следующие условия:

- 1) $P^{\Psi_n} = P^{\bar{\Psi}_n}$ для любого $n \in N$; $P^{\bar{\Psi}} = \Theta$; $\bar{\Psi}_n \rightarrow \bar{\Psi}$ в \mathcal{S}_η п.н.;
- 2) $\bar{\tau}_n^l = \inf\{t \in R_+ \mid |X_n^l| \geq l\}$ для любых $l' \geq l$; $\bar{X}_n^l(t + \bar{\tau}_n^l) = \bar{X}_n^l(\bar{\tau}_n^l)$ для любых $t \in R_+$, если $\bar{\tau}_n^l < \infty$;
- 3) $\bar{X}^l(t) = \bar{X}^{l+1}(t)$, $\bar{v}^l(t) = \bar{v}^{l+1}(t)$, $\bar{w}^l(t) = \bar{w}^{l+1}(t)$ при $t \leq \bar{\tau}^l$; $|\bar{X}^l(\bar{\tau}^l)| = l$, если $0 < \bar{\tau}^l < \infty$; $\bar{\tau}^l \leq \bar{\tau}^{l+1}$ для любых натуральных l ;

4) процессы \bar{B}_n^H и \bar{B}^H являются дробными броуновскими движениями, измеримыми относительно σ -алгебр $\bar{\mathcal{F}}_{n,0}$ и $\bar{\mathcal{F}}_0$ соответственно, где $\bar{\mathcal{F}}_{n,t} = \mathcal{F}_t((\bar{X}_n^l, \bar{v}_n^l, \bar{w}_n^l, \bar{B}_n^H)_{l=1}^\infty)$ и $\bar{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_t((\bar{X}^l, \bar{v}^l, \bar{w}^l, \bar{B}^H)_{l=1}^\infty)$.

Пусть $\bar{\tau} = \lim_{l \rightarrow \infty} \bar{\tau}^l$, $\bar{X}(t) = \bar{X}^l(t)$, $\bar{v}(t) = \bar{v}^l(t)$, $\bar{w}(t) = \bar{w}^l(t)$ при $t < \bar{\tau}^l$; для $t \geq \bar{\tau}$ положим $\bar{X}(t) = 0$, $\bar{v}(t) = 0$, $\bar{w}(t) = 0$. Случайная величина $\bar{\tau}$ является $\bar{\mathcal{F}}_t$ -моментом остановки, процесс $\bar{X}(t)$ является $\bar{\mathcal{F}}_t$ -согласованным и имеет непрерывные по Гёльдеру порядка η траектории до момента $\bar{\tau}$, процесс $\bar{v}(t)$ имеет измеримые траектории. Кроме того, $\limsup_{t \rightarrow \bar{\tau}-0} |\bar{X}(t)| = \infty$ при условии $\bar{\tau} < \infty$. Процессы $\bar{v}(t)$, $\bar{w}(t)$ являются измеримыми $\bar{\mathcal{F}}_t$ -согласованными. Обозначим $\bar{r}_n^l(t) = \sigma(t, \bar{X}_n^l(k_n(t)), T_{k_n(t)} \bar{X}_n^l)$, $\bar{r}^l(t) = \sigma(t, \bar{X}^l(t), T_t \bar{X}^l)$.

Из полунепрерывности сверху по $(X, \varphi) \in R^d \times E$ многозначных функций $F(t, X, \varphi)$, $A(t, X, \varphi)$ следует, что для любого натурального l для $(\mu \times \bar{P})$ -почти всех $(t, \omega) \in R_+ \times \bar{\Omega}$ выполняются включения

$$\begin{aligned}\bar{v}^l(t, \omega) &\in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\text{co}} \bigcup_{k=n}^{\infty} \bar{v}_k^l(t, \omega) \subset F(t, \bar{X}^l(t, \omega), S_t \bar{X}^l(\cdot, \omega)), \\ \bar{w}^l(t, \omega) &\in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\text{co}} \bigcup_{k=n}^{\infty} \bar{w}_k^l(t, \omega) \subset A(t, \bar{X}^l(t, \omega), S_t \bar{X}^l(\cdot, \omega)).\end{aligned}$$

Следовательно, для $(\mu \times \bar{P})$ -почти всех $(t, \omega) \in [0, \bar{\tau}] \times \bar{\Omega}$ выполняются включения $\bar{v}(t) \in F(t, \bar{X}(t), S_t \bar{X})$, $\bar{w}(t) \in A(t, \bar{X}(t), S_t \bar{X})$.

Выберем произвольно: $l, L \in N$, $s, t \in R_+$, $s \leq t$; дважды непрерывно дифференцируемую функцию $h: R^d \rightarrow R$, ограниченную вместе с частными производными до второго порядка включительно; непрерывную ограниченную $(\beta_s(\mathcal{J}))$ -измеримую функцию $q: \mathcal{J} \rightarrow R$, где $\mathcal{J} = C_0^{\eta, -h} \times L_{1,L}^{\sigma, \text{loc}}(R_+, R^d) \times L_{1,L}^{\sigma, \text{loc}}(R_+, R^{d \times d}) \times C_0^{\eta, 0}$.

Из определения процессов $X_n^l(t)$ и соотношения $P^{\bar{\Psi}_n} = P^{\Psi_n}$ с помощью формулы Ито получаем равенство

$$\begin{aligned}E_n \left(\left(h(\bar{X}_n^l(t)) - h(\bar{X}_n^l(s)) - \sum_{i=1}^{r_2} \int_{s \wedge \bar{\tau}_n^l}^{t \wedge \bar{\tau}_n^l} \bar{r}_n^{l,i}(\tau) \frac{\partial h(\bar{X}_n^l(\tau))}{\partial x_i} d\bar{B}_n^{H,i} - \right. \right. \\ \left. \left. - \int_{s \wedge \bar{\tau}_n^l}^{t \wedge \bar{\tau}_n^l} \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \bar{w}_n^{l,ij} \frac{\partial^2 h(\bar{X}_n^l(\tau))}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^d \bar{v}_n^{l,i} \frac{\partial h(\bar{X}_n^l(\tau))}{\partial x_i} \right) d\tau \right) q(\bar{X}_n^L, \bar{v}_n^L, \bar{w}_n^L, \bar{B}_n^H) \right) = 0.\end{aligned}$$

Из сходимости $\bar{\Psi}_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \bar{\Psi}$ в \mathcal{S}_η п.н. и доказательства теоремы 1 [13] вытекает равенство

$$\begin{aligned}E \left(\left(h(\bar{X}^l(t)) - h(\bar{X}^l(s)) - \sum_{i=1}^{r_2} \int_{s \wedge \bar{\tau}^l}^{t \wedge \bar{\tau}^l} \bar{r}^{l,i}(\tau) \frac{\partial h(\bar{X}^l(\tau))}{\partial x_i} d\bar{B}^{H,i} - \right. \right. \\ \left. \left. - \int_{s \wedge \bar{\tau}^l}^{t \wedge \bar{\tau}^l} \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \bar{w}^{l,ij} \frac{\partial^2 h(\bar{X}^l(\tau))}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^d \bar{v}^{l,i} \frac{\partial h(\bar{X}^l(\tau))}{\partial x_i} \right) d\tau \right) q(\bar{X}^L, \bar{v}^L, \bar{w}^L, \bar{B}^H) \right) = 0.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что для любого натурального l процесс

$$\begin{aligned}h(\bar{X}^l(t)) - h(\bar{X}^l(s)) - \sum_{i=1}^{r_2} \int_{s \wedge \bar{\tau}^l}^{t \wedge \bar{\tau}^l} \bar{r}^{l,i}(\tau) \frac{\partial h(\bar{X}^l(\tau))}{\partial x_i} d\bar{B}^{H,i} - \\ - \int_{s \wedge \bar{\tau}^l}^{t \wedge \bar{\tau}^l} \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \bar{w}^{l,ij} \frac{\partial^2 h(\bar{X}^l(\tau))}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^d \bar{v}^{l,i} \frac{\partial h(\bar{X}^l(\tau))}{\partial x_i} \right) d\tau\end{aligned}$$

является $\bar{\mathcal{F}}_t$ -мартингалом.

Матрица $\bar{w}(t, \omega)$ является симметрической неотрицательно определенной, представим ее в виде $\bar{w}(t, \omega) = Q(t, \omega)D(t, \omega)Q^T(t, \omega)$, где $Q(t, \omega)$ – ортогональная матрица, $D(t, \omega)$ – диагональная матрица с неотрицательными элементами, при этом все компоненты матриц $Q(t, \omega)$, $D(t, \omega)$ являются измеримыми $\bar{\mathcal{F}}_t$ -согласованными процессами. Пусть $\bar{u}(t, \omega) = Q(t, \omega)\sqrt{D(t, \omega)}$, тогда для $(\mu \times \bar{P})$ -почти всех $(t, \omega) \in [0, \bar{\tau}] \times \bar{\Omega}$ выполняется включение $\bar{u}(t, \omega)\bar{u}^T(t, \omega) \in A(t, \bar{X}(t, \omega), S_t \bar{X}(\cdot, \omega))$.

Из предложения 1.38 работы [11] вытекает, что на расширении вероятностного пространства $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P})$ с потоком $\tilde{\mathcal{F}}_t$ вероятностного пространства $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \bar{P})$ с потоком $\bar{\mathcal{F}}_t$ можно определить $\tilde{\mathcal{F}}_t$ -броуновское движение $\tilde{W}(t)$ такое, что вероятностью 1 для всех $t \in [0, \tilde{\tau}]$ выполняется соотношение

$$\bar{X}(t) = \bar{X}(0) + \int_0^t \bar{v}(s) ds + \int_0^t \bar{u}(s) d\bar{W}(s) + \int_0^t \sigma(s, \bar{X}(s), T_s \bar{X}) d\bar{B}^H(s).$$

Таким образом, $\bar{X}(t)$ – слабое решение уравнения (1) с начальным распределением ν и непрерывными по Гельдеру с показателем η траекториями. Теорема доказана.

Из теоремы 1 и доказательства теоремы 2 из работы [13] вытекает следующее утверждение.

С л е д с т в и е. Пусть функции $f(t, X, \varphi)$, $g(t, X, \varphi)$ измеримы по Борелю, имеют линейный порядок роста и непрерывны по переменным (X, φ) при каждом $t \in R_+$, функция $b(t, X, \varphi_1)$ ограничена и удовлетворяет (δ, ρ) -глобальному условию Гельдера, где $\delta > 1 - H$, $\rho > 2 - 2H$. Тогда для любой заданной на $(C^{1/2}[-h, 0], \beta(C^{1/2}[-h, 0]))$ вероятностной меры ν и любого $\eta \in (0, 1/2)$ уравнение (1) имеет слабое решение с начальным распределением ν , непрерывными по Гельдеру с показателем η траекториями и бесконечным моментом взрыва п.н.

Пусть $g^{(1)}$, $b^{(1)}$ – $(l \times d)$ - и $(l \times r_2)$ -матрицы, составленные из первых l строк матриц g и b соответственно; $g^{(2)}$, $b^{(2)}$ – $((d-l) \times d)$ - и $((d-l) \times r_2)$ -матрицы, составленные из оставшихся строк матриц g и b соответственно; $f^{(1)}$ – вектор, состоящий из первых l компонент вектора f ; $f^{(2)}$ – вектор, составленный из оставшихся компонент вектора f ; $X = (x, y)$, $x \in R^l$, $y \in R^{d-l}$, $\sigma^{(1)} = g^{(1)} g^{(1)T}$, G_1 – множество всех точек $(t, x) \in R_+ \times R^l$, таких, что для любой открытой в $R_+ \times R^l$ окрестности $U_{(t,x)}$ точки (t, x) существует такое число $a > 0$, что интеграл

$$\int_{U_{(t,x)} \mid |y| + \|\varphi\| \leq a} \sup (\det \sigma^{(1)}(\tau, z, y, \varphi))^{-1} d\tau dz$$

либо не определен, либо равен бесконечности; G_2 – множество всех точек $(t, x) \in G_1^c$, таких, что для любой открытой в $R_+ \times R^l$ окрестности $U_{(t,x)}$ точки (t, x) существует число $a > 0$, такое, что функция $(\tau, z) \rightarrow \sup_{|y| + \|\varphi\| \leq a} (\det \sigma^{(1)}(\tau, z, y, \varphi))^{-1}$, $(\tau, z) \in U_{(t,x)}$, не является измеримой по Борелю; $G = G_1 \cup G_2$. Если $V \subseteq R_+ \times R^l$, то $V^c = (R_+ \times R^l) \setminus V$, $(V)_\gamma = \{(t, x) \in R_+ \times R^l \mid \inf_{(s,y) \in V} (|t-s| + |x-y|) \leq \gamma\}$, $(V)_\gamma^c = (R_+ \times R^l) \setminus (V)_\gamma$, $(V)_\gamma = \emptyset$, если $V = \emptyset$.

Запишем уравнение (1) в следующем виде:

$$\begin{cases} dx(t) = f^{(1)}(t, X(t), S_t X) dt + g^{(1)}(t, X(t), S_t X) dW(t) + b^{(1)}(t, X(t), T_t X) dB^H(t), \\ dy(t) = f^{(2)}(t, X(t), S_t X) dt + g^{(2)}(t, X(t), S_t X) dW(t) + b^{(2)}(t, X(t), T_t X) dB^H(t), \end{cases} \quad (2)$$

где $x(t) \in R^l$, $y(t) \in R^{d-l}$.

Используя рассуждения доказательства леммы 1 [14], приходим к следующему утверждению.

Л е м м а 1. Пусть функции $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, $g^{(1)}$, $g^{(2)}$ измеримы по Борелю и локально ограничены, функции $b^{(1)}$, $b^{(2)}$ удовлетворяют (δ, ρ) -локальному условию Гельдера, $\delta > 1 - H$, $\rho > 2 - 2H$; $X(t) = (x(t), y(t))$ – слабое решение системы (2), имеющее непрерывные по Гельдеру порядка $\eta \in [(1-H)/\rho, 1/2)$ траектории; $\psi(t, x, y)$ – неотрицательная измеримая по Борелю функция такая, что для любого $q > 0$ отображение $(t, x) \rightarrow \sup_{|y| + \|\varphi\| \leq q} \psi(t, x, y, \varphi)$ измеримо по Борелю. Тогда для любых $a > 0$, $T > 0$ выполняется неравенство

$$E \left(\int_0^{T \wedge \tau^a} (\det \sigma^{(1)}(\tau, X(\tau), S_\tau X))^{1/(l+1)} \psi(\tau, X(\tau), S_\tau X) d\tau \right) \leq c_1 \left(\int_{[0, T] \times B_l^a} \sup_{|y| + \|\varphi\| \leq a} \psi^{l+1}(s, x, y, \varphi) ds dx \right)^{c_2},$$

где $\tau^a = \inf \{t \in R_+ \mid \|X(t)\| > a\}$, положительные постоянные c_1 и c_2 зависят лишь от a, T, l, d .

Для любого натурального n определим функции $J_n(t, x) = n^{l+1} I_1(nt) I_2(nx)$, где $I_1(t) = \alpha_1 \exp\left(-\frac{1}{1-t^2}\right) 1_{(-1,1)}(t)$, $I_2(x) = \alpha_2 \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right) 1_{B_l^1}(x)$, постоянные α_1, α_2 выбраны так,

что $\int_R I_1(t) dt = \int_{B_l^1} I_2(x) dx = 1$.

Л е м м а 2. Пусть $f(t, x, y, \varphi)$ – вещественная измеримая по Борелю непрерывная по (y, φ) локально ограниченная функция, удовлетворяющая условию B , $f_n(t, x, y, \varphi) = f(t, x, y, \varphi) * J_n(t, x)$, $n \geq 1$. Тогда для любых $a \in R_+$, $T \in R_+$, $\gamma > 0$, $p \geq 1$ справедливо равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{([0, T] \times B_l^a) \cap (G)_\gamma^c} \sup_{|y| + \|\varphi\| \leq a} (\det \sigma^{(1)}(t, x, y, \varphi))^{-1} \times \sup_{|y| + \|\varphi\| \leq a} |f_n(t, x, y, \varphi) - f(t, x, y, \varphi)|^{p(l+1)} dt dx = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем произвольные $a \in R_+$, $T \in R_+$, $\gamma > 0$, $p \geq 1$. Пусть $\tilde{D} = ([0, T] \times B_l^a) \cap (G)_\gamma^c$. Для любых $m \in N$, $a \in R_+$ определим множество

$$Q_a^m = \{(y, \varphi_1, \varphi_2) \mid y \in B_{d-l}^a, \varphi_1 \in B_{kd}^a, \varphi_2 \in R^m[t], \|\varphi\|_2 \leq a\},$$

где $R^m[t]$ – множество многочленов с действительными коэффициентами степени не выше m , заданных на $[-h, 0]$. Из доказательства леммы 2 [6] вытекает, что для каждого фиксированного $m \in N$, $a \in R_+$, $T \in R_+$, $p \geq 1$, $\gamma > 0$ справедливо соотношение

$$\int_{\tilde{D}} \sup_{|y| + \|\varphi\| \leq a} (\det \sigma^{(1)}(t, x, y, \varphi))^{-1} \sup_{(y, \varphi) \in Q_a^m} |f_n(t, x, y, \varphi) - f(t, x, y, \varphi)|^{p(l+1)} dt dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (3)$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Согласно условию B и теореме Вейерштрасса существует $m_0 = m_0(\varepsilon)$, такое, что

$$\sup_{(t, x, y, \varphi), (t, x, y, \varphi') \in \mathcal{A}, |\varphi - \varphi'| \leq 1/m_0} |f(t, x, y, \varphi_1, \varphi_2) - f(t, x, y, \varphi_1, \varphi'_2)|^{p(l+1)} \leq \varepsilon^{p(l+1)}, \quad (4)$$

где $\mathcal{A} = [0, a+1] \times B_l^{a+1} \times \mathcal{B}$, $\mathcal{B} = \{(y, \varphi) \in B_{d-l}^a \times E \mid |y| + \|\varphi\| \leq a\}$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$, $\varphi' = (\varphi_1, \varphi'_2)$, $\varphi'_2 \in R^{m_0}[t]$.

Используя соотношение (4), приходим к неравенствам

$$\int_{\tilde{D}} \sup_{|y| + \|\varphi\| \leq a} (\det \sigma^{(1)}(t, x, y, \varphi))^{-1} \times \sup_{(y, \varphi), (y, \varphi') \in \mathcal{B}, |\varphi - \varphi'| \leq 1/m_0} |f(t, x, y, \varphi_1, \varphi_2) - f(t, x, y, \varphi_1, \varphi_2')|^{p(l+1)} dt dx \leq C_1 \varepsilon^{p(l+1)}, \quad (5)$$

$$\int_{\tilde{D}} \sup_{|y| + \|\varphi\| \leq a} (\det \sigma^{(1)}(t, x, y, \varphi))^{-1} \times \sup_{(y, \varphi), (y, \varphi') \in \mathcal{B}, |\varphi - \varphi'| \leq 1/m_0} |f_n(t, x, y, \varphi_1, \varphi_2) - f_n(t, x, y, \varphi_1, \varphi_2')|^{p(l+1)} dt dx \leq C_1 \varepsilon^{p(l+1)}, \quad (6)$$

где C_1, C_2 – универсальные постоянные.

Из соотношения (3) вытекает существование числа $n_0 = n_0(\varepsilon, m_0)$, такого, что неравенство

$$\int_{\tilde{D}} \sup_{|y| + \|\varphi\| \leq a} (\det \sigma^{(1)}(t, x, y, \varphi))^{-1} \times \sup_{(y, \varphi') \in Q_a^{m_0}} |f_n(t, x, y, \varphi_1, \varphi_2') - f(t, x, y, \varphi_1, \varphi_2)|^{p(l+1)} dt dx \leq \varepsilon^{p(l+1)} \quad (7)$$

справедливо для всех $n \geq n_0$.

Используя неравенства (5)–(7), заключаем, что справедливо соотношение

$$\int_{\tilde{D}} \sup_{|y| + \|\varphi\| \leq a} (\det \sigma^{(1)}(t, x, y, \varphi))^{-1} \sup_{|y| + \|\varphi\| \leq a} |f_n(t, x, y, \varphi) - f(t, x, y, \varphi)|^{p(l+1)} dt dx \leq (C_1 + C_2 + 1) \varepsilon^{p(l+1)}$$

для всех $n \geq n_0(\varepsilon, m_0)$. Лемма доказана.

Л е м м а 3. Пусть функции $f(t, X, \varphi)$, $g(t, X, \varphi)$ измеримы по Борелю, ограничены и удовлетворяют условию B , функция $b(t, X, \varphi_1)$ ограничена и удовлетворяет (δ, ρ) -локальному условию Гельдера, $\delta > 1 - H$, $\rho > 2 - 2H$, существует постоянная $\lambda > 0$, такая, что $\det \sigma(t, X, \varphi) \geq \lambda$ для всех $t \in R_+$, $X \in R^d$, $\varphi \in E$. Тогда для любой заданной на $(C^{1/2}[-h, 0], \beta(C^{1/2}[-h, 0]))$ вероятностной меры ν

и любого $\eta \in (0, 1/2)$ уравнение (1) имеет слабое решение с начальным распределением ν , непрерывными по Гельдеру с показателем η траекториями и бесконечным моментом взрыва п.н.

Доказательство. Зафиксируем произвольное $\eta \in ((1-H)/\rho, 1/2)$. Пусть $f_k(t, X, \varphi) = f(t, X, \varphi) * J_k(t, X)$, $g_k(t, X, \varphi) = g(t, X, \varphi) * J_k(t, X)$. Тогда для любого натурального k функции $f_k(t, X, \varphi)$ и $g_k(t, X, \varphi)$ являются равномерно по k ограниченными и непрерывными. Известно, что матрицы g_k являются равномерно (по k, t, X) невырожденными, т. е. существует постоянная $\beta > 0$, такая, что $\lambda^T g_k(t, X, \varphi) \lambda \geq \beta |\lambda|^2$ для любых $\lambda \in R^d$, $k \in N$, $(t, X, \varphi) \in R_+ \times R^d \times E$ [2, с. 123]. Выберем произвольное $\eta_1 \in (\eta, 1/2)$. Из следствия вытекает, что для любого натурального k уравнение

$$dX(t) = f_k(t, X(t), S_t X) dt + g_k(t, X(t), S_t X) dW(t) + b(t, X(t), T_t X) dB^H(t)$$

имеет слабое решение $(\Omega_k, \mathcal{F}_k, P_k, F_{k,t}, X_k, W_k, B_k^H, \infty)$ с начальным распределением ν и непрерывными по Гельдеру с показателем η_1 траекториями.

Из доказательства леммы 3 [14] вытекает, что последовательность X_k , $k \geq 1$, плотна в C_0^η . Следовательно, для любого $\varepsilon \in (0, H)$ последовательность (X_k, W_k, B_k^H) , $k \geq 1$, плотна в $C_0^\eta \times C_0^{H-\varepsilon} \times C_0^\eta$. Из теорем Прохорова и Скорохода [15, с. 16–18] вытекает существование последовательности процессов $(\bar{X}_{k_l}, \bar{W}_{k_l}, \bar{B}_{k_l}^H)$, где k_l – подпоследовательность последовательности натуральных чисел, и процессов $\bar{X}, \bar{W}, \bar{B}^H$, определенных на некотором вероятностном пространстве (Ω, \mathcal{F}, P) , таких, что $P^{(X_{k_l}, W_{k_l}, B_{k_l}^H)} = P^{(\bar{X}_{k_l}, \bar{W}_{k_l}, \bar{B}_{k_l}^H)}$ для любого натурального l и $(\bar{X}_{k_l}, \bar{W}_{k_l}, \bar{B}_{k_l}^H) \xrightarrow{l \rightarrow \infty} (\bar{X}, \bar{W}, \bar{B}^H)$ в $C_0^\eta \times C_0^{H-\varepsilon} \times C_0^\eta$ п.н. (для простоты обозначений k_l обозначаем через k). Процессы \bar{W}_k и \bar{W} являются стандартными броуновскими движениями, согласованными с потоками $\bar{\mathcal{F}}_{k,t} = \mathcal{F}_t(\bar{X}_k, \bar{W}_k, \bar{B}_k^H)$ и $\bar{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_t(\bar{X}, \bar{W}, \bar{B}^H)$ соответственно; процессы \bar{B}_k^H и \bar{B}^H являются дробными броуновскими движениями, измеримыми относительно σ -алгебр $\bar{\mathcal{F}}_{k,0}$ и $\bar{\mathcal{F}}_0$ соответственно.

Из определения процессов $X_k(t)$ и соотношения $P^{(X_k, W_k, B_k^H)} = P^{(\bar{X}_k, \bar{W}_k, \bar{B}_k^H)}$ вытекает, что с вероятностью 1 для любых $t \geq 0$, $k \in N$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} \bar{X}_k(t) = \bar{X}_k(0) + \int_0^t f_k(s, \bar{X}_k(s), S_s \bar{X}_k) ds + \int_0^t g_k(s, \bar{X}_k(s), S_s \bar{X}_k) d\bar{W}_k(s) + \\ + \int_0^t b(s, \bar{X}_k(s), T_s \bar{X}_k) d\bar{B}_k^H(s). \end{aligned} \quad (8)$$

Возьмем произвольное $t \in R_+$. Из доказательства леммы 2 [14] и лемм 1, 2 вытекают соотношения

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E \left(\int_0^t |f_k(s, \bar{X}_k(s), S_s \bar{X}_k) - f(s, \bar{X}(s), S_s \bar{X})| ds \right) = 0, \quad (9)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E \left(\int_0^t |g_k(s, \bar{X}_k(s), S_s \bar{X}_k) - g(s, \bar{X}(s), S_s \bar{X})|^2 ds \right) = 0. \quad (10)$$

Из равенства (10) предложения 1.39 [11] вытекает, что для любого $t \in R_+$ выполняется соотношение

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E \left| \int_0^t g_k(s, \bar{X}_k(s), S_s \bar{X}_k) d\bar{W}_k(s) - \int_0^t g(s, \bar{X}(s), S_s \bar{X}) d\bar{W}(s) \right|^2 = 0. \quad (11)$$

Кроме того, из доказательства леммы 5 работы [13] следует, что с вероятностью 1 для любого $t \in R_+$ имеет место сходимость

$$\int_0^t b(s, \bar{X}_k(s), T_s \bar{X}_k) d\bar{B}_k^H(s) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \int_0^t \bar{b}(s, \bar{X}(s), T_s \bar{X}) d\bar{B}^H(s). \quad (12)$$

Из соотношений (8), (9), (11), (12) и сходимости $\bar{X}_k \rightarrow \bar{X}$ в $C(R_+, R^d)$ п.н. вытекает, что с вероятностью 1 для всех $t \in R_+$ выполняется равенство $\xrightarrow[k \rightarrow \infty]$

$$\bar{X}(t) = \bar{X}(0) + \int_0^t f(s, \bar{X}(s), S_s \bar{X}) ds + \int_0^t g(s, \bar{X}(s), S_s \bar{X}) d\bar{W}(s) + \int_0^t \bar{b}(s, \bar{X}(s), T_s \bar{X}) d\bar{B}^H(s).$$

Таким образом, $\bar{X}(t)$ – слабое решение уравнения (1) с начальным распределением ν , непрерывными по Гёльдеру с показателем η траекториями и бесконечным моментом взрыва п.н. Лемма 3 доказана.

Теорема 2. Пусть функции $f(t, X, \varphi)$, $g(t, X, \varphi)$ измеримы по Борелю и локально ограничены, компоненты функций $f(t, X, \varphi)$, $\sigma(t, X, \varphi)$ удовлетворяют условиям A и B, функция $b(t, X, \varphi_1)$ удовлетворяет (δ, ρ) -локальному условию Гёльдера, $\delta > 1 - H$, $\rho > 2 - 2H$, тогда для любой заданной на $(C^{1/2}[-h, 0], \beta(C^{1/2}[-h, 0]))$ вероятностной меры ν и любого $\eta \in (0, 1/2)$ уравнение (1) имеет слабое решение $X(t)$ с начальным распределением ν и непрерывными по Гёльдеру с показателем η траекториями.

Доказательство. Для каждого натурального n построим матрицы f_n, g_n, b_n следующим образом: пусть $\sigma_n = T \Lambda_n T^T$, где

$$\begin{aligned} \Lambda_n &= \text{diag}((\lambda_1 + 1/n) \wedge n, \dots, (\lambda_d + 1/n) \wedge n); \\ g_n &= T \text{diag}(\sqrt{(\lambda_1 + 1/n) \wedge n}, \dots, \sqrt{(\lambda_d + 1/n) \wedge n}); \\ f_n &= \text{col}(f_n^1, \dots, f_n^d), f_n^i(t, X, \varphi) = (f^i(t, X, \varphi) \vee (-n)) \wedge n, i \in \{1, \dots, d\}; \\ b_n &= (b_n^{ij}), i = 1, \dots, d, j = 1, \dots, r_2, b_n^{ij}(t, X, \varphi_1) = (b^{ij}(t, X, \varphi_1) \vee (-n)) \wedge n. \end{aligned}$$

Для каждого натурального n существует постоянная $\alpha_n > 0$, такая, что неравенство $\det g_n g_n^T(t, X, \varphi) \geq \alpha_n$ выполняется для всех $(t, X, \varphi) \in R_+ \times R^d \times E$, кроме того, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t, X, \varphi) = f(t, X, \varphi)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(t, X, \varphi) = g(t, X, \varphi)$ в каждой точке $(t, X, \varphi) \in R_+ \times R^d \times E$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n(t, X, \varphi_1) = b(t, X, \varphi_1)$ в каждой точке $(t, X, \varphi_1) \in R_+ \times R^d \times R^{kd}$.

Зафиксируем произвольное $\eta \in ((1 - H)/\rho, 1/2)$ и выберем произвольное $\eta_1 \in (\eta, 1/2)$. По лемме 3 для любого натурального n уравнение

$$dX(t) = f_n(t, X(t), S_t X) dt + g_n(t, X(t), S_t X) dW(t) + b_n(t, X(t), T_t X) d\bar{B}^H(t)$$

имеет слабое решение $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_n, \mathcal{F}_{n,t}, X_n, W_n, B_n^H, \infty)$ с начальным распределением ν и непрерывными по Гёльдеру с показателем η_1 траекториями.

Для каждых натуральных n и m определим случайные величины

$$\tau_n^m = \inf \{t \in R_+ \mid \|X_n(t)\| > m\}$$

и случайные процессы

$$X_n^m(t) = X_n(t \wedge \tau_n^m).$$

Из доказательства теоремы 1 получаем, что последовательность

$$\Psi_n = (X_n^m, B_n^H, \tau_n^m)_{m=1}^\infty, n \geq 1,$$

плотна в пространстве \mathcal{S}_η .

По теореме Прохорова из последовательности P^{Ψ_n} , $n \in N$, можно выбрать подпоследовательность $P^{\Psi_{n_k}}$, слабо сходящуюся к некоторой вероятностной мере Θ при $k \rightarrow \infty$ (здесь и далее для упрощения обозначений вместо n_k будем снова писать n). Из доказательства теоремы Скорохода

следует, что можно построить последовательность случайных величин $\bar{\Psi}_{n_k} = (\bar{X}_{n_k}^m, \bar{B}_{n_k}^H, \bar{\tau}_{n_k}^m)_{m=1}^\infty$, $k \in N$, и случайную величину $\bar{\Psi} = (\bar{X}^m, \bar{B}^H, \bar{\tau}^m)_{m=1}^\infty$ на некотором вероятностном пространстве $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \bar{P})$ со значениями в пространстве \mathcal{S} (здесь n_k – некоторая подпоследовательность последовательности натуральных чисел, в дальнейшем вместо n_k будем опять писать n), такие, что выполняются следующие условия:

- 1) $P^{\Psi_n} = P^{\bar{\Psi}_n}$ для любого $n \in N$; $P^{\bar{\Psi}} = \Theta$; $\bar{\Psi}_n \rightarrow \bar{\Psi}$ в \mathcal{S}_η п.н.;
- 2) $\bar{\tau}_n^m = \inf\{t \in R_+ \mid X_n^{m'} \geq m\}$ для любых $m' \geq m$; $\bar{X}_n^m(t + \bar{\tau}_n^m) = \bar{X}_n^m(\bar{\tau}_n^m)$ для любых $t \in R_+$, если $\bar{\tau}_n^m < \infty$;
- 3) $\bar{X}^m(t) = \bar{X}^{m+1}(t)$ при $t \leq \bar{\tau}^m$; $|\bar{X}^m(\bar{\tau}^m)| = m$, если $0 < \bar{\tau}^m < \infty$; $\bar{\tau}^m \leq \bar{\tau}^{m+1}$ для любых натуральных m ;
- 4) процессы \bar{B}_n^H и \bar{B}^H являются дробными броуновскими движениями, измеримыми относительно σ -алгебр $\bar{\mathcal{F}}_{n,0}$ и $\bar{\mathcal{F}}_0$ соответственно, где $\bar{\mathcal{F}}_{n,t} = \mathcal{F}_t((\bar{X}_n^m, \bar{B}_n^H)_{m=1}^\infty)$ и $\bar{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_t((\bar{X}^m, \bar{B}^H)_{m=1}^\infty)$.

Пусть $\bar{\tau} = \lim_{m \rightarrow \infty} \bar{\tau}^m$, $\bar{X}(t) = \bar{X}^m(t)$ при $t < \bar{\tau}^m$; для $t \geq \bar{\tau}$ положим $\bar{X}(t) = 0$. Случайная величина $\bar{\tau}$ является $\bar{\mathcal{F}}_t$ -моментом остановки, процесс $\bar{X}(t)$ является $\bar{\mathcal{F}}_t$ -согласованным и имеет непрерывные по Гельдеру с показателем η траектории на любом отрезке из $[0, \bar{\tau}]$ п.н., кроме того, $\limsup_{t \rightarrow \bar{\tau}-0} |\bar{X}(t)| = \infty$ при условии $\bar{\tau} < \infty$.

Выберем произвольно: $m, M \in N$, $s, t \in R_+$, $s \leq t$; дважды непрерывно дифференцируемую функцию $h: R^d \rightarrow R$, ограниченную вместе с частными производными до второго порядка включительно; непрерывную ограниченную $(\beta_s(C(R_+, R^d)))$ -измеримую функцию $q: C(R_+, R^d) \rightarrow R$.

Из определения процессов $X_n^m(t)$ и соотношения $P^{\Psi_n} = P^{\bar{\Psi}_n}$ с помощью формулы Ито получаем равенство

$$E_n \left(\left(h(\bar{X}_n^m(t)) - h(\bar{X}_n^m(s)) - \sum_{i=1}^{r_2} \int_{s \wedge \bar{\tau}_n^m}^{t \wedge \bar{\tau}_n^m} b^i(\tau, \bar{X}_n^m(\tau), T_\tau \bar{X}_n^m) \frac{\partial h(\bar{X}_n^m(\tau))}{\partial x_i} d\bar{B}_n^{H,i} - \int_{s \wedge \bar{\tau}_n^m}^{t \wedge \bar{\tau}_n^m} \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \sigma_n^{ij}(\tau, \bar{X}_n^m(\tau), S_\tau \bar{X}_n^m) \frac{\partial^2 h(\bar{X}_n^m(\tau))}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^d f_n^i(\tau, \bar{X}_n^m(\tau), S_\tau \bar{X}_n^m) \frac{\partial h(\bar{X}_n^m(\tau))}{\partial x_i} \right) d\tau \right) q(\bar{X}_n^M) \right) = 0. \quad (13)$$

Из доказательства леммы 2 [14], доказательства леммы 5 работы [13], лемм 1, 2 и соотношения (13) вытекает равенство

$$E \left(\left(h(\bar{X}^m(t)) - h(\bar{X}^m(s)) - \sum_{i=1}^{r_2} \int_{s \wedge \bar{\tau}^m}^{t \wedge \bar{\tau}^m} b^i(\tau, \bar{X}^m(\tau), T_\tau \bar{X}^m) \frac{\partial h(\bar{X}^m(\tau))}{\partial x_i} d\bar{B}^{H,i} - \int_{s \wedge \bar{\tau}^m}^{t \wedge \bar{\tau}^m} \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \sigma^{ij}(\tau, \bar{X}^m(\tau), S_\tau \bar{X}^m) \frac{\partial^2 h(\bar{X}^m(\tau))}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^d f^i(\tau, \bar{X}^m(\tau), S_\tau \bar{X}^m) \frac{\partial h(\bar{X}^m(\tau))}{\partial x_i} \right) d\tau \right) q(\bar{X}^M) \right) = 0. \quad (14)$$

Из равенства (14) следует, что для любого натурального m процесс

$$h(\bar{X}^m(t)) - h(\bar{X}^m(s)) - \sum_{i=1}^{r_2} \int_{s \wedge \bar{\tau}^m}^{t \wedge \bar{\tau}^m} b^i(\tau, \bar{X}^m(\tau), T_\tau \bar{X}^m) \frac{\partial h(\bar{X}^m(\tau))}{\partial x_i} d\bar{B}^{H,i} -$$

$$- \int_{s \wedge \bar{\tau}^m}^{t \wedge \bar{\tau}^m} \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \sigma^{ij}(\tau, \bar{X}^m(\tau), S_\tau \bar{X}^m) \frac{\partial^2 h(\bar{X}^m(\tau))}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^d f^i(\tau, \bar{X}^m(\tau), S_\tau \bar{X}^m) \frac{\partial h(\bar{X}^m(\tau))}{\partial x_i} \right) d\tau$$

является $\tilde{\mathcal{F}}_t$ -мартингалом.

Из предложения 1.38 [11] следует, что на расширении вероятностного пространства $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P})$ с потоком $\tilde{\mathcal{F}}_t$ вероятностного пространства $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \bar{P})$ с потоком $\bar{\mathcal{F}}_t$ можно определить $\tilde{\mathcal{F}}_t$ -броуновское движение $\tilde{W}(t)$, $\tilde{\mathcal{F}}_0$ -измеримое дробное броуновское движение $\tilde{B}(t)$, $\tilde{\mathcal{F}}_t$ -согласованный процесс $\tilde{X}(t)$, $\tilde{\mathcal{F}}_t$ -момент остановки $\tilde{\tau}$, такие, что процесс $\tilde{X}(t)$ имеет непрерывные по Гельдеру с показателем η траектории на любом отрезке из $[0, \tilde{\tau}]$ п.н., $\limsup_{t \rightarrow \tilde{\tau}-0} |\tilde{X}(t)| = \infty$ при $\tilde{\tau} < \infty$ и с вероятностью 1 для всех $t \in [0, \tilde{\tau}]$ выполняется соотношение

$$\tilde{X}(t) = \tilde{X}(0) + \int_0^t f(s, \tilde{X}(s), S_s \tilde{X}) ds + \int_0^t g(s, \tilde{X}(s), S_s \tilde{X}) d\tilde{W}(s) + \int_0^t \sigma(s, \tilde{X}(s), T_s \tilde{X}) d\tilde{B}^H(s).$$

Таким образом, $\tilde{X}(t)$ – слабое решение уравнения (1) с начальным распределением ν и непрерывными по Гельдеру с показателем η траекториями. Теорема доказана.

П р и м е р 1. Рассмотрим систему стохастических дифференциально-функциональных уравнений

$$\begin{aligned} dx_1(t) &= \left(h(x_1(t)) + tx_2^2(t) + \int_{-1}^0 x_1(t+\tau) d\tau \right) dt + h(x_2(t)) dW_1(t) + x_1^2(t-1) dB_1^H(t), \\ dx_2(t) &= h(x_2(t)+1) dt + x_2(t) dW_1(t), \end{aligned} \quad (15)$$

где $h(x) = 1$ при $x \geq 0$, $h(x) = -1$ при $x < 0$.

Рассмотрим функцию f . Первая компонента $f^1(t, x_1, x_2, \varphi_2) = h(x_1) + tx_2^2 + \int_{-1}^0 \varphi_2(\tau) d\tau$ непрерывна по переменным (x_2, φ_2) при каждом фиксированном (t, x_1) . Возьмем первую строку матрицы g , видим, что множество $G(1)$ пусто. Функция $f^2(t, x_1, x_2) = h(x_2 + 1)$ непрерывна по переменной x_1 при каждом фиксированном (t, x_2) . Возьмем вторую строку матрицы g , находим, что $G(2) = \{(t, x_2) \mid x_2 = 0\}$. Множество $\{(t, x_1, 0)\}$ содержится во множестве точек непрерывности отображения f^2 . Следовательно, компоненты функции f удовлетворяют условию A . Функция σ непрерывна, поэтому компоненты функции σ удовлетворяют условию A . По теореме 2 для любой заданной на $(C^{1/2}[-1, 0], \beta(C^{1/2}[-1, 0]))$ вероятностной меры ν система (15) имеет слабое решение с начальным распределением ν .

П р и м е р 2. Рассмотрим систему стохастических дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} dx_1(t) &= (\text{sgn } x_1(t) + x_2(t-1)) dt + dW_1(t) + dB_1^H(t), \\ dx_2(t) &= (1 - 2\text{sgn } x_2(t)) dt. \end{aligned} \quad (16)$$

Функция $f^2(t, x_1, x_2) = 1 - 2\text{sgn } x_2$ не удовлетворяет условию A , так как $G(2) = R_+ \times R$, $G(1, 2) = R_+ \times R^2$, а функция $f^2(t, x_1, x_2)$ не является непрерывной на $R_+ \times R^2$. Следовательно, теорема 2 не применима к системе (16). Легко видеть, что система (16) не имеет слабых решений с начальным условием $x_1(t) = x_2(t) = 0$, $t \in [-1, 0]$. Тем не менее, согласно теореме 1, уравнение (16) имеет β -слабое решение с любым наперед заданным начальным распределением ν .

П р и м е р 3. Рассмотрим одномерное стохастическое дифференциальное уравнение

$$dx(t) = f(x_t) dt + dW(t) + dB^H(t), \quad (17)$$

где $x_t = \{x(t+\tau) \mid -1 \leq \tau \leq 0\} \in C([-1, 0], R)$ функция $f : C([-1, 0], R) \rightarrow [0, 1]$ такова, что f непрерывна и $f(a_n(\cdot)) = 1$, $f(b_n(\cdot)) = 0 \forall n \in N$, $a_n(t) = (1+t)^{2n}$, $b_n(t) = (1+t)^{2n-1}$ (существование такой функции

вытекает из [16, с. 173]). Поскольку функция f не удовлетворяет условию B , то теорема 2 не применима к уравнению (17). Тем не менее, согласно следствию, уравнение (17) имеет слабое решение с любым наперед заданным начальным распределением v и бесконечным моментом взрыва.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант Ф14М-020).

Литература

1. Ito K., Nisio M. // J. Math. 1967. Vol. 11, N 5. P. 117–174.
2. Крылов Н. В. Управляемые процессы диффузионного типа. М., 1977.
3. Nisio M. // Osaka J. Math. 1973. Vol. 10, N 1. P. 185–208.
4. Веретенников А. Ю. // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1983. Т. 47, № 1. С. 188–196.
5. Rozkosz A., Slominski L. // Stochastic Processes and their Applications. 1997. Vol. 68. P. 285–302.
6. Леваков А. А., Васьковский М. М. // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43, № 8. С. 1029–1042.
7. Kurenok V. P., Lepeyev A. N. // Rocky Mountain J. Math. 2008. Vol. 38, N 1. P. 139–174.
8. Леваков А. А. // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33, № 2. С. 212–220.
9. Aubin J. P., Da Prato G. // Stochastic Analysis and Appl. 1998. Vol. 16. P. 1–15.
10. Леваков А. А., Васьковский М. М. // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43, № 10. С. 1324–1333.
11. Леваков А. А. Стохастические дифференциальные уравнения. Минск, 2009.
12. Васьковский М. М. // Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. 2008. № 1. С. 64–70.
13. Леваков А. А., Васьковский М. М. // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50, № 2. С. 187–200.
14. Леваков А. А., Васьковский М. М. // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50, № 8. С. 1060–1076.
15. Ватанабэ С., Икэда Н. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М., 1986.
16. Александров П. С. Введение в теорию множеств и общую топологию. М., 1977.

M. M. VASKOUSKI

EXISTENCE OF WEAK SOLUTIONS OF STOCHASTIC DELAY DIFFERENTIAL EQUATIONS DRIVEN BY STANDARD AND FRACTIONAL BROWNIAN MOTIONS

Summary

In the article, the Krylov type estimates are obtained for the functional of solutions to stochastic delay differential equations driven by standard and fractional Brownian motions. Main ideas to obtain these estimates are to use the Nualart type estimates for the pathwise integral with respect to fractional Brownian motions and to use Krylov's methods for Ito's equations. With the help of the obtained estimates and basing on the Skorokhod and Prokhorov theorems, we have found sufficient conditions of existence of weak solutions of stochastic delay differential equations driven by standard and fractional Brownian motions with discontinuous right-hand sides and with a degenerate diffusion operator.

УДК 517.925

М. С. БЕЛОКУРСКИЙ

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЕРУГИНА
О СУЩЕСТВОВАНИИ НЕРЕГУЛЯРНЫХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ
С НУЛЕВЫМ СРЕДНИМ ПЕРИОДИЧЕСКОГО КОЭФФИЦИЕНТА**

*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины**(Поступила в редакцию 27.02.2015)*

Как известно, периодическая дифференциальная система при определенных условиях может иметь периодические решения, период которых несоизмерим с периодом самой системы [1–6] и др. Такие периодические решения присущи достаточно широким классам дифференциальных систем и названы сильно нерегулярными. Отметим, что сильно нерегулярные периодические колебания имеют место, например, в системе с двумя степенями свободы, представляющей собой два одинаковых маятника, соединенных упругой горизонтальной связью с жесткостью, периодически зависящей от времени. Подобного рода колебания могут возникать и в электрическом аналоге такой системы – двух колебательных контурах, соединенных периодически меняющейся емкостью.

В монографии [3, § 36] Н. П. Еругин рассматривал линейную систему вида

$$\dot{x} = (AP(t) + B)x, \quad t \in R, \quad x \in R^n, \quad n \geq 2, \quad (1)$$

где A, B – постоянные $(n \times n)$ -матрицы, $P(t)$ – непрерывная ω -периодическая $(n \times n)$ -матрица. В системе (1) матрицы A и $P(t)$ будем называть стационарным и периодическим коэффициентами соответственно. Для системы (1) с диагональным периодическим коэффициентом $P(t)$ Н. П. Еругин изучены вопросы существования сильно нерегулярных периодических решений, при этом, в частности, было доказано, что если матрица A невырожденная, то искомые решения у системы (1) отсутствуют. Случай треугольного периодического коэффициента $P(t)$ был рассмотрен в работе [7].

Следует отметить, что системы вида (1) используются при решении задач управления асимптотическими инвариантами, в том числе показателями Ляпунова, стационарных управляемых систем при помощи периодических управлений [8, 9], а также задач стабилизации линейных систем управления периодической обратной связью, включая проблему Брокетта [10].

В настоящей работе выясним вопросы существования сильно нерегулярных периодических решений системы (1) при условии нулевого среднего значения периодического коэффициента

$$\hat{P} = \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} P(\tau) d\tau = 0. \quad (2)$$

Вначале рассмотрим случай, когда стационарный коэффициент A является невырожденным, т. е.

$$\det A \neq 0. \quad (3)$$

Пусть $x(t)$ – Ω -периодическое решение системы (1), при этом считаем, что хотя бы одна из его компонент отлична от стационарной, а отношение ω / Ω является иррациональным числом. Тогда, согласно [5], вектор $x(t)$ удовлетворяет системе

$$\dot{x} = (A\hat{P} + B)x, \quad (AP(t) - A\hat{P})x = 0. \quad (4)$$

В силу условий (2) и (3) последняя система примет вид

$$\dot{x} = Bx, \quad P(t)x = 0. \quad (5)$$

Если столбцы матрицы $P(t)$ линейно независимы, то из второй системы в (5) на основании [6, с. 41] следует тривиальность $x(t)$, что противоречит сделанному допущению. Значит, матрица $P(t)$ имеет неполный столбцовый ранг

$$\text{rank}_{\text{col}} P = k < n. \quad (6)$$

При выполнении условия (6) согласно [6, с. 43] найдется постоянная неособенная $(n \times n)$ -матрица Q такая, что у матрицы $P(t)Q$ первые $d = n - k$ столбцов будут нулевыми, в то время как остальные k столбцов будут линейно независимыми. Введем замену переменных

$$x = Qy, \quad (7)$$

которая приводит систему (5) к системе

$$\dot{y} = Fy, \quad P_1(t)y = 0 \quad (F = Q^{-1}BQ, P_1(t) = P(t)Q). \quad (8)$$

Эта система имеет сильно нерегулярное периодическое решение $y(t) = Q^{-1}x(t)$. Так как у матрицы $P_1(t)$ первые d столбцов нулевые, а остальные k столбцов линейно независимы, то из второй системы в (8) на основании [6, с. 43] следует, что последние k компонент вектора $y(t)$ будут тривиальными, т. е.

$$y(t) = \text{col}(y^{[d]}(t), y_{[k]}(t)), \quad y^{[d]}(t) = \text{col}(y_1(t), \dots, y_d(t)), \quad y_{[k]}(t) = \text{col}(y_{d+1}(t), \dots, y_n(t)) \equiv 0.$$

Это означает, что система (8) имеет следующую структуру:

$$\dot{y}^{[d]} = F_{d,d}y^{[d]}, \quad F_{k,d}y^{[d]} = 0, \quad y_{[k]} = 0, \quad (9)$$

где $F_{d,d}$, $F_{k,d}$ – левые верхний и нижний блоки матрицы F (нижние индексы указывают размерность). Как видно из (9), Ω -периодический вектор $y^{[d]}(t)$ является решением линейной стационарной системы. Поэтому среди собственных значений матрицы коэффициентов $F_{d,d}$ первой системы в (9) будут числа

$$\pm i\lambda_j, \quad (j = 1, \dots, d'; d' \leq [d/2]), \quad (10)$$

где $\lambda_j = 2m_j\pi/\Omega$, $m_j \in \mathbb{N}$. Пусть l_j – число групп элементарных делителей, отвечающих собственному значению $\pm i\lambda_j$, ($j = 1, \dots, d'$; $l_1 + \dots + l_{d'} = l$; $2l \leq d$). Это означает, что вектор $y^{[d]}(t)$ представлен тригонометрическим полиномом вида

$$y^{[d]}(t) = \sum_{j=1}^{d'} a_j \cos \lambda_j t + b_j \sin \lambda_j t, \quad (11)$$

где коэффициенты a_j , b_j зависят от $2l$ произвольных вещественных постоянных. Поскольку $y^{[d]}(t)$ удовлетворяет и второй системе в (9), то имеет место тождество

$$F_{k,d} \sum_{j=1}^{d'} a_j \cos \lambda_j t + b_j \sin \lambda_j t \equiv 0. \quad (12)$$

Итак, если система (1) имеет сильно нерегулярное периодическое решение $x(t)$, то выполняются условия (6), (10), (12), при этом

$$x(t) = Q \text{col}(y^{[d]}(t), 0, \dots, 0), \quad (13)$$

где вектор $y^{[d]}(t)$ определяется равенством (11).

Покажем, что полученные условия являются достаточными. Обратимся к системе (5). В силу условия (6) найдется постоянная неособенная $(n \times n)$ -матрица Q такая, что замена переменных (7) приводит (5) к системе (8), где у матрицы $P_1(t)$ первые d столбцов нулевые, а остальные k столбцов линейно независимы. Согласно [6, с. 43], последнее обстоятельство означает, что $y = \text{col}(y^{[d]}, 0, \dots, 0)$, $y^{[d]} = \text{col}(y_1, \dots, y_d)$. С учетом этого система (8) примет вид (9). Поскольку чисто мнимые числа (10) будут собственными значениями матрицы $F_{d,d}$, то первая система в (9) имеет $2l$ -параметрическое семейство Ω -периодических решений (11). Так как выполняется тождество (12), то система (9) имеет решение $y(t) = \text{col}(y^{[d]}(t), 0, \dots, 0)$. Возвращаясь к исходным переменным, находим Ω -периодическое решение системы (5) в виде тригонометрического многочлена (13). В силу условий (2) и (3) вектор $x(t)$ удовлетворяет также системе (4). Тогда из [5] вытекает, что (13) является сильно нерегулярным решением системы (1).

Таким образом, доказана

Т е о р е м а 1. Пусть в системе (1) стационарный коэффициент A является невырожденным, а среднее значение периодического коэффициента $P(t)$ является нулевым.

Если система (1) имеет сильно нерегулярное периодическое решение, то оно будет тригонометрическим многочленом вида (13). Для того чтобы (13) было решением системы (1), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (6), (10), (12).

П р и м е р. Рассмотрим $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ -периодическую систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x \sin \sqrt{3}t - y(1 + \sin \sqrt{3}t) + z \sin \sqrt{3}t, \\ \dot{y} &= x(1 - \cos \sqrt{3}t) - y \cos \sqrt{3}t + z \cos \sqrt{3}t, \\ \dot{z} &= x(1 + 5 \sin \sqrt{3}t) - y(1 - 5 \sin \sqrt{3}t) - 5z \sin \sqrt{3}t. \end{aligned} \quad (14)$$

Для этой системы имеем:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P(t) = \begin{pmatrix} 4 \sin \sqrt{3}t - \cos \sqrt{3}t & 4 \sin \sqrt{3}t - \cos \sqrt{3}t & -4 \sin \sqrt{3}t + \cos \sqrt{3}t \\ 3 \sin \sqrt{3}t - 2 \cos \sqrt{3}t & 3 \sin \sqrt{3}t - 2 \cos \sqrt{3}t & -3 \sin \sqrt{3}t + 2 \cos \sqrt{3}t \\ 9 \sin \sqrt{3}t - 2 \cos \sqrt{3}t & 9 \sin \sqrt{3}t - 2 \cos \sqrt{3}t & 9 \sin \sqrt{3}t - 2 \cos \sqrt{3}t \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det A = 1 \neq 0, \quad \hat{P} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}} P(\tau) d\tau = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Согласно [5], а также условиям (2) и (3), искомое периодическое решение $(x(t), y(t), z(t))^T$ системы (14) удовлетворяет системе

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 4 \sin \sqrt{3}t - \cos \sqrt{3}t & 4 \sin \sqrt{3}t - \cos \sqrt{3}t & -4 \sin \sqrt{3}t + \cos \sqrt{3}t \\ 3 \sin \sqrt{3}t - 2 \cos \sqrt{3}t & 3 \sin \sqrt{3}t - 2 \cos \sqrt{3}t & -3 \sin \sqrt{3}t + 2 \cos \sqrt{3}t \\ 9 \sin \sqrt{3}t - 2 \cos \sqrt{3}t & 9 \sin \sqrt{3}t - 2 \cos \sqrt{3}t & 9 \sin \sqrt{3}t - 2 \cos \sqrt{3}t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (15)$$

С помощью замены переменных

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix},$$

система (15) приводится к системе

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4\sin\sqrt{3}t - \cos\sqrt{3}t \\ 0 & 0 & 3\sin\sqrt{3}t - 2\cos\sqrt{3}t \\ 0 & 0 & 9\sin\sqrt{3}t - 2\cos\sqrt{3}t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Матрица второй системы из (16) имеет один ненулевой столбец. Поэтому соответствующая компонента w периодического нерегулярного решения должна быть нулевой. Тогда система (16) примет вид

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad w = 0.$$

Собственные числа матрицы коэффициентов редуцированной системы $\lambda_{1,2} = \pm i$. Поэтому последняя система имеет двухпараметрическое семейство 2π -периодических решений

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos t + b \sin t \\ a \sin t - b \cos t \end{pmatrix}, \quad w = 0,$$

где a, b – произвольные вещественные постоянные, которое будет удовлетворять и системе (16). Возвращаясь к исходным переменным, находим периодическое решение системы (14)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos t + b \sin t \\ a \sin t - b \cos t \\ (a-b) \cos t + (a+b) \sin t \end{pmatrix},$$

которое ввиду иррациональности отношения чисел 2π и $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ будет сильно нерегулярным.

Рассмотрим теперь случай вырожденного стационарного коэффициента при условии (2). Для определенности будем считать, что

$$\text{rank } A = q < n. \quad (17)$$

Пусть $x(t)$ – Ω -периодическое решение системы (1), при этом считаем, что хотя бы одна из его компонент отлична от стационарной, а отношение ω/Ω является иррациональным числом. Из [11, с. 21–22] вытекает, что при выполнении условия (17) найдется постоянная неособенная $(n \times n)$ -матрица S такая, что у матрицы SA первые q строк будут линейно независимыми, а остальные $n - q$ строк будут нулевыми. Введем замену переменных

$$x = S^{-1}z, \quad (18)$$

которая приводит систему (1) к системе

$$\dot{z} = (SAP(t)S^{-1} + SBS^{-1})z, \quad (19)$$

где $SAP(t)S^{-1}$ – непрерывная ω -периодическая $(n \times n)$ -матрица, у которой последние $n - q$ строк нулевые.

Тогда в силу [5] Ω -периодический вектор $z(t) = Sx(t)$ удовлетворяет системе

$$\dot{z} = (S\hat{A}S^{-1} + SBS^{-1})z, \quad (SAP(t)S^{-1} - S\hat{A}S^{-1})z = 0. \quad (20)$$

С учетом условия (2) система (20) принимает вид

$$\dot{z} = Cz, \quad G(t)z = 0 \quad (C = SBS^{-1}, \quad G(t) = SAP(t)S^{-1}). \quad (21)$$

Значит, Ω -периодический вектор $z(t)$ удовлетворяет и системе (21). Первая система из (21) является линейной стационарной системой. Поэтому среди собственных значений ее матрицы коэффициентов C будут числа

$$\pm i\lambda_j \quad (j=1, \dots, n'; \quad n' \leq [n/2]), \quad (22)$$

где $\lambda_j = 2r_j\pi/\Omega$, $r_j \in \mathbb{N}$. Пусть h_j – число групп элементарных делителей, отвечающих собственному значению $\pm i\lambda_j$, $(j=1, \dots, n'; \quad h_1 + \dots + h_{n'} = h; \quad 2h \leq n)$. Это означает, что вектор $z(t)$ представлен тригонометрическим полиномом вида

$$z(t) = \left(\sum_{j=1}^{n'} (a_j^{(1)} \cos \lambda_j t + b_j^{(1)} \sin \lambda_j t), \dots, \sum_{j=1}^{n'} (a_j^{(n)} \cos \lambda_j t + b_j^{(n)} \sin \lambda_j t) \right)^T, \quad (23)$$

где скалярные коэффициенты $a_j^{(i)}$ и $b_j^{(i)}$ ($i=1, \dots, n$) зависят от $2h$ произвольных вещественных постоянных. Пусть

$$SA = \begin{pmatrix} v_{11} & \dots & v_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ v_{q1} & \dots & v_{qn} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad P(t) = \begin{pmatrix} p_{11}(t) & \dots & p_{1n}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{n1}(t) & \dots & p_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} s_{11}(t) & \dots & s_{1n}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ s_{n1}(t) & \dots & s_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$SAP(t)S^{-1} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n v_{li} p_{ij}(t) s_{j1} & \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n v_{li} p_{ij}(t) s_{j2} & \dots & \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n v_{li} p_{ij}(t) s_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n v_{qi} p_{ij}(t) s_{j1} & \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n v_{qi} p_{ij}(t) s_{j2} & \dots & \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n v_{qi} p_{ij}(t) s_{jn} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Поскольку $z(t)$ удовлетворяет и второй системе в (21), то имеет место тождество

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n v_{li} p_{ij}(t) s_{j1} \sum_{j=1}^{n'} (a_j^{(1)} \cos \lambda_j t + b_j^{(1)} \sin \lambda_j t) + \dots + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n v_{li} p_{ij}(t) s_{jn} \sum_{j=1}^{n'} (a_j^{(n)} \cos \lambda_j t + b_j^{(n)} \sin \lambda_j t) \equiv \\ & \equiv 0, \\ & \dots \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n v_{qi} p_{ij}(t) s_{j1} \sum_{j=1}^{n'} (a_j^{(1)} \cos \lambda_j t + b_j^{(1)} \sin \lambda_j t) + \dots + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n v_{qi} p_{ij}(t) s_{jn} \sum_{j=1}^{n'} (a_j^{(n)} \cos \lambda_j t + b_j^{(n)} \sin \lambda_j t) \equiv \\ & \equiv 0. \end{aligned}$$

Итак, если система (1) имеет сильно нерегулярное периодическое решение $x(t)$, то выполняются условия (22), (24), при этом

$$x(t) = S^{-1}z(t), \quad (25)$$

где вектор $z(t)$ определяется равенством (23).

Покажем, что полученные условия являются достаточными. При выполнении условия (17) найдется постоянная неособенная $(n \times n)$ -матрица S такая, что у матрицы SA первые q строк будут линейно независимыми, а остальные $n - q$ строк будут нулевыми. Сделаем замену переменных (18), которая приводит систему (1) к системе (19).

Теперь обратимся к системе (21). Поскольку чисто мнимые числа (22) будут собственными значениями матрицы $C = SBS^{-1}$, то первая система в (21) имеет $2h$ -параметрическое семейство Ω -периодических решений (23). Так как выполняются тождества (24), то система (21) имеет решение (23). В силу условия (2) вектор $z(t)$ удовлетворяет также системе (20). Тогда в силу [5] Ω -периодический вектор $z(t)$ удовлетворяет системе (19). Возвращаясь к исходным переменным, находим сильно нерегулярное решение системы (1) в виде тригонометрического многочлена (25).

Таким образом, доказана

Т е о р е м а 2. Пусть в системе (1) стационарный коэффициент A является вырожденным и его ранг равен q , а среднее значение периодического коэффициента $P(t)$ является нулевым.

Для того чтобы система (1) имела сильно нерегулярное периодическое решение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (22), (24).

Если система (1) имеет сильно нерегулярное периодическое решение, то оно будет иметь вид (25).

Укажем далее еще один подход к выяснению условий существования сильно нерегулярных периодических решений системы (1) с нулевым средним периодического коэффициента и вырожденным стационарным коэффициентом.

Пусть $x(t)$ – Ω -периодическое решение системы (1), при этом считаем, что хотя бы одна из его компонент отлична от стационарной, а отношение ω / Ω является иррациональным числом. Из [11, с. 21–22] вытекает, что при выполнении условия (17) найдется постоянная неособенная $(n \times n)$ -матрица S такая, что у матрицы SA первые q строк будут линейно независимыми, а остальные $n - q$ строк будут нулевыми. Введем замену переменных (18), которая приводит систему (1) к системе (19).

Согласно [5], Ω -периодический вектор $z(t) = Sx(t)$ удовлетворяет системе (20), которая в силу условия (2), принимает вид (21). Обозначим через $G_1(t)$ матрицу размерности $q \times n$, составленную из первых q строк матрицы $G(t)$. Тогда, учитывая структуру матрицы SA , систему (21) можно записать в виде

$$\dot{z} = Cz, \quad G_1(t)z = 0. \quad (26)$$

Если столбцы матрицы $G_1(t)$ линейно независимы, то из второй системы в (26) следует тривиальность $z(t)$, что противоречит сделанному допущению. Значит, матрица $G_1(t)$ имеет неполный столбцовый ранг

$$\text{rank}_{\text{col}} G_1 = r < n. \quad (27)$$

При выполнении условия (27) согласно [6, с. 43] найдется постоянная неособенная $(n \times n)$ -матрица Q такая, что у матрицы $G_1(t)Q$ первые $n - r = p$ столбцов будут нулевыми, в то время как остальные r столбцов будут линейно независимыми. Введем еще одну замену переменных

$$z = Qy, \quad (28)$$

которая приводит систему (26) к системе

$$\dot{y} = Dy, \quad G_2(t)y = 0 \quad (D = Q^{-1}SBS^{-1}Q, G_2(t) = G_1(t)Q). \quad (29)$$

Эта система имеет сильно нерегулярное периодическое решение $y(t) = Q^{-1}Sx(t)$. Так как у матрицы $G_2(t)$ первые p столбцов нулевые, а остальные r столбцов линейно независимы, то из второй системы в (29) на основании [6, с. 43] следует, что последние r компонент вектора $y(t)$ будут тривиальными, т. е.

$$y(t) = \text{col}(y^{[p]}(t), y_{[r]}(t)), \quad y^{[p]}(t) = \text{col}(y_1(t), \dots, y_p(t)), \quad y_{[r]}(t) = \text{col}(y_{p+1}(t), \dots, y_n(t)) \equiv 0.$$

Это означает, что система (29) имеет следующую структуру:

$$\dot{y}^{[p]} = D_{p,p}y^{[p]}, \quad D_{r,p}y^{[p]} = 0, \quad y_{[r]} = 0, \quad (30)$$

где $D_{p,p}$, $D_{r,p}$ – левые верхний и нижний блоки матрицы D (нижние индексы указывают размерность). Как видно из (30), Ω -периодический вектор $y^{[p]}(t)$ является решением линейной стационарной системы. Поэтому среди собственных значений матрицы коэффициентов $D_{p,p}$ первой системы в (30) будут числа

$$\pm i\lambda_j, \quad (j=1, \dots, p'; p' \leq [p/2]), \quad (31)$$

где $\lambda_j = 2m_j\pi/\Omega$, $m_j \in \mathbb{N}$. Пусть h_j – число групп элементарных делителей, отвечающих собственному значению $\pm i\lambda_j$, $(j=1, \dots, p'; h_1 + \dots + h_{p'} = h; 2h \leq p)$. Это означает, что вектор $y^{[p]}(t)$ представлен тригонометрическим полиномом вида

$$y^{[p]}(t) = \sum_{j=1}^{p'} a_j \cos \lambda_j t + b_j \sin \lambda_j t, \quad (32)$$

где коэффициенты a_j, b_j зависят от $2h$ произвольных вещественных постоянных. Поскольку $y^{[p]}(t)$ удовлетворяет и второй системе в (30), то имеет место тождество

$$D_{r,p} \sum_{j=1}^{p'} a_j \cos \lambda_j t + b_j \sin \lambda_j t \equiv 0. \quad (33)$$

Итак, если система (1) имеет сильно нерегулярное периодическое решение $x(t)$, то выполняются условия (27), (31), (33), при этом

$$x(t) = S^{-1} Q \operatorname{col}(y^{[p]}(t), 0, \dots, 0), \quad (34)$$

где вектор $y^{[p]}(t)$ определяется равенством (32).

Покажем, что полученные условия являются достаточными. Обратимся к системе (26). В силу условия (27) найдется постоянная неособенная $(n \times n)$ -матрица Q такая, что замена переменных (28) приводит (26) к системе (29), где у матрицы $G_2(t)$ первые p столбцов нулевые, а остальные r столбцов линейно независимы. Согласно [6, с. 43], последнее обстоятельство означает, что $y = \operatorname{col}(y^{[p]}, 0, \dots, 0)$, $y^{[p]} = \operatorname{col}(y_1, \dots, y_p)$. С учетом этого система (29) примет вид (30). Поскольку чисто мнимые числа (31) будут собственными значениями матрицы $D_{p,p}$, то первая система в (30) имеет $2h$ -параметрическое семейство Ω -периодических решений (32). Так как выполняется тождество (33), то система (30) имеет решение $y(t) = \operatorname{col}(y^{[p]}(t), 0, \dots, 0)$.

Обратная замена переменных $y = Q^{-1}z$ позволяет найти Ω -периодическое решение системы (26), а значит, и системы (21). В силу условия (2) вектор $z(t)$ удовлетворяет также и системе (20). Тогда из [5] вытекает, что $z(t)$ является Ω -периодическим решением системы (19). Возвращаясь к исходным переменным, заключаем, что тригонометрический многочлен (34) является сильно нерегулярным решением системы (1).

Таким образом, доказана

Т е о р е м а 3. Пусть в системе (1) стационарный коэффициент A является вырожденным и его ранг равен q , а среднее значение периодического коэффициента $P(t)$ является нулевым.

Если система (1) имеет сильно нерегулярное периодическое решение, то оно будет тригонометрическим многочленом вида (34). Для того чтобы (34) было решением системы (1), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (27), (31), (33).

З а м е ч а н и е. При доказательстве теоремы 2 мы вводим замену с целью привести матрицу $AP(t)$ к специальному блочному виду (последние несколько строк нулевые), затем исходная система распадается на две системы, одна из которых не является дифференциальной и ее матрица коэффициентов имеет тот же специальный блочный вид. При доказательстве теоремы 3 мы вводим две замены, но это позволяет свести исходную систему к системе меньшей размерности.

Литература

1. *Massera J. L.* // Bol. de la Facultad de Ingenieria. 1950. Vol. 4, no 1. P. 37–45.
2. *Курцвейль Я., Вейвода О.* // Чехослов. мат. журн. 1955. Т. 5, № 3. С. 362–370.
3. *Еругин Н. П.* Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами. Минск, 1963. С. 203–208.
4. *Гайшун И. В.* // Докл. АН БССР. 1979. Т. 23, № 8. С. 684–686.
5. *Грудо Э. И.* // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 9. С. 1499–1504.
6. *Деменчук А. К.* Асинхронные колебания в дифференциальных системах. Условия существования и управления. Lambert Academic Publishing. Saarbrücken, 2012. С. 40–49.
7. *Белокурский М. С., Деменчук А. К.* // Докл. НАН Беларуси. 2014. Т. 58, № 4. С. 17–22.
8. *Зайцев В. А.* // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. 2003. С. 31–62.
9. *Габдрахимов А. Ф., Зайцев В. А.* // Изв. ИМИ УдГУ. 2006. № 3 (37). С. 21–22.
10. *Леонов Г. А.* // Автоматика и телемеханика. 2001. № 5. С. 190–193.
11. *Хорн Р.* Матричный анализ. М., 1989. С. 19–24.

M. S. BELOKURSKY

SOLUTION OF ERUGIN'S PROBLEM ON THE EXISTENCE OF IRREGULAR SOLUTIONS OF THE LINEAR SYSTEM WITH ZERO MEAN OF PERIODIC COEFFICIENT

Summary

We consider the linear periodic system with zero mean of periodic coefficient. The necessary and sufficient conditions, under which linear periodic differential system has strongly irregular periodic solutions, were obtained.

УДК 517.2

Ю. С. КРУК¹, Ю. Е. ДУДОВСКАЯ²

**СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОСТОЯНИЙ
ЗАМКНУТОЙ СЕТИ С НЕАКТИВНЫМИ ЗАЯВКАМИ
И МНОГОРЕЖИМНЫМИ СТРАТЕГИЯМИ ОБСЛУЖИВАНИЯ**

¹Белорусский национальный технический университет²Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

(Поступила в редакцию 27.02.2015)

Рассматривается замкнутая сеть массового обслуживания, в узлах которой приборы могут функционировать в нескольких режимах, отвечающих различной степени работоспособности узлов. Режимы, в которых могут работать узлы сети, пронумерованы, каждый из них отличается своим набором показателей. Например, при переходе узла в режим с большим номером его производительность уменьшается, а процесс обслуживания ухудшается. При переходе узла в режим с меньшим номером происходит восстановление показателей процесса обслуживания, улучшается качество обслуживания [1]. Сети с многорежимными стратегиями обслуживания позволяют моделировать ситуации, когда узлы сети могут быть частично ненадежны (случай полной потери работоспособности здесь не рассматривается).

Заявки, ожидающие обслуживания в узлах сети, могут становиться временно неактивными, причем неактивные формируют отдельную очередь и не требуют обслуживания. Поступающие в сеть потоки информационных сигналов позволяют заявкам менять свое состояние: из неактивного переходить в такое, когда они могут получать обслуживание, и наоборот [2].

В настоящей работе исследуется замкнутая сеть массового обслуживания, состоящая из N узлов. В сети циркулируют M заявок. Все заявки, находящиеся в сети, подразделяются на обыкновенные (активные), которые могут получать обслуживание, и неактивные. В узлы сети извне поступают независимые пуассоновские потоки информационных сигналов с интенсивностями ν_i и ϕ_i , $i = \overline{1, N}$. Информационный сигнал, поступивший в i -й узел с интенсивностью ν_i , уменьшает на единицу количество обыкновенных заявок и увеличивает на единицу количество неактивных заявок. В случае отсутствия в i -м узле обыкновенных заявок сигнал покидает сеть. Информационный сигнал, поступивший в i -й узел с интенсивностью ϕ_i , уменьшает на единицу количество неактивных заявок, увеличивая на единицу число обыкновенных заявок. В случае отсутствия в i -м узле неактивных заявок сигнал покидает сеть. Описанные информационные сигналы не требуют обслуживания.

Предполагается, что i -й узел может находиться в одном из l_i режимов работы ($l_i = \overline{0, r_i}, i = \overline{1, N}$).

Состояние сети в момент времени t характеризуется вектором $z(t) = (z_1(t), z_2(t), \dots, z_N(t))$, где $z_i(t) = (n_i(t), n'_i(t), l_i(t))$ – состояние i -го узла в момент времени t . Здесь $n_i(t)$, $n'_i(t)$ – число активных и соответственно неактивных заявок в i -м узле в момент времени t , $l_i(t)$ – режим функционирования i -го узла. Случайный процесс $z(t)$ имеет конечное фазовое пространство

$$Z = \left\{ ((n_1, n'_1, l_1), (n_2, n'_2, l_2), \dots, (n_N, n'_N, l_N)) : n_i, n'_i \geq 0, \sum_{i=1}^N (n_i + n'_i) = M, l_i = \overline{0, r_i}, i = \overline{1, N} \right\}.$$

Нумерация обыкновенных заявок в очереди каждого узла осуществляется от «хвоста» очереди к прибору, т. е. если в i -м узле находится n_i обыкновенных заявок, то заявка, которая обслуживается,

имеет номер n_i , а последняя в очереди – номер 1. Временно неактивные заявки в очереди i -го узла нумеруются следующим образом: заявка, последняя ставшая неактивной, имеет номер n'_i . Поступающий в узел i сигнал v_i воздействует на обыкновенную заявку, имеющую номер 1, которая становится неактивной заявкой под номером $n'_i + 1$. Сигнал φ_i воздействует на неактивную заявку, имеющую номер n'_i , которая становится обыкновенной заявкой под номером 1.

Назовем нулевой режим основным режимом работы. Время работы узла, находящегося в состоянии $z_i = (n_i, n'_i, l_i)$, в режиме l_i ($l_i = \overline{0, r_i}, i = \overline{1, N}$) имеет показательное распределение, при этом с интенсивностью τ_i ($\tau_i > 0$) i -й узел переходит в $(l_i + 1)$ -й режим ($l_i = \overline{0, r_i - 1}$), а с интенсивностью ρ_i ($\rho_i > 0$) – в $(l_i - 1)$ -й режим ($l_i = \overline{1, r_i}$). Переключение прибора с одного режима на другой сохраняет общее число заявок в узле.

Время обслуживания одной активной заявки не зависит от времени обслуживания других и имеет показательное распределение с параметром μ_i ($i = \overline{1, N}$).

Каждая заявка после завершения обслуживания в i -м узле независимо от других заявок мгновенно направляется в j -й узел с вероятностью $p_{i,j}$ ($\sum_{j=1}^N p_{i,j} = 1, i = \overline{1, N}$). Не ограничивая общности рассуждений, будем считать $p_{i,i} = 0, i = \overline{1, N}$.

Заявки обслуживаются в порядке поступления. Предполагается, что в начальный момент временно неактивные заявки в сети отсутствуют.

Для замкнутых сетей показано, что в случае неприводимости матрицы маршрутизации $(p_{i,j})$ система уравнений трафика

$$\varepsilon_j = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i p_{i,j}, \quad j = \overline{1, N}, \quad (1)$$

имеет единственное с точностью до постоянного множителя положительное решение ε_j [3].

Процесс $z(t)$ – однородный марковский процесс с непрерывным временем и пространством состояний Z .

Предположим, что изолированный i -й узел сети имеет конечную емкость M . Это значит, что если поступающая заявка застаёт узел в состоянии (n_i, n'_i, l_i) , для которого $n_i + n'_i = M$, то она покидает систему.

Обозначим через $p_i^M(z_i)$ стационарное распределение изолированного i -го узла, которое, вообще говоря, может отличаться от стационарного распределения i -го узла сети. Уравнения обратимости для изолированного i -го узла сети принимают вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_i p_i^M(n_i - 1, n'_i, l_i) &= p_i^M(n_i, n'_i, l_i) \mu_i, \\ v_i p_i^M(n_i + 1, n'_i - 1, l_i) &= \varphi_i p_i^M(n_i, n'_i, l_i), \\ \tau_i p_i^M(n_i, n'_i, l_i - 1) &= \rho_i p_i^M(n_i, n'_i, l_i), \\ & i = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (2)$$

Из уравнений обратимости (2) находим стационарное распределение вероятностей состояний изолированного узла:

$$p_i^M(n_i, n'_i, l_i) = \left(\frac{\varepsilon_i}{\mu_i} \right)^{n_i} \left(\frac{\varepsilon_i v_i}{\mu_i \varphi_i} \right)^{n'_i} \left(\frac{\tau_i}{\rho_i} \right)^{l_i} p_i^M(0, 0, 0).$$

Здесь ε_i – решение системы уравнений трафика (1).

Пусть $\{p(z), z \in Z\}$ – стационарное распределение вероятностей состояний процесса $z(t)$. Уравнения равновесия для стационарных вероятностей имеют вид

$$p(z) \sum_{i=1}^N \left(\mu_i I_{[n_i \neq 0]} + v_i I_{[n'_i \neq 0]} + \varphi_i I_{[n'_i \neq 0]} + \tau_i I_{[l_i \neq r_i]} + \rho_i I_{[l_i \neq 0]} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^N \left(p([n_i - 1, n'_i + 1, l_i]) \varphi_i I_{[n_i \neq 0]} + p([n_i + 1, n'_i - 1, l_i]) \nu_i I_{[n'_i \neq 0]} \right) + \\
&\quad + \sum_{i=1}^N \left(p([n_i, n'_i, l_i + 1]) \rho_i I_{[l_i \neq r_i]} + p([n_i, n'_i, l_i - 1]) \tau_i I_{[l_i \neq 0]} \right) + \\
&\quad + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N p([n_i - 1, n'_i, l_i], [n_j + 1, n'_j, l_j]) \mu_j p_{j,i} I_{[n_i \neq 0]}. \tag{3}
\end{aligned}$$

Здесь в квадратных скобках указан узел, в котором произошли изменения, например,

$$p([n_i - 1, n'_i + 1, l_i]) = p((n_1, n'_1, l_1), \dots, (n_i - 1, n'_i + 1, l_i), \dots, (n_N, n'_N, l_N)).$$

Т е о р е м а. *Марковский процесс $z(t)$ эргодичен, а стационарное распределение вероятностей состояний процесса имеет вид*

$$p((n_1, n'_1, l_1), \dots, (n_N, n'_N, l_N)) = \frac{1}{G(M, N)} p_1(n_1, n'_1, l_1) \dots p_N(n_N, n'_N, l_N). \tag{4}$$

Здесь вероятности $p_i(n_i, n'_i, l_i)$ могут быть выбраны как стационарные вероятности состояний изолированного i -го узла емкости M , $G(M, N)$ – нормирующая константа, находящаяся из условия

$$\sum_{((n_1, n'_1, l_1), \dots, (n_N, n'_N, l_N)) \in Z} p((n_1, n'_1, l_1), \dots, (n_N, n'_N, l_N)) = 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Эргодичность марковского процесса $z(t)$ следует из эргодической теоремы Маркова.

Докажем, что (4) удовлетворяют уравнениям равновесия (3). Воспользуемся методом локального баланса. Разобьем (3) на уравнения локального равновесия:

$$\begin{aligned}
p(z) \sum_{i=1}^N (\mu_i I_{[n_i \neq 0]} + \nu_i I_{[n'_i \neq 0]}) &= \sum_{i=1}^N p([n_i - 1, n'_i + 1, l_i]) \varphi_i I_{[n_i \neq 0]} + \\
&+ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N p([n_i - 1, n'_i, l_i], [n_j + 1, n'_j, l_j]) \mu_j p_{j,i} I_{[n_i \neq 0]}; \tag{5}
\end{aligned}$$

$$p(z) \sum_{i=1}^N \varphi_i I_{[n'_i \neq 0]} = \sum_{i=1}^N p([n_i + 1, n'_i - 1, l_i]) \nu_i I_{[n'_i \neq 0]}; \tag{6}$$

$$p(z) \sum_{i=1}^N (\tau_i I_{[l_i \neq r_i]} + \rho_i I_{[l_i \neq 0]}) = \sum_{i=1}^N (p([n_i, n'_i, l_i + 1]) \rho_i I_{[l_i \neq r_i]} + p([n_i, n'_i, l_i - 1]) \tau_i I_{[l_i \neq 0]}). \tag{7}$$

Подставим (4) в уравнение локального баланса (5), разделим обе части на $p(z) = p((n_1, n'_1, l_1), \dots, (n_N, n'_N, l_N))$, получим:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^N (\mu_i I_{[n_i \neq 0]} + \nu_i I_{[n'_i \neq 0]}) = \\
&= \sum_{i=1}^N \frac{p_i(n_i - 1, n'_i + 1, l_i)}{p_i(n_i, n'_i, l_i)} \varphi_i I_{[n_i \neq 0]} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{p_i(n_i - 1, n'_i, l_i) p_j(n_j + 1, n'_j, l_j)}{p_i(n_i, n'_i, l_i) p_j(n_j, n'_j, l_j)} \mu_j p_{j,i} I_{[n_i \neq 0]} = \\
&= \sum_{i=1}^N \frac{\mu_i}{\varepsilon_i} \frac{\varepsilon_i \nu_i}{\mu_i \varphi_i} \varphi_i I_{[n_i \neq 0]} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\mu_i}{\varepsilon_i} \frac{\varepsilon_j}{\mu_j} \mu_j p_{j,i} I_{[n_i \neq 0]} = \sum_{i=1}^N (\mu_i I_{[n_i \neq 0]} + \nu_i I_{[n'_i \neq 0]}).
\end{aligned}$$

Подставим (4) в уравнение локального баланса (6), разделим обе части на $p(z) = p((n_1, n'_1, l_1), \dots, (n_N, n'_N, l_N))$, получим:

$$\sum_{i=1}^N \varphi_i I_{[n'_i \neq 0]} = \sum_{i=1}^N \frac{p_i(n_i + 1, n'_i - 1, l_i)}{p_i(n_i, n'_i, l_i)} v_i I_{[n'_i \neq 0]} = \sum_{i=1}^N \frac{\varepsilon_i \mu_i \varphi_i}{\mu_i \varepsilon_i v_i} v_i I_{[n'_i \neq 0]} = \sum_{i=1}^N \varphi_i I_{[n'_i \neq 0]}.$$

Подставим (4) в уравнение локального баланса (7), разделим обе части на $p(z) = p((n_1, n'_1, l_1), \dots, (n_N, n'_N, l_N))$, получим:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N (\tau_i I_{[l_i \neq r_i]} + \rho_i I_{[l_i \neq 0]}) &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{p_i(n_i, n'_i, l_i + 1)}{p_i(n_i, n'_i, l_i)} \rho_i I_{[l_i \neq r_i]} + \frac{p_i(n_i, n'_i, l_i - 1)}{p_i(n_i, n'_i, l_i)} \tau_i I_{[l_i \neq 0]} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{\tau_i}{\rho_i} \rho_i I_{[l_i \neq r_i]} + \frac{\rho_i}{\tau_i} \tau_i I_{[l_i \neq 0]} \right) = \sum_{i=1}^N (\tau_i I_{[l_i \neq r_i]} + \rho_i I_{[l_i \neq 0]}). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Литература

1. Якубович О. В., Дудовская Ю. Е. // Проблемы физики, математики и техники. 2014. № 1 (18). С. 85–89.
2. Boyarovich Yu. S. // Automation and Remote Control. 2012. Vol. 73. P. 1616–1623.
3. Gordon W. J. // Oper. Res. 1967. N 15. P. 252–267.

J. S. KRUK, Yu. E. DUDOVSKAYA

STATIONARY DISTRIBUTION OF A CLOSED QUEUEING NETWORK WITH NON-ACTIVE CUSTOMERS AND MULTIMODE SERVICE STRATEGIES

Summary

A stationary distribution of condition probabilities of a closed queueing network is investigated. Devices of network nodes can operate in several modes. There are two types of customers in network nodes: ordinary (active) customers and temporarily non-active customers. There are input flows of signals that allow customers to change their state: from the non-active state to the state when they can receive service and vice versa.

УДК 519.2

Е. Е. ЖУК

**СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОТНЕСЕНИЕ РЕАЛИЗАЦИЙ
СТАЦИОНАРНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ К КЛАССАМ,
ОПРЕДЕЛЕННЫМ В ПРОСТРАНСТВЕ КОВАРИАЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ**

Белорусский государственный университет

(Поступила в редакцию 20.02.2015)

1. Математическая модель и постановка задачи. Пусть $\{x_t\}_{t \in Z}$ ($Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ – множество целых чисел) – стационарный в широком смысле временной ряд (ВР) [1, 2] с отсчетами $x_t \in R$, $t \in Z$, имеющими нулевое математическое ожидание:

$$E\{x_t\} = 0, \quad t \in Z, \quad (1)$$

и ковариационную функцию

$$\sigma(\tau) = \sigma(-\tau) = \text{Cov}\{x_t, x_{t+\tau}\} = E\{x_t x_{t+\tau}\}, \quad t, \tau \in Z, \quad (2)$$

а дисперсия отсчетов конечна: $D\{x_t\} = \sigma(0) < +\infty$.

ВР $\{x_t\}_{t \in Z}$ с учетом (1), (2) при весьма общих условиях регулярности представим в следующем виде [1, 2]:

$$x_t + \sum_{j=1}^{+\infty} \beta_j x_{t-j} = u_t, \quad t \in Z; \quad \sum_{j=1}^{+\infty} \beta_j^2 < +\infty, \quad (3)$$

где случайные величины $\{u_t\}_{t \in Z}$ (ошибки наблюдений [1, 2]) некоррелированы и имеют нулевые математические ожидания и одинаковую ограниченную дисперсию:

$$E\{u_t\} = 0, \quad D\{u_t\} = E\{u_t^2\} = \sigma^2 < +\infty; \\ E\{u_t u_l\} = 0, \quad \forall t, l \in Z, \quad l \neq t. \quad (4)$$

Разложение (3), (4) представляет собой авторегрессию бесконечного порядка [1, 2] и однозначно определяется коэффициентами авторегрессии $\beta = (\beta_j)_{j=1}^{+\infty}$.

С другой стороны, значения ковариационной функции $\sigma(\tau)$, $\tau \in Z$, из (2) взаимнооднозначно связаны с коэффициентами $\beta = (\beta_j)_{j=1}^{+\infty}$ так называемыми уравнениями Юла – Уокера [1, 2]:

$$\sigma(\tau) + \sum_{j=1}^{+\infty} \beta_j \sigma(\tau - j) = 0, \quad \tau \geq 1,$$

и ковариационная функция (2), в свою очередь, тоже однозначно определяет ВР $\{x_t\}_{t \in Z}$.

В условиях регулярности также сходится ряд [1, 2]:

$$\sum_{\tau=1}^{+\infty} |\sigma(\tau)| < +\infty, \quad (5)$$

что на практике означает «затухание» ковариационной функции $\sigma(\tau)$ с ростом лага τ :

$$\sigma(\tau) \rightarrow 0, \tau \rightarrow +\infty, \quad (6)$$

и имеет простой содержательный смысл: зависимость между отсчетами x_t и $x_{t+\tau}$ уменьшается с ростом расстояния между ними по времени (по лагу τ).

Пусть задано $L \geq 2$ классов $\{\Omega_i\}_{i \in S}$ стационарных в широком смысле ВР ($S = \{1, \dots, L\}$ – множество номеров классов), определяемых своими ковариационными функциями $\{\sigma_{(i)}(\tau), \tau \in Z\}_{i \in S}$ [3]. Наблюдается реализация $X = \{x_t\}_{t=1}^T$ длительности T некоторого произвольного стационарного ВР, ковариационная функция $\sigma(\tau), \tau \in Z$, которого неизвестна и, в отличие от [3], вообще говоря, не совпадает ни с одной из ковариационных функций $\{\sigma_{(i)}(\cdot)\}_{i \in S}$ (данный ВР не принадлежит ни к одному из классов $\{\Omega_i\}_{i \in S}$). Задача состоит в отнесении [4, 5] этого ВР к одному из классов $\{\Omega_i\}_{i \in S}$ по имеющейся реализации $X = \{x_t\}_{t=1}^T$. Предварительно необходимо определить критерий эффективности – принцип, по которому будет производиться отнесение.

2. Решающее правило в пространстве ковариационных функций и его риск. В предположении, что ковариационные функции $\{\sigma_{(i)}(\cdot)\}_{i \in S}$, определяющие классы $\{\Omega_i\}_{i \in S}$, также удовлетворяют условиям (5), (6):

$$\sigma_{(i)}(\tau) \rightarrow 0, \tau \rightarrow +\infty, i \in S, \quad (7)$$

выберем N – максимальное значение лага, при котором мы еще будем учитывать значения ковариационных функций, считая их отличными от нуля, что характеризуется величиной [3]:

$$\varepsilon(N) = \max\{|\sigma_{(i)}(\tau)|: \tau > N, i \in S\} \rightarrow 0, N \rightarrow +\infty.$$

Пусть N «значительно меньше» длительности T подлежащей отнесению реализации $X = \{x_t\}_{t=1}^T$:

$$\frac{N}{T} \rightarrow 0, N \rightarrow +\infty, T \rightarrow +\infty. \quad (8)$$

Заменим реализацию $X = \{x_t\}_{t=1}^T$ на статистическую оценку по ней первых $N+1$ ковариаций $\sigma^{N+1} = (\sigma(0), \sigma(1), \dots, \sigma(N))' \in R^{N+1}$ ($\sigma(0) = D\{x_t\}$ – дисперсия отсчетов, а «'» – символ транспонирования):

$$\hat{\sigma}^{N+1} = (\hat{\sigma}(0), \hat{\sigma}(1), \dots, \hat{\sigma}(N))' \in R^{N+1}, \quad \hat{\sigma}(\tau) = \frac{1}{T-\tau} \sum_{t=1}^{T-\tau} x_t x_{t+\tau}, \tau = \overline{0, N}, \quad (9)$$

$\hat{\sigma}(\tau)$ – известная непараметрическая оценка [1–3] про реализации X ковариации $\sigma(\tau)$ с лагом τ .

Как и в [3], в условиях (6), (7) для отнесения реализации X к одному из классов $\{\Omega_i\}_{i \in S}$ будем использовать решающее правило (РП) следующего вида:

$$d = d(\hat{\sigma}^{N+1}; \{\sigma_{(i)}^{N+1}\}_{i \in S}) = \arg \min_{i \in S} |\hat{\sigma}^{N+1} - \sigma_{(i)}^{N+1}|, \quad (10)$$

где $\sigma_{(i)}^{N+1} = (\sigma_{(i)}(0), \sigma_{(i)}(1), \dots, \sigma_{(i)}(N))' \in R^{N+1}$ – $(N+1)$ -вектор ковариаций, описывающий класс Ω_i («центр» [2, 3] i -го класса), а само РП (10) является так называемым РП L -средних [2, 3] в метрике Евклида ($\|z\| = \sqrt{z'z}$ – евклидова норма вектора $z \in R^p$). Содержательный смысл РП (10) очевиден: оно относит временной ряд $\{x_t\}_{t \in Z}$ по его реализации $X = \{x_t\}_{t=1}^T$ к тому классу с номером $d \in S$, к «центру» которого ближе всего оценка ковариаций $\hat{\sigma}^{N+1}$ из (9).

Определим теперь меру эффективности РП (10). Как и в [4, 5], будем использовать обобщение традиционного риска [2, 3]:

$$r_T = P\{d(\hat{\sigma}^{N+1}; \{\sigma_{(i)}^{N+1}\}_{i \in S}) \notin D^o\}, \quad D^o = \left\{k: \left|\sigma^{N+1} - \sigma_{(k)}^{N+1}\right| = \min_{i \in S} \left|\sigma^{N+1} - \sigma_{(i)}^{N+1}\right|\right\}, \quad (11)$$

где $D^o \subseteq S$ – множество номеров тех классов из $\{\Omega_i\}_{i \in S}$, к которым ВР $\{x_t\}_{t \in Z}$ ближе всего в смысле расстояний Евклида между истинным значением вектора ковариаций σ^{N+1} и «центрами» классов $\{\sigma_{(i)}^{N+1}\}_{i \in S}$ (учтено, что могут быть совпадающие по значению расстояния).

Чем меньше риск r_T из (11) ($0 \leq r_T \leq 1$ – вероятность не отнести ВР к ближайшему классу), тем эффективнее РП (10).

3. Асимптотическое вычисление риска. Случай двух классов. Исследуем риск (11) РП (10) в условиях асимптотики (8). Сформулируем сначала вспомогательный результат относительно оценки (9) [1, 3]. Представление (3), (4) можно переписать в виде так называемого разложения Вольда [1–3]:

$$x_t = \sum_{j=1}^{+\infty} \gamma_j u_{t-j} + u_t, \quad t \in Z, \quad (12)$$

где коэффициенты $\gamma = (\gamma_j)_{j=1}^{+\infty}$ связаны с коэффициентами авторегрессии $\beta = (\beta_j)_{j=1}^{+\infty}$ из (3) соотношениями [1] ($\gamma_0 := 1, \beta_0 := 1$):

$$\sum_{j=0}^{\tau} \beta_{\tau-j} \gamma_j = 0, \quad \tau \geq 1. \quad (13)$$

Введем обозначения:

$$n_p(z | \mu, \Sigma) = (2\pi)^{-\frac{p}{2}} (\det(\Sigma))^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(z - \mu)' \Sigma^{-1}(z - \mu)\right), \quad z \in R^p,$$

– плотность p -мерного нормального (гауссовского) закона распределения вероятностей (закон $N_p(\mu, \Sigma)$ [2]) с вектором математического ожидания $\mu \in R^p$ и невырожденной ковариационной ($p \times p$)-матрицей Σ ($\det(\Sigma) \neq 0$).

Л е м м а. Пусть значения коэффициентов $\gamma = (\gamma_j)_{j=1}^{+\infty}$ в (12), (13) таковы, что сходится ряд: $\sum_{j=1}^{+\infty} |\gamma_j| < +\infty$, а случайные величины $\{u_t\}_{t \in Z}$ независимы в совокупности и одинаково распределены по нормальному закону $N_1(0, \sigma^2)$, $0 < \sigma^2 < +\infty$, тогда статистическая оценка $\hat{\sigma}^{N+1}$ из (9) асимптотически нормально распределена:

$$L\left\{\sqrt{T}(\hat{\sigma}^{N+1} - \sigma^{N+1})\right\} \rightarrow N_{N+1}(0_{N+1}, \Sigma_{N+1, N+1}), \quad T \rightarrow +\infty, \quad (14)$$

где 0_{N+1} – нулевой $(N+1)$ -вектор, а ковариационная $((N+1) \times (N+1))$ -матрица $\Sigma_{N+1, N+1}$ задается соотношениями:

$$\Sigma_{N+1, N+1} = (w_{kl})_{k, l=0}^N: \quad w_{kl} = w_{lk} = \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} \sigma(\tau)(\sigma(\tau+l-k) + \sigma(\tau-l-k)), \quad 0 \leq k \leq l \leq N. \quad (15)$$

Вычислим теперь риск r_T из (11). Отметим, что если $D^o = S$, то $r_T = 0, \forall T$, и принимаемое РП (10) решение не существенно. Если множество D^o состоит из одного элемента (один ближайший класс), то риск (11) упрощается:

$$r_T = P\{d(\hat{\sigma}^{N+1}; \{\sigma_{(i)}^{N+1}\}_{i \in S}) \neq d^o\}, \quad d^o = \arg \min_{i \in S} |\sigma^{N+1} - \sigma_{(i)}^{N+1}|, \quad (16)$$

где $d^o \in S$ – истинный номер ближайшего класса.

Т е о р е м а. Пусть в условиях леммы у ВР $\{x_t\}_{t \in Z}$ один ближайший класс среди $\{\Omega_i\}_{i \in S}$:

$$\exists d^o \in S: \left| \sigma^{N+1} - \sigma_{(d^o)}^{N+1} \right| < \left| \sigma^{N+1} - \sigma_{(i)}^{N+1} \right|, \quad \forall i \in S, i \neq d^o, \quad (17)$$

тогда риск r_T РП (10) удовлетворяет асимптотическому соотношению:

$$r_T / \tilde{r}_T \rightarrow 1, T \rightarrow +\infty; \quad (18)$$

$$\tilde{r}_T = 1 - \int_{R^{N+1}} \prod_{\substack{j \in S \\ j \neq d^o}} U \left(\left| z - \sigma_{(j)}^{N+1} \right| - \left| z - \sigma_{(d^o)}^{N+1} \right| \right) n_{N+1} \left(z \mid \sigma^{N+1}, \frac{1}{T} \Sigma_{N+1, N+1} \right) dz,$$

где $U(y) = \{1, \text{ если } y \geq 0; 0, \text{ если } y < 0\}$ – единичная функция Хэвисайда, $\Sigma_{N+1, N+1}$ – ковариационная матрица из (15), а $d^o \in S$ – номер ближайшего класса из (16).

Д о к а з а т е л ь с т в о. В условиях (17) риск r_T РП (10) задается соотношениями (16), и для него справедлива цепочка равенств:

$$\begin{aligned} r_T &= \mathbf{P}\{d(\hat{\sigma}^{N+1}; \{\sigma_{(i)}^{N+1}\}_{i \in S}) \neq d^o\} = 1 - \mathbf{P}\{d(\hat{\sigma}^{N+1}; \{\sigma_{(i)}^{N+1}\}_{i \in S}) = d^o\} = \\ &= 1 - \mathbf{P} \left\{ \bigcap_{\substack{j \in S \\ j \neq d^o}} \left\{ \left| \hat{\sigma}^{N+1} - \sigma_{(j)}^{N+1} \right| \geq \left| \hat{\sigma}^{N+1} - \sigma_{(d^o)}^{N+1} \right| \right\} \right\}, \end{aligned}$$

откуда, воспользовавшись результатом (14) леммы, и устанавливаем справедливость (18).

С л е д с т в и е 1. Пусть в условиях теоремы число классов равно двум ($L = 2, S = \{1, 2\}$), тогда

$$\tilde{r}_T = \Phi \left(-\sqrt{T} \frac{\left| \sigma_{(1)}^{N+1} - \sigma_{(1)}^{N+1} \right|^2 - \left| \sigma_{(1)}^{N+1} - \sigma_{(2)}^{N+1} \right|^2}{2\Delta} \right), \quad (19)$$

где $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy$, $z \in R$ – функция распределения вероятностей стандартного нормального закона $N_1(0, 1)$, а величина

$$\Delta = \sqrt{(\sigma_{(1)}^{N+1} - \sigma_{(2)}^{N+1})' \Sigma_{N+1, N+1} (\sigma_{(1)}^{N+1} - \sigma_{(2)}^{N+1})} \quad (20)$$

– аналог межклассового расстояния Махаланобиса [2].

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $L = 2$ из (18) получаем:

$$\tilde{r}_T = \begin{cases} 1 - \mathbf{P} \left\{ \left| \xi - \sigma_{(2)}^{N+1} \right|^2 - \left| \xi - \sigma_{(1)}^{N+1} \right|^2 \geq 0 \right\}, & \text{если } d^o = 1; \\ \mathbf{P} \left\{ \left| \xi - \sigma_{(2)}^{N+1} \right|^2 - \left| \xi - \sigma_{(1)}^{N+1} \right|^2 \geq 0 \right\}, & \text{если } d^o = 2, \end{cases} \quad (21)$$

где случайный $(N+1)$ -вектор $\xi \in R^{N+1}$ распределен по нормальному закону $N_{N+1}(\sigma^{N+1}, \Sigma_{N+1, N+1} / T)$.

Преобразуем левую часть неравенства из (21):

$$\left| \xi - \sigma_{(2)}^{N+1} \right|^2 - \left| \xi - \sigma_{(1)}^{N+1} \right|^2 = 2 \left(\xi - \frac{\sigma_{(1)}^{N+1} + \sigma_{(2)}^{N+1}}{2} \right)' (\sigma_{(1)}^{N+1} - \sigma_{(2)}^{N+1}) \in R \quad (22)$$

– случайная величина, линейная по ξ , и поэтому также имеющая нормальное распределение со следующими математическим ожиданием и дисперсией:

$$\left| \sigma_{(1)}^{N+1} - \sigma_{(2)}^{N+1} \right|^2 - \left| \sigma_{(1)}^{N+1} - \sigma_{(1)}^{N+1} \right|^2, \quad 4(\sigma_{(1)}^{N+1} - \sigma_{(2)}^{N+1})' \Sigma_{N+1, N+1} (\sigma_{(1)}^{N+1} - \sigma_{(2)}^{N+1}) / T = 4\Delta^2 / T,$$

где Δ – величина из (20).

С учетом нормировки случайной величины (22) до стандартного нормального закона $N_1(0,1)$ и известного свойства: $1 - \Phi(z) = \Phi(-z)$, $z \in R$, из (21) имеем:

$$\tilde{r}_T = \begin{cases} \Phi \left(-\sqrt{T} \frac{|\sigma^{N+1} - \sigma_{(2)}^{N+1}|^2 - |\sigma^{N+1} - \sigma_{(1)}^{N+1}|^2}{2\Delta} \right), & \text{если } d^o = 1; \\ \Phi \left(\sqrt{T} \frac{|\sigma^{N+1} - \sigma_{(2)}^{N+1}|^2 - |\sigma^{N+1} - \sigma_{(1)}^{N+1}|^2}{2\Delta} \right), & \text{если } d^o = 2, \end{cases}$$

откуда из условия (17) и получаем (19).

С л е д с т в и е 2. Для \tilde{r}_T из (19) справедлива оценка сверху:

$$\tilde{r}_T \leq \tilde{r}_T^+, \quad \tilde{r}_T^+ = \Phi \left(-\sqrt{T} \frac{\left| \sum_{\tau=0}^N \left(|\sigma(\tau) - \sigma_{(1)}(\tau)|^2 - |\sigma(\tau) - \sigma_{(2)}(\tau)|^2 \right) \right|}{2\sqrt{2(\sigma(0))^2 + 4 \sum_{h=1}^{+\infty} (\sigma(h))^2} \sum_{\tau=0}^N |\sigma_{(1)}(\tau) - \sigma_{(2)}(\tau)|} \right). \quad (23)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость (23) непосредственно следует из (19) и полученной в [3] оценки сверху для величин типа Δ^2 :

$$\Delta^2 \leq 2 \left((\sigma(0))^2 + 2 \sum_{h=1}^{+\infty} (\sigma(h))^2 \right) \left(\sum_{\tau=0}^N |\sigma_{(1)}(\tau) - \sigma_{(2)}(\tau)| \right)^2.$$

Практическая значимость полученных выше асимптотических результатов состоит в том, что они при больших длительностях реализаций ($T \rightarrow +\infty$) позволяют приближенно вычислить риск: $r_T \approx \tilde{r}_T$ (на основе выражений для \tilde{r}_T из (18), (19)) или оценить его сверху (используя (23)).

Из (19) следует, что $r_T \rightarrow 0$, $T \rightarrow +\infty$: с ростом длительности подлежащей отнесению реализации эффективность принимаемых решений повышается (значение риска уменьшается). Из (19) также видно, что риск уменьшается при увеличении различия между собой расстояний $|\sigma^{N+1} - \sigma_{(1)}^{N+1}|$ и $|\sigma^{N+1} - \sigma_{(2)}^{N+1}|$ между вектором ковариаций σ^{N+1} подлежащего отнесению ВР и векторами ковариаций $\sigma_{(1)}^{(N+1)}$ и $\sigma_{(2)}^{(N+1)}$ – «центрами» классов.

Отметим, что при $|\sigma^{N+1} - \sigma_{(1)}^{N+1}| = |\sigma^{N+1} - \sigma_{(2)}^{N+1}|$ риск заведомо равен нулю: $r_T = 0$, $\forall T$, а выражение (19) приводит к неверному результату, поскольку получено в предположении (17): $|\sigma^{N+1} - \sigma_{(1)}^{N+1}| \neq |\sigma^{N+1} - \sigma_{(2)}^{N+1}|$.

Литература

1. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов. М., 1976.
2. Харин Ю. С., Жук Е. Е. Математическая и прикладная статистика. Минск, 2005.
3. Жук Е. Е. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2004. № 4. С. 26–30.
4. Жук Е. Е. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2012. № 4. С. 37–41.
5. Жук Е. Е. // Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и их приложения. Минск, 2014. С. 59–63.

Е. Е. ЖУК

STATISTICAL ASSIGNMENT OF REALIZATIONS OF THE STATIONARY TIME SERIES TO THE CLASSES DETERMINED IN A SPACE OF COVARIANCE FUNCTIONS

Summary

The problem of statistical assignment of realizations of the stationary time series to the fixed classes is considered. The decision rule in a space of covariance functions is proposed and its efficiency is investigated analytically. The case of two classes is studied.

УДК 532.5.011.12

С. С. КАЯНОВИЧ

РАЗРЕШИМОСТЬ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ МОДЕЛИ СТЕРЖНЕВОГО ТЕЧЕНИЯ

*Минский государственный высший радиотехнический колледж**(Поступила в редакцию 19.12.2014)*

Введение. Систематическое изложение вопросов разрешимости краевых задач для уравнений Навье – Стокса, описывающих движение вязких несжимаемых жидкостей, было дано в работе [1], где в разделе «Добавление» отмечалось, что вопрос о том, имеет ли место однозначная разрешимость «в целом» начально-краевой задачи для этих уравнений, остается открытым. Поэтому в статье [2] было предложено для описания течений вязкой жидкости брать модифицированные уравнения, которые содержат слагаемые с малым положительным коэффициентом ε , отсутствующие в уравнениях Навье – Стокса.

В связи с тем, что для модифицированных уравнений теорема существования решения имеет место, нами [3] исследовалась разностная схема для этих уравнений, но она не содержала градиента давления. В работе [4] рассматривались разностные схемы для классических уравнений, при этом исследования проводились в переменных скорость-давление.

Впервые исследования разрешимости дифференциальной модели стержневого течения были представлены в работе [5], однако они выполнялись при жестких предположениях относительно поведения искомым функций на границе области поиска решения, что уменьшало полученный результат. Это заставило обратить более пристальное внимание на граничные условия [6–8].

Как следует из [2], основная трудность исследования разрешимости модели Навье – Стокса связана с большими градиентами скоростей, которые имеют место у границ с условиями прилипания. Поэтому в [5–9] акцент делался на граничные условия. В других же работах он переносился на переменную по времени или же рассматривалось течение сжимаемой жидкости. Так, например, в [10] изучалось решение начальной задачи (задачи Коши), в [11] – поведение решений во времени при начальном условии из пространства Соболева, в [12, 13] – сжимаемые жидкости.

В настоящей работе проводится исследование разрешимости уравнений работы [9] без предположений, выдвинутых в [5]. Производная по времени, которая присутствует в уравнении количества движения, заменяется разностной производной, как это делается в методе Рунге [14], и это уравнение становится дифференциально-разностным. В этой дифференциально-разностной модели на каждом из полученных временных слоев уравнение количества движения теперь является уравнением эллиптического типа, для которого справедлива теорема Шаудера [15, 16], позволяющая доказать разрешимость.

Рассматриваемая система уравнений описывает течения, где поперечная компонента скорости и ее производная в поперечном направлении не равны тождественно нулю [9]. Область течения, в которой эта производная отрицательна, называется стержнем течения, а само течение – стержневым. Следует отметить, что решение системы, рассматриваемой в [9], если оно существует, удовлетворяет всем уравнениям модели Навье – Стокса.

1. Постановка задачи. Примем следующие обозначения:

$$x = (x_1, x_2), \quad 0 \leq x_1 \leq L, \quad 0 \leq x_2 \leq H, \quad 0 \leq t \leq T, \quad \Omega = (0, L) \times (0, H),$$

$$S_1 = [0 \leq x_1 \leq L, x_2 = 0], \quad S_2 = [0 \leq x_1 \leq L, x_2 = H], \quad S_3 = [x_1 = 0, 0 \leq x_2 \leq H], \quad S_4 = [x_1 = L, 0 \leq x_2 \leq H],$$

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 - \text{граница } \Omega, \quad \bar{\Omega} = \Omega \cup S, \quad \Omega_T = \Omega \times (0, T], \quad S_T = S \times [0, T], \quad \bar{\Omega}_T = \bar{\Omega} \times [0, T],$$

и рассмотрим задачу (плотность $\rho = 1$):

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \nu \sum_{k=1}^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_k^2} - \sum_{k=1}^2 u_k \frac{\partial u_1}{\partial x_k} - \frac{\partial p}{\partial x_1}, \quad (x, t) \in \Omega_T; \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0, \quad x \in [0, L] \times (0, H); \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x_k^2} + \sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = 0, \quad x \in \Omega; \quad (3)$$

$$u_1|_{t=0} = \bar{b}(x), \quad x \in \bar{\Omega}; \quad (4)$$

$$\bar{b}|_{S_1 \cup S_2} = 0; \quad (5)$$

$$u_2|_{S_1 \cup S_2} = 0; \quad (6)$$

$$\int_0^H \frac{\partial \bar{b}(x_1, z)}{\partial x_1} dz = 0, \quad 0 \leq x_1 \leq L, \quad (7)$$

для которой краевые условия для (1) и (3) определим ниже.

При $t = 0$ функция $u_1(x, 0) = \bar{b}(x)$ задана. Найдем при $t = 0$ функцию u_2 , решая (2) с граничным условием $u_2|_{S_1} = 0$ ($0 \leq x_1 \leq L$, $0 < x_2 \leq H$),

$$u_2(x_1, x_2) = - \int_0^{x_2} \frac{\partial u_1(x_1, z)}{\partial x_1} dz.$$

Отметим, что условие $u_2|_{S_2} = 0$ выполняется автоматически, так как

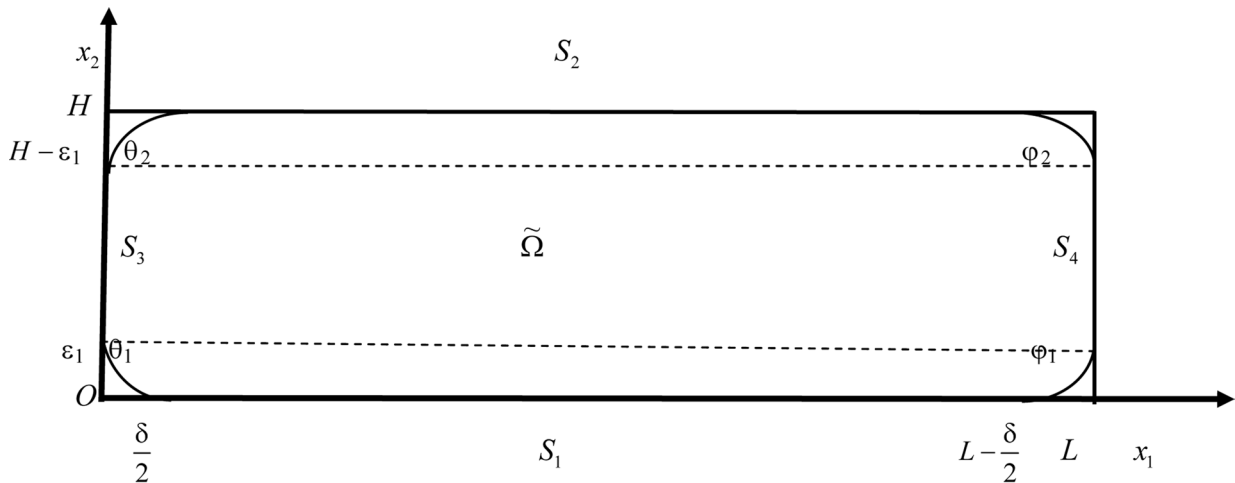
$$u_2(x_1, H) = - \int_0^H \frac{\partial u_1(x_1, z)}{\partial x_1} dz = - \int_0^H \frac{\partial \bar{b}(x_1, z)}{\partial x_1} dz = 0$$

в силу (7).

Для нахождения функций $p(x, t)$, $0 \leq t \leq T$, и $u_1(x, t)$, $0 < t \leq T$, потребуются дополнительные обозначения, определения и рисунок, на котором изображен канал и обозначены некоторые участки границ.

Пусть $\tilde{\Omega}$ – область, ограниченная кривой \tilde{S} , $\bar{\tilde{\Omega}} = \tilde{\Omega} \cup \tilde{S}$, $\tilde{S} = \tilde{S}_1 \cup \tilde{S}_2 \cup \tilde{S}_3 \cup \tilde{S}_4$, где

$$\begin{aligned} \tilde{S}_1 &= \left[0 \leq x_1 \leq \frac{\delta}{2}, x_2 = \theta_1(x_1) \right] \cup \left[\frac{\delta}{2} \leq x_1 \leq L - \frac{\delta}{2}, x_2 = 0 \right] \cup \left[L - \frac{\delta}{2} \leq x_1 \leq L, x_2 = \varphi_1(x_1) \right], \\ \tilde{S}_2 &= \left[0 \leq x_1 \leq \frac{\delta}{2}, x_2 = \theta_2(x_1) \right] \cup \left[\frac{\delta}{2} \leq x_1 \leq L - \frac{\delta}{2}, x_2 = H \right] \cup \left[L - \frac{\delta}{2} \leq x_1 \leq L, x_2 = \varphi_2(x_1) \right], \\ \tilde{S}_3 &= [x_1 = 0, \theta_1(0) \leq x_2 \leq \theta_2(0)], \quad \tilde{S}_4 = [x_1 = L, \varphi_1(L) \leq x_2 \leq \varphi_2(L)], \end{aligned}$$



$$\Omega_1 = [0 \leq x_1 \leq L, 0 < x_2 \leq \varepsilon], \quad \Omega_2 = [0 \leq x_1 \leq L, H - \varepsilon \leq x_2 < H],$$

$$\Omega' = [0 \leq x_1 \leq L, \varepsilon_1 < x_2 < H - \varepsilon_1], \quad \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2},$$

$$S'_1 = [0 \leq x_1 \leq L, x_2 = \varepsilon_1], \quad S'_2 = [0 \leq x_1 \leq L, x_2 = H - \varepsilon_1],$$

$$\theta_i(x_1), \varphi_i(x_1) \quad (i=1,2)$$

– строго монотонные функции.

Пусть, кроме того,

$$\theta_1(0) = \varphi_1(L) = \varepsilon_1, \quad \theta_2(0) = \varphi_2(L) = H - \varepsilon_1, \quad \theta_1\left(\frac{\delta}{2}\right) = \varphi_1\left(L - \frac{\delta}{2}\right) = 0, \quad \theta_2\left(\frac{\delta}{2}\right) = \varphi_2\left(L - \frac{\delta}{2}\right) = H.$$

Будем считать, что θ_2 симметрична θ_1 , а $\varphi_2 - \varphi_1$ относительно прямой $x_2 = \frac{H}{2}$. Таким образом, области $\bar{\Omega}$, $\tilde{\Omega}$ симметричны относительно той же прямой $x_2 = \frac{H}{2}$. Здесь ε , δ – малые положительные числа, $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$.

Пусть $\tilde{\Omega}_T = \tilde{\Omega} \times [0, T]$, $\tilde{S}_T = \tilde{S} \times [0, T]$, $\bar{\Omega}_T = \bar{\Omega} \times [0, T]$. Будем говорить, что функция $g(x, t)$, определенная на $\bar{\Omega}_T$, является четной (нечетной) по x_2 , если при любых $0 \leq x_1 \leq L$, $0 \leq t \leq T$ имеет место равенство

$$g(x_1, \tilde{S}_2(x_1) - x_2, t) = g(x_1, \tilde{S}_1(x_1) + x_2, t) \quad \left(g(x_1, \tilde{S}_2(x_1) - x_2, t) = -g(x_1, \tilde{S}_1(x_1) + x_2, t) \right), \quad (8)$$

где $0 \leq x_2 \leq \frac{\tilde{S}_2(x_1) - \tilde{S}_1(x_1)}{2}$. Аналогично определяется четность (нечетность) функции, заданной на $\bar{\Omega}_T$.

Будем говорить, что функция $g(s, t)$, определенная на \tilde{S}_T , является четной (нечетной) по x_2 , если при любых $0 \leq x_1 \leq L$, $0 \leq t \leq T$ имеет место равенство (8), в котором $x_2 = 0$.

Для дальнейших рассуждений нам потребуется срезающая функция, которую определим так:

$$\begin{aligned} \zeta(x) &= 1, \text{ если } \delta \leq x_1 \leq L - \delta, \quad 0 \leq x_2 \leq H, \\ 0 \leq \zeta(x) &\leq 1, \text{ если } \left[\frac{\delta}{2} \leq x_1 \leq \delta \right] \cup \left[L - \delta \leq x_1 \leq L - \frac{\delta}{2} \right], \quad 0 \leq x_2 \leq H, \\ \zeta(x) &= 0, \text{ если } \left[0 \leq x_1 \leq \frac{\delta}{2} \right] \cup \left[L - \frac{\delta}{2} \leq x_1 \leq L \right], \quad [\theta_1(x_1) \leq x_2 \leq \theta_2(x_1)] \cup [\varphi_1(x_1) \leq x_2 \leq \varphi_2(x_1)], \end{aligned} \quad (9)$$

где $x = (x_1, x_2)$, ζ – функция, четная по x_2 .

Будем полагать, что $\zeta(x) \in C_{l,\alpha}(\bar{\Omega})$, $\bar{b}(x) \in C_{l,\alpha}(\bar{\Omega})$, $\tilde{S} \in C_{l,\alpha}$ и $\bar{b}(x)$ – функция, четная по x_2 . Тогда функция u_2 , найденная выше при $t = 0$, будет удовлетворять условию $\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \in C_{l-1,\alpha}(\bar{\Omega})$ и будет нечетной по x_2 .

Здесь $l \geq 3$, $\alpha \in (0, 1)$, а классы функций $C_{l,\alpha}(\bar{\Omega})$, $C_{l,\alpha}(S)$ и смысл принадлежности $S \in C_{l,\alpha}$ определены в [15].

Зная функции u_1, u_2 , рассмотрим (3) с условием ($t = 0$):

$$\frac{\partial p}{\partial n} \Big|_{\tilde{S}} = \zeta(s) \sum_{j=1}^2 \omega_j(s) \cos \alpha_j, \quad s \in \tilde{S},$$

где $\frac{\partial p}{\partial n} \Big|_{\tilde{S}}$ – производная по направлению вектора \bar{n} внутренней нормали к \tilde{S} , α_i – угол между вектором \bar{n} и осью Ox_i , $\omega_i = \nu \sum_{k=1}^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} - \sum_{k=1}^2 u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}$.

Условие разрешимости

$$\int_{\tilde{S}} \zeta(s) \sum_{j=1}^2 \omega_j(s) \cos \alpha_j ds = 0$$

для этой задачи выполняется в силу (9) и нечетности функции u_2 по x_2 , при этом ее решение определено с точностью до произвольной постоянной [17] и принадлежит классу $C_{l-1,\alpha}(\overline{\tilde{\Omega}})$ [15]. Итак, при $t = 0$ определены все три функции u_1 , u_2 , p . Для их нахождения при $t > 0$ будем применять метод Ротэ [14].

2. Метод Ротэ. Будем вычислять приближенные решения рассматриваемой задачи методом Ротэ. Разобьем пространство (x, t) плоскостями $t_m = m\tau$, $m = 0, 1, 2, \dots, M$, на слои и предположим, ради сокращения записи, что $M\tau = T$. Пусть $\tilde{\Omega}_m$ есть сечение $\tilde{\Omega}_T$ плоскостью $t_m = m\tau$, \tilde{S}_m – его граница, $\overline{\tilde{\Omega}}_m = \tilde{\Omega}_m \cup \tilde{S}_m$.

На каждом слое $\tilde{\Omega}_m$ определим функции, которые будем обозначать $u_{1,m}, u_{2,m}, p_m, m = \overline{0, M}$. Выше было найдено решение при $t = 0$, т. е. решение $u_{1,0}, u_{2,0}, p_0$. Для нахождения функции u_1 на слоях $\tilde{\Omega}_m$ полагаем

$$u_1|_{\tilde{S}_T} = \tilde{\Psi}_1(s, t), (s, t) \in \tilde{S}_T, \text{ где } \tilde{\Psi}_1(s, t) \in C_{l,\alpha}(\tilde{S}_T), \tilde{\Psi}_1|_{t=0} = \bar{b}(s), x = s \in \tilde{S},$$

$$\tilde{\Psi}_1 = 0 \text{ при } \frac{\delta}{2} \leq x_1 \leq L - \frac{\delta}{2}, [x_2 = 0] \cup [x_2 = H], t \in [0, T],$$

и преобразуем задачу для u_1 в задачу с нулевым граничным условием.

Вводя в рассмотрение функцию $f(x, t)$, удовлетворяющую при любом $t \in [0, T]$ условию $f|_{\tilde{S}_T} = \tilde{\Psi}_1|_{\tilde{S}_T}$, и новую искомую функцию $w(x, t)$, удовлетворяющую равенству $u_1(x, t) = w(x, t) + f(x, t)$, для $w(x, t)$ получаем задачу:

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \nu \sum_{k=1}^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_k^2} + (w + f) \frac{\partial w}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial w}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial x_1} w + u_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + F(x, t) + \frac{\partial p}{\partial x_1} = 0; \quad (10)$$

$$w|_{\tilde{S}_T} = 0; \quad (11)$$

$$w|_{t=0} = \bar{b}(x) - f|_{t=0}, x \in \overline{\tilde{\Omega}}; \quad (12)$$

$$\bar{b}(x) - f|_{t=0} = 0, x = s \in \tilde{S}; \quad (13)$$

где $F(x, t) = \frac{\partial f}{\partial t} - \nu \sum_{k=1}^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} + f \frac{\partial f}{\partial x_1}$.

Вводя обозначения $g_t^-(x, t_m) = \frac{1}{\tau} (g_m - \overset{\vee}{g}_m)$, $g_m = g(x, t_m)$, $\overset{\vee}{g}_m = g(x, t_{m-1})$, полагая $w_m = u_{1,m} - f_m$ и заменяя $\frac{\partial w}{\partial t}$ на разностную производную $w_t^-(x, t_m)$, запишем уравнение (10) в виде

$$\nu \sum_{k=1}^2 \frac{\partial^2 w_m}{\partial x_k^2} - (w_m + f_m) \frac{\partial w_m}{\partial x_1} - u_{2,m} \frac{\partial w_m}{\partial x_2} - \frac{\partial f_m}{\partial x_1} w_m - \frac{\partial f_m}{\partial x_2} u_{2,m} - \frac{1}{\tau} w_m + \frac{1}{\tau} \overset{\vee}{w}_m - F_m - \frac{\partial p_m}{\partial x_1} = 0 \quad (14)$$

с граничным условием

$$w_m|_{\tilde{S}_m} = 0, \quad (15)$$

где $F_m = f_t^-(x, t_m) - \nu \sum_{k=1}^2 \frac{\partial^2 f_m}{\partial x_k^2} + f_m \frac{\partial f_m}{\partial x_1}$.

Уравнение (14) запишем в виде

$$Jw_m \equiv \nu \sum_{k=1}^2 \frac{\partial^2 w_m}{\partial x_k^2} - (w_m + f_m) \frac{\partial w_m}{\partial x_1} - u_{2,m} \frac{\partial w_m}{\partial x_2} - \left(\frac{\partial f_m}{\partial x_1} + \frac{1}{\tau} \right) w_m = \frac{\partial f_m}{\partial x_2} u_{2,m} - \frac{1}{\tau} \overset{\vee}{w}_m + F_m + \frac{\partial p_m}{\partial x_1} \quad (16)$$

и для доказательства разрешимости (16), (15) воспользуемся теоремой Шаудера [15, 16].

Пусть рассматривается уравнение

$$Lu \equiv \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^2 a_i(x) u_{x_i} + a(x) u = f(x) \quad (17)$$

с граничным условием

$$u|_S = \varphi(s). \quad (18)$$

Пусть коэффициенты уравнения (17) и свободный член f определены в ограниченной области Ω с границей S и принадлежат пространству $C_{l-2,\alpha}(\bar{\Omega})$, $l \geq 2$, $\alpha \in (0,1)$. Предполагается, что $a_{ij} = a_{ji}$ и

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \nu \sum_{i=1}^2 \xi_i^2, \quad \nu = \text{const} > 0, \quad (19)$$

т. е. уравнение эллиплично в $\bar{\Omega}$.

Т е о р е м а Шаудера. Если коэффициенты оператора L принадлежат $C_{l-2,\alpha}(\bar{\Omega})$ и a_{ij} удовлетворяют неравенству (19), если S принадлежит $C_{l,\alpha}$ и если задача (17), (18) может иметь не более одного решения в $C_{l,\alpha}(\bar{\Omega})$, тогда при любых $f \in C_{l-2,\alpha}(\bar{\Omega})$ и $\varphi \in C_{l,\alpha}(S)$ задача (17), (18) действительно имеет решение из класса $C_{l,\alpha}(\bar{\Omega})$, $l \geq 2$.

Известно [15], что если выполняется неравенство

$$\max_{\Omega} a(x) < 0, \quad (20)$$

то задача (17), (18) не может иметь более одного решения.

Будем полагать, что в $\bar{\Omega}_T$ функция $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ полуограничена снизу, т. е. справедливо неравенство

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \geq \beta = \text{const}. \quad (21)$$

Тогда при выполнении неравенства

$$\frac{1}{\tau} + \beta > 0 \quad (22)$$

и условий

$$f \in C_{l-1,\alpha}(\bar{\Omega}_m), \quad F \in C_{l-2,\alpha}(\bar{\Omega}_m), \quad \tilde{\psi}_1 \in C_{l,\alpha}(\tilde{S}_m), \quad \tilde{S}_m \in C_{l,\alpha}, \quad l \geq 3 \quad (23)$$

задача (16), (15) при $m = 1$ имеет единственное решение $w_1 \in C_{l,\alpha}(\bar{\Omega}_1)$ (теорема Шаудера). Зная w_1 , из соотношения $u_1 = w + f$ находим $u_{1,1} \in C_{l,\alpha}(\bar{\Omega}_1)$. Продолжим $u_{1,1}$, найденную на $\bar{\Omega}$, на всю область $\bar{\Omega}$, доопределив ее в четырех криволинейных треугольниках, расположенных по углам $\bar{\Omega}$. Рассмотрим, например, треугольник с вершинами $(0,0)$, $(0,\varepsilon_1)$, $\left(\frac{\delta}{2}, 0\right)$. Его криволинейная сторона задается уравнением $x_2 = \theta_1(x_1)$ ($x_1 = \theta_1^{-1}(x_2)$). Полагаем $u_{1,1}(x) = u_{1,1}(x_1, x_2) = u_{1,1}(\theta_1^{-1}(x_2), x_2)$ при $0 \leq x_1 \leq \theta_1^{-1}(x_2)$, $0 \leq x_2 \leq \varepsilon_1$. На остальные криволинейные треугольники продолжение осуществляется аналогично. Функцию $u_{1,1}(x)$ ($t = \tau$), определенную указанным образом на всей $\bar{\Omega}$, обозначаем $u_1(x)$ и решаем уравнение (2) для нахождения $u_2(x)$. Отметим, что условие вида (7) для $u_1(x)$ в общем случае не выполняется и поэтому не удастся найти функцию u_2 , удовлетворяющую условию $u_2|_{S_1 \cup S_2} = 0$, решая только уравнение (2).

Поэтому решаем (2) в областях $\Omega_1 = [0 \leq x_1 \leq L, 0 < x_2 \leq \varepsilon]$ и $\Omega_2 = [0 \leq x_1 \leq L, H - \varepsilon \leq x_2 < H]$ с граничными условиями

$$u_2|_{x_2=0} = 0 \text{ и } u_2|_{x_2=H} = 0 \quad (24)$$

соответственно.

Для любого $x_2 : 0 < x_2 \leq \varepsilon$ получаем

$$u_2(x_1, x_2) = - \int_0^{x_2} \frac{\partial u_1(x_1, z)}{\partial x_1} dz, \quad u_2(x_1, H - x_2) = - \int_H^{H-x_2} \frac{\partial u_1(x_1, z)}{\partial x_1} dz. \quad (25)$$

Затем интегрируем уравнение

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$$

в области $\Omega' = [0 \leq x_1 \leq L, \varepsilon_1 < x_2 < H - \varepsilon_1]$, $\left(\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2} \right)$ с граничными условиями

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \Big|_{x_2=\varepsilon_1} = - \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \Big|_{x_2=\varepsilon_1}, \quad u_2 \Big|_{x_2=H-\varepsilon_1} = - \int_H^{H-\varepsilon_1} \frac{\partial u_1(x_1, z)}{\partial x_1} dz. \quad (26)$$

Находим $\frac{\partial u_2(x_1, z)}{\partial z} \Big|_{z=x_2} - \frac{\partial u_2(x_1, z)}{\partial z} \Big|_{z=\varepsilon_1} = - \frac{\partial u_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1(x_1, \varepsilon_1)}{\partial x_1}$.

В силу первого равенства (26) получаем

$$\frac{\partial u_2(x_1, z)}{\partial z} \Big|_{z=x_2} = - \frac{\partial u_1(x_1, x_2)}{\partial x_1}.$$

Интегрируем последнее равенство от $H - \varepsilon_1$ до $H - x_2$ ($\varepsilon_1 < x_2 < H - \varepsilon_1$):

$$u_2(x_1, H - x_2) - u_2(x_1, H - \varepsilon_1) = - \int_{H-\varepsilon_1}^{H-x_2} \frac{\partial u_1(x_1, z)}{\partial x_1} dz. \quad (27)$$

В силу (27)

$$u_2(x_1, H - x_2) - u_2(x_1, H - \varepsilon_1) = - \int_H^{H-x_2} \frac{\partial u_1(x_1, z)}{\partial x_1} dz + \int_H^{H-\varepsilon_1} \frac{\partial u_1(x_1, z)}{\partial x_1} dz,$$

откуда, согласно второму равенству (26), находим

$$u_2(x_1, H - x_2) = - \int_H^{H-x_2} \frac{\partial u_1(x_1, z)}{\partial x_1} dz. \quad (28)$$

Заметим, что решая уравнение

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \quad x \in \Omega'$$

и используя вместо условий (26) условия

$$u_2 \Big|_{x_2=\varepsilon_1} = - \int_0^{\varepsilon_1} \frac{\partial u_1(x_1, z)}{\partial x_1} dz, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \Big|_{x_2=H-\varepsilon_1} = - \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \Big|_{x_2=H-\varepsilon_1}, \quad (29)$$

вместо (28) мы получили бы

$$u_2(x_1, x_2) = - \int_0^{x_2} \frac{\partial u_1(x_1, z)}{\partial x_1} dz. \quad (30)$$

Первое равенство (25) ($0 < x_2 \leq \varepsilon = 2\varepsilon_1$) и равенство (30) ($\varepsilon_1 < x_2 < H - \varepsilon_1$) однозначно определяют функцию u_2 при $0 < x_2 < H - \varepsilon_1$. Второе равенство (25) однозначно определяет u_2 при $H - 2\varepsilon_1 \leq x_2 < H$, но при этом u_2 определяется не интегралом (30), а интегралом (28). Необходимо

показать, что названные интегралы определяют одну и ту же функцию u_2 при тех значениях x_2 , при которых эта функция может быть найдена и по формуле вида (28), и по формуле вида (30).

При $x_2 = H - x'_2$ из (28) находим:

$$u_2(x_1, x'_2) = - \int_H^{x'_2} \frac{\partial u_1(x_1, z)}{\partial x_1} dz, \quad (31)$$

а при $x_2 = x'_2$ из (30) получаем:

$$u_2(x_1, x'_2) = - \int_0^{x'_2} \frac{\partial u_1(x_1, z)}{\partial x_1} dz. \quad (32)$$

Для доказательства равенства интегралов (31) и (32) покажем, что их разность равна нулю.

$$\int_0^{x'_2} \frac{\partial u_1(x_1, z)}{\partial x_1} dz - \int_H^{x'_2} \frac{\partial u_1(x_1, z)}{\partial x_1} dz = \int_0^{x'_2} \frac{\partial u_1(x_1, z)}{\partial x_1} dz + \int_{x'_2}^H \frac{\partial u_1(x_1, z)}{\partial x_1} dz = \int_0^H \frac{\partial u_1(x_1, z)}{\partial x_1} dz.$$

Так как в любой точке области $0 \leq x_1 \leq L$, $0 < x_2 < H$ выполняется (2) и справедливы граничные условия (24), то

$$\int_0^H \frac{\partial u_1(x_1, z)}{\partial x_1} dz = - \int_0^H \frac{\partial u_2(x_1, z)}{\partial z} dz = -u_2(x_1, H) + u_2(x_1, 0) = 0.$$

Найденная функция u_2 ($t = \tau$), будучи рассмотренной в области $\bar{\tilde{\Omega}}$, удовлетворяет условию $\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \in C_{l-1, \alpha}(\bar{\tilde{\Omega}})$ и является нечетной по x_2 .

Зная функции u_1, u_2 , рассмотрим (3) с условием ($t = \tau$):

$$\frac{\partial p}{\partial n} \Big|_{\tilde{S}} = \zeta(s) \sum_{j=1}^2 \omega_j(s) \cos \alpha_j, \quad s \in \tilde{S}, \quad (33)$$

где $\frac{\partial p}{\partial n} \Big|_{\tilde{S}}$ – производная по направлению вектора \bar{n} внутренней нормали к \tilde{S} , α_i – угол между вектором \bar{n} и осью Ox_i ,

$$\omega_i = v \sum_{k=1}^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} - \sum_{k=1}^2 u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_i}{\partial t}, \quad (34)$$

где $\frac{\partial u_i}{\partial t}$ заменена разностной производной $u_{i\tau}^{\vee}(x, t_1) = \frac{1}{\tau}(u_{i,1} - u_{i,1}^{\vee})$.

Условие разрешимости

$$\int_{\tilde{S}} \zeta(s) \sum_{j=1}^2 \omega_j(s) \cos \alpha_j ds = 0 \quad (35)$$

в случае задачи (3), (33) выполняется в силу (9) и нечетности функции u_2 по x_2 , при этом ее решение определено с точностью до произвольной постоянной [17] и принадлежит классу $C_{l-1, \alpha}(\bar{\tilde{\Omega}})$ [15]. Итак, при $t = t_1 = \tau$ найдены функции w_1, u_1, u_2, p , т. е. найдены $w_1, u_{1,1}, u_{2,1}, p_1$ на слое $\tilde{\Omega}_1$. Переходим на слой $\tilde{\Omega}_2$ и находим $w_2, u_{1,2}, u_{2,2}, p_2$, и так далее до слоя $\tilde{\Omega}_M$.

Заключение. В результате того, что из области Ω были удалены четыре криволинейных треугольника, расположенных по углам этой области, и была введена срезающая функция, разрешимость модели оказалась доказанной в области

$$\delta < x_1 < L - \delta, \quad 0 < x_2 < H,$$

которая является подобластью области Ω . Тем не менее при реализации численного метода, рассмотренного в [9], каких-либо трудностей не возникает, так как при введении в области Ω разностной сетки с шагами h_1, h_2 в направлениях Ox_1, Ox_2 соответственно всегда можно счи-

тать, что $h_1 > \delta$, $h_2 > \varepsilon$, поскольку положительные числа δ , ε могут быть выбраны сколь угодно малыми. В следующей работе будет показано, что можно выполнить предельный переход при $\tau \rightarrow 0$ ($\tau > 0$) и тем самым доказать разрешимость дифференциальной модели.

Литература

1. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М., 1970.
2. Ладыженская О. А. // Тр. МИАН СССР. 1967. Т. 102. С. 85–104.
3. Каянович С. С. // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1981. № 2. С. 36–40.
4. Абрашин В. Н., Ланко С. Л. Об одном классе разностных схем для уравнений вязкой несжимаемой жидкости в переменных скорость-давление. Минск, 1992. (Препринт / ИМ НАН Беларуси; № 1 (479)).
5. Каянович С. С. // Тр. БТИ. Сер. 5. 1993. Вып. 1. С. 35–39.
6. Каянович С. С. // Тр. БГТУ. 1995. Сер. 5. Вып. 2. С. 49–55.
7. Каянович С. С. // Материалы Респ. науч.-метод. конф., посвящ. 25-летию фак. приклад. математики и информатики БГУ. Минск, 1995. Ч. 2. С. 42.
8. Каянович С. С. // Сб. науч. ст. (По итогам работы Междунар. науч.-практ. конф., Минск, 20–21 марта 2003 г.). Минск, 2003. Ч. 4. С. 45–50.
9. Каянович С. С. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. 2013. № 3. С. 32–35.
10. Constantin P., Fefferman C. // Indiana Univ. Math. J. 1993. Vol. 42. P. 775–789.
11. Schonbek M. E. // Comm. in partial differ. equat. 1995. Vol. 20, N 1/2. P. 103–117.
12. Feireisl E., Novotny A. // J. of Mathematical Fluid Mechanics. 2001. Vol. 3/4. P. 358–392.
13. Bresch D., Desjardins B. // J. de Mathematiques Pures et Appliquees. 2007. Vol. 87, N 1. P. 57–90.
14. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967.
15. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М., 1964.
16. Schauder J. // Math. Zeitschr. 1934. Vol. 38, N 2. P. 257–283.
17. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М., 1972.

S. S. KAYANOVICH

SOLVABILITY OF THE DIFFERENTIAL MODEL OF PIVOTAL FLOW

Summary

The model of pivotal flow in the sections $\tilde{\Omega}_m$, i. e., at the values of the time t equal to $t_m = m\tau$, $m = 0, 1, 2, \dots, M$, has been considered. The existence of a unique solution in the each section $\tilde{\Omega}_m$ has been proved.

УДК 517.977

А. Е. ЛЕЩЁВ

К СЛАБЫМ УСЛОВИЯМ ОПТИМАЛЬНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

(Поступила в редакцию 28.02.2015)

Введение. Пусть f и h_i , $i = 1, 2, \dots, p$ – дважды непрерывно дифференцируемые функции из R^m в R . Введем непустое множество допустимых точек

$$C = \{y \in R^m \mid h_i(y) \leq 0, \quad i \in I, \quad h_i(y) = 0, \quad i \in I_0\},$$

где $y \in R^m$, $I = \{1, \dots, s\}$, $I_0 = \{s+1, \dots, p\}$, и рассмотрим задачу (*NLP*) нелинейного программирования $f(y) \rightarrow \min$, $y \in C$. Для задачи (*NLP*) введем функцию Лагранжа

$$L(y, \lambda) = f(y) + \langle \lambda, h(y) \rangle,$$

где $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$, $h = (h_1, \dots, h_p)$ и множество множителей Лагранжа в точке y

$$\Lambda(y) = \{\lambda \in R^p \mid \nabla_y L(y, \lambda) = 0, \quad \lambda_i \geq 0 \text{ и } \lambda_i h_i(y) = 0, \quad i \in I\}.$$

Обозначим через $I(y) = \{i \in I \mid h_i(y) = 0\}$ множество индексов, активных в точке $y \in C$ ограничений типа неравенства.

Необходимые условия оптимальности играют ключевую роль в задачах математического программирования [1–7]. Они делятся на условия оптимальности первого порядка и условия оптимальности высших порядков, из которых на практике обычно применяются условия оптимальности второго порядка, использующие производные второго порядка для функций f и h_i , $i = 1, 2, \dots, p$. В качестве необходимых условий оптимальности первого порядка в математическом программировании широко используются классические необходимые условия Куна – Таккера, требующие существования множителей Лагранжа $\lambda \in \Lambda(y)$ в оптимальной точке $y \in C$ (при этом допустимые точки y , в которых выполняются условия Куна – Таккера, называются стационарными). Большинство применяемых в математическом программировании численных алгоритмов сводится к нахождению стационарных точек. В связи с тем, что многие задачи, особенно задачи высокой размерности, имеют достаточно большое число стационарных точек, возникает проблема привлечения необходимых условий второго порядка для удаления неоптимальных стационарных точек.

Наряду с необходимыми условиями оптимальности важную роль в теории оптимизации играют условия регулярности, гарантирующие справедливость необходимых условий оптимальности в исследуемой точке $y \in C$.

Одним из наиболее известных условий регулярности является условие Мангасаряна – Фромовица, требующее, чтобы в точке $y \in C$ система векторов $\nabla h_i(y)$, $i \in I_0$ была линейно независимой и существовал вектор \bar{y}^0 такой, что $\langle \nabla h_i(y), \bar{y}^0 \rangle = 0$, $i \in I_0$, $\langle \nabla h_i(y), \bar{y}^0 \rangle < 0$, $i \in I(y)$.

Данное условие равносильно требованию

$$\Lambda_0(y) = \left\{ \lambda \in R^p \mid \sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla h_i(y) = 0, \lambda_i \geq 0, i \in I(y), \lambda_i = 0, i \in I \setminus I(y) \right\} = \{0\}.$$

Введем конусы критических направлений

$$D_C(y) = \{ \bar{y} \in R^m \mid \langle \nabla f(y), \bar{y} \rangle \leq 0, \langle \nabla h_i(y), \bar{y} \rangle \leq 0, i \in I(y), \langle \nabla h_i(y), \bar{y} \rangle = 0, i \in I_0 \},$$

$$S_C(y) = \{ \bar{y} \in R^m \mid \langle \nabla h_i(y), \bar{y} \rangle = 0, i \in I_0 \cup I(y) \}$$

в точке $y \in C$.

Для задачи (NLP) принято выделять три основных типа необходимых условий оптимальности второго порядка.

О п р е д е л е н и е 1 [8]. Пусть $y^0 \in C$ и $\Lambda(y^0) \neq \emptyset$.

1. Будем говорить, что в точке y^0 выполняется классическое необходимое условие оптимальности второго порядка (refined second-order necessary optimality condition) *RSONC*, если для любого вектора $\bar{y} \in D_C(y^0)$ найдется вектор $\lambda \in \Lambda(y^0)$ такой, что $\langle \bar{y}, \nabla_{yy}^2 L(y^0, \lambda) \bar{y} \rangle \geq 0$.

2. Будем говорить, что в точке y^0 выполняется слабое необходимое условие оптимальности второго порядка (weak second-order necessary optimality condition) *WSONC*, если существует множитель $\lambda \in \Lambda(y^0)$, при котором неравенство $\langle \bar{y}, \nabla_{yy}^2 L(y^0, \lambda) \bar{y} \rangle \geq 0$ выполняется для всех $\bar{y} \in S_C(y^0)$.

3. Будем говорить, что в точке y^0 выполняется сильное необходимое условие оптимальности второго порядка (strong second-order necessary optimality condition) *SSONC*, если при любом векторе $\lambda \in \Lambda(y^0)$ неравенство $\langle \bar{y}, \nabla_{yy}^2 L(y^0, \lambda) \bar{y} \rangle \geq 0$ выполняется для всех $\bar{y} \in D_C(y^0)$.

Условия *RSONC* изучались в [1–5] и во многих других исследованиях. Определения сильных необходимых условий восходят к работам [6, 7, 9–11]. В дальнейшем данные необходимые условия изучались в [12, 13]. Слабые необходимые условия второго порядка рассматривались с теоретической и практической точек зрения в работах [8, 11, 14–16].

Известно, что хотя необходимые условия *RSONC* и *SSONC* более эффективны для проверки стационарных точек на оптимальность, большинство практических алгоритмов, использующих необходимые условия оптимальности второго порядка, имеют дело со слабыми условиями оптимальности *WSONC* [16–18]. В частности, это относится к методам штрафных функций и методам с использованием расширенных функций Лагранжа [17–18]. Таким образом, слабые необходимые условия оптимальности второго порядка обладают значительной ценностью.

В то же время известно [16], что справедливость слабых необходимых условий оптимальности второго порядка не гарантируется традиционными условиями регулярности Мангасаряна – Фромовица без дополнительных предположений. В работе [16] предложено дополнительное условие, наличие которого вместе с условием регулярности Мангасаряна – Фромовица обеспечивает справедливость слабых необходимых условий оптимальности второго порядка в стационарных точках.

Следуя [16], будем говорить, что в точке $y^0 \in C$ выполняется слабое условие постоянного ранга (*WCR*), если $\text{rank} \{ \nabla h_i(y), i \in I_0 \cup I(y^0) \} = \text{const}$ в некоторой окрестности точки y^0 .

Целью настоящей статьи является получение слабых необходимых условий оптимальности второго порядка, имеющих более широкое применение по сравнению с условиями [8, 16].

Слабые условия оптимальности второго порядка. Следующая теорема дает слабые необходимые условия оптимальности второго порядка в задаче (NLP).

Т е о р е м а 1. Пусть точка $y^0 \in C$ является локальным решением задачи (NLP). Тогда существуют числа $\lambda_i, i = 0, 1, \dots, p$, такие, что выполнено условие

$$\lambda_0 \nabla f(y^0) + \sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla h_i(y^0) = 0, \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \dots + \lambda_p^2 = 1,$$

где $\lambda_0 \geq 0$, $\lambda_i \geq 0$, $i \in I(y^0)$, $\lambda_i = 0$, $i \in I \setminus I(y^0)$.

Если дополнительно в точке $y^0 \in C$ выполняется условие WCR, то

$$\left\langle \bar{y}, \left[\lambda_0 \nabla^2 f(y^0) + \sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla^2 h_i(y^0) \right] \bar{y} \right\rangle \geq 0 \text{ для всех } \bar{y} \in S_C(y^0).$$

Доказательство. Обозначим $h_i^+(y) = \max\{0, h_i(y)\}$ и для каждого целого положительного k введем вспомогательную задачу минимизации функции

$$G_k(y) = f(y) + \frac{k}{3} \sum_{i \in I(y^0)} (h_i^+(y))^3 + \frac{k}{2} \sum_{i \in I_0} (h_i(y))^2 + \frac{1}{4} |y - y^0|^4$$

на множестве $S = \{y \mid |y - y^0| \leq \varepsilon\}$, где $\varepsilon > 0$ такое, что $f(y^0) \leq f(y)$ и $h_i(y) < 0$, $i \in I \setminus I(y^0)$ для всех точек $y \in S \cap C$.

Пусть y^k – решение данной вспомогательной задачи. Очевидно, $G_k(y^k) \leq G_k(y^0)$ для любого k , т. е.

$$f(y^k) + \frac{k}{3} \sum_{i \in I(y^0)} (h_i^+(y^k))^3 + \frac{k}{2} \sum_{i \in I_0} (h_i(y^k))^2 + \frac{1}{4} |y^k - y^0|^4 \leq f(y^0).$$

Поскольку последовательность $\{y^k\}$ ограничена и принадлежит замкнутому множеству S , то, не убавив общности, можно считать, что $y^k \rightarrow y^* \in S$. Поскольку $f(y^k)$ ограничена на S , то $h_i^+(y^k) \rightarrow 0$ при $i \in I(y^0)$ и $h_i(y^k) \rightarrow 0$ при $i \in I_0$. Следовательно, $y^* \in C$, и тогда $f(y^0) \leq f(y^*)$.

С другой стороны, $f(y^k) + \frac{1}{4} |y^k - y^0|^4 \leq f(y^0)$ и, значит, $f(y^*) + \frac{1}{4} |y^* - y^0|^4 \leq f(y^0)$. Отсюда следует $y^* = y^0$. Таким образом, $y^k \rightarrow y^0$, оставаясь при достаточно больших k внутренней точкой множества S . Тогда для больших k можно записать необходимые условия оптимальности для функции $G_k(y)$ в точке y^k :

$$\nabla G_k(y^k) = 0 \text{ и } \langle \bar{y}, \nabla^2 G_k(y^k) \bar{y} \rangle \geq 0 \text{ для всех } \bar{y} \in R^m.$$

Данные условия можно переписать в развернутом виде:

$$\nabla f(y^k) + \sum_{i \in I(y^0)} \xi_i^k \nabla h_i(y^k) + \sum_{i \in I_0} \xi_i^k \nabla h_i(y^k) + |y^k - y^0|^2 (y^k - y^0) = 0, \quad (1)$$

где $\xi_i^k = k(h_i^+(y^k))^2$, $i \in I(y^0)$, $\xi_i^k = k(h_i(y^k))$, $i \in I_0$, и

$$\begin{aligned} & \left\langle \bar{y}, \nabla^2 f(y^k) \bar{y} \right\rangle + \left\langle \bar{y}, \sum_{i \in I_0 \cup I(y^0)} \xi_i^k \nabla^2 h_i(y^k) \bar{y} \right\rangle + \\ & + k \left\langle \bar{y}, \sum_{i \in I(y^0)} 2h_i^+(y^k) \nabla h_i(y^k)^T \nabla h_i(y^k) \bar{y} + \sum_{i \in I_0} \nabla h_i(y^k)^T \nabla h_i(y^k) \bar{y} \right\rangle + \\ & + 3|y^k - y^0|^2 \langle \bar{y}, E \bar{y} \rangle \geq 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Положим

$$\delta_k = \left(1 + \sum_{i \in I_0 \cup I(y^0)} (\xi_i^k)^2 \right)^{1/2}, \quad \lambda_0^k = 1/\delta_k, \quad \lambda_i^k = \xi_i^k / \delta_k, \quad i \in I_0 \cup I(y^0), \quad \lambda_i^k = 0, \quad i \in I \setminus I(y^0).$$

Разделив (1) на δ_k , получим

$$\lambda_0^k \nabla f(y^k) + \sum_{i=1}^p \lambda_i^k \nabla h_i(y^k) + \frac{1}{\delta_k} |y^k - y^0|^2 (y^k - y^0) = 0, \quad (3)$$

откуда, поскольку $(\lambda_0^k)^2 + \sum_{i=1}^p (\lambda_i^k)^2 = 1$ и, следовательно, последовательность $\{\lambda_0^k, \lambda_1^k, \dots, \lambda_p^k\}$ ограничена, можно, не ограничив общности, считать ее сходящейся: $\lambda_0^k \rightarrow \lambda_0$, $\lambda_i^k \rightarrow \lambda_i$. Тогда из (3) следует

$$\begin{aligned} \lambda_0 \nabla f(y^0) + \sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla h_i(y^0) = 0, \quad (\lambda_0)^2 + \sum_{i=1}^p (\lambda_i)^2 = 1, \\ \lambda_0 \geq 0, \quad \lambda_i \geq 0, \quad i \in I(y^0), \quad \lambda_i = 0, \quad i \in I \setminus I(y^0). \end{aligned} \quad (4)$$

Разделив (2) на δ_k , получим

$$\begin{aligned} \left\langle \bar{y}, \left[\lambda_0^k \nabla^2 f(y^k) + \sum_{i=1}^p \lambda_i^k \nabla^2 h_i(y^k) \right] \bar{y} \right\rangle + \\ + \frac{k}{\delta_k} \left\langle \bar{y}, \sum_{i \in I(y^0)} 2h_i^+(y^k) \nabla h_i(y^k)^T \nabla h_i(y^k) \bar{y} + \sum_{i \in I_0} \nabla h_i(y^k)^T \nabla h_i(y^k) \bar{y} \right\rangle + \\ + \frac{3}{\delta_k} |y^k - y^0|^2 \langle \bar{y}, E\bar{y} \rangle \geq 0 \end{aligned} \quad (5)$$

для всех $\bar{y} \in R^m$.

Оценим второе слагаемое в (5):

$$\begin{aligned} \left| \frac{k}{\delta_k} \left\langle \bar{y}, \sum_{i \in I(y^0)} 2h_i^+(y^k) \nabla h_i(y^k)^T \nabla h_i(y^k) \bar{y} + \sum_{i \in I_0} \nabla h_i(y^k)^T \nabla h_i(y^k) \bar{y} \right\rangle \right| \leq \\ \leq \frac{k}{\delta_k} \sum_{i \in I_0 \cup I(y^0)} M(y^k) |\langle \nabla h_i(y^k), \bar{y} \rangle|, \end{aligned}$$

где $M(y^k)$ – ограниченная величина.

Для любого $\bar{y} \in S_C(y^k)$ из (5) следует

$$\left\langle \bar{y}, \left[\lambda_0^k \nabla^2 f(y^k) + \sum_{i=1}^p \lambda_i^k \nabla^2 h_i(y^k) \right] \bar{y} \right\rangle + \frac{3}{\delta_k} |y^k - y^0|^2 \langle \bar{y}, E\bar{y} \rangle \geq 0. \quad (6)$$

В силу условия *WCR* в точке y^0 справедливо равенство

$$\text{rank} \{ \nabla h_i(y), \quad i \in I_0 \cup I(y^0) \} = \text{rank} \{ \nabla h_i(y^0), \quad i \in I_0 \cup I(y^0) \} = l$$

для всех y достаточно близких к точке y^0 .

Не ограничивая общности, будем считать, что в системе

$$\langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle = 0, \quad i \in I_0 \cup I(y^0) \quad (7)$$

ранг достигается для первых l уравнений и первых l переменных $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_l$. Тогда система (7) равносильна системе

$$B(y^0) \bar{y}^1 + D(y^0) \bar{y}^2 = 0 \quad \text{или} \quad \bar{y}^1 = -B^{-1}(y^0) D(y^0) \bar{y}^2,$$

где

$$\bar{y}^1 = (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_l)^T, \quad \bar{y}^2 = (\bar{y}_{l+1}, \dots, \bar{y}_m)^T,$$

$$B(y) = \left[\frac{\partial h_i(y)}{\partial y_j} \quad i, j = 1, \dots, l \right], \quad D(y) = \begin{cases} \frac{\partial h_i(y)}{\partial y_j} & i = 1, \dots, l \\ & j = l+1, \dots, m \end{cases}.$$

Тогда для любого вектора $\bar{y} = (\bar{y}^1, \bar{y}^2)^T \in S_C(y^0)$ можно построить вектор $\bar{y}^k = (\bar{y}^{1k}, \bar{y}^{2k})^T \in S_C(y^k)$, такой, что $\bar{y}^{1k} = -B^{-1}(y^k)D(y^k)\bar{y}^2$, $\bar{y}^{2k} = \bar{y}^2$.

Тогда $\bar{y}^k \rightarrow \bar{y}$ и, следовательно, подставив в (6) $\bar{y} = \bar{y}^k$ и переходя к пределу, получим

$$\left\langle \bar{y}, \left[\lambda_0 \nabla^2 f(y^0) + \sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla^2 h_i(y^0) \right] \bar{y} \right\rangle \geq 0 \text{ для всех } \bar{y} \in S_C(y^0).$$

С л е д с т в и е. Если точка $y^0 \in C$ является локальным решением задачи (NLP) и в ней выполнены условие регулярности Мангасаряна – Фромовица и условие WCR, то в этой точке необходимо выполняется условие WSONC.

В работе [19] при выполнении условия критической регулярности получены сильные необходимые условия оптимальности второго порядка SSONC.

Положим $I_D(y^0) = \{i \in I(y^0) \mid \langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle = 0, \quad \forall \bar{y} \in D_C(y^0)\}$.

О п р е д е л е н и е 2. Будем говорить, что в точке $y^0 \in C$ выполнено условие критической регулярности (коротко CRC), если $\text{rank} \{ \nabla h_i(y), \quad i \in I_0 \cup I_D(y^0) \} = \text{const}$ для всех y из некоторой окрестности точки y^0 .

Т е о р е м а 2 [19]. Пусть в точке $y^0 \in C$, являющейся решением задачи (NLP), выполнено условие критической регулярности и $\Lambda(y^0) \neq \emptyset$. Тогда в данной точке выполняется условие SSONC.

Используем данную теорему для вывода слабых необходимых условий WSONC.

Т е о р е м а 3. Пусть в точке $y^0 \in C$, являющейся решением задачи NLP, множество множителей Лагранжа $\Lambda(y^0) \neq \emptyset$ и выполнено условие WCR. Тогда для любого вектора $\lambda \in \Lambda(y^0)$ справедливо условие WSONC.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть выполнены условия теоремы и множество множителей Лагранжа не пусто в точке $y^0 \in C$. Возьмем любой вектор $\lambda \in \Lambda(y^0)$. Рассмотрим множество $E = \{y \in R^m \mid h_i(y) = 0, \quad i \in I(y^0) \cup I_0, \quad h_i(y) \leq 0, \quad i \in I \setminus I(y^0)\}$.

Очевидно, $E \subset C$ и $y^0 \in E$. Следовательно, в точке y^0 достигается минимум целевой функции задачи NLP на множестве E . Кроме того, в задаче NLP(E) минимизации целевой функции $f(y)$ на множестве E множество множителей Лагранжа в точке y^0

$$\Lambda_E(y^0) = \left\{ \lambda \in R^p \mid \nabla f(y^0) + \sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla h_i(y^0) = 0, \quad \lambda_i = 0, \quad i \in I \setminus I(y^0) \right\}$$

непусто, поскольку $\Lambda(y^0) \subset \Lambda_E(y^0)$. При этом активные ограничения в точке y^0 для множества E исчерпываются ограничениями-равенствами $h_i(y) = 0, \quad i \in I(y^0) \cup I_0$ и, следовательно, из условия WCR для множества C в точке y^0 следует условие CRC для задачи NLP(E) в данной точке.

Таким образом, в силу теоремы 2 для задачи $NLP(E)$ в точке y^0 выполняется условие $SSONC$. То есть для любого $\lambda \in \Lambda_E(y^0)$ выполняется неравенство $\langle \bar{y}, \nabla_{yy}^2 L(y^0, \lambda) \bar{y} \rangle \geq 0$ для всех векторов $\bar{y} \in D_E(y^0)$, где $D_E(y^0) = \hat{D}_E(y^0) = \{\bar{y} \in R^m \mid \langle \nabla f(y), \bar{y} \rangle = 0, \langle \nabla h_i(y), \bar{y} \rangle = 0, i \in I_0 \cup I(y)\}$.

Но для любого вектора $\bar{y} \in S_C(y) = \{\bar{y} \in R^m \mid \langle \nabla h_i(y), \bar{y} \rangle = 0, i \in I_0 \cup I(y)\}$ с учетом условия $\nabla f(y^0) + \sum_{i \in I_0 \cup I(y)} \lambda_i \nabla h_i(y^0) = 0$ справедливо равенство $\langle \nabla f(y^0), \bar{y} \rangle = 0$. Следовательно, $S_C(y) \subset D_E(y^0)$. Таким образом, получаем, что для любого $\lambda \in \Lambda(y^0) \subset \Lambda_E(y^0)$ выполнено неравенство $\langle \bar{y}, \nabla_{yy}^2 L(y^0, \lambda) \bar{y} \rangle \geq 0$ для всех $\bar{y} \in S_C(y)$.

Доказанная теорема обобщает необходимые условия $WSONC$ [8, 16], поскольку в отличие от [16] не требует выполнения условия регулярности Мангасаряна – Фромовица и в отличие от [8] дает необходимое условие, выполняющееся при любом $\lambda \in \Lambda(y^0)$.

Т е о р е м а 4. Пусть в точке $y^0 \in C$, являющейся решением задачи (NLP), множество множителей Лагранжа $\Lambda(y^0)$ не пусто и выполнено условие критической регулярности CRC. Тогда для любого вектора $\lambda \in \Lambda(y^0)$ справедливо условие $WSONC$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть выполнены условия теоремы. Тогда в силу теоремы 2 в точке y^0 для задачи (NLP) выполняется условие $SSONC$. Покажем, что $S_C(y^0) \subset D_C(y^0)$. Пусть $\bar{y} \in S_C(y^0)$. Тогда $\langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle = 0$ для всех $i \in I_0 \cup I(y^0)$. Возьмем любой вектор $\lambda \in \Lambda(y^0)$. В силу определения множителей Лагранжа

$$\left\langle \nabla f(y^0) + \sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla h_i(y^0), \bar{y} \right\rangle = \left\langle \nabla f(y^0) + \sum_{i \in I_0 \cup I(y^0)} \lambda_i \nabla h_i(y^0), \bar{y} \right\rangle = 0,$$

откуда $\langle \nabla f(y^0), \bar{y} \rangle = 0$. Таким образом, $\bar{y} \in D_C(y^0)$ и, следовательно, $S_C(y^0) \subset D_C(y^0)$.

Значит, в точке y^0 действительно выполнено условие $WSONC$, причем для любого вектора $\lambda \in \Lambda(y^0)$.

Следующие примеры показывают эффективность необходимых условий теоремы 4 по сравнению с известными результатами.

П р и м е р 1. Пусть $C = \{y \in R^3 \mid -y_1^2 - y_2 \leq 0, -y_2 \leq 0, y_1 - y_3 \leq 0\}$, $f(y) = -y_1 + y_3 - y_3^2$. Рассмотрим точку $y^0 = (0, 0, 0)$. Положим $h_1(y) = -y_1^2 - y_2$, $h_2(y) = -y_2$, $h_3(y) = y_1 - y_3$.

Очевидно, $I_D(y^0) = \{3\}$ и $\text{rank}\{\nabla h_i(y), i \in I_0 \cup I_D(y^0)\} = \text{rank}\{\nabla h_3(y)\} = \text{const}$, т. е. условие CRC выполнено. Далее, $S_C(y^0) = \{\bar{y} \in R^3 \mid \bar{y}_1 = \bar{y}_3, \bar{y}_2 = 0\}$.

Найдем множество множителей Лагранжа:

$$\begin{aligned} L(y, \lambda) &= f(y) + \lambda_1 h_1(y) + \lambda_2 h_2(y) + \lambda_3 h_3(y) = \\ &= (-y_1 + y_3 - y_3^2) + \lambda_1(-y_1^2 - y_2) - \lambda_2 y_2 + \lambda_3(y_1 - y_3), \\ \nabla_y L(y, \lambda) &= \begin{pmatrix} -1 + \lambda_3 \\ -\lambda_1 - \lambda_2 \\ 1 - \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda_0 \geq 0, \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_3 \geq 0, \end{aligned}$$

откуда $\lambda_3 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_1 = 0$. Далее, в силу необходимых условий теоремы 4 должно выполняться неравенство $\langle \bar{y}, \nabla_{yy}^2 L(y^0, \lambda_0, \lambda) \bar{y} \rangle = -2\bar{y}_3^2 \geq 0$ для всех $\bar{y}_3 \in R$, что очевидно не выполнимо. Значит, исследуемая точка не является оптимальной. Отметим, что для точки y^0 в данном примере условие Мангасаряна – Фромовица выполняется, однако не выполнено условие WCR . Таким образом, в данном примере не применимы необходимые условия [8, 16].

Следует также отметить, что отличные от WCR условия, обеспечивающие совместно с $MFCQ$ справедливость условия $WSONC$, были предложены в работе Вассарі и Trad [11]. Условие Вассарі и Trad имеет место в точке y^0 , если в этой точке выполнено условие $MFCQ$ и число линейно независимых векторов градиентов активных ограничений в этой точке не менее $|I_0| + |I(y^0)| - 1$, где $|I|$ – число элементов конечного множества I . В [15] показано, что данное условие независимо от WCR , т. е. выполнение условия Вассарі и Trad не гарантирует справедливость WCR и обратно $MFCQ$ и WCR не обеспечивают выполнения условия Вассарі и Trad.

Пример 2. Пусть

$$C = \{y \in R^4 \mid -y_1^2 - y_3 \leq 0, -y_1 + y_2 \leq 0, y_3 - y_4 \leq 0, y_1^2 + y_2^2 - y_3 - y_4 \leq 0, -y_4 \leq 0\}, f(y) = y_3.$$

Рассмотрим точку $y^0 = (0, 0, 0, 0)$. Положим

$$h_1(y) = -y_1^2 - y_3, h_2(y) = -y_1 + y_2, h_3(y) = y_3 - y_4, h_4(y) = y_1^2 + y_2^2 - y_3 - y_4, h_5(y) = -y_4.$$

Поскольку

$$\Lambda_0(y^0) = \{\lambda \in R^4 \mid -\lambda_2 = 0, -\lambda_1 + \lambda_3 - \lambda_4 = 0, -\lambda_3 - \lambda_4 - \lambda_5 = 0, \lambda_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4, 5\} = \{0\},$$

условие $MFCQ$ в точке y^0 выполнено. Найдем множество множителей Лагранжа:

$$\begin{aligned} \Lambda(y^0) &= \{\lambda \in R^5 \mid \lambda_2 = 0, -\lambda_1 + \lambda_3 - \lambda_4 + 1 = 0, -\lambda_3 - \lambda_4 - \lambda_5 = 0, \lambda_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4, 5\} = \\ &= \{\lambda \in R^5 \mid \lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0\}, \end{aligned}$$

откуда $I_D(y^0) = \{1\}$ и, следовательно,

$$\text{rank} \{\nabla h_i(y), i \in I_0 \cup I_D(y)\} = \text{rank} \{\nabla h_1(y)\} = \text{const}$$

в окрестности y^0 , т. е. условие CRC выполнено. Далее,

$$S_C(y^0) = \{\bar{y} \in R^4 \mid \bar{y}_1 = \bar{y}_2, \bar{y}_3 = \bar{y}_4 = 0\}$$

и в силу слабых необходимых условий теоремы 4 должно выполняться неравенство

$$\langle \bar{y}, \nabla_{yy}^2 L(y^0, \lambda) \bar{y} \rangle = -2\bar{y}_1^2 \geq 0$$

для всех $\bar{y}_1 \in R$, что, очевидно, не имеет места. Значит, исследуемая точка не является оптимальной. Отметим, что для точки y^0 в данном примере условие WCR не выполнено. Более того, не выполняются и условия Вассарі и Trad [11]. Таким образом, в данном примере не применимы необходимые условия [8, 11, 16].

Выводы. В статье получены слабые необходимые условия оптимальности второго порядка, обобщающие результаты [8, 16].

Литература

1. Габасов Р. Ф., Кириллова Ф. М. Методы оптимизации. Минск, 1981.
2. Гороховик В. В. Конечномерные задачи оптимизации. Минск, 2007.
3. Ioffe A. D. // SIAM J. Control Optimiz. 1979. Vol. 17. P. 266–288.
4. Bonnans J. F., Shapiro A. Perturbation Analysis of Optimization Problems. New York, 2000.
5. Luderer B., Minchenko L., Satsura T. Multivalued analysis and nonlinear programming problems with perturbations. Dordrecht. 2002
6. Fiacco A. V., McCormick G. P. Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Techniques. New York, 1968.
7. Bertsekas D. P. Nonlinear Programming. Massachusetts, 1999.
8. Guo L., Lin G. H., Ye J. J. // J. Optimiz. Theory. Appl. 2013. Vol. 158. P. 33–64.
9. Fletcher R. Practical Methods of Optimization. London, 1987.
10. Nocedal J., Wright S. J. Numerical Optimization. New York, 1999.

11. *Baccari A., Trad A.* // SIAM J. Optimization. 2004. Vol. 15. P. 394–408.
12. *Andreani R., Echagüe C. E., Schuverdt M. L.* // J. Optim. Theory Appl. 2010. Vol. 146. P. 255–266.
13. *Minchenko L., Stakhovski S.* // SIAM J. Optimiz. 2011. Vol. 21. P. 314–332.
14. *McCormick G. P.* // SIAM J. Appl. Math. 1967. Vol. 15. P. 641–652.
15. *Gould N. I. M., Toint P. L.* // Math. Program. 1999. Vol. 85. P. 433–438.
16. *Andreani R., Martinez J. M., Schuverdt M. L.* // Optimization. 2007. Vol. 56. P. 529–542.
17. *Hu X. M., Ralph D.* // J. Optim. Theory and Appl. 2004. Vol. 123. P. 365–390.
18. *Izmailov A. F., Solodov M. V.* // SIAM J. Optim. 2008. Vol. 19. P. 1003–1027.
19. *Минченко Л. И., Лещев А. Е.* // Докл. НАН Беларуси. 2013. Т. 57, № 6. С. 28–34.

A. E. LESCHOV

WEAK SECOND-ORDER OPTIMALITY CONDITIONS

Summary

The aim of the present article is to derive so-called weak second-order necessary optimality conditions for nonlinear programming problems. Necessary weak second-order optimality conditions are proved under some additional requirements to the constraints.

УДК 512.567.5

Ю. И. КУЛАЖЕНКО, М. В. СЕЛЬКИН

О ПОЛУАБЕЛЕВОСТИ n -АРНЫХ ГРУПП*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины**(Поступила в редакцию 06.03.2015)*

Изучение объектов аффинной геометрии методами теории n -арных групп и изучение свойств n -арных групп, связанных со свойствами объектов аффинной геометрии, осуществлялось многими авторами [1–5]. Так, тернарные группы, которые изучали Х. Прюфер [6], Дж. Кертайн [7], нашли приложения в проективной [8] и аффинной геометрии [9], а также в других областях знаний. На основе исследований В. Дёрнте [10] и Е. Поста [11] С. А. Русаков в работах [2, 12] обобщил указанные выше результаты на случай n -арной группы ($n \geq 2$).

Отметим, что появление новых методов исследования, таких как функторный и геометрический, позволило получить ряд интересных и содержательных результатов в области мультиколец, полиадических мультиколец и универсальных алгебр [13–16].

Развитие приложений теории n -арных групп в аффинной геометрии и их изучение послужили толчком к введению нового понятия «самосовмещение элементов n -арных групп» [5]. В настоящее время эти исследования развиваются по двум основным направлениям. Первое связано с симметричными точками и построением на n -арной группе специальных фигур аффинной геометрии, обладающих заданными свойствами [5]. Второе базируется на изучении свойств различных последовательностей векторов n -арных групп [17]. Оба эти направления тесно связаны с понятием полуабелевости, которое, как показано в работе [18], тождественно понятиям коммутативности и аффинности в классе всех n -арных групп. Поэтому установление новых критериев полуабелевости n -арных групп представляет значительный интерес.

Пусть G – n -арная группа, $m > 0$ и $k \geq 0$ – целые числа.

1. Если $k > 0$ и $m \leq k$, то мы используем символ x_m^k для обозначения последовательности $x_m x_{m+1} \dots x_k$, где $x_m, x_{m+1}, \dots, x_k \in G$.

2. Если $k > 0$, то запись x^k обозначает последовательность $xx \dots x$ длины k ($x \in G$).

Напомним, что универсальную алгебру $\langle G, () \rangle$ с n -арной операцией $() : G^n \rightarrow G$ ($n \geq 2$) называют n -арной группой [19], если выполняются следующие условия:

1) операция $()$ ассоциативна на G , т. е.

$$((a_1 \dots a_n) a_{n+1} \dots a_{2n-1}) = (a_1 \dots a_i (a_{i+1} \dots a_{i+n}) a_{i+n+1} \dots a_{2n-1})$$

для любого $i = 1, \dots, n$ и для всех $a_1, \dots, a_{2n-1} \in G$;

2) уравнение

$$(a_1 \dots a_{i-1} x a_{i+1} \dots a_n) = b$$

имеет единственное решение в G для любого $i = 1, \dots, n$ и любых $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n, b \in G$.

Говорят, что G – полуабелева n -арная группа, если для любой последовательности $x_1^n \in G^n$ справедливо равенство

$$(x_1 x_2^{n-1} x_n) = (x_n x_2^{n-1} x_1).$$

Говорят, что последовательность $e_1^{k(n-1)} \in G$, где $k \geq 1$, называется нейтральной $k(n-1)$ -последовательностью G , если $(e_1^{k(n-1)} u) = u = (u e_1^{k(n-1)})$ для любого элемента $u \in G$.

В любой n -арной группе существуют нейтральные последовательности. Это обусловлено, в частности, следствием разрешимости в n -арной группе уравнения $(a e_1^{k(n-1)-1} y) = a$. Нейтральные последовательности n -арной группы определяются неоднозначно.

Последовательность $b_1^j \in G$ называют обратной последовательностью к последовательности $a_1^i \in G$, если последовательности $b_1^j a_1^i$ и $a_1^i b_1^j$ являются нейтральными.

Ясно, что если b_1^j обратная последовательность к a_1^i , то a_1^i – обратная к b_1^j .

Отметим, что обратная последовательность, длина которой больше единицы, определяется неоднозначно.

n -Арная группа может быть определена как алгебра с двумя и большим числом операций [12]. В частности, n -арная группа может быть определена с помощью одной ассоциативной n -арной операции и одной унарной операции.

Алгебру $G = \langle X, ()^{[-2]} \rangle$ типа $\langle n, 1 \rangle$, где $n \geq 2$, называют n -арной группой [12], если

- 1) n -арная операция $()$ на множестве X ассоциативна;
- 2) для любых элементов x и y из X выполняются равенства

$$(x^{[-2]^{n-2}} x (x y)) = y = ((y x) x x^{[-2]}).$$

Символ $x^{[-2]}$, который входит в приведенное равенство, есть решение уравнения $(y x^{[-2]}) = x$, т. е. $(x^{[-2]^{2(n-1)}} x) = x$, где $x, y \in G$.

Из последнего равенства следует, что обратной последовательностью к любому $x \in G$ будет $x^{[-2]^{2n-4}}$. Действительно, $(x^{[-2]^{2(n-1)}} x) = (x x^{[-2]^{2n-4}} x) = x$. Очевидно, что $x x^{[-2]^{2n-4}} x = x^{[-2]^{2n-4}} x x$ – нейтральные последовательности.

В дальнейшем элементы n -арной группы G будем называть точками. Согласно [2], совокупность двух точек a и b из G называют отрезком и обозначают через $[ab]$ или $[ba]$. Последовательность k произвольных точек $\langle a_1, a_2, \dots, a_k \rangle$ называют k -угольником G , где $a_1, a_2, \dots, a_k \in G$.

В работе [2] доказано, что для любых точек $a, b, c \in G$ равенства

$$(ab^{[-2]^{2n-4}} b c) = b, \tag{1}$$

$$(cb^{[-2]^{2n-4}} b a) = b \tag{2}$$

эквивалентны.

Если выполняется равенство (1) или (2), то b называют серединой отрезка $[ac]$. Если имеет место равенство (1) (равенство (2)), то точку c (точку a) называют точкой, симметричной точке a (точке c) относительно точки b , и обозначают через $S_b(a)$ (через $S_b(c)$), т. е. $c = S_b(a)$ ($a = S_b(c)$).

Из (1) или (2) следует, что

$$S_b(a) = (ba^{[-2]^{2n-4}} a b), \quad (3)$$

$$S_b(c) = (bc^{[-2]^{2n-4}} c b). \quad (4)$$

В работе [2] установлено, что n -арная группа G будет полуабелевой, если для любых $x, y, z \in G$ справедливо равенство

$$(xy^{[-2]^{2n-4}} y z) = (zy^{[-2]^{2n-4}} y x).$$

В дальнейшем для сокращения записи обратную последовательность к любому $x \in G$ будем обозначать через x^{-1} , т. е. $x^{-1} = x^{[-2]^{2n-4}} x$. Тогда равенства (3) и (4) примут вид соответственно

$$S_b(a) = (ba^{-1}b), \quad (5)$$

$$S_b(c) = (bc^{-1}b) \quad (6)$$

и n -арная группа G будет полуабелевой, если для любых $x, y, z \in G$ справедливо равенство

$$(xy^{-1}z) = (zy^{-1}x). \quad (7)$$

Напомним [5], что точку

$$S_{a_k} (\dots (S_{a_2} (S_{a_1} (p))) \dots)$$

называют обходом элементов последовательности $\langle a_1, \dots, a_k \rangle$ точкой p , где $a_1, \dots, a_k, p \in G$. Если $S_{a_k} (\dots (S_{a_2} (S_{a_1} (p))) \dots) = p$, то говорят, что p самосовмещается относительно элементов последовательности $\langle a_1, \dots, a_k \rangle$.

Четырехугольник $\langle a, b, c, d \rangle$ называют параллелограммом G , если $(ab^{-1}c) = d$.

Упорядоченную пару $\langle a, b \rangle$ точек $a, b \in G$ называют направленным отрезком n -арной группы G и обозначают \overline{ab} .

Говорят, что направленные отрезки \overline{ab} и \overline{cd} равны и пишут $\overline{ab} = \overline{cd}$, если четырехугольник $\langle a, b, c, d \rangle$ – параллелограмм G .

Пусть \overline{V} – множество всех направленных отрезков n -арной группы G . В работе [2] установлено, что бинарное отношение $=$ на множестве \overline{V} является отношением эквивалентности и разбивает множество \overline{V} на непересекающиеся классы. Класс, порожденный направленным отрезком \overline{ab} , имеет вид

$$K(\overline{uv}) = \{\overline{uv} \mid \overline{uv} \in \overline{V}, \overline{uv} = \overline{ab}\}.$$

Под вектором \overline{ab} n -арной группы G понимают класс $K(\overline{ab})$, т. е. $\overline{ab} = K(\overline{ab})$.

Теорема 1. Пусть b_1, \dots, b_k – произвольные точки n -арной группы G ($k \in \mathbf{N}$, $k \geq 3$, k – нечетное), а $a_1, \dots, a_k \in G$ такие, что

$$b_2 = S_{a_1}(b_1), b_3 = S_{a_2}(b_2), \dots, b_k = S_{a_{k-1}}(b_{k-1}), b_1 = S_{a_k}(b_k). \quad (8)$$

n -Арная группа G будет полуабелевой тогда и только тогда, когда произвольная точка $p \in G$ самосовмещается относительно элементов последовательности

$$\langle a_1, \dots, a_k, b_1 \rangle, \quad (9)$$

т. е. когда справедливо равенство

$$S_{b_1}(S_{a_k}(\dots(S_{a_2}(S_{a_1}(p))))\dots) = p. \quad (10)$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть G – полуабелева n -арная группа. Докажем справедливость равенства (10).

На основании определения симметричных точек запишем:

$$S_{a_1}(p) = (a_1 p^{-1} a_1). \quad (11)$$

С учетом (11), а также равенства 3.27 из [2] и нейтральности последовательностей $x^{-1}x$, xx^{-1} для любого $x \in G$, имеем:

$$S_{a_2}(S_{a_1}(p)) = (a_2(a_1 p^{-1} a_1)^{-1} a_2) = (a_2 a_1^{-1} p a_1^{-1} a_2).$$

Аналогично

$$S_{a_3}(S_{a_2}(S_{a_1}(p))) = (a_3(a_2 a_1^{-1} p a_1^{-1} a_2)^{-1} a_3) = (a_3 a_2 a_1^{-1} p a_1^{-1} a_2 a_3).$$

Продолжая таким образом, мы можем записать, что для любого нечетного k ($k \in N$ и $k \geq 3$) справедливо

$$S_{a_k}(\dots(S_{a_2}(S_{a_1}(p)))) = (a_k a_{k-1}^{-1} \dots a_2^{-1} a_1 p^{-1} a_1 a_2^{-1} \dots a_{k-1}^{-1} a_k). \quad (12)$$

Тогда

$$\begin{aligned} S_{b_1}(S_{a_k}(\dots(S_{a_2}(S_{a_1}(p))))\dots) &= (b_1(a_k a_{k-1}^{-1} \dots a_2^{-1} a_1 p^{-1} a_1 a_2^{-1} \dots a_{k-1}^{-1} a_k)^{-1} b_1) = \\ &= (b_1 a_k^{-1} a_{k-1} \dots a_2 a_1^{-1} p a_1^{-1} a_2 \dots a_{k-1} a_k^{-1} b_1). \end{aligned} \quad (13)$$

Из равенств (8) следует, что b_1 самосовмещается относительно элементов последовательности $\langle a_1, \dots, a_k \rangle$, т. е. если вместо b_k, b_{k-1}, \dots, b_2 подставить соответствующие выражения, то получим

$$b_1 = S_{a_k}(\dots(S_{a_2}(S_{a_1}(b_1))))\dots. \quad (14)$$

Преобразуем правую часть равенства (14) с учетом того, что k – нечетное натуральное число. Тогда по аналогии с (12) имеем:

$$S_{a_k}(\dots(S_{a_2}(S_{a_1}(b_1)))) = (a_k a_{k-1}^{-1} \dots a_2^{-1} a_1 b_1^{-1} a_1 a_2^{-1} \dots a_{k-1}^{-1} a_k).$$

Следовательно,

$$b_1 = (a_k a_{k-1}^{-1} \dots a_2^{-1} a_1 b_1^{-1} a_1 a_2^{-1} \dots a_{k-1}^{-1} a_k). \quad (15)$$

Подставим (15) в (13). С учетом нейтральности последовательностей и полуабелевости G получим

$$\begin{aligned} S_{b_1}(S_{a_k}(\dots(S_{a_2}(S_{a_1}(p))))\dots) &= \\ &= ((a_k a_{k-1}^{-1} \dots a_2^{-1} a_1 b_1^{-1} a_1 a_2^{-1} \dots a_{k-1}^{-1} a_k) a_k^{-1} a_{k-1} \dots a_2 a_1^{-1} p a_1^{-1} a_2 \dots a_{k-1} a_k^{-1} b_1) = \\ &= (a_k a_{k-1}^{-1} \dots a_2^{-1} a_1 b_1^{-1} p a_1^{-1} a_2 \dots a_{k-1} a_k^{-1} b_1) = \\ &= (a_k a_{k-1}^{-1} \dots a_2^{-1} a_1 b_1^{-1} (p a_1^{-1} a_2 \dots a_{k-1} a_k^{-1} b_1)) = \\ &= (a_k a_{k-1}^{-1} \dots a_2^{-1} a_1 b_1^{-1} (b_1 a_1^{-1} a_2 \dots a_{k-1} a_k^{-1} p)) = \\ &= (a_k a_{k-1}^{-1} \dots a_2^{-1} a_1 b_1^{-1} b_1 a_1^{-1} a_2 \dots a_{k-1} a_k^{-1} p) = p. \end{aligned} \quad (16)$$

Таким образом, справедливость равенства (10) установлена.

Достаточность. Докажем, что если равенство (10) выполняется, то G полуабелева.

Поскольку свойство полуабелевости n -арной группы G при доказательстве необходимости использовалось нами только в равенстве (16), то без повторения рассуждений будем считать все предыдущие равенства верными.

Из равенства (10) и (13) имеем:

$$(b_1 a_k^{-1} a_{k-1}^{-1} \dots a_2 a_1^{-1} p a_1^{-1} a_2^{-1} \dots a_{k-1} a_k^{-1} b_1) = p. \quad (17)$$

Подставим в равенство (17) вместо b_1 выражение из (15). Имеем:

$$\begin{aligned} & ((a_k a_{k-1}^{-1} \dots a_2^{-1} a_1 b_1^{-1} a_1 a_2^{-1} \dots a_{k-1}^{-1} a_k) a_k^{-1} a_{k-1}^{-1} \dots a_2 a_1^{-1} p a_1^{-1} p a_1^{-1} a_2^{-1} \dots a_{k-1} a_k^{-1}, \\ & (a_k a_{k-1}^{-1} \dots a_2^{-1} a_1 b_1^{-1} a_1 a_2^{-1} \dots a_{k-1}^{-1} a_k)) = p. \end{aligned} \quad (18)$$

Перепишем (18) с учетом нейтральности последовательностей xx^{-1} и $x^{-1}x$ для любого $x \in G$. Имеем:

$$(a_k a_{k-1}^{-1} \dots a_2^{-1} a_1 b_1^{-1} p b_1^{-1} a_1 a_2^{-1} \dots a_{k-1}^{-1} a_k) = p.$$

Откуда

$$(a_k a_{k-1}^{-1} \dots a_2^{-1} a_1 b_1^{-1} p) = (p a_k^{-1} a_{k-1}^{-1} \dots a_2 a_1^{-1} b_1). \quad (19)$$

Равенство (15) можно переписать в виде

$$(b_1 a_k^{-1} a_{k-1}^{-1} \dots a_2 a_1^{-1} b_1) = (a_k a_{k-1}^{-1} \dots a_2^{-1} a_1). \quad (20)$$

Преобразуем левую часть (19) с учетом (20). Имеем:

$$((b_1 a_k^{-1} a_{k-1}^{-1} \dots a_2 a_1^{-1} b_1) b_1^{-1} p) = (p a_k^{-1} a_{k-1}^{-1} \dots a_2 a_1^{-1} b_1),$$

откуда

$$(b_1 a_k^{-1} a_{k-1}^{-1} \dots a_2 a_1^{-1} p) = (p a_k^{-1} a_{k-1}^{-1} \dots a_2 a_1^{-1} b_1). \quad (21)$$

Если в равенстве (21) обозначить

$$x_1 = b_1, x_n = p, x_2^{n-1} = a_k^{-1} a_{k-1}^{-1} \dots a_2 a_1^{-1},$$

то получим равенство

$$(x_1 x_2^{n-1} x_n) = (x_n x_2^{n-1} x_1).$$

На основании приведенных рассуждений и определения полуабелевой n -арной группы заключаем, что G – полуабелева группа. Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть p, b_1, \dots, b_k – произвольные точки n -арной группы G ($k \in \mathbf{N}$, $k \geq 3$, k – нечетное), а точки $a_1, \dots, a_k \in G$ такие, что

$$b_2 = S_{a_1}(b_1), b_3 = S_{a_2}(b_2), \dots, b_k = S_{a_{k-1}}(b_{k-1}), b_1 = S_{a_k}(b_k), \quad (22)$$

n -арная группа G будет полуабелевой тогда и только тогда, когда справедливо равенство

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{p S_{a_1}(p) + S_{a_1}(p) S_{a_2}(S_{a_1}(p)) + \dots +} \\ & \overrightarrow{+ S_{a_k}(\dots(S_{a_2}(S_{a_1}(p)))\dots) S_{b_1}(S_{a_k} \dots (S_{a_2}(S_{a_1}(p))))} = \vec{0}. \end{aligned} \quad (23)$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть G – полуабелева n -арная группа. Установим справедливость равенства (23).

На основании определения 5 из [2] правую часть равенства (23) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & \overline{pS_{a_1}(p)} + \overline{S_{a_1}(p)S_{a_2}(S_{a_1}(p))} + \dots + \\ & \overline{S_{a_k}(\dots(S_{a_2}(S_{a_1}(p)))\dots)S_{b_1}(S_{a_k}(\dots(S_{a_2}(S_{a_1}(p)))\dots))} = \\ & = \overline{pS_{b_1}(S_{a_k}(\dots(S_{a_2}(S_{a_1}(p)))\dots))}. \end{aligned} \quad (24)$$

Рассмотрим выражение $S_{b_1}(S_{a_k}(\dots(S_{a_2}(S_{a_1}(p)))\dots))$ с учетом определения симметричных точек. Имеем:

$$\begin{aligned} S_{a_1}(p) &= (a_1 p^{-1} a_1), \\ S_{a_2}(S_{a_1}(p)) &= S_{a_2}(a_1 p^{-1} a_1) = (a_2 (a_1 p^{-1} a_1)^{-1} a_2) = (a_2 a_1^{-1} p a_1^{-1} a_2), \\ S_{a_3}(S_{a_2}(S_{a_1}(p))) &= S_{a_3}(a_2 a_1^{-1} p a_1^{-1} a_2) = (a_3 (a_2 a_1^{-1} p a_1^{-1} a_2)^{-1} a_3) = (a_3 a_2^{-1} a_1 p^{-1} a_1 a_2^{-1} a_3). \end{aligned}$$

Продолжая таким образом и учитывая, что k – нечетное, имеем:

$$S_{a_k}(\dots(S_{a_2}(S_{a_1}(p)))\dots) = (a_k a_{k_1}^{-1} \dots a_2^{-1} a_1 p^{-1} a_1 a_2^{-1} \dots a_{k-1}^{-1} a_k).$$

Тогда

$$\begin{aligned} S_{b_1}(S_{a_k}(\dots(S_{a_2}(S_{a_1}(p)))\dots)) &= S_{b_1}(a_k a_{k_1}^{-1} \dots a_2^{-1} a_1 p^{-1} a_1 a_2^{-1} \dots a_{k-1}^{-1} a_k) = \\ &= (b_1 (a_k a_{k_1}^{-1} \dots a_2^{-1} a_1 p^{-1} a_1 a_2^{-1} \dots a_{k-1}^{-1} a_k)^{-1} b_1) = \\ &= (b_1 a_k^{-1} a_{k-1} \dots a_2 a_1^{-1} p a_1^{-1} a_2 \dots a_{k-1} a_k^{-1} b_1). \end{aligned} \quad (25)$$

Если в правые части равенств (22), начиная с последнего, подставить соответствующие выражения вместо b_k, b_{k-1}, \dots, b_2 , то получим равенство

$$b_1 = S_{a_k}(S_{a_{k-1}}(\dots(S_{a_2}(S_{a_1}(b_1)))\dots)). \quad (26)$$

Рассмотрим правую часть равенства (26) с учетом определения симметричных точек. Имеем:

$$\begin{aligned} S_{a_1}(b_1) &= (a_1 b_1^{-1} a_1), \\ S_{a_2}(S_{a_1}(b_1)) &= S_{a_2}(a_1 b_1^{-1} a_1) = (a_2 (a_1 b_1^{-1} a_1)^{-1} a_2) = (a_2 a_1^{-1} b_1 a_1^{-1} a_2), \\ S_{a_3}(S_{a_2}(S_{a_1}(b_1))) &= S_{a_3}(a_2 a_1^{-1} b_1 a_1^{-1} a_2) = (a_3 (a_2 a_1^{-1} b_1 a_1^{-1} a_2)^{-1} a_3) = (a_3 a_2^{-1} a_1 b_1^{-1} a_1 a_2^{-1} a_3). \end{aligned}$$

Продолжая таким образом и учитывая, что k – нечетное число, получим

$$S_{a_k}(S_{a_{k-1}}(\dots(S_{a_2}(S_{a_1}(b_1)))\dots)) = (a_k a_{k-1}^{-1} \dots a_2^{-1} a_1 b_1^{-1} a_1 a_2^{-1} \dots a_{k-1}^{-1} a_k).$$

Следовательно,

$$b_1 = (a_k a_{k-1}^{-1} \dots a_2^{-1} a_1 b_1^{-1} a_1 a_2^{-1} \dots a_{k-1}^{-1} a_k). \quad (27)$$

Подставим в (25) вместо b_1 выражение из (27). Получим

$$\begin{aligned} S_{b_1}(S_{a_k}(\dots(S_{a_2}(S_{a_1}(p)))\dots)) &= \\ &= ((a_k a_{k-1}^{-1} \dots a_2^{-1} a_1 b_1^{-1} a_1 a_2^{-1} \dots a_{k-1}^{-1} a_k) a_k^{-1} a_{k-1} \dots a_2 a_1^{-1} p a_1^{-1} a_2 \dots a_{k-1} a_k^{-1} b_1). \end{aligned} \quad (28)$$

Выполним преобразования в (28) с учетом нейтральности последовательностей и свойства полуабелевости n -арной группы G . Имеем:

$$\begin{aligned} & S_{b_1}(S_{a_k}(\dots(S_{a_2}(S_{a_1}(p))))\dots) = \\ & = (a_k a_{k-1}^{-1} \dots a_2^{-1} a_1 b_1^{-1} a_1 a_2^{-1} \dots a_{k-1}^{-1} a_k a_k^{-1} a_{k-1} \dots a_2 a_1^{-1} (b_1 a_1^{-1} a_2 \dots a_{k-1} a_k^{-1} p)) = \\ & = (a_k a_{k-1}^{-1} \dots a_2^{-1} a_1 b_1^{-1} b_1 a_1^{-1} a_2 \dots a_{k-1} a_k^{-1} p) = p. \end{aligned} \quad (29)$$

С учетом (29) равенство (24) можно переписать в виде

$$\frac{\overline{pS_{a_1}(p)} + \overline{S_{a_1}(p)S_{a_2}(S_{a_1}(p))} + \dots + \overline{S_{a_k}(\dots(S_{a_2}(S_{a_1}(p))))\dots} S_{b_1}(S_{a_k}(\dots(S_{a_2}(S_{a_1}(p))))\dots)}{\overline{pS_{a_1}(p)} + \overline{S_{a_1}(p)S_{a_2}(S_{a_1}(p))} + \dots + \overline{S_{a_k}(\dots(S_{a_2}(S_{a_1}(p))))\dots} S_{b_1}(S_{a_k}(\dots(S_{a_2}(S_{a_1}(p))))\dots)}} = \overline{pp} = \vec{0}.$$

Тем самым необходимость доказана.

Достаточность. Пусть равенство (23) выполняется. Докажем, что G – полуабелева.

Поскольку свойство полуабелевости группы G в первой части теоремы мы использовали только в равенстве (29), то все предыдущие рассуждения будем считать справедливыми.

Из равенства (24) и условия теоремы следует, что

$$\overline{pS_{b_1}(S_{a_k}(\dots(S_{a_2}(S_{a_1}(p))))\dots)} = \vec{0}.$$

Поскольку, согласно определению 6 из [2] $\overline{pp} = \vec{0}$, то

$$\overline{pS_{b_1}(S_{a_k}(\dots(S_{a_2}(S_{a_1}(p))))\dots)} = \overline{pp}.$$

Из определения 2 и 4 из [2] следует, что

$$S_{b_1}(S_{a_k}(\dots(S_{a_2}(S_{a_1}(p))))\dots) = p. \quad (30)$$

Рассмотрим равенство (30) с учетом равенства (25). Имеем:

$$(b_1 a_k^{-1} a_{k-1} \dots a_2 a_1^{-1} p a_1^{-1} a_2 \dots a_{k-1} a_k^{-1} b_1) = p. \quad (31)$$

Подставим в (31) вместо b_1 выражение из (27). Имеем:

$$((a_k a_{k-1}^{-1} \dots a_2^{-1} a_1 b_1^{-1} a_1 a_2^{-1} \dots a_{k-1}^{-1} a_k) a_k^{-1} a_{k-1} \dots a_2^{-1} a_1 p a_1^{-1} a_2 \dots a_{k-1} a_k^{-1} b_1) = p. \quad (32)$$

С учетом нейтральных последовательностей равенство (32) перепишем в виде

$$(a_k a_{k-1}^{-1} \dots a_2^{-1} a_1 b_1^{-1} p a_1^{-1} a_2 \dots a_{k-1} a_k^{-1} b_1) = p. \quad (33)$$

Положим в равенстве (33), что $p = (x_1^n)$, а $b_1 = x_1$ и $a_1 = a_2 = \dots = a_k = x_n$.

С учетом того, что k – нечетное число и нейтральности последовательностей, получим

$$(x_n x_1^{-1} x_1^n x_n^{-1} x_1) = (x_1^n).$$

Откуда

$$(x_n x_2^n x_1) = (x_1^n). \quad (34)$$

На основании равенства (34) и определения полуабелевой n -арной группы заключаем, что G – полуабелева. Что и требовалось доказать.

Литература

1. *Vakarelov D.* // God. Sofij. Univ., Mat. Fak. 1966/67. Vol. 61. P. 71–105.
2. *Русаков С. А.* Некоторые приложения теории n -арных групп. Минск, 1998.
3. *Dudek W. A.* // Algebras, Groups and Geometries. 1999. Vol. 16. P. 329–354.
4. *Dudek W. A., Stojakovic N. A.* // Czechoslovak Math. J. 2001. Vol. 51 (126). P. 275–283.
5. *Kulazhenko Yu. I.* // Quasigroups and Related Systems. 2011. Vol. 19, no. 2. P. 265–278.
6. *Prüfer H.* // Math. Z. 1924. Bd. 20. S. 165–187.
7. *Certain J.* // Bull. Amer. Math. soc. 1943. Vol. 49. P. 869–877.
8. *Baer R.* Linear algebra and projective geometry. New York, 1952.
9. *Brănzel D.* // An. Sti. Univ. Iasi, sect. I a Mat. 1977. Vol. 23. P. 33–38.
10. *Dörnte W.* // Math. Z. 1928. Vol. 19. P. 1–19.
11. *Post E. L.* // Amer. Math. Soc. 1940. Vol. 48, N. 2. P. 208–350.
12. *Русаков С. А.* Алгебраические n -арные системы: Силовская теория n -арных групп. Минск, 1992.
13. *Шеметков Л. А., Скиба А. Н.* Формации алгебраических систем. М., 1989.
14. *Скиба А. Н.* Алгебра формаций. Минск, 1997.
15. *Го Веньбинь, Шам К. П.* // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 43, № 6. С. 1283–1291.
16. *Аль-Дабабсех А. Ф.* // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та імя П. М. Машэрава. 1999. № 3 (13). С. 44–49.
17. *Kulazhenko Yu. I.* // Algebra and Discrete Math. 2010. Vol. 9, no 2. P. 98–107.
18. *Гальмак А. М., Кулаженко Ю. И.* // Алгебра и теория чисел: Современные проблемы и приложения: тез. докл. X Междунар. конф., Волгоград, 10–16 сент., 2012. г. Волгоград, 2012. С. 20–23.
19. *Курош А. Г.* Общая алгебра: лекции 1969/70 учеб. года. М., 1974.

Yu. I. KULAZHENKO, M. V. SELKIN

ABOUT SEMIABELIAN OF n -ARY GROUPS

Summary

The paper presents a new criterion of semiabelian of an n -ary group on the basis of the fact of self-returning of an arbitrary point with respect to the elements of the succession, composed of the midpoints of the sides of an arbitrary k -angle with an odd k ($k \geq 3$) and one of the vertices of the k -angle in term symmetrical point and vector n -ary groups.

ФІЗІКА

УДК 539.12

Е. М. ОВСИЮК¹, О. В. ВЕКО², В. М. РЕДЬКОВ³

О МОДЕЛИРОВАНИИ СРЕДЫ СО СВОЙСТВАМИ ИДЕАЛЬНОГО ЗЕРКАЛА
ПО ОТНОШЕНИЮ К СВЕТУ И ЧАСТИЦАМ СО СПИНОМ 1/2

¹Мозырский государственный педагогический университет им. И. П. Шамякина

²Гимназия г. Калинковичи

³Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси

(Поступила в редакцию 20.02.2015)

Введение. Геометрия пространства Лобачевского рассматривается как основа для моделирования эффективной среды [1–2]: используются обобщенные квазидекартовы координаты (x, y, z) ; среда неоднородна вдоль оси z ; эффективные материальные уравнения выписаны в явном виде. В выбранной системе координат уравнения Максвелла в 3-мерном комплексном формализме Майораны – Оппенгеймера [3] решены точно, при этом задача сводится к анализу дифференциального уравнения второго порядка. В контексте квантовой механики такое уравнение описывает движение частицы в потенциальном поле, плавно растущем до бесконечности при устремлении координаты z к бесконечности; частица отражается от этого барьера, не проникая за него. Аналогичная ситуация реализуется и в электродинамике. Таким образом, геометрия Лобачевского действует эффективно как распределенное в пространстве, ориентированное перпендикулярно оси z идеальное зеркало. Глубина проникновения z_0 поля внутрь «среды – зеркала»

$$z_0 = \rho \ln \frac{\omega}{c \sqrt{k_1^2 + k_2^2}}$$

определяется параметрами решений и радиусом кривизны моделирующего пространства Лобачевского. Влияние используемой геометрии на частицы со спином 1/2 (нерелятивистский электрон или нейтрон, описываемые обобщенным уравнением Паули с учетом неевклидовости геометрии) оказывается аналогичным: «среда» действует на фермионы так же, как идеальное зеркало, глубина проникновения в него частиц со спином растет с ростом энергии и уменьшается с увеличением кривизны пространства (уменьшением радиуса кривизны ρ пространства Лобачевского).

1. Электромагнитное поле в среде. В пространстве Лобачевского H_3 известна следующая система координат:

$$\begin{aligned} dS^2 &= dt^2 - e^{-2z} (dx^2 + dy^2) - dz^2, \quad u_1 = xe^{-z}, \quad u_2 = ye^{-z}, \\ u_3 &= \frac{1}{2} [(e^z - e^{-z}) + (x^2 + y^2)e^{-z}], \quad u_0 = \frac{1}{2} [(e^z + e^{-z}) + (x^2 + y^2)e^{-z}]; \\ u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 &= \rho^2, \quad u_0 = +\sqrt{\rho^2 + \mathbf{u}^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Известно, что с электродинамической точки зрения метрика (1) геометрии Лобачевского моделирует специальную среду с тензорами диэлектрической и магнитной проницаемости вида [1]

$$\varepsilon^{ik}(x) = -\sqrt{-g} g^{00}(x) g^{ik}(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2z} \end{vmatrix}, \quad (\mu^{-1})^{ik}(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2z} \end{vmatrix}; \quad (2)$$

материальные уравнения выглядят так: $D^i = \varepsilon_0 \varepsilon^{ik} E_k$, $B_i = \mu_0 \mu^{ik} H^k$, $\varepsilon^{ik}(x) = \mu^{ik}(x)$. Для описания электромагнитного поля в пространстве Лобачевского будем использовать комплексный формализм Майораны – Оппенгеймера (подробнее об этом см. в [2, 3]):

$$\left(-i \frac{\partial}{\partial t} + \alpha^{(1)} e^z \frac{\partial}{\partial x} + \alpha^{(2)} e^z \frac{\partial}{\partial y} + \alpha^{(3)} \frac{\partial}{\partial z} - \alpha^{(1)} s_2 + \alpha^{(2)} s_1 \right) \begin{vmatrix} 0 \\ \mathbf{E} + i\mathbf{B} \end{vmatrix} = 0; \quad (3)$$

явный вид используемых матриц приведен в [2]. Разделение переменных проводится на основе подстановки

$$\begin{vmatrix} 0 \\ \mathbf{E} + i\mathbf{B} \end{vmatrix} = e^{-i\omega t} e^{iax} e^{iby} \begin{vmatrix} 0 \\ \mathbf{f}(z) \end{vmatrix}.$$

В результате приходим к следующей системе уравнений для f_i :

$$\begin{aligned} ia e^z f_1 + ib e^z f_2 + \left(\frac{d}{dz} - 2 \right) f_3 &= 0, & -\omega f_1 - \left(\frac{d}{dz} - 1 \right) f_2 + ib e^z f_3 &= 0, \\ -\omega f_2 + \left(\frac{d}{dz} - 1 \right) f_1 - ia e^z f_3 &= 0, & -\omega f_3 - e^z ib f_1 + ia e^z f_2 &= 0. \end{aligned}$$

Первое уравнение принимает вид тождества при учете трех остальных, поэтому его можно не учитывать. С использованием подстановки $f_1 = e^z F_1(z)$, $f_2 = e^z F_2(z)$ приводим три уравнения к более простому виду

$$\begin{aligned} f_3 &= \frac{-ib}{\omega} e^{2z} F_1 + \frac{ia}{\omega} e^{2z} F_2, \\ \left(\frac{d}{dz} + \frac{ab e^{2z}}{\omega} \right) F_2 &= \frac{b^2 e^{2z} - \omega^2}{\omega} F_1, & \left(\frac{d}{dz} - \frac{ab e^{2z}}{\omega} \right) F_1 &= \frac{\omega^2 - a^2 e^{2z}}{\omega} F_2. \end{aligned} \quad (4)$$

С использованием переменной $e^z = \sqrt{\omega} Z$ два последних уравнения запишутся так:

$$Z \left(\frac{d}{dZ} + ab Z \right) F_2 = (b^2 Z^2 - \omega) F_1, \quad Z \left(\frac{d}{dZ} - ab Z \right) F_1 = -(a^2 Z^2 - \omega) F_2. \quad (5)$$

Систему (5) можно решить в вырожденных гипергеометрических функциях. Для этого совершим линейное преобразование

$$F_1 = + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} G_1 + \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} G_2, \quad F_2 = - \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} G_1 + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} G_2;$$

в результате система (5) примет вид

$$Z \frac{d}{dZ} G_1 = \omega G_2, \quad Z \frac{d}{dZ} G_2 = \left[Z^2 (a^2 + b^2) - \omega \right] G_1. \quad (6)$$

Из (6) следует уравнение второго порядка для G_1

$$\left(Z^2 \frac{d^2}{dZ^2} + Z \frac{d}{dZ} + \omega^2 - \omega (a^2 + b^2) Z^2 \right) G_1 = 0. \quad (7)$$

Преобразуем его к исходной переменной z :

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + \omega^2 - (a^2 + b^2)e^{2z} \right) G_1 = 0. \quad (8)$$

Полученное уравнение можно рассматривать как одномерное шредингеровское (пусть $\omega^2 = \varepsilon$):

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + \varepsilon - U(z) \right) f(z) = 0$$

с потенциальной функцией $U(z) = (a^2 + b^2)e^{2z}$. Отмечаем, что в частном случае $a = k_1 = 0$, $b = k_2 = 0$ эффективное потенциальное поле исчезает.

Поскольку в квантовой механике частица в таком потенциальном поле должна испытывать отражение от барьера, то можно ожидать аналогичного явления и для электромагнитного поля. Как будет показано ниже, это действительно имеет место. Интересной особенностью данной аналогии является равенство единице коэффициента отражения для всех состояний (за исключением особого случая $a = b = 0$).

Легко оценить глубину проникновения электромагнитного поля в такую эффективную зеркально отражающую среду. Эта глубина определяется путем решения уравнения

$$\omega^2 = (a^2 + b^2)e^{2z_0}, \quad z_0 = \rho \ln \frac{\omega}{c \sqrt{k_1^2 + k_2^2}}, \quad (9)$$

где ρ – радиус кривизны пространства Лобачевского.

Отметим специально, что случай $k_1 = a = 0$, $k_2 = b = 0$ является особым; при этом уравнения (5) существенно меняются и в (8) исчезает потенциальная функция:

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - 2 \frac{d}{dz} + \varepsilon \right) f(z) = 0, \quad f = e^{(\pm i \sqrt{\varepsilon - 1} z)},$$

т. е. здесь возникают решения типа обычных плоских волн.

Теперь обращаемся к общему случаю. Выделением множителя $f = \sqrt{Z} F$ можно убрать в (7) член с первой производной

$$\left(\frac{d^2}{dZ^2} + \frac{\varepsilon - 3/4}{Z^2} - 1 \right) F(Z) = 0. \quad (10)$$

Будем искать решения в виде $f(Z) = Z^A e^{BZ} F(Z)$; уравнение (10) дает

$$Z \frac{d^2 F}{dZ^2} + (2A - 1 + 2BZ) \frac{dF}{dZ} + \left((B^2 - 1)Z - B(1 - 2A) + \frac{A(A - 2) + \varepsilon}{Z} \right) F = 0.$$

При A, B , выбранных согласно (далее для определенности выбираем знак « \rightarrow » перед корнем в выражении для A ; предполагаем $\varepsilon > 1$) $A = 1 - i\sqrt{\varepsilon - 1}$, $B^2 = 1$; уравнение упрощается

$$Z \frac{d^2 F}{dZ^2} + (2A - 1 + 2BZ) \frac{dF}{dZ} - B(1 - 2A)F = 0.$$

В полученном уравнении сделаем еще одну замену $Z = y/2$:

$$y \frac{d^2 F}{dy^2} + (2A - 1 + By) \frac{dF}{dy} + B \left(A - \frac{1}{2} \right) F = 0. \quad (11)$$

Уравнение (11) при $B = -1$ представляет собой уравнение для вырожденной гипергеометрической функции

$$y \frac{d^2 Y}{dZ^2} + (c - y) \frac{dY}{dy} - \gamma Y = 0, \quad c = 2\gamma, \quad \gamma = A - 1/2 = 1/2 - i\sqrt{\varepsilon - 1}, \quad f(Z) = y^{\gamma+1/2} e^{-y/2} Y(y). \quad (12)$$

Будем использовать две пары линейно независимых решений

$$Y_1 = \Phi(\gamma, 2\gamma, y), \quad Y_2 = y^{1-2\gamma} \Phi(1-\gamma, 2-2\gamma, y)$$

и

$$Y_5 = \Psi(\gamma, 2\gamma, y), \quad Y_7 = e^y \Psi(\gamma, 2\gamma, -y). \quad (13)$$

Эти пары решений связаны линейными соотношениями Куммера

$$Y_5 = \frac{\Gamma(1-2\gamma)}{\Gamma(1-\gamma)} Y_1 + \frac{\Gamma(2\gamma-1)}{\Gamma(\gamma)} Y_2, \quad Y_7 = \frac{\Gamma(1-2\gamma)}{\Gamma(1-\gamma)} Y_1 - \frac{\Gamma(2\gamma-1)}{\Gamma(\gamma)} Y_2, \quad (14a)$$

которые после умножения на $y^{\gamma+1/2} e^{-y/2}$ принимают вид

$$f_5 = \frac{\Gamma(1-2\gamma)}{\Gamma(1-\gamma)} f_1 + \frac{\Gamma(2\gamma-1)}{\Gamma(\gamma)} f_2, \quad f_7 = \frac{\Gamma(1-2\gamma)}{\Gamma(1-\gamma)} f_1 - \frac{\Gamma(2\gamma-1)}{\Gamma(\gamma)} f_2. \quad (14б)$$

Обращаем внимание, что решения Y_1 и Y_2 описывают при отрицательных $z \rightarrow -\infty$ ($y \rightarrow 0$) волны с асимптотическим поведением:

$$f_1 = y^{\gamma+1/2} = \left(2\sqrt{k_1^2 + k_2^2}\right)^{1-i\sqrt{\varepsilon-1}} e^z e^{-i\sqrt{\varepsilon-1}z}, \quad (15a)$$

$$f_2 = y^{\gamma+1/2} y^{1-2\gamma} = \left(2\sqrt{a^2 + b^2}\right)^{1+i\sqrt{\varepsilon-1}} e^z e^{+i\sqrt{\varepsilon-1}z}. \quad (15б)$$

Следовательно, функция Y_5 (и связанная с ней φ_5) при отрицательных $z \rightarrow -\infty$ ведет себя как суперпозиция двух плоских волн согласно

$$\varphi_5 = \frac{\Gamma(1-2\gamma)}{\Gamma(1-\gamma)} \left(2\sqrt{a^2 + b^2}\right)^{1-i\sqrt{\varepsilon-1}} e^{-i\sqrt{\varepsilon-1}z} + \frac{\Gamma(2\gamma-1)}{\Gamma(\gamma)} \left(2\sqrt{a^2 + b^2}\right)^{1+i\sqrt{\varepsilon-1}} e^{+i\sqrt{\varepsilon-1}z}. \quad (16)$$

Можно определить коэффициент отражения как квадрат модуля отношения амплитуд в суперпозиции плоских волн

$$M_- e^{-i\sqrt{\varepsilon-1}z} + M_+ e^{+i\sqrt{\varepsilon-1}z}, \quad R = \left|\frac{M_-}{M_+}\right|^2, \quad R = \left|\frac{\Gamma(1-2\gamma)}{\Gamma(2\gamma-1)} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(1-\gamma)}\right|^2. \quad (17a)$$

Учтем

$$1-2\gamma = +2i\sqrt{\varepsilon-1}, \quad 2\gamma-1 = -2i\sqrt{\varepsilon+1}, \\ \gamma = 1/2 - i\sqrt{\varepsilon-1}, \quad 1-\gamma = 1/2 + i\sqrt{\varepsilon-1},$$

тогда

$$R = \left|\frac{\Gamma(+2i\sqrt{\varepsilon-1})}{\Gamma(-2i\sqrt{\varepsilon-1})}\right|^2 \left|\frac{\Gamma(1/2 - i\sqrt{\varepsilon-1})}{\Gamma(1/2 + i\sqrt{\varepsilon-1})}\right|^2 \equiv 1. \quad (17б)$$

Найдем поведение Y_5 в области больших y . Применяя известное асимптотическое соотношение $Y_5 = \Psi(\gamma, c, y) \sim y^{-\gamma}$, получим:

$$z \rightarrow +\infty, \quad f_5 = y^{\gamma+1/2} e^{-y/2} Y_5 \sim y^{1/2} e^{-y/2} \sim \left(2\sqrt{a^2 + b^2} e^z\right)^{1/2} \exp\left(-\sqrt{a^2 + b^2} e^z\right) \rightarrow \exp^{-e^{+\infty}} = 0. \quad (18)$$

Решение f_5 является описанием ожидаемой ситуации: волна падает слева, отражается от эффективного барьера; справа за барьером решение резко падает до нуля. Таким образом, эффективно геометрия Лобачевского моделирует распределенное в пространстве идеальное зеркало. Более детальный анализ вопроса приведен в работе [4].

2. Частицы со спином 1/2 в пространстве Лобачевского. В системе координат (1) пространства Лобачевского уравнение Дирака имеет вид

$$\left[\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + \gamma^1 e^z \frac{\partial}{\partial x} + \gamma^2 e^z \frac{\partial}{\partial y} + \gamma^3 \left(\frac{\partial}{\partial z} - 1 \right) + im \right] \Psi = 0. \quad (19)$$

С волновым оператором из (19) коммутируют следующие три: $i\partial_t, i\partial_x, i\partial_y$; соответственно решения ищем в виде

$$\Psi^{\varepsilon, k_1, k_2} = e^{-i\varepsilon t} e^{ik_1 x} e^{ik_2 y} \begin{pmatrix} f_1(z) \\ f_2(z) \\ f_3(z) \\ f_4(z) \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Используя матрицы Дирака в спинорном базисе, из (19) можно получить систему из четырех уравнений для функций $f_i(z)$. Существует обобщенный оператор спиральности, коммутирующий с оператором волнового уравнения:

$$\Sigma = \frac{1}{2} \left(e^z \gamma^2 \gamma^3 \frac{\partial}{\partial x} + e^z \gamma^3 \gamma^1 \frac{\partial}{\partial y} + \gamma^1 \gamma^2 \left(\frac{\partial}{\partial z} - 1 \right) \right). \quad (21)$$

Его диагонализация $\Sigma \Psi = p \Psi$ позволяет наложить дополнительные условия на эти четыре функции:

$$p = \pm \sqrt{\varepsilon^2 - m^2}, \quad f_3 = \frac{\varepsilon - p}{m} f_1, \quad f_4 = \frac{\varepsilon - p}{m} f_2. \quad (22)$$

В результате получаем систему из двух уравнений для f_1, f_2 :

$$\left(\frac{d}{dz} - 1 - ip \right) f_1 + e^z (ik_1 + k_2) f_2 = 0, \quad \left(\frac{d}{dz} - 1 + ip \right) f_2 - e^z (ik_1 - k_2) f_1 = 0. \quad (23)$$

Существует специальный простой случай, когда $k_1 = 0, k_2 = 0$. При этом уравнения и их решения существенно упрощаются:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - 1 - ip \right) f_1 = 0, \quad f_1 = C_1 e^z e^{+ipz}; \quad \left(\frac{\partial}{\partial z} - 1 + ip \right) f_2 = 0, \quad f_2 = C_2 e^z e^{-ipz}. \quad (24)$$

Наиболее просто интерпретируются следующие решения:

$$\Psi_1^{\varepsilon 0 0 p}(t, z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\varepsilon - p}{m} \\ 0 \end{pmatrix} e^z e^{+ipz}, \quad \Psi_2^{\varepsilon 0 0 p}(t, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{\varepsilon - p}{m} \end{pmatrix} e^z e^{-ipz}. \quad (25)$$

Очевидно, что присутствующий в решениях множитель e^z будет компенсироваться при рассмотрении билинейных конструкций из волновых функций (с учетом их последующего умножения на $\sqrt{-g} dx dy dz$).

Обратимся к системе (23) и перейдем в ней к переменной Z :

$$\sqrt{k_1^2 + k_2^2} e^z = Z, \quad Z \in (0, +\infty), \quad e^{ia} = \sqrt{\frac{k_2 + ik_1}{k_2 - ik_1}},$$

тогда

$$\left(Z \frac{d}{dZ} - 1 - ip \right) f_1 + Ze^{+ia} f_2 = 0, \quad \left(Z \frac{d}{dZ} - 1 + ip \right) f_2 + Ze^{-ia} f_1 = 0. \quad (26)$$

Из (26) получаем дифференциальные уравнения второго порядка для функций f_1 и f_2 :

$$Z \frac{d^2 f_1}{dZ^2} - 2 \frac{d f_1}{dZ} + \left(\frac{p^2 + ip + 2}{Z} - Z \right) f_1 = 0, \quad (27a)$$

$$Z \frac{d^2 f_2}{dZ^2} - 2 \frac{d f_2}{dZ} + \left(\frac{p^2 - ip + 2}{Z} - Z \right) f_2 = 0. \quad (27б)$$

Отмечаем симметрию между уравнениями: они переходят друг в друга при замене $p \longrightarrow -p$.

Уравнения (27) по математической структуре совпадают с исследованным при анализе случая электромагнитного поля уравнением (7). Это означает, что основные особенности явления отражения частицы со спином $1/2$, взаимодействующей с геометрией пространства Лобачевского (или генерируемой этой геометрией специальной средой), будут аналогичными. Однако следует обратить внимание на то, что в отличие от случая плоского пространства здесь уравнения второго порядка для функций f_1 и f_2 зависят явно от первой степени параметра p , т. е. от состояния поляризации спинорной волны; кроме того, уравнение второго порядка не может быть приведено к виду вещественного потенциала.

Рассмотрим уравнение (27a). Введем подстановку $f_1(Z) = Z^A e^{BZ} F_1(Z)$:

$$Z \frac{d^2 F_1}{dZ^2} + (2A - 2 + 2BZ) \frac{d F_1}{dZ} + \left[(B^2 - 1)Z + 2B(A - 1) + \frac{(A - ip - 1)(A + ip - 2)}{Z} \right] F_1 = 0.$$

При A и B , выбранных согласно $A = +ip + 1, -ip + 2, B = \pm 1$, полученное уравнение упрощается:

$$Z \frac{d^2 F_1}{dZ^2} + (2A - 2 + 2BZ) \frac{d F_1}{dZ} + 2B(A - 1)F_1 = 0;$$

после выполнения еще одной замены переменной $Z = y/2$ приходим к

$$y \frac{d^2 F_1}{dy^2} + (2A - 2 + By) \frac{d F_1}{dy} + B(A - 1)F_1 = 0, \quad (28a)$$

что при $B = -1$ представляет собой уравнение для вырожденной гипергеометрической функции с параметрами (не теряя общности, выберем $A = +ip + 1$)

$$y \frac{d^2 \Phi}{dy^2} + (c - y) \frac{d \Phi}{dy} - a\Phi = 0, \quad a = +ip, \quad c = 2a = +2ip. \quad (28б)$$

Двумя линейно независимыми решениями являются

$$F_1^{(1)}(y) = \Phi(a, c, y), \quad F_1^{(2)}(y) = y^{1-c} \Phi(a - c + 1, 2 - c, y). \quad (28в)$$

По аналогии со случаем плоского пространства, эти два решения можно рассматривать как описывающие волны, распространяющиеся в противоположных направлениях.

Рассмотрим уравнение (27б). Воспользовавшись отмеченной выше симметрией, получаем

$$\begin{aligned} f_2 &= y^{a'+1} e^{-y/2} F_2(y), & a' &= -ip, & c' &= 2a' = -2ip, \\ F_2^{(1)} &= \Phi(a', c', y), & F_2^{(2)} &= y^{1-c'} \Phi(a' - c' + 1, 2 - c', y). \end{aligned} \quad (29)$$

В найденных решениях перейдем к одному независимому параметру a :

$$\begin{aligned} f_1 &= y^{a+1} e^{-y/2} F_1(y), \\ F_1^{(1)}(y) &= \Phi(a, 2a, y), & F_1^{(2)}(y) &= y^{1-2a} \Phi(1-a, 2-2a, y); \end{aligned} \quad (30a)$$

$$\begin{aligned} f_2 &= y^{-a+1} e^{-y/2} F_2(y), \\ F_2^{(1)}(y) &= \Phi(-a, -2a, y), & F_2^{(2)}(y) &= y^{1+2a} \Phi(1+a, 2+2a, y). \end{aligned} \quad (30б)$$

Функции f_1, f_2 связаны уравнениями первого порядка

$$\left(y \frac{d}{dy} - 1 - a \right) f_1 - \frac{y}{2} e^{+ia} f_2 = 0, \quad \left(y \frac{d}{dy} - 1 + a \right) f_2 - \frac{y}{2} e^{-ia} f_1 = 0;$$

перейдем в этих уравнениях к функциям F_1, F_2 , в результате получим

$$\frac{dF_1}{dy} - \frac{1}{2} (F_1 + y^{-2a} e^{+ia} F_2) = 0, \quad \frac{dF_2}{dy} - \frac{1}{2} (F_2 + y^{+2a} e^{-ia} F_1) = 0.$$

Анализ показывает, что этими уравнениями связываются функции из следующих пар:

$$F_1^{(1)}(y) \text{ --- } F_2^{(2)}(y), \quad F_1^{(2)}(y) \text{ --- } F_2^{(1)}(y).$$

Следует в каждом случае найти относительные коэффициенты двух функций. После выполнения необходимых вычислений получаем два типа решений:

$$\begin{aligned} I \quad f_1 &= M_+ e^{-y/2} y^{1+a} \Phi(a, 2a, y), \\ f_2 &= e^{-y/2} y^{2+a} \Phi(a+1, 2+2a, y), & M_+ &= \left[2e^{+ia} (1+2a) \right]; \end{aligned} \quad (31a)$$

$$\begin{aligned} II \quad f_1 &= M_- e^{-y/2} y^{2-a} \Phi(1-a, 2-2a, y), \\ f_2 &= e^{-y/2} y^{1-a} \Phi(-a, -2a, y), & M_- &= \left[2e^{-ia} (1-2a) \right]. \end{aligned} \quad (31б)$$

Напоминаем, что $a = ip = \pm i \sqrt{\varepsilon^2 - m^2}$; знак величины p связан с состоянием поляризации спиновой волны; а типы I и II (предположительно) должны быть связаны с направлениями распространения волны: влево или вправо.

Остановимся на решениях в пространстве Лобачевского уравнений в нерелятивистском приближении. Можно показать (технические детали опускаем), что после осуществления такого приближения в системе уравнений для частицы Дирака мы получим следующие два паулиевских уравнения:

$$\begin{aligned} \left[\frac{d^2}{dz^2} - 2 \frac{d}{dz} + 1 - e^{2z} (k_1^2 + k_2^2) + 2mE \right] F - e^z (ik_1 - k_2) f = 0, \\ \left[\frac{d^2}{dz^2} - 2 \frac{d}{dz} + 1 - e^{2z} (k_1^2 + k_2^2) + 2mE \right] f + e^z (ik_1 + k_2) F = 0; \end{aligned} \quad (32)$$

это зацепляющиеся уравнения второго порядка для двух функций. Решения этой системы могут быть найдены из решений релятивистских уравнений, если учесть следующие определения:

$$f = \frac{f_1(z) + f_3(z)}{2} = \frac{1+A}{2} f_1(z), \quad F = \frac{f_2(z) + f_4(z)}{2} = \frac{1+A}{2} f_2(z),$$

$$A = \frac{\varepsilon \pm p}{m}, \quad p = \pm \sqrt{\varepsilon^2 - m^2} = \pm \sqrt{(E+m)^2 - m^2} \approx \pm \sqrt{2mE}; \quad (33)$$

знак « \pm » соответствует двум разным поляризациям нерелятивистского электрона.

Наконец следует специально остановиться на построении решений, описывающих ситуацию отражения частиц со спином $1/2$ от эффективного потенциального барьера, генерируемого геометрий пространства Лобачевского. Для этого вернемся к основной системе уравнений (26) и представим ее в виде

$$\left(Z \frac{d}{dZ} - 1 - ip \right) \sqrt{k_2 - ik_1} f_1 + Z \sqrt{k_2 + ik_1} f_2 = 0,$$

$$\left(Z \frac{d}{dZ} - 1 + ip \right) \sqrt{k_2 + ik_1} f_2 + Z \sqrt{k_2 - ik_1} f_1 = 0.$$

Перейдем к новым функциям

$$\sqrt{k_2 - ik_1} f_1 = e^z \varphi_1, \quad \sqrt{k_2 + ik_1} f_2 = e^z \varphi_2, \quad (34)$$

в результате получим

$$\left(Z \frac{d}{dZ} - ip \right) \varphi_1 + Z \varphi_2 = 0, \quad \left(Z \frac{d}{dZ} + ip \right) \varphi_2 + Z \varphi_1 = 0. \quad (35)$$

Затем переходим к новой переменной $x = iZ = i\sqrt{k_1^2 + k_2^2} e^z$:

$$\left(x \frac{d}{dx} - ip \right) \varphi_1 - ix \varphi_2 = 0, \quad \left(x \frac{d}{dx} + ip \right) \varphi_2 - ix \varphi_1 = 0. \quad (36)$$

Из (36) следуют уравнения второго порядка

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + 1 + \frac{p^2 + ip}{x^2} \right) \varphi_1 = 0, \quad \left(\frac{d^2}{dx^2} + 1 + \frac{p^2 - ip}{x^2} \right) \varphi_2 = 0. \quad (37)$$

Если выделить множитель \sqrt{x} : $\varphi_1 = \sqrt{x} F_1$, $\varphi_2 = \sqrt{x} F_2$, то приходим к уравнениям Бесселя:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} + 1 + \frac{p^2 + ip - 1/4}{x^2} \right) F_1 = 0, \quad \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} + 1 + \frac{p^2 - ip - 1/4}{x^2} \right) F_2 = 0. \quad (38)$$

Поскольку нас интересует также случай вейлевского нейтрино (со спиральностью -1), то дальше будем детализировать случай отрицательного $p = -\sqrt{\varepsilon^2 - m^2}$. Чтобы не вводить новых обозначений, внесем знак « \leftarrow » перед p в уравнениях (38), получаем

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} + 1 + \frac{p^2 - ip - 1/4}{x^2} \right) F_1 = 0, \quad \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} + 1 + \frac{p^2 + ip - 1/4}{x^2} \right) F_2 = 0, \quad (39)$$

здесь $p = +\sqrt{\varepsilon^2 - m^2} > 0$. То есть функции $F_1(x), F_2(x)$ удовлетворяют уравнению Бесселя:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} + 1 - \frac{(ip + 1/2)^2}{x^2} \right) F_1 = 0,$$

$$v = -ip - 1/2, \quad F_1 = J_{+v}(x), J_{-v}(x); \quad (40a)$$

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} + 1 - \frac{(-ip + 1/2)^2}{x^2} \right) F_2 = 0,$$

$$\mu = -ip + 1/2 = v + 1, \quad F_2 = J_{+\mu}(x), J_{-\mu}(x). \quad (40b)$$

Поскольку далее предстоит следить за явным видом обеих функций F_1, F_2 , обратимся к исходной системе уравнений – в переменной $x = iZ$ с учетом $\nu = -ip - 1/2$ она будет выглядеть так:

$$\left(x \frac{d}{dx} - \nu\right) F_1 = -ix F_2, \quad \left(x \frac{d}{dx} + \nu + 1\right) F_2 = -ix F_1. \quad (41)$$

Напомним известные рекуррентные формулы для решений уравнения Бесселя – записываем их в удобном для использования виде:

$$\left(x \frac{d}{dx} - \nu\right) F_\nu(x) = -x F_{\nu+1}(x), \quad \left(x \frac{d}{dx} - \nu\right) F_{-\nu}(x) = +x F_{-\nu-1}(x); \quad (42)$$

здесь под $F_{\pm\nu}$ можно понимать либо функции Бесселя $J_{\pm\nu}$, либо функции Ганкеля $H_{\pm\nu}^1, H_{\pm\nu}^2$, либо функции Неймана $N_{\pm\nu}(x)$. Сопоставляя (41) с (42), находим в терминах каждой функции по два линейно независимых решения.

В функциях Бесселя

$$\begin{array}{ll} I & F_1^I(x) = J_{+\nu}(x), \quad F_2^I(x) = -i J_{+(\nu+1)}(x); \\ II & F_1^{II}(x) = J_{-\nu}(x), \quad F_2^{II}(x) = +i J_{-(\nu+1)}(x). \end{array} \quad (43)$$

В функциях Ганкеля

$$\begin{array}{ll} I & F_1^I(x) = H_{+\nu}^1(x), \quad F_2^I(x) = -i H_{+(\nu+1)}^1(x); \\ II & F_1^{II}(x) = H_{+\nu}^2(x), \quad F_2^{II}(x) = -i H_{+(\nu+1)}^2(x); \end{array} \quad (44a)$$

$$\begin{array}{ll} I' & F_1^{I'}(x) = H_{-\nu}^1(x), \quad F_2^{I'}(x) = +i H_{-(\nu+1)}^1(x); \\ II' & F_1^{II'}(x) = H_{-\nu}^2(x), \quad F_2^{II'}(x) = +i H_{-(\nu+1)}^2(x); \end{array} \quad (44b)$$

напоминаем, что $H_{-\nu}^1(x) = e^{i\nu\pi} H_{\nu}^2(x)$, поэтому штрихованные варианты I', II' совпадают соответственно с II, I (с точностью до множителей) и дальше не рассматриваются.

В функциях Неймана

$$\begin{array}{ll} I & F_1^I(x) = N_{+\nu}(x), \quad F_2^I(x) = -i N_{+(\nu+1)}(x); \\ II & F_1^{II}(x) = N_{-\nu}(x), \quad F_2^{II}(x) = +i N_{-(\nu+1)}(x). \end{array} \quad (45)$$

Анализ асимптотического поведения решений, построенных на основе этих трех типов функций, позволяет заполнить следующую таблицу (технические детали вычислений опускаем, используем обозначение $x = iX, \sigma = -p$):

	функции Бесселя		функции Ганкеля			функции Неймана			
	$z \rightarrow -\infty$	$z \rightarrow +\infty$	$z \rightarrow -\infty$	$z \rightarrow +\infty$	$z \rightarrow -\infty$	$z \rightarrow +\infty$			
Z_1^I	e^{-ipz}	e^{+X}	Z_1^I	e^{-ipz}	e^{-X}	Z_1^I	e^{-ipz}	e^{+X}	(46)
Z_2^I	0	e^{+X}	Z_2^I	e^{+ipz}	e^{-X}	Z_2^I	e^{+ipz}	e^{+X}	
Z_1^{II}	0	e^{+X}	Z_1^{II}	e^{-ipz}	e^{+X}	Z_1^{II}	e^{-ipz}	e^{+X}	
Z_2^{II}	e^{+ipz}	e^{+X}	Z_2^{II}	e^{+ipz}	e^{+X}	Z_2^{II}	e^{+ipz}	e^{+X}	

Решения с нужным поведением в асимптотических областях (экспоненциальное затухание при $z \rightarrow +\infty$ и осциллирующее поведение при $z \rightarrow -\infty$) встречаются только среди решений типа I , построенных в терминах функций Ганкеля.

Заключение. Интерпретацию уравнений Максвелла в пространстве Лобачевского как уравнений Максвелла в плоском пространстве, но в специальной материальной среде можно попробовать распространить и на случай уравнений для частиц с полужелым спином, записанных в пространстве Лобачевского. Действие «среды» на электромагнитное поле и на поле частиц со спином $1/2$

оказывается похожим: «среда» действует на фермионы так же, как идеальное зеркало, глубина проникновения в него частиц со спином растёт с ростом энергии и уменьшается с увеличением кривизны пространства (уменьшением радиуса кривизны ρ пространства Лобачевского). Нужно заметить, что уравнение Паули в пространстве Лобачевского для нейтральной частицы ничем не отличается от уравнения Паули для электрически заряженной частицы. Это означает, что анализ паулиевского случая вполне может использоваться для моделирования поведения в среде и нейтронов.

Такая интерпретация действия геометрии на частицы может быть использована не только в случае пространства Лобачевского, но и для других примеров неевклидовой геометрии. Понятно, что каждый новый тип геометрии моделирует действие эффективной среды с новыми свойствами.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований в рамках сотрудничества Беларусь – Украина (грант № Ф13К-079 «Эффекты неевклидовой геометрии и топологии в микро- и макросистемах во внешних полях»).

Литература

1. Red'kov V. M., Tokarevskaya N. G., Ovsyuk E. M., Spix G. J. // NPCS. 2009. Vol. 12, no 3. P. 232–250.
2. Редьков В. М. Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца. Минск, 2009.
3. Bogush A. A., Krylov G. G., Ovsyuk E. M., Red'kov V. M. // Ricerche di matematica. 2010. Vol. 59, no 1. P. 59–96.
4. Ovsyuk E. M., Red'kov V. M. // Mode of access: <http://arxiv.org/abs/1109.0126>.

E. M. OVSIYUK, O. V. VEKO, V. M. RED'KOV

MODELING OF A MEDIUM WITH THE PROPERTY OF A PERFECT MIRROR FOR THE LIGHT AND SPIN 1/2 PARTICLES

Summary

The geometry of Lobachevsky space is considered as a basis for modeling an effective medium. In Lobachevsky space, Maxwell's equations in the 3D complex Majorana – Oppenheimer formalism are solved exactly. The problem effectively reduces to one second-order differential equation. In the context of quantum mechanics, such an equation describes the motion of a particle in a potential field gradually increasing to infinity; a particle is reflected from the barrier. The geometry of Lobachevsky space simulates a perfect mirror distributed in the space. The penetration depth of the field into the “medium–mirror” is determined by the frequency of an electromagnetic wave and by the curvature radius of an effective modeling space. The influence of the geometry on spin 1/2 particles is the same: the “medium” acts on fermions as a perfect mirror, the penetration depth of particles increases with energy and decreases with increasing the space curvature.

УДК 530.145;538.915;538.958

В. В. КУДРЯШОВ, А. В. БАРАН

ВЛИЯНИЕ СПИН-ОРБИТАЛЬНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ РАШБЫ И ДРЕССЕЛЬХАУСА НА СОСТОЯНИЯ ЭЛЕКТРОНА В КРУГОВЫХ КВАНТОВЫХ КОЛЬЦАХ*Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси**(Поступила в редакцию 20.02.2015)*

Известно [1, 2], что движение электрона во внутреннем слое полупроводниковой гетероструктуры можно рассматривать как двумерное в плоскости (x, y) благодаря наличию запирающей квантовой ямы по оси z , направленной перпендикулярно плоскости (x, y) . В связи с развитием нанотехнологий возрастающее значение приобретают исследования квантовых колец в гетероструктурах. Удерживающий потенциал обычно предполагается аксиально-симметричным $V_c(x, y) = V_c(\rho)$, где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Существуют два типа удерживающих потенциалов, которые широко используются в этой области. Во-первых, это – прямоугольный потенциал с непроницаемыми стенками [3, 4], во-вторых, параболический потенциал [5, 6]. Однако эти модели нефизичны, так как они в принципе не допускают наличия несвязанных состояний. В работах [7, 8] предложен простой, но достаточно адекватный моделируемой системе потенциал конечной глубины V для двумерных круговых квантовых колец. Этот потенциал имеет вид

$$V_c(\rho) = \begin{cases} V, & 0 < \rho < \rho_i, \\ 0, & \rho_i < \rho < \rho_o, \\ V, & \rho_o < \rho < \infty, \end{cases} \quad (1)$$

где ρ_i и ρ_o – внутренний и внешний радиусы кольца.

Исследования влияния спин-орбитальных взаимодействий Рашбы [9, 10] и Дрессельхауса [11] на состояния электрона в плоских гетероструктурах в последние годы получили широкое распространение. Операторы взаимодействия Рашбы V_R и Дрессельхауса V_D задаются формулами

$$V_R = \alpha_R(\sigma_x p_y - \sigma_y p_x)/\hbar, \quad V_D = \alpha_D(\sigma_x p_x - \sigma_y p_y)/\hbar, \quad (2)$$

где σ_x и σ_y – стандартные матрицы Паули. Интенсивности этих взаимодействий зависят от используемых материалов. Вклад каждого из взаимодействий может быть измерен с применением различных экспериментальных методов [2, 12].

Полный гамильтониан рассматриваемой задачи можно записать следующим образом:

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2M_{\text{eff}}} + V_c(\rho) + V_R + V_D, \quad (3)$$

где M_{eff} – эффективная масса электрона и $V_c(\rho)$ – потенциал вида (1). В общем случае произвольных значений интенсивностей α_R и α_D точные решения уравнения Шредингера с гамильтонианом (3) неизвестны. В частном случае взаимодействия Рашбы ($\alpha_D = 0$) точные решения были получены в [13]. Отметим также, что легко найти подобные точные решения в альтернативном частном случае ($\alpha_R = 0$).

В то же время значительное внимание уделяется и такому частному случаю [2, 14, 15], когда спин-орбитальные взаимодействия Рашбы и Дрессельхауса имеют равную интенсивность $\alpha_R = \alpha_D$. Это может быть экспериментально достигнуто благодаря тому, что интенсивностью взаимодействия Рашбы можно управлять внешним электрическим полем, а интенсивность взаимодействия Дрессельхауса можно менять, варьируя ширину квантовой ямы по оси z [1, 2]. В данном частном случае точные решения были найдены в [16]. В настоящей работе рассмотрен случай, когда разность интенсивностей $\alpha_R - \alpha_D$ мала по сравнению с их суммой $\alpha_R + \alpha_D$. Приближенное решение уравнения Шредингера ищется с помощью теории возмущений, когда возмущение пропорционально малому параметру

$$\gamma = (\alpha_R - \alpha_D)/(\alpha_R + \alpha_D). \quad (4)$$

Расчеты выполнены для значений параметров, связанных с арсенидом галлия GaAs.

В рассматриваемом случае гамильтониан (3) можно представить в виде суммы $H_0 + H'$ невозмущенного гамильтониана

$$H_0 = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2M_{\text{eff}}} + \left(\frac{\alpha_R + \alpha_D}{2\hbar} \right) (\sigma_x - \sigma_y)(p_x + p_y) + V_c(\rho) \quad (5)$$

и возмущения вида

$$H' = \gamma \left(\frac{\alpha_R + \alpha_D}{2\hbar} \right) (\sigma_x + \sigma_y)(p_y - p_x). \quad (6)$$

Будем решать полное уравнение Шредингера $H\Psi = E\Psi$ в два этапа. Сначала получим точное решение невозмущенного уравнения Шредингера

$$H_0\Psi_0 = E_0\Psi_0, \quad (7)$$

а потом учтем влияние добавки H' в рамках теории возмущений.

Легко убедиться в том, что в случае невозмущенного уравнения (7) с гамильтонианом (5), наряду с очевидным интегралом движения

$$\sigma = (\sigma_x - \sigma_y)/\sqrt{2} \quad (8)$$

имеется и нетривиальный интеграл движения

$$L = L_z + \frac{(\alpha_R + \alpha_D)M_{\text{eff}}}{2\hbar} (x - y)(\sigma_x - \sigma_y), \quad (9)$$

где L_z – оператор углового момента. Будем искать такие решения уравнения (7), которые являются собственными функциями операторов σ и L . Тогда искомые решения допускают факторизацию вида

$$\Psi_0^\pm(x, y) = \mathbf{n}^\pm \exp \left[\mp i \frac{(\alpha_R + \alpha_D)M_{\text{eff}}}{\sqrt{2}\hbar^2} (x + y) \right] e^{im\phi} u(\rho), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (10)$$

где m – квантовое число углового момента, \mathbf{n}^\pm – ортонормированные собственные векторы оператора σ :

$$\sigma \mathbf{n}^\pm = \pm \mathbf{n}^\pm, \quad \mathbf{n}^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm e^{-i\pi/4} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Здесь использованы полярные координаты ρ, ϕ ($x = \rho \cos \phi, y = \rho \sin \phi$). Полученные волновые функции удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\sigma \Psi_0^\pm(x, y) = \pm \Psi_0^\pm(x, y), \quad L \Psi_0^\pm(x, y) = m\hbar \Psi_0^\pm(x, y). \quad (12)$$

Перейдя к безразмерным величинам

$$r = \frac{\rho}{\rho_o}, \quad e_0 = \frac{2M_{\text{эфф}}\rho_o^2}{\hbar^2} E_0, \quad v = \frac{2M_{\text{эфф}}\rho_o^2}{\hbar^2} V, \quad a_R = \frac{2M_{\text{эфф}}\rho_o}{\hbar^2} \alpha_R, \quad a_D = \frac{2M_{\text{эфф}}\rho_o}{\hbar^2} \alpha_D, \quad (13)$$

запишем радиальное уравнение

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} + \left(e_0 + a^2 - v_c(r) - \frac{m^2}{r^2} \right) u = 0, \quad (14)$$

где

$$a = (a_R + a_D)/2, \quad (15)$$

$$v_c(r) = \begin{cases} v, & 0 < r < r_i, \\ 0, & r_i < r < 1, \\ v, & 1 < r < \infty. \end{cases} \quad (16)$$

Здесь введено обозначение $r_i = \rho_i/\rho_o$ для относительной ширины кольца.

В случае прямоугольной потенциальной ямы (16) в каждой из трех областей ($0 < r < r_i$, $r_i < r < 1$, $1 < r < \infty$) уравнение (14) является уравнением Бесселя. Частные решения в первой и третьей областях выбираются таким образом, чтобы радиальная волновая функция $u(r)$ была регулярной в начале координат $r \rightarrow 0$ и стремилась к нулю на бесконечности $r \rightarrow \infty$. В результате получаем формулу

$$u(r) = \begin{cases} c_1 I_m(k_o r), & 0 < r < r_i, \\ c_{21} J_m(k_i r) + c_{22} Y_m(k_i r), & r_i < r < 1, \\ c_3 K_m(k_o r), & 1 < r < \infty, \end{cases} \quad (17)$$

где $J_m(z)$ и $Y_m(z)$ – функции Бесселя первого и второго рода, а $I_m(z)$ и $K_m(z)$ – соответственно модифицированные функции Бесселя [17]. Здесь c_1 , c_{21} , c_{22} , c_3 – произвольные коэффициенты, а кроме того, введены обозначения

$$k_o = \sqrt{v - e_0 - a^2}, \quad k_i = \sqrt{e_0 + a^2}. \quad (18)$$

Условия непрерывности для радиальной волновой функции $u(r)$ и ее первой производной в граничных точках $r = r_i$ и $r = 1$ приводят к системе алгебраических уравнений

$$T_4(m, e_0, v, a, r_i) \mathbf{X} = 0 \quad (19)$$

для четырех коэффициентов, где $\mathbf{X} = \{c_1, c_{21}, c_{22}, c_3\}$ и $T_4(m, e_0, v, a, r_i)$ – 4×4 матрица вида

$$T_4 = \begin{pmatrix} I_m(k_o r_i) & -J_m(k_i r_i) & -Y_m(k_i r_i) & 0 \\ k_o I_{m+1}(k_o r_i) & k_i J_{m+1}(k_i r_i) & k_i Y_{m+1}(k_i r_i) & 0 \\ 0 & J_m(k_i) & Y_m(k_i) & -K_m(k_o) \\ 0 & -k_i J_{m+1}(k_i) & -k_i Y_{m+1}(k_i) & k_o K_{m+1}(k_o) \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Следовательно, точное уравнение для определения невозмущенной энергии $e_0(m, v, a, r_i)$ имеет вид

$$\det T_4(m, e_0, v, a, r_i) = 0. \quad (21)$$

Для того чтобы построить радиальную волновую функцию полностью, найдем значения искомых коэффициентов

$$\begin{pmatrix} c_{21} \\ c_{22} \\ c_3 \end{pmatrix} = -c_1 T_3^{-1}(m, e_0, v, a, r_i) \begin{pmatrix} k_o I_{m+1}(k_o r_i) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (22)$$

где

$$T_3 = \begin{pmatrix} k_i J_{m+1}(k_i r_i) & k_i Y_{m+1}(k_i r_i) & 0 \\ J_m(k_i) & Y_m(k_i) & -K_m(k_o) \\ -k_i J_{m+1}(k_i) & -k_i Y_{m+1}(k_i) & k_o K_{m+1}(k_o) \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Значение коэффициента c_1 находится из условия нормировки

$$\int_0^\infty u^2(r) r dr = 1/2\pi. \quad (24)$$

Отметим, что функции $\Psi_0^\pm(x, y)$ являются ортонормированными: $\langle \Psi_0^\pm | \Psi_0^\pm \rangle = 1$, $\langle \Psi_0^\pm | \Psi_0^\mp \rangle = 0$.

Из уравнения (14) видно, что зависимость e_0 от a является тривиальной:

$$e_0(m, v, a, r_i) = e_0(m, v, 0, r_i) - a^2. \quad (25)$$

Разумеется, уравнение (21) не может быть решено аналитически, но легко решается численно.

Наряду с безразмерными величинами e_0 и v рассмотрим возмущение в безразмерной форме:

$$h' = \frac{2M_{\text{eff}}\rho_o^2}{\hbar^2} H'. \quad (26)$$

Так как каждый уровень энергии невозмущенной системы является двукратно вырожденным с двумя собственными функциями (10), будем учитывать вклад возмущения (26) по теории возмущений при наличии вырождения. Вследствие того что $(\sigma_x + \sigma_y)\mathbf{n}^\pm = \mp i\sqrt{2}\mathbf{n}^\mp$, имеем следующие равенства:

$$\langle \Psi_0^\pm | h' | \Psi_0^\pm \rangle = 0 \quad (27)$$

для диагональных матричных элементов в базисе собственных векторов $|\Psi_0^+\rangle$ и $|\Psi_0^-\rangle$. Недиagonальные матричные элементы имеют вид

$$\langle \Psi_0^+ | h' | \Psi_0^- \rangle = \langle \Psi_0^- | h' | \Psi_0^+ \rangle = -\gamma \delta(m, v, a, r_i), \quad (28)$$

где

$$\delta(m, v, a, r_i) = 4\pi m a \int_0^\infty J_1(2ar) u^2(r) dr. \quad (29)$$

Тогда для расщепления невозмущенных уровней энергии получаем

$$e^\pm(m, v, a, r_i, \gamma) = e_0(m, v, a, r_i) \mp \gamma \delta(m, v, a, r_i). \quad (30)$$

Нормированные собственные функции нулевого приближения, которые принадлежат собственным значениям e^\pm , описываются формулой

$$\Psi^\pm = (\Psi_0^+ \pm \Psi_0^-) / \sqrt{2}. \quad (31)$$

В дополнение к аналитическим результатам представим некоторые числовые иллюстрации. Выбираем эффективную массу электрона $M_{\text{eff}} = 0,067M_e$, характеризующую движение в арсениде

галлия GaAs, где M_e – масса электрона в вакууме. При выборе $\rho_o = 30$ нм имеют место следующие соответствия между безразмерными и размерными величинами: $a=1 \rightarrow 18,9579$ мэВ нм, $e=1 \rightarrow E = 0,631933$ мэВ.

Так, например, при выбранных параметрах безразмерной величине $\nu = 400$ соответствует глубина потенциальной ямы $V = 252,772$ мэВ, близкая к значению 257 мэВ в [8].

Таблица демонстрирует существенную зависимость невозмущенной энергии e_0 от относительной ширины квантового кольца r_i при фиксированных значениях $a = 0$ и $\nu = 400$. В ней приведены только два первых уровня энергии для трех значений углового момента.

Зависимость e_0 от r_i при $a = 0$ и $\nu = 400$

r_i	$m=0$		$m=1$		$m=2$	
	$n=0$	$n=1$	$n=0$	$n=1$	$n=0$	$n=1$
0,2	11,2339	47,2363	14,8513	52,2593	24,1580	66,2640
0,5	26,8321	107,287	28,7345	109,359	34,3902	115,576
0,8	105,749	358,948	107,001	360,311	110,758	364,336

На рис. 1–3 в безразмерном виде представлена зависимость относительной поправки δ/e_0 от суммарной интенсивности спин-орбитальных взаимодействий a при трех значениях $r_i = 0,2$,

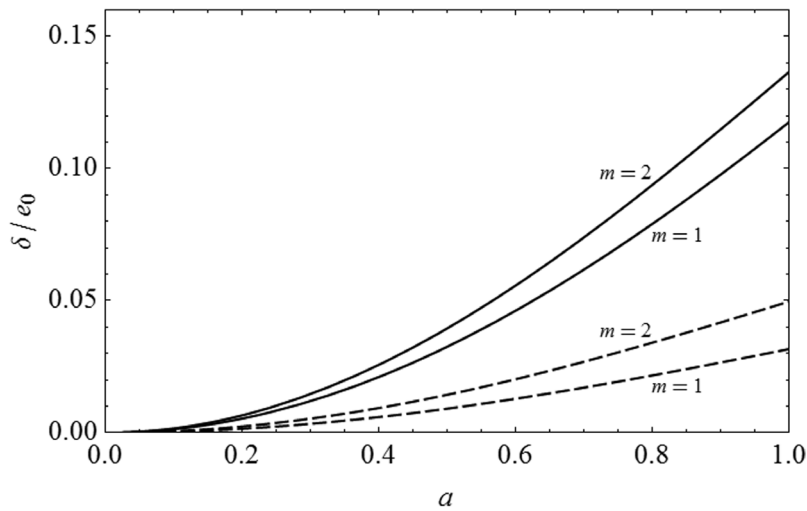


Рис. 1. Зависимость δ/e_0 от a при $r_i = 0,2$

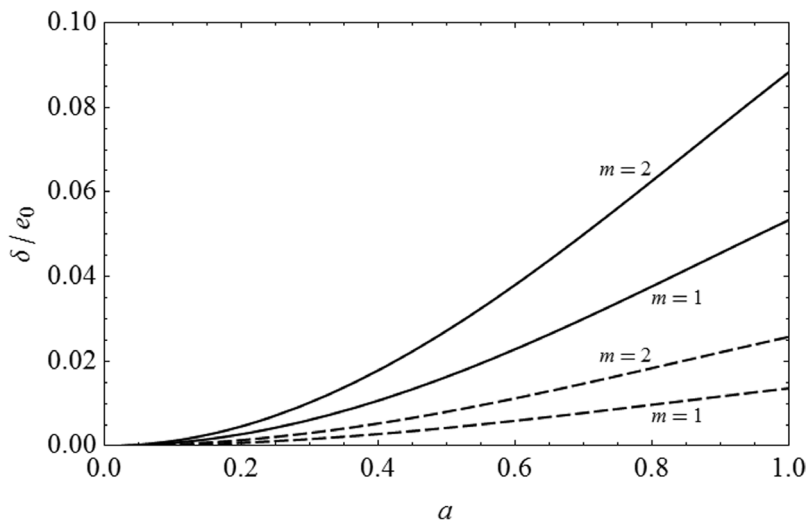


Рис. 2. Зависимость δ/e_0 от a при $r_i = 0,5$

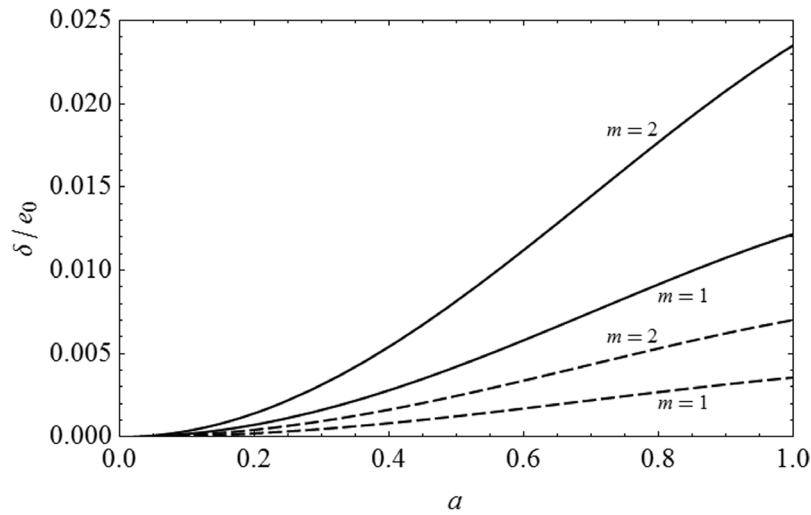


Рис. 3. Зависимость δ/e_0 от a при $r_i = 0,8$

$r_i = 0,5$ и $r_i = 0,8$. Сплошные линии соответствуют первым уровням энергии, а штриховые – вторым уровням для двух значений углового момента ($m = 1$ и $m = 2$).

Очевидно, что полная поправка $\gamma\delta$ действительно мала по сравнению с невозмущенной энергией e_0 , когда параметр γ достаточно мал. Отличительной особенностью использованного приближения является равенство нулю поправки при ($m = 0$).

Таким образом, в рамках теории возмущений дано описание электронных состояний в полупроводниковых круговых квантовых кольцах в присутствии спин-орбитальных взаимодействий Рашбы и Дрессельхауса с реалистичным аксиально-симметричным удерживающим прямоугольным потенциалом конечной глубины.

Литература

1. Valín-Rodríguez M., Puente A., Serra L. // Eur. Phys. J. B. 2004. Vol. 39. P. 87–92.
2. Li J., Chang K. // Phys. Rev. B. 2010. Vol. 82. 033304.
3. Sheng J. S., Chang K. // Phys. Rev. B. 2006. Vol. 74. 235315.
4. Song J., Ulloa S. E. // Phys. Rev. B. 2001. Vol. 63. 125302.
5. Valín-Rodríguez M., Puente A., Serra L. // Eur. Phys. J. D. 2000. Vol. 12. P. 493–498.
6. Govorov A.O. et al. // Phys. Rev. B. 2002. Vol. 66. 081309.
7. Bandos T. V., Cantarero A., Garcia-Cristóbal A. // Eur. Phys. J. B. 2006. Vol. 53. P. 99–108.
8. Grochol M., Grosse F., Zimmermann R. // Phys. Rev. B. 2006. Vol. 74. 115416.
9. Рауба Э. И. // Физика твердого тела. 1960. Т. 2. С. 1224–1238.
10. Bychkov Yu. A., Rashba E. I. // J. Phys. C. 1984. Vol. 17. P. 6039–6046.
11. Dresselhaus G. // Phys. Rev. 1955. Vol. 100. P. 580–586.
12. Meier L. et al. // Nature Physics. 2007. Vol. 3. P. 650–654.
13. Kudryashov V. V. // Foundation and Advances in Nonlinear Science: Proc. of the 14th Conf.-School. Minsk. 2009. P. 95–102.
14. Schliemann J., Egues J. C., Loss D. // Phys. Rev. Lett. 2003. Vol. 90. 146801.
15. Bernevig B. A., Orenstein J., Zhang S. C. // Phys. Rev. Lett. 2006. Vol. 97. 236601.
16. Кудряшов В. В., Баран А. В. // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2012. № 2. С. 92–96.
17. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М., 1979.

V. V. KUDRYASHOV, A. V. BARAN

INFLUENCE OF THE RASHBA AND DRESSSELHAUS SPIN-ORBIT INTERACTIONS ON THE ELECTRON STATES IN CIRCULAR QUANTUM RINGS

Summary

Within the framework of perturbation theory the energy levels and wave functions are found for an electron in two-dimensional semiconductor circular quantum rings in the presence of the Rashba and Dresselhaus spin-orbit interactions with a realistic axially symmetric confining square well potential of finite depth.

УДК 535:621.373.8;535:530.182:621.372.623

А. А. БУЙ, В. И. ДАШКЕВИЧ, В. А. ОРЛОВИЧ

**НЕПРЕРЫВНЫЙ ДИОДНО НАКАЧИВАЕМЫЙ Nd:KGd(WO₄)₂/КТР-ЛАЗЕР
С ВНУТРИРЕЗОНАТОРНЫМ УДВОЕНИЕМ ЧАСТОТЫ***Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси**(Поступила в редакцию 27.02.2015)*

Введение. Недавно семейство Eu-легированных материалов, обеспечивающих генерацию вынужденного излучения и свечение фосфоресцирующих сред в видимой области спектра, пополнилось монокристаллами двойных вольфраматов Eu:KRE(WO₄)₂ (Eu:KREW), где RE = Gd, Y и Lu [1–3]. Спектроскопические исследования показывают, что наиболее сильные линии поглощения Eu:KREW лежат в ультрафиолетовой, фиолетовой, синей и зеленой областях спектра. С точки зрения реализации генерации с использованием объемного одиночного монокристалла предпочтительно осуществлять накачку в полосу поглощения ${}^7F_1 - {}^5D_1$ (534 нм), поскольку излучение из зеленой области спектра не вызывает окрашивания матрицы KREW, как это свойственно более коротковолновому излучению, принадлежащему фиолетовой и особенно ультрафиолетовой области спектра.

Однако осуществление накачки Eu:KREW-кристаллов в полосу ${}^7F_1 - {}^5D_1$ имеет определенные трудности. Во-первых, до сих пор еще не решена проблема создания для зеленой области спектра лазерных диодов, мощность которых была бы сравнимой с мощностью диодов, широко используемых для накачки Nd-содержащих лазеров на длинах волн 808 и 880 нм (~ 1–30 Вт). Пока лучшие разработки, например [4], характеризуются мощностью ~ 0,1 Вт, при этом наибольшая длина волны генерации диода лежит в коротковолновой области полосы ${}^7F_0 - {}^5D_1$. Во-вторых, полоса ${}^7F_0 - {}^5D_1$, имеющая максимум поглощения на $\lambda \sim 534$ нм, достаточно узка. Ее полуширина не превышает ~1,5 нм. В силу этого хорошо разработанные на данный момент непрерывные Nd:YAG-, Nd:YVO₄- и Nd:GdVO₄-лазеры с удвоением частоты, обеспечивающие на $\lambda = 532$ нм мощность ~ 3,5 Вт [5, 6], практически малоэффективны для накачки Eu:KREW-сред.

Запись поляризационных спектров моноклинных кристаллов Eu:KREW показывает, что их накачка в полосу поглощения ${}^7F_1 - {}^5D_1$ может быть успешно осуществлена излучением второй гармоники (ВГ) Nd:KGdW-лазера, имеющим длину волны 533,6 нм. Например, для кристалла Eu:KGdW коэффициент поглощения на данной длине волны всего лишь в ~2 раза ниже пикового значения на $\lambda = 534,2$ нм. Именно с использованием импульсного (модуляция потерь) Nd:KGdW-лазера с удвоением частоты впервые для Eu-легированной среды (25%Eu:KGdW) была получена генерация на неосвоенном до публикации [1] переходе ${}^5D_0 \rightarrow {}^7F_4$, обеспечивающем темно-красное излучение на $\lambda \sim 703$ нм.

Известно, что матрицы KREW активны к вынужденному комбинационному рассеянию (ВКР). В силу этого высокоэффективные Nd:KGdW-лазеры с ламповой и диодной накачкой продемонстрированы как на длинах волн основных лазерных переходов ${}^4F_{3/2} - {}^4I_{11/2}$ [7–9] и ${}^4F_{3/2} - {}^4I_{13/2}$ [10–12] (1067,2 и 1351 нм соответственно), так и на длинах волн стоксовых компонент, генерируемых в результате ВКР-самопреобразования основного лазерного излучения (1180 [13], 1500 [14] и 1538 [15] нм). Сочетание ВКР-преобразования с эффектом генерации ВГ или же суммарной частоты позволяет получать с помощью Nd:KGdW-лазеров когерентное излучение в желтой области спектра на длинах волн 560 [16] и 590 [17] нм. Имеются сообщения и о Nd:KGdW-лазерах

с удвоением частоты основного излучения на $\lambda = 1,0672$ мкм [18–19]. Однако высокая мощность ВГ характерна лишь для Nd:KGdW-лазеров с модуляцией потерь. Если касаться реализации непрерывной или квазинепрерывной генерации Eu:KReW-лазеров, то мощность известных (напр., [18]) Nd:KGdW-лазеров с диодной накачкой, непрерывно излучающих на $\lambda = 533,6$ нм, невысока и, как правило, не превышает нескольких десятков милливатт.

Цель настоящей работы – разработка и исследование как непрерывного, так и квазинепрерывного Nd:KGdW/КТП-лазера с продольной диодной накачкой и внутррезонаторным преобразованием основного излучения канала ${}^4F_{3/2} - {}^4I_{11/2}$ в ВГ, мощность которого достигает ваттного уровня. Основное предназначение данного лазера с удвоением частоты – создание квазинепрерывных и непрерывных лазерных систем Nd:KGdW/Eu:KReW, излучающих на длине волны ~ 703 нм.

Экспериментальная часть. Оптическая схема Nd:KGdW-лазера с внутррезонаторной генерацией ВГ приведена на рис. 1. В качестве активного элемента используются кристаллы Nd:KGdW с концентрацией ионов неодима ~ 3 ат.%. Кристаллы вырезаны в виде пластинок размером $1,2(N_m) \times 6(N_g) \times 10(N_p)$ мм и $1,2(N_m) \times 6(N_p) \times 5(N_g)$ мм (соответственно, N_p - и N_g -срез). Используемые Nd:KGdW-элементы обеспечивают генерацию излучения, линейно поляризованного вдоль оси N_m . Рабочие грани кристаллов размером $1,2 \times 6$ мм просветлены на длине волны 1067,2 нм. Полированные грани размером 6×10 мм (кристалл N_p -среза) и 6×5 мм (кристалл N_g -среза) используются для охлаждения элементов. Каждый из кристаллов обернут индиевой фольгой толщиной ~ 300 мкм и закреплен в медном держателе. Охлаждение держателя осуществляется термоэлектрическим способом с использованием элемента Пельтье.

Для накачки элементов Nd:KGdW используется лазерный диод с длиной волны ~ 879 нм и выходной мощностью до 30 Вт. Излучение накачки транспортируется оптическим волокном с внутренним диаметром 100 мкм и фокусируется в активном элементе системой линз. Асферическая линза с фокусным расстоянием 12 мм используется в качестве коллимирующей. Фокусировка излучения накачки в Nd:KGdW-элементе осуществляется асферической линзой с фокусным расстоянием 50 мм. Диаметр пятна накачки, измеренный методом острого движущегося края, составляет в перетяжке ~ 500 мкм. Коэффициент отражения рабочих граней Nd:KGdW в области 879 нм не превышает 2 %.

Квазинепрерывный режим генерации Nd:KGdW-лазера обеспечивается использованием механического прерывателя излучения накачки. Прерыватель расположен между фокусирующей линзой и зеркалом M_1 и обеспечивает работу лазера с рабочим циклом ≈ 10 %. При этом лазером генерируются импульсы миллисекундного диапазона длительностей. Длительность импульсов накачки и, следовательно, импульсов ВГ регулируется скоростью вращения диска прерывателя. Для получения непрерывного режима работы Nd:KGdW-лазера механический прерыватель устанавливается таким образом, чтобы не препятствовать прохождению излучения лазерного диода.

Генерация основного лазерного излучения на $\lambda = 1067,2$ нм осуществляется в высокодобротном резонаторе, образованном оконечными зеркалами M_1 и M_2 . Входное (с точки зрения накачки) зеркало M_1 является прозрачным для излучения накачки ($T > 96$ %). Оба оконечных зеркала являются высоко отражающими ($R > 99,9$ %) на длине волны лазерного излучения. Длина резонатора лазера L_p составляет 55 мм. Плоское промежуточное зеркало M_3 является прозрачными ($T \sim 99$ %) для лазерного излучения и высоко отражающим для излучения ВГ ($R > 99,8$ % на $\lambda = 533,6$ нм). Данное зеркало препятствует попаданию излучения с удвоенной частотой в Nd:KGdW-кристалл,



Рис. 1. Схема Nd:KGdW/КТП-лазера с внутррезонаторным удвоением частоты

где возможно его сильное поглощение. Вывод излучения ВГ во внешнее пространство осуществляется через зеркало M_2 . Коэффициент отражения этого зеркала на $\lambda = 533,6$ нм составляет $\sim 5\%$. В экспериментах использовались как плосковогнутые входные и выходные зеркала с радиусом кривизны $r_{\text{вх,вых}} = 100$ мм, так и плоские входные и выходные зеркала ($r_{\text{вх,вых}} = \infty$). Промежуточное зеркало M_3 установлено на механическую подвижку. Расстояние между зеркалами M_2 и M_3 регулируется так, что разность фаз волн лазерного излучения и излучения ВГ на входе в кристалл КТР является кратной 2π (максимальная эффективность генерации ВГ).

Для преобразования основного лазерного излучения во вторую гармонику используется кристалл КТР размером $4 \times 4 \times 10$ мм, обеспечивающий II тип фазового синхронизма ($\theta = 90^\circ$, $\varphi = 20,4^\circ$). Торцы кристалла просветлены на длинах волн 533,6 и 1067,2 нм. Кристалл установлен так, что его боковые поверхности составляют угол 45° с осью N_m кристалла Nd:KGdW. Температура кристалла КТР поддерживается постоянной термоэлектрическим способом с использованием элемента Пельтье.

Для определения мощности излучения использовались измерительные термоэлектрические головки 3A-P-SH и F150A-BB (Ophir). Временная структура излучения регистрировалась осциллографом Tektronix TDS 3052. Пространственные распределения плотности мощности в выходном пучке регистрировались ПЗС-камерой BeamON (DUMA OPTRONICS LTD).

Результаты и их обсуждение. Исследования показали, что доля поглощенной мощности накачки составила $\sim 55\%$ для кристалла N_p -среза и $\sim 42\%$ для кристалла N_g -среза. Однако кристалл N_g -среза характеризовался вдвое меньшей площадью тепловода. В силу этого допустимая мощность падающей непрерывной накачки для него была ограничена величиной 15,9 Вт, в то время как кристалл N_p -среза допускал накачку с максимальной мощностью 27,1 Вт. При мощностях падающей накачки свыше указанных величин возникающие в кристаллах термомеханические напряжения были столь велики, что приводили к их растрескиванию.

В случае резонатора с конфигурацией $r_{\text{вх}} = 100$ мм, $r_{\text{вых}} = \infty$ перетяжка пучка лазерного излучения по определению находится на плоском зеркале, и с точки зрения генерации ВГ такой резонатор обеспечивает высокую плотность мощности основного излучения в кристалле КТР при расположении его около выходного отражателя. В случае непрерывного режима работы зависимость мощности ВГ $P_{\text{ВГ}}$ от мощности накачки $P_{\text{нак}}$ для Nd:KGdW-кристалла N_p -среза, находящегося в таком резонаторе, отображена на рис. 2, а кривой 1. Порог генерации на удвоенной частоте составил 0,3 Вт. Вначале мощность ВГ монотонно возрастала, однако, достигнув при критическом уровне накачки $P_{\text{кр}} \sim 19,7$ Вт максимальной величины $\sim 0,6$ Вт, в дальнейшем снижалась. Согласно [20], такое поведение мощности $P_{\text{ВГ}}$ объясняется тем, что формирующаяся в активном Nd:KGdW-элементе термолинза сначала подводит резонатор лазера, предназначенный

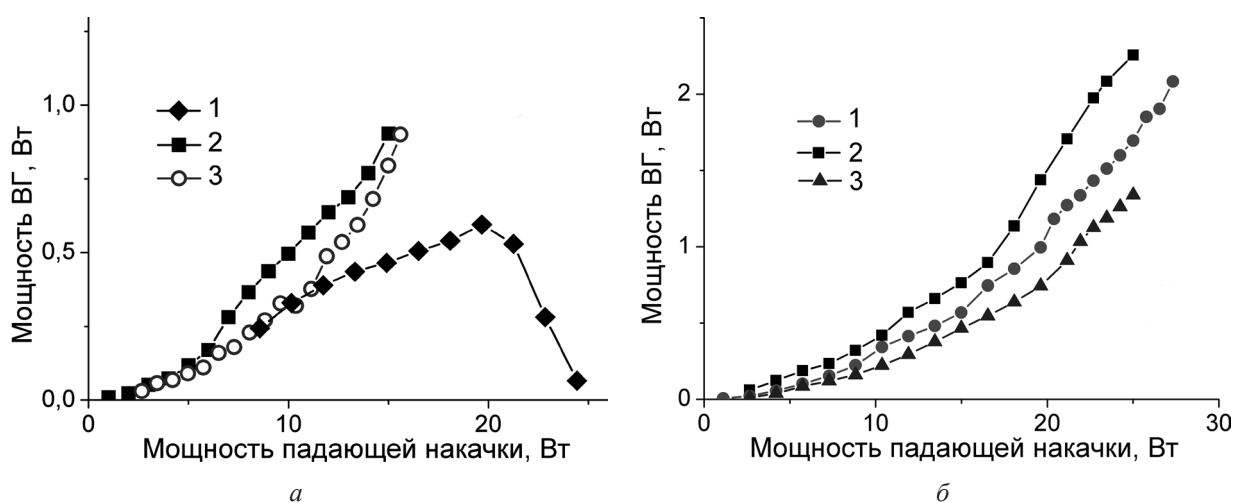


Рис. 2. Зависимость мощности ВГ от мощности падающей накачки для Nd:KGdW-кристаллов N_p - (кривая 1) и N_g -срезов (кривые 2, 3) при непрерывном (а) и квазинепрерывном (б) режимах генерации; параметры резонатора – $r_{\text{вх}} = 100$ мм, $r_{\text{вых}} = \infty$ (кривые 1, 2) и $r_{\text{вх}} = \infty$, $r_{\text{вых}} = 100$ мм (кривая 3)

для генерации основного излучения на $\lambda = 1067,2$ нм, к границе зоны устойчивости, а затем делает его неустойчивым.

Известно (напр., [21]), что в Nd:KGdW-элементах N_p -среза термолинза является астигматической, при этом ее оптические силы в плоскостях $N_m N_p$ и $N_g N_p$ имеют разные знаки. Полагая, что термическая линза расположена вблизи входного зеркала и используя формулы (13.11)–(13.14) из [20], можно определить, что критическими значениями оптической силы термолинзы, при которых резонатор исследуемого лазера находится на границе устойчивости, являются $D_1^I = 1/r_{\text{ВХ}}$ и $D_2^I = 1/(L_p - l + l n^{-1}) - 1/r_{\text{ВХ}}$, где l – длина Nd:KGdW, n – его показатель преломления ($n \approx 2$ [22]). Приведенные формулы показывают, что при увеличении длины резонатора значение D_1^I остается неизменным и составляет 10 м^{-1} , а D_2^I изменяется от $\sim 84 \text{ м}^{-1}$ (все элементы Nd:KGdW/КТР-лазера расположены вплотную) до 0. Это обстоятельство позволяет сделать вывод, что снижение мощности $P_{\text{ВГ}}$ (выход резонатора по одному из направлений в область неустойчивости) обусловлено фокусирующей составляющей термолинзы Nd:KGdW. Для нее критическое значение оптической силы достигается при меньшем уровне накачки, чем для составляющей, обладающей рассеивающим эффектом. Это подтверждается и тем фактом, что увеличение расстояния между оконечными зеркалами резонатора до 75 мм привело к снижению параметра $P_{\text{кр}}$ до 17,3 Вт.

Расчеты с применением закона ABCD показывают, что для рассматриваемой конфигурации резонатора размер моды TEM_{00} (основное излучение) на выходном зеркале уменьшается при увеличении оптической силы фокусирующей линзы в активном элементе и увеличивается при возрастании оптической силы рассеивающей линзы. Данное обстоятельство приводит к тому, что сечение каустики основного излучения в резонаторе, являясь круглым при небольших превышениях порога, становится при высоких уровнях накачки эллиптическим, и вследствие этого эллиптическим является и выходной пучок ВГ (рис. 3, а). При регистрации распределения пучок ВГ попадал в ПЗС-камеру, расположенную на расстоянии 18 см от выходного зеркала лазера, отразившись от поверхности пластинки.

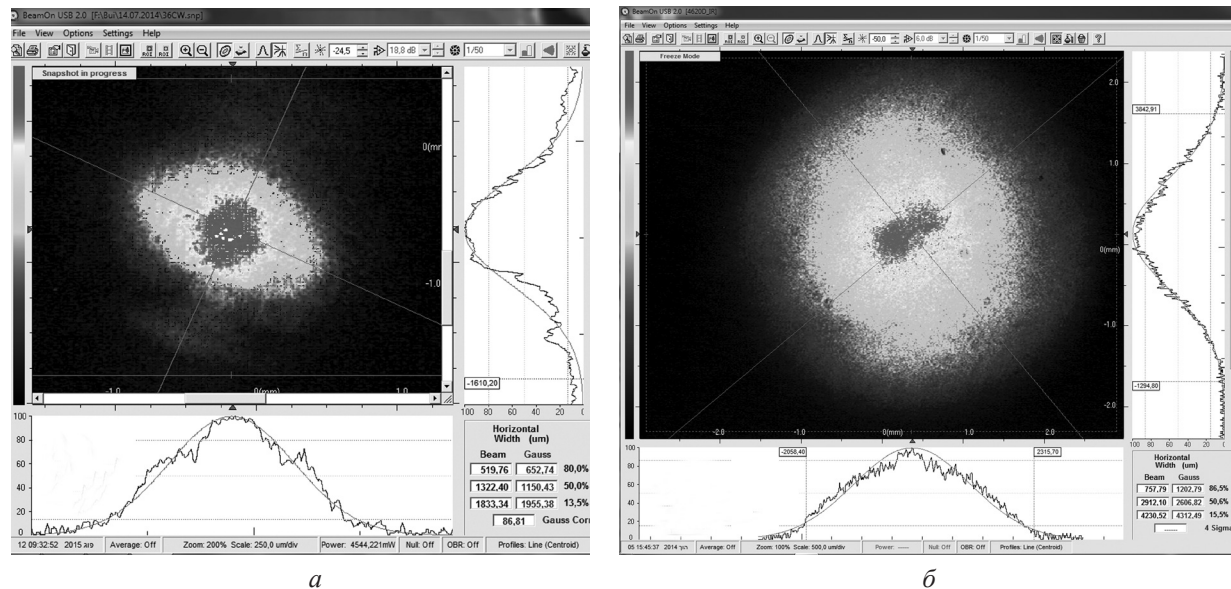


Рис. 3. Пространственное распределение интенсивности в непрерывном пучке ВГ в случае Nd:KGdW-кристаллов N_p - (а) и N_g -срезов (б) и осциллограммы непрерывного излучения ВГ при использовании лазерного элемента N_g -среза (в)

Термолинза Nd:KGdW-кристалла N_g -среза также является астигматической [21]. Ее оптические силы в плоскостях $N_m N_g$ и $N_p N_g$ характеризуются разными значениями, однако в отличие от термолинзы кристалла N_p -среза имеют одинаковый положительный знак, т. е. линза является фокусирующей. Зависимость $P_{ВГ}(P_{нак})$ для активного элемента N_g -среза, помещенного в резонатор с вышеупомянутой конфигурацией, проиллюстрирована на рис. 2 кривой 2. Как видно, эффективность преобразования основного излучения в ВГ в случае кристалла N_g -среза более высокая. Это связано с тем, что при непрерывной накачке элемента N_g -среза из-за одинаковых знаков оптических сил составляющих термолинзы в направлениях N_g и N_m координатная зависимость волновых aberrаций оптического пути между зеркалами резонатора (в плоскости, ортогональной оси резонатора) является не такой сложной, как в случае элемента N_g -среза. Порог генерации ВГ равнялся $\approx 0,35$ Вт. При мощности накачки 15,6 Вт средняя мощность ВГ составила $\sim 0,9$ Вт, что соответствовало эффективности генерации 5,8 %.

Удвоение частоты также было произведено при другой конфигурации резонатора: $r_{вх} = \infty$, $r_{вых} = 100$ мм. Использование вышеуказанных формул из [20] показывает, что для данного резонатора критические значения оптической силы термолинзы имеют величины $D_1^{II} = -1/(r_{вых} - (L_p - l + l n^{-1}))$ и $D_2^{II} = 1/(L_p - l + l n^{-1})$. Сопоставление $D_{1,2}^I$ и $D_{1,2}^{II}$ показывает, что данный резонатор по сравнению с вышерассмотренным при той же длине L_p становится неустойчивым при более высокой оптической силе термолинзы (иными словами, допускает для активных элементов более высокие уровни накачки). Зависимость $P_{ВГ}(P_{нак})$ для данного резонатора представлена на рис. 2 кривой 3. Видно, что при накачке в области 6,0–13,5 Вт эффективность генерации ВГ несколько ниже. Как показывают расчеты на основе закона ABCD, это связано с тем, что при указанных мощностях накачки пучок основного лазерного излучения в кристалле КТР для резонатора с параметрами $r_{вх} = \infty$, $r_{вых} = 100$ мм являлся более широким (т. е. плотность мощности преобразуемого излучения была несколько меньшей).

Оценки также показывают, что в резонаторе с плоским входным зеркалом диаметр пучка (например, нулевой моды d_{00}) при возрастании оптической силы положительной термолинзы увеличивается в активном элементе Nd:KGdW и уменьшается в области выходного вогнутого зеркала. Как следует из данных рис. 2, при $P_{нак} > 15$ Вт пучок основного излучения сужался так, что оба резонатора обеспечивали примерно одинаковую мощность $P_{ВГ} \sim 0,9$ Вт ($P_{нак} = 15,6$ Вт). Запись в ближней волновой зоне структуры поля излучения на $\lambda = 533,6$ нм показала, что распределения интенсивности в круглом пучке ВГ достаточно хорошо аппроксимируются функцией Гаусса (рис. 3, б). При записи картины поля пучок ВГ был прямо направлен в камеру, находящуюся на расстоянии 27 см от выходного зеркала. Генерация гауссова пучка объясняется тем, что при $P_{нак} > 15$ Вт для каустики основного лазерного излучения в области активного элемента Nd:KGdW выполнялось соотношение $d_p/d_{00} \leq 2^{-1/2}$ ($2^{-1/2}$ есть соотношение диаметров ТЕМ₀₁ и ТЕМ₀₀ мод в случае круглых пучков [21]). То, что при $P_{нак} > 15$ Вт генерация фундаментального лазерного излучения в резонаторе с параметрами $r_{вх} = \infty$, $r_{вых} = 100$ мм происходит на основной моде ТЕМ₀₀, было подтверждено дополнительным экспериментом, в котором лазер генерировал только на $\lambda = 1067,2$ нм. При оптимальном пропускании выходного зеркала ~ 10 % и мощности накачки 15,6 Вт мощность излучения в одномодовом пучке достигала 4,6 Вт.

Время, за которое в активном элементе лазера формируется термолинза, можно приблизительно оценить с помощью выражения, определяющего время установления теплового градиента: $t = d_p^2 C \rho / 4 K_c$ [23], где d_p – диаметр пучка накачки, C – удельная теплоемкость, K_c – теплопроводность, ρ – удельная плотность лазерной среды. Для кристалла Nd:KGdW $C = 0,5$ Дж г⁻¹ К⁻¹, $\rho = 7,27$ г см⁻³, $K_c = 0,028$ (100) Вт см⁻¹ К⁻¹, и, следовательно, при $d_p \approx 500$ мкм время установления теплового градиента составляет ~ 81 мс. Таким образом, за время действия импульса накачки с длительностью ~ 10 – 20 мс термическая линза не успевает сформироваться в активном элементе полностью. Это обстоятельство предопределило явное различие зависимостей $P_{ВГ}(P_{нак})$ для рассматриваемых резонаторов в случае квазинепрерывной накачки Nd:KGdW-кристалла. Ясно, что при невысоких термоискажениях активного элемента N_g -среза резонатор с параметрами $r_{вх} = 100$ мм, $r_{вых} = \infty$ обеспечивал в кристалле КТР более высокую плотность мощности фундаментального лазерного излучения. Зависимость $P_{ВГ}(P_{нак})$ для данного резонатора проиллюстрирована на рис. 2, б

кривой 2. При мощности излучения лазерного диода $P_{\text{нак}} = 25$ Вт мгновенная мощность ВГ составила 2,25 Вт, что соответствовало эффективности преобразования 9 %. В случае резонатора с параметрами $r_{\text{вх}} = \infty$, $r_{\text{вых}} = 100$ мм пучок фундаментального излучения не испытывал столь сильного сужения в кристалле КТР, как при непрерывной накачке, и мощность ВГ при той же максимальной мощности накачки не превышала 1,34 Вт (рис. 2, б, кривая 3). Следует отметить, что несмотря на квазинепрерывный режим накачки мощность лазерного диода не поднималась свыше 25 Вт из-за риска повреждения лазерного элемента N_g -среза.

Как уже говорилось выше, при квазинепрерывной накачке термолинза не успевает сформироваться полностью. Однако она все же имеет определенную оптическую силу, и в случае Nd:KGdW-элемента N_p -среза способствует образованию более сложных волновых aberrаций оптического пути между зеркалами резонатора, чем в случае элемента N_g -среза. Это выражается в более низкой эффективности генерации ВГ. Зависимость $P_{\text{ВГ}}(P_{\text{нак}})$ для элемента N_p -среза, помещенного в резонатор с параметрами $r_{\text{вх}} = 100$ мм, $r_{\text{вых}} = \infty$, представлена на рис. 2, б кривой 1. При квазинепрерывной накачке импульсами длительностью ~ 20 мс мгновенная мощность ВГ составила 2,1 Вт при мощности излучения лазерного диода $P_{\text{нак}} = 27,3$ Вт. При $P_{\text{нак}} > 20$ Вт термооптические искажения элемента N_p -среза были способны придать выходному пучку лазера некоторую эллиптичность.

Известно, что внутрирезонаторное удвоение частоты может характеризоваться так называемой «зеленой проблемой» (green problem), суть которой заключается в хаотических шумовых флуктуациях интенсивности ВГ. Хаотические пульсации интенсивности возникают в том случае, когда на фундаментальной частоте лазера генерируются одновременно несколько продольных мод резонатора. Причиной этих пульсаций является возникновение взаимосвязи между продольными модами резонатора в результате процесса генерации суммарной частоты в нелинейном кристалле [24]. Запись осциллограмм мощности ВГ с помощью быстрых фотодиодов показала, что флуктуации интенсивности ВГ свойственны и исследуемому Nd:KGdW/КТР-лазеру, поскольку никаких мер для селекции продольных мод резонатора в нем не применялось. При мощности непрерывной генерации $P_{\text{ВГ}} \sim 0,85$ Вт пульсации интенсивности не превышали ± 20 % относительно ее среднего значения (рис. 3, в).

Следует отметить, что при непрерывном режиме работы значение мощности ВГ и ее стабильность во многом зависят от настройки кристалла КТР. Двухлучепреломляющий кристалл КТР представляет собой фазосдвигающую пластинку, вносящую разность фаз между o - и e -компонентами фундаментального лазерного излучения. И только в том случае, когда кристалл КТР действует постоянно как полуволновая пластинка, мощность ВГ максимальна и стабильна. Такое свойство придавалось кристаллу КТР путем его жесткой температурной стабилизации при 21 °С. При изменении температуры кристалла всего на несколько градусов мощность ВГ снижалась в 3–6 раз.

Заключение. Реализована мощная квазинепрерывная, а также реально непрерывная генерация Nd:KGdW/КТР-лазера с внутрирезонаторным удвоением частоты при расположении кристалла КТР в одной из секций трехзеркального линейного резонатора. В лазере использованы активные элементы N_p - и N_g -среза, продольная накачка которых осуществлена излучением лазерного диода на $\lambda = 879$ нм. Допустимая мощность непрерывной накачки, не вызывающая термомеханического разрушения кристаллов, составила 26,8 Вт для элемента N_p -среза и 15,9 Вт для элемента N_g -среза, имеющего меньшую площадь теплоотвода. В силу того, что возникающие при непрерывной накачке термоискажения кристалла N_p -среза приводили к наиболее сложным волновым aberrациям оптического пути между зеркалами резонатора, мощность генерации ВГ при этом кристалле не превышала 0,6 Вт и была сосредоточена в эллиптическом пучке. Квазинепрерывный режим характеризовался максимальной мгновенной мощностью 2,1 Вт. В случае кристалла N_g -среза, находящегося в резонаторе с параметрами $r_{\text{вх}} = \infty$, $r_{\text{вых}} = 100$ мм, нарастание оптической силы положительной термолинзы способствовало эффективному сужению пучка фундаментального излучения в кристалле КТР и мощность непрерывной генерации ВГ при максимальной мощности накачки 15,6 Вт достигала 0,9 Вт. При этом распределение интенсивности в круглом пучке ВГ имело практически гауссов профиль. При квазинепрерывной генерации с рабочим циклом 10 %, когда ограничения на подводимую мощность накачки отсутствовали, наилучшие результаты обеспечил резонатор с параметрами $r_{\text{вх}} = 100$ мм, $r_{\text{вых}} = \infty$. При мощности лазерного диода 25 Вт мгно-

венная мощность излучения ВГ длительностью ~10–20 мс составила 2,25 Вт, что соответствовало эффективности преобразования 9 %. Насколько известно авторам, достигнутые уровни мощности ВГ являются рекордными для Nd:KGdW-лазеров с удвоением частоты при продольной диодной накачке. Несомненно, что при соответствующей оптимизации параметров резонатора и использовании кристаллов N_g -среза с большей площадью теплоотвода мощность непрерывного излучения ВГ может быть увеличена.

Литература

1. Багаев С., Дашкевич В. И., Орлович В. А. и др. // Квантовая электроника. 2011. Т. 41, № 3. С. 189–192.
2. Pujol M. C., Carvajal J. J., Mateos X. et al. // J. Lumin. 2013. Vol. 138. P. 77–82.
3. Loiko P. A., Dashkevich V. I., Bagaev S. N. et al. // J. Lumin. 2014. Vol. 153. P. 221–226.
4. Takagi S., Enya Y., Kyono T. et al. // Appl. Phys. Express. 2012. Vol. 5. DOI: 10.1143/APEX.5.082102. 3 p.
5. Liu L., Oka M., Wiechmann W., Kubota S. // Opt. Lett. 1994. Vol. 19, N 3. P. 189–191.
6. Liu J., Shao Z., Zhang H., Meng X. et al. // Opt. Commun. 2000. Vol. 173, N 1. P. 311–314.
7. Абазадзе А., Зверев Г. М., Колбацков Ю. М., Устименко Н. С. // Квантовая электроника. 2004. Т. 34. С. 20–22.
8. Musset O., Boquillon J. P. // Appl. Phys. B. 1997. Vol. 65. P. 13–18.
9. Kalisky Y., Kravchik L., Labbe C. // Opt. Commun. 2001. Vol. 189. P. 113–125.
10. Kushawaha V., Yan Y., Chen Y. // Appl. Phys. B. 1996. Vol. 62. P. 533–535.
11. Grabtchikov A., Kuzmin A. N., Lisinetskii V. A. et al. // Opt. Mater. 2001. Vol. 16, N 3. P. 349–352.
12. Savitski V. G., Malyarevich A. M., Yumashev K. V. et al. // Appl. Phys. B. 2003. Vol. 76. P. 253–256.
13. Lisinetskii V. A., Grabtchikov A. S., Demidovich A. A. et al. // Appl. Phys. B. 2007. Vol. 88, N 4. P. 499–501.
14. Дашкевич В. И., Орлович В. А., Шкадаревич А. П. // Журн. прикладной спектроскопии. 2009. Т. 76. С. 725–732.
15. Ustimenko N. S., Zabolotn E. M. // Instr. and Exp. Tech. 2005. Vol. 48. P. 239–240.
16. Xia J., Lü Y. F., Zhang X. H. et al. // Laser Phys. Lett. 2011. Vol. 8. P. 21–23.
17. Findeisen J., Eichler H. J., Kaminskii A. A. // IEEE J. Quant. Electron. 1999. Vol. 35, N 2. P. 173–178.
18. Demidovich A., Shkadarevich A. P., Batay L. E. et al. // Proc. SPIE. 1997. Vol. 3176. P. 272–275.
19. Stankov K., Marowsky G. // Appl. Phys. B. 1995. Vol. 61. P. 213–215.
20. Hodson, N., Weber H. Laser Resonators and Beam Propagation: Fundamentals, Advanced Concepts and Applications, Second Edition. Springer, 2005.
21. Loiko P. A., Yumashev K. V., Kuleshov N. V. et al. // Opt. Express. 2009. Vol. 17, N 26. P. 23536–23543.
22. Мочалов И. В. // Опт. журн. 1995. № 11. С. 4–15.
23. Boyd R. W. Nonlinear Optics. Third Edition. Elsevier, Acad. Press, 2008.
24. Baer T. // J. Opt. Soc. Am. B. 1986. Vol. 3, N 9. P. 1175–1180.

A. A. BUI, U. I. DASHKEVICH, V. A. ORLOVICH

CONTINUOUS-WAVE DIODE-PUMPED Nd:KGdW/KTP LASER WITH INTRACAVITY FREQUENCY DOUBLING

Summary

A CW and quasi-CW Nd:KGd(WO₄)₂/KTP laser with longitudinal diode-pumping at $\lambda \sim 879$ nm and intracavity frequency doubling in a three-mirror linear cavity has been created. At frequency doubling, superior results are achieved with a N_g -cut crystal by virtue of a simpler character of its thermal lens. At a CW pump power of 15.6 W, the power of the second harmonic generated at a wavelength of 533.6 nm amounts to ~0.9 W. At quasi-CW pumping, the laser generates with a duty cycle of 10 % and emits 10–20 ms long pulses, whose peak power reaches 2.25 W with an optical conversion efficiency of 9%. In the case of a N_p -cut Nd:KGd(WO₄)₂ crystal, the peak power of the second harmonic does not exceed 2.1 W.

УДК 535.3+535.8:535.214

С. В. СОЛОНЕВИЧ, В. Е. ЛЕПАРСКИЙ, А. Г. МАЩЕНКО, А. А. РЫЖЕВИЧ

МЕТОД ФОРМИРОВАНИЯ ПЕРЕСТРАИВАЕМОЙ СВЕТОВОЙ БИЛОВУШКИ*Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси**(Поступила в редакцию 27.02.2015)*

Введение. Изначально лазерные пинцеты (твизеры) использовались в качестве инструментов для манипуляции одиночными частицами с помощью градиентных сил [1]. По мере совершенствования научного подхода и усложнения технических средств стало возможным оперировать комплексами (ансамблями) микрочастиц [2]. Одной из актуальных задач является обеспечение возможности одновременного позиционирования двух частиц относительно друг друга с целью поворота, соединения или, наоборот, разъединения, разделения. Нами предложен метод формирования оптической ловушки, позволяющей производить одновременное манипулирование парой микрочастиц путем их вращения относительно точки на соединяющем их отрезке, а также изменения расстояния между ними.

1. Разработка и экспериментальная реализация метода формирования оптической ловушки для одновременной манипуляции двумя микрочастицами. В контексте поставленной задачи одновременной манипуляции двумя частицами и имеющихся ресурсов был признан оптимальным метод формирования световой ловушки с двумя пиками интенсивности из лазерного бипучка. Известно, что Фурье-образом идеального бипучка являются две точки. На практике это означает, что бинарный световой пучок, состоящий из парциальных компонент (которые распространяются под некоторым углом друг к другу) и прошедший через положительную линзу, в фокусной плоскости этой линзы будет представлять собой световое поле с двумя пиками интенсивности.

Для одновременной манипуляции двумя микрочастицами нами была разработана и смонтирована экспериментальная установка в горизонтально-вертикальной компоновке, схема которой показана на рис. 1. Установка состоит из источника лазерного излучения 1: собирающих сферических линз 2 и 3, образующих телескопическую систему; равноугольной бипризмы Френеля 4 в качестве рефрактивного оптического элемента; механического узла 5, обеспечивающего возможность ее плавного контролируемого вращения вокруг оси симметрии падающего на нее светового пучка и закрепленного на механическом узле 6, с помощью которого осуществляется плавное контролируемое перемещение бипризмы Френеля 4 вдоль оси симметрии лазерного пучка; собирающей линзы 7; первого поворотного зеркала 8; кюветы 9 с прозрачным для используемого лазерного излучения дном, содержащей суспензию микрочастиц; микроскопа 10; второго поворотного зеркала 11; системы наблюдения 12 и механического узла 13 для смещения линии пересечения наклонных граней закрепленной в этот узел бипризмы Френеля 4, который установлен на механическом узле 5.

Световая билловушка работает следующим образом. Источник лазерного излучения 1 формирует слаборасходящийся когерентный световой пучок с аксиально симметричным распределением интенсивности, который направляют на телескопическую систему. Она состоит из линз 2 и 3, между которыми располагают равноугольную бипризму Френеля 4 в качестве рефрактивного оптического элемента (на рис. 1 f_1 и f_2 – фокусные расстояния линз 2 и 3 соответственно). При необходимости управления одинаковыми по размеру и поляризуемости микрочастицами ось симметрии светового пучка должна проходить через линию пересечения наклонных граней бипризмы

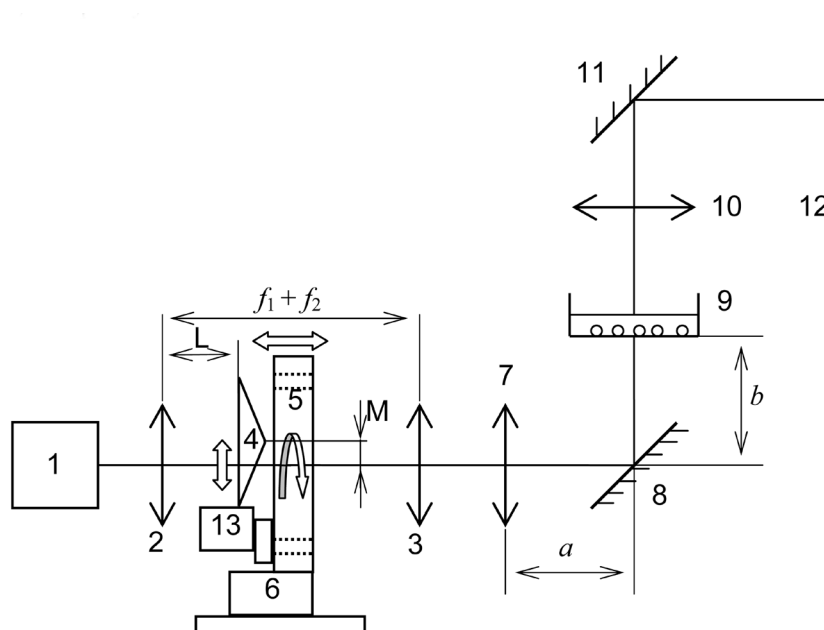


Рис. 1. Оптическая схема экспериментальной установки для одновременного манипулирования парой микрочастиц с помощью перестраиваемого двухпикового лазерного поля

Френеля 4. Посредством пропускания светового пучка через телескопическую систему, внутри которой находится бипризма Френеля 4, формируют бинарный (т. е. двухкомпонентный) световой пучок (БП) с углом расхождения компонент, зависящим от положения бипризмы Френеля 4 относительно системы линз 2 и 3. В случае, если телескоп расширяющий (фокусное расстояние у линзы 2 меньше, чем у линзы 3), при смещении бипризмы Френеля 4 от линзы 2 к линзе 3 с помощью механического узла 6 угол расхождения формируемого БП увеличивается и, соответственно, наоборот. Линза 7 в своей фокусной плоскости (на рис. 1: a – расстояние от линзы 7 до зеркала 8; b – расстояние от зеркала 8 до кюветы 9; $a + b = F$, F – фокусное расстояние линзы 7) формирует из перестраиваемого по углу расхождения БП Фурье-образ в виде двух световых пятен-пичков (в идеале точек), расстояние между центрами которых зависит от угла расхождения БП. С помощью поворотного зеркала 8 сфокусированный БП в виде двухпикового поля направляют вертикально вверх на суспензию микрочастиц, находящуюся в кювете 9 с прозрачным дном. При уменьшении угла расхождения БП пички сближаются, двигаясь к вертикальной части оптической оси устройства, при увеличении – раздвигаются по направлению от оси. При повороте элемента 4 вокруг горизонтальной части оптической оси устройства с помощью узла 5, световые максимумы интенсивности в виде двух пичков тоже поворачиваются на такой же угол вокруг вертикальной части оптической оси устройства. Изменяя взаимную ориентацию пичков и расстояние между ними в фокусной плоскости линзы 7, выбирают такое положение пичков, при котором их центры совпадают с центрами двух микрочастиц, предназначенных для манипулирования. При перемещении пичков они за счет градиентных сил увлекают втянутые в них частицы за собой. Таким образом, при раздвигании пичков от центра частицы одновременно перемещаются от оптической оси устройства; при сдвигании пичков от периферии к центру – частицы перемещаются к оптической оси вплоть до совмещения, если это необходимо; при вращении бипризмы 4 пички и захваченные в них частицы изменяют взаимную ориентацию.

Проходящее сквозь кювету 9 с суспензией микрочастиц излучение пропускают через микроскоп 10 для формирования изображения микрочастиц, которое затем с помощью поворотного зеркала 11 направляют на систему наблюдения 12. В качестве последней выступает экран либо иное визуализирующее, регистрирующее или транслирующее изображение устройство, например CCD-, видео- или фотокамера. В случае, если частицы различаются по размерам и/или поляризуемости, из-за чего одинаковые пички интенсивности обеспечивают частицам различные максимальные скорости перемещения, с помощью механического узла 13 производят смещение

линии пересечения наклонных граней бипризмы Френеля 4 от оси симметрии светового пучка, изменяя максимальные значения интенсивности в пиках двухпикового светового поля и добиваясь тем самым выравнивания максимальных скоростей движения частиц под действием градиента интенсивности в пичке. При необходимости манипулирования только одной частицей с помощью механического узла 13 производят полное перераспределение световой энергии в один световой пичок, захватывают им частицу и перемещают ее в нужном направлении.

Материальная база экспериментальной установки была скомплектована для преобразования лазерного излучения с длинами волн 0,633 мкм, однако она годится и для излучения других длин волн при наличии на входных и выходных поверхностях оптических элементов соответствующих просветляющих покрытий.

2. Особенности электрического поля перестраиваемой световой биловушки. Нами исследовано световое поле, являющееся биловушкой, и подтверждена возможность изменения ориентации его световых максимумов и расстояния между ними. Изменение ориентации пиков интенсивности производится путем поворота бипризмы вокруг оси, совпадающей с осью симметрии падающего на нее светового пучка, а изменение расстояния между пиками – путем перемещения держателя с бипризмой вдоль оси симметрии светового пучка. Поворот бипризмы и продольное перемещение держателя с бипризмой выполнялись посредством вращения рукояток держателей вручную. Однако эти операции могут быть автоматизированы с применением соответствующих моторизованных кареток и держателей, что позволит избежать нежелательных механических искажений схемы в результате прикосаний к рукояткам держателей. Тем не менее даже вручную и поворот, и изменение расстояния между пиками световой биловушки могут производиться очень плавно и с большой точностью. Применявшиеся нами держатели обеспечивали точность поворота 10 угловых минут и изменение расстояний между пиками с точностью порядка 0,1 мкм.

Нами были измерены распределения интенсивности в поперечных сечениях двухпикового поля, зарегистрированные при различных положениях бипризмы относительно системы линз 2 и 3. При выбранных нами параметрах оптических элементов расстояние между пиками может достигать нескольких миллиметров. Это означает, что можно одновременно изменять взаимное положение частиц, находящихся даже на таком сравнительно большом расстоянии. При увеличении смещения L расстояние между пиками интенсивности света монотонно и равномерно увеличивается. На рис. 2 показаны сечения двухпикового поля, зарегистрированные с микроскопом. Пики интенсивности в сечении имеют округлую форму и слабо изменяются при изменении расстояния между ними.

Важно знать, как изменяется максимальное значение интенсивности в пике при увеличении его диаметра. При большем увеличении видно, что распределение интенсивности в обоих пичках близко к гауссову, но имеется еще слабый побочный максимум интенсивности в форме кольца, окружающего основной пик.

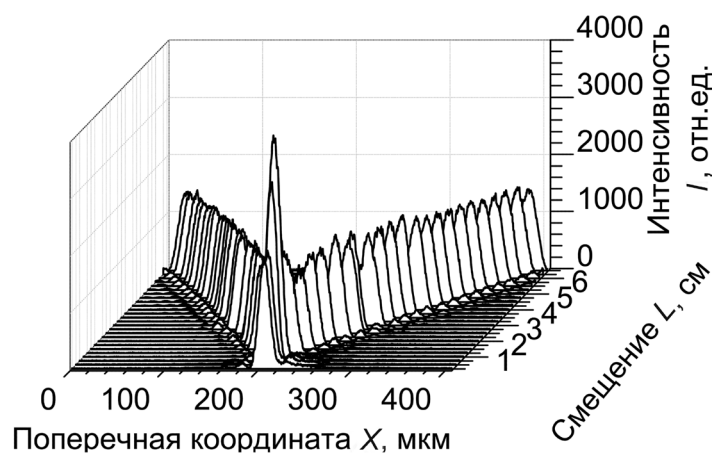


Рис. 2. Зависимость распределения интенсивности на отрезке, соединяющем пики интенсивности двухпикового светового поля от смещения бипризмы

Из распределения на рис. 2 хорошо видно, что при изменении расстояния между пиками максимальное значение интенсивности практически не изменяется за исключением того момента, когда два пика сходятся в один. Расстояние между пиками интенсивности растет линейно с увеличением смещения L при очень слабом изменении максимального значения интенсивности в пиках. Смещение бипризмы на 1 мм приводит к изменению расстояния между пиками примерно на 60 мкм. Поскольку смещать бипризму даже в пределах одного миллиметра технически возможно очень плавно, то и варьировать расстояние между пиками интенсивности двухпикового светового поля можно с большой точностью. Так, при точности смещения бипризмы 10 мкм изменение расстояния между пиками достигается с точностью 0,6 мкм. Можно увеличить точность перемещения пиков, применяя бипризму с меньшим углом между наклонной плоскостью и ее основанием. При этом пропорционально уменьшится максимальное расстояние, на которое будет возможно расставить пики.

Нами были построены инвертированные зависимости интенсивности в плоскости, проходящей через оптическую ось установки и пики интенсивности биловушки, от продольной координаты при трех различных расстояниях между пиками (рис. 3, *a*). При любом расстоянии между пиками при увеличении продольной координаты вначале происходит плавный рост, а затем уменьшение пикового значения интенсивности в обоих пиках биловушки (продольная координата Z соответствует расстоянию от линзы 7, показанной на рис. 1, по оптической оси схемы до места регистрации светового поля). Данное распределение использовано для построения карты градиентов интенсивности в локальных максимумах биловушки. Независимо от расстояния между пиками, карты градиентов имеют одинаковый вид. На рис. 3, *б* приведена карта проекций градиентов на секущую плоскость для случая $L = 2$ мм. Область распределения, по которому строились масштабированное распределение и карта градиентов интенсивности при $L = 2$ мм, выделена рамкой на рис. 3, *a*. Вследствие масштабирования с целью лучшей визуализации проекции градиентов

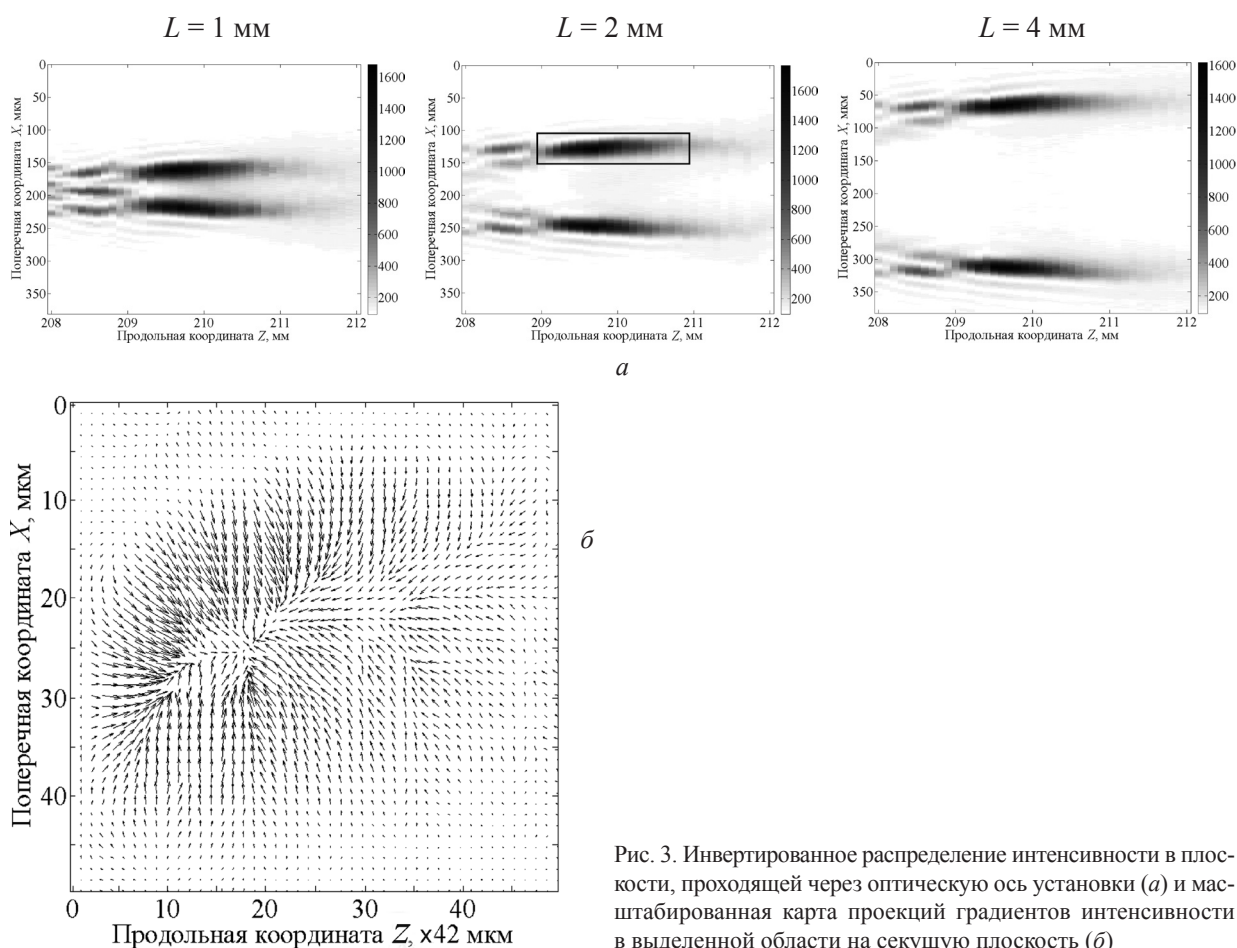


Рис. 3. Инвертированное распределение интенсивности в плоскости, проходящей через оптическую ось установки (*a*) и масштабированная карта проекций градиентов интенсивности в выделенной области на секущую плоскость (*б*)

интенсивности в направлении продольной оси Z увеличены в 42 раза относительно проекций градиентов в направлении горизонтальной оси X .

Из рис. 3, б следует, что продольный градиент существует наряду с поперечным, хотя и слабее в десятки раз. Однако само его наличие можно использовать для отрыва микрочастиц от дна кюветы либо наоборот – для их прижимания во избежание ухода из плоскости наблюдения. При необходимости продольный градиент может быть усилен путем применения в качестве фокусирующей линзы 5 объектива с более коротким фокусным расстоянием. При этом дно кюветы может быть смещено относительно фокусной плоскости объектива с целью уменьшения поперечного градиента.

Поскольку иногда необходимо одновременно манипулировать частицами с отличающимися параметрами, актуальной является задача формирования пиков с различными градиентами интенсивности в биловушке. В связи с этим нами исследована возможность контролируемого перераспределения световой энергии между пичками биловушки.

Для перераспределения энергии между пичками бипризма 4 устанавливается на механический узел 13, обеспечивающий контролируемое смещение бипризмы относительно оси падающего на нее пучка в пределах видимого диаметра пучка с точностью 5 мкм.

На рис. 4 показаны инвертированные распределения интенсивности в плоскости, проходящей через пики биловушки, при различных смещениях M бипризмы 4 в направлении, перпендикулярном ее ребру, в плоскости, перпендикулярной оси начального пучка, в диапазоне 0,00–0,50 мм и различных смещениях L бипризмы от фокуса линзы 2. Смещение M отсчитывается от оптической оси схемы (см. рис. 1), т. е. $M = 0$ мм при совмещении ребра бипризмы с осью. Из рис. 4 видно, что чем ближе находятся пики, тем быстрее осуществляется перераспределение энергии между ними при смещении L , поэтому точное распределение энергии между пиками удобнее

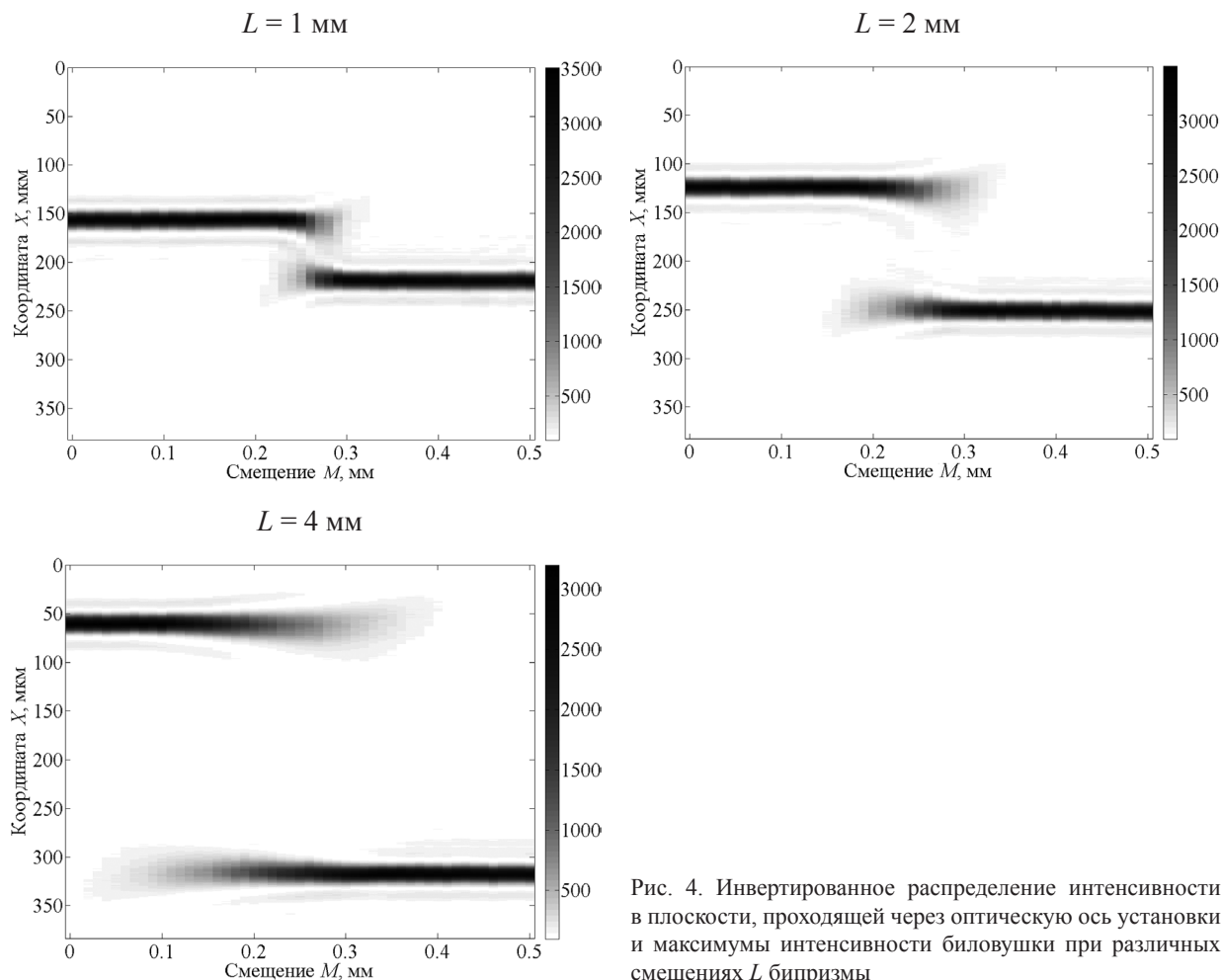


Рис. 4. Инвертированное распределение интенсивности в плоскости, проходящей через оптическую ось установки и максимумы интенсивности биловушки при различных смещениях L бипризмы

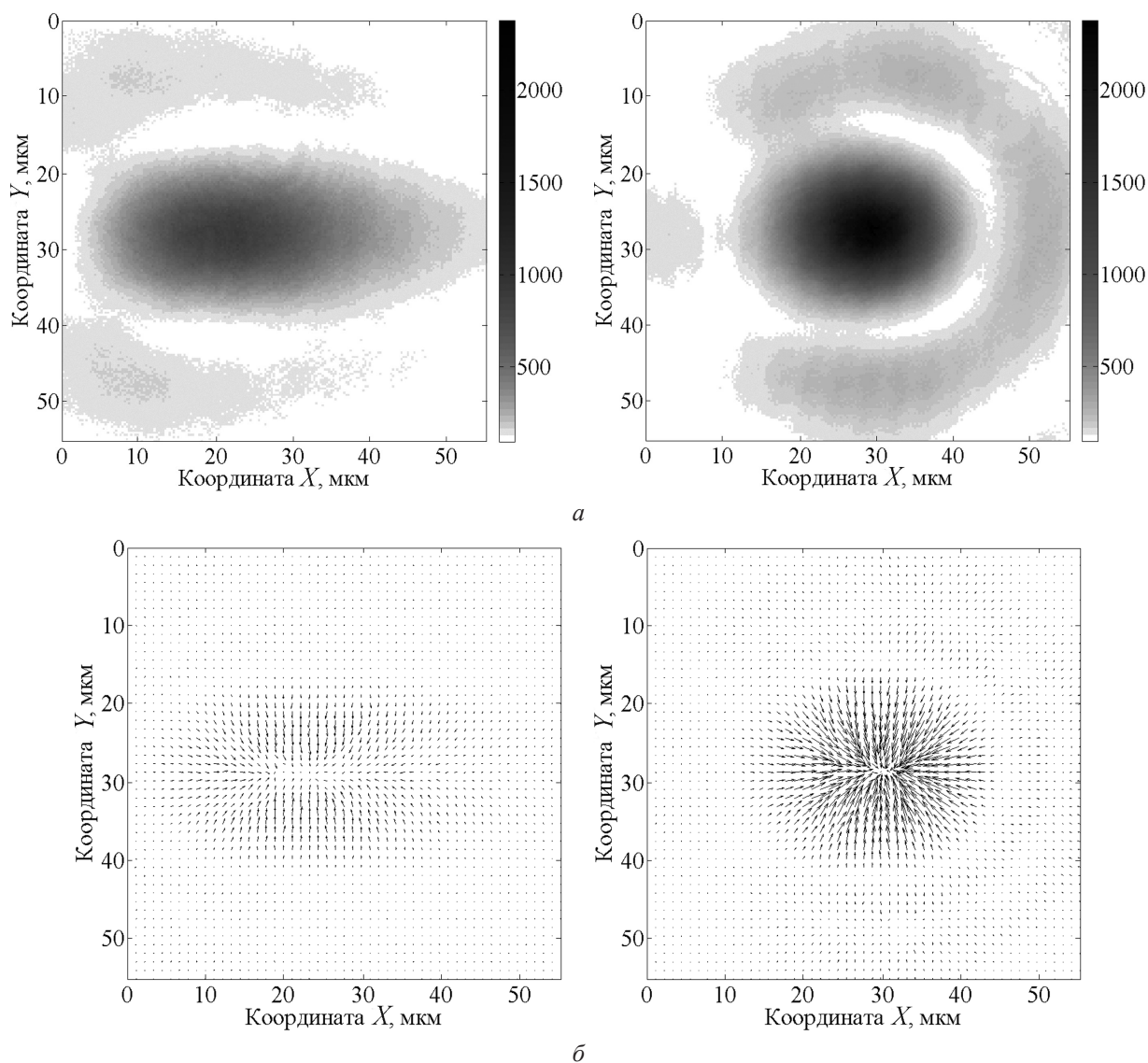


Рис. 5. Инvertированные распределения интенсивности в пиках билловушки (а) и карты поперечных градиентов интенсивности для них (б)

производить при больших расстояниях между пичками. Кроме того, из рис. 4 видно, что независимо от расстояния между пичками поперечный размер максимума интенсивности тем меньше, чем больше он содержит энергии, и, соответственно, наоборот.

Поскольку при перераспределении энергии между пичками билловушки изменяется и их поперечный размер, смещение M бипризмы оказывает сильное влияние на поперечные градиенты интенсивности. На рис. 5 приведены для сравнения карты поперечных градиентов интенсивности (рис. 5, б) для пиков билловушки (рис. 5, а), существенно отличающихся друг от друга по интенсивности (при $L = 2$ мм, $M = 0,27$ мм). Рамками показаны области поперечного сечения, по которым строились сравнительные карты градиентов.

Из рис. 5 следует, что при перераспределении интенсивности в областях вблизи максимумов интенсивности градиенты интенсивности в более высоких пиках могут превышать в 3–4 раза градиенты интенсивности менее высоких пиков. При этом на периферии пиков градиенты интенсивности примерно одинаковы. Этот факт говорит о том, что перераспределяя энергию между пичками, можно добиться более эффективного использования оптической билловушки для манипулирования частицами с отличающимися параметрами, например большей по размерам и меньшей, с большим показателем преломления и с меньшим. Так, для захвата меньших частиц лучше применять более узкие и интенсивные пики, а для крупных – менее интенсивные и более широкие.

Заключение. Все оптические элементы, использованные в предложенной схеме для формирования двухпикового светового пучка, пригодны для преобразования мощного лазерного излучения, особенно при наличии на входных и выходных поверхностях просветляющего покрытия. Благодаря этим фактам вполне реализуема выдвинутая нами идея одновременной транспортировки двух микрочастиц с помощью бипучка с переменным расстоянием между максимумами интенсивности.

Предложенный и реализованный экспериментально метод формирования перестраиваемой световой билловушки позволит манипулировать одновременно двумя микрочастицами с достаточно высокой точностью. Метод является очень высокоэффективным, поскольку при преобразовании оптического излучения его энергия практически не теряется, если рабочие поверхности оптических элементов просветлены на применяемой длине волны. Поскольку световые максимумы формируемого двухпикового светового поля имеют микроскопические размеры, оно может использоваться не только для управления микро- и наночастицами, но и в высокоразрешающей микроскопии, а также для неразрушающего оптического контроля толщины покрытий и для прецизионной лазерной обработки материалов, в том числе металлов.

Проведенные исследования показали, что при изменении расстояния между пичками оптической билловушки распределение интенсивности в них практически не изменяется. Максимумы интенсивности в билловушке являются трехмерными, т. е. поле имеет не только поперечный, но и продольный градиент интенсивности. Вблизи фокусной плоскости фокусирующей линзы продольный градиент интенсивности в десятки раз меньше, чем поперечный, однако при использовании фокусирующего оптического элемента с меньшим фокусным расстоянием и размещении рабочей области кюветы на некотором расстоянии от фокусной плоскости можно изменить соотношение градиентов в пользу продольного. Возможно использовать продольные градиенты билловушки с целью отрыва микрочастиц от дна кюветы либо наоборот для прижимания их ко дну, с целью фиксации частиц в определенной плоскости наблюдения. Путем контролируемого смещения би-призмы относительно оси падающего на нее света в пределах видимого диаметра этого пучка можно плавно и контролируемо перераспределять энергию между пичками формируемого двухпикового светового поля билловушки. При увеличении интенсивности пичка происходит также уменьшение его поперечного размера, что сказывается на распределении поперечных градиентов интенсивности. Перераспределяя энергию между пичками, можно более эффективно управлять парой микрочастиц, имеющих различные показатели преломления и размеры. Полученные результаты подтвердили хорошие эксплуатационные качества разработанного метода формирования оптической билловушки.

Литература

1. *Ashkin A.* // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. Physics. 1997. Vol. 94. P. 4853–4860.
2. *Рубинов А. Н., Катаркевич В. М., Эфендиев Т. Ш.* // Журн. прикладной спектроскопии. 2003. Т. 70, № 5. С. 663–666.

S. V. SOLONEVICH, V. E. LEPARSKII, A. G. MASHCHENKO, A. A. RYZHEVICH

METHOD FOR TUNABLE LIGHT BITRAP SHAPING

Summary

We developed a method for tunable light bitrap shaping meant for a simultaneous manipulation of two particles. The method is based on the light bibeam with a tunable angle between propagation directions of its components. We proposed, assembled, and tested experimentally an optical scheme for realization of the method. The method is suitable for the transformation of powerful laser radiation because all optical elements in the scheme have high light beam strength. The method is very effective since light energy losses occur only during reflections on input and output sides of optical elements. These losses can be reduced to a fraction of a percent by an anti-reflecting coating for the used wavelength on the sides of optical elements. The possibility of an energy redistribution between trap peaks permits one to conduct effectively with a pair of microparticles having different refraction indices and sizes. Light intensity maxima of the shaped bipeak light field are microscopic in size, since it can be used not only for manipulation of micron and submicron particles, but for high-resolution microscopy, for nondestructive testing of a coating thickness, and for precision laser processing of materials, including metals.

ІНФАРМАТЫКА

УДК 004

Э. Н. СЕРЕДИН, Б. А. ЗАЛЕССКИЙ

ФИЛЬТРАЦИЯ И КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ОБРАБОТКА ИЗОБРАЖЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ТЕХНОЛОГИИ CUDA

Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси

(Поступила в редакцию 20.02.2015)

Введение. С момента появления компьютеров и до настоящего времени существовало множество задач, которые не могли быть решены с помощью имеющихся вычислительных средств. Приходилось отказываться от реализации многих идей и алгоритмов из-за невозможности проведения экспериментов такими средствами, как персональные компьютеры, специальные процессоры, FPGA (программируемые пользователем вентильные матрицы) и т. д.

Постоянное развитие вычислительной техники, появление все более мощных персональных компьютеров позволило перейти к реализации известных и новых методов. Например, в настоящее время реализованы сложнейшие алгоритмы, строящие и отображающие реалистичные 3D-модели, которые требуют колоссальных объемов вычислений – многих миллиардов операций. Тем не менее время, затрачиваемое для решения некоторых современных задач из области обработки изображений, исчисляется несколькими неделями или даже месяцами, что приводит к необходимости дальнейшего совершенствования аппаратных и программных средств.

Появление новых программируемых видеокарт, доступных для общего пользования, позволяет программам, требующим нескольких часов вычислений на CPU (процессоре), занимать всего несколько минут работы современной GPU (видеокарты). Технологии программирования с использованием видеокарт отличаются от известных подходов и других технологий программирования тем, что видеокарта, в отличие от процессора, обладает сложной параллельной архитектурой, поэтому распараллеливание многих алгоритмов требует больших усилий. Также при выполнении программы на GPU значительную часть времени занимает перемещение данных в памяти, а на вычисления тратится только малая его часть.

В настоящей статье описываются основные концепции технологии CUDA [1], эффективные при компьютерной обработке изображений, и принципы построения программ на основе этой технологии. Приводится сравнительный анализ различных архитектур технологии CUDA с более подробным описанием основных нововведений, таких как динамический параллелизм и возможность нескольким потокам CPU одновременно использовать ядра CUDA одного GPU.

1. Развитие GPU, архитектура и модель программирования CUDA. За последние годы рост тактовой частоты и, следовательно, быстродействие CPU существенно замедлились. Частично проблемы энергопотребления и тепловыделения, ограничивающие быстродействие, удастся решить путем уменьшения размеров компонентов микросхем. На сегодняшний день основные производители CPU уже перешли на технологический процесс в 22 нм, но серьезные ограничения, связанные с минимизацией компонентов микросхем, не позволяют и дальше увеличивать производительность только за счет роста частоты, поэтому основной упор делается на увеличении количества параллельно работающих ядер. Так, за последние несколько лет процессоры с двумя и четырьмя ядрами стали доступны широкому кругу потребителей. Даже в мобильных телефонах и планшетных компьютерах уже не редкость наличие двух и более ядер.

Здесь следует упомянуть и суперкомпьютеры. В отличие от многоядерных процессоров, современные суперкомпьютеры построены на многопроцессорной архитектуре, состоящей из многочисленных узлов. Каждый из них представляет собой полноценный многоядерный процессор, связанный с другими для увеличения производительности [2]. Минусом таких систем являются размеры, которые не позволяют использовать их на мобильных объектах и в домашних условиях, а также высокая стоимость, превышающая десятки тысяч долларов.

От упомянутых недостатков избавлены современные графические процессоры (GPU – Graphics Processing Unit), установленные на видеокартах и имеющие сложную параллельную архитектуру. С течением времени они перестали выполнять функции только графических ускорителей и стали мощными программируемыми устройствами, пригодными для решения широкого круга задач. Сегодня GPU – это вычислительное устройство с очень высоким быстродействием, большим объемом собственной памяти и малыми размерами.

Появление программируемых GPU в начале 2000-х гг. позволило решать задачу рендеринга с помощью графических API типа DirectX и OpenGL [3], однако ограничения, накладываемые этими API, стали серьезным препятствием для использования их в неграфических вычислениях. Необходимость изучения специального языка программирования шейдеров, отсутствие средств отладки кода, ограниченность модели программирования препятствовали широкому распространению технологии.

Созданная компанией «Nvidia» технология CUDA (Compute Unified Device Architecture) не использует графических API, но позволяет взаимодействовать с ними. Она является полностью бесплатной и поддерживается всеми видеокартами Nvidia, начиная с GeForce 8-й серии, а также специализированными GPU.

Первая архитектура на базе технологии CUDA под названием **Tesla** была реализована в видеокарте GeForce 8800 GTX. Главное нововведение **Tesla** – это поддержка DirectX 10 и неграфических вычислений при помощи унифицированных шейдеров. Шейдерный конвейер позволяет программе задействовать любое арифметически-логическое устройство на GPU. В архитектуру добавлен набор команд для вычислений общего назначения, разрешен произвольный доступ к ячейкам памяти для чтения и записи, а также к программно-управляемому кэшу.

В архитектуру под названием **Fermi**, впервые появившуюся в видеокарте GeForce 480 GTX, были включены следующие возможности:

- поддержка DirectX 11;
- масштабирование производительности;
- настраиваемый L1 кэш для каждого потокового процессора (отключение L1 кэша эффективно при разреженном доступе к глобальной памяти);
- общий L2 кэш для всех потоковых процессоров;
- атомарные операции [1] в 20 раз быстрее, чем на **Tesla**;
- ECC (коррекция ошибок) [1];
- возможность кэшировать константные значения для блока из глобальной памяти;
- конфликты одновременного доступа к банкам разделяемой памяти возможны на уровне варпа* (в **Tesla** на уровне полуварпа);
- бесконфликтный последовательный доступ к массиву, состоящему из элементов типа double (в отличие от **Tesla**);
- одновременное исполнение нескольких ядер;
- новые инструкции (ballot и др.) [1];
- одновременное копирование CPU → GPU и GPU → CPU.

На смену **Fermi** пришла архитектура под названием **Kepler**, в которой добавлено следующее:

- динамический параллелизм, позволяющий потокам GPU динамически генерировать новые потоки для адаптации к поступающим данным;
- одновременное выполнение до 32 сеток (на **Fermi** – 16);
- выделение для каждого потока отдельной очереди (на **Fermi** все потоки объединяются в одну аппаратную очередь);

* Варп – группа нитей, объединенных на физическом уровне [1].

– параллельность для потоков при отсутствии зависимостей между потоками (на **Fermi** – одновременное выполнение только при переходе от одного потока к другому);

– **использование** функции **Hyper-Q**, позволяющей нескольким потокам CPU одновременно использовать ядра CUDA одного GPU. Получаемый эффект от использования функции Hyper-Q представлен на рис. 1;

– использование до 255 регистров для каждой нити (в **Tesla** было 128, в **Fermi** – 63), что дает возможность ускорить в несколько раз работу приложений, которым раньше не хватало регистров и поэтому происходили частые сбросы в кэш. Ускорение особенно заметно для приложений с двойной точностью;

– новые высокопроизводительные инструкции (SHFL – обмен данными внутри варпа, ATOM – ускорение расчетов для атомарных операций, SHF – 64-битовый сдвиг, FP32 – деление выполняется быстрее);

– аппаратное ускорение фильтрации 1D-, 2D-, 3D-текстурных данных в 4 раза;

– прямой доступ к текстурному кэшу;

– использование улучшенной реализации ECC.

Графический процессор, построенный на архитектуре **Kepler**, поддерживает: 15 мультипроцессоров, 1,5 Мб L2 кэша, 384-битный канал памяти и PCI Express Gen3, что в итоге обеспечивает производительность более 1 терафлопа в секунду при вычислениях с двойной точностью.

Самой новой на сегодняшний день является архитектура **Maxwell**, к основным нововведениям которой можно отнести следующее:

– реорганизация блоков GPU;

– вычислительная логика располагается в структурах GPC (Graphics Processing Cluster);

– блок GTE (Giga Thread Engine), предназначенный для контроля и одновременного выполнения нескольких ядер, распределения нагрузки между GPC;

– L2 кэш увеличен с 256 до 2048 кб;

– увеличено с 16 до 32 количество блоков на каждый потоковый мультипроцессор;

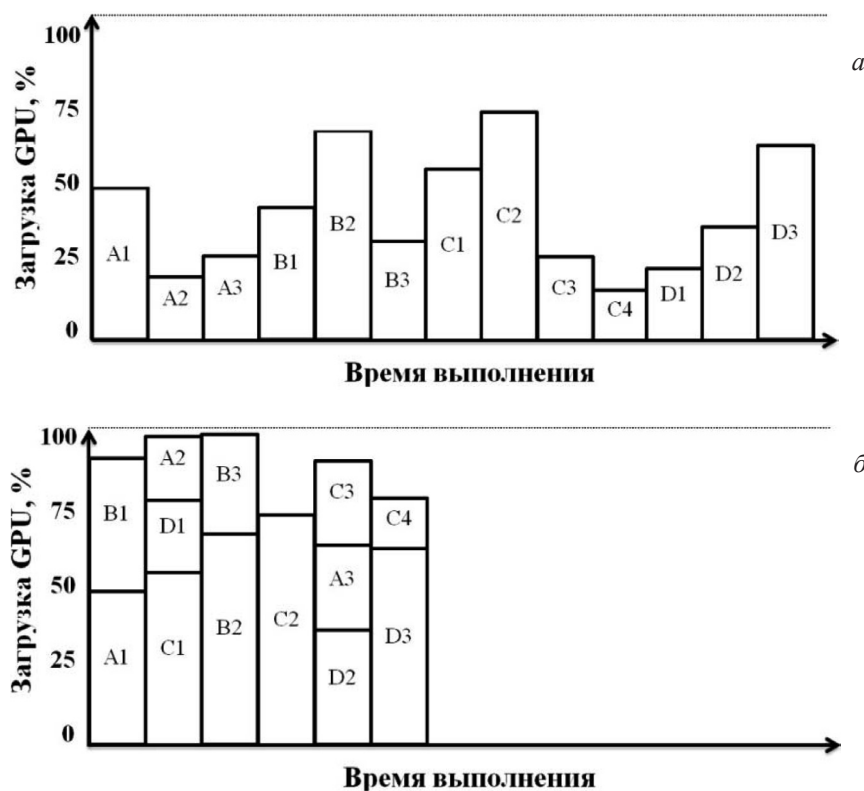


Рис. 1. Загрузка GPU и время работы программы: *а* – без использования Hyper-Q;

б – с использованием Hyper-Q; A1-A3, B1-B3, C1-C4, D1-D3 – запущенные на выполнение потоки разных задач

- уменьшены задержки при выполнении любых арифметических инструкций;
- отдельная специально разделяемая память до 64 кб (в **Fermi** и **Kepler** – распределяется между L1 кэшем и разделяемой памятью);
- общий функционал L1 и текстурного кэшей непосредственно в отдельном блоке;
- новые атомарные операции над 32-битными целыми числами в разделяемой памяти;
- CAS-операции над 32- и 64-битными значениями в разделяемой памяти;
- динамический параллелизм поддерживается во всех видеокартах архитектуры **Maxwell**;
- усовершенствован аппаратный кодек H.264 NVENC (кодирование видео ускорено в 6–8 раз, а декодирование – в 8–10 раз относительно режима работы в реальном времени);
- существенно сниженное энергопотребление за счет внутренней реорганизации потоковых мультипроцессоров.

Развитие аппаратных возможностей видеокарт приведено в табл. 1 на примере первой видеокарты с поддержкой CUDA GeForce 8800 GTX и одной из последних на сегодняшний день GeForce GTX Titan Z.

Таблица 1. Краткая спецификация видеокарт с поддержкой CUDA

Видеокарта (архитектура)	GeForce 8800 GTX	GeForce GTX Titan Z
Частота ядра, МГц	575	705 (876)
Частота шейдерного блока, МГц	1350	1750 (7000QDR)
Скорость заполнения текстур, миллиард текстелей/с	36,8	338
Количество памяти, Гб	0,768	12
Тип памяти	GDDR3	GDDR5
Интерфейс памяти, бит	384	768 (2 × 384)
Пропускная способность памяти, Гб/с	86,4	672
CUDA Cores, шт.	128	5760
Количество транзисторов, млн шт.	681	14200 (2 × 7100)

К основным преимуществам технологии CUDA можно отнести то, что она изначально была спроектирована для эффективного использования в неграфических вычислениях на GPU. В ней произведена оптимизация обмена данными между CPU и GPU, а также есть доступ к низкоуровневому программированию на RTX-ассемблере.

Технология CUDA реализована как кроссплатформенное программное обеспечение для 32- и 64-битных операционных систем Linux, Mac OS X и Windows.

Для работы с CUDA необходимо наличие графического процессора, поддерживающего архитектуру CUDA, драйвер устройства Nvidia, средства разработки CUDA Development Toolkit и компилятор языка C.

В среду разработки CUDA Development Toolkit входит компилятор nvcc, профилировщик, отладчик GDB для Linux, CUDA Runtime драйвер, руководство по программированию, CUDA Developer SDK, а также несколько стандартных библиотек:

- cuFFT (для вычисления быстрого преобразования Фурье);
- cuBLAS (пакет подпрограмм для линейной алгебры);
- cuSPARS (для работы с разреженными матрицами);
- cuRAND (генератор псевдослучайных чисел);
- NPP (для ускоренной обработки данных) и др.

Для операционных систем Windows компания «Nvidia» выпустила отладчик Parallel Nsight, который может интегрироваться в MS Visual Studio.

В CUDA включены два вида API [4]:

- CUDA Runtime API (высокого уровня);
- CUDA Driver API (низкого уровня).

Одновременное использование обоих CUDA API в одной программе невозможно. При написании программы с использованием Runtime API, все вызовы транслируются в инструкции, обрабатываемые низкоуровневым Driver API. Право выбора вида, используемого API, остается за разработчиком.



Рис. 2. Схема работы программы на CUDA

Программа на CUDA пишется на расширенном языке C (CUDA C), состоящем из традиционного языка C и расширения, включающего в себя спецификаторы функций, спецификаторы переменных, директивы для запуска ядра, встроенные переменные и дополнительные типы данных.

Основная концепция при использовании CUDA состоит в том, что все последовательные вычисления выполняются на CPU, а параллельные – на GPU. При этом код, написанный для GPU, запускается как набор большого числа одновременно работающих нитей (потоков). В отличие от CPU, код для GPU эффективно запускать для тысячи и более нитей, так как на их создание и уничтожение тратится очень малое время.

Алгоритм работы любой программы, написанной на CUDA, можно представить в виде схемы (рис. 2).

На физическом уровне нити разбиваются на группы, называемые варпами (warp). Только нити одного варпа выполняются одновременно, а управление и переключение между варпами осуществляет сам GPU.

Все запущенные нити (threads) объединены в одну сетку (grid), которая состоит из одномерных, двумерных или трехмерных массивов блоков (block). В свою очередь блок состоит из одномерных, двумерных или трехмерных массивов нитей. Каждый блок в сетке имеет свой индекс, аналогично каждая нить – свой индекс внутри блока. Для доступа к конкретной нити используются встроенные переменные. Подобная иерархия позволяет не только удобно работать с многочисленными нитями, но и накладывает ряд ограничений. Например, все нити одного варпа всегда принадлежат одному блоку и могут взаимодействовать между собой только в его пределах.

В программе, написанной для CPU, работа с памятью заключается в выделении и освобождении необходимого количества оперативной памяти, а всю оставшуюся работу на себя берет компилятор. В CUDA же необходимо управлять взаимодействием между оперативной памятью и памятью GPU, а также между различными видами памяти внутри GPU. Физически память видеокарты расположена на потоковых мультипроцессорах и микросхемах. В современных GPU с поддержкой CUDA насчитывается шесть видов памяти [5].

Регистры расположены на потоковых мультипроцессорах. Это самый быстрый вид памяти, доступный на чтение и запись. Хранить в них можно 32-битные целые числа или числа с плавающей точкой. Современные видеокарты располагают 65 536 регистрами на блок, которые распределяются между всеми нитями блока на этапе компиляции. Нити не могут обращаться к регистрам других нитей. Если регистров недостаточно для размещения локальных переменных, то нити начинают использовать локальную память.

Локальная память расположена на микросхемах, не кэшируется и доступна на чтение и запись. Для каждого потокового процессора используется своя локальная память небольшого объема с медленным доступом (порядка 500 тактов).

Разделяемая память расположена на потоковых мультипроцессорах. Доступ к ней такой же быстрый, как и к регистрам. В видеокартах GeForce 6-й серии для каждого блока выделяется

до 48 кб разделяемой памяти, доступной всем нитям своего блока на чтение и запись. От этого количества зависит, сколько блоков может быть одновременно запущено. Разделяемая память используется в виде управляемого кэша первого уровня, помогает снизить задержки при доступе к данным, а также сократить количество обращений к глобальной памяти.

Глобальная память расположена на микросхемах и не кэшируется. В современных видеокартах ее объем достигает нескольких гигабайт. Глобальная память обладает высокой пропускной способностью, но, как и локальная, имеет медленный доступ (порядка 500 тактов). Все нити сетки имеют доступ на чтение и запись к глобальной памяти.

Константная память расположена на микросхемах и доступна только для чтения всеми мультипроцессорами. Кэшируется и имеет объем в 64 кб для видеокарт GeForce 6-й серии. При отсутствии нужных данных в кэше задержка составляет несколько сотен тактов.

Текстурная память расположена на микросхемах и кэшируется. Доступна всем нитям сетки на чтение, а запись в нее может производить только CPU. Выборка данных осуществляется при помощи текстурных блоков, поэтому имеется возможность линейной интерполяции данных без дополнительных затрат. При отсутствии нужных данных в кэше задержка составляет несколько сотен тактов.

Хотя глобальная, локальная, текстурная и константная память являются памятью видеокарты, их отличия проявляются в виде различных алгоритмов кэширования и моделях доступа. Например, процессор может работать только с глобальной, константной и текстурной памятью. Понимание особенностей использования каждой из этих видов памяти, а также их взаимодействия между собой играет важную роль в достижении наилучших результатов с точки зрения быстродействия.

2. Оценка эффективности технологии CUDA в задачах обработки изображений. Технология программирования CUDA широко используется для решения задач в различных областях, например в компьютерном зрении и обработке изображений, биоинформатике и биологических науках, экономике, вычислительной аэро- и гидродинамике, анализе данных, физике, медицине и т. д. [6–11].

Применение CUDA позволяет ускорить вычисления от нескольких раз до нескольких порядков по сравнению с процессорной реализацией функции, алгоритма или метода [12]. В качестве примера оценим прирост быстродействия, получаемый с помощью CUDA, при решении некоторых задач в области обработки изображений.

2.1. Линейные оконные фильтры. Линейные оконные фильтры задаются функцией – ядром фильтра, которое отлично от нуля только в некоторой окрестности для каждой точки, а за пределами этой окрестности равно нулю. Далее фильтрация производится при помощи дискретной свертки и результатом является новое изображение. Обработку пикселей, которые находятся в окрестностях краев изображения, можно производить несколькими способами, в зависимости от требуемых условий (например, определить значения пикселей за границами изображения при помощи экстраполяции или зеркального продолжения изображения и т. д.).

Универсальным линейным оконным фильтром является фильтр с произвольно-задаваемыми значениями его ядра. При программной реализации универсального линейного оконного фильтра на CUDA было определено, что лучшую производительность дает следующий алгоритм.

Шаг 1. Создаются три линейных массива в памяти видеокарты:

- cudaSource – данные изображения;
- cudaMask – данные применяемого универсального линейного фильтра;
- cudaResult – результирующее изображение.

Шаг 2. Копируются в cudaSource и cudaMask соответствующие данные из массивов в оперативной памяти.

Шаг 3. Запускается ядро программы на CUDA со следующими параметрами:

```
N = 16;  
grid(widthSource / N + 1, heightSource / N + 1)  
threads(N, N)  
Kernel<<<grid, threads>>> (...)
```

где N – целое значение, которое выбрано на основе проведенных тестов и рекомендаций других разработчиков;

widthSource – ширина изображения;
 heightSource – высота изображения;
 grid – конфигурация блоков на сетке;
 threads – конфигурация нитей в блоке.

Шаг 4. На видеокарте задается 2D-индексация нитей и блоков, для которой вычисления в каждом пикселе выполняются отдельной нитью. Использование индексации, где каждая нить выполняет вычисления в нескольких точках, дает схожие результаты производительности.

Шаг 5. На видеокарте производятся вычисления для каждого пиксела в параллельном режиме. Результирующие данные записываются в cudaResult.

Шаг 6. Копируются данные из cudaResult в массив, находящийся в оперативной памяти. Сравнительные результаты быстродействия приведены в табл. 2.

Таблица 2. Время расчета линейного оконного фильтра для различных CPU и GPU, мс

Устройство	Разрешение изображения и размеры окна фильтра, пиксели					
	720 × 480		1920 × 1080		5000 × 5000	
	3 × 3	5 × 5	3 × 3	5 × 5	3 × 3	5 × 5
CPU Core2Duo E6550 2,33 ГГц (2)*	12,5	15,5	31,2	68,8	389,0	828,2
CPU Core2Quad Q6600 2,66 ГГц (4)*	6,3	12,4	35,8	65,6	254,1	522,6
CPU i7-4770K 3,50 ГГц (8)*	1,5	3,1	7,7	15,6	84,5	164,2
GPU GTX 550Ti	3,8	4,0	15,4	17,3	171,4	187,8
GPU GTX 650Ti	3,4	3,8	11,3	13,8	118,0	149,0
GPU GTX 750Ti	3,0	3,3	12,6	15,9	138,5	158,2

* В скобках указано количество ядер CPU, задействованных при вычислениях.

2.2. Нелинейные оконные фильтры (на примере медианы). В нелинейных оконных фильтрах вокруг каждого пиксела строится окно заранее заданных размеров. Рассчитывается результирующее значение для каждого пиксела, в зависимости от применяемого фильтра. Одним из самых известных и используемых нелинейных фильтров является медиана. При медианной фильтрации элементы окна каждого пиксела упорядочиваются по возрастанию или убыванию. Результирующим значением является центральный элемент полученной упорядоченной последовательности. Обработку пикселей, которые находятся в окрестностях краев изображения, можно производить так же, как описано ранее для линейных фильтров. При программной реализации медианного фильтра на CUDA было определено, что лучшую производительность дает следующий алгоритм.

Шаг 1. Создаются два линейных массива в памяти видеокарты:

cudaSource – данные изображения;
 cudaResult – результирующее изображение.

Шаг 2. Копируются в cudaSource соответствующие данные из массива в оперативной памяти.

Шаг 3. Запускается ядро программы на CUDA со следующими параметрами:

```
N = 16;
grid(widthSource / N + 1, heightSource / N + 1)
threads(N, N)
Kernel<<<grid, threads, sizeSharedData>>> (...)
```

где N – целое значение, которое выбрано на основе проведенных тестов и рекомендаций других разработчиков;

widthSource – ширина изображения;
 heightSource – высота изображения;
 grid – конфигурация блоков на сетке;
 threads – конфигурация нитей в блоке;
 sizeSharedData – размер дополнительно выделяемой разделяемой памяти для каждого блока.

Шаг 4. На видеокарте задается 2D-индексация нитей и блоков, для которой вычисления в каждом пикселе выполняются отдельной нитью. Дополнительно выделенная разделяемая память

доступна для всех запущенных нитей внутри блока, поэтому произведена еще одна индексация для того, чтобы каждая нить использовала только свою часть этой разделяемой памяти.

Шаг 5. На видеокарте производятся вычисления для каждого пиксела в параллельном режиме. Результирующие данные записываются в cudaResult.

Шаг 6. Копируются данные из cudaResult в массив, находящийся в оперативной памяти. Сравнительные результаты быстродействия приведены в табл. 3.

Таблица 3. Время расчета нелинейного оконного фильтра (медиана) для различных CPU и GPU, мс

Устройство	Разрешение изображения и размеры окна фильтра, пиксели					
	720 × 480		1920 × 1080		5000 × 5000	
	3 × 3	5 × 5	3 × 3	5 × 5	3 × 3	5 × 5
CPU Core2Duo E6550 2,33 ГГц (2)*	36,1	181,4	179,7	920,3	2235,9	10821,9
CPU Core2Quad Q6600 2,66 ГГц (4)*	15,6	103,1	106,2	516,4	1262,0	6350,9
CPU i7-4770K 3,50 ГГц (8)*	12,5	45,2	39,2	192,3	414,2	2292,2
GPU GTX 550Ti	3,5	14,3	16,1	70,1	178,7	833,7
GPU GTX 650Ti	3,0	8,9	12,7	45,5	141,1	467,2
GPU GTX 750Ti	2,4	6,4	10,9	31,7	124,5	343,0

* В скобках указано количество ядер CPU, задействованных при вычислениях.

2.3. Корреляция. Один из самых надежных методов поиска заданного объекта (эталон) на изображении (шаблон) основан на сравнении оконных корреляций Пирсона [13] между эталоном и всеми соответствующими областями шаблона. Суть метода заключается в следующем: окно, размер которого соответствует эталону, передвигается пиксел за пикселом по шаблону. Для каждого положения окна вычисляется коэффициент корреляции (рис. 3). Позиция, для которой коэффициент корреляции достигает своего наивысшего значения, берется в качестве координат лучшего соответствия.

Известно, что вычисление корреляции требует больших вычислительных затрат. Для уменьшения времени расчета корреляции на CPU зачастую используют быстрое преобразование Фурье, а также другие методы [13]. Еще одним способом является уменьшение количества точек, в которых вычисляется корреляция, за счет применения дополнительных алгоритмов [14]. Все это позволяет значительно уменьшить время вычислений, но не дает возможности добиться нужного быстродействия. Например, при решении задачи сопровождения объекта, наблюдаемого видеокамерой, в режиме реального времени на обработку одного кадра отводится 25–35 мс. Ни одна из известных реализаций корреляционных алгоритмов не позволяет решить задачу за указанное время. Если же для решения задачи требуется дополнительно учитывать повороты и масштабирование изображения, то от использования корреляции и вовсе приходится отказываться.

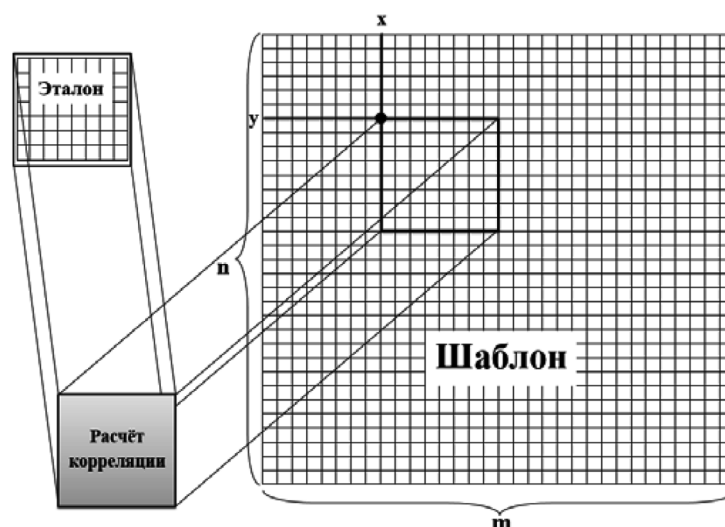


Рис. 3. Пример расчета корреляции Пирсона в точке (x, y)

Ситуация изменилась с появлением видеокарт от «Nvidia» с поддержкой архитектур **Kepler** и **Maxwell** (видеокарты GeForce 6-й серии и более новые). Использование технологии CUDA позволяет произвести вычисление корреляции Пирсона во всех точках шаблона без каких-либо дополнительных действий с изображением.

При программной реализации корреляции Пирсона на CUDA было определено, что лучшую производительность дает следующий алгоритм.

Шаг 1. Формируются текстуры в памяти видеокарты: одна для шаблона (cudaSource) и одна для эталона (cudaTemplate).

Шаг 2. Создаются линейные массивы в памяти видеокарты cudaResult для значений корреляции Пирсона и cudaResultIndex для значений угла поворота эталона.

Шаг 3. Копируются данные шаблона в cudaSource, а в текстуру cudaTemplate помещаются значения всех вариантов поворота эталона (например, как на рис. 4).

Шаг 4. Запускается ядро программы на CUDA со следующими параметрами:
N = 16;

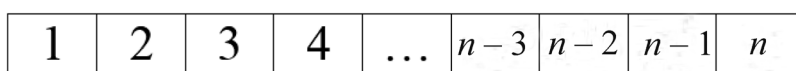


Рис. 4. Пример формирования текстуры cudaTemplate для всех вариантов поворота эталона, где n – количество поворотов эталона

```
grid(widthSource / N + 1, heightSource / N + 1, countAngles)
threads(N, N)
Kernel<<<grid, threads>>> (...)
```

где N – целое значение, которое выбрано на основе проведенных тестов и рекомендаций других разработчиков;

widthSource – ширина изображения;
heightSource – высота изображения;
countAngles – количество поворотов эталона;
grid – конфигурация блоков на сетке;
threads – конфигурация нитей в блоке.

Шаг 5. На видеокарте задается 3D-индексация блоков и 2D-индексация нитей, для которой вычисления в каждом пикселе всех вариантов поворота эталона выполняются отдельной нитью.

Шаг 6. На видеокарте производятся вычисления корреляции Пирсона для каждого пиксела всех вариантов поворота эталона в параллельном режиме. В cudaResult записываются максимальные значения корреляции для каждого пиксела, а в cudaResultIndex – значения угла поворота эталона с максимальной корреляцией.

Шаг 7. Копируются данные из cudaResult и cudaResultIndex в массивы, находящиеся в оперативной памяти.

Сравнительные результаты быстродействия приведены в табл. 4, 5.

Таблица 4. Время расчета корреляции Пирсона для различных CPU и GPU для 60 поворотов эталона, с

Устройство	Разрешение изображения и размеры окна фильтра, пиксели					
	720 × 480		1920 × 1080		5000 × 5000	
	8 × 8	32 × 32	8 × 8	32 × 32	8 × 8	32 × 32
CPU Core2Duo E6550 2,33 ГГц (2)*	18,8	240,9	94,0	127,4	1147,3	15933,8
CPU Core2Quad Q6600 2,66 ГГц (4)*	9,0	117,0	45,6	617,0	555,1	7689,9
CPU i7-4770K 3,50 ГГц (8)*	1,1	11,6	5,6	63,0	68,9	788,9
GPU GTX 550Ti	0,11	2,4	0,55	7,8	6,6	98,1
GPU GTX 650Ti	0,07	0,85	0,35	4,5	4,3	56,1
GPU GTX 750Ti	0,08	1,0	0,37	5,3	4,5	66,5

* В скобках указано количество ядер CPU, задействованных при вычислениях.

Таблица 5. Время расчета корреляции Пирсона для различных CPU и GPU для 360 поворотов эталона, с

Устройство	Разрешение изображения и размеры окна фильтра, пиксели					
	720 × 480		1920 × 1080		5000 × 5000	
	8 × 8	32 × 32	8 × 8	32 × 32	8 × 8	32 × 32
CPU Core2Duo E6550 2,33 ГГц (2)*	111,6	1444,0	565,8	7668,1	6887,2	≈87186
CPU Core2Quad Q6600 2,66 ГГц (4)*	54,3	702,3	274,4	3706,9	3333,6	≈42407
CPU i7-4770K 3,50 ГГц (8)*	6,7	70,3	33,8	378,1	418,1	≈4352
GPU GTX 550Ti	0,64	9,9	3,2	47,1	39,0	589,0
GPU GTX 650Ti	0,42	5,1	3,0	26,9	25,4	336,2
GPU GTX 750Ti	0,45	7,0	2,2	31,9	26,4	398,6

* В скобках указано количество ядер CPU, задействованных при вычислениях.

Для сравнения быстродействия разработанных алгоритмов были выбраны несколько стандартных разрешений. При написании программного обеспечения и для всех тестов использовались: операционная система Windows 8.1 64bit, CUDA версии 6.5, драйвер видеокарты 347.25, MS Visual Studio 2013, язык программирования C++ и тип данных float (с плавающей запятой одинарной точности). При расчетах на видеокarte не применялись какие-либо дополнительные приемы оптимизации (использование паттернов доступа к разделяемой памяти, эффективных алгоритмов редукции и т. д.), а для CPU расчет производился методом прохода по всем точкам с распараллеливанием на максимальное количество поддерживаемых ядер каждым из процессоров. Время, затраченное на написание программного обеспечения, примерно одинаковое.

Из табл. 2–5 видно, что использование бюджетных видеокарт уменьшает время вычислений на несколько порядков. При этом, в отличие от реализации алгоритмов на процессоре, где загрузка достигает 100 %, при вычислениях на видеокarte ресурсы процессора остаются свободными и могут использоваться для решения других задач. Можно также отметить, что в некоторых случаях видеокarta с более старой архитектурой CUDA показывает лучшую производительность, что связано с аппаратными возможностями видеокарт и степенью оптимизации алгоритма под используемую архитектуру CUDA. При относительно небольшом количестве вычислений процессор i7 с работающими 8 ядрами не сильно уступает бюджетным видеокартам и иногда даже обгоняет их. Однако непосредственно сами вычисления на видеокarte занимают всего 33–50 % от общего времени работы, остальное уходит на копирование данных между памятью CPU и GPU и наоборот. Поэтому использование более производительных видеокарт может ускорить вычисления еще до 2–3 раз только за счет уменьшения времени копирования данных.

Заключение. Представлен краткий обзор появившихся в последнее время архитектур видеокарт от «Nvidia», таких как **Tesla, Fermi, Kepler, Maxwell**, новых возможностей и особенностей технологии программирования CUDA, ставших доступными в этих архитектурах. Акцент сделан на использование CUDA для обработки изображений. На примерах продемонстрировано, что использование GPU при решении актуальных задач обработки изображений позволяет уменьшить на несколько порядков время выполнения программ по сравнению с их параллельными версиями, реализованными на CPU.

В дальнейшем планируется разработать быстрые реализации алгоритмов обработки и распознавания изображений, требующие выполнения в режиме реального времени, с использованием новых возможностей технологии CUDA.

Литература

1. <https://developer.nvidia.com/category/zone/cuda-zone> [Электронный ресурс].
2. Таненбаум Э. Архитектура компьютера. СПб., 2007.
3. Евченко А. И. OpenGL и DirectX: программирование графики. СПб., 2006.
4. <http://docs.nvidia.com/cuda/cuda-c-programming-guide/index.html> [Электронный ресурс].
5. Боресков А. В. Основы работы с технологией CUDA. М., 2010.
6. <http://www.nvidia.ru/object/gpu-computing-applications-ru.html> [Электронный ресурс].
7. Залесский Б. А., Середин Э. Н. // Информатика. 2014. № 41.
8. Josth R. // J. of Real-Time Image Processing. 2011. Vol. 7.

9. *Joaquín F.* // J. of Real-Time Image Processing. 2011. Vol. 7.
10. *Yoon-Seok Choi.* // J. of Real-Time Image Processing. 2014. Vol. 9.
11. *Gembris D.* // J. of Real-Time Image Processing. 2010.
12. *Сандерс Дж.* Технология CUDA в примерах: введение в программирование графических процессоров. М., 2011.
13. *Гонсалес Р.* Цифровая обработка изображений. М., 2005.
14. *Сойфер В. А.* Методы компьютерной обработки изображений. М., 2003.

E. N. SEREDIN, B. A. ZALESKY

FILTRATION AND CORRELATION PROCESSING OF IMAGES BY THE CUDA TECHNOLOGY

Summary

The basic concepts and specificity of the programming technology of CUDA video cards are presented. The efficiency of the technology is demonstrated on image processing tasks. Results of a comparative performance analysis of program implementations on the GPU and CPU are adduced for urgent tasks of image processing. It is shown that CUDA allows accelerating computations of image processing tasks by several orders of magnitude. In particular, the use of the CUDA technology has made possible to implement correlation algorithms for tracking objects on video sequences in real time.

УДК 681.513.7

Г. А. ПРОКОПОВИЧ

АДАПТИВНАЯ НЕЙРОСЕТЕВАЯ СИСТЕМА УПРАВЛЕНИЯ АВТОНОМНЫМ МОБИЛЬНЫМ РОБОТОМ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ОБУЧЕНИЯ С УЧИТЕЛЕМ В *ONLINE* РЕЖИМЕ

Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси

(Поступила в редакцию 06.03.2015)

Ведение. Одно из лидирующих направлений в области искусственного интеллекта связано с моделированием искусственных нейронных сетей (ИНС), способных решать широкий круг задач распознавания образов, идентификации, прогнозирования, оптимизации и управления сложными объектами [1, 2]. ИНС строятся по принципу организации и функционирования их биологических аналогов [3].

Преимущества ИНС перед традиционными методами искусственного интеллекта (продукционные системы, таблицы принятия решений, генетические алгоритмы, нечеткая логика и т. д.) проявляются при решении таких задач, когда трудно выделить правила функционирования систем, обладающих большим числом степеней свободы, зато существует возможность обучения на множестве примеров [4].

Тем не менее ИНС имеют и свои ограничения, связанные с отсутствием универсальной архитектуры и единых подходов для использования в системах управления, а также с проблемами дообучения новой информации. На данный момент в известных системах управления техническими устройствами ИНС используются в виде отдельных блоков и в основном только для реализации функций классификации или интерполяции данных, что значительно сужает их потенциал.

1. Недостатки традиционных способов обучения ИНС. Возможность обучения – одно из главных преимуществ ИНС перед традиционными алгоритмами машинного обучения, которое основано на свойствах биологической памяти [4–6]. В процессе обучения ИНС способны выявлять сложные зависимости между входными и выходными данными, а также выполнять *обобщение* [6], под которым понимается способность ИНС на основе обучающей выборки генерировать правильный ответ при анализе входных данных, которые не встречались в процессе обучения.

Одним из наиболее часто используемых способов обучения ИНС является обучение с учителем (рис. 1), когда выходное пространство решений нейронной сети известно и заключается в последовательном предъявлении на вход ИНС обучающей выборки с указанием соответствующих

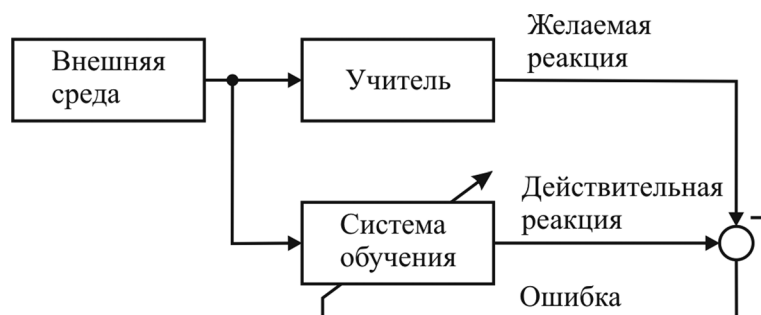


Рис. 1. Схема процесса обучения ИНС с учителем

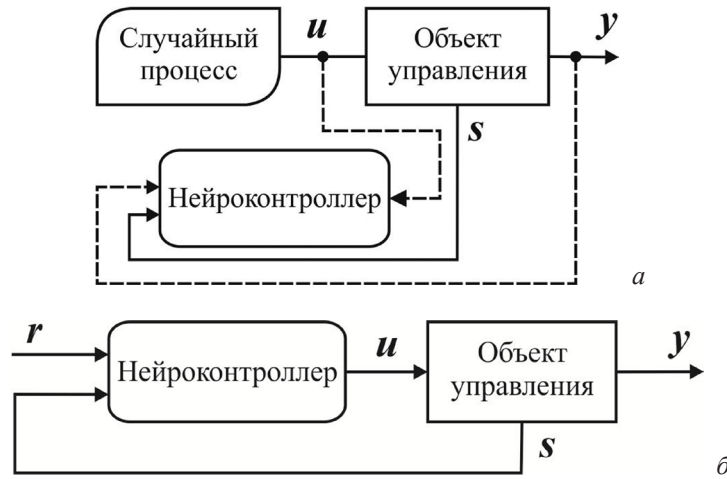


Рис. 2. Схема обобщенного инверсного нейроуправления:
 а – режим обучения инверсного нейроконтроллера; б – режим управления объектом

значений на ее выходах – схема прямого контролируемого обучения [6]. Присутствующий в схеме «учитель» (или эксперт) должен обладать знаниями о внешней среде, представленными в виде набора эталонных образцов вход-выход. Пара таких эталонов называется обучающей выборкой, которая включает в себя, соответственно, входной \mathbf{x}_i^* и выходной \mathbf{y}_i^* векторы. Множество пар эталонов $\{\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*, \dots, \mathbf{x}_k^*\}$ и $\{\mathbf{y}_1^*, \mathbf{y}_2^*, \dots, \mathbf{y}_k^*\}$ называется обучающим набором $U = \{\mathbf{x}_i^*, \mathbf{y}_i^*\}_{i=1, \overline{k}}$.

Как правило, изначально сама ИНС никакими знаниями не обладает. В процессе обучения эксперт и ИНС подвергаются воздействию внешней среды, т. е. на входы последней поступает тренировочный сигнал \mathbf{x}_i , совпадающий с одним из входных эталонов \mathbf{x}_i^* . Эксперт сообщает сети, какова должна быть правильная (желаемая) реакция на поступившее воздействие, подавая соответствующий выходной эталон \mathbf{y}_i^* . На основании величины ошибки между реальным и желаемым выходами сети по определенному правилу проводится настройка ее синаптических связей [6]. Повторяя этот процесс итеративно, можно настроить ИНС так, что она будет эмулировать знания эксперта о внешней среде.

На рис. 2, а приведена схема инверсного нейроконтроллера, который в процессе обучения с учителем способен в некоторых пределах сформировать модель поведения исследуемого объекта [7]. Инверсный нейроконтроллер представляет собой ИНС, обученную в режиме *offline* имитировать обратную динамику объекта управления на основе выявления фазовых траекторий поведения динамического объекта.

Для получения таких траекторий на объект управления в качестве управляющего сигнала подается некоторый случайный процесс. Значения управляющих сигналов $\mathbf{u}^{(N)} = (u_1, u_2, \dots, u_N)^T$ и ответных реакций объекта $\mathbf{y}^{(N)} = (y_1, y_2, \dots, y_N)^T$ и $\mathbf{s}^{(M)} = (s_1, s_2, \dots, s_M)^T$ протоколируются, и на этой основе формируется обучающая выборка для нейроконтроллера:

$$\begin{cases} U = \{P_i, T_i\}_{i=1, \overline{k}}, \\ P_i^{(N+M)} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}^{(N)}[n] \\ \text{-----} \\ \mathbf{s}^{(M)}[n-1] \end{bmatrix}, \\ T_i^{(N)} = \mathbf{u}^{(N)}[n-1], \end{cases} \quad (1)$$

где $P_i^{(N+M)}$ – вектор-столбец входных сигналов; $T_i^{(N)}$ – вектор-столбец выходных сигналов; n – шаг дискретного времени; k – число обучающих выборок; $\mathbf{s}^{(M)}$ – вектор, описывающий состояние объекта, причем, как правило, для оценки текущего состояния объекта управления используют последовательность из его прошлых реакций на входные воздействия

$$\mathbf{s}^{(M)}[n] = \left(\mathbf{y}[n-1]^T, \mathbf{y}[n-2]^T, \dots, \mathbf{y}\left[n - \frac{M}{N}\right]^T \right)^T, \quad (2)$$

либо мгновенный срез его фазовых траекторий

$$\mathbf{s}^{(M)}[n] = \left(\mathbf{y}[n]^T, \mathbf{y}'[n]^T, \mathbf{y}''[n]^T, \dots, \mathbf{y}^{(p)}[n]^T \right)^T, \quad (3)$$

где $M \geq N$, причем N кратно M ; p является номером порядка производной, которая равняется $p = \frac{M}{N} - 1$.

В ходе обучения ИНС должна определить и запомнить зависимость значений управляющего сигнала $\mathbf{u}[n-1]$ от последующего значения реакции объекта управления $\mathbf{y}[n]$, находящегося перед этим в состоянии $\mathbf{s}[n-1]$. Во время управления объектом (рис. 2, б) инверсный нейроконтроллер подключается таким образом, чтобы на вход $\mathbf{x}[n]$ подавались значения установки $\mathbf{r}[n]$ и состояния объекта управления $\mathbf{s}[n-1]$, поступающие по каналу обратной связи:

$$\mathbf{x}[n] = \begin{bmatrix} \mathbf{r}[n] \\ \text{-----} \\ \mathbf{s}[n-1] \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Предполагается, что сформированная при обучении инверсная модель объекта управления является адекватной реальному объекту. Тогда сигнал управления $\mathbf{y}[n+1]$, получаемый с выхода ИНС, обеспечивает переход объекта в стационарное состояние, которое было задано экспертом в процессе обучения.

Однако указанный способ обучения чаще всего используется в *offline* режиме, так как в процессе дообучения большинства ИНС новым образом возникает проблема, которая является одной из самых сложных и трудно решаемых при построении интеллектуальных систем, моделирующих распознавание образов и восприятие окружающего мира [5, 6]. Она заключается в определении баланса между процессами синаптической *пластичности* нейронов для запоминания новых и *стабильного* хранения уже существующих в памяти образов.

В некоторых случаях процесс «затирания» старой информации является несущественным. Если набор обучающих векторов фиксирован, то, например, процесс обучения многослойного персептрона по методу обратного распространения ошибки будет заключаться в многократном циклическом предъявлении обучающей выборки. В итоге персептрон способен запомнить весь набор обучающих выборок. Однако при обучении персептрона новому образу произойдет модификация синаптических связей с неконтролируемым разрушением структуры памяти о предыдущих образах. Таким образом, персептронная модель ИНС не способна к запоминанию новой информации *без полного переобучения сети* [6].

Для решения указанной проблемы в работе [8] автором был предложен адаптивный нейросетевой классификатор АРТ-ДАП с функцией дообучения, который позволяет в отличие от известных аналогов, основанных на адаптивной резонансной теории С. Гроссберга, производить ассоциативный поиск хранящихся в памяти эталонов. Следующим немаловажным свойством разработанного классификатора является возможность реализации процесса обучения с учителем, что позволяет эксперту объединять в одном классе различные эталоны [9]. Данные свойства достигаются благодаря реализации долговременной памяти классификатора на основе архитектуры гетероассоциативной ИНС – двунаправлено ассоциативной памяти (ДАП), а также оригинальному алгоритму выявления новых образов.

2. Процесс самообучения нейросетевых систем управления на основе реализации механизма условных рефлексов. Решение задачи движения автономных мобильных роботов (АМР) в априори неизвестной местности с помощью классических подходов теории управления, как правило, является проблематичным. Это связано с тем, что не всегда можно подобрать точную аналитически заданную форму функциональных зависимостей входных и выходных сигналов системы «датчики–двигатели». В качестве альтернативы существуют подходы проектирования

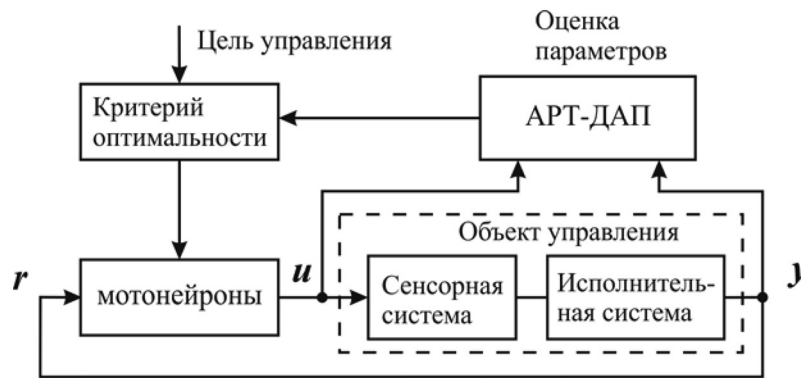


Рис. 3. Функциональная схема предложенного адаптивного нейроконтроллера

управляющих систем на основе самообучения, которые, обучаясь на опыте своего взаимодействия с внешней средой, способны самостоятельно формировать свое поведение [2–4]. Обычно подобные системы демонстрируют значительно более высокие возможности обучения и адаптации по сравнению с классическими инженерными подходами. Причем в большинстве случаев целевые функции априори содержатся в синаптических связях самих ИНС, т. е. $r[n+1] = y[n]$.

Для приспособления к постоянным условиям функционирования, при которых параметры среды изменяются в незначительных пределах, наиболее экономным средством адаптации как для естественных, так и для искусственных систем управления являются механизмы условных и безусловных рефлексов, позволяющие ограничиться весьма простым набором правил [3].

Таким образом, одним из самых простых, но не менее ответственных среди функциональных блоков проектируемых систем управления АМР должен быть реактивный контур управления, предназначенный для реализации аппарата безусловно-условных рефлексов [10]. Реактивный контур управления должен обладать способностью к обучению и запоминанию на определенное время определенных реакций исполнительных систем АМР при поступлении соответствующих стимулов. Для обеспечения перечисленных функциональных свойств его блок памяти должен выполнять следующие действия: восстанавливать из памяти и классифицировать входные образы на основе уже имеющихся эталонов, а также добавлять новые [9].

В настоящей работе предлагается архитектура адаптивного нейроконтроллера, состоящего из двух гетероассоциативных ИНС (рис. 3). Первая ИНС реализована в виде блока мотонейронов, в котором хранится алгоритм управления исполнительными системами робота. Задачей второй ИНС, в качестве которой используется разработанный ранее классификатор АРТ-ДАП, является выполнение функции контроля процесса дообучения блока мотонейронов. В результате нейроконтроллер способен не только реализовывать выполнение наперед заданной системы правил, но и приспособливаться к новым внешним условиям.

На рис. 4 приводится структурная схема контура реактивного управления АМР, основанная на принципах работы предложенного адаптивного нейроконтроллера, которая работает следующим

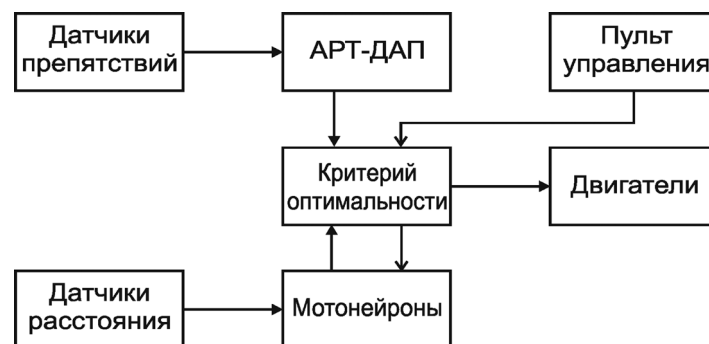


Рис. 4. Структурная схема реактивного контура управления для АМР, состоящего из систем безусловных и условных рефлексов

образом. В блок АРТ-ДАП, который отвечает за реализацию безусловных рефлексов, до начала функционирования АМР экспертом должны быть записаны ассоциативные пары «стимул-реакция», представляющие собой набор критических значений ответственных параметров $\{x_i^*\}_{i=\overline{1,k}}$ мобильного робота и соответствующий им набор ответных действий $\{y_i^*\}_{i=\overline{1,k}}$ исполнительной системы, которые предназначены для ее перехода обратно в нормальный режим. В блоке мотонейронов должны содержаться ассоциативные пары «стимул-реакция», однако (в отличие от системы безусловных рефлексов) в них хранится набор действий исполнительной системы, функционирующей в штатном режиме. Следует отметить, что размер входного вектора для блока мотонейронов значительно превышает размер входного вектора для блока АРТ-ДАП. Это связано с различными типами используемых датчиков в каждом из описываемых блоков. Например, на вход блока АРТ-ДАП могут поступать цифровые сигналы датчиков препятствий (ближняя зона), а на вход блока мотонейронов – сигналы сканирующего дальномера (рабочая область), причем сигналы сканирующего дальномера представляют собой набор большого числа аналоговых значений.

Принцип работы блока критерия оптимальности заключается в следующем: если управляющие значения $u_{\text{мото}}^{(N)}$, полученные от блока мотонейронов, не противоречат управляющим значениям $u_{\text{АРТ-ДАП}}^{(N)}$ блока безопасного движения АРТ-ДАП, то блок критерия оптимальности соединит выходы блока мотонейронов с входами блока драйвера двигателей.

В противном случае блок критерия оптимальности принудительно создаст в долговременной памяти ИНС мотонейронов $(k+1)$ -ю ассоциативную пару, выходной обучающий вектор $T_{k+1}^{(N)}$ которой будет представлять собой управляющий вектор от блока АРТ-ДАП, а входной – обучающий вектор $P_{k+1}^{(N+M)}$, содержащий текущие данные от сканирующего дальномера и состояние объекта управления q шагов модельного времени n назад. При повторении данной ситуации блок мотонейронов выдаст такие управляющие сигналы, которые не приведут к появлению внештатного режима работы АМР (в описываемом случае – столкновение с препятствием). Другими словами, обучающая выборка $U_{\text{мото}} = \{P_i, T_i\}_{i=\overline{1,k+1}}$ по формуле (1) для ИНС мотонейронов предложенного адаптивного нейроконтроллера будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} u_{\text{мото}}^{(N)}[n] \neq u_{\text{АРТ-ДАП}}^{(N)}[n], \\ P_{k+1}^{(N+M)} = \begin{bmatrix} y^{(N)}[n-q] \\ \text{-----} \\ s^{(M)}[n-q-1] \end{bmatrix}, \\ T_{k+1}^{(N)} = u_{\text{АРТ-ДАП}}^{(N)}[n-1], \\ q = \frac{L}{V \cdot \Delta n}, \end{cases} \quad (5)$$

где L – разница между радиусами действия сенсоров рабочей и ближней зон АМР, значения которых поступают на входы блоков мотонейронов и АРТ-ДАП соответственно; V – скорость движения АМР; Δn – шаг дискретного модельного времени n , причем q округляется к большему целому числу.

Таким образом, в процессе функционирования АМР в *online* режиме в блок мотонейронов могут добавляться новые ассоциативные пары «стимул-реакция». Данный процесс можно рассматривать как генерацию условных рефлексов, позволяющих АМР адаптироваться к новым условиям функционирования.

Для отладки и тестирования предложенного нейроконтроллера нами была разработана программа имитационного моделирования, способная воспроизвести работу типового автономного мобильного робота, сенсорная система которого состоит из датчиков безопасности и сканирующего дальномера [11]. Показано, что предложенный адаптивный нейроконтроллер, согласно

заранее заданному в блоке АРТ-ДАП алгоритму движения, был способен не только генерировать управляющие сигналы, но и вырабатывать в процессе функционирования в блоке мотонейронов индивидуальные реакции АМР на некоторые внешние стимулы. Это позволило АМР за 4–6 соударений (попадания различных преград в его зону безопасности) научиться двигаться по плоскости, не задевая препятствия, причем опираясь уже на данные от сканирующего дальномера.

Полученные результаты сравнивались с наиболее близкой по назначению нейроподобной системой автономного адаптивного управления (ААУ), описанной в работе [2] и предназначенной для управления мобильным роботом с аналогичной сенсорной системой. В приведенных в [2] экспериментах системе управления требовалось 10–20 столкновений, чтобы база знаний накопила достаточно примеров и далее робот двигался без столкновений.

Заключение. На основе реализации механизмов безусловных и условных рефлексов реализована нейросетевая система управления автономным мобильным роботом, которая предназначена не только для генерации управляющих сигналов, но и выработки в процессе функционирования робота индивидуальных реакций на некоторые внешние стимулы. При этом объем поступающих из внешней среды сенсорных данных передается в соответствующие управляющие блоки дифференцированно: для активизации безусловных рефлексов требуется значительно меньшее количество информации, чем для условных. Указанные свойства предложенной системы управления позволяют роботу эффективно адаптироваться к изменениям внешней среды.

Благодаря использованию архитектур гетероассоциативных ИНС была реализована схема процесса обучения блока мотонейронов с учителем в *online* режиме. Величина временного сдвига q при генерации обучающей выборки зависит от характеристик используемых сенсоров, скорости движения мобильного робота, а также временного шага модельного времени.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта БРФФИ-ГФФИУ № Ф13К-144 «Разработка методов оперативной обработки и передачи информации для эффективного управления мобильными роботами и подвижными системами».

Литература

1. Новые методы управления сложными системами. М., 2004.
2. Жданов А. А. Автономный искусственный интеллект. М., 2009.
3. Гаазе-Рапопорт М. Г. От амебы до робота: модели поведения. М., 1987.
4. Амосов Н. М. Нейрокомпьютеры и интеллектуальные роботы. Киев, 1991.
5. Рассел С. Искусственный интеллект: современный подход. М., 2006.
6. Хайкин С. Нейронные сети: полный курс. М., 2006.
7. Омату С. Нейроуправление и его приложения. М., 2000.
8. Прокопович Г. А. // Информатика. 2009. № 3 (23). С. 68–81.
9. Прокопович Г. А. // Информатика. 2010. № 2 (26). С. 54–65.
10. Прокопович Г. А. // Искусственный интеллект. 2013. № 1. С. 181–190.
11. Прокопович Г. А. // Информатика. 2014. № 4 (44). С. 34–43.

R. A. PRAKPOVICH

ADAPTIVE NEURAL NETWORK CONTROL SYSTEM OF AN AUTONOMOUS ROBOTIC VEHICLE BASED ON *ONLINE* SUPERVISED LEARNING

Summary

The disadvantages of the classical architectures of artificial neural networks (ANNs) in the problems of intelligent control of an autonomous robotic vehicle are described. Based on updated bi-directional associative ANNs an adaptive neurocontroller has been developed which enables one to find the cause-effect relationships in the “robot–environment” system. The neurocontroller is based on the rule-based system and contains two ANNs that perform two different functions. The first one is implemented as a motoneurons unit that contains the robot motion control algorithm, and the second one is designed to identify in the sensory data sequence new patterns that are added to the first ANN based on the supervised learning scheme.

КАРОТКІЯ ПАВЕДАМЛЕННІ

УДК 530.1+535.3

А. М. ГОНЧАРЕНКО

К ТЕОРИИ СОЛИТОНОВ В ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ СРЕДАХ*Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси**(Поступила в редакцию 06.02.2015)*

Известно, что при достаточной мощности световых импульсов в нелинейных средах формируются оптические солитоны [1–4]. С другой стороны, существуют и активно исследуются среды с отрицательным показателем преломления [5, 6]. С точки зрения физики процесса представляется интересным рассмотреть основные особенности распространения солитонов в отрицательных средах. Для краткости ограничимся случаем одномерных пространственных постоянных солитонов, в которых, однако, проявляются основные особенности свойств солитонов в отрицательных средах.

Распространение солитонов определяется следующим нелинейным уравнением Шредингера относительно огибающей функции электрического поля $E(x, z)$:

$$\frac{\partial E}{\partial z} + \frac{i}{2k_0} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + i\beta_0 |E|^2 E = 0. \quad (1)$$

Полагая $E = A_0 \psi$, $\beta = \beta_0 |A_0|^2$ и в отрицательных средах $k_0 = -\sigma$, получаем следующее уравнение:

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{i}{2\sigma} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + i\beta |\psi|^2 \psi = 0. \quad (2)$$

Ищем решение этого уравнения в виде гауссова пучка

$$\psi = \exp\left(i\gamma z - \frac{x^2}{a^2}\right). \quad (3)$$

При этом из (2) находим

$$\gamma = 0, \frac{1}{a^2} = -\beta\sigma. \quad (4)$$

Следовательно, солитон в форме гауссова пучка может распространяться в нелинейной отрицательной среде при условии $\beta < 0$. А это означает, что в такой среде и нелинейность должна быть отрицательной ($\beta = -\beta_1$, $\beta_1 > 0$). При этом решение уравнения (2) есть функция

$$\psi = \exp\left(-\sigma\beta_1 x^2\right). \quad (5)$$

Полное поле солитона представляется в виде

$$E = E_0 \exp\left(i\sigma z + i\omega t - \sigma\beta_1 x^2\right).$$

Таким образом, как и в обычных средах, поперечный размер солитона определяется его интенсивностью, а именно: чем больше интенсивность ($\beta_1 \sim A_0^2$), тем меньше размер солитона. Фаза же солитона в отрицательной среде (как и должно быть) распространяется в направлении, обратном направлению его энергии.

Литература

1. *Silberberg Y.* // Opt. Lett. 1990. Vol. 15, N 22. P. 1282–1284.
2. *Snyder A. W., Mitchell D. J.* // Science. 1987. Vol. 276. P. 1538–1541.
3. *Rosanov N. N.* // Progr. in Opt. 1996. Vol. 35. P. 1–60.
4. *Гончаренко А. М.* Оптические гауссовы пучки и солитоны. Минск, 2011.
5. *Веселаго В. Г.* // Успехи физ. наук. 1967. Т. 92, вып. 3. С. 517–526.
6. *Шевченко В. В.* // Успехи физ. наук. 2011. Т. 181, вып. 11. С. 1171–1182.

A. M. GONCHARENKO

TO THE THEORY OF SOLITONS IN THE NEGATIVE MEDIA

Summary

The some properties of solitons in negative media are considered.

РЭФЕРАТЫ

УДК 517.956.3

Корзюк В. И., Козловская И. С., Наумовец С. Н. **Классическое решение первой смешанной задачи одномерного волнового уравнения с условиями типа Коши** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2015. № 1. С. 7–21.

В данной работе рассматривается первая смешанная задача для одномерного волнового уравнения с условиями типа Коши второго порядка, для которой доказываются необходимые и достаточные однородные условия согласования, гарантирующие получение классического решения в полуполосе. В аналитическом виде найдено классическое решение одномерного волнового уравнения при наличии условий Дирихле на боковых границах и условий типа Коши на основании полуполосы. Под классическим решением понимается функция, которая определена во всех точках замыкания заданной области и имеет все классические производные, входящие в уравнение и условия задачи. В случае неоднородных условий согласования формулируется корректная постановка задачи с добавлением условий сопряжения, классическое решение которой является кусочно-гладким в соответствующих подобластях полуполосы.

Ил. 1. Библиогр. – 14 назв.

УДК 517.911.5+519.216.2

Васьковский М. М. **Существование слабых решений стохастических дифференциальных уравнений с запаздыванием и стандартным и дробным броуновскими движениями** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2015. № 1. С. 22–34.

В статье рассматриваются стохастические дифференциальные уравнения с запаздыванием и стандартным и дробным броуновскими движениями. Доказаны теоремы существования слабых решений, охватывающие классы стохастических дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами и с вырожденным оператором диффузии.

Библиогр. – 16 назв.

УДК 517.925

Белокурский М. С. **Решение задачи Еругина о существовании нерегулярных решений линейной системы с нулевым средним периодического коэффициента** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2015. № 1. С. 35–42.

Рассматривается линейная система вида

$$\dot{x} = (AP(t) + B)x, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad n \geq 2,$$

где A, B – постоянные $(n \times n)$ -матрицы, $P(t)$ – непрерывная ω -периодическая $(n \times n)$ -матрица с нулевым средним значением. Устанавливаются необходимые и достаточные условия, при которых линейная периодическая система будет иметь сильно нерегулярные периодические решения.

Библиогр. – 11 назв.

УДК 517.2

Крук Ю. С., Дудовская Ю. Е. **Стационарное распределение вероятностей состояний замкнутой сети с неактивными заявками и многорежимными стратегиями обслуживания** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2015. № 1. С. 43–46.

Исследуется стационарное распределение вероятностей состояний замкнутой сети массового обслуживания, приборы в узлах которой могут функционировать в нескольких режимах. Заявки в узлах сети могут быть двух типов: обыкновенные (активные) и временно неактивные. Поступающие в сеть потоки информационных сигналов позволяют заявкам менять свое состояние: из неактивного переходить в такое, когда они могут получить обслуживание, и наоборот.

Библиогр. – 3 назв.

УДК 519.2

Жук Е. Е. **Статистическое отнесение реализаций стационарных временных рядов к классам, определенным в пространстве ковариационных функций** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2015. № 1. С. 47–51.

Рассматривается задача статистического отнесения реализаций стационарных в широком смысле временных рядов к заданным классам. Предлагается использовать решающее правило в пространстве ковариационных функций. В качестве меры эффективности принимаемых решений используется риск (вероятность ошибочного отнесения), который вычислен аналитически в асимптотике растущих длительностей реализаций. Рассмотрен случай двух классов.

Библиогр. – 5 назв.

УДК 532.5.011.12

Каянович С. С. **Разрешимость дифференциальной модели стержневого течения** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2015. № 1. С. 52–59.

Для решения модели стержневого течения пространство (x, t) разбивается на слои плоскостями $t_m = m\tau$, $m = 0, 1, 2, \dots, M$, как это делается в методе Рунге, производная по времени заменяется разностной производной и задача рассматривается в сечениях $\tilde{\Omega}_m$, т. е. при $t = t_m$. Доказывается, что при достаточно малом $\tau > 0$ в каждом сечении $\tilde{\Omega}_m$ существует единственное решение.

Ил. 1. Библиогр. – 17 назв.

УДК 517.977

Лецев А. Е. **К слабым условиям оптимальности второго порядка** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2015. № 1. С. 60–67.

Данная статья ставит своей целью вывод слабых необходимых условий оптимальности второго порядка при менее жестких требованиях по сравнению с известными ранее в литературе. Для доказательства необходимых условий оптимальности применяется метод штрафных функций.

Библиогр. – 19 назв.

УДК 512.567.5

Кулаженко Ю. И., Селькин М. В. **О полуабелевости n -арных групп** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2015. № 1. С. 68–75.

Устанавливаются новые критерии полуабелевости n -арной группы на основании факта самосовмещения произвольной точки (элемента) n -арной группы относительно элементов последовательности, составленной из середин сторон произвольного k -угольника с нечетным k ($k \geq 3$) и одной из вершин этого k -угольника в терминах симметричных точек и векторов n -арных групп.

Библиогр. – 19 назв.

УДК 539.12

Овсюк Е. М., Веко О. В., Редьков В. М. **О моделировании среды со свойствами идеального зеркала по отношению к свету и частицам со спином 1/2** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2015. № 1. С. 76–85.

Геометрия пространства Лобачевского рассматривается как основа для моделирования эффективной среды. В пространстве Лобачевского решены точно уравнения Максвелла в 3-мерном комплексном формализме Майораны – Оппенгеймера, при этом задача эффективно сводится к одному дифференциальному уравнению второго порядка. В контексте квантовой механики такое уравнение описывает движение частицы в потенциальном поле, плавно растущем до бесконечности; частица отражается от этого барьера, не проникая за него. Аналогичная интерпретация применима и в электродинамике. Таким образом, геометрия Лобачевского действует эффективно как распределенное в пространстве идеальное зеркало. Глубина проникновения поля внутрь такой среды определяется частотой электромагнитной волны и параметром кривизны эффективного моделирующего пространства. Влияние используемой геометрии на частицы со спином 1/2 оказывается аналогичным: «среда» действует на фермионы так же, как идеальное зеркало, глубина проникновения в него частиц со спином растет с ростом энергии и уменьшается с увеличением кривизны пространства.

Библиогр. – 4 назв.

530.145;538.915;538.958

Кудряшов В. В., Баран А. В. **Влияние спин-орбитальных взаимодействий Рашбы и Дрессельхауса на состояния электрона в круговых квантовых кольцах** // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2015. № 1. С. 86–91.

В рамках теории возмущений найдены энергетические уровни и волновые функции для электрона в полупроводниковых круговых квантовых кольцах при наличии спин-орбитальных взаимодействий Рашбы и Дрессельхауса с реалистичным аксиально-симметричным удерживающим прямоугольным потенциалом конечной глубины.

Табл. 1. Ил. 3. Библиогр. – 17 назв.

УДК 535:621.373.8;535:530.182:621.372.623

Буй А. А., Дашкевич В. И., Орлович В. А. **Непрерывный диодно накачиваемый Nd:KGdW/КТП-лазер с внутррезонаторным удвоением частоты** // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2015. № 1. С. 92–98.

Создан непрерывный, а также квазинепрерывный Nd:KGd(WO₄)₂/КТП-лазер с продольной диодной накачкой на $\lambda \sim 879$ нм и внутррезонаторным удвоением частоты в трехзеркальном линейном резонаторе. При удвоении частоты более высокие результаты достигнуты с лазерным кристаллом N_g -среза в силу более простого характера его термолинзы. При мощности непрерывной накачки 15,6 Вт мощность второй гармоники, генерируемой на длине волны 533,6 нм, составляет $\sim 0,9$ Вт. В случае квазинепрерывной накачки лазер генерирует с рабочим циклом 10 % и излучает импульсы длительностью 10–20 мс, пиковая мощность которых достигает 2,25 Вт, при этом эффективность оптического преобразования составляет 9 %. В случае Nd:KGd(WO₄)₂-кристалла N_p -среза мгновенная мощность второй гармоники не превышает 2,1 Вт.

Ил. 3. Библиогр. – 24 назв.

УДК 535.3+535.8:535.214

Солоневич С. В., Лепарский В. Е., Мащенко А. Г., Рыжевич А. А. **Метод формирования перестраиваемой световой билловушки** // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2015. № 1. С. 99–105.

Разработан метод формирования оптической ловушки для одновременной манипуляции двумя частицами на основе бипучка света с регулируемым углом между направлениями распространения его парциальных составляющих. Предложена, собрана и опробована экспериментально оптическая схема для реализации метода. Поскольку оптические элементы, входящие в состав схемы, обладают высокой лучевой прочностью, метод пригоден для трансформации достаточно мощного лазерного излучения. Метод позволяет производить преобразование линейно поляризованного излучения с высокой эффективностью, так как потери световой энергии происходят только при отражении на гранях оптических элементов и могут быть снижены до долей процента с помощью нанесения на грани просветляющих покрытий на используемую длину волны излучения. Возможность перераспределения энергии между пучками позволяет более эффективно управлять парой микрочастиц, имеющих различные показатели преломления и размеры. Световые максимумы формируемого двухпучкового светового поля имеют микроскопические размеры, поэтому оно может использоваться не только для управления микро- и наночастицами, но также в высокоразрешающей микроскопии, для неразрушающего оптического контроля толщины покрытий, а также для прецизионной лазерной обработки материалов, в том числе металлов.

Ил. 5. Библиогр. – 2 назв.

УДК 004

Середин Э. Н., Залесский Б. А. **Фильтрация и корреляционная обработка изображений с помощью технологии CUDA** // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2015. № 1. С. 106–116.

Представлены основные концепции и особенности технологии программирования CUDA. Эффективность технологии демонстрируется на задачах обработки изображений. Приводятся результаты сравнительного анализа быстродействия программных реализаций одного и того же алгоритма, выполняемых на процессоре и видеокарте. Показано, что использование технологии CUDA позволяет ускорить вычисления на несколько порядков.

Табл. 5. Ил. 4. Библиогр. – 14 назв.

УДК 681.513.7

Прокопович Г. А. **Адаптивная нейросетевая система управления автономным мобильным роботом на основе метода обучения с учителем в *online* режиме** // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2015. № 1. С. 117–122.

Рассмотрены недостатки архитектур классических искусственных нейронных сетей (ИНС) в задачах интеллектуального управления автономными мобильными роботами. На основе модернизированных гетероассо-

циативных ИНС был разработан адаптивный нейроконтроллер, позволяющий находить причинно-следственные связи в системе «робот–внешняя среда». Нейроконтроллер основан на системе правил и содержит две ИНС, выполняющие две различные функции. Первая реализована в виде блока мотонейронов, в котором содержится алгоритм управления исполнительными системами робота, а вторая предназначена для выявления в потоке сенсорных данных новых образов, которые добавляются в первую ИНС по схеме обучения с учителем.

Ил. 4. Библиогр. – 11 назв.

УДК 530.1+535.3

Гончаренко А. М. **К теории солитонов в отрицательных средах** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2015. № 1. С. 123–124.

Рассмотрены особенности распространения солитонов в отрицательных средах. Показано, что размер солитона обратно пропорционален его интенсивности.

Библиогр. – 6 назв.