

ВЕСЦІ

НАЦЫЯНАЛЬНАЯ АКАДЭМІЯ НАВУК БЕЛАРУСІ

СЕРИЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК 2016 № 3

ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ

СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК 2016 № 3

ЗАСНАВАЛЬНІК – НАЦЫЯНАЛЬНАЯ АКАДЭМІЯ НАВУК БЕЛАРУСІ

Часопіс выдаецца са студзеня 1965 г.

Выходзіць чатыры разы ў год

ЗМЕСТ

МАТЭМАТЫКА

Янчевский В. И. О некоторых свойствах групп Уайтхеда и их унитарных аналогов алгебр Адзумаи над полями функций p -адических кривых и специальными гензелевыми полями	5
Деменчук А. К. Задача управления асинхронным спектром линейных квазипериодических систем с блочным представлением усреднения матрицы коэффициентов	12
Корзюк В. И., Нгуен Ван Винь. Классическое решение задачи с интегральным условием для одномерного биволнового уравнения	16
Картынный Ю. А. Алгоритмические свойства связанных окрестностных множеств в графах	30
Харин А. Ю., Тон Тхат Ту. Последовательная статистическая проверка гипотез о параметрах временных рядов с трендом при пропусках наблюдений	38
Чумаков Ф. В., Василец С. И. Решение одного вида интегрального уравнения первого рода с логарифмическим ядром и смешанными коэффициентами	47
Ломовцев Ф. Е., Юрчук Н. И. Решение начально-краевой задачи для нестрого гиперболического уравнения при смешанных граничных условиях в четверти плоскости	51
Кирилюк Д. И. Критерии самосовмещения и центры многоугольников n -арных групп	58

ФІЗІКА

Курочкин Ю. А. Теоретико-групповая интерпретация орисфер трехмерного расширенного пространства Лобачевского	66
Русак Ю. А., Веко О. В., Овсюк Е. М. Асимптотический анализ уравнений для спинорной частицы в поле Шварцшильда	71

Покаташкин Г. С., Кокоулина Е. С., Шуляковский Р. Г. Моделирование аномального рождения мягких фотонов на Нуклотроне	77
Русак А. А., Дашкевич В. И., Орлович В. А., Шкадаревич А. П. Повышение выходной энергии ВКР-лазера путем повторного использования истощенной накачки	82
Шапошников В. Л., Кривошеева А. В., Борисенко В. Е. Расчет электронных энергетических зон и оптических параметров сульфидов олова	89
Батище С. А., Бушук С. Б., Пилипенко В. А., Татур Г. А., Жигулин Д. В. Образование частиц «черного» золота при лазерной абляции наносекундным излучением четвертой гармоники YAG:ND-лазера	96

ИНФАРМАТЫКА

Левин Г. М., Розин Б. М., Долгий А. Б. Оптимизация выпуска и интенсивностей обработки группы деталей при нестационарном спросе	102
Поттосин Ю. В., Поттосина С. А. Поиск разреза графа в решении некоторых задач логического проектирования	110

ВУЧОНЫЯ БЕЛАРУСІ

Абламейко Сергей Владимирович (К 60-летию со дня рождения)	119
Гайшун Иван Васильевич (К 70-летию со дня рождения)	121
Кириллова Фаина Михайловна (К юбилею)	124
Правила для авторов	126

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ 2016 № 3

Серия физико-математических наук

На русском, белорусском и английском языках

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь,
свидетельство о регистрации № 392 от 18.05.2009

Компьютерная верстка *В. Л. Смольской*

Здадзена ў набор 24.08.2016. Падпісана да друку 21.09.2016. Выхад у свет 29.09.2016. Фармац 60×84¹/₈.

Папера афсетная. Друк лічбавы. Ум. друк. арк. 14,88. Ул.-выд. арк. 16,4. Тыраж 60 экз. Заказ 188.

Кошт нумару: індывідуальная падпіска – 10,28 руб.; ведамасная падпіска – 25,21 руб.

Выдавец і паліграфічнае выкананне:

Рэспубліканскае ўнітарнае прадпрыемства «Выдавецкі дом «Беларуская навука». Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца, вытворцы, распаўсюджвальніка друкаваных выданняў № 1/18 ад 02.08.2013.

ЛП 02330/455 ад 30.12.2013. Вул. Ф. Скарыны, 40, 220141, г. Мінск.

© Выдавецкі дом «Беларуская навука».
Весці НАН Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук, 2016

PROCEEDINGS OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF BELARUS

PHYSIC AND MATHEMATICS SERIES 2016 N 3

FOUNDED IS THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF BELARUS

The Journal has been published since January 1965

Issued four times a year

CONTENTS

MATHEMATICS

Yanchevskii V. I. Some properties of Whitehead groups and their unitary analogs of Azumaya algebras over function fields of the p -adic curves and over special Henselian ones	5
Demenchuk A. K. Control problem of an asynchronous spectrum of quasiperiodic linear systems with a block representation of average coefficient matrix	12
Korzyuk V. I., Nguyen Van Vinh. Classical solution of a problem with an integral condition for the one-dimensional biwave equation	16
Kartynnik Y. A. Algorithmic properties of connected neighbourhood sets in graphs	30
Kharin A. Yu., Ton That Tu. Sequential statistical hypotheses testing on parameters of time series with a trend under missing values	38
Chymakov F. V., Vasilets S. I. Solution of the first-kind one-type integral equation with the logarithmic kernel and mixed coefficients	47
Lomovtsev F. E., Yurchuk N. I. Initial boundary value problem for the non-strictly hyperbolic equation with mixed boundary conditions in a quadrant	51
Kirilyuk D. I. Self-returning criteria and centroids of polygons of n -ary groups	58

PHYSICS

Kurochkin Yu. A. Group-theoretical interpretation of the horospheres of the three-dimensional extended Lobachevsky space	66
Rusak Y. A., Veko O. V., Ovsyuk E. M. Asymptotical analysis of the equations for the spinor particle in the Schwarzschild field	71
Pokatashkin G. S., Kokoulina E. S., Shulyakovsky R. G. Simulation of the abnormal birth of soft photons on the Nuclotron	77
Rusak A. A., Dashkevich U. I., Orlovich, V. A., Shkadarevich A. P. Increasing the output energy of the Raman laser by a repeated use of a depleted pump	82
Shaposhnikov V. L., Krivosheeva A. V., Borisenko V. E. Calculation of electron energy bands and optical parameters of tin sulfides	89
Batishche S. A., Bushuk S. B., Pilipenko V. A., Tatur H. A., Zhygulin D. V. Formation of "black" gold particles at nanosecond YAG:ND laser forth harmonic (266 nm) ablation	96

INFORMATICS

Levin G. M. , Rozin B. M., Dolgui A. B. Optimizing the output and the intensities of processing a batch of parts under non-stationary demand	102
Pottosin Yu. V., Pottosina S. A. Search of a cut in a graph used in logical design	110

SCIENTISTS OF BELARUS

Ablameiko Sergey Vladimirovich (To the 60 th Anniversary)	119
Gaishun Ivan Vasilievich (To the 70 th Anniversary)	121
Kirillova Faina Mikhailovna (To the Anniversary)	124
Instructions for Authors	126

МАТЭМАТЫКА

УДК 512.74, 512.552.13

В. И. ЯНЧЕВСКИЙ

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ГРУПП УАЙТХЕДА И ИХ УНИТАРНЫХ АНАЛОГОВ АЛГЕБР АДЗУМАЙИ НАД ПОЛЯМИ ФУНКЦИЙ p -АДИЧЕСКИХ КРИВЫХ И СПЕЦИАЛЬНЫМИ ГЕНЗЕЛЕВЫМИ ПОЛЯМИ

*Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь,
e-mail: yanch@im.bas-net.by*

Описываются группы приведенных и приведенных унитарных норм для слабо разветвленных гензелевых алгебр с делением. Устанавливаются важные свойства приведенных и приведенных унитарных групп Уайтхеда алгебр с делением над полями функций p -адических кривых при пополнении их относительно специальных дискретных нормирований, а также тел так называемых некоммутативных p -адических рациональных функций.

Ключевые слова: группы Уайтхеда алгебр с делением, приведенные группы Уайтхеда алгебр с делением, гензелевы поля, приведенные нормы алгебр Адзумайи над полями, унитарные инволюции алгебр с делением, приведенные унитарные нормы центральных простых алгебр с инволюциями.

V. I. YANCHEVSKIĬ

SOME PROPERTIES OF WHITEHEAD GROUPS AND THEIR UNITARY ANALOGS OF AZUMAYA ALGEBRAS OVER FUNCTION FIELDS OF THE p -ADIC CURVES AND OVER SPECIAL HENSELIAN ONES

*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus,
e-mail: yanch@im.bas-net.by*

The groups of reduced and reduced unitary norms of tamely ramified Henselian division algebras are described. Important properties of reduced and reduced unitary Whitehead groups of division algebras over function fields of p -adic curves after extension scalars to their completions with respect to special discrete valuations and of skew fields of the so-called non-commutative p -adic rational functions are obtained.

Keywords: Whitehead groups of division algebras, reduced Whitehead groups of division algebras, Henselian fields, reduced norms of Azumaya algebras of fields, unitary involutions of division algebras, reduced unitary norms of central simple algebras with involutions.

Пусть F – поле, A – алгебра Адзумайи центральная над F . В теории линейных алгебраических групп классического типа важную роль играют следующие две группы: группа Уайтхеда алгебры A и в случае, когда A обладает унитарной инволюцией, анизотропная унитарная группа Уайтхеда. Ниже для простоты мы предполагаем, что A – алгебра с делением. Нам потребуются следующие определения.

Определение 1. Для всякой центральной F -алгебры Адзумайи с делением A определено отображение приведенной нормы $\text{Nrd}_A: A \rightarrow F$, которое при ограничении на мультипликативные группы A^* алгебры A и F^* поля F превращается в гомоморфизм этих групп.

Определение 2. Для всякой центральной алгебры с делением A над гензелевым полем F через M_A ниже обозначается идеал нормирования, продолжающего нормирование на F , через U_A – группа обратимых элементов кольца нормирования, а через \bar{A} – алгебра вычетов относительно этого нормирования, и для любого a из кольца нормирования A \bar{a} обозначает его естественный образ в \bar{A} .

Определение 3. Группой Уайтхеда $K_1(A)$ алгебры A называется фактор-группа

$$K_1(A) = A^* / [A^*, A^*],$$

где $A^* = A \setminus \{0\}$, $[A^*, A^*]$ – коммутант группы A^* . Приведенная группа Уайтхеда $SK_1(A)$ алгебры A определяется как фактор-группа

$$SK_1(A) = SL_1(A) / [A^*, A^*],$$

где $SL_1(A)$ – ядро гомоморфизма приведенной нормы $\text{Nrd}_A: A^* \rightarrow F^*$ (здесь $F^* = F \setminus \{0\}$).

Определение 4. Для алгебры A , обладающей инволюцией τ с нетривиальным ограничением на F , анизотропной унитарной группой Уайтхеда $UK_1(A, \tau)$ называется фактор-группа

$$U(A, \tau) / [U(A, \tau), U(A, \tau)],$$

здесь $U(A, \tau) = \{a \in A^* \mid a a^\tau = 1\}$ – унитарная группа для пары (A, τ) , а $[U(A, \tau), U(A, \tau)]$ – коммутант группы $U(A, \tau)$. Приведенная анизотропная унитарная группа Уайтхеда $SUK_1^{an}(A, \tau)$ определяется как фактор-группа

$$SU(A, \tau) / [U(A, \tau), U(A, \tau)],$$

где $SU(A, \tau) = SL_1(A) \cap U(A, \tau)$.

В обоих случаях имеются канонические точные последовательности:

$$\begin{aligned} 1 \rightarrow SK_1(A) \rightarrow K_1(A) \rightarrow \text{Nrd}_A(A^*) \rightarrow 1, \\ 1 \rightarrow SUK_1^{an}(A, \tau) \rightarrow UK_1(A, \tau) \rightarrow \text{Nrd}_A(U(A, \tau)) \rightarrow 1. \end{aligned}$$

Из этого следует, что изучение групп Уайтхеда $K_1(A)$ и $UK_1(A, \tau)$ сводится к изучению групп $SK_1(A)$, $SUK_1^{an}(A, \tau)$ и групп приведенных норм $\text{Nrd}_A(A^*)$ и приведенных унитарных норм $\text{Nrd}_A(U(A, \tau))$.

Нашей целью является описание специальных свойств вышеупомянутых групп для двух классов алгебр A : алгебр с делением над гензелевыми полями F и тел так называемых некоммутативных рациональных функций.

Остановимся вначале на описании групп приведенных норм. В этой статье мы рассмотрим случай слабо разветвленных центральных над гензелевыми полями F -алгебр с делением. Предварительно заметим, что описание групп приведенных норм для алгебр A , центральных над произвольным полем F , немедленно сводится к соответствующей задаче для алгебр примарных индексов ввиду следующего утверждения из [1].

Предложение. Пусть $A = A_1 \otimes_F A_2 \otimes_F \dots \otimes_F A_r$, где A_i – алгебры Адзумаи взаимно простых примарных индексов. Тогда

$$\text{Nrd}_A(A^*) = \prod_{i=1}^r \text{Nrd}_{A_i}(A_i^*),$$

(здесь и далее R^* обозначает мультипликативную группу кольца R).

Кроме того, хорошо известно, что для полной матричной алгебры $M_n(D)$ степени n над алгеброй с делением D имеет место совпадение групп $\text{Nrd}(M_n(D))$ и $\text{Nrd}(D)$, поэтому ниже мы будем предполагать всегда A алгеброй с делением примарного индекса.

Переходя к рассмотрению алгебр с делением над гензелевыми полями, приведем вначале необходимые нам в дальнейшем факты о слабо разветвленных алгебрах с делением центральных над гензелевыми полями F и их приведенных нормах.

Л е м м а. Пусть A – алгебра с делением, центральная над гензелевым полем F с полем вычетов \bar{F} , примарного индекса взаимно простого с $\text{char } \bar{F}$, если $\text{char } \bar{F}$ положительна. Тогда A слабо разветвлена над F , и для всякого обратимого элемента a кольца нормирования алгебры A имеет место следующее соотношение:

$$\overline{\text{Nrd}_A(a)} = N_{Z(\bar{A})/\bar{F}}(\text{Nrd}_{\bar{A}}(\bar{a})). \quad (1)$$

Доказательство. Сначала покажем, что A слабо разветвлена над F . Напомним, что для алгебр с делением, центральных над гензелевыми полями, имеет место формула Островского – Драксла:

$$[A:F] = q^k [\bar{A}:\bar{F}][\Gamma_A:\Gamma_F],$$

где k – неотрицательное целое число, $q^k = (\text{char } \bar{F})^k$, если $\text{char } \bar{F} > 0$, и $q^k = 1$ в противном случае, Γ_A, Γ_F – группы значений алгебры A и поля F соответственно. Нетрудно видеть, что ввиду условий леммы q^k в последней формуле всегда равно 1, поэтому алгебра A бездефектна над F и $Z(\bar{A})/\bar{F}$ – абелево расширение, где $Z(\bar{A})$ – центр алгебры вычетов \bar{A} алгебры A . Поэтому алгебра A слабо разветвлена над F и $[Z(\bar{A}):\bar{F}]^2 = [\Gamma_A:\Gamma_F]$. Следовательно, $\text{ind } A = \text{ind } \bar{A} [Z(\bar{A}):\bar{F}] \delta$. Кроме того, известно, что для всякого обратимого элемента a кольца нормирования алгебры A справедлива следующая формула:

$$\overline{\text{Nrd}}_A(a) = N_{Z(\bar{A})/\bar{F}}(\text{Nrd}_{\bar{A}}(\bar{a}))^{\delta_A},$$

где $\delta_A = \text{ind } A / (\text{ind } \bar{A} [Z(\bar{A}):\bar{F}])$. Далее везде $\delta_A = 1$, поэтому (1) имеет место.

В абелевой фактор-группе Γ_A/Γ_F зафиксируем ее разложение в прямую сумму циклических групп: $\Gamma_A/\Gamma_F = \langle \gamma_1 + \Gamma_K \rangle \oplus \dots \oplus \langle \gamma_r + \Gamma_K \rangle$, и пусть $\Gamma_1, \dots, \Gamma_r$ – элементы из A такие, что $\nu(\Gamma_i) = \gamma_i$, $i = 1, \dots, r$, а $\nu(\Gamma_i)$ – значение нормирования в алгебре A элемента Γ_i . В этих обозначениях справедлива следующая

Теорема 1. Пусть A – алгебра с делением, центральная над гензелевым полем F с полем вычетов \bar{F} , примарного индекса взаимно простого с $\text{char } \bar{F}$. Тогда группа приведенных норм алгебры A порождается следующими элементами: $\text{Nrd}_A(\Gamma_1), \dots, \text{Nrd}_A(\Gamma_r)$, подгруппой $1+M_F$, где M_F – максимальный идеал кольца нормирования поля F , и группой $N_{Z/F}(\text{Nrd}_{C_A(Z)}(C_A(Z)^*))$, где $\text{Nrd}_{C_A(Z)}(C_A(Z)^*)$ – группа приведенных норм алгебры $C_A(Z)$ – централизатора в A неразветвленного расширения поля F с полем вычетов $Z(\bar{A})$, а $N_{Z/F}(\text{Nrd}_{C_A(Z)}(C_A(Z)^*))$ – образ группы $\text{Nrd}_{C_A(Z)}(C_A(Z)^*)$ при гомоморфизме $N_{Z/F}: Z^* \rightarrow F^*$.

Доказательство. Всякий элемент a из A имеет вид

$$a = \Gamma_1^{\alpha_1} \dots \Gamma_r^{\alpha_r} u_a,$$

где u_a – подходящий обратимый элемент кольца нормирования алгебры A . Теперь уже нетрудно видеть, что нам достаточно описать приведенные нормы для элементов u_a . Заметим, что элемент u_a может быть представлен в виде $z_a t$, где $z_a \in C_A(Z)$, а $t \in (1+M_A)$. Нетрудно теперь видеть, ввиду $\overline{C_A(Z)} = \bar{A}$ и $\text{Nrd}_A(1+M_A) = 1+M_F$, что теорема верна.

Пример 1. Пусть k – глобальное поле положительной характеристики (т. е. поле алгебраических функций от переменной x с коэффициентами в конечном поле) и F – поле формальных степенных рядов от переменной y с коэффициентами в k . Поле F – гензелево относительно дискретного канонического нормирования, связанного с y , и имеет \bar{F} полем вычетов. Пусть алгебра A такая же, как в предыдущей теореме. Поскольку Γ_A/Γ_F – циклическая группа, обозначим через Γ – элемент из A такой, что $\nu(\Gamma) + \Gamma_F$ – образующая Γ_A/Γ_F . Тогда произвольный элемент $a \in A^*$ имеет вид $\Gamma^\alpha u_a$, где u_a – единица кольца нормирования алгебры A . По модулю группы $1+M_A$ можно считать, что $u_a \in C_A(Z)^*$. Алгебра $C_A(Z)$ неразветвлена над Z и потому, ввиду глобальности $Z(\bar{A})$, группа $\text{Nrd}_{C_A(Z)}(A^*)$ может быть описана как группа, порожденная группой Z^* и группой $1+M_Z$, что влечет: группа $\text{Nrd}_A(A^*)$ порождается группой $N_{Z/F}(Z^*)$ и группой $1+M_F$.

В случае коммутативного \bar{A} получаем в качестве следствия следующее утверждение, дающее более явное описание группы приведенных норм алгебры A .

Теорема 2. Пусть алгебра A такая же, как в предыдущей теореме, и \bar{A} – поле. Тогда группа приведенных норм алгебры A порождается следующими элементами $\text{Nrd}_A(\Gamma_1), \dots, \text{Nrd}_A(\Gamma_r)$

и подгруппами $1+M_F$, где M_F – максимальный идеал кольца нормирования поля F , $N_{Z/F}(Z^*)$, где $N_{Z/F}(Z^*)$ – группа ненулевых норм расширения Z/F , Z – неразветвленное расширение над F с полем вычетов $Z(\bar{A})$.

Действительно, в этом случае $\bar{A} = \bar{Z}$.

Пример 2. Пусть k – локальное числовое поле. Положим $F = k\langle x \rangle$ – поле формальных степенных рядов от x с коэффициентами в k . Пусть $f \in F$ – формальный степенной ряд вида $\sum_{i=\beta}^{+\infty} k_i x^i$, где $k_i \in k$. Определим на поле F нормирование v следующим образом:

$$v(f) = (v_p(k_\beta), \beta) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},$$

где v_p – p -адическое нормирование поля k , $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ – линейно упорядоченная группа с лексикографическим порядком, индуцированным естественным упорядочением на группе \mathbb{Z} . Тогда всякая центральная F -алгебра с делением A взаимно простого с p индекса удовлетворяет условиям предыдущей теоремы, откуда следует простое описание группы ее приведенных норм.

Рассмотрим теперь группы $\text{Nrd}_A(U(A, \tau))$. Для алгебры с делением A , центральной над гензелевым полем F с унитарной инволюцией τ , повсюду ниже через K будем обозначать поле неподвижных относительно τ элементов из F . Мы также будем предполагать, что Z – τ -инвариантное расширение F (известно, что такое Z всегда существует). Для описания группы $\text{Nrd}_A(U(A, \tau))$ напомним следующие факты об алгебрах с инволюциями и приведенных унитарных нормах. Для простоты ограничимся алгебрами нечетного индекса. В этом случае имеют место следующие утверждения.

Теорема 3. Пусть A – алгебра с делением нечетного индекса, центральная над гензелевым полем F с унитарной инволюцией τ . Тогда расширение F/K не разветвлено.

Доказательство. Рассмотрим вначале случай, когда алгебра вычетов \bar{A} – не поле. Предположим, что расширение F/K вполне разветвлено. Тогда редукция $\bar{\tau}$ инволюции τ на $Z(\bar{A})$ тождественна. В самом деле, $Z(\bar{A})/\bar{K}$ – расширение нечетной степени и $\bar{\tau} - \bar{K}$ -автоморфизм порядка, не превосходящего 2. Ввиду некоммутативности алгебры \bar{A} , $\bar{\tau}$ – инволюция первого рода на \bar{A} , чего не может быть ввиду нечетности степени $\bar{A}/Z(\bar{A})$. Случай коммутативного \bar{A} также не сложен и использует критерий существования унитарных инволюций на циклических алгебрах.

Описание приведенных унитарных норм над произвольным полем F дается следующим утверждением.

Теорема 4. Пусть A – алгебра с делением нечетного индекса, центральная над гензелевым полем F с унитарной инволюцией τ . Тогда

$$\text{Nrd}_A(U(A, \tau)) = \text{Nrd}_A(A^*) \cap SL(1, F/K),$$

где $SL(1, F/K) = \{z \in F \mid N_{F/K}(z) = 1\}$.

Повсюду ниже для гензелевых полей F будем предполагать нечетность характеристики \bar{F} .

По аналогии с теоремой 1 в случае гензелевых полей F получаем следующее описание группы приведенных унитарных норм.

Теорема 5. Пусть A – центральная над F алгебра с делением примарного нечетного индекса взаимно простого с характеристикой поля \bar{F} и с унитарной инволюцией τ . Тогда в обозначениях теоремы 1 группа приведенных унитарных норм $\text{Nrd}_A(U(A, \tau))$ совпадает с группой $N_{Z/F}(\text{Nrd}_{C_A(Z)}(C_A(Z^*))) \cap SL(1, F/K)$.

Доказательство. Ввиду теоремы 4 $\text{Nrd}_A(U(A, \tau)) = \text{Nrd}_A(A^*) \cap SL(1, F/K)$. Заметим, что

$$\text{Nrd}_A(A^*) \cap SL(1, F/K) = \text{Nrd}_A(A^*) \cap U_F \cap SL(1, F/K) = \text{Nrd}_A(U_A^*) \cap SL(1, F/K)$$

и

$$N_{Z/F}(\text{Nrd}_{C_A(Z)}(1 + M_{C_A(Z)})) = 1 + M_F. \quad (*)$$

С учетом равенства (*) и поскольку $\overline{\text{Nrd}}_A(U_A^*) = N_{\overline{Z}/\overline{F}}\left(\overline{\text{Nrd}}_{C_A(\overline{Z})}(\overline{C_A(\overline{Z})}^*)\right)$ и $\overline{SL(1, F/K)} = SL(1, \overline{F}/\overline{K})$, то

$$\overline{\text{Nrd}}_A(U_A^*) \cap \overline{SL(1, F/K)} = N_{\overline{Z}/\overline{F}}\left(\overline{\text{Nrd}}_{C_A(\overline{Z})}(\overline{C_A(\overline{Z})}^*)\right) \cap SL(1, \overline{F}/\overline{K}).$$

Пусть $w \in \text{Nrd}_A(U_A^*) \cap SL(1, F/K)$. Тогда $\overline{w} \in N_{\overline{Z}/\overline{F}}\left(\overline{\text{Nrd}}_{C_A(\overline{Z})}(\overline{C_A(\overline{Z})}^*)\right) \cap SL(1, \overline{F}/\overline{K})$. Рассмотрим прообраз v элемента \overline{w} в $SL(1, F/K)$. Тогда $v = N_{Z/F}\left(\text{Nrd}_{C_A(Z)}(c)\right)(1+m_F)$, где $c \in C_A(Z)^*$, а $m_F \in M_F$. Ввиду равенства (*) $v \in N_{Z/F}\left(\text{Nrd}_{C_A(Z)}\left(C_A(Z^*)\right)\right) \cap SL(1, F/K)$. Таким образом, $w = v(1+z_F)$ для подходящего $z_F \in M_F$. Из последнего равенства следует, что $(1+z_F) \in SL(1, F/K)$, и снова ввиду равенства (*) получаем, что

$$w \in N_{Z/F}\left(\text{Nrd}_{C_A(Z)}\left(C_A(Z^*)\right)\right) \cap SL(1, F/K).$$

Включение $N_{Z/F}\left(\text{Nrd}_{C_A(Z)}\left(C_A(Z^*)\right)\right) \cap SL(1, F/K) \subseteq \text{Nrd}_A(A^*) \cap SL(1, F/K)$ очевидно, что завершает доказательство теоремы.

Теорема 6. Пусть алгебра A такая же, как в предыдущей теореме, и \bar{A} – поле. Тогда в обозначениях теоремы 1 группа приведенных унитарных норм $\text{Nrd}_A(U(A, \tau))$ совпадает с группой $N_{Z/F}(Z^*) \cap SL(1, F/K)$.

Пример 3. Обратимся к примеру 2. В обозначениях этого примера пусть F обладает неразветвленным квадратичным подрасширением K . В силу теоремы 6 для всякой унитарной F/K -инволюции τ на алгебре A группа приведенных унитарных норм $\text{Nrd}_A(U(A, \tau))$ совпадает с группой $N_{Z/F}(Z^*) \cap SL(1, F/K)$. Как отмечалось выше, достаточно вычислить группу $N_{Z/F}(U_Z) \cap SL(1, F/K)$. Ввиду очевидного равенства $N_{Z/F}(U_Z) = U_F$ описание последнего пересечения сводится к вычислению группы $SL(1, F/K)$, которая, в свою очередь, вычисляется с помощью перехода к редукции. Действительно, конечность \overline{F} и \overline{K} влечет сюръективность отображения $N_{\overline{F}/\overline{K}}$. Ясно тогда, что $SL(1, \overline{F}/\overline{K})$ — циклическая группа, изоморфная фактор-группе $\overline{F}^*/\overline{K}^*$. Заметим в заключение, что гомоморфизм $SL(1, F/K)$ в $SL(1, \overline{F}/\overline{K})$, индуцированный гомоморфизмом редукции, сюръективен. С учетом того факта, что ядро этого гомоморфизма совпадает с $(1+M_F)^{r-1}$, получаем из предыдущего полное описание группы $\text{Nrd}_A(U(A, \tau))$.

Пример 4. Возвращаясь к примеру 1, предположим дополнительно, что на алгебре A имеется унитарная инволюция τ . Ввиду доказательства теоремы 5, группа приведенных унитарных норм $\text{Nrd}_A(U(A, \tau))$ совпадает с

$$N_{Z/F}\left(\text{Nrd}_{C_A(Z)}\left(U_{C_A(Z^*)}\right)\right) \cap SL(1, F/K).$$

Переход к вычетах с учетом формул $N_{Z/F}\left(\text{Nrd}_{C_A(Z)}\left(U_{C_A(Z^*)}\right)\right) = N_{\overline{Z}/\overline{F}}(\overline{Z}^*)$ и $\overline{SL(1, F/K)} = SL(1, \overline{F}/\overline{K})$ влечет

$$\overline{N_{Z/F}\left(\text{Nrd}_{C_A(Z)}\left(U_{C_A(Z^*)}\right)\right) \cap SL(1, F/K)} = N_{\overline{Z}/\overline{F}}(\overline{Z}^*) \cap SL(1, \overline{F}/\overline{K}).$$

Далее, рассуждая как в доказательстве теоремы 5 и примера 3 и используя глобальную теорию полей классов, получаем описание группы $SL(1, F/K)$ и группы $N_{Z/F}(Z^*)$, что в силу теоремы 5 приводит к окончательному описанию группы приведенных унитарных норм.

Замечание 1. Отметим, что центры алгебр из примеров 1–4 являются пополнениями полей функций p -адических кривых относительно подходящих нормирований.

Обратимся теперь к свойствам приведенных групп Уайтхеда над полями функций p -адических кривых.

Пусть K – конечное расширение поля p -адических чисел, C – K -определенная гладкая неприводимая проективная алгебраическая кривая, $F = K(C)$ – ее поле K -рациональных функций, A – конечномерная центральная F -алгебра Адзумаи.

Хорошо известно, что в зависимости от арифметических свойств поля F группа $SK_1(A)$ может быть как тривиальной, так и нетривиальной. Следующая гипотеза А. Суслина (долгое время остававшаяся недоказанной) утверждает, что для подходящего регулярного расширения поля F , сохраняющего индекс алгебры A , группа $SK_1(A)$ нетривиальна, если этот индекс не свободен от квадратов. Справедливость этой гипотезы подчеркивает важность установления тривиальности или нетривиальности групп $SK_1(A)$.

Для формулировки дальнейших результатов нам потребуются следующие обозначения.

Пусть S – множество дискретных нормирований поля F , тривиальных на K . Для каждого такого нормирования $v \in S$ через F_v обозначим пополнение поля F относительно v . Рассмотрим естественный гомоморфизм $SK_1(A) \rightarrow SK_1(A \otimes_F F_v)$, индуцируемый естественным вложением алгебры A в алгебру $A \otimes_F F_v$. Основное наблюдение, связанное с этим гомоморфизмом, состоит в том, что его ядро совпадает с группой $SK_1(A)$, что немедленно вытекает из следующего утверждения.

Теорема 7. *В вышеприведенных обозначениях группа $SK_1(A \otimes_F F_v)$ тривиальна для любого $v \in S$.*

Доказательство. Пусть $v \in S$. Тогда F_v – пополнение поля F и имеет локальное числовое поле в качестве поля вычетов. В этом случае для алгебры $A \otimes_F F_v$ имеются следующие возможности:

(i) $A \otimes_F F_v$ не разветвлена над F_v . В этом случае, как известно, группа $SK_1(A \otimes_F F_v)$ изоморфна приведенной группе Уайтхеда алгебры вычетов, которая в свою очередь тривиальна ввиду результата Т. Накаямы и Ю. Мацусимы [2];

(ii) алгебра $A \otimes_F F_v$ ветвится над F_v , тогда имеем следующую точную последовательность:

$$1 \rightarrow SK_1(\overline{A \otimes_F F_v}) / N \rightarrow SK_1(A \otimes_F F_v) \rightarrow H^{-1}(G, \text{Nrd}(\overline{A \otimes_F F_v})) \rightarrow 1,$$

где N – некоторая нормальная подгруппа в $SK_1(\overline{A \otimes_F F_v})$, а группа G циклична.

Заметим, что второй член точной последовательности тривиален, поскольку алгебра $\overline{A \otimes_F F_v}$ является алгеброй над локально числовым полем, и потому группа $SK_1(\overline{A \otimes_F F_v})$ тривиальна [3]. Кроме того, как известно, $\text{Nrd}(\overline{A \otimes_F F_v}^*) = \overline{F_v}^*$, и потому группа $H^{-1}(G, \text{Nrd}(\overline{A \otimes_F F_v}))$ тривиальна ввиду теоремы 90 Гильберта. Теорема доказана.

Другим основным результатом о группах $SK_1(A)$ является установление их тривиальности в случае тел, так называемых p -адических некоммутативных рациональных функций.

Приведем определение, необходимое для формулировки этого результата.

Пусть B – алгебра с делением с автоморфизмом ν конечного внешнего порядка. В этом случае, как известно, определено кольцо многочленов $B[x, \nu]$ от переменной x относительно ν с коэффициентами в B . Рассмотрим его тело частных $B(x, \nu)$ (см., напр., [3]).

Теорема 8. *Пусть B – конечномерная алгебра с делением над p -адическим полем. Тогда группа $SK_1(B(x, \nu))$ тривиальна.*

Замечание 2. На самом деле имеет место более общий результат, связанный с телами некоммутативных рациональных функций с коэффициентами в алгебрах с делением, центры которых – C_2^0 -поля.

Определение 5 (см. [4]). Поле K называется C_2^0 -полем, если для его любого конечного расширения L и центральной L -алгебры с делением B отображение $\text{Nrd}: B \rightarrow L$ сюръективно.

Справедлива следующая

Теорема 9. *Пусть B – конечномерная алгебра с делением над C_2^0 -полем. Тогда группа $SK_1(B(x, \nu))$ тривиальна.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 2 с учетом тривиальности приведенных групп Уайтхеда алгебр над C_2^0 -полями и сюръективности отображения приведенной нормы для алгебры B .

В заключение остановимся кратко на некоторых свойствах групп $SUK_1^{an}(A, \tau)$. Одной из главных задач, связанной с этими группами, является задача их поведения при расширениях скаляров таких, что расширенные алгебры снова являются алгебрами с унитарными инволюциями. Применительно к нашему случаю алгебр Адзумаи над полями функций p -адических кривых с унитарными инволюциями эта задача может быть сформулирована следующим образом.

Задана алгебра Адзумаи A с делением над полем F функций p -адической кривой с унитарной инволюцией τ . Установить существование регулярного расширения R поля F такого, что алгебра $A \otimes_F R$ является алгеброй с делением, а инволюция τ продлевается до инволюции алгебры $A \otimes_F R$ и алгебра $A \otimes_F R$ циклична.

На самом деле, решение этой задачи немедленно вытекает из решения более общей задачи, рассматривавшейся в [5].

Теорема 10. Пусть A , F и τ такие, как и выше. Тогда существует регулярное расширение поля R/F , сохраняющее индексы центральных простых F -алгебр таких, что $A \otimes_F R$ – циклична и обладает унитарной инволюцией $\tilde{\tau}$, продолжающей τ .

Расширение скаляров, возникающее в последней теореме, индуцирует естественный гомоморфизм: $SUK_1^{an}(A, \tau) \rightarrow SUK_1^{an}(A \otimes_F R, \tilde{\tau})$.

Значение этого результата становится понятным, если учесть, что R является подполем конечно порожденного чисто трансцендентного расширения поля F .

Таким образом, нами получены описания групп приведенных и приведенных унитарных норм для алгебр Адзумаи над гензелевыми полями (в частности, над пополнениями полей функций p -адических кривых), а также установлены специальные свойства о приведенных и приведенных унитарных группах Уайтхеда над полями функций p -адических кривых.

В заключение автор выражает благодарность А. В. Прокопчуку и А. А. Рыжкову за полезные обсуждения результатов работы.

Список использованной литературы

1. Янчевский, В. И. Приведенные нормы простых алгебр над функциональными полями / В. И. Янчевский // Тр. МИАН СССР. – 1990. – Т. 183. – С. 215–222.
2. Nakayama, T. Über die multiplikative Gruppe einer p -adischen Divisionsalgebra. / T. Nakayama, Y. Matsushima // Proc. Imper. Acad. – 1943. – Vol. 19. – P. 622–628.
3. Платонов, В. П. SK_1 для тел некоммутативных рациональных функций / В. П. Платонов, В. И. Янчевский // Докл. АН СССР. – 1979. – Т. 249, № 5. – С. 1064–1068.
4. Янчевский, В. И. Коммутанты простых алгебр с сюръективной приведенной нормой / В. И. Янчевский // Докл. АН СССР. – 1975. – Т. 221, № 5. – С. 1056–1058.
5. Rehmman, U. Prescribed behavior of central simple algebras after scalar extension / U. Rehmman, S. V. Tikhonov, V. I. Yanchevskii // J. of Algebra. – 2012. – Vol. 351. – P. 279–293.

Поступила в редакцию 31.03.2016

УДК 517.925:517.977

А. К. ДЕМЕНЧУК

**ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ АСИНХРОННЫМ СПЕКТРОМ ЛИНЕЙНЫХ
КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ С БЛОЧНЫМ ПРЕДСТАВЛЕНИЕМ
УСРЕДНЕНИЯ МАТРИЦЫ КОЭФФИЦИЕНТОВ**

*Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь,
e-mail: demenchuk@im.bas-net.by*

Рассматривается линейная квазипериодическая система управления, замкнутая линейной по фазовым переменным обратной связью. Предполагается, что усредненная матрица коэффициентов имеет блочное представление. Решается задача управления асинхронным многочастотным спектром.

Ключевые слова: линейная квазипериодическая система управления, асинхронный спектр.

A. K. DEMENCHUK

**CONTROL PROBLEM OF AN ASYNCHRONOUS SPECTRUM OF QUASIPERIODIC LINEAR SYSTEMS
WITH A BLOCK REPRESENTATION OF AVERAGE COEFFICIENT MATRIX**

*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus,
e-mail: demenchuk@im.bas-net.by*

We consider a linear quasiperiodic control system closed by the phase variables-linear feedback. It is assumed that the average coefficient matrix has a block representation. The control problem of an asynchronous multifrequency spectrum is solved.

Keywords: linear quasiperiodic control system, asynchronous spectrum.

Условия протекания процесса, когда колебания системы описываются сильно нерегулярными решениями, называют асинхронным режимом [1]. Асинхронные режимы присущи, в частности, линейным дифференциальным системам. Задача синтеза асинхронных режимов линейных периодических систем изучалась в [2] и др. Представляется интересным решение такого рода задач для колебательных процессов более сложных типов, в частности многочастотных.

Будем рассматривать линейную систему управления

$$\dot{x} = A(t)x + Bu, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad n \geq 2, \quad (1)$$

где $A(t)$ – непрерывная квазипериодическая $(n \times n)$ -матрица с базисом частот $K = \{2\pi/\omega_1, \dots, 2\pi/\omega_k\}$, B – постоянная $(n \times n)$ -матрица. Пусть управление задается в виде обратной связи, линейной по фазовым переменным:

$$u = U(t)x, \quad (2)$$

в котором непрерывная квазипериодическая $(n \times n)$ -матрица $U(t)$ имеет такое же множество частот (показателей Фурье), что и матрица $A(t)$.

Постановка задачи. Задачу выбора матрицы $U(t)$ (коэффициента обратной связи) определим таким образом, чтобы замкнутая управлением (2) система

$$\dot{x} = (A(t) + BU(t))x \quad (3)$$

имела сильно нерегулярное квазипериодическое решение с заданным спектром частот L (целевым множеством), и будем называть задачей управления асинхронным многочастотным спектром с целевым множеством L .

Предварительно заметим, что если свободная система $\dot{x} = A(t)x$ имеет сильно нерегулярные периодические решения, то поставленная задача управления разрешима. Также не вызывает затруднений ее решение в случае невырожденной матрицы B .

Поэтому далее без ограничения общности будем предполагать, что первые d строк матрицы B – нулевые, а остальные $r = n - d$ строк – линейно независимы. Обозначим через $B_{r,n}$ матрицу размерности $r \times n$, составленную из последних r строк матрицы B . С учетом согласования размерностей матрицу коэффициентов $A(t)$ разобьем на четыре блока соответствующих размерностей $A_{d,d}^{(11)}(t)$, $A_{r,d}^{(21)}(t)$, $A_{d,r}^{(12)}(t)$, $A_{r,r}^{(22)}$.

Поскольку матрица $A(t)$ является квазипериодической с базисом частот $K = \{2\pi/\omega_1, \dots, 2\pi/\omega_k\}$, то найдется непрерывная по совокупности переменных функция $A(t_1, \dots, t_k)$, периодическая по t_j с периодами соответственно ω_j , $j = 1, \dots, k$, такая, что $A(t, \dots, t) \equiv A(t)$. Найдем среднее значение квазипериодической матрицы $A(t)$:

$$\hat{A} = \frac{1}{\omega_1 \dots \omega_k} \int_0^{\omega_1} \dots \int_0^{\omega_k} A(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k.$$

Важным этапом при решении задачи управления асинхронным спектром линейных систем является случай совпадения рангов матрицы при управлении и расширенной матрицы, составленной из этой матрицы и усреднения матрицы коэффициентов. Приведем решение ослабленного варианта этой задачи, когда

$$A_{d,r}^{(12)}(t) \equiv 0, \quad \hat{A}^{(11)} = 0. \quad (4)$$

Пусть требуется, чтобы спектр нерегулярных периодических колебаний замкнутой управлением (2) системы (1) содержал целевое множество попарно различных нетривиальных частот $L = \{\lambda_1, \dots, \lambda_l\}$, рациональный базис которых $L' = \{\lambda_1, \dots, \lambda_{l'}\}$, $l' \leq l$ образует с базисом $K = \{2\pi/\omega_1, \dots, 2\pi/\omega_k\}$ частот матрицы коэффициентов системы (1) рационально линейно независимое множество. Справедлива

Теорема. При выполнении предположения (4) для системы (1) задача управления асинхронным многочастотным спектром с целевым множеством частот L разрешима тогда и только тогда, когда выполняется оценка $|L| \leq [r/2]$.

Доказательство. Необходимость. Пусть поставленная задача разрешима, т. е. найдется непрерывный квазипериодический с частотным базисом $K = \{2\pi/\omega_1, \dots, 2\pi/\omega_k\}$ коэффициент обратной связи $U(t)$ такой, что замкнутая система (3) имеет сильно нерегулярное квазипериодическое решение $x(t)$ с целевым множеством частот $L = \{\lambda_1, \dots, \lambda_l\}$. Поскольку матрица $U(t)$ является квазипериодической с таким же множеством частот, что и матрица коэффициентов $A(t)$, то базис $K = \{2\pi/\omega_1, \dots, 2\pi/\omega_k\}$ можно принять за рациональный базис и множества частот квазипериодического коэффициента обратной связи $U(t)$. Тогда найдется непрерывная по совокупности переменных функция $Y(t_1, \dots, t_k)$, периодическая по t_j с периодами соответственно ω_j , $j = 1, \dots, k$, такая, что $Y(t, \dots, t) \equiv U(t)$, при этом

$$\hat{U} = \frac{1}{\omega_1 \dots \omega_k} \int_0^{\omega_1} \dots \int_0^{\omega_k} Y(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k.$$

Из работы [3] вытекает, что в таком случае выполняется тождество

$$\dot{x}(t) - (\hat{A} + B\hat{U})x(t) \equiv 0,$$

откуда в силу строения матрицы B следует справедливость тождеств

$$\dot{x}^{[d]}(t) \equiv 0, \quad \dot{x}_{[r]}(t) - \left(\hat{A}_{r,d}^{(21)} + B_{r,n} \hat{U}_{n,d} \right) x^{[d]}(t) - \left(\hat{A}_{r,r}^{(22)} + B_{r,n} \hat{U}_{n,r} \right) x_{[r]}(t) \equiv 0,$$

где $x^{[d]}(t), x_{[r]}(t)$ – соответственно первые d и последние r компонент вектора $x(t)$, $\hat{U}_{n,d}$ и $\hat{U}_{n,r}$ – матрицы, составленные соответственно из d первых и r остальных столбцов матрицы \hat{U} . Из первого тождества вытекает, что составляющая $x^{[d]}(t) \equiv \text{const}$ решения $x(t)$ не имеет частот из целевого множества L . Поэтому частоты целевого множества могут содержаться только в составляющей $x_{[r]}(t)$. Из второго тождества следует, что мощность спектра частот квазипериодического решения соответствующей системы определяется числом пар чисто мнимых комплексно-сопряженных пар собственных значений $(r \times r)$ -матрицы $(\hat{A}_{r,r}^{(22)} + B_{r,n}\hat{U}_{n,r})$, что свидетельствует о справедливости оценки теоремы.

Достаточность. Пусть условия теоремы выполнены. Требуемый для решения поставленной задачи квазипериодический коэффициент обратной связи будем искать в так называемом каноническом виде $U(t) = \hat{U} + \tilde{U}(t)$, где \hat{U} – постоянная $(n \times n)$ -матрица, $\tilde{U}(t)$ – непрерывная квазипериодическая $(n \times n)$ -матрица с частотным базисом $K = \{2\pi/\omega_1, \dots, 2\pi/\omega_k\}$ и нулевым средним значением. Согласно [3], множество сильно нерегулярных квазипериодических решений системы (3) совпадает с множеством таких же решений следующей системы, состоящей из двух уравнений

$$\dot{x} = (\hat{A} + B\hat{U})x \quad (5)$$

и

$$(\tilde{A}(t) + B\tilde{U}(t))x = 0. \quad (6)$$

Уравнение (5) можно записать в виде

$$\dot{x}^{[d]} = 0, \quad \dot{x}_{[r]} = B_{r,n}\hat{U}_{n,d}x^{[d]} + B_{r,n}\hat{U}_{n,r}x_{[r]},$$

где $x = \text{col}(x^{[d]}, x_{[r]})$, $x^{[d]} = \text{col}(x_1, \dots, x_d)$, $x_{[r]} = \text{col}(x_{d+1}, \dots, x_n)$. Первая из полученных систем не имеет отличных от стационарных периодических решений. Поэтому возьмем $x^{[d]}(t) \equiv 0$. Тогда вторая система запишется в виде

$$\dot{x}_{[r]} = (\hat{A}_{r,r}^{(22)} + B_{r,n}\hat{U}_{n,r})x_{[r]}. \quad (7)$$

Возьмем постоянную $(r \times r)$ -матрицу U_1 , имеющую собственные числа

$$\pm i\lambda_1, \dots, \pm i\lambda_l,$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ – частоты из целевого множества L , что возможно в силу оценки, указанной в теореме. Пусть $Y = U_0$ – какое-либо частное решение системы $B_{r,n}Y = E_{r,r}$ где $E_{r,r}$ – единичная $(r \times r)$ -матрица. Положим

$$\hat{U}_{n,r} = U_0(-A_{r,r}^{(22)} + U_1). \quad (8)$$

Тогда система (7) примет вид

$$\dot{x}_{[r]} = (A_{r,r}^{(22)} + B_{r,n}U_0(-A_{r,r}^{(22)} + U_1))x_{[r]} = U_1x_{[r]}$$

и с учетом свойств матрицы U_1 будет иметь квазипериодическое решение

$$x_{[r]}(t) = \sum_{j=1}^l A_j \cos \lambda_j t + B_j \sin \lambda_j t,$$

где A_j, B_j зависят от $2l$ произвольных вещественных постоянных.

Значит, если выбрать постоянную $(n \times n)$ -матрицу \hat{U} так, что ее блок $\hat{U}_{n,d}$ из первых d столбцов состоит из произвольных вещественных чисел, а блок $\hat{U}_{n,r}$ из остальных r столбцов опре-

деляется соотношением (8), то система (5) будет иметь $2l$ -параметрическое семейство квазипериодических решений

$$x(t) = \text{col}[0, \dots, 0, x_{[r]}(t)] \quad (9)$$

с целевым множеством частот L .

Согласно [3], определяемая равенством (9) функция $x(t)$ будет удовлетворять замкнутой системе (3), если эта функция является решением системы (6), которая с учетом полученного выше тождества $x^{[d]}(t) \equiv 0$ примет вид

$$(\tilde{A}_{r,r}^{(22)}(t) + B_{r,n}\tilde{U}_{n,r}(t))x_{[r]}(t) = 0, \quad (10)$$

где $\tilde{U}_{n,r}(t)$ – $(n \times r)$ -матрица, составленная из последних r столбцов матрицы $\tilde{U}(t)$. Как видим, элементами блока $\tilde{U}_{n,d}(t)$ из первых d столбцов матрицы $\tilde{U}(t)$ могут быть произвольные непрерывные квазипериодические функции с базисом частот $K = \{2\pi/\omega_1, \dots, 2\pi/\omega_k\}$ и нулевым средним значением. Положим

$$\tilde{U}_{n,r}(t) = -U_0\tilde{A}_{r,r}^{(22)}(t). \quad (11)$$

Подставляя $\tilde{U}_{n,r}(t)$ в равенство (10), получим тождество.

Таким образом, при выполнении условий теоремы для системы (3) разрешима задача управления асинхронным спектром с целевым множеством L . Требуемый для ее решения коэффициент обратной связи построен в виде $U(t) = \hat{U} + \tilde{U}(t)$, где у постоянной $(n \times n)$ -матрицы \hat{U} блок $\hat{U}_{n,d}$ из первых d столбцов состоит из произвольных вещественных чисел, блок $\hat{U}_{n,r}$ из остальных r столбцов определяется равенством (8), элементами блока $\tilde{U}_{n,d}(t)$ из первых d строк матрицы $\tilde{U}(t)$ будут произвольные квазипериодические функции с базисом частот $K = \{2\pi/\omega_1, \dots, 2\pi/\omega_k\}$ и нулевым средним, а блок $\tilde{U}_{n,r}(t)$ из остальных r строк определяется равенством (11). Сильно нерегулярное квазипериодическое решение с целевым множеством частот $L = \{\lambda_1, \dots, \lambda_j\}$ замкнутой управлением (2) системы (1) представлено тригонометрическим многочленом (9).

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф16Р-059).

Список использованной литературы

1. Асинхронное возбуждение незатухающих колебаний / Д. И. Пеннер [и др.] // Успехи физ. наук. – 1973. – Т. 109, вып. 1. – С. 402–406.
2. Деменчук, А. К. Задача управления спектром сильно нерегулярных периодических колебаний / А. К. Деменчук // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2009. – Т. 53, № 4. – С. 37–42.
3. Грудо, Э. И. О периодических решениях с несоизмеримыми периодами периодических дифференциальных систем / Э. И. Грудо // Дифференц. уравнения. – 1986. – Т. 22, № 9. – С. 1499–1504.

Поступила в редакцию 06.07.2016

УДК 517.956.32

В. И. КОРЗЮК^{1,2}, НГУЕН ВАН ВИНЬ^{1,3}

**КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ
ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО БИВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ**

¹*Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь,
e-mail: korzyuk@bsu.by, vinhnguyen0109@gmail.com*

²*Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь,
e-mail: korzyuk@bsu.by*

³*Хюэский университет, Хюэ, Вьетнам, e-mail: vinhnguyen0109@gmail.com*

В аналитическом виде найдено классическое решение одномерного биволнового уравнения при наличии условий Коши, граничных условий на боковой границе и нелокального интегрального условия, которое задано через значения искомого решения во внутренних точках рассматриваемой области. Под классическим решением понимается функция, которая определена во всех точках замыкания заданной области и имеет все классические производные, входящие в уравнение и условия задачи.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, гиперболические уравнения, биволновое уравнение, частные производные, граничные условия, условия Коши, условия согласования, классическое решение.

V. I. KORZYUK^{1,2}, NGUYEN VAN VINH^{1,3}

**CLASSICAL SOLUTION OF A PROBLEM WITH AN INTEGRAL CONDITION
FOR THE ONE-DIMENSIONAL BIWAVE EQUATION**

¹*Belarusian State University, Minsk, Belarus,
e-mail: korzyuk@bsu.by, vinhnguyen0109@gmail.com*

²*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus,
e-mail: korzyuk@bsu.by*

³*Hue University's College of Education, Hue, Viet Nam, e-mail: vinhnguyen0109@gmail.com*

We find a closed-form classical solution of the homogeneous biwave equation with Cauchy conditions, a boundary condition on the lateral boundary, and a nonlocal integral condition involving the values of the solution at interior points of the domain. A classical solution is understood as a function that is defined everywhere in the closure of the domain and has all classical derivatives occurring in the equation and conditions of the problem.

Keywords: differential equations, hyperbolic equations, biwave equation, partial derivatives, boundary conditions, Cauchy conditions, agreement conditions, classical solution, integral condition.

Введение. Задачам для одномерного биволнового уравнения посвящено много работ (см., напр., [1–5]). В большинстве из них изучаются классические решения. Следует отметить, что численные методы в виде разностных схем, конечных элементов при решении граничных задач для дифференциальных уравнений основываются на предположениях существования классических решений этих задач. Однако при одних и тех же заданных граничных условиях без правильного выбора функций в этих условиях, удовлетворяющих так называемым условиям согласования, не будет существовать классическое решение рассматриваемой задачи: решение не будет иметь ту гладкость во всей области своего определения, которую требует применяемый в данном случае численный метод. Более подробно этот вопрос обсуждался в работах [5–10], в которых находилось классическое решение первой и типа ее смешанных задач для одномерного биволнового уравнения. При математическом моделировании процессов из физики и других

областей естествознания возникают задачи, в которых в интегральном виде задаются значения искомой функции.

1. Постановка задачи. В замыкании $\bar{Q} = [0, \infty) \times [0, l]$ области $Q = (0, \infty) \times (0, l)$ двух независимых переменных $(t, x) \in \bar{Q} \subset R^2$ задано одномерное биволновое уравнение

$$Lu = (\partial_t^2 - a^2 \partial_x^2)(\partial_t^2 - b^2 \partial_x^2)u(t, x) = f(t, x), \quad (t, x) \in \bar{Q}, \quad (1)$$

относительно искомой функции $u: R^2 \supset \bar{Q} \ni (t, x) \rightarrow u(t, x) \in R$, где $a^2, b^2, l \in R$, $a^2 > b^2 > 0$, $0 < l < +\infty$, $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_t^j \partial_x^k = \frac{\partial^{j+k}}{\partial t^j \partial x^k}$, $j, k = \{0, 1, 2, \dots\}$ – частные производные. К уравнению (1) на части границы ∂Q области Q присоединяются условия Коши

$$\partial_t^j u(0, x) = \varphi_j(x), \quad j = 0, 1, 2, 3, \quad x \in [0, l], \quad (2)$$

граничные условия

$$u(t, 0) = \mu_1(t), \quad (3)$$

$$u(t, l) = \chi_1(t), \quad \beta_0 u(t, l) + \beta_1 \partial_x u(t, l) = \chi_2(t), \quad t \in [0, \infty), \quad (4)$$

и интегральное условие

$$\alpha_0 u(t, 0) + \alpha_1 \int_0^l u(t, \xi) d\xi = \mu_2(t), \quad t \in [0, \infty), \quad (5)$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$ – действительные числа и $\alpha_1, \beta_1 \neq 0$.

Здесь $f: \bar{Q} \ni (t, x) \rightarrow f(t, x) \in R$, $\varphi_j: [0, l] \ni x \rightarrow \varphi_j(x)$, $j = 0, 1, 2, 3$, $\mu_i: [0, \infty) \ni t \rightarrow \mu_i(t) \in R$, $\chi_i: [0, \infty) \ni t \rightarrow \chi_i(t) \in R$, $i = 1, 2$ – заданные функции.

Функции $f, \varphi_j, \mu_i, \chi_i$, $j = \overline{0, 3}$, $i = \overline{1, 2}$, удовлетворяют следующим условиям согласования:

$$\mu_1^{(j)}(0) = \varphi_j(0), \quad j = 0, 1, 2, 3, \quad (6)$$

$$\alpha_0 \mu_1^{(j)}(0) + \alpha_1 \int_0^l \varphi_j(y) dy = \mu_2^{(j)}(0), \quad j = 0, 1, 2, 3, \quad (7)$$

$$\chi_1^{(j)}(l) = \varphi_j(l), \quad j = 0, 1, 2, 3, \quad (8)$$

$$\beta_0 \chi_1^{(j)}(0) + \beta_1 \varphi_j'(l) = \chi_2^{(j)}(0), \quad j = 0, 1, 2, 3, \quad (9)$$

$$(a^2 + b^2) \alpha_1 \int_0^l \varphi_2''(y) dy - a^2 b^2 \alpha_1 \int_0^l \varphi_0^{(4)}(y) dy + \alpha_0 \mu_1^{(4)}(0) - \mu_2^{(4)}(0) = -\alpha_1 \int_0^l f(0, \xi) d\xi, \quad (10)$$

$$(a^2 + b^2) \alpha_1 \int_0^l \varphi_3''(y) dy - a^2 b^2 \alpha_1 \int_0^l \varphi_1^{(4)}(y) dy + \alpha_0 \mu_1^{(5)}(0) - \mu_2^{(5)}(0) = -\alpha_1 \int_0^l \partial_t f(0, \xi) d\xi, \quad (11)$$

$$(a^2 + b^2) \varphi_2''(0) - a^2 b^2 \varphi_0^{(4)}(0) - \mu_1^{(4)}(0) = f(0, 0), \quad (12)$$

$$(a^2 + b^2) \varphi_2''(l) - a^2 b^2 \varphi_0^{(4)}(l) - \chi_1^{(4)}(0) = f(0, l). \quad (13)$$

Таким образом, требуется найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям Коши (2), граничным условиям (3)–(4) и интегральному условию (5).

Отметим, что для достаточно гладких заданных функций, входящих в уравнение (1) и условия (2)–(5), на множестве \bar{Q} существует единственное классическое решение этой задачи тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования (6)–(13). Решение задачи (1)–(13) будет получено в аналитическом виде через функции $f, \varphi_i, \mu_j, \chi_j, i = \overline{0,3}, j = \overline{1,2}$.

2. Решение задачи (1)–(5) в случае однородного уравнения (1). Рассмотрим решение задачи (1)–(5) в случае, когда уравнение (1) является однородным, т. е.

$$Lu(t, x) = 0, \quad t > 0, x \in (0, l). \quad (14)$$

Для определенности предположим, что $a, b > 0$. Справедлива

Лемма 1. *Общее решение уравнения (14) из класса четырежды непрерывно дифференцируемых функций $C^4(\bar{Q})$ представляется в виде суммы*

$$u(t, x) = g_1(x - at) + g_2(x + at) + g_3(x - bt) + g_4(x + bt), \quad (15)$$

где области определения $D(g_1), D(g_3) = ((-\infty, l])$, $D(g_2), D(g_4) = ([0, +\infty))$, если $(t, x) \in \bar{Q}$.

Доказательство следует из [9] (см. также [10]).

Удовлетворяя решение (15) условиям Коши (2), получаем систему относительно функций $g_j(x)$, $j = \overline{1,4}$, определенных на отрезке $[0, l]$:

$$\begin{aligned} g_1(x) + g_2(x) + g_3(x) + g_4(x) &= \varphi_0(x), \\ -ag'_1(x) + ag'_2(x) - bg'_3(x) + bg'_4(x) &= \varphi_1(x), \\ a^2g''_1(x) + a^2g''_2(x) + b^2g''_3(x) + b^2g''_4(x) &= \varphi_2(x), \\ -a^3g'''_1(x) + a^3g'''_2(x) - b^3g'''_3(x) + b^3g'''_4(x) &= \varphi_3(x). \end{aligned} \quad (16)$$

Решая систему (16), находим функции $g_j(z)$, $j = \overline{1,4}$, определяемые равенствами

$$\begin{aligned} g_1(z) = g_1^{(0)}(z) &= \frac{1}{2a(a^2 - b^2)} \left(b^2 \int_0^z \varphi_1(\xi) d\xi + a \int_0^z (z - \xi) \varphi_2(\xi) d\xi - \right. \\ &\left. - \frac{1}{2} \int_0^z (z - \xi)^2 \varphi_3(\xi) d\xi - ab^2 \varphi_0(z) + C_1 b^2 + aC_2 z + C_3 a - C_4 z^2 - C_5 z - C_6 \right), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} g_2(z) = g_2^{(0)}(z) &= \frac{1}{2a(a^2 - b^2)} \left(-b^2 \int_0^z \varphi_1(\xi) d\xi + a \int_0^z (z - \xi) \varphi_2(\xi) d\xi + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} \int_0^z (z - \xi)^2 \varphi_3(\xi) d\xi - ab^2 \varphi_0(z) - C_1 b^2 + aC_2 z + C_3 a + C_4 z^2 + C_5 z + C_6 \right), \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} g_3(z) = g_3^{(0)}(z) &= \frac{1}{2b(a^2 - b^2)} \left(-a^2 \int_0^z \varphi_1(\xi) d\xi - b \int_0^z (z - \xi) \varphi_2(\xi) d\xi + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} \int_0^z (z - \xi)^2 \varphi_3(\xi) d\xi + a^2 b \varphi_0(z) - C_1 a^2 - bC_2 z - C_3 b + C_4 z^2 + C_5 z + C_6 \right), \end{aligned} \quad (19)$$

$$g_4(z) = g_4^{(0)}(z) = \frac{-1}{2b(a^2 - b^2)} \left(-a^2 \int_0^z \varphi_1(\xi) d\xi + b \int_0^z (z - \xi) \varphi_2(\xi) d\xi + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int_0^z (z - \xi)^2 \varphi_3(\xi) - a^2 b \varphi_0(z) - C_1 a^2 + b C_2 z + C_3 b + C_4 z^2 + C_5 z + C_6 \right), \quad (20)$$

для $z \in [0, l]$, где $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ – произвольные постоянные.

Для данного решения интегральное условие (5) можно заменить нелокальным граничным условием

$$\frac{\mu_2'(t) - \alpha_0 \mu_1'(t)}{\alpha_1} = -ag_1(l - at) + ag_2(l + at) - bg_3(l - bt) + bg_4(l + bt) + \\ + ag_1(-at) - ag_2(at) + bg_3(-bt) - bg_4(bt). \quad (21)$$

Лемма 2. Если заданные функции $\mu_1(t), \mu_2(t)$ принадлежат классу $C^1([0, \infty))$, то интегральное условие (5) эквивалентно условиям (21) и (7).

Доказательство проводится непосредственной проверкой в прямом и обратном порядке.

Если $\alpha_0 u(t, 0) + \alpha_1 \int_0^l u(t, \xi) d\xi = \mu_2(t)$, $t \in [0, \infty)$, то имеем

$$\alpha_0 (g_1(-at) + g_2(at) + g_3(-bt) + g_4(bt)) + \\ + \alpha_1 \left(\int_0^l (g_1(\xi - at) + g_2(\xi + at) + g_3(\xi - bt) + g_4(\xi + bt)) d\xi \right) = \mu_2(t),$$

из которого, дифференцируя по переменной t , получим соотношение

$$\int_0^l (-ag_1'(\xi - at) + ag_2'(\xi + at) - bg_3'(\xi - bt) + bg_4'(\xi + bt)) d\xi = \frac{\mu_2'(t) - \alpha_0 \mu_1'(t)}{\alpha_1}.$$

Из интегрирования (13) по частям следует равенство

$$\frac{\mu_2'(t) - \alpha_0 \mu_1'(t)}{\alpha_1} = -ag_1(l - at) + ag_2(l + at) - bg_3(l - bt) + bg_4(l + bt) + \\ + ag_1(-at) - ag_2(at) + bg_3(-bt) - bg_4(bt),$$

т. е. имеем граничное условие (21).

Обратно, если

$$\frac{\mu_2'(t) - \alpha_0 \mu_1'(t)}{\alpha_1} = -ag_1(l - at) + ag_2(l + at) - bg_3(l - bt) + bg_4(l + bt) + \\ + ag_1(-at) - ag_2(at) + bg_3(-bt) - bg_4(bt),$$

то

$$\int_0^l (-ag_1'(\xi - at) + ag_2'(\xi + at) - bg_3'(\xi - bt) + bg_4'(\xi + bt)) d\xi = \frac{\mu_2'(t) - \alpha_0 \mu_1'(t)}{\alpha_1},$$

интегрируя по переменной t , имеем

$$\int_0^t \int_0^l (-ag_1'(\xi - a\tau) + ag_2'(\xi + a\tau) - bg_3'(\xi - b\tau) + bg_4'(\xi + b\tau)) d\xi d\tau = \int_0^t \frac{\mu_2'(\tau) - \alpha_0 \mu_1'(\tau)}{\alpha_1} d\tau,$$

или

$$\int_0^l (g_1(\xi - at) + g_2(\xi + at) + g_3(\xi - bt) + g_4(\xi + bt) - g_1(\xi) - g_2(\xi) - g_3(\xi) - g_4(\xi)) d\xi = \\ = \frac{\mu_2(t) - \alpha_0 \mu_1(t)}{\alpha_1} - \frac{\mu_2(0) - \alpha_0 \mu_1(0)}{\alpha_1}.$$

Согласно формуле (15), получим

$$g_1(\xi) + g_2(\xi) + g_3(\xi) + g_4(\xi) = u(0, \xi) = \varphi_0(\xi), \quad \xi \in [0, l].$$

Заметим, что из условий (7) при $j = 0$ имеем $\int_0^l \varphi_0(\xi) d\xi = \frac{\mu_2(0) - \alpha_0 \mu_1(0)}{\alpha_1}$. Отсюда

$$\int_0^l (g_1(\xi - at) + g_2(\xi + at) + g_3(\xi - bt) + g_4(\xi + bt)) d\xi = \frac{\mu_2(t) - \alpha_0 \mu_1(t)}{\alpha_1},$$

или

$$\alpha_0 u(t, 0) + \alpha_1 \int_0^l u(t, \xi) d\xi = \mu_2(t).$$

Лемма 2 доказана.

Для других значений аргумента z функции $g_j(z)$, $j = \overline{1, 4}$ определяются поэтапно, удовлетворяя искомое решение (15), граничным условиям (3), (5) и (21). Удовлетворяя условиям (3) и (21), получаем систему уравнений

$$g_1^{(1)}(-at) + g_2^{(0)}(at) + g_3^{(1)}(-bt) + g_4^{(0)}(bt) = \mu_1(t), \\ \frac{\mu_2'(t) - \alpha_0 \mu_1'(t)}{\alpha_1} = -ag_1^{(0)}(l-at) + ag_2^{(1)}(l+at) - bg_3^{(0)}(l-bt) + bg_4^{(1)}(l+bt) + \\ + ag_1^{(1)}(-at) - ag_2^{(0)}(at) + bg_3^{(1)}(-bt) - bg_4^{(0)}(bt). \quad (22)$$

Далее используем условие (4). Подставляя функцию (15) в равенство (4), будем иметь

$$g_1^{(0)}(l-at) + g_2^{(1)}(l+at) + g_3^{(0)}(l-bt) + g_4^{(1)}(l+bt) = \chi_1(t), \\ \beta_0 (g_1^{(0)}(l-at) + g_2^{(1)}(l+at) + g_3^{(0)}(l-bt) + g_4^{(1)}(l+bt)) + \\ + \beta_1 (dg_1^{(0)}(l-at) + dg_2^{(1)}(l+at) + dg_3^{(0)}(l-bt) + dg_4^{(1)}(l+bt)) = \chi_2(t), \quad (23)$$

где обозначение $d(\cdot)$ – оператор обыкновенной производной первого порядка. Интегрируя второе уравнение системы (23) по переменной t , получим

$$\left(\frac{g_1^{(0)}(l-at)}{-a} + \frac{g_2^{(1)}(l+at)}{a} + \frac{g_3^{(0)}(l-bt)}{-b} + \frac{g_4^{(1)}(l+bt)}{b} \right) = \int_0^t \left(\frac{\chi_2(\xi) - \beta_0 \chi_1(\xi)}{\beta_1} \right) d\xi + C,$$

или

$$\frac{g_2^{(1)}(l+at)}{a} + \frac{g_4^{(1)}(l+bt)}{b} = \int_0^t \left(\frac{\chi_2(\xi) - \beta_0 \chi_1(\xi)}{\beta_1} \right) d\xi + C^1 + \frac{g_1^{(0)}(l-at)}{a} + \frac{g_3^{(0)}(l-bt)}{b}. \quad (24)$$

Из (22)–(24) получим систему для $g_1^{(1)}(-at)$, $g_2^{(1)}(l+at)$, $g_3^{(1)}(-bt)$, $g_4^{(1)}(l+bt)$:

$$\left\{ \begin{array}{l}
g_1^{(1)}(-at) + g_3^{(1)}(-bt) = \mu_1(t) - g_2^{(0)}(at) - g_4^{(0)}(bt), \\
g_2^{(1)}(l+at) + g_4^{(1)}(l+bt) = \chi_1(t) - g_1^{(0)}(l-at) - g_3^{(0)}(l-bt), \\
\frac{g_2^{(1)}(l+at)}{a} + \frac{g_4^{(1)}(l+bt)}{b} = \int_0^l \left(\frac{\chi_2(\xi) - \beta_0 \chi_1(\xi)}{\beta_1} \right) d\xi + C^1 + \frac{g_1^{(0)}(l-at)}{a} + \frac{g_3^{(0)}(l-bt)}{b}, \\
ag_1^{(1)}(-at) + ag_2^{(1)}(l+at) + bg_3^{(1)}(-bt) + bg_4^{(1)}(l+bt) = \\
= \frac{\mu_2'(t) - \alpha_0 \mu_1'(t)}{\alpha_1} + ag_1^{(0)}(at) + bg_2^{(0)}(bt) + ag_3^{(0)}(l-at) + bg_4^{(0)}(l-bt).
\end{array} \right. \quad (25)$$

Решая систему (25), находим функции $g_j(z)$, $j = \overline{1,4}$ для других значений аргумента z , определяемые равенствами

$$\begin{aligned}
g_1(z) = g_1^{(1)}(z) = & \frac{1}{(a-b)\alpha_1} \left(2(a+b)\alpha_1 g_1^{(0)}(l+z) + (a+b)\alpha_1 g_2^{(0)}(-z) + 2b\alpha_1 g_4^{(0)}\left(\frac{-zb}{a}\right) + \right. \\
& + 2(a+b)\alpha_1 g_3^{(0)}\left(l + \frac{bz}{a}\right) + ab\alpha_1 \int_0^{-z/a} \left(\frac{\chi_2(\xi) - \beta_0 \chi_1(\xi)}{\beta_1} \right) d\xi + abC^{(1)}\alpha_1 - b\alpha_1 \mu_1\left(\frac{-z}{a}\right) - \\
& \left. - \alpha_0 \mu_1'\left(\frac{-z}{a}\right) + \mu_2'\left(\frac{-z}{a}\right) - (a+b)\alpha_1 \chi_1\left(\frac{-z}{a}\right) \right), \quad z \in [-l, 0], \quad (26)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_2(z) = g_2^{(1)}(z) = & \frac{1}{b-a} \left((a+b)g_1^{(0)}(2l-z) + a \left(bC^{(1)} + b \int_0^{(z-l)/a} \left(\frac{\chi_2(\xi) - \beta_0 \chi_1(\xi)}{\beta_1} \right) d\xi - \chi_1\left(\frac{z-l}{a}\right) \right) + \right. \\
& \left. + 2ag_3^{(0)}\left(l + \frac{bl}{a} - \frac{bz}{a}\right) \right), \quad z \in [l, 2l], \quad (27)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_3(z) = g_3^{(1)}(z) = & \frac{-1}{(a-b)\alpha_1} \left(2(a+b)\alpha_1 g_1^{(0)}\left(l + \frac{az}{b}\right) + (a+b)\alpha_1 g_4^{(0)}(-z) + 2a\alpha_1 g_2^{(0)}\left(\frac{-az}{b}\right) + \right. \\
& + 2(a+b)\alpha_1 g_3^{(0)}(l+z) + ab\alpha_1 \int_0^{-z/b} \left(\frac{\chi_2(\xi) - \beta_0 \chi_1(\xi)}{\beta_1} \right) d\xi - (a+b)\alpha_1 \chi_1\left(\frac{-z}{b}\right) - a\alpha_1 \mu_1\left(\frac{-z}{b}\right) - \\
& \left. - \alpha_0 \mu_1'\left(\frac{-z}{b}\right) + \mu_2'\left(\frac{-z}{b}\right) + abC^{(1)}\alpha_1 \right), \quad z \in \left[\frac{-bl}{a}, 0 \right], \quad (28)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_4(z) = g_4^{(1)}(z) = & \frac{1}{a-b} \left((a+b)g_3^{(0)}(2l-z) + b \left(aC^{(1)} + a \int_0^{(z-l)/b} \left(\frac{\chi_2(\xi) - \beta_0 \chi_1(\xi)}{\beta_1} \right) d\xi - \chi_1\left(\frac{z-l}{b}\right) \right) + \right. \\
& \left. + 2g_1^{(0)}\left(l + \frac{al}{b} - \frac{az}{b}\right) \right), \quad z \in \left[l, l + \frac{bl}{a} \right]. \quad (29)
\end{aligned}$$

Возвращаясь к условиям (3), (5) и (21), находим значения $g_1^{(2)}(z)$ функции g_1 для $z \in [-2l, -l]$ и значения $g_3^{(2)}(z)$ функции g_3 для $z \in \left[-\frac{2bl}{a}, -\frac{bl}{a} \right]$, а затем определяем $g_2^{(2)}(z)$ функции g_2 для $z \in [2l, 3l]$ и значения $g_4^{(2)}(z)$ функции g_4 для $z \in \left[l + \frac{bl}{a}, l + \frac{2bl}{a} \right]$ и т. д. В общем случае изложенное выше можно записать в виде

$$\begin{aligned}
g_1(z) = g_1^{(k)}(z) = & \frac{1}{(a-b)\alpha_1} \left(2(a+b)\alpha_1 \tilde{g}_1^{(k-1)}(l+z) + (a+b)\alpha_1 \tilde{g}_2^{(k-1)}(-z) + 2b\alpha_1 \tilde{g}_4^{(k-1)}\left(\frac{-zb}{a}\right) + \right. \\
& + 2(a+b)\alpha_1 \tilde{g}_3^{(k-1)}\left(l + \frac{bz}{a}\right) + ab\alpha_1 \int_0^{-z/a} \left(\frac{\chi_2(\xi) - \beta_0 \chi_1(\xi)}{\beta_1} \right) d\xi + abC^{(k)}\alpha_1 - b\alpha_1 \mu_1\left(\frac{-z}{a}\right) - \\
& \left. - \alpha_0 \mu_1'\left(\frac{-z}{a}\right) + \mu_2'\left(\frac{-z}{a}\right) - (a+b)\alpha_1 \chi_1\left(\frac{-z}{a}\right) \right), \quad z \in [-kl, -(k-1)l], \quad k=1,2,3,\dots, \quad (30)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_2(z) = g_2^{(k)}(z) = & \frac{1}{b-a} \left((a+b)\tilde{g}_1^{(k-1)}(2l-z) + a \left(bC^{(k)} + b \int_0^{(z-l)/a} \left(\frac{\chi_2(\xi) - \beta_0 \chi_1(\xi)}{\beta_1} \right) d\xi - \chi_1\left(\frac{z-l}{a}\right) \right) + \right. \\
& \left. + 2a\tilde{g}_3^{(k-1)}\left(l + \frac{bl}{a} - \frac{bz}{a}\right) \right), \quad z \in [kl, (k+1)l], \quad k=1,2,3,\dots, \quad (31)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_3(z) = g_3^{(k)}(z) = & \frac{-1}{(a-b)\alpha_1} \left(2(a+b)\alpha_1 \tilde{g}_1^{(k-1)}\left(l + \frac{az}{b}\right) + (a+b)\alpha_1 \tilde{g}_4^{(k-1)}(-z) + 2a\alpha_1 \tilde{g}_2^{(k-1)}\left(\frac{-az}{b}\right) + \right. \\
& + 2(a+b)\alpha_1 \tilde{g}_3^{(k-1)}(l+z) + ab\alpha_1 \int_0^{-z/b} \left(\frac{\chi_2(\xi) - \beta_0 \chi_1(\xi)}{\beta_1} \right) d\xi - (a+b)\alpha_1 \chi_1\left(\frac{-z}{b}\right) - a\alpha_1 \mu_1\left(\frac{-z}{b}\right) - \\
& \left. - \alpha_0 \mu_1'\left(\frac{-z}{b}\right) + \mu_2'\left(\frac{-z}{b}\right) + abC^{(k)}\alpha_1 \right), \quad z \in \left[\frac{-kbl}{a}, \frac{-(k-1)bl}{a} \right], \quad k=1,2,3,\dots, \quad (32)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_4(z) = g_4^{(k)}(z) = & \frac{1}{a-b} \left((a+b)\tilde{g}_3^{(k-1)}(2l-z) + b \left(aC^{(k)} + a \int_0^{(z-l)/b} \left(\frac{\chi_2(\xi) - \beta_0 \chi_1(\xi)}{\beta_1} \right) d\xi - \chi_1\left(\frac{z-l}{b}\right) \right) + \right. \\
& \left. + 2\tilde{g}_1^{(k-1)}\left(l + \frac{al}{b} - \frac{az}{b}\right) \right), \quad z \in \left[l + \frac{(k-1)bl}{a}, l + \frac{kbl}{a} \right], \quad k=1,2,3,\dots, \quad (33)
\end{aligned}$$

где $C^{(k)}$ – произвольные постоянные из множества действительных чисел R и

$$\tilde{g}_i^{(k)}(z) = g_i^{(j)}(z), \quad i = \overline{1,4}, \quad j = \overline{0,k}. \quad (34)$$

Если $k = \infty$, то

$$g_i(z) = \tilde{g}_i^{(\infty)}(z) = g_i^{(j)}(z), \quad i = \overline{1,4}, \quad j = \overline{0,1,2,3,\dots}, \quad z \in D(g_i).$$

Чтобы функции g_2, g_4 принадлежали классу $C^4([0, +\infty))$, а g_1, g_3 – классу $C^4((-\infty, l])$, кроме требований на гладкость заданных функций задачи (5), (2), (3), (4), должны выполняться равенства для $k = 1, 2, 3, \dots$ в общих точках соприкосновения

$$d^p g_1^{(k)}(l-kl) = d^p g_1^{(k-1)}(l-kl), \quad p = \overline{0,4}, \quad (35)$$

$$d^p g_2^{(k)}(kl) = d^p g_2^{(k-1)}(kl), \quad p = \overline{0,4}, \quad (36)$$

$$d^p g_3^{(k)}\left(\frac{-(k-1)bl}{a}\right) = d^p g_3^{(k-1)}\left(\frac{-(k-1)bl}{a}\right), \quad p = \overline{0,4}, \quad (37)$$

$$d^p g_4^{(k)}\left(l + \frac{(k-1)lb}{a}\right) = d^p g_4^{(k-1)}\left(l + \frac{(k-1)lb}{a}\right), \quad p = \overline{0,4}, \quad (38)$$

где d^p – производные порядка $p = \overline{0,4}$ и $d^p = \frac{d^p}{dz^p}$. Из (31) и (36) получим

$$g_2^{(k)}(kl) - g_2^{(k-1)}(kl) = 0 = \frac{1}{b-a} \left(a \left(bC^{(k)} + b \int_0^{(kl-l)/a} \left(\frac{\chi_2(\xi) - \beta_0 \chi_1(\xi)}{\beta_1} \right) d\xi - \chi_1 \left(\frac{(k-1)l}{a} \right) \right) + \right. \\ \left. + (a+b) \tilde{g}_1^{(k-1)}((2-k)l) + 2a \tilde{g}_3^{(k-1)} \left(l - \frac{b(k-1)l}{a} \right) - (a+b) \tilde{g}_1^{(k-2)}((2-k)l) - 2a \tilde{g}_3^{(k-1)} \left(l - \frac{b(k-1)l}{a} \right) - \right. \\ \left. - a \left(bC^{(k-1)} + b \int_0^{(kl-l)/a} \left(\frac{\chi_2(\xi) - \beta_0 \chi_1(\xi)}{\beta_1} \right) d\xi - \chi_1 \left(\frac{(k-1)l}{a} \right) \right) \right).$$

Но из соотношений (35), (37) имеем равенства $\tilde{g}_1^{(k-1)}((2-k)l) = \tilde{g}_2^{(k-2)}((2-k)l)$ и $\tilde{g}_3^{(k-1)} \left(l - \frac{(k-1)bl}{a} \right) = \tilde{g}_3^{(k-2)} \left(l - \frac{(k-1)bl}{a} \right)$. Поэтому получим $C^{(k)} = C^{(k-1)} = \dots = C^{(1)}$ для любого номера $k = 3, 4, \dots$. Из условия непрерывности $g_2^{(0)}(0) = g_2^{(1)}(0)$ находим эти константы, а именно:

$$C^{(k)} = C^{(1)} = \frac{- \left(\frac{-aC_1}{b} - \frac{bC_1}{a} + \frac{C_6 + C_5l + C_4l^2}{ab} - \frac{(a^2 + b^2)}{ab} \int_0^l \varphi_1(y) dy + \int_0^l \frac{(l-y)^2}{2ab} \varphi_3(y) dy + a(\varphi_0(l) - \chi_1(0)) \right)}{ab}.$$

Лемма 3. Для любого номера $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ значения функций $g_1^{(k)}(z)$, $g_2^{(k)}(z)$, $g_3^{(k)}(z)$, $g_4^{(k)}(z)$ всегда можно представить в виде

$$g_1^{(k)}(z) = \psi_1^{(k)}(z, a, b) + \frac{C_1 b^2 + aC_2 z + C_3 a - C_4 z^2 - C_5 z - C_6}{2a(a^2 - b^2)}, \\ g_2^{(k)}(z) = \psi_2^{(k)}(z, a, b) + \frac{-C_1 b^2 + aC_2 z + C_3 a + C_4 z^2 + C_5 z + C_6}{2a(a^2 - b^2)}, \\ g_3^{(k)}(z) = \psi_3^{(k)}(z, a, b) + \frac{-C_1 a^2 - bC_2 z - C_3 b + C_4 z^2 + C_5 z + C_6}{2b(a^2 - b^2)}, \\ g_4^{(k)}(z) = \psi_4^{(k)}(z, a, b) - \frac{-C_1 a^2 + bC_2 z + C_3 b + C_4 z^2 + C_5 z + C_6}{2b(a^2 - b^2)},$$

где функции $\psi_i^{(k)}$, $i = \overline{1, 4}$, не зависят от констант $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$.

Доказательство. Утверждение леммы докажем для функции $g_1^{(k)}(z)$ методом математической индукции. Для $k = 0$ данное утверждение следует из формулы (8). Предположим, что лемма справедлива для всех $k = 0, 1, \dots, n-1$. Докажем утверждение ее для функции $g_2^{(n)}(z)$. Согласно формуле (17), имеем

$$g_2(z) = g_2^{(n)}(z) = \frac{1}{b-a} \left(a \left(b \int_0^{(z-l)/a} \left(\frac{\chi_2(\xi) - \beta_0 \chi_1(\xi)}{\beta_1} \right) d\xi - \chi_1 \left(\frac{z-l}{a} \right) \right) + \right. \\ \left. - \left(\frac{-aC_1}{b} - \frac{bC_1}{a} + \frac{C_6 + C_5l + C_4l^2}{ab} - \frac{(a^2 + b^2)}{ab} \int_0^l \varphi_1(y) dy + \int_0^l \frac{(l-y)^2}{2ab} \varphi_3(y) dy + a(\varphi_0(l) - \chi_1(0)) \right) \right) + \\ + ab \frac{}{ab}$$

$$\begin{aligned}
& + (a+b) \left(\tilde{\psi}_1^{(n-1)}(z, a, b) + \frac{C_1 b^2 + a C_2 (2l-z) + C_3 a - C_4 (2l-z)^2 - C_5 (2l-z) - C_6}{2a(a^2 - b^2)} \right) + \\
& + 2a \left(\tilde{\psi}_3^{(n-1)}(z, a, b) + \frac{-C_1 a^2 - b C_2 (l+b(l-z)/a) - C_3 b + C_4 (l+b(l-z)/a)^2 + C_5 (l+b(l-z)/a) + C_6}{2b(a^2 - b^2)} \right) \Bigg) = \\
& = \psi_2^{(n)}(z, a, b) + \frac{-C_1 b^2 + a C_2 z + C_3 a + C_4 z^2 + C_5 z + C_6}{2a(a^2 - b^2)},
\end{aligned}$$

где функции $\tilde{\psi}_j^{(n-1)} = \psi_j^{(k)}$, $j = \overline{1, 4}$, $k = \overline{0, n-1}$.

Аналогично доказываются представления леммы и для значений $g_j^{(k)}(z)$, $j = 1, 3, 4$.

Следствие. Для любых $r, s, k, n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ сумма $g_1^{(r)}(x-at) + g_2^{(s)}(x+at) + g_3^{(k)}(x-bt) + g_4^{(n)}(x+bt)$ не зависит от $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$.

Лемма 4. Если функции $\varphi_j \in C^{5-j}([0, l])$, $j = \overline{0, 3}$, $\mu_1, \mu_2 \in C^5([0, \infty))$, $\chi_1, \chi_2 \in C^4([0, \infty))$ и выполняются условия (22)–(25), то функции $\tilde{g}_j^k(z)$, $j = \overline{1, 4}$, представленные формулами (21), принадлежат классам: $\tilde{g}_1^k(z) \in C^4([-kl, 0])$, $\tilde{g}_2^k(z) \in C^4([0, (k+1)l])$, $\tilde{g}_3^k(z) \in C^4\left(\left[\frac{-klb}{a}, 0\right]\right)$ и $\tilde{g}_4^k(z) \in C^4\left(\left[0, l + \frac{klb}{a}\right]\right)$, $k = 1, 2, 3, \dots$.

Доказательство леммы 3 следует из соотношений (30)–(38).

Лемма 5. Если функции $\varphi_j \in C^{5-j}([0, l])$, $j = \overline{0, 3}$, $\mu_1, \mu_2 \in C^5([0, \infty))$, $\chi_1, \chi_2 \in C^4([0, \infty))$, то равенства (22)–(25) имеют место тогда и только тогда, когда они выполняются только для $k = 1$.

Доказательство несложно осуществить с помощью метода математической индукции на основе равенств (35)–(38) и соотношений (30)–(34).

Лемма 6. Если функции $\varphi_j \in C^{5-j}([0, l])$, $j = \overline{0, 3}$, $\mu_1, \mu_2 \in C^5([0, \infty))$, $\chi_1, \chi_2 \in C^4([0, \infty))$, то равенства (22)–(25) при $k = 1$ выполняются тогда и только тогда, когда выполняются однородные условия согласования (6)–(13).

Доказательство. Равенства (35)–(38) для $k = 1$ запишем через значения заданных функций

$$\begin{aligned}
g_1^{(1)}(0) - g_1^{(0)}(0) &= -\frac{\alpha_1 \int_0^l \varphi_1(y) dy + b\alpha_1(\mu_1(0) - \varphi_0(0) + \chi_1(0) - \varphi_0(l)) + \alpha_0 \mu_1'(0) - \mu_2'(0)}{(a-b)\alpha_1}, \\
dg_1^{(1)}(0) - dg_1^{(0)}(0) &= \frac{\alpha_1 \beta_1 (b\mu_1'(0) - b\varphi_1(0) + ab\varphi_0'(l) + (a+b)\chi_1'(0) - (a+b)\varphi_1(l))}{a(a-b)\alpha_1 \beta_1} + \\
&+ \frac{\alpha_1 \beta_1 \int_0^l \varphi_2(y) dy + ab\alpha_1 \beta_0 \chi_1(0) - ab\alpha_1 \chi_2(0) + \alpha_0 \beta_1 \mu_1''(0) - \beta_1 \mu_2''(0)}{a(a-b)\alpha_1 \beta_1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d^2 g_1^{(1)}(0) - d^2 g_1^{(0)}(0) &= -\frac{\alpha_1 \beta_1 (b \mu_1''(0) - b \varphi_2(0) + ab \varphi_1'(l) + (a+b) \chi_1''(0) - (a+b) \varphi_2(l))}{a^2 (a-b) \alpha_1 \beta_1} \\
&\quad - \frac{\alpha_1 \beta_1 \int_0^l \varphi_3(y) dy + ab \alpha_1 \beta_0 \chi_1'(0) - ab \alpha_1 \chi_2'(0) + \alpha_0 \beta_1 \mu_1'''(0) - \beta_1 \mu_2'''(0)}{a^2 (a-b) \alpha_1 \beta_1}, \\
d^3 g_1^{(1)}(0) - d^3 g_1^{(0)}(0) &= \frac{-(a+b) \alpha_1 \beta_1 \varphi_3(l) - (a^2 + b^2) \alpha_1 \beta_1 \varphi_2'(0) + (a^2 + ab + b^2) \alpha_1 \beta_1 \varphi_2'(l)}{a^3 (a-b) \alpha_1 \beta_1} + \\
&\quad + \frac{-b \alpha_1 \beta_1 \varphi_3(0) + ab \alpha_1 \beta_0 \chi_1''(0) - ab \alpha_1 \chi_2''(0) + b \alpha_1 \beta_1 \mu_1''''(0) + a^2 b^2 \alpha_1 \beta_1 \varphi_0''''(0) - a^2 b^2 \alpha_1 \beta_1 \varphi_0''''(l)}{a^3 (a-b) \alpha_1 \beta_1} + \\
&\quad + \frac{(a+b) \alpha_1 \beta_1 \chi_1''(0) + \alpha_0 \beta_1 \mu_1^{(4)}(0) - \beta_1 \mu_2^{(4)}(0)}{a^3 (a-b) \alpha_1 \beta_1}, \\
d^4 g_1^{(1)}(0) - d^4 g_1^{(0)}(0) &= -\frac{-(a^2 + b^2) \alpha_1 \beta_1 \varphi_3'(0) + (a^2 + ab + b^2) \alpha_1 \beta_1 \varphi_3'(l) - ab(a+b) \alpha_1 \beta_1 \varphi_2''(0)}{a^4 (a-b) \alpha_1 \beta_1} - \\
&\quad - \frac{-(a^3 + a^2 b + ab^2 + b^3) \alpha_1 \beta_1 \varphi_2''(l) + a^2 b^2 \alpha_1 \beta_1 (\varphi_1''(0) - \varphi_1''(l)) + ab \alpha_1 (\beta_0 \chi_1''(0) - \chi_2''(0)) - \beta_1 \mu_2^{(5)}(0)}{a^4 (a-b) \alpha_1 \beta_1} - \\
&\quad - \frac{b \alpha_1 \beta_1 \mu_1^{(4)}(0) + a^2 b^3 \alpha_1 \beta_1 \varphi_0^{(4)}(0) + a^2 b^2 (a+b) \alpha_1 \beta_1 \varphi_0^{(4)}(l) + (a+b) \alpha_1 \beta_1 \chi_1^{(4)}(0) + \alpha_0 \beta_1 \mu_1^{(5)}(0)}{a^4 (a-b) \alpha_1 \beta_1}, \\
g_3^{(1)}(0) - g_3^{(0)}(0) &= -\frac{\alpha_1 \int_0^l \varphi_1(y) dy + \alpha_1 (a \mu_1(0) - a \varphi_0(0) + b \chi_1(0) - b \varphi_0(l)) + \alpha_0 \mu_1'(0) - \mu_2'(0)}{(a-b) \alpha_1}, \\
d g_3^{(1)}(0) - d g_3^{(0)}(0) &= -\frac{\alpha_1 \beta_1 (a \mu_1'(0) - a \varphi_1(0) + ab \varphi_0'(l) + (a+b) \chi_1'(0) - (a+b) \varphi_1(l))}{b(a-b) \alpha_1 \beta_1} - \\
&\quad - \frac{\alpha_1 \beta_1 \int_0^l \varphi_2(y) dy + ab \alpha_1 \beta_0 \chi_1(0) - ab \alpha_1 \chi_2(0) + \alpha_0 \beta_1 \mu_1''(0) - \beta_1 \mu_2''(0)}{b(a-b) \alpha_1 \beta_1}, \\
d^2 g_3^{(1)}(0) - d^2 g_3^{(0)}(0) &= -\frac{\alpha_1 \beta_1 (b \mu_1''(0) - b \varphi_2(0) + ab \varphi_1'(l) + (a+b) \chi_1''(0) - (a+b) \varphi_2(l))}{a^2 (a-b) \alpha_1 \beta_1} \\
&\quad - \frac{\alpha_1 \beta_1 \int_0^l \varphi_3(y) dy + ab \alpha_1 \beta_0 \chi_1'(0) - ab \alpha_1 \chi_2'(0) + \alpha_0 \beta_1 \mu_1'''(0) - \beta_1 \mu_2'''(0)}{a^2 (a-b) \alpha_1 \beta_1}, \\
d^3 g_3^{(1)}(0) - d^3 g_3^{(0)}(0) &= \frac{-(a+b) \alpha_1 \beta_1 \varphi_3(l) - (a^2 + b^2) \alpha_1 \beta_1 \varphi_2'(0) + (a^2 + ab + b^2) \alpha_1 \beta_1 \varphi_2'(l)}{a^3 (a-b) \alpha_1 \beta_1} + \\
&\quad + \frac{-b \alpha_1 \beta_1 \varphi_3(0) + ab \alpha_1 \beta_0 \chi_1''(0) - ab \alpha_1 \chi_2''(0) + b \alpha_1 \beta_1 \mu_1''''(0) + a^2 b^2 \alpha_1 \beta_1 \varphi_0''''(0) - a^2 b^2 \alpha_1 \beta_1 \varphi_0''''(l)}{a^3 (a-b) \alpha_1 \beta_1} + \\
&\quad + \frac{(a+b) \alpha_1 \beta_1 \chi_1''(0) + \alpha_0 \beta_1 \mu_1^{(4)}(0) - \beta_1 \mu_2^{(4)}(0)}{a^3 (a-b) \alpha_1 \beta_1},
\end{aligned}$$

$$d^4 g_3^{(1)}(0) - d^4 g_3^{(0)}(0) = - \frac{-(a^2 + b^2)\alpha_1\beta_1\varphi_3'(0) + (a^2 + ab + b^2)\alpha_1\beta_1\varphi_3'(l) - ab(a+b)\alpha_1\beta_1\varphi_2''(0)}{a^4(a-b)\alpha_1\beta_1} - \frac{-(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)\alpha_1\beta_1\varphi_2''(l) + a^2b^2\alpha_1\beta_1(\varphi_1'''(0) - \varphi_1'''(l)) + ab\alpha_1(\beta_0\chi_1'''(0) - \chi_2'''(0)) - \beta_1\mu_2^{(5)}(0)}{a^4(a-b)\alpha_1\beta_1} - \frac{b\alpha_1\beta_1\mu_1^{(4)}(0) + a^2b^3\alpha_1\beta_1\varphi_0^{(4)}(0) + a^2b^2(a+b)\alpha_1\beta_1\varphi_0^{(4)}(l) + (a+b)\alpha_1\beta_1\chi_1^{(4)}(0) + \alpha_0\beta_1\mu_1^{(5)}(0)}{a^4(a-b)\alpha_1\beta_1}.$$

Аналогично рассматриваются равенства $(g_2^1)^{(j)}(l) - (g_2^0)^{(j)}(l)$ и $(g_4^1)^{(j)}(l) - (g_4^0)^{(j)}(l)$, $j = \overline{0,4}$.

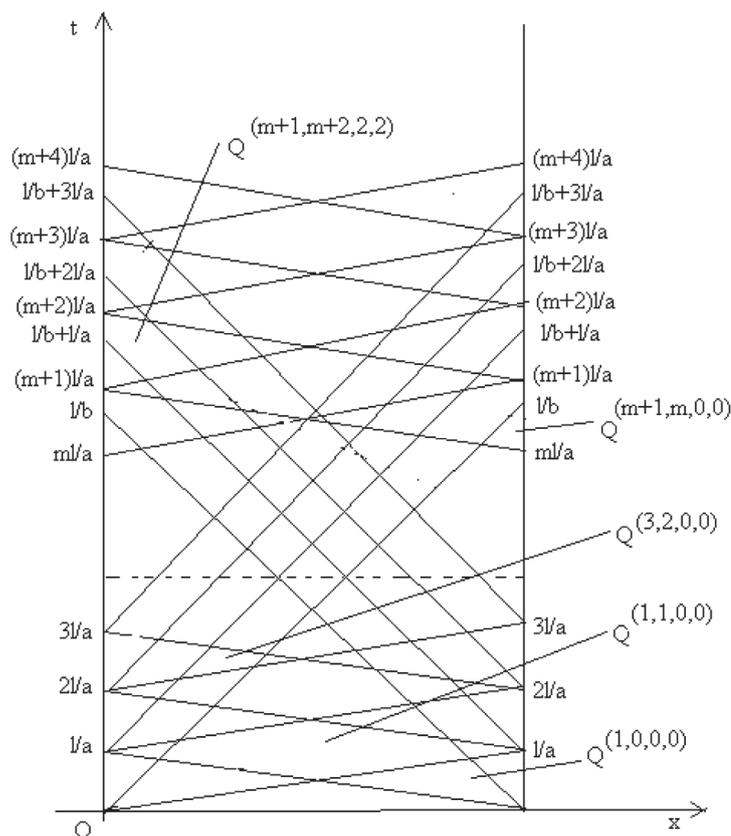
Такие равенства выполняются тогда и только тогда, когда выполняются однородные условия согласования (6)–(9). Это видно из соотношений (30)–(34). Лемма 6 доказана.

Пусть $\left[\frac{a}{b}\right] = m$ – целая часть числа $\frac{a}{b}$, $m > 1$. Разобьем область \overline{Q} с помощью характеристик уравнения на подобласти $Q^{(r,s,k,n)}$. Разбиение области \overline{Q} на подобласти осуществляется следующим образом (см. также рисунок):

$$Q^{(-1,0,0,0)} = Q^{(m-1,m,-1,0)} = Q^{(m,m,0,0)} = \emptyset - \text{пустое множество,}$$

$$Q^{(r,s,k,n)} = \{(t,x) \in \overline{Q}, sl - x \leq at \leq x + rl, nl - x \leq bt \leq x + kl\},$$

$$\overline{Q} = \bigcup_{s=0}^m \bigcup_{r=s-1}^{r+1} Q^{(r,s,0,0)} \cup \bigcup_{j=0}^{\infty} \bigcup_{i=j-1}^{j+1} \bigcup_{r=i-1}^i \bigcup_{s=j-1}^j Q^{(m+r,m+s,i,j)}.$$



Разбиение области \overline{Q} на подобласти $Q^{(r,s,k,n)}$

Теорема 1. Предположим, что функции $\varphi_j \in C^{5-j}([0, l])$, $j = \overline{0, 3}$, $\mu_1, \mu_2 \in C^5([0, \infty))$, $\chi_1, \chi_2 \in C^4([0, \infty))$. При выполнении указанных условий гладкости на заданные функции в классе $C^4(\overline{Q})$ существует единственное классическое решение $u(t, x)$ задачи (2)–(5) и (14) тогда и только тогда, когда выполняются однородные условия согласования (6)–(13).

Доказательство теоремы 1 фактически проведено в предыдущих рассуждениях.

Перейдем к решению задачи (1)–(5). Находим частное решение уравнения (1). Пусть $\omega(t, \tau, x)$ – решение следующей задачи:

$$\left(\partial_t^2 - a^2 \partial_x^2\right)\left(\partial_t^2 - b^2 \partial_x^2\right)\omega(t, \tau, x) = 0, \quad (39)$$

с начальными условиями

$$\partial_t^j \omega(0, \tau, x) = 0, \quad j = 0, 1, 2, \quad \text{и} \quad \partial_t^3 \omega(0, \tau, x) = \overline{f(\tau, x)}. \quad (40)$$

Здесь продолжение функции $\overline{f(\tau, x)}$ по переменной x с отрезка $[0, l]$ на всю полупрямую $[0, \infty)$.

Лемма 7. Частное решение $v(t, x)$ уравнения (1) можно находить через решение однородного уравнения (27)–(28) с параметром $\tau \in [0, \infty)$ по формуле

$$v(t, x) = \int_0^t \omega(t - \tau, \tau, x) d\tau. \quad (41)$$

Доказательство. Вычислим частные производные $v(t, x)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= \omega(0, t, x) + \int_0^t \frac{\partial \omega(t - \tau, \tau, x)}{\partial t} d\tau = \int_0^t \frac{\partial \omega(t - \tau, \tau, x)}{\partial t} d\tau, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{\partial \omega(0, t, x)}{\partial t} + \int_0^t \frac{\partial^2 \omega(t - \tau, \tau, x)}{\partial t^2} d\tau = \int_0^t \frac{\partial^2 \omega(t - \tau, \tau, x)}{\partial t^2} d\tau, \\ \frac{\partial^3 v}{\partial t^3} &= \frac{\partial^2 \omega(0, t, x)}{\partial t^2} + \int_0^t \frac{\partial^3 \omega(t - \tau, \tau, x)}{\partial t^3} d\tau = \int_0^t \frac{\partial^3 \omega(t - \tau, \tau, x)}{\partial t^3} d\tau, \\ \frac{\partial^4 v}{\partial t^4} &= \frac{\partial^3 \omega(0, t, x)}{\partial t^3} + \int_0^t \frac{\partial^4 \omega(t - \tau, \tau, x)}{\partial t^4} d\tau = \overline{f(t, x)} + \int_0^t \frac{\partial^4 \omega(t - \tau, \tau, x)}{\partial t^4} d\tau, \\ \frac{\partial^4 v}{\partial t^2 \partial x^2} &= \int_0^t \frac{\partial^4 \omega(t - \tau, \tau, x)}{\partial t^2 \partial x^2} d\tau, \quad \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = \int_0^t \frac{\partial^4 \omega(t - \tau, \tau, x)}{\partial x^4} d\tau. \end{aligned}$$

Далее имеем

$$\frac{\partial^4 v}{\partial t^4} - (a^2 + b^2) \frac{\partial^4 v}{\partial t^2 \partial x^2} + a^2 b^2 \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = \overline{f(t, x)} + \int_0^t \left(\frac{\partial^4 \omega}{\partial t^4} - (a^2 + b^2) \frac{\partial^4 \omega}{\partial t^2 \partial x^2} + a^2 b^2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} \right) d\tau = \overline{f(t, x)},$$

или

$$\left(\partial_t^2 - a^2 \partial_x^2\right)\left(\partial_t^2 - b^2 \partial_x^2\right)v(t, x) = \overline{f(t, x)}.$$

Итак, лемма доказана.

Решение исходной задачи (1)–(4) можно представить в виде

$$u(t, x) = \hat{u}(t, x) + v(t, x),$$

где v – частное решение уравнения (1), которое определяется формулой (41).

Функция $\hat{u}(t, x)$ – решение следующей задачи:

$$L\hat{u} = (\partial_t^2 - a^2\partial_x^2)(\partial_t^2 - b^2\partial_x^2)\hat{u}(t, x) = 0, \quad (t, x) \in \bar{Q}, \quad (42)$$

$$\partial_t^j \hat{u}(0, x) = \varphi_j(x) - \int_0^0 \partial_t^j \omega(t - \tau, \tau, x) d\tau = \varphi_j(x), \quad j = 0, 1, 2, 3, \quad x \in [0, l], \quad (43)$$

$$\hat{u}(t, 0) = \mu_1(t) - v(t, 0) = \hat{\mu}_1(t), \quad t \in [0, \infty), \quad (44)$$

$$\alpha_0 \hat{u}(t, 0) + \alpha_1 \int_0^l \hat{u}(t, \xi) d\xi = \mu_2(t) - \alpha_0 v(t, 0) - \alpha_1 \int_0^l v(t, \xi) d\xi = \hat{\mu}_2(t), \quad t \in [0, \infty), \quad (45)$$

$$\hat{u}(t, l) = \chi_1(t) - v(t, l) = \hat{\chi}_1(t), \quad t \in [0, \infty), \quad (46)$$

$$\beta_0 \hat{u}(t, l) + \beta_1 \partial_x \hat{u}(t, l) = \chi_2(t) - \beta_0 v(t, l) - \beta_1 \partial_x v(t, l) = \hat{\chi}_2(t), \quad t \in [0, \infty). \quad (47)$$

Согласно теореме 1, заданные функции задачи (42)–(47) удовлетворяют однородным условиям согласования:

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_1^{(j)}(0) &= \varphi_j(0), \quad j = 0, 1, 2, 3, \\ \alpha_0 \hat{\mu}_1^{(j)}(0) + \alpha_1 \int_0^l \varphi_j(y) dy &= \hat{\mu}_2^{(j)}(0), \quad j = 0, 1, 2, 3, \\ \hat{\chi}_1^{(j)}(l) &= \varphi_j(l), \quad j = 0, 1, 2, 3, \\ \beta_0 \hat{\chi}_1^{(j)}(l) + \beta_1 \varphi_j'(l) &= \hat{\chi}_2^{(j)}(l), \quad j = 0, 1, 2, 3, \\ (a^2 + b^2) \alpha_1 \int_0^l \varphi_2''(y) dy - a^2 b^2 \alpha_1 \int_0^l \varphi_0^{(4)}(y) dy + \alpha_0 \hat{\mu}_1^{(4)}(0) - \hat{\mu}_2^{(4)}(0) &= 0, \\ (a^2 + b^2) \alpha_1 \int_0^l \varphi_3''(y) dy - a^2 b^2 \alpha_1 \int_0^l \varphi_1^{(4)}(y) dy + \alpha_0 \hat{\mu}_1^{(5)}(0) - \hat{\mu}_2^{(5)}(0) &= 0, \\ (a^2 + b^2) \varphi_2''(0) - a^2 b^2 \varphi_0^{(4)}(0) - \hat{\mu}_1^{(4)}(0) &= 0, \\ (a^2 + b^2) \varphi_2''(l) - a^2 b^2 \varphi_0^{(4)}(l) - \hat{\chi}_1^{(4)}(l) &= 0. \end{aligned} \quad (48)$$

Из доказательства леммы 6 следует, что

$$\begin{aligned} v(0, 0) &= \partial_t v(0, 0) = \partial_t^2 v(0, 0) = \partial_t^3 v(0, 0) = \int_0^l \partial_t^3 v(0, \xi) d\xi = 0, \\ \partial_t^4 v(0, 0) &= \overline{f(0, 0)}, \quad \partial_t^5 v(0, x) = \partial_t f(0, x), \quad \partial_t^5 v(0, 0) = \partial_t f(0, 0), \\ v(0, l) &= \partial_t v(0, l) = \partial_t^2 v(0, l) = \partial_t^3 v(0, l) = 0, \quad \partial_t^4 v(0, l) = \overline{f(0, l)}, \\ \partial_x v(0, 0) &= \partial_t (\partial_x v(0, 0)) = \partial_t^2 (\partial_x v(0, 0)) = \partial_t^3 (\partial_x v(0, 0)) = 0, \\ \partial_x v(0, l) &= \partial_t (\partial_x v(0, l)) = \partial_t^2 (\partial_x v(0, l)) = \partial_t^3 (\partial_x v(0, l)) = 0. \end{aligned} \quad (49)$$

В силу формул (49) условия согласования (48) через $\varphi_j, \mu_i, \chi_i, f(t, x)$ запишутся в виде соотношений (6)–(13).

Теорема 2. *Предположим, что функции $f \in C^1(\overline{Q})$, $\varphi_j \in C^{5-j}([0, l])$, $j = \overline{0, 3}$, $\mu_1, \mu_2 \in C^5[0, \infty)$, $\chi_1, \chi_2 \in C^4[0, \infty)$. В классе функций $C^4(\overline{Q})$ существует единственное классическое решение $u(t, x) = \hat{u}(t, x) + v(t, x)$ тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования (6)–(13), где $\hat{u}(t, x)$ – решение задачи (42)–(47), а $v(t, x)$ определяется формулой (41).*

Заключение. В данной статье получены формулы классического решения смешанной задачи для биволнового уравнения с интегральным условием. Доказано, что эта задача имеет единственное решение только тогда, когда выполняются в угловых точках заданной области изменения независимых переменных условия согласования для заданных функций уравнения, условий Коши и граничных условий. Следует отметить, что эти условия являются необходимыми и достаточными.

Список использованной литературы

1. Корзюк, В. И. Смешанная задача для гиперболического уравнения четвертого порядка / В. И. Корзюк, Е. С. Чеб // Вес. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2004. – № 2. – С. 9–13.
2. Корзюк, В. И. Смешанные задачи для биволнового уравнения / В. И. Корзюк, Е. С. Чеб // Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер. I. – 2005. – № 1. – С. 63–68.
3. Корзюк, В. И. Классические решения смешанных задач для одномерного биволнового уравнения / В. И. Корзюк, Нгуен Ван Винь // Вес. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2016. – № 1. – С. 69–79.
4. Корзюк, В. И. Задача Коши для уравнения четвертого порядка с биволновым оператором / В. И. Корзюк, Е. С. Чеб // Дифференц. уравнения. – 2007. – Т. 43, № 5. – С. 669–676.
5. Корзюк, В. И. Классическое решение смешанной задачи для биволнового уравнения методом характеристик / В. И. Корзюк, Е. С. Чеб, Ле Тхи Тху // Тр. ин-та математики Нац. акад. наук Беларуси. – 2010. – Т. 18, № 2. – С. 36–54.
6. Радыно, Я. В. Задача Коши для некоторых абстрактных гиперболических уравнений четного порядка / Я. В. Радыно, Н. И. Юрчук // Дифференц. уравнения. – 1976. – Т. 12, № 2. – С. 331–342.
7. Hadamard, J. Le problem de Cauchy et les equations aux derives partielles lineaires hyperboliques / J. Hadamard. – Paris, 1932.
8. Hadamard, J. Proprietes d'une equation lineaire aux derives partielles du quatrieme order / J. Hadamard // Tohuku Math. J. – 1933. – Vol. 37. – P. 133–150.
9. Korzyuk, V. I. Solution of the Cauchy problem for a hyperbolic equation with constant coefficients in the case of two independent variables / V. I. Korzyuk, I. S. Kozlovskaya // Differential equations. – 2012. – Vol. 48, N 5. – P. 1–10.
10. Hetnarski, R. B. Mathematical theory of elasticity / R. B. Hetnarski, J. Ignaczak. – Taylor and Francis Books Inc., 2004.

Поступила в редакцию 04.08.2016

УДК 519.1

Ю. А. КАРТЫННИК

АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СВЯЗНЫХ ОКРЕСТНОСТНЫХ МНОЖЕСТВ В ГРАФАХ

*Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь,
e-mail: kartynnik@bsu.by*

В работе вводится и характеризуется класс графов, в которых каждое связное доминирующее множество является (связным) окрестностным, а также класс графов, для каждого связного порожденного подграфа которых мощности наименьшего окрестностного множества и наименьшего связного окрестностного множества совпадают. В предположении $P \neq NP$ доказана неаппроксимируемость за полиномиальное время с логарифмической гарантированной оценкой точности задачи о наименьшем связном окрестностном множестве в их общем подклассе – классе симплициально-расщепляемых графов.

Ключевые слова: симплициально-расщепляемый граф, число связного доминирования, связное окрестностное число.

Y. A. KARTYNNIK

ALGORITHMIC PROPERTIES OF CONNECTED NEIGHBOURHOOD SETS IN GRAPHS

*Belarusian State University, Minsk, Belarus,
e-mail: kartynnik@bsu.by*

We introduce and characterize the class of graphs in which every connected dominating set is a (connected) neighbourhood set and a class of graphs whose all connected induced subgraphs have equal minimum neighbourhood set and minimum connected neighbourhood set cardinalities. Assuming $P \neq NP$, we also prove that the minimum connected neighbourhood set problem cannot be approximated within a logarithmic factor in polynomial time in their common subclass, the class of simplicial split graphs.

Keywords: simplicial split graph, connected domination number, connected neighbourhood number.

Введение. Доминирующее множество D вершин графа G называется окрестностным [1], если для каждого ребра графа G найдется вершина, принадлежащая D , замкнутое окружение которой содержит данное ребро. Доминирующее (окрестностное) множество графа называется связным доминирующим [2] (связным окрестностным [3]), если оно порождает связный подграф этого графа. В работе [4] введен и охарактеризован класс доминантно-треугольных графов как графов, в которых каждое доминирующее множество является окрестностным (этот класс графов совпал с классом реберно-симплициальных графов, в которых каждое ребро есть подмножество некоторой симплициальной клики). В настоящей работе вводится класс связно-доминантно-треугольных графов как графов, в которых каждое связное доминирующее множество является (связным) окрестностным. Получена характеристика связно-доминантно-треугольных графов, из которой следует полиномиальный алгоритм их распознавания. Также введен и охарактеризован в терминах запрещенных порожденных подграфов класс совершенных связно-окрестностных графов, в каждом связном порожденном подграфе которых мощности наименьшего окрестностного множества и наименьшего связного окрестностного множества совпадают. Как следует из приводимой характеристики, подклассом класса совершенных связно-окрестностных графов является широко известный класс



Рис. 1. Соотношения между изучаемыми классами графов

расщепляемых графов [5, 6]. Соотношения между указанными классами графов (некоторые из них будут следовать из дальнейшего изложения) приведены на рис. 1, где из соединенной линией пары классов графов надкласс изображен сверху. В предположении $P \neq NP$ доказана неаппроксимируемость за полиномиальное время с логарифмической гарантированной оценкой точности задачи о наименьшем связном окрестностном множестве в классе симплициально-расщепляемых графов, который является собственным подклассом классов связно-доминантно-треугольных, совершенных связно-окрестностных и расщепляемых графов. Это первый известный автору результат о сложности соответствующей задачи в классе всех графов.

1. Предварительные сведения. Теоретико-графовые понятия и обозначения, не оговоренные специально, следуют [7]. Рассматриваются конечные неориентированные графы без петель и кратных ребер (далее называемые просто *графами*). Множества вершин и ребер графа G обозначаются через $V(G)$ и $E(G)$ соответственно. Число $|V(G)|$ вершин графа G называется его *порядком*. Множество всех вершин графа G , смежных с вершиной v , называется *окружением* вершины v и обозначается $N(v)$; *замкнутым окружением* вершины v называется множество $N[v] = N(v) \cup \{v\}$. Для произвольного подмножества $X \subseteq V(G)$ положим $N(X) = \bigcup_{v \in X} N(v) \setminus X$ и $N[X] = N(X) \cup X$ – *окружение* и *замкнутое окружение* множества X соответственно. *Замкнутым собственным окружением* произвольного ребра $e = uv \in E(G)$ называется множество вершин $PN[e] = N[u] \cap N[v]$. Подграф графа G , порожденный множеством вершин $X \subseteq V(G)$, обозначается $G(X)$; положим $G - X = G(V(G) \setminus X)$.

Граф G называется *\mathcal{F} -свободным* для некоторого набора графов \mathcal{F} , если G не содержит порожденных подграфов, изоморфных любому из графов набора \mathcal{F} . Класс графов \mathcal{G} называется *наследственным*, если каждый порожденный подграф графа из \mathcal{G} также принадлежит классу \mathcal{G} . Любой наследственный (и только наследственный) класс графов может быть задан множеством \mathcal{F} своих запрещенных порожденных подграфов. Это означает, что $G \in \mathcal{G}$ тогда и только тогда, когда G является \mathcal{F} -свободным графом.

Множество попарно несмежных вершин графа называется *независимым*. Множество попарно смежных вершин графа называется *кликой*. Клика графа называется *максимальной*, если она не является подмножеством никакой другой клики этого графа. Если для вершины v клики C выполнено равенство $N[v] = C$, то вершина v называется *симплициальной вершиной*, а C – *симплициальной кликой*. Каждая симплициальная клика, очевидно, является максимальной. Граф G называется *реберно-симплициальным*, если каждое его ребро принадлежит подграфу, порожденному некоторой симплициальной кликой.

Граф G называется *расщепляемым* [5, 6], если множество его вершин можно представить в виде разбиения $V(G) = C \cup I$, $C \cap I = \emptyset$, где C – клика, а I – независимое множество. Будем называть расщепляемый граф *симплициально-расщепляемым*, если существует разбиение множества его вершин на симплициальную клику и независимое множество.

Пусть G – произвольный граф. Множество $D \subseteq V(G)$ называется *доминирующим*, если $N[D] = V(G)$. Доминирующее множество D графа G называется *минимальным*, если оно не содержит никакого другого доминирующего множества этого графа. Наименьшая из мощностей доминирующих множеств графа G называется *числом доминирования* графа G и обозначается через $\gamma(G)$. Доминирующее множество D графа G называется *связным* [2], если порожденный подграф $G(D)$ связан. Связное доминирующее множество D графа G называется *минимальным*, если оно не содержит никакого другого связного доминирующего множества этого графа. Наименьшая из мощностей связных доминирующих множеств графа G называется *числом связного доминирования* графа G и обозначается через $\gamma_c(G)$. Доминирующее множество D графа G называется *окрестностным* [1], если для каждого ребра $uv \in E(G - D)$ в D найдется вершина, смежная одновременно с обоими его концами u и v . Это эквивалентно тому, что $G = \bigcup_{v \in D} G(N[v])$. Наименьшая из мощностей окрестностных множеств графа G называется *окрестностным числом* графа G и будет далее обозначаться через $nb(G)$. Окрестностное множество D графа G называется *связным окрестностным* [3], если оно порождает связный подграф графа G . Через $nb_c(G)$ будем обозначать *связное окрестностное число* графа G – наименьшую из мощностей связных окрестностных множеств этого графа. Отметим, что связные доминирующие множества и связные окрестностные множества существуют лишь в связных графах, поэтому для несвязного графа G параметры $\gamma_c(G)$ и $nb_c(G)$ не определены. Для связного же графа G выполняются очевидные соотношения $\gamma(G) \leq \gamma_c(G)$ и $nb(G) \leq nb_c(G)$.

Согласно [8], сформулируем следующие четыре задачи распознавания.

ДОМИНИРУЮЩЕЕ (СВЯЗНОЕ ДОМИНИРУЮЩЕЕ) МНОЖЕСТВО.

Условие: задан граф G и натуральное число k .

Вопрос: существует ли в графе G доминирующее (связное доминирующее) множество D такое, что $|D| \leq k$?

ОКРЕСТНОСТНОЕ (СВЯЗНОЕ ОКРЕСТНОСТНОЕ) МНОЖЕСТВО.

Условие: задан граф G и натуральное число k .

Вопрос: существует ли в графе G окрестностное (связное окрестностное) множество D такое, что $|D| \leq k$?

Под оптимизационной версией каждой из четырех перечисленных задач распознавания будем понимать задачу нахождения соответствующего множества такой наименьшей мощности k , для которой ответ на вопрос данной распознавательной задачи является утвердительным. При этом для обозначения оптимизационных версий задач будем использовать те же названия, что и для их распознавательных версий; из контекста должно быть ясно, о какой версии задачи идет речь.

2. Доминантно-треугольные графы. Граф G называется *доминантно-треугольным* [4], если для каждого минимального доминирующего множества D этого графа и каждого ребра $uv \in E(G - D)$ найдется вершина $w \in D$, одновременно смежная с вершинами u и v (т. е. множество вершин $\{u, v, w\}$ порождает треугольник в графе G).

Другими словами, каждое минимальное доминирующее множество доминантно-треугольного графа G является также его окрестностным множеством. Отметим, что требование минимальности доминирующих множеств в этом определении можно опустить без ограничения общности [4]. Как следует из определения, если G – доминантно-треугольный граф, то $\gamma(G) = nb(G)$ (поскольку каждое окрестностное множество, в свою очередь, всегда является доминирующим).

Характеризация класса доминантно-треугольных графов, полученная в [4], указывает на его совпадение с классом реберно-симплициальных графов. Нетрудно видеть, что каждый симплициально-расщепляемый граф является реберно-симплициальным (доминантно-треугольным).

Вершину v графа G будем называть *собственной для ребра* $e \in E(G)$, если $N[v] \subseteq PN[e]$ (в работе [4] такая вершина называется *опорной для ребра* e).

Теорема 1 [4]. Для графа G следующие утверждения эквивалентны:

- 1) G – доминантно-треугольный;
- 2) каждое ребро графа G обладает собственной вершиной;
- 3) G – реберно-симплициальный.

Как показано в работе [4], в каждом доминантно-треугольном графе семейства минимальных доминирующих и минимальных окрестностных множеств совпадают. Поэтому задачи ДОМИНИРУЮЩЕЕ МНОЖЕСТВО и ОКРЕСТНОСТНОЕ МНОЖЕСТВО в классе доминантно-треугольных графов эквивалентны. Для этих задач был доказан следующий результат о сложности аппроксимации.

Теорема 2 [4]. *В предположении $P \neq NP$ для оптимизационной версии каждой из задач ДОМИНИРУЮЩЕЕ МНОЖЕСТВО и ОКРЕСТНОСТНОЕ МНОЖЕСТВО не существует полиномиального ($k \ln n$)-приближенного алгоритма в классе расщепляемых доминантно-треугольных графов порядка n , где $k > 0$ – некоторая фиксированная константа.*

Доказательство теоремы 2, схема которого представлена в работе [4], на самом деле влечет следующий более сильный результат.

Теорема 3. *В предположении $P \neq NP$ для оптимизационной версии каждой из задач ДОМИНИРУЮЩЕЕ МНОЖЕСТВО и ОКРЕСТНОСТНОЕ МНОЖЕСТВО не существует полиномиального ($k \ln n$)-приближенного алгоритма в классе связных симплициально-расщепляемых графов порядка n , где k – фиксированная константа из условия теоремы 2.*

3. Характеризация класса связно-доминантно-треугольных графов. Связный граф G назовем *связно-доминантно-треугольным* (для краткости – *СДТ-графом*), если для каждого минимального связного доминирующего множества D этого графа и каждого ребра $uv \in E(G - D)$ найдется вершина $w \in D$, одновременно смежная с вершинами u и v (т. е. множество вершин $\{u, v, w\}$ порождает треугольник в графе G).

Другими словами, каждое минимальное связное доминирующее множество СДТ-графа G является также его (связным) окрестностным множеством. Заметим, что, как и в случае доминантно-треугольных графов, требование минимальности связных доминирующих множеств в определении СДТ-графа можно опустить без ограничения общности.

Приведем характеристику класса связно-доминантно-треугольных графов.

Теорема 4. *Для связного графа G следующие утверждения эквивалентны:*

1) G – СДТ-граф;

2) для каждого ребра $e \in E(G)$ без собственных вершин граф $G - PN[e]$ несвязен.

Доказательство. 1) \Rightarrow 2). Предположим, что в СДТ-графе G существует ребро uv , не имеющее собственных вершин и такое, что граф $G - PN[uv]$ связан. Тогда для каждой вершины $x \in PN[uv]$ будет выполняться соотношение $N[x] \setminus PN[uv] \neq \emptyset$. Отсюда следует, что $x \in N[D]$, где $D = V(G) \setminus PN[uv]$, т. е. множество D является доминирующим в графе G . С другой стороны, граф $G(D) = G - PN[uv]$ является связным и, следовательно, D – связное доминирующее множество графа G . В то же время D не содержит ни одной вершины, одновременно смежной с u и v . Получили противоречие с тем, что G – СДТ-граф.

2) \Rightarrow 1). Пусть связный граф G не является СДТ-графом. Тогда найдутся такие его связное доминирующее множество $D \subseteq V(G)$ и ребро $uv \in E(G - D)$, что каждая вершина, принадлежащая D , не смежна хотя бы с одной вершиной из $\{u, v\}$. Отсюда, в частности, следует, что $PN[uv] \cap D = \emptyset$. Если теперь предположить, что у ребра uv имеется собственная вершина x , т. е. $N[x] \subseteq PN[uv]$, то $N[x] \cap D = \emptyset$ – противоречие с тем, что D – доминирующее множество. Таким образом, ребро uv не имеет собственных вершин и, следовательно, порожденный подграф $H = G - PN[uv]$ несвязен. Поскольку $D \subseteq V(G) \setminus PN[uv] = V(H)$, связный порожденный подграф $G(D)$ является также подграфом графа H . Значит, все вершины множества D принадлежат некоторой одной связной компоненте графа H . Но тогда каждая вершина любой другой связной компоненты графа H не входит в $N[D]$ в графе G , что невозможно для доминирующего множества D . Теорема доказана.

Следствие 1. *Для каждого СДТ-графа G выполняется соотношение $\gamma_c(G) = nb_c(G)$.*

Доказательство. Каждое связное окрестностное множество произвольного связного графа G является связным доминирующим, поэтому $\gamma_c(G) \leq nb_c(G)$. Для СДТ-графа G верно и обратное:



Рис. 2. Не доминантно-треугольный, но связно-доминантно-треугольный граф (простая цепь P_n выделена утолщенной линией)

каждое связное доминирующее множество такого графа является (связным) окрестностным, поэтому $\gamma_c(G) \leq nb_c(G)$. Следствие доказано.

Как следует из теоремы 4, класс СДТ-графов допускает простой полиномиальный алгоритм распознавания.

Каждый связный доминантно-треугольный граф, очевидно, является связно-доминантно-треугольным. На рис. 2 изображен пример серии СДТ-графов, не являющихся доминантно-треугольными, – квадраты P_n^2 простых цепей P_n для $n \geq 6$.

4. Характеризация класса совершенных связно-окрестностных графов. В работе [9] введен и охарактеризован в терминах запрещенных порожденных подграфов наследственный класс совершенных связно-доминантных графов. Граф G называется *совершенным связно-доминантным*, если для каждого его связного порожденного подграфа выполнено равенство $\gamma(H) = \gamma_c(H)$.

Теорема 5 ([9]). *Граф G является совершенным связно-доминантным тогда и только тогда, когда $G - (P_5, C_5)$ -свободный граф.*

По аналогии назовем граф G *совершенным связно-окрестностным* (для краткости – *ССО-графом*), если для каждого его связного порожденного подграфа H выполнено равенство $nb(H) = nb_c(H)$.

В следующей теореме содержится характеристика наследственного класса ССО-графов в терминах запрещенных порожденных подграфов, из которой следует полиномиальный алгоритм распознавания таких графов.

Теорема 6. *Граф G является совершенным связно-окрестностным тогда и только тогда, когда $G - (P_5, C_4, C_5)$ -свободный граф (рис. 3).*

При доказательстве теоремы будем стремиться наиболее близко (там, где это возможно) следовать обозначениям [9] из доказательства теоремы 5.

Доказательство. Необходимость очевидна, так как для связных графов P_5 , C_4 и C_5 выполнены соотношения

$$nb(P_5) = 2, \quad nb_c(P_5) = 3; \quad nb(C_4) = 2, \quad nb_c(C_4) = 3; \quad nb(C_5) = 3, \quad nb_c(C_5) = 4.$$

Докажем достаточность. Предположим, что существуют графы, не содержащие порожденных подграфов, изоморфных P_5 , C_4 , C_5 , и при этом не являющиеся ССО-графами. Пусть G – один из таких графов. Без ограничения общности можно считать, что G связен и $nb(G) < nb_c(G)$ (иначе в качестве графа G можно взять именно тот из его связных порожденных подграфов, для которого нарушается равенство окрестностного и связного окрестностного чисел).

Выберем в графе G такое наименьшее по мощности окрестностное множество D , для которого порожденный им подграф $H = G(D)$ имеет наименьшее число компонент связности среди всех подграфов, порожденных наименьшими окрестностными множествами графа G . Поскольку $nb(G) < nb_c(G)$, то H – несвязный граф. Зафиксируем в H две связные компоненты K и L .

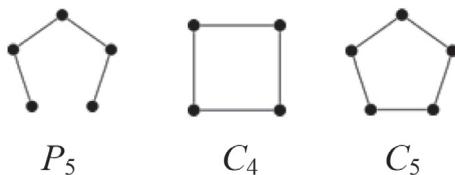


Рис. 3. Запрещенные порожденные подграфы для класса ССО-графов

В силу связности графа G в нем найдется кратчайшая цепь (u_1, u_2, \dots, u_t) , для которой $u_1 \in V(K)$ и $u_t \in V(L)$.

Утверждение 1. $t = 3$.

Доказательство. С одной стороны, $t \geq 3$, так как вершины u_1 и u_t принадлежат различным связным компонентам графа H . С другой стороны, $t \leq 4$, так как граф G не содержит порожденной цепи P_5 .

Предположим, что $t = 4$. Покажем, что в таком случае множество вершин

$$D' = (D \setminus \{u_1, u_4\}) \cup \{u_2, u_3\}$$

является окрестностным множеством графа G . Допустим, что это не так. Тогда либо множество D' не является доминирующим, либо оно является доминирующим, но не окрестностным. В первом случае существует вершина $v \notin D'$, не смежная ни с одной вершиной из D' , но смежная с некоторой вершиной из доминирующего множества D . Поскольку $D \setminus D' = \{u_1, u_4\}$, вершина v смежна по крайней мере с одной из вершин u_1 и u_4 . Но тогда множество вершин $\{v, u_1, u_2, u_3, u_4\}$ порождает в графе G один из графов P_5 или C_5 , что невозможно.

Рассмотрим теперь случай, когда множество D' является доминирующим, но не окрестностным. Тогда найдется ребро e , для которого существует вершина d окрестностного множества D такая, что $d \in PN[e]$, но при этом $PN[e] \cap D' = \emptyset$ (в частности, $e \cap \{u_2, u_3\} = \emptyset$). Имеем $d \in D \setminus D' = \{u_1, u_4\}$. В силу симметрии будем считать, что $d = u_1$.

Имея в виду, что $G(\{u_1, u_2, u_3, u_4\}) \cong P_4$, рассмотрим возможные случаи.

1. Ребро e инцидентно вершине u_1 и не инцидентно вершине u_4 . Пусть v – вершина ребра e , отличная от u_1 . В этом случае $vu_2 \notin E(G)$, так как иначе $u_2 \in PN[e] \cap D'$, что невозможно. Если $vu_3 \in E(G)$, то $G(\{v, u_1, u_2, u_3\}) \cong C_4$, что также невозможно. Иначе множество вершин $\{v, u_1, u_2, u_3, u_4\}$ порождает один из графов C_5 или P_5 .

2. Ребро e инцидентно вершине u_4 и не инцидентно вершине u_1 . Но для этого необходимо $u_1u_4 \in E(G)$ в силу $u_1 = d \in PN[e] \subseteq N[u_4]$ – противоречие.

3. Ребро e не инцидентно вершинам u_1 и u_4 . Пусть $e = vw$. Поскольку $u_2, u_3 \in D'$ и $D' \cap PN[e] = \emptyset$, каждая из вершин u_2 и u_3 не может быть смежна одновременно с обеими вершинами v и w . Если при этом каждая из вершин u_2 и u_3 смежна с некоторой из вершин v и w , то $G(\{v, w, u_2, u_3\}) \cong C_4$. Иначе одна из вершин, инцидентных e , не смежна ни с u_2 , ни с u_3 . Не нарушая общности, будем считать, что это v . В этом случае порожденный подграф $G(\{v, u_1, u_2, u_3, u_4\})$ изоморфен C_5 или P_5 .

Таким образом, D' – наименьшее окрестностное множество графа G , поскольку $|D'| = |D|$. В силу выбора множества D граф $G(D')$ имеет не меньше компонент связности, чем $H = G(D)$. Следовательно, множество вершин $(V(K) \setminus \{u_1\}) \cup (V(L) \setminus \{u_4\}) \cup \{u_2, u_3\}$ порождает в G подграф F , имеющий не менее двух связных компонент. Пусть M – та из связных компонент графа F , которая не содержит вершин u_2 и u_3 . Можно считать, что $V(M) \subseteq V(K)$. Из связности графа K следует наличие такой вершины $w \in V(M)$, что $u_1w \in E(G)$.

Но тогда $G(\{w, u_1, u_2, u_3, u_4\}) \cong P_5$ – противоречие. Утверждение доказано.

Для $i \in \{1, 3\}$ введем обозначение $D_i = (D \setminus \{u_i\}) \cup \{u_2\}$.

Утверждение 2. Если множество вершин D_i , $i \in \{1, 3\}$, не является окрестностным множеством графа G , то найдется вершина $v_i \in V(G)$, смежная с u_i и не смежная ни с одной из вершин множества $U_i = \{u_1, u_2, u_3\} \setminus \{u_i\}$.

Доказательство. Докажем это утверждение для $i = 1$, доказательство для $i = 3$ будет симметричным.

Пусть множество вершин D_1 не является окрестностным множеством графа G . Если оно не является доминирующим, то в качестве v_1 можно взять любую вершину из множества $V(G) \setminus N[D_1] \subseteq N(u_1)$. Иначе найдется такое ребро $e \in E(G)$, что $PN[e] \cap D_1 = \emptyset$ (тогда, в част-

ности, $e \cap U_1 = \emptyset$). В этом случае $u_1 \in PN[e]$, поскольку D – окрестностное множество и $D \setminus D_1 = \{u_1\}$. Если $e = u_1w$ для некоторой вершины w , то из $u_2 \notin PN[e]$ имеем $wu_2 \notin E(G)$ и можно положить $v_1 = w$. В противном случае $e \cap \{u_1, u_2, u_3\} = \emptyset$. Пусть $e = vw$. Поскольку $u_2, u_3 \in D'$ и $D' \cap PN[e] = \emptyset$, каждая из вершин u_2 и u_3 не может быть смежна одновременно с обеими вершинами v и w . Если при этом каждая из вершин u_2 и u_3 смежна с некоторой из вершин v и w , то $G(\{v, w, u_2, u_3\}) \cong C_4$. Иначе одна из вершин, инцидентных e , не смежна ни с u_2 , ни с u_3 . Не нарушая общности, будем считать, что это v . Тогда можно положить $v_1 = v$. В обоих рассмотренных случаях $v_1u_3 \notin E(G)$, так как иначе $G(\{v_1, u_1, u_2, u_3\}) \cong C_4$. Утверждение доказано.

Следствие 2. Хотя бы одно из множеств вершин D_1 и D_3 является окрестностным множеством графа G .

Доказательство. Предположим, что это не так. Тогда, согласно утверждению 2, найдутся такие вершины v_1 и v_3 , что

$$v_1u_1 \in E(G), \quad \{u_2, u_3\} \cap N(v_1) = \emptyset, \quad u_3v_3 \in E(G), \quad \{u_1, u_2\} \cap N(v_3) = \emptyset.$$

В этом случае порожденный подграф $G(\{v_1, v_3, u_1, u_2, u_3\})$ изоморфен C_5 или P_5 . Полученное противоречие доказывает следствие 2.

Учитывая симметрию, будем считать, что именно D_1 является окрестностным множеством графа G . Поскольку $|D_1| = |D|$, множество D_1 также является наименьшим окрестностным множеством этого графа. В силу выбора множества D имеется такая связная компонента N графа $G(D_1)$, что $V(N) \subseteq V(K)$. В силу связности K найдется вершина $w \in V(N)$, смежная с u_1 .

Утверждение 3. Множество вершин $D' = (D_1 \setminus \{w\}) \cup \{u_1\}$ является наименьшим окрестностным множеством графа G .

Доказательство. Если D' не является доминирующим множеством графа G , то найдется вершина $y \in V(G) \setminus N[D']$. Поскольку $D \setminus D' = \{w\}$, имеем $uw \in E(G)$. Но тогда $G(\{y, w, u_1, u_2, u_3\}) \cong P_5$.

В противном случае найдется ребро $e \in E(G)$, для которого $PN[e] \cap D' = \emptyset$ (тогда, в частности, $e \cap \{u_1, u_2, u_3\} = \emptyset$). Поскольку D – окрестностное множество и $D \setminus D' = \{w\}$, то $w \in PN[e]$. Рассмотрим два возможных при этом случая.

1. $e = vw$ для некоторой вершины $v \in V(G) \setminus \{u_1, u_2, u_3, w\}$. Поскольку $u_1 \notin PN[e]$ и при этом $u_1 \in N[w]$, имеем $u_1v \notin E(G)$. Если $u_2v \in E(G)$, то $G(\{v, w, u_1, u_2\}) \cong C_4$. Иначе множество вершин $\{v, w, u_1, u_2, u_3\}$ порождает подграф G , изоморфный C_5 или P_5 .

2. $e \cap \{w, u_1, u_2, u_3\} = \emptyset$. Пусть $e = vx$. Поскольку $u_1, u_2 \in D'$ и $D' \cap PN[e] = \emptyset$, каждая из вершин u_1 и u_2 не может быть смежна одновременно с обеими вершинами v и x . Если при этом каждая из вершин u_1 и u_2 смежна с некоторой из вершин v и x , то $G(\{v, x, u_1, u_2\}) \cong C_4$, что невозможно. Иначе одна из вершин, инцидентных e , не смежна ни с u_1 , ни с u_2 . Не нарушая общности, будем считать, что это x . Тогда множество вершин $\{x, w, u_1, u_2, u_3\}$ порождает подграф графа G , изоморфный C_5 или P_5 . Полученное противоречие завершает доказательство утверждения 3.

Утверждение 4. Подграф $G(D')$, порожденный множеством вершин из утверждения 3, имеет меньше связных компонент, чем $G(D)$.

Доказательство. В противном случае $G(D')$ имеет такую связную компоненту P , что $V(P) \subseteq V(K)$ и $u_1 \notin V(P)$. В силу связности K найдется вершина $z \in V(P)$, смежная с w . Тогда $G(\{z, w, u_1, u_2, u_3\}) \cong P_5$ – противоречие. Утверждение доказано.

Утверждения 3 и 4 приводят к противоречию, доказывающему теорему.

Следствие 3. Каждый расщепляемый граф G является ССО-графом. В частности, если G связен, то $nb(G) = nb_c(G)$.

Доказательство. Легко убедиться непосредственно, что каждый расщепляемый граф не содержит порожденных цепей и циклов длины более 3. Этот результат также следует из характеристики класса расщепляемых графов [5], согласно которой граф является расщепляемым тогда

и только тогда, когда он $(2K_2, C_4, C_5)$ -свободный (так как граф $2K_2$ является порожденным подграфом простой цепи P_3). Следствие доказано.

5. Сложность аппроксимации задачи СВЯЗНОЕ ОКРЕСТНОСТНОЕ МНОЖЕСТВО.

Для класса связных симплициально-расщепляемых графов (в данном случае как подкласса класса связных расщепляемых графов) имеет место еще одно совпадение параметров, связанных с доминированием.

Теорема 7. Для каждого связного расщепляемого графа G выполняется соотношение $\gamma_c(G) = \gamma(G)$.

Доказательство. Поскольку каждое связное доминирующее множество является доминирующим, соотношение $\gamma(G) \leq \gamma_c(G)$ выполняется очевидным образом. Докажем, что верно и обратное соотношение $\gamma_c(G) \leq \gamma(G)$. Для этого рассмотрим произвольное доминирующее множество D графа G . Представим множество вершин графа G в виде разбиения $V(G) = C \cup I$, $C \cap I = \emptyset$, где C – клика, а I – независимое множество. Для каждой вершины $v \in D \cap I$ выберем произвольную смежную с ней вершину $v' \in C$ (такая вершина обязательно существует в силу связности графа G). Тогда множество вершин $D' = (D \cap C) \cup \{v' \mid v \in D \cap I\}$ будет доминирующим, а порожденный им подграф $G(D')$ – связным, так как $D' \subseteq C$. При этом $|D'| \leq |D|$, поэтому $\gamma_c(G) \leq \gamma(G)$, что и требовалось. Теорема доказана.

Таким образом, из следствий 1, 3 и теоремы 7 следует, что для каждого связного симплициально-расщепляемого графа G выполнены соотношения

$$\gamma(G) = \gamma_c(G) = nb_c(G) = nb(G).$$

Приведенные соотношения в совокупности с теоремой 3 позволяют сформулировать следующий результат о сложности аппроксимации для соответствующих оптимизационных задач.

Теорема 8. В предположении $P \neq NP$ для оптимизационной версии каждой из задач ДОМИНИРУЮЩЕЕ МНОЖЕСТВО, СВЯЗНОЕ ДОМИНИРУЮЩЕЕ МНОЖЕСТВО, ОКРЕСТНОСТНОЕ МНОЖЕСТВО и СВЯЗНОЕ ОКРЕСТНОСТНОЕ МНОЖЕСТВО не существует полиномиального ($k \ln n$)-приближенного алгоритма в классе связных симплициально-расщепляемых графов порядка n , где k – фиксированная константа из условия теоремы 2.

Теорема 8 устанавливает первый результат о сложности задачи СВЯЗНОЕ ОКРЕСТНОСТНОЕ МНОЖЕСТВО в классе всех графов.

Автор выражает благодарность Ю. Л. Орловичу за постановку рассмотренных в данной работе задач, обсуждение представленных результатов и многочисленные полезные замечания.

Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф15МЛД-022).

Список использованной литературы

1. *Sampathkumar, E.* The neighbourhood number of a graph / E. Sampathkumar, P. S. Neeralagi // Indian J. Pure Appl. Math. – 1985. – Vol. 16. – P. 126–132.
2. *Sampathkumar, E.* The connected domination number of a graph / E. Sampathkumar, H. B. Walikar // J. Math. Phys. Sci. – 1979. – Vol. 13. – P. 607–613.
3. *Sampathkumar, E.* Independent, perfect and connected neighbourhood numbers of a graph / E. Sampathkumar, P. S. Neeralagi // J. Comb. Inf. Syst. Sci. – 1994. – Vol. 19. – P. 139–145.
4. *Картынник, Ю. А.* Доминантно-треугольные графы и графы верхних границ / Ю. А. Картынник, Ю. Л. Орлович // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2014. – Т. 58, № 1. – С. 16–25.
5. *Földes, S.* Split graphs / S. Földes, P. L. Hammer // Congress. Numer. – 1978. – No. 19. – P. 311–315.
6. *Тышкевич, Р. И.* Каноническое разложение графа, определяемого степенями его вершин / Р. И. Тышкевич, А. А. Черняк // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1979. – Т. 5. – С. 14–26.
7. *Лекции по теории графов / В. А. Емеличев [и др.]. – М.: Наука, 1990.*
8. *Гэри, М.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи / М. Гэри, Д. Джонсон. – М.: Мир, 1982.
9. *Zverovich, I. E.* Perfect connected-dominant graphs / I. E. Zverovich // Discuss. Math. Graph Theory. – 2003. – Vol. 23. – P. 159–162.

Поступила в редакцию 30.06.2016

УДК 519.2

А. Ю. ХАРИН¹, ТОН ТХАТ ТУ^{1,2}

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНАЯ СТАТИСТИЧЕСКАЯ ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ О ПАРАМЕТРАХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ С ТРЕНДОМ ПРИ ПРОПУСКАХ НАБЛЮДЕНИЙ

¹Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь, e-mail: KharinAY@bsu.by, tthattu@gmail.com

²Университет г. Дананг, Вьетнам, e-mail: tthattu@gmail.com

Рассматривается задача последовательной проверки простых гипотез для временных рядов с трендом в случае пропуска наблюдений. Построен последовательный тест, исследованы характеристики его эффективности. Приведены результаты вычислительных экспериментов.

Ключевые слова: последовательный тест, простые гипотезы, временные ряды, тренд, пропущенные значения, вероятности ошибок, математическое ожидание числа наблюдений.

A. Yu. KHARIN¹, TON THAT TU^{1,2}

SEQUENTIAL STATISTICAL HYPOTHESES TESTING ON PARAMETERS OF TIME SERIES WITH A TREND UNDER MISSING VALUES

¹Belarusian State University, Minsk, Belarus, e-mail: KharinAY@bsu.by, tthattu@gmail.com

²Da Nang University, Vietnam, e-mail: tthattu@gmail.com

The problem of sequential testing of simple hypotheses for time series with a trend is considered in case of missing observations. The sequential test is constructed and its performance characteristics are analysed. Numerical results of experiments are given.

Keywords: sequential test, simple hypotheses, time series, trend, missing values, error probabilities, expected number of observations.

Введение. Последовательный тест, предложенный А. Вальдом в 1947 г. (см. [1]), успешно применяется во многих задачах прикладной статистики благодаря его оптимальным свойствам. Характеристики теста хорошо исследованы при условии одинаковых распределений наблюдений (см. [2–4]). Однако на практике исследуемые данные часто описываются более сложными моделями, например моделью временного ряда с трендом (см. [2–4]). В рамках гипотетических предположений эти модели позволяют строить приемлемые статистические оценки для неизвестных параметров, например с использованием метода наименьших квадратов (см. [5]). Кроме того, некоторые наблюдения не могут быть зарегистрированы по каким-либо причинам, поэтому проблема пропущенных значений становится актуальной. В рамках гипотетической модели наблюдений при различных критериях найдены оптимальные решения задачи прогнозирования временных рядов с трендом (см. [2, 5]). Эти результаты используются в настоящей работе для решения задачи проверки простых гипотез о параметрах временных рядов с трендом в случае пропуска наблюдений.

1. Математическая модель. Рассмотрим гипотетическую вероятностную модель временного ряда с трендом [5]:

$$x_t = \theta^T \psi(t) + \xi_t, \quad t = 1, 2, 3, \dots, \quad (1)$$

где $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_m(t))^T$, $t \geq 1$, – базисные функции тренда, $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)^T \in \mathbf{R}^m$ – неизвестный вектор параметров, $\{\xi_t, t \geq 1\}$ – последовательность независимых одинаково распределенных гауссовских случайных величин, $\xi_t \sim N(0, \sigma^2)$.

На практике иногда не могут наблюдаться некоторые выборочные значения. Пусть значение x_{k+1} , $k \geq m$, не наблюдается.

Рассматриваются две простые параметрические гипотезы:

$$H_0 : \theta = \theta^0, H_1 : \theta = \theta^1, \quad (2)$$

где θ^0, θ^1 – известные векторы. Обозначим статистику логарифмического отношения правдоподобия для гипотез H_0, H_1 :

$$\Lambda_n = \Lambda_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{t=1}^n \lambda_t, \quad (3)$$

где $\lambda_t = \ln \left(\frac{p_t(x_t, \theta^1)}{p_t(x_t, \theta^0)} \right)$ – логарифмическое отношение правдоподобия, вычисленное по наблюдению x_t ; $p_t(x, \theta)$ – плотность распределения вероятностей случайной величины x_t .

В последовательном тесте Вальда [1] при проверке гипотез (2) после n наблюдений принимается решение

$$d = \mathbf{1}_{[C_+, +\infty)}(\Lambda_n) + 2 \cdot \mathbf{1}_{(C_-, C_+)}(\Lambda_n), \quad (4)$$

где $\mathbf{1}_D(\cdot)$ означает индикаторную функцию множества D . Решение $d = 2$ соответствует продолжению процесса наблюдения, поскольку заданная точность не может быть обеспечена. Решение $d = 0$ ($d = 1$) означает остановку процесса наблюдения и принятие гипотезы H_0 (H_1). В (4) $C_-, C_+ \in \mathbf{R}, C_- < C_+$ – параметры теста, называемые порогами. В соответствии с [1] будем использовать следующие значения:

$$C_- = \ln \left(\frac{\beta_0}{1 - \alpha_0} \right), \quad C_+ = \ln \left(\frac{1 - \beta_0}{\alpha_0} \right),$$

где α_0, β_0 – заданные предельно допустимые значения вероятностей ошибок первого (принять гипотезу H_1 при справедливой H_0) и второго (принять гипотезу H_0 при справедливой H_1) рода соответственно.

2. Вероятностные свойства статистики отношения правдоподобия при наличии пропущенного значения. Обозначим: $E^{(l)}(\cdot), D^{(l)}(\cdot)$ – условное математическое ожидание и дисперсия

при условии, что справедлива гипотеза $H_l, l \in \{0, 1\}$; $H_n = \sum_{t=1}^n \psi(t) \psi^T(t)$;

$$X_k = (x_1, x_2, \dots, x_k)^T, \quad U = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)^T, \quad A = \begin{pmatrix} \psi_1(1) & \psi_2(1) & \dots & \psi_m(1) \\ \psi_1(2) & \psi_2(2) & \dots & \psi_m(2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi_1(k) & \psi_2(k) & \dots & \psi_m(k) \end{pmatrix}.$$

Пусть $\text{rank}(A) = m$.

Лемма 1. В условиях модели (1) для теста (3), (4) проверки гипотез (2) статистики λ_t, Λ_n имеют гауссовские распределения и справедливы соотношения:

$$E(\lambda_t) = -\frac{1}{2\sigma^2} \left\{ 2(\theta^0 - \theta^1)^T \psi(t) \psi^T(t) \theta + (\theta^1)^T \psi(t) \psi^T(t) \theta^1 - (\theta^0)^T \psi(t) \psi^T(t) \theta^0 \right\},$$

$$E(\Lambda_n) = -\frac{1}{2\sigma^2} \left\{ 2(\theta^0 - \theta^1)^T H_n \theta + (\theta^1)^T H_n \theta^1 - (\theta^0)^T H_n \theta^0 \right\};$$

$$D(\lambda_t) = \frac{(\theta^0 - \theta^1)^T \psi(t) \psi^T(t) (\theta^0 - \theta^1)}{\sigma^2}, \quad D(\Lambda_n) = \frac{(\theta^0 - \theta^1)^T H_n (\theta^0 - \theta^1)}{\sigma^2}.$$

Доказательство. Из (1) следует, что

$$x_t \sim N(\theta^T \psi(t), \sigma^2), \quad t \geq 1, \quad p_t(x, \theta) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (x - \theta^T \psi(t))^2 \right\},$$

$$\lambda_t = \lambda_t(x_t) = -\frac{1}{2\sigma^2} \left\{ 2x_t(\theta^0 - \theta^1)^T \psi(t) + (\theta^1)^T \psi(t) \psi^T(t) \theta^1 - (\theta^0)^T \psi(t) \psi^T(t) \theta^0 \right\}.$$

Далее доказательство состоит в использовании свойств нормального распределения и проведении тождественных преобразований. Лемма доказана.

Модель (1) в матричной форме записывается следующим образом:

$$X_k = A\theta + U. \quad (5)$$

Оценка $\hat{\theta}$ параметра θ по методу наименьших квадратов имеет вид

$$\hat{\theta} = (A^T A)^{-1} A^T X_k.$$

Из свойств метода наименьших квадратов следует, что $\hat{\theta}$ имеет нормальное распределение с параметрами

$$E(\hat{\theta}) = \theta, \quad \text{cov}(\hat{\theta}, \hat{\theta}) = \sigma^2 (A^T A)^{-1}.$$

Для построения статистического критерия (теста) проверки гипотез (2) в условиях пропуска наблюдения x_{k+1} будем использовать $\tilde{x}_{k+1} = \hat{\theta}^T \psi(k+1)$ вместо пропущенного наблюдения. В этом случае рассмотрим последовательный тест вида (4), где вместо Λ_n используется статистика

$$\tilde{\Lambda}_n = \begin{cases} \Lambda_n, & n \leq k, \\ \Lambda_n + \tilde{\lambda}_{k+1} - \lambda_{k+1}, & n > k, \end{cases} \quad \tilde{\lambda}_{k+1} = \lambda_{k+1}(\tilde{x}_{k+1}). \quad (3')$$

Примем обозначения:

$$s_n^2 = \sum_{t=1}^n \sigma_t^2, \quad m_n^{(l)} = \sum_{t=1}^n \mu_t^{(l)} = \frac{(-1)^{l+1} s_n^2}{2}, \quad l = 0, 1;$$

$$\sigma_n^2 = D^{(0)}(\lambda_n) = D^{(1)}(\lambda_n) = \frac{(\theta^0 - \theta^1)^T \psi(n) \psi^T(n) (\theta^0 - \theta^1)}{\sigma^2};$$

$$\mu_n^{(l)} = E^{(l)}(\lambda_n) = \frac{(-1)^{l+1} (\theta^0 - \theta^1)^T \psi(n) \psi^T(n) (\theta^0 - \theta^1)}{2\sigma^2} = \frac{(-1)^{l+1} \sigma_n^2}{2};$$

$$\Gamma = (\theta^0 - \theta^1)(\theta^0 - \theta^1), \quad N = \inf\{n \in \mathbf{N} : \Lambda_n \notin (C_-, C_+)\}, \quad \tilde{N} = \inf\{n \in \mathbf{N} : \tilde{\Lambda}_n \notin (C_-, C_+)\}.$$

Лемма 2. В условиях модели (1) при истинности гипотезы H_i ($i = 0, 1$) статистика $\tilde{\Lambda}_n$ имеет гауссовское распределение $\tilde{\Lambda}_n \sim N(m_n^{(i)}, \tilde{s}_n^2)$, где

$$\tilde{s}_n^2 = \begin{cases} s_n^2, & n \leq k, \\ s_n^2 + \sigma_{k+1}^2 \left[1 + \psi^T(k+1)(A^T A)^{-1} \psi(k+1) \right], & n > k. \end{cases} \quad (6)$$

Доказательство. Имеем

$$\tilde{\Lambda}_{k+1} = \sum_{i=1}^k \lambda_i + \tilde{\lambda}_{k+1} = \sum_{i=1}^k \frac{(\theta^1 - \theta^0)^T \psi(i)}{\sigma^2} x_i + \frac{(\theta^1 - \theta^0)^T \psi(k+1)}{\sigma^2} \tilde{x}_{k+1} - \frac{(\theta^1)^T H_{k+1} \theta^1 - (\theta^0)^T H_{k+1} \theta^0}{2\sigma^2} =$$

$$= \left[V_k^T + \frac{(\theta^1 - \theta^0)^T \psi(k+1)}{\sigma^2} \psi^T(k+1)(A^T A)^{-1} A^T \right] X_k - \frac{(\theta^1)^T H_{k+1} \theta^1 - (\theta^0)^T H_{k+1} \theta^0}{2\sigma^2},$$

где

$$V_k = \left(\frac{(\theta^1 - \theta^0)^T \psi(1)}{\sigma^2}, \frac{(\theta^1 - \theta^0)^T \psi(2)}{\sigma^2}, \dots, \frac{(\theta^1 - \theta^0)^T \psi(k)}{\sigma^2} \right)^T = \frac{1}{\sigma^2} A(\theta^1 - \theta^0).$$

Вычисляем дисперсию:

$$\begin{aligned} D(\tilde{\Lambda}_{k+1}) &= \sigma^2 \left[V_k^T + \frac{(\theta^1 - \theta^0)^T \psi(k+1)}{\sigma^2} \psi^T(k+1)(A^T A)^{-1} A^T \right] \times \\ &\times \left[V_k^T + \frac{(\theta^1 - \theta^0)^T \psi(k+1)}{\sigma^2} \psi^T(k+1)(A^T A)^{-1} A^T \right]^T = \\ &= \sigma^2 V_k^T V_k + 2(\theta^1 - \theta^0)^T \psi(k+1) \psi^T(k+1)(A^T A)^{-1} A^T V_k + \\ &+ \left[\frac{(\theta^1 - \theta^0)^T \psi(k+1)}{\sigma} \right]^2 \psi^T(k+1)(A^T A)^{-1} \psi(k+1). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$D(\tilde{\Lambda}_{k+1}) = D(\Lambda_{k+1}) + \sigma_{k+1}^2 \left[1 + \psi^T(k+1)(A^T A)^{-1} \psi(k+1) \right]. \quad (7)$$

Для $n > k+1$,

$$D(\tilde{\Lambda}_n) = D(\tilde{\Lambda}_{k+1}) + D(\lambda_{k+2}) + \dots + D(\lambda_n) = D(\Lambda_n) + \sigma_{k+1}^2 \left[1 + \psi^T(k+1)(A^T A)^{-1} \psi(k+1) \right].$$

Кроме того, $E^{(i)}(\tilde{\lambda}_{k+1}) = E^{(i)}(\lambda_{k+1}) = \mu_{k+1}^{(i)}$, $i = 0, 1$, и $E(\Lambda_n) = E(\tilde{\Lambda}_n)$, $\forall n$. Лемма доказана.

В дальнейшем будем использовать следующий известный результат [6]: если X, Y – независимые случайные величины, $X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$, $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$, то

$$f_{X+Y|Y}(x|y) = \frac{f_{X+Y,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = n_1(x; y + \mu_x, \sigma_x^2), \quad (8)$$

где $n_1(x; \mu, \sigma^2)$ – плотность распределения вероятностей, соответствующая $N(\mu, \sigma^2)$.

3. Анализ построенного последовательного теста.

Теорема 1. Если в рамках модели (1) $\text{rank}(A) = m$, $k \geq m$, $\text{tr}(\Gamma H_n) \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow +\infty$, то с вероятностью 1 одна из гипотез (2) принимается тестом (3'), (4) на основе конечного числа наблюдений.

Доказательство. В условиях теоремы $s_n^2 \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow +\infty$. Для всех $n \in \mathbf{N}$ имеем

$$\begin{aligned} P_l(\tilde{N} > n) &= P_l(\tilde{\Lambda}_i \in (C_-, C_+), i = \overline{1, n}) \leq \\ &\leq P_l(\tilde{\Lambda}_n \in (C_-, C_+)) = \Phi\left(\frac{C_+ - m_n^{(l)}}{\tilde{s}_n}\right) - \Phi\left(\frac{C_- - m_n^{(l)}}{\tilde{s}_n}\right), l \in \{0, 1\}, \end{aligned}$$

где $\Phi(x)$ – функция распределения $N(0, 1)$. Поэтому $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_l(\tilde{N} > n) = 0$, или эквивалентно, $P_l(\tilde{N} < +\infty) = 1$, $l \in \{0, 1\}$. Теорема доказана.

Замечание 1. Предположим, что значения k_0 последовательных наблюдений $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_{k+k_0}$ недоступны. Вместо них мы можем использовать $\tilde{x}_i = \hat{\theta}^T \psi(i)$, $i = \overline{k+1, k+k_0}$, где $\hat{\theta} = (A^T A)^{-1} A^T X_k$. В этом случае теорема 1 также остается верной.

Замечание 2. Если имеется дополнительная информация $x_{k+1} \in [a, b]$, то оценка $\hat{\theta}$ параметра θ может быть получена решением следующей экстремальной задачи:

$$\begin{cases} (X_k - A\theta)^T (X_k - A\theta) \rightarrow \min, \\ (\theta^T \psi(k+1) - a)(\theta^T \psi(k+1) - b) \leq 0. \end{cases}$$

Теорема 2. В условиях теоремы 1 справедливы следующие неравенства:

$$P_i(N = \tilde{N}) \geq P_i(\tilde{N} \leq k+1) - \varphi_{k+1}^{(i)} P_i(\tilde{N} = k+1) + \sum_{l=k+2}^{+\infty} (1 - \varphi_l^{(i)}) P_i(\min\{N, \tilde{N}\} \geq l), \quad i = 0, 1, \quad (9)$$

$$\text{где } \varphi_l^{(i)} = \Phi\left(\frac{C_+ - C_- + \mu_l^{(i)}}{\sigma_l}\right) + \Phi\left(\frac{C_+ - C_- - \mu_l^{(i)}}{\sigma_l}\right) - 1, \quad i = 0, 1.$$

Доказательство. Проведем преобразования:

$$P_i(N = \tilde{N}) = \sum_{l=1}^{+\infty} P_i(N = \tilde{N} = l) = \sum_{l=1}^k P_i(N = \tilde{N} = l) + P_i(N = \tilde{N} = k+1) + \sum_{l=k+2}^{+\infty} P_i(N = \tilde{N} = l).$$

В силу $\Lambda_n = \tilde{\Lambda}_n, \forall n \leq k$, получаем:

$$\sum_{l=1}^k P_i(N = \tilde{N} = l) = \sum_{l=1}^k P_i(\tilde{N} = l) = P_i(\tilde{N} \leq k).$$

С другой стороны, $\{\lambda_n, n \geq 1\}$ – последовательность независимых случайных величин, поэтому

$$\begin{aligned} P_i(N = \tilde{N} = k+1) &= P_i(\Lambda_j \in (C_-, C_+), j=1, \dots, k, \Lambda_{k+1}, \tilde{\Lambda}_{k+1} \notin (C_-, C_+)) = \\ &= P_i(\Lambda_j \in (C_-, C_+), j=1, \dots, k, \tilde{\Lambda}_{k+1} \notin (C_-, C_+), \Lambda_k + \lambda_{k+1} \notin (C_-, C_+)) \geq \\ &\geq P_i(\Lambda_j \in (C_-, C_+), j=1, \dots, k, \tilde{\Lambda}_{k+1} \notin (C_-, C_+), |\lambda_{k+1}| \geq C_+ - C_-) = \\ &= (1 - \varphi_{k+1}^{(i)}) P_i(\tilde{N} = k+1). \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \sum_{l=k+2}^{+\infty} P_i(N = \tilde{N} = l) &= \sum_{l=k+2}^{+\infty} P_i(\Lambda_j, \tilde{\Lambda}_j \in (C_-, C_+), j=1, \dots, l-1, \Lambda_l, \tilde{\Lambda}_l \notin (C_-, C_+)) = \\ &= \sum_{l=k+2}^{+\infty} P_i(\Lambda_j, \tilde{\Lambda}_j \in (C_-, C_+), j=1, \dots, l-1, \Lambda_{l-1} + \lambda_l, \tilde{\Lambda}_{l-1} + \lambda_l \notin (C_-, C_+)) \geq \\ &\geq \sum_{l=k+2}^{+\infty} P_i(\Lambda_j, \tilde{\Lambda}_j \in (C_-, C_+), j=1, \dots, l-1, |\lambda_l| \geq C_+ - C_-) = \\ &= \sum_{l=k+2}^{+\infty} (1 - \varphi_l^{(i)}) P_i(\min\{N, \tilde{N}\} \geq l). \end{aligned}$$

Это завершает доказательство теоремы 2.

Пусть $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ – фактические значения вероятностей ошибок первого и второго рода соответственно в модифицированном тесте (3'), (4); α, β – вероятности ошибок первого и второго рода соответственно в исходном тесте.

Лемма 3 (см. [7]). Если случайная величина X принимает только целые положительные значения, то

$$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n).$$

Теорема 3. В условиях теоремы 1 имеют место следующие неравенства:

$$\begin{aligned} |\tilde{\alpha} - \alpha| &\leq P_0(N > k) \left[1 + \Phi\left(\frac{\mu_{k+2}^{(0)}}{\sigma_{k+2}}\right) \right] + \\ &+ P_0(N > k) \sum_{i=k+3}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_{C_- - C_+}^{C_+ - C_-} n_1(x, m_{i-1}^{(0)} - m_{k+1}^{(0)}, s_{i-1}^2 - s_{k+1}^2) n_1(y, x + \mu_i^{(0)}, \sigma_i^2) dx dy; \end{aligned} \quad (10)$$

$$|\tilde{\beta} - \beta| \leq P_1(N > k) \left[1 + \Phi \left(-\frac{\mu_{k+2}^{(l)}}{\sigma_{k+2}} \right) \right] +$$

$$+ P_1(N > k) \sum_{i=k+3}^{+\infty} \int_{-\infty}^0 \int_{C_- - C_+}^{C_+ - C_-} n_1(x, m_{i-1}^{(l)} - m_{k+1}^{(l)}, s_{i-1}^2 - s_{k+1}^2) n_1(y, x + \mu_i^{(l)}, \sigma_i^2) dx dy; \quad (11)$$

$$|E^{(l)}(\tilde{N} - N)| \leq P_l(N > k) \left[\Phi \left(\frac{C_+ - C_- - \mu_{k+2}^{(l)}}{\sigma_{k+2}} \right) + \Phi \left(\frac{C_+ - C_- + \mu_{k+2}^{(l)}}{\sigma_{k+2}} \right) \right] +$$

$$+ P_l(N > k) \sum_{i=k+3}^{+\infty} \int_{C_- - C_+}^{C_+ - C_-} \int_{C_- - C_+}^{C_+ - C_-} n_1(x, m_{i-1}^{(l)} - m_{k+1}^{(l)}, s_{i-1}^2 - s_{k+1}^2) n_1(y, x + \mu_i^{(l)}, \sigma_i^2) dx dy, l \in \{0, 1\}. \quad (12)$$

Доказательство. Заметим, что $\tilde{\alpha} = P_0(\tilde{\Lambda}_{\tilde{N}} \geq C_+) = \sum_{i=1}^{+\infty} P_0(\tilde{\Lambda}_i \geq C_+, \tilde{N} = i)$. Поэтому

$$0 \leq \tilde{\alpha} - \sum_{i=1}^k P_0(\tilde{\Lambda}_i \geq C_+, \tilde{N} = i) =$$

$$= P_0(\tilde{\Lambda}_{k+1} \geq C_+, \tilde{N} = k+1) + P_0(\tilde{\Lambda}_{k+2} \geq C_+, \tilde{N} = k+2) + \sum_{i=k+3}^{+\infty} P_0(\tilde{\Lambda}_i \geq C_+, \tilde{N} = i).$$

С другой стороны,

$$P_0(\tilde{\Lambda}_{k+1} \geq C_+, \tilde{N} = k+1) = P_0(\tilde{\Lambda}_j \in (C_-, C_+), j = \overline{1, k}, \tilde{\Lambda}_{k+1} \geq C_+) \leq$$

$$\leq P_0(\tilde{\Lambda}_j \in (C_-, C_+), j = \overline{1, k}) = P_0(\tilde{N} > k).$$

Аналогично,

$$P_0(\tilde{\Lambda}_{k+1} \geq C_+, \tilde{N} = k+2) = P_0(\tilde{\Lambda}_j \in (C_-, C_+), j = \overline{1, k+1}, \tilde{\Lambda}_{k+2} \geq C_+) \leq$$

$$\leq P_0(\tilde{\Lambda}_j \in (C_-, C_+), j = \overline{1, k+1}, \lambda_{k+2} > 0) \leq$$

$$\leq P_0(\tilde{N} > k) P_0(\lambda_{k+2} > 0) = P_0(\tilde{N} > k) \Phi \left(\frac{\mu_{k+2}^{(0)}}{\sigma_{k+2}} \right).$$

Для $i \geq k+3$ получаем

$$P_0(\tilde{\Lambda}_i \geq C_+, \tilde{N} = i) = P_0(\tilde{\Lambda}_j \in (C_-, C_+), j = \overline{1, i-1}, \tilde{\Lambda}_i \geq C_+) \leq$$

$$\leq P_0(\tilde{\Lambda}_j \in (C_-, C_+), j = \overline{1, k+1}, \sum_{j=k+2}^{i-1} \lambda_j \in (C_- - C_+, C_+ - C_-), \sum_{j=k+2}^i \lambda_j > 0) \leq$$

$$\leq P_0(\tilde{\Lambda}_j \in (C_-, C_+), j = \overline{1, k}) P \left(\sum_{j=k+2}^{i-1} \lambda_j \in (C_- - C_+, C_+ - C_-), \sum_{j=k+2}^i \lambda_j > 0 \right) \leq$$

$$\leq P_0(\tilde{N} > k) \int_0^{+\infty} \int_{C_- - C_+}^{C_+ - C_-} n_1(x, m_{i-1}^{(0)} - m_{k+1}^{(0)}, s_{i-1}^2 - s_{k+1}^2) n_1(y, x + \mu_i^{(0)}, \sigma_i^2) dx dy.$$

Из этого следует

$$0 \leq \tilde{\alpha} - \sum_{i=1}^k P_0(\tilde{\Lambda}_i \geq C_+, \tilde{N} = i) \leq P_0(\tilde{N} > k) \left[1 + \Phi \left(\frac{\mu_{k+2}^{(0)}}{\sigma_{k+2}} \right) \right] +$$

$$+ \sum_{i=k+3}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_{C_- - C_+}^{C_+ - C_-} n_1(x, m_{i-1}^{(0)} - m_{k+1}^{(0)}, s_{i-1}^2 - s_{k+1}^2) n_1(y, x + \mu_i^{(0)}, \sigma_i^2) dx dy. \quad (13)$$

Аналогично,

$$0 \leq \alpha - \sum_{i=1}^k P_0(\Lambda_i \geq C_+, N = i) \leq P_0(N > k) \left[1 + \Phi \left(\frac{\mu_{k+2}^{(0)}}{\sigma_{k+2}} \right) \right] +$$

$$+ \sum_{i=k+3}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_{C_- - C_+}^{C_+ - C_-} n_1(x, m_{i-1}^{(0)} - m_{k+1}^{(0)}, s_{i-1}^2 - s_{k+1}^2) n_1(y, x + \mu_i^{(0)}, \sigma_i^2) dx dy. \quad (14)$$

Неравенство (10) получается из (13), (14) и того факта, что

$$\Lambda_j = \tilde{\Lambda}_j, \forall j = 1, \dots, k. \quad (15)$$

Неравенство (11) доказывается аналогично.

Из леммы 3 имеем $E^{(l)}(\tilde{N}) = 1 + \sum_{i=1}^{+\infty} P_l(\tilde{N} > i)$. Очевидно, $P_l(\tilde{N} > k+1) \leq P_l(\tilde{N} > k)$ и

$$P_l(\tilde{N} > k+2) = P_l(\tilde{\Lambda}_j \in (C_-, C_+), j = \overline{1, k+2}) \leq P_l(\tilde{\Lambda}_j \in (C_-, C_+), j = \overline{1, k}, \lambda_{k+2} \in (C_- - C_+, C_+ - C_-)) =$$

$$= P_l(\tilde{N} > k) \left[\Phi \left(\frac{C_+ - C_- - \mu_{k+2}^{(l)}}{\sigma_{k+2}} \right) - \Phi \left(\frac{C_- - C_+ - \mu_{k+2}^{(l)}}{\sigma_{k+2}} \right) \right].$$

Для $i \geq k+3$ получаем

$$P_l(\tilde{N} > i) = P_l(\tilde{\Lambda}_j \in (C_-, C_+), j = \overline{1, i}) \leq$$

$$\leq P_l \left(\tilde{\Lambda}_j \in (C_-, C_+), j = \overline{1, k+1}, \sum_{j=k+2}^i \lambda_j \in (C_- - C_+, C_+ - C_-), t = \overline{1, i} \right) \leq$$

$$\leq P_l(\tilde{\Lambda}_j \in (C_-, C_+), j = \overline{1, k+1}) P \left(\sum_{j=k+2}^i \lambda_j \in (C_- - C_+, C_+ - C_-), t = \overline{1, i} \right) \leq$$

$$\leq P_l(\tilde{N} > k) \int_{C_- - C_+}^{C_+ - C_-} \int_{C_- - C_+}^{C_+ - C_-} n_1(x, m_{i-1}^{(l)} - m_{k+1}^{(l)}, s_{i-1}^2 - s_{k+1}^2) n_1(y, x + \mu_i^{(l)}, \sigma_i^2) dx dy.$$

Поэтому

$$0 \leq E^{(l)}(\tilde{N}) - 1 - \sum_{i=1}^k P_l(\tilde{N} > i) \leq P_l(\tilde{N} > k) \left[\Phi \left(\frac{C_+ - C_- - \mu_{k+2}^{(l)}}{\sigma_{k+2}} \right) + \Phi \left(\frac{C_+ - C_- + \mu_{k+2}^{(l)}}{\sigma_{k+2}} \right) \right] +$$

$$+ P_l(\tilde{N} > k) \sum_{i=k+3}^{+\infty} \int_{C_- - C_+}^{C_+ - C_-} \int_{C_- - C_+}^{C_+ - C_-} n_1(x, m_{i-1}^{(l)} - m_{k+1}^{(l)}, s_{i-1}^2 - s_{k+1}^2) n_1(y, x + \mu_i^{(l)}, \sigma_i^2) dx dy. \quad (16)$$

Аналогично,

$$0 \leq E^{(l)}(N) - 1 - \sum_{i=1}^k P_l(N > i) \leq P_l(N > k) \left[\Phi \left(\frac{C_+ - C_- - \mu_{k+2}^{(l)}}{\sigma_{k+2}} \right) + \Phi \left(\frac{C_+ - C_- + \mu_{k+2}^{(l)}}{\sigma_{k+2}} \right) \right] +$$

$$+ P_l(N > k) \sum_{i=k+3}^{+\infty} \int_{C_- - C_+}^{C_+ - C_-} \int_{C_- - C_+}^{C_+ - C_-} n_1(x, m_{i-1}^{(l)} - m_{k+1}^{(l)}, s_{i-1}^2 - s_{k+1}^2) n_1(y, x + \mu_i^{(l)}, \sigma_i^2) dx dy. \quad (17)$$

Из (15), (16) и (17) получаем (12). Теорема 3 доказана.

На практике иногда встречается следующая ситуация: значение x_{k+1} наблюдается с вероятностью $q \in (0, 1)$. Пусть v – случайная величина, $v \in \{0, 1\}$, $P(v = 0) = 1 - q$, $P(v = 1) = q$, величина v независима от последовательности $\{\xi_t, t \geq 1\}$. В этом случае построим тест вида (4), использующий вместо (3) статистику

$$\bar{\Lambda}_n = \begin{cases} \Lambda_n, & v=1, \\ \tilde{\Lambda}_n, & v=0. \end{cases} \quad (3'')$$

Примем обозначения: $\bar{N} = \inf\{n \in \mathbf{N} : \bar{\Lambda}_n \notin (C_-, C_+)\}$, $\bar{\alpha} = P_0(\bar{\Lambda}_{\bar{N}} \geq C_+)$, $\bar{\beta} = P_1(\bar{\Lambda}_{\bar{N}} \leq C_-)$.

Теорема 4. В условиях теоремы 1 для теста (3''), (4) имеют место следующие неравенства:

$$|\bar{\alpha} - \alpha| \leq (1-q)P_0(N > k) \left[1 + \Phi \left(\frac{\mu_{k+2}^{(0)}}{\sigma_{k+2}} \right) \right] + \\ + (1-q)P_0(N > k) \sum_{i=k+3}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_{C_- - C_+}^{C_+ - C_-} n_1(x, m_{i-1}^{(0)} - m_{k+1}^{(0)}, s_{i-1}^2 - s_{k+1}^2) n_1(y, x + \mu_i^{(0)}, \sigma_i^2) dx dy, \quad (18)$$

$$|\bar{\beta} - \beta| \leq (1-q)P_1(N > k) \left[1 + \Phi \left(-\frac{\mu_{k+2}^{(1)}}{\sigma_{k+2}} \right) \right] + \\ + (1-q)P_1(N > k) \sum_{i=k+3}^{+\infty} \int_{-\infty}^0 \int_{C_- - C_+}^{C_+ - C_-} n_1(x, m_{i-1}^{(1)} - m_{k+1}^{(1)}, s_{i-1}^2 - s_{k+1}^2) n_1(y, x + \mu_i^{(1)}, \sigma_i^2) dx dy, \quad (19)$$

$$|E^{(l)}(\bar{N} - N)| \leq (1-q)P_l(N > k) \left[\Phi \left(\frac{C_+ - C_- - \mu_{k+2}^{(l)}}{\sigma_{k+2}} \right) + \Phi \left(\frac{C_+ - C_- + \mu_{k+2}^{(l)}}{\sigma_{k+2}} \right) \right] + \\ + (1-q)P_l(N > k) \sum_{i=k+3}^{+\infty} \int_{C_- - C_+}^{C_+ - C_-} \int_{C_- - C_+}^{C_+ - C_-} n_1(x, m_{i-1}^{(l)} - m_{k+1}^{(l)}, s_{i-1}^2 - s_{k+1}^2) n_1(y, x + \mu_i^{(l)}, \sigma_i^2) dx dy, l \in \{0, 1\}. \quad (20)$$

Доказательство. Для всех $n \in \mathbf{N}, i \in \{0, 1\}$, имеем

$$P_i(\bar{N} > n) = P_i(\bar{\Lambda}_j \in (C_-, C_+), j=1, \dots, n) = \\ = P_i(\bar{\Lambda}_j \in (C_-, C_+), j=1, \dots, n, v=0) + P_i(\bar{\Lambda}_j \in (C_-, C_+), j=1, \dots, n, v=1) = \\ = qP_i(\Lambda_j \in (C_-, C_+), j=1, \dots, n) + (1-q)P_i(\tilde{\Lambda}_j \in (C_-, C_+), j=1, \dots, n) = \\ = qP_i(N > n) + (1-q)P_i(\tilde{N} > n).$$

Отсюда получаем $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_i(\bar{N} > n) = 0, i \in \{0, 1\}$. Это означает, что тест, основанный на $\bar{\Lambda}_n$, конечен с вероятностью 1. С другой стороны,

$$\bar{\alpha} = P_0(\bar{\Lambda}_{\bar{N}} \geq C_+) = \sum_{i=1}^{+\infty} P_0(\bar{\Lambda}_i \geq C_+, \bar{N} = i) = \sum_{i=1}^{+\infty} P_0(\bar{\Lambda}_j \in (C_-, C_+), j=1, \dots, i-1, \bar{\Lambda}_i \geq C_+) = \\ = q \sum_{i=1}^{+\infty} P_0(\Lambda_j \in (C_-, C_+), j=1, \dots, i-1, \Lambda_i \geq C_+) + (1-q) \sum_{i=1}^{+\infty} P_0(\tilde{\Lambda}_j \in (C_-, C_+), j=1, \dots, i-1, \tilde{\Lambda}_i \geq C_+) = \\ = qP_0(\Lambda_N \geq C_+) + (1-q)P_0(\tilde{\Lambda}_{\tilde{N}} \geq C_+) = q\alpha + (1-q)\tilde{\alpha}.$$

Из последнего соотношения и (10) получим (18). Неравенства (19) и (20) доказываются аналогично. Теорема доказана.

Замечание 3. Пусть $k \in [1, m-1]$, и хотя x_{k+1} не наблюдается, известно, что $x_{k+1} \in [a, b]$. Пусть $\bar{\lambda}_{k+1} = \max\{\lambda_{k+1}(a), \lambda_{k+1}(b)\}$, $\underline{\lambda}_{k+1} = \min\{\lambda_{k+1}(a), \lambda_{k+1}(b)\}$. В этом случае тест может быть построен следующим образом. Если после k наблюдений окончательное решение $d=0$ или $d=1$ не может быть принято, то по результатам $(k+1)$ -го наблюдения принимается H_0 , если $\Lambda_k + \bar{\lambda}_{k+1} \leq C_-$, и принимается H_1 , если $\Lambda_k + \underline{\lambda}_{k+1} \geq C_+$, в противном случае отсутствующее значение x_{k+1} игнорируется с использованием статистики

$$L_n = \begin{cases} \Lambda_n, & n \leq k, \\ \Lambda_n - \lambda_{k+1}, & n \geq k+2. \end{cases}$$

4. Результаты компьютерных экспериментов. Рассмотрим вероятностную модель (1) и гипотезы (2) при следующих значениях параметров:

$$q = 0,7, m = 4, \sigma = 10, \theta^0 = (1,2,2,2)^T, \theta^1 = (1,1,1,1)^T, \psi(t) = (1, t/10, t^2/100, t^3/1000).$$

Обозначим оценку характеристики $\tau \in \{\alpha, \bar{\alpha}, t_0, t'_0\}$ методом Монте-Карло через $\hat{\tau}$. Количество повторений в методе Монте-Карло составляло 50 000. Бесконечная сумма была заменена конечной суммой от 1 до 1000. Иллюстрация результатов теоремы 4 приведена в таблице, где $t_0 = E^{(0)}(N)$, $\bar{t}_0 = E^{(0)}(\bar{N})$, t'_0 – среднее число наблюдений, требуемых тестом (4), когда пропущенное наблюдение игнорируется, при справедливости гипотезы H_0 .

Результаты вычислительных экспериментов

α_0	β_0	k	$\hat{\alpha}$	$\hat{\alpha}$	$ \alpha - \bar{\alpha} \leq$	\hat{t}_0	\hat{t}_0	\hat{t}_0	$ t_0 - \bar{t}_0 \leq$
0,1	0,1	14	0,05576	0,06672	0,75200	17,9005	18,27068	17,78896	1,69637
		18		0,06272	0,22599		18,26831	17,89814	0,44214
		22		0,05592	0,01680		17,97683	17,88560	0,02834
0,05	0,1	14	0,02594	0,03440	0,76940	18,1521	18,52616	18,07926	1,87108
		18		0,03136	0,24901		18,51662	18,13772	0,52706
		22		0,02708	0,02382		18,24194	18,14634	0,04346

Из таблицы видно, что отсутствие одного наблюдения не приводит к значительным изменениям тестовых характеристик. При фиксированных значениях α_0, β_0 увеличение k приводит к уменьшению верхних границ значений $|\alpha - \bar{\alpha}|$ и $|t_0 - \bar{t}_0|$. Поскольку указанные верхние границы зависят от $P_l(N > k)$, $l \in \{0,1\}$, эти выражения теряют ценность, когда значение k становится меньше, чем среднее число наблюдений. Отметим, что по результатам экспериментов имеет место соотношение $\hat{t}_0 > \hat{t}_0$ для любых α_0, β_0, k . Этот факт означает, что с использованием предсказанного значения пропущенного наблюдения число наблюдений может быть в среднем уменьшено по сравнению с игнорированием этого значения при обеспечении требуемой точности.

Заключение. В статье построен последовательный тест для временных рядов с трендом при наличии пропущенных наблюдений. Доказаны достаточные условия конечности теста. Построены верхние границы для абсолютных значений разностей между тестовыми характеристиками в модифицированных и оригинальных тестах. Результаты могут быть использованы для анализа робастности [8] построенного теста.

Работа выполнена при частичной поддержке по международной программе IMPULSE (проект № 698327-CDAMCSS).

Список использованной литературы

1. Wald, A. Sequential analysis / A. Wald. – New York: John Wiley and Sons, 1947.
2. Харин, А. Ю. Робастность байесовских и последовательных статистических решающих правил / А. Ю. Харин. – Минск: БГУ, 2013.
3. Govindarajulu, Z. Sequential statistics / Z. Govindarajulu. – Singapore: World Scientific Publishing, 2004.
4. Kharin, A. Y. An approach to performance analysis of the sequential probability ratio test for the simple hypotheses testing / A. Y. Kharin // Proceedings of the Belarusian State University. – 2002. – Vol. 1. – P. 92–96.
5. Андерсон, Т. Статистический анализ временных рядов / Т. Андерсон. – М.: Мир, 1976.
6. Bilodeau, M. Theory of multivariate statistics / M. Bilodeau, D. Brenner. – New York: Springer – Verlag, 1999.
7. Chung, K. L. A course in probability theory / K. L. Chung. – San Diego: Academic Press, 2001.
8. Kharin, A. Y. Performance and robustness evaluation in sequential hypotheses testing / A. Y. Kharin // Communications in Statistics – Theory and Methods. – 2016. – Vol. 45 (6). – P. 1663–1709.

Поступила в редакцию 30.06.2016

УДК 517.9

Ф. В. ЧУМАКОВ¹, С. И. ВАСИЛЕЦ²

**РЕШЕНИЕ ОДНОГО ВИДА ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА
С ЛОГАРИФМИЧЕСКИМ ЯДРОМ И СМЕШАННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ**

¹Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь, e-mail: fchumakov@tut.by

²Белорусский государственный педагогический университет им. Максима Танка,
Минск, Беларусь, e-mail: svasilets@tut.by

Решение в явном виде интегрального уравнения первого рода с логарифмами в ядре сводится к последовательному решению характеристического особого уравнения и уравнения Вольтерры. Решение дается в явном виде в зависимости от индекса особого уравнения и разрешимости уравнения Вольтерры.

Ключевые слова: особое интегральное уравнение, индекс, уравнение Вольтерры, условия разрешимости, условия равносильности, явное решение уравнения.

F. V. CHYMAKOV¹, S. I. VASILETS²

**SOLUTION OF THE FIRST-KIND ONE-TYPE INTEGRAL EQUATION
WITH THE LOGARITHMIC KERNEL AND MIXED COEFFICIENTS**

¹Belarusian State University, Minsk, Belarus, e-mail: fchumakov@tut.by

²Belarusian State Pedagogical University named after Maxim Tank, Minsk, Belarus,
e-mail: svasilets@tut.by

An explicit solution of first-kind one-type integral equation with logarithms in the kernel reduces to a successive solution of the characteristic singular equation and the Volterra equation. The solution is given in closed form, depending on the index of the singular equation and the solvability of the Volterra equation.

Keywords: singular integral equation, index, Volterra equation, solvability conditions, equivalence conditions, quadrature of equation.

Дадим решение в квадратурах интегрального уравнения, которое обобщает известные уравнения [1, § 55], содержащие в ядре логарифм разности переменных,

$$c(x) \left(\int_{\alpha}^x a(t) \varphi(t) dt + \int_x^{\beta} b(t) \varphi(t) dt \right) + \\ + d(x) \left(\int_{\alpha}^{\beta} a(t) \left(\ln \frac{\beta-x}{|t-x|} \right) \varphi(t) dt + \int_{\alpha}^{\beta} b(t) \left(\ln \frac{|t-x|}{x-\alpha} \right) \varphi(t) dt \right) = f(x). \quad (1)$$

Решение приведенного уравнения будем искать в классе функций, обеспечивающих существование интегралов в формуле (1) как несобственных, а именно в классе функций, допускающих представление в виде

$$\varphi(x) = \frac{\varphi^*(x)}{(x-\alpha)^{1-\varepsilon} (\beta-x)^{1-\varepsilon}}, \quad (2)$$

где $\varepsilon > 0$, а функция $\varphi^*(x)$ удовлетворяет условию Гельдера. Покажем, что данное уравнение сводится к характеристическому особому уравнению с последующим решением уравнения Вольтерры. Введем аналитическую функцию

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha}^{\beta} \left[\int_{\alpha}^{\tau} a(t)\varphi(t) dt + \int_{\tau}^{\beta} b(t)\varphi(t) dt \right] \frac{d\tau}{\tau - z}. \quad (3)$$

По формулам Сохоцкого [1, § 4] находим:

$$\Phi^+(x) - \Phi^-(x) = \int_{\alpha}^x a(t)\varphi(t) dt + \int_x^{\beta} b(t)\varphi(t) dt = h(x), \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \Phi^+(x) + \Phi^-(x) &= \frac{1}{\pi i} \int_{\alpha}^{\beta} \left[\int_{\alpha}^{\tau} a(t)\varphi(t) dt + \int_{\tau}^{\beta} b(t)\varphi(t) dt \right] \frac{d\tau}{\tau - x} = \\ &= \frac{1}{\pi i} \left(\int_{\alpha}^{\beta} a(t) \ln \left(\frac{\beta - x}{|t - x|} \right) \varphi(t) dt + \int_{\alpha}^{\beta} b(t) \left(\ln \frac{|t - x|}{x - \alpha} \right) \varphi(t) dt \right) = \frac{1}{\pi i} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{h(\tau) d\tau}{\tau - x}. \end{aligned} \quad (5)$$

В равенстве (5) мы изменили порядок интегрирования и учли интегралы

$$\int_{\alpha}^t \frac{d\tau}{\tau - x} = \ln \frac{|t - x|}{x - \alpha}, \quad \int_t^{\beta} \frac{d\tau}{\tau - x} = \ln \frac{\beta - x}{|t - x|}.$$

Применяя формулы Сохоцкого (4), (5), записываем уравнение (1) в виде характеристического особого уравнения

$$c(x)h(x) + d(x) \int_{\alpha}^{\beta} \frac{h(\tau) d\tau}{\tau - x} = f(x). \quad (6)$$

Решая уравнение (6), затем уравнение Вольтерры (4), найдем решение исходного уравнения (1). Сначала решаем уравнение

$$\int_{\alpha}^x a(t)\varphi(t) dt + \int_x^{\beta} b(t)\varphi(t) dt = h(x), \quad (7)$$

где $h(x)$ – произвольно заданная функция, условия на которую будут указаны ниже. Решение ищем в классе функций вида (2), обеспечивающих существование интегралов в (7) как несобственных. Будем предполагать, что функции $a(x)$, $b(x)$, стоящие под знаком интегралов в уравнении (1) (внутренние коэффициенты уравнения), и функция $h(x)$ дифференцируемы на отрезке $[\alpha, \beta]$ и выполняется условие $a(x) - b(x) \neq 0$. Далее дифференцируем равенство (7) и получаем соотношение $a(x)\varphi(x) - b(x)\varphi(x) = (a(x) - b(x))\varphi(x) = h'(x)$, из которого находим функцию

$$\varphi(x) = \frac{h'(x)}{a(x) - b(x)}. \quad (8)$$

Подставляя функцию $\varphi(x)$ из (8) в равенство (7) и вычисляя интегралы по частям, получим необходимое и достаточное условие того, что функция (8) будет решением уравнения (7):

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^x a(t) \frac{h'(t)}{a(t) - b(t)} dt + \int_x^{\beta} b(t) \frac{h'(t)}{a(t) - b(t)} dt &\Leftrightarrow \frac{a(x)}{a(x) - b(x)} h(x) - \frac{b(x)}{a(x) - b(x)} h(x) + \\ &+ \frac{a(\alpha)}{a(\alpha) - b(\alpha)} h(\alpha) + \frac{b(\beta)}{a(\beta) - b(\beta)} h(\beta) - \int_{\alpha}^x \left(\frac{a(t)}{a(t) - b(t)} \right)' h(t) dt - \int_x^{\beta} \left(\frac{b(t)}{a(t) - b(t)} \right)' h(t) dt = \\ &= h(x) - \frac{a(\alpha)h(\alpha)}{a(\alpha) - b(\alpha)} + \frac{b(\beta)h(\beta)}{a(\beta) - b(\beta)} - \int_{\alpha}^x \left(\frac{a(t)}{a(t) - b(t)} \right)' h(t) dt - \int_x^{\beta} \left(\frac{b(t)}{a(t) - b(t)} \right)' h(t) dt = h(x) \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow \int_{\alpha}^x \left(\frac{a(t)}{a(t)-b(t)} \right)' h(t) dt + \int_x^{\beta} \left(\frac{b(t)}{a(t)-b(t)} \right)' h(t) dt = \\ & = \frac{b(\beta)}{a(\beta)-b(\beta)} h(\beta) - \frac{a(\alpha)}{a(\alpha)-b(\alpha)} h(\alpha). \end{aligned} \quad (9)$$

Заметим, что функция $h(x)$ имеет конечные пределы в точках $x = \alpha$, $x = \beta$. В этом легко убедиться, подставляя в уравнение (7) последовательно $x = \alpha$, $x = \beta$. Если же пределы функции $h(x)$ в точках $x = \alpha$, $x = \beta$ будут нулями порядка, меньшего единицы, то функция $h'(x)$ на концах отрезка интегрирования будет обращаться в бесконечность порядка, меньшего единицы, и, следовательно, найденное по формуле (8) решение будет принадлежать классу функций (2). В нашем случае $h(x)$ есть решение характеристического особого уравнения (6). Значит, надо искать ограниченные и дифференцируемые на $[\alpha, \beta]$ решения $h(x)$ уравнения (6), которые имеют конечные пределы $\lim_{x \rightarrow +\alpha} h(x) = h(\alpha)$, $\lim_{x \rightarrow -\beta} h(x) = h(\beta)$. Отсюда следует, что для решения уравнения (6) точки $x = \alpha$, $x = \beta$ не должны быть точками автоматической ограниченности [1, § 41]. Будем предполагать, что функции $c(x)$, $d(x)$ (внешние коэффициенты уравнения (1)) и функция $f(x)$ имеют производные, удовлетворяющие условию Гельдера, причем $c^2(x) - \pi^2 d^2(x) \neq 0$. При сделанных предположениях найденное решение $h(x)$ уравнения (6) обеспечит получение по формуле (8) функций, принадлежащих классу функций (2).

Выпишем решение уравнения (6) в классе функций, ограниченных на обоих концах отрезка [2, § 30]. Здесь $G(x) = \frac{c(x) - \pi d(x)i}{c(x) + \pi d(x)i} = e^{i\theta(x)}$, где $\theta(x) = \arg G(x)$, так как $|G(x)| = 1$. Выбираем значения аргумента такими, чтобы выполнялось условие $0 \leq \theta(x) < 2\pi$. Индекс χ уравнения (6) в классе ограниченных функций вычисляется по формуле $\chi = \left[\frac{\theta(\beta)}{2\pi} \right] - 1$. Если $\chi \geq 0$, то решение уравнения (6) находится по формуле

$$h(x) = Rf + \pi d(x) Z_0(x) (x - \alpha)^{\mu_\alpha} (\beta - x)^{\mu_\beta} P_{\chi-1}(x) = Rf + \sum_{k=1}^{\chi} c_k h_k(x), \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} h_k(x) &= \pi d(x) Z_0(x) (x - \alpha)^{\mu_\alpha} (\beta - x)^{\mu_\beta} x^{k-1}, \\ Rf &= c(x) f(x) - d(x) Z_0(x) \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{x - \alpha}{t - \alpha} \right)^{\mu_\alpha} \left(\frac{\beta - x}{\beta - t} \right)^{\mu_\beta} \frac{f(t)}{Z_0(x)(t - x)} dt, \\ Z_0(x) &= \exp \left[\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\theta(t)}{t - x} dt + \theta(\alpha) \ln(x - \alpha) - \theta(\beta) \ln(\beta - x) \right] dt, \\ \mu_\alpha &= 1 - \frac{\theta(\alpha)}{2\pi}, \quad \mu_\beta = \frac{\theta(\beta)}{2\pi} - \left[\frac{\theta(\beta)}{2\pi} \right]. \end{aligned}$$

Многочлен $P_{\chi-1}(x) \equiv 0$ в формуле (10) при $\chi = 0$. Для того чтобы уравнение (6) имело решения при $\chi < 0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{(t - \alpha)^k f(t)}{(t - \alpha)^{\mu_\alpha} (\beta - t)^{\mu_\beta} Z_0(t)(t - x)} dt = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, |\chi|. \quad (11)$$

Решение при выполнении условий (11) единственное и дается формулой (10) при $P_{\chi^{-1}}(x) \equiv 0$. Однако не всякая функция, вычисленная по формуле $\varphi(x) = \frac{h'(x)}{a(x) - b(x)}$, будет решением исходного уравнения (1). Решением будут только те функции, которые удовлетворяют необходимому и достаточному условию (9) разрешимости уравнения (1), которое имеет вид

$$\begin{aligned} & \int_{\alpha}^x \left(\frac{a(t)}{a(t) - b(t)} \right)' Rf(t) dt + \int_x^{\beta} \left(\frac{b(t)}{a(t) - b(t)} \right)' Rf(t) dt + \\ & + \sum_{k=1}^{\gamma} \left[\int_{\alpha}^x \left(\frac{a(t)}{a(t) - b(t)} \right)' h_k(t) dt + \int_x^{\beta} \left(\frac{b(t)}{a(t) - b(t)} \right)' h_k(t) dt \right] = \\ & = \frac{b(\beta)}{a(\beta) - b(\beta)} h(\beta) - \frac{a(\alpha)}{a(\alpha) - b(\alpha)} h(\alpha). \end{aligned} \quad (12)$$

Список использованной литературы

1. Гахов, Ф. Д. Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. – М.: Наука, 1977.
2. Самко, С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. – Минск: Наука и техника, 1987.

Поступила в редакцию 15.04.2016

УДК 517.955.32

Ф. Е. ЛОМОВЦЕВ, Н. И. ЮРЧУК

**РЕШЕНИЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕСТРОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО
УРАВНЕНИЯ ПРИ СМЕШАННЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ
В ЧЕТВЕРТИ ПЛОСКОСТИ**

*Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь,
e-mail: lomovcev@bsu.by, yurchuk@bsu.by*

В настоящей работе полностью исследована и решена начально-краевая задача для простейшего неоднородного нестроого гиперболического уравнения второго порядка при смешанных граничных условиях Дирихле и Неймана в четверти плоскости. Методом характеристик выведены ее единственные классические решения в явном аналитическом виде и доказана необходимость и достаточность установленных требований гладкости и условий согласования на исходные данные (правую часть уравнения, начальные и граничные данные), обеспечивающие ее однозначную везде разрешимость во множестве классических решений. Требования гладкости на исходные данные этой задачи на «единицу» выше, чем если бы нами решалась аналогичная первая или вторая смешанная задача для гиперболического уравнения колебаний полуграниченной струны.

Ключевые слова: начально-краевая задача, нестроого гиперболическое уравнение, классическое решение, необходимое и достаточное условие, требование гладкости, условие согласования.

F. E. LOMOVTSSEV, N. I. YURCHUK

**INITIAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE NON-STRICTLY HYPERBOLIC EQUATION
WITH MIXED BOUNDARY CONDITIONS IN A QUADRANT**

Belarusian State University, Minsk, Belarus, e-mail: lomovcev@bsu.by, yurchuk@bsu.by

In this paper, the initial boundary value problem for the simplest inhomogeneous second-order non-strictly hyperbolic equation with the mixed Dirichlet and Neumann boundary conditions in a quadrant is fully investigated and solved. By means of the method of characteristics we have obtained its classical solution in analytic explicit form and have proved the necessity and the sufficiency of the established requirements and the smoothness of the original data (the right hand-side of the equation, initial and boundary data) to ensure its unambiguous solvability everywhere in a variety of classical solutions. The requirements on the smoothness of the data of this problem are by “one” are higher than if we have solved the similar first- or second-order mixed problem for the hyperbolic equation of semi-infinite string vibrations.

Keywords: boundary value problem, non-strictly hyperbolic equation, classical solution, necessary and sufficient condition, smoothness requirement, reconciliation condition.

Введение. В данной работе методом характеристик выведены формулы классических решений начально-краевой (смешанной) задачи для нестроого гиперболического уравнения второго порядка при смешанных граничных условиях в четверти плоскости. Для этой начально-краевой задачи нами найдены необходимые и достаточные требования гладкости и условия согласования исходных данных (правой части уравнения, начальных и граничных данных), которые обеспечивают ее однозначную везде разрешимость во множестве классических решений. Впервые методом характеристик формулы решений и достаточные условия существования единственных классических решений начально-краевой задачи для простейшего однородного гиперболического (однородного уравнения колебаний струны) в первой четверти были получены в [1] как в случае не характеристической, так и характеристической нестационарной (зависящей от времени) первой кривой производной в граничном условии. В работе [2] эти результаты в случае

не характеристической нестационарной первой косо́й производной были обобщены на неоднородное уравнение колебаний полуограниченной струны и доказаны установленные необходимые и достаточные требования гладкости и условия согласования на исходные данные. Аналогичные результаты для более общего уравнения колебаний струны в четверти плоскости при некоторых нестационарных вторых косо́х производных в граничном условии имеются в [3]. Формулы единственных классических решений, а также необходимые и достаточные условия однозначной везде разрешимости начально-краевой задачи для простейшего неоднородного уравнения колебаний струны в четверти плоскости при характеристической нестационарной первой косо́й производной в граничном условии получены в [4]. В случае характеристической стационарной первой косо́й производной на левом конце и граничного условия первого рода на правом конце ограниченной струны начально-краевая задача исследовалась и решалась в [5]. Некоторые начально-краевые задачи соответственно для нестрого гиперболического уравнения и гиперболического уравнения при простейших стационарных граничных условиях исследованы и решены в [6, 7]. Основным результатом (теорема) нашей работы без доказательства анонсирован в [8].

1. Постановка начально-краевой задачи. В четверти плоскости G_∞ ставится задача:

$$u_{tt}(x,t) + 2u_{xt}(x,t) + u_{xx}(x,t) = f(x,t), \quad \{x,t\} \in G_\infty = [0,\infty[\times [0,\infty[, \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}_+ = [0,\infty[, \quad (2)$$

$$u|_{x=0} = \mu(t), \quad u_x|_{x=0} = \eta(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (3)$$

где $f, \varphi, \psi, \mu, \eta$ – заданные функции соответствующих переменных x и (или) t .

Требуется вывести в явном виде ее классические решения $u \in C^2(G_\infty)$ и найти необходимые и достаточные условия на исходные данные (правую часть f , начальные φ, ψ и граничные μ, η данные) для ее однозначной корректной везде разрешимости. Символом $C^k(\Omega)$ мы обозначаем множество k раз непрерывно дифференцируемых функций на множестве Ω и $C^0(\Omega) = C(\Omega)$.

2. Исследование и решение начально-краевой задачи. Критической характеристикой $x = t$ из двукратного семейства характеристик $x - t = C, C \in \mathbb{R}_+$, уравнения (1) первая четверть G_∞ разбивается на два множества $G_- = \{x,t\} \in G_\infty : x > at > 0\}, G_+ = \{x,t\} \in G_\infty : 0 \leq x \leq at\}$.

Сначала выявим необходимые *основные* (очевидные) требования гладкости на правые части уравнения (1), начальных (2) и граничных (3) условий и *основные* (очевидные) условия согласования для них. Непосредственно из определения классических решений $u \in C^2(G_\infty)$ начально-краевой задачи (1)–(3) вытекают *основные* необходимые требования гладкости:

$$f \in C(G_\infty), \quad \varphi \in C^2(\mathbb{R}_+), \quad \psi \in C^1(\mathbb{R}_+), \quad \mu \in C^2(\mathbb{R}_+), \quad \eta \in C^1(\mathbb{R}_+), \quad \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[. \quad (4)$$

Дополнительные (не столь очевидные) необходимые требования их гладкости установлены ниже. Для функций $u \in C^2(G_\infty)$ вычисляем значения первых производных по x от начальных условий (2) при $x = 0$ с помощью значений граничных условий (3) при $t = 0$, а затем вычисляем значения первых производных по t от граничных условий (3) при $t = 0$ с помощью значений начальных условий (2) при $x = 0$ и соответственно получаем основные необходимые условия согласования:

$$\varphi(0) = \mu(0), \quad \varphi'(0) = \eta(0); \quad \psi(0) = \mu'(0), \quad \psi'(0) = \eta'(0). \quad (5)$$

Вычисляем значение суммы второй производной по x от первого из начальных условий (2) и первой производной по x от второго из начальных условий (2) при $x = 0$ с помощью значений правой части уравнения (1) при $t = 0$ и $x = 0$, соответственно второй и первой производных по t от граничных условий (3) при $t = 0$, и находим основное необходимое условие согласования:

$$\begin{aligned} \varphi''(0) + \psi'(0) &= \left[(u|_{t=0})_{xx} + (u_t|_{t=0})_x \right] \Big|_{x=0} = \left[u_{xx} + u_{xt} \right] \Big|_{t=0} \Big|_{x=0} = \\ &= \left[f(x,t) - u_{tt} - u_{xt} \right] \Big|_{x=0} \Big|_{t=0} = f(0,0) - \mu''(0) - \eta'(0). \end{aligned} \quad (6)$$

Дополнительное (не столь очевидное) необходимое условие согласования между ними будет найдено нами ниже при доказательстве следующей теоремы.

Теорема. *Начально-краевая задача (1)–(3) имеет единственное классическое решение $u \in C^2(G_\infty)$ на множествах G_- и G_+ соответственно вида*

$$u_-(x,t) = \varphi(x-t) + [\varphi'(x-t) + \psi(x-t)]t + \int_0^t (t-\tau)f(x-t+\tau,\tau)d\tau, \quad (7)$$

$$u_+(x,t) = \mu(t-x) + [\mu'(t-x) + \eta(t-x)]x - \int_0^{t-x} (t-\tau)f(t-x-\tau,\tau)d\tau + \int_0^t (t-\tau)f(|x-t+\tau|,\tau)d\tau \quad (8)$$

для тех и только тех правой части f , начальных φ, ψ и граничных μ, η данных, для которых справедливы требования гладкости

$$f \in C(G_\infty), \quad \varphi, \mu \in C^3(\mathbb{R}_+), \quad \psi, \eta \in C^2(\mathbb{R}_+), \quad \mathbb{R}_+ = [0, +\infty], \quad (9)$$

$$\int_0^t f(|x-t+\tau|,\tau)d\tau, \quad \int_0^t (t-\tau) \frac{\partial f(|x-t+\tau|,\tau)}{\partial t} d\tau \in C^1(G_\infty), \quad (10)$$

и условия согласования (5), (6) и на G_+ еще дополнительные требования гладкости

$$\int_0^{t-x} (t-\tau)f(t-x-\tau,\tau)d\tau \in C^2(G_+), \quad |f_t(0,0)| < +\infty, \quad (11)$$

и дополнительные условия согласования

$$\varphi'''(0) + \psi''(0) + f_t(0,0) = \mu'''(0) + \eta''(0), \quad f_x(0,0) = 0. \quad (12)$$

Доказательство. Сначала выведем формулу классических решений. Методом характеристик находится общий вид классических решений уравнения (1) на множестве G_∞ :

$$u(x,t) = g(x-t)t + h(x-t) + F(x,t), \quad F(x,t) = \int_0^t (t-\tau)f(|x-t+\tau|,\tau)d\tau, \quad (13)$$

где g, h – любые дважды непрерывно дифференцируемые функции своих переменных и частное решение $F(x,t)$ уравнения (1) является дважды непрерывно дифференцируемой функцией на G_∞ .

На множестве G_- классические решения начально-краевой задачи (1)–(3) совпадают с классическими решениями задачи Коши (1), (2). Подставляя все решения (13) уравнения (1) в начальные условия (2), приходим к системе уравнений:

$$u|_{t=0} = h(x) = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = g(x) - h'(x) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}_+,$$

решениями которой служат единственные функции

$$h(y) = \varphi(y), \quad g(z) = \varphi'(z) + \psi(z), \quad y, z \in \mathbb{R}_+.$$

Подставляя эти функции g и h в общее решение (общий интеграл) (13) уравнения (1), получаем единственное решение u_- вида (7) задачи (1)–(3) на G_- . Непосредственным дифференцированием функции (7) убеждаемся в том, что требований гладкости (9), (10) достаточно для дважды непрерывной дифференцируемости функции u_- на G_- . В частности, слагаемые первых частных производных от частного решения неоднородного уравнения (1):

$$F_t(x,t) = \int_0^t f(x-t+\tau,\tau)d\tau + \int_0^t (t-\tau) \frac{\partial f(x-t+\tau,\tau)}{\partial t} d\tau, \quad F_x(x,t) = -\int_0^t (t-\tau) \frac{\partial f(x-t+\tau,\tau)}{\partial t} d\tau,$$

согласно требованиям (10), допускают еще непрерывное дифференцирование по x и t в G_- . Условия согласования отсутствуют ввиду отсутствия граничных условий для точек множества G_- .

На множестве G_+ классические решения начально-краевой задачи (1)–(3) совпадают с классическими решениями задачи типа Дарбу для параболического уравнения (1) при граничном условии (3) и условии непрерывности с полученным единственным решением u_- на критической характеристике $x = t$. В результате подстановки общего решения (13) в граничные условия (3) имеем систему уравнений:

$$\begin{aligned} u|_{x=0} &= g(-t)t + h(-t) + \int_0^t (t-\tau)f(t-\tau, \tau)d\tau = \mu(t), \\ u_x|_{x=0} &= g'(-t)t + h'(-t) - \int_0^t (t-\tau)\frac{\partial f(t-\tau, \tau)}{\partial t}d\tau = \eta(t), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Дифференцируем по t первое уравнение этой системы, прибавляем результат к ее второму уравнению, делаем замену $y = -t$ и находим единственную функцию

$$g(y) = \mu'(-y) + \eta(-t) - \int_0^{-y} f(-y-\tau, \tau)d\tau, \quad y \leq 0. \quad (14)$$

Из первого уравнения этой системы однозначно выражаем функцию

$$h(z) = \mu(-z) + [\mu'(-z) + \eta(-z)]z + \int_0^{-z} \tau f(-z-\tau, \tau)d\tau, \quad z \leq 0. \quad (15)$$

Подставив единственные функции (14), (15) в общее решение (13), на G_+ имеем единственное решение (8), для дважды непрерывной дифференцируемости которого на G_+ очевидно достаточно требований гладкости (9), (10) и гладкости интеграла из (11).

Остается убедиться в дважды непрерывной дифференцируемости решений (7) и (8) на характеристике $x = t$. Первые три условия согласования из (5) обеспечивают непрерывность решений (7) и (8) на этой характеристике, так как

$$u_-|_{x=t} - u_+|_{x=t} = \varphi(0) - \mu(0) + [\varphi'(0) - \eta(0) + \psi(0) - \mu'(0)]t, \quad t \geq 0.$$

Дифференцируя выражения (7) и (8) нужное число раз по x , t и полагая $x = t$, находим разности их первых и вторых частных производных:

$$\begin{aligned} (u_-)_t|_{x=t} - (u_+)_t|_{x=t} &= \psi(0) - \mu'(0) - [\varphi''(0) + \psi'(0) - f(0,0) + \mu''(0) + \eta'(0)]t, \\ (u_-)_x|_{x=t} - (u_+)_x|_{x=t} &= \varphi'(0) - \eta(0) + [\varphi''(0) + \psi'(0) - f(0,0) + \mu''(0) + \eta'(0)]t, \\ (u_-)_{tt}|_{x=t} - (u_+)_{tt}|_{x=t} &= -\varphi'''(0) - \psi''(0) + f(0,0) - \mu'''(0) - \eta''(0) + \\ &+ [\varphi'''(0) + \psi''(0) + f_t(0,0) + f_x(0,0) - \mu'''(0) - \eta''(0)]t, \\ (u_-)_{xt}|_{x=t} - (u_+)_{xt}|_{x=t} &= \psi'(0) - \eta'(0) - \\ &- [\varphi'''(0) + \psi''(0) + f_t(0,0) + f_x(0,0) - \mu'''(0) - \eta''(0)]t, \\ (u_-)_{xx}|_{x=t} - (u_+)_{xx}|_{x=t} &= \varphi''(0) + \psi'(0) - f(0,0) + \mu''(0) + \eta'(0) + \\ &+ [\varphi'''(0) + \psi''(0) + f_t(0,0) + f_x(0,0) - \mu'''(0) - \eta''(0)]t, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (16)$$

В силу последних трех условий согласования из (5) и условий согласования (6), (12) разности (16) обнуляются, т. е. первые и вторые частные производные от (7) и (8) тоже непрерывны на характеристике $x = t$. Таким образом, мы вывели в явном виде единственные классические решения (7) и (8) задачи (1)–(3) и доказали достаточность требований гладкости (9)–(11) и условий согласования (5), (6) и (12) для их дважды непрерывной дифференцируемости в G_∞ .

Теперь покажем необходимость не установленных перед доказываемой теоремой дополнительных требований гладкости из (9)–(11) и дополнительных условий согласования (12).

Сначала докажем необходимость дополнительных интегральных требований гладкости (10) и (11) на f , которые отсутствуют в основных требованиях (4) на f . Если функция f зависит от x ,

то для любой функции $f \in C(G_\infty)$ непрерывное частное решение $u_0(x, t) = F(x, t) \in C(G_\infty)$ неоднородного уравнения (1) в G_∞ естественно должно иметь непрерывно дифференцируемые в G_∞ первые частные производные:

$$(u_0)_t(x, t) = \int_0^t f(|x-t+\tau|, \tau) d\tau + \int_0^t (t-\tau) \frac{\partial f(|x-t+\tau|, \tau)}{\partial t} d\tau \in C^1(G_\infty),$$

$$(u_0)_x(x, t) = -\int_0^t (t-\tau) \frac{\partial f(|x-t+\tau|, \tau)}{\partial t} d\tau \in C^1(G_\infty).$$

Тогда также непрерывно дифференцируемой в G_∞ должна быть их сумма

$$\frac{\partial u_0(x, t)}{\partial n} = (\overline{\text{grad} u_0}, \vec{n}) = (\{(u_0)_t, (u_0)_x\}, \{1, 1\}) = \int_0^t f(|x-t+\tau|, \tau) d\tau \in C^1(G_\infty),$$

которая является производной от u_0 по направлению $\vec{n} = \{1, 1\}$ семейства характеристик $x-t=C$, $C \in \mathbb{R}$. Отсюда заключаем необходимость интегральных требований гладкости (10). Если же функция $f = f(t)$ не зависит от x , то основное необходимое требование гладкости $f \in C(\mathbb{R}_+)$ и интегральные требования гладкости (10) эквивалентны требованию $f \in C(\mathbb{R}_+)$ из (4) и дополнительное необходимое условие согласования $f'_x(0, 0) = 0$ из (12) очевидно выполняется.

Ввиду общего решения (13) на G_- для $h = f = 0$ и $\forall g \in C^2(\mathbb{R}_+)$, классические решения $u_1(x, t) = g(x-t)t \in C^2(G_-)$ однородного уравнения (1) должны сохранять гладкость при их подстановке во второе из начальных условий (2):

$$(u_1)_t|_{t=0} = [g(x-t) - g'(x-t)t]|_{t=0} = g(x) = \psi(x), \quad x \geq 0, \quad (17)$$

и, следовательно, необходима дополнительная гладкость $\psi \in C^2(\mathbb{R}_+)$, так как $g \in C^2(\mathbb{R}_+)$.

Благодаря основному необходимому требованию гладкости $\forall \psi \in C^1(\mathbb{R}_+)$, в решениях (13) на G_- можно положить $g = f = 0$, $h(z) = \int_0^z \psi(s) ds$ и иметь классические решения $u_2(x, t) = \int_0^{x-t} \psi(s) ds \in C^2(G_-)$ однородного уравнения (1), которые обязаны сохранять гладкость при их подстановке в первое из начальных условий (2):

$$(u_2)|_{t=0} = \int_0^x \psi(s) ds = \varphi(x), \quad x \geq 0.$$

Отсюда вытекает дополнительное необходимое требование $\varphi \in C^3(\mathbb{R}_+)$, так как уже $\psi \in C^2(\mathbb{R}_+)$.

Повышение на «единицу» гладкости начальных данных φ и ψ по сравнению с основными требованиями гладкости на них из (4) влечет повышение на «единицу» гладкости граничных данных μ и η по сравнению с основными требованиями гладкости на них из (4). Для любой функции $\varphi \in C^2(\mathbb{R}_+)$ из основного необходимого требования гладкости (4) в решениях (13) на G_+ полагаем $g = f = 0$, $h(z) = \varphi(-z)$ и имеем классические решения $u_3(x, t) = \varphi(t-x) \in C^2(G_+)$ однородного уравнения (1), которые должны сохранять гладкость при их подстановке в граничные условия (3):

$$(u_3)|_{x=0} = \varphi(t) = \mu(t), \quad (u_3)_x|_{x=0} = -\varphi'(t) = \eta(t), \quad t \geq 0.$$

Из этих равенств следует необходимость дополнительной гладкости $\mu \in C^3(\mathbb{R}_+)$ и $\eta \in C^2(\mathbb{R}_+)$, так как уже $\varphi \in C^3(\mathbb{R}_+)$.

Пусть решения $u_+ \in C^2(G_+)$. Поэтому из равенства (8) следует необходимость интегрального требования гладкости из (11), потому что уже $\mu \in C^3(\mathbb{R}_+)$, $\eta \in C^2(\mathbb{R}_+)$ и $u_0 \in C^2(G_\infty)$. Чтобы показать необходимость дополнительного требования гладкости $|f_t(0, 0)| < +\infty$ из (11) и дополнительных условий согласования (12), для более гладких функций f , у которых существуют непрерывные вторые частные производные $f^{(2,0)} = f_{xx} \in C(G_\infty)$ по x , мы можем продифференцировать

дважды по t интеграл из (11), который в дальнейшем будем обозначать через u_4 , и для всех $t \geq x \geq 0$ будем иметь

$$(u_4)_{tt} = [f^{(0,1)}(0, t-x) + f^{(1,0)}(0, t-x)]x + f(0, t-x) + 2 \int_0^{t-x} f^{(1,0)}(t-x-\tau, \tau) d\tau + \int_0^{t-x} (t-\tau) f^{(2,0)}(t-x-\tau, \tau) d\tau \in C(G_+), \quad (18)$$

где обозначены первые частные производные $f^{(1,0)} = f_x, f^{(0,1)} = f_t$. От этого равенства при $x = t$ приходим к равенству

$$(u_4)_{tt} \Big|_{x=t} = [f^{(0,1)}(0, 0) + f^{(1,0)}(0, 0)]t + f(0, 0) \in C(\mathbb{R}_+), \quad (19)$$

которое указывает на конечность суммы следов первых частных производных в начале координат

$$|f_t(0, 0) + f_x(0, 0)| < +\infty \quad (20)$$

для указанных выше более гладких правых частей f . Конечность суммы (20) для правых частей f , удовлетворяющих только установленным выше необходимым требованиям гладкости на f из (9)–(11), легко устанавливается предельным переходом по f в равенстве (19), которое уже не содержит слагаемых со второй производной $f^{(2,0)}$. С одной стороны, для равенства вторых частных производных, например $(u_-)_{tt} \Big|_{x=t} = (u_+)_{tt} \Big|_{x=t}$, на критической характеристике $x = t$ для каждого $\varphi, \mu \in C^3(\mathbb{R}_+)$, $\psi, \eta \in C^2(\mathbb{R}_+)$ в (16) вычислено значение этой суммы

$$f_t(0, 0) + f_x(0, 0) = c_0, \quad (21)$$

где $c_0 = \mu'''(0) + \eta''(0) - \varphi'''(0) - \psi''(0)$. С другой стороны, для любых решений $u \in C^3(G_+)$, дифференцируя уравнение (1) соответственно по t и x , получаем равенства

$$u_{ttt}(x, t) + 2u_{xtt}(x, t) + u_{xxt}(x, t) = f_t(x, t), \quad u_{ttx}(x, t) + 2u_{xxt}(x, t) + u_{xxx}(x, t) = f_x(x, t).$$

Вычитая второе равенство из первого и в их разности полагая $x = 0, t = 0$, находим, что

$$f_t(0, 0) - f_x(0, 0) = [u_{ttt} + u_{xtt} - u_{xxt} - u_{xxx}] \Big|_{x=0} \Big|_{t=0} = c_0. \quad (22)$$

Предельным переходом равенство (22) распространяется с решений $u \in C^3(G_+)$ на рассматриваемые решения $u \in C^2(G_+)$ и, следовательно, с более гладких правых частей f на правые части f , удовлетворяющие установленным выше необходимым требованиям гладкости из (9)–(11). Равенства (21) и (22) указывают на то, что $f_x(0, 0) = 0$ и $f_t(0, 0) = c_0$, т. е. необходимы последнее требование гладкости в (11) и условия согласования (12). Теорема доказана.

Замечание 1. Если функция f не зависит от x , то налагаемые требования гладкости на f в (9)–(11) для G_- и G_+ эквивалентны соответственно требованиям $f \in C(\mathbb{R}_+)$ и $f \in C^1(\mathbb{R}_+)$. Если функция f зависит от x , то для непрерывных функций f в G_∞ принадлежность указанных в (10) интегралов множеству $C^1(G_\infty)$ эквивалентна их принадлежности множествам $C^{(1,0)}(G_\infty)$ или $C^{(0,1)}(G_\infty)$. Здесь $C^{(1,0)}(G_\infty)$ и $C^{(0,1)}(G_\infty)$ – соответственно множества непрерывно дифференцируемых по x и t и непрерывных по t и x функций в первой четверти G_∞ .

Замечание 2. В отличие от начально-краевых задач для гиперболических уравнений [2, 3] при не характеристической косої производной в граничном условии, в задаче (1)–(3) для нестрого гиперболического уравнения требования гладкости для $f, \varphi, \psi, \mu, \eta$ на «единицу» выше и в G_+ решение u_+ не зависит от данных φ, ψ в силу двойной кратности характеристик $x - t = C, C \in \mathbb{R}$.

Замечание 3. Интегральное требование гладкости на $f \in C(G_\infty)$ из (11) эквивалентно требованию гладкости $x \int_0^{t-x} f(t-x-\tau, \tau) d\tau \in C^2(G_+)$ из [8] в силу очевидного равенства

$$\int_0^{t-x} (t-\tau)f(t-x-\tau, \tau)d\tau = x \int_0^{t-x} f(t-x-\tau, \tau)d\tau + \int_0^{t-x} (t-x-\tau)f(t-x-\tau, \tau)d\tau,$$

поскольку дважды непрерывная дифференцируемость в G_+ последнего интеграла этого равенства обеспечивается дважды непрерывной дифференцируемостью частного решения $u_0(x, t) = F(x, t) \in C^2(G_\infty)$ при $x = 0$, т. е. требованием $\int_0^t (t-\tau)f(t-\tau, \tau)d\tau \in C^2(\mathbb{R}_+)$, и равенством

$$\int_0^{t-x} (t-x-\tau)f(t-x-\tau, \tau)d\tau = \int_0^{t'} (t'-\tau)f(t'-\tau, \tau)d\tau \Big|_{t'=t-x}.$$

Замечание 4. Может появиться ошибочное мнение о возможности доказательства необходимости требований большей гладкости на исходные данные $f, \varphi, \psi, \mu, \eta$, чем указаны в нашей теореме. Во-первых, для любой краевой задачи в принципе невозможно обосновать такие необходимые требования гладкости, которые превосходят минимальные достаточные требования гладкости на исходные данные для ее однозначной корректной везде разрешимости. Во-вторых, выше в нашем доказательстве $\forall \psi \in C^1(\mathbb{R}_+)$ в решениях (13) на G_- нельзя взять, например, $h(z) = \int_0^z \int_0^\tau \psi(s) ds d\tau$ и получить необходимость более высокой гладкости $\varphi \in C^4(\mathbb{R}_+)$, потому что в общем решении (13) функции h только дважды непрерывно дифференцируемы. Аналогичным образом из равенства (17) нельзя вывести необходимость гладкости $\psi \in C^3(\mathbb{R}_+)$, потому что в решениях (13) функции g только дважды непрерывно дифференцируемы. Условие $f_x(0, 0) = 0$ служит условием согласования, как здесь в (12), или требованием гладкости, как в [8]?

Выводы. В настоящей работе выведены формулы единственных классических решений начально-краевой задачи для простейшего (модельного) нестроого гиперболического уравнения (параболического) второго порядка в четверти плоскости и доказана необходимость и достаточность установленных требований гладкости и условий согласования на исходные данные (правую часть уравнения, начальные и граничные данные), которые обеспечивают ее однозначную везде разрешимость во множестве классических решений.

Список использованной литературы

1. Барановская, С. Н. Смешанная задача для уравнения колебания струны с зависящей от времени косою производной в краевом условии / С. Н. Барановская, Н. И. Юрчук // Дифференц. уравнения. – 2009. – Т. 45, № 8. – С. 1188–1191.
2. Ломовцев, Ф. Е. Метод Дюамеля решения неоднородного уравнения колебаний полуограниченной струны с косою производной в нестационарном граничном условии / Ф. Е. Ломовцев, Е. Н. Новиков // Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. – 2012. – № 1. – С. 83–86.
3. Моисеев, Е. И. Неоднородное факторизованное гиперболическое уравнение второго порядка в четверти плоскости при полунестационарной второй косою производной в граничном условии / Е. И. Моисеев, Ф. Е. Ломовцев, Е. Н. Новиков // Докл. Акад. наук. – 2014. – Т. 459, № 5. – С. 544–549.
4. Ломовцев, Ф. Е. Необходимые и достаточные условия вынужденных колебаний полуограниченной струны с первой характеристической косою производной в нестационарном граничном условии / Ф. Е. Ломовцев // Вестн. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2016. – № 1. – С. 21–27.
5. Шлапакова, Т. С. Смешанная задача для уравнения колебания ограниченной струны с зависящей от времени производной в краевом условии, направленной по характеристике / Т. С. Шлапакова, Н. И. Юрчук // Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. – 2013. – № 2. – С. 84–90.
6. Корзюк, В. И. Первая граничная задача для нестроого гиперболического уравнения второго порядка с младшими производными / В. И. Корзюк, Е. С. Чеб // Еругинские чтения-2013: тез. докл. XV Междунар. науч. конф. по дифференц. уравнениям, Гродно, 13–16 мая 2013 г. – Минск, 2013. – Ч. 2. – С. 14–15.
7. Корзюк, В. И. Уравнения математической физики. – Минск: БГУ, 2011.
8. Юрчук, Н. И. Решение без продолжений данных смешанной задачи для параболического уравнения в четверти плоскости / Н. И. Юрчук, Ф. Е. Ломовцев // XII Белорусская математическая конференция: тез. докл. Междунар. науч. конф., Минск, 5–10 сент. 2016 г.: в 5 ч. – Минск, 2016. – Ч. 2. – С. 78–79.

Поступила в редакцию 17.06.2016

УДК 512.548

Д. И. КИРИЛЮК

**КРИТЕРИИ САМОСОВМЕЩЕНИЯ И ЦЕНТРОИДЫ
 МНОГОУГОЛЬНИКОВ n -АРНЫХ ГРУПП**

*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь,
 e-mail: kirilyuk.denis@gmail.com*

В работе установлены новые критерии самосовмещения произвольной точки n -арной группы относительно элементов последовательности вершин $2k$ -угольников n -арной группы. Доказывается, что центроид $2k$ -угольника G , обладающего тем свойством, что произвольная точка n -арной группы самосовмещается относительно элементов последовательности вершин этого $2k$ -угольника, совпадает с центроидом k -угольника G .

Ключевые слова: n -арная группа, k -угольник n -арной группы, вектор n -арной группы.

D. I. KIRILYUK

SELF-RETURNING CRITERIA AND CENTROIDS OF POLYGONS OF n -ARY GROUPS

*Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Belarus,
 e-mail: kirilyuk.denis@gmail.com*

In the work new criteria of self-returning of any point of n -ary groups concerning the elements of sequence of tops of $2k$ -gons of the n -ary groups are established. It is proved that centroids of $2k$ -gons of G possessing that property that any point of n -ary groups of self-returning concerning the elements of sequence of tops of this $2k$ -gons coincides with the G k -square centroid.

Keywords: n -ary group, k -gon of n -ary group, vector of n -ary group.

Введение. Весомый вклад в развитие приложений теории n -арных групп (для любого $n \geq 2$) в аффинной геометрии внесли С. А. Русаков [1] и Д. Вакарелов [2]. В частности, С. А. Русаков построил аффинное пространство $W(G)$ методом фундаментальных последовательностей векторов полуабелевой n -арной rs -группы G . Указанные исследования получили дальнейшее развитие в монографии Ю. И. Кулаженко [3], где было предложено новое направление, связанное с самосовмещением элементов n -арной группы. Целью настоящей работы является исследование $2k$ -угольников G , обладающих тем свойством, что произвольная точка самосовмещается относительно элементов последовательности вершин этих многоугольников.

Предварительные сведения. Традиционно в теоретической механике центроидом однородного n -угольника называют точку M , которая определяется вектором

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{n}(\overrightarrow{OR_1} + \overrightarrow{OR_2} + \dots + \overrightarrow{OR_n}), \quad (1)$$

где O – некоторая фиксированная точка, R_1, R_2, \dots, R_n – вершины n -угольника. Равенство (1) эквивалентно следующим:

$$\begin{aligned} n\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OR_1} + \overrightarrow{OR_2} + \dots + \overrightarrow{OR_n}, \\ \underbrace{\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM} + \dots + \overrightarrow{OM}}_n &= \overrightarrow{OR_1} + \overrightarrow{OR_2} + \dots + \overrightarrow{OR_n}, \\ \underbrace{-\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OR_1} - \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OR_2} - \dots - \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OR_n}}_n &= \vec{0}, \\ \underbrace{\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OR_1} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OR_2} + \dots + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OR_n}}_n &= \vec{0}, \\ \underbrace{\overrightarrow{MR_1} + \overrightarrow{MR_2} + \dots + \overrightarrow{MR_n}}_n &= \vec{0}. \end{aligned}$$

Заметим, что центр масс однородного многоугольника зависит только от геометрических свойств объекта. Центроидом X треугольника ABC называют точку пересечения медиан. Для X справедливо равенство

$$\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC} = \vec{0}.$$

Центроидом M произвольного четырехугольника $ABCD$ называют точку пересечения средних линий четырехугольника. Для M справедливо равенство

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}.$$

Центр масс треугольника и центр масс четырехугольника совпадают соответственно с центроидом треугольника и центроидом четырехугольника. С учетом вышеуказанного, введем

Определение 1. Центроидом k -угольника $\langle a_1, a_2, \dots, a_k \rangle$ n -арной группы G назовем точку x из G , которая удовлетворяет следующему равенству:

$$\overrightarrow{xa_1} + \overrightarrow{xa_2} + \dots + \overrightarrow{xa_k} = \vec{0}.$$

Напомним следующие определения.

Определение 2 [3]. Упорядоченную пару $\langle a, b \rangle$ точек $a, b \in G$ называют направленным отрезком G и обозначают через \overline{ab} .

Определение 3 [3]. Пишут $\overline{ab} = \overline{cd}$ и говорят, что направленные отрезки \overline{ab} и \overline{cd} G равны, если четырехугольник $\langle a, c, d, b \rangle$ является параллелограммом G .

Пусть V – множество всех направленных отрезков G . Отношение « $=$ » разбивает множество V на классы эквивалентности (см. [1]).

Определение 4 [3]. Если $\overline{ab} \in V$, то множество $\{\overline{uv} \mid \overline{uv} \in V, \overline{uv} = \overline{ab}\}$ называют вектором G и обозначают через \vec{ab} , или одной малой буквой латинского алфавита, например $\vec{ab} = \vec{p}$. Через $V(G)$ обозначают множество всех векторов G .

Определение 5 [3]. Два вектора $\vec{p} = \vec{ab}$ и $\vec{q} = \vec{cd}$ из $V(G)$ называют равными и пишут $\vec{p} = \vec{q}$, если их представители \overline{ab} и \overline{cd} равны.

В [1] доказано, что для любых точек равенства

$$[ab^{[-2]} \begin{matrix} 2n-4 \\ b \ c \end{matrix}] = b, \tag{2}$$

$$[cb^{[-2]} \begin{matrix} 2n-4 \\ b \ a \end{matrix}] = b \tag{3}$$

эквивалентны.

Определение 6 [3]. Если выполняется равенство (2) или (3), то b называют серединой отрезка $[a, c]$. Если имеет место равенство (2) (равенство (3)), то точку c (точку a) называют точкой, симметричной точке a (точке c) относительно точки b , и обозначают через $S_b(a)$ ($S_b(c)$), т. е. $c = S_b(a)$ ($a = S_b(c)$).

Из (2) или (3) следует, что

$$S_b(a) = [ba^{[-2]} \begin{matrix} 2n-4 \\ a \ b \end{matrix}],$$

$$S_b(c) = [bc^{[-2]} \begin{matrix} 2n-4 \\ c \ b \end{matrix}].$$

Определение 7 [3]. Точку x_i называют i -м обходом элементов последовательности $\langle a_1, \dots, a_k \rangle$ точкой p , если

$$x_1 = S_{a_k} (\dots (S_{a_2} (S_{a_1} (p))) \dots)$$

и

$$x_i = S_{a_k} (\dots (S_{a_2} (S_{a_1} (x_{i-1}))) \dots)$$

для всех $i = 2, 3, \dots, n$, где $p \in A$, $a_1^k \in A^k$.

Определение 8 [3]. Говорят, что точка p самосовмещается относительно элементов последовательности $\langle a_1, \dots, a_k \rangle$, если

$$S_{a_k} (\dots (S_{a_2} (S_{a_1} (p))) \dots) = p,$$

где $p \in A$, $a_1^k \in A^k$.

Определение 9 [3]. n -Арную группу G называют полуабелевой, если для любой последовательности $x_1, x_2, \dots, x_n \in G$ справедливо равенство

$$[x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n] = [x_n x_2 \dots x_{n-1} x_1].$$

Более подробные сведения про нейтральные последовательности можно найти в [4].

Лемма 1 [3]. n -Арная группа G – полуабелева тогда и только тогда, когда для любых точек x, y, z из G выполняется равенство

$$[xy^{[-2]} y z] = [zy^{[-2]} y x].$$

Лемма 2 [3]. Пусть G – произвольная n -арная группа. Для любых точек a, b, c, d множества G справедливы равенства

$$\begin{aligned} \overline{ab} + \overline{cd} &= \overline{a[bc^{[-2]} c d]^{2n-4}}, \\ \overline{ab} + \overline{cd} &= \overline{[cb^{[-2]} b a]^{2n-4} d}. \end{aligned}$$

Лемма 3 [3]. Пусть G – произвольная n -арная группа. G будет полуабелевой тогда и только тогда, когда для любых точек a, b, c, d из G справедливо равенство

$$\overline{ab} + \overline{cd} = \overline{ad} + \overline{cb}.$$

Установим справедливость следующей леммы.

Лемма 4. Пусть G – полуабелева n -арная группа, $a_1, a_2, a_3, \dots, a_l$ – произвольные точки из G ($l \in \mathbb{N}$). Если справедливо равенство

$$a_1 = [a_1 a_{l-1}^{[-2]} a_{l-1} a_{l-2} \dots a_5^{[-2]} a_5 a_4 a_3^{[-2]} a_3 a_2], \quad (4)$$

то справедливо следующее равенство:

$$\begin{aligned} [a_1 a_2^{[-2]} a_2 a_3 a_4^{[-2]} a_4 a_5 \dots a_{l-2}^{[-2]} a_{l-2} a_{l-1} a_l^{[-2]} a_l p a_l^{[-2]} a_l a_{l-1} a_{l-2}^{[-2]} a_{l-2} \dots \\ \dots a_5 a_4^{[-2]} a_4 a_3 a_2^{[-2]} a_2 a_1] = p. \end{aligned} \quad (5)$$

Доказательство. Подставим значение a_1 из (4) в левую часть (5), т. е. в следующее выражение:

$$\begin{aligned} [a_1 a_2^{[-2]} a_2 a_3 a_4^{[-2]} a_4 a_5 \dots a_{l-2}^{[-2]} a_{l-2} a_{l-1} a_l^{[-2]} a_l p \\ a_l^{[-2]} a_l a_{l-1} a_{l-2}^{[-2]} a_{l-2} \dots a_5 a_4^{[-2]} a_4 a_3 a_2^{[-2]} a_2 a_1]. \end{aligned}$$

Получим

$$\begin{aligned} [[a_1 a_{l-1}^{[-2]} a_{l-1} a_{l-2} \dots a_5^{[-2]} a_5 a_4 a_3^{[-2]} a_3 a_2] a_2^{[-2]} a_2 a_3 a_4^{[-2]} a_4 a_5 \dots \\ \dots a_{l-2}^{[-2]} a_{l-2} a_{l-1} a_l^{[-2]} a_l p a_l^{[-2]} a_l a_{l-1} a_{l-2}^{[-2]} a_{l-2} \dots a_5 a_4^{[-2]} a_4 a_3 a_2^{[-2]} a_2 a_1]. \end{aligned} \quad (6)$$

Используя ассоциативность n -арной операции и нейтральность последовательностей $g^{[-2]} g^{2n-4} g$ для любого $g \in G$, выражение (6) перепишем в виде

$$\begin{aligned}
& [a_1 a_{l-1}^{[-2]} a_{l-1} a_{l-2} \dots a_5^{[-2]} a_5 a_4 a_3^{[-2]} a_3 [a_2 a_2^{[-2]} a_2 a_3] a_4^{[-2]} a_4 a_5 \dots \\
& \dots a_{l-2}^{[-2]} a_{l-2} a_{l-1} a_l^{[-2]} a_l p a_l^{[-2]} a_l a_{l-1} a_{l-2}^{[-2]} a_{l-2} \dots a_5 a_4^{[-2]} a_4 a_3 a_2^{[-2]} a_2 a_1] = \\
& = [a_1 a_{l-1}^{[-2]} a_{l-1} a_{l-2} \dots a_5^{[-2]} a_5 [a_4 a_3^{[-2]} a_3 a_3] a_4^{[-2]} a_4 a_5 \dots \\
& \dots a_{l-2}^{[-2]} a_{l-2} a_{l-1} a_l^{[-2]} a_l p a_l^{[-2]} a_l a_{l-1} a_{l-2}^{[-2]} a_{l-2} \dots a_5 a_4^{[-2]} a_4 a_3 a_2^{[-2]} a_2 a_1] = \\
& = [a_1 a_{l-1}^{[-2]} a_{l-1} a_{l-2} \dots a_5^{[-2]} a_5 [a_4 a_4^{[-2]} a_4 a_5] \dots \\
& \dots a_{l-2}^{[-2]} a_{l-2} a_{l-1} a_l^{[-2]} a_l p a_l^{[-2]} a_l a_{l-1} a_{l-2}^{[-2]} a_{l-2} \dots a_5 a_4^{[-2]} a_4 a_3 a_2^{[-2]} a_2 a_1] = \\
& \dots \\
& = [a_1 a_{l-1}^{[-2]} a_{l-1} [a_{l-2} a_{l-2}^{[-2]} a_{l-2} a_{l-1}] a_l^{[-2]} a_l p a_l^{[-2]} a_l a_{l-1} a_{l-2}^{[-2]} a_{l-2} \dots a_5 a_4^{[-2]} a_4 a_3 a_2^{[-2]} a_2 a_1] = \\
& = [[a_1 a_{l-1}^{[-2]} a_{l-1} a_{l-1}] a_l^{[-2]} a_l p a_l^{[-2]} a_l a_{l-1} a_{l-2}^{[-2]} a_{l-2} \dots a_5 a_4^{[-2]} a_4 a_3 a_2^{[-2]} a_2 a_1] = \\
& = [[a_1 a_l^{[-2]} a_l p] a_l^{[-2]} a_l a_{l-1} a_{l-2}^{[-2]} a_{l-2} \dots a_5 a_4^{[-2]} a_4 a_3 a_2^{[-2]} a_2 a_1] = \\
& = [p a_l^{[-2]} a_l a_{l-1} a_{l-2}^{[-2]} a_{l-2} \dots a_5 a_4^{[-2]} a_4 a_3 a_2^{[-2]} a_2 a_1]. \tag{7}
\end{aligned}$$

Подставим значение a_1 из (4) в выражение (7). Имеем

$$[p a_l^{[-2]} a_l a_{l-1} a_{l-2}^{[-2]} a_{l-2} \dots a_5 a_4^{[-2]} a_4 a_3 a_2^{[-2]} a_2 [a_1 a_{l-1}^{[-2]} a_{l-1} a_{l-2} \dots a_5^{[-2]} a_5 a_4 a_3^{[-2]} a_3 a_2]] = I.$$

С учетом полуабелевости G , леммы 1 и нейтральности последовательностей $g^{[-2]} g g$ для любого $g \in G$, получим

$$\begin{aligned}
I &= [p a_l^{[-2]} a_l a_1 a_{l-2}^{[-2]} a_{l-2} \dots a_5 a_4^{[-2]} a_4 a_3 a_2^{[-2]} a_2 [a_2 a_{l-1}^{[-2]} a_{l-1} a_{l-2} \dots a_5^{[-2]} a_5 a_4 a_3^{[-2]} a_3 a_{l-1}]] = \\
&= [p a_l^{[-2]} a_l a_1 a_{l-2}^{[-2]} a_{l-2} \dots a_5 a_4^{[-2]} a_4 [a_3 a_2^{[-2]} a_2 a_2] a_{l-1}^{[-2]} a_{l-1} a_{l-2} \dots a_5^{[-2]} a_5 a_4 a_3^{[-2]} a_3 a_{l-1}] = \\
&= [p a_l^{[-2]} a_l a_1 a_{l-2}^{[-2]} a_{l-2} \dots a_5 a_4^{[-2]} a_4 [a_3 a_{l-1}^{[-2]} a_{l-1} a_{l-2} \dots a_5^{[-2]} a_5 a_4 a_3^{[-2]} a_3 a_{l-1}]] = \\
&= [p a_l^{[-2]} a_l a_1 a_{l-2}^{[-2]} a_{l-2} \dots a_5 a_4^{[-2]} a_4 [a_{l-1} a_{l-1}^{[-2]} a_{l-1} a_{l-2} \dots a_5^{[-2]} a_5 a_4 a_3^{[-2]} a_3 a_3]] = \\
&= [p a_l^{[-2]} a_l a_1 a_{l-2}^{[-2]} a_{l-2} \dots a_5 a_4^{[-2]} a_4 [[a_{l-1} a_{l-1}^{[-2]} a_{l-1} a_{l-2}] \dots a_5^{[-2]} a_5 [a_4 a_3^{[-2]} a_3 a_3]]] = \\
&= [p a_l^{[-2]} a_l a_1 a_{l-2}^{[-2]} a_{l-2} \dots a_5 a_4^{[-2]} a_4 [a_{l-2} \dots a_5^{[-2]} a_5 a_4]] = \\
& \dots \\
&= [p a_l^{[-2]} a_l a_1 a_{l-2}^{[-2]} a_{l-2} a_{l-2}] = p. \tag{8}
\end{aligned}$$

Из преобразований (6)–(8) следует справедливость равенства (5).

Теорема 1. Пусть G – полуабелева n -арная группа, a_1, a_2, \dots, a_{2k} – произвольные точки из G ($k \in \mathbb{N}$). Произвольная точка $p \in G$ самосовмещается относительно элементов последовательности вершин $2k$ -угольника $\langle a_1, a_2, \dots, a_{2k} \rangle$ тогда и только тогда, когда справедливо равенство

$$a_{2k} = [[[[a_1 a_2^{[-2]} a_2 a_3] a_4^{[-2]} a_4 a_5] \dots a_{2k-2}^{[-2]} a_{2k-2} a_{2k-1}].$$

Доказательство. 1. Пусть произвольная точка $p \in G$ самосовмещается относительно элементов последовательности вершин $2k$ -угольника $G \langle a_1, a_2, \dots, a_{2k} \rangle$, т. е. справедливо равенство

$$S_{a_{2k}} (\dots (S_{a_2} (S_{a_1} (p))) \dots) = p.$$

Данное равенство по определению 6 равносильно следующему:

$$[a_1 a_2^{[-2]} a_2 a_3 \dots a_{2k-2}^{[-2]} a_{2k-2} a_{2k-1} a_{2k}^{[-2]} a_{2k} p a_{2k}^{[-2]} a_{2k} a_{2k-1} a_{2k-2}^{[-2]} a_{2k-2} \dots a_3 a_2^{[-2]} a_2 a_1] = p. \tag{9}$$

С учетом определения 5 равенства векторов n -арной группы (9) перепишем в виде

$$\overrightarrow{p[a_1 a_2^{[-2]}]^{2n-4} a_2 a_3 \dots a_{2k-2}^{[-2]} a_{2k-2} a_{2k-1} a_{2k}^{[-2]} a_{2k} p a_{2k}^{[-2]} a_{2k} a_{2k-1} a_{2k-2}^{[-2]} a_{2k-2} \dots a_3 a_2^{[-2]} a_2 a_1] = \vec{0}.$$

Применяя последовательно лемму 2, получим

$$\begin{aligned} \overrightarrow{p a_1} + \overrightarrow{a_2[a_3 \dots a_{2k-2}^{[-2]}]^{2n-4} a_{2k-2} a_{2k-1} a_{2k}^{[-2]} a_{2k} p a_{2k}^{[-2]} a_{2k} a_{2k-1} a_{2k-2}^{[-2]} a_{2k-2} \dots a_3 a_2^{[-2]} a_2 a_1} &= \vec{0}, \\ \overrightarrow{p a_1} + \overrightarrow{a_2 a_3} + \overrightarrow{a_4[a_5 \dots a_{2k-2}^{[-2]}]^{2n-4} a_{2k-2} a_{2k-1} a_{2k}^{[-2]} a_{2k} p a_{2k}^{[-2]} a_{2k} a_{2k-1} a_{2k-2}^{[-2]} a_{2k-2} \dots a_3 a_2^{[-2]} a_2 a_1} &= \vec{0}, \\ &\dots \\ \overrightarrow{p a_1} + \overrightarrow{a_2 a_3} + \dots + \overrightarrow{a_{2k-2} a_{2k-1}} + \overrightarrow{a_{2k} p} + \overrightarrow{a_{2k} a_{2k-1}} + \overrightarrow{a_{2k-2} a_{2k-3}} + \dots + \overrightarrow{a_4 a_3} + \overrightarrow{a_2 a_1} &= \vec{0}. \end{aligned}$$

Так как G – полуабелева, то операция сложения векторов коммутативна (см. [1]). Имеем

$$\left(\overrightarrow{a_{2k} p} + \overrightarrow{p a_1}\right) + \overrightarrow{a_2 a_3} + \dots + \overrightarrow{a_{2k-2} a_{2k-1}} + \overrightarrow{a_{2k} a_{2k-1}} + \overrightarrow{a_{2k-2} a_{2k-3}} + \dots + \overrightarrow{a_4 a_3} + \overrightarrow{a_2 a_1} = \vec{0}.$$

По определению 2 получаем

$$\overrightarrow{a_{2k} a_1} + \overrightarrow{a_2 a_3} + \dots + \overrightarrow{a_{2k-2} a_{2k-1}} + \overrightarrow{a_{2k} a_{2k-1}} + \overrightarrow{a_{2k-2} a_{2k-3}} + \dots + \overrightarrow{a_4 a_3} + \overrightarrow{a_2 a_1} = \vec{0}.$$

С учетом полуабелевости G имеем

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a_{2k} a_1} + \left(\overrightarrow{a_{2k} a_{2k-1}} + \overrightarrow{a_2 a_1}\right) + \left(\overrightarrow{a_{2k-2} a_{2k-3}} + \overrightarrow{a_4 a_3}\right) + \dots + \left(\overrightarrow{a_{k+3} a_{k+2}} + \overrightarrow{a_{k-1} a_{k-2}}\right) + \overrightarrow{a_{k+1} a_k} + \\ + \left(\overrightarrow{a_2 a_3} + \overrightarrow{a_{2k-2} a_{2k-1}}\right) + \left(\overrightarrow{a_4 a_5} + \overrightarrow{a_{2k-4} a_{2k-3}}\right) + \dots + \left(\overrightarrow{a_{k-1} a_k} + \overrightarrow{a_{k+1} a_{k+2}}\right) = \vec{0}. \end{aligned}$$

Применяя лемму 3, получаем

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a_{2k} a_1} + \left(\overrightarrow{a_{2k} a_1} + \overrightarrow{a_2 a_{2k-1}}\right) + \left(\overrightarrow{a_{2k-2} a_3} + \overrightarrow{a_4 a_{2k-3}}\right) + \dots + \left(\overrightarrow{a_{k+3} a_{k-2}} + \overrightarrow{a_{k-1} a_{k+2}}\right) + \overrightarrow{a_{k+1} a_k} + \\ + \left(\overrightarrow{a_2 a_{2k-1}} + \overrightarrow{a_{2k-2} a_3}\right) + \left(\overrightarrow{a_4 a_{2k-3}} + \overrightarrow{a_{2k-4} a_5}\right) + \dots + \left(\overrightarrow{a_{k-1} a_{k+2}} + \overrightarrow{a_{k+1} a_k}\right) = \vec{0}. \end{aligned}$$

С учетом коммутативности операции сложения векторов G имеем

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a_{2k} a_1} + \overrightarrow{a_{2k} a_1} + \overrightarrow{a_2 a_{2k-1}} + \overrightarrow{a_2 a_{2k-1}} + \overrightarrow{a_{2k-2} a_3} + \overrightarrow{a_{2k-2} a_3} + \overrightarrow{a_4 a_{2k-3}} + \overrightarrow{a_4 a_{2k-3}} + \dots \\ \dots + \overrightarrow{a_{k-1} a_{k+2}} + \overrightarrow{a_{k-1} a_{k+2}} + \overrightarrow{a_{k+1} a_k} + \overrightarrow{a_{k+1} a_k} = \vec{0}, \\ 2\overrightarrow{a_{2k} a_1} + 2\overrightarrow{a_2 a_{2k-1}} + 2\overrightarrow{a_{2k-2} a_3} + 2\overrightarrow{a_4 a_{2k-3}} + \dots + 2\overrightarrow{a_{k-1} a_{k+2}} + 2\overrightarrow{a_{k+1} a_k} = \vec{0}, \\ 2\left(\overrightarrow{a_{2k} a_1} + \overrightarrow{a_2 a_{2k-1}} + \overrightarrow{a_{2k-2} a_3} + \overrightarrow{a_4 a_{2k-3}} + \dots + \overrightarrow{a_{k-1} a_{k+2}} + \overrightarrow{a_{k+1} a_k}\right) = \vec{0}. \end{aligned}$$

Разделим левую и правую части полученного равенства на 2. Получим

$$\overrightarrow{a_{2k} a_1} + \overrightarrow{a_2 a_{2k-1}} + \overrightarrow{a_{2k-2} a_3} + \overrightarrow{a_4 a_{2k-3}} + \dots + \overrightarrow{a_{k-1} a_{k+2}} + \overrightarrow{a_{k+1} a_k} = \vec{0}.$$

Применяя последовательно лемму 2, имеем

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a_{2k}[a_1 a_2^{[-2]}]^{2n-4} a_2 a_{2k-1}} + \overrightarrow{a_{2k-2} a_3} + \overrightarrow{a_4 a_{2k-3}} + \dots + \overrightarrow{a_{k-1} a_{k+2}} + \overrightarrow{a_{k+1} a_k} = \vec{0}, \\ \overrightarrow{a_{2k}[a_1 a_2^{[-2]}]^{2n-4} a_2 a_{2k-1} a_{2k-2}^{[-2]} a_{2k-2} a_3} + \overrightarrow{a_4 a_{2k-3}} + \dots + \overrightarrow{a_{k-1} a_{k+2}} + \overrightarrow{a_{k+1} a_k} = \vec{0}, \\ \dots \\ \overrightarrow{a_{2k}[a_1 a_2^{[-2]}]^{2n-4} a_2 a_{2k-1} a_{2k-2}^{[-2]} a_{2k-2} a_3 a_4^{[-2]} a_4 a_{2k-3} \dots a_{k+1}^{[-2]} a_{k+1} a_k} = \vec{0}, \end{aligned}$$

что с учетом полуабелевости G равносильно следующему равенству:

$$\overrightarrow{a_{2k}[[[a_1 a_2^{[-2]}]^{2n-4} a_2 a_3] a_4^{[-2]} a_4 a_5] \dots a_{2k-2}^{[-2]} a_{2k-2} a_{2k-1}} = \vec{0}.$$

На основании определения 3 получаем справедливость требуемого равенства:

$$a_{2k} = [[[[a_1 a_2^{[-2]} a_2^{2n-4} a_3] a_4^{[-2]} a_4^{2n-4} a_5] \dots a_{2k-2}^{[-2]} a_{2k-2}^{2n-4} a_{2k-1}]].$$

2. Пусть теперь справедливо равенство

$$a_{2k} = [[[[a_1 a_2^{[-2]} a_2^{2n-4} a_3] a_4^{[-2]} a_4^{2n-4} a_5] \dots a_{2k-2}^{[-2]} a_{2k-2}^{2n-4} a_{2k-1}]],$$

которое в силу ассоциативности n -арной операции равнозначно следующему:

$$a_{2k} = [a_1 a_2^{[-2]} a_2^{2n-4} a_3 a_4^{[-2]} a_4^{2n-4} a_5 \dots a_{2k-2}^{[-2]} a_{2k-2}^{2n-4} a_{2k-1}]. \quad (10)$$

Умножим левую и правую части равенства (10) справа на выражение

$$a_{2k-1}^{[-2]} a_{2k-1}^{2n-4} a_{2k-2} \dots a_5^{[-2]} a_5^{2n-4} a_4 a_3^{[-2]} a_3^{2n-4} a_2.$$

Получим

$$[a_{2k} a_{2k-1}^{[-2]} a_{2k-1}^{2n-4} a_{2k-2} \dots a_5^{[-2]} a_5^{2n-4} a_4 a_3^{[-2]} a_3^{2n-4} a_2] = a_1. \quad (11)$$

На основании определения 6 справедливо равенство

$$\begin{aligned} & S_{a_{2k}} (\dots (S_{a_2} (S_{a_1} (p))) \dots) = \\ & = [a_1 a_2^{[-2]} a_2^{2n-4} a_3 \dots a_{2k-2}^{[-2]} a_{2k-2}^{2n-4} a_{2k-1} a_{2k}^{[-2]} a_{2k}^{2n-4} p a_{2k}^{[-2]} a_{2k}^{2n-4} a_{2k-1} a_{2k-2}^{[-2]} a_{2k-2}^{2n-4} \dots a_3 a_2^{[-2]} a_2^{2n-4} a_1]. \quad (12) \end{aligned}$$

Применяя лемму 4 при $l = 2k$ для равенств (11) и (12), получим

$$S_{a_{2k}} (\dots (S_{a_2} (S_{a_1} (p))) \dots) = p.$$

Теорема доказана. Отметим, что при $k = 2$ из теоремы 1 вытекает теорема 3.1.2 из [3], т. е. справедливо

Следствие 1. Пусть G – полуабелева n -арная группа, $a_1, a_2, a_3, a_4 \in G$ ($k \in \mathbb{N}$). Произвольная точка $p \in G$ самосовмещается относительно вершин четырехугольника $\langle a_1, a_2, a_3, a_4 \rangle$ тогда и только тогда, когда $\langle a_1, a_2, a_3, a_4 \rangle$ является параллелограммом G , т. е. когда справедливо равенство

$$a_4 = [a_1 a_2^{[-2]} a_2^{2n-4} a_3].$$

Теорема 2. Пусть G – полуабелева n -арная группа, $a_1, a_2, \dots, a_{2k} \in G$ ($k \in \mathbb{N}$). Произвольная точка $p \in G$ самосовмещается относительно вершин $2k$ -угольника $\langle a_1, a_2, \dots, a_{2k} \rangle$ тогда и только тогда, когда справедливо равенство

$$\overline{a_{2k} [a_{l+2} a_{l+3}^{[-2]} a_{l+3}^{2n-4} \dots a_{2k-2}^{[-2]} a_{2k-2}^{2n-4} a_{2k-1}]} = a_{l+1} [a_1 a_2^{[-2]} a_2^{2n-4} a_3 \dots a_{l-1}^{[-2]} a_{l-1}^{2n-4} a_l],$$

где l – нечетное натуральное число.

Доказательство. 1. Пусть произвольная точка $p \in G$ самосовмещается относительно вершин $\langle a_1, a_2, \dots, a_{2k} \rangle$, тогда по теореме 1 справедливо равенство

$$a_{2k} = [a_1 a_2^{[-2]} a_2^{2n-4} a_3 a_4^{[-2]} a_4^{2n-4} a_5 \dots a_l a_{l+1}^{[-2]} a_{l+1}^{2n-4} a_{l+2} a_{l+3}^{[-2]} a_{l+3}^{2n-4} \dots a_{2k-2}^{[-2]} a_{2k-2}^{2n-4} a_{2k-1}]. \quad (13)$$

Умножим левую и правую части равенства (13) справа на $a_{2k-1}^{[-2]} a_{2k-1}^{2n-4} a_{2k-2} \dots a_{l+3} a_{l+2}^{[-2]} a_{l+2}^{2n-4} a_{l+1}$. Получим

$$[a_{2k} a_{2k-1}^{[-2]} a_{2k-1}^{2n-4} a_{2k-2} \dots a_{l+3} a_{l+2}^{[-2]} a_{l+2}^{2n-4} a_{l+1}] =$$

$$= [[a_1 a_2^{[-2]}]^{2n-4} a_2 a_3 a_4^{[-2]}]^{2n-4} a_4 a_5 \dots a_l a_{l+1}^{[-2]}]^{2n-4} a_{l+1} a_{l+2} a_{l+3}^{[-2]}]^{2n-4} \dots \\ \dots a_{2k-2}^{[-2]}]^{2n-4} a_{2k-2} a_{2k-1}]^{2n-4} a_{2k-1} a_{2k-2} \dots a_{l+3} a_{l+2}^{[-2]}]^{2n-4} a_{l+2} a_{l+1}].$$

С учетом нейтральности последовательностей $g^{[-2]} g g$ для любого $g \in G$, имеем

$$\begin{aligned} & [a_{2k} a_{2k-1}^{[-2]}]^{2n-4} a_{2k-1} a_{2k-2} \dots a_{l+3} a_{l+2}^{[-2]}]^{2n-4} a_{l+2} a_{l+1}] = \\ & = [a_1 a_2^{[-2]}]^{2n-4} a_2 a_3 a_4^{[-2]}]^{2n-4} a_4 a_5 \dots a_l a_{l+1}^{[-2]}]^{2n-4} a_{l+1} a_{l+2} a_{l+3}^{[-2]}]^{2n-4} a_{l+3} \dots \\ & \dots a_{2k-2}^{[-2]}]^{2n-4} a_{2k-2} [a_{2k-1} a_{2k-1}^{[-2]}]^{2n-4} a_{2k-1} a_{2k-2}] \dots a_{l+3} a_{l+2}^{[-2]}]^{2n-4} a_{l+2} a_{l+1}] \\ & [a_{2k} a_{2k-1}^{[-2]}]^{2n-4} a_{2k-1} a_{2k-2} \dots a_{l+3} a_{l+2}^{[-2]}]^{2n-4} a_{l+2} a_{l+1}] = [a_1 a_2^{[-2]}]^{2n-4} a_2 a_3 a_4^{[-2]}]^{2n-4} a_4 a_5 \dots a_l]. \end{aligned}$$

Согласно определению 5, лемме 2.2.1 из [3], получим

$$\begin{aligned} & [a_{2k} [a_{l+2}^{[-2]}]^{2n-4} a_{l+2} a_{l+3} \dots a_{2k-2} a_{2k-1}^{[-2]}]^{2n-4} a_{2k-1}]^{2n-4} \underbrace{[a_{l+2}^{[-2]}]^{2n-4} a_{l+2} a_{l+3} \dots a_{2k-2} a_{2k-1}^{[-2]}]^{2n-4} a_{2k-1}}_{2n-4} a_{l+1}] = \\ & = [a_1 a_2^{[-2]}]^{2n-4} a_2 a_3 a_4^{[-2]}]^{2n-4} a_4 a_5 \dots a_l], \\ & \overline{a_{2k} [a_{l+2} a_{l+3}^{[-2]}]^{2n-4} a_{l+3} \dots a_{2k-2}^{[-2]}]^{2n-4} a_{2k-2} a_{2k-1}] = \overline{a_{l+1} [a_1 a_2^{[-2]}]^{2n-4} a_2 a_3 \dots a_{l-1}^{[-2]}]^{2n-4} a_{l-1} a_l]}. \end{aligned}$$

2. Справедливость достаточного условия самосовмещения произвольной точки $p \in G$ относительно вершин $2k$ -угольника $\langle a_1, a_2, \dots, a_{2k} \rangle$ устанавливается аналогично. Теорема доказана. При $k = 3$ из теоремы 2 вытекает

Следствие 2. Пусть G – полуабелева n -арная группа, $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \in G$ ($k \in \mathbb{N}$). Произвольная точка $p \in G$ самосовмещается относительно вершин шестиугольника $\langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \rangle$ тогда и только тогда, когда справедливо равенство

$$\overline{a_8 [a_{l+2} a_{l+3}^{[-2]}]^{2n-4} a_{l+3} \dots a_6^{[-2]}]^{2n-4} a_6 a_7] = \overline{[a_1 a_2^{[-2]}]^{2n-4} a_2 a_3 \dots a_{l-1}^{[-2]}]^{2n-4} a_{l-1} a_l]},$$

где l – нечетное натуральное число.

Теорема 3. Пусть G – полуабелева n -арная группа, $\langle a_1, a_2, \dots, a_{2k} \rangle$ ($k \in \mathbb{N}$) – $2k$ -угольник G такой, что произвольная точка $p \in G$ самосовмещается относительно вершин этого многоугольника, т. е. $S_{a_1}(S_{a_2}(\dots S_{a_{2k}}(p)\dots)) = p$. Если $x \in G$ – центроид $2k$ -угольника $\langle a_1, a_2, \dots, a_{2k} \rangle$, то точка x является центроидом k -угольника $\langle a_1, a_3, a_5, \dots, a_{2k-1} \rangle$.

Доказательство. Так как произвольная точка $p \in G$ самосовмещается относительно вершин $\langle a_1, a_2, \dots, a_{2k} \rangle$, то по теореме 1 справедливо равенство

$$a_{2k} = [a_1 a_2^{[-2]}]^{2n-4} a_2 a_3 a_4^{[-2]}]^{2n-4} a_4 a_5 \dots a_{2k-2}^{[-2]}]^{2n-4} a_{2k-2} a_{2k-1}. \quad (14)$$

Так как $x \in G$ – центроид $2k$ -угольника $\langle a_1, a_2, \dots, a_{2k} \rangle$, то по определению 1 справедливо равенство

$$\overline{xa_1} + \overline{xa_2} + \dots + \overline{xa_{2k}} = \vec{0}. \quad (15)$$

Подставим в (15) выражение из (14). Имеем

$$\overline{xa_1} + \overline{xa_2} + \dots + x \overline{[a_1 a_2^{[-2]}]^{2n-4} a_2 a_3 a_4^{[-2]}]^{2n-4} a_4 a_5 \dots a_{2k-2}^{[-2]}]^{2n-4} a_{2k-2} a_{2k-1}} = \vec{0}. \quad (16)$$

Последовательно применяя лемму 2 к равенству (16), получим

$$\overline{xa_1} + \overline{xa_2} + \dots + \overline{xa_1} + a_2 \overline{[a_3 a_4^{[-2]}]^{2n-4} a_4 a_5 \dots a_{2k-2}^{[-2]}]^{2n-4} a_{2k-2} a_{2k-1}} = \vec{0},$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{xa_1} + \overrightarrow{xa_2} + \dots + \overrightarrow{xa_1} + \overrightarrow{a_2a_3} + \overrightarrow{a_4[a_5 \dots a_{2k-2}^{[-2]} a_{2k-2} a_{2k-1}]} = \vec{0}, \\ \dots \\ \overrightarrow{xa_1} + \overrightarrow{xa_2} + \dots + \overrightarrow{xa_1} + \overrightarrow{a_2a_3} + \overrightarrow{a_4a_5} + \dots + \overrightarrow{a_{2k-2}a_{2k-1}} = \vec{0}. \end{aligned} \quad (17)$$

С учетом полуабелевости G , перепишем (17) следующим образом:

$$\overrightarrow{xa_1} + \overrightarrow{xa_1} + (\overrightarrow{xa_2} + \overrightarrow{a_2a_3}) + \overrightarrow{xa_3} + (\overrightarrow{xa_4} + \overrightarrow{a_4a_5}) + \overrightarrow{xa_5} \dots + \overrightarrow{xa_{2k-3}} + (\overrightarrow{xa_{2k-2}} + \overrightarrow{a_{2k-2}a_{2k-1}}) + \overrightarrow{xa_{2k-1}} = \vec{0}.$$

Применяя лемму 3, получаем

$$\overrightarrow{xa_1} + \overrightarrow{xa_1} + (\overrightarrow{xa_3} + \overrightarrow{a_2a_2}) + \overrightarrow{xa_3} + (\overrightarrow{xa_5} + \overrightarrow{a_4a_4}) + \overrightarrow{xa_5} \dots + \overrightarrow{xa_{2k-3}} + (\overrightarrow{xa_{2k-2}} + \overrightarrow{a_{2k-2}a_{2k-2}}) + \overrightarrow{xa_{2k-1}} = \vec{0}.$$

Так как \overrightarrow{xx} – нулевой вектор для любого x из G , то

$$\overrightarrow{xa_1} + \overrightarrow{xa_1} + \overrightarrow{xa_3} + \overrightarrow{xa_3} + \overrightarrow{xa_5} + \overrightarrow{xa_5} + \dots + \overrightarrow{xa_{2k-3}} + \overrightarrow{xa_{2k-1}} + \overrightarrow{xa_{2k-1}} = \vec{0}.$$

Преобразуем полученное равенство следующим образом:

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{xa_1} + 2\overrightarrow{xa_3} + 2\overrightarrow{xa_5} + \dots + 2\overrightarrow{xa_{2k-3}} + 2\overrightarrow{xa_{2k-1}} = \vec{0}, \\ 2(\overrightarrow{xa_1} + \overrightarrow{xa_3} + \overrightarrow{xa_5} + \dots + \overrightarrow{xa_{2k-3}} + \overrightarrow{xa_{2k-1}}) = \vec{0}. \end{aligned}$$

Разделим левую и правую части полученного равенства на 2. Имеем

$$\overrightarrow{xa_1} + \overrightarrow{xa_3} + \overrightarrow{xa_5} + \dots + \overrightarrow{xa_{2k-3}} + \overrightarrow{xa_{2k-1}} = \vec{0}.$$

Следовательно, по определению 1 x – центроид k -угольника $\langle a_1, a_3, a_5, \dots, a_{2k-1} \rangle$. При $k=3$ из теоремы 2 вытекает

Следствие 3. Пусть G – полуабелева n -арная группа, $\langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \rangle$ ($k \in \mathbb{N}$) – шестиугольник G такой, что произвольная точка $p \in G$ самосовмещается относительно вершин этого многоугольника, т. е. $S_{a_1}(S_{a_2}(S_{a_3}(S_{a_4}(S_{a_5}(S_{a_6}(p)))))) = p$. Тогда, если $x \in G$ – центроид $\langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \rangle$, то точка x является центроидом треугольника $\langle a_1, a_3, a_5 \rangle$.

Список использованной литературы

1. Русаков, С. А. Некоторые приложения теории n -арных групп / С. А. Русаков. – Минск: Беларус. навука, 1998.
2. Вакарелов, Д. Тернарни групи / Д. Вакарелов // Годишник Софийского ун-та. Матфак. – 1966–1968. – Т. 61. – С. 71–105.
3. Кулаженко, Ю. И. Полиадические операции и их приложения / Ю. И. Кулаженко. – Минск: Изд. центр БГУ, 2014.
4. Гальмак, А. М. Единицы и их аналоги в n -арных группах / А. М. Гальмак // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2015. – № 4. – С. 46–55.

Поступила в редакцию 20.05.2016

ФІЗІКА

УДК 530.12

Ю. А. КУРОЧКИН

ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ОРИСФЕР ТРЕХМЕРНОГО РАСШИРЕННОГО ПРОСТРАНСТВА ЛОБАЧЕВСКОГО

*Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь,
e-mail: yukuroch@dragon.bas-net.by*

Показано, что стационарная группа изотропного вектора четырехмерного псевдоевклидового пространства – подгруппа группы вращений $SO(3,1)$ данного пространства является группой движений орисфер первого и второго рода в трехмерном расширенном пространстве Лобачевского и действует на орисферах транзитивно.

Ключевые слова: орисфера, изотропный вектор, пространство Лобачевского, псевдоевклидово пространство, группа, преобразование, бикватернион.

Yu. A. KUROCHKIN

GROUP-THEORETICAL INTERPRETATION OF THE HOROSPHERES OF THE THREE-DIMENSIONAL EXTENDED LOBACHEVSKY SPACE

*B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus,
e-mail: yukuroch@dragon.bas-net.by*

We have shown that the stationary group of the isotropic vector of the four-dimensional pseudo-Euclidean space, which is the subgroup of the rotation group $SO(3,1)$ of this space, is the group of motion of the first- and second-kind horospheres in the three-dimensional extended Lobachevsky space and act transitively on horospheres.

Keywords: horosphere, isotropic vector, Lobachevsky space, pseudo-Euclidean space, group, transformation, biquaternion.

Введение. Геометрия пространства Лобачевского и связанные с ней теоретико-групповые, алгебраические и аналитические методы находят широкое применение в теоретической физике, а именно: в релятивистской кинематике, квантовой механике, классической и квантовой теории поля (см., напр., [1, 2]).

В работах [3, 4] нами было показано, что новые возможности для моделирования физических систем и процессов открывают подходы, основанные на применении методов, связанных с геометрией орисфер трехмерного пространства Лобачевского, на которых, как известно, реализуется геометрия евклидовой плоскости.

Поскольку, по определению, орисферой трехмерного пространства Лобачевского является поверхность, ортогональная пучку параллельных прямых данного пространства, а пучок параллельных задается точкой их пересечения (общей точкой прямых, лежащей на абсолюте трехмерного пространства Лобачевского), то заданная фиксированная точка полностью определяет орисферу.

Если воспользоваться стандартной, наиболее часто используемой в физике реализацией геометрии трехмерного пространства Лобачевского на верхней доле двухполостного гиперболоида в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве, то точкой, определяющей орисферу (задающей пучок параллельных прямых пространства Лобачевского) является точка изотропного конуса данного пространства, координаты которой выступают компонентами четырехмерного

изотропного (светоподобного) вектора. Поэтому естественно, что с точки зрения теории группы движений псевдоевклидова пространства, подгруппой которой является группа $SO(3,1)$, изоморфная группе Лоренца, для теоретико-группового определения орисфер важна роль стационарной группы изотропного 4-вектора.

Задача настоящей работы – установление связи вектор-параметра стационарной группы изотропного 4-вектора псевдоевклидова пространства, введенного Ф. И. Федоровым [5, 6], с геометрией орисферы.

Основные определения. В терминах объемлющего псевдоевклидова пространства вещественное пространство Лобачевского реализуется на верхней поле гиперboloида

$$X\bar{X} = -\underline{X}\underline{X} - X_0X_0 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 - X_0^2 = -\rho^2. \quad (1)$$

Здесь используются бикватернионы, соответствующие 4-векторам псевдоевклидова пространства, которые вводятся как

$$X = iX_0 + \underline{X}, \quad (-X^* = \bar{X}), \quad (2)$$

с правилом умножения

$$X'' = (iX'_0 + \underline{X}')(iX_0 + \underline{X}) = -X'_0X_0 - (\underline{X}'\underline{X}) + iX'_0\underline{X} + iX_0\underline{X}' + [\underline{X}'\underline{X}]. \quad (3)$$

Звездочка (*) обозначает комплексное сопряжение, черта (–) – кватернионное сопряжение, $\bar{X} = iX_0 - \underline{X}$ – бикватернион, сопряженный X . Квадратные скобки в (3) и всегда в дальнейшем обозначают векторное, а круглые – скалярное произведение трехмерных векторов.

Наряду с вещественным пространством Лобачевского, реализуемом на (1), будем рассматривать мнимое пространство Лобачевского, реализуемое на однополостном гиперboloиде:

$$X\bar{X} = -\underline{X}\underline{X} - X_0X_0 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 - X_0^2 = R^2, \quad (4)$$

где $R = i\rho$. В каждом из пространств, реализуемых на поверхностях (1), (4), определены орисферы. Конус псевдоевклидова пространства, точки которого являются бесконечно удаленными как для точек вещественного, так и мнимого пространства Лобачевского, определяется уравнением

$$X\bar{X} = -\underline{X}\underline{X} - X_0X_0 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 - X_0^2 = 0. \quad (5)$$

Далее, не нарушая общности, примем $\rho = R = 1$.

Отметим, что в проективной схеме все три подпространства (1), (4), (5) четырехмерного псевдоевклидова пространства, которые являются инвариантными относительно действия преобразований группы $SO(3,1)$, объединяются в единое расширенное пространство Лобачевского.

Преобразования группы движений трехмерного пространства Лобачевского, изоморфной группе Лоренца, в бикватернионах задается как [1]:

$$X' = A(\underline{q})XA(-\underline{q}^*), \quad (6)$$

где бикватернионы задаются формулами

$$A(\underline{q})\bar{A}(\underline{q}) = A(\underline{q})A(-\underline{q}) = 1, \quad A(\underline{q}^*)\bar{A}(\underline{q}^*) = A(\underline{q}^*)A(-\underline{q}^*) = 1, \quad (7)$$

$$A(\underline{q}) = A_0 + \underline{A} = \frac{1 + \underline{q}}{\sqrt{1 + (\underline{q}^2)}}, \quad A(-\underline{q}^*) = A_0^* - \underline{A}^* = \frac{1 - \underline{q}^*}{\sqrt{1 + (\underline{q}^{*2})}}, \quad (8)$$

$$A(\underline{q}''') = A(\langle \underline{q}', \underline{q} \rangle) = A(\underline{q}')A(\underline{q}), \quad A(\underline{q}''')^* = A(\langle \underline{q}'^*, \underline{q}^* \rangle) = A(\underline{q}'^*)A(\underline{q}^*), \quad (9)$$

а

$$\underline{q}'' = \langle \underline{q}', \underline{q} \rangle = \frac{\underline{q}' + \underline{q} + [\underline{q}'\underline{q}]}{1 - (\underline{q}'\underline{q})}, \quad \underline{q}''^* = \langle \underline{q}'^*, \underline{q}^* \rangle = \frac{\underline{q}'^* + \underline{q}^* + [\underline{q}'^*\underline{q}^*]}{1 - (\underline{q}'^*\underline{q}^*)}. \quad (10)$$

Стационарной группой вектора X (малой группой Лоренца по терминологии Ф. И. Федорова) называется подгруппа преобразований из $SO(3,1)$, оставляющих этот вектор неизменным, т. е.

$$X = A(\underline{q})XA(-\underline{q}^*). \quad (11)$$

В формулах (6), (9) $L \sim A \otimes A^* \in SO(3,1)$, а $\underline{q}, \underline{q}^*$ – вектор-параметры Федорова преобразований, образующие группу относительно операции композиции (10).

Вектор-параметры преобразования группы $SO(3,1)$ (6)–(10) удовлетворяют условию

$$1 + \langle \underline{q}, -\underline{q}^* \rangle^2 \neq 0. \quad (12)$$

Выражения (6)–(11), в принципе, являются справедливыми для вектор-параметров, на которых налагается условие (12), не нарушающее групповых свойств вектор-параметров относительно операции (10). В частности, для преобразований стационарной подгруппы (11), как установлено Ф. И. Федоровым, вектор-параметры имеют вид

$$\underline{q}_v = \underline{c} + i[\underline{v} \underline{c}], \quad (13)$$

где $\underline{v} = \frac{X}{X_0}$, \underline{c} – произвольный вещественный трехмерный вектор.

В случае, который нас интересует, 4-вектор $X = iX_0 + \underline{X}$ – изотропный и удовлетворяет условию (5), тогда $X_0 = |\underline{X}|$ и поэтому $|\underline{v}| = 1$.

Будем использовать уравнения орисфер первого рода, которые в кватернионах принимают вид [7]:

$$\frac{1}{2}(X\bar{U} + U\bar{X}) = X_1U_1 + X_2U_2 + X_3U_3 - X_0U_0 = \mp 1, \quad (14)$$

и второго рода

$$\frac{1}{2}(X\bar{U} + U\bar{X}) = X_1U_1 + X_2U_2 + X_3U_3 - X_0U_0 = 0. \quad (15)$$

В формулах (14), (15) 4-векторы (бикватернионы) X псевдоевклидова пространства удовлетворяют условию (1), (4), а бикватернион U – изотропный 4-вектор, удовлетворяет условию (5). Обозначение U используется для того, чтобы различать фиксированный вектор, определяющий стационарную группу, и вектор с компонентами, которые являются текущими координатами точек орисферы. Вышесказанное позволяет сформулировать следующую теорему.

Основная теорема. Стационарная группа фиксированного бикватерниона U , удовлетворяющего условию (5), подгруппа группы движений трехмерного пространства Лобачевского, является группой движений каждой из орисфер (14), (15) и действует на орисферах фиксированного U транзитивно.

Выражения (14) и (15) инвариантны относительно преобразований группы движений трехмерного пространства Лобачевского (6) и, следовательно, инвариантны относительно преобразований стационарной группы 4-вектора $U = iU_0 + \underline{U} = i + \underline{v}$, т. е. инвариантны относительно преобразований (11) с вектор-параметром (13) с $\underline{v} = \frac{\underline{U}}{U_0}$. Тогда при преобразовании малой группы выражение (14) примет вид

$$\frac{1}{2}[(A(\underline{q}_v)XA(-\underline{q}_v^*)\bar{U} + UA(\underline{q}_v^*)\bar{X}A(-\underline{q}_v)] = \frac{1}{2}(X'\bar{U} + U\bar{X}') = \mp 1, \quad (16)$$

а (15), соответственно, –

$$\frac{1}{2}(A(\underline{q}_v)XA(-\underline{q}_v^*)\bar{U} + UA(\underline{q}_v^*)\bar{X}A(-\underline{q}_v)) = 0. \quad (17)$$

Теперь покажем, что любой 4-вектор X , удовлетворяющий условиям (14), (15), может быть преобразован в любой другой вектор, удовлетворяющий этим же условиям преобразованием (11)

с вектор-параметром (13). То есть любая точка каждой из орисфер (14), (15) может быть преобразована в любую другую точку этой же орисферы таким преобразованием.

Общая схема доказательства проста. Выбираем некоторый стандартный 4-вектор (бикватернион) \dot{X} , принадлежащий фиксированной орисфере, разный для каждого из трех случаев (14), (15). Предполагаем, что преобразование от стандартного 4-вектора к любому произвольному 4-вектору на орисфере в каждом из указанных случаев известно. То есть для двух произвольных 4-векторов имеет место представление

$$X' = A(\underline{q}_v') \dot{X} A(-\underline{q}_v'^*), \quad X'' = A(\underline{q}_v'') \dot{X} A(-\underline{q}_v''*). \quad (18)$$

В выражениях (18) вектор-параметры \underline{q}_v' и \underline{q}_v'' (13) задаются некоторыми векторами \underline{c}' и \underline{c}'' соответственно. Тогда преобразование от произвольного вектора X' к вектору X'' определяется из (18):

$$\begin{aligned} X'' &= A(\underline{q}_v'') \dot{X} A(-\underline{q}_v''*) = A(\underline{q}_v'') A(-\underline{q}_v') A(\underline{q}_v') \dot{X} A(-\underline{q}_v'^*) A(\underline{q}_v'^*) A(-\underline{q}_v''*) = \\ &= A(\underline{q}_v'') A(-\underline{q}_v') X' A(\underline{q}_v'^*) A(-\underline{q}_v''*) = A(\langle \underline{q}_v'', -\underline{q}_v' \rangle) X' A(\langle \underline{q}_v'^*, -\underline{q}_v''* \rangle). \end{aligned} \quad (19)$$

Таким образом, искомое преобразование, представляющее собой композицию преобразований (19),

$$A(\langle \underline{q}_v'', -\underline{q}_v' \rangle) = A(\underline{q}_v') A(-\underline{q}_v''), \quad (20)$$

обеспечивает преобразование произвольного 4-вектора с координатами точки на орисфере в другой 4-вектор любой другой точки на орисфере. Это означает транзитивность преобразований малой (стационарной) группы.

Связь вектор-параметров малой группы с компонентами преобразуемых 4-векторов.

Приведем выражения для возможных стандартных 4-векторов, соответствующих трем случаям (14), (15). Во всех трех случаях бикватернион U будем представлять в виде $U = i + \underline{v}$. В качестве стандартных 4-векторов примем для трех случаев (14), (15) соответственно:

$$\dot{X} = i, \quad \dot{X} = \underline{v}, \quad \dot{X} = [\underline{v}\underline{c}]. \quad (21)$$

Теперь дадим примеры конкретных преобразований для различных стандартных 4-векторов (21). Будем опираться на формулу, дающую параметризацию 4-векторов, удовлетворяющих (1), (4), (14), (15) параметрами \underline{c} преобразований стационарной подгруппы (11). Для 4-вектора, соответствующего условиям (14) со знаком минус, такая параметризация в общем случае имеет вид

$$X = i \frac{1 + \underline{c}^2 + [\underline{v}\underline{c}]^2 + 2i\{[\underline{v}\underline{c}] + [\underline{c}[\underline{v}\underline{c}]]\}}{\sqrt{(1 + \underline{c}^2 + [\underline{v}\underline{c}]^2)^2 - 4([\underline{v}\underline{c}]^2 + [\underline{c}[\underline{v}\underline{c}]]^2)}}. \quad (22)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в выполнении для X (22) условия (14) со знаком минус. Однако параметризация (22) избыточна в том смысле, что в силу условий (1), (4), (14), (15) X является функцией только двух независимых переменных, а \underline{c} исходно зависит от трех произвольных переменных. Используя произвол в задании \underline{c} , примем, что $(\underline{v}\underline{c}) = 0$, тогда

$$X = i(1 + 2\underline{c}^2) - 2[\underline{v}\underline{c}] - 2\underline{v}\underline{c}^2. \quad (23)$$

Здесь также учтено, что $(\underline{v}^2) = 1$. Тогда в качестве независимых переменных естественным образом выступают

$$2c_2 = X_1 \quad \text{и} \quad -2c_1 = X_2. \quad (24)$$

При тех же условиях на \underline{c} для однополостного гиперболоида (знак «+» в выражении (14)) имеем

$$X = -2i\underline{c}^2 - 2[\underline{v}\underline{c}] + \underline{v}(1 - 2\underline{c}^2), \quad (25)$$

при этом $2c_2 = X_1$ и $-2c_1 = X_2$, а для (15)

$$X = -2ic + [\underline{v}\hat{c}] + 2\underline{v}c. \quad (26)$$

Здесь $\hat{c} = \underline{c} / c$ – единичный вектор по направлению \underline{c} . Однако легко проверить, что не вектор (26), а вектор

$$X = 2ic + [\underline{v}\hat{c}] + 2\underline{v}c$$

удовлетворяет условиям (5), (15), т. е. его конец лежит на орисфере второго рода.

Заключение. Таким образом, нами показано, что преобразования стационарной группы изотропного вектора четырехмерного псевдоевклидового пространства образуют группу движений орисфер трехмерного расширенного пространства Лобачевского, реализуемого в данном псевдоевклидовом пространстве. Установлена связь составляющих 4-векторов, являющихся радиус-векторами точек орисфер с вектор-параметрами Федорова малой группы Лоренца изотропного 4-вектора.

Список использованной литературы

1. Березин, А. В. Кватернионы в релятивистской физике / А. В. Березин, Ю. А. Курочкин, Е. А. Толкачев. – М.: УРСС, 2003.
2. Овсюк, Е. М. Точно решаемые задачи квантовой механики и классической теории поля в пространствах с неевклидовой геометрией / Е. М. Овсюк. – Минск: РИВШ, 2013.
3. Курочкин, Ю. А. Когерентные состояния на орисфере пространства Лобачевского / Ю. А. Курочкин, И. Ю. Рыбак, Д. В. Шелковый / Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2014. – Т. 58, № 5. – С. 44–48.
4. Hadron as Coherent State on the Horosphere of the Lobachevsky Momentum Space / Y. Kurochkin [et al.] / Physics of the Particles and Nuclei Letters. – 2016. – Vol. 13, no 3. – P. 285–288.
5. Федоров, Ф. И. Группа Лоренца / Ф. И. Федоров. – М.: Наука, 1979.
6. Федоров, Ф. И. Некоторые методы релятивистской кинематики / Ф. И. Федоров // Международная школа молодых ученых по физике высоких энергий, Гомель, 1971. – Дубна, 1972. – С. 3–35.
7. Гельфанд, И. М. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений / И. М. Гельфанд, М. И. Граев, Н. Я. Виленкин. – М.: Физматгиз, 1962. – (Обобщенные функции; вып. 5).

Поступила в редакцию 16.06.2016

УДК 539.12

Ю. А. РУСАК¹, О. В. ВЕКО², Е. М. ОВСИЮК³

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ СПИНОРНОЙ ЧАСТИЦЫ В ПОЛЕ ШВАРЦШИЛЬДА

¹Брестский государственный университет им. А. С. Пушкина, Брест, Беларусь,
e-mail: wevelyura@gmail.com

²Гимназия г. Калинковичи, Беларусь, e-mail: vekoolga@mail.ru

³Мозырский государственный педагогический университет им. И. П. Шамякина, Мозырь, Беларусь,
e-mail: e.ovsiyuk@mail.ru

Для безмассовых спиновых частиц в поле Шварцшильда развита общая математическая схема анализа прохождения спиновых частиц через эффективный гравитационный барьер Шварцшильда. Установлена зависимость эффекта от направления падения частиц на барьер: извне или изнутри. Анализ основан на использовании 8 решений Фробениуса для уравнения с существенно особыми точками ранга 2. Математическая структура полученных асимптотических формул является точной, однако неизвестны аналитические выражения для сумм входящих в эти формулы степенных рядов. Эта часть исследования вынужденно должна базироваться на численном суммировании рядов.

Ключевые слова: частица Дирака, черная дыра Шварцшильда, сингулярности, решения Фробениуса, туннелирование.

Y. A. RUSAK¹, O. V. VEKO², E. M. OVSIYUK³

ASYMPTOTICAL ANALYSIS OF THE EQUATIONS FOR THE SPINOR PARTICLE IN THE SCHWARZSCHILD FIELD

¹Brest State University named after A. S. Pushkin, Brest, Belarus, e-mail: wevelyura@gmail.com

²Gymnasium, Kalinkovichi, Belarus, e-mail: vekoolga@mail.ru

³Mozyr State Pedagogical University named after I. P. Shamyakin, Mozur, Belarus, e-mail: e.ovsiyuk@mail.ru

For massless Dirac particles, the general mathematical study of the tunneling process of a particle through the effective potential barrier generated by the Schwarzschild black hole is made. Results are significantly different for two situations: first when a particle falls on the barrier from within and second when a particle falls on the barrier from the outside. The study is based on the use of 8 Frobenius solutions of the related second-order differential equations with the second-rank non-regular singularities. The mathematical structure of the derived asymptotic relations is exact, however the analytical expressions for the involved convergent powers series are not known. So, a further study should be based on the numerical summation of the series.

Keywords: Dirac particle, Schwarzschild black hole, singularities, Frobenius solutions, tunneling process.

Введение. Начало исследованиям возмущений пространства-времени Шварцшильда положила классическая работа Т. Редже и Дж. А. Уилера [1]. Процесс изменения возмущений описывается волновым уравнением типа уравнения Шредингера с эффективным потенциалом барьерного типа. Результаты длительных (в течение двух десятилетий) исследований были обобщены в книге С. Чандрасекара [2]. В настоящее время для скалярного, спинового и электромагнитного полей соответствующие математические задачи сведены к обычным дифференциальным уравнениям второго порядка класса Гойна или более сложным.

В данной работе рассматривается случай безмассового спинового поля и осуществляется общее математическое исследование процесса туннелирования через эффективный гравитационный барьер Шварцшильда, которое основано на использовании решений Фробениуса для уравнения с существенно особыми точками ранга 2. Результаты значительно отличаются для двух ситуаций: когда частица падает на барьер изнутри и когда – извне. Математическая структура

полученных асимптотических формул является точной, однако аналитические выражения для сумм входящих в эти формулы степенных рядов неизвестны. Эта часть исследования вынужденно должна базироваться на численном суммировании рядов.

1. Разделение переменных. Используем статические координаты Шварцшильда:

$$dS^2 = \Phi dt^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 - \frac{1}{\Phi} dr^2, \quad \Phi = 1 - \frac{1}{r}. \quad (1)$$

Уравнение Дирака приводится к виду (пусть $\Psi(x) = r^{-1} \Phi^{-1/4}(r) \psi(x)$)

$$\left[\frac{\gamma^0}{\sqrt{\Phi}} \partial_t + i\sqrt{\Phi} \gamma^3 \partial_r + \frac{1}{r} \left(i\gamma^1 \partial_\theta + \gamma^2 \frac{i\partial_\phi + i\sigma^{12} \cos \theta}{\sin \theta} \right) - M \right] \psi(x) = 0. \quad (2)$$

Решения строятся как собственные функции энергии, квадрата, третьей проекции полного момента и оператора пространственного отражения. В представлении уравнения Дирака (2) этому набору операторов соответствует следующая подстановка для волновой функции (собственные значения четности равны $\Pi = \delta(-1)^{j+1}$, $\delta = \pm 1$):

$$\psi(x)_{\epsilon j m \delta} = e^{-i\epsilon t} \begin{pmatrix} f_1(r) D_{-1/2} \\ f_2(r) D_{+1/2} \\ \delta f_2(r) D_{-1/2} \\ \delta f_1(r) D_{+1/2} \end{pmatrix}; \quad (3)$$

применяются функции Вигнера $D_\sigma = D_{-j, \sigma}^j(\phi, \theta, 0)$, $j = 1/2, 3/2, \dots$; $m \in \{-j, \dots, +j\}$. С использованием матриц Дирака в спинорном базисе находим систему уравнений для двух функций $f = (f_1 + f_2)$, $g = -i(f_1 - f_2)$:

$$\left(\sqrt{\Phi} \frac{d}{dr} + \frac{v}{r} \right) f + \left(\frac{\epsilon}{\sqrt{\Phi}} + \delta M \right) g = 0, \quad \left(\sqrt{\Phi} \frac{d}{dr} - \frac{v}{r} \right) g - \left(\frac{\epsilon}{\sqrt{\Phi}} - \delta M \right) f = 0, \quad v = j + 1/2.$$

2. Качественный анализ, безмассовый случай. Ограничимся более простым безмассовым полем. Здесь имеем уравнения

$$\left(\Phi \frac{d}{dr} + \frac{v\sqrt{\Phi}}{r} \right) f + \epsilon g = 0, \quad \left(\Phi \frac{d}{dr} - \frac{v\sqrt{\Phi}}{r} \right) g - \epsilon f = 0. \quad (4)$$

Из (4) получим уравнение второго порядка для функции f :

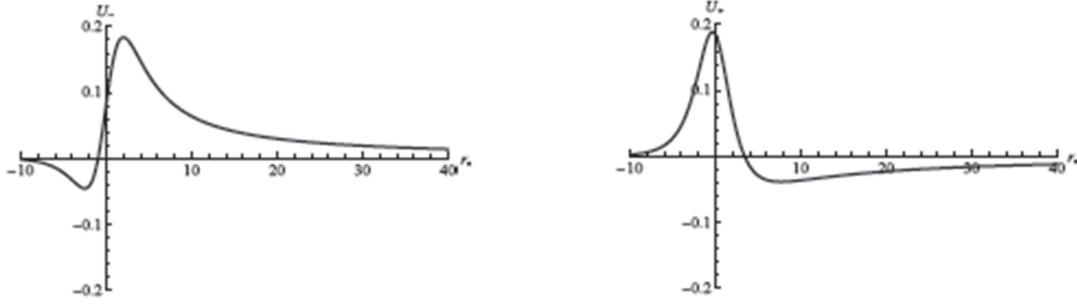
$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \left(\frac{1}{r-1} - \frac{1}{r} \right) \frac{df}{dr} + \left[\epsilon^2 + \frac{v^2}{r} + \frac{\epsilon^2}{(r-1)^2} + \frac{-v^2 + 2\epsilon^2}{r-1} - v \frac{(2r-3)}{2r^2(r-1)} \sqrt{\frac{r}{r-1}} \right] f = 0; \quad (5)$$

уравнение для $g(r)$ будет отличаться только знаком при параметре v . Для пояснения смысла возникающей задачи используется прием перехода к r_* -координате:

$$\Phi \frac{d}{dr} = \frac{d}{dr_*}, \quad dr_* = \frac{dr}{1-1/r}, \quad r_* = r + \ln(r-1), \\ r_* \in (-\infty, +\infty), \quad r \rightarrow 1, \quad r_* \rightarrow -\infty; \quad r \rightarrow \infty, \quad r_* \rightarrow +\infty. \quad (6)$$

Из (4) следуют уравнения второго порядка для функций f и g :

$$\left(\frac{d^2}{dr_*^2} + \epsilon^2 + v \frac{d\Phi}{dr_*} - v^2 \Phi^2 \right) f = 0, \quad \left(\frac{d^2}{dr_*^2} + \epsilon^2 - v \frac{d\Phi}{dr_*} - v^2 \Phi^2 \right) g = 0. \quad (7)$$



Потенциальные функции $U_-^{v=1}(r_*)$, $U_+^{v=1}(r_*)$

Это уравнения шредингеровского типа с потенциальными функциями вида

$$U_{\pm} = v^2 \varphi^2 \pm v \frac{d\varphi}{dr_*} = v^2 \frac{r-1}{r^3} \pm v \frac{1}{2r-1} \frac{\sqrt{r-1}(3-2r)}{2r\sqrt{r}}. \quad (8)$$

Характерное поведение потенциальных кривых $U_{\pm}(r_*)$ изображено на рисунке.

То есть имеем ситуации, в которых возможно туннелирование частиц через барьер.

3. Анализ дифференциальных уравнений второго порядка. Введем переменную, избавляющую уравнения (5) от квадратного корня:

$$\sqrt{\frac{r-1}{r}} = x, \quad \frac{1}{r} = 1-x^2, \quad r \rightarrow 1, x \rightarrow 0; \quad r \rightarrow +\infty, x \rightarrow \pm 1. \quad (9)$$

Получаем уравнение для $g(x)$ в виде

$$\frac{d^2 g}{dx^2} + \left(\frac{2}{x+1} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x} \right) \frac{dg}{dx} + \left[-\frac{2v}{x} + \frac{4\varepsilon^2}{x^2} + \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{\varepsilon^2}{(x+1)^3} + \frac{\varepsilon^2/4}{(x+1)^4} + \frac{A'}{(x-1)} + \frac{B'}{(x-1)^2} - \frac{\varepsilon^2}{(x-1)^3} + \frac{\varepsilon^2/4}{(x-1)^4} \right] g = 0,$$

где использованы обозначения

$$A = \frac{-8v^2 + 35\varepsilon^2 + 8v}{8}, \quad B = \frac{-8v^2 + 19\varepsilon^2 - 8v}{8}, \quad A' = \frac{8v^2 - 35\varepsilon^2 + 8v}{8}, \quad B' = \frac{-8v^2 + 19\varepsilon^2 + 8v}{8}.$$

Точки $x = 0, \infty$ – регулярные; точки $x = \pm 1$ – нерегулярные ранга 2. Уравнение для функции f получается заменой $v \Rightarrow -v$; это позволяет детально исследовать только уравнение для $g(x)$. В соответствии со структурой сингулярностей, ищем решения Фробениуса в виде [3]:

$$g(x) = x^{\gamma} (x-1)^{\alpha'} e^{\frac{\beta'}{x-1}} (x+1)^{\alpha} e^{\frac{\beta}{x+1}} G(x), \quad (10)$$

где параметры подстановки нужно выбирать из перечисленных ниже возможностей:

$$\gamma = \pm 2i\varepsilon; \quad \beta' = \pm i\varepsilon/2, \quad \alpha' = \pm i\varepsilon; \quad \beta = \pm i\varepsilon/2, \quad \alpha = \mp i\varepsilon. \quad (11)$$

Для функции $G(x)$ получаем уравнение со следующей структурой (явный вид коэффициентов опускаем):

$$G'' + \left(\frac{n}{x} + \frac{n_1}{x-1} + \frac{n_2}{(x-1)^2} + \frac{n_3}{x+1} + \frac{n_4}{(x+1)^2} \right) G' + \left(\frac{m}{x} + \frac{m_1}{x-1} + \frac{m_2}{(x-1)^2} + \frac{m_3}{x+1} + \frac{m_4}{(x+1)^2} \right) G = 0.$$

Наиболее интересны три особые точки:

$$\underline{x \rightarrow 0}, \quad g(x) \sim x^{\gamma} \sim e^{\pm i\varepsilon r_*}, \quad r_* \rightarrow -\infty; \quad (12a)$$

$$\underline{x \rightarrow +1}, \quad g(x) \approx (x-1)^{\alpha'} \exp \frac{\beta'}{(x-1)} \approx e^{\mp i\varepsilon \ln r^* \mp i\varepsilon r^*} \approx e^{\mp i\varepsilon r^*}, \quad r^* \rightarrow +\infty; \quad (12б)$$

$$\underline{x \rightarrow -1}, \quad g(x) \approx (x+1)^\alpha \exp \frac{\beta}{(x+1)} \approx e^{\pm i\varepsilon \ln r^* \mp i\varepsilon r^*} \approx e^{\mp i\varepsilon r^*}, \quad r^* \rightarrow +\infty. \quad (12в)$$

Решения для функции $G(x)$ ищем в виде степенных рядов: $G = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$. Получаемое 6-членное рекуррентное соотношение имеет вид (явный вид 10 коэффициентов $\{A, B, C, D, E; a, b, c, d, e\}$, определяемых квантовыми числами ε и ν , опускаем)

$$k = 4, 5, 6, 7, \dots$$

$$Ac_{k-4} + [B + (k-3)(k-4) + (k-3)a]c_{k-3} + [C + (k-2)b]c_{k-2} +$$

$$+[D + (k-1)c - 2(k-1)(k-2)]c_{k-1} + (E + kd)c_k + (k+1)(k+e)c_{k+1} = 0. \quad (13)$$

Для анализа вопроса о радиусе сходимости ряда применим метод Пуанкаре – Перрона. Для этого соотношение (13) представим в виде

$$A + [B + (k-3)(k-4) + (k-3)a] \frac{c_{k-3}}{c_{k-4}} + [C + (k-2)b] \frac{c_{k-2}}{c_{k-3}} \frac{c_{k-3}}{c_{k-4}} +$$

$$+[D + (k-1)c - 2(k-1)(k-2)] \frac{c_{k-1}}{c_{k-2}} \frac{c_{k-2}}{c_{k-3}} \frac{c_{k-3}}{c_{k-4}} +$$

$$+(E + kd) \frac{c_k}{c_{k-1}} \frac{c_{k-1}}{c_{k-2}} \frac{c_{k-2}}{c_{k-3}} \frac{c_{k-3}}{c_{k-4}} + (k+1)(k+e) \frac{c_{k+1}}{c_k} \frac{c_k}{c_{k-1}} \frac{c_{k-1}}{c_{k-2}} \frac{c_{k-2}}{c_{k-3}} \frac{c_{k-3}}{c_{k-4}} = 0. \quad (14)$$

Радиус сходимости степенного ряда – это модуль величины, обратной к

$$r = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{c_{k+1}}{c_k}, \quad R_{\text{conv}} = \frac{1}{|r|}. \quad (15)$$

Чтобы найти алгебраическое уравнение для величины r , соотношение (14) умножаем на k^{-2} и устремляем $k \rightarrow \infty$. В результате получим

$$r - 2r^3 + r^5 = 0 \quad \Rightarrow \quad r(r^2 - 1)^2 = 0, \quad r = 0, +1, -1. \quad (16)$$

Таким образом, гарантированный (минимальный) радиус сходимости степенного ряда равен $R_{\text{conv}} = 1$, что покрывает всю физическую область изменения координаты $x \in (0, 1)$.

4. Общая схема анализа эффекта туннелирования. Исследования выше возможности позволяют предложить 8 решений (см. (11)):

$$g_1(x) = e^{+2i\varepsilon \ln x} e^{+i\varepsilon \ln(x-1)} e^{\frac{+i\varepsilon/2}{x-1}} e^{-i\varepsilon \ln(x+1)} e^{\frac{+i\varepsilon/2}{x+1}} (R_1(x) + iI_1(x)),$$

$$g_2(x) = e^{-2i\varepsilon \ln x} e^{-i\varepsilon \ln(x-1)} e^{\frac{-i\varepsilon/2}{x-1}} e^{+i\varepsilon \ln(x+1)} e^{\frac{-i\varepsilon/2}{x+1}} (R_1(x) - iI_1(x));$$

$$g_3(x) = e^{+2i\varepsilon \ln x} e^{-i\varepsilon \ln(x-1)} e^{\frac{-i\varepsilon/2}{x-1}} e^{+i\varepsilon \ln(x+1)} e^{\frac{-i\varepsilon/2}{x+1}} (R_3(x) + iI_3(x)),$$

$$g_4(x) = e^{-2i\varepsilon \ln x} e^{+i\varepsilon \ln(x-1)} e^{\frac{+i\varepsilon/2}{x-1}} e^{-i\varepsilon \ln(x+1)} e^{\frac{+i\varepsilon/2}{x+1}} (R_3(x) - iI_3(x));$$

$$g_5(x) = e^{+2i\varepsilon \ln x} e^{+i\varepsilon \ln(x-1)} e^{\frac{+i\varepsilon/2}{x-1}} e^{+i\varepsilon \ln(x+1)} e^{\frac{-i\varepsilon/2}{x+1}} (R_5(x) + iI_5(x)),$$

$$g_6(x) = e^{-2i\varepsilon \ln x} e^{-i\varepsilon \ln(x-1)} e^{\frac{-i\varepsilon/2}{x-1}} e^{-i\varepsilon \ln(x+1)} e^{\frac{+i\varepsilon/2}{x+1}} (R_5(x) - iI_5(x));$$

$$g_7(x) = e^{+2i\varepsilon \ln x} e^{-i\varepsilon \ln(x-1)} e^{\frac{-i\varepsilon/2}{x-1}} e^{-i\varepsilon \ln(x+1)} e^{\frac{+i\varepsilon/2}{x+1}} (R_7(x) + iI_7(x)),$$

$$g_8(x) = e^{-2i\varepsilon \ln x} e^{+i\varepsilon \ln(x-1)} e^{\frac{+i\varepsilon/2}{x-1}} e^{+i\varepsilon \ln(x+1)} e^{\frac{-i\varepsilon/2}{x+1}} (R_7(x) - iI_7(x)). \quad (17)$$

Отметим, что множитель $e^{+i\varepsilon \ln(x-1)}$, $x \in (0, 1)$, дает многозначную функцию

$$e^{\pm i\varepsilon \ln(x-1)} = e^{\pm i\varepsilon [\ln|x-1| + i(\pi + 2\pi n)]} = e^{\mp i\varepsilon(\pi + 2\pi n)} e^{\pm i\varepsilon \ln|x-1|}.$$

Использование той или иной ветви многозначной функции влияет только на выбор вещественного множителя перед решением; для определенности пусть $n = 0$. Формально соотношения (17) – это точные и везде определенные решения, поскольку ряды сходятся во всей физической области изменения переменной $x \in (0, +1)$. Отметим, что решения, перечисленные в (17), разбиты на пары комплексно сопряженных.

Применяя численный анализ, легко убедиться, что вещественные и мнимые части функций $G(x)$, определяемых степенными рядами, ведут себя как монотонно растущие функции с явно выраженным асимптотическим стремлением к постоянным значениям, зависящим от квантовых чисел $\varepsilon, \nu = j + 1/2$.

Находим асимптотики решений g_1, g_3 и g_2, g_4 (учтена сходимость рядов):

$$x \rightarrow 0 (r_* \rightarrow -\infty), \quad g_1 = e^{-\varepsilon\pi} e^{+i\varepsilon r_*}, \quad g_2 = e^{+\varepsilon\pi} e^{-i\varepsilon r_*}, \quad g_3 = e^{+\varepsilon\pi} e^{+i\varepsilon r_*}, \quad g_4 = e^{-\varepsilon\pi} e^{-i\varepsilon r_*};$$

$$x \rightarrow +1 (r_* \rightarrow +\infty), \quad (18a)$$

$$g_1 = [e^{-i\varepsilon \ln 2} e^{+i\varepsilon/4} (R_1 + iI_1)] e^{-i\varepsilon r_*}, \quad g_2 = [e^{+i\varepsilon \ln 2} e^{-i\varepsilon/4} (R_1 - iI_1)] e^{+i\varepsilon r_*},$$

$$g_3 = [e^{+i\varepsilon \ln 2} e^{-i\varepsilon/4} (R_3 + iI_3)] e^{+i\varepsilon r_*}, \quad g_4 = [e^{-i\varepsilon \ln 2} e^{+i\varepsilon/4} (R_3 - iI_3)] e^{-i\varepsilon r_*}. \quad (18б)$$

Образуем линейные комбинации из функций

$$H_+ = \frac{g_3 + g_1}{2}, \quad H_- = \frac{g_3 - g_1}{2}; \quad F_+ = \frac{g_2 + g_4}{2}, \quad F_- = \frac{g_2 - g_4}{2}; \quad (19)$$

их асимптотики слева задаются равенствами

$$r_* \rightarrow -\infty, \quad H_+ = \cosh \varepsilon\pi e^{+i\varepsilon r_*}, \quad H_- = \sinh \varepsilon\pi e^{+i\varepsilon r_*};$$

$$r_* \rightarrow -\infty, \quad F_+ = \cosh \varepsilon\pi e^{-i\varepsilon r_*}, \quad F_- = \sinh \varepsilon\pi e^{-i\varepsilon r_*}; \quad (20a)$$

асимптотики справа ($r_* \rightarrow +\infty$) – соотношениями

$$H_{\pm} = \frac{1}{2} [e^{+i\varepsilon \ln 2} e^{-i\varepsilon/4} (R_3 + iI_3)] e^{+i\varepsilon r_*} \pm \frac{1}{2} [e^{-i\varepsilon \ln 2} e^{+i\varepsilon/4} (R_1 + iI_1)] e^{-i\varepsilon r_*},$$

$$F_{\pm} = \frac{1}{2} [e^{+i\varepsilon \ln 2} e^{-i\varepsilon/4} (R_1 - iI_1)] e^{+i\varepsilon r_*} \pm \frac{1}{2} [e^{-i\varepsilon \ln 2} e^{+i\varepsilon/4} (R_3 - iI_3)] e^{-i\varepsilon r_*}. \quad (20б)$$

Таким образом, имеем две пары решений с асимптотиками слева \rightarrow справа следующего вида:

$$H_+, \quad \cosh \varepsilon\pi e^{+i\varepsilon r_*} \rightarrow A e^{+i\varepsilon r_*} + B e^{-i\varepsilon r_*}, \quad H_-, \quad \sinh \varepsilon\pi e^{+i\varepsilon r_*} \rightarrow A e^{+i\varepsilon r_*} - B e^{-i\varepsilon r_*}; \quad (21a)$$

$$F_+, \quad \cosh \varepsilon\pi e^{-i\varepsilon r_*} \rightarrow A^* e^{-i\varepsilon r_*} + B^* e^{+i\varepsilon r_*}, \quad F_-, \quad \sinh \varepsilon\pi e^{-i\varepsilon r_*} \rightarrow A^* e^{-i\varepsilon r_*} - B^* e^{+i\varepsilon r_*}. \quad (21б)$$

Пара (21б) более проста для интерпретации: ее можно сопоставить ситуации, когда частица падает справа на барьер Шварцшильда, частично отражается и частично проходит сквозь него. Два варианта соответствуют разным сдвигам фаз. Если комбинировать функции в пределах пар $(H_+ - H_-)$ и $(F_+ - F_-)$, то можно получить решения, нужные для описания явления туннелирования майорановских частиц.

Аналогично можно исследовать ситуацию, когда частица падает на барьер Шварцшильда слева, при этом нужно комбинировать функции g_5, \dots, g_8 . Имеем асимптотики:

$$x \rightarrow +1, \quad g_5 = e^{+i\varepsilon/2} e^{-i\varepsilon/4} (R_5 + iI_5) e^{-i\varepsilon r_*}, \quad g_8 = e^{+i\varepsilon/2} e^{-i\varepsilon/4} (R_7 - iI_7) e^{-i\varepsilon r_*};$$

$$x \rightarrow 0, \quad g_5 = e^{-\varepsilon\pi} e^{i\varepsilon r_*}, \quad g_8 = e^{+\varepsilon\pi} e^{-i\varepsilon r_*}; \quad (22a)$$

$$x \rightarrow +1, \quad g_6 = e^{-i\varepsilon/2} e^{+i\varepsilon/4} (R_5 - iI_5) e^{+i\varepsilon r_*}, \quad g_7 = e^{-i\varepsilon/2} e^{+i\varepsilon/4} (R_7 + iI_7) e^{+i\varepsilon r_*};$$

$$x \rightarrow 0, \quad g_6 = e^{+\varepsilon\pi} e^{-i\varepsilon r_*}, \quad g_7 = e^{-\varepsilon\pi} e^{+i\varepsilon r_*}. \quad (22б)$$

Введем функции $\bar{H}_{\pm} = g_5 \pm g_8$, $\bar{F}_{\pm} = g_6 \pm g_7$; они имеют асимптотики слева \rightarrow справа:

$$\bar{H}_{\pm}, \quad e^{-\varepsilon\pi} e^{+iz} \pm e^{+\varepsilon\pi} e^{-i\varepsilon r^*} \rightarrow e^{+i\varepsilon/2} e^{-i\varepsilon/4} [(R_5 + iI_5) \pm (R_7 - iI_7)] e^{-i\varepsilon r^*}, \quad (23a)$$

$$\bar{F}_{\pm}, \quad e^{-\varepsilon\pi} e^{+i\varepsilon r^*} \pm e^{+\varepsilon\pi} e^{-i\varepsilon r^*} \rightarrow e^{+i\varepsilon/2} e^{-i\varepsilon/4} [(R_5 - iI_5) \pm (R_7 + iI_7)] e^{+i\varepsilon r^*}. \quad (23b)$$

Функции (23б) можно сопоставить ситуации, когда частица падает слева на барьер Шварцшильда, частично отражается и частично проходит сквозь него:

$$\bar{A} e^{+i\varepsilon r^*} \pm \bar{B} e^{-i\varepsilon r^*} \rightarrow \bar{C}_{\pm} e^{+i\varepsilon r^*}. \quad (24)$$

Авторы выражают благодарность В. М. Редькову за полезные советы и помощь в работе.

Список использованной литературы

1. *Regge, T.* Stability of a Schwarzschild Singularity / T. Regge, J. A. Wheeler // Phys. Rev. – 1957. – Vol. 108, no. 4. – P. 1063–1069.
2. *Chandrasekhar, S.* The Mathematical Theory of Black Holes / S. Chandrasekhar. – Oxford: Oxford University Press, 1983.
3. *Slavyanov, S. Yu.* Special functions. A unified theory based on singularities / S. Yu. Slavyanov, W. Lay. – New York: Oxford University Press, 2000.

Поступила в редакцию 22.07.2016

УДК 539.12

Г. С. ПОКАТАШКИН¹, Е. С. КОКОУЛИНА², Р. Г. ШУЛЯКОВСКИЙ¹

МОДЕЛИРОВАНИЕ АНОМАЛЬНОГО РОЖДЕНИЯ МЯГКИХ ФОТОНОВ НА НУКЛОТРОНЕ

¹Институт прикладной физики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь,
e-mail: shulyakovsky@iaph.bas-net.by, glebyshek92@mail.ru

²Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Россия, e-mail: kokoulina@jinr.ru

В статье обсуждаются предварительные результаты моделирования электромагнитного калориметра для регистрации мягких фотонов на пучке Нуклотрона с энергией 3,5 ГэВ на основе пакетов Geant4 и UrQMD. Приводится теоретическое предположение связи конденсата Бозе – Эйнштейна с явлением аномального выхода мягких фотонов, основанное на данных сотрудничества СВД-2 (Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Российская Федерация), что является актуальной задачей в столкновении релятивистских ядер.

Ключевые слова: мягкие фотоны, конденсат Бозе – Эйнштейна, адронизация, кварк-глюонная плазма, Нуклотрон, электромагнитный калориметр, Монте-Карло.

G. S. POKATASHKIN¹, E. S. KOKOULINA², R. G. SHULYAKOVSKY¹

SIMULATION OF THE ABNORMAL BIRTH OF SOFT PHOTONS ON THE NUCLOTRON

¹Institute of Applied Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus,
e-mail: shulyakovsky@iaph.bas-net.by, glebyshek92@mail.ru

²Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russia, e-mail: kokoulina@jinr.ru

The first results of simulation of an electromagnetic calorimeter for registration of soft photons on the Nuclotron beam with the energy of 3.5 GeV on the basis of Geant4 and UrQMD packages are discussed in the paper. The theoretical assumption is made on the relation between Bose – Einstein condensate and abnormal soft photon production on the basis of the SVD-2 data (Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russian Federation). This is an actual task for heavy nucleus collisions.

Keywords: soft photons, Bose – Einstein condensate, hadronization, quark-gluon plasma, Nuclotron, electromagnetic calorimeter, Monte-Carlo.

Введение. В конце 1970-х гг. на пузырьковой камере ВЕВС (ускоритель SPS ЦЕРН) изучались спектры прямых фотонов от распада K^+p -взаимодействия при энергии 70 ГэВ [1]. Полученные данные не соответствовали теоретическим предсказаниям квантовой электродинамики (КЭД). Форма внутреннего тормозного излучения согласовалась с теорией, однако измеренное полное сечение превосходило ожидания. Этот факт указывает на наличие другого механизма излучения фотонов по сравнению с тормозным излучением. Энергетическая область наблюдаемой аномалии менее 60 МэВ (так называемые мягкие фотоны (МФ)). Эксперименты по измерению аномального выхода мягких фотонов проводились коллаборациями NA34, NA22, WA83, WA91, WA102, DELPHI и подтвердили превышение выхода МФ по сравнению с предсказаниями Стандартной модели [2]. В эксперименте DELPHI было обнаружено 17-кратное превышения выхода МФ в зависимости от множественности нейтральных пионов по сравнению с КЭД [3]. В процессах слабого взаимодействия выход МФ полностью согласуется с теоретическими предсказаниями [4]. Вероятно, что явление аномального выхода мягких фотонов коррелирует с механизмом адронизации. Имеется теоретическая гипотеза о связи образования мягких фотонов и процесса конденсации пионов (КБЭ).

1. Феноменологические модели аномального рождения мягких фотонов. Попытки теоретического описания аномального выхода мягких фотонов привели к формированию множества феноменологических моделей. Так, модель, описанная Е. В. Шурыком, применяет аналог идеи Л. Д. Ландау для определения фононов и «ротоннов» в жидком гелии: подход основан на модели возникновения квазипионного газа и оценке испускания МФ в соответствии с КЭД [5]. Модель, предложенная Чук-Ин Вонгом, базируется на тезисе об осцилляции цвета кварков при адронизации (осцилляции плотности цветового заряда ведут к осцилляциям плотности электрического заряда кварков, которые, в свою очередь, ведут к эмиссии мягких фотонов на стадии формирования мезонов) [6]. Удачную модель представил Ван Хов и дополнил П. Личард: описание аномального выхода МФ в сильных взаимодействиях строится на процессах, происходящих в холодной кварк-глюонной плазме. В данной модели испускание мягких фотонов обусловлено в основном тормозным излучением на стадии кварк-глюонного взаимодействия ($q\bar{q} \rightarrow g\gamma$, $qg \rightarrow q\gamma$, $\bar{q}g \rightarrow \bar{q}\gamma$) [7]. В работе [8] коллаборацией СВД-2 было измерено распределение по множественности заряженных и нейтральных пионов в реакции $pp \rightarrow n\pi+X$ при энергии пучка протонов 50 ГэВ. В области множественности $\langle n_{\pi^0} \rangle > 18$ наблюдается рост нормированной дисперсии ω распределения по числу π^0 мезонов по множественности ($\omega = \sigma_{\pi^0} / \langle n_{\pi^0} \rangle$, где σ_{π^0} – сечение процесса рождения нейтрального пиона, $\langle n_{\pi^0} \rangle$ – множественность). Это свидетельствует о достижении режима Бозе – Эйнштейновского пионного конденсата (КБЭ): при большой множественности понижается температура и увеличивается плотность энергии в системе. Учитывая обнаруженные указания на КБЭ, было выдвинуто предложение о том, что в процессе конденсации пионы выпадают в состояние с минимальной энергией и, предположительно, излучают мягкие фотоны.

2. Моделирование прототипа электромагнитного калориметра. Для описания фотонных спектров на основе известной физики необходимо моделирование эксперимента. Обычно для этих целей используют статистический метод Монте-Карло, который отлично подходит для симуляции прохождения частиц через вещество. На базе вышеупомянутого метода реализовано огромное число программных продуктов. Одним из них является пакет моделирования Geant4, разработанный в ЦЕРН. С помощью данного пакета можно моделировать условия проведения реального эксперимента на основе уже имеющихся теоретических и экспериментальных данных.

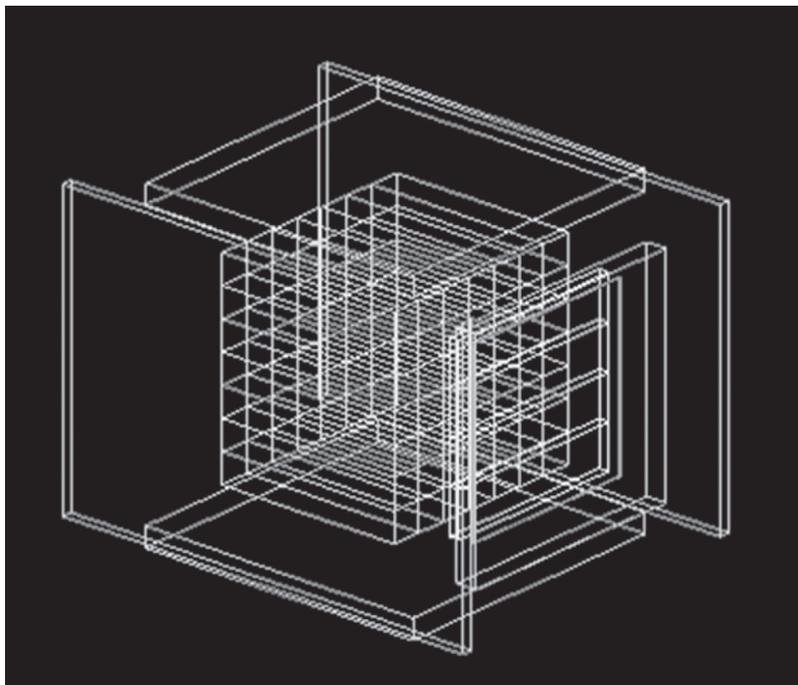


Рис. 1. Прототип электромагнитного калориметра с вспомогательными элементами

Для анализа фотонных спектров в виртуальном эксперименте необходимо измерить энергию вторичных частиц. Эту задачу выполняют ЭМ калориметры. Данный раздел посвящен моделированию электромагнитного калориметра на основе кристаллов BGO. Основной причиной выбора BGO является высокое энергетическое разрешение (порядка нескольких мегаэлектрон-вольт). Моделирование прохождения частиц через калориметр осуществлялось с помощью пакета Geant4, который является стандартом, при этом использовался генератор первичных вершин UrQMD. Параметры генератора следующие: пучок – дейтрон; мишень – углерод; прицельный параметр – 0; энергия пучка – 3,5 А ГэВ/с. Прототип электромагнитного калориметра (ЭМК) представлен на рис. 1.

Электромагнитный калориметр включает в себя не только поглощающий слой материала, но и другие, вспомогательные, элементы:

- передний «вето»-счетчик – $23 \times 23 \times 2$ см³ из полистирола;
- боковые «вето»-счетчики – $1 \times 30 \times 42$ см³ из полистирола;
- верхний и нижний «вето»-счетчики – $28 \times 28 \times 2$ см³ из полистирола;
- предливневой детектор – пластина свинца $18 \times 18 \times 0,2$ см³, 4 пластины сцинтилляторов по $18 \times 4,5 \times 1$ см³ каждая из полистирола;

- поглощающий слой из 49 кристаллов BGO – $3 \times 3 \times 18$ см³ каждый;

- расстояние от мишени до плоскости ЭМК составляет 203 см, угол наклона к мишени – 16,3°.

Первые три счетчика представляют собой «охранную систему», предотвращающую утечку энергии и ложные срабатывания системы на фон. Предливневой детектор выступает в роли триггера начала электромагнитного ливня, а пластинка свинца выполняет функцию конвертера. Поглощающий слой из кристаллов BGO «впитывает» частицы и сигнализирует обслуживающей аппаратуре о зарегистрированном количестве энергии.

3. Результаты моделирования. Кроме учета сигналов «охранной системы», в моделировании были применены следующие условия на отбор событий:

- сигнал в предливневом детекторе, означающий начало ЭМ ливня;
- энерговыделение в кристаллах BGO больше 2 МэВ;
- характерное время пролета фотонов до пластика предливневого детектора менее 6,6 нс.

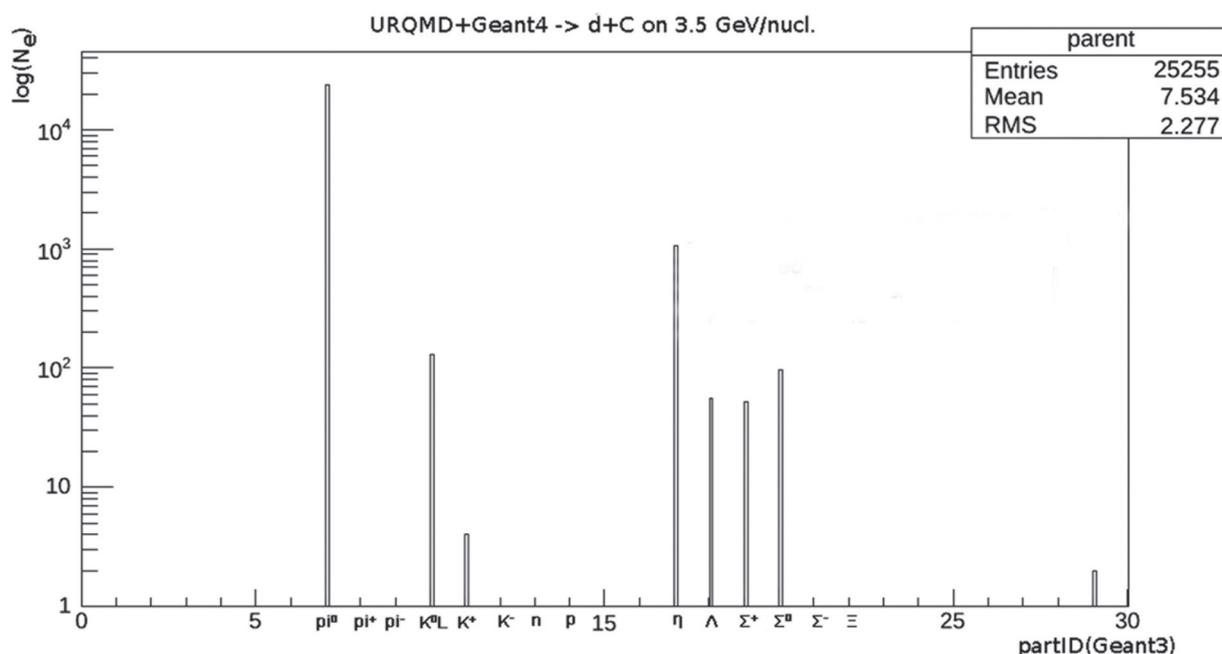


Рис. 2. «Родители» частиц, которые дают сигнал в объеме электромагнитного калориметра

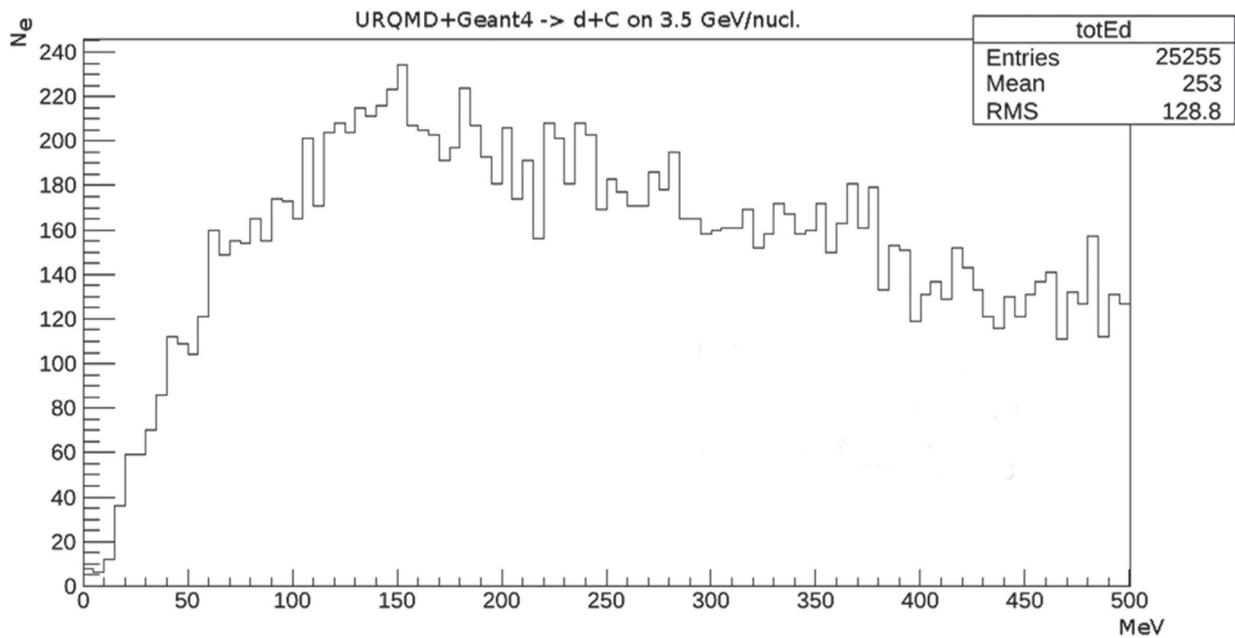


Рис. 3. Смоделированный фотонный спектр

Данные условия позволяют избавиться от вклада нейтронов, которые «эмитируют» фотоны в электромагнитном калориметре. Как видно из рис. 2, основными частицами в зарегистрированном фотонном спектре являются π^0 -мезоны. Соответствующий фотонный спектр приведен на рис. 3. Стоит отметить, что отсутствие аномального выхода мягких фотонов в низкоэнергетической области фотонного спектра менее 60 МэВ обусловлено отсутствием в Geant4 и UrQMD (и других пакетах) механизма генерации и транспортировки прямых МФ через вещество.

Выполненное моделирование доказывает уникальность и важность явления аномального выхода мягких фотонов. Формирование феноменологического описания, которое согласуется с экспериментальными данными, могло бы внести ясность в процессы адронизации. Стоит отметить, что результаты данного моделирования согласуются с полученными ранее в Лаборатории физики высоких энергий им. В. И. Векслера и А. М. Балдина (ОИЯИ, г. Дубна, Россия) [9].

Заключение. Поиск причин аномального выхода мягких фотонов является нетривиальной задачей, во многом благодаря сложностям выделения полезного сигнала прямых мягких фотонов. Важным фактом, указывающим на возможную природу аномалии, является отсутствие нарушения выхода МФ в процессах слабого взаимодействия. Полученный в работе фотонный спектр демонстрирует актуальность исследуемого явления. В дальнейшем планируется тесное сотрудничество с сотрудниками коллаборации СВД-2 и выполнение физической программы с электромагнитным калориметром на установке VM@N на пучках Нуклотрона (d, Li, C и др.) в Объединенном институте ядерных исследований (Дубна, Россия).

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант № Ф16Д-009 «Изучение выхода мягких фотонов в адронных и ядерных взаимодействиях на ускорителях ОИЯИ и ИФВЭ»).

Список использованной литературы

1. Observation of direct soft photon production in K^+p interactions at 70 GeV/c / P. V. Chliapnikov [et al.] // Phys. Lett. B. – 1984. – Vol. 141. – P. 56–59.
2. Further analysis of a direct soft photon excess in π^-p interactions at 280 GeV/c / A. Belogianni [et al.]; WA91 Collaboration // Phys. Lett. B. – 2002. – Vol. 548. – P. 122–128.
3. Perepelitsa, V. F. Anomalous Soft Photons in Hadronic Decays of Z^0 / V. F. Perepelitsa // Nonl. Phenom. Compl. Syst. – 2009. – Vol. 12, N 4. – P. 334–337.

4. Evidence for an excess of soft photons in hadronic decays of Z^0 / J. Abdallah [et al.]; DELPHI Collaboration // Eur. Phys. J. C. – 2006. – Vol. 47. – P. 273–294.
5. Shuryak, E. V. The “soft photon puzzles” and pion modification in hadronic matter / E. V. Shuryak // Phys. Lett. B. 231. – 1989. – P. 175–177.
6. Wong Cheuk-Yin. Anomalous soft photons in hadron production / Wong Cheuk-Yin // Phys. Rev. Lett. C. – 2010. – Vol. 81. – P. 064903.
7. Lichard, P. The cold quark-gluon plasma as a source of very soft photons in high energy collisions / P. Lichard, L. Van Hove // Phys. Lett. B. – 1990. – Vol. 245. – P. 605–608.
8. Рядовиков, В. Н. Топологические сечения в pp-взаимодействиях при 50 ГэВ / В. Н. Рядовиков // Ядерная физика. – 2012. – Вып. 75, № 3. – С. 343–348.
9. Kokoulina, E. Soft photon registration at Nuclotron / E. Kokoulina // Proc. Sci. – 2015. – Vol: SISSA. – P. 1–5.

Поступила в редакцию 04.07.2016

УДК 535.375.5:621.375.8

А. А. РУСАК¹, В. И. ДАШКЕВИЧ¹, В. А. ОРЛОВИЧ¹, А. П. ШКАДАРЕВИЧ²

**ПОВЫШЕНИЕ ВЫХОДНОЙ ЭНЕРГИИ ВКР-ЛАЗЕРА
ПУТЕМ ПОВТОРНОГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ИСТОЩЕННОЙ НАКАЧКИ**

¹ *Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь,
e-mail: bui.anastasiya@gmail.com, v.dashkevich@dragon.bas-net.by, v.orlovich@dragon.bas-net.by*

² *Унитарное предприятие «НТЦ «ЛЭМТ» БелОМО», Минск, Беларусь,
e-mail: shkad@lemt.by*

Предложен способ увеличения выходной энергии внрезонаторного ВКР-лазера с двухпроходной накачкой. Способ основан на повторном возврате истощенной накачки в зону ВКР-генерации и демонстрируется на примере безопасных для глаз ВКР-лазеров на кристалле KGW, накачиваемом импульсным многомодовым излучением KGW:Nd-лазера с рабочим переходом ${}^4F_{3/2} \rightarrow {}^4I_{13/2}$ в геометриях $E \parallel N_g$ и $E \parallel N_m$. При возврате в ВКР-лазер 70 % истощенной накачки КПД генерации безопасного для глаз излучения на длинах волн 1507 и 1538 нм возрастает примерно на 11 %.

Ключевые слова: вынужденное комбинационное рассеяние (ВКР), внрезонаторный ВКР-лазер, двухпроходная накачка, повторное возвращение истощенной накачки, безопасное для глаз излучение.

A. A. RUSAK¹, U. I. DASHKEVICH¹, V. A. ORLOVICH¹, A. P. SHKADAREVICH²

**INCREASING THE OUTPUT ENERGY OF THE RAMAN LASER BY A REPEATED
USE OF A DEPLETED PUMP**

¹ *B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus,
e-mail: bui.anastasiya@gmail.com, v.dashkevich@dragon.bas-net.by, v.orlovich@dragon.bas-net.by*

² *Unitary Enterprise "STC "LEMT" of the BelOMO", Minsk, Belarus, e-mail: shkad@lemt.by*

A method for increasing the output energy of an extracavity Raman laser with a double-pass pump is proposed. The method is based on the repeated recovery of a depleted pump in the zone of SRS generation and is demonstrated by the example of eye-safe Raman lasers with a KGW crystal pumped at geometries of $E \parallel N_g$ and $E \parallel N_m$ by pulsed multimode radiation of a Nd:KGW-laser with a ${}^4F_{3/2} \rightarrow {}^4I_{13/2}$ working transition. When returning 70 % of a depleted pump in the Raman laser, an efficiency of generation of eye-safe radiation at wavelengths of 1507 and 1538 nm increases by approximately 11 %.

Keywords: stimulated Raman Scattering (SRS), extracavity SRS-laser, double-pass pump, repeated return of a depleted pump, eye-safe radiation.

Введение. Вынужденное комбинационное рассеяние (ВКР) широко применяется в лазерной технике для генерации когерентного излучения в безопасном для глаз диапазоне спектра 1,4–1,8 мкм. Один из методов получения безопасного для глаз излучения основан на возбуждении генерации Nd-содержащих лазеров на переходе ${}^4F_{3/2} \rightarrow {}^4I_{13/2}$ и последующем нелинейно-оптическом преобразовании излучения генерации с помощью ВКР-лазера, генерирующего первую стоксову компоненту. ВКР-лазер может быть размещен непосредственно в резонаторе лазера накачки, оконечные зеркала которого являются высокоотражающими на длине волны лазерного излучения [1, 2]. В силу высокой мощности возбуждающего излучения в резонаторе данный подход обеспечивает преодоление порога ВКР-генерации при невысоких уровнях накачки лазерного элемента. Этот метод обычно используется либо в малогабаритных системах с ограниченной мощностью накачки, либо в системах с высокой (10^4 – 10^5 Гц) частотой следования импульсов [3, 4], когда промежуток времени, отведенный на создание инверсной населенности в Nd-содержащих лазерных элементах, мал и поэтому получать высокие мощности возбуждающего излучения затруднительно. Однако размещение ВКР-лазера внутри резонатора лазера накачки имеет ряд

недостатков, среди которых в первую очередь следует выделить риск разрушения внутрирезонаторных элементов при срыве процесса вынужденного комбинационного рассеяния. Поэтому при необходимости генерации более мощных импульсов с вполне определенными параметрами излучения обычно применяются ВКР-лазеры, расположенные вне резонатора возбуждающего лазера. Как правило, в ВКР-лазерах используется выходное зеркало с высоким отражением возбуждающего излучения, что обеспечивает обход резонатора этим излучением и, как следствие, примерно двукратное снижение порога возбуждения вынужденного комбинационного рассеяния и увеличение КПД ВКР-генерации. Однако в случае двухпроходной накачки следует позаботиться об устранении между ВКР-лазером и возбуждающим лазером положительной обратной связи, наличие которой приводит к превращению рассматриваемой системы в конструкцию, аналогичную расположению ВКР-лазера внутри резонатора лазера накачки.

Ясно, что обратная связь отсутствует при однопроходном режиме накачки, когда выходное зеркало линейного или кольцевого ВКР-лазера прозрачно на длине волны излучения накачки [5, 6]. При двухпроходной накачке паразитная обратная связь устраняется либо установкой между возбуждающим лазером и ВКР-лазером оптического вентиля на основе вращателя Фарадея [7], либо наклоном оси резонатора ВКР-лазера на угол, при котором отраженное от выходного зеркала ВКР-лазера излучение не попадает в активный лазерный элемент [8].

В случае использования для развязки вращателя Фарадея наибольшая эффективность ВКР-генерации достигается при встречном коллинеарном распространении падающего на среду и отраженного пучков накачки. Если обратная связь между лазерами устраняется путем наклона оси резонатора, объем возбуждающего излучения в каустике резонатора ВКР-лазера несколько уменьшается. Однако при этом несколько сглаживаются неоднородности пучка накачки (если он многомодовый), что положительно сказывается на поперечном распределении стокового излучения. Необходимо отметить, что квантовый КПД ВКР-лазеров, как правило, не превышает 40–70 %, поэтому выходящее из резонатора ВКР-лазера истощенное излучение накачки обладает достаточно большой энергией. Если длительность импульса возбуждающего излучения превышает время обхода промежутка между лазерами, то возможно повторное возвращение истощенного излучения накачки в ВКР-лазер, что способно увеличить энергию стоковых импульсов. Предлагаемый метод повышения выходной энергии поясняется на рис. 1, а. Поскольку выходное зеркало ВКР-лазера является глухим для излучения накачки, то для исключения обратной связи его и дополнительное зеркало, возвращающее истощенную накачку, следует устанавливать так, чтобы излучение истощенной и дважды истощенной накачки не попадало в апертуру лазера накачки.

В литературе не содержится сведений о предлагаемом методе повышения энергии ВКР-лазера при двухпроходном режиме накачки и дополнительном (повторном) возвращении истощенной накачки в ВКР-лазер. Цель настоящей работы – экспериментальная проверка эффективности данного метода на примере внрезонаторного безопасного для глаз ВКР-лазера на кристалле $\text{KGd}(\text{WO}_4)_2$ (KGW), излучающего стоковые компоненты при накачке KGW:Nd-лазером с рабочим переходом ${}^4F_{3/2} \rightarrow {}^4I_{13/2}$.

Экспериментальная часть. Накачка ВКР-лазера осуществлялась таким же многомодовым KGW:Nd-лазером, что и в [6]. При энергии питания газоразрядной лампы ~ 10 Дж используемый KGW:Nd-лазер накачки излучал на длине волны 1351 нм импульсы с энергией ~ 35 мДж и длительностью на уровне 0,5 максимальной интенсивности (FWHM) ~ 20 –21 нс. Принципиальная часть оптической схемы исследованного лазерного источника с возвращением истощенной накачки в ВКР-лазер приведена на рис. 1, б. Из элементов лазера накачки показаны лишь активный кристалл KGW:Nd и выходное зеркало $M_{\text{нак}}$, которое выполняло также функции дополнительного зеркала (рис. 1, а), повторно возвращающего излучение истощенной накачки (см. рис. 1, б, направление Б), поскольку его коэффициент отражения на $\lambda_{\text{нак}} = 1351$ нм достаточно высок: ~ 70 %. Лазер накачки и ВКР-лазер, резонатор которого образован плоским входным зеркалом $M_{\text{вх}}$, прозрачным для излучения накачки ($T \sim 97$ %), и вогнутым выходным зеркалом $M_{\text{вых}}$, непрозрачным на $\lambda_{\text{нак}} = 1351$ нм ($R \sim 99,9$ %), оптически связаны посредством уменьшающего

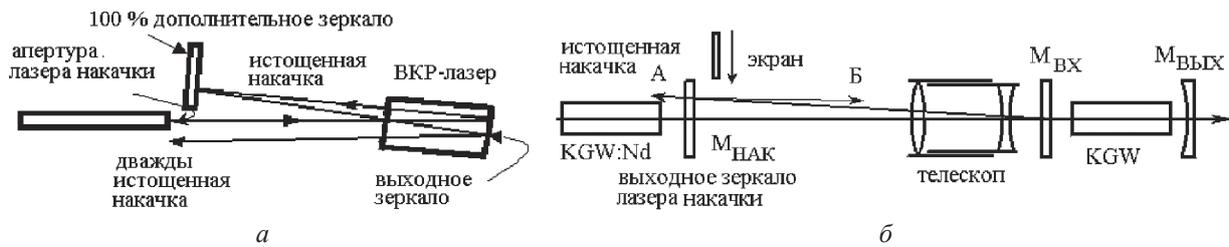


Рис. 1. Распространение основного лазерного излучения при возвращении истощенной накачки в ВКР-лазер (а) и фрагмент схемы лазерного источника с повышенной энергией ВКР-импульса (б)

телескопа, расположенного перед ВКР-лазером окуляром в сторону зеркала $M_{\text{ВХ}}$. Линзы телескопа, просветленные на длине волны 1351 нм, имеют фокусные расстояния 15 и $-5,573$ см. В эксперименте расстояние между выходным зеркалом $M_{\text{НАК}}$ KGW:Nd-лазера накачки и входным зеркалом ВКР-лазера $M_{\text{ВХ}}$ составляло $L \sim 90$ см.

Зеркала ВКР-лазера и линзы телескопа, допускающие расстройку, располагались следующим образом: во-первых, пучок накачки в ВКР-лазере сужался настолько, что обеспечивал высокий КПД ВКР-генерации; во-вторых, выходящий из ВКР-лазера пучок истощенной накачки не попадал в KGW:Nd-элемент (рис. 1, б, точка А) и имел на выходном зеркале $M_{\text{НАК}}$ поперечный размер, соизмеримый с размером сечения выходного пучка KGW:Nd-лазера; в-третьих, отраженное от зеркала $M_{\text{НАК}}$ излучение истощенной накачки вновь попадало в ВКР-лазер в зону генерации. Работа ВКР-лазера в режиме только однократного истощения накачки обеспечивалась установкой экрана, предотвращающего попадание выходящего из ВКР-лазера пучка на зеркало $M_{\text{НАК}}$.

В ВКР-лазере использовался кристалл KGW b -среза длиной 50 мм и диаметром 5 мм. Торцы кристалла имели просветляющие покрытия для длин волн 1300–1600 нм. Лазер был исследован при геометриях возбуждения $E \parallel N_g$ и $E \parallel N_m$, переход между которыми осуществлялся поворотом кристалла KGW на 90° вокруг своей оси. В том случае, когда электрический вектор излучения накачки E параллелен оси оптической индикатрисы N_g , наиболее сильной в кристалле KGW является фоновая мода с частотой 767 см^{-1} [9]. При $\lambda_{\text{НАК}} = 1351$ нм данная мода обеспечивала генерацию первой стоксовой компоненты на $\lambda_{\text{1St}} = 1507$ нм. Для этой рабочей длины волны коэффициент отражения выходного зеркала ВКР-лазера равнялся 50 %. Радиус кривизны зеркала $M_{\text{ВЫХ}}$ составлял $r_{\text{ВЫХ}} = 312$ мм. При $E \parallel N_g$ ВКР-генерация с участием более слабой линии со сдвигом частоты 901 см^{-1} ($\lambda_{\text{1St}} = 1538$ нм) не наблюдалась, поскольку в данной спектральной области коэффициент отражения выходного зеркала $M_{\text{ВЫХ}}$ равнялся 5 %.

Геометрия накачки $E \parallel N_m$ обеспечивает в ВКР-лазере единственный стоксов сдвиг частоты 901 см^{-1} [9]. В этом случае в ВКР-лазере использовалось выходное зеркало, имеющее на длине волны 1538 нм коэффициент отражения 49 %. Радиус кривизны данного зеркала составлял $r_{\text{ВЫХ}} = 502$ мм. Плоские поверхности подложек выходных зеркал имели просветляющие покрытия для длин волн первой стоксовой компоненты. Во всех экспериментах в ВКР-лазере применялось одно входное плоское зеркало, коэффициент отражения которого в спектральном диапазоне 1500–1600 нм был близок к 100 %. Вторая сторона подложки входного зеркала была просветлена для длины волны 1351 нм. Длина резонатора равнялась 56 мм.

Измерение энергии импульсов проводилось при помощи детектора PE50BV. Для записи осциллограмм излучения использовался цифровой осциллограф Tektronix 3052B и «быстрые» InGaAs $p-i-n$ фотодиоды. В экспериментах регистрировались интегральные импульсы, т. е. на вход фотоприемника попадало излучение со всего поперечного сечения пучка. Энергия второй стоксовой компоненты измерялась с помощью спектроделителя, полностью отражающего излучение первой стоксовой компоненты и частично пропускающего излучение второй. Энергия первой стоксовой компоненты определялась как разность между полной энергией излучения и энергией второй стоксовой компоненты (измеренное значение, деленное на коэффициент пропускания спектроделителя). Пространственные распределения плотности мощности в выходном пучке регистрировались ПЗС-камерой BeamON-1550 (DUMA OPTRONICS LTD).

Результаты и их обсуждение. Для геометрии возбуждения $E \parallel N_m$ энергетические характеристики ВКР-излучения при наличии и отсутствии отражения истощенной накачки от выходного зеркала КGW:Nd-лазера приведены на рис. 2, а (зависимости 1–3 и 1'–3' соответственно). При построении зависимостей была использована шкала энергий импульса КGW:Nd-лазера. Отражение истощенной накачки от зеркала $M_{\text{вых}}$ увеличивает интенсивность основного лазерного излучения в ВКР-лазере. Это обстоятельство способствует снижению порога ВКР-генерации с 11,7 до 7,5 мДж. Кроме того, повторное возвращение истощенной накачки в ВКР-лазер приводит к увеличению полной энергии ВКР-импульса $E_{\text{вкр}}$ и, соответственно, энергий первой ($E_{1\text{ст}}$) и второй ($E_{2\text{ст}}$) стоксовых компонент. При максимальной энергии импульса накачки $E_{\text{нак}} \sim 32$ мДж предложенный метод позволил повысить общую энергию ВКР-импульса с 11,3 до 14,7 мДж, что соответствует увеличению КПД генерации на 10,6 %. При этом энергии $E_{1\text{ст}}$ и $E_{2\text{ст}}$ возросли с 10,5 до 13,3 и с 0,8 до 1,4 мДж соответственно.

Аналогичная ситуация наблюдалась и в случае геометрии накачки $E \parallel N_g$. При наличии на пути истощенной накачки экрана ВКР-генерация при $E_{\text{нак}} \sim 32$ мДж характеризовалась значениями энергий $E_{\text{вкр}} = 13,5$ мДж и $E_{1\text{ст}} = 11,7$ мДж, а максимальный КПД генерации равнялся 42,2 % (рис. 2, б, зависимость 1). При повторном возвращении излучения истощенной накачки измерения энергии дали значения $E_{\text{вкр}} = 17$ мДж и $E_{1\text{ст}} = 14,6$ мДж, т. е. максимальный КПД ВКР-генерации вырос почти на 11 % и составил 53,1 % (рис. 2, б, зависимость 2). Несмотря на несколько меньшее расчетное значение коэффициента g стационарного ВКР-усиления для ориентации $E \parallel N_g$ [9], наблюдаемая эффективность ВКР-генерации для данной ориентации оказалась выше, чем для ориентации $E \parallel N_m$ (рис. 2, б, зависимости 3 и 4). Это объясняется существенным различием радиусов кривизны выходного зеркала ВКР-лазера при генерации на длинах волн 1,507 и 1,538 мкм. Расчеты на основе закона $ABCD$ с учетом геометрии эксперимента и параметров пучка КGW:Nd-лазера накачки показали, что при $r_{\text{вых}} = 502$ мм ($\lambda_{1\text{ст}} = 1538$ нм) диаметр пучка при обходе излучением накачки ВКР-резонатора изменялся не более чем на 5 %, достигая своего максимума на выходном зеркале ВКР-лазера. При этом диаметры пучка на входе и выходе из ВКР-кристалла были практически идентичными. В случае $r_{\text{вых}} = 312$ мм диаметр пучка накачки при повторном прохождении кристалла КGW уменьшался в большей степени, и, таким образом, средняя интенсивность накачки $I_{\text{н}}^{\text{cp}}$ при обходе резонатора и, соответственно, усиление в ВКР-лазере (равное $\exp(g I_{\text{н}}^{\text{cp}} l_{\text{КGW}})$, где $l_{\text{КGW}}$ – длина кристалла) были выше, чем в случае $r_{\text{вых}} = 502$ мм.

При повторном возвращении истощенной накачки в схеме, приведенной на рис. 1, б, интенсивность накачки на входе в ВКР-лазер в момент времени t равна $I_{\text{нак}}(t) + 0,7 I_{\text{иснак}}(t - 2L/c)$, где

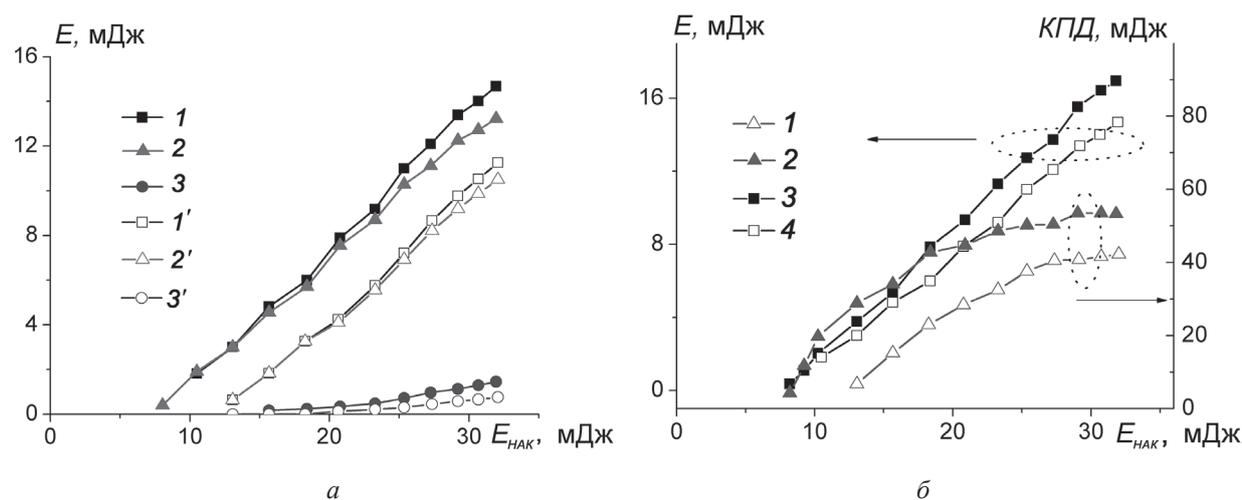
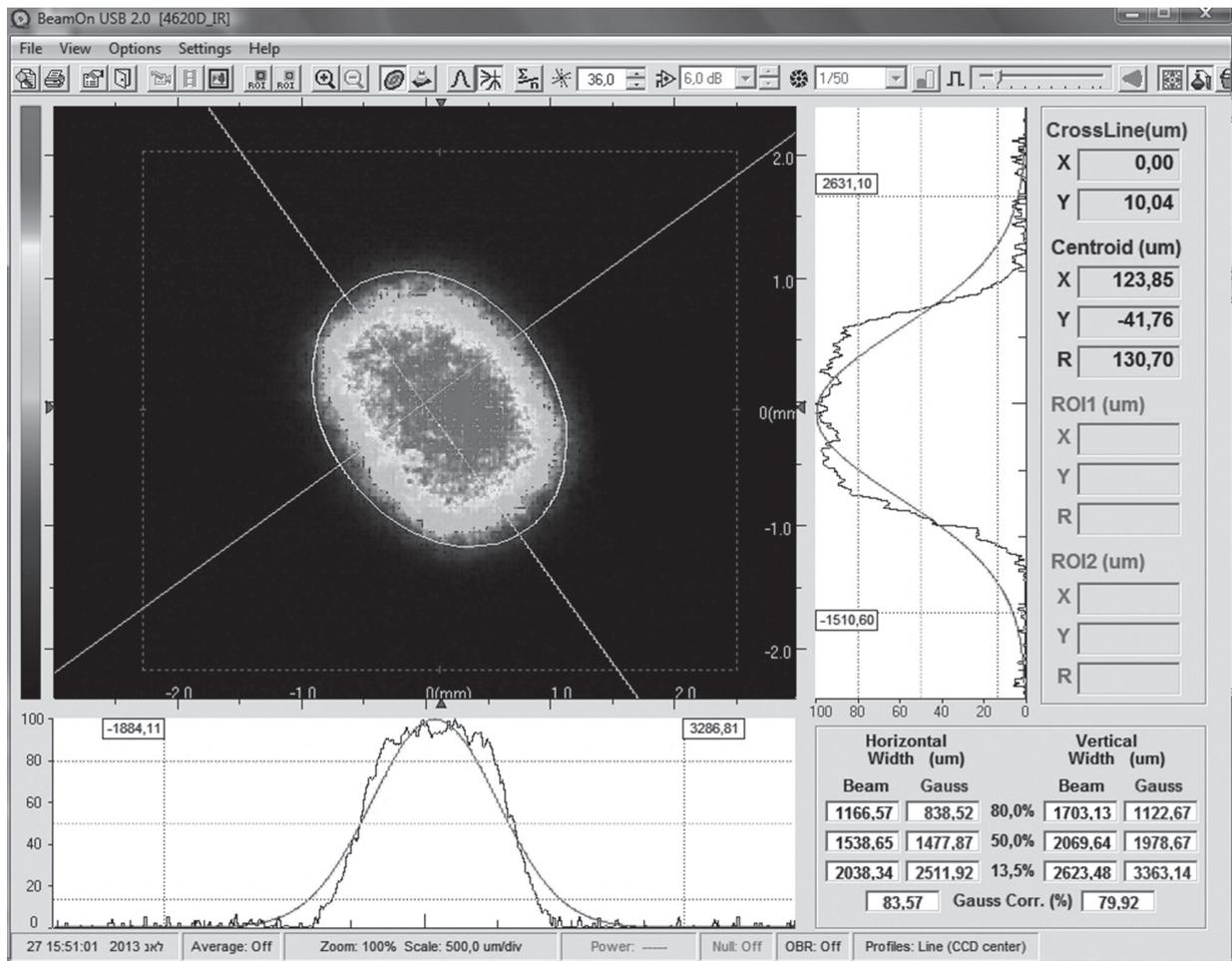


Рис. 2. Зависимости общих энергий ВКР-импульса (I , I') а также энергий первых (2, 2') и вторых (3, 3') стоксовых компонент от энергии импульса КGW:Nd-лазера при наличии (1–3) и отсутствии (1'–3') повторного возвращения истощенной накачки (а) и зависимости КПД ВКР-генерации при отсутствии (1) и наличии (2) повторного возвращения истощенной накачки и общих энергий ВКР-импульсов при возвращении истощенной истощенности накачки в геометриях $E \parallel N_g$ (3) и $E \parallel N_m$ (4) от энергии импульса КGW:Nd-лазера (б)



a

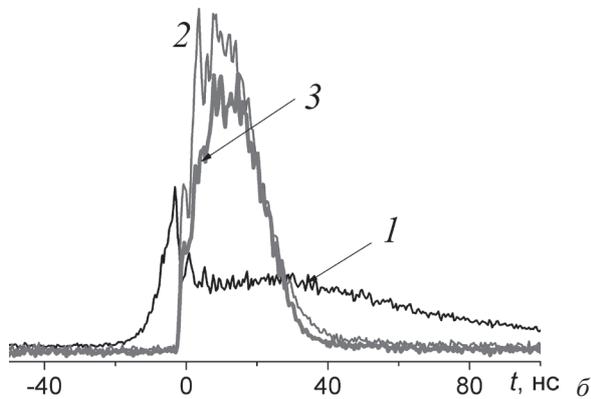


Рис. 3. Осциллограммы импульса истощенной накачки в точке А на рис 1, а при наличии ее отражения от зеркала $M_{\text{нак}}$ (1) и импульсов первой стоксовой компоненты при наличии (2) и отсутствии (3) повторного возвращения истощенной накачки в ВКР-лазер (б) и пространственное распределение интенсивности пучка ВКР-лазера в ближнем поле при накачке в геометрии $E \parallel N_m$ (а) с повторным возвращением истощенной накачки

$I_{\text{нак}}(t)$ – интенсивность импульса KGW:Nd-лазера, $I_{\text{иснак}}$ – интенсивность истощенной накачки, вышедшей из резонатора ВКР-лазера в более ранний момент времени. На рис. 3, б представлена осциллограмма импульса истощенной накачки I , зарегистрированная с использованием излучения в точке А, и записанная синхронно с ней осциллограмма импульса первой стоксовой компоненты 2. Эти осциллограммы относятся к случаю, когда накачка после первого акта истощения повторно возвращалась в ВКР-лазер. Можно видеть, что до момента возникновения ВКР-генерации нарастание мощности лазерного излучения на $\lambda = 1351$ нм занимает ~ 15 нс. При $L \sim 90$ см этот временной интервал в несколько раз превышает время обхода излучением накачки, вышедшим из ВКР-лазера, промежутка между зеркалами $M_{\text{вх}}$ и $M_{\text{нак}}$. Следовательно, дополнительное отражение накачки от выходного зеркала KGW:Nd-лазера способно увеличивать

ее мощность в ВКР-лазере еще до момента возбуждения вынужденного комбинационного рассеяния, что, как было показано выше, приводит к снижению порога ВКР-генерации.

При регистрации импульсов первой стоксовой компоненты использовалось ВКР-излучение, прошедшее через соответствующий интерференционный фильтр. Помимо огибающей импульса 2 на рис. 3, б представлена огибающая ВКР-импульса 3, генерируемого в режиме без возвращения истощенной накачки. Провалы интенсивности на переднем фронте и в области вершины импульсов указывают на присутствие в ВКР-генерации второй стоксовой компоненты. Длительности импульсов (FWHM) первой стоксовой компоненты составляют ~ 20 нс и практически соответствуют длительности импульса лазера накачки, что указывает на внрезонаторный характер ВКР-преобразования при обоих способах использования истощенной накачки. Следует отметить, что положение огибающей импульса 3 на временной шкале выбрано произвольно. Реально, в связи с более высоким порогом ВКР-генерации при однократном истощении накачки, начало развития ВКР-импульса 3 в пределах импульса накачки является более поздним, чем импульса 2.

Исследования показали, что при энергии питания лампы накачки ~ 10 Дж выходной пучок KGW:Nd-лазера является эллиптическим, вследствие чего пучок первой стоксовой компоненты также является эллиптическим. Для ближнего поля (на расстоянии 11 см от выходного зеркала $M_{\text{вых}}$) двумерное распределение плотности энергии в пучке первой стоксовой компоненты с длиной волны 1538 нм и одномерные распределения вдоль осей максимального и минимального размеров пучка приведены на рис. 3, а. Как видно, измеренные распределения характеризуются наличием плоской вершины (flat-top) и имеют невысокое качество аппроксимации функцией Гаусса. Эллиптическое распределение плотности энергии наблюдается и в дальней волновой зоне – задней фокальной плоскости собирающей линзы. Эллиптичность распределения составляет 0,68. Расходимость стоксова излучения вдоль малой и большой осей эллипса, в пределах которого сосредоточено 86,5 % полной энергии пучка, равняется 9 и 13,4 мрад соответственно. Необходимо отметить, что здесь указана внутррезонаторная расходимость пучка, рассчитанная из реальной расходимости (несколько большей из-за действия подложки выходного зеркала как рассеивающей линзы) с использованием формулы (5.26) из [10]. Практически аналогичная расходимость стоксова пучка наблюдалась и при геометрии накачки $E \parallel N_g$. Указанная расходимость стоксова пучка означает, что ВКР-генерация являлась многомодовой.

Заключение. Таким образом, в случае устранения обратной оптической связи между лазером накачки и внрезонаторным ВКР-лазером с двухпроходным режимом накачки путем наклона оптической оси резонатора ВКР-лазера относительно оси пучка накачки, энергия стоксова излучения может быть увеличена посредством повторного возврата истощенной накачки (ход которой не совпадает с путем неистощенной накачки) в зону ВКР-генерации. Повторный возврат истощенной накачки эффективен, если время обхода излучением промежутка между лазерами меньше длительности импульса накачки. Предлагаемый метод увеличения энергии стоксовых импульсов продемонстрирован на примере безопасных для глаз внрезонаторных многомодовых ВКР-лазеров на кристалле KGW, излучающих первую стоксову компоненту на длинах волн 1507 и 1538 нм при накачке KGW:Nd-лазером с рабочим переходом ${}^4F_{3/2} \rightarrow {}^4I_{13/2}$ в геометриях $E \parallel N_g$ и $E \parallel N_m$ соответственно. При повторном возврате с помощью выходного зеркала KGW:Nd-лазера в область ВКР-генерации 70 % истощенной накачки энергии импульсов первых стоксовых компонент и, соответственно, КПД генерации ВКР-лазеров возросли примерно на 11 %. В случае геометрии возбуждения $E \parallel N_g$, при которой средняя интенсивность излучения накачки при обходе резонатора из-за меньшего радиуса кривизны выходного зеркала была несколько выше, чем в случае $E \parallel N_m$, полная энергия импульса ВКР-лазера при энергии импульса накачки ~ 32 мДж составила 17 мДж. При этом энергия первой стоксовой компоненты равнялась 14,6 мДж. Длительность стоксовых импульсов (~ 20 нс), сравнимая с длительностью импульса накачки, осталась такой же, как и при ВКР-генерации без повторного возвращения истощенной накачки, что наглядно свидетельствует о внрезонаторном расположении ВКР-лазеров. По нашему мнению, эффективное действие предлагаемого метода в случае ВКР-лазера обусловлено тем, что процесс ВКР не требует выполнения условий фазового синхронизма.

Список использованной литературы

1. Generation of 1.5- μm radiation through intracavity solid-state Raman shifting in $\text{Ba}(\text{NO}_3)_2$ nonlinear crystals / J. T. Murray [et al.] // *Opt. Lett.* – 1995 – Vol. 20. – P. 1017–1019.
2. Stimulated Raman Scattering Laser Oscillation around 1.6 μm Carbon Dioxide Absorption Line / D. Sakaizawa [et al.] // *Jpn. J. Appl. Phys.* – 2008. – Vol. 47. – P. 1612–1614.
3. High-efficiency eye-safe intracavity Raman laser at 1531 nm with SrWO_4 crystal / Y. X. Fan [et al.] // *Appl. Phys. B.* – 2008. – Vol. 93. – P. 327–330.
4. Eye-safe actively Q-switched diode-pumped lasers with Intracavity Raman conversion in YVO_4 , $\text{KGd}(\text{WO}_4)_2$, PbWO_4 , and $\text{Ba}(\text{NO}_3)_2$ crystals / V. I. Dashkevich [et al.] // *Opt. Commun.* – 2015. – Vol. 35. – P. 11–8.
5. Zverev, P. G. Stimulated Raman scattering of laser radiation in Raman crystals / P. G. Zverev, T. T. Basiev, A. M. Prokhorov // *Opt. Mater.* – 1999. – Vol. 11. – P. 335–352.
6. Dashkevich, V. I. Ring solid-state laser at 1538 nm / V. I. Dashkevich, V. A. Orlovich // *Laser Phys. Lett.* – 2011. – Vol. 8, no 9. – P. 661–667.
7. SRS Transformation of the Radiation of a Self-Pumped Phase-Conjugate Laser / T. T. Basiev [et al.] // *Laser Phys.* – 2003. – Vol. 13. – P. 1013–1016.
8. High average power generation in barium nitrate Raman laser / V. A. Lisinetskii [et al.] // *Appl. Phys. B.* – 2010. – Vol. 99. – P. 127–134.
9. Мочалов, И. В. Нелинейная оптика лазерного кристалла калий-гадолиниевого вольфрамата, активированного неодимом $\text{KGd}(\text{WO}_4)_2:\text{Nd}^{3+}$ / И. В. Мочалов // *Оптич. журн.* – 1995. – № 11. – С. 4–15.
10. Hodson, N. *Laser Resonators and Beam Propagation: Fundamentals, Advanced Concepts and Applications* / N. Hodson, H. Weber. – 2 ed. – USA: Springer, 2005.

Поступила в редакцию 07.07.2016

УДК 539.21;535.341;546.22/24

В. Л. ШАПОШНИКОВ, А. В. КРИВОШЕЕВА, В. Е. БОРИСЕНКО

РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОННЫХ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ЗОН И ОПТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ СУЛЬФИДОВ ОЛОВА

*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь,
e-mail: victor.shaposhnikov@gmail.com, anna@nano.bsuir.edu.by, borisenko@bsuir.by*

Теоретическим моделированием установлены зонная структура и оптические свойства различных по стехиометрическому составу и кристаллической решетке фаз сульфида олова. Показано, что все они являются непрямозонными полупроводниками с шириной запрещенной зоны от 0,17 до 2,4 эВ. Перспективным материалом для применения в солнечной энергетике представляется SnS в кубической и орторомбической фазах с шириной запрещенной зоны 1,0–1,5 эВ и коэффициентом поглощения в видимой области спектра более 10^5 см^{-1} .

Ключевые слова: сульфид олова, зонная структура, коэффициент оптического поглощения, солнечный элемент.

V. L. SHAPOSHNIKOV, A. V. KRIVOSHEEVA, V. E. BORISENKO

CALCULATION OF ELECTRON ENERGY BANDS AND OPTICAL PARAMETERS OF TIN SULFIDES

*Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Belarus,
e-mail: victor.shaposhnikov@gmail.com, anna@nano.bsuir.edu.by, borisenko@bsuir.by*

The electron energy band structure and optical properties of various phases of tin sulfide were theoretically estimated by computer simulation. All the investigated materials were found to be indirect-gap semiconductors with a band gap ranging from 0.17 to 2.4 eV. The band gap in the range of 1.0–1.5 eV and the absorption coefficient near the fundamental absorption edge of more than 10^5 cm^{-1} in the cubic and orthorhombic phases of tin sulfide with a stoichiometric composition of SnS make them promising for solar energy conversion.

Keywords: tin sulfide, band structure, absorption coefficient, solar cell.

Введение. Одним из актуальных на сегодняшний день направлений поиска и исследования возобновляемых источников энергии является солнечная энергетика. Солнечный элемент вырабатывает электроэнергию при освещении естественным или искусственным источником света [1]. Солнечный свет является богатейшим по своему ресурсу возобновляемым источником энергии, преобразование которой представляет собой одну из наиболее динамично развивающихся областей науки и техники.

Для производства тонкопленочных солнечных элементов используют различные полупроводниковые материалы, такие как $\text{Cu}(\text{In,Ga})\text{Se}_2$, CdTe , GaAs/Ge/GaInP и др. [2]. При этом некоторые материалы, обладая привлекательными электронными и оптическими свойствами, являются токсичными или дорогими, что делает конечное производство компонентов из них экономически невыгодным. Поэтому продолжается поиск и исследование новых материалов, особенно обладающих низкой себестоимостью и не оказывающих вредного воздействия на окружающую среду. В связи с этим в последнее время возрос интерес к соединениям на основе сульфида олова. Это вызвано дешевизной материалов, которая обусловлена широким распространением олова и серы в природе, а также малой токсичностью компонентов и технологических процессов их производства.

Сульфид олова относится к классу полупроводников $A^{IV}B^{VI}$ и в зависимости от условий формирования может существовать в нескольких фазах и иметь различный стехиометрический

состав от SnS до SnS₂ [3–9]. Установлено, что моносульфид олова (SnS) может кристаллизоваться в низкотемпературной α -фазе ($T < 870$ K) и высокотемпературной β -фазе ($T > 870$ K), которые имеют орторомбическую кристаллическую решетку. В тонких пленках сульфид олова может формировать кристаллы с кубической решеткой. Кроме того, существует дисульфид олова (SnS₂), имеющий гексагональную решетку, а также Sn₂S₃ с орторомбической решеткой. По имеющимся экспериментальным данным, ширина запрещенной зоны сульфида олова может варьироваться в пределах от 1,0 до 2,3 эВ, а коэффициент поглощения составляет величину порядка 10^4 – 10^5 см⁻¹ [3–10]. Однако влияние на эти свойства стехиометрии и типа кристаллической решетки остается невыясненным. Целью данной работы является установление энергетической зонной структуры и коэффициентов поглощения оптического излучения сульфидов олова в зависимости от их стехиометрии и кристаллической структуры. Основное внимание уделено SnS, Sn₂S₃, SnS₂.

Методика исследования. Нами исследованы следующие фазы сульфида олова: кубические фазы SnS (пространственные группы $Fm-3m$ и $F-43m$), орторомбические фазы α -SnS (пространственная группа $Pbnm$) и β -SnS (пространственная группа $Cmcm$), гексагональные фазы SnS₂ (пространственные группы P_3m1 и $P6_3/mmc$) и орторомбическая фаза Sn₂S₃ (пространственная группа $Pnma$) [3]. Полную оптимизацию кристаллической структуры исследуемых фаз проводили в рамках теории функционала плотности с помощью первопринципного метода псевдопотенциала (пакет VASP) с базисом на плоских волнах [11]. Для описания обменно-корреляционного взаимодействия использовали обобщенное градиентное приближение (ОГП) [12]. В результате были определены межатомные расстояния и постоянные кристаллических решеток, которые соответствуют минимальным силам, действующим на атомы. Эти данные использовались при моделировании энергетических электронных и оптических спектров исследуемых соединений. Расчеты плотностей электронных состояний и энергетических зонных структур, а также оптических спектров выполнялись с помощью метода линеаризованных присоединенных плоских волн (пакет WIEN2K [13]). Для уточнения величин энергетических зазоров было проведено моделирование с учетом многочастичного взаимодействия в рамках GW₀-приближения [14], а также применялся модифицированный обменный потенциал Беке – Джонсона (mBJ) [15]. В дальнейшем все зонные спектры и оптические свойства получены с применением mBJ-потенциала.

Результаты и их обсуждение. В результате проведенной полной оптимизации кристаллической структуры исследуемых соединений установлено, что наиболее энергетически выгодной является низкотемпературная α -фаза SnS (пространственная группа $Pbnm$), в то время как кубические фазы SnS (пространственные группы $Fm-3m$ и $F-43m$) имеют наименьшую вероятность формирования. Это подтверждается наличием в литературе небольшого числа работ по кубическим фазам SnS. Определены постоянные решетки, которые показали хорошую корреляцию с имеющимися экспериментальными данными. Особенно близкое совпадение было получено для орторомбической α - (пространственная группа $Pbnm$) и β -фаз (пространственная группа $Cmcm$), а также кубической фазы (пространственная группа $Fm-3m$). У гексагональных фаз SnS₂ (пространственные группы P_3m1 и $P6_3/mmc$) проведенный расчет переоценил постоянную решетку c на 15 %. Анализ межатомных расстояний показал, что максимальными длинами связей Sn-Sn и S-S обладает кубическая фаза (пространственная группа $F-43m$), а связей Sn-S – кубическая фаза (пространственная группа $Fm-3m$). Все остальные фазы имеют примерно одинаковые межатомные расстояния.

Расчет энергетических зонных спектров свидетельствует о том, что все исследованные соединения проявляют полупроводниковые свойства. Типичный вид энергетических зонных диаграмм и величины энергетических зазоров, рассчитанные в рамках различных приближений, представлены на рис. 1 и в таблице.

Расчеты показали, что все исследованные соединения являются непрямозонными полупроводниками. Для кубической фазы SnS (пространственная группа $F-43m$) максимум валентной зоны (МВЗ) расположен в точке W, а минимум зоны проводимости (МЗП) – в точке X. В низкотемпературной α -фазе SnS (пространственная группа $Pbnm$) МВЗ расположен в направлении Γ –X, а МЗП – примерно на середине отрезка Γ –Z. Отличительной чертой зонной структуры α -SnS является то, что ни максимум валентной зоны, ни минимум зоны проводимости не находятся

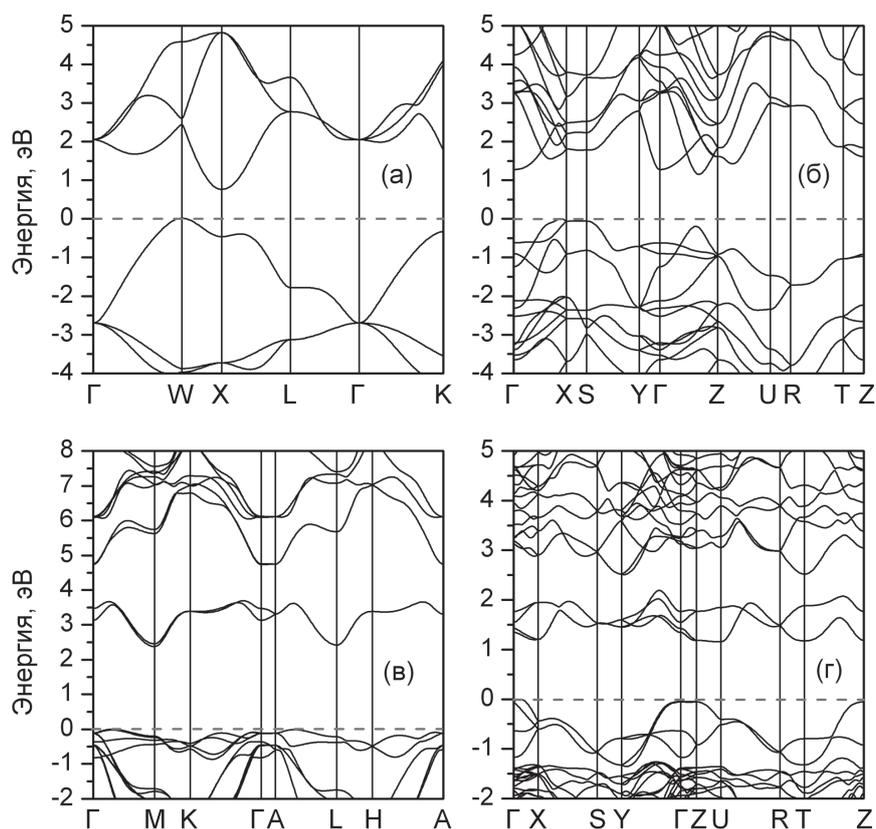


Рис. 1. Зонные структуры кубической фазы SnS (пространственная группа $F-43m$) (а), орторомбической фазы α -SnS (пространственная группа $Pbnm$) (б), гексагональной фазы SnS₂ (пространственная группа $P6_3/mmc$) (в) и орторомбической фазы Sn₂S₃ (пространственная группа $Pnma$) (г) вдоль направлений высокой симметрии соответствующих зон Бриллюэна; нуль на шкале энергий соответствует уровню Ферми

в точках высокой симметрии зоны Бриллюэна. В β -SnS (пространственная группа $Cmcm$) МВЗ расположен в направлении Γ -X, а МЗП – в точке Γ . Качественно спектры обеих орторомбических α - и β -фаз SnS подобны. Это связано с тем, что обе фазы обладают близкими значениями постоянных решеток и атомных позиций. Полученные зонные структуры для α - и β -фаз SnS хорошо согласуются с результатами теоретической работы [10]. Зонные спектры гексагональных фаз SnS₂ подобны между собой, при этом гексагональная фаза (пространственная группа $P6_3/mmc$) характеризуется наличием большего числа зон в одном и том же энергетическом диапазоне. Обе фазы имеют по два МВЗ (в параллельных направлениях Γ -M и A-L) и МЗП (в точках M и L). Полученные значения энергетического зазора хорошо согласуются с экспериментальными данными, согласно которым ширина запрещенной зоны данного полупроводника лежит в пределах от 1,9 до 2,2 эВ. Орторомбическая фаза Sn₂S₃ (пространственная группа $Pnma$) характеризуется более сложной энергетической структурой. Максимум валентной зоны расположен на середине отрезка Γ -X, при этом верхние валентные зоны в направлении Γ -Z практически плоские и лежат

Ширина запрещенной зоны в различных фазах сульфида олова, рассчитанная в рамках приближений ОГП, GW_0 и mBJ-потенциала, в сравнении с экспериментальными данными, эВ

Соединение, фаза, пространственная группа	ОГП	mBJ	GW_0	Экспериментальные значения
SnS, кубическая, $Fm-3m$	0,132	0,172	0,83	–
SnS, кубическая, $F-43m$	0,194	0,761	0,60	1,1–1,8 [3–5]
α -SnS, орторомбическая, $Pbnm$	0,898	1,201	1,58	1,0–1,4 [5, 6]
β -SnS, орторомбическая, $Cmcm$	0,320	0,570	0,67	–
Sn ₂ S ₃ , гексагональная, $Pnma$	0,740	1,161	1,92	0,85–1,16 [9]
SnS ₂ , гексагональная, P_3m1	1,537	2,414	2,88	2,1–2,2 [3]
SnS ₂ , гексагональная, $P6_3/mmc$	1,497	2,383	2,90	1,6–2,9 [7, 8]

ниже МВЗ всего на 50 мэВ. МЗП расположен в точке U, хотя энергия в точках Z, T и X всего на несколько десятков миллиэлектронвольт больше. Кроме того, можно отметить отдельную группу электронных состояний в зоне проводимости в диапазоне от 1,2 до 2,2 эВ, которая отделена от остальной зоны проводимости небольшим зазором в 0,3 эВ.

Анализ полученных результатов показал, что для всех исследованных соединений ОГП существенно недооценивает величину энергетических зазоров, в то время как значения, полученные в рамках GW_0 и mBJ, оказываются ближе к имеющимся экспериментальным данным.

Несмотря на то что спектры полных и парциальных плотностей электронных состояний (ПЭС) для различных фаз сульфида олова отличаются друг от друга, можно проследить некоторые закономерности. Для примера, на рис. 2 представлены спектры ПЭС для α -SnS и β -SnS. Валентную зону в диапазоне от -8 до 0 эВ можно разделить на несколько областей. Анализ орбитального состава волновых функций показал, что низколежащие состояния валентной зоны, расположенные в области от -8 до -6 эВ, образуются за счет гибридизации электронных состояний Sn- s и S- p . Во второй области (от -6 до -2 эВ) преобладают p -состояния атомов серы с небольшими вкладами p -состояний атомов олова. Третья область (от -2 до 0 эВ) обусловлена p -состояниями S с вкладами s - и p -состояний Sn. Зона проводимости вблизи уровня Ферми формируется в основном за счет p -состояний Sn с некоторой примесью состояний S- p и Sn- s . Парциальные ПЭС для других фаз отличаются, главным образом, изменением вкладов отдельных состояний. Так, для α -SnS и SnS₂ существенными оказываются вклады d -состояний атомов Sn вблизи уровня Ферми, а в кубических фазах возрастают вклады d -состояний атомов S.

Анализ оптических свойств сульфида олова проводился на основании расчетов комплексной диэлектрической функции. Мнимая (ϵ_2) и действительная (ϵ_1) части диэлектрической функции в зависимости от энергии фотонов для двух орторомбических фаз сульфида олова представлены

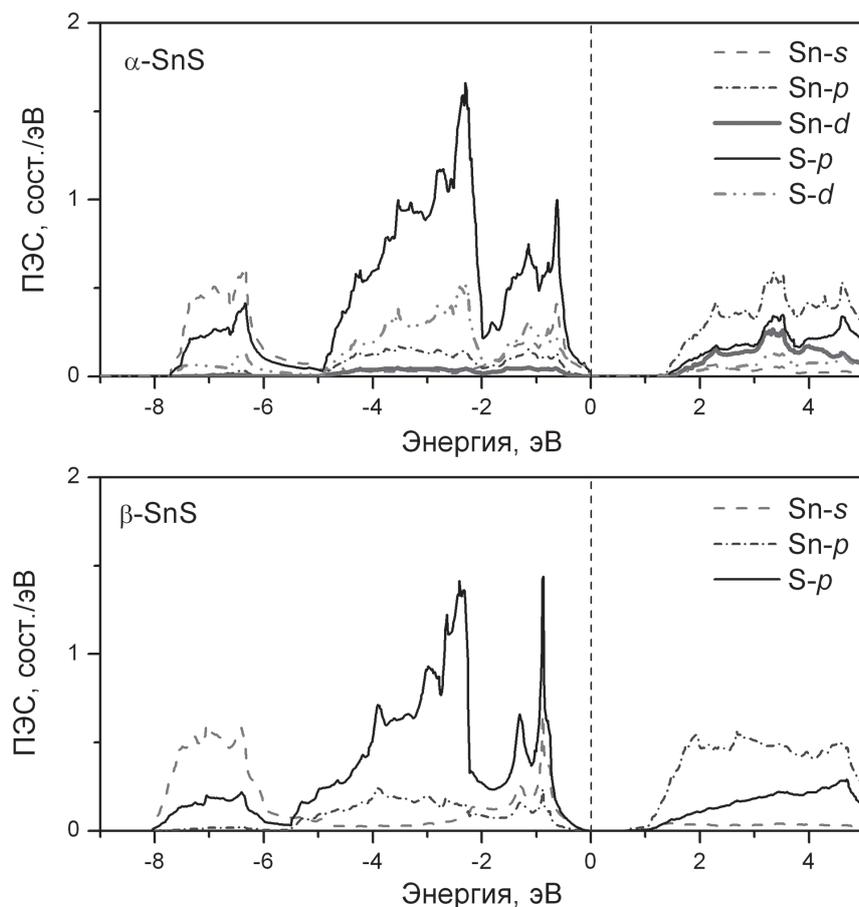


Рис. 2. Парциальные плотности электронных состояний α -SnS и β -SnS; нуль на шкале энергий соответствует уровню Ферми

на рис. 3. Спектры рассчитаны вдоль основных направлений поляризации света с учетом симметрии кристалла при помощи mBJ-потенциала.

Полученные спектры характеризуются анизотропией для направлений поляризации света $E||a$ и $E||c$ по сравнению с $E||b$ для обеих исследованных орторомбических фаз SnS. Рост значений ϵ_2 для β -SnS начинается при энергии 1,3 эВ (ширина запрещенной зоны составляет 0,57 эВ), а для α -SnS – 1,4 эВ (ширина запрещенной зоны 1,2 эВ). Таким образом, имеют место переходы между более удаленными от уровня Ферми зонами. Это объясняется тем, что обе фазы являются непрямозонными полупроводниками без четко выраженного прямого перехода. Значения статической диэлектрической проницаемости ϵ_0 для двух фаз составили от 10 до 15 в зависимости от направления поляризации света.

Поскольку практически во всех рассмотренных фазах сульфид олова является непрямозонным материалом без четко выраженного прямого перехода, имеющего высокую вероятность, его применение для создания светоизлучающих элементов представляется малоэффективным. Однако некоторые из рассмотренных фаз обладают достаточной величиной энергетического зазора. Для оценки использования данных материалов в качестве светопоглощающих структур (солнечных элементов) были проведены расчеты коэффициента оптического поглощения.

На рис. 4 представлены спектры поглощения различных фаз сульфидов олова, усредненные по всем направлениям поляризации света, в сравнении с теоретически рассчитанным спектром GaAs. Очевидно, что гексагональная фаза SnS_2 , имеющая достаточно большую ширину запрещенной зоны, и орторомбическая фаза Sn_2S_3 обладают низкими значениями коэффициента поглощения в интервале от 1,5 до 3,5 эВ, который соответствует диапазону видимого излучения.

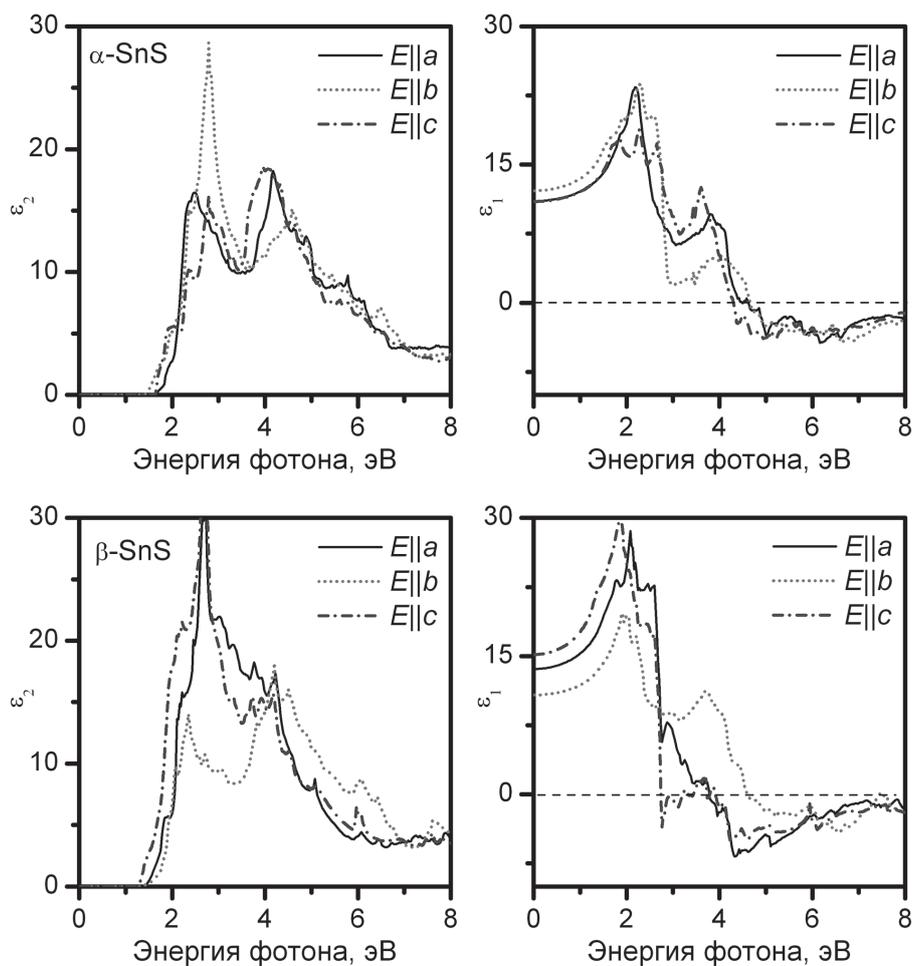


Рис. 3. Мнимая (ϵ_2) и действительная (ϵ_1) части диэлектрической функции α -SnS и β -SnS при различных направлениях поляризации света

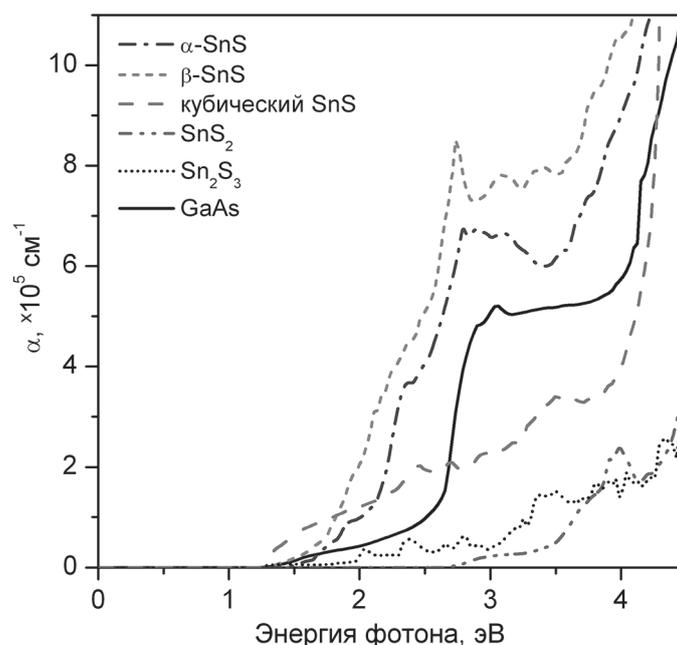


Рис. 4. Зависимость усредненного коэффициента оптического поглощения различных фаз сульфида олова от энергии фотонов

В то же время кубическая фаза и обе орторомбические α - и β -фазы SnS имеют значения коэффициента оптического поглощения вблизи края собственного поглощения более 10^5 см^{-1} , что сравнимо со значениями коэффициента поглощения для арсенида галлия, широко применяемого для создания высокоэффективных солнечных элементов. Таким образом, можно предположить, что сульфид олова, который не содержит дорогостоящих и токсичных составляющих, может быть использован для создания солнечных элементов.

Заключение. В результате проведенного теоретического моделирования электронных и оптических свойств различных фаз сульфида олова установлено, что в структурном отношении орторомбическая фаза SnS является наиболее стабильной. Выявлено, что все исследованные соединения (SnS с кубической и орторомбическими кристаллическими решетками, Sn_2S_3 и SnS_2 с гексагональной кристаллической решеткой) являются непрямозонными полупроводниками с шириной запрещенной зоны в диапазоне от 0,17 до 2,4 эВ. Сульфиды олова со стехиометрическим составом SnS в кубической фазе (пространственная группа $F-43m$) и орторомбической α -фазе (пространственная группа $Pbnm$) имеют оптимальную для поглощения солнечного света ширину запрещенной зоны (1,0–1,5 эВ), а также значения коэффициента поглощения вблизи края собственного поглощения более 10^5 см^{-1} , сравнимые со значениями коэффициента поглощения для кремния и арсенида галлия, которые широко используются для создания солнечных элементов. Эти сульфиды олова наиболее перспективны для солнечной энергетики.

Работа выполнена в рамках задания 2.1.02 ГПНИ «Фотоника, опто- и микроэлектроника».

Список использованной литературы

1. Luque, A. Will we exceed 50% efficiency in photovoltaics? / A. Luque // J. Appl. Phys. – 2011. – Vol. 110. – P. 031301.
2. High-efficient low-cost photovoltaics: recent developments / eds.: V. Petrova-Koch, R. Hezel, A. Goetzberger. – Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. – Vol. 140.
3. Madelung, O. Semiconductors: data handbook / O. Madelung. – Berlin; Heidelberg: Springer, 2004.
4. Avellaneda, D. Polymorphic tin sulfide thin films of zinc blende and orthorhombic structures by chemical deposition / D. Avellaneda, M. T. S. Nair, P. K. Nair // J. Electrochem. Soc. – 2008. – Vol. 155. – P. D517–D525.
5. Gao, Ch. Preparation and properties of zinc blende and orthorhombic SnS films by chemical bath deposition / Ch. Gao, H. Shen, L. Sun // Appl. Surf. Sci. – 2011. – Vol. 257. – P. 6750–6755.
6. Optical properties of thermally evaporated SnS thin films / M. M. El-Nahass [et al.] // Opt. Mater. – 2002. – Vol. 20, N 3. – P. 159–170.

7. Morphological and thermal properties of β -SnS₂ sprayed thin films using Boubaker polynomials expansion / C. Khèlia [et al.] // J. Alloys Compd. – 2009. – Vol. 477. – P. 461–467.
8. Growth and characterization of tin disulfide (SnS₂) thin film deposited by successive ionic layer adsorption and reaction (SILAR) technique / N. G. Deshpande [et al.] // J. Alloys Compd. – 2007. – Vol. 436. – P. 421–426.
9. XRD, XPS and ¹¹⁹Sn NMR study of tin sulfides obtained by using chemical vapor transport methods / M. Cruz [et al.] // J. Solid State Chem. – 2003. – Vol. 175. – P. 359–365.
10. Electronic structure of SnS deduced from photoelectron spectra and band-structure calculations / A. R. H. F. Ettema [et al.] // Phys. Rev. B. – 1992. – Vol. 46. – P. 7363–7373.
11. *Kresse, G.* Efficient interactive schemes for ab initio total-energy calculations using a plane-wave basis set / G. Kresse, J. Furthmüller // Phys. Rev. B. – 1996. – Vol. 54, N 16. – P. 11169–11186.
12. *Perdew, J. P.* Generalized gradient approximation made simple / J. P. Perdew, K. Burke, M. Ernzerhof // Phys. Rev. Lett. – 1996. – Vol. 77, N 18. – P. 3865–3868.
13. WIEN2k, An augmented plane wave + local orbitals program for calculating crystal properties / P. Blaha [et al.]. – Karlheinz Schwarz, Techn. Universität Wien, Austria, 2001.
14. *Shishkin, M.* Implementation and performance of the frequency-dependent GW method within the PAW framework / M. Shishkin, G. Kresse // Phys. Rev. B. – 2006. – Vol. 74, N 3. – P. 035101.
15. *Tran, F.* Accurate band gaps of semiconductors and insulators with a semilocal exchange-correlation potential / Tran F., P. Blaha // Phys. Rev. Lett. – 2009. – Vol. 102, N 22. – P. 226401.

Поступила в редакцию 17.06.2016

UDC 535.21;535.3N

S. A. BATISHCHE¹, S. B. BUSHUK¹, V. A. PILIPENKO², H. A. TATUR¹, D. V. ZHYGULIN²

**FORMATION OF “BLACK” GOLD PARTICLES AT NANOSECOND
YAG:ND LASER FORTH HARMONIC (266 nm) ABLATION**

*¹B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus,
e-mail: batis@dragon.bas-net.by*

*²State Center “Belmicroanalysis” of JSC “Integral” – “Integral” Holding Managing Company, Minsk, Belarus,
e-mail: zhygulin@mail.ru*

The research results of UV 266 nm gold ablation are presented. It is shown that the deposit structure on the surface around ablation pits sharply depends on a pit depth. As the pit depth is increased, gold micro- and nanoparticles acquire a more developed surface structure and the surface around the pits gets deep black color – “black” gold appears. Some features and possible mechanisms of forming “black” gold structures at ablation over the 266 nm powerful nanosecond laser radiation range are also considered.

Keywords: ablation, YAG:Nd laser, absorption, threshold, “black” gold, nanoparticles.

С. А. БАТИЩЕ¹, С. Б. БУШУК¹, В. А. ПИЛИПЕНКО², Г. А. ТАТУР¹, Д. В. ЖИГУЛИН²

**ОБРАЗОВАНИЕ ЧАСТИЦ «ЧЕРНОГО» ЗОЛОТА ПРИ ЛАЗЕРНОЙ АБЛЯЦИИ
НАНОСЕКУНДНЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ ЧЕТВЕРТОЙ ГАРМОНИКИ YAG:ND-ЛАЗЕРА**

*¹Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь,
e-mail: batis@dragon.bas-net.by*

*²ГЦ «Белмикрoанализ» филиала НТЦ «Белмикросистемы» ОАО «Интеграл», Минск, Беларусь,
e-mail: zhygulin@mail.ru*

Представлены результаты исследования абляции золота УФ-излучением 266 нм. Показано, что структура депозита на поверхности вокруг абляционных лунок зависит от их глубины. При увеличении глубины лунки осажденные микро- и наночастицы золота приобретают более развитую поверхностную структуру, при этом поверхность вокруг лунок становится насыщенного черного цвета – появляется «черное» золото. Также рассмотрены некоторые особенности и возможные механизмы формирования структур «черного» золота при абляции мощным наносекундным лазерным излучением с длиной волны 266 нм.

Ключевые слова: абляция, YAG:Nd-лазер, поглощение, порог, «черное» золото.

Introduction. Nowadays “black” gold is a well-known contemporary material of wide use in different fields of science and technology. It may be used in production of dyes and layers absorbing light in a wide spectral range, infrared detectors, etc.

First, the formation of porous layers of black metals was demonstrated under their evaporation and deposition in the gas atmosphere within the pressure range up to 100 Pa [1]. Later, it was optimized for gold with different purposes, for example, for infrared detectors [2].

The UV laser treatment of porous layers of “black” gold thermally deposited in vacuum or in nitrogen atmosphere at 266 nm fourth-harmonic YAG:Nd radiation with fluencies of 1–250 mJ/cm² was shown to lead to structural and color changes of the layers [3]. As shown [4], under femtosecond laser ablation, black coatings of complex-structure pure gold are formed around ablation pits.

Nevertheless, there is a lack of investigations on “black” gold forming at ablation over the powerful nanosecond laser radiation range.

In this article it is shown that the deposit structure on the surface around ablation pits sharply depends on a pit depth. On increasing a pit depth, gold micro- and nanoparticles acquire a more developed surface structure and the surface around the pits gets deep black color – “black” gold appears. Some features and

possible mechanisms of forming “black” gold structures at ablation over the 266 nm powerful nanosecond laser radiation range are also considered.

Experimental. The UV 266 nm gold ablation investigations were carried out on a flat pure bank gold bar (purity 0.9999) with mat and smooth sides.

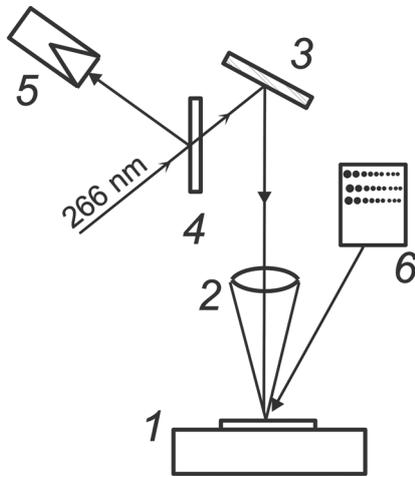


Fig. 1. Optical scheme of the laser ablation research setup: 1 – gold bar in a holder; 2 – focusing lens, $f = 150$ mm; 3 – deflecting mirror; 4 – reflecting quartz plate; 5 – energy meter; 6 – topology of pits on the gold bar

The optical scheme of the laser ablation research setup is shown in Fig. 1. The laser setup is described in detail in [5].

Ablation pits (Fig. 1) were regularly done in a line on a surface of a gold bar. In our experiments, the gold bar was moved in the focal plane of the lens. Pits were treated in air at room temperature by N focused pulses on one spot with UV radiation of the fourth-harmonic YAG:Nd laser (266 nm) with the pulse duration of about 10 ns and a repetition rate of 1 Hz. For each pit, the 266 nm laser pulse fluence F_0 in the pit center was determined from the experimentally measured energy E_{266} and the real laser beam distribution was close to the Gaussian distribution. In our experiments, the Gaussian radius w_0 was calculated for each energy laser beam at 266 nm. (For $w_0 F(w_0) = 1/e^2$). In these experiments, F_0 was ranged within 50–400 J/cm².

A confocal Zeiss LSM 510 laser scanning microscope was used for measuring the pit depth H . The measuring accuracy of the pit depth was about ± 3 μ m. Modified laser gold surface pictures were taken with a scanning electron microscope (SEM) SEM-4800 (Hitachi) with an X-ray spectrometer EDS Quantax-200 (Bruker) to carry out the element analysis. The optical spectra of reflected light of “black” gold samples in the range of 400–800 nm were taken using a micro-spectrophotometer MPV-SP (Leica). Time dependences of the intensity of the 266 nm laser beam incident and reflected from the gold surface were obtained using a high-speed Tektronix TDS 5104 B oscilloscope.

Results and discussion. Fig. 2 shows the typical dependences of the average thickness of the gold layer removed during one laser pulse $h_{ave} = H/N$ on H and H at N for $F_0 = 250$ J/cm² and 50 J/cm² ($w_0 = 0.16$ mm), respectively. For gold, the ablation threshold F_{thr} equals approx 30 J/cm².

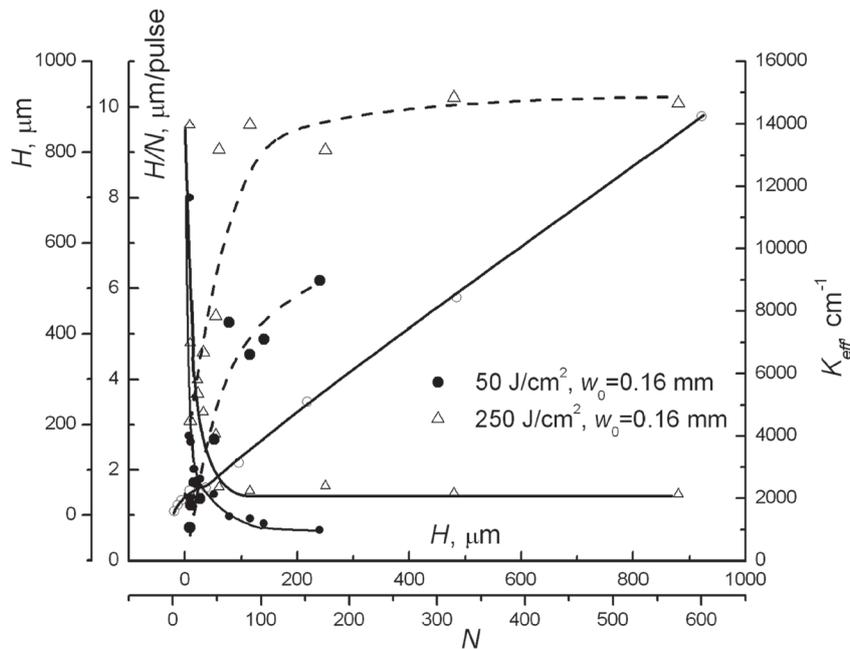


Fig. 2. Dependences $h_{ave} = H/N$ (solid) and $K_{eff}(H)$ (dash) on H and N for different F_0

Here, the H dependences of the efficient absorption coefficient of the ablated gold layer [6], which includes light scattering, incubation, and non-linear effects, are also shown:

$$K_{\text{eff}}(H) = (1/h_{\text{ave}}) \cdot \ln(F_0/F_{\text{thr}}). \quad (1)$$

It is seen in Fig. 2 that during the first laser pulse a gold layer of about 8–10 μm /pulse thickness h_{ave} is removed on the surface. As N is increased, h_{ave} sharply decreases and lies in the range of 0.5–3 μm /pulse for H deeper than 60–80 μm . $K_{\text{eff}}(H)$ is about 1000–2000 cm^{-1} for the first laser pulse, and sharply increases up to 10000–15000 cm^{-1} with growing H and saturates for $H > 80$ –100 μm .

The h_{ave} and $K_{\text{eff}}(H)$ data show that the process of gold laser ablation substantially changes with H . This allows one to assume that at ablation, an initial gold plasma temperature and, as a consequence, a pressure and a velocity of a moving plasma cloud at depths $H > 80$ –100 μm by the end of a laser pulse are higher than those at ablation near the gold surface. (It is necessary to emphasize that the results are not connected with changes in the laser beam profile due to the ablation pit depth, since in accordance with the measurements performed, F_0 is practically constant at a distance of ± 1.5 mm from the laser beam focusing point on the bar surface. All main effects on the ablation rate occur at the depths $H = 0$ –100 μm .)

For the first laser pulse, the gold plasma cloud velocity V_{gc} may be estimated from the expression $V_{\text{gc}} = (r_{\text{th}} - r_{\text{bnd}})/\Delta t$ [7], where r_{th} is the radius corresponding to a gold ablation threshold, r_{bnd} is the radius corresponding to a gold ablation pit boundary for the first laser pulse with a duration Δt . For gold, measurements show that for $F_0 = 250 \text{ J/cm}^2$ $V_{\text{gc}} \approx 3500 \text{ m/s}$.

It is found that the deposit structure on the surface around ablation pits also sharply depends on H . This is illustrated by Fig. 3 where the SEM photos show the dynamics of structural changes in gold deposits with H .

From Fig. 3 it is well seen that, as H is increased, gold particles acquire a more developed surface structure. With the depth increased, the surface around the pits gets deep black color – “black” gold appears. It must be recognized that the deposit structure changes with H well correlate with h_{ave} and $K_{\text{eff}}(H)$ changes with H .

The gold deposits formed during the first laser pulse (Fig. 3, *a*) at the pit depths of about 5–10 μm consist of smooth big particles of different shape with sizes within 0.5–10 μm and a lot of small drops with sizes of 150–500 nm. The surface of the gold bar around the pit gets a rough goldish tint.

In Fig. 3, *b*, at H of about 25–30 μm , the surface around a pit is covered with a dense layer of particles having sizes of 200–300 nm with the insertion of different-shape clusters that look like “sausages” consisting of the particles with sizes of 200–300 μm . In Fig. 3, *c*, at H of about 50–60 μm , the surface around a pit is mostly covered with a layer of different-shape clusters, whose shape is close to spherical, at the particle sizes of 500–1000 nm. Their surfaces are covered with 100–150 nm particles. In Fig. 3, *d*, at H of about 100 μm , on the surface around a pit there appear single different-shape 1–1.5 μm “coral like” structures. In Fig. 3, *e*, at H of 170–180 μm , the surface around a pit is mostly covered with different-shape 2–3 μm “coral like” structures. In Fig. 3, *f*, at H of about 300–400 μm , the surface around a pit is mostly covered with 2–4 μm “coral like” structures having a highly developed surface closely related to each other. In Fig. 3, *g*, at $H > 850 \mu\text{m}$, the surface around a pit is mostly covered with 5–15 μm “coral like” structures having a highly developed fantastically looking surface.

To understand the fact: if the formation of a deposit structure is associated with the processes occurring at the pit depth or if it is a result of summation a big number of ablated layers on the surface, a special experiment was conducted.

Fig. 3, *h* shows the SEM deposit structure for the ablation products taken at the pit depth $H \approx 640$ –750 μm with 40 laser pulses. In the experiment, the surface of the gold bar was initially covered with a piece of paper having a small hole about 1.5 mm in diameter, through which ablation with $N = 220$ ($H \approx 640 \mu\text{m}$) pulses was done. Black ablation products were deposited on the paper surface around the pit. Specially, it was controlled that products practically would not penetrate under the paper around the pit. The piece of paper was then removed and ablation with additional 40 pulses was completed (total number of pulses $N = 260$, $H \approx 750 \mu\text{m}$).

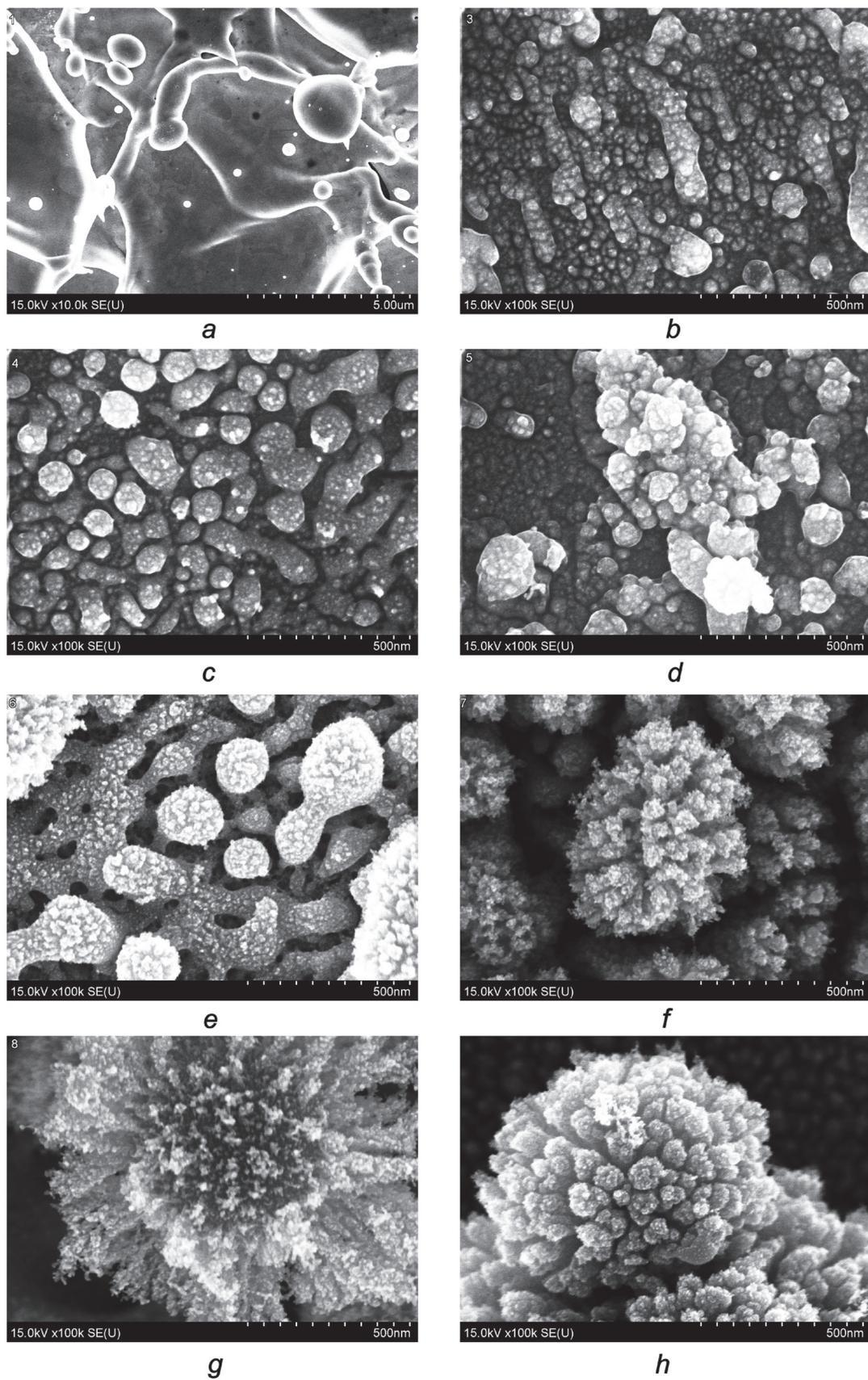


Fig. 3. Dynamics of structural changes in gold deposits with the ablation pit depth: *a* – *H* of about 5–10 μm , ($N = 1$); *b* – $H = 27 \mu\text{m}$ ($N = 10$); *c* – $H = 54 \mu\text{m}$ ($N = 18$); *d* – $H = 94 \mu\text{m}$ ($N = 40$); *e* – $H = 172 \mu\text{m}$ ($N = 73$); *f* – $H = 340 \mu\text{m}$ ($N = 154$); *g* – $H = 860 \mu\text{m}$ ($N = 307$); *h* – $H = 650\text{--}750 \mu\text{m}$ ($N = 40$)

The comparison of Fig. 3, *g* and 3, *h* allows a conclusion to be made that the deposit structure on the surface is practically the same in the both cases and drastically differs from the structure shown in Fig. 3, *d* for ablation with $N = 40$ pulses from the surface. The only difference is that the dense black layer is smaller. It allows one to conclude that the formation of a deposit structure is first connected with the processes occurring at the pit depth.

Measurements in the spectral range of 400–800 nm show that for a surface around deep and reach-through pits the back reflectance $R_g = 0$. The deposits on the surface around deep ablation pits represent “black” gold. The element analysis of deposit structures around pits shows that they consist of pure gold without any additional elements. Black color of gold deposits is most of all connected with a complicated nature of plasmon resonances [8–10] corresponding to the complex-structure of gold particles formed at big pit depths together with intense color saturation in media with a developed surface [11].

The dynamics of the gold deposit structure forming with H variations may be explained as follows. Under powerful laser radiation, gold ablation occurs explosively. At this process, melted, vapor and plasma components escape practically simultaneously. Due to a high pressure, hot gold plasma moves with high velocity in all possible directions at cooling during expansion. Laser light is absorbed by a gold plasma cloud, which causes a light inertial confinement and an additional pressing on the cloud.

As long as a pit depth is small, ablation products move in all possible directions, including those along the surface, thus forming a flat parapet around the pit. With a depth increased, the pit wall confinement acts on gold plasma, causing it to spread mostly in the direction perpendicular to the bar surface. As a result, the lateral performance of an ablated gold cloud reduces.

For the first laser pulse, gold plasma is not confined by pit walls and it is expanded without any hinder, and a maximum lateral performance of an ablated gold cloud during a laser pulse is realized, giving maximum h_{ave} (Fig. 2). In these conditions, smooth gold particles are mostly formed (Fig. 3, *a*).

As a result of cloud cooling during expanding, different-size clusters of gold atoms are formed. Gold nanoparticles are also deposited on the surface of melted particles, and unusual structures are being formed. When the pit depth is increased, the lateral performance of an ablated gold cloud during a laser pulse reduces. The cloud moves along the pit walls. The initially flat parapet around the pit grows in height, and finally a gold tube with an uneven edge appears. Each laser pulse increases the tube height, unless the moving gold nanoparticles are hot enough to adhere to the tube edge. As tube walls are being formed statistically and in a random way, their solidity at some height becomes small and they are perforated

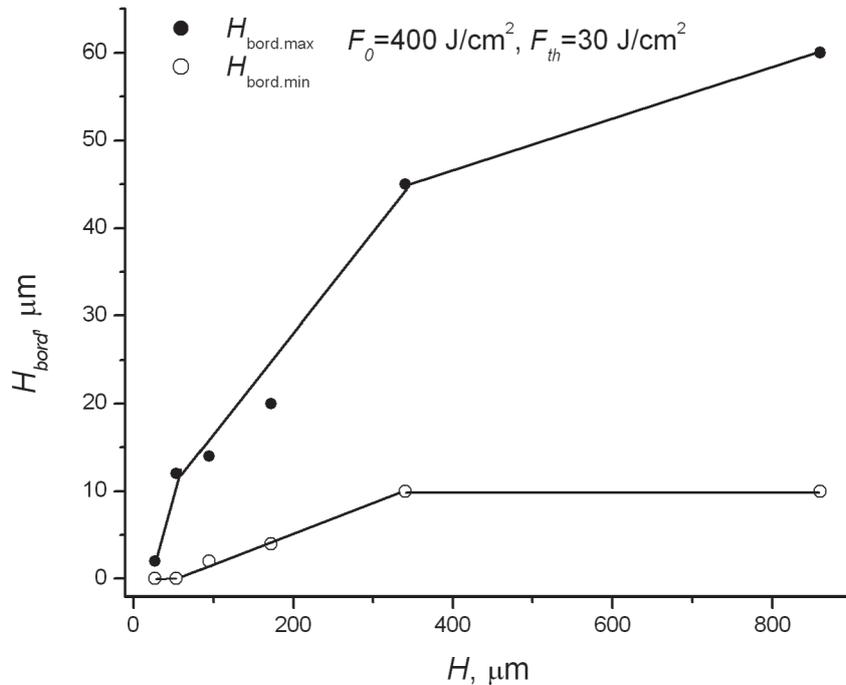


Fig. 4. Dependence of maximum and minimum tube heights around the pit on H

at some places; this leads to an uneven gold wall edge. Fig. 4 shows the dependence of maximum and minimum gold tube heights around the pit on H . It is seen that the maximum and minimum tube heights around the pit are saturated with H variations.

When $H + H_{\text{tube}}$ is increased, the lateral performance of an ablated gold cloud during a laser pulse reduces with a corresponding decrease in h_{ave} and increase in $K_{\text{eff}}(H)$. At $H > 80\text{--}100\ \mu\text{m}$, the tendency stops. It allows one to suppose that at these depths, a gold cloud reaches the tube edge by the end of a laser pulse. This allows estimating a gold cloud velocity at a deep pit during a laser pulse within the range of $(6\text{--}7)\cdot 10^3\ \text{m/s}$. It is higher than on the surface during the first laser pulse. Just under ablation at these depths, additional heating of an expanded gold cloud ends before leaving the pit and intense gold structures with a highly developed surface start forming (Fig. 3).

Conclusions. The deposit structure on the surface around ablation pits is found to sharply depend on a pit depth. When the pit depth is increased, gold micro- and nanoparticles acquire a more developed surface structure and the surface around the pits gets deep black color – “black” gold appears.

References

1. *Pfund, A. H.* / Bismuth black and its applications / A. H. Pfund // Rev. Sci. Instrum. – 1930. – Vol. 1. – P. 397–399.
2. Hardening and Optimizing of the Black Gold Thin Films the Absorption Layer for Infrared Detector / Dong-pei Qian [et al.] // Opt. Photon. J. – 2013. – Vol. 3. – P. 281–283.
3. *Vorobyev, A. Y.* / Enhanced absorptance of gold following multipulse femtosecond laser ablation / A. Y. Vorobyev, Chunlei Guo // Phys. Rev. B. – 2005. – Vol. 72. – P. 1–5.
4. Pulsed laser treatment of gold and black gold thin films fabricated by thermal evaporation / Michal Novotný [et al.] // Cent. Eur. J. Phys. – 2009. – Vol. 7 (2). – P. 327–331.
5. Mechanistic comparison of pulse laser induced phase separation of particulates from cellulose paper at 213 nm and 532 nm / S. Arif [et al.] // Appl. Phys. A. – 2013. – Vol. 110. – P. 501–509.
6. *Krüger, J.* Ultrashort Pulse Laser Interaction with Dielectrics and Polymers / J. Krüger, W. Kautek // Adv. Polym. Sci. – 2004. – Vol. 168. – P. 247–289.
7. Influence of Self-Absorption of 213 nm Radiation on Laser Treatment of Cornea / S. A. Batishche [et al.] // Proc. of the National Academy of Sciences of Belarus, Ser. of Physical-Mathematical Sciences. – 2016. – No. 1. – P. 80–83.
8. *Kreibig, U.* Optical Properties of Metal Clusters / U. Kreibig, M. Vollmer. – Berlin: Springer, 1995. – Vol. 25 (Springer Series in Materials Science).
9. *Link, S.* Spectral Properties and Relaxation Dynamics of Surface Plasmon Electronic Oscillations in Gold and Silver Nanodots and Nanorods / S. Link, M. A. El-Sayed // Phys. Chem. B. – 1999. – Vol. 103. – P. 8410–8426.
10. Plasmon resonances in large noble-metal clusters / C. Sonnichsen [et al.] // New J. Phys. – 2002. – Vol. 93. – P. 1–8.
11. *Landsberg, G. S.* Elementary Physics Textbook: in 3 volumes / G. S. Landsberg. – Moscow: Nauka, 1985. – Vol. 3: Oscillations and Waves. Optics. Atomic and Nuclear Physics.

Received 30.06.2016

ІНФАРМАТЫКА

УДК 658.512.2

Г. М. ЛЕВИН¹, Б. М. РОЗИН¹, А. Б. ДОЛГИЙ²

ОПТИМИЗАЦИЯ ВЫПУСКА И ИНТЕНСИВНОСТЕЙ ОБРАБОТКИ ГРУППЫ ДЕТАЛЕЙ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ СПРОСЕ

¹Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь, e-mail: levin@newman.bas-net.by, rozin@newman.bas-net.by

²Горная школа Нанта, Нант, Франция, e-mail: Alexandre.Dolgui@mines-nantes.fr

Рассматривается задача оптимизации размеров выпуска группы деталей и интенсивностей их обработки на многопозиционном оборудовании блоками инструментов при нестационарном спросе на заданных временных интервалах. Состав группы не меняется от интервала к интервалу. В качестве целевой функции принята сумма затрат на производство, хранение избытков деталей и штрафы за неудовлетворенный спрос на них. Затраты на выпуск группы деталей зависят от интенсивностей их обработки. Предложен декомпозиционный метод решения задачи.

Ключевые слова: размер партии, группа деталей, интенсивность обработки, минимизация затрат, декомпозиционный метод.

G. M. LEVIN¹, B. M. ROZIN¹, A. B. DOLGUI²

OPTIMIZING THE OUTPUT AND THE INTENSITIES OF PROCESSING A BATCH OF PARTS UNDER NON-STATIONARY DEMAND

¹United Institute of Informatics Problems of National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus, e-mail: levin@newman.bas-net.by, rozin@newman.bas-net.by

²Ecole des Mines de Nantes, Nantes, France, e-mail: Alexandre.Dolgui@mines-nantes.fr

We consider a problem of optimizing the output of a batch of parts and intensities of its processing with tool blocks on a multiposition equipment under non-stationary demand and predetermined time intervals. The batch content does not vary from one interval to another. The objective function is the sum of production cost, storage cost of excess parts, and penalties for unmet demand. The production cost depends on processing intensities. A decomposition method for solving the problem is proposed.

Keywords: lot size, batch of parts, intensity of processing, cost minimization, decomposition method.

Введение. Классификации задач планирования производства партий изделий с учетом затрат на их выпуск и хранение посвящены, в частности, обзоры [1–3] и др. К основным классификационным характеристикам подобных задач обычно относят следующие (см., напр., [1, 2]): горизонт планирования (конечный либо бесконечный), тип планирования (долгосрочное, среднесрочное или оперативное); количество наименований выпускаемых изделий (одно либо несколько); одноуровневое или многоуровневое принятие решений о размере выпуска в зависимости от сложности изготавливаемых изделий; наличие либо отсутствие ресурсных ограничений, лимитирующих размер выпуска; предполагают ли условия хранения произведенных изделий их порчу в зависимости от времени хранения; допускается ли невыполнение (или частичное выполнение) заказов на изделия (отложенный спрос) либо неудовлетворенный спрос означает потерю заказа; является ли спрос на изделия стационарным (постоянным) либо динамически изменяемым; величина спроса детерминированная или случайная; зависит (или не зависит) спрос на изделия в конкретном временном интервале от спроса на изделия других наименований в этом интервале и на предыдущих временных интервалах планирования; учитываются ли затраты (материальные

и временные) на переналадку системы при добавлении либо замене выпуска системой изделий одних наименований на другие, а также при изменении программы выпуска. Сложность соответствующих задач существенно зависит от характеристик их конкретных постановок.

Большая часть исследований в области одноуровневых детерминированных задач планирования выпуска изделий на конечном дискретном горизонте с динамически изменяющимся спросом и ограничениями на мощность производственной системы касается выпуска изделий одного наименования [4, 5]. Вместе с тем большое внимание уделяется многопродуктовым задачам [6]. Поскольку классические постановки обоих типов этих задач – NP-трудные [7, 8, 9], большинство предложенных алгоритмов их решения являются эвристическими (см., напр., [10–16]). Здесь особо следует отметить эвристики, предполагающие использование при их формулировке и реализации методов математического программирования ([15] и др.), а также эвристики, основанные на методе «ветвей и границ» [16].

Среди точных методов решения отмеченных задач, кроме непосредственного использования для их решения формулировок в терминах смешанного целочисленного линейного программирования и метода «ветвей и границ» [16–19], применяются также два других подхода. В одном из них используются методы генерации отсечений в комбинации с методом «ветвей и границ» [20, 21], а в другом производится переопределение переменных с последующим решением релаксированной задачи линейного программирования также в комбинации с методом «ветвей и границ» [22]. Для решения однопродуктовых задач с динамически изменяющимся спросом часто применялись также методы типа динамического программирования [23–25]. В последнее время внимание многих исследователей однопродуктовых задач с ограниченной мощностью системы привлекали также полностью полиномиальные многошаговые аппроксимационные схемы [4, 5], позволяющие находить приближенное решение задачи с заданной относительной погрешностью оптимального значения целевой функции.

Ниже рассматривается одна из постановок одноуровневых задач среднесрочного планирования выпуска производственной системой ограниченной мощности группы изделий с детерминированным динамическим спросом на конечном дискретном горизонте планирования, состоящем из заданного числа временных интервалов известной длительности. Допускается частичное (полное) невыполнение заказов по каждому изделию группы, которые могут быть удовлетворены на последующих интервалах (отложенный спрос).

В качестве основных отличий исследуемой постановки от известных можно отметить следующие. Во-первых, состав группы не изменяется от интервала к интервалу (что определяется спецификой используемой производственной системы), в то время как объемы спроса на различные изделия группы в различных временных интервалах не связаны между собой. Во-вторых, решения о размере партии в любом временном интервале принимаются одновременно с выбором интенсивностей обработки деталей группы, определяющих как возможность выпуска партии такого размера, так и стоимость самого выпуска. Следует отметить, что если пропорции спроса на различные детали группы не изменяются от интервала к интервалу, то такую задачу можно свести к однопродуктовой, где в качестве продукта рассматривается группа в целом. Таким образом, рассматриваемая задача занимает промежуточное место между много- и однопродуктовыми задачами.

1. Постановка задачи и математическая модель. Рассматривается задача управления программой выпуска и интенсивностями обработки при многономенклатурном производстве деталей заданного множества $D = \{d_1, d_2, \dots, d_m\}$ их типов на временных интервалах $T_1, \dots, T_t, \dots, T_n$ заданного горизонта планирования $T = \sum_{t=1}^n T_t$ с учетом динамики предполагаемого спроса на детали, затрат на их производство, хранение излишков деталей и штрафов за не поставленные заказчику изделия.

Предполагается, что детали обрабатываются последовательно одна за другой идентичными как по составу, так и по порядку расположения деталей группами, каждая из которых включает h_d деталей $d \in D$, $\sum_{d \in D} h_d = h$. Обработка производится на многопозиционной производственной ли-

нии конвейерного типа, состоящей из ряда линейно упорядоченных позиций [26]. Каждая деталь группы обрабатывается в указанном порядке на каждой рабочей позиции соответствующим этой позиции и детали набором блоков инструментов, причем в каждый момент времени на каждой позиции может обрабатываться лишь одна деталь. Один такт обработки состоит в одновременной обработке на каждой из рабочих позиций соответствующей (такту и позиции) детали.

После завершения любого такта обрабатываемые детали со своих позиций синхронно перемещаются на следующие позиции, деталь с последней рабочей позиции поступает на позицию разгрузки, а на первую рабочую позицию поступает очередная деталь последовательности. Цикл обработки всей группы деталей состоит из h тактов и может включать идентичные такты (характеризуемые идентичным расположением деталей группы на всех рабочих позициях с соответствующей их одинаковой обработкой). В дальнейшем $I = \{1, \dots, \eta\}$ – множество номеров различных тактов и k_i – количество идентичных тактов $i \in I$ в цикле, $\sum_{i \in I} k_i = h$.

Обработка детали на позиции может осуществляться одним либо одновременно несколькими (соответствующими позиции и детали) кинематически не связанными между собой блоками инструментов, причем все инструменты одного блока работают параллельно и имеют общий параметр интенсивности обработки (например, минутную подачу). Таким образом, каждый такт $i \in I$ заключается в одновременной обработке различных деталей соответствующим подмножеством J_i блоков (инструментов) из множества J блоков, установленных на линии, причем такт i может включать обработку m_{ij} идентичными блоками $j \in J_i$. Подмножества блоков из семейства $\{J_1, \dots, J_p, \dots, J_\eta\}$ могут пересекаться и $\bigcup_{i=1}^n J_i = J$. Далее под парой ij подразумевается блок $j \in J$, выполняющий в такте $i \in I$ обработку детали, соответствующей такту и позиции, на которой блок выполняет обработку.

Выполнение обработки каждым блоком инструментов в некотором такте связано с расходом соответствующих возобновляемых ресурсов (в частности, инструментов, изнашиваемых в процессе обработки). Степень и скорость расхода ресурса зависят как от объема обработки, так и от интенсивности ее выполнения [26]. Восстановление любого из ресурсов (например, смена инструментов) осуществляется после его полного расходования (износа) по завершении такта, во время которого это произошло. Выполнение очередного такта может начаться лишь тогда, когда процесс восстановления соответствующего ресурса (смены инструментов блока) завершен.

В данной работе предполагается, что выбираемая интенсивность обработки деталей блоком $j \in J$ во временном интервале $t = 1, \dots, n$ принимается одинаковой для всех обрабатываемых им деталей группы, т. е. не изменяется от такта к такту. Обозначим эту интенсивность (являющуюся искомым параметром) через z_{jt} и положим $z_t = (z_{jt} | j \in J)$ и $z = (z_t | t = 1, \dots, n)$.

Для пар $ij \in G = \{ij | i \in I, j \in J_i\}$ задаются следующие параметры:

- объем V_{ij} обработки деталей блоком $j \in J$ в такте $i \in I$;
- отрезок $[z_{1jt}, z_{2jt}]$ возможных значений интенсивности z_{jt} в интервале t ;
- определенные на этом отрезке выпуклые функции $f_{ijt}(z_{jt})$ и $\phi_{ijt}(z_{jt})$, представляющие зависимости от принимаемой интенсивности z_{jt} отнесенных к единице объема затрат (включая затраты на ресурсы и их восстановление) на обработку деталей блоком $j \in J$ в такте $i \in I$ и времени восстановления ресурсов соответственно.

При фиксированном значении $z_t \in Z_t = \prod_{j \in J} [z_{1jt}, z_{2jt}]$ длительность обработки в интервале t детали блоком $j \in J$ в такте $i \in I$ и длительность этого такта равны $V_{ij}z_{jt}$ и $\max\{V_{ij}z_{jt} | j \in J_i\}$, а затраты на обработку детали блоком $j \in J$ в такте $i \in I$ и затраты времени на восстановление ресурсов, отнесенные к этой обработке, равны $V_{ij}f_{ijt}(z_{jt})$ и $V_{ij}\phi_{ijt}(z_{jt})$ соответственно.

Общие затраты (как материальные, так и временные) на выполнение каждого из тактов $i \in I$ помимо суммарных затрат по всем составляющим его блокам включают также дополнительные. В достаточно общем случае можно принять, что эти дополнительные затраты состоят из двух частей, первая из которых пропорциональна длительности такта, а вторая от нее не зависит.

Параметры E_{1it} , E_{2it} , R_{1it} и R_{2it} этих линейных зависимостей для интервала $t \in \{1, \dots, n\}$ предполагаются заданными.

При принятых предположениях общие затраты $F_{1t}(z_t)$ на выполнение всех тактов одного цикла обработки группы и общая длительность $F_{2t}(z_t)$ цикла в интервале t в зависимости от значения $z_t \in Z_t$ определяются следующими соотношениями:

$$F_{1t}(z_t) = \sum_{i \in I} k_i \left(E_{1it} + E_{2it} \max_{j \in J_i} \{V_{ij} z_{jt}\} + \sum_{j \in J_i} m_{ij} V_{ij} f_{ijt}(z_{jt}) \right),$$

$$F_{2t}(z_t) = \sum_{i \in I} k_i \left(R_{1it} + R_{2it} \max_{j \in J_i} \{V_{ij} z_{jt}\} + \sum_{j \in J_i} m_{ij} V_{ij} \phi_{ijt}(z_{jt}) \right).$$

Для формирования математической модели рассматриваемой задачи в целом введем следующие дополнительные обозначения:

$x = (x_1, \dots, x_{t'}, \dots, x_n)$, где x_t – количество групп деталей, которое планируется выпускать в интервале t ;

\bar{x}_t – предельное количество групп, которое может быть выпущено (исходя из производственных условий) в интервале $t = 1, \dots, n$;

λ_{dt} – спрос на деталь $d \in D$ в интервале t и $\Lambda_{dt} = \sum_{r=1}^t \lambda_{dr}$;

$H_{dt}(y)$ – заданные функции стоимости хранения (при $y > 0$), либо штрафа за неудовлетворенный спрос (при $y < 0$) для y деталей $d \in M$ в интервале $t = 1, \dots, n$. Функции $H_{dt}(y)$ определены на отрезках $[-\Lambda_{dt}, h_d \sum_{r=1}^t \bar{x}_r - \Lambda_{dt}]$, не возрастают при $y < 0$, не убывают при $y > 0$ и $H_{dt}(0) = 0$.

С учетом изложенного рассматриваемая задача определения оптимальных (в совокупности) программы x_t выпуска групп деталей и интенсивностей z_t их обработки в каждом интервале времени $t \in \{1, \dots, n\}$ сводится к следующей задаче математического программирования:

$$\Psi(x, z) = \sum_{t=1}^n F_{1t}(z_t) x_t + \sum_{t=1}^n \sum_{d \in D} H_{dt} \left(h_d \sum_{r=1}^t x_r - \Lambda_{dt} \right) \rightarrow \min, \quad (1)$$

$$F_{2t}(z_t) x_t \leq T_t, \quad t = 1, \dots, n, \quad (2)$$

$$x_t \in [0, \bar{x}_t], \quad t = 1, \dots, n, \quad (3)$$

$$z_t \in Z_t, \quad t = 1, \dots, n. \quad (4)$$

Здесь целевая функция в (1) представляет зависимость общих затрат на выпуск заданных количеств групп деталей от оптимизируемых параметров с учетом как стоимости самого выпуска, так и затрат на хранение излишне произведенных деталей и штрафов за недопоставленные заказчику изделия. Ограничение (2) обеспечивает возможность выпуска за интервал t планируемого количества групп деталей. Задачу (1)–(4) будем называть в дальнейшем задачей A .

2. Методы решения. Для решения задачи A можно воспользоваться следующей декомпозиционной схемой:

– на нижнем уровне при фиксированных величинах выпуска $x = (x_1, \dots, x_n)$ для каждого $t = 1, \dots, n$ решается автономная подзадача $B_t(x_t)$ по определению оптимальных (для такой программы выпуска) значений $z_t^*(x_t)$ интенсивностей обработки;

– на верхнем уровне решается координирующая подзадача C по определению значений x^* вектора x выпуска групп деталей по всем интервалам времени с учетом совокупности всех рассматриваемых затрат.

При принятых предположениях о функциях $f_{ijt}(\cdot)$ и $\phi_{ijt}(\cdot)$ подзадачи $B_t(x_t)$ сводятся к следующим задачам выпуклого программирования:

$$\Phi_{1t}(z_t) = \sum_{i \in I} k_i \left(E_{2it} \max_{j \in J_i} \{V_{ij} z_{jt}\} + \sum_{j \in J_i} m_{ij} V_{ij} f_{ijt}(z_{jt}) \right) \rightarrow \min \quad (=R_t(x_t)), \quad (5)$$

$$\Phi_{2t}(z_t) = \sum_{i \in I} k_i \left(R_{2it} \max_{j \in J_i} \{V_{ij} z_{jt}\} + \sum_{j \in J_i} m_{ij} V_{ij} \Phi_{ijt}(z_{jt}) \right) \leq T_t / x_t - \sum_{i \in I} k_i R_{1it}, \quad (6)$$

$$z_t \in Z_t. \quad (7)$$

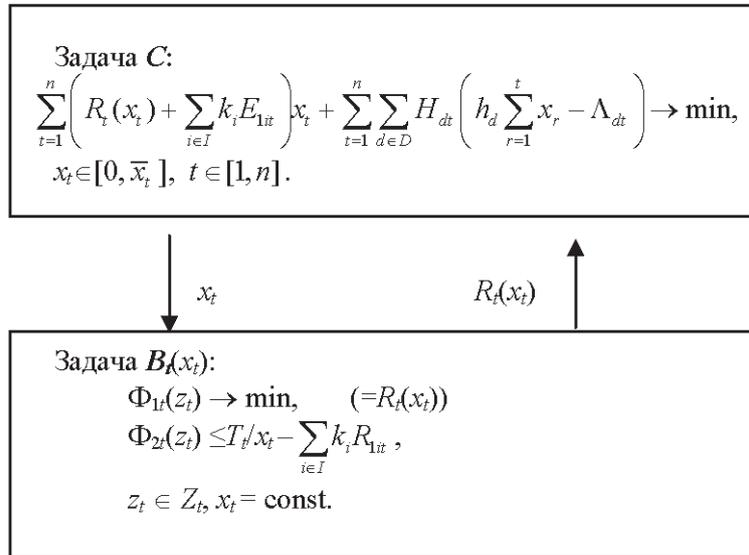
Предполагается, что $R_t(x_t) = \infty$, если для текущего значения x_t подзадача (5)–(7) не имеет решения.

В свою очередь подзадача **C** сводится к задаче многошаговой оптимизации:

$$\sum_{t=1}^n \left(R_t(x_t) + \sum_{i \in I} k_i E_{1it} \right) x_t + \sum_{t=1}^n \sum_{d \in D} H_{dt} \left(h_d \sum_{r=1}^t x_r - \Lambda_{dt} \right) \rightarrow \min, \quad (= \Psi^*), \quad (8)$$

$$z_t \in Z_t, \quad t = 1, \dots, n. \quad (9)$$

Предлагаемая декомпозиционная схема решения задачи **A** укрупненно представлена на рисунке.



Декомпозиционная схема решения задачи **A**

Очевидно, что если $z_t^*(x_t)$ являются решениями задач $B_t(x_t)$ и x_t^* – решениями задачи **C** для $t \in [1, n]$, то $(x^*, z^*(x^*))$ – решение задачи **A**.

Для решения задач $B_t(x_t)$ могут быть использованы известные методы выпуклого программирования и реализующие их пакеты программ. В частности, они могут быть сведены к задачам линейного программирования посредством аппроксимации функций $f_{ijt}(z_{jt})$ и $\Phi_{ijt}(z_{jt})$ кусочно-линейными функциями [26], причем если функции $f_{ijt}(z_{jt})$ и $\Phi_{ijt}(z_{jt})$ одинаковы для всех интервалов t , то эти аппроксимации не зависят от t .

Аппроксимация кусочно-линейными функциями функций $f_{ijt}(z_{jt})$ и $\Phi_{ijt}(z_{jt})$ может быть выполнена, например, следующим образом.

Построим кусочно-линейные аппроксимации функций $f_{ijt}(z_{jt})$ и $\Phi_{ijt}(z_{jt})$, полагая для всех $ij \in G$, $t = 1, \dots, n$:

$$f_{ijt}(z_{jt}) \approx \max \{ a_{ijk} z_{jt} + b_{ijk} \mid k = 1, \dots, v_{ijt} \} \quad (10)$$

и

$$\Phi_{ijt}(z_{jt}) \approx \max \{ c_{ijk} z_{jt} + d_{ijk} \mid k = 1, \dots, q_{ijt} \}, \quad (11)$$

где a_{ijk} , b_{ijk} , v_{ijt} , c_{ijk} , d_{ijk} и q_{ijt} являются параметрами этой аппроксимации, параметры v_{ijt} и q_{ijt} во многом определяют ее точность.

Тогда приближенное решение подзадачи $B_t(x_t)$, $t = 1, \dots, n$ может быть получено в результате решения следующей задачи линейного программирования:

$$\sum_{i \in I} \tilde{E}_{2it} \gamma_{it} + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J_i} \tilde{V}_{ij} \chi_{ijt} \rightarrow \min; \quad (12)$$

$$\sum_{i \in I} \tilde{R}_{2it} \gamma_{it} + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J_i} \tilde{V}_{ij} \mu_{ijt} \leq T_t / x_t - \sum_{i \in I} \tilde{R}_{1it}; \quad (13)$$

$$\chi_{ijt} - a_{ijkt} z_{jt} \geq b_{ijkt}, \quad i \in I, j \in J_i, k = 1, \dots, v_{ijt}; \quad (14)$$

$$\mu_{ijt} - c_{ijkt} z_{jt} \geq d_{ijkt}, \quad i \in I, j \in J_i, k = 1, \dots, q_{ijt}; \quad (15)$$

$$\gamma_{it} - V_{ij} z_{jt} \geq 0, \quad i \in I, j \in J_i; \quad (16)$$

$$z_{jt} \in [z_{1jt}, z_{2jt}], \quad j \in J, \quad (17)$$

где $\tilde{E}_{2it} = k_i E_{2it}$, $\tilde{R}_{1it} = k_i R_{1it}$, $\tilde{R}_{2it} = k_i R_{2it}$ и $\tilde{V}_{ij} = k_i m_{ij} V_{ij}$. Искомыми в этой задаче являются векторы $\gamma_t = (\gamma_{it} \mid i \in I)$, $z_t = (z_{jt} \mid j \in J)$, $\chi_t = (\chi_{ijt} \mid i \in I, j \in J_i)$ и $\mu_t = (\mu_{ijt} \mid i \in I, j \in J_i)$. Очевидно, что если $(\gamma_t^*, z_t^*, \chi_t^*, \mu_t^*)$ – ее решение, то вектор z_t^* может быть принят в качестве приближенного решения исходной задачи $B_t(x_t)$. Несовпадение минимальных значений целевых функций этих задач определяется точностью аппроксимации функций $f_{ijt}(z_{jt})$ и $\phi_{ijt}(z_{jt})$ в окрестности решения исходной задачи.

Пусть $t \in \{1, \dots, n\}$, $\bar{X}_t = \sum_{r=1}^t \bar{x}_r$, $X_t \in [0, \bar{X}_t]$ и $\Phi_t(X_t)$ – наименьшее значение функции $\sum_{r=1}^t \left(R_r(x_r) + \sum_{i \in I} k_i E_{1ir} \right) x_r + \sum_{r=1}^t \sum_{d \in D} H_{dr} \left(h_d \sum_{q=1}^r x_q - \Lambda_{dr} \right)$ по всем таким $x^t = (x_1, \dots, x_r, \dots, x_t)$, что $x_r \in [0, \bar{x}_r]$ для всех $r = 1, \dots, t$ и $\sum_{r=1}^t x_r = X_t$. Поскольку $\Psi^* = \min\{\Phi_n(X_n) \mid X_n \in [0, \bar{X}_n]\}$, то решение подзадачи (8), (9) может быть получено с использованием следующего рекуррентного соотношения динамического программирования:

$$\begin{aligned} \Phi_t(X_t) &= \min\{\Phi_{t-1}(X_{t-1}) + (R_t(X_t - X_{t-1}) + \sum_{i \in I} k_i E_{it})(X_t - X_{t-1}) + \sum_{d \in D} H_{dt}(h_d X_t - \Lambda_{dt}) \mid X_{t-1} \in [0, \bar{X}_{t-1}], \\ &X_t - X_{t-1} \in [0, \bar{x}_t]\}, \\ \Phi_0(0) &= 0. \end{aligned}$$

При использовании для решения задачи C верхнего уровня известных схем динамического программирования для оптимизации дискретных n -шаговых процессов число возможных состояний на шаге $t = 1, \dots, n$ не превосходит $\sum_{r=1}^t \bar{x}_r$. В этом случае трудоемкость решения задачи C может быть оценена как $O(nm(\sum_{i=1}^n \bar{x}_i)^2)$ операций при условии, что функции $R_t(x_t)$, $H_{dt}(\cdot)$, $d \in D = \{d_1, d_2, \dots, d_m\}$, $t = 1, \dots, n$, вычисляются за постоянное число операций.

При погрешности δ_t определения величин $R_t(x_t)$, $t = 1, \dots, n$, при решении задач $B_t(x_t)$ нижнего уровня погрешность в определении оптимального значения целевой функции предложенным методом не превосходит величины $\sum_{t=1}^n \delta_t \bar{x}_t$.

Заключение. Рассмотрена задача оптимизации стоимости серийного выпуска группы деталей нескольких наименований постоянного состава и интенсивностей обработки деталей набором блоков инструментов на многопозиционной производственной системе ограниченной мощности на ряде временных интервалов с учетом затрат как на сам выпуск, так и на хранение излишне произведенных деталей и штрафов за не поставленные заказчику изделия.

Предложена двухуровневая декомпозиционная схема решения этой задачи для случая выпуклых функций зависимости затрат на обработку деталей группы каждым блоком инструментов от принимаемой интенсивности, отнесенных к единице объема затрат (включая затраты на ресурсы и их восстановление). На нижнем уровне для каждого интервала решаются подзадачи выпуклого программирования по оптимизации интенсивностей обработки деталей группы соот-

ветствующими блоками инструментов при фиксированном объеме выпуска. На верхнем уровне методом динамического программирования оптимизируются числа выпускаемых групп для всех интервалов.

В дальнейшем предполагается исследовать более общие постановки рассматриваемой задачи, когда спрос на детали группы в различных временных интервалах является недетерминированным (в частности, подчиняется некоторому известному вероятностному распределению либо такое распределение не известно и заданы лишь диапазоны возможных величин спроса на каждую из деталей группы в каждом интервале), а также когда функции зависимости материальных и временных затрат на выпуск группы деталей от интенсивностей обработки не являются выпуклыми.

Список использованной литературы

1. *Karimi, B.* The capacitated lot sizing problem: a review of models and algorithms / B. Karimi, S. M. T. Fatemi Ghomi, J. M. Wilson // *Omega*. – 2003. – Vol. 31, N 5. – P. 365–378.
2. *Ullah, H.* A Literature Review on Inventory Lot Sizing Problems / H. Ullah, S. Parveen // *Global J. Res. Eng.* – 2010. – Vol. 10, N 5. – P. 21–36.
3. *Robinson, P.* Coordinated deterministic dynamic demand lot-sizing problem: A review of models and algorithms / P. Robinson, A. Narayanan, F. Sahin // *Omega*. – 2009. – Vol. 37, N 1. – P. 3–15.
4. *Van Hoesel, C. P. M.* Fully polynomial approximation schemes for single-item capacitated economic lot-sizing problems / C. P. M. Van Hoesel, A. P. M. Wagelmans // *Math. Oper. Res.* – 2001. – Vol. 26, N 2. – P. 339–57.
5. *Ng, C. T.* A simple FPTAS for a single-item capacitated economic lot-sizing problem with monotone cost structure / C. T. Ng, M. Y. Kovalyov, T. C. E. Cheng // *Eur. J. Oper. Res.* – 2010. – Vol. 200. – P. 621–624.
6. *Absi, N.* The multi-item capacitated lot-sizing problem with safety stocks and demand shortage costs / N. Absi, S. Kedad-Sidhoum // *Comput. Oper. Res.* – 2009. – Vol. 36, N 11. – P. 2926–2936.
7. *Florian, M.* Deterministic production planning: Algorithms and complexity / M. Florian, J. K. Lenstra, A. H. G. R. Kan // *Management Science*. – 1980. – Vol. 26. – P. 669–679.
8. *Bitran, G. R.* Computational complexity of the capacitated lot size problem / G. R. Bitran, H. H. Yanasse // *Management Science*. – 1982. – Vol. 28, N 10. – P. 1174–1186.
9. *Chen, W. H.* Analysis of relaxations for the multi-item capacitated lot-sizing problem / W. H. Chen, J. M. Thizy // *Ann. Oper. Res.* – 1990. – Vol. 26. – P. 29–72.
10. *Dixon, P. S.* A heuristic solution procedure for the multi-item, single level, limited capacity, lot sizing problem / P. S. Dixon, E. A. Silver // *J. of Operations Management*. – 1981. – Vol. 21, N 1. – P. 23–40.
11. *Maes, J.* A simple heuristic for the multi-item single level capacitated lot sizing problem / J. Maes, L. N. Van Wassenhove // *Oper. Res. Lett.* – 1986. – Vol. 4, N 6. – P. 265–273.
12. *Dogramaci, A.* The dynamic lot-sizing problem for the multiple items under limited capacity / A. Dogramaci, J. C. Panayiotopoulos, N. R. Adam // *AIIE Transactions*. – 1981. – Vol. 13, N 4. – P. 294–303.
13. *Karni, R.* A heuristic algorithm for the multi-item lot sizing problem with capacity constraints / R. Karni, Y. Roll // *AIIE Transactions*. – 1982. – Vol. 14, N 4. – P. 249–259.
14. *Gunther, H. O.* Planning lot sizes and capacity requirements in a single stage production systems / H. O. Gunther // *Eur. J. Oper. Res.* – 1987. – Vol. 31, N 2. – P. 223–231.
15. *Thizy, J. M.* Lagrangean relaxation for the multi-item capacitated lot-sizing problem: a heuristic implementation / J. M. Thizy, L. N. Van Wassenhove // *IIE Transactions*. – 1985. – Vol. 17, N 4. – P. 308–313.
16. *Gelders, L. F.* A branch and bound algorithm for the multi item single level capacitated dynamic lotsizing problem / L. F. Gelders, J. Maes, L. N. Van Wassenhove // *Multistage production planning and inventory control. Lecture notes in economics and mathematical systems* / eds.: S. Axaster, Ch. Schneeweiss, E. Silver. – Berlin: Springer, 1986. – Vol. 266. – P. 92–108.
17. *Leung, J. M. Y.* Facets and algorithms for capacitated lot sizing / J. M. Y. Leung, T. L. Magnanti, R. Vachani // *Mathematical Programming*. – 1989. – Vol. 45. – P. 331–359.
18. *Belvaux, G.* Bc-prod: a specialised branch-and-cut system for lot-sizing problems / G. Belvaux, L. A. Wolsey // *Management Science*. – 2000. – Vol. 46, N 5. – P. 993–1007.
19. *Belvaux, G.* Modelling practical lot-sizing problems as mixed integer programs / G. Belvaux, L. A. Wolsey // *Management Science*. – 2001. – Vol. 47, N 7. – P. 724–738.
20. *Barany, I.* Strong formulations for multi-item capacitated lot sizing / I. Barany, T. J. Van Roy, L. A. Wolsey // *Management Science*. – 1984. – Vol. 30, N 10. – P. 1255–1261.
21. *Leung, J. M. Y.* Facets and algorithms for capacitated lot sizing / J. M. Y. Leung, T. L. Magnanti, R. Vachani // *Mathematical Programming*. – 1989. – Vol. 45. – P. 331–359.
22. *Eppen, G. D.* Solving multi-item capacitated lot sizing problems using variable redefinition / G. D. Eppen, R. K. Martin // *Oper. Res.* – 1987. – Vol. 35, N 6. – P. 832–848.

23. *Wagelmans, A.* Economic lotsizing: an $O(n \log n)$ algorithm that runs in linear time in the Wagner – Whitin case / A. Wagelmans, S.van Hoesel, A. Kolen // *Oper. Res.* – 1992. – Vol. 40. – P. 145–155.
24. *Aggarwal, A.* Improved algorithms for economic lot-size problem / A. Aggarwal, J. K. Park // *Oper. Res.* – 1993. – Vol. 41, N 3. – P. 549–571.
25. *Federgruen, A.* A simple forward algorithm to solve general dynamic lot sizing models with n periods in $O(n \log n)$ or $O(n)$ time / A. Federgruen, M. A. Tzur // *Management Science.* – 1991. – Vol. 37, N 8. – P. 909–925.
26. *Левин, Г. М.* Линейная аппроксимация задачи оптимизации интенсивностей последовательно-параллельного выполнения пересекающихся множеств операций / Г. М. Левин, Б. М. Розин, А. Б. Долгий // *Информатика.* – 2014. – № 3. – С. 44–51.

Поступила в редакцию 17.05.2016

УДК 519.7

Ю. В. ПОТТОСИН¹, С. А. ПОТТОСИНА²

ПОИСК РАЗРЕЗА ГРАФА В РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ЛОГИЧЕСКОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ

¹Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь,
e-mail: pott@newman.bas-net.by

²Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь,
e-mail: s.pottosina@gmail.com

Рассматриваются две задачи логического проектирования дискретных устройств: декомпозиция булевых функций и кодирование состояний конечного автомата. Предлагается общий подход к решению этих задач, который связан с поиском максимального разреза в графе со взвешенными ребрами. На основе указанного метода предложены эвристические методы решения рассматриваемых задач.

Ключевые слова: логическое проектирование, декомпозиция булевых функций, кодирование состояний конечного автомата, разрез графа.

Yu. V. POTTOSIN¹, S. A. POTTOSINA²

SEARCH OF A CUT IN A GRAPH USED IN LOGICAL DESIGN

¹United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus,
e-mail: pott@newman.bas-net.by

²Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Belarus, e-mail: s.pottosina@gmail.com

Two optimization problems in logical design are considered: decomposition of Boolean functions and state assignment of a finite automaton. A common approach to those problems is suggested. This approach is connected with the search of a maximal cut in a graph with weighted edges. Heuristic methods based on this approach to solve the problems are suggested.

Keywords: logical design, decomposition of Boolean functions, state assignment of finite automaton, cut in graph.

Введение. Согласно [1], для графа $G = (V, E)$ с множеством вершин V и множеством ребер E и некоторых непересекающихся подмножеств V_1 и V_2 множества V разрезом называется множество ребер, одни концы которых лежат в V_1 , другие – в V_2 . Рассмотрим задачу нахождения максимального разреза в графе, ребра которого взвешены действительными числами, т. е. такого разреза, у которого сумма весов ребер максимальна. Эта задача возникает, когда необходимо перейти от многозначных переменных к булевым векторам.

Нами исследуются две задачи логического проектирования: двухблочная разделительная декомпозиция системы полностью определенных булевых функций, выполняемая табличным методом [2], и кодирование состояний конечного автомата с целью упрощения получаемых при этом булевых функций [3] и уменьшения энергопотребления реализующей схемой [4]. При решении первой задачи исходная система булевых функций задается в виде двумерной таблицы, столбцы которой необходимо кодировать булевыми векторами. При решении второй – каждому состоянию автомата приписывается булев вектор для получения системы булевых функций, необходимой для построения логической схемы. В обоих случаях сложность получаемых булевых функций довольно сильно зависит от варианта кодирования, которое ставит своей задачей уменьшение числа различных элементарных конъюнкций в дизъюнктивных нормальных формах (ДНФ) получаемых булевых функций. При энергосберегающем кодировании состояний конечного автомата целью является уменьшение интенсивности переключений элементов памяти в схеме, реализующей данный автомат.

1. Декомпозиция булевых функций. Одной из важных задач логического проектирования является задача декомпозиции булевых функций. Как показано в обзоре [5], по этой теме выпол-

Пусть $z_1 = (x_2, x_5, x_6, x_7)$ и $z_2 = (x_1, x_3, x_4)$. Тогда таблица M будет иметь вид табл. 1. Для кодирования ее столбцов достаточно трех переменных. Таким образом, получим функцию $g(z_1) = w$, где $w = (w_1, w_2, w_3)$.

Значения вектора w могут быть определены произвольно. Например, если просто пронумеровать столбцы в двоичной системе, включая нуль, то функцию $y = \varphi(w_1, w_2, w_3, x_1, x_3, x_4)$ будет представлять табл. 2, а систему ДНФ для функции $w = g(x_2, x_5, x_6, x_7)$ – следующие матрицы:

x_2	x_5	x_6	x_7	w_1	w_2	w_3
0	1	1	1	0	0	1
0	0	1	–	0	0	1
1	1	1	–	0	1	0
1	1	–	1	0	1	0
1	0	0	–	0	1	1
0	0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0
0	1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	1	0	1
0	0	0	1	1	1	0

Таблица 1

		$x_2 x_5 x_6 x_7$					
		0101	0111	111–	100–	0110	
$x_1 x_3 x_4$		101–	001–	11–1	0000	0100	1100 0001
010		0000	0000	0000	0100	0000	0000 1111
000		1110	1110	1111	1110	1110	1111 1111
011		0000	0000	1111	0100	0000	1111 1111
111		1110	1111	1111	1110	1111	1111 1110
001		1110	1110	1111	1110	1111	1111 1111
100		1110	1110	1111	1110	1111	1111 1110
101		1110	1110	1111	1110	1111	1111 1110
110		1110	1110	1110	1110	1111	1111 1110

Таблица 2

		$w_1 w_2 w_3$					
		000	001	010	011	100	101 110
$x_1 x_3 x_4$	010	0000	0000	0000	0100	0000	0000 1111
	000	1110	1110	1111	1110	1110	1111 1111
	011	0000	0000	1111	0100	0000	1111 1111
	111	1110	1111	1111	1110	1111	1111 1110
	001	1110	1110	1111	1110	1111	1111 1111
	100	1110	1110	1111	1110	1111	1111 1110
	101	1110	1110	1111	1110	1111	1111 1110
	110	1110	1110	1110	1110	1111	1111 1110

Соответствующие системы ДНФ этих функций после минимизации методом, который описан в работе [7], могут быть представлены следующими матрицами:

x_2	x_5	x_6	x_7		w_1	w_2	w_3		x_1	x_3	x_4	w_1	w_2	w_3		y_1	y_2	y_3	y_3
$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & - & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & - \\ 0 & 1 & - & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ - & 0 & 0 & 0 \\ 1 & - & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & - \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;	$\begin{bmatrix} 1 & - & - & 1 & 0 & - \\ 1 & 1 & 1 & - & 0 & 1 \\ 0 & - & - & 1 & 1 & - \\ 0 & 0 & - & - & - & - \\ - & - & 1 & 0 & 1 & 0 \\ - & 0 & - & 1 & - & 1 \\ - & - & 1 & 1 & - & 1 \\ - & 0 & - & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & - & - \\ 1 & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$													

Описанный метод кодирования столбцов таблицы M на рассматриваемом примере с табл. 1 выполняется в три шага. Построим граф $G = (V, E)$ с вершинами, соответствующими столбцам таблицы M , и с ребрами, взвешенными расстояниями по Хэммингу между соответствующими столбцами. Первые два развернутых столбца имеют вид

0000111000001110111011101110
0000111000001111110111011101110

Расстояние между ними равно 1. Перед 1-м шагом граф G является полным. Все веса ребер в виде упомянутых расстояний даны в табл. 3.

Таблица 3

	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	
v_1	1	9	2	5	10	10	
v_2		8	3	4	9	11	
v_3			9	6	1	7	
v_4				7	10	8	
v_5					5	13	
v_6						8	

Применение «жадного» алгоритма, описанного ниже, дает на 1-м шаге разрез в графе G , определяемый множествами $V_1 = \{v_1, v_2, v_4, v_5\}$ и $V_2 = \{v_3, v_6, v_7\}$. Введем переменную w_1 со значениями 0 на вершинах из множества V_1 и 1 на вершинах из множества V_2 . После удаления ребер, соединяющих вершины из V_1 с вершинами из V_2 , получим описание графа G в виде табл. 4.

Результатом шага 2 являются множества $V_1 = \{v_1, v_3, v_4, v_6\}$ и $V_2 = \{v_2, v_5, v_7\}$, а выполнение шага 3 дает $V_1 = \{v_1, v_2, v_6\}$ и $V_2 = \{v_3, v_4, v_5\}$. Таким образом, столбцы табл. 1 получают следующие коды:

000 010 101 001 011 100 11-

Таблица 4

	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	
v_1	1		2	5			
v_2			3	4			
v_3					1	7	
v_4				7			
v_5							
v_6						8	

Результатом шага 2 являются множества $V_1 = \{v_1, v_3, v_4, v_6\}$ и $V_2 = \{v_2, v_5, v_7\}$, а выполнение шага 3 дает $V_1 = \{v_1, v_2, v_6\}$ и $V_2 = \{v_3, v_4, v_5\}$. Таким образом, столбцы табл. 1 получают следующие коды:

000 010 101 001 011 100 11–

Это кодирование определяет функции $y = \varphi(w_1, w_2, w_3, x_1, x_3, x_4)$ и $w = g(x_2, x_5, x_6, x_7)$, ДНФ которых представлены следующими матрицами, которые оказались более компактными по числу строк, чем предыдущие подобные матрицы:

$$\begin{array}{cccc}
 x_2 & x_5 & x_6 & x_7 \\
 \left[\begin{array}{cccc}
 0 & - & 1 & - \\
 1 & 1 & - & - \\
 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 1 & - & 0 \\
 - & 0 & 0 & - \\
 1 & 1 & 1 & - \\
 1 & 1 & - & 1
 \end{array} \right] &
 \begin{array}{c}
 1 \\
 2 \\
 3 \\
 4 \\
 5 \\
 6 \\
 7
 \end{array} &
 \begin{array}{ccc}
 w_1 & w_2 & w_3 \\
 \left[\begin{array}{ccc}
 0 & 1 & 0 \\
 1 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 0 \\
 0 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 1
 \end{array} \right] &
 \begin{array}{c}
 ; \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \end{array} &
 \begin{array}{ccc}
 x_1 & x_3 & x_4 \\
 \left[\begin{array}{ccc}
 0 & - & - \\
 - & 0 & 1 \\
 1 & - & - \\
 1 & 1 & 1 \\
 - & - & 1 \\
 - & 0 & - \\
 1 & - & - \\
 - & 0 & - \\
 1 & - & - \\
 - & - & 0
 \end{array} \right] &
 \begin{array}{ccc}
 w_1 & w_2 & w_3 \\
 \left[\begin{array}{ccc}
 1 & 1 & 0 \\
 - & 1 & 1 \\
 0 & 1 & - \\
 1 & - & - \\
 - & - & - \\
 - & - & - \\
 - & - & - \\
 - & - & - \\
 - & - & - \\
 0 & - & 1
 \end{array} \right] &
 \begin{array}{c}
 1 \\
 2 \\
 3 \\
 4 \\
 5 \\
 6 \\
 7 \\
 8 \\
 9 \\
 10
 \end{array} &
 \begin{array}{cccc}
 y_1 & y_2 & y_3 & y_3 \\
 \left[\begin{array}{cccc}
 1 & 1 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 1 \\
 1 & 1 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 1 \\
 1 & 1 & 1 & 0 \\
 1 & 1 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0
 \end{array} \right] &
 \end{array}
 \end{array}$$

2. Кодирование состояний конечного автомата. Одной из моделей поведения дискретного устройства является конечный автомат, который состоит из множества входных сигналов A , множества выходных сигналов B , множества состояний Q и двух функций – функции выходов $\Phi(a, q) = b$ и функции переходов $\Psi(a, q) = q^+$, где $a \in A, b \in B, q, q^+ \in Q$ и q^+ является состоянием, в которое автомат переходит из состояния q при входном сигнале a .

В процессе синтеза логической схемы функции Φ и Ψ преобразуются в систему булевых функций посредством замены абстрактных символов a, b и q булевыми векторами. В функциональном описании синтезируемой схемы часто входы и выходы уже заданы в виде булевых векторов. Задача заключается в том, чтобы приписать абстрактным символам состояний q булевы векторы $z = (z_1, z_2, \dots, z_k)$ в соответствии с некоторым критерием оптимизации. В этом случае любое состояние автомата будет представлено в схеме набором состояний двоичных элементов памяти (триггеров), где состоянием i -го триггера будет значение внутренней переменной z_i . Булев вектор z , приписанный состоянию автомата, называется кодом состояния.

В настоящее время при проектировании дискретных устройств на базе КМОП-технологии большое внимание уделяется снижению энергопотребления в проектируемом устройстве. Это обусловлено, с одной стороны, стремлением увеличить время действия источника энергии в портативных приборах, и с другой – стремлением снизить остроту проблемы отвода тепла при проектировании сверхбольших интегральных схем. Поэтому одним из основных критериев оптимизации при проектировании дискретного устройства является величина потребляемой им энергии. Как отмечено в работах [8, 9], потребляемая мощность схемы, построенной на основе КМОП-технологии, пропорциональна интенсивности переключений логических элементов и элементов памяти. В частности, снижения энергопотребления можно добиваться на этапе кодирования состояний автомата [4], т. е. когда абстрактным символам состояний приписываются булевы векторы. Очевидно, кодировать состояния при этом надо таким образом, чтобы при переходе автомата из одного состояния в другое свое состояние меняли как можно меньшее количество элементов памяти.

Рассматриваются вероятности переходов между состояниями, и чем больше вероятность перехода для какой-либо пары состояний, тем меньше должно быть компонент в кодах этих состояний, которые имеют различные значения, причем не важно, в каком направлении происходит

переход. Для подсчета вероятностей переходов между состояниями должны быть приняты следующие предположения: автомат должен быть полностью определенным; из каждого состояния автомат может перейти в любое другое состояние, т. е. должна существовать соответствующая входная последовательность. При этом предполагается, что автомат работает достаточно долго.

Вероятность перехода автомата из состояния q_i в состояние q_j , вызванного входным сигналом a , равна вероятности поступления этого сигнала. Если имеется несколько входных сигналов, переводящих автомат из состояния q_i в состояние q_j , то условная вероятность p'_{ij} этого перехода равна сумме вероятностей указанных сигналов, поскольку данные события являются несовместимыми. Условием является то, что автомат находится в состоянии q_i . Абсолютная вероятность p_{ij} перехода из состояния q_i в состояние q_j в течение всего времени работы автомата равна $P_i p'_{ij}$, где P_i – вероятность того, что автомат находится в состоянии q_i .

Для подсчета вероятностей $P_i, i = 1, 2, \dots, |Q|$, используется метод Чепмена – Колмогорова [10], где данные вероятности получаются в результате решения системы линейных уравнений с этими вероятностями в качестве неизвестных. Система имеет следующий вид:

$$\sum_{i=1}^{|Q|} P_i p'_{ij} = P_j, \quad j = 1, 2, \dots, |Q|,$$

$$\sum_{i=1}^{|Q|} P_i = 1.$$

Вероятности p'_{ij} должны быть известны. Таким образом, решив данную систему уравнений, получим вероятности P_i . Как было показано выше, абсолютные вероятности p_{ij} определяются как $p_{ij} = P_i p'_{ij}$.

Значения внутренних переменных z_1, z_2, \dots, z_k находятся следующим образом. Реализуется такой же многошаговый процесс, как и в предыдущей задаче, но текущая ситуация характеризуется частичными кодами состояний $(z_1, z_2, \dots, z_j), j < k$, и взвешенным графом $G = (V, E)$, вершины которого соответствуют состояниям автомата. Две вершины этого графа связаны ребром, если и только если соответствующие состояния имеют один и тот же частичный код. Каждое ребро $v_s v_t \in E$ имеет вес $h_{st} = 1 - p_{st}^*$, где p_{st}^* – вероятность перехода между состояниями q_s и q_t , соответствующими вершинам v_s и v_t , независимо от направления перехода, т. е. $p_{st}^* = p_{st} + p_{ts}$, где p_{st} – вероятность перехода из состояния q_s в состояние q_t . Очевидно, для снижения переключательной активности элементов памяти расстояние по Хеммингу между кодами состояний q_s и q_t должно быть малым, если вероятность p_{st}^* высока.

На каждом j -м шаге находится разбиение множества V вершин графа G на два подмножества V_1 и V_2 , вводится переменная z_j и ей приписываются значения 0 (или 1) для состояний, соответствующих вершинам из множества V_1 и 1 (или 0) для состояний, соответствующих вершинам из множества V_2 . Затем удаляются ребра, соединяющие вершины из V_1 с вершинами из V_2 , и выполняется следующий, $(j + 1)$ -й, шаг. Процесс заканчивается, когда граф G оказывается пустым.

Задача разбиения множества V на подмножества V_1 и V_2 сводится к нахождению максимального разреза в графе G , т. е. такого разбиения, что сумма весов ребер, соединяющих вершины из V_1 с вершинами из V_2 , была бы максимальной. На последнем шаге ребрами связаны те вершины, соответствующие которым пары состояний связаны переходами со сравнительно большой вероятностью. Расстояния между кодами этих состояний равны единице.

В качестве примера рассмотрим автомат, для описания поведения которого используем модель, называемую автоматом с абстрактным состоянием [3]. Это поведение описывается с помощью многозначной переменной q и двоичными переменными, входными x_1, x_2, \dots, x_n и выходными y_1, y_2, \dots, y_m , вместо многозначных переменных a и b соответственно. Пусть автомат задан в виде табл. 5, где строки и столбцы соответствуют состояниям автомата, а на пересечении i -й строки и j -го столбца представлено условие перехода автомата из состояния q_i в состояние q_j .

Таблица 5

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
q_1			---0			---1
q_2			11-1	0----	1--0	10-1
q_3				--1-		--0-
q_4	-001		-101			--00 --1-
q_5			1-01	0-01	--00	--1-
q_6		11-1	11-0	0----	10--	

Автомат имеет шесть состояний и четыре входных переменных. Рассматриваемая задача позволяет не обращать внимания на выходные переменные, поэтому далее говорить о них не будем. Например, элемент таблицы на пересечении строки q_2 и столбца q_3 показывает, что автомат переходит из состояния q_2 в состояние q_3 , когда $x_1 = 1, x_2 = 1, x_4 = 1$, и не важно, какое значение имеет переменная x_3 . Пустые клетки показывают, что соответствующих переходов нет.

Допустим, что вероятности входных сигналов имеют равномерное распределение. Тогда условные вероятности p'_{ij} переходов (переход из состояния q_i в состояние q_j , когда автомат находится в состоянии q_i) будут представлены в табл. 6.

Таблица 6

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
q_1			1/2			1/2
q_2			1/8	1/2	1/4	1/8
q_3				1/2		1/2
q_4	1/8		1/8			6/8
q_5			1/8	1/8	1/4	1/2
q_6		1/8	1/8	1/2	1/4	

Для вычисления вероятностей нахождения автомата в различных состояниях надо решить следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
 P_4 &= 8P_1; P_6 = 8P_2; \\
 4P_1 + P_2 + P_4 + P_5 + P_6 &= 8P_3; \\
 4P_2 + 4P_3 + P_5 + 4P_6 &= 8P_4; \\
 P_2 + P_5 + P_6 &= 4P_5; \\
 4P_1 + P_2 + 4P_3 + 6P_4 + 4P_5 &= 8P_6; \\
 P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 &= 1.
 \end{aligned}$$

Тогда получим $P_1 = 10/279, P_2 = 116/2511, P_3 = 103/837, P_4 = 80/279, P_5 = 116/837, P_6 = 928/2511$. Абсолютные вероятности переходов p_{ij} показаны в табл. 7.

Таблица 7

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
q_1	5/279					5/279
q_2			29/5022	58/2511	29/2511	29/5022
q_3				103/1674		103/1674
q_4	10/279		10/279			60/279
q_5			29/1674	29/1674	29/837	58/837
q_6		116/2511	116/2511	464/2511	232/2511	

Табл. 8 показывает с допустимой точностью веса $w_{st} = 1 - p_{st}^*$ ребер графа G , где p_{st}^* – вероятность перехода в любом из двух направлений между состояниями q_s и q_t , соответствующими вершинам v_s и v_t .

Таблица 8

	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	
1	0,9821		0,9642	1	0,9821	v_1
	0,9942		0,9769	0,9885	0,9480	v_2
			0,9027	0,9827	0,8929	v_3
				0,9827	0,6002	v_4
					0,8395	v_5

На первом шаге находим разрез, определяемый множествами $V_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ и $V_2 = \{v_4, v_5, v_6\}$. Вводим переменную z_1 со значениями 0 на вершинах из множества V_1 и 1 на вершинах из множества V_2 . После удаления из графа G ребер, принадлежащих данному разрезу, получим табл. 9.

Таблица 9

	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	
1	0,9821					v_1
	0,9942					v_2
						v_3
				0,9827	0,6002	v_4
					0,8395	v_5

На втором шаге получаем $V_1 = \{v_2, v_5\}$ и $V_2 = \{v_1, v_3, v_4, v_6\}$, а на третьем – $V_1 = \{v_1, v_4\}$ и $V_2 = \{v_2, v_3, v_5, v_6\}$. Результатом процесса кодирования состояний являются следующие коды: $q_1 - 000, q_2 - 011, q_3 - 001, q_4 - 100, q_5 - 111, q_6 - 101$.

Качество решения задачи кодирования состояний автомата можно оценить величиной $D = \sum p_{ij}^* (d_{ij} - 1)$, где p_{ij}^* – вероятность перехода между состояниями q_i и q_j в любом направлении, d_{ij} – расстояние по Хэммингу между кодами состояний q_i и q_j , а суммирование ведется по всем парам состояний автомата. Эта величина была введена в работе [11]. Очевидно, что чем она меньше, тем лучше решение, и $D = 0$, если любой переход между состояниями соответствует переключению только одного элемента памяти в логической схеме, реализующей заданный автомат.

Для варианта кодирования, полученного выше, имеем $D = 0,196$. Если взять произвольное кодирование, например, закодируем состояния $q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6$ последовательностью натуральных чисел с нулем в двоичной системе счисления, т. е. $q_1 - 000, q_2 - 001, q_3 - 010, q_4 - 011, q_5 - 100, q_6 - 101$, то получим $D = 0,7369$. Ясно, что первый вариант лучше, чем второй.

3. Поиск разреза в графе. Пусть $G = (V, E)$ – граф с ребрами, взвешенными действительными числами. Разрез, близкий к максимальному, можно получить следующим образом. Поскольку мы рассматриваем эвристический подход к решению упомянутых задач логического проектирования, для поиска разреза в графе можно использовать «жадный» алгоритм, применяемый также в работе [12] для не взвешенного графа. Здесь мы распространяем этот алгоритм для графа со взвешенными ребрами. Он представляет собой последовательность шагов, на каждом из которых выбирается вершина v из множества V_2 и переносится во множество V_1 . Начальными значениями этих множеств являются $V_1 = \emptyset$ и $V_2 = V$, а вершина v выбирается, как описано ниже.

Пусть $d(v)$ – сумма весов ребер, инцидентных вершине v , и пусть $c(v)$ – сумма весов ребер, соединяющих вершину v с вершинами из множества V_1 . Перенос вершины v из множества V_2 во множество V_1 меняет сумму весов ребер, соединяющих вершины из V_1 с вершинами из V_2 на величину $h(v) = d(v) - 2c(v)$. На первом шаге эта величина равна $d(v)$, на последующих – может быть отрицательной. На каждом шаге выбирается та вершина, для которой величина $h(v)$ максимальна. Процесс заканчивается тогда, когда эта величина не является положительной для всех вершин из множества V_2 .

Чтобы проиллюстрировать этот процесс, возьмем для примера граф, представленный в табл. 2, в соответствии с которой имеем $d(v_1) = 37, d(v_2) = 36, d(v_3) = 40, d(v_4) = 39, d(v_5) = 40, d(v_6) = 43$ и $d(v_7) = 57$.

В начале первого шага $c(v_i) = 0$ и $h(v) = d(v_i)$ для любой вершины $v_i \in V_2$, поскольку в этот момент $V_1 = \emptyset$ и $V_2 = V$. Максимумом является $d(v_7) = 57$, а результатом первого шага – $V_1 = \{v_7\}$ и $V_2 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$.

На втором шаге имеем $h(v_1) = 17$, $h(v_2) = 14$, $h(v_3) = 26$, $h(v_4) = 23$, $h(v_5) = 14$ и $h(v_6) = 27$. Величина $h(v_6) = 27$ представляет максимум, и теперь $V_1 = \{v_6, v_7\}$ и $V_2 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$.

На третьем шаге имеем $h(v_1) = -3$, $h(v_2) = -4$, $h(v_3) = 24$, $h(v_4) = 3$ и $h(v_5) = 4$. Здесь $h(v_3) = 24$ является максимумом, и тогда $V_1 = \{v_3, v_6, v_7\}$ и $V_2 = \{v_1, v_2, v_4, v_5\}$. Третий шаг – окончательный, так как после него значения $h(v)$ для всех вершин $v \in V_2$ отрицательны.

Заключение. Методы теории графов успешно применяются для решения комбинаторных задач, возникающих при логическом проектировании дискретных устройств, что подтверждает подход, описанный в настоящей работе. Точные решения рассматриваемых задач могут быть получены только путем полного перебора многих вариантов, хотя это не всегда выполнимо из-за неполиномиальной сложности задач. Практический интерес представляют предложенные нами эвристические методы, ориентированные на использование в автоматизированных системах логического проектирования. Сравнение результатов, полученных этими методами, с другими способами решения задач показывают целесообразность использования предлагаемого подхода.

Список использованной литературы

1. Кристофидес, Н. Теория графов. Алгоритмический подход / Н. Кристофидес. – М.: Мир, 1978.
2. Поттосин, Ю. В. Табличные методы декомпозиции систем полностью определенных булевых функций / Ю. В. Поттосин, Е. А. Шестаков. – Минск: Белорус. наука, 2006.
3. Закревский, А. Д. Логические основы проектирования дискретных устройств / А. Д. Закревский, Ю. В. Поттосин, Л. Д. Черемисинова. – М.: Физматлит, 2007.
4. Benini, L. State assignment for low power dissipation / L. Benini, G. de Micheli. // IEEE J. of Solid State Circuits. – 1995. – Vol. 30, no. 3. – P. 32–40.
5. Perkowski, M. A. A Survey of Literature on Functional Decomposition. Version IV (Technical report) / M. A. Perkowski, S. Grygiel. – Portland: Portland State University, Department of Electrical Engineering, 1995.
6. Taghavi Afshord, S. A new suboptimal decomposition algorithm based on the tabular method / S. Taghavi Afshord, Yu. V. Pottosin // Танаевские чтения: докл. Шестой междунар. науч. конф. (27–28 марта 2014 г., Минск). – Минск: ОИПИ НАН Беларуси, 2014. – С. 161–165.
7. Поттосин, Ю. В. Метод минимизации системы полностью определенных булевых функций / Ю. В. Поттосин, Н. Р. Торопов, Е. А. Шестаков // Информатика. – 2008. – № 2 (18). – С. 102–110.
8. Мурога, С. Системное проектирование сверхбольших интегральных схем: в 2 кн. / С. Мурога. – М.: Мир, 1985. – Кн. 1.
9. Pedram, M. Power minimization in IC design: Principles and applications / M. Pedram // ACM Trans. Design Automat. Electron. Syst. – 1996. – Vol. 1. – P. 3–56.
10. Macii, E. High-level power modeling, estimation and optimization / E. Macii, M. Pedram, F. Somenzi // IEEE Transaction on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems. – 1998. – Vol. 17, no. 11. – P. 1061–1079.
11. Закревский, А. Д. Алгоритмы энергосберегающего кодирования состояний автомата / А. Д. Закревский. – Информатика. – 2011. – № 1 (29). – С. 68–78.
12. Закревский, А. Д. Раскраска графов при декомпозиции булевых функций / А. Д. Закревский // Логич. проектирование. – Минск: ИТК НАН Беларуси, 2000. – Вып. 5. – С. 83–97.

Поступила в редакцию 13.06.2016

ВУЧОНЫЯ БЕЛАРУСІ

СЕРГЕЙ ВЛАДИМИРОВИЧ АБЛАМЕЙКО

(К 60-летию со дня рождения)

24 сентября 2016 г. исполняется 60 лет известному белорусскому ученому в области информатики, обработки изображений и распознавания образов, академику Национальной академии наук Беларуси, доктору технических наук, профессору, ректору Белорусского государственного университета Сергею Владимировичу Абламейко.

Сергей Владимирович родился в г. п. Вороново Гродненской обл. В 1978 г. окончил механико-математический факультет Белорусского государственного университета. В 1984 г. успешно защитил кандидатскую, в 1990 г. – докторскую диссертации.

С 1978 г. – в Институт технической кибернетики АН БССР (с 2002 г. – Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси); с 1986 г. – заведующий созданной им лаборатории обработки и распознавания изображений, с 1998 г. – заместитель директора, в 2002–2008 гг. – генеральный директор. Одновременно в 2005–2012 гг. исполнял обязанности академика-секретаря Отделения физики, математики и информатики, с 2004 г. – член Президиума НАН Беларуси. В 2008 г. назначен ректором Белорусского государственного университета.

С. В. Абламейко разработаны методы предварительной обработки растровой графической информации, построения цифровых моделей графического документа по его растровому представлению, создана система обработки растровой графической информации, обеспечившая высокий уровень автоматизации ввода и обработки картографических изображений.

Под его руководством и при непосредственном участии разработаны основы теории, методы и алгоритмы обработки и распознавания изображений, принципы построения и методология создания автоматизированных систем обработки изображений. Эти результаты получили широкую известность. На их основе создан ряд конкретных автоматизированных систем обработки графической информации с приложениями в картографии, исследовании земной поверхности, медицине, машиностроении и приборостроении. Является автором более 450 научных публикаций, в том числе 15 монографий. Ученым создана сильная научная школа, получившая международное признание. Под его руководством и при его консультировании защищено 10 работ на соискание степени кандидата и 3 диссертационные работы на соискание степени доктора технических наук.

С. В. Абламейко внес значительный вклад в организационное развитие информатики в Республике Беларусь. В 1992 г. совместно с коллегами основал Белорусскую ассоциацию по обработке изображений, которая в 1993 г. была принята в состав Международной ассоциации по распознаванию образов (IAPR). В том же году совместно с С. Н. Демиденко создал Белорусский центр Британского института инженеров-электриков (IEE). В 1995 г. Сергей Владимирович стал главным членом IEE (Fellow of IEE) и старшим членом (Senior Member) Американского института инженеров по электротехнике и электронике (IEEE). В 1998 г. за весомый вклад в развитие теории обработки изображений ученый был избран главным членом Международной ассоциации



по распознаванию образов (Fellow of IAPR), в 2004 г. за большую организационную работу в ассоциации и научные достижения – вице-президентом, а в 2006 г. – первым вице-президентом IAPR.

Сергей Владимирович как научный руководитель программ Союзного государства «Космос-БР» и «СКИФ» внес весомый вклад в развитие исследований по космической тематике в Беларуси, создание Белорусской системы дистанционного зондирования Земли и самых мощных на территории СНГ суперкомпьютеров. Под его руководством выполнен ряд международных проектов по программам КОПЕРНИКУС, ИНТАС, МНТЦ.

В 1990 г. С. В. Абламейко стал лауреатом премии Ленинского комсомола Белоруссии за цикл работ «Создание и практическое применение средств цифровой обработки сигналов и изображений», в 2002 г. – Государственной премии Беларуси за цикл работ «Распознавание и анализ стохастических данных и цифровых изображений». В 2007 г. ему была присуждена премия НАН Беларуси за цикл работ «Медицинские информационные технологии и системы», в 2009 г. – премия РАН и НАН Беларуси за работу «Теория, методы и практическое использование параллельных вычислений на суперкомпьютерных архитектурах семейства СКИФ».

За исследования в области информационных технологий и космонавтики он награжден орденом Дружбы (2009, Россия), бронзовой медалью Норберта Винера Международной академии наук информации, информационных процессов и технологий (2003), медалью Франциска Скорины (2007), золотой медалью Ю. Гагарина (2007) и орденом К. Э. Циолковского Федерации космонавтики России (2015), а также наградами Российского космического агентства, министерств Республики Беларусь и международных организаций.

Сердечно поздравляем Сергея Владимировича с юбилеем и желаем ему крепкого здоровья, благополучия, новых творческих достижений и успехов.

*Отделение физики, математики и информатики НАН Беларуси,
Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси*

ИВАН ВАСИЛЬЕВИЧ ГАЙШУН

(К 70-летию со дня рождения)

29 сентября 2016 г. исполняется 70 лет известному белорусскому ученому-математику, академику Национальной академии наук Беларуси, доктору физико-математических наук, профессору, признанному специалисту в области дифференциальных уравнений, топологической динамики и методов математического моделирования Ивану Васильевичу Гайшуну.

Иван Васильевич родился в д. Петровичи Бобруйского р-на Могилевской обл. В 1964 г. после окончания Горбачевичской средней школы поступил на математический факультет Белорусского государственного университета. В 1969 г. окончил его с отличием и был направлен на работу в Институт математики АН БССР. В 1972 г. защитил кандидатскую, а в 1984 г. в Институте математики и механики Уральского отделения АН СССР – докторскую диссертацию. С декабря 1984 г. руководит отделом математической теории систем (до 1993 г. – лаборатория математического моделирования и анализа систем). В 1997–2002 гг. был вице-президентом НАН Беларуси, с 1992 г. и по настоящее время является директором Института математики НАН Беларуси.



Научные интересы И. В. Гайшуна сформировались под руководством академика Е. А. Барбашина. Высокий научный потенциал, тонкая математическая интуиция и широкая эрудиция позволили ученому существенно расширить спектр проблем теории динамических систем, пополнив его такими современными разделами, как многомерные, многопараметрические и нечеткие динамические системы; вполне интегрируемые системы на многообразиях; уравнения в полных производных в банаховых и локально выпуклых топологических пространствах; системы уравнений с изменяющейся структурой и системы с запаздыванием; управляемые непрерывные и дискретные линейные динамические системы, рассматриваемые совместно с различными топологическими и алгебраическими структурами (локально-компактными группами, кольцами, топологическими полями и телами). И. В. Гайшун не только инициировал масштабные исследования в этих разделах, но и получил основополагающие результаты, среди которых развитие теории устойчивости инвариантных множеств, основанное на понятии фильтра в общей топологии, и глубокое обобщение теории характеристических чисел Ляпунова на неавтономные линейные уравнения в полных производных в банаховых пространствах; критерии ограниченности, периодичности и почти периодичности решений уравнений в полных производных на локально выпуклых пространствах. Эти и ряд других результатов были опубликованы в монографиях «Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения» (1983), «Линейные уравнения в полных производных» (1989).

Иваном Васильевичем дано определение нечеткой динамической системы (F-системы), использующее оригинальную интерпретацию функции принадлежности Л. Заде, и проведено полное исследование устойчивости (по некоторому фильтру, обладающему свойством инвариантности) нечетких F-систем. Также определены управляемые линейные системы в нечетких пространствах и найдены признаки устойчивости и управляемости таких систем. Фундаментальной задаче моделирования с помощью дискретных систем распределенных в пространстве эволю-

ционных процессов посвящен ряд работ И. В. Гайшуна, в которых определены дискретные системы с изменяющейся структурой и изучены их свойства устойчивости, управляемости и вложимости.

Большой цикл исследований, выполненный Иваном Васильевичем по линейной теории управления, представлен в работах «Многопараметрические системы управления» (1996), «Введение в теорию линейных нестационарных систем» (1999), «Системы с дискретным временем» (2001). Так, ученым были развиты методы качественной теории многопараметрических дискретных систем управления, отлично зарекомендовавшие себя при исследовании популярного в приложениях класса 2D-систем. Позже полученные результаты по теории 2D-систем были обобщены им на значительно более широкий класс линейных систем, заданных в пространствах функций на топологических коммутативных группах. Теория уравнений в полных дифференциалах и по сей день занимает важное место в научной деятельности И. В. Гайшуна. Им определены гамильтоновы линейные и квазилинейные системы в полных дифференциалах и для указанного класса систем с периодическими коэффициентами получены критерии устойчивости и условия грубости свойства устойчивости при малых возмущениях параметров, сохраняющих полную интегрируемость и гамильтоновость системы; развита теория наблюдаемости линейных нестационарных систем в полных дифференциалах; доказан принцип максимума для класса таких систем и предложен способ построения минимальных реализаций линейных стационарных систем в полных дифференциалах.

В настоящее время ученый проводит исследования в области математической теории управления. Им разработаны основанные на идеях современной алгебры, функционального анализа и топологической динамики новые методы для изучения свойств робастности, устойчивости, стабилизируемости, управляемости и наблюдаемости различных классов линейных динамических систем. В математической теории систем одной из центральных является проблема классификации совокупности управляемых линейных систем относительно действий различных групп преобразований в пространстве состояний системы. И. В. Гайшун развил метод построения канонических форм линейных нестационарных дифференциальных и дискретных управляемых систем, что позволяет в ряде случаев получить решение упомянутой проблемы классификации. В монографии «Линейные системы с квазидифференцируемыми коэффициентами: управляемость и наблюдаемость движений» (совместно с А. И. Астровским, 2013) ученый представил систематическое применение техники квазидифференцирования в задачах наблюдения и управления линейных нестационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, что привело к новым, более сильным (по сравнению с известными) условиям наблюдаемости и управляемости, а также позволило разработать эффективные процедуры построения канонических систем наблюдения со скалярным выходом и систем управления с одномерным входным сигналом.

В научном творчестве Ивана Васильевича глубокие теоретические результаты гармонично сочетаются с решением прикладных задач в различных сферах науки и техники. Так, работая с группой кардиологов, он построил и исследовал математические модели функционирования сердечно-сосудистой системы человека, представленные в ряде статей и монографии «Демпфирующая функция артерий и неинвазивные методы ее оценки» (совместно с Е. И. Гайшун, А. М. Пристром, 2016). При его участии разработаны алгоритмы для решения обратных задач восстановления негладких коэффициентов нелинейных уравнений теплопроводности, вошедшие в монографию «Структурные свойства динамических систем и обратные задачи математической физики» (совместно с В. Т. Боруховым, В. И. Тимошпольским, 2009). Результаты по многомерным и управляемым системам непосредственно связаны с задачами анализа и синтеза автоматических систем регулирования, криптографии и цифровой обработки многомерных сигналов.

И. В. Гайшун автор свыше 300 научных публикаций и 8 монографий, две из которых – «Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения» и «Введение в теорию линейных нестационарных систем» – переизданы российским издательством «Едиториал УРСС» (М., 2004).

С 1986 г. И. В. Гайшун преподает на механико-математическом факультете Белгосуниверситета, щедро делится с молодежью накопленным опытом и знаниями. При его участии издан учебник

по высшей математике в трех томах. Авторитетный педагог, он с исключительным уважением и пониманием относится к своим ученикам и сотрудникам. Под его руководством подготовлено 6 кандидатов и 4 доктора наук.

Иван Васильевич много и плодотворно трудится над организацией научных исследований в Беларуси: был членом Президиума НАН Беларуси, членом Президиума ВАК Беларуси, входил в Совет Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований. В настоящее время он член редколлегии журналов «Дифференциальные уравнения», «Доклады Национальной академии наук Беларуси», «Весті Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук», «Computational Methods in Applied Mathematics»; является руководителем республиканского научного семинара по математической теории систем, на котором прошло апробацию множество диссертационных работ.

Имя И. В. Гайшуна широко известно мировой научной общественности. Он возглавляет Белорусское математическое общество, является членом Европейского математического общества, Американского математического общества, принимает участие во многих международных конгрессах, конференциях, школах, сотрудничает с математическими центрами многих стран.

Иван Васильевич удостоен премии комиссии Совета Министров СССР за разработку и выполнение спец. темы (1981); Почетной грамоты Совета Министров за высокие достижения в научной деятельности (1996, 2011); является лауреатом Государственной премии Республики Беларусь за цикл работ «Исследование асимптотических свойств дифференциальных и дискретных систем» (2000); Премии Академий наук Украины, Беларуси и Молдовы (2012).

Глубокие творческие идеи, энергия ученого и высокие моральные качества позволили Ивану Васильевичу снискать авторитет чуткого и доброжелательного человека, мудрого и корректного руководителя. Мы искренне поздравляем Ивана Васильевича с юбилеем, желаем ему доброго здоровья, благополучия и осуществления всех творческих замыслов.

*Отделение физики, математики и информатики НАН Беларуси,
Институт математики НАН Беларуси*

ФАИНА МИХАЙЛОВНА КИРИЛЛОВА

(К юбилею)



29 сентября 2016 г. празднует свой юбилей известный ученый в области оптимального управления, заслуженный деятель науки Республики Беларусь, член-корреспондент Национальной академии наук Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор Фаина Михайловна Кириллова.

Фаина Михайловна родилась в пос. Зуевка Кировской обл. Российской Федерации. С 1949 по 1954 г. училась на физико-математическом факультете Уральского государственного университета им. А. М. Горького, который окончила с отличием и была направлена на работу в Уральский политехнический институт. На становление Ф. М. Кирилловой как ученого и формирование ее научных взглядов большое влияние оказали выдающиеся ученые Н. Н. Красовский и Е. А. Барбашин. В 1960 г. Фаина Михайловна начала работать в Уральском филиале АН СССР, в 1961 г. была переведена в Свердловское отделение Математического института им. В. А. Стеклова

АН СССР. В 1962 г. успешно защитила кандидатскую, а в 1967 г. – докторскую диссертацию.

С 1967 г. и по настоящее время работает в Институте математики НАН Беларуси. С 1970 по 2008 г. руководила лабораторией прикладной математики и механики (в 1975 г. преобразована в отдел теории процессов управления). Долгое время успешно совмещала научную деятельность с преподавательской работой в Белорусском государственном университете.

Ф. М. Кириллова является известным в нашей стране и за рубежом специалистом в теории управления и оптимизации. В конце 1950-х гг. она впервые применила идеи и методы функционального анализа в новом, только зарождающемся разделе математической кибернетики, – теории оптимального управления. Дальнейшие исследования ученого связаны с созданием и разработкой математического аппарата для проверки линейных динамических систем с последствием на управляемость и наблюдаемость; доказательством выдвинутого ею совместно с доктором физико-математических наук, профессором Р. Ф. Габасовым принципа квазимаксимума для дискретных систем; теорией необходимых условий оптимальности для особых управлений; условиями оптимальности высокого порядка; разработкой конструктивной теории оптимального управления на базе нового подхода к построению алгоритмов решения задач линейного, квадратичного, кусочно-линейного программирования; общей теорией экстремальных задач; оптимизацией процессов управления в условиях неопределенности; решением проблемы синтеза оптимальных систем.

Научные достижения Ф. М. Кирилловой получили широкую известность и признание специалистов во всем мире, свидетельством чего являются многочисленные выступления с пленарными докладами на самых представительных научных форумах. Для чтения циклов лекций Фаина Михайловна приглашалась в университеты и научные центры России, США, Германии, Швейцарии, Италии, Нидерландов, Польши, Литвы, Китая, Кореи, Венесуэлы, Алжира.

Ф. М. Кириллова автор свыше 300 научных работ, в том числе 8 монографий: «Качественная теория оптимальных процессов» (М., 1971, совместно с Р. Габасовым; переведена и издана в США), «Оптимизация линейных систем» (Минск, 1973, совместно с Р. Габасовым; переведена и издана

в США и Японии), «Особые оптимальные управления» (М., 1973, 2-е изд. 2013, совместно с Р. Габасовым; переведена и издана в США), «Принцип максимума в теории оптимального управления» (Минск, 1974, совместно с Р. Габасовым), «Основы динамического программирования» (Минск, 1975, совместно с Р. Габасовым), «Методы линейного программирования» (ч. 1–3, Минск, 1977–1980, совместно с Р. Габасовым), «Конструктивные методы оптимизации» (ч. 1–5, Минск, 1984–1998, в соавт.), «Optimal Feedback Control» (Springer, 1995, совместно с Р. Габасовым). Учебное пособие «Методы оптимизации» вышло тремя изданиями (1975, 1981, 2011, совместно с Р. Габасовым) и было переиздано в США.

В 1996 г. Ф. М. Кириллова была избрана членом-корреспондентом НАН Беларуси, став единственной в истории белорусской науки женщиной-математиком, удостоенной столь высокого звания.

Ф. М. Кириллова совместно с Р. Ф. Габасовым является основателем белорусской научной школы по математическим методам оптимального управления, известной далеко за пределами республики. Под ее руководством защищены 47 кандидатских и 7 докторских диссертаций. За заслуги в целевой подготовке научных кадров ей присвоено звание «Почетный доктор Иркутского государственного университета» (2001) и вручена государственная награда Социалистической Республики Вьетнам – медаль «За заслуги в просвещении» (2001).

В 2002 г. журнал «Control Systems Magazine» Международной ассоциации IEEE (США) назвал Ф. М. Кириллову одной из шести женщин-ученых, оказавших наибольшее влияние на развитие теории управления в XX столетии.

Фаина Михайловна ведет большую научно-организационную работу на международном уровне. Она занимала официальные посты в Международной федерации по автоматическому управлению (IFAC): член Национального комитета СССР по автоматическому управлению (1975–1991), член рабочей группы IFAC по применениям нелинейного программирования в управлении (1978–1987), заместитель председателя технического комитета IFAC по математическим методам в управлении (1984–1987), председатель рабочей группы IFAC по применениям оптимизации в управлении (1987–1994), председатель рабочей группы IFAC по оптимальному управлению (1996–2002). Являлась членом редколлегии международных журналов «Optimization», «Control and Cybernetics», «Applied and Computational Mathematics», под ее непосредственным руководством было организовано несколько престижных международных конференций по проблемам управления.

Научная и научно-организационная деятельность Ф. М. Кирилловой получила высокую правительственную оценку. Она является лауреатом Премии Комиссии Совета Министров СССР (1981), Премии Совета Министров СССР (1986), Премии Академии наук Беларуси (1995), удостоена бронзовой медали ВДНХ СССР (1985).

Фаина Михайловна – целеустремленный, настойчивый, принципиальный ученый, педагог и организатор, ответственный и честный человек.

От всей души поздравляем Фаину Михайловну с юбилеем, желаем ей крепкого здоровья, счастья и новых творческих свершений.

*Отделение физики, математики и информатики НАН Беларуси,
Институт математики НАН Беларуси*

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Редакция журнала «Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук» просит авторов руководствоваться приведенными ниже правилами.

I. Статьи о результатах работ, проведенных в научных учреждениях, должны иметь разрешение на опубликование (сопроводительное письмо ректората или дирекции соответствующего института либо выписку из протокола заседания ученого совета, отдела или кафедры, а также акт экспертизы).

II. Статья предоставляется в редакцию в двух экземплярах на белорусском, русском или английском языках; шрифт – Times New Roman, кегль – 11 (в том числе в формулах); межстрочный интервал – 1,5. Занумерованные формулы выключаются в отдельную строку. Формулировки утверждений (теорем, лемм, предложений и следствий) должны быть выполнены курсивом. В тексте не допускаются рукописные вставки и вклейки. Статья должна быть подписана всеми авторами.

III. Статья должна иметь следующую структуру:

1. Индекс по Универсальной десятичной классификации (УДК);

инициалы и фамилии авторов;

название статьи;

полное наименование учреждений, где работают авторы, с указанием города и страны, адрес электронной почты каждого автора.

2. Аннотация (авторское резюме) объемом 150–250 слов должна кратко представлять результаты работы и быть понятной, в том числе и в отрыве от основного текста статьи; должна быть информативной, хорошо структурированной (один из вариантов написания аннотации – краткое повторение структуры статьи, включающее введение, цели и задачи, методы, результаты, заключение или выводы).

3. Ключевые слова – набор слов, отражающих содержание текста в терминах объекта, научной отрасли и методов исследования; рекомендуемое количество ключевых слов 5–10.

4. Затем метатекстовые данные (все то, что предшествует основному тексту статьи) приводятся на *английском языке*, причем аннотация должна быть оригинальной (т. е. не являться дословным переводом русскоязычной аннотации). Если статья англоязычная – вышеуказанные данные приводятся на русском (белорусском) языке.

5. Основной текст статьи не должен превышать 16 с. (т. е. около 40 тыс. знаков); в этот объем также входят таблицы и рисунки (до 7–8). Изложенный материал должен быть четко структурированным: введение, цели и задачи, методы, результаты, заключение (выводы). В русско- и белорусскоязычных статьях рекомендуется делать подрисуночные подписи и надписи на самих иллюстрациях на двух языках – *русском (белорусском) и английском*.

6. Список использованной литературы (не более 40 ссылок) оформляется в соответствии с требованиями Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь (ГОСТ 7.1-2003). Цитированная литература приводится общим списком по мере упоминания, ссылки в тексте даются порядковым номером в квадратных скобках (напр., [1]); ссылки на неопубликованные работы не допускаются).

7. Затем приводится список цитированных источников в *романском алфавите* (латиница) («References») со следующей структурой: авторы (транслитерация), название статьи в транслитерированном варианте [перевод названия статьи на английский язык в квадратных скобках], название русскоязычного источника (транслитерация) [перевод названия источника на английский язык – парафраз (для журналов можно не делать)], выходные данные с обозначениями на английском языке.

Примеры подготовлены по материалам методических рекомендаций «Редакционная подготовка научных журналов для включения в зарубежные индексы цитирования» О. В. Кирилловой (http://elsevierscience.ru/files/kirillova_editorial.pdf).

- **Описание статьи из журналов:**
Zagurenko A. G., Korotovskikh V. A., Kolesnikov A. A., Timonov A. V., Kardymon D. V. Tekhniko-ekonomicheskaya optimizatsiya dizaina gidrorazryva plasta [*Techno-economic optimization of the design of hydraulic fracturing*]. Neftyanoe khozyaistvo = Oil Industry, 2008, no.11, pp. 54–57.
- **Описание статьи из электронного источника:**
Swaminathan V., Lepkoswka-White E., Rao B. P. *Browsers or buyers in cyberspace? An investigation of electronic factors influencing electronic exchange*. Journal of Computer-Mediated Communication, 1999, vol. 5, no. 2. Available at: <http://www.ascusc.org/jcmc/vol5/issue2/> (Accessed 28 April 2011).
- **Описание статьи с DOI:**
Zhang Z., Zhu D. *Experimental research on the localized electrochemical micromachining*. Russian Journal of Electrochemistry, 2008, vol. 44, no. 8, pp. 926–930. doi: 10.1134/S1023193508080077.
- **Описание статьи из продолжающегося издания (сборника трудов):**
Astakhov M. V., Tagantsev T. V. Eksperimental'noe issledovanie prochnosti soedinenii «stal'-kompozit» [*Experimental study of the strength of joints "steel-composite"*]. Trudy MGTU «Matematicheskoe modelirovanie slozhnykh tekhnicheskikh sistem» [*Proc. of the Bauman MSTU "Mathematical Modeling of Complex Technical Systems"*], 2006, no. 593, pp. 125–130.
- **Описание материалов конференций:**
Usmanov T. S., Gusmanov A. A., Mullagalin I. Z., Muhametshina R. Ju., Chervyakova A. N., Sveshnikov A. V. Osobennosti proektirovaniya razrabotki mestorozhdeniy s primeneniem gidrorazryva plasta [*Features of the design of field development with the use of hydraulic fracturing*]. Trudy 6 Mezhdunarodnogo Simpoziuma "Novye resursoberegayushchie tekhnologii nedropol'zovaniya i povysheniya neftegazootdachi" [*Proc. 6th Int. Symp. "New energy saving subsoil technologies and the increasing of the oil and gas impact"*]. Moscow, 2007, pp. 267–272.
- **Описание книги (монографии, сборники):**
Izvekov V. I., Serikhin N. A., Abramov A. I. Proektirovanie turbogeneratorov [*Design of turbo-generators*]. Moscow, MEI Publ., 2005, 440 p.
- **Описание Интернет-ресурса:**
APA Style (2011). Available at: <http://www.apastyle.org/apa-style-help.aspx> (accessed 5 February 2011).
Pravila Tsitirovaniya Istochnikov (*Rules for the Citing of Sources*) Available at: <http://www.scribd.com/doc/1034528/> (accessed 7 February 2011)
- **Описание диссертации или автореферата диссертации:**
Semenov V. I. Matematicheskoe modelirovanie plazmy v sisteme kompaktnyi tor. Diss. dokt. fiz.-mat. nauk [*Mathematical modeling of the plasma in the compact torus. Dr. phys. and math. sci. diss.*]. Moscow, 2003. 272 p.
- **Описание ГОСТа:**
GOST 8.586.5–2005. Metodika vypolneniia izmerenii. Izmerenie raskhoda i kolichestva zhidkosti i gazov s pomoshch'iu standartnykh suzhaiushchikh ustroystv [*State Standard 8.586.5 – 2005. Method of measurement. Measurement of flow rate and volume of liquids and gases by means of orifice devices*]. Moscow, Standartinform Publ., 2007. 10 p.
- **Описание патента:**
Palkin M. V., e.a. Sposob orientirovaniia po krenu letatel'nogo apparata s opticheskoi golovkoi samonavedeniia [*The way to orient on the roll of aircraft with optical homing head*]. Patent RF, no. 2280590, 2006.

8. Если присутствует информация о финансировании (поддержке грантами проектов и т. п.), ее следует давать на русском (белорусском) и английском языках под заголовками «Благодарности» («Acknowledgements»).

IV. Для подготовки метаанных (так называемый информационный лист) на отдельной странице следует указать на русском и английском языках для каждого автора: фамилию, имя и отчество (полностью), ученую степень, звание, должность, место работы с указанием адреса, контактную информацию (e-mail, телефоны).

V. Электронный вариант статьи предоставляется на диске, флэшке или присылается по электронной почте в редакцию журнала – fmvesti@mail.ru. Текст должен быть набран в Word под Windows, формулы – в редакторе MathType. Собственным редактором формул версий Microsoft Office 2007 и выше пользоваться нельзя, так как в редакционно-издательском процессе он не поддерживается. Вставку символов выполнять через меню «Вставка\Символ». Выключку вверх и вниз (C^2 , C_4) выполнять через меню «Формат\Шрифт\Верхний индекс», «Формат\Шрифт\Нижний индекс». Латинские буквы необходимо набирать курсивом, греческие – прямо (для набора греческих символов следует пользоваться гарнитурой Symbol). Обозначения математических функций (lim, sup, ln, sin, Re, Im и т. п.), символы химических элементов (N, C1) также набираются прямым шрифтом.

VI. Черно-белые и цветные рисунки вставляются в текст статьи (Word), а также даются в виде отдельных файлов в формате tif (600 точек на дюйм). Желательно также предоставлять их в формате оригинала (Corel, диаграммы в Excel, Origin Pro и т. д.), т. е. в той программе, в которой они выполнены. Текст на рисунках набирается основной гарнитурой, причем начертание символов (греческое, латинское) должно соответствовать их начертанию в тексте. Размер кегля соизмерим с размером рисунка (желательно 8 пунктов). На обороте рисунков (если они даются отдельно) указываются фамилии авторов, название статьи. Фотографии предоставляются в виде файлов (tif, jpg, png, eps) и в распечатанном виде.

VII. Поступившая в редакцию статья направляется на рецензию, затем визируется членом редколлегии. Основным критерием целесообразности публикации является новизна и информативность статьи. Если по рекомендации рецензента статья возвращается автору на доработку, то переработанная рукопись вновь рассматривается редколлегией. Статьи не по профилю журнала возвращаются авторам после заключения редколлегии.

Материалы для публикации следует направлять по адресу: ул. Академическая, 1, к. 119, редакция журнала «Весці НАН Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук», 220072, г. Минск, Республика Беларусь: тел. для справок: +375 17 369 76 52 (среда); +375 17 284 19 19 (четверг, пятница), либо по электронной почте: fmvesti@mail.ru. либо через онлайн-форму на сайте.