

ВЕСЦІ НАЦЫЯНАЛЬнай АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСІ

СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК НАВУК. 2017. № 1

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ

СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК. 2017. № 1

Журнал основан в январе 1965 г.

Выходит четыре раза в год

Учредитель – Национальная академия наук Беларуси

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь,
свидетельство о регистрации № 392 от 18.05.2009

*Входит в Перечень научных изданий Республики Беларусь
для опубликования результатов диссертационных исследований,
включен в базу данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ)*

Главный редактор

Сергей Яковлевич Килин – Президиум Национальной академии наук Беларуси

Редакционная коллегия

- Н. М. Олехнович** – Научно-практический центр Национальной академии наук Беларуси по материаловедению (*заместитель главного редактора*),
В. А. Орлович – Отделение физики, математики и информатики Национальной академии наук Беларуси (*заместитель главного редактора*),
Т. Е. Янчук – (*ведущий редактор журнала*)
С. В. Абламейко – Белорусский государственный университет
С. М. Абрамов – Институт программных систем Российской академии наук
В. М. Анищик – Белорусский государственный университет
А. И. Белоус – Холдинг «ИНТЕГРАЛ»
И. В. Гайшун – Институт математики Национальной академии наук Беларуси
С. В. Гапоненко – Белорусский республиканский фонд фундаментальных исследований
А. М. Гончаренко – Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси
А. П. Достанко – Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
Н. А. Изобов – Институт математики Национальной академии наук Беларуси
Н. С. Казак – Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси

В. И. Корзюк – Белорусский государственный университет
Ф. П. Коршунов – Научно-практический центр Национальной академии наук Беларуси по материаловедению
Ю. А. Курочкин – Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси
Н. А. Поклонский – Белорусский государственный университет
С. А. Тихомиров – Отделение физики, математики и информатики Национальной академии наук Беларуси
Л. М. Томильчик – Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси
А. В. Тузиков – Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси
Ю. С. Харин – Научно-исследовательский институт прикладных проблем математики и информатики Белорусского государственного университета
А. Ф. Чернявский – Институт прикладных физических проблем имени А. Н. Севченко Белорусского государственного университета
Л. А. Янович – Институт математики Национальной академии наук Беларуси
В. И. Янчевский – Институт математики Национальной академии наук Беларуси

Редакционный совет

С. Я. Килин – Президиум Национальной академии наук Беларуси (Республика Беларусь)
С. В. Абламейко – Белорусский государственный университет (Республика Беларусь)
Ж. И. Алферов – Санкт-Петербургский национальный исследовательский Академический университет Российской академии наук (Российская Федерация)
А. Л. Асеев – Президиум Сибирского отделения Российской академии наук (Российская Федерация)
Й. Врахтруп – Институт физики (3) Штутгартского университета (Федеративная Республика Германия)
И. В. Гайшун – Институт математики Национальной академии наук Беларуси (Республика Беларусь)
А. М. Желтиков – Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (Российская Федерация)
В. В. Козлов – Математический институт имени В. А. Стеклова Российской академии наук (Российская Федерация)
Г. Лёйхс – Институт физики света имени М. Планка (Федеративная Республика Германия)
Д. С. Могилевцев – Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси (Республика Беларусь)
В. А. Орлович – Отделение физики, математики и информатики Национальной академии наук Беларуси (Республика Беларусь)
А. Цайлингер – Институт квантовой оптики и квантовой информатики Австрийской академии наук (Австрийская Республика)

Адрес редакции:

*ул. Академическая, 1, к. 119, 220072, г. Минск, Республика Беларусь.
Тел.: + 375 17 284-19-19; e-mail: fmvesti@mail.ru*

vestifm.belnauka.by

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ.

Серия физико-математических наук. 2017. № 1.

Выходит на русском, белорусском и английском языках

Редактор *Т. Е. Янчук*

Компьютерная верстка *О. Л. Смольской*

Подписано в печать 15.03.2017. Выход в свет 27.03.2017. Формат 60×84¹/₈. Бумага офсетная.

Печать цифровая. Усл. печ. л. 14,88. Уч.-изд. л. 16,4. Тираж 72 экз. Заказ 31.

Цена: индивидуальная подписка – 10,34 руб., ведомственная подписка – 25,29 руб.

Издатель и полиграфическое исполнение:

Республиканское унитарное предприятие «Издательский дом «Беларуская навука».

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/18 от 02.08.2013. ЛП № 02330/455 от 30.12.2013. Ул. Ф. Скорины, 40, 220141, г. Минск, Республика Беларусь

© РУП «Издательский дом «Беларуская навука»,
Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук, 2017

PROCEEDINGS OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF BELARUS

PHYSIC AND MATHEMATICS SERIES, 2017, no. 1

The Journal was founded in January 1965

Periodicity is 4 issues per annum

Founder is the National Academy of Sciences of Belarus

The journal is registered on May 18, 2009 by the Ministry of Information of the Republic of Belarus
in the State Registry of Mass Media, reg. no. 392

*The Journal is included in The List of Journals for Publication
of the Results of Dissertation Research in the Republic of Belarus
and in the database of Russian Science Citation Index (RSCI)*

Editor-in-Chief

Sergei Kilin – Presidium of the National Academy of Sciences of Belarus

Editorial Board

- N. M. Olekhovich** – The Scientific and Practical Materials Research Center of the National Academy of Sciences of Belarus (*Associate Editor-in-Chief*)
V. A. Orlovich – Department of Physics, Mathematics and Informatics of the National Academy of Sciences of Belarus (*Associate Editor-in-Chief*)
T. E. Yanchuk (*lead editor*)
S. V. Ablameyko – Belarusian State University
S. M. Abramov – Program Systems Institute of the Russian Academy of Sciences
V. M. Anishchik – Belarusian State University
A. I. Belous – “INTEGRAL” Holding
I. V. Gaishun – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus
S. V. Gaponenko – Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research
A. M. Goncharenko – B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus
A. P. Dostanko – Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics
N. A. Izobov – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus
N. S. Kazak – B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus
V. I. Korzyuk – Belarusian State University
F. P. Korshunov – The Scientific and Practical Materials Research Center of the National Academy of Sciences of Belarus
Yu. A. Kurochkin – B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus
N. A. Poklonskii – Belarusian State University
S. A. Tikhomirov – Department of Physics, Mathematics and Informatics of the National Academy of Sciences of Belarus
L. M. Tomil'chik – B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus
A. V. Tuzikov – United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus

Yu. S. Kharin – Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics of the Belarusian State University
A. F. Chernyavskii – A. N. Sevchenko Institute of Applied Physical Problems of Belarusian State University
L. A. Yanovich – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus
V. I. Yanchevskii – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus

Editorial Council

S. Ya. Kilin – Presidium of the National Academy of Sciences of Belarus (Republic of Belarus)
S. V. Ablameyko – Belarusian State University (Republic of Belarus)
Z. I. Alferov – St Petersburg National Research Academic University of the Russian Academy of Sciences (Russian Federation)
A. L. Aseev – Presidium of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences (Russian Federation)
J. Wrachtrup – Institute of Physics (3) of the University of Stuttgart (Federal Republic of Germany)
I. V. Gaishun – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (Republic of Belarus)
A. M. Zheltikov – Lomonosov Moscow State University (Russian Federation)
V. V. Kozlov – Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences (Russian Federation)
G. Leuchs – Max Planck Institute for the Science of Light (Federal Republic of Germany)
D. S. Mogilevcev – B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (Republic of Belarus)
V. A. Orlovich – Department of Physics, Mathematics and Informatics of the National Academy of Sciences of Belarus (Republic of Belarus)
A. Zeilinger – Institute for Quantum Optics and Quantum Information of the Austrian Academy of Sciences (Republic of Austria)

Address of the Editorial Office:

*1, Akademicheskaya Str., room 119, 220072, Minsk, Republic of Belarus.
Tel.: +375 17 284-19-19; e-mail: fmvesti@mail.ru*

vestifm.belnauka.by

PROCEEDING OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF BELARUS.

Physic and Mathematics series, 2017, no. 1.

Printed in Russian, Belarusian and English languages

Editor *T. E. Yanchuk*

Computer imposition *O. L. Smolskaya*

It is sent of the press 15.03.2017. Appearance 27.03.2017. Format 60×84 $\frac{1}{8}$. Offset paper.
The press digital. Printed pages 14,88. Publisher's signatures 16,4. Circulation 72 copies. Order 31.
Price: individual subscription – 10,34 byn., departmental subscription – 25,29 byn.

Publisher and printing execution:

Republican unitary enterprise "Publishing House "Belaruskaya Navuka".

Certificate on the state registration of the publisher, manufacturer, distributor of printing editions
No. 1/18 dated August 2, 2013. License for the press no. 02330/455 dated December 30, 2013.

Address: F. Scorina Str., 40, 220141, Minsk, Republic of Belarus.

© RUE "Publishing House "Belaruskaya Navuka",
Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physic and Mathematics series, 2017

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Егоров А. Д. О приближенных формулах для вычисления одного класса функционалов от пуассоновского процесса	7
Худяков А. П., Трофимук А. А. Интерполяционные формулы Эрмита – Биркгофа относительно алгебраической и тригонометрической систем функций с одним специальным узлом	14
Дирвук Е. В. О приближенном вычислении интегралов с особенностями на концах отрезка интегрирования	29
Корзюк В. И., Нгуен Ван Винь. Решение задачи для нестрого гиперболического уравнения четвертого порядка с двукратными характеристиками	38
Столярчук И. И. Решение смешанных задач методом характеристик для волнового уравнения с интегральным условием	53
Копать Д. Я., Маталыцкий М. А. О нестационарном распределении вероятностей состояний марковской сети с бесконечнолинейными системами обслуживания в условиях высокой нагрузки	63
Леваков А. А., Задворный Я. Б. Существование измеримых согласованных селекторов многозначных отображений	70
Палуха В. Ю. Статистические тесты на основе оценок энтропии для проверки гипотез о равномерном распределении случайной последовательности	79
Швед О. Л. Учет упругой анизотропии триклинного упругопластического материала	89

ФИЗИКА

Низовцев А. П., Пушкарчук А. Л., Кутень С. А., Пушкарчук В. А., Килин С. Я., Лузанов А. В., Жикол О. А. Стабильные электронно-ядерные спиновые системы NV ⁻¹³ C в алмазе для квантовых технологий	98
Лэ Тхи Зиену Хьен, Кутень С. А., Хрущинский А. А. Распределение начальной ионизации в рабочем объеме ионизационной камеры	111

ИНФОРМАТИКА

Дудкин А. А., Перцев Д. Ю. Алгоритм сжатия гиперспектральных данных дистанционного зондирования Земли	120
--	-----

УЧЕНЫЕ БЕЛАРУСИ

Орлович Валентин Антонович (К 70-летию со дня рождения)	127
--	-----

CONTENTS**MATHEMATICS**

Egorov A. D. Approximate formulas for evaluation of one-class functionals of the Poisson process	7
Khudyakov A. P., Trofimuk A. P. Interpolation Hermite – Birkhoff-type formulas with respect to the algebraic and trigonometric systems of functions with one special node	14
Dirvuk Y. V. Approximate computation of integrals with the singularities on integration interval ends	29
Korzyuk V. I., Nguyen Van Vinh. Solving the problem for the fourth-order nonstrictly hyperbolic equation with double characteristics	38
Stolyarchuk I. I. Solution of the mixed problems by the method of characteristics for the wave equation with the integral condition	53
Kopats D. J., Matalytski M. A. Non-stationary distribution of the probability states of the Markov network with infinite-server queuing systems operating at high load	63
Levakov A. A., Zadvornyy Y. B. Existence of measurable adapted selectors of set-valued functions	70
Palukha U. Yu. Statistical tests based on entropy estimates for checking the hypotheses of the uniform distribution of a random sequence	79
Shved O. L. Considering the increase in elastic anisotropy of triclinic elastic-plastic material	89

PHYSICS

Nizovtsev A. P., Pushkarchuk A. L., Kuten S. A., Pushkarchuk V. A., Kilin S. Ya., Luzanov A. V., Zhikol O. A. Robust electronic-nuclear NV- ¹³ C spin systems in the diamond for quantum technologies	98
Le Thi Dieu Hien, Kuten S. A., Khrutchinsky A. A. Initial ionization distribution in the active volume of the ionization chamber	111

INFORMATICS

Doudkin A. A., Pertsau D. Yu. Compression algorithm of the hyperspectral data of Earth remote sensing	120
--	-----

SCIENTISTS OF BELARUS

Orlovich Valentin Antonovich (70th anniversary)	127
--	-----

МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

УДК 519.21+519.6

Поступила в редакцию 08.12.2016
Received 08.12.2016

А. Д. Егоров

Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

**О ПРИБЛИЖЕННЫХ ФОРМУЛАХ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА
ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ ПУАССОНОВСКОГО ПРОЦЕССА**

Данная работа посвящена построению приближенных формул для вычисления математического ожидания нелинейных функционалов от случайных процессов. Предполагается, что рассматриваемые случайные процессы допускают хаотические разложения по кратным пуассоновским стохастическим интегралам. Используется подход, основанный на требовании точности приближенных формул для функциональных многочленов третьей степени от траекторий процесса. Применение формул рассматриваемого типа связано с их использованием в качестве элементарных при построении составных формул, сходящихся к точным значениям ожиданий, а также в качестве аппроксимаций математических ожиданий на малом временном промежутке. В случае разложения в бесконечный ряд рассматриваются аппроксимационно точные формулы, в которых используется конечный отрезок хаотического разложения.

Ключевые слова: функционалы от случайных процессов, математические ожидания, приближенные формулы, кратные пуассоновские стохастические интегралы, хаотические разложения.

A. D. Egorov

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

APPROXIMATE FORMULAS FOR EVALUATION OF ONE-CLASS FUNCTIONALS OF THE POISSON PROCESS

This work is devoted to the construction of approximate formulas for calculation of mathematical expectation of nonlinear functionals defined along the trajectories of random processes. Computation of mathematical expectation of functionals of random processes by the quadrature method is the task that depends heavily on a form in which the process is given. A lot of functional quadrature formulas are built in the cases where the characteristic functional of the process is known in explicit form. Some results are obtained in the cases where the process is the solution of the stochastic differential Itô equation. Recently, the author has proposed the approach to an approximate evaluation of mathematical expectation of a class of nonlinear random functionals based on the use of the Wiener chaos expansion. The article uses chaos expansion with respect to multiple Poisson – Itô integrals to construct functional quadrature formulas for calculating nonlinear functionals of the stochastic process defined on the probability space generated by the Poisson process. The formula is exact for the third-degree symmetric functional polynomial, so the product formula of multiple Poisson – Itô integrals is used for construction.

Keywords: functionals of random processes, mathematical expectations, approximate formulas, multiple stochastic Poisson stochastic integrals, chaotic expansions.

Введение. Построение квадратурных формул для вычисления математических ожиданий нелинейных функционалов от случайных процессов является актуальным направлением исследований в силу большого разнообразия способов задания случайных процессов, возникающих при решении задач стохастического анализа. При этом часто конечномерные распределения процесса не известны, как это имеет место, например, при вычислении ожиданий функционалов от решений стохастических уравнений. В указанных случаях при построении приближенных формул используются другие характеристики процесса, если они заданы или их можно найти, такие как характеристические функционалы, смешанные моменты, спектральные функции и др. [1–6].

В [7] получены и исследованы приближенные формулы, в которых использованы разложения исходного процесса в хаосы Винера. Настоящая работа посвящена построению приближенных формул для вычисления математического ожидания нелинейных функционалов от случайных процессов, заданных хаотическим разложением по кратным пуассоновским интегралам. Используется подход, основанный на требовании точности приближенных формул для функциональных многочленов третьей степени от траекторий процесса.

Рассмотрим случайный процесс X_t , $t \in [0, T]$, $T \leq \infty$, который является квадратично интегрируемым функционалом от пуассоновского процесса и, таким образом, допускает разложение по кратным стохастическим интегралам [8–11]:

$$\begin{aligned} X_t &= \sum_{n=0}^{\infty} I_n(x_{t,n}), \quad I_n(x_{t,n}) = n! \int_0^T \int_0^{\bar{t}_n} \cdots \int_0^{\bar{t}_2} x_{t,n}(t_1, \dots, t_n) dP(t_1) \cdots dP(t_n) \equiv \\ &\equiv \int_{[0, T]^n} x_{t,n}(t_1, \dots, t_n) dP(t_1) \cdots dP(t_n), \end{aligned} \quad (1)$$

где P_t – центрированный пуассоновский процесс. Не ограничивая общности, мы полагаем интенсивность пуассоновского процесса равной единице. Имеют место формулы [11]

$$I_n(f_n) I_m(g_m) = \sum_{r=0}^{2(n \wedge m)} \sum_{r \leq 2i \leq 2(r \wedge n \wedge m)} i! \binom{n}{i} \binom{m}{i} \binom{i}{r-i} I_{n+m-r}(f_n \hat{\otimes}_i^{r-i} g_m), \quad (2)$$

где $f_n \hat{\otimes}_i^{r-i} g_m$ обозначает симметризацию функции:

$$\begin{aligned} f_n \hat{\otimes}_i^{r-i} g_m(u_{r-i+1}, \dots, u_i, \dots, u_n, v_{i+1}, \dots, v_m) &= \int_{[0, T]^{r-i}} f_n(u_1, \dots, u_{r-i}, u_{r-i+1}, \dots, u_i, u_{i+1}, \dots, u_n) \times \\ &\times g_m(u_1, \dots, u_{r-i}, u_{r-i+1}, \dots, u_i, v_{i+1}, \dots, v_m) du_1 \cdots du_{r-i}, \\ E[I_n(f_n) I_m(g_m)] &= \delta_{nm} n! \int_{[0, T]^n} f_n(u_1, \dots, u_n) g_n(u_1, \dots, u_n) du_1 \cdots du_n; \end{aligned} \quad (3)$$

коэффициенты f_0, g_0 являются константами и $I_0(f_0) I_0(g_0) = f_0 g_0$,

$$E[X_t X_s] = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{[0, T]^n} x_{t,n}(u_1, \dots, u_n) x_{s,n}(u_1, \dots, u_n) du_1 \cdots du_n. \quad (4)$$

Основные результаты. Для построения приближенной формулы, точной для функциональных многочленов третьей степени от X_t , предварительно получим, используя равенства (2)–(3), явное выражение для момента

$$\begin{aligned} E[X_{t_1} X_{t_2} X_{t_3}] &= \sum_{n,m=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{2(n \wedge m)} \sum_{r \leq 2i \leq 2(r \wedge n \wedge m)} i! \binom{n}{i} \binom{m}{i} \binom{i}{r-i} (n+m-r)! \times \\ &\times \int_{[0, T]^{n+m-r}} (x_{t_1, n, i} \hat{\otimes}_i^{r-i} x_{t_2, m, i}) x_{t_3, n+m-r, i} du_{r-i+1} \cdots du_n, dv_{i+1} \cdots dv_m, \end{aligned} \quad (5)$$

где мы положили $x_{t_1, n, i} = x_{t_1, n, i}(u_1, \dots, u_n)$, $x_{t_2, m, i} = x_{t_2, m, i}(u_1, \dots, u_i, v_{i+1}, \dots, v_m)$, $x_{t_3, n+m-r, i} = x_{t_3, n+m-r, i}(u_{r-i+1}, \dots, u_n, v_{i+1}, \dots, v_m)$.

Заметим, что в интеграле в правой части (5) знак симметризации в тензорном произведении отсутствует, т. е. указанную в (1) симметризацию не нужно выполнять, так как мы имеем под знаком интеграла умножение на симметрическую функцию $x_{t_3, n+m-r, i}(u_{r-i+1}, \dots, u_n, v_{i+1}, \dots, v_m)$.

Приведем явный вид (5) для случая $X_{t_j} = \sum_{n=0}^N I_n(x_{t_j, n})$, $N = 2$; $j = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned}
 E[X_{t_1} X_{t_2} X_{t_3}] &= x_{t_1,0} x_{t_2,0} x_{t_3,0} + x_{t_1,0} \sum_{k=1}^3 k! \int_{[0,T]^k} x_{t_2,k}(u_1, \dots, u_k) x_{t_3,k}(u_1, \dots, u_k) du_1 \cdots du_k + \\
 &+ x_{t_2,0} \sum_{k=1}^3 k! \int_{[0,T]^k} x_{t_1,k}(u_1, \dots, u_k) x_{t_3,k}(u_1, \dots, u_k) du_1 \cdots du_k + \\
 &+ x_{t_3,0} \sum_{k=1}^3 k! \int_{[0,T]^k} x_{t_1,k}(u_1, \dots, u_k) x_{t_2,k}(u_1, \dots, u_k) du_1 \cdots du_k + \\
 &+ \int_{[0,T]} x_{t_1,1}(u_1) x_{t_2,1}(u_1) x_{t_3,1}(u_1) du_1 + 2 \int_{[0,T]^2} x_{t_1,1}(u_1) x_{t_2,1}(u_2) x_{t_3,2}(u_1, u_2) du_1 du_2 + \\
 &+ 2 \int_{[0,T]^2} x_{t_1,2}(u_1, u_2) x_{t_2,1}(u_1) x_{t_3,1}(u_2) du_1 du_2 + 2 \int_{[0,T]^2} x_{t_1,1}(u_1) x_{t_2,2}(u_1, u_2) x_{t_3,1}(u_2) du_1 du_2 + \\
 &+ 4 \int_{[0,T]^2} x_{t_1,1}(u_1) x_{t_2,2}(u_1, u_2) x_{t_3,2}(u_1, u_2) du_1 du_2 + 4 \int_{[0,T]^2} x_{t_1,2}(u_1, u_2) x_{t_2,1}(u_1) x_{t_3,2}(u_1, u_2) du_1 du_2 + \\
 &+ 4 \int_{[0,T]^2} x_{t_1,2}(u_1, u_2) x_{t_2,2}(u_1, u_2) x_{t_3,1}(u_2) du_1 du_2 + 2 \int_{[0,T]^2} x_{t_1,2}(u_1, u_2) x_{t_2,2}(u_1, u_2) x_{t_3,2}(u_1, u_2) du_1 du_2 + \\
 &+ 8 \int_{[0,T]^3} x_{t_1,2}(u_1, u_2) x_{t_2,2}(u_1, u_3) x_{t_3,2}(u_2, u_3) du_1 du_2 du_3.
 \end{aligned}$$

Ниже в формулировке теоремы используются симметрические функциональные многочлены, которые в общем случае имеют вид

$$P_n(F) = F_0 + \sum_{k=1}^n \int_0^T \cdots \int_0^T F_k(t_1, \dots, t_k) \prod_{j=1}^k X_{t_j} dt_1 \cdots dt_k,$$

где $F_k(t_1, \dots, t_k)$ – симметрическая функция, $F_0 = \text{const}$, и предполагается, что интегралы существуют для почти всех траекторий процесса. Из условий симметричности следует, что

$$P_n(F) = F_0 + \sum_{k=1}^n k! \int_0^{t_k} \int_0^0 \cdots \int_0^0 F_k(t_1, \dots, t_k) \prod_{j=1}^k X_{t_j} dt_1 \cdots dt_k.$$

Теорема. Пусть функции $x_t(t_1, \dots, t_n)$ в разложении (1) дифференцируемы по t , $x_0(t_1, \dots, t_n) \neq 0$, $x_T(t_1, \dots, t_n) \neq 0$. Тогда имеет место следующая приближенная формула, точная для симметрических функциональных многочленов третьей степени от $X_{(\cdot)}$:

$$\begin{aligned}
 E[F(X_{(\cdot)})] &\approx \sum_{n,m=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{2(n \wedge m)} \sum_{r \leq 2i \leq 2(r \wedge n \wedge m)} C_{n,m,r,i} \times \\
 &\times \sum_{k=1}^2 A_k \int_{[0,T]^{n+m-i}} J_{n,m,r,i}(F) du_1 \cdots du_{r-i} du_{r-i+1} \cdots du_n dv_{i+1} \cdots dv_m + \\
 &+ \sum_{n=0}^{\infty} b_n \int_{[0,T]^n} \Delta F \left(b_n^{-\frac{1}{2}} p_n^{-1/2}(u) x_{\cdot,n}(u) \right) p(u) du + F(0)(1-B),
 \end{aligned} \tag{6}$$

где

$$\begin{aligned}
 C_{n,m,r,i} &= i! \binom{n}{i} \binom{m}{i} \binom{i}{r-i} (n+m-r)!, \quad J_{n,n,n,n}(F) = \Lambda F(c_k x_1(\cdot)), \\
 J_{n,m,n \wedge m, n \wedge m}(F) &= \int_0^T \Lambda F \left(c_k x_2(\cdot) \left(\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{x_3(s)}{x_2(s)} \right) \right)^{1/3} 1_{[0,\cdot]}(s) \right) ds + \frac{x_1(0)}{x_2(0)} \Lambda F(c_k x_2(\cdot)), \\
 J_{n,n,r > n,n}(F) &= \int_0^T \Lambda F \left(c_k x_2(\cdot) \left(\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{x_3(s)}{x_2(s)} \right) \right)^{1/3} 1_{[\cdot,T]}(s) \right) ds + \frac{x_3(T)}{x_2(T)} \Lambda F(c_k x_2(\cdot)),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_{n,m,r,i}(F) = & - \int_0^T \int_0^T \Lambda F(c_k x_2(\cdot)) \left(\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{x_1(s)}{x_2(s)} \right) \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{x_3(\tau)}{x_2(\tau)} \right) \right)^{1/3} 1_{[0,\cdot]}(s) 1_{[\cdot,T]}(\tau) ds d\tau - \\
 & - \frac{x_1(0)}{x_2(0)} \int_0^T \Lambda F(c_k x_2(\cdot)) \left(\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{x_3(s)}{x_2(s)} \right) \right)^{1/3} 1_{[\cdot,T]}(s) ds + \\
 & + \frac{x_3(T)}{x_2(T)} \int_0^T \Lambda F(c_k x_2(\cdot)) \left(\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{x_1(s)}{x_2(s)} \right) \right)^{1/3} 1_{[0,\cdot]}(s) ds + \\
 & + \frac{x_1(0)}{x_2(0)} \frac{x_3(T)}{x_2(T)} \Lambda F(c_k x_2(\cdot)) \text{ в остальных случаях;} \tag{7}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Lambda F(f) = & \frac{1}{2}(F(f) - F(-f)), \quad \Delta F(f) = \frac{1}{2}(F(f) + F(-f)), \quad x_1(t) = x_{t,n}(u_1, \dots, u_n), \\
 x_2(t) = & x_{t,m}(u_1, \dots, u_i, v_{i+1}, \dots, v_m), \quad x_3(t) = x_{t,n+m-r}(u_{r-i+1}, \dots, u_n, v_{i+1}, \dots, v_m);
 \end{aligned}$$

$A_k, c_k, k = 1, 2, 3$ – константы, определяемые из уравнений $A_1 c_1 + A_2 c_2 = 0, \quad A_1 c_1^3 + A_2 c_2^3 = 1;$
 $p_n(u) = p_n(u_1, \dots, u_n)$ – произвольная квадратично интегрируемая функция, $b_n, n = 0, 1, 2$ – вещественные числа, $B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n, \quad du = du_1 \dots du_n.$

Доказательство теоремы производится непосредственным вычислением правой и левой частей формулы (6) для функционалов $F(X_{(\cdot)}) = \text{const}, \quad F(X_{(\cdot)}) = X_t, \quad F(X_{(\cdot)}) = X_{t_1} X_{t_2},$
 $F(X_{(\cdot)}) = X_{t_1} X_{t_2} X_{t_3}.$ Приведем для иллюстрации доказательства только вычисление аппроксимирующего выражения (7) для монома $F(X_{(\cdot)}) = X_{t_1} X_{t_2} X_{t_3}, \quad t_1 \leq t_2 \leq t_3 :$

$$\begin{aligned}
 J_{n,m,r,i}(F) = & - \int_{\max(t_1, t_2, t_3)}^T \int_0^{\min(t_1, t_2, t_3)} \Lambda c_k^3 x_2(t_1) x_2(t_2) x_2(t_3) \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{x_1(s)}{x_2(s)} \right) \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{x_3(\tau)}{x_2(\tau)} \right) ds d\tau - \\
 & - \frac{x_1(0)}{x_2(0)} \int_{\max(t_1, t_2, t_3)}^T \Lambda c_k^3 x_2(t_1) x_2(t_2) x_2(t_3) \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{x_3(s)}{x_2(s)} \right) ds + \\
 & + \frac{x_3(T)}{x_2(T)} \int_0^{\min(t_1, t_2, t_3)} \Lambda c_k^3 x_2(t_1) x_2(t_2) x_2(t_3) \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{x_1(s)}{x_2(s)} \right) ds + \\
 & + \frac{x_1(0)}{x_2(0)} \frac{x_3(T)}{x_2(T)} \Lambda c_k^3 x_2(t_1) x_2(t_2) x_2(t_3) = \\
 = & - c_k^3 \left(x_1(t_1) x_2(t_2) x_2(t_3) \frac{x_3(T)}{x_2(T)} - x_1(t_1) x_2(t_2) x_3(t_3) \right) + \\
 + & c_k^3 \left(x_2(t_1) x_2(t_2) x_2(t_3) \frac{x_1(0)}{x_2(0)} \frac{x_3(T)}{x_2(T)} - x_2(t_1) x_2(t_2) x_3(t_3) \right) - \\
 - & c_k^3 \frac{x_1(0)}{x_2(0)} \left(x_2(t_1) x_2(t_2) x_2(t_3) \frac{x_3(T)}{x_2(T)} - x_2(t_1) x_2(t_2) x_3(t_3) \right) + \\
 + & c_k^3 \frac{x_3(T)}{x_2(T)} \left(x_1(t_1) x_2(t_2) x_2(t_3) - x_2(t_1) x_2(t_2) x_2(t_3) \frac{x_1(0)}{x_2(0)} \right) + \\
 + & c_k^3 \frac{x_1(0)}{x_2(0)} \frac{x_3(T)}{x_2(T)} x_2(t_1) x_2(t_2) x_2(t_3) = c_k^3 x_1(t_1) x_2(t_2) x_3(t_3).
 \end{aligned}$$

В качестве возможной области применения полученной приближенной формулы можно указать на вычисление математических ожиданий нелинейных функционалов от решений стохастических уравнений по пуассоновскому процессу в случаях, когда коэффициентные функции хаотического разложения решения находятся в явном виде, либо могут быть получены с использованием стохастических производных соответствующих порядков (см., напр., [12–14]).

Численные результаты. Приведем численный пример, иллюстрирующий применение полученной формулы. Пусть

$$E[F(X_{(\cdot)})] = E[(1 + \lambda X_t)^4],$$

где

$$X_t = I_1(x_{t,1}) + I_2(x_{t,2}),$$

$$x_{t,1}(u) = f_t^2(u), \quad x_{t,2}(u_1, u_2) = f_t(u_1)f_t(u_2), \quad f_t(u) = 1 + tu.$$

Так как в силу (2) можно в данном случае представить $I_2(x_{t,2})$ в виде

$$I_2(x_{t,2}) = (I_1(f_t))^2 - I_1(f_t^2) - \int_0^T f_t^2(u) du,$$

то имеем

$$X_t = \int_0^T f_t^2(u) dP(u) + (I_1(f_t))^2 - I_1(f_t^2) - \int_0^T f_t^2(u) du = I_1(f_t^2) - \int_0^T f_t^2(u) du$$

и далее

$$E[(1 + \lambda X_t)^4] = \sum_{m=0}^4 \binom{4}{m} C_4^m \lambda^m E \left[\left(\int_0^T f_t(u) dP(u) \right)^{2m} \right] \left(1 - \lambda \int_0^T f_t^2(u) du \right)^{4-m}, \quad (8)$$

где $E \left[\left(\int_0^T f_t(u) dP(u) \right)^{2m} \right]$ может быть вычислено из соотношения [11]:

$$E \left[\left(\int_0^T f_t(u) dP(u) \right)^{n+1} \right] = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \int_0^T f_t^{n-k+1}(u) du E \left[\left(\int_0^T f_t(u) dP(u) \right)^k \right]. \quad (9)$$

Результаты вычислений по формулам (8)–(9) и приближенной формуле (6) с параметрами $A_1 = 1/3, A_2 = 1/6, c_1 = 1, c_2 = 2, \lambda = 1/n!, T = 1,0$ приведены в таблице.

t	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
(8)–(9)	1,0731	1,08266	1,1281	1,19603	1,29623
(6)	1,05272	1,07953	1,12356	1,20483	1,27923

Приведенные численные результаты показывают характерную для формул, точных для функциональных многочленов третьей степени от процесса, точность аппроксимации в заданном временном интервале. По причине быстрого роста значений моментов в случае кратных интегралов по пуассоновскому процессу параметр λ был взят равным $1/n!$. Из таблицы видно постепенное уменьшение точности приближенной формулы с ростом t , тем не менее она остается удовлетворительной при значениях t в пределах отрезка $[0,1]$, что позволяет использовать ее в составных формулах [1–3].

Благодарности. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф16Д-002).

Acknowledgments. The work is partially supported by the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (Project No. Ф16Д-002).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Egorov, A. D. Functional integrals: Approximate evaluations and applications / A. D. Egorov, P. I. Sobolevsky, L. A. Yanovich. – Kluwer Academic Publ., 1993. – 419 p.
2. Егоров, А. Д. Введение в теорию и приложения функционального интегрирования / А. Д. Егоров, Е. П. Жидков, Ю. Ю. Лобанов. – М.: Физматлит, 2006. – 400 с.
3. Egorov, A. D. Approximate formulas for expectation of functionals of solutions to stochastic differential equations / A. D. Egorov, K. K. Sabelfeld // Monte Carlo Methods and Applications. – 2010. – Vol. 16, № 2. – P. 95–127.
4. Egorov, A. D. Approximations of functional integrals with respect to measure generated by solutions of stochastic differential equations / A. D. Egorov, A. V. Zherelo // Monte Carlo methods and applications. – 2004. – Vol. 10, № 3/4. – P. 257–264.
5. Малютин, В. Б. Об одной аппроксимации математического ожидания решения нелинейного стохастического дифференциального уравнения с антикоммутирующими коэффициентами / В. Б. Малютин // Вест. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2003. – № 3. – С. 34–37.
6. Применение функциональных интегралов к стохастическим уравнениям / Э. А. Айрян [и др.] // Мат. моделирование. – 2016. – Т. 28, № 11. – С. 113–125.
7. Егоров, А. Д. О составных приближенных формулах для ожиданий функционалов от случайных процессов / А. Д. Егоров // Тр. Ин-та математики. – 2014. – Т. 22, № 1. – С. 70–77.
8. Кабанов, Ю. М. О расширенных стохастических интегралах / Ю. М. Кабанов // Теория вероятностей и ее применения. – 1975. – Т. 20, № 1. – С. 725–737.
9. Surgailis, D. On multiple Poisson stochastic integrals and associated Markov semigroups / D. Surgailis // Probability and Mathematical Statistics. – 1984. – Vol. 3, № 2. – P. 217–239.
10. Yoshifusa Ito. Generalized Poisson Functionals / Yoshifusa Ito // Probab. Theory Relat. Fields. – 1988. – Vol. 77, № 1. – P. 1–28.
11. Privault, N. Stochastic Analysis in Discrete and Continuous Settings. With Normal Martingale / N. Privault. – Berlin: Springer, 2009. – 321 p.
12. Ma, J. Anticipating integrals for a class of martingales / J. Ma, Ph. Protter, J. San Martin // Bernoulli. – 1998. – Vol. 4, № 1. – P. 81–114.
13. Alabert, A. Stochastic differential equations with boundary conditions driven by a Poisson noise / A. Alabert, M. A. Marmolejo // Electron. J. Probab. – 2004. – Vol. 9, № 9. – P. 230–254.
14. Last, G. Poisson process Fock space representation, chaos expansion and covariance inequalities / G. Last, M. D. Penrose // Probab. Theory Relat. Fields. – 2011. – Vol. 150, № 3/4. – P. 663–690.

References

1. Egorov A.D., Sobolevsky P.I., Yanovich L.A. *Functional Integrals: Approximate Evaluation and Applications*. Kluwer Academic Publ., 1993. 419 p. Doi: 10.1007/978-94-011-1761-6
2. Egorov A.D. *An Introduction to Theory and Applications of Functional Integration*. Moscow, Fizmatlit Publ, 2006. 400 p. (In Russian).
3. Egorov A.D., Sabelfeld K.K. Approximate formulas for expectation of functionals of solutions to stochastic differential equations. *Monte Carlo Methods and Applications*, 2010, vol. 16, no. 2, pp. 95–127. Doi: 10.1515/mcma.2010.003
4. Egorov A.D., Zherelo A.V. Approximations of functional integrals with respect to measure generated by solutions of stochastic differential equations. *Monte Carlo methods and applications*, 2004, vol. 10, no. 3-4, pp. 257–264. Doi: 10.1515/mcma.2004.10.3-4.257
5. Malyutin V.B. Approximation for expectation from solution of nonlinear stochastic differential equation with anticommuting coefficients. *Izvestiia Natsionalnoi akademii nauk Belarusi. Ser. fiziko-matematicheskikh nauk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series], 2003, no. 3, pp. 34–37. (In Russian).
6. Airyan E.A., Egorov A.D., Kulyabov D.S., Malyutin V.B., Sevastyanov L.A. Application of functional integrals to stochastic equations. *Matematicheskoe modelirovanie* [Mathematical Models and Computer Simulations]. 2016, vol. 28, no. 11, pp. 113–125. (In Russian).
7. Egorov A.D. On composed approximate formulas for expectations of functionals of random processes. *Trudy Instituta Matematiki* [Proceedings of the Institute of Mathematics], 2014, vol. 22, no. 1, pp. 70–77. (In Russian).
8. Kabanov Yu.M. On extended stochastic integrals. *Teoriya veroyatnostei i ee primeneniya* [Probability Theory and its Application], 1975, vol. 20, no. 1, pp. 725–737. (In Russian).
9. Surgailis D. On multiple Poisson stochastic integrals and associated Markov semigroups. *Probability and Mathematical Statistics*, 1984, vol. 3, no. 2, pp. 217–239.
10. Yoshifusa Ito. Generalized Poisson Functionals. *Probability Theory and Related Fields*, 1988, vol. 77, no. 1, pp. 1–28. Doi: 10.1007/bf01848128
11. Privault N. *Stochastic Analysis in Discrete and Continuous Settings. With Normal Martingale*. Berlin, Springer, 2009. 321 p. Doi: 10.1007/978-3-642-02380-4
12. Ma J., Protter Ph., San Martin J. Anticipating integrals for a class of martingales. *Bernoulli*, 1998, vol. 4, no.1, pp. 81–114. Doi: 10.2307/3318533

13. Alabert A., Marmolejo M.A. Stochastic differential equations with boundary conditions driven by a Poisson noise. *Electronic Journal of Probability*, 2004, vol. 9, no. 9, pp. 230–254. Doi: 10.1214/ejp.v9-157

14. Last G., Penrose M.D. Poisson process Fock space representation, chaos expansion and covariance inequalities. *Probability Theory and Related Fields*, 2011, vol. 150, no. 3-4, pp. 663–690. Doi: 10.1007/s00440-010-0288-5

Информация об авторе

Егоров Александр Дмитриевич – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: egorov@im.bas-net.by

Information about the author

Egorov Alexandr Dmitrievich – D. Sc. (Physics and Mathematics), Chief Researcher, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: egorov@im.bas-net.by

Для цитирования

Егоров, А. Д. О приближенных формулах для вычисления одного класса функционалов от пуассоновского процесса / А. Д. Егоров // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2017. – № 1. – С. 7–13.

For citation

Egorov A.D. Approximate formulas for evaluation of one-class functionals of the Poisson process. *Vestsi Natsyional'nei akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series], 2017, no. 1, pp. 7–13. (In Russian).

А. П. Худяков, А. А. Трофимук

Брестский государственный университет им. А. С. Пушкина, Брест, Беларусь

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ФОРМУЛЫ ЭРМИТА – БИРКГОФА ОТНОСИТЕЛЬНО АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМ ФУНКЦИЙ С ОДНИМ СПЕЦИАЛЬНЫМ УЗЛОМ

Данная статья посвящена задаче построения и исследования обобщенных интерполяционных формул Эрмита – Биркгофа. Для функций скалярного аргумента построены алгебраический и тригонометрический интерполяционные многочлены Эрмита – Биркгофа, содержащие значение дифференциального оператора специального вида в одном из узлов. Порядок дифференциального оператора не зависит от числа узлов. Найдены классы многочленов, для которых интерполяционные формулы точны. Построен тригонометрический аналог формулы Лейбница. Получены представления и оценки погрешности интерполирования. Приведен иллюстрационный пример применения формулы тригонометрического интерполирования. Полученные результаты могут быть использованы в теоретических исследованиях как основа построения методов приближения линейных операторов, а также приближенных методов решения некоторых нелинейных операторных уравнений, которые встречаются в нелинейной динамике, математической физике.

Ключевые слова: интерполирование Эрмита – Биркгофа, дифференциальный оператор, чебышевская система функций, теорема Ролля, тригонометрическое интерполирование, формула Лейбница, определитель Вандермонда.

A. P. Khudyakov, A. A. Trofimuk

Brest State University named after A. S. Pushkin, Brest, Belarus

INTERPOLATION HERMITE – BIRKHOFF-TYPE FORMULAS WITH RESPECT TO THE ALGEBRAIC AND TRIGONOMETRIC SYSTEMS OF FUNCTIONS WITH ONE SPECIAL NODE

This article is devoted to the problem of construction and research of the generalized interpolation Hermite – Birkhoff-type formulas. For the scalar argument functions, the algebraic and trigonometric interpolation Hermite – Birkhoff-type polynomials, containing the value of the differential operator of special form at one of the nodes, are constructed. In the both cases, the differential operator of special form annuls the first basic functions of the corresponding Chebyshev system. Furthermore, the order of the differential operator does not depend on the number of nodes. For interpolation polynomials, the satisfaction theorems of interpolation conditions are proved. The classes of the polynomials, for which the interpolation formulas are exact, are determined. The trigonometric analogue of the Leibniz formula is constructed. This formula is used to prove the satisfaction theorem of interpolation conditions in the trigonometric case. The representations and estimates of the interpolation error are obtained. In algebraic case, to obtain the representations and estimates of interpolation error, the consequence of Rolle's theorem is used. In the trigonometric case, the integral representation of the interpolation error is utilized. The illustrative example of application of the trigonometric interpolation formula is constructed. The results can be used in the theoretical research as a basis for constructing both approximation methods of linear operators and approximate methods of solving some nonlinear operator equations that are available in nonlinear dynamics, mathematical physics.

Keywords: Hermite – Birkhoff-type interpolation, differential operator, Chebyshev system of functions, Rolle's theorem, trigonometric interpolation, Leibniz formula, Vandermonde determinant.

Введение. Для функций скалярного аргумента обобщенные интерполяционные многочлены Эрмита – Биркгофа по системам тригонометрических, дробно-рациональных и экспоненциальных функций построены и исследованы в [1–3]. Полученные интерполяционные формулы, кроме лагранжевых интерполяционных условий, удовлетворяют также в одном узле условию на совпадение значений дифференциальных операторов специального вида. Рассматриваемые дифференциальные операторы в каждом конкретном случае аннулируют первые базисные функции соответствующей чебышевской системы. В построенных интерполяционных многочленах порядок

дифференциального оператора зависит от общего числа узлов, что является их недостатком. Данные формулы обобщены на случай общей чебышевской системы [4], построены их матричные аналоги [5–7].

В монографии [8] исследуются вопросы регулярности интерполирования типа Биркгофа, рассматриваются различные постановки интерполяционных задач этого вида и их приложения. Специальный случай одномерной задачи интерполяции Биркгофа и аппроксимация с ее помощью решения граничной задачи для уравнения Лапласа, а также случай двумерной задачи этого типа рассмотрены в [9]. Задача интерполяции Биркгофа с использованием значений производных первого и второго порядков интерполируемой функции исследуется в [10]. Операторные интерполяционные формулы Эрмита – Биркгофа в пространствах гладких функций построены и исследованы в [11].

В настоящей работе для функций одной скалярной переменной построены и исследованы интерполяционные формулы Эрмита – Биркгофа по алгебраической и тригонометрической системам функций с одним специальным узлом. В данном узле известно значение дифференциального оператора от интерполируемой функции, причем его порядок не зависит от числа узлов. С помощью формул такого типа можно получить явные выражения для приближения соответствующих дифференциальных операторов, используя только значения интерполируемой функции в узлах.

Алгебраический случай. В работе [4] по общей чебышевской системе функций $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_{n+1}(x)$, $x \in T \subset \mathbb{R}$, построен обобщенный интерполяционный многочлен Эрмита – Биркгофа вида

$$\tilde{L}_{n+1}(x) = L_n(x) + \frac{\Omega_{n+1}(x)D_{n+1}(f; x_{n+1})}{D_{n+1}(\varphi_{n+1}; x_{n+1})}, \quad (1)$$

где $L_n(x)$ – многочлен Лагранжа по рассматриваемой системе функций $\{\varphi_k(x)\}$, $\Omega_{n+1}(x)$ – многочлен степени $n + 1$ по той же системе, со старшим коэффициентом, равным 1, удовлетворяющий интерполяционным условиям вида $\Omega_{n+1}(x_k) = 0$ ($k = 0, 1, \dots, n$), а $D_{n+1}f(x)$ является линейным дифференциальным оператором порядка $n + 1$, аннулирующим первые базисные функции чебышевской системы. Многочлен (1) удовлетворяет интерполяционным условиям

$$\tilde{L}_{n+1}(x_i) = f(x_i) \quad (i = 0, 1, \dots, n); \quad D_{n+1}(\tilde{L}_{n+1}; x_{n+1}) = D_{n+1}(f; x_{n+1})$$

и является точным для многочленов вида

$$P_{n+1}(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \dots + c_{n+1}\varphi_{n+1}(x),$$

где c_0, c_1, \dots, c_{n+1} – произвольные числа. Интерполяционный узел x_{n+1} может совпадать с одним из узлов x_0, x_1, \dots, x_n . Очевидно, порядок оператора $D_{n+1}f(x)$ здесь зависит от числа узлов.

В алгебраическом случае многочлен $L_n(x)$ совпадает с алгебраическим интерполяционным многочленом Лагранжа, $\Omega_{n+1}(x) = \omega_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$, а дифференциальный оператор $D_{n+1}f(x) \equiv f^{(n+1)}(x)$. Так как $D_{n+1}(\varphi_{n+1}; x_{n+1}) = (n + 1)!$ при $\varphi_{n+1}(x) = x^{n+1}$, то алгебраический многочлен $\tilde{L}_{n+1}(x)$, удовлетворяющий условиям

$$\tilde{L}_{n+1}(x_k) = f(x_k) \quad (k = 0, 1, \dots, n); \quad \tilde{L}_{n+1}^{(n+1)}(x_{n+1}) = f^{(n+1)}(x_{n+1}), \quad (2)$$

имеет вид

$$\tilde{L}_{n+1}(f; x) = L_n(f; x) + \frac{\omega_n(x)f^{(n+1)}(x_{n+1})}{(n + 1)!} \quad (3)$$

и является точным для алгебраических многочленов степени не выше $n + 1$.

Получим представление и оценку погрешности для формулы (3). Будем предполагать, что функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема $n + 2$ раз на промежутке $T = (a, b)$.

Теорема 1. Представление погрешности интерполяционной формулы (3) имеет вид

$$f(x) - \tilde{L}_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+2)}(\xi)(\eta - x_{n+1})}{(n+1)!} \omega_n(x), \quad (4)$$

где $\xi, \eta \in T$.

Доказательство. Известно [12], что остаточный член алгебраического интерполяционного многочлена Лагранжа имеет вид $f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!} \omega_n(x)$, где $\eta \in T$. Тогда $f(x) - \tilde{L}_{n+1}(x) = \frac{\omega_n(x)}{(n+1)!} (f^{(n+1)}(\eta) - f^{(n+1)}(x_{n+1}))$. Используя далее теорему Лагранжа о среднем значении, можно получить представление (4). Теорема 1 доказана.

Обозначим $M_n = \max_{\theta \in T} |f^{(n+2)}(\theta)|$, $C_n = |\omega_n(x)|$. Так как $|\eta - x_{n+1}| \leq b - a$, то для формулы (3) имеет место оценка погрешности

$$|f(x) - \tilde{L}_{n+1}(x)| \leq \frac{(b-a)M_n C_n}{(n+1)!}. \quad (5)$$

Построим далее аналогичную алгебраическую интерполяционную формулу, в которую входит значение производной порядка m , не зависящего от количества узлов. Введем обозначения $\omega_{n,k}(x) = (x - x_0) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)$, $a_k = \omega_{n,k}^{(m)}(x_{n+1})$, $\tilde{x}_k = a_k x_{n+1} + m \omega_{n,k}^{(m-1)}(x_{n+1})$ ($k = 0, 1, \dots, n$). Будем предполагать, что $\omega_n^{(m)}(x_{n+1}) \neq 0$.

Теорема 2. Пусть $1 \leq m \leq n$. Алгебраический многочлен степени $n + 1$

$$\tilde{L}_{n+1}(f; x) = \sum_{k=0}^n \frac{\omega_{n,k}(x)(a_k x - \tilde{x}_k)}{\omega_{n,k}(x_k)(a_k x_k - \tilde{x}_k)} f(x_k) + \frac{\omega_n(x)}{\omega_n^{(m)}(x_{n+1})} f^{(m)}(x_{n+1}) \quad (6)$$

удовлетворяет интерполяционным условиям

$$\tilde{L}_{n+1}(x_k) = f(x_k) \quad (k = 0, 1, \dots, n); \quad \tilde{L}_{n+1}^{(m)}(x_{n+1}) = f^{(m)}(x_{n+1}), \quad (7)$$

и является точным для алгебраических многочленов степени не выше $n + 1$.

Доказательство. Выполнение первой группы интерполяционных условий (7) очевидно. По формуле Лейбница $(\omega_{n,k}(x)(a_k x - \tilde{x}_k))^{(m)} = \omega_{n,k}^{(m)}(x)(a_k x - \tilde{x}_k) + m a_k \omega_{n,k}^{(m-1)}(x)$. Поэтому при $x = x_{n+1}$ будем иметь $(\omega_{n,k}(x)(a_k x - \tilde{x}_k))^{(m)} \Big|_{x=x_{n+1}} = 0$. Следовательно, последнее условие в (7) также имеет место.

Рассмотрим определитель и цепочку равенств

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{k-1} & x_{k-1}^2 & \cdots & x_{k-1}^{n+1} \\ 1 & x_{k+1} & x_{k+1}^2 & \cdots & x_{k+1}^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n+1} \\ 0 & \frac{d^m u}{du^m} & \frac{d^m u^2}{du^m} \Big|_{u=x_{n+1}} & \cdots & \frac{d^m u^{n+1}}{du^m} \Big|_{u=x_{n+1}} \\ 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n+1} \end{vmatrix} = \frac{d^m}{du^m} \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{k-1} & x_{k-1}^2 & \cdots & x_{k-1}^{n+1} \\ 1 & x_{k+1} & x_{k+1}^2 & \cdots & x_{k+1}^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n+1} \\ 1 & u & u^2 & \cdots & u^{n+1} \\ 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n+1} \end{vmatrix} \Big|_{u=x_{n+1}} =$$

$$= c\omega_{n,k}(x) \frac{d^m}{du^m} [\omega_{n,k}(u)(x-u)] \Big|_{u=x_{n+1}} = c\omega_{n,k}(x) [\omega_{n,k}^{(m)}(x_{n+1})(x-x_{n+1}) - m\omega_{n,k}^{(m-1)}(x_{n+1})] = c\omega_{n,k}(x)(a_k x - \tilde{x}_k), \tag{8}$$

где $c = \text{const}$.

Введем определитель

$$\tilde{\Delta} = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{n+1} \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n+1} \\ 0 & \left. \frac{d^m u}{du^m} \right|_{u=x_{n+1}} & \left. \frac{d^m u^2}{du^m} \right|_{u=x_{n+1}} & \cdots & \left. \frac{d^m u^{n+1}}{du^m} \right|_{u=x_{n+1}} \end{vmatrix}.$$

Тогда многочлен (6) можно представить в виде

$$\tilde{L}_{n+1}(x) = -\frac{1}{\tilde{\Delta}} \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{n+1} & f(x_0) \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n+1} & f(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n+1} & f(x_n) \\ 0 & \left. \frac{d^m u}{du^m} \right|_{u=x_{n+1}} & \left. \frac{d^m u^2}{du^m} \right|_{u=x_{n+1}} & \cdots & \left. \frac{d^m u^{n+1}}{du^m} \right|_{u=x_{n+1}} & f^{(m)}(x_{n+1}) \\ 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n+1} & 0 \end{vmatrix}. \tag{9}$$

При $f(x) = x^k$, $0 \leq k \leq n + 1$ элементы последнего столбца определителя в (9) (кроме элемента, находящегося в последней строке) будут совпадать с элементами $(k + 1)$ -го столбца. Тогда раскладывая определитель в (9) по элементам последней строки, будем иметь $\tilde{L}_{n+1}(x^k; x) \equiv x^k$. Таким образом, формула (6) точна для алгебраических многочленов степени не выше $n + 1$. Теорема 2 доказана.

Построим далее представление погрешности для формулы (6). Будем предполагать, что $f \in C_T^{n+1}$. Введем обозначение $\alpha = \frac{(n+1)!}{\omega_n^{(m)}(x_{n+1})} \left[\sum_{k=0}^n \frac{a_k f(x_k)}{\omega_{n,k}(x_k)} - f^{(m)}(x_{n+1}) \right]$.

Теорема 3. Погрешность интерполяционного многочлена (6) задается равенством

$$f(x) - \tilde{L}_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi) + \alpha}{(n+1)!} \omega_n(x), \tag{10}$$

где $\xi \in T$.

Доказательство. Пусть фиксированное значение x не совпадает ни с одним из узлов x_0, x_1, \dots, x_n . Введем константу $K = \frac{f(x) - \tilde{L}_{n+1}(x)}{\omega_n(x)}$, а также функцию $\varphi(t) = f(t) - \tilde{L}_{n+1}(t) - K\omega_n(t)$. Нетрудно показать, что при $k = 0, 1, 2, \dots, n$ справедливы равенства $a_k x_k - \tilde{x}_k = -\omega_n^{(m)}(x_{n+1})$. И так как $\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \{ \omega_{n,k}(x)(a_k x - \tilde{x}_k) \} = a_k (n+1)!$, а $\omega_n^{(n+1)}(x) = (n+1)!$, то функцию $\varphi^{(n+1)}(t)$ можно представить в виде $\varphi^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) + \alpha - K(n+1)!$. Очевидно, что $\varphi(x_0) = \varphi(x_1) = \dots = \varphi(x_n) = \varphi(x) = 0$. По следствию теоремы Роля $\varphi^{(n+1)}(t)$ на интервале T обращается в нуль по крайней мере один

раз: $\varphi^{(n+1)}(\xi) = 0$. Значит, $f^{(n+1)}(\xi) + \alpha - K(n+1)! = 0$, и $K = \frac{f^{(n+1)}(\xi) + \alpha}{(n+1)!}$. Таким образом, погрешность формулы (6) имеет вид (10). Теорема 3 доказана.

Введем обозначения $M_n = \max_{\theta \in T} |f^{(n+1)}(\theta) + \alpha|$, $C_n = |\omega_n(x)|$. Для интерполяционной формулы (6) справедлива оценка погрешности

$$|f(x) - \tilde{L}_{n+1}(x)| \leq \frac{M_n C_n}{(n+1)!}.$$

З а м е ч а н и е 1. Задача построения алгебраического интерполяционного многочлена, удовлетворяющего интерполяционным условиям вида (7), не всегда однозначно разрешима. Например, в случае узлов $x_0 = 1, x_1 = 3, x_2 = 2$ и функции, такой что $f(x_0) = 3, f(x_1) = 13, f'(x_2) = 5$, существует как минимум два алгебраических многочлена, удовлетворяющих условиям $P(x_k) = f(x_k)$ ($k = 0, 1$); $P'(x_2) = f'(x_2)$. Первый из них – $P_1(x) = x^2 + x + 1$, второй – $P_2(x) = 2x^2 - 3x + 4$. Интерполяционный многочлен (6) в данном случае не существует, так как $\omega'_1(x_2) = 0$.

Алгебраические интерполяционные формулы Эрмита – Биркгофа для функций скалярного аргумента и операторов построены и исследованы также в работах [13–14].

Тригонометрический случай. Построим тригонометрическую интерполяционную формулу, аналогичную (6). Пусть в узлах x_0, x_1, \dots, x_{2n} из промежутка $T = [0; 2\pi)$ известны значения 2π -периодической функции $f(x)$, а также в узле x_{2n+1} – значение $D_m(f; x_{2n+1})$ ($1 \leq m \leq 2n$) дифференциального оператора [15] вида

$$D_{2k+1}f(x) = (D^2 + k^2) \cdots (D^2 + 2^2)(D^2 + 1^2)Df(x), \tag{11}$$

$$D_{2k}f(x) = (D^2 + (k-1)^2) \cdots (D^2 + 1^2)D^2f(x), \quad D = \frac{d}{dx}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{12}$$

Будем считать, что $D_0f(x) \equiv f(x)$. Заметим, что для оператора (11), (12) справедливы равенства

$$D_{2k+1}f(x) = DD_{2k}f(x) + k^2D_{2k-1}f(x), \quad D_{2k}f(x) = DD_{2k-1}f(x). \tag{13}$$

В математическом анализе известна формула Лейбница для n -й ($n \in \mathbb{N}$) производной произведения двух скалярных функций [16]:

$$(u(x)v(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)}(x)v^{(k)}(x),$$

где

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

которая имеет место, если функции $u(x)$ и $v(x)$ – n раз дифференцируемые в точке $x \in \mathbb{R}$.

Обобщим данную формулу на случай, когда вместо производных берутся дифференциальные операторы (11), (12). Справедлива

Т е о р е м а 4 (тригонометрический аналог формулы Лейбница). *Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы m раз в точке $x \in \mathbb{R}$, то справедливы формулы*

$$D_m(u(x)v(x)) = D_{2p+1}(u(x)v(x)) = \sum_{k=0}^m C_m^k D_{m-k}u(x)D_kv(x), \quad p = 0, 1, \dots, \tag{14}$$

$$D_m(u(x)v(x)) = D_{2p}(u(x)v(x)) = \sum_{k=0}^m C_m^k D_{m-k}u(x)D_kv(x) - \frac{m(m-1)}{4} \sum_{k=1,3,\dots}^{m-3} C_m^k D_{m-k-2}u(x)D_kv(x), \quad p = 1, 2, \dots \tag{15}$$

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции. При $m = 1$ имеем

$$D_1(u(x)v(x)) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = C_1^0 D_1 u(x)v(x) + C_1^1 u(x) D_1 v(x).$$

При $m = 2$ по алгебраической формуле Лейбница получим

$$D_2(u(x)v(x)) = (u(x)v(x))'' = u''(x)v(x) + 2u'(x)v'(x) + u(x)v''(x) = \sum_{k=0}^2 C_2^k D_{2-k} u(x) D_k v(x).$$

Вторая сумма в (15) здесь равна нулю, так как ее верхний предел суммирования равен -1 .

Предположим, что равенства (14), (15) верны при $1 \leq m \leq 2p$, $p \in \mathbb{N}$. Докажем, что они справедливы и при $m = 2p + 1$, $m = 2p + 2$. При $m = 2p + 1$ по первой из формул (13)

$$D_{2p+1}(u(x)v(x)) = DD_{2p}(u(x)v(x)) + p^2 D_{2p-1}(u(x)v(x)). \quad (16)$$

Далее используем равенство (15) при $m = 2p$, дифференцируя которое, будем иметь

$$\begin{aligned} DD_{2p}(u(x)v(x)) &= \sum_{k=0}^{2p} C_{2p}^k (DD_{2p-k} u(x) D_k v(x) + D_{2p-k} u(x) DD_k v(x)) - \\ &- \frac{p(2p-1)}{2} \sum_{k=1,3,\dots}^{2p-3} C_{2p-2}^k (DD_{2p-k-2} u(x) D_k v(x) + D_{2p-k-2} u(x) DD_k v(x)). \end{aligned} \quad (17)$$

Из соотношений (13) при четных значениях k следует, что

$$DD_{2p-k} u(x) = D_{2p-k+1} u(x) - \left(p - \frac{k}{2}\right)^2 D_{2p-k-1} u(x), \quad DD_k v(x) = D_{k+1} v(x) - \left(\frac{k}{2}\right)^2 D_{k-1} v(x), \quad (18)$$

а при нечетных

$$DD_{2p-k} u(x) = D_{2p-k+1} u(x), \quad DD_k v(x) = D_{k+1} v(x). \quad (19)$$

Аналогичное равенство верно для $DD_{2p-k-2} u(x)$.

Второе слагаемое в (16) по формуле (14) при $m = 2p - 1$ имеет вид

$$p^2 D_{2p-1}(u(x)v(x)) = p^2 \sum_{k=0}^{2p-1} C_{2p-1}^k D_{2p-k-1} u(x) D_k v(x). \quad (20)$$

Разобьем суммы в (17) и (20) на суммы с четными и нечетными индексами и заменим в них производные дифференциальных операторов правыми частями выражений (18), (19). После преобразований будем иметь

$$\begin{aligned} D_{2p+1}(u(x)v(x)) &= \sum_{k=0}^{2p} C_{2p}^k D_{2p-k+1} u(x) D_k v(x) + \sum_{k=0}^{2p} C_{2p}^k D_{2p-k} u(x) D_{k+1} v(x) - \\ &- p^2 C_{2p}^0 D_{2p-1} u(x) D_0 v(x) + p^2 C_{2p-1}^0 D_{2p-1} u(x) D_0 v(x) - \\ &- \sum_{k=2,4,\dots}^{2p-2} \left[C_{2p}^k \left(p - \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{p(2p-1)}{2} C_{2p-2}^{k-1} - p^2 C_{2p-1}^k \right] D_{2p-k-1} u(x) D_k v(x) - \\ &- \sum_{k=1,3,\dots}^{2p-3} \left[C_{2p}^{k+1} \left(\frac{k+1}{2}\right)^2 + \frac{p(2p-1)}{2} C_{2p-2}^k - p^2 C_{2p-1}^k \right] D_{2p-k-1} u(x) D_k v(x) - \\ &- p^2 C_{2p}^{2p} D_0 u(x) D_{2p-1} v(x) + p^2 C_{2p-1}^{2p-1} D_0 u(x) D_{2p-1} v(x). \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} -p^2 C_{2p}^0 D_{2p-1} u(x) D_0 v(x) + p^2 C_{2p-1}^0 D_{2p-1} u(x) D_0 v(x) &= 0, \\ -p^2 C_{2p}^{2p} D_0 u(x) D_{2p-1} v(x) + p^2 C_{2p-1}^{2p-1} D_0 u(x) D_{2p-1} v(x) &= 0. \end{aligned}$$

Нетрудно также показать, что

$$\begin{aligned} C_{2p}^k \left(p - \frac{k}{2} \right)^2 + \frac{p(2p-1)}{2} C_{2p-2}^{k-1} - p^2 C_{2p-1}^k &= 0, \quad k = 2, 4, \dots, 2p-2, \\ C_{2p}^{k+1} \left(\frac{k+1}{2} \right)^2 + \frac{p(2p-1)}{2} C_{2p-2}^k - p^2 C_{2p-1}^k &= 0, \quad k = 1, 3, \dots, 2p-3. \end{aligned}$$

Используя далее соотношение $C_{2p}^k + C_{2p}^{k-1} = C_{2p+1}^k$, получим

$$\begin{aligned} D_{2p+1}(u(x)v(x)) &= \sum_{k=0}^{2p} C_{2p}^k D_{2p-k+1} u(x) D_k v(x) + \sum_{k=1}^{2p+1} C_{2p}^{k-1} D_{2p-k+1} u(x) D_k v(x) = \\ &= C_{2p}^0 D_{2p+1} u(x) D_0 v(x) + \sum_{k=1}^{2p} (C_{2p}^k + C_{2p}^{k-1}) D_{2p-k+1} u(x) D_k v(x) + C_{2p}^{2p} D_0 u(x) D_{2p+1} v(x) = \\ &= \sum_{k=0}^{2p+1} C_{2p+1}^k D_{2p-k+1} u(x) D_k v(x). \end{aligned}$$

Докажем теперь, что верно равенство (15) при $m = 2p + 2$. По второй из формул (13) и соотношению (14) при $m = 2p + 1$

$$\begin{aligned} D_{2p+2}(u(x)v(x)) &= DD_{2p+1}(u(x)v(x)) = \\ &= \sum_{k=0}^{2p+1} C_{2p+1}^k (DD_{2p-k+1} u(x) D_k v(x) + D_{2p-k+1} u(x) DD_k v(x)). \end{aligned}$$

Как и ранее, разбивая сумму в последнем равенстве на суммы с четными и нечетными индексами и используя соотношения, аналогичные (18), (19), после преобразований будем иметь

$$\begin{aligned} D_{2p+2}(u(x)v(x)) &= \sum_{k=0}^{2p+1} C_{2p+1}^k D_{2p-k+2} u(x) D_k v(x) + \sum_{k=0}^{2p+1} C_{2p+1}^k D_{2p-k+1} u(x) D_{k+1} v(x) - \\ &- \sum_{k=2,4,\dots}^{2p} C_{2p+1}^k \left(\frac{k}{2} \right)^2 D_{2p-k+1} u(x) D_{k-1} v(x) - \sum_{k=1,3,\dots}^{2p-1} C_{2p+1}^k \left(p - \frac{k-1}{2} \right)^2 D_{2p-k} u(x) D_k v(x) = \\ &= \Sigma_1 + \Sigma_2 - \Sigma_3 - \Sigma_4. \end{aligned}$$

Здесь через Σ_k ($k = 1, 2, 3, 4$) обозначена k -я сумма.

Так как $C_{2p+1}^k + C_{2p+1}^{k-1} = C_{2p+2}^k$, то

$$\Sigma_1 + \Sigma_2 = \Sigma_1 + \sum_{k=1}^{2p+2} C_{2p+1}^{k-1} D_{2p-k+2} u(x) D_k v(x) = \sum_{k=0}^{2p+2} C_{2p+2}^k D_{2p-k+2} u(x) D_k v(x). \quad (21)$$

Аналогично, используя равенство

$$C_{2p+1}^{k+1} \left(\frac{k+1}{2} \right)^2 + C_{2p+1}^k \left(\frac{2p-k+1}{2} \right)^2 = \frac{(p+1)(2p+1)}{2} C_{2p}^k,$$

получим

$$\Sigma_3 + \Sigma_4 = \sum_{k=1,3,\dots}^{2p-1} C_{2p+1}^{k+1} \left(\frac{k+1}{2}\right)^2 D_{2p-k} u(x) D_k v(x) + \Sigma_4 = \frac{(p+1)(2p+1)}{2} \sum_{k=1,3,\dots}^{2p-1} C_{2p}^k D_{2p-k} u(x) D_k v(x). \quad (22)$$

Объединяя суммы (21), (22), будем иметь

$$D_{2p+2}(u(x)v(x)) = \sum_{k=0}^{2p+2} C_{2p+2}^k D_{2p-k+2} u(x) D_k v(x) - \frac{(p+1)(2p+1)}{2} \sum_{k=1,3,\dots}^{2p-1} C_{2p}^k D_{2p-k} u(x) D_k v(x),$$

что совпадает с (15) при $m = 2p + 2$. Теорема 4 доказана.

Введем тригонометрические многочлены

$$t_{n,k}(x) = \sin \frac{x-x_0}{2} \dots \sin \frac{x-x_{k-1}}{2} \sin \frac{x-x_{k+1}}{2} \dots \sin \frac{x-x_{2n}}{2} \quad (k = 0, 1, \dots, n);$$

$$\Omega_{n+1}(x) = \sin \frac{1}{2} (x + x_0 + x_1 + \dots + x_{2n}) \prod_{k=0}^{2n} \sin \frac{x-x_k}{2},$$

а также числовые величины

$$a_k = \cos \frac{1}{2} (2x_{2n+1} + \tilde{x}_k) D_m(t_{n,k}; x_{2n+1}), \quad b_k = -\sin \frac{1}{2} (2x_{2n+1} + \tilde{x}_k) D_m(t_{n,k}; x_{2n+1}), \quad (23)$$

$$c_k = -\cos \frac{1}{2} (2x_{2n+1} + \tilde{x}_k) \left(D_m(t_{n,k}; x_{2n+1}) - \frac{m(m-1)}{2} D_{m-2}(t_{n,k}; x_{2n+1}) \right) +$$

$$+ m \sin \frac{1}{2} (2x_{2n+1} + \tilde{x}_k) \left(D_{m-1}(t_{n,k}; x_{2n+1}) - \frac{1+(-1)^m}{2} \frac{(m-1)(m-2)}{4} D_{m-3}(t_{n,k}; x_{2n+1}) \right). \quad (24)$$

Заметим, что при нечетном значении m второе слагаемое во вторых скобках в (24) равно нулю.

Теорема 5. *Тригонометрический интерполяционный многочлен степени не выше $n + 1$ вида*

$$T_{n+1}(f; x) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{t_{n,k}(x) (a_k \cos(x - x_{2n+1}) + b_k \sin(x - x_{2n+1}) + c_k) f(x_k)}{t_{n,k}(x_k) (a_k \cos(x_k - x_{2n+1}) + b_k \sin(x_k - x_{2n+1}) + c_k)} + \frac{\Omega_{n+1}(x) D_m(f; x_{2n+1})}{D_m(\Omega_{n+1}; x_{2n+1})} \quad (25)$$

удовлетворяет интерполяционным условиям

$$T_{n+1}(x_i) = f(x_i) \quad (i = 0, 1, \dots, 2n); \quad D_m(T_{n+1}; x_{n+1}) = D_m(f; x_{2n+1}), \quad (26)$$

и является точным для тригонометрических многочленов степени не выше $n + 1$ с коэффициентом при $\sin(n + 1)x$, равным нулю.

Доказательство. Так как $t_{n,k}(x_i) = \delta_{ik} t_{n,k}(x_k)$, где δ_{ik} – символ Кронекера, и $\Omega_{n+1}(x_i) = 0$ ($i, k = 0, 1, \dots, 2n$), то из этого следует выполнение первой группы интерполяционных условий в (26). Преобразуем далее выражение $D_m(t_{n,k}(x) (a_k \cos(x - x_{2n+1}) + b_k \sin(x - x_{2n+1}) + c_k))$. При нечетном значении m по формуле (14) будем иметь

$$D_m[t_{n,k}(x) (a_k \cos(x - x_{2n+1}) + b_k \sin(x - x_{2n+1}) + c_k)] =$$

$$= (D_m t_{n,k}(x)) \cdot (a_k \cos(x - x_{2n+1}) + b_k \sin(x - x_{2n+1}) + c_k) -$$

$$- m (D_{m-1} t_{n,k}(x)) \cdot (a_k \sin(x - x_{2n+1}) - b_k \cos(x - x_{2n+1})) -$$

$$- \frac{m(m-1)}{2} (D_{m-2} t_{n,k}(x)) \cdot (a_k \cos(x - x_{2n+1}) + b_k \sin(x - x_{2n+1})). \quad (27)$$

Подставляя в последнее равенство вместо a_k , b_k и c_k их выражения по формулам (23), (24), при $x = x_{2n+1}$, после преобразований получим

$$D_m [t_{n,k}(x)(a_k \cos(x - x_{2n+1}) + b_k \sin(x - x_{2n+1}) + c_k); x_{2n+1}] = 0. \quad (28)$$

Обозначим правую часть равенства (27) через $\psi(x)$. Тогда при четном значении m по формуле (15) имеем

$$\begin{aligned} & D_m [t_{n,k}(x)(a_k \cos(x - x_{2n+1}) + b_k \sin(x - x_{2n+1}) + c_k)] = \\ & = \psi(x) - \frac{m(m-1)(m-2)}{4} (D_{m-3} t_{n,k}(x)) \cdot (a_k \sin(x - x_{2n+1}) - b_k \cos(x - x_{2n+1})). \end{aligned}$$

Как и ранее, после подстановки в последнее соотношение вместо a_k , b_k и c_k их выражений по формулам (23), (24), а также упрощений при $x = x_{2n+1}$, получим равенство (28).

Таким образом, последнее интерполяционное условие в (26) также имеет место.

Покажем далее, что формула (25) точна для тригонометрических многочленов степени не выше $n + 1$ с коэффициентом при $\sin(n + 1)x$, равным нулю. Представим многочлен (25) в виде определителя. Рассмотрим определитель вида

$$W_{cs}(x_0, x_1, \dots, x_{2n+1}) = \begin{vmatrix} 1 & \cos x_0 & \sin x_0 & \cos 2x_0 & \sin 2x_0 & \dots & \cos nx_0 & \sin nx_0 & \cos(n+1)x_0 \\ 1 & \cos x_1 & \sin x_1 & \cos 2x_1 & \sin 2x_1 & \dots & \cos nx_1 & \sin nx_1 & \cos(n+1)x_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos x_{2n+1} & \sin x_{2n+1} & \cos 2x_{2n+1} & \sin 2x_{2n+1} & \dots & \cos nx_{2n+1} & \sin nx_{2n+1} & \cos(n+1)x_{2n+1} \end{vmatrix}$$

и вычислим его точное значение, используя методику, предложенную в [17, с. 43]. Для краткости будем выписывать только одну строчку, отбрасывая индексы у x . Таким образом, напишем

$$W_{cs} = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x & \cos 2x & \sin 2x & \dots & \cos nx & \sin nx & \cos(n+1)x \end{vmatrix}.$$

Прибавим к столбцам 2, 4, ..., 2n столбцы соответственно 3, 5, ..., 2n + 1, умноженные на i :

$$W_{cs} = \begin{vmatrix} 1 & e^{ix} & \sin x & e^{2ix} & \sin 2x & \dots & e^{inx} & \sin nx & \cos(n+1)x \end{vmatrix}.$$

Умножим столбцы 3, 5, ..., 2n + 1 на $-2i$:

$$(-2i)^n W_{cs} = \begin{vmatrix} 1 & e^{ix} & -2i \sin x & e^{2ix} & -2i \sin 2x & \dots & e^{inx} & -2i \sin nx & \cos(n+1)x \end{vmatrix}$$

и прибавим столбцы 2, 4, ..., 2n к столбцам 3, 5, ..., 2n + 1 соответственно:

$$(-2i)^n W_{cs} = \begin{vmatrix} 1 & e^{ix} & e^{-ix} & e^{2ix} & e^{-2ix} & \dots & e^{inx} & e^{-inx} & \cos(n+1)x \end{vmatrix}. \quad (29)$$

По формуле Эйлера $\cos(n+1)x = \frac{e^{i(n+1)x} + e^{-i(n+1)x}}{2}$. Подставляя это выражение в (29) и умножая последний столбец определителя на 2 будем иметь:

$$\begin{aligned} 2(-2i)^n W_{cs} &= \begin{vmatrix} 1 & e^{ix} & e^{-ix} & e^{2ix} & e^{-2ix} & \dots & e^{inx} & e^{-inx} & e^{i(n+1)x} + e^{-i(n+1)x} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} 1 & e^{ix} & e^{-ix} & e^{2ix} & e^{-2ix} & \dots & e^{inx} & e^{-inx} & e^{i(n+1)x} \end{vmatrix} + \\ &+ \begin{vmatrix} 1 & e^{ix} & e^{-ix} & e^{2ix} & e^{-2ix} & \dots & e^{inx} & e^{-inx} & e^{-i(n+1)x} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

По формуле (30)

$$\tilde{\Delta}_k(x) = (-1)^n 2^{2n^2+2n+1} \prod_{p < q}^{0 \dots k-1, k+1 \dots 2n} \sin \frac{x_q - x_p}{2} t_{n,k}(x) \times \\ \times D_m \left(\sin \frac{1}{2}(x+u+x_0+x_1+\dots+x_{k-1}+x_{k+1}+\dots+x_{2n}) \sin \frac{u-x}{2} t_{n,k}(u); u \right)_{u=x_{2n+1}}. \quad (31)$$

Введем обозначение $\tilde{x}_k = x_0 + x_1 + \dots + x_{k-1} + x_{k+1} + \dots + x_{2n}$. Справедливо тождество

$$\sin \frac{1}{2}(x+u+\tilde{x}_k) \sin \frac{u-x}{2} = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{1}{2}(2x+\tilde{x}_k) - \cos \frac{1}{2}(2u+\tilde{x}_k) \right).$$

Тогда, если m нечетно, то

$$D_m \left(\sin \frac{1}{2}(x+u+\tilde{x}_k) \sin \frac{u-x}{2} t_{n,k}(u); u \right) = \frac{1}{2} D_m \left(\left(\cos \frac{1}{2}(2x+\tilde{x}_k) - \cos \frac{1}{2}(2u+\tilde{x}_k) \right) t_{n,k}(u); u \right) = \\ = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{1}{2}(2x+\tilde{x}_k) - \cos \frac{1}{2}(2u+\tilde{x}_k) \right) D_m t_{n,k}(u) - \frac{m}{2} \frac{d}{du} \left\{ \cos \frac{1}{2}(2u+\tilde{x}_k) \right\} D_{m-1} t_{n,k}(u) - \\ - \frac{m(m-1)}{4} \frac{d^2}{du^2} \left\{ \cos \frac{1}{2}(2u+\tilde{x}_k) \right\} D_{m-2} t_{n,k}(u). \quad (32)$$

Так как

$$\cos \frac{1}{2}(2x+\tilde{x}_k) - \cos \frac{1}{2}(2u+\tilde{x}_k) = (\cos(x-u) - 1) \cos \frac{1}{2}(2u+\tilde{x}_k) - \sin(x-u) \sin \frac{1}{2}(2u+\tilde{x}_k),$$

то после вычисления производных и преобразований будем иметь

$$D_m \left(\sin \frac{1}{2}(x+u+\tilde{x}_k) \sin \frac{u-x}{2} t_{n,k}(u); u \right)_{u=x_{2n+1}} = \frac{1}{2} (a_k \cos(x-x_{2n+1}) + b_k \sin(x-x_{2n+1}) + c_k), \quad (33)$$

где a_k, b_k, c_k – заданные равенствами (23)–(24) числовые величины.

В случае четного m в правой части равенства (32) добавится слагаемое $\frac{m(m-1)(m-2)}{8} \frac{d}{du} \left\{ \cos \frac{1}{2}(2u+\tilde{x}_k) \right\} D_{m-3} t_{n,k}(u)$. Аналогично, после преобразований при $u = x_{2n+1}$ также будет справедливо равенство (33).

Введем определитель

$$\tilde{\Delta} = \begin{vmatrix} 1 & \cos x_0 & \sin x_0 & \cdots & \cos nx_0 & \sin nx_0 & \cos(n+1)x_0 \\ 1 & \cos x_1 & \sin x_1 & \cdots & \cos nx_1 & \sin nx_1 & \cos(n+1)x_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos x_{2n} & \sin x_{2n} & \cdots & \cos nx_{2n} & \sin nx_{2n} & \cos(n+1)x_{2n} \\ 0 & D_m \cos u & D_m \sin u & \cdots & D_m \cos nu & D_m \sin nu & D_m \cos(n+1)u \end{vmatrix}_{u=x_{2n+1}}.$$

Очевидно, что $\tilde{\Delta}_k(x_k) = (-1)^{2n-k+1} \tilde{\Delta} = (-1)^{k-1} \tilde{\Delta}$. С учетом (31) и (33)

$$\frac{t_{n,k}(x)(a_k \cos(x-x_{2n+1}) + b_k \sin(x-x_{2n+1}) + c_k)}{t_{n,k}(x_k)(a_k \cos(x_k-x_{2n+1}) + b_k \sin(x_k-x_{2n+1}) + c_k)} = \frac{(-1)^{k-1} \tilde{\Delta}_k(x)}{\tilde{\Delta}}. \quad (34)$$

Из (30) следует, что $W_{cs}(x_0, x_1, \dots, x_{2n}, x) = c \Omega_{n+1}(x)$, где c – const. Тогда $\tilde{\Delta} = c D_m(\Omega_{n+1}; x_{2n+1})$. Следовательно,

$$\frac{\Omega_{n+1}(x)}{D_m(\Omega_{n+1}; x_{2n+1})} = \frac{W_{cs}(x_0, x_1, \dots, x_{2n}, x)}{\tilde{\Delta}}. \quad (35)$$

Объединяя (34), (35), получим

$$T_{n+1}(x) = \begin{vmatrix} 1 & \cos x_0 & \sin x_0 & \cdots & \cos nx_0 & \sin nx_0 & \cos(n+1)x_0 & f(x_0) \\ 1 & \cos x_1 & \sin x_1 & \cdots & \cos nx_1 & \sin nx_1 & \cos(n+1)x_1 & f(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos x_{2n} & \sin x_{2n} & \cdots & \cos nx_{2n} & \sin nx_{2n} & \cos(n+1)x_{2n} & f(x_{2n}) \\ 0 & D_m \cos u & D_m \sin u & \cdots & D_m \cos nu & D_m \sin nu & D_m \cos(n+1)u & D_m(f; x_{2n+1}) \\ 1 & \cos x & \sin x & \cdots & \cos nx & \sin nx & \cos(n+1)x & 0 \end{vmatrix}_{u=x_{2n+1}}.$$

Используя свойства определителя, так же, как и в доказательстве теоремы 2, можно показать, что верны тождества:

$$T_{n+1}(1; x) \equiv 1, \quad T_{n+1}(\cos kx; x) \equiv \cos kx \quad (k = 1, 2, \dots, n+1), \quad T_{n+1}(\sin kx; x) \equiv \sin kx \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Таким образом, формула (25) точна для тригонометрических многочленов степени не выше $n+1$ с коэффициентом при $\sin(n+1)x$, равным нулю. Теорема 5 доказана.

Построим представление погрешности формулы (25). В [2] для функции $f(x)$, имеющей на отрезке $[a, b] \in \mathbb{R}$ абсолютно непрерывную производную порядка $r-1$, получен тригонометрический аналог формулы Тейлора вида

$$f(x) = P_{r-1}(x) + R_r(x), \quad (36)$$

где при $r = 2k+1$, $k \in \{0\} + \mathbb{N}$,

$$P_{r-1}(x) = H_{\frac{r-1}{2}}(x) = f(a) + \frac{S_1(x-a)}{1!} D_1(f; a) + \frac{C_1(x-a)}{2!} D_2(f; a) + \dots + \frac{S_{\frac{r-1}{2}}(x-a)}{(r-2)!} D_{r-2}(f; a) + \frac{C_{\frac{r-1}{2}}(x-a)}{(r-1)!} D_{r-1}(f; a); \quad R_r(x) = \frac{1}{(r-1)!} \int_a^x C_{\frac{r-1}{2}}(x-s) D_r(f; s) ds.$$

Здесь функции $C_k(x)$ и $S_k(x)$ задаются равенствами

$$C_k(x) = 2^k (1 - \cos x)^k \quad (k = 0, 1, 2, \dots); \quad S_k(x) = 2^{k-1} \sin x (1 - \cos x)^{k-1} = \frac{1}{2k} C'_k(x) \quad (k = 1, 2, \dots).$$

$$\text{Введем обозначения } \tilde{t}_{n+1,k}(x) = \frac{t_{n,k}(x)(a_k \cos(x - x_{2n+1}) + b_k \sin(x - x_{2n+1}) + c_k)}{t_{n,k}(x_k)(a_k \cos(x_k - x_{2n+1}) + b_k \sin(x_k - x_{2n+1}) + c_k)} \quad (k = 0, 1, \dots, 2n),$$

$$\tilde{\Omega}_{n+1}(x) = \frac{\Omega_{n+1}(x)}{D_m(\Omega_{n+1}; x_{2n+1})} \text{ и функцию } K_n(u) = \begin{cases} C_n(u), & u \geq 0, \\ 0, & u < 0. \end{cases}$$

Теорема 6. Если $f(x)$ имеет на отрезке $[0, 2\pi]$ абсолютно непрерывную производную порядка $2n$, то остаточный член формулы (25) имеет вид

$$f(x) - T_{n+1}(x) = \frac{1}{(2n)!} \int_0^{2\pi} \left[K_n(x-s) - \sum_{k=0}^{2n} K_n(x_k - s) \tilde{t}_{n+1,k}(x) - \tilde{\Omega}_{n+1}(x) D_m(K_n(u-s); u) \Big|_{u=x_{2n+1}} \right] D_{2n+1}(f; s) ds. \quad (37)$$

Доказательство. Имеем

$$T_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{2n} \tilde{t}_{n+1,k}(x) f(x_k) + \tilde{\Omega}_{n+1}(x) D_m(f; x_{2n+1}).$$

Подставив вместо $f(x)$ ее выражение, представимое в виде (36), при $r = 2n + 1$, $a = 0$, а также в силу точности формулы (25) для тригонометрических многочленов степени n , будем иметь

$$T_{n+1}(x) = H_n(x) + \sum_{k=0}^{2n} \tilde{t}_{n+1,k}(x) R_{2n+1}(x_k) + \tilde{\Omega}_{n+1}(x) D_m(R_{2n+1}; x_{2n+1}),$$

откуда

$$f(x) - T_{n+1}(x) = R_{2n+1}(x) - \sum_{k=0}^{2n} \tilde{t}_{n+1,k}(x) R_{2n+1}(x_k) - \tilde{\Omega}_{n+1}(x) D_m(R_{2n+1}; x_{2n+1}).$$

Подставим сюда интегральное выражение для $R_{2n+1}(x)$:

$$f(x) - T_{n+1}(x) = \frac{1}{(2n)!} \left(\int_0^x C_n(x-s) D_{2n+1}(f; s) ds - \sum_{k=0}^{2n} \tilde{t}_{n+1,k}(x) \int_0^{x_k} C_n(x_k-s) D_{2n+1}(f; s) ds \right) - \frac{\tilde{\Omega}_{n+1}(x)}{(2n)!} D_m \left(\int_0^u C_n(u-s) D_{2n+1}(f; s) ds; u \right)_{u=x_{2n+1}}.$$

Используя функцию $K_n(u)$, после преобразований получим соотношение (37). Теорема 6 доказана.

Введем обозначения:

$$B_{n+1} = \max_{0 \leq \theta, s \leq 2\pi} \left| K_n(\theta-s) - \sum_{k=0}^{2n} K_n(x_k-s) \tilde{t}_{n+1,k}(\theta) - \tilde{\Omega}_{n+1}(\theta) D_m(K_n(u-s); u) \Big|_{u=x_{2n+1}} \right|,$$

$$M_{2n+1} = \max_{\theta \in [0, 2\pi]} |D_{2n+1} f(\theta)|.$$

Тогда оценка погрешности формулы (25) будет иметь вид

$$|f(x) - T_{n+1}(x)| \leq \frac{2\pi B_{n+1} M_{2n+1}}{(2n)!}.$$

З а м е ч а н и е 2. Интерполяционный многочлен (25) удовлетворяет условиям (26) не только при значениях величин a_k, b_k, c_k , задаваемых равенствами (23), (24). Например, эти же условия выполняются для многочлена вида (25) при

$$a_k = -m D_{m-1}(t_{n,k}; x_{2n+1}) + \frac{1 + (-1)^m}{2} \frac{m(m-1)(m-2)}{4} D_{m-3}(t_{n,k}; x_{2n+1}),$$

$$b_k = D_m(t_{n,k}; x_{2n+1}) - \frac{m(m-1)}{2} D_{m-2}(t_{n,k}; x_{2n+1}), \quad c_k = 0.$$

Однако в этом случае интерполяционная формула не является точной даже для 1.

П р и м е р. Для функции $f(x) = \cos 3x \cdot e^{\sin 2x}$ построим интерполяционный многочлен (25) при $n = 6$, $m = 2$, а также многочлены лагранжева типа $H_n(f; x) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{t_{n,k}(x) f(x_k)}{t_{n,k}(x_k)}$ при $n = 6, 7$.

Узлы интерполирования для каждой из формул берутся такими: $x_k = \frac{2\pi k}{2n+1}$ ($k = 0, 1, \dots, 2n$), для формулы (25) $x_{2n+1} = \pi$. Явный вид многочленов здесь приводить не будем из-за их громоздкости.

Погрешности интерполирования построенными многочленами, вычисленные по формуле

$$R(f; T) = \sqrt{\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} (f(\bar{x}_k) - T(\bar{x}_k))^2}, \text{ где } \bar{x}_k = (x_{k-1} + x_k)/2, T(x) - \text{соответствующий интерполяционный многочлен, равны}$$

равны

$$R(f; T_7) = 0,0320692, R(f; H_6) = 0,20166, R(f; H_7) = 0,031053.$$

В данном конкретном случае погрешности интерполирования многочленами $T_7(x)$ и $H_7(x)$ примерно равные, однако при приближении функции многочленом $T_7(x)$ используется число узлов на один меньше, чем при приближении многочленом $H_7(x)$. С другой стороны, применение дополнительного условия на совпадение значений дифференциального оператора второго порядка позволило увеличить точность приближения почти на один десятичный разряд по сравнению с обычной лагранжевой интерполяцией многочленом $H_6(x)$.

Заключение. В данной работе получены следующие новые результаты: для функций скалярного аргумента построены алгебраический и тригонометрический интерполяционные многочлены Эрмита – Биркгофа, содержащие значение дифференциального оператора специального вида в одном из узлов. Порядок дифференциального оператора не зависит от числа узлов. Найдены классы многочленов, для которых интерполяционные формулы точны. Построен тригонометрический аналог формулы Лейбница. Получены явные представления и оценки погрешности интерполирования. Построен иллюстрационный пример применения формулы тригонометрического интерполирования.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф16М-055).

Acknowledgements. This work was supported by the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (Project No. F16M-055).

Список использованных источников

1. Худяков, А. П. Интерполяционные многочлены типа Эрмита – Биркгофа относительно отдельных чебышевских систем функций / А. П. Худяков // Вес. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2010. – № 4. – С. 29–36.
2. Худяков, А. П. Явные формулы погрешностей для одного случая эрмитова интерполирования / А. П. Худяков // Вес. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2012. – № 1. – С. 13–21.
3. Худяков, А. П. Некоторые задачи теории интерполирования / А. П. Худяков. – Saarbrücken, Deutschland: LAP LAMBERT Acad. Publ., 2014. – 132 с.
4. Худяков, А. П. Обобщенные интерполяционные формулы Эрмита – Биркгофа для случая чебышевских систем функций / А. П. Худяков, Л. А. Янович // Вес. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2015. – № 2. – С. 5–14.
5. Yanovich, L. A. On one class of interpolating formulas for functions of matrix variables / L. A. Yanovich, A. P. Hudyakov // Журнал обчислювальної та прикладної математики = J. Numer. Appl. Math. – 2011. – № 2 (105). – P. 136–147.
6. Худяков, А. П. Обобщенные интерполяционные эрмитова типа многочлены для функций матричной переменной / А. П. Худяков, Л. А. Янович // Тр. Ин-та математики. – 2011. – Т. 19, № 2. – С. 103–114.
7. Янович, Л. А. Интерполяционные формулы первых и вторых порядков для функций матричного аргумента / Л. А. Янович, А. П. Худяков // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2012. – Т. 56, № 1. – С. 16–22.
8. Shi, Y. G. Theory of Birkhoff Interpolation / Y. G. Shi. – New York: Nova Science Publ., 2003. – 252 p.
9. Nazarzadeh, A. Another case of incidence matrix for bivariate Birkhoff interpolation / A. Nazarzadeh, Kh. Rahsepar Fard, A. Mahmoodi // Журнал обчислювальної та прикладної математики = J. Comput. Appl. Math. – 2016. – № 2 (122). – P. 55–70.
10. Zhao, T. G. On two Birkhoff-type interpolations with first- and second-order derivative / T. G. Zhao, Y. J. Li // J. Appl. Math. Phys. – 2016. – № 4. – P. 1269–1274.
11. Yanovich, L. A. Operator interpolation Hermite – Birkhoff formulas in spaces of smooth functions // L. A. Yanovich, M. V. Ignatenko // J. Numer. Appl. Math. – 2010. – Vol. 100, № 1. – P. 117–129.
12. Хаусхолдер, А. С. Основы численного анализа / А. С. Хаусхолдер; под ред. Л. А. Люстерника. – М.: Из-во иностр. лит., 1956. – 320 с.
13. Турецкий, А. Х. Теория интерполирования в задачах / А. Х. Турецкий. – Минск: Выш. шк., 1968. – 320 с.
14. Makarov, V. L. Methods of Operator Interpolation / V. L. Makarov, V. V. Khlobystov, L. A. Yanovich. – Київ: Ін-т математики Нац. акад. наук України, 2010. – Т. 83. – 517 с.
15. Степанов, В. В. Курс дифференциальных уравнений / В. В. Степанов. – М.: ГИФМЛ, 1959. – 468 с.
16. Зорич, В. А. Математический анализ: в 2 ч. / В. А. Зорич. – 4-е изд. – М.: МЦНМО, 2002. – Ч. 1. – 664 с.
17. Гончаров, В. Л. Теория интерполирования и приближения функций / В. Л. Гончаров. – 2-е изд. – М.: ГИТТЛ, 1954. – 327 с.

References

1. Hudyakov A.P. Hermite-Birkhoff type interpolation polynomials with respect to particular Chebyshev systems of functions. *Izvestiia Natsionalnoi akademii nauk Belarusi. Ser. fiziko-matematicheskikh nauk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series], 2010, no. 4, pp. 29–36. (In Russian).
2. Hudyakov A.P. Explicit formulas of errors for one case of Hermite interpolation. *Izvestiia Natsionalnoi akademii nauk Belarusi. Ser. fiziko-matematicheskikh nauk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series], 2012, no. 1, pp. 13–21. (In Russian).
3. Hudyakov A.P. *Some Problems of Interpolation Theory*. Saarbrücken, Germany, LAP LAMBERT Academic Publ., 2014. 132 p. (In Russian).
4. Hudyakov A.P., Yanovich L.A. Generalized interpolation formulas of Hermite – Birkhoff type for the case of Chebyshev systems of functions. *Izvestiia Natsionalnoi akademii nauk Belarusi. Ser. fiziko-matematicheskikh nauk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series], 2015, no. 2, pp. 5–14. (In Russian).
5. Yanovich L.A., Hudyakov A.P. On one class of interpolating formulas for functions of matrix variables. *Zhurnal obchislyval'noi ta prikladnoi matematiki* [Journal of Numerical and Applied Mathematics], 2011, no. 2 (105), pp. 136–147.
6. Hudyakov A.P., Yanovich L.A. Generalized interpolation Hermite-type polynomials for functions of matrix variable. *Trudy Instituta matematiki* [Proceedings of the Institute of Mathematics], 2011, vol. 19, no. 2, pp. 103–114. (In Russian).
7. Yanovich L.A., Hudyakov A.P. First- and second-order interpolation formulas for functions of matrix argument. *Doklady Natsionalnoi Akademii Nauk Belarusi* [Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus], 2012, vol. 56, no. 1, pp. 16–22. (In Russian).
8. Shi Y.G. *Theory of Birkhoff Interpolation*. New York, Nova Science Publ., 2003. 252 p.
9. Nazarzadeh A., Rahsepar Fard K.H., Mahmoodi A. Another case of incidence matrix for bivariate Birkhoff interpolation. *Zhurnal obchislyval'noi ta prikladnoi matematiki* [Journal of Numerical and Applied Mathematics], 2016, no. 2 (122), pp. 55–70.
10. Zhao T.G., LiY.J. On two Birkhoff-type interpolations with first- and second-order derivative. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 2016, vol. 4, no. 7, pp. 1269–1274. Doi: 10.4236/jamp.2016.47133
11. Yanovich L.A., Ignatenko M.V. Operator interpolation Hermite-Birkhoff formulas in spaces of smooth functions. *Zhurnal obchislyval'noi ta prikladnoi matematiki* [Journal of Numerical and Applied Mathematics], 2010, no. 1 (100), pp. 117–129.
12. Householder A.S. *Principles of Numerical Analysis*. New York, McGraw-Hill Book Co., 1953. 274 p.
13. Turetskii A.H. *Theory of Interpolation in Problems*. Minsk, Vysheyschaya shkola Publ., 1968. 320 p. (in Russian).
14. Makarov V.L., Khlobystov V.V., Yanovich L.A. *Methods of Operator Interpolation*. Kiev: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2010, 517 p.
15. Stepanov V.V. *The Course of Differential Equations*. Moscow, State Physical and Mathematical Literature Publ., 1959. 468 p. (in Russian).
16. Zorich V.A. *Mathematical Analysis. Part 1*. 4th ed. Moscow, Moscow Publishing Center for Continuous Mathematical Education, 2002. 664 p. (In Russian).
17. Goncharov V.L. *Theory of interpolation and approximation of functions*. 2nd ed. Moscow, State Technical and Theoretical Literature Publ., 1954. 327 p. (In Russian).

Информация об авторах

Худяков Андрей Павлович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики физико-математического факультета, Брестский государственный университет им. А. С. Пушкина (бульвар Космонавтов, 21, 224016, г. Брест, Республика Беларусь). E-mail: hudand1985@mail.ru

Трофимук Александр Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры алгебры, геометрии и математического моделирования физико-математического факультета, Брестский государственный университет им. А. С. Пушкина (бульвар Космонавтов, 21, 224016, г. Брест, Республика Беларусь). E-mail: alexander.trofimuk@gmail.com

Для цитирования

Худяков, А. П. Интерполяционные формулы Эрмита – Биркгофа относительно алгебраической и тригонометрической систем функций с одним специальным узлом / А. П. Худяков, А. А. Трофимук // Вест. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2017. – № 1. – С. 14–28.

Information about the authors

Khudyakov Andrei Pavlovich – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor of the Department of Applied Mathematics and Informatics, Physics and Mathematics Faculty of the Brest State University named after A. S. Pushkin (21, Cosmonavtov boulevard, 224016, Brest, Republic of Belarus). E-mail: hudand1985@mail.ru

Trofimuk Alexander Alexandrovich – Ph. D. (Physics and Mathematics), Assistant Professor, Associate Professor of the Department of Algebra, Geometry and Mathematical Modeling of the Brest State University named after A. S. Pushkin (21, Cosmonavtov boulevard, 224016, Brest, Republic of Belarus). E-mail: alexander.trofimuk@gmail.com

For citation

Khudyakov A.P., Trofimuk A.P. Interpolation Hermite – Birkhoff-type formulas with respect to the algebraic and trigonometric systems of functions with one special node. *Vesti Natsyianal'noi akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series], 2017, no. 1, pp. 14–28. (In Russian).

Е. В. Дирвук*Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь***О ПРИБЛИЖЕННОМ ВЫЧИСЛЕНИИ ИНТЕГРАЛОВ
С ОСОБЕННОСТЯМИ НА КОНЦАХ ОТРЕЗКА ИНТЕГРИРОВАНИЯ**

При решении различных граничных задач, возникает необходимость построения таких квадратурных формул, в которых одна часть узлов задается заранее, другая – может быть взята произвольно. Именно эта проблема и привлекла наше внимание. В настоящей статье описана разработка библиотеки процедур для приближенного вычисления интегралов с весами $\sqrt{(1 \mp x)/(1 \pm x)}$ и $1/\sqrt{1-x^2}$ в случае, когда подынтегральная функция имеет особенности на одном или обоих концах отрезка интегрирования. Приведен алгоритм работы библиотеки процедур. На примере показано, что разработанная библиотека процедур значительно уменьшила процессорное время, а значит, усовершенствовала учет вычислительных ресурсов относительно стандартных процедур системы Maple. Далее рассмотрено несколько примеров, на которых проиллюстрирована эффективность построенных квадратурных формул типа Радо и Лобатто в сравнении с результатами из других работ. В завершение продемонстрирован пример вычисления интеграла, в котором отсутствуют веса Чебышева. Полученные результаты могут быть использованы для дальнейшего исследования квадратурных формул, а также для изучения свойств интерполяционных рациональных функций.

Ключевые слова: квадратурные формулы, интегрирование на отрезке, рациональная аппроксимация, интерполирование, Maple.

Y. V. Dirvuk*Yanka Kupala State University of Grodno, Grodno, Belarus***APPROXIMATE COMPUTATION OF INTEGRALS WITH THE SINGULARITIES
ON INTEGRATION INTERVAL ENDS**

Various generalizations of Gauss quadrature formulas are the subject of research of many authors. Here, interest is paid to a special kind of quadrature formulas when some nodes are assigned in advance and the others can be taken arbitrarily. In this article, the performance of process libraries is described. The article outlines the procedures for numerical calculation of integrals by weights $\sqrt{(1 \mp x)/(1 \pm x)}$ and $1/\sqrt{1-x^2}$ when the integrand function has singularities on one or the both ends of the integration interval. The algorithm of working process libraries is also shown. The example illustrates that the developed library extremely decreases the CPU time, thus improving the recording of computing resources with respect to the standard procedures of the Maple system. Further, some examples are considered. They show the comparison between the effective constructed Lobatto and Radau quadrature formulas and the results of other investigations. In conclusion, the example of calculating the integral with no Chebyshev weight is given. The obtained results can be used both for further research of quadrature formulas and for study of the properties of rational interpolating functions.

Keywords: quadrature formulas, segment integration, rational approximation, interpolation, Maple.

Введение. Одной из важных задач теории приближений как науки, имеющей огромное теоретическое и прикладное значение, является задача приближенного вычисления интегралов. Уже на заре ее развития в работах Ш. Эрмита, К. Ф. Гаусса, П. Л. Чебышева, А. А. Маркова, С. Н. Бернштейна был создан теоретический фундамент для развития исследований в этой области, на основе которого появилось новое направление исследований, получившее впоследствии название «теория квадратурных формул».

К настоящему времени квадратурные формулы рационального типа представляют собой основной объект изучения многих авторов. Существенное место в этих исследованиях занимают вопросы, посвященные квадратурным формулам типа Гаусса, полученным с помощью рационального интерполирования.

Изначально в теории квадратурных формул рационального типа стояла проблема выбора узлов интерполирования. Классический способ решения этой задачи на отрезке был предложен В. Н. Русаком. Именно он предложил использовать в качестве узлов интерполирования нули косинус-дробей и синус-дробей Чебышева – Маркова [1]. Это направление было продолжено

Е. А. Ровбой – в работе [2] им были построены обобщения классических квадратурных формул, в частности формулы Эрмита, на основе интерполирования рациональными функциями с узлами Чебышева – Маркова. Выбор нулей рациональных дробей Чебышева – Маркова в качестве узлов интерполирования позволяет найти в явном виде коэффициенты квадратурных формул, вследствие чего теория квадратурных формул интерполяционно-рационального типа приобрела более совершенный характер.

При решении различных граничных задач возникает необходимость построения таких квадратурных формул, в которых одна часть узлов задается заранее, другая – может быть взята произвольно. Именно эта проблема и привлекла наше внимание. При этом, если фиксируются оба конца рассматриваемого отрезка, то такая квадратурная формула называется квадратурной формулой типа Лобатто, если же один – квадратурной формулой типа Радо [3]. Актуальность таких задач подтверждается, в частности, их широким применением в физике.

Ранее в [4, 5] были построены квадратурные формулы типа Радо для весов Якоби $\sqrt{(1 \mp x)/(1 \pm x)}$ и веса $1/\sqrt{1-x^2}$. Также на основании квази-интерполяционных рациональных функций типа Эрмита – Фейра [6] построены квадратурные формулы типа Лобатто для веса $1/\sqrt{1-x^2}$ [7]. Вычислены явные выражения для коэффициентов таких квадратурных формул, дана оценка их погрешности. В данной работе, используя эти квадратурные формулы, приведено описание программной разработки библиотеки процедур для приближенного вычисления интегралов с весами $\sqrt{(1 \mp x)/(1 \pm x)}$ и $1/\sqrt{1-x^2}$ от функций с особенностями вблизи концов отрезка интегрирования. Эффективность построенных квадратурных формул показана на конкретных примерах.

1. Предварительные сведения. Пусть $\{a_k\}_{k=1}^n$ – последовательность комплексных чисел, удовлетворяющая условиям: 1) если $a_k \in \mathbb{R}$, то $|a_k| < 1$; 2) если $a_k \in \mathbb{C}$, то среди указанных чисел есть такое число a_l , что $a_l = \bar{a}_k$; 3) $a_1 = 0$; x_k – нули синус-дроби Чебышева – Маркова $\frac{\sin \mu_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}$, $\mu_n(x) = \sum_{k=1}^n \arccos \frac{x+a_k}{1+a_k x}$.

Теорема 1 [4]. Для произвольной функции $f(x) \in C[-1,1]$ имеет место следующая квадратурная формула:

$$\int_{-1}^1 f(x) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx \approx \frac{f(1)}{\lambda_n(1)} \pi + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f(x_k)(1+x_k)}{\lambda_n(x_k)} \pi,$$

а для ее остатка справедлива следующая оценка:

$$\left| \int_{-1}^1 f(x) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx - \frac{f(1)}{\lambda_n(1)} \pi - \sum_{k=1}^n \frac{f(x_k)(1+x_k)}{\lambda_n(x_k)} \pi \right| \leq 2\pi R_{2n-1,2}(f, a),$$

где $\lambda_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{1-a_k^2}}{1+a_k x}$, $R_{2n-1,2}(f, a)$ – наилучшее равномерное приближение функции $f(x) \in C[-1,1]$ алгебраическими рациональными функциями порядка не выше $2n-1$ вида $p_{2n-1}(x) / \prod_{k=1}^n (1+a_k x)^2$.

Представляет интерес построить интерполяционные рациональные функции Лагранжа с удвоенным количеством параметров, не изменяя степень синус-дроби Чебышева – Маркова.

Пусть $\{a_k\}_{k=1}^{2n}$ – последовательность комплексных чисел, удовлетворяющая условиям: 1) если $a_k \in \mathbb{R}$, то $|a_k| < 1$; 2) если $a_k \in \mathbb{C}$, то среди указанных чисел есть такое число a_l , что $a_l = \bar{a}_k$; 3) $a_1 = 0$; x_k – нули синус-дроби Чебышева – Маркова $\frac{\sin \mu_{2n}(x)}{\sqrt{1-x^2}}$, $\mu_{2n}(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2n} \arccos \frac{x+a_k}{1+a_k x}$, $\lambda_{2n}(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2n} \frac{\sqrt{1-a_k^2}}{1+a_k x}$. На основании соответствующих интерполяционных рациональных функций, как в [4], можно показать, что справедлива

Теорема 2. Для произвольной функции $f(x) \in C[-1,1]$ имеет место следующая квадратурная формула:

$$\int_{-1}^1 f(x) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx \approx \frac{f(1)}{\lambda_{2n}(1)} \pi + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f(x_k)(1+x_k)}{\lambda_{2n}(x_k)} \pi, \quad (1)$$

а для ее остатка справедлива следующая оценка:

$$\left| \int_{-1}^1 f(x) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx - \frac{f(1)}{\lambda_{2n}(1)} \pi - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f(x_k)(1+x_k)}{\lambda_{2n}(x_k)} \pi \right| \leq 2\pi R_{2n-1}(f, a),$$

где $R_{2n-1}(f, a)$ – наилучшее равномерное приближение функции $f(x) \in C[-1,1]$ алгебраическими рациональными функциями порядка не выше $2n-1$ вида $p_{2n-1}(x) / \prod_{k=1}^{2n} (1+a_k x)$.

В работе [5] была построена следующая квадратурная формула Радо:

$$\int_{-1}^1 f(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \approx \frac{f(1)}{2\lambda_{n+1/2}(1)} \pi + \sum_{k=1}^n \frac{f(x_k)}{\lambda_{n+1/2}(x_k)} \pi, \quad (2)$$

где $\lambda_{n+1/2}(x) = \frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sqrt{1-a_k^2}}{1+a_k x}$, x_k – нули синус-дроби Чебышева – Маркова $\frac{\sin \mu_{n+1/2}(x)}{\sqrt{1-x}}$,
 $\mu_{n+1/2}(x) = \frac{3}{2} + \sum_{k=1}^n \arccos \frac{x+a_k}{1+a_k x}$.

З а м е ч а н и е 1. Поступая аналогично теореме 2, имеют место соответствующие квадратурные формулы с удвоенным количеством параметров для весов $\sqrt{(1-x)/(1+x)}$ и $1/\sqrt{1-x^2}$.

В работе [7] была построена следующая квадратурная формула Лобатто:

$$\int_{-1}^1 f(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \approx \frac{f(-1)}{2\lambda_{2n}(-1)} \pi + \sum_{k=1}^n \frac{f(x_k)}{\lambda_{2n}(x_k)} \pi + \frac{f(1)}{2\lambda_{2n}(1)}, \quad (3)$$

где $\lambda_{2n}(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{\sqrt{1-a_k^2}}{1+a_k x}$, x_k – нули синус-дроби Чебышева – Маркова $\frac{\sin \mu_{2n}(x)}{\sqrt{1-x^2}}$,
 $\mu_{2n}(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2n-1} \arccos \frac{x+a_k}{1+a_k x}$.

2. Основные результаты. На практике большое значение имеет быстрдействие процедур вычисления интегралов. Обычно такое сравнение производят для конкретного процессора и конкретной системы компьютерной алгебры. Поэтому укажем, что для численных экспериментов использовался процессор Intel Core i5-3317U (1,7 ГГц, 10 ГБ ОЗУ), а библиотека процедур была создана в системе Maple 18.

При разработке новых библиотек очень важно иметь возможность оценить необходимые для проведения вычислений ресурсы, которыми чаще всего являются процессорное время (вычислительная сложность) и память (сложность алгоритма по памяти). Таким образом, можно предсказать время выполнения и сравнивать эффективность алгоритмов.

Система Maple располагает рядом средств для создания достаточно эффективных механизмов работы с пользовательскими библиотеками, структурно аналогичными главной Maple-библиотеке. Также такие библиотеки позволяют использовать в среде пакета содержащиеся в них средства на уровне доступа, аналогичного стандартным средствам пакета.

Для сравнения приближенного решения интегралов с помощью разработанной библиотеки процедур опишем встроенные средства системы Maple для вычисления интегралов.

Для нахождения определенных интегралов Maple предоставляет следующие функции: $\text{int}(f, x = a..b)$, $\text{int}(f, x = a..b, \text{continuous})$, где f – подынтегральная функция, x – переменная, по

которой выполняются вычисления, a и b – нижний и верхний пределы интегрирования, *continuous* – необязательное дополнительное условие.

Сначала система Maple делает поиск аналитического значения интеграла с заданной подынтегральной функцией. Если это не удается (например, для «не берущихся» интегралов), то возвращается исходная запись интеграла. В подобных случаях можно вычислить значение определенного интеграла численным способом с помощью команды «evalf». Именно с этим способом будем сравнивать процессорное время работы процедур разработанной библиотеки.

Теперь опишем алгоритм приближенного вычисления интегралов с помощью разработанной библиотеки процедур. На первом шаге определяется необходимая точность приближения, подынтегральной и весовой функций. Далее выделяются особенности на концах отрезка интегрирования подынтегральной функции. После этого выбирается необходимая квадратурная формула и набор узлов. И наконец вычисляется интеграл с заданной точностью.

Пример 1. Вычислим интеграл с помощью разработанной библиотеки:

$$\int_{-1}^1 \frac{\pi x / 1,1}{\sin(\pi x / 1,1)} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (4)$$

Вычислим интеграл (4) с точностью до $e-10$. Одна из процедур библиотеки определяет подынтегральную функцию $\frac{\pi x / 1,1}{\sin(\pi x / 1,1)}$, вес $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ и необходимую точность $e-10$. Другая процедура определяет наличие особенностей функции в точках ± 1 . Соответственно для приближенного вычисления интеграла (4) применяется квадратурная формула (3). При этом гарантируется относительная погрешность вычисления интеграла не более $e-10$.

В табл. 1 приведем сравнения процессорного времени, затрачиваемого стандартными процедурами системы Maple и процедурами разработанной библиотеки, для различной точности приближения.

Таблица 1. Сравнительная таблица для интеграла (4) / Table 1. Comparison table for the integral (4)

Точность Accuracy	Процедуры библиотеки Procedures library	Процедуры Maple Maple Procedures
$e-05$	14 мс	135 мс
$e-10$	26 мс	330 мс
$e-25$	205 мс	2600 мс

3. Демонстрационные примеры. Проиллюстрируем эффективность построенных квадратурных формул типа Радо и Лобатто на следующих примерах.

Пример 2. Рассмотрим интеграл

$$\int_{-1}^1 \frac{e^x}{(x+\lambda)^r} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (5)$$

Для различных λ и r такой интеграл рассматривался в качестве примера в работе [8]. Позже, в работе [9], интеграл (5) был вычислен для $\lambda \pm 1,01$ и $r = 2$ с помощью квадратурных формул типа Гаусса, при этом узлы в конечных точках не задавались. График поведения подынтегральной функции $\frac{e^x}{(x+1,01)^2}$ представлен на рис. 1.

Из рис. 1, в частности, следует, что подынтегральная функция имеет особенность вблизи точки 1. Вычислим этот интеграл с помощью квадратурной формулы Радо в рациональном (2) и полиномиальном (положив $\{a_k\}_{k=1}^n = 0$) случаях. Полученные результаты сравним с относительными погрешностями из [8, 9]. Для применения рациональной квадратурной формулы определим последовательность чисел $\{a_k\}_{k=1}^n$ следующим образом:

$$a_n = 0, \quad a_k = -k / \lambda(n-1), \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

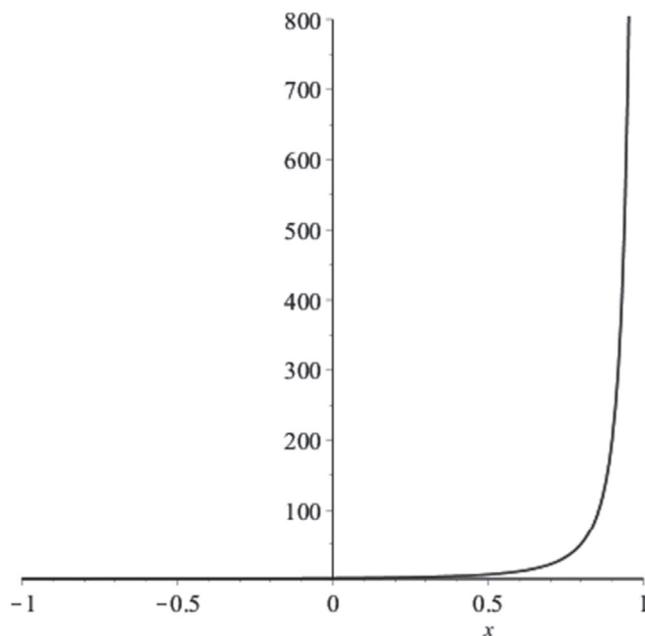


Рис. 1. График подынтегральной функции (5) / Fig. 1. The graph of the integrand (5)

Относительную погрешность квадратурных формул вычислим по формуле

$$Error = \left| \frac{I_n(f) - I_\mu(f)}{I_\mu(f)} \right|,$$

где $I_\mu(f)$ – приближенное значение интеграла, $I_n(f)$ – точное значение интеграла.

В табл. 2 для различного количества узлов приведены относительные погрешности при применении квадратурных формул типа Лобатто (*Error1* в рациональном случае, *Error4* в полиномиальном случае) и квадратурных формул, рассмотренных в [9, 8] (*Error2* и *Error3* соответственно).

Таблица 2. Относительные погрешности рассматриваемых квадратурных формул для интеграла (5)

Table 2. Relative errors of the quadrature formulas for the integral (5)

n	<i>Error1</i>	<i>Error2</i>	<i>Error3</i>	<i>Error4</i>
2	2,29e-06	5,41e-04	8,83e-05	4,69
4	1,38e-09	6,11e-07	6,31e-07	2,17
8	3,03e-16	1,29e-15	4,97e-12	0,73
16	6,06e-16	6,46e-16	2,37e-15	0,11

Пример 3. Рассмотрим интеграл

$$\int_{-1}^1 J_0(\omega x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \omega > 0. \tag{6}$$

Это хорошо известное соотношение с участием функции Бесселя нулевого порядка [10]. Так как весовая, а также подынтегральная функции являются четными, то такой интеграл можно рассматривать на отрезке $[-1,1]$, разделив результат на 2.

Интеграл (6) рассматривался в качестве примера в работе [11], где результаты были получены с помощью квадратурных формул типа Радо.

Далее интеграл (6) будем рассматривать на отрезке $[-1,1]$ для случая $\omega = 8$:

$$\int_{-1}^1 J_0(8x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

В этом случае график поведения подынтегральной функции $J_0(8x)$ представлен на рис. 2.

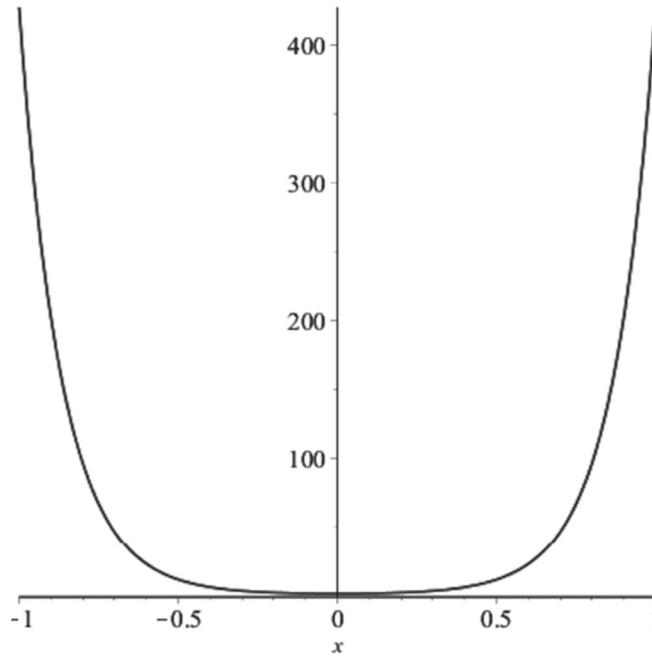


Рис. 2. График подынтегральной функции (6)
 Fig. 2. The graph of the integrand (6)

Из рис. 2, в частности, следует, что подынтегральная функция имеет особенности вблизи точек -1 и 1 . Вычислим интеграл (6) с помощью квадратурных формул типа Лобатто в рациональном (3) и полиномиальном (положив $\{a_k\}_{k=1}^{2n-1} = 0$) случаях. Полученные результаты сравним с относительными погрешностями из [11]. Для применения рациональных квадратурных формул (3) определим последовательность комплексных чисел $\{a_k\}_{k=1}^{2n-1}$ следующим образом:

$$a_0 = a_{2n-1} = 0, \quad a_k = 1 - e^{-k/\sqrt{an}}, \quad a_{2n-1-k} = -a_k, \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

В табл. 3 для различного количества узлов приведены относительные погрешности при применении квадратурных формул типа Лобатто (*Error1* в рациональном случае, *Error3* в полиномиальном случае) и квадратурных формул из [11] (*Error2*).

Таблица 3. Относительные погрешности рассматриваемых квадратурных формул для интеграла (6)

Table 3. Relative errors of the quadrature formulas for the integral (6)

n	a	<i>Error1</i>	<i>Error2</i>	<i>Error3</i>
2	19,9998	0,15	1,4	2,35
5	4,9199	1,12e-08	3,7e-03	3,99e-03
8	0,8932	3,16e-11	5,8e-07	1,51e-06
14	0,1872	6,57e-19	8,7e-17	9,39e-16
17	0,1161	4,72e-24	1,7e-22	3,31e-21

В предыдущих примерах были рассмотрены функции, которые могут быть интегрированы с небольшим числом узлов. Они служат для иллюстрации теории, но реальная сила этих квадратурных формул лежит в приближении интегралов, которые трудно вычислить традиционными методами и которые требуют очень большого количества узлов. Продемонстрируем это на следующем примере.

Пример 4. Рассмотрим интеграл

$$\int_{-1}^1 \sin\left(\frac{1}{x^2 - \omega^2}\right) \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad \omega > 1. \tag{7}$$

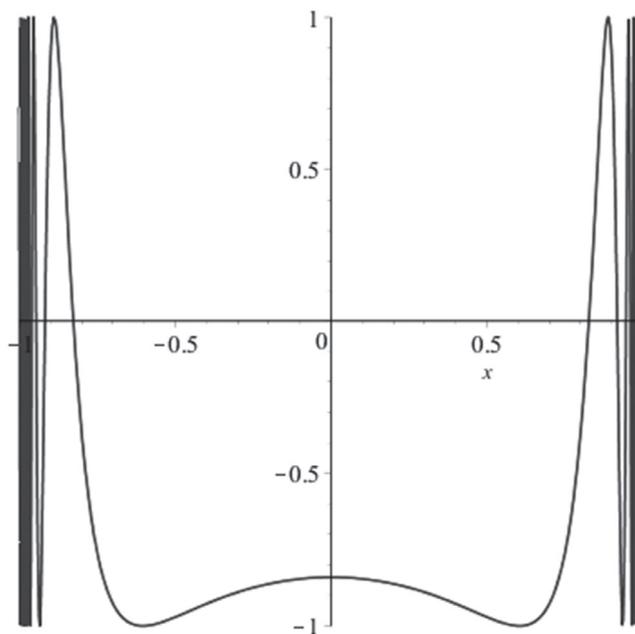


Рис. 3. График подынтегральной функции (7)
 Fig. 3. The graph of the integrand (7)

Интеграл (7) при $\omega = 0,001$ приводился в качестве примера в работе [9], где результаты были получены с помощью квадратурных формул типа Гаусса, при этом узлы в конечных точках не задавались.

График поведения подынтегральной функции $\sin\left(\frac{1}{x^2 - \omega^2}\right)$ представлен на рис. 3.

Из рис. 3, в частности, следует, что подынтегральная функция имеет особенности вблизи точек -1 и 1 . Вычислим интеграл (7) с помощью квадратурных формул типа Лобатто в рациональном (3) и полиномиальном (положив $\{a_k\}_{k=1}^{2n-1} = 0$) случаях. Полученные результаты сравним с относительными погрешностями из [9]. Для применения рациональных квадратурных формул (3) определим последовательность комплексных чисел $\{a_k\}_{k=1}^{2n-1}$ следующим образом:

$$a_0 = a_{2n-1} = 0, \quad a_k = 1 - e^{-k/\alpha\sqrt{n}}, \quad a_{2n-1-k} = -a_k, \quad k = 1, 2, \dots, n-1. \quad (8)$$

В табл. 4 для различного количества узлов приведены относительные погрешности при применении квадратурных формул типа Лобатто (*Error1* в рациональном случае, *Error3* в полиномиальном случае) и квадратурных формул из [9] (*Error2*).

Таблица 4. Относительные погрешности рассматриваемых квадратурных формул для интеграла (7)

Table 4. Relative errors of the quadrature formulas for the integral (7)

n	α	<i>Error1</i>	<i>Error2</i>	<i>Error3</i>
100	1,9973	1,10e-05	2,12e-03	9,38e-02
200	9,9846	2,92e-06	8,01e-04	3,85e-03
400	1,31968978485	6,69e-15	2,01e-14	2,02e-02

З а м е ч а н и е 2. Вычисления примеров 2–4 выполнены при помощи разработанной библиотеки процедур.

В завершение продемонстрируем пример, в котором отсутствуют веса Чебышева.

П р и м е р 5. Рассмотрим интеграл

$$\int_{-1}^1 \sin\left(\frac{1}{\omega - x}\right) dx, \quad \omega > 1. \quad (9)$$

Такой интеграл рассматривался в качестве примера в [12]. Результаты из этой работы получены с помощью квадратурных формул типа Гаусса.

Любой определенный интеграл может быть преобразован в другой интеграл, в котором является одна из четырех весовых функций Чебышева. Для перехода к весу $1/\sqrt{1-x^2}$ будем использовать равенство из [11]:

$$\int_a^b Z(x)dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 \frac{Z((b-a)\sqrt{1-x^2} + a)|x|}{\sqrt{1-x^2}} dx. \quad (10)$$

Стоит отметить, что формула (10) не подходит для всех случаев [11]. Применяя (10) для (9), получим

$$\int_{-1}^1 \sin\left(\frac{1}{\omega-x}\right) dx = \int_{-1}^1 \sin\left(\frac{1}{\omega - (2\sqrt{1-x^2} - 1)}\right) |x| dx. \quad (11)$$

Вычислим интеграл (11) с помощью квадратурной формулы типа Лобатто в рациональном (3) и полиномиальном (положив $\{a_k\}_{k=1}^{2n-1} = 0$) случаях. Полученные результаты будем сравнивать с относительными погрешностями квадратурных формул, рассмотренных в [12].

Для применения рациональных квадратурных формул (3) определим последовательность комплексных чисел $\{a_k\}_{k=1}^{2n-1}$, как и в (8).

В табл. 5 приведены относительные погрешности при применении квадратурных формул (*Error1* в рациональном случае, *Error3* в полиномиальном случае) и квадратурных формул (*Error2*), рассмотренных в работе [12].

Таблица 5. Относительные погрешности рассматриваемых квадратурных формул для интеграла (9)
Table 5. Relative errors of the quadrature formulas for the integral (9)

n	a	<i>Error1</i>	<i>Error2</i>	<i>Error3</i>
5	16,3977	3,43e-02	4,56e-02	6,6e-02
10	11,2001	1,05e-06	1,18e-04	5,15e-02
20	12,2371015953	5,70e-14	3,14e-13	9,55e-02

Заключение. Описана разработка библиотеки процедур для приближенного вычисления интегралов с весами $\sqrt{(1 \mp x)/(1 \pm x)}$ и $1/\sqrt{1-x^2}$, имеющих особенности на концах отрезка интегрирования. Приведен алгоритм работы библиотеки процедур. Рассмотрен пример вычисления интеграла из [9], приведено сравнение процессорного времени, затрачиваемого стандартными процедурами системы Maple и процедурами разработанной библиотеки для различной точности приближения. Созданная библиотека процедур значительно уменьшила процессорное время, а значит, усовершенствовала учет вычислительных ресурсов относительно стандартных процедур системы Maple. Рассмотрены несколько примеров из [9–12], на которых проиллюстрирована эффективность построенных квадратурных формул типа Радо и Лобатто в сравнении с результатами из этих работ. В завершение продемонстрирован пример вычисления интеграла, в котором отсутствуют веса Чебышева.

Список использованных источников

1. Русак, В. Н. Об интерполировании рациональными функциями с фиксированными полюсами / В. Н. Русак // Докл. акад. наук БССР. – 1962. – Т. 4, № 9. – С. 548–550.
2. Ровба, Е. А. Квадратурные формулы интерполяционно-рационального типа / Е. А. Ровба // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 1996. – Т. 40, № 3. – С. 42–46.
3. Крылов, В. И. Приближенное вычисление интегралов / В. И. Крылов. – М.: Наука, 1967. – 500 с.
4. Дирвук, Е. В. Рациональные квадратурные формулы типа Радо / Е. В. Дирвук, К. А. Смотрицкий // Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. – 2014. – № 1. – С. 87–91.

5. Дирвук, Е. В. Квадратурная формула типа Радо одной ортогональной системы рациональных функций / Е. В. Дирвук // Весн. Гродзен. дзярж. ун-та імя Я. Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, выліч. тэхніка і кіраванне. – 2014. – № 2 (173). – С. 20–26.
6. Ровба, Е. А. Рациональная квази-интерполяция Эрмита – Фейера / Е. А. Ровба, Е. В. Дирвук // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. физ.-мат. навук. – 2014. – № 3. – С. 125–129.
7. Rouba, Y. Rational quasi-Hermite-Fejer-type interpolation and Lobatto-type quadrature formula with Chebyshev-Markov nodes / Y. Rouba, K. Smatrytski, Y. Dirvuk // Jaen Journal on Approximation. – 2015. – Vol. 7, № 2. – P. 291–308.
8. Ranga, A. Sri. Another quadrature rule of highest algebraic degree of precision / A. Sri Ranga // Numerische Mathematik. – 1994. – Vol. 68, № 2. – P. 283–294.
9. Van Deun, J. On computing rational Gauss-Chebyshev quadrature formulas / J. Van Deun, A. Bultheel, P. G. Vera // Math. Comp. – 2005. – Vol. 75, № 253. – P. 307–326.
10. Gradshteyn, I. S. Tables of integrals, series and products / I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik // Nucl. Phys. A. – 1967. – Vol. 91, № 3. – P. 698.
11. Gautschi, W. Gauss-Radau and Gauss-Lobatto quadratures with double end points / W. Gautschi, S. Li // J. Comput. Appl. Math. – 1991. – Vol. 34, № 3. – P. 343–360.
12. Van Deun, J. A quadrature formula based on Chebyshev rational functions / J. Van Deun, A. Bultheel // IMA J. Numer. Analysis. – 2006. – Vol. 26, № 4. – P. 641–656.

References

1. Rusak V.N. On interpolation by rational functions with fixed poles. *Doklady Akademii nauk BSSR* [Doklady of the Academy of Sciences of BSSR], 1962, vol. 6, no. 9, pp. 548–550. (In Russian).
2. Rovba E.A. Quadrature formulae of interpolation-rational type. *Doklady Natsionalnoi Akademii Nauk Belarusi* [Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus], 1996, vol. 40, no. 3, pp. 42–46. (In Russian).
3. Krylov V.I. *Approximate Calculation of Integrals*. Moscow, Nauka Publ., 1967. 500 p. (In Russian).
4. Dirvuk E.V., Smotritskii K.A. Rational Radau-type quadrature formulas. *Vestnik BGU. Seriya 1. Fizika. Matematika. Informatika* [Vestnik BSU. Series 1. Physics. Mathematics. Informatics], 2014, no. 1, pp. 87–91. (In Russian).
5. Dirvuk E.V. Radau-type quadrature formula for the orthogonal system of rational functions. *Vesnik Grodzenskaga dzjarzhajnyaga ūniversiteta imya Yanki Kupaly. Seriya 2. Matematyka. Fizika. Infarmatyka, vylichal'naya tekhnika i kiravanne* [Vesnik of Yanka Kupala State University of Grodno. Series 2. Mathematics. Physics. Informatics, Computer Technology and its Control], 2014, no. 2 (173), pp. 20–26. (In Russian).
6. Rovba E.A., Dirvuk E.V. Rational quasi-interpolation Hermite – Fejer. *Izvestiia Natsionalnoi akademii nauk Belarusi. Ser. fiziko-matematicheskikh nauk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series], 2014, no. 3, pp. 33–37. (In Russian).
7. Rouba Y., Smatrytski K., Dirvuk Y. Rational quasi-Hermite-Fejer-type interpolation and Lobatto-type quadrature formula with Chebyshev-Markov nodes. *Jaen Journal on Approximation*, 2015, vol. 7, no. 2, pp. 291–308.
8. Ranga A.Sri. Another quadrature rule of highest algebraic degree of precision. *Numerische Mathematik*, 1994, vol. 68, no. 2, pp. 283–294. Doi: 10.1007/s002110050062
9. Van Deun J., Bultheel A., Vera P.G. On computing rational Gauss-Chebyshev quadrature formulas. *Mathematics of Computation*, 2006, vol. 75, no. 253, pp. 307–326. Doi: 10.1090/s0025-5718-05-01774-6
10. Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. Tables of integrals, series and products. *Nuclear Physics A*, 1967, vol. 91, no. 3, pp. 698. Doi: 10.1016/0375-9474(67)90589-1
11. Gautschi W., Li S. Gauss–Radau and Gauss–Lobatto quadratures with double end points. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 1991, vol. 34, no. 3, pp. 343–360. Doi: 10.1016/0377-0427(91)90094-Z
12. Van Deun J., Bultheel A. A quadrature formula based on Chebyshev rational functions. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 2006, vol. 26, no. 4, pp. 641–656. Doi: 10.1093/imanum/drl009.

Информация об авторе

Дирвук Евгений Владимирович – старший преподаватель кафедры системного программирования и компьютерной безопасности факультета математики и информатики, Гродненский государственный университет им. Я. Купалы (ул. Ожешко, 22, 230020, г. Гродно, Республика Беларусь). Email: dirvuk@gmail.com

Information about the author

Dirvuk Yauheni Vladimirovich – Senior Lecturer, Department of System Programming and Computer Security, Faculty of Mathematics and Informatics of the Yanka Kupala State University of Grodno (22, Ozheshko Str., 230020, Grodno, Republic of Belarus). Email: dirvuk@gmail.com

Для цитирования

Дирвук, Е. В. О приближенном вычислении интегралов с особенностями на концах отрезка интегрирования / Е. В. Дирвук // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. физ.-мат. навук. – 2017. – № 1. – С. 29–37.

For citation

Dirvuk Y.V. Approximate computation of integrals with the singularities on integration interval ends. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series], 2017, no. 1, pp. 29–37. (In Russian).

В. И. Корзюк^{1,2}, Нгуен Ван Винь^{1,3}¹*Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь*²*Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь*³*Хюэский университет, Хюэ, Вьетнам***РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕСТРОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ
ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ДВУКРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ**

Изучаются классические решения граничных задач для нестрого гиперболического уравнения четвертого порядка в случае двух независимых переменных с двукратными характеристиками. Под классическим решением понимается функция, которая определена во всех точках замыкания заданной области и имеет все классические производные, входящие в уравнение и условия задачи. Наличие классического решения, построенного в аналитическом виде, для уравнений высшего порядка представляет интерес для вычислительной математики при тестировании численных алгоритмов. Заметим, что корректная постановка смешанных задач для гиперболических уравнений зависит не только от количества характеристик, но и от их расположения. Оператор уравнения представляет собой композицию дифференциальных операторов первого порядка. Уравнение задается в полуполосе двух независимых переменных. На нижнем основании области задаются условия Коши, а на боковых границах – условия Дирихле и Неймана. Методом характеристик выписывается в аналитическом виде решение рассматриваемой задачи, доказывается единственность решений, а также показывается, при каких условиях линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами четвертого порядка представимо в виде рассматриваемого в статье нестрого гиперболического уравнения.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, гиперболические уравнения, уравнения четвертого порядка, частные производные, граничные условия, условия Коши, условия Дирихле, условия согласования, классическое решение, нестрого гиперболическое уравнение.

V. I. Korzyuk^{1,2}, Nguyen Van Vinh^{1,3}¹*Belarusian State University, Minsk, Belarus*²*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus*³*Hue University's College of Education, Hue, Vietnam***SOLVING THE PROBLEM FOR THE FOURTH-ORDER NONSTRICTLY HYPERBOLIC EQUATION
WITH DOUBLE CHARACTERISTICS**

This article is concerned with studying the classical solutions of boundary problems for the fourth-order nonstrictly hyperbolic equation with double characteristics. A classical solution is understood as a function that is defined everywhere in the domain closure and has all classical derivatives entering the equation and the problem conditions. The classical solution is built in analytical form for higher-order equations of interest for computational mathematics in testing numerical algorithms. Note that the correct formulation of mixed problems for hyperbolic equations not only depends on the number of characteristics, but also on their location. The operator appearing in the equation involves a composition of first-order differential operators. The equation is defined in the half-band of two independent variables. There are Cauchy's conditions on the domain bottom and Dirichlet's conditions and Neumann's conditions on other boundary. Using the method of characteristics, the analytic solution of the considered problem is written. The uniqueness of the solutions is proved. In addition, it states: under what conditions a linear differential equation with constant fourth-order coefficients can be represented in the form of the nonstrictly hyperbolic equation considered in the article.

Keywords: differential equations, hyperbolic equations, partial derivatives, boundary conditions, Cauchy's conditions, Dirichlet's conditions, agreement conditions, classical solution, nonstrictly hyperbolic equations.

Введение. Настоящая работа является продолжением построения классических решений задач для гиперболических уравнений четвертого порядка [1–5]. Каждая задача – это отдельное научное исследование, представляющее интерес в теории дифференциальных уравнений с частными производными. В статье рассматривается гиперболическое уравнение с постоянными коэффициентами, для которого находится классическое решение смешанной задачи в случае

простейших граничных условий. Оператор уравнения представим в виде композиции линейных операторов первого порядка. Одновременно получается условие на коэффициенты исходного уравнения, при выполнении которого гиперболический оператор разлагается на композицию операторов. Для нахождения классического решения указанной задачи используется формула общего решения для гиперболического уравнения четвертого порядка, оператор которого представим в виде композиции операторов первого порядка [4, 5]. С помощью характеристик уравнения определяется его общее решение. Из общего решения выделяется то, которое удовлетворяет условиям Коши и другим граничным условиям.

1. Разложение гиперболического оператора в виде композиции операторов. Линейное гиперболическое уравнение относительно функции $u: R^2 \supset \bar{Q} \ni (t, x) \rightarrow u(t, x) \in R$ четвертого порядка в общем виде можно записать следующим образом:

$$Lu = \sum_{i+j \leq 4} \tilde{a}^{(i,j)} \partial_t^i \partial_x^j u(t, x) = \tilde{f}(t, x), \quad (t, x) \in \bar{Q}, \quad i, j = \overline{0, 4}. \quad (1)$$

Найдем условия, при которых гиперболический оператор уравнения (1) разлагается на композицию операторов первого порядка, т. е. когда уравнение (1) можно представить в виде

$$\prod_{k=1}^4 \left(\tilde{c}^{(k)} \partial_t - \tilde{a}^{(k)} \partial_x + \tilde{b}^{(k)} \right) u(t, x) = \tilde{g}(t, x), \quad (t, x) \in \bar{Q}, \quad (2)$$

где коэффициенты $\tilde{c}^{(1)}, \tilde{c}^{(2)}, \tilde{c}^{(3)}$ и $\tilde{c}^{(4)}$ не равны нулю одновременно.

Если $\tilde{a}^{(4,0)} \neq 0$, то можно разделить уравнение (1) на $\tilde{a}^{(4,0)}$. В результате получим уравнение

$$\partial_t^4 u(t, x) + \sum_{i+j \leq 4} \alpha^{(i,j)} \partial_t^i \partial_x^j u(t, x) = f(t, x), \quad (t, x) \in \bar{Q}, \quad i = \overline{0, 3}, j = \overline{0, 4}, \quad (3)$$

где $\alpha^{(i,j)} = \frac{\tilde{a}^{(i,j)}}{\tilde{a}^{(4,0)}}$, $f(t, x) = \frac{\tilde{f}(t, x)}{\tilde{a}^{(4,0)}}$. Очевидно, что если уравнение (3) сводится к (2), то должно

выполняться условие $\tilde{c}^{(1)} \tilde{c}^{(2)} \tilde{c}^{(3)} \tilde{c}^{(4)} = 1$. В этом случае (2) можно упростить, разделив обе его части на $\tilde{c}^{(1)} \tilde{c}^{(2)} \tilde{c}^{(3)} \tilde{c}^{(4)}$. После этого получим уравнение

$$\prod_{k=1}^4 \left(\partial_t - a^{(k)} \partial_x + b^{(k)} \right) u(t, x) = g(t, x), \quad (t, x) \in \bar{Q}. \quad (4)$$

Рассмотрим случай $a^{(1)} = a^{(2)} = a$, $b^{(1)} = b^{(2)} = b$, $a^{(3)} = a^{(4)} = c$, $b^{(3)} = b^{(4)} = d$, т. е.

$$(\partial_t - a \partial_x + b)^2 (\partial_t - c \partial_x + d)^2 u(t, x) = g(t, x), \quad (t, x) \in \bar{Q}. \quad (5)$$

Отсюда

$$a = \frac{1}{4} \left(-\alpha^{(3,1)} - \sqrt{-8\alpha^{(2,2)} + 3(\alpha^{(3,1)})^2} \right), \quad c = \frac{1}{4} \left(-\alpha^{(3,1)} + \sqrt{-8\alpha^{(2,2)} + 3(\alpha^{(3,1)})^2} \right),$$

$$b = \frac{1}{4} \left(\alpha^{(3,0)} - \sqrt{-8\alpha^{(2,0)} + 3(\alpha^{(3,0)})^2} \right), \quad d = \frac{1}{4} \left(\alpha^{(3,0)} + \sqrt{-8\alpha^{(2,0)} + 3(\alpha^{(3,0)})^2} \right).$$

Для того чтобы представить уравнение (3) в виде (5), надо удовлетворить коэффициенты уравнения (1) условиям

$$-8\alpha^{(2,2)} + 3(\alpha^{(3,1)})^2 \geq 0, \quad -8\alpha^{(2,0)} + 3(\alpha^{(3,0)})^2 \geq 0, \quad 64\alpha^{(0,0)} = \left(-4\alpha^{(2,0)} + (\alpha^{(3,0)})^2 \right)^2,$$

$$\begin{aligned}
 &8\alpha^{(1,0)} + \left(\alpha^{(3,0)}\right)^3 = 4\alpha^{(2,0)}\alpha^{(3,0)}, \quad 8\alpha^{(1,3)} + \left(\alpha^{(3,1)}\right)^3 = 4\alpha^{(2,2)}\alpha^{(3,1)}, \\
 &3\alpha^{(3,0)}\alpha^{(3,1)} + \sqrt{-8\alpha^{(2,0)} + 3\left(\alpha^{(3,0)}\right)^2} \sqrt{-8\alpha^{(2,2)} + 3\left(\alpha^{(3,1)}\right)^2} = 4\alpha^{(2,1)}, \quad 64\alpha^{(0,4)} = \left(-4\alpha^{(2,2)} + \left(\alpha^{(3,1)}\right)^2\right)^2, \\
 &32\alpha^{(0,2)} + 16\alpha^{(2,0)}\left(-3\alpha^{(2,2)} + \left(\alpha^{(3,1)}\right)^2\right) + \alpha^{(3,0)}\left(16\alpha^{(2,2)}\alpha^{(3,0)} - 4\alpha^{(2,1)}\alpha^{(3,1)} - 3\alpha^{(3,0)}\left(\alpha^{(3,1)}\right)^2\right) = 0, \\
 &16\alpha^{(0,1)} = \left(4\alpha^{(2,0)} - \left(\alpha^{(3,0)}\right)^2\right)\left(2\alpha^{(2,1)} - \alpha^{(3,0)}\alpha^{(3,1)}\right), \quad 16\alpha^{(0,3)} + \left(2\alpha^{(2,1)} - \alpha^{(3,0)}\alpha^{(3,1)}\right)\left(-4\alpha^{(2,2)} + \left(\alpha^{(3,1)}\right)^2\right) = 0, \\
 &8\alpha^{(1,1)} + \left(-4\alpha^{(2,0)} + 3\left(\alpha^{(3,0)}\right)^2\right)\alpha^{(3,1)} = 4\alpha^{(2,1)}\alpha^{(3,0)}, \quad 8\alpha^{(1,2)} + \left(-4\alpha^{(2,1)} + 3\alpha^{(3,0)}\alpha^{(3,1)}\right)\alpha^{(3,1)} = 4\alpha^{(2,2)}\alpha^{(3,0)}.
 \end{aligned}$$

2. Постановка задачи. В замыкании $\bar{Q} = [0, \infty) \times [0, l]$ области $Q = (0, \infty) \times (0, l)$ двух независимых переменных $(t, x) \in \bar{Q} \subset R^2$ задано одномерное уравнение

$$Lu = (\partial_t - a\partial_x + b)^2 (\partial_t - c\partial_x + d)^2 u(t, x) = f(t, x), \quad (t, x) \in \bar{Q}, \quad (6)$$

относительно искомой функции $u: R^2 \supset \bar{Q} \ni (t, x) \rightarrow u(t, x) \in R$, где $a, b, c, d \in R$, $0 < l < +\infty$, $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_t^j \partial_x^k = \frac{\partial^{j+k}}{\partial t^j \partial x^k}$, $j, k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ – частные производные. К уравнению (6) на части границы ∂Q области Q присоединяются условия Коши

$$\partial_t^j u(0, x) = \varphi_j(x), \quad j = 0, 1, 2, 3, \quad x \in [0, l], \quad (7)$$

и граничные условия

$$u(t, 0) = \mu_1(t), \quad \partial_x u(t, 0) = \mu_2(t), \quad t \in [0, \infty), \quad (8)$$

$$u(t, l) = \chi_1(t), \quad \partial_x u(t, l) = \chi_2(t), \quad t \in [0, \infty). \quad (9)$$

Здесь $f: \bar{Q} \ni (t, x) \rightarrow f(t, x) \in R$, $\varphi_j: [0, l] \ni x \rightarrow \varphi_j(x)$, $j = 0, 1, 2, 3$, $\mu_i: [0, \infty) \ni t \rightarrow \mu_i(t) \in R$, $\chi_i: [0, \infty) \ni t \rightarrow \chi_i(t) \in R$, $i = 1, 2$, – заданные функции.

Таким образом, требуется найти решение уравнения (6), удовлетворяющее условиям Коши (7), граничным условиям (8) и (9). Для определенности предположим, что $c > 0 > a$. Обозначим через \tilde{f} продолжение на R по второму аргументу функции f , т. е. $\tilde{f}(t, x) = f(t, x)$ для $(t, x) \in \bar{Q}$.

3. Общее решение уравнения (6). Справедлива

Лемма 1. Общее решение уравнения (6) представляется в виде суммы

$$\begin{aligned}
 &u(t, x) = e^{-bt} (g_1(x + at) + tg_2(x + at)) + e^{-dt} (g_3(x + ct) + tg_4(x + ct)) + \\
 &+ \frac{1}{(a-c)^3} \int_0^t \int_{0x+a(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} e^{\frac{-d(a(t-\tau)+x-z)+b(c(t-\tau)+x-z)}{a-c}} (a(t-\tau) + x - z)(c(t-\tau) + x - z) \tilde{f}(\tau, z) dz d\tau. \quad (10)
 \end{aligned}$$

Доказательство. Введем обозначение:

$$(\partial_t - c\partial_x + d)^2 u(t, x) = w(t, x), \quad (t, x) \in \bar{Q}. \quad (11)$$

Уравнение (6) запишем в виде

$$(\partial_t - a\partial_x + b)^2 w(t, x) = \tilde{f}(t, x), \quad (t, x) \in \bar{Q}. \quad (12)$$

Через функции характеристик делаем замену $x + at = y_0$, $t = y_1$. После приведения к каноническому виду уравнение (12) запишется так:

$$\partial_{y_1} \partial_{y_1} \tilde{w}(y_0, y_1) + 2b \partial_{y_1} \tilde{w}(y_0, y_1) + b^2 \tilde{w}(y_0, y_1) = \tilde{f}(y_1, y_0 - ay_1), \quad (13)$$

где $\tilde{w}(y_0, y_1) = w(t, x)$.

Далее делаем замену $\tilde{w}(y_0, y_1) = e^{-by_1} r(y_0, y_1)$. В результате получим

$$\partial_{y_1} \partial_{y_1} r(y_0, y_1) = e^{by_1} \tilde{f}(y_1, y_0 - ay_1). \quad (14)$$

Интегрируем уравнение (14) по переменному y_1 . Отсюда

$$r(y_0, y_1) = y_1 h^{(1)}(y_0) + h^{(2)}(y_0) + \int_0^{y_1} (y_1 - \tau) e^{b\tau} \tilde{f}(\tau, y_0 - a\tau) d\tau, \quad (15)$$

или

$$\tilde{w}(y_0, y_1) = e^{-by_1} \left(y_1 h^{(1)}(y_0) + h^{(2)}(y_0) \right) + \int_0^{y_1} (y_1 - \tau) e^{b(\tau - y_1)} \tilde{f}(\tau, y_0 - a\tau) d\tau. \quad (16)$$

В итоге получаем общее решение уравнения (12):

$$w(t, x) = e^{-bt} \left(th^{(1)}(x + at) + h^{(2)}(x + at) \right) + \int_0^t (t - \tau) e^{-b(t - \tau)} \tilde{f}(\tau, x + at - a\tau) d\tau. \quad (17)$$

Соотношение (11) рассматриваем как уравнение

$$(\partial_t - c\partial_x + d)^2 u(t, x) = e^{-bt} \left(th^{(1)}(x + at) + h^{(2)}(x + at) \right) + \int_0^t (t - \tau) e^{-b(t - \tau)} \tilde{f}(\tau, x + at - a\tau) d\tau, \quad (t, x) \in \bar{Q}. \quad (18)$$

Через функции характеристик делаем замену $x + ct = z_0$, $t = z_1$. После приведения к каноническому виду уравнение (18) запишется так:

$$\partial_{z_1} \partial_{z_1} \tilde{u}(z_0, z_1) + 2d \partial_{z_1} \tilde{u}(z_0, z_1) + d^2 \tilde{u}(z_0, z_1) = e^{-bz_1} \left(z_1 h^{(1)}(z_0 + (a - c)z_1) + h^{(2)}(z_0 + (a - c)z_1) \right) + \int_0^{z_1} (z_1 - \tau) e^{-b(z_1 - \tau)} \tilde{f}(\tau, z_0 - cz_1 + az_1 - a\tau) d\tau.$$

Производя замену $\tilde{u}(z_0, z_1) = e^{-dz_1} q(z_0, z_1)$, получим

$$\partial_{z_1} \partial_{z_1} q(z_0, z_1) = e^{(d-b)z_1} \left(z_1 h^{(1)}(z_0 + (a - c)z_1) + h^{(2)}(z_0 + (a - c)z_1) \right) + e^{dz_1} \int_0^{z_1} (z_1 - \tau) e^{-b(z_1 - \tau)} \tilde{f}(\tau, z_0 - cz_1 + az_1 - a\tau) d\tau. \quad (19)$$

Интегрируем уравнение (19) по переменному z_1 . В результате имеем

$$u(t, x) = e^{-bt} \left(g_1(x + at) + tg_2(x + at) \right) + e^{-dt} \left(g_3(x + ct) + tg_4(x + ct) \right) + \int_0^t \int_0^\xi (t - \xi)(\xi - \chi) e^{-d(t - \xi) - b(\xi - \chi)} \tilde{f}(\chi, x + c(t - \xi) + a(\xi - \chi)) d\chi d\xi.$$

С другой стороны, делая замену $\chi = \tau$, $\xi = \frac{a\tau - ct - x + z}{a - c}$, получим

$$\int_0^t \int_0^\xi (t-\xi)(\xi-\chi) e^{-d(t-\xi)-b(\xi-\chi)} \tilde{f}(\chi, x+c(t-\xi)+a(\xi-\chi)) d\chi d\xi =$$

$$= \frac{1}{(a-c)^3} \int_{0, x+a(t-\tau)}^t \int_{x+c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} e^{\frac{-d(a(t-\tau)+x-z)+b(c(t-\tau)+x-z)}{a-c}} (a(t-\tau)+x-z)(c(t-\tau)+x-z) \tilde{f}(\tau, z) dz d\tau. \quad (20)$$

Из (19) и (20) следует формула (10). Лемма доказана.

Теорема 1. *Общее решение (10) уравнения (6) принадлежит классу четырежды непрерывно дифференцируемых функций $C^4(\bar{Q})$ тогда и только тогда, когда*

$$g_1(x+at) + tg_2(x+at) \in C^4(\bar{Q}), \quad g_3(x+ct) + tg_4(x+ct) \in C^4(\bar{Q}), \quad (21)$$

$$\int_{0, x+a(t-\tau)}^t \int_{x+c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} e^{\frac{-d(a(t-\tau)+x-z)+b(c(t-\tau)+x-z)}{a-c}} (a(t-\tau)+x-z)(c(t-\tau)+x-z) \tilde{f}(\tau, z) dz d\tau \in C^4(\bar{Q}) \quad (22)$$

и $f(t, x) \in C(\bar{Q})$.

Доказательство. В соотношении (10) сделаем невырожденную замену независимых переменных по формулам

$$\xi = x + at, \quad \eta = x + ct,$$

$$t = \frac{\xi - \eta}{a - c}, \quad x = \frac{a\eta - c\xi}{a - c}. \quad (23)$$

Согласно формуле (10), функция u определяется независимыми переменными t и x . Следовательно, \tilde{u} согласно замене (23) является функцией от переменных ξ и η .

Рассматривая функцию \tilde{u} как сложную функцию, вычислим все частные до четвертого порядка производные функции u через соответствующие производные $\partial_\xi^j \partial_\eta^k \tilde{u}$, $j+k \leq 4$, $j, k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Нетрудно проверить, что функция \tilde{u} принадлежит классу $C^4(\bar{Q})$.

Рассмотрим теперь формулу (10) в случае однородного уравнения (6), т. е.

$$u^{(0)}(t, x) = \tilde{u}(\xi, \eta) = e^{-b\frac{\xi-\eta}{a-c}} \left(g_1(\xi) + \frac{\xi-\eta}{a-c} g_2(\xi) \right) + e^{-d\frac{\xi-\eta}{a-c}} \left(g_3(\eta) + \frac{\xi-\eta}{a-c} g_4(\eta) \right). \quad (24)$$

Вычисляя все производные функции (24) до четвертого порядка включительно, получим $g_1(\xi) + \frac{\xi-\eta}{a-c} g_2(\xi) \in C^4(\bar{Q})$ и $g_3(\eta) + \frac{\xi-\eta}{a-c} g_4(\eta) \in C^4(\bar{Q})$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Если $b = d = 0$, то условия (22) запишутся в виде

$$f(t, x) \in C(\bar{Q}), \quad \int_0^t \tilde{f}(\tau, x+h(t-\tau)) d\tau \in C^1(\bar{Q}), \quad \int_0^t (t-\tau) \partial_x \tilde{f}(\tau, x+h(t-\tau)) d\tau \in C^1(\bar{Q}), \quad h = a, c. \quad (25)$$

Удовлетворяя решение (10) условиям Коши (7), получаем систему относительно функций $g_j(x)$, $j = \bar{1}, 4$, определенных на отрезке $[0, l]$:

$$g_1(x) + g_3(x) = \varphi_0(x),$$

$$L_1 g_1(x) + g_2(x) + L_2 g_3(x) + g_4(x) = \varphi_1(x),$$

$$L_1^2 g_1(x) + 2L_1 g_2(x) + L_2^2 g_3(x) + 2L_2 g_4(x) = \varphi_2(x),$$

$$L_1^3 g_1(x) + 3L_1^2 g_2(x) + L_2^3 g_3(x) + 3L_2^2 g_4(x) = \varphi_3(x), \quad (26)$$

где $L_1^j = \left(a \frac{d}{dx} - b\right)^j$, $L_2^j = \left(c \frac{d}{dx} - d\right)^j$, $j = \overline{1, 3}$.

Решая систему (26) (см. [4]), находим функции $g_j(z)$, $j = \overline{1, 4}$, определяемые равенствами

$$g_1(z) = g_1^{(0)}(z) = e^{\frac{b-d}{a-c}z} \left(C_1 + zC_2 + z^2C_3\right) + \Psi(z), \quad (27)$$

$$g_2(z) = g_2^{(0)}(z) = e^{\frac{b-d}{a-c}z} \left(C_4 - (a-c)C_3z\right) + \Omega(z), \quad (28)$$

$$g_3(z) = g_3^{(0)}(z) = \varphi_0(x) - e^{\frac{b-d}{a-c}z} \left(C_1 + zC_2 + z^2C_3\right) - \Psi(z), \quad (29)$$

$$g_4(z) = g_4^{(0)}(z) = e^{\frac{b-d}{a-c}z} \left(- (a-c)(C_2 + C_3z) - C_4\right) + \varphi_1(z) - L_2\varphi_0(z) + (L_2 - L_1)\Psi(z) - \Omega(z), \quad (30)$$

для $z \in [0, l]$, где C_1, C_2, C_3, C_4 – произвольные постоянные и

$$\Phi(x) = -2\varphi_3(x) + 3(a+c)\varphi_2'(x) - 3(b+d)\varphi_2(x) - 6ac\varphi_1''(x) + 6(ad+bc)\varphi_1'(x) - 6bd\varphi_1(x) + \\ + (3ac^2 - c^3)\varphi_0'''(x) + (3c^2d - 6acd - 3bc^2)\varphi_0''(x) + (6bcd + 3ad^2 - 3cd^2)\varphi_0'(x) + (d^3 - 3bd^2)\varphi_0(x),$$

$$\Psi(x) = \frac{1}{2(a-c)^3} \int_0^x \Phi(z)(x-z)^2 e^{\frac{(b-d)(x-z)}{a-c}} dz,$$

$$\Omega(x) = \int_0^x \frac{\left(\varphi_2(z) - 2c\varphi_1'(z) + 2d\varphi_1(z) + c^2\varphi_0''(z) - 2cd\varphi_0'(z) + d^2\varphi_0(z)\right) e^{\frac{(b-d)(x-z)}{a-c}}}{2(a-c)} dz - \\ - \int_0^x \frac{\left((a-c)^2\Psi''(z) - 2(a-c)(b-d)\Psi'(z) + (b-d)^2\Psi(z)\right) e^{\frac{(b-d)(x-z)}{a-c}}}{2(a-c)} dz.$$

Из (27)–(30) и (10) получим решение задачи Коши:

$$u(t, x) = e^{-bt}\Psi(x+at) + te^{-bt}\Omega(x+at) - e^{-dt}\Psi(x+ct) - te^{-dt}\Omega(x+ct) + te^{-dt}(L_2 - L_1)\Psi(x+ct) + \\ + e^{-dt}\varphi_0(x+ct) + te^{-dt}\varphi_1(x+ct) - te^{-dt}L_2\varphi_0(x+ct).$$

Отсюда следует, что решение задачи Коши не зависит от C_1, C_2, C_3, C_4 и единственно.

Для других значений аргумента z функции $g_j(z)$, $j = \overline{1, 4}$ определяются поэтапно, удовлетворяя искомое решение (10) граничным условиям (8) и (9). Удовлетворяя условию (8), получаем систему уравнений с производными

$$e^{-bt} \left(g_1^{(1)}(at) + tg_2^{(1)}(at)\right) + e^{-dt} \left(g_3^{(0)}(ct) + tg_4^{(0)}(ct)\right) = \tilde{\mu}_1(t), \quad (31) \\ e^{-bt} \left(dg_1^{(1)}(at) + tdg_2^{(1)}(at)\right) + e^{-dt} \left(dg_3^{(0)}(ct) + tddg_4^{(0)}(ct)\right) = \tilde{\mu}_2(t),$$

где обозначение $d(\cdot)$ – оператор обыкновенной производной первого порядка и

$$\tilde{\mu}_1(t) = \mu_1(t) - \frac{1}{(a-c)^3} \int_0^t \int_{a(t-\tau)}^{c(t-\tau)} e^{\frac{-d(a(t-\tau)-z)+b(c(t-\tau)-z)}{a-c}} \left(a(t-\tau)-z\right)\left(c(t-\tau)-z\right) \tilde{f}(\tau, z) dzd\tau,$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_2(t) = \mu_2(t) - \frac{1}{(a-c)^3} \int_0^t \int_{a(t-\tau)}^{c(t-\tau)} e^{\frac{-d(a(t-\tau)-z)+b(c(t-\tau)-z)}{a-c}} (a(t-\tau) + c(t-\tau) - 2z) \tilde{f}(\tau, z) dz d\tau - \\ - \frac{(b-d)}{(a-c)^4} \int_0^t \int_{a(t-\tau)}^{c(t-\tau)} e^{\frac{-d(a(t-\tau)-z)+b(c(t-\tau)-z)}{a-c}} (a(t-\tau) - z)(c(t-\tau) - z) \tilde{f}(\tau, z) dz d\tau. \end{aligned}$$

Решая систему (31), получим

$$\begin{aligned} g_2(z) = g_2^{(1)}(z) = e^{\frac{bz}{a}} \left(b\tilde{\mu}_1\left(\frac{z}{a}\right) - a\tilde{\mu}_2\left(\frac{z}{a}\right) + \tilde{\mu}'_1\left(\frac{z}{a}\right) \right) + (d-b)e^{\frac{(b-d)z}{a}} \left(g_3^{(0)}\left(\frac{zc}{a}\right) + \frac{z}{a}g_4^{(0)}\left(\frac{zc}{a}\right) \right) - \\ - e^{\frac{(b-d)z}{a}} g_4^{(0)}\left(\frac{zc}{a}\right) + (a-c)e^{\frac{(b-d)z}{a}} \left(dg_3^{(0)}\left(\frac{zc}{a}\right) + \frac{z}{a}dg_4^{(0)}\left(\frac{zc}{a}\right) \right), \end{aligned} \quad (32)$$

$$g_1(z) = g_1^{(1)}(z) = e^{\frac{bz}{a}} \tilde{\mu}_1\left(\frac{z}{a}\right) - \frac{z}{a}g_2^{(1)}(z) - e^{\frac{(b-d)z}{a}} \left(g_3^{(0)}\left(\frac{zc}{a}\right) + \frac{z}{a}g_4^{(0)}\left(\frac{zc}{a}\right) \right). \quad (33)$$

Так как функции $g_3(z) = g_3^{(0)}(z)$ и $g_4(z) = g_4^{(0)}(z)$ уже определены равенствами (29) и (30), то согласно выражениям (32) и (33) находим $g_1(z) = g_1^{(1)}(z)$, $g_2(z) = g_2^{(1)}(z)$ через заданные функции для $z \in \left[\frac{la}{c}, 0\right]$. Далее используем условие (9). Подставляя функцию (11) в равенство (9), будем иметь

$$\begin{aligned} e^{-bt} \left(g_1^{(0)}(l+at) + tg_2^{(0)}(l+at) \right) + e^{-dt} \left(g_3^{(1)}(l+ct) + tg_4^{(1)}(l+ct) \right) = \tilde{\chi}_1(t), \\ e^{-bt} \left(dg_1^{(0)}(l+at) + tdg_2^{(0)}(l+at) \right) + e^{-dt} \left(dg_3^{(1)}(l+ct) + tdg_4^{(1)}(l+ct) \right) = \tilde{\chi}_2(t), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_1(t) = \chi_1(t) - \frac{1}{(a-c)^3} \int_0^t \int_{l+a(t-\tau)}^{l+c(t-\tau)} e^{\frac{-d(a(t-\tau)+l-z)+b(c(t-\tau)+l-z)}{a-c}} (a(t-\tau) + l - z)(c(t-\tau) + l - z) \tilde{f}(\tau, z) dz d\tau, \\ \tilde{\chi}_2(t) = \chi_2(t) - \frac{1}{(a-c)^3} \int_0^t \int_{l+a(t-\tau)}^{l+c(t-\tau)} e^{\frac{-d(a(t-\tau)+l-z)+b(c(t-\tau)+l-z)}{a-c}} (a(t-\tau) + c(t-\tau) + 2l - 2z) \tilde{f}(\tau, z) dz d\tau - \\ - \frac{(b-d)}{(a-c)^4} \int_0^t \int_{l+a(t-\tau)}^{l+c(t-\tau)} e^{\frac{-d(a(t-\tau)+l-z)+b(c(t-\tau)+l-z)}{a-c}} (a(t-\tau) + l - z)(c(t-\tau) + l - z) \tilde{f}(\tau, z) dz d\tau. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} g_4(z) = g_4^{(1)}(z) = (b-d)e^{\frac{(d-b)(z-l)}{c}} \left(g_1^{(0)}\left(l + \frac{a(z-l)}{c}\right) + \frac{z-l}{c}g_2^{(0)}\left(l + \frac{a(z-l)}{c}\right) \right) - \\ - e^{\frac{(d-b)(z-l)}{c}} g_2^{(0)}\left(l + \frac{a(z-l)}{c}\right) + (c-a)e^{\frac{(d-b)(z-l)}{c}} \left(dg_1^{(0)}\left(l + \frac{a(z-l)}{c}\right) + \frac{z-l}{c}dg_2^{(0)}\left(l + \frac{a(z-l)}{c}\right) \right) + \\ + e^{\frac{d(z-l)}{c}} \left(d\tilde{\chi}_1\left(\frac{z-l}{c}\right) - c\tilde{\chi}_2\left(\frac{z-l}{c}\right) + \tilde{\chi}'_1\left(\frac{z-l}{c}\right) \right), \quad z \in \left[l, l - \frac{lc}{a}\right], \end{aligned} \quad (34)$$

и

$$g_3(z) = g_3^{(1)}(z) = -e^{\frac{(d-b)(z-l)}{c}} \left(g_1^{(0)} \left(l + \frac{a(z-l)}{c} \right) + \frac{z-l}{c} g_2^{(0)} \left(\left(l + \frac{a(z-l)}{c} \right) \right) \right) + e^{\frac{d(z-l)}{c}} \tilde{\chi}_1 \left(\frac{z-l}{c} \right) - \frac{z-l}{c} g_4^{(1)}(z), \quad z \in \left[l, l - \frac{lc}{a} \right]. \quad (35)$$

Возвращаясь к условию (8), находим значения $g_1^{(2)}(z)$, $g_2^{(2)}(z)$ функции g_1, g_2 для $z \in \left[\frac{la}{c} - l, \frac{la}{c} \right]$ и значения $g_3^{(2)}(z)$, $g_4^{(2)}(z)$ функции g_3, g_4 для $z \in \left[l - \frac{lc}{a}, 2l - \frac{lc}{a} \right]$. В общем случае изложенное выше можно записать в виде

$$g_2(z) = g_2^{(k)}(z) = -e^{\frac{(b-d)z}{a}} g_4^{(k-1)} \left(\frac{zc}{a} \right) + (d-b)e^{\frac{(b-d)z}{a}} \left(g_3^{(k-1)} \left(\frac{zc}{a} \right) + \frac{z}{a} g_4^{(k-1)} \left(\frac{zc}{a} \right) \right) + (a-c)e^{\frac{(b-d)z}{a}} \left(dg_3^{(k-1)} \left(\frac{zc}{a} \right) + \frac{z}{a} dg_4^{(k-1)} \left(\frac{zc}{a} \right) \right) + e^{\frac{bz}{a}} \left(b\tilde{\mu}_1 \left(\frac{z}{a} \right) - a\tilde{\mu}_2 \left(\frac{z}{a} \right) + \tilde{\mu}'_1 \left(\frac{z}{a} \right) \right),$$

$$z \in \left[\left[\frac{k+1}{2} \right] \frac{la}{c} - \left[\frac{k}{2} \right] l, \left[\frac{k}{2} \right] \frac{la}{c} - \left[\frac{k-1}{2} \right] l \right], \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (36)$$

$$g_1(z) = g_1^{(k)}(z) = e^{\frac{bz}{a}} \tilde{\mu}_1 \left(\frac{z}{a} \right) - \frac{z}{a} g_2^{(k)}(z) - e^{\frac{(b-d)z}{a}} \left(g_3^{(k-1)} \left(\frac{zc}{a} \right) + \frac{z}{a} g_4^{(k-1)} \left(\frac{zc}{a} \right) \right),$$

$$z \in \left[\left[\frac{k+1}{2} \right] \frac{la}{c} - \left[\frac{k}{2} \right] l, \left[\frac{k}{2} \right] \frac{la}{c} - \left[\frac{k-1}{2} \right] l \right], \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (37)$$

$$g_4(z) = g_4^{(k)}(z) = (b-d)e^{\frac{(d-b)(z-l)}{c}} \left(g_1^{(k-1)} \left(l + \frac{a(z-l)}{c} \right) + \frac{z-l}{c} g_2^{(k-1)} \left(l + \frac{a(z-l)}{c} \right) \right) - e^{\frac{(d-b)(z-l)}{c}} \left(g_2^{(k-1)} \left(l + \frac{a(z-l)}{c} \right) - (c-a) \left(dg_1^{(k-1)} \left(l + \frac{a(z-l)}{c} \right) + \frac{z-l}{c} dg_2^{(k-1)} \left(l + \frac{a(z-l)}{c} \right) \right) \right) + e^{\frac{d(z-l)}{c}} \left(d\tilde{\chi}_1 \left(\frac{z-l}{c} \right) - c\tilde{\chi}_2 \left(\frac{z-l}{c} \right) + \tilde{\chi}'_1 \left(\frac{z-l}{c} \right) \right),$$

$$z \in \left[\left[\frac{k+1}{2} \right] l - \left[\frac{k}{2} \right] \frac{lc}{a}, \left[\frac{k+2}{2} \right] l - \left[\frac{k+1}{2} \right] \frac{lc}{a} \right], \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (38)$$

$$g_3(z) = g_3^{(k)}(z) = -e^{\frac{(d-b)(z-l)}{c}} \left(g_1^{(k-1)} \left(l + \frac{a(z-l)}{c} \right) + \frac{z-l}{c} g_2^{(k-1)} \left(\left(l + \frac{a(z-l)}{c} \right) \right) \right) + e^{\frac{d(z-l)}{c}} \tilde{\chi}_1 \left(\frac{z-l}{c} \right) - \frac{z-l}{c} g_4^{(k)}(z),$$

$$z \in \left[\left[\frac{k+1}{2} \right] l - \left[\frac{k}{2} \right] \frac{lc}{a}, \left[\frac{k+2}{2} \right] l - \left[\frac{k+1}{2} \right] \frac{lc}{a} \right], \quad k = 0, 1, 2, \dots. \quad (39)$$

Чтобы функции $g_3 + tg_4$ принадлежали классу $C^4(\bar{Q})$, а $g_1 + tg_2$ – классу $C^4(\bar{Q})$, кроме требований на гладкость заданных функций задачи (6), (7), (8), (9), должны выполняться равенства для $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ в общих точках соприкосновения

$$\begin{aligned}
& d^p \left(g_1^{(k+1)} \left(\left[\frac{k+1}{2} \right] \frac{la}{c} - \left[\frac{k}{2} \right] l \right) + t g_2^{(k+1)} \left(\left[\frac{k+1}{2} \right] \frac{la}{c} - \left[\frac{k}{2} \right] l \right) \right) = \\
& = d^p \left(g_1^{(k)} \left(\left[\frac{k+1}{2} \right] \frac{la}{c} - \left[\frac{k}{2} \right] l \right) + t g_2^{(k)} \left(\left[\frac{k+1}{2} \right] \frac{la}{c} - \left[\frac{k}{2} \right] l \right) \right), \\
& p = \overline{0,4}, \quad t \in \left[\left[\frac{k+1}{2} \right] \frac{l}{c} - \left[\frac{k}{2} \right] \frac{l}{a}, \left[\frac{k+1}{2} \right] \frac{l}{c} - \left[\frac{k+2}{2} \right] \frac{l}{a} \right], \tag{40}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& d^p \left(g_3^{(k+1)} \left(\left[\frac{k+2}{2} \right] l - \left[\frac{k+1}{2} \right] \frac{lc}{a} \right) + t g_4^{(k+1)} \left(\left[\frac{k+2}{2} \right] l - \left[\frac{k+1}{2} \right] \frac{lc}{a} \right) \right) = \\
& = d^p \left(g_3^{(k)} \left(\left[\frac{k+2}{2} \right] l - \left[\frac{k+1}{2} \right] \frac{lc}{a} \right) + t g_4^{(k)} \left(\left[\frac{k+2}{2} \right] l - \left[\frac{k+1}{2} \right] \frac{lc}{a} \right) \right), \\
& p = \overline{0,4}, \quad t \in \left[\left[\frac{k}{2} \right] \frac{l}{c} - \left[\frac{k+1}{2} \right] \frac{l}{a}, \left[\frac{k+2}{2} \right] \frac{l}{c} - \left[\frac{k+1}{2} \right] \frac{l}{a} \right], \tag{41}
\end{aligned}$$

где d^p – производные порядка $p = \overline{0,4}$ и $d^p = \frac{d^p}{dz^p}$.

Лемма 2. Для любого номера $k \in \{0,1,2,\dots\}$ значения функций $g_1^{(k)}(z)$, $g_2^{(k)}(z)$, $g_3^{(k)}(z)$, $g_4^{(k)}(z)$ всегда можно представить в виде

$$\begin{aligned}
g_1^{(k)}(z) &= \psi_1^{(k)}(z, a, b, c, d) + e^{\frac{b-d}{a-c}z} (C_1 + zC_2 + z^2C_3), \\
g_2^{(k)}(z) &= \psi_2^{(k)}(z, a, b, c, d) + e^{\frac{b-d}{a-c}z} (C_4 - (a-c)C_3z), \\
g_3^{(k)}(z) &= \psi_3^{(k)}(z, a, b, c, d) - e^{\frac{b-d}{a-c}z} (C_1 + zC_2 + z^2C_3), \\
g_4^{(k)}(z) &= \psi_4^{(k)}(z, a, b, c, d) - e^{\frac{b-d}{a-c}z} ((a-c)(C_2 + C_3z) + C_4),
\end{aligned}$$

где функции $\psi_i^{(k)}$, $i = \overline{1,4}$, не зависят от констант C_1, C_2, C_3, C_4 .

Доказательство. Утверждение леммы докажем для функции $g_2^{(k)}(z)$ методом математической индукции.

Для $k = 0$ данное утверждение следует из формулы (28). Предположим, что лемма справедлива для всех $k = 0, 1, \dots, n-1$. Докажем ее утверждение для функции $g_2^{(n)}$.

Согласно формуле (36), имеем

$$\begin{aligned}
g_2(z) = g_2^{(n)}(z) &= -e^{\frac{(b-d)z}{a}} g_4^{(n-1)}\left(\frac{zc}{a}\right) + (d-b)e^{\frac{(b-d)z}{a}} \left(g_3^{(n-1)}\left(\frac{zc}{a}\right) + \frac{z}{a} g_4^{(n-1)}\left(\frac{zc}{a}\right) \right) + \\
&+ (a-c)e^{\frac{(b-d)z}{a}} \left(dg_3^{(n-1)}\left(\frac{zc}{a}\right) + \frac{z}{a} dg_4^{(n-1)}\left(\frac{zc}{a}\right) \right) + e^{\frac{bz}{a}} \left(b\mu_1\left(\frac{z}{a}\right) - a\mu_2\left(\frac{z}{a}\right) + \mu_1'\left(\frac{z}{a}\right) \right),
\end{aligned}$$

где

$$-e^{\frac{(b-d)z}{a}} g_4^{(n-1)}\left(\frac{zc}{a}\right) = -e^{\frac{(b-d)z}{a}} \psi_4^{(n-1)}\left(\frac{zc}{a}, a, b, c, d\right) + \frac{e^{\frac{(b-d)z}{a-c}} (a^2C_2 - c^2C_3z + a(-cC_2 + C_4 + cC_3z))}{a},$$

$$\begin{aligned}
 & (d-b)e^{\frac{(b-d)z}{a}} \left(g_3^{(n-1)} \left(\frac{zc}{a} \right) + \frac{z}{a} g_4^{(n-1)} \left(\frac{zc}{a} \right) \right) = \frac{(d-b)ze^{\frac{(b-d)z}{a}}}{a} \Psi_4^{(n-1)} \left(\frac{zc}{a}, a, b, c, d \right) + \\
 & + (d-b)e^{\frac{(b-d)z}{a}} \Psi_3^{(n-1)} \left(\frac{zc}{a}, a, b, c, d \right) + \frac{(b-d)e^{\frac{(b-d)z}{a-c}} (a(C_1 + C_2z) + z(C_4 + cC_3z))}{a}, \\
 & (a-c)e^{\frac{(b-d)z}{a}} \left(dg_3^{(n-1)} \left(\frac{zc}{a} \right) + \frac{z}{a} dg_4^{(n-1)} \left(\frac{zc}{a} \right) \right) = \frac{(a-c)ze^{\frac{(b-d)z}{a}}}{a} d\Psi_4^{(n-1)} \left(\frac{zc}{a}, a, b, c, d \right) + \\
 & + (a-c)e^{\frac{(b-d)z}{a}} d\Psi_3^{(n-1)} \left(\frac{zc}{a}, a, b, c, d \right) - \frac{e^{\frac{(b-d)z}{a-c}} (a^2(C_2 + C_3z) - c^2C_3z + (b-d)C_4z)}{a} - \\
 & - \frac{e^{\frac{(b-d)z}{a-c}} (c(b-d)C_3z^2 - acC_2 - adC_1 - adC_2z + abC_1 + abC_2z)}{a}.
 \end{aligned}$$

Отсюда

$$g_2(z) = g_2^{(n)}(z) = \Psi_2^{(n)}(z, a, b, c, d) + e^{\frac{b-d}{a-c}z} (C_4 - (a-c)C_3z),$$

где

$$\begin{aligned}
 \Psi_2^{(n)}(z, a, b, c, d) &= e^{\frac{bz}{a}} \left(b\mu_1 \left(\frac{z}{a} \right) - a\mu_2 \left(\frac{z}{a} \right) + \mu_1' \left(\frac{z}{a} \right) \right) - e^{\frac{(b-d)z}{a}} \Psi_4^{(n-1)} \left(\frac{zc}{a}, a, b, c, d \right) + \\
 &+ \frac{(d-b)ze^{\frac{(b-d)z}{a}}}{a} \Psi_4^{(n-1)} \left(\frac{zc}{a}, a, b, c, d \right) + (d-b)e^{\frac{(b-d)z}{a}} \Psi_3^{(n-1)} \left(\frac{zc}{a}, a, b, c, d \right) + \\
 &+ (a-c)e^{\frac{(b-d)z}{a}} d\Psi_3^{(n-1)} \left(\frac{zc}{a}, a, b, c, d \right) + \frac{(a-c)ze^{\frac{(b-d)z}{a}}}{a} d\Psi_4^{(n-1)} \left(\frac{zc}{a}, a, b, c, d \right).
 \end{aligned}$$

Аналогично доказываются представления леммы и для значений $g_j^{(k)}(z)$, $j = 1, 3, 4$.

Следствие. Для любых $r, k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ сумма $e^{-bt} \left(g_1^{(r)}(x+at) + tg_2^{(r)}(x+at) \right) + e^{-dt} \left(g_3^{(k)}(x+ct) + tg_4^{(k)}(x+ct) \right)$ не зависит от C_1, C_2, C_3, C_4 .

Рассмотрим решение задачи (6)–(9) в случае, когда уравнение (6) является однородным, т. е. $f(t, x) = 0$.

Лемма 3. Если функции $\varphi_j \in C^{5-j}([0, l])$, $j = \overline{0, 3}$, $\mu_1, \chi_1 \in C^5([0, \infty))$, $\mu_2, \chi_2 \in C^4([0, \infty))$, то равенства (40)–(41) имеют место тогда и только тогда, когда они выполняются только для $k = 0$.

Доказательство. Введем обозначение:

$$\begin{aligned}
 & d^p \left(g_1^{(k+1)} \left(\left[\frac{k+1}{2} \right] \frac{la}{c} - \left[\frac{k}{2} \right] l \right) + tg_2^{(k+1)} \left(\left[\frac{k+1}{2} \right] \frac{la}{c} - \left[\frac{k}{2} \right] l \right) \right) - \\
 & - d^p \left(g_1^{(k)} \left(\left[\frac{k+1}{2} \right] \frac{la}{c} - \left[\frac{k}{2} \right] l \right) + tg_2^{(k)} \left(\left[\frac{k+1}{2} \right] \frac{la}{c} - \left[\frac{k}{2} \right] l \right) \right) = \delta_k^p, \quad p = \overline{1, 4}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,
 \end{aligned}$$

$$d^p \left(g_3^{(k+1)} \left(\left[\frac{k+2}{2} \right] l - \left[\frac{k+1}{2} \right] \frac{lc}{a} \right) + t g_4^{(k+1)} \left(\left[\frac{k+2}{2} \right] l - \left[\frac{k+1}{2} \right] \frac{lc}{a} \right) \right) -$$

$$- d^p \left(g_3^{(k)} \left(\left[\frac{k+2}{2} \right] l - \left[\frac{k+1}{2} \right] \frac{lc}{a} \right) + t g_4^{(k)} \left(\left[\frac{k+2}{2} \right] l - \left[\frac{k+1}{2} \right] \frac{lc}{a} \right) \right) = \sigma_k^p, \quad p = \overline{1,4}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Из (34)–(41) получим

$$\delta_n^1 = e^{\frac{(b-d)}{a} \left(\left[\frac{k+1}{2} \right] \frac{la}{c} - \left[\frac{k}{2} \right] l \right)} \sigma_{n-1}^1,$$

$$\delta_n^2 = \frac{(b-d)}{a} e^{\frac{(b-d)}{a} \left(\left[\frac{k+1}{2} \right] \frac{la}{c} - \left[\frac{k}{2} \right] l \right)} \sigma_{n-1}^1 + e^{\frac{(b-d)}{a} \left(\left[\frac{k+1}{2} \right] \frac{la}{c} - \left[\frac{k}{2} \right] l \right)} \sigma_{n-1}^2,$$

$$\delta_n^3 = \frac{(b-d)^2}{a^2} e^{\frac{(b-d)}{a} \left(\left[\frac{k+1}{2} \right] \frac{la}{c} - \left[\frac{k}{2} \right] l \right)} \sigma_{n-1}^1 + \frac{(b-d)}{a} e^{\frac{(b-d)}{a} \left(\left[\frac{k+1}{2} \right] \frac{la}{c} - \left[\frac{k}{2} \right] l \right)} \sigma_{n-1}^2 + e^{\frac{(b-d)}{a} \left(\left[\frac{k+1}{2} \right] \frac{la}{c} - \left[\frac{k}{2} \right] l \right)} \sigma_{n-1}^3,$$

$$\delta_n^4 = \frac{(b-d)^3}{a^3} e^{\frac{(b-d)}{a} \left(\left[\frac{k+1}{2} \right] \frac{la}{c} - \left[\frac{k}{2} \right] l \right)} \sigma_{n-1}^1 + \frac{(b-d)^2}{a^2} e^{\frac{(b-d)}{a} \left(\left[\frac{k+1}{2} \right] \frac{la}{c} - \left[\frac{k}{2} \right] l \right)} \sigma_{n-1}^2 +$$

$$+ \frac{(b-d)}{a} e^{\frac{(b-d)}{a} \left(\left[\frac{k+1}{2} \right] \frac{la}{c} - \left[\frac{k}{2} \right] l \right)} \sigma_{n-1}^3 + e^{\frac{(b-d)}{a} \left(\left[\frac{k+1}{2} \right] \frac{la}{c} - \left[\frac{k}{2} \right] l \right)} \sigma_{n-1}^4.$$

Лемма доказана.

Лемма 4. Если функции $\varphi_j \in C^{5-j}([0, l])$, $j = \overline{0,3}$, $\mu_1, \chi_1 \in C^5([0, \infty))$, $\mu_2, \chi_2 \in C^4([0, \infty))$, то равенства (40)–(41) при $k = 0$ выполняются тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия согласования:

$$d^j \mu_1(0) = \varphi_j(0), \quad d^j \chi_1(0) = \varphi_j(l), \quad d^j \mu_2(0) = \varphi'_j(0), \quad d^j \chi_2(0) = \varphi'_j(l), \quad (42)$$

$$-(2a^2c + 2ac^2) \varphi_1^{(3)}(0) - (2abc^2 + 2a^2cd) \varphi_0^{(3)}(0) + 2(da^2 + bc^2 + 2acd + 2abc) \varphi_1''(0) +$$

$$+ (b^2c^2 + 4abcd + a^2d^2) \varphi_0''(0) + (a^2 + 4ac + c^2) \varphi_2''(0) - 2(ab + cd + 2bc + 2ad) \varphi_2'(0) -$$

$$- 2(cb^2 + ad^2 + 2abd + 2bcd) \varphi_1'(0) - 2(b^2cd + abd^2) \varphi_0'(0) + 2(b^2d + bd^2) \varphi_1(0) +$$

$$+ b^2d^2 \varphi_0(0) + (b^2 + 4bd + d^2) \varphi_2(0) + 2(b+d) \varphi_3(0) + a^2c^2 \varphi_0^{(4)}(0) - 2(a+c) \varphi_3'(0) = -\mu_1^{(4)}(0), \quad (43)$$

$$-(2a^2c + 2ac^2) \varphi_1^{(3)}(l) - (2abc^2 + 2a^2cd) \varphi_0^{(3)}(l) + 2(da^2 + bc^2 + 2acd + 2abc) \varphi_1''(l) +$$

$$+ (b^2c^2 + 4abcd + a^2d^2) \varphi_0''(l) + (a^2 + 4ac + c^2) \varphi_2''(l) - 2(ab + cd + 2bc + 2ad) \varphi_2'(l) -$$

$$- 2(cb^2 + ad^2 + 2abd + 2bcd) \varphi_1'(l) - 2(b^2cd + abd^2) \varphi_0'(l) + 2(b^2d + bd^2) \varphi_1(l) +$$

$$+ b^2d^2 \varphi_0(l) + (b^2 + 4bd + d^2) \varphi_2(l) + 2(b+d) \varphi_3(l) + a^2c^2 \varphi_0^{(4)}(l) - 2(a+c) \varphi_3'(l) = -\chi_1^{(4)}(0), \quad (44)$$

$$a^2c^2(a+2c) \varphi_0^{(5)}(0) - ac(4bc^2 - ac(b-6d) + 2a^2d) \varphi_0^{(4)}(0) - ac(2a^2 + 5ac + 4c^2) \varphi_1^{(4)}(0) +$$

$$+ (a^3 + 4a^2c + 7ac^2 + 2c^3) \varphi_2^{(3)}(0) + 2(2bc^3 - a^2c(b-5d) + a^3d + ac^2(b+6d)) \varphi_1^{(3)}(0) +$$

$$+ (2b^2c^3 + a^3d^2 + 2a^2cd(-b+3d) + abc^2(-5b+12d)) \varphi_0^{(3)}(0) - (a^2 + 2ac + 3c^2) \varphi_3''(0) +$$

$$+ (b(a^2 + 8ac - 3c^2) - 2d(a+3c)(2a+c)) \varphi_2''(0) + (3bc^2(b-4d) + a^2(2b-5d)d) \varphi_1''(0) +$$

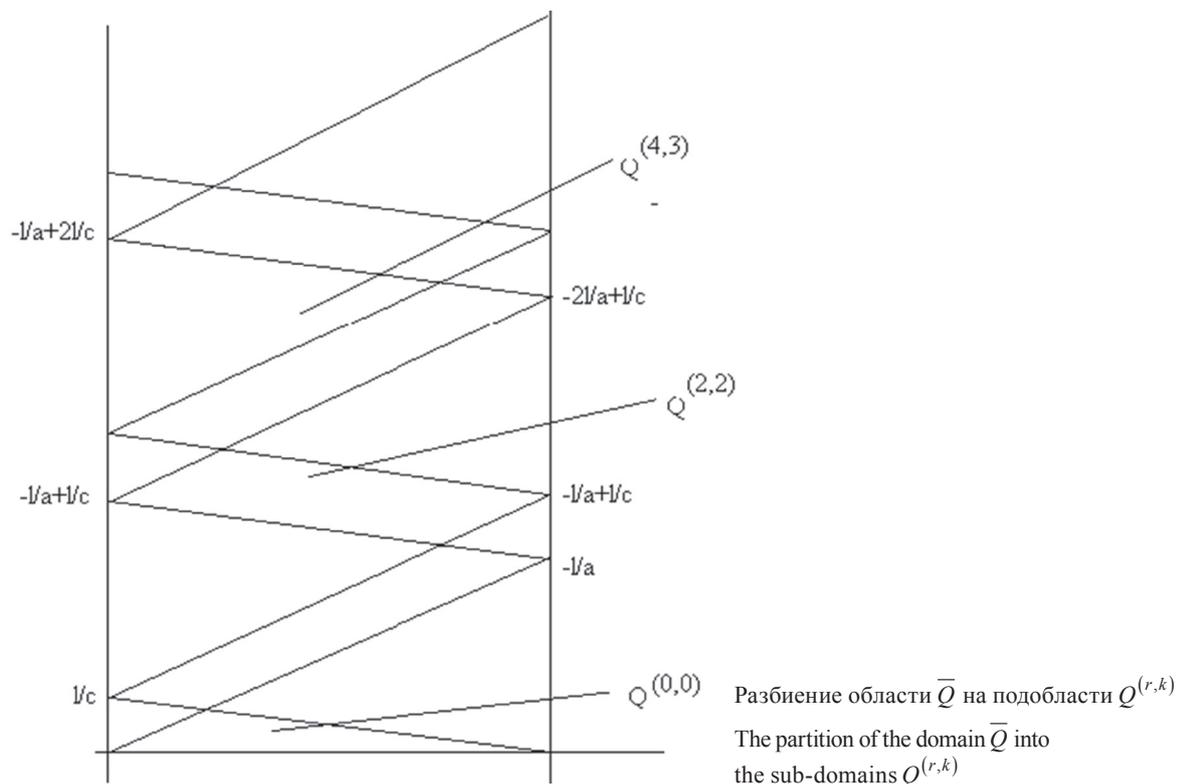
$$+ (2ac(5b^2 - 2bd - 6d^2)) \varphi_1''(0) + (3b^3c^2 + 2b^2(5a-3c)cd + ab(a-12c)d^2 - 2a^2d^3) \varphi_0''(0) +$$

$$\begin{aligned}
 &+2(a(-3b+d)+3c(-b+d))\varphi'_3(0)-\left(a(5b^2+8bd-7d^2)+6c(2b^2-bd-d^2)\right)\varphi'_2(0)- \\
 &-2(3b^3c+b^2(5a+3c)d-b(a+6c)d^2-2ad^3)\varphi'_1(0)+bd(-6b^2c-5abd+6bcd+4ad^2)\varphi'_0(0)+ \\
 &+(7b^2+6bd-3d^2)\varphi_3(0)+(3b^3+12b^2d-3bd^2-2d^3)\varphi_2(0)+bd(6b^2+3bd-4d^2)\varphi_1(0)+ \\
 &+b^2(3b-2d)d^2\varphi_0(0)=-\mu_1^{(5)}(0)+a\mu_2^{(4)}(0)-5b\mu_1^{(4)}(0), \tag{45}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &a^2c^2(c+2a)\varphi_0^{(5)}(l)-ac(4da^2-ac(d-6b)+2c^2b)\varphi_0^{(4)}(l)-ac(2c^2+5ac+4a^2)\varphi_1^{(4)}(l)+ \\
 &+(c^3+4c^2a+7ca^2+2a^3)\varphi_2^{(3)}(l)+2(2da^3-c^2a(d-5b)+c^3b+ca^2(d+6b))\varphi_1^{(3)}(l)+ \\
 &+(2d^2a^3+c^3b^2+2c^2ab(-d+3b)+cda^2(-5d+12b))\varphi_0^{(3)}(l)-(c^2+2ac+3a^2)\varphi_3''(l)+ \\
 &+(d(c^2+8ac-3a^2)-2b(c+3a)(2c+a))\varphi_2''(l)+(3da^2(d-4b)+c^2(2d-5b)d)\varphi_1''(l)+ \\
 &+(2ac(5d^2-2bd-6b^2))\varphi_0''(l)+(3d^3a^2+2d^2(5c-3a)ab+cd(c-12a)b^2-2c^2b^3)\varphi_0''(l)+ \\
 &+2(c(-3d+b)+3a(-d+b))\varphi'_3(l)-\left(c(5d^2+8bd-7b^2)+6a(2d^2-bd-b^2)\right)\varphi'_2(l)- \\
 &-2(3d^3a+d^2(5c+3a)b-d(c+6a)b^2-2cb^3)\varphi'_1(l)+bd(-6d^2a-5cbd+6bad+4cb^2)\varphi'_0(l)+ \\
 &+(7d^2+6bd-3b^2)\varphi_3(l)+(3d^3+12d^2b-3db^2-2b^3)\varphi_2(l)+bd(6d^2+3bd-4b^2)\varphi_1(l)+ \\
 &+d^2(3d-2b)b^2\varphi_0(l)=-\chi_1^{(5)}(0)+c\chi_2^{(4)}(0)-5d\chi_1^{(4)}(0). \tag{46}
 \end{aligned}$$

Доказательство. Запишем равенства (40)–(41) для $k = 1$ через значения заданных функций и получим условия согласования.

Разобьем область \bar{Q} с помощью характеристик уравнения на подобласти $Q^{(r,k)}$ и $Q = \bigcup_{k=0}^{\infty} \bigcup_{r=k-1}^{k+1} Q^{(r,k)}$ (см. рисунок).



Теорема 2. *Предположим, что функции $\varphi_j \in C^{5-j}([0, l])$, $j = \overline{0, 3}$, $\mu_1, \chi_1 \in C^5([0, \infty))$, $\mu_2, \chi_2 \in C^4([0, \infty))$. В классе функций $C^4(\overline{Q})$ существует единственное классическое решение $u(t, x)$ однородной задачи (6)–(9) при выполнении указанных условий гладкости на заданные функции тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования (42)–(46).*

Доказательство теоремы 2 фактически проведено в предыдущих рассуждениях.

Теорема 3. *Предположим, что функции $\varphi_j \in C^{5-j}([0, l])$, $j = \overline{0, 3}$, $\mu_i, \chi_i \in C^{6-i}([0, \infty))$, $i = 1, 2$, $f \in C^1(\overline{Q})$. В классе функций $C^4(\overline{Q})$ существует единственное классическое решение задачи (6)–(9) тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия согласования:*

$$\begin{aligned}
 & d^j \mu_1(0) = \varphi_j(0), \quad d^j \chi_1(0) = \varphi_j(l), \quad d^j \mu_2(0) = \varphi'_j(0), \quad d^j \chi_2(0) = \varphi'_j(l), \\
 & a^2 c^2 \varphi_0^{(4)}(0) - (2a^2 c + 2ac^2) \varphi_1^{(3)}(0) - (2abc^2 + 2a^2 cd) \varphi_0^{(3)}(0) + 2(da^2 + bc^2 + 2acd + 2abc) \varphi_1''(0) + \\
 & \quad + (b^2 c^2 + 4abcd + a^2 d^2) \varphi_0''(0) + (a^2 + 4ac + c^2) \varphi_2''(0) - 2(ab + cd + 2bc + 2ad) \varphi_2'(0) - \\
 & - 2(cb^2 + ad^2 + 2abd + 2bcd) \varphi_1'(0) - 2(b^2 cd + abd^2) \varphi_0'(0) - 2(a + c) \varphi_3'(0) + 2(b^2 d + bd^2) \varphi_1(0) + \\
 & \quad + b^2 d^2 \varphi_0(0) + (b^2 + 4bd + d^2) \varphi_2(0) + 2(b + d) \varphi_3(0) + \mu_1^{(4)}(0) = f(0, 0), \\
 & a^2 c^2 \varphi_0^{(4)}(l) - (2a^2 c + 2ac^2) \varphi_1^{(3)}(l) - (2abc^2 + 2a^2 cd) \varphi_0^{(3)}(l) + 2(da^2 + bc^2 + 2acd + 2abc) \varphi_1''(l) + \\
 & \quad + (b^2 c^2 + 4abcd + a^2 d^2) \varphi_0''(l) + (a^2 + 4ac + c^2) \varphi_2''(l) - 2(ab + cd + 2bc + 2ad) \varphi_2'(l) - \\
 & - 2(cb^2 + ad^2 + 2abd + 2bcd) \varphi_1'(l) - 2(b^2 cd + abd^2) \varphi_0'(l) - 2(a + c) \varphi_3'(l) + 2(b^2 d + bd^2) \varphi_1(l) + \\
 & \quad + b^2 d^2 \varphi_0(l) + (b^2 + 4bd + d^2) \varphi_2(l) + 2(b + d) \varphi_3(l) + \chi_1^{(4)}(0) = f(0, l), \\
 & a^2 c^2 (a + 2c) \varphi_0^{(5)}(0) - ac(4bc^2 - ac(b - 6d) + 2a^2 d) \varphi_0^{(4)}(0) - ac(2a^2 + 5ac + 4c^2) \varphi_1^{(4)}(0) + \\
 & \quad + (a^3 + 4a^2 c + 7ac^2 + 2c^3) \varphi_2^{(3)}(0) + 2(2bc^3 - a^2 c(b - 5d) + a^3 d + ac^2(b + 6d)) \varphi_1^{(3)}(0) + \\
 & \quad + (2b^2 c^3 + a^3 d^2 + 2a^2 cd(-b + 3d) + abc^2(-5b + 12d)) \varphi_0^{(3)}(0) - (a^2 + 2ac + 3c^2) \varphi_3''(0) + \\
 & \quad + (b(a^2 + 8ac - 3c^2) - 2d(a + 3c)(2a + c)) \varphi_2''(0) + (3bc^2(b - 4d) + a^2(2b - 5d)d) \varphi_1''(0) + \\
 & \quad + (2ac(5b^2 - 2bd - 6d^2)) \varphi_1''(0) + (3b^3 c^2 + 2b^2(5a - 3c)cd + ab(a - 12c)d^2 - 2a^2 d^3) \varphi_0''(0) + \\
 & \quad + 2(a(-3b + d) + 3c(-b + d)) \varphi_3'(0) - (a(5b^2 + 8bd - 7d^2) + 6c(2b^2 - bd - d^2)) \varphi_2'(0) - \\
 & - 2(3b^3 c + b^2(5a + 3c)d - b(a + 6c)d^2 - 2ad^3) \varphi_1'(0) + bd(-6b^2 c - 5abd + 6bcd + 4ad^2) \varphi_0'(0) + \\
 & \quad + (7b^2 + 6bd - 3d^2) \varphi_3(0) + (3b^3 + 12b^2 d - 3bd^2 - 2d^3) \varphi_2(0) + bd(6b^2 + 3bd - 4d^2) \varphi_1(0) + \\
 & \quad + b^2(3b - 2d)d^2 \varphi_0(0) + \mu_1^{(5)}(0) - a\mu_2^{(4)}(0) + 5b\mu_1^{(4)}(0) = \partial_t f(0, 0), \\
 & a^2 c^2 (c + 2a) \varphi_0^{(5)}(l) - ac(4da^2 - ac(d - 6b) + 2c^2 b) \varphi_0^{(4)}(l) - ac(2c^2 + 5ac + 4a^2) \varphi_1^{(4)}(l) + \\
 & \quad + (c^3 + 4c^2 a + 7ca^2 + 2a^3) \varphi_2^{(3)}(l) + 2(2da^3 - c^2 a(d - 5b) + c^3 b + ca^2(d + 6b)) \varphi_1^{(3)}(l) + \\
 & \quad + (2d^2 a^3 + c^3 b^2 + 2c^2 ab(-d + 3b) + cda^2(-5d + 12b)) \varphi_0^{(3)}(l) - (c^2 + 2ac + 3a^2) \varphi_3''(l) + \\
 & \quad + (d(c^2 + 8ac - 3a^2) - 2b(c + 3a)(2c + a)) \varphi_2''(l) + (3da^2(d - 4b) + c^2(2d - 5b)d) \varphi_1''(l) + \\
 & \quad + (2ac(5d^2 - 2bd - 6b^2)) \varphi_1''(l) + (3d^3 a^2 + 2d^2(5c - 3a)ab + cd(c - 12a)b^2 - 2c^2 b^3) \varphi_0''(l) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +2(c(-3d+b)+3a(-d+b))\varphi'_3(l) - \left(c(5d^2+8bd-7b^2) + 6a(2d^2-bd-b^2) \right) \varphi'_2(l) - \\
 & -2(3d^3a+d^2(5c+3a)b-d(c+6a)b^2-2cb^3)\varphi'_1(l) + bd(-6d^2a-5cbd+6bad+4cb^2)\varphi'_0(l) + \\
 & + (7d^2+6bd-3b^2)\varphi_3(l) + (3d^3+12d^2b-3db^2-2b^3)\varphi_2(l) + bd(6d^2+3bd-4b^2)\varphi_1(l) + \\
 & + d^2(3d-2b)b^2\varphi_0(l) + \chi_1^{(5)}(0) - c\chi_2^{(4)}(0) + 5d\chi_1^{(4)}(0) = \partial_t f(0,l).
 \end{aligned}$$

Рассмотрим решение задачи (6)–(9) в случае, когда $b = d = 0$, т. е.

$$(\partial_t - a\partial_x)^2(\partial_t - c\partial_x)^2 u(t,x) = f(t,x), \quad (t,x) \in \bar{Q}. \quad (47)$$

Теорема 4. *Предположим, что для f выполняются условия (25) и $\varphi_j \in C^{5-j}([0,l])$, $j = \overline{0,3}$, $\mu_i, \chi_i \in C^{6-i}([0,\infty))$, $i = 1,2$. В классе функций $C^4(\bar{Q})$ существует единственное классическое решение $u(t,x)$ задачи (47),(7)–(9) при выполнении указанных условий гладкости на заданные функции тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия согласования:*

$$\begin{aligned}
 & d^j \mu_1(0) = \varphi_j(0), \quad d^j \chi_1(0) = \varphi_j(l), \quad d^j \mu_2(0) = \varphi'_j(0), \quad d^j \chi_2(0) = \varphi'_j(l), \quad j = \overline{0,3}, \\
 & a^2 c^2 \varphi_0^{(4)}(0) - (2a^2 c + 2ac^2) \varphi_1^{(3)}(0) + (a^2 + 4ac + c^2) \varphi_2''(0) - 2(a+c) \varphi_3'(0) + \mu_1^{(4)}(0) = f(0,0), \\
 & a^2 c^2 \varphi_0^{(4)}(l) - (2a^2 c + 2ac^2) \varphi_1^{(3)}(l) + (a^2 + 4ac + c^2) \varphi_2''(l) - 2(a+c) \varphi_3'(l) + \chi_1^{(4)}(0) = f(0,l), \\
 & a^2 c^2 (a+2c) \varphi_0^{(5)}(0) - ac(2a^2 + 5ac + 4c^2) \varphi_1^{(4)}(0) + (a^3 + 4a^2 c + 7ac^2 + 2c^3) \varphi_2^{(3)}(0) - \\
 & - (a^2 + 2ac + 3c^2) \varphi_3''(0) + \mu_1^{(5)}(0) - a\mu_2^{(4)}(0) = \partial_t f(0,0), \\
 & a^2 c^2 (c+2a) \varphi_0^{(5)}(l) - ac(2c^2 + 5ac + 4a^2) \varphi_1^{(4)}(l) + (c^3 + 4c^2 a + 7ca^2 + 2a^3) \varphi_2^{(3)}(l) - \\
 & - (c^2 + 2ac + 3a^2) \varphi_3''(l) + \chi_1^{(5)}(0) - c\chi_2^{(4)}(0) = \partial_t f(0,l).
 \end{aligned}$$

Заключение. В данной статье получены формулы классического решения первой смешанной задачи для нестрого гиперболического уравнения четвертого порядка. Доказано, что эта задача имеет единственное решение только тогда, когда в угловых точках заданной области изменения независимых переменных выполняются условия согласования для заданных функций уравнения, условий Коши и граничных условий. Следует отметить, что эти условия являются необходимыми и достаточными. Кроме того, показано, при каких условиях линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами четвертого порядка представимо в виде рассматриваемого в статье нестрого гиперболического уравнения.

Список использованных источников

1. Корзюк, В. И. Смешанная задача для гиперболического уравнения четвертого порядка / В. И. Корзюк, Е. С. Чеб // Вес. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2004. – № 2. – С. 9–13.
2. Корзюк, В. И. Классические решения смешанных задач для одномерного биволнового уравнения / В. И. Корзюк, Н. В. Винь // Вес. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2016. – № 1. – С. 69–79.
3. Корзюк, В. И. Классическое решение задачи с интегральным условием для одномерного биволнового уравнения / В. И. Корзюк, Нгуен Ван Винь // Вес. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2016. – № 3. – С. 16–29.
4. Korzyuk, V. I. Cauchy problem for some fourth-order nonstrictly hyperbolic equations / V. I. Korzyuk, N. V. Vinh // Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics. – 2016. – Vol. 7, № 5. – P. 869–879.
5. Korzyuk, V. I. Solution of the Cauchy problem for a hyperbolic equation with constant coefficients in the case of two independent variables / V. I. Korzyuk, I. S. Kozlovskaya // Differential equations. – 2012. – Vol. 48, № 5. – P. 1–10.

References

1. Korzyuk V.I., Cheb E.S. Mixed problem for the fourth order hyperbolic equation. *Izvestiia Natsionalnoi akademii nauk Belarusi. Ser. fiziko-matematicheskikh nauk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series], 2004, no 2, pp. 9–13. (In Russian).
2. Korzyuk V.I., Nguen Van Vinh. Classical solutions of mixed problems for the one-dimensional biwave equation. *Izvestiia Natsionalnoi akademii nauk Belarusi. Ser. fiziko-matematicheskikh nauk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series], 2016, no 1, pp. 69–79. (In Russian).
3. Korzyuk V.I., Nguen Van Vinh. Classical solution of a problem with an integral condition for the one-dimensional biwave equation. *Izvestiia Natsionalnoi akademii nauk Belarusi. Ser. fiziko-matematicheskikh nauk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series], 2016, no 3, pp. 16–29. (In Russian).
4. Korzyuk V.I., Vinh N.V. Cauchy problem for some fourth-order nonstrictly hyperbolic equations. *Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics*, 2016, vol. 7, no. 5, pp. 869–879. Doi: 10.17586/2220-8054-2016-7-5-869-879
5. Korzyuk V.I., Kozlovskaya I.S. Solution of the Cauchy problem for a hyperbolic equation with constant coefficients in the case of two independent variables. *Differential equations*, 2012, vol. 48, no. 5, pp. 1–10. Doi: 10.1134/S0012266112050096.

Информация об авторах

Виктор Иванович Корзюк – академик, профессор, доктор физико-математических наук, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: korzyuk@bsu.by

Нгуен Ван Винь – аспирант, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: vinhnguyen0109@gmail.com

Information about the authors

Viktor Ivanovich Korzyuk – Academician, Professor, D. Sc (Physics and Mathematics), Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: korzyuk@bsu.by

Nguyen Van Vinh – Postgraduate, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: vinhnguyen0109@gmail.com

Для цитирования

Корзюк, В. И. Решение задачи для нестроого гиперболического уравнения четвертого порядка с двукратными характеристиками / В. И. Корзюк, Нгуен Ван Винь // Вест. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2017. – № 1. – С. 38–52.

For citation

Korzyuk V.I., Nguyen Van Vinh. Solving the problem for the fourth-order nonstrictly hyperbolic equation with double characteristics. *Vesti Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series], 2017, no. 1, pp. 38–52. (In Russian).

И. И. Столярчук*Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь***РЕШЕНИЕ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ ХАРАКТЕРИСТИК
ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ**

В одномерном случае для волнового уравнения рассматривается смешанная задача с одним интегральным условием и граничным условием типа Дирихле на правой границе области. Показывается, что при определенных условиях гладкости на заданные функции для существования и единственности классического решения поставленной смешанной задачи необходимо и достаточно выполнения условий согласования на исходные функции. При ее анализе используется метод характеристик, который сводится к построению решения задачи в подобластях, полученных из исходной области при разбиении последней характеристическими прямыми. В каждой из указанных подобластей с помощью начальных, а также интегрального и граничного условий строится решение поставленной задачи, при этом в некоторых подобластях оно сводится к интегральному уравнению Вольтерры второго рода, для которого справедливы теоремы о корректной разрешимости. Условия согласования выводятся при приравнивании значений решения и его производных до второго порядка включительно на характеристиках. Данные результаты позволяют построить как аналитическое решение исходной задачи, если удастся найти решение уравнения Вольтерры второго рода в явном виде, так и приближенное решение задачи с помощью численных методов. Однако при построении приближенного решения следует вводить дополнительные условия сопряжения решения или его производных на характеристиках.

Ключевые слова: волновое уравнение, метод характеристик, интегральное условие, классическое решение, смешанная задача.

I. I. Stolyarchuk*Belarusian State University, Minsk, Belarus***SOLUTION OF THE MIXED PROBLEMS BY THE METHOD OF CHARACTERISTICS
FOR THE WAVE EQUATION WITH THE INTEGRAL CONDITION**

The mixed problem for the wave equation with one integral condition and one Dirichlet's condition on the right boundary of the domain is considered in the one-dimensional case. It is proved that the fulfillment of the matching conditions is necessary and sufficient for existence and uniqueness of the classical solution of the given mixed problem under certain smoothness conditions for the given functions. The method of characteristics is used for analysis of the problem. This method is reduced to partitioning the original domain by characteristics line in sub-domains where the solution of the given problem is constructed with the help of initial, boundary and integral conditions. However, in some sub-domains the solution of the problem is reduced to Volterra's second-type equation. For this equation, the theorems of correct solvability are fulfilled. Matching conditions are obtained by equating the values of the solution and its derivatives up to the second-order, including on characteristics. The obtained results allow building either the analytical solution of the given problem if Volterra's equation solution can be constructed in explicit form, or the approximate solution with the help of numerical methods. However, in building the approximate solution, the additional conjugation conditions for solution and its derivatives should be introduced on characteristics.

Keywords: wave equation, method of characteristics, integral condition, classical solution, mixed problem.

Введение. В настоящей статье рассматривается смешанная задача для волнового уравнения с интегральным условием. В [1, 2] и других работах исследуются гиперболические уравнения второго порядка с нелокальными условиями, а также строится обобщенное решение задачи. Однако в данной работе показано, что для поставленной задачи возможно построить классическое решение смешанной задачи для одномерного волнового уравнения с нелокальным условием. Следует отметить, что здесь нелокальное условие представляет собой интегральное уравнение второго рода с ядром, зависящим от двух переменных.

Для построения решения задачи применен хорошо зарекомендовавший себя метод характеристик, использующийся как для задач, у которых точное решение представимо в аналитическом

виде [3], так и для задач, где такое представление невозможно [4, 5]. С помощью метода характеристик решение исходной задачи во всей полуполосе сводится к решению подзадач в подобластях, полученных при разбиении исходной полосы характеристическими прямыми. Далее, в каждой такой подобласти ищется решение новой задачи, в постановке которой использованы условия из исходной задачи, а затем проводится склейка найденных решений. Оказывается, что для гладкости решения исходной задачи во всей полуполосе только гладкости исходных функций недостаточно, и дополнительно требуется выполнение условий согласования начальных данных.

В результате выведены необходимые и достаточные условия существования единственного классического решения рассматриваемой задачи в полуполосе. При этом решение в некоторых подобластях получено в виде интегрального уравнения Вольтерры второго рода, формулы решения которого в общем виде не существует, однако для этих уравнений доказаны теоремы о существовании и единственности решения [6].

Предложенный в настоящей статье подход позволяет получить приближенное решение поставленной задачи в случае невыполнения однородных условий согласования, причем при численном решении требуется дополнительно ввести условия сопряжения на характеристиках.

Постановка задачи. Рассмотрим волновое уравнение

$$\partial_{x_0}^2 u - a^2 \partial_{x_1}^2 u = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in Q, \quad Q = [0, +\infty) \times [0, l] \quad (1)$$

с начальными условиями

$$u(0, x_1) = \varphi(x_1), \quad \partial_{x_0} u(0, x_1) = \psi(x_1), \quad x_1 \in [0, l], \quad (2)$$

интегральным условием

$$u(x_0, 0) + \int_0^l K(x_0, s) u(x_0, s) ds = \mu^{(0)}(x_0), \quad x_0 \in [0, +\infty), \quad (3)$$

где $K : \mathbb{R}^2 \supset Q \ni (x_0, s) \rightarrow K(x_0, s) \in \mathbb{R}$, и граничным условием

$$u(x_0, l) = \mu^{(l)}(x_0), \quad x_0 \in [0, +\infty). \quad (4)$$

Требуется найти необходимые и достаточные условия существования единственного классического решения задачи (1)–(4) из класса $C^2(Q)$.

Общее решение неоднородного уравнения. Область Q разделим на области $Q^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots$ прямыми $x_0 = \frac{(k-1)l}{a}$, $k = 1, 2, \dots$ так, как показано на рисунке. В свою очередь каждая из областей $Q^{(k)}$ разбивается с помощью характеристических прямых $x_1 = -(k-2)l + ax_0$ и $x_1 = (k-1)l - ax_0$ на области $Q_i^{(k)}$, $i = \overline{1, 4}$, в каждой из которых ищется решение исходной задачи.

Общее решение неоднородного уравнения (1) для каждой из областей $Q_i^{(k)}$, $i = \overline{1, 4}$ можно записать как

$$u_j^{(k)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2a} \int_{\frac{(k-1)l}{a}}^{x_0} \int_{x_1 - a(x_0 - \tau)}^{x_1 + a(x_0 - \tau)} f(\tau, \xi) d\xi d\tau + p_j^{(k)}(x_1 - ax_0) + g_j^{(k)}(x_1 + ax_0), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (5)$$

где $p_j^{(k)}$, $g_j^{(k)}$ – произвольные функции, f – обозначает непрерывное продолжение функции f на все множество интегрирования, обозначенное этим же символом. Предположим, что эти функции таковы, что

$$\begin{aligned} p_j^{(k)}(x_1 - ax_0) &= p_{j+2}^{(k)}(x_1 - ax_0), \quad j = 1, 2, \\ g_j^{(k)}(x_1 + ax_0) &= g_{j+1}^{(k)}(x_1 + ax_0), \quad j = 1, 3, \quad k = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (6)$$

и для них выполняются условия согласования

$$\begin{aligned} \frac{d^i}{dz^i} p_{j+1}^{(k)}(-(k-1)l) - \frac{d^i}{dz^i} p_j^{(k)}(-(k-1)l) &= \delta_i^{(k)}, \quad j=1,3, \quad i=\overline{0,2}, \\ \frac{d^i}{dz^i} g_{j+2}^{(k)}(kl) - \frac{d^i}{dz^i} g_j^{(k)}(kl) &= \sigma_i^{(k)}, \quad j=1,2, \quad i=\overline{0,2}. \end{aligned} \tag{7}$$

Условия согласования (7) назовем однородными, если $\delta_i^{(k)} = \sigma_i^{(k)} = 0, \quad i=\overline{0,2}$.

Функции $p_j^{(k)}$ для $j=1,3$ определены на отрезке $x_1 - ax_0 \in [-(k-1)l, -(k-2)l]$. Введем обозначения

$$p^{(k)}(x_1 - ax_0) = \begin{cases} p_1^{(k)}(x_1 - ax_0), & x_1 - ax_0 \in [-(k-1)l, -(k-2)l], \\ p_2^{(k)}(x_1 - ax_0), & x_1 - ax_0 \in [-kl, -(k-1)l]. \end{cases} \tag{8}$$

Аналогично

$$g^{(k)}(x_1 + ax_0) = \begin{cases} g_1^{(k)}(x_1 + ax_0), & x_1 + ax_0 \in [(k-1)l, kl], \\ g_3^{(k)}(x_1 + ax_0), & x_1 + ax_0 \in [kl, (k+1)l]. \end{cases} \tag{9}$$

Л е м м а 1. Пусть функции $p_j^{(k)} (j=1,2), g_j^{(k)} (j=1,3)$ дважды непрерывно дифференцируемы на соответствующих отрезках своего определения, т. е. $p_1^{(k)} \in C^2[-(k-1)l, -(k-2)l], p_2^{(k)} \in C^2[-kl, -(k-1)l], g_1^{(k)} \in C^2[(k-1)l, kl], g_3^{(k)} \in C^2[kl, (k+1)l]$. Однородные условия согласования (7) выполняются тогда и только тогда, когда функции $p^{(k)} \in C^2[-kl, -(k-2)l], g^{(k)} \in C^2[(k-1)l, (k+1)l]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из условий теоремы и условий согласования (7).

Л е м м а 2. Если выполняются условия леммы 1 и равенства (5), то решения $u_j^{(k)}$ уравнения (6) в каждой области $Q_j^{(k)}$ можно представить в виде выражения

$$u_j^{(k)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2a} \int_a^{x_0} \int_{x_1-a(x_0-\tau)}^{x_1+a(x_0-\tau)} f(\tau, \xi) d\xi d\tau + p^{(k)}(x_1 - ax_0) + g^{(k)}(x_1 + ax_0), \tag{10}$$

$$k=1,2,\dots, \quad j=\overline{1,4}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение леммы 2 следует из леммы 1, равенств (6) и формулы (5).

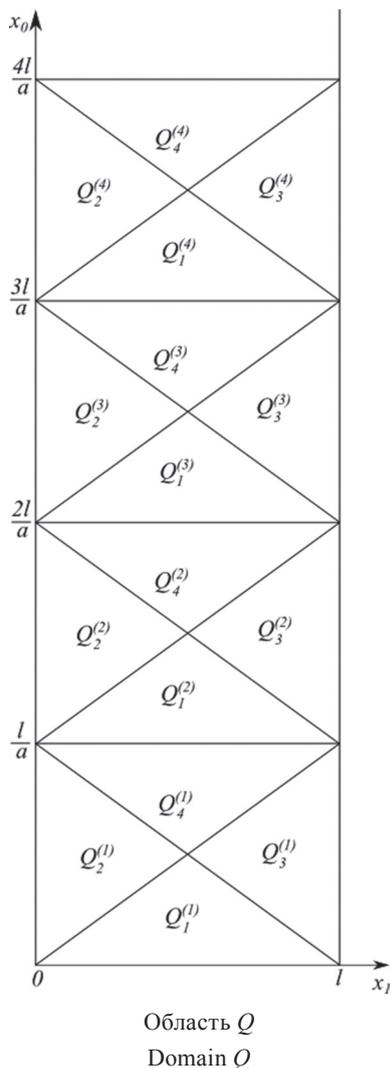
Пусть \overline{Q} – замыкание области Q , аналогично $\overline{Q_j^{(k)}}$ – замыкания соответствующих областей $Q_j^{(k)}$. Обозначим через $u^{(k)}$ функцию $u^{(k)} : \mathbb{R} \supset \bigcup_{j=1}^4 Q_j^{(k)} \ni (x_0, x_1) \rightarrow u^{(k)}(x_0, x_1) \in \mathbb{R}$, где ее значения определяются равенствами $u^{(k)}(x_0, x_1) = u_j^{(k)}(x_0, x_1)$, если $(x_0, x_1) \in Q_j^{(k)}, \quad j=\overline{1,4}$.

Функции $u_j^{(k)}$ соприкасаются друг с другом в точках $(-(k-1)l, x_1 + ax_0), (x_1 - ax_0, kl) \in \overline{Q^{(k)}}$. Чтобы $u^{(k)}$ были дважды непрерывно дифференцируемы, требуем выполнения условий, при которых будут справедливы следующие равенства:

$$\partial_{x_0}^i u_j^{(k)}\left(\frac{(k-1)l}{a}, 0\right) = \partial_{x_0}^i u_{j+1}^{(k)}\left(\frac{(k-1)l}{a}, 0\right), \quad j=1,3, \quad \left(\frac{(k-1)l}{a}, 0\right) \in \overline{Q_j^{(k)}}, \tag{11}$$

$$\partial_{x_1}^i u_j^{(k)}\left(\frac{(k-1)l}{a}, l\right) = \partial_{x_1}^i u_{j+2}^{(k)}\left(\frac{(k-1)l}{a}, l\right), \quad j=1,2, \quad \left(\frac{(k-1)l}{a}, l\right) \in \overline{Q_j^{(k)}}, \tag{12}$$

где $i=\overline{0,2}$ и $\partial_{x_0}^0 u_j^{(k)} = u_j^{(k)}, \quad \partial_{x_0}^1 u_j^{(k)} = \partial_{x_0} u_j^{(k)}, \quad \partial_{x_0}^2 u_j^{(k)} = \partial_{x_0 x_0} u_j^{(k)}, \quad \partial_{x_1}^i$ – аналогичное обозначение. Отсюда следует



Утверждение. Если функции $u_j^{(k)} \in C^2(\overline{Q_j^{(k)}})$, то следующие утверждения эквивалентны:

1) $u^{(k)} \in C^2(\overline{Q^{(k)}})$;

2) выполняются однородные условия согласования (11), (12).

Здесь под $u^{(k)}$ подразумевается продолжение по непрерывности на все множество $\overline{Q^{(k)}}$ определенной выше функции, обозначенной этим же символом $u^{(k)}$.

Лемма 3. Пусть функция $f : (x_0, x_1) \in \overline{Q} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow f(x_0, x_1) \in \mathbb{R}$ из уравнения (5) принадлежит классу $C^1(\overline{Q})$. Условия лемм 1 и 2 выполняются тогда и только тогда, когда решение уравнения (5) принадлежит классу $C^2(\overline{Q^{(k)}})$, которое определяется по формуле (10) для $j = \overline{1, 4}$.

Доказательство. Так как функции $p^{(k)}, g^{(k)}$ согласно лемме 1 являются дважды непрерывно дифференцируемыми, то решение уравнения (5) $u_j^{(k)} \in C^2(\overline{Q_j^{(k)}})$, $j = \overline{1, 4}$. Для завершения доказательства леммы 3 необходимо проверить выполнение условий согласования (11), (12) для функций $u_j^{(k)}$.

Положим $i = 0$ в условиях (11). Тогда

$$u_j^{(k)}\left(\frac{(k-1)l}{a}, 0\right) = u_{j+1}^{(k)}\left(\frac{(k-1)l}{a}, 0\right), \quad j = 1, 3. \quad (13)$$

Рассмотрим теперь производную первого порядка

$$\partial_{x_0} u_j^{(k)}\left(\frac{(k-1)l}{a}, 0\right) = -a \frac{dp^{(k)}}{dx_0}(- (k-1)l) + a \frac{dg^{(k)}}{dx_0}((k-1)l), \quad j = 1, 3. \quad (14)$$

Аналогично

$$\partial_{x_0} u_{j+1}^{(k)}\left(\frac{(k-1)l}{a}, 0\right) = -a \frac{dp^{(k)}}{dx_0}(- (k-1)l) + a \frac{dg^{(k)}}{dx_0}((k-1)l), \quad j = 1, 3. \quad (15)$$

Из равенства (13) следует, что производные (14), (15) равны между собой. По этой схеме проверяются условия (11) и все условия согласования (12) для $i = \overline{0, 2}$.

Искать решение задачи (1)–(4) будем с помощью метода характеристик [4]. Для этого мы сначала рассмотрим задачу в области $Q^{(k)}$ с начальными условиями

$$\begin{aligned} u^{(k)}\left(\frac{(k-1)l}{a}, x_1\right) &= \varphi^{(k)}(x_1), \\ \partial_{x_0} u^{(k)}\left(\frac{(k-1)l}{a}, x_1\right) &= \psi^{(k)}(x_1), \quad x_1 \in [0, l], \end{aligned} \quad (16)$$

интегральным условием (3) и граничным условием (4). Здесь $\varphi^{(k)}, \psi^{(k)}$ выражаются из решения в области $Q^{(k-1)}$ при $x_0 = \frac{(k-1)l}{a}$, причем $\varphi^{(1)} \equiv \varphi, \psi^{(1)} \equiv \psi$.

Задача Коши. В области $Q_1^{(k)}$ задаются начальные условия (16). С помощью данных условий строится система

$$\begin{cases} \varphi^{(k)}(x_1) = p_1^{(k)}(x_1 - (k-1)l) + g_1^{(k)}(x_1 + (k-1)l), \\ \psi^{(k)}(x_1) = -a \frac{dp_1^{(k)}}{dx_0}(x_1 - (k-1)l) + a \frac{dg_1^{(k)}}{dx_0}(x_1 + (k-1)l). \end{cases} \quad (17)$$

Из системы (17) функции $p_1^{(k)}$, $g_1^{(k)}$ определяются как

$$p_1^{(k)}(z) = \frac{1}{2} \varphi^{(k)}(z + (k-1)l) - \frac{1}{2a} \int_0^{z+(k-1)l} \psi^{(k)}(\xi) d\xi - \frac{1}{2} C, z \in [-(k-1)l, -(k-2)l], \quad (18)$$

$$g_1^{(k)}(z) = \frac{1}{2} \varphi^{(k)}(z - (k-1)l) + \frac{1}{2a} \int_0^{z-(k-1)l} \psi^{(k)}(\xi) d\xi + \frac{1}{2} C, z \in [(k-1)l, kl], \quad (19)$$

где C – произвольная константа.

Следовательно, решение в области $Q_1^{(k)}$ запишется в виде

$$\begin{aligned} u_1^{(k)}(\mathbf{x}) = & \frac{\varphi^{(k)}(x_1 - ax_0 + (k-1)l) + \varphi^{(k)}(x_1 + ax_0 - (k-1)l)}{2} + \\ & + \frac{1}{2a} \int_{x_1 - ax_0 + (k-1)l}^{x_1 + ax_0 - (k-1)l} \psi^{(k)}(\xi) d\xi + \frac{1}{2a} \int_{\frac{(k-1)l}{a}}^{x_0} \int_{x_1 - a(x_0 - \tau)}^{x_1 + a(x_0 - \tau)} f(\tau, \xi) d\xi d\tau. \end{aligned} \quad (20)$$

Функция $p_1^{(k)}$, определенная по формуле (18) в области $Q_1^{(k)}$, определена и в области $Q_3^{(k)}$, где имеет такой же вид. Функция $g_1^{(k)}$, определенная по формуле (19) в области $Q_1^{(k)}$, задана и в области $Q_2^{(k)}$, где также представима в виде (19).

Граничное условие на правой границе. Как показано в [4], решение задачи (1), (2), (4) в области $Q_3^{(k)}$ имеет вид

$$\begin{aligned} u_3^{(k)}(\mathbf{x}) = & \mu^{(l)} \left(\frac{x_1 + ax_0 - l}{a} \right) - \frac{\varphi^{(k)}((k+1)l - x_1 - ax_0) - \varphi^{(k)}(x_1 - ax_0 + (k-1)l)}{2} + \\ & + \frac{1}{2a} \int_{x_1 - ax_0 + (k-1)l}^{l - x_1 - ax_0 + kl} \psi^{(k)}(\xi) d\xi - \frac{1}{2a} \int_{\frac{(k-1)l}{a}}^{\frac{x_1 + ax_0 - l}{a}} \int_{2l - x_1 - ax_0 + a\tau}^{x_1 + ax_0 - a\tau} f(\tau, \xi) d\xi d\tau + \frac{1}{2a} \int_{\frac{(k-1)l}{a}}^{x_0} \int_{x_1 - a(x_0 - \tau)}^{x_1 + a(x_0 - \tau)} f(\tau, \xi) d\xi d\tau, \end{aligned} \quad (21)$$

а функция $g_3^{(k)}$ задается формулой

$$\begin{aligned} g_3^{(k)}(z) = & \mu^{(l)} \left(\frac{z - l}{a} \right) - \frac{1}{2} \varphi^{(k)}(l - z + kl) + \frac{1}{2a} \int_0^{l - z + kl} \psi^{(k)}(\xi) d\xi - \\ & - \frac{1}{2a} \int_{\frac{(k-1)l}{a}}^{\frac{z - l}{a}} \int_{2l - z + a\tau}^{z - a\tau} f(\tau, \xi) d\xi d\tau + \frac{1}{2} C, z \in [kl, (k+1)l]. \end{aligned} \quad (22)$$

Интегральное условие. Условие (3) представляет собой интегральный оператор второго рода. Подставив в него общее решение (5) в области $Q_2^{(k)}$, получим уравнение относительно неизвестной функции $p_2^{(k)}$:

$$\begin{aligned} p_2^{(k)}(-ax_0) + \int_0^l K(x_0, s) p^{(k)}(s - ax_0) ds = & \mu^{(0)}(x_0) - g^{(k)}(ax_0) - \\ & - \int_0^l K(x_0, s) g^{(k)}(s + ax_0) ds - \frac{1}{2a} \int_{\frac{(k-1)l}{a}}^{x_0} \int_{x_1 - a(x_0 - \tau)}^{x_1 + a(x_0 - \tau)} f(\tau, \xi) d\xi d\tau. \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь

$$p^{(k)}(z) = \begin{cases} p_1^{(k)}(z), & z \in [-(k-1)l, -(k-2)l], \\ p_2^{(k)}(z), & z \in [-kl, -(k-1)l], \end{cases} \quad (24)$$

$$g^{(k)}(z) = \begin{cases} g_1^{(k)}(z), & z \in [(k-1)l, kl], \\ g_3^{(k)}(z), & z \in [kl, (k+1)l]. \end{cases}$$

В области $Q_2^{(k)}$ на отрезке $x_1 \in [0, l], \forall x_0 \in \left[\frac{(k-1)l}{a}, \frac{kl}{a} \right]$ определены две функции: $p_1^{(k)}$, которая известна, и $p_2^{(k)}$, которую требуется отыскать. Граница между двумя этими функциями проходит по характеристике $x_1 = -(k-1)l + ax_0$. Используя данный факт, уравнение (24) можно переписать как

$$p_2^{(k)}(-ax_0) + \int_0^{-(k-1)l+ax_0} K(x_0, s) p_2^{(k)}(s - ax_0) ds = \mu^{(0)}(x_0) - g^{(k)}(ax_0) - \int_0^l K(x_0, s) g^{(k)}(s + ax_0) ds - \int_{-(k-1)l+ax_0}^l K(x_0, s) p_1^{(k)}(s - ax_0) ds - \frac{1}{2a} \int_{\frac{(k-1)l}{a}}^{x_0} \int_{-a(x_0-\tau)}^{a(x_0-\tau)} f(\tau, \xi) d\xi d\tau. \quad (25)$$

Введя замену $x_0 = -\frac{z}{a}$, получим уравнение

$$p_2^{(k)}(z) + \int_0^{-(k-1)l-z} K\left(-\frac{z}{a}, s\right) p_2^{(k)}(s+z) ds = M(z), \quad (26)$$

где

$$M(z) = \mu^{(0)}\left(-\frac{z}{a}\right) - g^{(k)}(-z) - \int_0^l K\left(-\frac{z}{a}, s\right) g^{(k)}(s-z) ds - \int_{-(k-1)l-z}^l K\left(-\frac{z}{a}, s\right) p_1^{(k)}(s+z) ds - \frac{1}{2a} \int_{\frac{(k-1)l}{a}}^{-z} \int_{-z-a\tau}^{z+a\tau} f(\tau, \xi) d\xi d\tau - \frac{1}{2a} \int_0^{\frac{(k-1)l}{a}} \int_{\frac{z}{a}}^{s-a\tau-z} K\left(-\frac{z}{a}, s\right) f(\tau, \xi) d\xi d\tau ds. \quad (27)$$

После замены переменной интегрирования $s = \tau - z$ получим интегральное уравнение Вольтерры второго рода для нахождения неизвестной функции $p_2^{(k)}$:

$$p_2^{(k)}(z) + \int_z^{-(k-1)l} K\left(-\frac{z}{a}, \tau - z\right) p_2^{(k)}(\tau) d\tau = M(z). \quad (28)$$

Решение данного уравнения существует в классе $C^2([-kl, -(k-1)l])$ и является единственным тогда, когда выполнены следующие условия гладкости функций: $M \in C^2([-kl, -(k-1)l])$, $K \in C^2\left(\left[\frac{(k-1)l}{a}, \frac{kl}{a}\right] \times [0, l]\right)$. Таким образом, решение в области $Q_2^{(k)}$ может быть найдено по формуле

$$u_2^{(k)}(x) = \frac{1}{2a} \int_{\frac{(k-1)l}{a}}^{x_0} \int_{x_1-a(x_0-\tau)}^{x_1+a(x_0-\tau)} f(\tau, \xi) d\xi d\tau + p_2^{(k)}(x_1 - ax_0) + g_1^{(k)}(x_1 + ax_0). \quad (29)$$

В области $Q_4^{(k)}$ решение находится по формуле

$$u_4^{(k)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2a} \int_{\frac{(k-1)l}{a}}^{x_0} \int_{x_1-a(x_0-\tau)}^{x_1+a(x_0-\tau)} f(\tau, \xi) d\xi d\tau + p_2^{(k)}(x_1 - ax_0) + g_3^{(k)}(x_1 + ax_0). \quad (30)$$

Для того чтобы решение задачи, определяемое по формулам (29), (30), было единственным, требуется показать, что $p_2^{(k)}(z) = \tilde{p}_2^{(k)}(z) - \frac{C}{2}$, где $\tilde{p}_2^{(k)}(z)$ – функция из $C^2([-kl, -(k-1)l])$, которая не содержит произвольных констант C .

Заметим, что $M(z) = \tilde{M}(z) - \frac{C}{2} - \frac{C}{2} \int_z^{- (k-1)l} K\left(-\frac{z}{a}, \tau - z\right) d\tau$. Здесь $\tilde{M}(z)$ обозначает сумму слагаемых из (27), которые не содержат свободных констант. С учетом этого факта уравнение (28) можно переписать в виде

$$\tilde{p}_2^{(k)}(z) + \int_z^{- (k-1)l} K\left(-\frac{z}{a}, \tau - z\right) \tilde{p}_2^{(k)}(\tau) d\tau = \tilde{M}(z), \quad (31)$$

где $\tilde{p}_2^{(k)}(z) = p_2^{(k)}(z) + \frac{C}{2}$. Решение уравнения (31) существует и единственно в классе C^2 . Таким образом, решение уравнения (28) представимо в виде $p_2^{(k)} = \tilde{p}_2^{(k)}(z) - \frac{C}{2}$, где функция $\tilde{p}_2^{(k)}(z)$ не зависит от свободных констант.

Условия согласования. Для того чтобы решение задачи (20), (21), (29), (30) было из класса $C^2(\overline{Q^{(k)}})$, необходимо и достаточно, чтобы функции $p_1^{(k)}$, $p_2^{(k)}$ были согласованы в точке $z = -(k-1)l$ вместе со своими производными до второго порядка включительно, а функции $g_1^{(k)}$, $g_3^{(k)}$ – в точке $z = kl$ вместе со своими производными до второго порядка включительно. Обозначим $\frac{d^i}{dz^i} p_2^{(k)}(-(k-1)l) - \frac{d^i}{dz^i} p_1^{(k)}(-(k-1)l) = \delta_i^{(k)}$, $i = \overline{0, 2}$, и $\frac{d^i}{dz^i} g_3^{(k)}(kl) - \frac{d^i}{dz^i} g_1^{(k)}(kl) = \sigma_i^{(k)}$, $i = \overline{0, 2}$. Условия согласования функций $g_1^{(k)}$, $g_3^{(k)}$ и их производных рассмотрены в [4] и имеют вид

$$\begin{aligned} \mu^{(l)}\left(\frac{(k-1)l}{a}\right) - \varphi^{(k)}(l) &= \sigma_0^{(k)}, \\ \frac{1}{a} \left(d\mu^{(l)}\left(\frac{(k-1)l}{a}\right) - \psi^{(k)}(l) \right) &= \sigma_1^{(k)}, \\ \frac{1}{a^2} d^2\mu^{(l)}\left(\frac{(k-1)l}{a}\right) - d^2\varphi^{(k)}(l) - \frac{1}{a^2} f\left(\frac{(k-1)l}{a}, l\right) &= \sigma_2^{(k)}. \end{aligned} \quad (32)$$

Далее находим условия согласования для функций $p_1^{(k)}$, $p_2^{(k)}$ и их производных.

Из уравнения (28) выражаем функцию $p_2^{(k)}$ как

$$p_2^{(k)}(z) = - \int_z^{- (k-1)l} K\left(-\frac{z}{a}, \tau - z\right) p_2^{(k)}(\tau) d\tau + M(z). \quad (33)$$

Приравнявая (18) и (33) в точке $z = -(k-1)l$, получаем условие согласования функций $p_1^{(k)}$, $p_2^{(k)}$:

$$\mu^{(0)}\left(\frac{(k-1)l}{a}\right) - \varphi^{(k)}(0) - \int_0^l K\left(\frac{(k-1)l}{a}, s\right) \varphi^{(k)}(s) ds = \delta_0^{(k)}. \quad (34)$$

Условие согласования функций $dp_1^{(k)}$, $dp_2^{(k)}$ имеет вид

$$-\frac{1}{a}d\mu^{(0)}\left(\frac{(k-1)l}{a}\right) + K\left(\frac{(k-1)l}{a}, 0\right)\delta_0^{(k)} + \frac{1}{a}\psi^{(k)}(0) - \\ - \int_0^l \frac{\partial}{\partial x_0} K\left(\frac{(k-1)l}{a}, s\right)\varphi^{(k)}(s)ds - \frac{1}{a} \int_0^l K\left(\frac{(k-1)l}{a}, s\right)\psi^{(k)}(s)ds = \delta_1^{(k)}. \quad (35)$$

Условие согласования на функции $d^2 p_1^{(k)}$ и $d^2 p_2^{(k)}$ в точке $z = -(k-1)l$ представляется следующим образом:

$$K\left(\frac{(k-1)l}{a}, 0\right)\delta_1^{(k)} - \frac{2}{a} \frac{\partial}{\partial x_0} K\left(\frac{(k-1)l}{a}, 0\right)\delta_0^{(k)} - \frac{1}{a^2} f\left(\frac{(k-1)l}{a}, 0\right) + \\ + \frac{1}{a^2} d^2 \mu^{(0)}\left(\frac{(k-1)l}{a}\right) - \frac{1}{a^2} \int_0^l \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} K\left(\frac{(k-1)l}{a}, s\right)\varphi^{(k)}(s)ds - d^2 \varphi^{(k)}(0) - \\ - \frac{2}{a^2} \int_0^l \frac{\partial}{\partial x_0} K\left(\frac{(k-1)l}{a}, s\right)\psi^{(k)}(s)ds - \int_0^l K\left(\frac{(k-1)l}{a}, s\right) d^2 \varphi^{(k)}(s)ds - \\ - \frac{1}{a^2} \int_0^l K\left(\frac{(k-1)l}{a}, s\right) f\left(\frac{(k-1)l}{a}, s\right) ds = \delta_2^{(k)}. \quad (36)$$

Лемма 4. Пусть известные функции удовлетворяют условиям: $\varphi^{(k)}(x_1) \in C^2([0, l])$; $\psi^{(k)}(x_1) \in C^1([0, l])$; $\mu^{(0)}, \mu^{(l)} \in C^2\left(\left[\frac{(k-1)l}{a}, \frac{kl}{a}\right]\right)$; $K \in C^2\left(\left[\frac{(k-1)l}{a}, \frac{kl}{a}\right] \times [0, l]\right)$; $f \in C^{0,1}\left(\left[\frac{(k-1)l}{a}, \frac{kl}{a}\right] \times [0, l]\right)$.

Единственное решение задачи (1), (16), (3), (4) $u^{(k)}(x) \in C^2(\overline{Q^{(k)}})$ существует тогда и только тогда, когда выполняются однородные условия согласования (33)–(36), т. е. при $\sigma_i^{(k)} \equiv 0, \delta_i^{(k)} \equiv 0, i = 0, 2$.

Классическое решение в области \overline{Q} . Далее рассматривается вопрос существования классического решения задачи (1)–(4) во всей области $\overline{Q} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{Q^{(k)}}$.

Лемма 5. Пусть для задачи (1)–(4) $u^{(k)}$ – решение в области $Q^{(k)}$, $u^{(k-1)}$ – решение в области $Q^{(k-1)}$, и в каждой из этих областей выполняются условия леммы 4. Тогда при определении функций

$$\varphi^{(k)}(x_1) = u_4^{(k-1)}\left(\frac{(k-1)l}{a}, x_1\right) = g_3^{(k-1)}(x_1) + p_2^{(k-1)}(x_1) + \frac{1}{2a} \int_{\frac{(k-2)l}{a}}^{\frac{(k-1)l}{a}} \int_{x_1 - a\tau - (k-1)l}^{x_1 - a\tau + (k-1)l} f(\tau, \xi) d\xi d\tau, \\ \psi^{(k)}(x_1) = \partial_{x_0} u_4^{(k-1)}\left(\frac{(k-1)l}{a}, x_1\right) = -a \frac{d}{dx_1} g_3^{(k-1)}(x_1) + a \frac{d}{dx_1} p_2^{(k-1)}(x_1) + \\ + \frac{1}{2} \int_{\frac{(k-2)l}{a}}^{\frac{(k-1)l}{a}} f(\tau, x_1 - a\tau - (k-1)l) + f(\tau, x_1 - a\tau + (k-1)l) d\tau, \quad (37)$$

где $u_4^{(k-1)}$ определена как (30), $g_3^{(k-1)}$ – в виде (22), $p_2^{(k-1)}$ – по формуле (33), функция

$$u^{(k,k-1)}(x) = \begin{cases} u^{(k)}(x), & x \in Q^{(k)}, \\ u^{(k-1)}(x), & x \in Q^{(k-1)} \end{cases} \quad (38)$$

будет дважды непрерывно дифференцируема на множестве $\overline{Q^{(k-1)}} \cup \overline{Q^{(k)}}$.

Для доказательства леммы 5 достаточно показать, что значения функций $u^{(k)}(\mathbf{x})$ и $u^{(k-1)}(\mathbf{x})$, а также их производных до второго порядка включительно совпадают при $\mathbf{x} = \left(\frac{(k-1)l}{a}, x_1 \right)$. Данное утверждение очевидно верно для самих функций и их производных по переменной x_0 . Для первой производной функций $u^{(k)}(\mathbf{x})$ и $u^{(k-1)}(\mathbf{x})$ по переменной x_1 , а также вторых производных достаточно приравнять их значения при $\mathbf{x} = \left(\frac{(k-1)l}{a}, x_1 \right)$.

Следствие. Условия согласования для функций $p_1^{(k)}, p_2^{(k)}$, а также для $g_1^{(k)}, g_3^{(k)}$ и их производных до второго порядка включительно выполняются тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования для функций $p_1^{(k-1)}$ и $p_2^{(k-1)}, g_1^{(k-1)}$ и $g_3^{(k-1)}$ и их производных до второго порядка включительно соответственно. Причем $\delta_i^{(k)} = -\sigma_i^{(k-1)}, \sigma_i^{(k)} = -\delta_i^{(k-1)}, i = \overline{0,2}, k = 2,3,\dots$.

Для доказательства данного следствия достаточно воспользоваться представлением в области $Q^{(k)}$ начальных функций по формулам (37) и подставить их в условия согласования (33)–(36). После упрощения полученных выражений имеем в точности условия согласования для функций в области $Q^{(k-1)}$.

Таким образом, доказана

Теорема. Пусть $\mu^{(0)}, \mu^{(l)} \in C^2([0, +\infty))$, $\varphi \in C^2([0, l])$, $\psi \in C^1([0, l])$, $K \in C^2(\overline{Q})$, $f \in C^{0,1}(\overline{Q})$. Для задачи (1)–(4) существует единственное классическое решение из класса $C^2(\overline{Q})$ тогда и только тогда, когда для функций $\mu^{(0)}, \mu^{(l)}, \varphi, \psi$ выполняются однородные условия согласования (33)–(36) при $k = 1$, а именно:

$$\mu^{(l)}(0) - \varphi(l) = 0, \quad d\mu^{(l)}(0) - \psi(l) = 0, \quad \frac{1}{a^2} d^2\mu^{(l)}(0) - d^2\varphi(l) - \frac{1}{a^2} f(0, l) = 0, \quad (39)$$

$$\mu^{(0)}(0) - \varphi(0) - \int_0^l K(0, s)\varphi(s)ds = 0, \quad (40)$$

$$-\frac{1}{a} d\mu^{(0)}(0) + \frac{1}{a} \psi(0) - \int_0^l \frac{\partial}{\partial x_0} K(0, s)\varphi(s)ds - \frac{1}{a} \int_0^l K(0, s)\psi(s)ds = 0, \quad (41)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a^2} d^2\mu^{(0)}(0) - \frac{1}{a^2} \int_0^l \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} K(0, s)\varphi(s)ds - d^2\varphi(0) - \frac{1}{a^2} f(0, 0) - \\ & - \frac{2}{a^2} \int_0^l \frac{\partial}{\partial x_0} K(0, s)\psi(s)ds - \int_0^l K(0, s)d^2\varphi(s)ds - \frac{1}{a^2} \int_0^l K(0, s)f(0, s)ds = 0, \end{aligned} \quad (42)$$

и оно может быть найдено по формулам (20), (21), (29), (30).

Заключение. В данной статье с помощью метода характеристик выведены необходимые и достаточные условия существования единственного решения задачи (1)–(4) в классе $C^2(\overline{Q})$ при заданных условиях гладкости на исходные функции. Получены аналитические формулы для поиска решения, а также построено эквивалентное интегральное уравнение второго рода с переменными верхними пределами для решения в подобластях. Доказано, что выполнение условий согласования (33)–(36) эквивалентно гладкости решения задачи (1)–(4) при условии гладкости исходных функций.

Список использованных источников

1. Дмитриев, В. Б. Нелокальная задача с интегральными условиями для волнового уравнения / В. Б. Дмитриев // Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. – 2006. – № 2 (42). С. 15–26.
2. Пулькина, Л. С. Нелокальная задача с интегральными условиями для гиперболического уравнения в характеристическом прямоугольнике / Л. С. Пулькина, О. М. Кечина // Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. – 2005. – № 2 (36). – С. 1–9.

3. Корзюк, В. И. Решение задачи Коши гиперболического уравнения для однородного дифференциального оператора в случае двух независимых переменных / В. И. Корзюк, И. С. Козловская // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2011. – Т. 55, № 5. – С. 9–13.
4. Корзюк, В. И. Классическое решение первой смешанной задачи для уравнения Клейна – Гордона – Фока в полуполосе / В. И. Корзюк, И. И. Столярчук // Дифференц. уравнения. – 2014. – Т. 50, № 8. – С. 1108–1117.
5. Корзюк, В. И. Классическое решение первой смешанной задачи для уравнения Клейна – Гордона – Фока в криволинейной полуполосе / В. И. Корзюк, И. И. Столярчук // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2014. – Т. 58, № 3. – С. 9–15.
6. Березанский, Ю. М. Функциональный анализ / Ю. М. Березанский, Г. Ф. Ус, З. Г. Шефтель. – Киев: Высш. шк., 1990. – 600 с.
7. Корзюк, В. И. Уравнения математической физики / В. И. Корзюк. – Минск: БГУ, 2008. – 433 с.

References

1. Dmitriev V.B. Non-local problem with the integral conditions for the wave equation. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya* [Vestnik of the Samara State University. Natural Science Series], 2006, no. 2 (42), pp. 15–26. (In Russian).
2. Pul'kina L.S., Kechina O.M. Non-local problem with the integral conditions for the hyperbolic equation on the characteristic rectangle. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya* [Vestnik of the Samara State University. Natural Science Series], 2005, no. 2 (36), pp. 1–9. (In Russian).
3. Korzyuk V.I., Kozlovskaya I.S. Solving the Cauchy problem of the hyperbolic equation for a homogeneous differential operator in the case of two independent variables. *Doklady Natsionalnoi Akademii Nauk Belarusi* [Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus], 2011, vol. 55, no. 5, pp. 9–13. (In Russian).
4. Korzyuk V.I., Stolyarchuk I.I. Classical solution of the first mixed problem for the Klein-Gordon-Fock equation in a half-strip. *Differential Equations*, 2014, vol. 50, no. 8, pp. 1098–1111. Doi: 10.1134/s0012266114080084
5. Korzyuk V.I., Stolyarchuk I.I. Classical solution of the first mixed problem for the Klein-Gordon-Fock equation in the curvilinear half-strip. *Doklady Natsionalnoi Akademii Nauk Belarusi* [Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus], 2014, vol. 58, no. 3, pp. 9–15. (In Russian).
6. Berezanskii Yu.M., Us G.F., Sheftel' Z.G. *Functional Analysis*. Kiev, Vysshaya shkola Publ., 1990. 600 p. (In Russian).
7. Korzyuk V.I. *Equations of Mathematical Physics*. Minsk, Belarusian State University, 2008. 433 p. (In Russian).

Информация об авторе

Столярчук Иван Игоревич – магистр физико-математических наук, аспирант кафедры математической кибернетики механико-математического факультета, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: ivan.telkantar@gmail.com

Information about the author

Stolyarchuk Ivan Igorevich – Master of Physics and Mathematics, Postgraduate of the Mathematical Cybernetics Department, Faculty of Mechanics and Mathematics of the Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: ivan.telkantar@gmail.com

Для цитирования

Столярчук, И. И. Решение смешанных задач методом характеристик для волнового уравнения с интегральным условием / И. И. Столярчук // Вест. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2017. – № 1. – С. 53–62.

For citation

Stolyarchuk I.I. Solution of the mixed problems by the method of characteristics for the wave equation with the integral condition. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series], 2017, no. 1, pp. 53–62. (In Russian).

Д. Я. Копать, М. А. Маталыцкий*Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь***О НЕСТАЦИОНАРНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОСТОЯНИЙ МАРКОВСКОЙ СЕТИ С БЕСКОНЕЧНОЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ ОБСЛУЖИВАНИЯ В УСЛОВИЯХ ВЫСОКОЙ НАГРУЗКИ**

В настоящей статье объектом исследования является марковская сеть с бесконечнолинейными системами массового обслуживания (СМО). Дисциплины обслуживания заявок в системах – FIFO («первым пришел – первым обслуживается») и время обслуживания заявок в каждой линии СМО сети распределены по экспоненциальному закону со своими параметрами для каждой системы массового обслуживания. Целью исследования является получение достаточного условия представимости нестационарных вероятностей состояний такой сети, функционирующей в условиях высокой нагрузки, в мультипликативном виде. Во введении указана область прикладного применения марковских сетей с бесконечнолинейными системами обслуживания, обоснована актуальность настоящей работы, приведен краткий обзор результатов, полученных по данной тематике ранее. В основной части приведено описание сети, выведена система разностно-дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей состояний сети. Представлен основной результат данной статьи, т. е. мультипликативный вид нестационарных вероятностей состояний описанной выше марковской сети, функционирующей в условиях высокой нагрузки, который сформулирован и доказан в виде теоремы. Полученные результаты могут быть использованы при моделировании поведения информационно-компьютерных систем и сетей, логистических транспортных систем, страховых компаний, банковских сетей и других объектов, стохастическими моделями которых являются сети массового обслуживания.

Ключевые слова: марковская сеть, бесконечнолинейные системы обслуживания, условие высокой нагрузки, нестационарный режим, мультипликативный вид.

D. J. Kopats, M. A. Matalytski*Yanka Kupala State University of Grodno, Grodno, Belarus***NON-STATIONARY DISTRIBUTION OF THE PROBABILITY STATES OF THE MARKOV NETWORK WITH INFINITE-SERVER QUEUING SYSTEMS OPERATING AT HIGH LOAD**

The object of research is the Markov queuing network with infinite-server queues. The disciplines of the customer's service in queuing systems (QS) are FIFO (first come – first served), service rates of customers are distributed exponentially with their own rates for each QS in each line of QS. The purpose of the research is to obtain sufficient conditions for representability of non-stationary state probabilities of such a network operating within the heavy-traffic regime in the multiplicative form. In the introduction, the field of applications of Markov networks with infinite-server queues has been described; the relevance of this work has also been indicated; a brief overview of the previous results on this subject has been given. In the main part, the network has been shown; the system of Kolmogorov's difference-differential equations for the state probabilities of the network conditions has been derived. The main result of this article is as follows, i.e. the multiplicative form of the non-stationary state probabilities of the above-mentioned Markov network operating within the heavy-traffic regime is formulated and proved as a theorem. The obtained results can be used for modeling the behavior of information and computer systems and networks, transportation systems, insurance companies, banking networks and other facilities, the stochastic models which are the queuing networks.

Keywords: Markov networks, infinitely linear service system, high-load condition, non-stationary regime, multiplicative form.

Введение. При проектировании различных реальных объектов, таких как информационно-компьютерные системы и сети, логистические транспортные системы, страховые компании, банковские сети, производственные системы и т. д., часто необходимо промоделировать их текущее поведение, найти различные характеристики, зависящие от времени. В таких случаях важной задачей является нахождение вероятностей состояний их моделей – марковских и произвольных

сетей массоваго абслуживания с различными особенностями в переходном (нестационарном) режиме [1–4]. Опыт выполненных за последние годы исследований показал, что такие задачи в своем большинстве являются принципиально трудноразрешимыми.

Точные результаты в переходном режиме для вероятностей состояний марковских сетей получены только в некоторых частных случаях [5] из-за большой размерности систем разностно-дифференциальных уравнений (РДУ), которым они удовлетворяют. Для их нахождения в условиях большой нагрузки применяется метод диффузионной аппроксимации [6–9], сущность которого состоит в аппроксимации дискретного случайного процесса, описывающего количество заявок в системах сети, непрерывным диффузионным процессом. В [10–12] для нахождения нестационарных вероятностей состояний марковских сетей с разнотипными заявками, дисциплинами обслуживания заявок FIFO в многолинейных системах массоваго обслуживания (СМО) разработан метод последовательных приближений, совмещенный с методом рядов. Монографии [13, 14] посвящены анализу марковских сетей, функционирующих в условиях высокой нагрузки, когда в каждый момент времени в СМО сети находится хотя бы одна заявка. Именно в такой ситуации систему РДУ для нестационарных вероятностей состояний можно решить методом, основанным на использовании аппарата многомерных производящих функций, и получить решение в виде многократных рядов.

1. Описание сети. Рассмотрим открытую сеть, состоящую из n систем массоваго обслуживания. На вход сети поступает пуассоновский поток заявок с интенсивностью λ . Заявка с вероятностью p_{0i} поступает на обслуживание в i -ю СМО, $\sum_{i=1}^n p_{0i} = 1$. Длительность обслуживания в i -й СМО является случайной величиной (СВ), имеющей экспоненциальное распределение с параметром, зависящим от числа заявок в ней. Если в момент времени t в i -й СМО имеется k_i заявок, то в интервале $[t, t + \Delta t)$, где Δt мало, обслуживание одной заявки закончится с вероятностью $\mu_i(k_i)\Delta t + o(\Delta t)$. Далее эта заявка мгновенно поступает на обслуживание в j -ю СМО с вероятностью p_{ij} или с вероятностью p_{i0} покидает сеть, $\sum_{j=0}^n p_{ij} = 1$, $i = \overline{1, n}$. Дисциплинами обслуживания заявок являются FIFO. Матрица $P = \|p_{ij}\|_{n \times n}$ неразложима. Введем случайный процесс $k(t) = (k_1(t), k_2(t), \dots, k_n(t))$, где $k_i(t)$ – число заявок в i -й СМО в момент времени t , $i = \overline{1, n}$. Он описывает состояние сети и является цепью Маркова со счетным числом состояний. Требуется определить нестационарное распределение вероятностей состояний такой сети $P(k, t) = P(k_1, k_2, \dots, k_n, t) = P\{k_1(t) = k_1, k_2(t) = k_2, \dots, k_n(t) = k_n\}$.

2. Основной результат. Пусть I_i – вектор размерности n с нулевыми компонентами за исключением компоненты с номером i , которая равна 1, $u(x) = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x \leq 0 \end{cases}$ – функция Хевисайда.

Лемма. Система РДУ для вероятностей состояний сети имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dP(k, t)}{dt} = & - \left(\lambda + \sum_{i=1}^n \mu_i(k_i) u(k_i) \right) P(k, t) + \lambda \sum_{i=1}^n p_{0i} u(k_i) P(k - I_i, t) + \sum_{i=1}^n \mu_i(k_i + 1) p_{i0} P(k + I_i, t) + \\ & + \sum_{i, j=1}^n \mu_i(k_i + 1) p_{ij} u(k_j) P(k + I_i - I_j, t). \end{aligned} \quad (1)$$

Доказательство. Для цепи Маркова $k(t)$ возможны следующие переходы в состояние $k(t + \Delta t) = (k, t + \Delta t)$ за время Δt :

– из состояния $(k - I_i, t)$ с вероятностью $\lambda p_{0i} u(k_i) \Delta t + o(\Delta t)$, при этом заявка поступает извне в систему $S_i, i = \overline{1, n}$;

– из состояния $(k + I_i, t)$ с вероятностью $\mu_i \overline{(k_i + 1)} p_{i0} \Delta t + o(\Delta t)$, при этом заявка завершает обслуживание в системе S_i и уходит из сети $i = \overline{1, n}$;

– из состояния $(k + I_i - I_j, t)$ с вероятностью $\mu_i (k_i + 1) p_{ij} u(k_j) \Delta t + o(\Delta t)$, если заявка завершает обслуживание в системе S_i и переходит в систему $S_j, i, j = \overline{1, n}$;

– из состояния (k, t) с вероятностью $1 - \left(\lambda + \sum_{i=1}^n \mu_i (k_i) u(k_i) \right) \Delta t + o(\Delta t)$, при этом ни поступления заявок, ни завершения обслуживания не происходит, сеть остается в состоянии k .

Тогда, используя формулу полной вероятности, имеем

$$P(k, t + \Delta t) = \left[1 - \left(\lambda + \sum_{i=1}^n \mu_i (k_i) u(k_i) \right) \Delta t \right] P(k, t) + \lambda \sum_{i=1}^n p_{0i} u(k_i) P(k - I_i, t) \Delta t + \sum_{i=1}^n \mu_i (k_i + 1) p_{i0} P(k + I_i, t) \Delta t + \sum_{i, j=1}^n \mu_i (k_i + 1) p_{ij} u(k_j) P(k + I_i - I_j, t) \Delta t + o(\Delta t).$$

Отсюда, переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим систему разностно-дифференциальных уравнений Колмогорова (1) для вероятностей состояний.

Далее мы предположим, что СМО сети функционируют в условиях высокой нагрузки, т. е. $k_i(t) > 0 \forall t, i = \overline{1, n}$, тогда система РДУ (1) примет вид

$$\frac{dP(k, t)}{dt} = - \left(\lambda + \sum_{i=1}^n \mu_i (k_i) \right) P(k, t) + \lambda \sum_{i=1}^n p_{0i} P(k - I_i, t) + \sum_{i=1}^n \mu_i (k_i + 1) p_{i0} P(k + I_i, t) + \sum_{i, j=1}^n \mu_i (k_i + 1) p_{ij} P(k + I_i - I_j, t). \quad (2)$$

В монографии [12] приведено описание нахождения в частном случае точного нестационарного распределения вероятностей состояний в аналитическом виде путем решения системы РДУ (2). Однако при этом не было учтено, что система (2) справедлива только для сети, функционирующей в условиях высокой нагрузки. Этот частный случай касается ситуации, когда в качестве начальных условий используется произведение стационарных вероятностей состояний СМО сети, каждое из которых является законом Пуассона, и системы массового обслуживания сети должны быть бесконечнолинейными. Таким образом, в данной работе описаны аналогичные результаты, а именно, приведено достаточное условие представимости в этом частном случае вероятностей состояний $P(k, t)$ в мультипликативном виде, когда сеть функционирует в условиях высокой нагрузки. Проведено уточнение мультипликативного вида для вероятностей состояний. Докажем следующую теорему.

Теорема. Для того чтобы нестационарное распределение вероятностей состояний $P(k, t)$, удовлетворяющее системе РДУ (2), представлялось в виде

$$P(k, t) = \prod_{i=1}^n \frac{(\lambda y_i(t))^{k_i}}{\mu_i^{k_i} k_i!} u(k_i) e^{-\frac{\lambda}{\mu_i} y_i(t)}, \quad (3)$$

достаточно, чтобы

$$1) \quad \mu_i(k_i) = \mu_i k_i, \quad k = 1, 2, \dots, \mu_i = \mu_i(1), \quad i = \overline{1, n}; \quad (4)$$

2) начальное распределение имело вид

$$P(k, 0) = \prod_{i=1}^n \frac{(\lambda y_i(0))^{k_i}}{\mu_i^{k_i} k_i!} e^{-\frac{\lambda}{\mu_i} y_i(0)}, \quad k_i \geq 1, \quad i = \overline{1, n}; \quad (5)$$

3) функции $y_i(t), i = \overline{1, n}$, удовлетворяли системе линейных дифференциальных уравнений

$$y_i'(t) = \mu_i \left(\sum_{j=1}^n p_{ji} y_j(t) - y_i(t) + p_{0i} \right), i = \overline{1, n}, \quad (6)$$

с начальными условиями $y_i(0), i = \overline{1, n}$.

З а м е ч а н и е 1. В соотношении (3) присутствие множителя $u(k_i)$ нужно для того, чтобы выполнялось условие $P(k, t) = 0$, если в векторе существует компонента с номером i , для которой $k_i = 0$, как это предполагается в условиях высокой нагрузки.

З а м е ч а н и е 2. Условие (4) фактически означает, что СМО сети должны быть бесконечно-линейными.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы. Будем искать решение системы РДУ (2) в виде

$$P(k, t) = \prod_{i=1}^n \frac{(\lambda y_i(t))^{k_i} u(k_i)}{\prod_{l=1}^{k_i} \mu_i(l)} Q(t) = Q(t) \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n k_i}}{\prod_{i=1}^n \prod_{l=1}^{k_i} \mu_i(l)} \prod_{i=1}^n y_i(t)^{k_i} u(k_i), \quad (7)$$

где

$$Q(t) = \prod_{i=1}^n e^{-\frac{\lambda}{\mu_i} y_i(t)}. \quad (8)$$

Из (7) следует, что

$$P(k - I_i, t) = P(k, t) \frac{\mu_i(k_i)}{\lambda y_i(t)}, \quad P(k + I_i, t) = P(k, t) \frac{\lambda y_i(t)}{\mu_i(k_i + 1)},$$

$$P(k + I_i - I_j, t) = P(k, t) \frac{\mu_j(k_j) y_i(t)}{\mu_i(k_i + 1) y_j(t)}, \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (9)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \frac{dP(k, t)}{dt} &= Q'(t) \prod_{i=1}^n \frac{(\lambda y_i(t))^{k_i} u(k_i)}{\prod_{l=1}^{k_i} \mu_i(l)} + Q(t) \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n k_i}}{\prod_{i=1}^n \prod_{l=1}^{k_i} \mu_i(l)} \sum_{i=1}^n k_i (y_i(t))^{k_i-1} y_i'(t) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n y_j^{k_j}(t) = \\ &= \frac{Q'(t)}{Q(t)} P(k, t) + \sum_{i=1}^n k_i \frac{y_i'(t)}{y_i(t)} P(k, t). \end{aligned} \quad (10)$$

Тогда, подставив выражения (9), (10) в систему РДУ (2) и поделив на $P(k, t)$, получим

$$\begin{aligned} \frac{Q'(t)}{Q(t)} + \sum_{i=1}^n k_i \frac{y_i'(t)}{y_i(t)} &= - \left(\lambda + \sum_{i=1}^n \mu_i(k_i) \right) + \sum_{i=1}^n p_{0i} \frac{\mu_i(k_i + 1)}{y_i(t)} + \\ &+ \lambda \sum_{i=1}^n y_i(t) p_{i0} + \sum_{i, j=1}^n p_{ij} \frac{\mu_j(k_j) y_i(t)}{y_j(t)}. \end{aligned} \quad (11)$$

Используя условие $\sum_{i=1}^n p_{0i} = 1$ и поменяв местами индексы суммирования в двойной сумме, будем иметь:

$$\frac{Q'(t)}{Q(t)} + \lambda \left(\sum_{i=1}^n p_{0i} - p_{i0} y_i(t) \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i k_i}{y_i(t)} \left[\sum_{j=1}^n p_{ji} y_j(t) - y_i(t) + p_{0i} - \frac{y_i'(t)}{\mu_i} \right]. \quad (12)$$

Если выполнена система дифференциальных уравнений (6), то правая часть в (12) равна нулю. Покажем, что и левая часть в (12) также будет равна нулю. Подставляя выражение (8) в левую часть (12) и используя соотношения

$$\left(\prod_{i=1}^n a_i(t)\right)' = \sum_{i=1}^n a_i'(t) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n a_j(t), \quad \frac{\left(\prod_{i=1}^n a_i(t)\right)'}{\prod_{i=1}^n a_i(t)} = \sum_{i=1}^n \frac{a_i'(t)}{a_i(t)},$$

имеем в левой части (12):

$$\begin{aligned} \frac{Q'(t)}{Q(t)} + \lambda \left(1 - \sum_{i=1}^n p_{i0} y_i(t)\right) &= \sum_{i=1}^n \frac{-\frac{\lambda}{\mu_i} y_i'(t) e^{-\frac{\lambda}{\mu_i} y_i(t)}}{e^{-\frac{\lambda}{\mu_i} y_i(t)}} + \lambda \left(1 - \sum_{i=1}^n p_{i0} y_i(t)\right) = \\ &= -\lambda \sum_{i=1}^n \frac{y_i'(t)}{\mu_i} + \lambda - \lambda \sum_{i=1}^n p_{i0} y_i(t), \end{aligned}$$

и нам надо показать, что выполняется равенство

$$-\sum_{i=1}^n \frac{y_i'(t)}{\mu_i} + \lambda - \sum_{i=1}^n p_{i0} y_i(t) = 0. \quad (13)$$

Для системы дифференциальных уравнений (6) на μ_i и суммируя от 1 до n , получим

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{y_i'(t)}{\mu_i} &= \sum_{i,j=1}^n p_{ji} y_j(t) - \sum_{i=1}^n y_i(t) + \lambda = \lambda + \sum_{j=1}^n y_j(t) \sum_{i=1}^n p_{ji} - \sum_{i=1}^n y_i(t) = \\ &= \lambda + \sum_{j=1}^n y_j(t) (1 - p_{j0}) - \sum_{i=1}^n y_i(t) = \lambda - \sum_{j=1}^n p_{j0} y_j(t), \end{aligned}$$

т. е. (13) имеет место, что и требовалось доказать. Теорема доказана.

Отметим, что метод решения системы дифференциальных уравнений (6) описан в [12].

Выводы. В статье получено достаточное условие представимости нестационарных вероятностей состояний марковской сети массового обслуживания, функционирующей в условиях высокой нагрузки, в мультипликативном виде. При этом системы массового обслуживания сети должны быть бесконечнолинейными, а начальные вероятности состояний являться произведением стационарных распределений вероятностей состояний СМО сети, каждое из которых является законом Пуассона.

Дальнейшие исследования могут быть связаны с получением аналогичных результатов для сетей с другими особенностями: ограниченным временем ожидания заявок в СМО, ненадежными СМО, с положительными и отрицательными заявками и т. д.

Список использованных источников

1. Вишнеvский, В. М. Теоретические основы проектирования компьютерных сетей / В. М. Вишнеvский. – М.: Техносфера, 2003. – 506 с.
2. Матальцкий, М. А. Системы и сети массового обслуживания: анализ и применения / М. А. Матальцкий, О. М. Тихоненко, Е. В. Колузаева. – Гродно: ГрГУ, 2011. – 817 с.
3. Матальцкий, М. А. Сетевые вероятности модели обработки заявок клиентов в страховой компании / М. А. Матальцкий, Т. В. Русилко. – Берлин: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2012. – 327 с.
4. Матальцкий, М. А. Математический анализ НМ-сетей и их применения в транспортной логистике / М. А. Матальцкий, О. М. Китурко. – Гродно: ГрГУ, 2015. – 231 с.

5. Kelly, F. P. *Stochastic Networks. The IMA Volumes in Mathematics and its Applications* / F. P. Kelly, R. J. Williams. – N.Y.: Springer-Verlag, 1995. – 170 p.
6. Лебедев, Е. А. Диффузионная аппроксимация немарковских сетей обслуживания в переходном режиме / Е. А. Лебедев, А. А. Чечельницкий // Аналитические методы исследования стохастических систем. – Киев: КГУ, 1989. – С. 61–66.
7. Медведев, Г. А. Замкнутые системы массового обслуживания и их оптимизация / Г. А. Медведев // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. – 1978. – № 6. – С. 199–203.
8. Gelenbe, E. Probabilistic models of computer systems. Diffusion approximation waiting times and batch arrivals / E. Gelenbe // *Acta Inform.* – 1979. – Vol. 12. – P. 285–303.
9. Kobayashi, H. Application of the diffusion approximation to queueing networks I: Equilibrium queue distributions / H. Kobayashi // *J. ACM.* – 1974. – Vol. 21, № 2. – P. 316–328; Kobayashi H. Application of the diffusion approximation to queueing networks II: Nonequilibrium distributions and applications to computer modeling / H. Kobayashi // *J. ACM.* – 1974. – Vol. 21, № 3. – P. 456–469.
10. Матальцкий, М. А. Метод нахождения нестационарных вероятностей состояний марковских сетей массового обслуживания / М. А. Матальцкий // Проблемы передачи информации. – 1994. – Т. 30, вып. 2. – С. 104–107.
11. Матальцкий, М. А. Исследование сетей с многолинейными системами обслуживания и разнотипными заявками / М. А. Матальцкий // Автоматика и телемеханика. – 1996. – № 9. – С. 79–92.
12. Ивницкий, В. А. Теория сетей массового обслуживания / В. А. Ивницкий. – М.: Физматлит, 2004. – 772 с.
13. Матальцкий, М. А. Стохастические сети с ограниченным временем ожидания заявок и ненадежным обслуживанием: монография / М. А. Матальцкий, С. Э. Статкевич. – Гродно: ГрГУ, 2014. – 248 с.
14. Матальцкий, М. А. Стохастические сети с нестационарными перемещениями заявок / М. А. Матальцкий, В. В. Науменко. – Гродно: ГрГУ, 2016. – 348 с.

References

1. Vishnevskii V.M. *Theoretical Bases of Designing Computer Networks*. Moscow, Technosphere Publ., 2003. 506 p. (In Russian).
2. Matalytskii M.A., Tikhonenko O.M., Koluzaeva E.V. *Systems and Queueing Network Analysis and Application*. Grodno, Grodno State University, 2011. 817 p. (In Russian).
3. Matalytskii M.A., Rusilko T.V. *Network Probabilistic Models of Processing Customer Requests in an Insurance Company*. Berlin: LAP LAMBERT Academic Publ., 2012. 327 p. (In Russian).
4. Matalytskii M.A., Kiturko O.M. *Mathematical Analysis of HM-networks and their Application in the Transport Logistics*. Grodno, Grodno State University, 2015. 231 p. (In Russian).
5. Kelly F.P., Williams R.J. *Stochastic Networks. The IMA Volumes in Mathematics and its Applications*. N.Y., Springer-Verlag, 1995. 170 p.
6. Lebedev E.A., Chechelniczkii A.A. Diffusion Approximation of non-Markov Queueing Networks in the Transition Regime. *Analiticheskie metody issledovaniya stokhasticheskikh sistem* [Analytical Methods for Studying Stochastic Systems]. Kiev, Kiev State University, 1989, pp. 61–66. (In Russian).
7. Medvedev G.A. Closed queueing systems and their optimization. *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika* [Proceedings of the USSR Academy of Sciences. Technical Cybernetics], 1978, vol. 6, pp. 199–203. (In Russian).
8. Gelenbe E. Probabilistic models of computer systems. Part II: Diffusion approximation waiting times and batch arrivals. *Acta Informatica*, 1979, vol. 12, no. 4, pp. 285–303. Doi: 10.1007/bf00268317
9. Kobayashi H. Application of the diffusion approximation to queueing networks I: Equilibrium queue distributions. *Journal of ACM*, 1974, vol. 21, no 2, pp. 316–328. Doi: 10.1145/321812.321827; Kobayashi H. Application of the diffusion approximation to queueing networks II: Nonequilibrium distributions and applications to computer modeling. *Journal of ACM*, 1974, vol. 21, no 3, pp. 456–469. Doi: 10.1145/321832.321844
10. Matalytskii M.A. Method for Obtaining the Unsteady State Probabilities in Markovian Queueing Networks. *Problemy peredachi informatsii* [Information Transmission Problems], 1994, vol. 30, no. 2, pp. 104–107. (In Russian).
11. Matalytskii M.A. Research Network with a multiline service systems and heterogeneous applications. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Remote Control], 1996, no. 9, pp. 79–92. (In Russian).
12. Ivnickii V.A. *Theory of Queueing Networks*. Moscow, FIZMATLIT, 2004. 772 p. (In Russian).
13. Matalytski M.A., Statkevich S.E. *Stochastic Networks with Bounded Waiting Time of Customers and Unreliable Servicing Systems*. Grodno, GrSU, 2014. 248 p. (In Russian).
14. Matalytskii M.A., Naumenko V.V. *Stochastic Networks with Non-Standard Customers Movement*. Grodno, Grodno State University, 2016. 346 p. (In Russian).

Информация об авторах

Копать Дмитрий Ярославович – аспирант кафедры стохастического анализа и эконометрического моделирования факультета математики и информатики, Гродненский государственный университет им. Я. Купалы (ул. Ожешко, 22, 230020, г. Гродно, Республика Беларусь). E-mail: dk80395@mail.ru

Маталыцкий Михаил Алексеевич – профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой стохастического анализа и эконометрического моделирования факультета математики и информатики, Гродненский государственный университет им. Я. Купалы (ул. Ожешко, 22, 230020, г. Гродно, Республика Беларусь). E-mail: m.matalytski@gmail.com

Для цитирования

Копать, Д. Я. О нестационарном распределении вероятностей состояний марковской сети с бесконечнолинейными системами обслуживания в условиях высокой нагрузки / Д. Я. Копать, М. А. Маталыцкий // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2017. – № 1. – С. 63–69.

Information about the authors

Kopats Dzmitry Iaroslavovich – Postgraduate of the Department of Stochastic Analysis and Econometric Modeling, Faculty of Mathematics and Computer Science of the Yanka Kupala State University of Grodno (22, Ozheshko Str., 230023, Grodno, Republic of Belarus). E-mail: dk80395@mail.ru

Matalytski Mikhail Alekseevich – Professor, D. Sc. (Physics and Mathematics), Head of the Department of Stochastic Analysis and Econometric Modeling, Faculty of Mathematics and Computer Science of the Yanka Kupala State University of Grodno (22, Ozheshko Str., 230023, Grodno, Republic of Belarus). E-mail: m.matalytski@gmail.com

For citation

Kopats D.J., Matalytski M.A. Non-stationary distribution of the probability states of the Markov network with infinite-server queuing systems operating at high load. *Vesti Natsyional'noi akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series], 2017, no. 1, pp. 63–69. (In Russian).

А. А. Леваков, Я. Б. Задворный*Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь***СУЩЕСТВОВАНИЕ ИЗМЕРИМЫХ СОГЛАСОВАННЫХ СЕЛЕКТОРОВ
МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ**

В настоящей статье рассматриваются измеримые многозначные случайные отображения, согласованные с заданным потоком σ -алгебр, значениями которых являются замкнутые подмножества некоторого полного сепарабельного метрического пространства. Для них установлен критерий измеримости и согласованности, аналогичный известному критерию Кастэна измеримости многозначных отображений. Доказана теорема о существовании у случайных многозначных отображений измеримых и согласованных селекторов, с заданной точностью аппроксимирующих некоторую однозначную измеримую и согласованную случайную функцию. Данная теорема усилена в случае, когда рассматриваемое многозначное отображение принимает компактные значения. Доказана теорема, обобщающая на многозначные измеримые случайные отображения теорему Филиппова об обратной функции. Полученные результаты могут быть использованы при доказательстве существования и исследовании свойств решений стохастических дифференциальных включений.

Ключевые слова: многозначное отображение, селектор, измеримость.

A. A. Levakov, Y. B. Zadvorny*Belarusian State University, Minsk, Belarus***EXISTENCE OF MEASURABLE ADAPTED SELECTORS OF SET-VALUED FUNCTIONS**

The present article is devoted to considering measurable set-valued random functions that are adapted to a fixed filtration of σ -algebras and the values of which are closed subsets of some complete separable metric space. For such functions, a criterion of measurability and adaptation is proved, which is analogous to Castain's well-known criterion of measurability of set-valued functions. A theorem on existence of measurable and adapted selectors of set-valued random functions, which approximate some measurable adapted random function, is obtained. This theorem is improved in the case of set-valued functions with compact values. The generalization of Filippov's theorem about the inverse function to the set-valued measurable random functions is proved. The obtained results can be useful both for proving the existence and for considering the properties of the solutions of stochastic differential inclusions.

Keywords: set-valued function, selector, measurability.

Пусть (X, ρ) – полное сепарабельное метрическое пространство; $S(X)$ – множество всех подмножеств из X , а $P(X)$, $\text{cl}(X)$, $\text{comp}(X)$ – соответственно семейство всех непустых, всех непустых замкнутых, непустых компактных подмножеств из X ; (T, F) – измеримое пространство. Многозначное отображение $\Gamma : T \rightarrow S(X)$ называется (F) -измеримым ($(F)_c$ -измеримым; $(F)_b$ -измеримым), если $\Gamma^{-1}(M) = \{t \in T : \Gamma(t) \cap M \neq \emptyset\} \in F$ для каждого открытого (замкнутого; борелевского) множества $M \subset X$. Если $\Gamma : T_1 \times T_2 \rightarrow S(X)$, где $(T_1, F_1), (T_2, F_2)$ – два измеримых пространства, то измеримость отображения Γ понимается в терминах произведения σ -алгебр $F_1 \times F_2$. Отметим, что однозначная функция $f : T \rightarrow X$ – F -измерима, если многозначная функция $\Gamma(x) := \{f(x)\}$ – (F) -измерима (эквивалентно $(F)_c$ -измерима; $(F)_b$ -измерима). Отображение $\gamma : T \rightarrow X$ называют селектором многозначного отображения $\Gamma : T \rightarrow P(X)$, если $\gamma(t) \in \Gamma(t)$ для всех $t \in T$. Для произвольного многозначного отображения $\Gamma : T \rightarrow \text{cl}(X)$ имеют место следующие импликации: Γ – $(F)_b$ -измеримо $\Rightarrow \Gamma$ – $(F)_c$ -измеримо $\Rightarrow \Gamma$ – (F) -измеримо. Если на измеримом пространстве (T, F) существует положительная мера ν такая, что пространство (T, F, ν) – полное σ -конечное, то все три понятия измеримости совпадают: Γ – $(F)_b$ -измеримо $\Leftrightarrow \Gamma$ – $(F)_c$ -измеримо $\Leftrightarrow \Gamma$ – (F) -измеримо [1].

Первая теорема о существовании измеримого селектора у многозначного измеримого отображения в конечномерном пространстве была доказана А. Ф. Филипповым в работе [2]. К. Куратовским и С. Рыль-Нардзевским получено обобщение этой теоремы на сепарабельные банаховы пространства [3]. Ш. Кастэн усилил эти результаты и показал [4, 5], что если $\Gamma : T \rightarrow \text{cl}(X)$ – многозначное отображение, то следующие три утверждения эквивалентны: 1) Γ – (F) -измеримо; 2) функция $t \rightarrow \rho(x, \Gamma(t))$ (F) -измерима для каждого $x \in X$; 3) существует последовательность (F) -измеримых селекторов $\sigma_n(\cdot)$ для Γ такая, что $\Gamma(t) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma_n(t)$, $t \in T$.

Пусть T – либо R_+ , либо отрезок $[0, a] \subseteq R_+$, $\beta(T)$ – борелевская σ -алгебра на T , (Ω, F) – измеримое пространство с потоком под- σ -алгебр F_t , $t \geq 0$.

Многозначное отображение $\Gamma : T \times \Omega \rightarrow S(X)$ называем $(\beta(T), F)$ -измеримым ($(\beta(T), F)_c$ -измеримым; $(\beta(T), F)_b$ -измеримым), если $\{(t, \omega) : \Gamma(t, \omega) \cap B \neq \emptyset\} \in \beta(T) \times F$ для любого открытого $B \subseteq X$ (для любого замкнутого $B \subseteq X$, для любого борелевского $B \subseteq X$), если, кроме того, для каждого $\bar{t} \in T$ многозначное отображение $\omega \rightarrow \Gamma(\bar{t}, \omega)$ является $(F_{\bar{t}})$ -измеримым ($(F_{\bar{t}})_c$ -измеримым), то говорим, что многозначное отображение (F_t) -согласовано ($(F_t)_c$ -согласовано). Для произвольного многозначного отображения $\Gamma : T \times \Omega \rightarrow \text{cl}(X)$ имеют место следующие импликации: Γ – $(\beta(T), F)_b$ -измеримо $\Rightarrow \Gamma$ – $(\beta(T), F)_c$ -измеримо $\Rightarrow \Gamma$ – $(\beta(T), F)$ -измеримо.

В статье рассматривается задача существования $(\beta(T), F)$ -измеримых согласованных с потоком (F_t) селекторов со специальными свойствами у $(\beta(T), F)$ -измеримых и (F_t) -согласованных многозначных отображений. Существование указанных селекторов не вытекает из известных теорем теории многозначных отображений [5–11], но именно такие селекторы используются при построении теории стохастических дифференциальных включений [12–13].

Скажем, что многозначное отображение $\Gamma : T \times \Omega \rightarrow S(X)$ имеет $(\beta(T), F)$ -измеримое и (F_t) -согласованное аппроксимирующее семейство [6, с. 338], если существует последовательность $(\beta(T), F)$ -измеримых и (F_t) -согласованных отображений $x_i : T \times \Omega \rightarrow X$ такая, что для каждого $i \in N$ множество $\{(t, \omega) \in T \times \Omega : x_i(t, \omega) \in \Gamma(t, \omega)\}$ – $(\beta(T), F)$ -измеримо, а для каждого i для всех $\bar{t} \in T$ множество $\{\omega \in \Omega : x_i(\bar{t}, \omega) \in \Gamma(\bar{t}, \omega)\}$ – $(F_{\bar{t}})$ -измеримо и, кроме того, при всех (t, ω) выполняется включение $\Gamma(t, \omega) \subset \Gamma(t, \omega) \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} x_i(t, \omega))$. Далее, $(\beta(T), F)$ -измеримое и (F_t) -согласованное

отображение $\gamma : T \times \Omega \rightarrow X$ называем $(\beta(T), F)$ -измеримым и (F_t) -согласованным селектором многозначного отображения $\Gamma : T \times \Omega \rightarrow P(X)$, если $\gamma(t, \omega) \in \Gamma(t, \omega)$ для всех $(t, \omega) \in T \times \Omega$.

Докажем для $(\beta(T), F)$ -измеримых и (F_t) -согласованных многозначных отображений $\Gamma : T \times \Omega \rightarrow \text{cl}(X)$ утверждение, аналогичное указанному выше результату Ш. Кастэна. При доказательстве мы во многом следуем гл. 8 монографии [6], где исследуются многозначные отображения в конечномерных пространствах, и статье [1].

Лемма 1. Пусть $\Gamma : T \times \Omega \rightarrow P(X)$ – многозначное отображение такое, что множество $\Gamma(t, \omega)$ открыто для каждой (t, ω) , и пусть $D = \{x_i\}$ – счетное плотное подмножество X . Если для любого i множество $\{(t, \omega) \in T \times \Omega : x_i \in \Gamma(t, \omega)\}$ является $(\beta(T), F)$ -измеримым и для каждой $i \in N$, $\bar{t} \in T$ множество $\{\omega \in \Omega : x_i \in \Gamma(\bar{t}, \omega)\}$ – $(F_{\bar{t}})$ -измеримо, то $\{x_i(t, \omega)\}$, $i \in N$, $x_i(t, \omega) = x_i \forall (t, \omega) \in T \times \Omega$ является $(\beta(T), F)$ -измеримым и (F_t) -согласованным аппроксимирующим семейством для Γ .

Действительно, так как множества $\Gamma(t, \omega)$ открыты, то пересечения $D \cap \Gamma(t, \omega)$ плотны в $\Gamma(t, \omega)$ и $\{x_i, i \in N\}$ – $(\beta(T), F)$ -измеримое (F_t) -согласованное аппроксимирующее семейство для Γ . Лемма установлена.

Будем говорить, что отображение $f: T \times \Omega \times X \rightarrow Y$ является (F_t) -согласованным отображением Каратеодори, если оно непрерывно по x при всех фиксированных $(t, \omega) \in T \times \Omega$, $(\beta(T), F)$ -измеримо при каждом фиксированном $x \in X$ и (F_t) -измеримо при каждом фиксированном $(t, x) \in T \times X$.

Лемма 2. Пусть $f: T \times \Omega \times X \rightarrow Y$ является (F_t) -согласованным отображением Каратеодори, $U \subset Y$ – открытое множество. Тогда отображение $\Gamma: T \times \Omega \rightarrow S(X)$, $\Gamma(t, \omega) = \{x \in X: f(t, \omega, x) \in U\}$ – $(\beta(T), F)_c$ -измеримо и $(F_t)_c$ -согласовано.

Доказательство. Пусть $B \subset X$ – замкнутое множество, $A = \{x_i, i \in N\}$ – счетное плотное подмножество в B . Отображение Γ обладает следующим свойством: $\Gamma^{-1}(B) = \{(t, \omega) \in T \times \Omega: \Gamma(t, \omega) \cap B \neq \emptyset\} = \{(t, \omega) \in T \times \Omega: f(t, \omega, x) \in U \text{ для некоторой точки } x \in B\} = \{(t, \omega) \in T \times \Omega: f(t, \omega, x_i) \in U \text{ для некоторой точки } x_i \in A\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{(t, \omega) \in T \times \Omega: f(t, \omega, x_i) \in U\}$. Отсюда следует $(\beta(T), F)_c$ -измеримость отображения Γ , а его $(F_t)_c$ -согласованность доказывается аналогичным образом.

Лемма 3. Многозначное отображение $\Gamma: T \times \Omega \rightarrow P(X)$ является $(\beta(T), F)$ -измеримым и (F_t) -согласованным тогда и только тогда, когда для любого $x \in X$ функция $(t, \omega) \rightarrow \rho(x, \Gamma(t, \omega)) - (\beta(T), F)$ -измерима и (F_t) -согласована.

Доказательство. Многозначное отображение $\Gamma: T \times \Omega \rightarrow P(X)$ является $(\beta(T), F)$ -измеримым, если и только если $\Gamma^{-1}(B(x, \varepsilon)) \in (\beta(T) \times F)$ для каждого $x \in X$ и для каждого открытого шара $B(x, \varepsilon)$. Для каждого $x \in X$ функция $(t, \omega) \rightarrow \rho(x, \Gamma(t, \omega)) - (\beta(T), F)$ -измерима, если и только если $\{(t, \omega): \rho(x, \Gamma(t, \omega)) < \varepsilon\} \in (\beta(T) \times F)$ для каждого $\varepsilon > 0$. Так как $\Gamma^{-1}(B(x, \varepsilon)) = \{(t, \omega): \Gamma(t, \omega) \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset\} = \{(t, \omega): \rho(x, \Gamma(t, \omega)) < \varepsilon\}$, то утверждение о том, что отображение Γ является $(\beta(T), F)$ -измеримым тогда и только тогда, когда функция $(t, \omega) \rightarrow \rho(x, \Gamma(t, \omega)) - (\beta(T), F)$ -измерима для любого $x \in X$, доказано. Остальная часть леммы доказывается аналогичным образом.

Лемма 4. Для любой $(\beta(T), F)$ -измеримой и (F_t) -согласованной функции $y: T \times \Omega \rightarrow X$ существует последовательность $(\beta(T), F)$ -измеримых и (F_t) -согласованных функций $y_n(t, \omega)$, принимающих не более счетного множества различных значений, сходящаяся к функции $y(t, \omega)$ при каждом (t, ω) .

Доказательство. Пусть a_1, a_2, \dots – последовательность, плотная в X . Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и образуем последовательность множеств $C_{k, \varepsilon} = B(a_k, \varepsilon) \cap \complement B(a_1, \varepsilon) \cap \complement B(a_2, \varepsilon) \dots \cap \complement B(a_{k-1}, \varepsilon)$ ($\complement B$ – дополнение множества B). Множества $C_{k, \varepsilon}$ не пересекаются и являются борелевскими. Множества $D_{k, \varepsilon} = y^{-1}(C_{k, \varepsilon})$ не пересекаются и их объединение равно $T \times \Omega$. Пусть $y_n(t, \omega) -$ функция, равная a_k на множестве $D_{k, \frac{1}{n}}$. По построению $\rho(y(t, \omega), y_n(t, \omega)) \leq \frac{1}{n}$, поэтому $y_n(t, \omega) \rightarrow y(t, \omega)$ при каждом (t, ω) . Множества $D_{k, \frac{1}{n}}$ являются $(\beta(T), F)$ -измеримыми, следовательно, функции $y_n(t, \omega) - (\beta(T), F)$ -измеримы. При каждом $\bar{t} \in T$ множество $y^{-1}\left(\bar{t}, C_{k, \frac{1}{n}}\right) - (F_{\bar{t}})$ -измеримо, и поэтому множество $\{\omega: y_n(\bar{t}, \omega) = a_k\} = y^{-1}\left(\bar{t}, C_{k, \frac{1}{n}}\right)$ также $(F_{\bar{t}})$ -измеримо.

Лемма 5. Пусть отображение $f: T \times \Omega \times X \rightarrow Y$ является (F_t) -согласованным отображением Каратеодори, функция $y: T \times \Omega \rightarrow X$ является $(\beta(T), F)$ -измеримой и (F_t) -согласованной. Тогда многозначное отображение $(t, \omega) \rightarrow f(t, \omega, y(t, \omega))$ также $(\beta(T), F)$ -измеримо и (F_t) -согласовано.

Доказательство. Возьмем последовательность $(\beta(T), F)$ -измеримых (F_ρ) -согласованных функций $y_n(t, \omega)$, каждая из которых принимает не более счетного множества различных значений $\{a_k^n\}$, сходящуюся к функции $y(t, \omega)$ при каждом (t, ω) (лемма 4). Для каждого открытого множества $U \subset Y$, согласно лемме 2, многозначное отображение $\Gamma(t, \omega) = \{x \in X : f(t, \omega, x) \in U\}$ – $(\beta(T), F)_c$ -измеримо и $(F_\rho)_c$ -согласовано. Множество $D_n = \{(t, \omega) \in T \times \Omega : f(t, \omega, y_n(t, \omega)) \in U\}$ можно представить в виде $\bigcup_{k=1}^{\infty} \{(t, \omega) : y_n(t, \omega) = a_k^n, a_k^n \in \Gamma(t, \omega)\}$. Следовательно, множества D_n являются $(\beta(T), F)$ -измеримыми. Аналогично множества $\{\omega : f(\bar{t}, \omega, y_n(\bar{t}, \omega)) \in U\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{\bar{t}, \omega : y_n(\bar{t}, \omega) = a_k^n, a_k^n \in \Gamma(\bar{t}, \omega)\}$ – $(F_{\bar{t}})$ -измеримы для каждого $\bar{t} \in T$ и $n \in N$. Отсюда вытекает $(\beta(T), F)$ -измеримость и (F_ρ) -согласованность отображения $(t, \omega) \rightarrow f(t, \omega, y_n(t, \omega))$ для каждого n . По лемме 3 при каждом $x \in X$ функция $(t, \omega) \rightarrow \rho(x, f(t, \omega, y_n(t, \omega)))$ – $(\beta(T), F)$ -измерима и (F_ρ) -согласована. Так как функция $f(t, \omega, y)$ непрерывна по y , то при каждом $(t, \omega) \in T \times \Omega, x \in X$, имеем $\rho(x, f(t, \omega, y_n(t, \omega))) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \rho(x, f(t, \omega, y(t, \omega)))$, поэтому отображение $(t, \omega) \rightarrow \rho(x, f(t, \omega, y(t, \omega)))$ – $(\beta(T), F)$ -измеримо и (F_ρ) -согласовано. Но тогда по лемме 3 и отображение $f(t, \omega, y(t, \omega))$ является $(\beta(T), F)$ -измеримым (F_ρ) -согласованным. Лемма 5 установлена.

Замечание 1. Если отображение $f : T \times \Omega \times X \rightarrow Y$ в лемме 5 не является непрерывным по x при каждом фиксированных (t, ω) , а лишь полунепрерывно сверху или снизу, то, как показывают примеры, приведенные в [11, с. 77–78], лемма 5 не имеет места.

Через $\text{dom}\Gamma := \{(t, \omega) \in T \times \Omega : \Gamma(t, \omega) \neq \emptyset\}$, $\text{dom}\Gamma_{\bar{t}} := \{\omega \in \Omega : \Gamma(\bar{t}, \omega) \neq \emptyset\}$ обозначим соответственно эффективные множества отображений $\Gamma : T \times \Omega \rightarrow S(X), \omega \rightarrow \Gamma(\bar{t}, \omega)$.

Лемма 6. Если $\Gamma : T \times \Omega \rightarrow S(X)$ имеет $(\beta(T), F)$ -измеримое и (F_ρ) -согласованное аппроксимирующее семейство $\{x_m(t, \omega), m \in N\}$, то множество $\text{dom}\Gamma$ является $(\beta(T), F)$ -измеримым, а множество $\text{dom}\Gamma_{\bar{t}} - (F_{\bar{t}})$ -измеримым при каждом $\bar{t} \in T$.

Действительно, $\text{dom}\Gamma = \bigcup_{m=1}^{\infty} \{(t, \omega) \in T \times \Omega : x_m(t, \omega) \in \Gamma(t, \omega)\}$, $\text{dom}\Gamma_{\bar{t}} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \{\omega \in \Omega : x_m(\bar{t}, \omega) \in \Gamma(\bar{t}, \omega)\}$.

Лемма 7. Пусть отображения $\Gamma_1 : T \times \Omega \rightarrow P(X), \Gamma_2 : T \times \Omega \rightarrow P(X)$ такие, что множества $\Gamma_2(t, \omega)$ открыты, а отображение Γ_1 имеет $(\beta(T), F)$ -измеримое и (F_ρ) -согласованное аппроксимирующее семейство, причем для каждой $(\beta(T), F)$ -измеримой и (F_ρ) -согласованной функции $y : T \times \Omega \rightarrow X$ множество $\{(t, \omega) \in T \times \Omega : y(t, \omega) \in \Gamma_2(t, \omega)\}$ – $(\beta(T), F)$ -измеримо, а множество $\{\omega \in \Omega : y(\bar{t}, \omega) \in \Gamma_2(\bar{t}, \omega)\}$ – $(F_{\bar{t}})$ -измеримо при каждом $\bar{t} \in T$. Тогда отображение $(t, \omega) \rightarrow \Gamma_1(t, \omega) \cap \Gamma_2(t, \omega)$ имеет $(\beta(T), F)$ -измеримое и (F_ρ) -согласованное аппроксимирующее семейство.

Действительно, пусть $\{\sigma_n(t, \omega), n \in N\}$ – последовательность $(\beta(T), F)$ -измеримых (F_ρ) -согласованных отображений, аппроксимирующее Γ_1 . Покажем, что семейство $\{\sigma_n(t, \omega), n \in N\}$ является аппроксимирующим и для $\Gamma_1(t, \omega) \cap \Gamma_2(t, \omega)$. Во-первых, множества

$$\{(t, \omega) \in T \times \Omega : \sigma_n(t, \omega) \in \Gamma_1(t, \omega) \cap \Gamma_2(t, \omega)\} = \{(t, \omega) \in T \times \Omega : \sigma_n(t, \omega) \in \Gamma_1(t, \omega)\} \cap \{(t, \omega) \in T \times \Omega : \sigma_n(t, \omega) \in \Gamma_2(t, \omega)\}$$

– $(\beta(T), F)$ -измеримы, а множества

$$\{\omega \in \Omega : \sigma_n(\bar{t}, \omega) \in \Gamma_1(\bar{t}, \omega) \cap \Gamma_2(\bar{t}, \omega)\} = \{\omega \in \Omega : \sigma_n(\bar{t}, \omega) \in \Gamma_1(\bar{t}, \omega)\} \cap \{\omega \in \Omega : \sigma_n(\bar{t}, \omega) \in \Gamma_2(\bar{t}, \omega)\}$$

– $(F_{\bar{t}})$ -измеримы при каждом $\bar{t} \in T$. Во-вторых, так как множества $\Gamma_2(t, \omega)$ открыты, то пересечения $\Gamma_2(t, \omega) \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma_n(t, \omega) \right)$ плотны в $\Gamma_1(t, \omega) \cap \Gamma_2(t, \omega)$.

Лемма 8. Если многозначное отображение $\Gamma : T \times \Omega \rightarrow \text{cl}(X)$ имеет аппроксимирующее $(\beta(T), F)$ -измеримое и (F) -согласованное семейство, а функция $x : T \times \Omega \rightarrow X$ является $(\beta(T), F)$ -измеримой и (F) -согласованной, то множество $\{(t, \omega) \in T \times \Omega : x(t, \omega) \in \Gamma(t, \omega)\}$ является $(\beta(T), F)$ -измеримым, а множество $\{\omega \in \Omega : x(\bar{t}, \omega) \in \Gamma(\bar{t}, \omega)\}$ – $(F_{\bar{t}})$ -измеримым для всех $\bar{t} \in T$.

Действительно, отображения $\Gamma(t, \omega)$ и $F_n(t, \omega) = \left\{ x \in X : \rho(x, x(t, \omega)) < \frac{1}{n} \right\}$ удовлетворяют условиям леммы 7. Надо лишь проверить, что для любой $(\beta(T), F)$ -измеримой (F) -согласованной функции $y : T \times \Omega \rightarrow X$ множество $A = \{(t, \omega) \in T \times \Omega : y(t, \omega) \in F_n(t, \omega)\}$ – $(\beta(T), F)$ -измеримо, а множество $A_{\bar{t}} = \{\omega \in \Omega : y(\bar{t}, \omega) \in F_n(\bar{t}, \omega)\}$ – $(F_{\bar{t}})$ -измеримо. Но множество A совпадает с $\left\{ (t, \omega) : \rho(x(t, \omega), y(t, \omega)) < \frac{1}{n} \right\}$ и оно $(\beta(T), F)$ -измеримо, если функция $(t, \omega) \rightarrow \rho(y(t, \omega), x(t, \omega))$ – $(\beta(T), F)$ -измерима. Измеримость последней функции следует из леммы 5 (если положить $f(t, \omega, z) = \rho(x(t, \omega), z)$). Аналогично устанавливается $(F_{\bar{t}})$ -измеримость множества $A_{\bar{t}}$. По лемме 7 отображение $(t, \omega) \rightarrow \Gamma(t, \omega) \cap F_n(t, \omega)$ имеет аппроксимирующее $(\beta(T), F)$ -измеримое (F) -согласованное семейство. Но тогда в силу леммы 6 множества $\text{dom}(\Gamma \cap F_n)$ – $(\beta(T), F)$ -измеримы, а множества $\text{dom}(\Gamma \cap F_n)_{\bar{t}}$ – $(F_{\bar{t}})$ -измеримы. Так как $\Gamma(t, \omega)$ замкнуты, то множество $\{(t, \omega) \in T \times \Omega : x(t, \omega) \in \Gamma(t, \omega)\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \text{dom}(\Gamma \cap F_n)$ – $(\beta(T), F)$ -измеримо. Аналогично устанавливается, что множество $\{\omega \in \Omega : x(\bar{t}, \omega) \in \Gamma(\bar{t}, \omega)\}$ – $(F_{\bar{t}})$ -измеримо при каждом $\bar{t} \in T$.

Лемма 9. Если многозначное отображение $\Gamma : T \times \Omega \rightarrow P(X)$ имеет аппроксимирующее $(\beta(T), F)$ -измеримое и (F) -согласованное семейство, то существует семейство $(\beta(T), F)$ -измеримых и (F) -согласованных селекторов, аппроксимирующее Γ .

Доказательство. Пусть $\{y_i(t, \omega), i \in N\}$ – $(\beta(T), F)$ -измеримая и (F) -согласованная аппроксимирующая последовательность для Γ . Положим $T_i = \{(t, \omega) \in T \times \Omega : y_i(t, \omega) \in \Gamma(t, \omega)\}$, $i = 1, 2, \dots$. Множества T_i – $(\beta(T), F)$ -измеримы при каждом i , а множества $\{\omega \in \Omega : y_i(\bar{t}, \omega) \in \Gamma(\bar{t}, \omega)\}$ – $(F_{\bar{t}})$ -измеримы при всех i и $\bar{t} \in T$. Построим последовательность

$$x_m(t, \omega) = \begin{cases} y_1(t, \omega), (t, \omega) \in T_1, \\ y_2(t, \omega), (t, \omega) \in T_2 \setminus T_1, \\ \dots \dots \dots \\ y_k(t, \omega), (t, \omega) \in T_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} T_i, \\ \dots \dots \dots \end{cases} \quad x_m(t, \omega) = \begin{cases} x_{m-1}(t, \omega), (t, \omega) \notin \bigcup_{i=m}^{\infty} T_i, \\ y_m(t, \omega), (t, \omega) \in T_m, \\ y_{m+1}(t, \omega), (t, \omega) \in T_{m+1} \setminus T_m, \\ \dots \dots \dots \\ y_{m+k}(t, \omega), (t, \omega) \in T_{m+k} \setminus \bigcup_{i=0}^{k-1} T_{m+i}, \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

Последовательность $x_m(t, \omega)$ искомая.

Лемма 10. Для того чтобы многозначное отображение $\Gamma : T \times \Omega \rightarrow P(X)$ имело аппроксимирующее $(\beta(T), F)$ -измеримое и (F) -согласованное семейство, необходимо, а в случае $\Gamma(t, \omega) \in \text{cl}(X)$

$\forall (t, \omega) \in T \times \Omega$ и достаточно, чтобы для каждого $x \in X$ функция $(t, \omega) \rightarrow \rho(x, \Gamma(t, \omega))$ была $(\beta(T), F)$ -измеримой и (F) -согласованной.

Доказательство. Так как

$$\rho(x, \Gamma(t, \omega)) = \inf_{1 \leq m < \infty} \rho(x, x_m(t, \omega)),$$

где $\{x_m(t, \omega), m \in N\}$ – аппроксимирующая $(\beta(T), F)$ -измеримая (F) -согласованная последовательность селекторов отображения Γ , то $(t, \omega) \rightarrow \rho(x, \Gamma(t, \omega))$ – $(\beta(T), F)$ -измеримая (F) -согласованная функция.

Предположим теперь, что $(t, \omega) \rightarrow \rho(x, \Gamma(t, \omega))$ – $(\beta(T), F)$ -измеримая (F) -согласованная функция при каждом $x \in X$ и $\Gamma(t, \omega) \in \text{cl}(X)$. Положим $F_m(t, \omega) = \{x \in X : \rho(x, \Gamma(t, \omega)) < 2^{-m}\}$. Множества $F_m(t, \omega)$ открыты, и из условия леммы 10 следует, что для каждого $y \in X$ множество $\{(t, \omega) : y \in F_m(t, \omega)\} = \{(t, \omega) : \rho(y, \Gamma(t, \omega)) < 2^{-m}\}$ – $(\beta(T), F)$ -измеримо и для каждого $\bar{t} \in T$ множество $\{\omega \in \Omega : y \in \Gamma(\bar{t}, \omega)\}$ – $(F_{\bar{t}})$ -измеримо. Согласно лемме 1 отображение $(t, \omega) \rightarrow F_m(t, \omega)$ имеет $(\beta(T), F)$ -измеримое (F) -согласованное аппроксимирующее семейство. В силу леммы 9 при каждом m можно выбрать последовательность $\{x_{mi}(t, \omega), i \in N\}$ (F) -согласованных селекторов, аппроксимирующих F_m . Для каждой пары номеров m, i построим индуктивно следующую последовательность отображений: $x_{mi0}(t, \omega) = x_{mi}(t, \omega)$; если уже построена $(\beta(T), F)$ -измеримая (F) -согласованная функция $x_{mil}(t, \omega)$ такая, что $x_{mil}(t, \omega) \in F_{m+l}(t, \omega)$, то в качестве $x_{mi(l+1)}(t, \omega)$ возьмем произвольную $(\beta(T), F)$ -измеримую (F) -согласованную функцию, удовлетворяющую условиям $x_{mi(l+1)}(t, \omega) \in F_{m+l+1}(t, \omega)$, $\rho(x_{mil}(t, \omega), x_{mi(l+1)}(t, \omega)) < 2^{-(m+l)}$. Такая функция существует, поскольку множество $\Phi_{mi(l+1)}(t, \omega) = \{x : x \in F_{m+l+1}(t, \omega), \rho(x, x_{mil}(t, \omega)) < 2^{-(m+l)}\}$ непусто при всех (t, ω) и многозначное отображение $(t, \omega) \rightarrow \Phi_{mi(l+1)}(t, \omega)$ имеет $(\beta(T), F)$ -измеримую (F) -согласованную аппроксимирующую последовательность селекторов (леммы 7, 9). Последовательность $x_{mil}(t, \omega)$, $l \geq 1$, при каждом фиксированном (t, ω) является фундаментальной в X , следовательно, она сходится к некоторой $(\beta(T), F)$ -измеримой (F) -согласованной функции $u_{mi}(t, \omega)$ такой, что $\rho(x_{mi}(t, \omega), u_{mi}(t, \omega)) < 2^{-(m-1)}$ и, кроме того, $u_{mi}(t, \omega) \in \Gamma(t, \omega) \quad \forall (t, \omega) \in T \times \Omega$. Осталось проверить, что семейство $u_{mi}(t, \omega)$, $m, i = 1, 2, \dots$, аппроксимирует отображение $\Gamma(t, \omega)$. Это вытекает из следующего факта: если $A \subset X$ – замкнутое множество, множество u_{mi} , $i = 1, 2, \dots$, плотно в некоторой окрестности множества A при каждом натуральном m , $z_{mi} \in A$ и $\rho(y_{mi}, z_{mi}) < 2^{-(m-1)}$, то множество $\{z_{mi} : m, i = 1, 2, \dots\}$ плотно в A . Таким образом, семейство $\{u_{mi}(t, \omega) : m, i = 1, 2, \dots\}$ удовлетворяет условиям леммы 10.

Из лемм 3, 9, 10 сразу вытекает следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть $\Gamma : T \times \Omega \rightarrow \text{cl}(X)$ – многозначное отображение. Следующие утверждения эквивалентны: 1) отображение Γ является $(\beta(T), F)$ -измеримым и (F) -согласованным; 2) для каждого $x \in X$ функция $(t, \omega) \rightarrow \rho(x, \Gamma(t, \omega))$ – $(\beta(T), F)$ -измерима и (F) -согласована; 3) существует $(\beta(T), F)$ -измеримое и (F) -согласованное семейство селекторов, аппроксимирующее отображение Γ .

Теорема 2. Пусть отображения $\Gamma : T \times \Omega \rightarrow \text{cl}(X)$ и $x : T \times \Omega \rightarrow X$ являются $(\beta(T), F)$ -измеримыми и (F) -согласованными. Тогда для любого $(\beta(T), F)$ -измеримого и (F) -согласованного отображения $\delta : T \times \Omega \rightarrow R$ такого, что $\delta(t, \omega) > 0$ при всех $(t, \omega) \in T \times \Omega$, существует $(\beta(T), F)$ -измеримый и (F) -согласованный селектор $y : T \times \Omega \rightarrow X$ отображения Γ , удовлетворяющий для всех $(t, \omega) \in T \times \Omega$ неравенству

$$\rho(x(t, \omega), y(t, \omega)) \leq \rho(x(t, \omega), \Gamma(t, \omega)) + \delta(t, \omega). \quad (1)$$

Доказательство. В силу леммы 3 функция $(t, \omega, x) \rightarrow \rho(x, \Gamma(t, \omega))$ является (F_t) -согласованным отображением Каратеодори. По лемме 5 функция $(t, \omega) \rightarrow r(t, \omega) = \rho(x(t, \omega), \Gamma(t, \omega)) - (\beta(T), F)$ -измерима (F_t) -согласована. Определим отображения

$$\begin{aligned} (t, \omega) \rightarrow \Phi(t, \omega) &= \{x \in X : x \in \Gamma(t, \omega), \rho(x, x(t, \omega)) < \delta(t, \omega) + r(t, \omega)\}, \\ (t, \omega) \rightarrow \Psi(t, \omega) &= \{x \in X : \rho(x, x(t, \omega)) < \delta(t, \omega) + r(t, \omega)\}. \end{aligned}$$

При каждом (t, ω) множество $\Phi(t, \omega)$ непусто. Покажем, что отображения $\Gamma(t, \omega)$ и $\Psi(t, \omega)$ удовлетворяют условиям леммы 7. Множества $\Psi(t, \omega)$ открыты. По теореме 1 отображение $\Gamma(t, \omega)$ имеет $(\beta(T), F)$ -измеримое (F_t) -согласованное аппроксимирующее семейство. Так как для любой $(\beta(T), F)$ -измеримой (F_t) -согласованной функции $z : T \times \Omega \rightarrow X$ отображения $(t, \omega) \rightarrow r(t, \omega)$, $(t, \omega) \rightarrow \rho(x(t, \omega), z(t, \omega)) - (\beta(T), F)$ -измеримы (F_t) -согласованы, то множество $\{(t, \omega) : z(t, \omega) \in \Psi(t, \omega)\} = \{(t, \omega) : \rho(x(t, \omega), z(t, \omega)) < \delta(t, \omega) + r(t, \omega)\} - (\beta(T), F)$ -измеримо, а множество $\{\omega : z(\bar{t}, \omega) \in \Psi(\bar{t}, \omega)\} = \{\omega : \rho(x(\bar{t}, \omega), z(\bar{t}, \omega)) < \delta(\bar{t}, \omega) + r(\bar{t}, \omega)\} - (F_{\bar{t}})$ -измеримо. По лемме 7 отображение $\Phi(t, \omega) = \Gamma(t, \omega) \cap \Psi(t, \omega)$ имеет $(\beta(T), F)$ -измеримое (F_t) -согласованное аппроксимирующее семейство. В силу леммы 9 отображение $(t, \omega) \rightarrow \Phi(t, \omega)$ имеет $(\beta(T), F)$ -измеримое (F_t) -согласованное аппроксимирующее семейство селекторов. Любой такой селектор удовлетворяет неравенству (1).

З а м е ч а н и е 2. Как показывает следующий пример, теорема 2 с отображением $\delta : T \times \Omega \rightarrow R$, принимающим значение 0 при некоторых $(t, \omega) \in T \times \Omega$, в общем случае неверна. Пусть $X = l_\infty$, $T = [0, 1]$, $A = \{(1+1, 0, 0, \dots), (0, 1+1/2, 0, \dots), \dots, (0, \dots, 0, 1+1/n, 0, \dots), \dots\}$, $x(t, \omega) = 0$, $\Gamma(t, \omega) = A \forall (t, \omega)$. Так как $\rho(x(t, \omega), \Gamma(t, \omega)) = 1$, а множество $\{x : x \in \Gamma(t, \omega), \rho(x, x(t, \omega)) = 1\}$ пусто, то у рассматриваемого многозначного отображения не существует селектора с требуемыми свойствами.

Для отображений $\Gamma : T \times \Omega \rightarrow \text{comp}(X)$ теорема 2 может быть усилена.

Т е о р е м а 3. Если отображения $\Gamma : T \times \Omega \rightarrow \text{comp}(X)$ и $x : T \times \Omega \rightarrow X$ являются $(\beta(T), F)$ -измеримыми и (F_t) -согласованными, то существует $(\beta(T), F)$ -измеримый и (F_t) -согласованный селектор $y : T \times \Omega \rightarrow X$ отображения Γ такой, что для всех $(t, \omega) \in T \times \Omega$ выполняется равенство

$$\rho(x(t, \omega), y(t, \omega)) = \rho(x(t, \omega), \Gamma(t, \omega)). \quad (2)$$

Доказательство. В силу леммы 3 функция $(t, x, \omega) \rightarrow \rho(x, \Gamma(t, \omega))$ является (F_t) -согласованным отображением Каратеодори. По лемме 5 функция $(t, \omega) \rightarrow r(t, \omega) = \rho(x(t, \omega), \Gamma(t, \omega)) - (\beta(T), F)$ -измерима (F_t) -согласована. Определим отображения

$$\begin{aligned} (t, \omega) \rightarrow \Phi_0(t, \omega) &= \{x \in X : x \in \Gamma(t, \omega), \rho(x, x(t, \omega)) \leq r(t, \omega)\}, \\ (t, \omega) \rightarrow \Phi_n(t, \omega) &= \{x \in X : x \in \Gamma(t, \omega), \rho(x, x(t, \omega)) < \frac{1}{n} + r(t, \omega)\}, \\ (t, \omega) \rightarrow \Psi_n(t, \omega) &= \{x \in X : \rho(x, x(t, \omega)) < \frac{1}{n} + r(t, \omega)\}. \end{aligned}$$

При каждом (t, ω) множество $\Phi_0(t, \omega)$ непусто. Покажем, что отображения $\Gamma(t, \omega)$ и $\Psi_n(t, \omega)$ удовлетворяют условиям леммы 7. Множества $\Psi_n(t, \omega)$ открыты. По теореме 1 отображение $\Gamma(t, \omega)$ имеет $(\beta(T), F)$ -измеримое (F_t) -согласованное аппроксимирующее семейство. Так как для любой $(\beta(T), F)$ -измеримой (F_t) -согласованной функции $z : T \times \Omega \rightarrow X$ отображения $(t, \omega) \rightarrow r(t, \omega)$,

$(t, \omega) \rightarrow \rho(x(t, \omega), z(t, \omega))$ – $(\beta(T), F)$ -измеримы (F_ρ) -согласованы, то множество $\{(t, \omega) : z(t, \omega) \in \Psi_n(t, \omega)\} = \{(t, \omega) : \rho(x(t, \omega), z(t, \omega)) < \frac{1}{n} + r(t, \omega)\}$ – $(\beta(T), F)$ -измеримо, а множество $\{\omega : z(\bar{t}, \omega) \in \Psi_n(\bar{t}, \omega)\} = \{\omega : \rho(x(\bar{t}, \omega), z(\bar{t}, \omega)) < \frac{1}{n} + r(\bar{t}, \omega)\}$ – $(F_{\bar{t}})$ -измеримо. По лемме 7 отображение $\Phi_n(t, \omega) = \Gamma(t, \omega) \cap \Psi_n(t, \omega)$ имеет $(\beta(T), F)$ -измеримое (F_ρ) -согласованное аппроксимирующее семейство. В силу леммы 10 при каждом $y \in X$ функция $(t, \omega) \rightarrow \rho(y, \Phi_n(t, \omega))$ – $(\beta(T), F)$ -измерима (F_ρ) -согласована. Так как при каждом фиксированном (t, y, ω) выполняется $\rho(y, \Phi_n(t, \omega)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \rho(y, \Phi_0(t, \omega))$, то при каждом $y \in X$ функция $(t, \omega) \rightarrow \rho(y, \Phi_0(t, \omega))$ – $(\beta(T), F)$ -измерима (F_ρ) -согласована. В силу лемм 9, 10 отображение $(t, \omega) \rightarrow \Phi_0(t, \omega)$ имеет $(\beta(T), F)$ -измеримое (F_ρ) -согласованное аппроксимирующее семейство селекторов. Любой такой селектор удовлетворяет равенству (2).

Аналогично теореме 3 доказывается следующий аналог теоремы Филиппова о неявной функции.

Теорема 4. Пусть отображение $f : T \times \Omega \times X \rightarrow Y$ является (F) -согласованным отображением Каратеодори, отображения $\Gamma : T \times \Omega \rightarrow \text{comp}(X)$ и $x : T \times \Omega \rightarrow X$ – $(\beta(T), F)$ -измеримы и (F) -согласованы, а $x(t, \omega) \in f(t, \omega, \Gamma(t, \omega))$ для всех (t, ω) . Тогда существует $(\beta(T), F)$ -измеримый и (F_ρ) -согласованный селектор $y : T \times \Omega \rightarrow X$ отображения Γ такой, что для всех $(t, \omega) \in T \times \Omega$ выполнено равенство $x(t, \omega) = f(t, \omega, y(t, \omega))$.

Доказательство. Определим отображения

$$(t, \omega) \rightarrow H(t, \omega) = \{x \in X : x \in \Gamma(t, \omega), \rho(f(t, \omega, x), x(t, \omega)) = 0\},$$

$$(t, \omega) \rightarrow P_n(t, \omega) = \{x \in X : \rho(f(t, \omega, x), x(t, \omega)) < \frac{1}{n}\}.$$

При каждом (t, ω) множество $H(t, \omega)$ непусто. Так же, как и при доказательстве теоремы 3, можно проверить, что отображения $\Gamma(t, \omega)$ и $P_n(t, \omega)$ удовлетворяют условиям леммы 7. По лемме 7 отображение $Q_n(t, \omega) = \Gamma(t, \omega) \cap P_n(t, \omega)$ имеет $(\beta(T), F)$ -измеримое (F_ρ) -согласованное аппроксимирующее семейство. В силу леммы 10 при каждом $y \in X$ функция $(t, \omega) \rightarrow \rho(y, Q_n(t, \omega))$ – $(\beta(T), F)$ -измерима (F_ρ) -согласована. Так как при каждом фиксированном (t, y, ω) выполняется $\rho(y, Q_n(t, \omega)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \rho(y, H(t, \omega))$, то при каждом $y \in X$ функция $(t, \omega) \rightarrow \rho(y, H(t, \omega))$ – $(\beta(T), F)$ -измерима (F_ρ) -согласована. В силу лемм 9, 10 отображение $(t, \omega) \rightarrow H(t, \omega)$ имеет $(\beta(T), F)$ -измеримое (F_ρ) -согласованное аппроксимирующее семейство селекторов. Любой такой селектор является селектором с требуемыми в теореме свойствами.

Список использованных источников

1. Himmelberg, C. H. Measurable Relations / C. H. Himmelberg // Fundamenta Mathematicae. – 1975. – Vol. 87, № 1. – P. 53–72.
2. Филиппов, А. Ф. О некоторых вопросах теории оптимального регулирования / А. Ф. Филиппов // Вестн. МГУ. Сер. Математика и механика. – 1959. – № 2. – С. 25–32.
3. Kuratowski, K. A general theorem on selectors / K. Kuratowski, C. Ryll-Nardzewski // Bull. Pol. Acad. Sci. – 1965. – Vol. 13. – P. 397–403.
4. Castaing, C. Sur les multi-applications mesurables / C. Castaing // Rev. Franc. Inform. Recherche Operationnelle. – 1967. – Vol. 1, № 1. – P. 91–126.
5. Castaing, C. Convex analysis and measurable multifunctions / C. Castaing, M. Valadier. – Berlin: Springer Verlag, 1977. – 286 p. – (Lect Notes in Math).
6. Иоффе, А. Д. Теория экстремальных задач / А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров. – М.: Наука, 1974. – 480 с.

7. Толстоногов, А. А. Дифференциальные включения в банаховом пространстве / А. А. Толстоногов. – Новосибирск: Наука, 1986. – 296 с.
8. Aubin, J.-P. *Set-Valued Analysis* / J.-P. Aubin, H. Frankowska. – Boston: Birkhauser, 2009. – 460 p.
9. Kisielewicz, M. *Differential Inclusions and Optimal Control* / M. Kisielewicz. – Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 1991. – 240 p.
10. Hu Sh. *Handbook of Multivalued Analysis* / Hu Sh., N. S. Papageorgiou. – Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 1997. – Vol. 1: Theory
11. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений / Ю. Г. Борисович [и др.]. – М.: Комкнига, 2005. – 214 с.
12. Леваков, А. А. Стохастические дифференциальные уравнения / А. А. Леваков. – Минск: БГУ, 2014. – 231 с.
13. Васьковский, М. М. Существование β -мартингалных решений стохастических эволюционных функциональных уравнений параболического типа с измеримыми локально ограниченными коэффициентами / М. М. Васьковский // Дифференц. уравнения. – 2012. – Т. 48, № 8. – С. 1080–1095.

References

1. Himmelberg C.H. Measurable Relations. *Fundamenta Mathematicae*, 1975, vol. 87, no.1, pp. 53–72.
2. Filippov A.F. On some issues of optimal regulation theory. *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya 1. Matematika. Mekhanika*, 1959, no. 2, pp. 25–32. (In Russian).
3. Kuratowski K., Ryll-Nardzewski C. A general theorem on selectors. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences*, 1965, vol. 13, pp. 397–403.
4. Castaing C. Sur les multi-applications mesurables. *Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle*, 1967, vol. 1, no. 1, pp. 91–126. Doi: 10.1051/m2an/1967010100911
5. Castaing C., Valadier M. *Convex analysis and measurable multifunctions*. Berlin, Springer Verlag, 1977. 286 p. Doi: 10.1007/bfb0087685
6. Ioffe A.D., Tikhomirov V.M. *Theory of extremal problems*. Moscow, Nauka Publ., 1974. 480 p. (In Russian).
7. Tolstonogov A.A. *Differential inclusions in Banach space*. Novosibirsk, Nauka Publ., 1986. 296 p. (In Russian).
8. Aubin J.-P., Frankowska H. *Set-Valued Analysis*. Boston, Birkhauser, 2009. 460 p. Doi: 10.1007/978-0-8176-4848-0
9. Kisielewicz M. *Differential Inclusions and Optimal Control*. Warszawa, PWN-Pol. sci. publ.; Dordrecht etc., Kluwer acad. publ., 1991. 240 p. (In Poland).
10. Hu Sh., Papageorgiou N.S. *Handbook of Multivalued Analysis. Vol. 1, Theory*. Dordrecht etc, Kluwer Acad. Publ, 1997.
11. Borisovich Yu.G., Gel'man B.D., Myshkis A.D., Obukhovskii V.V. *An Introduction to Multifunctions and Differential Inclusions Theory*. Moscow, Komkniga Publ., 2005. 214 p. (In Russian).
12. Levakov A.A. *Stochastic Differential Equations*. Minsk, Belarusian State University, 2014. 231 p. (In Russian).
13. Vas'kovskii M.M. Existence of β -martingale solutions of stochastic evolution functional equations of parabolic type with measurable locally bounded coefficients. *Differential Equations*, 2012, vol. 48, no. 8, pp. 1065–1080. Doi: 10.1134/s0012266112080022

Информация об авторах

Леваков Анатолий Афанасьевич – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры высшей математики, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: levakov@tut.by

Задворный Ярослав Борисович – аспирант. Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: yaraslau.zadvornyy@yandex.ru

Для цитирования

Леваков, А. А. Существование измеримых согласованных селекторов многозначных отображений / А. А. Леваков, Я. Б. Задворный // Вест. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2017. – № 1. – С. 70–78.

Information about the authors

Levakov Anatoliy Afanasyevich – D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Professor of the Department of Higher Mathematics, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: levakov@tut.by

Zadvornyy Yaraslau Barysovich – Postgraduate, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: yaraslau.zadvornyy@yandex.ru

For citation

Levakov A.A., Zadvornyy Y.B. Existence of measurable adapted selectors of set-valued functions. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series], 2017, no. 1, pp. 70–78. (In Russian).

В. Ю. Палуха

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ТЕСТЫ НА ОСНОВЕ ОЦЕНОК ЭНТРОПИИ ДЛЯ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗ О РАВНОМЕРНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ СЛУЧАЙНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Рассматривается актуальная в области защиты информации задача построения статистических тестов для проверки гипотезы о дискретном равномерном распределении («чистой случайности») выходных последовательностей криптографических генераторов. Для функционалов энтропии Шеннона, Реньи и Тсаллиса построены точечные статистические оценки на основе подстановочного принципа с использованием частотных статистик. Найдено асимптотическое распределение вероятностей полученных точечных оценок при справедливости гипотезы о «чистой случайности» в асимптотике, означающей, что количество наблюдаемых данных сравнимо с числом оцениваемых параметров. С использованием распределений вероятностей точечных оценок построены интервальные статистические оценки рассматриваемых функционалов информационной энтропии. На основе интервальных оценок разработаны решающие правила для статистической проверки гипотез о «чистой случайности» наблюдаемой дискретной последовательности. Представлены результаты компьютерных экспериментов, в которых разработанные статистические тесты применяются к выходной последовательности криптографического генератора. Выходная двоичная последовательность в этих экспериментах преобразовывалась к последовательности с алфавитом большей размерности путем объединения соседних s элементов в s -граммы.

Ключевые слова: функционалы энтропии Шеннона, Реньи и Тсаллиса, асимптотически нормальное распределение вероятностей, точечные и интервальные статистические оценки, проверка гипотез, криптографические генераторы случайных и псевдослучайных последовательностей.

U. Yu. Palukha

Belarusian State University, Minsk, Belarus

STATISTICAL TESTS BASED ON ENTROPY ESTIMATES FOR CHECKING THE HYPOTHESES OF THE UNIFORM DISTRIBUTION OF A RANDOM SEQUENCE

The actual information security problem of developing statistical tests of the hypothesis about a discrete uniform distribution ('pure randomness') of output sequences of cryptographic generators is considered. For the entropy functionals of Shannon, Renyi and Tsallis, the point statistical estimators based on the principle of 'plug-in' frequency statistics are constructed. The asymptotic probability distribution of the constructed point estimators is found when the 'pure randomness' hypothesis in asymptotics is valid, meaning that the number of observed data is comparable with the number of estimated parameters. With the use of the probability distributions of point estimators, the interval statistical estimators of considered information entropy functionals are constructed. On the basis of interval estimators, the decision rules for statistical testing of the hypothesis about the 'pure randomness' of the observed discrete sequence are developed. The results of computer experiments, in which the developed statistical tests are applied to the output sequence of cryptographic generators, are given. In these experiments, the output binary sequence was transformed to the sequence of alphabet with a larger dimension by combining the s neighboring elements in the s -grams.

Keywords: Shannon, Renyi and Tsallis entropy, asymptotically normal probability distribution, statistical estimators, hypotheses testing, cryptographic generators of random and pseudo-random sequences.

Введение. Генераторы случайных и псевдослучайных последовательностей являются одним из основных структурных элементов средств криптографической защиты информации (криптосистем). Стойкость криптосистем зависит от того, насколько близка генерируемая последовательность по своим свойствам к «чисто случайной», или равномерно распределенной случайной последовательности (РПС) [1]. Для проверки качества криптографических генераторов (генераторов, используемых в криптосистемах) в смысле их близости по своим вероятностным свойствам к РПС применяются статистические тесты, суть которых заключается в следующем.

Наблюдается выходная последовательность криптографического генератора и вводится гипотеза H_* о том, что последовательность является РПСП. Вычисляется некоторая статистика, распределение вероятностей которой при истинной гипотезе H_* известно. На основании значения статистики гипотеза H_* принимается либо отклоняется. В качестве тестовых статистик в настоящей статье предлагается использовать оценки функционалов информационной энтропии. Существуют различные функционалы энтропии (напр., в [2] приводятся формулы 23 функционалов), из них наиболее распространенными являются функционалы Шеннона, Реньи и Тсаллиса, для точечных статистических оценок которых в данной работе найдено асимптотическое распределение вероятностей при истинной гипотезе H_* . Полученное распределение вероятностей позволило построить и применить статистические тесты проверки гипотезы H_* , что подробно будет рассмотрено далее.

Математическая модель. Пусть на вероятностном пространстве (Ω, F, P) с множеством состояний $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$ определена случайная величина $x = x(\omega) = \omega$ с дискретным распределением вероятностей $p_k = P\{x = \omega_k\}$, $p_k \geq 0$, $\sum_{k=1}^N p_k = 1$, $k = 1, \dots, N$. Определим функционал обобщенной энтропии согласно [2]:

$$H_{h,w}^{\varphi_1, \varphi_2}(P) = h \left(\frac{\sum_{k=1}^N w_k \varphi_1(p_k)}{\sum_{k=1}^N w_k \varphi_2(p_k)} \right), \quad (1)$$

где $w_k > 0$, $k = 1, \dots, N$ – вес состояния ω_k , $\varphi_1 : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi_2 : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, – заданные функции.

В таблице приведены наиболее часто используемые [2] частные случаи функционала обобщенной энтропии (1), определяемые заданием функций $h(\cdot)$, $\varphi_1(\cdot)$, $\varphi_2(\cdot)$, $\{w_k\}$, входящих в (1).

Основные функционалы энтропии Basic entropy functionals

Тип Type	Формула Formula	$h(x)$	$\varphi_1(x)$	$\varphi_2(x)$	w_k
Энтропия Шеннона	$H(P) = -\sum_{k=1}^N p_k \ln p_k$	x	$-x \ln x$	x	$w \equiv 1$
Энтропия Реньи	$H_r(P) = \frac{1}{1-r} \ln \left(\sum_{k=1}^N p_k^r \right)$	$(1-r)^{-1} \ln x$	x^r	x	$w \equiv 1$
Энтропия Тсаллиса	$S_r(P) = \frac{1}{r-1} \left(1 - \sum_{k=1}^N p_k^r \right)$	$(1-r)^{-1}(x-1)$	x^r	x	$w \equiv 1$

Стоит отметить, что функционал энтропии Шеннона является предельным значением функционалов Реньи и Тсаллиса при $r \rightarrow 1$ [3] и отличается от них наличием некоторых дополнительных свойств (напр., аддитивности [1]). При истинной гипотезе H_* все три функционала достигают своего максимального значения.

Общепринятым подходом к статистическому оцениванию энтропии является построение частотных оценок вероятностей элементов алфавита и подстановка полученных оценок в функционал энтропии вместо истинных значений вероятностей. В данной статье предлагается метод построения статистических оценок энтропии Шеннона, Реньи и Тсаллиса и приводятся вероятностные свойства этих оценок в асимптотике, которая чаще встречается на практике и означает, что количество наблюдаемых данных сравнимо с числом оцениваемых параметров. С помощью полученных точечных оценок строятся интервальные статистические оценки энтропии, которые служат основой для разработки решающих правил для статистической проверки гипотез о близости наблюдаемой последовательности к РПСП.

Построение статистических оценок энтропии на основе частотных оценок вероятностей. Пусть имеется случайная последовательность $\{x_t : t = 1, \dots, n\}$ объема n из распределения вероятностей $\{p_k\}$. Построим частотные оценки распределения вероятностей $\{p_k : k = 1, \dots, N\}$:

$$\hat{p}_k = \frac{v_k}{n}, \quad v_k = \sum_{t=1}^n I\{x_t = \omega_k\} \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad I\{x_t = \omega_k\} = \begin{cases} 1, & x_t = \omega_k; \\ 0, & x_t \neq \omega_k. \end{cases} \quad (2)$$

Введем в рассмотрение гипотезу $H_* = \{\{x_t\} \text{ является РПС} \} = \{\{x_t\} \text{ – независимые одинаково распределенные случайные величины, } p_k = 1/N, k = 1, \dots, N\}$ и альтернативу $\overline{H_*}$.

Следуя [4], будем полагать, что имеет место схема серий. В таком случае вектор $(v_1, \dots, v_N)^T$, составленный из частот v_k из (2), имеет полиномиальное распределение вероятностей $\text{Pol}(n, N, p_1, \dots, p_N)$, а каждая из компонент распределена по биномиальному закону $Bi(n, p_k)$. Рассмотрим асимптотику:

$$n, N \rightarrow \infty, n/N \rightarrow \lambda, 0 < \lambda < \infty, \quad (3)$$

которая отличается от классической ($n \rightarrow \infty, N < \infty$) тем, что длительность наблюдения n и число значений N растут синхронно. В асимптотике (3) для распределения вероятностей статистик $\{v_k\}$ справедлива аппроксимация законом Пуассона $\Pi(\lambda_k)$ с параметром $\lambda_k = np_k$ [5]. При истинной гипотезе H_* все элементарные вероятности равны: $p_k = 1/N, k = 1, \dots, N$, поэтому все частоты $\{v_k\}$ имеют одинаковый параметр распределения Пуассона $\lambda = n/N$.

В [4] доказана теорема об асимптотически нормальном распределении статистик, являющихся функциями от частот v_k , которую кратко можно переформулировать следующим образом.

Пусть $f(\cdot): \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ – некоторая функция; $Z = \sum_{k=1}^N f(v_k)$, где $v_k, k = 1, \dots, N$ – частоты с совместным полиномиальным распределением, аппроксимированные законом Пуассона в асимптотике (3). Тогда при выполнении ряда условий регулярности статистика Z имеет асимптотически нормальное распределение $\mathcal{L}\left\{\frac{Z - \mu}{\sigma}\right\} \rightarrow \mathcal{N}_1(0, 1)$:

$$\mu = \sum_{k=1}^N E\{f(v_k)\}, \quad (4)$$

$$\sigma^2 = \sum_{k=1}^N D\{f(v_k)\} - \left(\sum_{k=1}^N \text{cov}\{v_k, f(v_k)\}\right)^2 / n, \quad (5)$$

где $\mathcal{N}_1(0, 1)$ – стандартный одномерный нормальный закон распределения вероятностей с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией, $E\{\xi\}$ и $D\{\xi\}$ – соответственно математическое ожидание и дисперсия случайной величины ξ , $\text{cov}\{\xi, \eta\}$ – ковариация случайных величин ξ и η . При истинной гипотезе H_* соотношения (4) и (5) преобразуются соответственно:

$$\mu = \sum_{k=1}^N E\{f(v_k)\} = NE\{f(v)\}, \quad (6)$$

$$\sigma^2 = ND\{f(v)\} - N^2 \text{cov}^2\{v, f(v)\} / n = N\left(D\{f(v)\} - \text{cov}^2\{v, f(v)\} / \lambda\right). \quad (7)$$

Для применения результатов из [4] к доказательству вероятностных свойств статистических оценок энтропии необходимо выразить оценки энтропийных функционалов через частоты.

Статистическая оценка энтропии Шеннона. В качестве функции f возьмем $f(v) = v \ln v$. Статистическая оценка энтропии Шеннона $\hat{H}(n, N)$ линейно выражается через Z [6]:

$$\hat{H} = \hat{H}(n, N) = -\sum_{k=1}^N \hat{p}_k \ln \hat{p}_k = -\sum_{k=1}^N \frac{v_k}{n} \ln \frac{v_k}{n} = \ln n - \frac{1}{n} Z. \quad (8)$$

В работе [6] теорема об асимптотическом распределении вероятностей статистики (8) сформулирована автором без доказательства, поэтому приведем его здесь.

Теорема 1. В асимптотике (3) статистика (8) при истинной гипотезе H_* имеет асимптотически нормальное распределение $\mathcal{L}\left\{\frac{\hat{H} - \mu_H}{\sigma_H}\right\} \rightarrow \mathcal{N}_1(0, 1)$:

$$\mu_H = \ln n - e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k+1)\lambda^k}{k!}, \quad (9)$$

$$\sigma_H^2 = \frac{e^{-\lambda}}{n} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(k+1)\lambda^k}{k!} \ln^2(k+1) - \frac{e^{-2\lambda}}{N} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k+1)\lambda^k}{k!} \right)^2 - \frac{e^{-2\lambda}}{n} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \ln(k+1) \frac{\lambda^k}{k!} (k+1-\lambda) \right)^2. \quad (10)$$

Доказательство. Сначала проверим выполнение условий теоремы 1 из [4].

1. $n, N \rightarrow \infty, n/N \rightarrow \lambda, 0 < \lambda < \infty$ – это выполнено в силу условия теоремы.

2. $Np_k \leq C < \infty, \forall N, k$. Поскольку $p_k = 1/N, k = 1, \dots, N$, то $Np_k \equiv 1$.

3. $|f(v)| \leq a \exp(bv)$. Положим в условии $a = 1, b = 2$ и рассмотрим отдельно два случая: $v = 0$ и $v \geq 1$. При $v = 0$ мы полагаем $0 \ln 0 = 0$, поэтому неравенство выполняется: $0 < 1$. При $v \geq 1$ функция $f(v)$ неотрицательна, и $|f(v)| = f(v) = v \ln v$. Справедлива цепочка утверждений $\ln v < v \Leftrightarrow v < e^v \Rightarrow \ln v < v < e^v \Rightarrow \ln v < e^v$. Домножим обе части последнего неравенства на $v < e^v$, получим $v \ln v < e^{2v}$, что ведет к выполнению указанного условия.

4. $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sigma^2/n < \infty$. Справедливость выражения

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(k+1)\lambda^k}{k!} \ln^2(k+1) - e^{-2\lambda} \lambda \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k+1)\lambda^k}{k!} \right)^2 - e^{-2\lambda} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} (k+1-\lambda) \frac{\ln(k+1)\lambda^k}{k!} \right)^2 < +\infty$$

следует из вида слагаемых, в которых сумма, имеющая порядок $O(e^\lambda)$, умножается на $e^{-\lambda}$, и конечности λ , которая вытекает из (3).

Теперь мы можем применить для Z теорему 1 [4], осталось найти параметры нормального распределения вероятностей (6), (7). Обозначим $\mu_0 = E\{v \ln v\}$. Поскольку $v \sim \Pi(\lambda)$, то

$$\mu_0 = E\{v \ln v\} = \sum_{k=0}^{+\infty} k \ln k \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{+\infty} \ln k \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k+1)\lambda^k}{k!}. \quad (11)$$

Отсюда следует выражение для математического ожидания Z :

$$\mu = NE\{v \ln v\} = N\lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k+1)\lambda^k}{k!} = ne^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k+1)\lambda^k}{k!}. \quad (12)$$

Вычислим дисперсию Z :

$$\sigma^2 = N \left(E\{v^2 \ln^2 v\} - \mu_0^2 \right) - N^2 \left(E\{v^2 \ln v\} - E\{v\} \mu_0 \right)^2 / n. \quad (13)$$

Математическое ожидание квадрата в уменьшаемом в (13) равно

$$E\{v^2 \ln^2 v\} = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \ln^2 k \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k \lambda^k}{(k-1)!} \ln^2 k = e^{-\lambda} \lambda \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(k+1)\lambda^k}{k!} \ln^2(k+1). \quad (14)$$

Отсюда с учетом (11) получаем

$$\begin{aligned} N \left(E\{v^2 \ln^2 v\} - \mu_0^2 \right) &= N \left(e^{-\lambda} \lambda \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(k+1)\lambda^k}{k!} \ln^2(k+1) - e^{-2\lambda} \lambda^2 \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k+1)\lambda^k}{k!} \right)^2 \right) = \\ &= e^{-\lambda} n \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(k+1)\lambda^k}{k!} \ln^2(k+1) - e^{-2\lambda} n \lambda \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k+1)\lambda^k}{k!} \right)^2. \end{aligned} \quad (15)$$

Рассмотрим вычитаемое в (13). Математическое ожидание произведения равно

$$E\{v^2 \ln v\} = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \ln k \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{+\infty} k \ln k \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{k=1}^{+\infty} (k+1) \frac{\ln(k+1) \lambda^k}{k!}. \quad (16)$$

Отсюда с учетом (11) получаем

$$\begin{aligned} E\{v^2 \ln v\} - E\{v\} \mu_0 &= e^{-\lambda} \lambda \sum_{k=1}^{+\infty} (k+1) \frac{\ln(k+1) \lambda^k}{k!} - e^{-\lambda} \lambda^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k+1) \lambda^k}{k!} = \\ &= e^{-\lambda} \lambda \sum_{k=1}^{+\infty} (k+1-\lambda) \frac{\ln(k+1) \lambda^k}{k!}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{N^2}{n} (E\{v^2 \ln v\} - E\{v\} \mu_0)^2 &= \frac{N^2}{n} e^{-2\lambda} \lambda^2 \left(\sum_{k=1}^{+\infty} (k+1-\lambda) \frac{\ln(k+1) \lambda^k}{k!} \right)^2 = \\ &= e^{-2\lambda} n \left(\sum_{k=1}^{+\infty} (k+1-\lambda) \frac{\ln(k+1) \lambda^k}{k!} \right)^2. \end{aligned} \quad (17)$$

Окончательно, подставив (15) и (17) в (13), получим

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= e^{-\lambda} n \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(k+1) \lambda^k}{k!} \ln^2(k+1) - e^{-2\lambda} n \lambda \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k+1) \lambda^k}{k!} \right)^2 - \\ &\quad - e^{-2\lambda} n \left(\sum_{k=1}^{+\infty} (k+1-\lambda) \frac{\ln(k+1) \lambda^k}{k!} \right)^2. \end{aligned} \quad (18)$$

Из (8) следует, что статистическая оценка энтропии Шеннона является линейным преобразованием статистики Z и, значит, также асимптотически нормально распределена. Выразим математическое ожидание и дисперсию оценки (8) через математическое ожидание и дисперсию статистики Z :

$$E\{\hat{H}(n, N)\} = E\left\{\ln n - \frac{1}{n} Z\right\} = \ln n - \frac{1}{n} E\{Z\}, \quad (19)$$

$$D\{\hat{H}(n, N)\} = D\left\{\ln n - \frac{1}{n} Z\right\} = \frac{1}{n^2} D\{Z\}. \quad (20)$$

Подставив (12) в (19), получим (9); подставив (18) в (20), получим (10). Теорема 1 доказана.

В [7] рассмотрено поведение математического ожидания оценки энтропии Шеннона двоичной последовательности, которая разбивается на фрагменты длины s , и при этом $N = 2^s$.

Знание асимптотического распределения точечной оценки (8) позволяет построить интервальную оценку энтропии Шеннона: с вероятностью $1 - \varepsilon$ оценка энтропии

$$\hat{H}(P) \in (H_-, H_+), \quad H_{\pm} = \mu_H \pm \sigma_H \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right), \quad (21)$$

где $\Phi^{-1}(\cdot)$ – квантиль стандартного нормального закона [5].

Недостатком полученной точечной оценки является наличие смещения, что продемонстрировано в [7]. Поэтому далее рассмотрим построение статистических оценок функционалов энтропии Реньи и Тсаллиса.

Статистические оценки энтропии Реньи и Тсаллиса. Будем рассматривать функционалы энтропии Реньи и Тсаллиса с параметром $r \in \{2, 3, \dots\}$. Как видно из таблицы, функционалы

объединяет общая функция $\varphi_1(x) = x^r$. Аргументом функции является вероятность p_k . Видно также, что энтропии Реньи и Тсаллиса являются функциями от величины

$$P_r(P) = \sum_{k=1}^N p_k^r. \quad (22)$$

Следовательно, возникает задача статистического оценивания величины $P_r(P)$.

Известно [8], что статистическая оценка для (22) $\widehat{P}_r(P) = \sum_{k=1}^N \widehat{p}_k^r = \sum_{k=1}^N \left(\frac{v_k}{n}\right)^r$, построенная по подстановочному принципу, является смещенной. Для получения асимптотически несмещенной оценки определим r -ю нисходящую факториальную степень x :

$$x^{\underline{r}} = x(x-1)\dots(x-r+1) = \frac{x!}{(x-r)!} = \sum_{i=0}^r s(r,i)x^i, \quad (23)$$

где $s(r, i)$ – число Стирлинга первого рода [9]; по определению, при $x < r$ полагают $x^{\underline{r}} ::= 0$. В [8] предложена статистическая оценка для величины (22), которая основана на (23):

$$\widetilde{P}_r(P) = \sum_{k=1}^N \frac{v_k^{\underline{r}}}{n^r}, \quad (24)$$

и является асимптотически несмещенной и состоятельной [10].

Положим $f_r(v) = v^{\underline{r}}$,

$$Z_r = \sum_{k=1}^N f_r(v_k) = \sum_{k=1}^N v_k^{\underline{r}} = n^r \widetilde{P}_r(P). \quad (25)$$

Справедлива лемма [10] о распределении статистики (25).

Лемма. При истинной гипотезе H_* в асимптотике (3) статистика (25) имеет асимптотически нормальное распределение $\mathcal{L}\left\{\frac{Z_r - \mu_r}{\sigma_r}\right\} \rightarrow \mathcal{N}_1(0,1)$:

$$\begin{aligned} \mu_r &= N\lambda^r = n\lambda^{r-1}, \\ \sigma_r^2 &= N\lambda^r \left(\sum_{i=1}^r s(r,i) \sum_{j=0}^{i-1} C_i^j r^{i-j} \sum_{k=1}^j S(j,k)\lambda^k - r^2\lambda^{r-1} + r! \right) = \\ &= n\lambda^{r-1} \left(\sum_{i=1}^r s(r,i) \sum_{j=0}^{i-1} C_i^j r^{i-j} \sum_{k=1}^j S(j,k)\lambda^k - r^2\lambda^{r-1} + r! \right), \end{aligned}$$

где $S(j, k)$ – число Стирлинга второго рода [9].

Следствие 1. При $r = 2$ для параметров асимптотически нормального распределения вероятностей случайной величины Z_2 справедливы выражения

$$\mu_2 = n\lambda, \quad \sigma_2^2 = 2n\lambda.$$

Статистические оценки энтропии Реньи и Тсаллиса выражаются через Z_r [10]:

$$\widehat{H}_r(n, N) = \frac{1}{1-r} \ln \left(\sum_{k=1}^N \frac{v_k^{\underline{r}}}{n^r} \right) = \ln n + \frac{1}{r-1} (\ln n - \ln Z_r), \quad (26)$$

$$\widehat{S}_r(n, N) = \frac{1}{r-1} \left(1 - \sum_{k=1}^N \frac{v_k^{\underline{r}}}{n^r} \right) = \frac{1}{r-1} \left(1 - \frac{Z_r}{n^r} \right). \quad (27)$$

Справедливы теоремы, доказанные автором настоящей статьи совместно с Ю. С. Хариним [10], об асимптотическом распределении вероятностей статистических оценок энтропии Реньи и Тсаллиса, которые опираются на [4, 5] и позволяют построить интервальные оценки. Приведем также следствия из теорем для наиболее употребительного на практике случая $r = 2$.

Теорема 2. В асимптотике (3) статистика (26) является состоятельной оценкой энтропии Реньи и при истинной гипотезе H_* имеет асимптотически нормальное распределение:

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{\widehat{H}_r - \mu_{H,r}}{\sigma_{H,r}} \right\} \rightarrow \mathcal{N}_1(0,1),$$

$$\mu_{H,r} = \ln N, \tag{28}$$

$$\sigma_{H,r}^2 = \frac{\sum_{i=1}^r s(r,i) \sum_{j=0}^{i-1} C_i^j r^{i-j} \sum_{k=1}^j S(j,k) \lambda^k - r^2 \lambda^{r-1} + r!}{(r-1)^2 n \lambda^{r-1}}. \tag{29}$$

Следствие 2. При $r = 2$ для дисперсии асимптотического распределения вероятностей оценки (26) справедливо выражение

$$\sigma_{H,2}^2 = \frac{2}{n\lambda}.$$

Отметим, что при истинной гипотезе H_* $p_k = 1/N$, $k = 1, \dots, N$, поэтому значение энтропии Реньи равно $H_r(P) = \frac{1}{1-r} \ln \left(\sum_{k=1}^N p_k^r \right) = \frac{1}{1-r} \ln \left(\sum_{k=1}^N \frac{1}{N^r} \right) = \ln N$, что совпадает с (28).

Знание асимптотического распределения точечной состоятельной оценки (26) позволяет построить интервальную оценку энтропии Реньи: с вероятностью $1 - \varepsilon$ энтропия

$$H_r(P) \in (H_-, H_+), \quad H_{\pm} = \mu_{H,r} \pm \sigma_{H,r} \Phi^{-1} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} \right). \tag{30}$$

Теорема 3. В асимптотике (3) статистика (27) является состоятельной асимптотически несмещенной оценкой энтропии Тсаллиса и при истинной гипотезе H_* имеет асимптотически нормальное распределение $\mathcal{L} \left\{ \frac{\widehat{S}_r - \mu_{S,r}}{\sigma_{S,r}} \right\} \rightarrow \mathcal{N}_1(0,1)$:

$$\mu_{S,r} = \frac{1}{r-1} \left(1 - \frac{1}{N^{r-1}} \right), \tag{31}$$

$$\sigma_{S,r}^2 = \frac{\lambda^{r-1}}{(r-1)^2 n^{2r-1}} \left(\sum_{i=1}^r s(r,i) \sum_{j=1}^{i-1} C_i^j r^{i-j} \sum_{k=1}^j S(j,k) \lambda^k - r^2 \lambda^{r-1} + r! \right). \tag{32}$$

Следствие 3. При $r = 2$ для математического ожидания и дисперсии асимптотического распределения оценки (27) справедливы выражения

$$\mu_{S,2} = 1 - \frac{1}{N},$$

$$\sigma_{S,2}^2 = \frac{2}{Nn^2}.$$

Знание асимптотического распределения вероятностей точечной состоятельной оценки (27) позволяет построить интервальную оценку энтропии Тсаллиса: с вероятностью $1 - \varepsilon$ энтропия

$$S_r(P) \in (S_-, S_+), \quad S_{\pm} = \mu_{S,r} \pm \sigma_{S,r} \Phi^{-1} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} \right). \quad (33)$$

Проверка гипотезы о «чистой случайности» последовательности на основе оценок энтропии. Полученные интервальные оценки (21), (30) и (33) позволяют построить решающее правило для проверки гипотез о том, является ли наблюдаемая последовательность генератора «чисто случайной», т. е. РПСИ: H_* и \overline{H}_* . Пусть $\varepsilon \in (0, 1)$ – заданный уровень значимости. Введем обозначения: \hat{h} – статистическая оценка энтропии Шеннона (8), Реньи (26) или Тсаллиса (27), μ_h – асимптотическое математическое ожидание статистической оценки энтропии Шеннона (9), Реньи (28) или Тсаллиса (31), σ_h^2 – асимптотическая дисперсия статистической оценки энтропии Шеннона (10), Реньи (29) или Тсаллиса (32) при истинной гипотезе H_* . Вычислим для наблюдаемой последовательности статистику \hat{h} . Решающее правило, основанное на статистике \hat{h} , имеет вид

$$\begin{cases} H_*, & \text{если } t_- < \hat{h} < t_+; \\ \overline{H}_*, & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad t_{\pm} = \mu_h \pm \sigma_h \Phi^{-1} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} \right). \quad (34)$$

В случае принятия решения о справедливости гипотезы H_* можно сделать вывод о том, что на уровне значимости ε исследуемый процесс по своим энтропийным свойствам неотличим от «чисто случайной» последовательности на основе наблюдаемой реализации длиной не более n .

Результаты компьютерных экспериментов. Разработанное решающее правило (34) применено для анализа выходной двоичной последовательности реального физического генератора двоичной случайной последовательности [11] $\{y_{\tau}\}, \tau = 1, \dots, T$, длиной $T = 125 \cdot 2^{25}$ бит. Выходная последовательность «нарезалась» на непересекающиеся подряд идущие фрагменты длины s (s -граммы): $X^{(t)} = (X_j^{(t)}) = (y_{(t-1)s+1}, \dots, y_{ts}) \in \{0, 1\}^s, t = 1, \dots, n = \lfloor T/s \rfloor$. Из полученных s -грамм формировалась новая последовательность $\{x_j\}$ из алфавита мощности $N = 2^s$ по правилу $x_t = \sum_{j=1}^s 2^{j-1} X_j^{(t)} + 1$.

На рис. 1 представлены значения отклонений оценки энтропии Шеннона (8) от математического ожидания (9), деленных на границы доверительных интервалов: $\frac{\hat{H} - \mu_H}{\sigma_H \Phi^{-1}(1 - \varepsilon/2)}$, на уровне значимости $\varepsilon = 0,05$ в зависимости от $s \in \{5, \dots, 24\}$. Выход за полосу $(-1; 1)$ означает непопада-

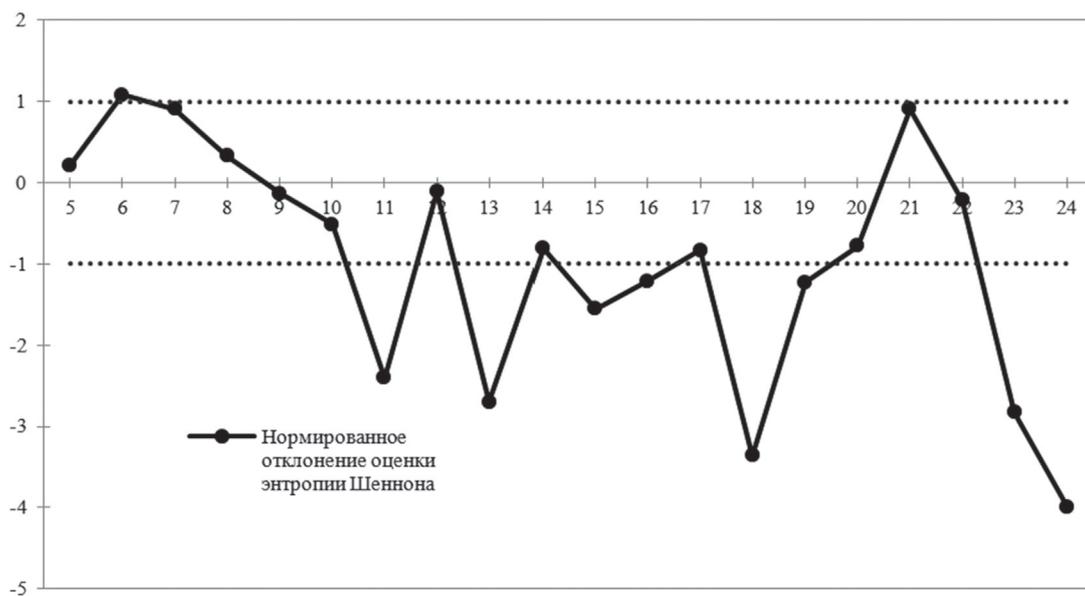


Рис. 1. Отклонение оценки энтропии Шеннона от математического ожидания для $s \in \{5, \dots, 24\}$

Fig. 1. Deviation of the Shannon entropy estimate from expectation for $s \in \{5, \dots, 24\}$

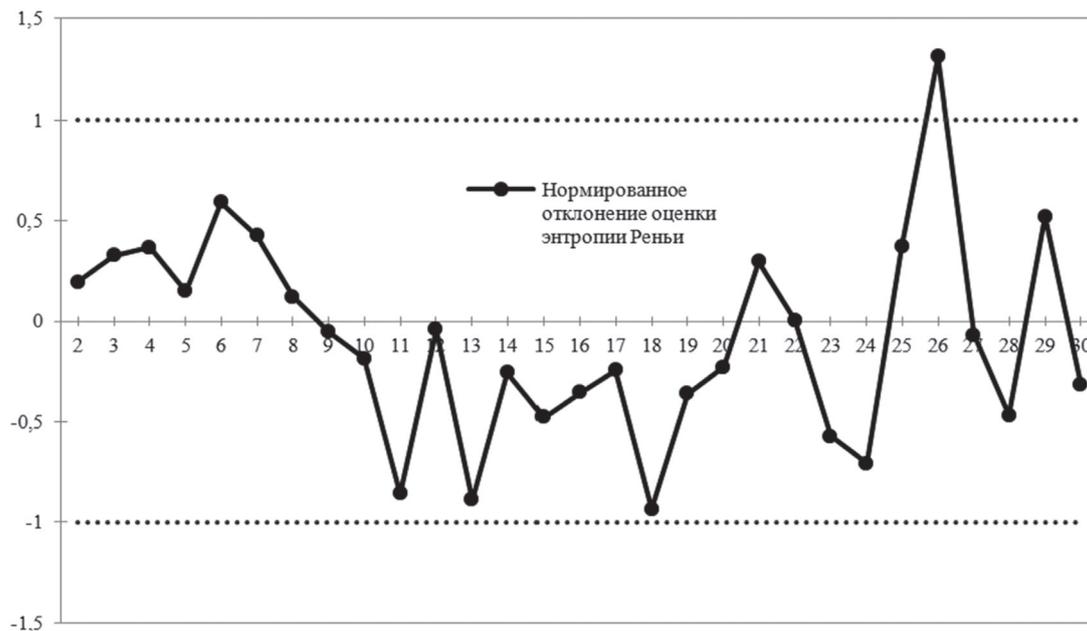


Рис. 2. Отклонение оценки энтропии Реньи от математического ожидания для $s \in \{2, \dots, 30\}$

Fig. 2. Deviation of the Renyi entropy estimate from expectation for $s \in \{2, \dots, 30\}$

ние в доверительный интервал и отклонение гипотезы H_* . Как видно, на многих значениях порядка s гипотеза H_* отклоняется, что свидетельствует о том, что выходная последовательность генератора отличается от РПСЦ.

На рис. 2 представлены значения отклонений оценки энтропии Реньи (26) при $r = 2$ от математического ожидания (28), деленных на границы доверительных интервалов: $\frac{\widehat{H}_r - \mu_{H,r}}{\sigma_{H,r} \Phi^{-1}(1 - \varepsilon/2)}$, на уровне значимости $\varepsilon = 0,1$ в зависимости от $s \in \{2, \dots, 30\}$, и доверительная полоса $(-1; 1)$. Как видно, при значениях $s \leq 25$ выходная последовательность генератора согласуется с моделью РПСЦ.

Вычисление оценки энтропии Тсаллиса и применение решающего правила (34) на ее основе дает аналогичный энтропии Реньи результат. Построенный график практически не отличается от графика, представленного на рис. 2, поэтому в данной статье не приводится. Такое поведение оценок энтропии Реньи и Тсаллиса можно объяснить наличием зависимости от одной и той же величины (24).

В то же время решающие правила на основе оценок энтропии Шеннона и Реньи дали различные результаты. Это означает, что данные тесты необходимо применять в комплексе, так как один из них может выявить отклонения от РПСЦ, которые не выявил другой, и наоборот.

Заключение. Построены асимптотически нормально распределенные статистические оценки функционалов энтропии Шеннона, Реньи и Тсаллиса. Получены явные формулы для моментов построенных статистических оценок. Сформулировано решающее правило, основанное на этих оценках, для проверки гипотезы о том, является ли наблюдаемая последовательность равномерно распределенной случайной последовательностью. Проведены компьютерные эксперименты, иллюстрирующие свойства построенных статистических оценок и решающих правил.

Список использованных источников

1. Криптология / Ю. С. Харин [и др.]. – Минск: БГУ, 2013. – 512 с.
2. Esteban, M. D. A summary on entropy statistics / M. D. Esteban, D. Morales // Kybernetika. – 1995. – Vol. 31, № 4. – P. 337–346.
3. Bromiley, P. A. Shannon Entropy, Renyi Entropy, and Information [Electronic resource] / P. A. Bromiley, N. A. Thacker, E. Bouhova-Thacker. – Mode of access: <http://www.tina-vision.net/docs/memos/2004-004.pdf>. – Date of access: 08.04.2016.

4. Holst, L. Asymptotic normality and efficiency for certain goodness-of-fit tests / L. Holst // *Biometrika*. – 1972. – Vol. 59, № 1. – P. 137–145.
5. Харин, Ю. С. Теория вероятностей, математическая и прикладная статистика / Ю. С. Харин, Н. М. Зуев, Е. Е. Жук. – Минск: БГУ, 2011. – 463 с.
6. Палуха, В. Ю. Вероятностные свойства статистической оценки многомерной энтропии в задачах защиты информации / В. Ю. Палуха // XVII Респ. науч.-практ. конф. молодых ученых: сб. материалов, Брест, 15 мая 2015 г.: в 2 ч. – Брест: БрГУ, 2015. – Ч. 1. – С. 57–59.
7. Палуха, В. Ю. Энтропийные характеристики двоичных последовательностей в криптографии / В. Ю. Палуха, Ю. С. Харин // Комплексная защита информации: материалы XX науч.-практ. конф., Минск, 19–21 мая 2015 г. – Минск: РИВШ, 2015. – С. 99–102.
8. Estimating Renyi Entropy of Discrete Distributions [Electronic resource] / J. Acharya, [et al.]. – Mode of access: <http://arxiv.org/pdf/1408.1000v3.pdf>. – Date of access: 08.04.2016.
9. Энвин, А. Ю. Дискретная математика / А. Ю. Энвин. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 1998. – 176 с.
10. Харин, Ю. С. Статистические оценки энтропии Реньи и Тсаллиса и их использование для проверки гипотез о «чистой случайности» / Ю. С. Харин, В. Ю. Палуха // Вест. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2016. – № 2. – С. 37–47.
11. Speedtest-500MB.bin [Electronic resource] // Humboldt Berlin University, Faculty of Mathematics and Natural Sciences, Department of Physics. – Mode of access: <http://qrng.physik.hu-berlin.de/files/speedtest-500MB.bin>. – Date of access: 08.04.2016.

References

1. Kharin Yu.S., Agievich S.V., Vasil'ev D.V., Matveev G.V. *Cryptology*. Minsk, Belarusian State University, 2013. 512 p. (In Russian).
2. Esteban M.D., Morales D.A summary on entropy statistics. *Kybernetika*, 1995, vol. 31, no. 4, pp. 337–346.
3. Bromiley P.A., Thacker N.A., Bouhova-Thacker E. *Shannon Entropy, Renyi Entropy, and Information*. Available at: <http://www.tina-vision.net/docs/memos/2004-004.pdf>. (accessed 8 April 2016).
4. Holst L. Asymptotic normality and efficiency for certain goodness-of-fit tests. *Biometrika*, 1972, vol. 59, no. 1, pp. 137–145. Doi: 10.2307/2334624
5. Kharin Yu.S., Zuev N.M., Zhuk E.E. *Probability Theory, Mathematical and Applied Statistics*. Minsk, Belarusian State University, 2011. 463 p. (In Russian).
6. Palukha V.Yu. The probability properties of the multivariate entropy estimator in information security tasks. *XVII Respublikanskaya nauchno-prakticheskaya konferentsiya molodykh uchenykh. Sbornik materialov. Ch. 1* [Proceedings of XVII Republican Young Scientists Scientific and Practical Conference. Part 1]. Brest, Brest State University, 2015, pp. 57–59. (In Russian).
7. Palukha V.Yu., Kharin Yu.S. Entropy characteristics of binary sequences in cryptography. *Kompleksnaya zashchita informatsii: materialy XX nauchno-prakticheskoi konferentsii* [Complex Information Protection. Proceedings of XX Scientific and Practical Conference]. Minsk, Republican Institute for Higher Education, 2015, pp. 99–102. (In Russian).
8. Acharya J., Orlitsky A., Suresh A.T., Tyagi H. *Estimating Renyi Entropy of Discrete Distributions*. Available at <http://arxiv.org/pdf/1408.1000v3.pdf>. (accessed 8 April 2016).
9. Envin A.Yu. *Discrete Mathematics*. Cheliabinsk, South Ural State University, 1998. 176 p. (In Russian).
10. Kharin Yu.S., Palukha U.Yu. Statistical estimates of Rényi and Tsallis entropy and their use for testing the ‘pure randomness hypotheses. *Vesti Natsyionalnai akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series], 2016, no. 2, pp. 37–47. (In Russian).
11. Speedtest-500MB.bin. *Humboldt Berlin University, Faculty of Mathematics and Natural Sciences, Department of Physics*. Available at <http://qrng.physik.hu-berlin.de/files/speedtest-500MB.bin>. (accessed 8 April 2016).

Информация об авторе

Палуха Владимир Юрьевич – аспирант кафедры математического моделирования и анализа данных факультета прикладной математики и информатики, Белорусский государственный университет; младший научный сотрудник НИИ прикладных проблем математики и информатики БГУ (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: palukha@bsu.by

Для цитирования

Палуха, В. Ю. Статистические тесты на основе оценок энтропии для проверки гипотез о равномерном распределении случайной последовательности // Вест. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2017. – № 1. – С. 79–88.

Information about the author

Palukha Uladzimir Yur'evich – Postgraduate of the Department of Mathematical Modeling and Data Analysis, Faculty of Applied Mathematics and Computer Science, Belarusian State University; Junior Researcher of the Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics; (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: palukha@bsu.by

For citation

Palukha U.Yu. Statistical tests based on entropy estimates for checking the hypotheses of the uniform distribution of a random sequence. *Vesti Natsyionalnai akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series], 2017, no. 1, pp. 79–88. (In Russian).

О. Л. Швед*Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси,
Минск, Беларусь***УЧЕТ УПРУГОЙ АНИЗОТРОПИИ
ТРИКЛИННОГО УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА**

Рассматривается вопрос о деформационной упругой анизотропии в конкретной модели нелинейной упругопластичности, который представляется важным потому, что чрезмерный рост анизотропии вызывает согласно полученному критерию разрушения непредсказуемо раннее появление макротрещин вследствие пластической деформации.

Свойства материала описываются обобщенным законом упругости Мурнагана. Первоначально материал предполагается изотропным и значения величин параметров анизотропии являются нулевыми. Определяющее уравнение для удельной потенциальной энергии упругой деформации (потенциала напряжений) записывается при общем виде анизотропии – триклинной. Отыскиваются возможные ограничения на параметры для трансверсально-изотропного, ортотропного и моноклинного материалов. Для триклинного материала ненулевыми могут быть все 77 параметров, для моноклинного – 45, для остальных видов анизотропии – 29 параметров. Для трансверсально-изотропного материала найдены ограничения в виде однородных линейных уравнений. Получены также ограничения для кубически-изотропного материала, которые можно использовать только в теории упругости, поскольку данная анизотропия является недеформационной.

Выписывается второе определяющее уравнение в конечном виде для тензора напряжений Коши. Активный упругопластический процесс происходит попеременным чередованием пластических и упругих состояний материала. Рост анизотропии наблюдается в пластическом состоянии (при течении). Вводятся 3 дифференциальных определяющих уравнения при течении: для потенциала напряжений, тензора напряжений и параметров анизотропии. Определяется неотрицательный параметр роста анизотропии. Из системы уравнений находятся скорости меры упругих искажений и параметр роста, для которого реализована процедура его минимизации. Проверяется пригодность последнего уравнения для описания полученных ограничений. Установлено, что все они выполняются за исключением части ограничений для трансверсально-изотропного материала, поэтому при одноосных нагружениях указанное уравнение следует дополнить 12 линейными однородными уравнениями.

Ключевые слова: упругопластичность, закон Мурнагана, упругая анизотропия, триклинный материал, параметры анизотропии, определяющее уравнение.

O. L. Shved*United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus***CONSIDERING THE INCREASE IN ELASTIC ANISOTROPY
OF TRICLINIC ELASTIC-PLASTIC MATERIAL**

The task of deformation of elastic anisotropy in a specific nonlinear elastic-plastic model is considered. According to a given criterion, the excessive growth of anisotropy causes the unexpectedly early appearance of macrocracks due to plastic deformation.

The elastic properties of material are described by the generalized Murnaghan law of elasticity. Initially, the material is assumed to be isotropic, and the values of anisotropy parameters are zero. The defining equation for the potential energy density of elastic deformation (stress potential) is written in the general form of anisotropy – triclinic. Possible restrictions for transversely isotropic, orthotropic and monoclinic materials were under search. For triclinic material, all seventy seven parameters can be nonzero. For monoclinic material, forty five parameters can be nonzero, and for other types of anisotropy – twenty nine. For transversely isotropic material, the restrictions in the form of homogeneous linear equations are found. Also, the restrictions on cubic-isotropic materials are found, which can be used only in the theory of elasticity, as this anisotropy is nondeformation.

The second defining equation in finite form for the Cauchy stress tensor is written. An active elastic-plastic process takes place through an alternate alternation of plastic and elastic material states. The growth of anisotropy occurs in the plastic state (in flow). We introduce three differential equations in flow: for voltage potential, stress tensor and anisotropy parameters. The nonnegative parameter of the anisotropy growth is determined. The system of equations yields the measure speed of elastic distortions and the growth parameter to implement the minimization procedure. The suitability of the last equation

to describe the derived constraints is checked. It is found that all of them are performed, but for the part of restrictions for transversely isotropic material. Therefore, for uniaxial loadings this equation should be complemented by twelve homogeneous linear equations.

Keywords: elastic-plastic, Murnaghan law, elastic anisotropy, triclinic material, anisotropic parameters, defining equation.

Теоретическое описание роста упругой анизотропии в результате пластической деформации является сложной проблемой и не имеет удовлетворительного решения для нелинейных моделей упругопластичности [1]. Модель материала, предложенная в [2], использует закон упругости Мурнагана [3, 4], который позволяет учитывать рост упругой анизотропии. Критерий разрушения не требует введения параметра повреждаемости [5] и вытекает из сути математической модели [2]. Причиной разрушения является рост упругой анизотропии [6], поэтому правильное его описание имеет важное значение. Возрастающую по сложности анизотропии иерархию моделей упругопластичности удобно представить в виде последовательности трансверсально-изотропного, ортотропного, моноклинного и триклинного материалов. Причем переход от изотропии к более сложной анизотропии может осуществляться и непоследовательно. Будем исходить из общих зависимостей для триклинного материала при получении возможных ограничений на параметры анизотропии в частных случаях. Они будут несколько отличаться от соотношений, где часть параметров не учитывалась [6]. Поскольку модель упругопластичности связана с конкретным сложным анизотропным законом, то может проявляться неустойчивость при расчете упругопластического процесса. Целью настоящей работы является рациональный учет деформационного роста упругой анизотропии в модели материала [2]. Требуется установить возможные ограничения на параметры, постулировать определяющее уравнение для параметров анизотропии, проверить пригодность уравнения для их описания, а также минимизировать рост анизотропии.

Подход Мурнагана заключается в представлении удельной потенциальной энергии упругой деформации полиномом по степеням компонент тензора Коши – Грина C :

$$\vartheta = \vartheta_0 + \vartheta_2 + \vartheta_3 + c, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \vartheta_2 = & \sum (\delta_i (c_i \cdot C \cdot c_i)^2 + \delta_{3+i} c_1 \cdot C \cdot c_2 c_i \cdot C \cdot c_i + \delta_{11+i} c_1 \cdot C \cdot c_3 c_i \cdot C \cdot c_i + \delta_{15+i} c_2 \cdot C \cdot c_3 c_i \cdot C \cdot c_i) + \\ & + \delta_7 (c_1 \cdot C \cdot c_2)^2 + \delta_{11} (c_1 \cdot C \cdot c_3)^2 + \delta_{15} (c_2 \cdot C \cdot c_3)^2 + \delta_8 c_1 \cdot C \cdot c_1 c_2 \cdot C \cdot c_2 + \delta_9 c_2 \cdot C \cdot c_2 c_3 \cdot C \cdot c_3 + \\ & + \delta_{10} c_1 \cdot C \cdot c_1 c_3 \cdot C \cdot c_3 + \delta_{19} c_2 \cdot C \cdot c_1 c_1 \cdot C \cdot c_3 + \delta_{20} c_1 \cdot C \cdot c_2 c_2 \cdot C \cdot c_3 + \delta_{21} c_1 \cdot C \cdot c_3 c_3 \cdot C \cdot c_2, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \vartheta_3 = & \sum \delta_{21+i} (c_i \cdot C \cdot c_i)^3 + \delta_{25} (c_1 \cdot C \cdot c_1)^2 c_2 \cdot C \cdot c_2 + \delta_{26} (c_1 \cdot C \cdot c_1)^2 c_3 \cdot C \cdot c_3 + \delta_{27} (c_2 \cdot C \cdot c_2)^2 c_1 \cdot C \cdot c_1 + \\ & + \delta_{28} (c_2 \cdot C \cdot c_2)^2 c_3 \cdot C \cdot c_3 + \delta_{29} (c_3 \cdot C \cdot c_3)^2 c_1 \cdot C \cdot c_1 + \delta_{30} (c_3 \cdot C \cdot c_3)^2 c_2 \cdot C \cdot c_2 + \delta_{31} c_1 \cdot C \cdot c_1 c_2 \cdot C \cdot c_2 c_3 \cdot C \cdot c_3 + \\ & + (c_1 \cdot C \cdot c_3)^2 \sum \delta_{31+i} c_i \cdot C \cdot c_i + \delta_{35} (c_1 \cdot C \cdot c_2)^2 c_1 \cdot C \cdot c_3 + \delta_{36} (c_1 \cdot C \cdot c_2)^2 c_2 \cdot C \cdot c_3 + \delta_{37} (c_1 \cdot C \cdot c_3)^2 c_1 \cdot C \cdot c_2 + \\ & + \delta_{38} (c_1 \cdot C \cdot c_3)^2 c_2 \cdot C \cdot c_3 + \delta_{39} (c_2 \cdot C \cdot c_3)^2 c_1 \cdot C \cdot c_2 + \delta_{40} (c_2 \cdot C \cdot c_3)^2 c_1 \cdot C \cdot c_3 + \delta_{41} c_1 \cdot C \cdot c_2 c_1 \cdot C \cdot c_3 c_2 \cdot C \cdot c_3 + \\ & + \delta_{42} (c_1 \cdot C \cdot c_1)^2 c_1 \cdot C \cdot c_2 + c_1 \cdot C \cdot c_3 \sum \delta_{40+3i} (c_i \cdot C \cdot c_i)^2 + c_2 \cdot C \cdot c_3 \sum \delta_{41+3i} (c_i \cdot C \cdot c_i)^2 + \delta_{45} (c_2 \cdot C \cdot c_2)^2 c_1 \cdot C \cdot c_2 + \\ & + \delta_{48} (c_3 \cdot C \cdot c_3)^2 c_1 \cdot C \cdot c_2 + \delta_{51} c_1 \cdot C \cdot c_1 (c_1 \cdot C \cdot c_2)^2 + \delta_{52} c_2 \cdot C \cdot c_2 (c_1 \cdot C \cdot c_2)^2 + \delta_{53} c_3 \cdot C \cdot c_3 (c_1 \cdot C \cdot c_2)^2 + \\ & + \delta_{54} (c_1 \cdot C \cdot c_2)^3 + \delta_{55} (c_1 \cdot C \cdot c_3)^3 + \delta_{56} (c_2 \cdot C \cdot c_3)^3 + (c_2 \cdot C \cdot c_3)^2 \sum \delta_{56+i} c_i \cdot C \cdot c_i + \delta_{60} c_1 \cdot C \cdot c_1 c_2 \cdot C \cdot c_2 c_1 \cdot C \cdot c_2 + \\ & + \delta_{61} c_1 \cdot C \cdot c_1 c_2 \cdot C \cdot c_2 c_1 \cdot C \cdot c_3 + \delta_{62} c_1 \cdot C \cdot c_1 c_2 \cdot C \cdot c_2 c_2 \cdot C \cdot c_3 + \delta_{63} c_1 \cdot C \cdot c_1 c_3 \cdot C \cdot c_3 c_1 \cdot C \cdot c_2 + \\ & + \delta_{64} c_1 \cdot C \cdot c_1 c_3 \cdot C \cdot c_3 c_1 \cdot C \cdot c_3 + \delta_{65} c_1 \cdot C \cdot c_1 c_3 \cdot C \cdot c_3 c_2 \cdot C \cdot c_3 + \delta_{66} c_2 \cdot C \cdot c_2 c_3 \cdot C \cdot c_3 c_1 \cdot C \cdot c_2 + \\ & + \delta_{67} c_2 \cdot C \cdot c_2 c_3 \cdot C \cdot c_3 c_1 \cdot C \cdot c_3 + \delta_{68} c_2 \cdot C \cdot c_2 c_3 \cdot C \cdot c_3 c_2 \cdot C \cdot c_3 + c_1 \cdot C \cdot c_2 c_1 \cdot C \cdot c_3 \sum \delta_{66+3i} c_i \cdot C \cdot c_i + \\ & + c_1 \cdot C \cdot c_2 c_2 \cdot C \cdot c_3 \sum \delta_{67+3i} c_i \cdot C \cdot c_i + c_1 \cdot C \cdot c_3 c_2 \cdot C \cdot c_3 \sum \delta_{68+3i} c_i \cdot C \cdot c_i, \end{aligned} \quad (3)$$

где ϑ_2, ϑ_3 – анизотропные структуры второй и третьей степени; c – минимальная постоянная, обеспечивающая условие $\vartheta \geq 0$; начальные значения параметров анизотропии $\delta_j = 0$ ($j = 1, 2, \dots, 77$), и тогда ϑ с точностью до постоянной переходит в изотропный потенциал ϑ_0 [3], $i = 1, 2, 3$.

В покомпонентном представлении тензора \mathbf{C} и полученного его ортогональным преобразованием тензора \mathbf{C}' в неподвижном ортонормированном базисе $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= x_1 \mathbf{c}_1 \mathbf{c}_1 + x_2 \mathbf{c}_2 \mathbf{c}_2 + x_3 \mathbf{c}_3 \mathbf{c}_3 + x_4 (\mathbf{c}_1 \mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_2 \mathbf{c}_1) + x_5 (\mathbf{c}_1 \mathbf{c}_3 + \mathbf{c}_3 \mathbf{c}_1) + x_6 (\mathbf{c}_2 \mathbf{c}_3 + \mathbf{c}_3 \mathbf{c}_2), \\ \mathbf{C}' &= y_1 \mathbf{c}_1 \mathbf{c}_1 + y_2 \mathbf{c}_2 \mathbf{c}_2 + y_3 \mathbf{c}_3 \mathbf{c}_3 + y_4 (\mathbf{c}_1 \mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_2 \mathbf{c}_1) + y_5 (\mathbf{c}_1 \mathbf{c}_3 + \mathbf{c}_3 \mathbf{c}_1) + y_6 (\mathbf{c}_2 \mathbf{c}_3 + \mathbf{c}_3 \mathbf{c}_2), \end{aligned} \quad (4)$$

где x_i, y_i – компоненты в тензорном представлении \mathbf{C}, \mathbf{C}' , а тензоры $\mathbf{c}_i \mathbf{c}_j$ – базисные диады [3]. Из (2), (4) и (3), (4) получаем соответственно

$$\begin{aligned} \varrho_2(\mathbf{C}) - \varrho_2(\mathbf{C}') &= \sum (\delta_i (x_i^2 - y_i^2) + \delta_{3+i} (x_i x_4 - y_i y_4) + \delta_{11+i} (x_i x_5 - y_i y_5) + \delta_{15+i} (x_i x_6 - y_i y_6)) + \\ &+ \delta_7 (x_4^2 - y_4^2) + \delta_{11} (x_5^2 - y_5^2) + \delta_{15} (x_6^2 - y_6^2) + \delta_8 (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \delta_9 (x_2 x_3 - y_2 y_3) + \\ &+ \delta_{10} (x_1 x_3 - y_1 y_3) + \delta_{14} (x_3 x_5 - y_3 y_5) + \delta_{19} (x_4 x_5 - y_4 y_5) + \delta_{20} (x_4 x_6 - y_4 y_6) + \delta_{21} (x_5 x_6 - y_5 y_6), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \varrho_3(\mathbf{C}) - \varrho_3(\mathbf{C}') &= \sum \delta_{21+i} (x_i^3 - y_i^3) + \delta_{25} (x_1^2 x_2 - y_1^2 y_2) + \delta_{26} (x_1^2 x_3 - y_1^2 y_3) + \delta_{27} (x_2^2 x_1 - y_2^2 y_1) + \\ &+ \delta_{28} (x_2^2 x_3 - y_2^2 y_3) + \delta_{29} (x_3^2 x_1 - y_3^2 y_1) + \delta_{30} (x_3^2 x_2 - y_3^2 y_2) + \delta_{31} (x_1 x_2 x_3 - y_1 y_2 y_3) + \\ &+ \sum \delta_{31+i} (x_5^2 x_i - y_5^2 y_i) + \delta_{35} (x_4^2 x_5 - y_4^2 y_5) + \delta_{36} (x_4^2 x_6 - y_4^2 y_6) + \delta_{37} (x_5^2 x_4 - y_5^2 y_4) + \\ &+ \delta_{38} (x_5^2 x_6 - y_5^2 y_6) + \delta_{39} (x_6^2 x_4 - y_6^2 y_4) + \delta_{40} (x_6^2 x_5 - y_6^2 y_5) + \delta_{41} (x_4 x_5 x_6 - y_4 y_5 y_6) + \\ &+ \delta_{42} (x_1^2 x_4 - y_1^2 y_4) + \sum \delta_{40+3i} (x_i^2 x_5 - y_i^2 y_5) + \sum \delta_{41+3i} (x_i^2 x_6 - y_i^2 y_6) + \delta_{45} (x_2^2 x_4 - y_2^2 y_4) + \\ &+ \delta_{48} (x_3^2 x_4 - y_3^2 y_4) + \delta_{51} (x_4^2 x_1 - y_4^2 y_1) + \delta_{52} (x_4^2 x_2 - y_4^2 y_2) + \delta_{53} (x_4^2 x_3 - y_4^2 y_3) + \delta_{54} (x_4^3 - y_4^3) + \\ &+ \delta_{55} (x_5^3 - y_5^3) + \delta_{56} (x_6^3 - y_6^3) + \sum \delta_{56+i} (x_6^2 x_i - y_6^2 y_i) + \delta_{60} (x_1 x_2 x_4 - y_1 y_2 y_4) + \\ &+ \delta_{61} (x_1 x_2 x_5 - y_1 y_2 y_5) + \delta_{62} (x_1 x_2 x_6 - y_1 y_2 y_6) + \delta_{63} (x_1 x_3 x_4 - y_1 y_3 y_4) + \\ &+ \delta_{64} (x_1 x_3 x_5 - y_1 y_3 y_5) + \delta_{65} (x_1 x_3 x_6 - y_1 y_3 y_6) + \delta_{66} (x_2 x_3 x_4 - y_2 y_3 y_4) + \\ &+ \delta_{67} (x_2 x_3 x_5 - y_2 y_3 y_5) + \delta_{68} (x_2 x_3 x_6 - y_2 y_3 y_6) + \sum \delta_{66+3i} (x_i x_4 x_5 - y_i y_4 y_5) + \\ &+ \sum \delta_{67+3i} (x_i x_4 x_6 - y_i y_4 y_6) + \sum \delta_{68+3i} (x_i x_5 x_6 - y_i y_5 y_6). \end{aligned} \quad (6)$$

Скаляр инвариантный в группе симметрии трансверсальной изотропии остается неизменным при преобразовании поворота на любой угол φ вокруг направления ее оси \mathbf{c} [3]:

$$\begin{aligned} \varrho(\mathbf{C}) - \varrho(\mathbf{C}') &= 0, \\ \mathbf{C}' &= (\mathbf{E} \cos \varphi + (1 - \cos \varphi) \mathbf{c} \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{E} \sin \varphi) \cdot \mathbf{C} \cdot (\mathbf{E} \cos \varphi + (1 - \cos \varphi) \mathbf{c} \mathbf{c} - \mathbf{c} \times \mathbf{E} \sin \varphi), \\ \mathbf{E} &= \mathbf{c}_1 \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 \mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_3 \mathbf{c}_3. \end{aligned} \quad (7)$$

Скаляр инвариантный в группе симметрии изотропии остается неизменным при преобразовании поворота на любой угол для любого направления: $\varrho_0(\mathbf{C}) - \varrho_0(\mathbf{C}') = 0$. Обозначим $a = \sin \varphi, b = \cos \varphi; N = \{1-3, 7-11, 15, 22-34, 41, 51-53, 57-59\}$. Полагая $\mathbf{c} = \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$ из (4), (7) находим

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2 b^2 - 2x_6 a b + x_3 a^2, \quad y_3 = x_2 a^2 + 2x_6 a b + x_3 b^2, \quad (8)$$

$$y_4 = x_4 b - x_5 a, \quad y_5 = x_4 a + x_5 b, \quad y_6 = (x_2 - x_3) a b + x_6 (b^2 - a^2),$$

$$y_1 = y_1 b^2 + x_3 a^2 - 2x_5 a b, \quad y_2 = x_2, \quad y_3 = x_1 a^2 + x_3 b^2 + 2x_5 a b, \quad (9)$$

$$y_4 = x_4 b - x_6 a, \quad y_5 = (x_1 - x_3) a b + x_5 (b^2 - a^2), \quad y_6 = x_6 b + x_4 a,$$

$$y_1 = x_1 b^2 - 2x_4 a b + x_2 a^2, \quad y_2 = x_1 a^2 + 2x_4 a b + x_2 b^2, \quad y_3 = x_3, \quad (10)$$

$$y_4 = (x_1 - x_2) a b + x_4 (b^2 - a^2), \quad y_5 = x_5 b - x_6 a, \quad y_6 = x_6 b + x_5 a.$$

Лемма 1. Для трансверсальной изотропности материала (1)–(3) с направлением оси $\mathbf{c} = \mathbf{c}_1$ необходимо и достаточно, чтобы имели место соотношения $\delta_j = 0 \quad (j \notin N)$ и

$$\begin{aligned} \delta_3 &= \delta_2, \quad \delta_8 = \delta_{10}, \quad \delta_{24} = \delta_{23}, \quad \delta_{26} = \delta_{25}, \quad \delta_{29} = \delta_{27}, \quad \delta_{30} = \delta_{28}, \\ \delta_{11} &= \delta_7, \quad \delta_{41} = 2(\delta_{34} - \delta_{33}), \quad \delta_{51} = \delta_{32}, \quad \delta_{53} = \delta_{33}, \quad \delta_{52} = \delta_{34}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\delta_{15} = 2\delta_2 - \delta_9, \quad \delta_{59} = \delta_{58} = 3\delta_{23} - \delta_{28}, \quad \delta_{57} = 2\delta_{27} - \delta_{31}. \quad (12)$$

Доказательство. Полагаем последовательно в (8) $\varphi = \pi, \pi/2, \pi/4$. Приравнявая нулю коэффициенты при x_n, x_m и x_n, x_m, x_k форм (5), (6), получаем (11), (12) и $\delta_j = 0$ ($j \notin N$). Необходимые условия трансверсальной изотропности материала с учетом нулевых значений δ_j являются и достаточными, как следует из тождеств, полученных из (5), (6), (8), (11), (12):

$$\begin{aligned} \varepsilon_2(\mathbf{C}) - \varepsilon_2(\mathbf{C}') &= (1 - a^2 - b^2)(2\delta_2(x_2^2 + x_3^2 + x_6^2) + \delta_7(x_4^2 + x_5^2) + 2\delta_9(x_2x_3 - x_6^2) + \delta_{10}x_1(x_2 + x_3)) = 0, \\ \varepsilon_3(\mathbf{C}) - \varepsilon_3(\mathbf{C}') &= (1 - a^2 - b^2)(3\delta_{23}(x_2 + x_3)(x_2^2 - x_2x_3 + 3x_6^2 + x_3^2) + \delta_{25}x_1^2(x_2 + x_3) + \\ &+ 2\delta_{27}x_1(x_2^2 + x_3^2 + 2x_6^2) + 3\delta_{28}(x_2 + x_3)(x_2x_3 - x_6^2) + \delta_{31}x_1(x_6^2 - x_2x_3) + \delta_{32}x_1(x_4^2 + x_5^2) + \\ &+ 2\delta_{33}(x_5^2x_2 + x_4^2x_3 - 2x_4x_5x_6) + 2\delta_{34}(x_4^2x_2 + x_5^2x_3 + 2x_4x_5x_6)) = 0. \end{aligned}$$

Лемма 2. Для трансверсальной изотропности материала (1)–(3) с направлением оси $\mathbf{c} = \mathbf{c}_2$ необходимо и достаточно, чтобы имели место соотношения $\delta_j = 0$ ($j \notin N$) и

$$\delta_1 = \delta_3, \quad \delta_9 = \delta_8, \quad \delta_{22} = \delta_{24}, \quad \delta_{28} = \delta_{27}, \delta_{29} = \delta_{26}, \quad \delta_{30} = \delta_{25}, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \delta_7 = \delta_{15}, \quad \delta_{41} = 2(\delta_{51} - \delta_{57}), \quad \delta_{52} = \delta_{58}, \quad \delta_{53} = \delta_{57}, \quad \delta_{59} = \delta_{51}, \\ \delta_{11} = 2\delta_3 - \delta_{10}, \quad \delta_{34} = \delta_{32} = 3\delta_{24} - \delta_{26}, \quad \delta_{33} = 2\delta_{25} - \delta_{31}. \end{aligned} \quad (14)$$

С использованием (9) рассуждения здесь аналогичны, как и в лемме 1 с учетом тождеств

$$\begin{aligned} \varepsilon_2(\mathbf{C}) - \varepsilon_2(\mathbf{C}') &= (1 - a^2 - b^2)(2\delta_1(x_1^2 + x_3^2 + 2x_5^2) + \delta_8x_2(x_1 + x_3) + 2\delta_{10}(x_1x_3 - x_5^2) + \delta_{15}(x_4^2 + x_6^2)) = 0, \\ \varepsilon_3(\mathbf{C}) - \varepsilon_3(\mathbf{C}') &= (1 - a^2 - b^2)(3\delta_{24}(x_1 + x_3)(x_1^2 - x_1x_3 + 3x_5^2 + x_3^2) + 2\delta_{25}x_2(x_1^2 + x_3^2 + 2x_5^2) + \\ &+ 3\delta_{26}(x_1 + x_3)(x_1x_3 - x_5^2) + 2\delta_{27}x_2^2(x_1 + x_3) + \delta_{31}2x_2(x_1x_3 - x_5^2) + 2\delta_{51}(x_4^2x_1 + x_6^2x_3 + 2x_4x_5x_6) + \\ &+ 2\delta_{57}(x_6^2x_1 + x_4^2x_3 - 2x_4x_5x_6) + 2\delta_{58}x_2(x_4^2 + x_6^2)) = 0. \end{aligned}$$

Лемма 3. Для трансверсальной изотропности материала (1)–(3) с направлением оси $\mathbf{c} = \mathbf{c}_3$ необходимо и достаточно, чтобы имели место соотношения $\delta_j = 0$ ($j \notin N$) и

$$\delta_2 = \delta_1, \quad \delta_{10} = \delta_9, \quad \delta_{23} = \delta_{22}, \quad \delta_{27} = \delta_{25}, \quad \delta_{28} = \delta_{26}, \quad \delta_{30} = \delta_{29}, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \delta_{15} = \delta_{11}, \quad \delta_{41} = 2(\delta_{32} - \delta_{33}), \quad \delta_{57} = \delta_{33}, \quad \delta_{58} = \delta_{32}, \quad \delta_{59} = \delta_{34}. \\ \delta_7 = 2\delta_1 - \delta_8, \quad \delta_{52} = \delta_{51} = 3\delta_{22} - \delta_{25}, \quad \delta_{53} = 2\delta_{26} - \delta_{31}. \end{aligned} \quad (16)$$

С использованием (10) рассуждения здесь аналогичны, как и в лемме 1 с учетом тождеств

$$\begin{aligned} \varepsilon_2(\mathbf{C}) - \varepsilon_2(\mathbf{C}') &= (1 - a^2 - b^2)(2\delta_2(x_1^2 + x_2^2 + 2x_4^2) + 2\delta_8(x_1x_2 - x_1^2) + 2\delta_9x_3(x_1 + x_2) + \delta_{11}(x_5^2 + x_6^2)) = 0, \\ \varepsilon_3(\mathbf{C}) - \varepsilon_3(\mathbf{C}') &= (1 - a^2 - b^2)(3\delta_{22}(x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + 3x_4^2 + x_2^2) + 3\delta_{25}(x_1 + x_2)(x_1x_2 - x_4^2) + \\ &+ 2\delta_{26}x_3(x_1^2 + x_2^2 + 2x_4^2) + \delta_{29}x_3^2(x_1 + x_2) + \delta_{31}2x_3(x_1x_2 - x_4^2) + 2\delta_{32}(x_5^2x_1 + x_6^2x_2 + 2x_4x_5x_6) + \\ &+ 2\delta_{33}(x_6^2x_1 + x_5^2x_2 - 2x_4x_5x_6) + \delta_{34}x_3(x_5^2 + x_6^2)) = 0. \end{aligned}$$

Лемма 4. Для ортотропного и моноклинного материалов (1)–(3) ограничения типа соотношений (11)–(16) отсутствуют.

Доказательство. Рассмотрим моноклинный материал. Скаляр инвариантный в данной группе симметрии остается неизменным при преобразовании поворота на угол $\varphi = \pi$ вокруг направления одной из осей, пусть для определенности это будет \mathbf{c}_1 . Подставляя в (8) значения $a = 0$, $b = -1$ и приравнявая нулю, коэффициенты при x_n, x_m и x_n, x_m, x_k находим в (5), (6) $\varepsilon_2(\mathbf{C}) - \varepsilon_2(\mathbf{C}') = 0$, $\delta_4 = \delta_5 = \delta_6 = \delta_{12} = \delta_{13} = \delta_{14} = \delta_{20} = \delta_{21} = 0$; $\varepsilon_3(\mathbf{C}) - \varepsilon_3(\mathbf{C}') = 0$, $\delta_{35} = \delta_{37} = \delta_{39} = \delta_{40} = \delta_{42} = \delta_{43} = \delta_{45} = \delta_{46} = \delta_{48} = \delta_{49} = \delta_{54} = \delta_{55} = \delta_{60} = \delta_{61} = \delta_{63} = \delta_{64} = \delta_{66} = \delta_{67} = \delta_{70} = \delta_{71} = \delta_{73} = \delta_{74} = \delta_{76} = \delta_{77} = 0$.

Ненулевых параметров второй и третьей степени может быть 13 и 32.

Пусть материал является ортотропным и векторы $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$ определяют оси симметрии материала. Скаляр инвариантный в рассматриваемой группе симметрии остается неизменным при преобразовании поворота на угол $\varphi = \pi$ вокруг направления осей \mathbf{c}_1 и \mathbf{c}_2 . Заменяя соотношения (8) на (9), дальше таким же образом дополнительно получаем: $\varepsilon_2(\mathbf{C}) - \varepsilon_2(\mathbf{C}') = 0$, $\delta_{16} = \delta_{17} = \delta_{18} = \delta_{19} = 0$; $\varepsilon_3(\mathbf{C}) - \varepsilon_3(\mathbf{C}') = 0$, $\delta_{36} = \delta_{38} = \delta_{44} = \delta_{47} = \delta_{50} = \delta_{56} = \delta_{62} = \delta_{65} = \delta_{68} = \delta_{69} = \delta_{72} = \delta_{75} = 0$. Теперь ненулевых параметров второй и третьей степени может быть 9 и 20. При других выборах осей число параметров не изменится. Ограничения типа (11)–(16) отсутствуют, как и для моноклинного материала.

Ограничений для триклинного материала по его определению нет. Ненулевых параметров второй и третьей степени (2), (3) может быть 21 и 56.

З а м е ч а н и е 1. При переходе от изотропного материала к активному процессу нагружения для трансверсально-изотропного, ортотропного, моноклинного и триклинного материалов выполняется $\mathbf{T} = \mathbf{T}_0 + \sum t_{nm} \mathbf{c}_n \mathbf{c}_m$, где соответственно одна компонента $t_{nn} \neq 0$; более одной $t_{nn} \neq 0$; еще дополнительно одна компонента $t_{nm} \neq 0$ ($n \neq m$) и более одной $t_{nm} \neq 0$ ($n, m = 1, 2, 3$). Примерами таких нагружений являются одноосное растяжение, двухосное сжатие, простой сдвиг и осадка с кручением.

В соотношениях (1)–(3), переходим к мере $\mathbf{G} = 2\mathbf{C} + \mathbf{E}$, поскольку представления через тензор деформации \mathbf{C} более громоздки. Используя формулу $\frac{\partial \mathbf{c}_n \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_m}{\partial \mathbf{G}} = 2^{-1}(\mathbf{c}_n \mathbf{c}_m + \mathbf{c}_m \mathbf{c}_n)$, получаем определяющее уравнение для тензора напряжений Коши [2]:

$$\mathbf{T} = 2L_3^{-1} \mathbf{F}_e \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{G}} \cdot \mathbf{F}_e^T = \mathbf{T}_0 + \sum_j \delta_j \mathbf{T}_j \left(\mathbf{T}_0 = 2L_3^{-1} \mathbf{F}_e \cdot \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \mathbf{G}} \cdot \mathbf{F}_e^T, \mathbf{T}_j = 2L_3^{-1} \mathbf{F}_e \cdot \frac{\partial (\varepsilon_2 + \varepsilon_3)}{\partial \mathbf{G}} \cdot \mathbf{F}_e^T \right), \quad (17)$$

где $\mathbf{G} = \mathbf{F}_e^T \cdot \mathbf{F}_e$, неособенный тензор $\mathbf{F}_e = \mathbf{V} \cdot \mathbf{O}^T$ (согласно полярному разложению [3]) заменяет деформационный градиент, $\mathbf{O}^T = \mathbf{O}^{-1}$, \mathbf{O} – собственно ортогональный тензор поворота, сопровождающий упругую деформацию, L_3 – третий главный инвариант меры упругих искажений \mathbf{V} . Соотношения (1), (17) являются определяющими уравнениями в конечном виде, которые всегда имеют место. Материалы и данные по ним об упругих постоянных для закона Мурнагана, входящих в выражение для \mathbf{T}_0 , представлены в [3, с. 157–159]. В численных экспериментах использован рекристаллизованный вольфрам. Напряжение текучести при растяжении и сжатии, по которому определяется переход материала в пластическое состояние в остальных случаях нагружений, составляет 450 МПа.

В модели [2] активный упругопластический процесс осуществляется путем попеременных чередований пластических и упругих состояний элементов деформируемого твердого тела, поэтому рост анизотропии происходит только при течении (в пластическом состоянии). Введем дифференциальные определяющие уравнения при течении (в упругом состоянии справедливы другие соотношения). Рассмотрим для упрощения основной первый случай [2], когда выполняется $\mathbf{T} \cdot \mathbf{D} > 0$, \mathbf{D} – тензор скорости деформаций.

Уравнение для тензора напряжений Коши имеет вид

$$\overset{\Omega}{\mathbf{T}} = K(\mathbf{Q} - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{N} \mathbf{N}), \quad (18)$$

где $\overset{\Omega}{\mathbf{T}}$ – объективная производная по времени тензора \mathbf{T} , K – малый положительный скаляр, не зависящий от тензора \mathbf{D} , $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{D})$ – девиатор, определяющий критерий течения, \mathbf{N} – нормированный вектор нормали к поверхности текучести при векторной интерпретации симметричного девиатора.

Уравнение для потенциала напряжений полагаем

$$(L_3^{-1} \varepsilon)' = (1 - \alpha) \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}, \quad (19)$$

где α – близкая к единице относительная часть величины рассеиваемой работы деформации.

Уравнение для параметров анизотропии запишем несколько иначе, чем в [2, 6]:

$$\dot{\delta}_j = \beta k_j \mathbf{N} \cdot \mathbf{T}_j \|\mathbf{T}_j\|^{-1} \quad (\mathbf{T}_j \neq 0, \beta \geq 0, (k_j = \pm 1) \vee (k_j = 0), \|\mathbf{T}_j\| = \sqrt{\mathbf{T}_j \cdot \mathbf{T}_j}), \quad \dot{\delta}_j = 0 \quad (\mathbf{T}_j = 0). \quad (20)$$

Тензоры \mathbf{T}_j в первом случае (20) взяты с учетом нормировки ($\mathbf{T}_j \|\mathbf{T}_j\|^{-1} \cdot \mathbf{T}_j \|\mathbf{T}_j\|^{-1} = 1$), поскольку параметры $\dot{\delta}_j$ считаются равноправными. Девиатор \mathbf{N} задает направление действия пластической деформации, порождающей анизотропию. Скаляр β характеризует скорость роста анизотропии, и его можно назвать параметром ее роста.

Лемма 5. Все ограничения с нулевыми значениями параметров анизотропии удовлетворяются вторым случаем в уравнении (20).

Теорема. Определяющие уравнения триклинного упругопластического материала (1)–(3), (17)–(20) позволяют описать рост упругой анизотропии, минимизировать величину β – параметра ее роста по всем наборам k_j , $j = 1, \overline{7}$, и удовлетворить всем ограничениям с нулевыми значениями параметров анизотропии. В особом случае одноосных нагружений, когда первоначально изотропный материал становится трансверсально-изотропным, уравнение (20) следует дополнить соотношениями (12), (14), (16), а ограничения (11), (13), (15) им удовлетворяются.

Доказательство. Расчет упругопластического процесса производится в квазистатическом режиме. Предполагаем, что поле скоростей перемещений известно, т. е. известны тензор \mathbf{D} и тензор упругого спина $\mathbf{\Omega}$, использующийся при определении объективной производной [7]. Известны также все величины в соотношениях (1), (17). Дифференцируя эти уравнения и подставляя их в соотношения (18), (19) с использованием (20), получаем систему одного тензорного и одного скалярного уравнений относительно неизвестных симметричного тензора \mathbf{V} и скаляра β . Она сводится к системе семи скалярных уравнений относительно шести компонент в базисе $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$ производной меры упругих искажений и параметра роста анизотропии. Решение системы находим по методу Крамера. Считаем, что определитель системы $\Delta \neq 0$. Для β получаем $\beta^{-1} = (\Delta_7)^{-1} \Delta$. Если $\Delta_7 = 0$, то получаем $\beta = 0$. Пусть выполняется $\Delta_7 \neq 0$. Элементы седьмого столбца матрицы системы представляются в виде $a_{i7} = \sum_j B_{ij} k_j$, а определитель системы $\Delta = \sum_i A_{i7} a_{i7}$ ($i = \overline{1,7}$), где A_{i7} – алгебраические дополнения элементов седьмого столбца. Имеем $\beta^{-1} = (\Delta_7)^{-1} \sum_i A_{i7} \sum_j B_{ij} k_j = \sum_j ((\Delta_7)^{-1} \sum_i A_{i7} B_{ij}) k_j$. Полагаем $k_j = 1$, если $(\Delta_7)^{-1} \sum_i A_{i7} B_{ij} > 0$ и $k_j = -1$, если $(\Delta_7)^{-1} \sum_i A_{i7} B_{ij} < 0$, иначе $k_j = 0$. Следовательно, величина определителя системы выбрана максимальной по абсолютной величине, что гарантирует выполнение условия $\Delta \neq 0$. Значение β получается минимальным по всем наборам k_j . Кроме того, устойчивость расчетов обеспечивается выбором скаляров K , α в (18), (19).

Согласно лемме 5, большая часть ограничений на параметры анизотропии удовлетворяется. Согласно леммам 1–4, ограничения другого вида возникают только в случае трансверсально-изотропного материала, т. е. при одноосных нагружениях. В силу симметрии соотношений (11)–(16) достаточно рассмотреть один случай, когда, например, $\mathbf{c} = \mathbf{c}_3$. Пусть имеет место одноосное сжатие. Тогда выполняются соотношения: вектор нормали $\mathbf{N} = 3^{-1}(\mathbf{c}_1 \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 \mathbf{c}_2 - 2\mathbf{c}_3 \mathbf{c}_3)$, тензор упругих искажений $\mathbf{V} = V_1(\mathbf{c}_1 \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 \mathbf{c}_2) + V_3 \mathbf{c}_3 \mathbf{c}_3$, мера упругих искажений Коши – Грина $\mathbf{G} = G_1(\mathbf{c}_1 \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 \mathbf{c}_2) + G_3 \mathbf{c}_3 \mathbf{c}_3$, собственно ортогональный тензор упругого поворота $\mathbf{O} = \mathbf{E}$ и вектор $\mathbf{C}_i = \mathbf{O} \cdot \mathbf{c}_i = \mathbf{c}_i$.

Начальные значения параметров анизотропии нулевые, поэтому параметры $\dot{\delta}_j$ в (15), (16) можно заменить на их материальные производные. Согласно второму случаю в (20) (соответствующие $\mathbf{T}_j = 0$), тривиально выполняются соотношения во второй строчке (15): $\dot{\delta}_{15} = \dot{\delta}_{11} = \dot{\delta}_{41} = \dot{\delta}_{32} = \dot{\delta}_{33} = \dot{\delta}_{57} = \dot{\delta}_{58} = \dot{\delta}_{59} = \dot{\delta}_{34} = 0$. Аналогично имеем в (16)

$$\dot{\delta}_7 = \dot{\delta}_{51} = \dot{\delta}_{52} = \dot{\delta}_{53} = 0. \quad (21)$$

Величины в соотношениях первой строки (15) и в правых частях (16) находятся согласно первому случаю в (20). Конкретизируем необходимые выражения в (17):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}_i &= L_3^{-1}(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_i - 1)\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_i \mathbf{C}_i \cdot \mathbf{V}, \quad \mathbf{T}_{21+i} = 4^{-1}3L_3^{-1}(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_i - 1)^2\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_i \mathbf{C}_i \cdot \mathbf{V} \quad (i=1,2), \\
 \mathbf{T}_8 &= L_3^{-1}2^{-1}\mathbf{V} \cdot ((\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{C}_1 \mathbf{C}_1 + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)\mathbf{C}_2 \mathbf{C}_2) \cdot \mathbf{V}, \\
 \mathbf{T}_9 &= L_3^{-1}2^{-1}\mathbf{V} \cdot ((\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{C}_3 \mathbf{C}_3 + (\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{C}_2 \mathbf{C}_2) \cdot \mathbf{V}, \\
 \mathbf{T}_{10} &= L_3^{-1}2^{-1}\mathbf{V} \cdot ((\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{C}_1 \mathbf{C}_1 + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)\mathbf{C}_3 \mathbf{C}_3) \cdot \mathbf{V}, \\
 \mathbf{T}_{25} &= 4^{-1}L_3^{-1}(2(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)^2\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V}), \\
 \mathbf{T}_{26} &= 4^{-1}L_3^{-1}(2(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V} + (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)^2\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V}), \\
 \mathbf{T}_{27} &= 4^{-1}L_3^{-1}(2(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} + (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)^2\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V}), \\
 \mathbf{T}_{28} &= 4^{-1}L_3^{-1}(2(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} + (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)^2\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V}), \\
 \mathbf{T}_{29} &= 4^{-1}L_3^{-1}(2(\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} + (\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)^2\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V}), \\
 \mathbf{T}_{30} &= 4^{-1}L_3^{-1}(2(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} + (\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)^2\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V}), \\
 \mathbf{T}_{31} &= 4^{-1}L_3^{-1}((\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)(\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_3 \mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{V} + \\
 &+ (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_1 - 1)(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{V} + (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_2 - 1)(\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_3 - 1)\mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{V}).
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

Проверим выполнение шести дифференциальных соотношений в первой строке (15) с использованием (20), (22). Вычисляем $\mathbf{T}_1 = L_3^{-1}(G_1 - 1)V_1^2\mathbf{c}_1\mathbf{c}_1$, $\mathbf{T}_2 = L_3^{-1}(G_1 - 1)V_1^2\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2$, $\|\mathbf{T}_1\| = L_3^{-1}(G_1 - 1)V_1^2 = \|\mathbf{T}_2\|$, $\mathbf{N} \cdot \mathbf{T}_1 = L_3^{-1}3^{-1}(G_1 - 1)V_1^2 = \mathbf{N} \cdot \mathbf{T}_2$. Значения k_j , как указано выше, определяются знаком величин $(\Delta_7)^{-1} \sum_i A_{i7}B_{ij}$. Имеем $B_{71} = L_3^{-1}4^{-1}(G_1 - 1)^2 = B_{72}$, значение величины $|A_{77}|$ на три порядка превосходит значения величин $|A_{i7}|$. (Этот факт подтверждается проведенными в данной работе численными экспериментами в случаях, когда аналитическая оценка была затруднена.) Значения величин B_{71} и B_{n1} , а также B_{72} и B_{n2} , являются величинами одного порядка ($n = \overline{1, 6}$). Отсюда следует, что значения k_1, k_2 определяются знаками величин $(\Delta_7)^{-1}A_{77}B_{71}$ и $(\Delta_7)^{-1}A_{77}B_{72}$ соответственно. Поскольку знаки последних совпадают, то получаем $k_1 = k_2$, и, значит, $\delta_2 = \delta_1$. Первое соотношение $\delta_2 = \delta_1$ выполняется. Имеем дальше

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{T}_9\| &= L_3^{-1}2^{-1}\sqrt{(G_1 - 1)^2V_3^2 + (G_3 - 1)^2V_1^2} = \|\mathbf{T}_{10}\|, \quad \mathbf{N} \cdot \mathbf{T}_9 = L_3^{-1}6^{-1}((G_3 - 1)V_1^2 - 2(G_1 - 1)V_3^2) = \mathbf{N} \cdot \mathbf{T}_{10}; \\
 \|\mathbf{T}_{22}\| &= L_3^{-1}12V_1^2(G_1 - 1)^2 = \|\mathbf{T}_{23}\|, \quad \mathbf{N} \cdot \mathbf{T}_{22} = L_3^{-1}4^{-1}V_1^2(G_1 - 1)^2 = \mathbf{N} \cdot \mathbf{T}_{23}; \\
 \|\mathbf{T}_{25}\| &= L_3^{-1}4V_1^2(G_1 - 1)^2 = \|\mathbf{T}_{27}\|, \quad \mathbf{N} \cdot \mathbf{T}_{25} = L_3^{-1}4^{-1}V_1^2(G_1 - 1)^2 = \mathbf{N} \cdot \mathbf{T}_{27}; \\
 \|\mathbf{T}_{26}\| &= L_3^{-1}2^{-1}\sqrt{(G_1 - 1)^2(G_3 - 1)^2V_1^4 + V_3^4} = \|\mathbf{T}_{28}\|, \quad \mathbf{N} \cdot \mathbf{T}_{26} = L_3^{-1}12^{-1}((G_1 - 1)(G_3 - 1)V_1^2 - 2V_3^2) = \mathbf{N} \cdot \mathbf{T}_{28}; \\
 \|\mathbf{T}_{29}\| &= L_3^{-1}4^{-1}\sqrt{4(G_1 - 1)^2(G_3 - 1)^2V_3^4 + V_1^4} = \|\mathbf{T}_{30}\|, \\
 \mathbf{N} \cdot \mathbf{T}_{29} &= L_3^{-1}12^{-1}(-4(G_1 - 1)(G_3 - 1)V_3^2 + V_1^2) = \mathbf{N} \cdot \mathbf{T}_{30}.
 \end{aligned}$$

Имеют место также равенства $k_{10} = k_9$, $k_{23} = k_{22}$, $k_{27} = k_{25}$, $k_{28} = k_{26}$, $k_{30} = k_{29}$. Следовательно, соотношения в первой строке (15) выполняются.

Вычислим величины в дифференциальной форме в правых частях соотношений (16) по первому случаю в (20): $\|\mathbf{T}_8\| = L_3^{-1}(\sqrt{2})^{-1}V_1^2(G_1 - 1)$, $\mathbf{N} \cdot \mathbf{T}_8 = L_3^{-1}3^{-1}V_1^2(G_1 - 1)$, $2\dot{\delta}_1 - \dot{\delta}_8 = (2 - 3^{-1}\sqrt{2})k_1\beta \neq 0$ ($k_1 = k_8$). Имеем из (21) $\delta_7 = 0$. Первое соотношение в (16) не выполняется. Аналогично не выполняется второе соотношение: $3\dot{\delta}_{22} - \dot{\delta}_{25} = (9 - \sqrt{5})k_{22}\beta \neq 0$ ($k_{22} = k_{25}$). Невыполнение третьего соотношения $2\dot{\delta}_{26} - \dot{\delta}_{31} \neq 0$ не столь очевидно. Здесь также можно сослаться на данные проведенных

вычислительных экспериментов. Одноосные нагружения являются базовыми экспериментами, поэтому уравнение (20) требуется дополнить соотношениями (12), (14), (16).

З а м е ч а н и е 2. В [3] отмечен еще и кубически изотропный материал. Скаляр инвариантный в группе симметрии кубической изотропии остается неизменным при преобразовании поворота на угол $\pi / 2$ вокруг направления осей $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$. Аналогично получаем возможные ненулевые параметры δ_j , которые можно разделить на 9 групп: $j \in \{1, 2, 3\}$, $j \in \{8, 9, 10\}$, $j \in \{22, 23, 24\}$, $j \in \{25, 26, 27, 28, 29, 30\}$, $j \in \{7, 11, 15\}$, $j \in \{32, 34, 51, 52, 58, 59\}$, $j \in \{33, 53, 57\}$, $j = 31$, $j = 41$. Значения параметров из первых 7 групп совпадают. Однако кубическая анизотропия не является деформационной, т. е. возникающей в результате пластической деформации первоначально изотропного материала. В самом деле, по определению кубическая анизотропия является разновидностью ортотропной. Самый благоприятный пример для удовлетворения указанным соотношениям представляет собой растяжение (сжатие) по первой, второй или третьей оси и равные сжатия (растяжения) с учетом несжимаемости по двум другим осям. Получаются обычные одноосные нагружения при наложении дополнительного переменного гидростатического давления. Поскольку гидростатическое давление не изменяет вида анизотропии, то в результате пластической деформации образуется трансверсально-изотропный материал.

Выводы. В математически строгой нелинейной теории упругопластичности, в отличие от линейной теории, постулируемые определяющие уравнения, которые описывают поведение материала деформируемого твердого тела, должны быть справедливы во всех частных случаях. Поэтому при формулировке определяющего уравнения для параметров анизотропии рассматривался материал общего вида анизотропии – триклинный. Проверяться пригодность уравнения (20) для описания полученных ограничений. В результате для частных видов анизотропии найдены формально непротиворечивые определяющие соотношения (20), (12), (14), (16), которые подлежат дальнейшей экспериментальной проверке. Реализована процедура минимизации параметра роста анизотропии в (20).

Список использованных источников

1. Naghdi, P. M. A critical review of the state of finite plasticity / P. M. Naghdi // ZAMP. – 1990. – Vol. 41, № 3. – P. 315–394.
2. Швед, О. Л. Модель нелинейно упругопластического материала / О. Л. Швед // Вест. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2014. – № 1. – С. 63–68.
3. Лурье, А. И. Нелинейная теория упругости / А. И. Лурье. – М.: Наука, 1980. – 512 с.
4. Murnaghan, F. D. Finite Deformation of an Elastic Solid / F. D. Murnaghan. – New York: Wiley; London: Chapman & Hall, 1951. – 140 p.
5. Работнов, Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела / Ю. Н. Работнов. – М.: Наука, 1988. – 711 с.
6. Швед, О. Л. Критерий разрушения в модели моноклинного упругопластического материала / О. Л. Швед // Вест. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. – 2015. – № 4. – С. 46–53.
7. Швед, О. Л. Определение тензора упругого спина в нелинейной теории пластичности / О. Л. Швед // Вест. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2009. – № 1. – С. 52–58.

References

1. Naghdi P.M. A critical review of the state of finite plasticity. *Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik*, 1990, vol. 41, no. 3, pp. 315–394. Doi: 10.1007/bf00959986
2. Shved O.L. Model of nonlinear elastic-plastic material. *Vestsi Natsyianalnai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series], 2014, no. 1, pp. 63–68. (In Russian).
3. Lur'e A.I. *Nonlinear Elasticity Theory*. Moscow, Nauka Publ., 1980. 512 p. (In Russian).
4. Murnaghan F.D. *Finite Deformation of an Elastic Solid*. New York: Wiley; London: Chapman & Hall, 1951. 140 p.
5. Rabotnov Yu.N. *Fracture mechanics*. Moscow, Nauka Publ., 1988. 711 p. (In Russian).
6. Shved O.L. Failure criterion in the model of monoclinic elastic-plastic material. *Vestsi Natsyianalnai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika- tekhnichnykh navuk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physico-Technical series], 2015, no. 4, pp. 46–53. (In Russian).
7. Shved O.L. Determination of the elastic spin tensor in the nonlinear theory of plasticity. *Vestsi Natsyianalnai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series], 2009, no. 1, pp. 52–58. (In Russian).

Информация об авторе

Швед Олег Лаврентьевич – кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории исследования операций, Объединенный институт проблем информатики Национальной Академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 6, 220012, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: swed@newman.bas-net.by

Для цитирования

Швед, О. Л. Учет упругой анизотропии триклинного упругопластического материала / О. Л. Швед // Вес. Нац. акад навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2017. – № 1. – С. 89–97.

Information about author

Shved Oleg Lavrent'evich – Ph. D. (Technical), Leading Researcher of the Operational Research Laboratory, United Institute of Informatics Problems, National Academy of Sciences of Belarus (6, Surganonov Str., Minsk, 220012, Belarus). E-mail: swed@newman.bas-net.by

For citation

Shved O.L. Considering the increase in elastic anisotropy of triclinic elastic-plastic material. *Vesti Natsyional'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series], 2017, no. 1, pp. 89–97. (In Russian).

ФИЗИКА
PHYSICS

УДК 531:530.145; 537.9; 548.4

Поступила в редакцию 24.11.2016

Received 24.11.2016

**А. П. Низовцев¹, А. Л. Пушкарчук^{2,3}, С. А. Кутень³, В. А. Пушкарчук⁴,
С. Я. Килин¹, А. В. Лузанов⁵, О. А. Жикол⁵**

¹Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь²Институт физико-органической химии Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь³Институт ядерных проблем Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь⁴Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь⁵Научно-технологический комплекс «Институт монокристаллов»

Национальной академии наук Украины, Харьков, Украина

**СТАБИЛЬНЫЕ ЭЛЕКТРОННО-ЯДЕРНЫЕ СПИНОВЫЕ СИСТЕМЫ NV⁻¹³C
В АЛМАЗЕ ДЛЯ КВАНТОВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ**

Методами компьютерной химии рассчитаны матрицы A_{KL} , описывающие сверхтонкое взаимодействие (СТВ) электронного спина центра окраски «азот-вакансия» (NV-центра) в алмазе с ядерным спином атома ^{13}C , который расположен в одном из возможных узлов решетки в пассивированном водородом углеродном кластере $\text{C}_{510}[\text{NV}]\text{H}_{252}$. Выполнен систематический анализ скоростей W_0 переверотов ядерных спинов ^{13}C , индуцируемых их анизотропным СТВ с электронным спином NV-центра. Показано, что в кластере имеются специфические позиции ядерного спина ^{13}C , в которых он практически не испытывает таких переверотов вследствие малости недиагональных элементов в соответствующих матрицах A_{KL} . Определено пространственное расположение найденных позиций стабильности в кластере относительно NV-центра и рассчитаны величины характерных расщеплений в спектрах оптически детектируемого магнитного резонанса (ОДМР) для стабильных систем NV⁻¹³C, по которым их можно идентифицировать в процессе их экспериментального поиска для использования в разрабатываемых квантовых технологиях. Показано, что полностью стабильными ($W_0 = 0$) являются позиции ядерного спина, расположенные на оси симметрии NV-центра. Найденны характеристики восьми таких «осевых» систем NV⁻¹³C. Впервые обнаружено наличие в кластере дополнительных «неосевых» квазистабильных систем NV⁻¹³C, имеющих малые скорости переверотов ($W_0 \rightarrow 0$) спина ^{13}C вследствие высокой локальной симметрии распределения спиновой плотности, обуславливающей малость недиагональных элементов матриц СТВ для таких систем. Пространственно «не осевые» стабильные системы NV⁻¹³C расположены в плоскости, проходящей через вакансию NV-центра перпендикулярно его оси. Выполненный анализ имеющихся литературных данных показал, что, по-видимому, некоторые из предсказанных стабильных систем NV⁻¹³C уже наблюдались экспериментально.

Ключевые слова: квантовые технологии, кубиты, NV-центр в алмазе, спины, сверхтонкое взаимодействие, квантово-химическое моделирование.

A. P. Nizovtsev¹, A. L. Pushkarchuk^{2,3}, S. A. Kuten³, V. A. Pushkarchuk⁴, S. Ya. Kilin¹, A. V. Luzanov⁵, O. A. Zhikol⁵

¹B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus²Institute of Physical-Organic Chemistry of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus³Institute for Nuclear Problems of the Belarusian State University, Minsk, Belarus⁴Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Belarus⁵SSI Institute of Single Crystals of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv, Ukraine

**ROBUST ELECTRONIC-NUCLEAR NV⁻¹³C SPIN SYSTEMS IN THE DIAMOND
FOR QUANTUM TECHNOLOGIES**

Using the methods of computational chemistry, we calculated matrices A_{KL} describing hyperfine interactions (HFI) between the electron spin of the color 'nitrogen-vacancy' center (NV center) in a diamond and a ^{13}C nuclear spin located somewhere in the H-terminated carbon cluster $\text{C}_{510}[\text{NV}]\text{H}_{252}$ hosting the NV center. The rates W_0 of the ^{13}C spin flip-flops induced

by anisotropic HFI are calculated systematically for all possible locations of ^{13}C in the cluster. It is shown that in the cluster, there are specific positions of nuclear ^{13}C spin, in which it almost does not undergo such flip-flops due to small off-diagonal elements in corresponding matrices A_{KL} . Spatial locations of the ^{13}C stability positions in the cluster are discovered and characteristic splitting values in the spectra of optically detected magnetic resonance (ODMR) for the stable NV- ^{13}C systems are calculated, which can be utilized to identify them during their experimental search for use in emerging quantum technologies. It is shown that the positions of the ^{13}C nuclear spin located on the NV center symmetry axis are completely stable ($W_0 = 0$). The characteristics of eight ‘axial’ NV- ^{13}C systems are elucidated. The presence of additional ‘non-axial’ near-stable NV- ^{13}C spin systems also exhibiting very low flip-flop rates ($W_0 \rightarrow 0$) due to a high local symmetry of the spin density distribution resulting in vanishing the off-diagonal HFI matrix A_{KL} elements for such systems is revealed for the first time. Spatially, these ‘non-axial’ stable NV- ^{13}C systems are located near the plane passing through the vacancy of the NV center and being perpendicular to the NV axis. Analysis of the available publications showed that apparently, some of the predicted stable NV- ^{13}C systems have already been observed experimentally.

Keywords: quantum technologies, qubits, NV center in diamond, spins, hyperfine interaction, quantum-chemical simulation.

В современном мире все более широкое применение находят квантовые технологии, основанные на использовании законов квантовой физики для практического управления квантовыми системами на уровне их индивидуальных компонентов – атомов, молекул, примесных центров, фотонов и т. п. Прогресс в разработке таких технологий уже в ближайшее время приведет к созданию принципиально новых методов обработки информации и безопасной ее передачи на большие расстояния, созданию миниатюрных метрологических систем для потребностей нанотехнологий и биомедицинских применений (см., напр., [1, 2]). Особенно перспективным для этих целей является применение одиночных квантовых систем в твердых телах, в частности «гибридных» систем взаимодействующих электронных и ядерных спинов, где электроны играют роль «быстрых» кубит и могут использоваться в качестве интерфейсов с «летающими» кубитами – фотонами, а ядерные спины могут хранить квантовую информацию в течение долгого времени благодаря их исключительно высокой изоляции от окружения [3–6]. Важным преимуществом таких систем является возможность применения хорошо разработанных методов магнитного резонанса, а также огромного потенциала методов и технологий, накопленного в процессе миниатюризации полупроводниковых устройств и интегральных схем.

Наиболее известным и активно изучаемым в последнее десятилетие представителем одиночных электронно-ядерных систем является центр окраски «азот-вакансия» (NV-центр) в алмазе, который состоит из замещающего атома азота (N) и вакансии (V) в соседнем узле решетки алмаза [7–11] (рис. 1, а). В нем электронным кубитом является спин $S = 1$ NV-центра в основном триплетном электронном состоянии, а ядерными спинами – спин $I^{(N)} = 1$ атома ^{14}N , принадлежащего данному NV-центру, и потенциально – ядерные спины $I^{(C)} = 1/2$ изотопических атомов ^{13}C , распределенных случайно в решетке алмаза и замещающих бесспиновые атомы ^{12}C с вероятностью 1,1 % (в естественных условиях). Центр обладает уникальным набором взаимосвязанных фотофизических и спиновых свойств, которые обеспечивают возможность оптической инициализации спинового состояния (с проекцией $m_s = 0$) одиночного электронного спина $S = 1$ и его считывания посредством измерения интенсивности испускаемой центром флуоресценции. Сверхтонкие взаимодействия (СТВ) электронного спина NV-центра с ядерными спинами, используемыми в качестве дополнительных кубит, позволяют выполнять многокубитные операции, которые могут быть реализованы с помощью последовательности оптических, микроволновых или радиочастотных импульсов для инициализации, манипулирования и считывания состояний электронно-ядерных спиновых систем NV- ^{13}C . Впервые это было сделано в 2004 г. в работе [12], где экспериментально была реализована операция «условное НЕ» в системе двух кубитов, которыми являлись электронный спин NV-центра и ядерный спин атома ^{13}C , расположенного в ближайшем к вакансии узле решетки алмаза. Важно отметить, что в данном исследовании впервые одна из квантовых операций была реализована при комнатной температуре. Именно это обстоятельство предопределило резкий рост интереса к изучению одиночных NV-центров. Ими стали активно заниматься многие научные группы во всем мире, усилиями которых в последующие годы были не только детально исследованы электронные и спиновые свойства NV-центров, выяснены разнообразные моменты их весьма нетривиальной фотофизики и ее связи со спиновыми свойствами центров, но и существенно развита инженерия алмаза [13–15]

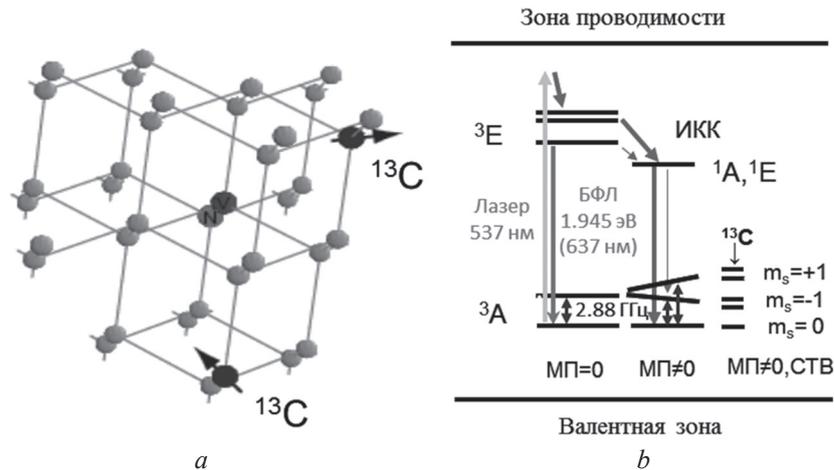


Рис. 1. Центр окраски «азот-вакансия» (NV-центр) в алмазе: *a* – схематическое изображение NV-центра в решетке алмаза и потенциально присутствующих ядерных спинов $I = 1/2$ изотопических атомов ^{13}C ; *b* – энергетические уровни NV-центра и возможные переходы между ними при отсутствии и наличии внешнего магнитного поля (МП = 0 и $\text{МП} \neq 0$ соответственно), а также с учетом сверхтонкого взаимодействия электронного спина центра с ядерным спином атома ^{13}C . Центр эффективно возбуждается из основного триплетного состояния ^3A излучением «зеленого» лазера и испускает яркую «красную» флуоресценцию в триплет-триплетном оптическом переходе $^3\text{E} \rightarrow ^3\text{A}$, интенсивность которой зависит от проекции спина $S = 1$ вследствие спин-селективных интеркомбинационных (ИКК) переходов в синглетные состояния ^1A , ^1E , скорости которых велики для проекций $m_s = \pm 1$ и малы для проекции $m_s = 0$. Такая спин-селективность ИКК переходов обеспечивает оптическую инициализацию состояния $m_s = 0$ центра, а также возможность оптического считывания спинового состояния центра

Fig. 1. “Nitrogen-vacancy” color center (NV center) in the diamond: *a* – schematic presentation of the NV center and isotopic ^{13}C atoms with nuclear spin $I = 1/2$ potentially presenting in the diamond lattice; *b* – NV center energy levels and possible transitions between them in the absence and in the presence of the applied magnetic field (MF = 0 and $\text{MF} \neq 0$) respectively, as well as those with the account of hyperfine interaction of the NV center electron spin with the ^{13}C nuclear atom spin. The center is excited efficiently by a “green” laser from the ground triplet state ^3A and emits bright “red” fluorescence in the triplet-triplet optical transition $^3\text{E} \rightarrow ^3\text{A}$, the intensity of which depends on the spin $S = 1$ projection due to the spin-selective intersystem crossing (ISC) transitions to the singlet states ^1A , ^1E , having large rates for projections $m_s = \pm 1$ and small ones for the projection $m_s = 0$. Such ISC transitions spin-selectivity results in the optical initialization of the $m_s = 0$ sub-state of the center and provides the opportunity of optical readout of the spin state of the center

(синтез чистого и даже изотопически чистого алмаза, создание в нем на заданной глубине NV-центров имплантацией, изготовление волноводных, фотонно-кристаллических структур в алмазе и т. п.). В частности, благодаря разработке динамических методов [16] подавления дефазировки состояний электронного спина центра под действием флуктуирующего спинового окружения удалось наблюдать одиночные NV-центры, слабо связанные с достаточно удаленными одиночными ядерными спинами ^{13}C [17–20], которые также стало возможным использовать в качестве кубитов. В настоящее время можно считать хорошо отработанными методы инициализации, когерентного манипулирования и измерения состояний электронных и ядерных спинов в системах NV– ^{13}C с целью их использования для различных целей в качестве квантовых регистров и квантовой памяти.

Еще одной многообещающей областью применения одиночных NV-центров является их использование в качестве сенсоров для измерения сверхслабых магнитных и электрических полей, а также температуры с высоким (нанометровым) пространственным разрешением (см., напр., обзоры [21, 22]). Физической основой метрологических применений NV-центров служит возможность измерения расщепления состояний NV-центра с проекциями электронного спина $m_s = \pm 1$ (рис. 1, *b*), величина которого напрямую связана с напряженностями действующих на центр полей. Для биологических приложений исключительно важным является то обстоятельство, что такие измерения можно проводить при комнатных температурах. Дополнительным позитивным фактором здесь является также то, что нанокристаллы алмаза с NV-центрами нетоксичны и биоинертны. Оценки предсказывали возможность детектирования одиночных электронных и даже ядерных спинов на нанометровых расстояниях, что недавно и было реализовано экспериментально. В перспективе это может привести к созданию нового направления ЯМР спектроскопии

наноразмерных образцов. Детальные обзоры основных результатов можно найти в работах [23, 24]. Следует также отметить, что в настоящее время проводится активный поиск других парамагнитных центров окраски в алмазе [25] и карбиде кремния [26, 27], демонстрирующих в некоторых случаях даже лучшие для применений характеристики по сравнению с NV-центрами.

Для практической реализации разрабатываемых квантовых технологий на основе «гибридных» спиновых систем необходимо иметь полную информацию об их спиновых свойствах и характеристиках сверхтонких взаимодействий в таких системах, а также их взаимосвязях с оптическими характеристиками. В экспериментах с одиночными спиновыми системами для этой цели стандартно используются методы оптически детектируемого магнитного резонанса (ОДМР) (см. напр., [7]), обеспечивающие повышение чувствительности на 7 порядков по сравнению с обычным методом электронного парамагнитного резонанса (ЭПР), благодаря чему оказывается возможным наблюдать разнообразные стационарные и нестационарные явления ОДМР на одиночных системах NV-¹³C и на основе анализа экспериментальных данных определять элементы матриц СТВ, в том числе и для систем с достаточно удаленными ядерными спинами ¹³C [17–20].

Альтернативным способом определения характеристик сверхтонких взаимодействий является применение современных методов компьютерного моделирования изучаемых спиновых систем, которые позволяют достаточно точно рассчитать пространственные, электронные и спиновые характеристики наноразмерных кластеров [28–33] или суперячеек [34, 35] алмаза, содержащих NV-центры, и далее – характеристики СТВ для различных систем NV-¹³C, отличающихся взаимным расположением электронного и ядерного спинов. В свою очередь последние можно использовать в методе спин-гамильтониана для описания экспериментально наблюдаемых зависимостей, а также поиска и предсказания оптимальных условий для получения нужных результатов при постановке планируемых экспериментов. В частности, нами был выполнен [36] детальный теоретический анализ характеристик СТВ в пассивированном водородом кластере алмаза C₂₉₁[NV]-H₁₇₂, содержащем NV-центр. Было показано, что вследствие симметрии центра в нем имеются «семейства» эквивалентных положений атомов ¹³C, демонстрирующих одинаковые характеристики СТВ. Для всех них в [36] были рассчитаны полные матрицы A_{KL} , описывающие сверхтонкие взаимодействия электронного спина NV-центра с ядерными спинами ¹³C. Подставляя найденные таким образом матрицы СТВ в спин-гамильтониан центра, мы рассчитали величины связанных с СТВ расщеплений $\Delta_i^{(0)}$ (в нулевом внешнем магнитном поле) состояний с проекциями электронного спина $m_s = \pm 1$ для всех возможных систем NV-¹³C в кластере. Следует отметить, что величины $\Delta_i^{(0)}$ являются характерными для каждого семейства, что можно использовать для их идентификации. Действительно, если для некоторой конкретной системы NV-¹³C измерить экспериментально величину СТВ расщепления $\Delta_i^{(0)}$ и найти подходящее значение в приведенной в [36] таблице возможных значений $\Delta_i^{(0)}$, то тем самым можно идентифицировать ее как принадлежащую к определенному семейству и воспользоваться далее рассчитанными для данного семейства матрицами СТВ для сравнения с имеющимися экспериментальными данными. В [36] показано, что такой подход позволил количественно (и практически без подгоночных параметров) описать экспериментальные данные работы [18], где были измерены величины СТВ расщеплений $\Delta_i^{(0)}$ для 400 различных систем NV-¹³C, а также изучена модификация спектра ОДМР в присутствии внешнего магнитного поля различной величины для одной из таких систем. К настоящему времени на основе полученных ранее расчетных данных для кластера C₂₉₁[NV]-H₁₇₂ нами был выполнен аналогичный анализ ряда других экспериментальных наблюдений, также продемонстрировавших успешность описанного подхода. Кроме того, для аналогичного кластера нами были рассчитаны [37] характеристики оптических переходов, давшие близкие к экспериментальным результаты для частоты и силы осциллятора бесфононного оптического триплет-триплетного перехода в NV-центре.

Вместе с тем для нахождения практически адекватных характеристик требуется увеличение размера моделируемого кластера. В частности, для самых разнообразных приложений необходимы максимально стабильные гибридные системы NV-¹³C, в которых ядерный спин атома ¹³C практически не испытывает нарушающих когерентность случайных переворотов, инициируемых

анизотропной составляющей СТВ (недиагональными элементами матрицы A_{KL}), наличие которой приводит при отсутствии внешнего магнитного поля к переворотам ядерного спина атома ^{13}C со скоростями, пропорциональными величине $W = (A_{ZX}^2 + A_{ZY}^2) / (A_{ZX}^2 + A_{ZY}^2 + A_{ZZ}^2)$ (см. [36, 38]), где A_{KL} – элементы матриц $A^{(Ci)}$ сверхтонких взаимодействий. Такие стабильные спиновые системы NV– ^{13}C были недавно обнаружены экспериментально в работах [38–41] в результате рутинного перебора большого количества различных систем NV– ^{13}C (напр., в [39] исследовано около 3300 различных систем NV– ^{13}C в изотопически очищенном алмазе с содержанием 0,2 % ^{13}C). Теория предсказывает [17, 36], что указанная стохастическая динамика ядерного спина ^{13}C отсутствует в тех специфических гибридных системах NV– ^{13}C , в которых атом ^{13}C расположен на оси NV-центра, поскольку для указанных систем матрица СТВ является диагональной и ось квантования ядерного спина всегда параллельна оси NV-центра. Очевидно, для целенаправленного экспериментального поиска таких систем желательно заранее знать их спиновые характеристики, в частности измеряемую экспериментально величину связанного с СТВ расщепления $\Delta_i^{(0)}$ линий в спектрах ОДМР. Для систем NV– ^{13}C с «осевым» расположением атома ^{13}C впервые такая информация была получена в нашей работе [36], где был рассмотрен только случай системы NV– ^{13}C с ближайшим к вакансии «осевым» положением атома ^{13}C , и для данной конкретной системы предсказана величина $\Delta_i^{(0)} = 187,4$ кГц.

В настоящей статье излагаются аналогичные результаты, полученные посредством моделирования бóльшего кластера $C_{510}[\text{NV}]\text{-H}_{252}$ при различном расположении в нем NV-центра, что дало возможность рассчитать характеристики СТВ для восьми спиновых систем NV–«осевой ^{13}C », в которых ядерный спин расположен существенно дальше от NV-центра как со стороны вакансии, так и со стороны атома азота. Анализ имеющихся экспериментальных данных, выполненный на основе полученных результатов, позволил сделать вывод о том, что ряд предсказанных систем NV–«осевой ^{13}C » уже наблюдался экспериментально в работах [38–41].

Для моделирования сверхтонких взаимодействий NV-центра в алмазе с различным образом расположенными в решетке ядерными спинами атомов ^{13}C здесь используется пассивированный водородом углеродный кластер $C_{510}[\text{NV}]\text{-H}_{252}$ с NV-центром, расположенным в центральной части кластера (рис. 2). Оптимизация геометрической структуры кластера и расчет распределения

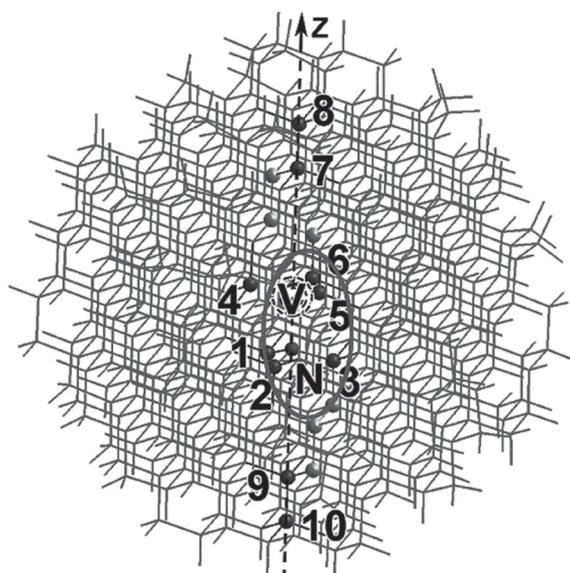


Рис. 2. Кластер $C_{510}[\text{NV}]\text{-H}_{252}$ с центральным расположением в нем NV-центра: положения 4, 5 и 6 нумеруют узлы решетки алмаза, ближайшие к вакансии, положения 7–10 лежат на оси NV-центра; пассивирующие поверхность атомы водорода не показаны

Fig. 2. Cluster $C_{510}[\text{NV}]\text{-H}_{252}$ with the central location of the NV center: Positions 4, 5 and 6 numerate the diamond lattice sites being the nearest neighbors of the vacancy, positions 7–10 are located on the NV center axis; the hydrogen atoms passivating the surface are not shown

спиновой плотности выполнялись методом функционала плотности (DFT) с функционалом B3LYP1 и базисом MINI/3-21G. Расчеты проводились в удаленном режиме на компьютерном кластере научно-технического комплекса «Институт монокристаллов» НАН Украины (г. Харьков). Вычисление матриц сверхтонких взаимодействий $A^{(i)}$ для всех возможных положений ($i = 1 \div 510$) атома ^{13}C в кластере производилось с использованием программных пакетов PC GAMESS (US) и ORCA. Для всех систем NV- ^{13}C это делалось в одной и той же системе координат, являющейся системой главных осей (СГО) NV-центра, в которой начало координат было расположено на атоме азота NV-центра, ось Z совпадала с осью его симметрии, а оси X и Y выбирались произвольно. Как известно, рассчитанные таким образом матрицы могут быть преобразованы к диагональному виду $\bar{A} = U^{-1}AU$ посредством соответствующего унитарного преобразования U , описывающего переход от СГО NV-центра к СГО ядерного спина ^{13}C . Элементы матрицы U при этом имеют смысл направляющих косинусов между различными осями в этих двух системах главных осей. В частности, элемент $U_{33} = U_{zz}$ есть косинус угла между осью Z NV-центра и осью z в СГО соответствующего ядерного спина ^{13}C .

Найденные матрицы $A^{(C_i)}$ СТВ подставлялись в стандартный спин-гамильтониан системы $^{14}\text{NV}-^{13}\text{C}$ (подробнее см. в [36]), численной диагонализацией которого рассчитывались энергии и спиновые волновые функции данной трехспиновой системы аналогично тому, как это было сделано в [36]. В частности, как и в [36], для всех 510 возможных положений ядерного спина ^{13}C в данном кластере были рассчитаны величины сверхтонкого расщепления $\Delta_i^{(0)}$ в нулевом внешнем магнитном поле состояний с проекциями электронного спина $m_s = \pm 1$ (при фиксированной проекции ядерного спина ^{14}N), по которым можно идентифицировать конкретные связанные системы NV- ^{13}C . Поскольку основной целью настоящей статьи является поиск максимально стабильных систем NV- ^{13}C , мы также рассчитали для всех возможных положений ^{13}C в кластере значения параметра $W_0 = (A_{ZX}^2 + A_{ZY}^2) / (A_{ZX}^2 + A_{ZY}^2 + A_{ZZ}^2)$, где A_{KL} – элементы матриц $A^{(C_i)}$ СТВ, которому пропорциональны (см. [36, 38]) индуцированные сверхтонкие взаимодействия скорости переверотов ядерных спинов ^{13}C в нулевом магнитном поле. Отметим, что приведенное аналитическое выражение W_0 через элементы матрицы СТВ получено в так называемом секулярном приближении (подробнее см. в [36]), которое вследствие большой величины тонкого расщепления ($D = 2870$ МГц) основного триплетного состояния NV-центра хорошо выполняется практически для всех систем NV- ^{13}C в кластере.

Результаты расчетов параметров W_0 для различных положений атома ^{13}C в решетке алмаза приведены на рис. 3, причем на рис. 3, *b* они представлены в виде, отсортированном по мере увеличения рассчитанных значений параметра W_0 , а на рис. 3, *c* в увеличенном виде показаны только выделенные на рис. 3, *b* значения скорости переверотов W_0 , являющиеся наименьшими для исследованного кластера ($W_0 < 0,015$). Из рис. 3, *b* видно, что в кластере $\text{C}_{510}[\text{NV}]-\text{H}_{252}$ с центральным расположением NV-центра имеется четыре положения атома ^{13}C , для которых скорости переверотов ядерного спина являются практически нулевыми. Анализ показал, что эти четыре положения – «осевые», т. е. лежат на оси NV-центра. Из рис. 3, *b* также следует, что в кластере имеется еще 18 других положений, для которых скорости переверотов также чрезвычайно малы $W_0 < 10^{-3}$. Анализ пространственного расположения этих позиций показал, что 9 из них находятся на границе кластера и лежат в плоскости, перпендикулярной оси NV-центра и проходящей приблизительно через вакансию NV-центра, поэтому был сделан вывод, что эти положения обусловлены краевыми эффектами. Заметим, что аналогичные «краевые» положения стабильности присутствуют также в меньшем кластере $\text{C}_{291}[\text{NV}]-\text{H}_{172}$. Другие 9 положений стабильности отличались от остальных тем, что для них были практически равны нулю косинусы углов между осью Z NV-центра и осями z систем главных осей ядерных спинов ^{13}C в этих положениях стабильности. Соответствующие матрицы СТВ для таких положений, как и для «осевых», являлись почти диагональными. Анализ показал, что 9 новых положений стабильности относятся к семействам $K2$ и Y , приведенным в табл. 1 работы [36]. В соответствии с нашими расчетными данными для трех положений семейства $K2$ величина обусловленного СТВ расщепления $\Delta_i^{(0)}$ составляла примерно 1 МГц, а сами эти узлы были расположены в плоскости,

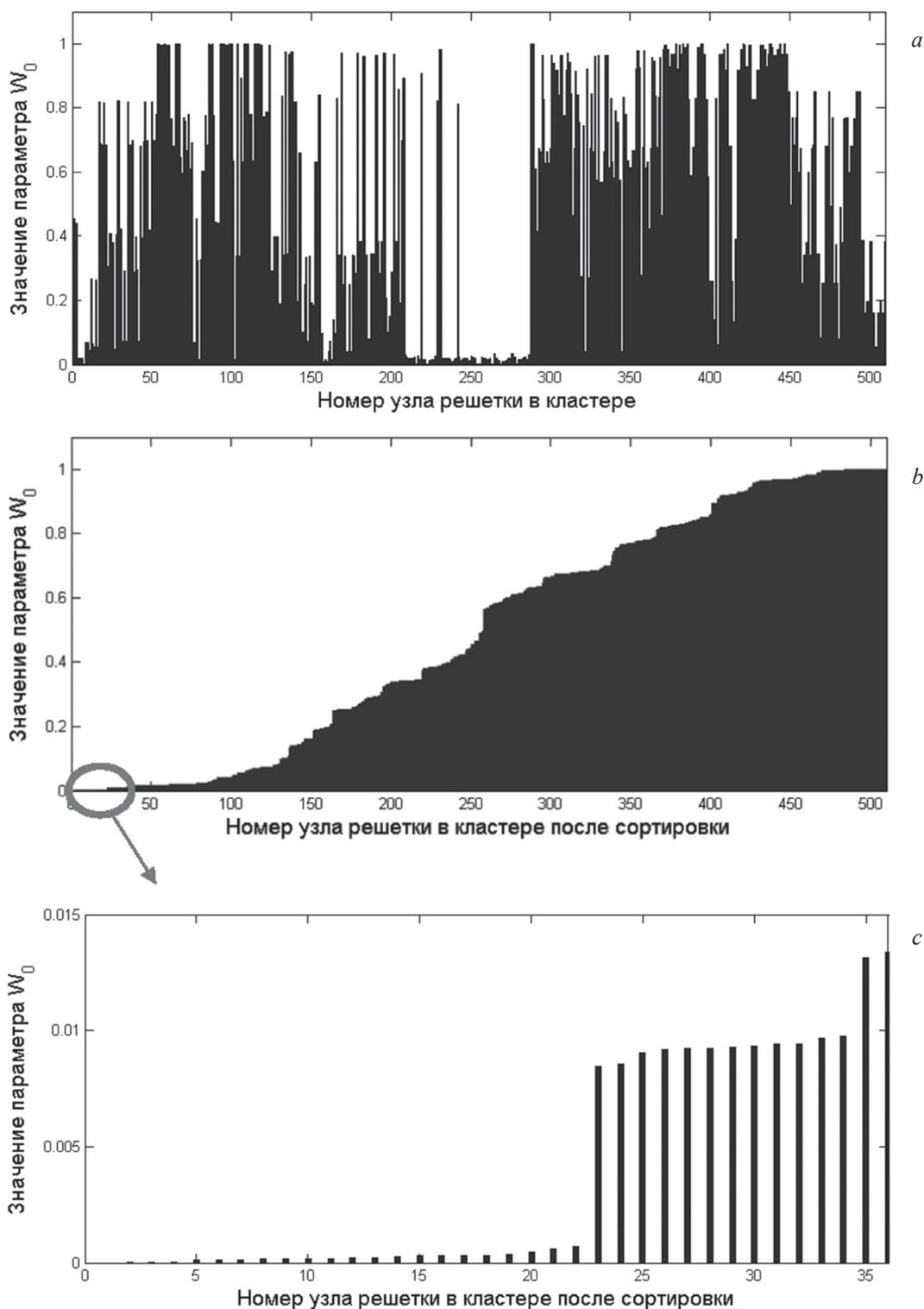


Рис. 3. Индуцированные СТВ скорости W_0 переворотов ядерных спинов атомов ^{13}C , расположенных в различных местах в кластере $\text{C}_{510}[\text{NV}]\text{-H}_{252}$ с центральным расположением NV-центра, представленного на рис. 2: *a* – в зависимости от номера положения атома ^{13}C в кластере; *b* – отсортированные по принципу увеличения скорости переворотов значения рассчитанного параметра W_0 для различных положений атома ^{13}C в кластере; *c* – значения параметра W_0 для 36 положений атома ^{13}C в кластере, имеющих наименьшие скорости $W_0 < 0,015$

Fig. 3. HFI-induced rates W_0 of the ^{13}C nuclear spin flip-flops for the ^{13}C atoms located in different positions in the cluster $\text{C}_{510}[\text{NV}]\text{-H}_{252}$ with the central location of the NV center shown in Fig. 2: *a* – vs. the assigned position number of the ^{13}C atoms in the cluster; *b* – sorted in the ascending order of the parameter W_0 ; *c* – W_0 parameter values for 36 locations of the ^{13}C atoms in the cluster having lowest rates $W_0 < 0.015$

перпендикулярной оси Z NV-центра, на расстоянии примерно $4,45 \text{ \AA}$ от нее, и имели координату $Z \sim 1,73 \text{ \AA}$. Другие 6 положений, относящихся к семейству Y , характеризуются величиной расщепления $\Delta_i^{(0)}$ порядка 205 кГц и также расположены в плоскости, перпендикулярной оси Z NV-центра, на расстояниях $5,36 \text{ \AA}$ от нее, при координате Z порядка $2,25 \text{ \AA}$. Наконец, следующими относительно стабильными положениями, характеризующимися уже существенно большими скоростями переверотов $W_0 > 10^{-2}$, являются положения, расположенные вблизи вакансии NV-центра. Они относятся к семействам A , C и I , характеристики которых приведены в табл. 1 работы [36]. Как следует из рис. 3, b , для других положений атомов ^{13}C в решетке алмаза значения параметра W_0 постепенно растут вплоть до 1.

Для практических целей наибольший интерес представляют характеристики «осевых» положений атома ^{13}C . Как уже отмечалось, в представленном на рис. 1 кластере таких атомов четыре и они имеют номера 7–10. Матрицы СТВ $A^{(Ci)}$, рассчитанные для осевых положений ядерных спинов ^{13}C , были практически диагональными, и эти диагональные элементы приведены в первых четырех строках таблицы. Видно, что ядерный спин $C7$, являющийся пятым соседом вакансии, наиболее сильно взаимодействует с электронным спином NV-центра. Рассчитанная для него величина СТВ расщепления $\Delta_i^{(0)}$ составляет $183,1 \text{ кГц}$, что близко к значению $187,4 \text{ кГц}$, полученному ранее в [36] для этого же положения атома ^{13}C в меньшем кластере $C_{291}[\text{NV}]\text{-H}_{172}$. Для трех других «осевых» положений атома ^{13}C , более удаленных от NV-центра, рассчитанные величины СТВ расщеплений в нулевом магнитном поле составляли $85,1$, $99,9$ и $58,7 \text{ кГц}$ для положений $C8$, $C9$ и $C10$ соответственно.

Из рис. 2 видно, что положение $C10$ находится вблизи поверхности данного кластера, так что последняя могла оказывать влияние на рассчитанные значения характеристик СТВ. Чтобы проверить степень такого влияния, а также получить данные о характеристиках сверхтонких взаимодействий для еще более удаленных «осевых» положений, были выполнены расчеты характеристик СТВ для двух других, показанных на рис. 4 a , b , кластеров $C_{510}[\text{NV}]\text{-H}_{252}$, в которых NV-центр был сдвинут вверх или вниз по сравнению с предыдущим кластером. Аналогичные расчеты, выполненные для этих двух кластеров, дали дополнительные данные о характеристиках СТВ для еще четырех положений $C11$ – $C14$ «осевых» атомов ^{13}C , расположенных как со стороны вакансии NV-центра, так и со стороны атома азота. Полученные для таких кластеров дан-

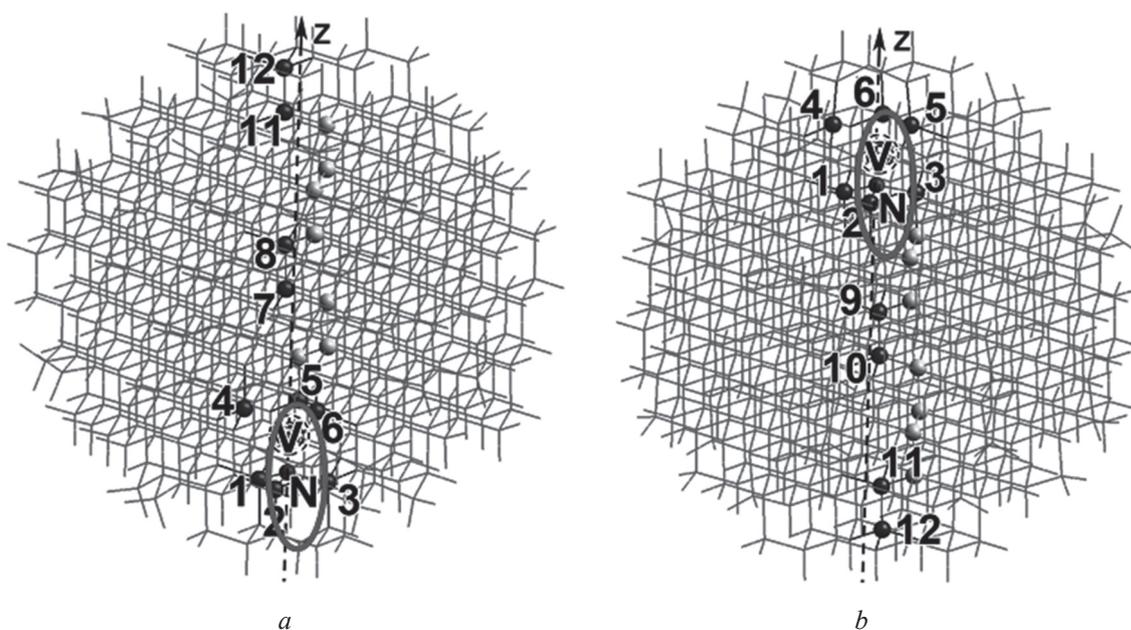


Рис. 4. Кластеры $C_{510}[\text{NV}]\text{-H}_{252}$, отличающиеся от представленного на рис. 2 кластера сдвигом NV-центра вниз (a) и вверх (b)

Fig. 4. Clusters $C_{510}[\text{NV}]\text{-H}_{252}$ differing from that shown in Fig. 2 by the shift of the NV center down (a) and up (b)

ные приведены в четырех нижних строках таблицы, а в первых четырех строках в скобках указаны вновь рассчитанные данные для «осевых» атомов ^{13}C в положениях C7–C10.

Для всех дополнительных «аксиальных» положений атома ^{13}C в кластере характеристики СТВ убывают по мере увеличения их расстояния от NV-центра. Кроме того, из сравнения характеристик сверхтонких взаимодействий, полученных для положения C10 при моделировании различных кластеров, следует, что влияние пассивированной водородом поверхности кластера приводит к некоторому росту величины обусловленного СТВ расщепления в нулевом внешнем магнитном поле.

Диагональные элементы матриц СТВ для спиновых систем NV- ^{13}C с «осевым» расположением атома ^{13}C в кластере $\text{C}_{510}[\text{NV}]\text{H}_{252}$, а также рассчитанные расстояния таких атомов ^{13}C от атома азота NV-центра

Diagonal elements of the HFI matrices for the NV- ^{13}C spin systems with the “axial” location of the ^{13}C atom in the $\text{C}_{510}[\text{NV}]\text{H}_{252}$ cluster as well as the calculated distances of such atoms from the nitrogen atom of the NV center

Положение	A_{xx} (кГц)	A_{yy} (кГц)	A_{zz} (кГц)	\bar{r}_{NC} (Å)
C7	-268,6 (-273,2)	-268,7 (-274,7)	183,1 (177,2)	6,47 (6,51)
C8	-128,0 (-126,0)	-127,9 (-126,3)	85,1 (88,8)	8,05 (8,08)
C9	-59,0 (-57,8)	-58,9 (-58,0)	99,9 (98,4)	4,58 (4,61)
C10	-30,6 (-30,3)	-30,6 (-30,3)	58,7 (57,7)	6,15 (6,17)
C11	-15,6	-15,6	31,4	12,80
C12	-10,6	-10,6	21,0	14,37
C13	-8,3	-8,3	16,6	10,89
C14	-6,0	-6,0	12,0	12,46

Исходя из полученных расчетных данных для положений стабильности различных систем NV- ^{13}C , можно идентифицировать системы, экспериментально исследованные в работах [38–41]. Так, в [38], где при комнатной температуре были выполнены прямые наблюдения динамики слабо связанных с одиночным NV-центром ядерных спинов ^{13}C , в числе прочих была экспериментально исследована система NV- ^{13}C с большим временем релаксации T_R , для которой при временах наблюдения $T_m \ll T_R$ во временной эволюции ядерного спина ^{13}C по двум возможным состояниям были зафиксированы два отстоящих друг от друга на 201 ± 3 кГц пика, соответствующих вызванному СТВ расщеплению. Учитывая величину этого расщепления, можно предположить, что в данной работе наблюдалась система NV- ^{13}C , в которой атом ^{13}C был либо «осевым», расположенным в ближайшем к вакансии положении (предсказываемая величина расщепления $\Delta_i^{(0)} \sim 183,1$ кГц), либо принадлежал к семейству Y (предсказываемая величина $\Delta_i^{(0)} \sim 205$ кГц). Далее в работах [39, 40] была найдена и использована для квантовой коррекции ошибок в гибридном регистре на электронно-ядерных спинах чрезвычайно стабильная спиновая система NV- ^{13}C , для которой величина вызванного СТВ расщепления $\Delta_i^{(0)}$ составляла 89 кГц. Для нее при комнатной температуре было продемонстрировано отсутствие переворотов спина ^{13}C на временах порядка десятков секунд. Вновь, исходя из расчетных данных, можно предположить, что в этих работах была найдена система NV- ^{13}C , где атом ^{13}C занимал одно из «осевых» положений C8 или C9 (см. рис. 2 или 4), для которых предсказываемые величины $\Delta_i^{(0)}$ составляют 85,1 и 99,9 кГц соответственно. Наконец в работе [41] коррекция ошибок в квантовой метрологии была продемонстрирована с использованием стабильной системы NV- ^{13}C с $\Delta_i^{(0)} \sim 50$ кГц, которой, по-видимому, является «осевая» система с расположением ядерного спина ^{13}C в положении C10 (предсказываемая величина $\Delta_i^{(0)}$ составляет 58,7 кГц). Таким образом, представленный анализ предсказываемых характеристик стабильных систем NV- ^{13}C и его сопоставление с имеющимися экспериментальными данными позволяет сделать вывод о том, что примененные методы компьютерного моделирования обеспечивают количественное соответствие расчетных данных экспериментальным результатам, и, следовательно, их можно использовать для прогнозирования новых планируемых экспериментов на системах типа NV- ^{13}C .

Благодарности. Работа выполнена в рамках задания 3.1 «Исследование и разработка квантово-оптических систем и устройств для применений в квантовой информатике, квантовой криптографии, квантовой метрологии и квантовой сенсорике» ГПНИ «Конвергенция-2020», подпрограмма «Объединение», а также белорусско-украинского проекта БРФФИ № Ф15УК/А-050 «Теоретическое изучение свойств парамагнитных центров окраски в функционализированном наноалмазе методами квантовой химии».

Acknowledgments. The present work was performed within the framework of Task 3.1 ‘Study and Development of Quantum-Optical Systems and Devices for Use in Quantum Informatics, Quantum Cryptography, Quantum Metrology and Quantum Sensorics’ of the State Research Program ‘Convergence-2020’, the Sub-program ‘Integration’, as well as the Belarusian-Ukrainian Project of the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research No. Ф15УК/А-050 ‘Theoretical Study of the Properties of the Paramagnetic Color Centers in Functionalized Nanodiamond by Quantum Chemistry Methods’.

Список использованных источников

1. Dowling, J. P. Quantum technology: the second quantum revolution / J. P. Dowling, G. L. Milburn // *Philos. Trans. R. Soc. A: Math., Phys. and Engineering Sci.* – 2003. – Vol. 361, № 1809. – P. 1655–1674.
2. Quantum technology: from research to application / W. P. Schleich [et al.] // *Appl. Phys. B.* – 2016. – Vol. 122. – P. 130.
3. Morton, J. J. L. Hybrid Solid-State Qubits: The Powerful Role of Electron Spins / J. J. L. Morton, B. W. Lovett // *Annu. Rev. Condens. Matter Phys.* – 2011. Vol. 2, № 1. – P. 189–212.
4. Ardavan, A. Quantum control in spintronics / A. Ardavan, G. A. D. Briggs // *Philos. Trans. R. Soc. A: Math., Phys. and Engineering Sci.* – 2011. – Vol. 369, № 1948. – P. 3229–3248.
5. Quantum computing with defects / J. R. Weber [et al.] // *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.* – 2010. – Vol. 107, № 1948. – P. 8513–8518.
6. Quantum Spintronics: Engineering and Manipulating Atom-Like Spins in Semiconductors / D. D. Awschalom [et al.] // *Science.* – 2013. – Vol. 339, № 6124. – P. 1174–1179.
7. Wrachtrup, J. Read-out of single spins by optical spectroscopy / J. Wrachtrup, F. Jelezko // *J. Phys.: Condens. Matter.* – 2004. – Vol. 16, № 30. – P. R1089–R1104.
8. Wrachtrup, J. Processing quantum information in diamond / J. Wrachtrup, F. Jelezko // *J. Phys.: Condens. Matter.* – 2006. – Vol. 18, № 21. – P. S807–S824.
9. Wrachtrup, J. Single defect centres in diamond: A review / J. Wrachtrup, F. Jelezko // *Phys. Status Solidi (a).* – 2006. – Vol. 203, № 13. – P. 3207–3225.
10. The nitrogen-vacancy color centre in diamond / M. W. Doherty [et al.] // *Physics Reports.* – 2013. – Vol. 528, № 1. – P. 1–45.
11. Quantum control over Single Spins in Diamond / V. V. Dobrovitski [et al.] // *Annu. Rev. Condens. Matter Phys.* – 2013. – Vol. 4, № 1. – P. 23–50.
12. Observation of coherent oscillation of a single nuclear spin and realization of a two-qubit conditional quantum gate / F. Jelezko [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* – 2004. – Vol. 93, № 13. – P. 130501.
13. CVD diamond for spintronics / M. L. Markham [et al.] // *Diamond Relat. Mater.* – 2011. – Vol. 20, № 2. – P. 134–139.
14. Fabrication of single optical centres in diamond – a review / J. O. Orwa [et al.] // *J. Lumin.* – 2010. – Vol. 130, № 9. – P. 1646–1654.
15. Aharonovich, I. Diamond Nanophotonics / I. Aharonovich, E. Neu // *Adv. Opt. Mater.* – 2014. – Vol. 2, № 10. – P. 911–928.
16. Souza, A. M. Robust dynamical decoupling / A. M. Souza, G. A. Álvarez, D. Suter // *Phil. Trans. R. Soc. A: Math., Phys. and Engineering Sci.* – 2012. – Vol. 370, № 1976. – P. 4748–4769.
17. Smeltzer, B. ¹³C hyperfine interactions in the nitrogen-vacancy centre in diamond / B. Smeltzer, L. Childress, A. Gali // *New J. Phys.* – 2011. – Vol. 13, № 2. – P. 025021.
18. High-resolution spectroscopy of single NV defects coupled with nearby ¹³C nuclear spins in diamond / A. Dréau [et al.] // *Phys. Rev. B.* – 2012. – Vol. 85, № 13. – P. 134107.
19. Sensing single remote nuclear spins / N. Zhao [et al.] // *Nat. Nanotech.* – 2012. – Vol. 7, № 10. – P. 657–662.
20. Kolkowitz, S. Sensing distant nuclear spins with a single electron spin / S. Kolkowitz, Q. P. Unterreithmeier, S. D. Bennett, M. D. Lukin // *Phys. Rev. Lett.* – 2012. – Vol. 109, № 13. – P. 13760.
21. Magnetometry with nitrogen-vacancy defects in diamond / L. Rondin [et al.] // *Rep. Prog. Phys.* – 2014. – Vol. 77, № 5. – P. 056503.
22. Wrachtrup, J. Single spin magnetic resonance / J. Wrachtrup, A. Finkler // *J. Magn. Reson.* – 2016. – Vol. 269. – P. 225–236.
23. Nitrogen-Vacancy Centers in Diamond: Nanoscale Sensors for Physics and Biology / R. Schirhagl [et al.] // *Annu. Rev. Phys. Chem.* – 2014. – Vol. 65, № 1. – P. 83–105.
24. Nagl, A. Improving surface and defect center chemistry of fluorescent nanodiamonds for imaging purposes – a review / A. Nagl, S. R. Hemelaar, R. Schirhagl // *Anal. Bioanal. Chem.* – 2015. – Vol. 407, № 25. – P. 7521–7536.
25. Diamond integrated quantum photonics / A. D. Greentree [et al.] // *Mater. Today.* – 2008. – Vol. 11, № 9. – P. 22–31.
26. Castelletto, S. Quantum Effects in Silicon Carbide Hold Promise for Novel Integrated Devices and Sensors / S. Castelletto, B. C. Johnson, A. Boretti // *Adv. Opt. Mater.* – 2013. – Vol. 1, № 9. – P. 609–625.
27. Spin Centres in SiC for Quantum Technologies / G. V. Astakhov [et al.] // *Appl. Magn. Reson.* – 2016. – Vol. 47, № 1. – P. 793–812.
28. Ab Initio modeling of the electronic and spin properties of the [NV] – centers in diamond nanocrystals / V. A. Pushkarchuk [et al.] // *Opt. Spectrosc.* – 2005. – Vol. 99, № 2. – P. 245–256.
29. Modeling of atomic and electronic structure of diamond nanocrystals containing [NV]- centers by the density functional method / V. A. Pushkarchuk [et al.] // *J. Appl. Spectrosc.* – 2007. – Vol. 74, № 1. – P. 95–101.

30. Quantum Chemical Modeling of Structural, Electronic, and Spin Characteristics of NV Centers in Nanostructured Diamond: Surface Effect / V. A. Pushkarchuk [et. al.] // *Opt. Spectrosc.* – 2010. – Vol. 108, № 2. – P. 254–260.
31. Квантовые регистры на одиночных NV+n¹³C центрах в алмазе: I. Метод спин-гамильтониана / А. П. Низовцев [и др.] // *Оптика и спектроскопия.* – 2010. – Т. 108, № 2. – С. 260–269.
32. Spin-Hamiltonian analysis of quantum registers on single NV center and proximal¹³C nuclei in diamond / Alexander P. Nizovtsev [et al.] // *Quantum cryptography and computing: Theory and Implementation* / eds. by R. Horodecki, S. Kilin, J. Kowalik / – IOS Press, 2010. – Vol. 26. – P. 148–157.
33. Kramers Degenerated Spin Systems “NV Center + Few Proximal ¹³C Nuclei” in Diamond for Single-Spin Magnetometry / Alexander P. Nizovtsev [et al.] // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems.* – 2011. – Vol. 14, № 4. – P. 319–334.
34. Gali, A. Ab initio supercell calculations on nitrogen-vacancy center in diamond: Electronic structure and hyperfine tensors / A. Gali, M. Fyta, E. Kaxiras // *Phys. Rev. B.* – 2008. – Vol. 77, № 15. – P. 155206.
35. Smeltzer, B. ¹³C hyperfine interactions in the nitrogen-vacancy centre in diamond / B. Smeltzer, L. Childress, A. Gali // *New J. Phys.* – 2011. – Vol. 13, № 2. – P. 025021.
36. Theoretical study of hyperfine interactions and optically detected magnetic resonance spectra by simulation of the C₂₉₁[NV]-H₁₇₂ diamond cluster hosting NV center / A. P. Nizovtsev [et al.] // *New J. Phys.* – 2014. – Vol. 16, № 8. – P. 083014.
37. Luzanov, A. V. About theoretical peculiarities of lowest excitations in modified nanodiamond color centers / A. V. Luzanov // *Funct. Mater.* – 2017. – Vol. 24.
38. Probing the Dynamics of a Nuclear Spin Bath in Diamond through Time-Resolved Central Spin Magnetometry / A. Dréau [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* – 2014. – Vol. 113, № 13. – P. 137601.
39. Quantum error correction in a solid-state hybrid spin register / G. Waldherr [et al.] // *Nature.* – 2014. – Vol. 506, № 7487. – P. 204–207.
40. Enhancing quantum sensing sensitivity by a quantum memory / S. Zaiser [et al.] // *Nat. Commun.* – 2016. – Vol. 7. – P. 12279.
41. Quantum metrology enhanced by repetitive quantum error correction / Th. Uden [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* – 2016. – Vol. 116, № 23. – P. 230502.

References

1. Dowling J.P., Milburn G.L. Quantum technology: the second quantum revolution. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2003, vol. 361, no. 1890, pp. 1655–1674. Doi: 10.1098/rsta.2003.1227
2. Schleich W.P., Ranade K.S., Anton Ch., Arndt M., Aspelmeyer M., Bayer M., Berg G., Calarco T., Fuchs H., Giacobino E., Grassl M., Hänggi P., Heckl W.M., Hertel I.-V., Huelga S., Jelezko F., Keimer B., Kotthaus J.P., Leuchs G., Lütkenhaus N., Maurer U., Pfau T., Plenio M.B., Raseel E.M., Renn O., Silberhorn Ch., Schiedmayer J., Schmitt-Landsiedel D., Schönhammer K., Ustinov A., Walther P., Weinfurter H., Welzl E., Wiesendanger R., Wolf S., Zeilinger A., Zoller P. Quantum technology: from research to application. *Applied Physics B*, 2016, vol. 122, p. 130. Doi: 10.1007/s00340-016-6353-8
3. Morton J.J.L., Lovett B.W. Hybrid Solid-State Qubits: The Powerful Role of Electron Spins. *Annual Review of Condensed Matter Physics*, 2011, vol. 2, no. 1, pp. 189–212. Doi: 10.1146/annurev-conmatphys-062910-140514
4. Ardavan A., Briggs G.A.D. Quantum control in spintronics. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2011, vol. 369, no. 1948, pp. 3229–3248. Doi: 10.1098/rsta.2011.0009
5. Weber J.R., Koehl W.F., Varley J.B., Janotti A., Buckley B.B., Van de Walle C.G., Awschalom D.D. Quantum computing with defects. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 2010, vol. 107, no. 19, pp. 8513–8518. Doi: 10.1073/pnas.1003052107
6. Awschalom D.D., Bassett L.C., Dzurak A.S., Hu E.L., Petta J.R. Quantum Spintronics: Engineering and Manipulating Atom-Like Spins in Semiconductors. *Science*, 2013, vol. 339, no. 6124, pp. 1174–1179. Doi: 10.1126/science.1231364
7. Jelezko F., Wrachtrup J. Read-out of single spins by optical spectroscopy. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 2004, vol. 16, no. 30, pp. R1089–R1104. Doi: 10.1088/0953-8984/16/30/r03
8. Wrachtrup J., Jelezko F. Processing quantum information in diamond. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 2006, vol. 18, no. 21, pp. S807–S824. Doi: 10.1088/0953-8984/18/21/s08
9. Wrachtrup J., Jelezko F. Single defect centres in diamond: A review. *Physica Status Solidi (a)*, 2006, vol. 203, no. 13, pp. 3207–3225. Doi: 10.1002/pssa.200671403
10. Doherty M.W., Manson N.B., Delaney P., Jelezko F., Wrachtrup J., Hollenberg L.C.L. The nitrogen-vacancy color centre in diamond. *Physics Reports*, 2013, vol. 528, no. 1, pp. 1–45. Doi: 10.16/j.physrep.2013.02.001
11. Dobrovitski V.V., Fuchs G.D., Falk A.L., Santori C., Awschalom D.D. Quantum control over Single Spins in Diamond. *Annual Review of Condensed Matter Physics*, 2013, vol. 4, no. 1, pp. 23–50. Doi: 10.1146/annurev-conmatphys-030212-184238
12. Jelezko F., Gaebel T., Popa I., Domhan M., Gruber A., Wrachtrup J. Observation of coherent oscillation of a single nuclear spin and realization of a two-qubit conditional quantum gate. *Physical Review Letters*, 2004, vol. 93, no. 13, p. 130501. Doi: 10.1103/physrevlett.93.130501
13. Markham M.L., Dodson J.M., Scarsbrook G.A., Twitchen D.J., Balasubramanian G., Jelezko F., Wrachtrup J. CVD diamond for spintronics. *Diamond and Related Materials*, 2011, vol. 20, no. 2, pp. 134–139. Doi: 10.1016/j.diamond.2010.11.016
14. Orwa J.O., Greentree A.D., Aharonovich I., Alves A.D.C., VanDonkelaar J., Stacey A., Praver S. Fabrication of single optical centres in diamond – a review. *Journal of Luminescence*, 2010, vol. 130, no. 9, pp. 1646–1654. Doi: 10.1016/j.jlumin.2009.12.028
15. Aharonovich I., Neu E. Diamond Nanophotonics. *Advanced Optical Materials*, 2014, vol. 2, no. 10, pp. 911–928. Doi: 10.1002/adom.201400189
16. Souza A.M., Álvarez G.A., Suter D. Robust dynamical decoupling. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2012, vol. 370, no. 1976, pp. 4748–4769. Doi: 10.1098/rsta.2011.0355

17. Smeltzer B., Childress L., Gali A. ^{13}C hyperfine interactions in the nitrogen-vacancy centre in diamond. *New Journal of Physics*, 2011, vol. 13, no. 2, p. 025021. Doi: 10.1088/1367-2630/13/2/025021
18. Dréau A., Maze J.-R., Lesik M., Roch J.-F., Jacques V. High-resolution spectroscopy of single NV defects coupled with nearby ^{13}C nuclear spins in diamond. *Physical Review B*, 2012, vol. 85, no. 13, p. 134107. Doi: 10.1103/physrevb.85.134107
19. Zhao N., Honert J., Schmid B., Klas M., Isoya J., Markham M., Twitchen D., Jelezko F., Liu R.-B., Fedder H., Wrachtrup J. Sensing single remote nuclear spins. *Nature Nanotechnology*, 2012, vol. 7, no. 10, pp. 657–662. Doi: 10.1038/nnano.2012.152
20. Kolkowitz S., Unterreithmeier Q.P., Bennett S.D., Lukin M.D. Sensing distant nuclear spins with a single electron spin. *Physical Review Letters*, 2012, vol. 109, no. 13, p. 13760. Doi: 10.1103/physrevlett.109.137601
21. Rondin L.L., Tetienne J.-P., Hingant T., Roch J.-F., Maletinsky P., Jacques V. Magnetometry with nitrogen-vacancy defects in diamond. *Reports on Progress in Physics*, 2014, vol. 77, no. 5, p. 056503. Doi: 10.1088/0034-4885/77/5/056503
22. Wrachtrup J., Finkler A. Single spin magnetic resonance. *Journal of Magnetic Resonance*, 2016, vol. 269, pp. 225–236. Doi: 10.1016/j.jmr.2016.06.017
23. Schirhagl R., Chang K., Loretz M., Degen Ch.L. Nitrogen-Vacancy Centers in Diamond: Nanoscale Sensors for Physics and Biology. *Annual Review of Physical Chemistry*, 2014, vol. 65, no. 1, pp. 83–105. Doi: 10.1146/annurev-physchem-040513-103659
24. Nagl A., Hemelaar S.R., Schirhagl R. Improving surface and defect center chemistry of fluorescent nanodiamonds for imaging purposes – a review. *Analytical and Bioanalytical Chemistry*, 2015, vol. 407, no. 25, pp. 7521–7536. Doi: 10.1007/s00216-015-8849-1
25. Greentree A.D., Fairchild B.A., Hossain F.M., Prawer S. Diamond integrated quantum photonics. *Materials Today*, 2008, vol. 11, no. 9, pp. 22–31. Doi: 10.1016/s1369-7021(08)70176-7
26. Castelletto S., Johnson B.C., Boretti A. Quantum Effects in Silicon Carbide Hold Promise for Novel Integrated Devices and Sensors. *Advanced Optical Materials*, 2013, vol. 1, no. 9, pp. 609–625. Doi: 10.1002/adom.201300246
27. Astakhov G.V., Simin D., Dyakonov V., Yavkin B.V., Orlinskii S.B., Proskuryakov I.I., Anisimov A.N., Soltamov V.A., Baranov P.G. Spin Centres in SiC for Quantum Technologies. *Applied Magnetic Resonance*, 2016, vol. 47, no. 7, pp. 793–812. Doi: 10.1007/s00723-016-0800-x
28. Pushkarchuk V.A., Kilin S.Ya., Nizovtsev A.P., Pushkarchuk A.L., Borisenko V.E., von Borzyskowski C., Filonov A.B. Ab Initio modeling of the electronic and spin properties of the [NV]-centers in diamond nanocrystals. *Optics and Spectroscopy*, 2005, vol. 99, no. 2, pp. 245–256. Doi: 10.1134/1.2034611
29. Pushkarchuk V.A., Kilin S.Ya., Nizovtsev A.P., Pushkarchuk A.L., Filonov A.B., Borisenko V.E. Modeling of atomic and electronic structure of diamond nanocrystals containing [NV]-centers by the density functional method. *Journal Applied Spectroscopy*, 2007, vol. 74, no. 1, pp. 95–101. Doi: 10.1007/s10812-007-0015-x
30. Pushkarchuk V.A., Kilin S.Ya., Nizovtsev A.P., Borisenko V.E., Filonov A.B., Pushkarchuk A.L., Kuten S.A. Quantum Chemical Modeling of Structural, Electronic, and Spin Characteristics of NV Centers in Nanostructured Diamond: Surface Effect. *Optics and Spectroscopy*, 2010, vol. 108, no. 2, pp. 254–260. Doi: 10.1134/s0030400x10020141
31. Nizovtsev A.P., Kilin S.Ya., Pushkarchuk V.A., Pushkarchuk A.L., Kuten S.A. Quantum registers based on single NV + $n^{13}\text{C}$ centers in diamond: I. The spin Hamiltonian method. *Optics and Spectroscopy*, 2010, vol. 108, no. 2, pp. 230–238. Doi: 10.1134/s0030400x10020128
32. Nizovtsev A.P., Kilin S.Ya., Pushkarchuk A.L., Pushkarchuk V.A., Kuten S.A. Spin-Hamiltonian analysis of quantum registers on single NV center and proximal ^{13}C nuclei in diamond. Horodecki R., Kilin S., Kowalik J. (eds.) *Quantum cryptography and computing: Theory and Implementation*. IOS Press, 2010, vol. 26, pp. 148–157. Doi: 10.3233/978-1-60750-547-1-148
33. Nizovtsev A.P., Kilin S.Ya., Pushkarchuk A.L., Pushkarchuk V.L., Kuten S.A. Kramers Degenerated Spin Systems “NV Center + Few Proximal ^{13}C Nuclei” in Diamond for Single-Spin Magnetometry. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, 2011, vol. 14, no. 4, pp. 319–334.
34. Gali A.A., Fyta M., Kaxiras E. Ab initio supercell calculations on nitrogen-vacancy center in diamond: Electronic structure and hyperfine tensors. *Physical Review B*, 2008, vol. 77, no. 15, p. 155206. Doi: 10.1103/physrevb.77.155206
35. Smeltzer B., Childress L., Gali A. ^{13}C hyperfine interactions in the nitrogen-vacancy centre in diamond. *New Journal of Physics*, 2011, vol. 13, no. 2, p. 025021. Doi: 10.1088/1367-2630/13/2/025021
36. Nizovtsev A.P., Kilin S.Ya., Pushkarchuk A.L., Pushkarchuk V.A., Jelezko F. Theoretical study of hyperfine interactions and optically detected magnetic resonance spectra by simulation of the $\text{C}_{291}[\text{NV}]\text{H}_{172}$ diamond cluster hosting NV center. *New Journal of Physics*, 2014, vol. 16, no. 8, p. 083014. Doi: 10.1088/1367-2630/16/8/083014
37. Luzanov A.V. About theoretical peculiarities of lowest excitations in modified nanodiamond color centers. *Functional Materials*, 2017, vol. 24.
38. Dréau A., Jamonneau P., Gazzano O., Kosen S., Roch J.-F., Maze J.R., Jacques V. Probing the Dynamics of a Nuclear Spin Bath in Diamond through Time-Resolved Central Spin Magnetometry. *Physical Review Letters*, 2014, vol. 113, no. 13, p. 137601. Doi: 10.1103/physrevlett.113.137601
39. Waldherr G., Wang Y., Zaiser S., Jamali M., Schulte-Herbrüggen T., Abe H., Ohshima T., Isoya J., Du J.F., Neumann P., Wrachtrup J. Quantum error correction in a solid-state hybrid spin register. *Nature*, 2014, vol. 506, no. 7487, pp. 204–207. Doi: 10.1038/nature12919
40. Zaiser S., Rendler T., Jakobi I., Wolf Th., Lee S.-Y., Wagner S., Bergholm V., Schulte-Herbrüggen Th., Neumann Ph., Wrachtrup J. Enhancing quantum sensing sensitivity by a quantum memory. *Nature Communications*, 2016, vol. 7, p. 12279. Doi: 10.1038/ncomms12279
41. Uden Th., Balasubramanian P., Louzon D., Vinkler Y., Plenio M.B., Markham M., Twitchen D., Lovchinsky I., Sushkov A.O., Lukin M.D., Retzker A., Naydenov B., McGuinness L.P., Jelezko F. Quantum metrology enhanced by repetitive quantum error correction. *Physical Review Letters*, 2016, vol. 116, no. 23, p. 230502. Doi: 10.1103/physrevlett.116.230502

Информация об авторах

Низовцев Александр Павлович – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник центра квантовой оптики и квантовой информатики Института физики им. Б. И. Степанова, Национальная академия наук Беларуси (пр. Независимости, 68, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: apniz@ifanbel.bas-net.by

Пушкарчук Александр Леонидович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории ионного обмена и сорбции Института физико-органической химии, Национальная академия наук Беларуси (ул. Сурганова, 13, 220072, г. Минск, Республика Беларусь); Институт ядерных проблем, Белорусский государственный университет (ул. Бобруйская, 11, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: alexp51@bk.ru

Кутень Семен Адамович – кандидат физико-математических наук, заведующий лабораторией теоретической физики и моделирования ядерных процессов Института ядерных проблем, Белорусский государственный университет (ул. Бобруйская, 11, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: kut@inp.bsu.by

Пушкарчук Вадим Александрович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник центра 4.11 научно-исследовательской части, Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (ул. П. Бровки, 6, 220013, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: vadim@nv-center.com

Килин Сергей Яковлевич – академик, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий Центром квантовой оптики и квантовой информатики Института физики им. Б. И. Степанова, Национальная академия наук Беларуси (пр. Независимости, 68, 220072, г. Минск, Республика Беларусь); Заместитель Председателя Президиума Национальной академии наук Беларуси. E-mail: kilin@ifanbel.bas-net.by

Лузанов Анатолий Витальевич – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник отдела рентгеноструктурных исследований и квантовой химии Научно-технологического комплекса «Институт монокристаллов», Национальная академия наук Украины (пр. Ленина, 60, 61072, г. Харьков, Украина). E-mail: avluzanov@xray.isc.kharkov.com

Жикол Олег Анатольевич – кандидат химических наук, научный сотрудник отдела рентгеноструктурных исследований и квантовой химии Научно-технологического комплекса «Институт монокристаллов», Национальная академия наук Украины (пр. Ленина, 60, 61072, г. Харьков, Украина). E-mail: zhiKol@xray.isc.kharkov.com

Для цитирования

Стабильные электронно-ядерные спиновые системы NV⁻¹³C в алмазе для квантовых технологий / А. П. Низовцев [и др.] // Вест. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2017. – № 1. – С. 98–110.

Information about the authors

Nizovtsev Alexander Pavlovich – D. Sc. (Physics and Mathematics), Leading Researcher, Center of Quantum Optics and Quantum Informatics, B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (68, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: apniz@ifanbel.bas-net.by

Pushkarchuk Alexander Leonidovich – Ph. D. (Physics and Mathematics), Senior Researcher, Laboratory of Adsorption and Ion Exchange, Institute of Physical-Organic Chemistry of the National Academy of Sciences of Belarus (68, Sarganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus); Institute for Nuclear Problems of the Belarusian State University (11, Bobruiskaia Str., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: alexp51@bk.ru

Kuten Semen Adamovich – Ph. D. (Physics and Mathematics), Head of the Laboratory of the Theoretical Physics and Simulation of Nuclear Processes, Institute for Nuclear Problems of the Belarusian State University (11, Bobruiskaia Str., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: kut@inp.bsu.by

Pushkarchuk Vadim Alexandrovich – Ph. D. (Physics and Mathematics), Senior Researcher, Center 4.11 of the Research Department of the Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (6, P. Brovka Str., 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: vadim@nv-center.com

Kilin Sergei Yakovlevich – Academician, D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Center of Quantum Optics and Quantum Informatics, B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (68, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus); Deputy Chairman of the Presidium of the National Academy of Sciences of Belarus (66, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: kilin@ifanbel.bas-net.by

Luzanov Anatolii Vital'ivich – D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Leading Researcher, Department of X-ray Diffraction Studies and Quantum Chemistry, SSI Institute of Single Crystals of the National Academy of Sciences of Ukraine (60, Lenin Ave., 61072, Kharkiv, Ukraine). E-mail: avluzanov@xray.isc.kharkov.com

ZhiKol Oleg Anatol'evich – Ph. D. (Chemistry), Researcher, Department of X-ray Diffraction Studies and Quantum Chemistry, SSI Institute of Single Crystals of the National Academy of Sciences of Ukraine (60, Lenin Ave., 61072, Kharkiv, Ukraine). E-mail: zhiKol@xray.isc.kharkov.com

For citation

Nizovtsev A.P., Pushkarchuk A.L., Kuten S.A., Pushkarchuk V.A., Kilin S. Ya., Luzanov A.V., ZhiKol O.A. Robust electronic-nuclear NV⁻¹³C spin systems in the diamond for quantum technologies. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series], 2017, no. 1, pp. 98–110. (In Russian).

Лэ Тхи Зиеу Хьен¹, С. А. Кутень², А. А. Хрущинский²

¹Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

²Институт ядерных проблем Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАЧАЛЬНОЙ ИОНИЗАЦИИ В РАБОЧЕМ ОБЪЕМЕ ИОНИЗАЦИОННОЙ КАМЕРЫ

Рассмотрен вопрос о пространственном распределении пар ионов в рабочем объеме цилиндрической ионизационной камеры деления. Предложена формула для пространственного распределения начальной ионизации в цилиндрической камере деления, в которой слой делящегося вещества нанесен на внутреннюю сторону внешнего электрода. Формула выведена двумя способами: путем подсчета числа пар ионов, генерированных в бесконечно малом объеме внутри рабочего объема камеры всеми треками, исходящими из радиатора. В первом случае бесконечно малый объем имеет форму сферы, во втором – произвольную форму. Формула, полученная без всяких ограничений на направление вылета осколков деления, дает правильное поведение пространственного распределения начальной ионизации как вблизи поверхности радиатора, так и вдали от него. Исследована зависимость начальной плотности ионизации от радиального расстояния до радиатора, создаваемой типичным фрагментом деления – ионом Sr в центре камеры. Исследовано также пространственное распределение начальной плотности ионизации вдоль камеры.

Ключевые слова: ионизационная камера деления, радиатор, рабочий объем камеры, плотность пар ионов.

Le Thi Dieu Hien ¹, S. A. Kuten ², A. A. Khrutchinsky ²

¹Belarusian State University, Minsk, Belarus

²Institute for Nuclear Problems of the Belarusian State University, Minsk, Belarus

INITIAL IONIZATION DISTRIBUTION IN THE ACTIVE VOLUME OF THE IONIZATION CHAMBER

The task of a spatial distribution of ion pairs in the active volume of the ionization fission chamber has been studied. The formula of a spatial distribution of ion pairs in cylindrical fission chambers, in which a fissile material layer is coated on the internal side of the external electrode, is derived. It is calculated in two ways: counting the number of ion pairs created in the infinitesimal volume inside the active volume of the chamber by all the trajectories, which emanate from a radiator. In the first case, the infinitesimal volume is a sphere. In the second case, it is arbitrary in shape. The formula has evaluated correctly the density of ion pairs at any point in the active volume of the fission chamber. The dependence of the initial density of ion pairs on a radial distance to a radiator created a typical fission fragment – ion Sr in the center of the chamber and the spatial distribution of the initial density of ion pairs along the chamber have been studied.

Keywords: fission ionization chamber, sensitive layer, sensitive volume, density of ion pairs.

Введение. Ионизационная камера деления (ИКД) представляет собой газово-разрядный детектор, предназначенный для измерения нейтронных потоков в энергетических и исследовательских ядерных реакторах, критических сборках [1]. В самой популярной конструкции камеры деления ее внутренняя поверхность (радиатор) покрывается тонким слоем делящегося вещества, обычно ²³⁵U (или слои ²³⁸U, ²³²Th, ²³⁹Pu [2]). Осколки деления являются тяжелыми заряженными частицами с зарядом примерно +20 e, имеющими среднюю кинетическую энергию 60–100 МэВ [3]. Поскольку два осколка испускаются в противоположных направлениях, один из них остается в радиаторе, другой летит в рабочий объем камеры, наполненный специальным газом (обычно Ar с небольшой добавкой N₂ или других газов) [4]. Второй осколок производит ионизацию газа и создает определенное число пар ионов (Ar⁺, e⁻). При наличии высокого напряжения между электродами возникает дрейф этих ионов и электронов к соответствующим электродам и, как следствие, во внешней цепи возникает электрический ток. При расчетах параметров ионизационной камеры деления (полного тока, чувствительности и др.) необходимо знать начальную плотность ионизации или, другими словами, плотность пар ионов, создаваемую тяжелыми заряженными частицами в рабочем объеме ИКД.

Вопросу определения пространственного распределения начальной плотности ионизации в рабочем объеме цилиндрической камеры деления со слоем делящегося вещества, нанесенного на внутренний электрод, посвящены работы [5, 6]. В них получены формулы, которые существенно отличаются друг от друга. Так, в [5] предполагается, что фрагменты деления покидают радиатор только в направлении, перпендикулярном его оси. В таком приближении получено правильное поведение плотности ионизации в рабочем объеме камеры вблизи радиатора, на его поверхности плотность ионизации является конечной величиной, определяемой характеристиками слоя делящегося вещества, нанесенного на поверхность радиатора. С другой стороны, в [6] учтено, что угловое распределение частиц, покидающих радиатор, в действительности является изотропным. Однако плотность ионизации, полученная в более реалистичной модели вылета фрагментов деления из радиатора, оказывается логарифмически расходящейся величиной вблизи его поверхности, что неправильно с физической точки зрения. По этой причине вопрос определения пространственного распределения начальной плотности ионизации для такой камеры требует дальнейшего исследования.

1. Начальная плотность ионизации в цилиндрической камере. Примером такой ионизационной камеры деления, когда слой делящегося вещества нанесен на внутреннюю сторону внешнего электрода, могут служить камеры фирмы «Photonis» [7], которые используются для контроля тепловых нейтронов в ядерных реакторах (схема одной из них приведена на рис. 1).

Выведем формулу для начальной плотности ионизации в произвольной точке $P(r, \theta, z)$ рабочего объема, находящейся на расстоянии r от оси радиатора (r, θ, z – координаты точки в цилиндрической системе координат с осью z вдоль оси камеры).

Начальная плотность ионизации в данной точке в силу цилиндрической симметрии не зависит от угловой переменной θ и определяется суммой вкладов, происходящих от элементарных площадок $dS = R d\theta' dz'$ на поверхности радиатора, где R – радиус радиатора, $d\theta'$ и dz' – угловой и линейный размеры площадки, расположенной в точке (θ', z') поверхности (см. рис. 1). На каждой такой площадке создается dn_s осколков деления:

$$dn_s = N_0 R d\theta' dz', \quad (1)$$

где N_0 – поверхностная плотность осколков деления (число осколков деления, вылетающих с единицы площади поверхности радиатора).

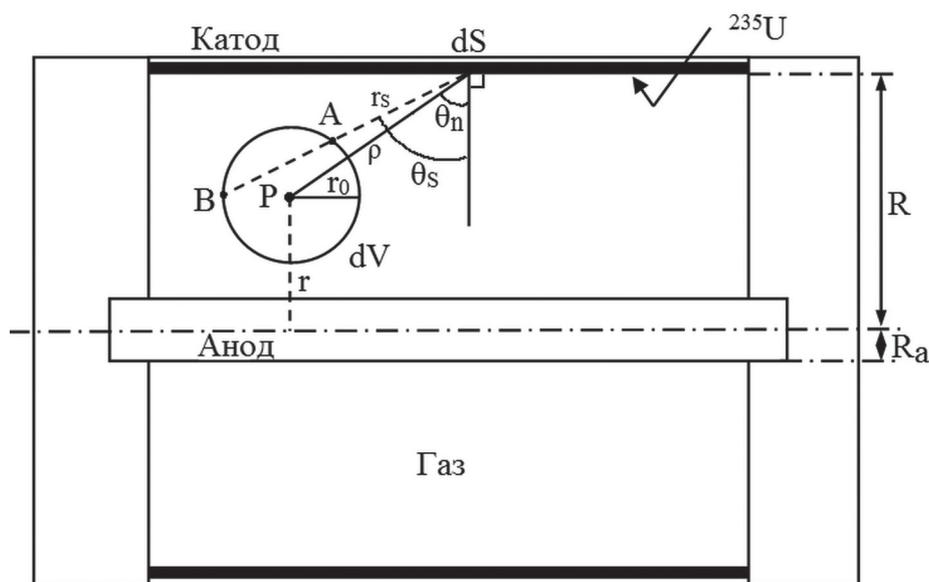


Рис. 1. Схема камеры деления со слоем делящегося вещества, нанесенным на внутреннюю сторону внешнего электрода

Fig. 1. Schematic view of a fission ionization chamber, longitudinal section

С учетом выражений (3–4) упомянутый интеграл может быть записан в первом приближении по r_0/ρ в виде

$$dN = dn_s \frac{X(\rho)}{2\pi} 2 \iint \cos(\theta_n) \sqrt{r_0^2 - \rho^2(\varphi_s^2 + \theta_s^2)} d\varphi_s d\theta_s. \quad (5)$$

Требование положительности подкоренного выражения означает, что интегрирование по θ_s выполняется в пределах $(-r_0/\rho, r_0/\rho)$. Выполнив интегрирование в (5), для величины dN будем иметь выражение

$$dN = \frac{X(\rho) \cos(\theta_n)}{2\pi \rho^2} dV dn_s. \quad (6)$$

Это же выражение можно получить и из других соображений. Действительно, учитывая приведенное выше замечание о вкладе элементарной площадки dS радиатора в число пар ионов dN'_s , которые генерированы в бесконечно малом объеме (произвольной формы, не обязательно в виде сферы) dV вокруг точки $P(r, \theta, z)$ в рабочем объеме камеры всеми треками, исходящими из этой площадки, величина dN'_s будет определяться выражением

$$dN'_s = dn_s \cos \theta_n X(r') dr' \frac{d\Omega}{2\pi}, \quad (7)$$

где r' – расстояние от точки испускания до точки наблюдения (длина трека), θ_n – угол между нормалью к площадке dS и линией трека r' , $d\Omega$ – телесный угол, под которым видна бесконечно малая сфера dV из центра элементарной площадки dS . В локальной сферической системе координат с центром в центре площадки dS элементарный объем dV и телесный угол $d\Omega$, под которым он виден из центра площадки, записываются в виде

$$\begin{aligned} d\Omega &= \sin \theta d\theta d\varphi, \\ dV &= r'^2 dr' d\Omega. \end{aligned} \quad (8)$$

Тогда плотность пар ионов, создаваемых в объеме dV всеми треками, исходящими из элементарной площадки dS радиатора, будет определяться выражением

$$\frac{dN'_s}{dV} = \frac{\cos \theta_n X(r')}{2\pi r'^2} dn_s, \quad (9)$$

что совпадает с выражением (6).

Из геометрии на рис. 1 следует, что величина $\cos \theta_n$ и длина трека r' могут быть выражены через координаты точек наблюдения (r, θ, z) и испускания (R, θ', z') :

$$\begin{aligned} \cos \theta_n &= \frac{R - r \cos(\theta - \theta')}{r'}, \\ r' &= \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos(\theta - \theta') + (z - z')^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

С учетом выражений (10) начальная плотность ионизации в данной точке P , обусловленная фрагментами деления, исходящими из элементарной площадки dS радиатора, может быть записана в виде

$$\frac{dN'_s}{dV} = \frac{N_0 R X(r')}{2\pi} \frac{R - r \cos(\theta - \theta')}{\left[r^2 + R^2 - 2rR \cos(\theta - \theta') + (z - z')^2 \right]^{3/2}} d\theta' dz'. \quad (11)$$

Интегрируя выражение (11) по всей площади радиатора, видимой из точки наблюдения (r, θ, z) , и проводя простейшие преобразования, для начальной плотности пар ионов, создаваемых осколками деления, получим искомое выражение в виде

$$N(r, z) = \int_S dN_s = \frac{N_0 R}{\pi} \int_0^{\theta_{\max}(r)} \int_{z_1}^{z_2} X(r') H(l - r') \frac{[R - r \cos(\theta')]}{r'^3} dz' d\theta',$$

$$r' = \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos(\theta') + (z - z')^2}, \quad (12)$$

где интегрирование проводится по все длине $h = z_2 - z_1$ рабочего объема камеры, R_a – радиус анода. Предел интегрирования θ_{\max} по угловой переменной, соответствующий суммированию вкладов от видимых с данной точки r областей поверхности радиатора, определяется геометрией рис. 2:

$$\theta_{\max}(r) = \arccos\left(\frac{R_a}{R}\right) + \arccos\left(\frac{R_a}{r}\right). \quad (13)$$

В (12) функция Хевисайда $H(s)$ отражает тот факт, что длина трека $u = r'$ физически ограничена длиной пробега l осколков деления.

Как и следовало ожидать, начальная плотность ионизации в данной точке (r, θ, z) в силу цилиндрической симметрии не зависит от ее угловой переменной θ .

Наличие функции Хевисайда в подынтегральном выражении в принципе не обязательно, поскольку обрезание пределов интегрирования производится с помощью функции $X(s)$ – количества ионных пар на единицу длины трека осколка. Эта величина определяется как отношение энергетических потерь (stopping power) на единицу длины к энергетическим затратам на создание одной пары ионов. Энергетические потери могут быть рассчитаны по известной формуле Бете – Блоха [8].

В настоящее время ряд программ позволяют принимать во внимание более тонкие эффекты, не учтенные в формуле Бете – Блоха. Одной из них является программа SRIM [9], использованная для оценки линейной плотности ионизации на длине трека. Для случая заполнения камеры чистым Ag под давлением 1 атм количество ионных пар на единицу длины трека осколка $X(s)$, рассчитанное в программе SRIM, приведено на рис. 3 для иона Sr – одного из наиболее вероятных осколков деления U^{235} .

Для выяснения поведения начальной плотности ионизации вблизи и вдали от поверхности радиатора и сравнения ее с аналогичным поведением для цилиндрической ИКД со слоем делящегося вещества, нанесенного на внутренний электрод, представим (12), следуя работе [6], в виде

$$N(r, z) = \frac{N_0 R X_0}{2\pi} F(r, z), \quad (14)$$

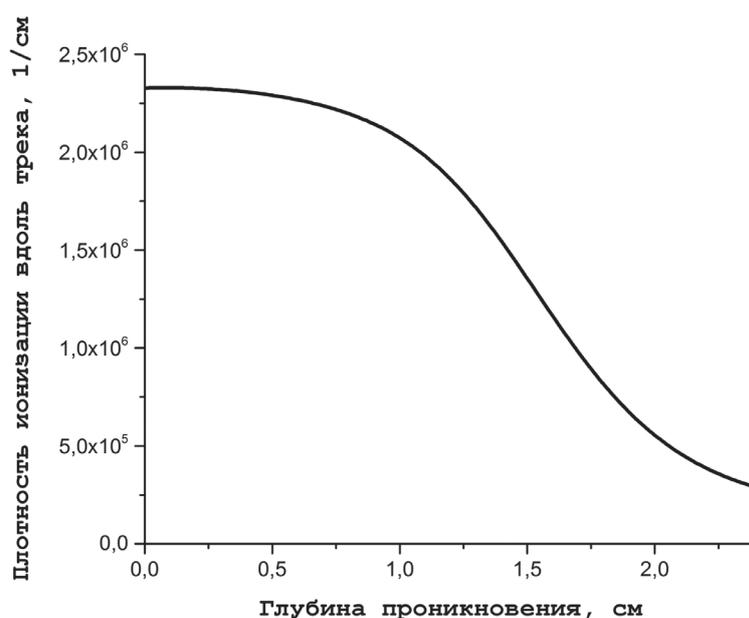


Рис. 3. Линейная плотность ионизации, создаваемая осколком деления – ионом Sr – вдоль трека
 Fig. 3. Linear density of ion pairs created by fission fragment Sr along the trajectory

где $X_0 = X(r' = 0)$ – линейная плотность ионизации вдоль трека, взятая в самом его начале. Величину X_0 можно использовать как характеристику коротких камер, длина h которых меньше свободного пробега фрагмента деления в рабочем объеме камеры $h < l$. Функция $F(r, z)$, которую можно рассматривать как нормированную плотность ионизации, для камер с делящимся веществом, нанесенным на внутренний электрод, приведена в работе [6], а в нашем случае определяется выражением

$$F(r, z) = \frac{2}{X_0} \int_0^{\theta_{\max}(r)} \int_{z+z_1}^{z+z_2} X(r') H(l-r') \frac{[R - r \cos(\theta')]}{r'^3} dz' d\theta',$$

$$r' = \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos(\theta') + z'^2}. \tag{15}$$

На рис. 4 представлена нормированная плотность ионизации $F(r) = F(r, 0)$, создаваемая осколком деления – ионом Sr – в центре камеры ($z = 0$) и рассчитанная по формуле (15) для параметров $h = 10$ см, $R_a = 0,8$ см и $R = 2,5$ см для двух случаев:

- 1) с учетом зависимости линейной плотности ионизации от координаты вдоль трека $X(r')$;
- 2) пренебрегая такой зависимостью: $X(r') = X_0$.

Самые крайние точки справа на рис. 4 соответствуют поведению величины $F(r)$ вблизи поверхности радиатора.

Условие $X(r') = X_0 = X(r' = 0)$ является условием на поверхности радиатора. Казалось бы, для второго случая при стремлении точки наблюдения к поверхности радиатора $r \rightarrow R$ соответствующая величина $F(r)$ должна стремиться к своему поверхностному значению, как это должно иметь место для камер с делящимся веществом на внутреннем электроде. Внимательный анализ, однако, показывает, что в этом отношении существует принципиальное различие между ИКД с делящимся веществом на внутреннем и на внешнем электроде. Для ИКД с делящимся веществом на внутреннем электроде вклад в плотность ионизации в данной точке r рабочего объема определяется ее локальным окружением, и при стремлении ее к поверхности внутреннего электрода нормированная плотность ионизации будет стремиться к своему поверхностному значению. Для ИКД с делящимся веществом на внешнем электроде вклад в плотность ионизации в данной точке

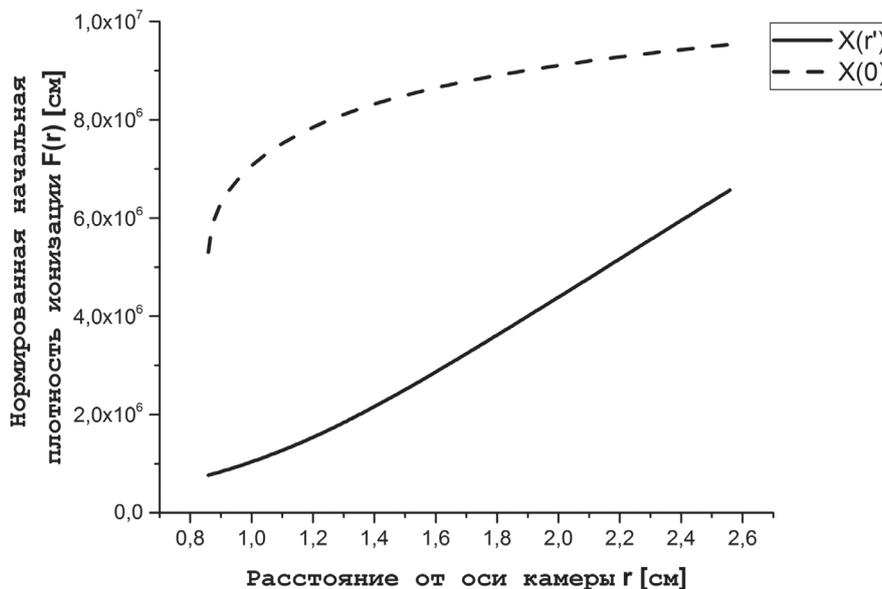


Рис. 4. Зависимость начальной плотности ионизации от радиального расстояния до радиатора, создаваемой ионом Sr в центре камеры деления: $X(r')$ – учет зависимости линейной плотности ионизации от координаты вдоль трека (a); $X(r' = 0) = X(0)$ – линейная плотность ионизации вдоль трека постоянна (b)

Fig. 4. Dependence of the initial density of ion pairs on a radial distance to a radiator created by fission fragment Sr in the center of the fission chamber: $X(r')$ – taking into account the dependence of the linear ionization density on the coordinates along the trajectory (a); $X(r' = 0) = X(0)$ – linear ionization density along the trajectory is constant (b)

наблюдения r рабочего объема определяется не только ее локальным окружением, но и удаленными, видимыми с данной точки областями внутренней стороны внешнего электрода, покрытой делящимся веществом (см. рис. 1). Поэтому при стремлении точки наблюдения к поверхности внешнего электрода нормированная плотность ионизации, кроме своего поверхностного вклада, будет иметь также дополнительный вклад от удаленных областей внутренней стороны внешнего электрода.

Условие $X(r') = X_0$ также означает, что линейная плотность ионизации постоянна во всех точках рабочего объема. В действительности же она имеет короткую область действия (см. рис. 2). Это означает, что нормированная плотность ионизации $F(r)$, рассчитанная для первого случая с учетом конечной области действия функции $X(r')$ вдоль трека, будет меньше по сравнению с аналогичной величиной, вычисленной в приближении $X(r') = X_0$, что и показано на рис. 4. Отличие величин $F(r)$ для этих двух случаев при стремлении точки наблюдения к поверхности внешнего электрода связано с обозначенным выше дополнительным вкладом от удаленных областей его внутренней стороны, видимых с точки r .

Пространственное распределение нормированной начальной плотности ионизации вдоль камеры представлено на рис. 5 в форме изолиний. Следует отметить слабую зависимость начальной плотности ионизации от координаты вдоль камеры, исключая концевые точки.

Радиальная зависимость плотности ионизации, соответствующая нижней кривой на рис. 4, которая приведена на рис. 6 в разных точках $-h/2 < z < h/2$ по длине камеры, тоже практически не зависит от координаты z вдоль камеры.

Эти особенности поведения пространственного распределения начальной плотности ионизации в цилиндрической камере, когда распределение практически однородно по ее длине, объясняют неплохую точность формулы из работы [5], выведенную в предположении ортогональности вылета фрагментов к оси камеры деления со слоем делящегося вещества, нанесенного на внутренний электрод.

Заключение. В работе предложена формула пространственного распределения начальной ионизации в рабочем объеме цилиндрической ионизационной камеры деления, в которой радиатор находится во внешнем электроде, с учетом испускания осколков деления поверхностью радиатора в любом направлении. Эта формула дает правильное поведение плотности пар ионов в любой точке внутри рабочего объема не только для миниатюрных, но и нормальных камер.

Вблизи поверхности радиатора рассматриваемой камеры распределение начальной ионизации не стремится к своему поверхностному значению, как это имеет место для камер с делящимся

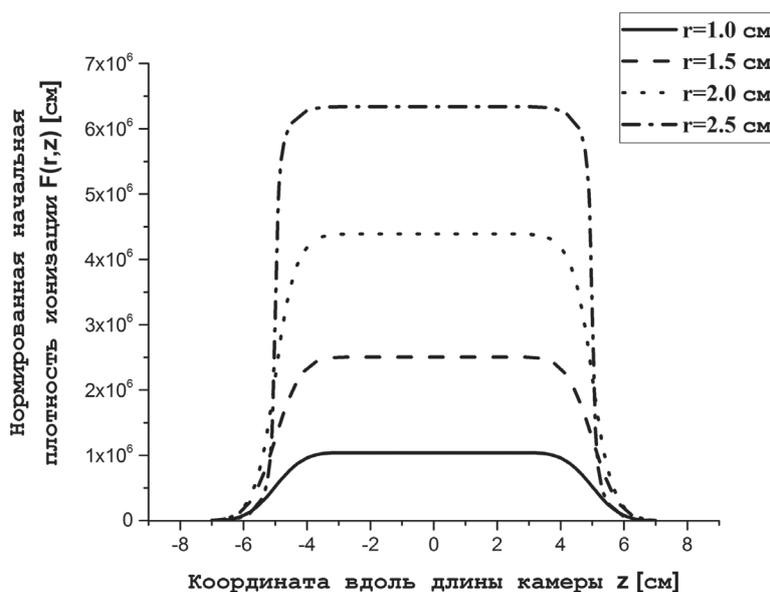


Рис. 5. Изолинии пространственного распределения начальной плотности ионизации вдоль камеры
 Fig. 5. Isolines of the spatial distribution of the initial density of ion pairs along the chamber

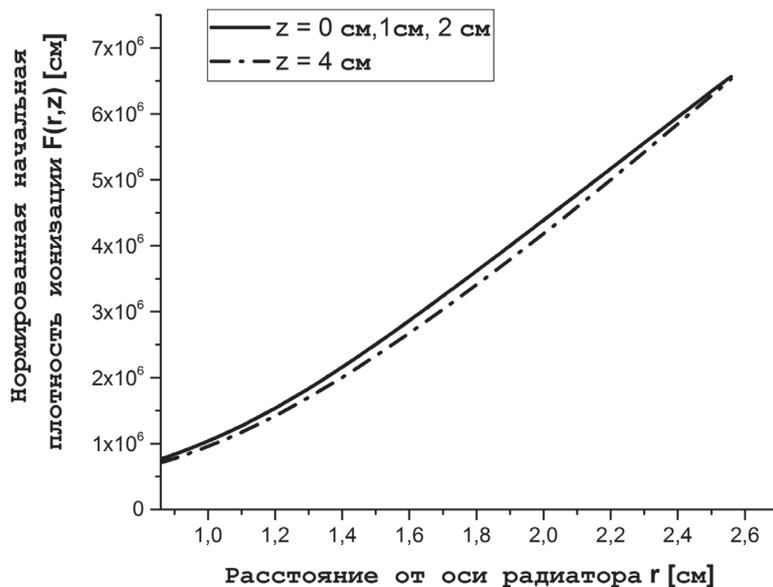


Рис. 6. Радиальная зависимость нормированной начальной плотности ионизации в различных точках камеры вдоль ее длины

Fig. 6. Dependence of the normalized initial density of ion pairs on a radial distance at various points along the chamber length

веществом на внутреннем электроде. Природа этой особенности геометрическая, т. е. вклад радиатора в плотность ионизации в заданной точке рабочего объема определяется не только ее локальным окружением, но и удаленными, видимыми с данной точки областями внутренней стороны внешнего электрода, покрытой делящимся веществом.

Список использованных источников

1. Малышев, Е. К. Газоразрядные детекторы для контроля ядерных реакторов / Е. К. Малышев, Ю. Б. Засадыч, С. А. Стабровский. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 161 с.
2. Дмитриев, А. В. Нейтронные ионизационные камеры для реакторной техники / А. В. Дмитриев, Е. К. Малышев. – М: Атомиздат, 1975. – 46 с.
3. Tsoulfanidis, N. Measurement and detection of radiation, second edition / N. Tsoulfanidis. –Washington, Taylor & Francis, 1995. – 518 p.
4. Antolínez, A. Fission chambers designer based on Monte Carlo techniques working in current mode and operated in saturation regime / A. Antolínez, D. Rapisarda // Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A. – 2016. – Vol. 825. – P. 6–16.
5. Poujade, O. Modeling of the saturation current of a fission chamber taking into account the distortion of electric field due to space charge effects / O. Poujade, A. Lebrun // Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A. – 1999. – Vol. 433. – P. 673–682.
6. Modelling of Fission Chambers in Current Mode— Analytical Approach / S. Chabod [et al.] // Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A. – 2006. – Vol. 566. – P. 633–653.
7. Fundamentals of neutron and gamma detectors [Electronic resource]. – Mode of access: <http://www.qsl.net/k0ff/016%20Manuals/NEUTRON%20DETECTION/part1.pdf>. – Date of access: 21.07.2016
8. Ziegler, J. F. The Stopping of Energetic Light Ions in Elemental Matter / J. F. Ziegler // J. Appl. Phys. – 1999. – Vol. 85, № 3. – P. 1249–1272.
9. Ziegler, J. F. SRIM – The Stopping and Range of Ions in Matter / J. F. Ziegler, J. P. Biersack, M. D. Ziegler // Nucl. Instrum. Methods Phys. Res., Sect. B. – 2010. – Vol. 268, № 11. – P. 1818–1823.

References

1. Malyshev E.K., Zasadych Ju.B., Stabrovskij S.A. *Gas-Discharge detectors for the nuclear reactors control*. Moscow, Energoatomizdat, 1991. 161 p. (In Russian).
2. Dmitriev A.V., Malyshev E.K. *Neutron Ionization Chambers for Reactor Engineering*. Moscow, Atomizdat, 1975. 46 p. (In Russian).
3. Tsoulfanidis N. *Measurement and detection of radiation*. Second edition. Washington, Taylor & Francis, 1995. 518 p.
4. Antolínez A., Rapisarda D. Fission chambers designer based on Monte Carlo techniques working in current mode and operated in saturation regime. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A*, 2016, vol. 825, pp. 6–16. Doi: 10.1016/j.nima.2016.03.050

5. Poujade O., Lebrun A. Modeling of the saturation current of a fission chamber taking into account the distortion of electric field due to space charge effects. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A*, 1999, vol. 433, no. 3, pp. 673–682. Doi: 10.1016/S0168-9002(99)00386-1

6. Chabod S., Fioni G., Letourneau A., Marie F. Modelling of Fission Chambers in Current Mode— Analytical Approach. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A*, 2006, vol. 566, no. 2, pp. 633–653. Doi: 10.1016/j.nima.2006.06.067

7. *Fundamentals of neutron and gamma detectors*. Available at: <http://www.qsl.net/k0ff/016%20Manuals/NEUTRON%20DETECTION/part1.pdf>. (accessed 21 July 2016).

8. Ziegler J.F. The Stopping of Energetic Light Ions in Elemental Matter. *Journal of applied physics*, 1999, vol. 85, no. 3, pp. 1249–1272. Doi: 10.1063/1.369844

9. Ziegler J.F., Ziegler M.D., Biersack J.P. SRIM – The Stopping and Range of Ions in Matter. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms*, 2010, vol. 268, no. 11, pp. 1818–1823. Doi: 10.1016/j.nimb.2010.02.091.

Информация об авторах

Лэ Тхи Зиёу Хьен – аспирант, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: hienle.job@gmail.com

Кутень Семен Адамович – кандидат физико-математических наук, заведующий лабораторией Института ядерных проблем БГУ, Белорусский государственный университет (ул. Бобруйская, 11, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: kut@inp.bsu.by

Хрущинский Аркадий Аркадьевич – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института ядерных проблем БГУ, Белорусский государственный университет (ул. Бобруйская, 11, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: arluchr@mail.ru

Для цитирования

Лэ Тхи Зиёу Хьен. Распределение начальной ионизации в рабочем объеме ионизационной камеры / Лэ Тхи Зиёу Хьен, С. А. Кутень, А. А. Хрущинский // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2017. – № 1. – С. 111–119.

Information about the authors

Le Thi Dieu Hien – Postgraduate, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: hienle.job@gmail.com

Kuten Siamion Adamovich – Ph. D. (Physics and Mathematics), Head of the Laboratory of the Institute for Nuclear Problems of the Belarusian State University (11, Bobruiskaya Str., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: kut@inp.bsu.by

Khrutchinsky Arkady Arkadievich – Ph. D. (Physics and Mathematics), Leading Researcher of the Institute for Nuclear Problems of the Belarusian State University (11, Bobruiskaya Str., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: arluchr@mail.ru

For citation

Le Thi Dieu Hien, Kuten S.A., Khrutchinsky A.A. Initial ionization distribution in the active volume of the ionization chamber. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series], 2017, no. 1, pp. 111–119. (In Russian).

ИНФОРМАТИКА
INFORMATICS

УДК 519.725;007.001.362;528.85/87(15)

Поступила в редакцию 23.01.2017

Received 23.01.2017

А. А. Дудкин¹, Д. Ю. Перцев²

¹*Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь*

²*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь*

**АЛГОРИТМ СЖАТИЯ ГИПЕРСПЕКТРАЛЬНЫХ ДАННЫХ
ДИСТАНЦИОННОГО ЗОНДИРОВАНИЯ ЗЕМЛИ**

Представлены результаты оценки корреляции гиперспектральных данных в пространственной и спектральной областях на примере гиперкуба AVIRIS Moffett Field. На их основе сформулированы ключевые особенности гиперспектральных данных. Приведены основные подходы к сжатию без потерь, выделены алгоритмы, относящиеся к тому или иному классу и применяемые в области дистанционного зондирования, показаны достоинства и недостатки конкретных реализаций на основе предсказания (linear prediction, fast lossless, spectral oriented least squares, correlation-based conditional average prediction, M-CALIC), поиска по таблице (lookup table, locally averaged interband scaling lookup tables) и вейвлет-преобразования (3D-SPECK). С учетом выявленных недостатков разработан алгоритм сжатия гиперспектральных данных, включающий следующие этапы обработки: предобработка (для каждого спектрального канала выполняется независимо), понижение степени корреляции в спектральной области и энтропийный кодер. Приведены результаты тестирования предложенного алгоритма в сравнении с альтернативными кодеками. В качестве тестовых данных использовались гиперкубы, входящие в тестовый набор AVIRIS (Cuprite, Jasper Ridge, Low Altitude, Moffett Field), который является общепризнанным стандартом при исследовании гиперспектральных данных. Полученные результаты свидетельствуют о соответствии разработанного алгоритма альтернативным подходам к сжатию без потерь, применяемым в дистанционном зондировании Земли. Достоинствами указанного алгоритма являются обеспечение параллельной обработки, вычислительная простота (отсутствие операций с высокой латентностью, например, умножения и деления), минимальные требования к объему оперативной памяти (память используется только для хранения гиперкуба и соответствует его объему). С учетом всего вышесказанного допускается схемотехническая реализация алгоритма на борту летательного аппарата.

Ключевые слова: гиперспектральные данные, AVIRIS, сжатие без потерь, спектральная корреляция, пространственная корреляция.

A. A. Doudkin¹, D. Yu. Pertsau²

¹*United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus*

²*Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Belarus*

COMPRESSION ALGORITHM OF THE HYPERSPECTRAL DATA OF EARTH REMOTE SENSING

The evaluation results of hyperspectral data correlation in spatial and spectral domains are presented by the example of the hypercube AVIRIS Moffett Field, and the key features of hyperspectral data are formulated. The basic approaches to lossless compression and the algorithms, which can be applied in Earth remote sensing, are considered. They are the prediction (linear prediction, fast lossless, spectral oriented least squares, correlation-based conditional average prediction, M-CALIC), the lookup tables (lookup table, locally averaged interband scaling lookup tables), the 3D wavelets (3D-SPECK). A compression algorithm of hyperspectral data is proposed with regard to the advantages and disadvantages of specific implementations of the analyzed algorithms in remote sensing. The main algorithm stages are the preprocessing (for each spectral channel, it is executed independently), the reduction of a correlation level in the spectral area and the entropy coder. The test results of the developed algorithm are given in comparison to the alternative codecs on the AVIRIS test set (Cuprite, Jasper Ridge, Low Altitude, Moffett Field) that prove the efficiency of the proposed algorithm: parallel processing, low computing cost (low latency instructions are used, no division and multiplication), small random access memory requirements (the memory is used only for storage of the hypercube). In the context of the above advantages, the hardware implementation of the algorithm is allowed for on board the aircraft.

Keywords: hyperspectral compression, AVIRIS, spectral correlation, spatial correlation.

Введение. Дистанционное зондирование Земли – это способ получения информации об объекте без непосредственного физического контакта с ним. На борту летательного аппарата (например, спутника либо самолета) устанавливается спектрометр, задачей которого является фиксация излучения с поверхности, затем бортовая система осуществляет предобработку полученных данных и передает их в центр приема информации. При этом в зависимости от типа спектрометра рабочий диапазон длин волн, фиксируемый аппаратурой, может составлять от долей микрометра (видимое оптическое излучение) до метров (радиоволны).

В зависимости от типа спектрометра различают мультиспектральные (например, IKONOS, Rapid Eye и т. д.) и гиперспектральные (например, AVIRIS). Основное отличие заключается в том, что гиперспектральные спектрометры фиксируют данные в виде непрерывного диапазона спектра с определенным шагом (например, диапазон от 500 до 700 нм с шагом 10 нм, всего 20 спектральных каналов), в то время как мультиспектральные данные могут иметь те же 20 спектральных каналов, но распределенных в спектральном диапазоне неравномерно (например, 5 каналов в диапазоне от 500 до 600 нм и 15 – в диапазоне от 600 до 700 нм).

Проблемы развития систем дистанционного зондирования Земли. Тенденции развития дистанционного зондирования показывают, что акцент в исследованиях смещается в область гиперспектральной съемки. Однако широкому практическому применению для аэрокосмического мониторинга препятствует отсутствие достаточного количества спутников и воздушных судов, оборудованных соответствующими спектрометрами; сложности, связанные с обработкой и интерпретацией больших потоков информации, формируемой этими приборами. В связи с этим одним из актуальных направлений в развитии систем дистанционного зондирования Земли является создание спутниковой гиперспектральной аппаратуры и технологий обработки получаемой с помощью нее информации на борту летательного аппарата.

Данные, которые передаются в центр приема, представляют собой трехмерный куб (рис. 1), характеризующийся следующими разрешениями: пространственным (определяет площадь поверхности); спектральным (определяет охватываемый спектральный диапазон); радиометрическим (определяет число уровней сигнала, которые сенсор может зарегистрировать).

Подобная структура, с учетом непрерывности спектрального диапазона, приводит к формированию существенного объема передаваемых на Землю данных и актуализации задачи сжатия. Например, данные спектрометра AVIRIS [1], которые используются для разработки алгоритмов и программного обеспечения для обработки гиперспектральных снимков, имеют следующие характеристики: ширина изображения 677 пикселей, 224 спектральных канала, 12 бит на канал, что в общем случае приводит к 222,1 Кб данных на одну строку. С учетом характеристик современных радиоканалов связи и того, что съемка объекта осуществляется непрерывно, важнейшими требованиями к алгоритмам сжатия данных являются высокий коэффициент сжатия и низкая вычислительная сложность алгоритма, что связано с ограниченными схемотехническими возможностями летательного аппарата.

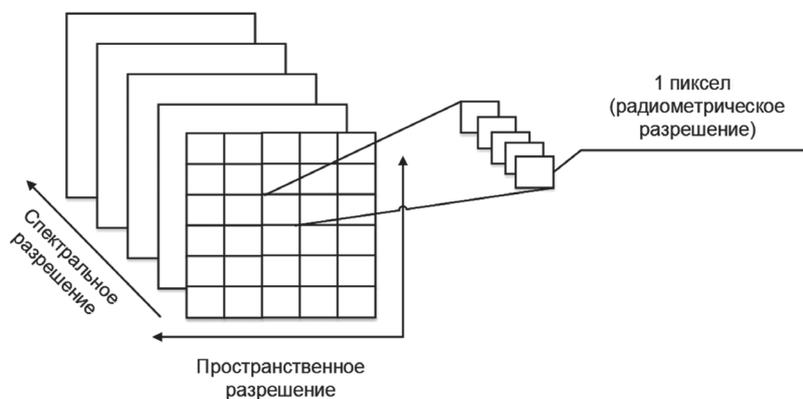


Рис. 1. Структура данных дистанционного зондирования Земли

Fig. 1. Structure of the Earth remote sensing data

Корреляция гиперспектральных данных. При разработке алгоритма сжатия было проведено исследование корреляции гиперспектральных данных, позволяющей оценить степень сходства между ними. Спектральная корреляция между каналами u и v определяется по формуле (1), пространственная корреляция для канала k в некоторой точке (i, j) на изображении определяется по формуле (2). Обе формулы были представлены в [2]:

$$c_{u,v} = \frac{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \tilde{x}_{i,j,u} \cdot \tilde{x}_{i,j,v}}{\sqrt{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \tilde{x}_{i,j,u}^2 \cdot \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \tilde{x}_{i,j,v}^2}}, \quad (1)$$

$$c_k(i, j) = \frac{C_k(i, j)}{\sqrt{C_k(i, i) \cdot C_k(j, j)}}, \quad (2)$$

где u, v, k – номер спектрального канала, $\tilde{x}_{i,j,k} = x_{i,j,k} - \bar{x}_k$, $x_{i,j,k}$ – значение пиксела с координатами (i, j) на изображении в спектральном канале k , \bar{x}_k – математическое ожидание в канале k , M и N – ширина и высота канала в пространственной области, $C_k = \text{cov}(\text{img}_k)$ – матрица ковариаций, полученная при обработке изображения img_k спектрального канала k , $C_k(i, j)$, $C_k(i, i)$ и $C_k(j, j)$ – значения в матрице ковариаций C_k с координатами (i, j) , (i, i) и (j, j) соответственно.

Результат вычисления спектральной корреляции между каналами для гиперкуба Moffett Field представлен на рис. 2, *a*. Пространственная корреляция между двумя произвольными точками (i, j) изображения проиллюстрирована на рис. 2, *b* (для примера выбран канал 43 этого гиперкуба). Изменение значений корреляции представлено визуально полутонным изображением (справа приведена легенда). Можно сделать следующие выводы об особенностях гиперспектральных данных:

- спектральная корреляция между двумя соседними каналами стремится к единице;
- несмотря на сильную спектральную корреляцию между близкими каналами, в наборе возможно наличие каналов, корреляция между которыми небольшая, что объясняется погодными условиями (например, часть дальнего инфракрасного излучения поглощается парами воды и углекислым газом, поэтому если спектрометр охватывает данный диапазон длин волн, могут фиксироваться «впадины»).

Обзор алгоритмов сжатия. На основе проведенного анализа литературы были выделены два подхода к сжатию гиперспектральных данных: с применением общеизвестных методик сжатия и с адаптацией алгоритма под заданные условия.

В рамках *первого подхода* чаще всего используются алгоритмы сжатия без потерь и почти без потерь (когда потери информации не превышают уровень шума, вносимого используемым спектрометром). Они разделяются на следующие основные классы, главное различие между которыми сводится к имеющимся аппаратным ресурсам: на основе предсказания (linear prediction (LP) [3],

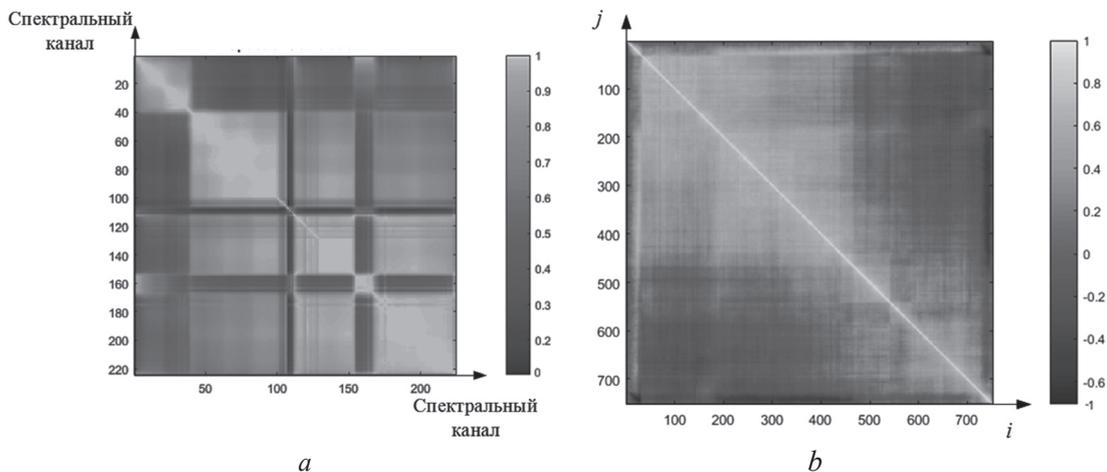


Рис. 2. Матрица корреляции для гиперкуба Moffett Field: *a* – спектральная; *b* – пространственная
 Fig. 2. Correlation matrix for the hypercube Moffett Field: *a* – spectral; *b* – spatial

fast lossless (FL) [4], spectral oriented least squares (SLSQ) [5], correlation-based conditional average prediction (CCAP) [6], M-CALIC [7]); поиск по таблице (lookup table (LUT) [8], locally averaged interband scaling lookup tables (LAIS-LUT) [9]); вейвлеты (3D-SPECK [10]).

В алгоритмах сжатия на основе предсказания выделяется некоторая окрестность, над которой выполняется математическое действие (предсказание). Результат предсказания вычитается из оригинального значения и формируется ошибка предсказания, которая передается на блок энтропийного кодирования, результатом которого является сжатый поток данных. Восстановление осуществляется в обратной последовательности. В качестве алгоритма кодирования могут использоваться, например, коды Голомба – Райса или любой арифметический кодек, допускающий аппаратную реализацию.

Основным недостатком многих алгоритмов предсказания является высокая вычислительная нагрузка при небольшом использовании оперативной памяти.

Алгоритмы на основе поиска по таблице обеспечивают ускорение процесса вычисления, основанное на том, что корреляция между спектральными каналами существенна. Для этих целей вводится таблица, по которой выполняется предсказание. Размерность таблицы – число спектральных каналов, умноженное на максимально допустимое значение при данном радиометрическом разрешении. По текущему значению пиксела делается запрос в таблицу, и возвращаемое значение считается предсказанным. Дальнейшая обработка эквивалентна алгоритмам предсказания.

Алгоритмы на основе дискретного вейвлет-преобразования являются наиболее требовательными ко всем вычислительным ресурсам. Данный класс предполагает предварительный перевод спектральной плоскости в частотную область. После этого возможно организовать обработку таким образом, чтобы система кодировала в первую очередь наиболее значимые вейвлет-коэффициенты, постепенно смещаясь в область с наименее значимыми коэффициентами. Такой подход позволяет реализовать как сжатие без потерь (при обработке всех вейвлет-коэффициентов), так и управляемое сжатие с потерями. Главный недостаток алгоритмов этого класса – вычислительная сложность, связанная с преобразованием в частотную область куба данных, и требования к пропускной способности памяти из-за случайных переходов в памяти от высокочастотных к низкочастотным вейвлет-коэффициентам.

Второй подход основан на существенной избыточности получаемых данных и связан с большим спектральным разрешением. Алгоритмы данного класса основываются на следующих упрощениях: 1) условия съемки заведомо известны; при таком подходе появляется возможность на борту летательного аппарата удалить неинформативные каналы (например, учесть влияние атмосферы) либо, наоборот, выделить наиболее информативные, т. е. в любом случае получить мультиспектральные данные;

2) выполнение полного либо частичного анализа полученных данных и передача результата, а не самих данных.

Достоинством алгоритмов, реализующих данный подход, является передача только необходимых данных и существенное понижение объема передаваемых данных. Тем не менее алгоритмы практически не реализуемы на борту летательного аппарата из-за их вычислительной сложности.

Разработанный алгоритм сжатия. С учетом представленных выше особенностей гиперспектральных данных разработан алгоритм сжатия, основными компонентами которого являются: предобработка (для каждого спектрального канала), понижение степени корреляции в спектральной области и энтропийный кодер (арифметический кодек). На рис. 3 приведен пример для трех каналов.

Общее число спектральных каналов N делится на подмножества фиксированного размера n , которые передаются на вход алгоритма сжатия. При этом на n накладывается следующее ограничение: $1 < n \leq N$. Рекомендуемое значение n – 20–25 каналов. Это связано со следующими утверждениями: маленькое значение n приводит к формированию большого числа опорных кадров (первый канал из подмножества), что в дальнейшем ухудшает декорреляцию в спектральной области; предлагаемый алгоритм допускает параллельную обработку нескольких подмножеств, однако при большом значении n общее число подмножеств снижается, что может привести к неэффективному использованию вычислительных ресурсов.



Рис. 3. Алгоритм сжатия гиперспектральных данных

Fig. 3. Compression algorithm of hyperspectral data

В качестве этапа предварительной обработки используется разработанная авторами данной статьи версия вейвлет-разложения. В кадре вычитается по два соседних столбца. Полученная дельта сохраняется в первой половине столбцов кадра в качестве результата. Во второй половине кадра сохраняются опорные значения (в качестве опорных выбран первый столбец из каждой дельты). После получения промежуточного результата аналогичное действие применяется к строкам. В результате формируется кадр, по структуре схожий с вейвлет-разложением Хаара, однако допускающий возможность полного восстановления. Если число уровней разложения больше единицы, описанные выше действия повторяются для нижней правой четверти кадра.

В общем случае применение вейвлет-разложения позволяет понизить избыточность данных в пространственной области и добавляет возможность управления процессом сжатия (адаптация модели для сжатия с потерями).

Для понижения степени спектральной корреляции может применяться один из следующих подходов: использование алгоритмов предсказания, работающих в спектральной области, и вычитание соседних каналов. Изучение алгоритмов предсказания не выявило каких-либо преимуществ по сравнению с вычитанием соседних каналов. При этом аппаратная реализация последнего подхода оказывается существенно проще. В качестве алгоритмов предсказания использовались среднее арифметическое и медиана области 2×2 пиксела.

Финальным этапом предлагаемого алгоритма служит энтропийное кодирование, задачей которого является формирование результирующего сжатого потока.

Тестирование алгоритма сжатия. Для тестирования алгоритма сжатия использовался тестовый набор AVIRIS [1] (Cuprite, Jasper Ridge, Lunar Lake, Moffer Field), который считается общепризнанным стандартом при проведении исследований в области дистанционного зондирования. Данный сенсор позволяет фиксировать изображения с пространственным разрешением 20×20 метров на один пиксел в спектральной области от 400 до 2500 нм с шагом 10 нм (при этом обеспечивается 224 спектральных канала). Тестовые данные имеют следующие характеристики:

- радиометрическое разрешение – 16-битное целое число;
- число спектральных каналов – 224;
- пространственное разрешение изображения:
 - Cuprite – 614 строк, 512 столбцов (суммарный объем – 134,3 МБ);
 - Jasper Ridge – 614 строк, 2586 столбцов (суммарный объем – 678,4 МБ);
 - Low Altitude – 614 строк, 1087 столбцов (суммарный объем – 285,2 МБ);
 - Moffet Field – 753 строк, 1924 столбцов (суммарный объем – 619,0 МБ).

Тестирование проводилось на оригинальных тестовых наборах без предварительной обработки. При тестировании разработанного алгоритма сжатия использовались следующие параметры:

в качестве алгоритма понижения степени спектральной корреляции использовалось вычитание соседних каналов; в качестве энтропийного кодера применялся оптимизированный для аппаратной реализации арифметический кодек, для чего было выполнено преобразование кода в целочисленную арифметику, а операции умножения и деления заменены на операции логического сдвига.

В проведенном эксперименте оценивался коэффициент сжатия разработанного алгоритма (таблица). Для сравнения в данной таблице показаны также результаты работы основных алгоритмов на основе предсказания, поиска по таблице и вейвлет-преобразования. Для этих алгоритмов приведены коэффициенты сжатия, полученные авторами указанных алгоритмов.

Коэффициент сжатия / Compression factor

Алгоритм сжатия Compression algorithm	Тестовое множество / Test set				Среднее значение Average value
	Cuprite	Jasper Ridge	Low Altitude	Moffet Field	
LP	3,03	2,94	2,76	2,88	2,90
FL	3,23	3,16	3,00	3,16	3,14
SLSQ	3,19	3,19	3,09	3,17	3,16
CCAP	3,16	3,15	2,94	–	3,08
M-CALIC	3,22	3,17	3,01	3,38	3,20
LUT	3,44	3,23	3,35	3,17	3,30
LAIS-LUT	3,58	3,42	3,50	3,36	3,47
3D-SPECK	–	2,39	–	2,33	2,36
Разработанный алгоритм / Developed algorithm	2,70	2,90	3,10	3,00	2,93

Преимуществами разработанного алгоритма по сравнению с рассматриваемыми являются:

- по сравнению с LP и 3D-SPECK – коэффициент сжатия;
- возможность применения к любому типу сенсора без предварительного анализа характеристик и условий съемок; алгоритмы SLSQ, CCAP и M-CALIC предполагают предварительную настройку статистических коэффициентов с учетом параметров сенсора либо решение системы уравнений при съемке, что существенно усложняет аппаратную реализацию;
- алгоритм FL предполагает выделение памяти для хранения трех предыдущих спектральных каналов для формирования вектора с весовыми коэффициентами;
- при тестировании алгоритмов LP, FL и SLSQ авторы выделяют множество спектральных каналов с низкой корреляцией между соседями и в дальнейшем либо не сжимают данные каналы (получают мультиспектральные данные) либо обрабатывают их отдельно; недостатком такого подхода является необходимость анализа коэффициента корреляции и принятия решения о выборе алгоритма, что существенно усложняет аппаратную реализацию, либо формирование данного множества заранее, что накладывает ограничения на условия съемки;
- алгоритмы на основе поиска по таблице требуют дополнительного объема оперативной памяти для хранения всей истории предсказаний и установки микросхем с низкой латентностью доступа; кроме того, алгоритм LAIS-LUT при расчете весового коэффициента предполагает применение операции умножения и трех операций деления, обладающих существенной латентностью по сравнению с остальными арифметическими операциями.

Заключение. В рамках статьи рассмотрены различные подходы к сжатию гиперспектральных данных, выявлены их достоинства и недостатки. Выполнен анализ недостатков конкретных реализаций. С учетом полученных данных представлен алгоритм сжатия без потерь, применимый к классическому гиперкубу. Достоинствами алгоритма сжатия являются: возможность параллельной обработки, так как множества n спектральных каналов могут обрабатываться независимо; вычислительная простота (отсутствие арифметических операций с высокой латентностью, например, умножение или деление); минимальные требования к объему ОЗУ – память используется только для хранения гиперкуба и соответствует его объему (например, для тестового набора Low Altitude – 285,2 Мб); универсальность подхода без зависимости по типу используемого сенсора; возможность реализации на борту летательного аппарата. В дальнейшем планируется тестирование предложенного алгоритма сжатия на гиперспектральных данных, полученных с применением Фурье-интерферометра, а также разработка 3D-версии контекстной модели для бинарной версии арифметического кодирования.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. AVIRIS Hyperspectral Images [Electronic resource] / Jet Propulsion Laboratory. – Mode of access: http://aviris.jpl.nasa.gov/data/free_data.html. – Date of access: 10.09.2016.
2. Low-complexity lossless compression of hyperspectral imagery via linear prediction / F. Rizzo [et al.] // *Signal Proc. Letters, IEEE*. – 2005. – Vol. 12, iss. 2. – P. 138–141.
3. Klimesh, M. Low-complexity lossless compression of hyperspectral imagery via adaptive filtering: Technical Report 42-163 / Jet Propulsion Laboratory California Institute of Technology. – California Institute of Technology, 2005.
4. Pizzolante, R. Lossless compression of hyperspectral imagery / R. Pizzolante // *Proc. of the First Int. Conf. on Data Compression, Communications and Processing (CCP'11)*. – 2011. – P. 157–162.
5. Wang, H. Lossless hyperspectral-image compression using context-based conditional average / H. Wang, S. D. Babacan, K. Sayood // *Geoscience and Remote Sensing, IEEE Transactions on*. – 2007. – Vol. 45, iss. 12. – P. 4187–4193.
6. Magli, E. Optimized onboard lossless and near-lossless compression of hyperspectral data using CALIC / Magli, E., Olmo, G., Quacchio, E. // *Geoscience and Remote Sensing Letters, IEEE*. – 2004. – Vol. 1, iss. 1. – P. 21–25.
7. Huang, B. Lossless compression of hyperspectral imagery via lookup tables with predictor selection / B. Huang, Y. Sri- raja // *Proc. Image and Signal Proc. for Remote Sensing XII*. – 2006. – Vol. 6365. – P. 131–139.
8. Mielikainen, J. Lossless compression of hyperspectral images using a quantized index to lookup tables / J. Mielikainen, P. Toivanen // *Geoscience and Remote Sensing Letters, IEEE*. – 2008. – Vol. 5, iss. 3. – P. 474–478.
9. Tang, X. Three-Dimensional Wavelet-Based Compression of Hyperspectral Images / X. Tang, W. A. Pearlman // *Hyperspectral Data Compression*. – Berlin: Springer, 2006. – P. 273–308.
10. Christophe, E. Hyperspectral Data Compression Tradeoff / E. Christophe // *Optical Remote Sensing*. – Berlin: Springer, 2011. – P. 9–29.

References

1. *AVIRIS Hyperspectral Images*. Available at: http://aviris.jpl.nasa.gov/data/free_data.html (accessed 10 September 2016).
2. Rizzo F., Carpentieri B., Motta G., Storer J.A. Low-complexity lossless compression of hyperspectral imagery via linear prediction. *IEEE Signal Processing Letters*, 2005, vol. 12, no. 2, pp. 138–141. Doi: 10.1109/LSP.2004.840907
3. Klimesh M. Low-complexity lossless compression of hyperspectral imagery via adaptive filtering. Technical Report 42-163. California Institute of Technology, 2005.
4. Pizzolante R. Lossless compression of hyperspectral imagery. *Proceedings of the First International Conference on Data Compression, Communications and Processing. CCP'11*, 2011, pp. 157–162. Doi: 10.1109/CCP.2011.31
5. Wang H. Babacan S.D., Sayood K. Lossless hyperspectral-image compression using context-based conditional average. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2007, vol. 45, no. 12, pp. 4187–4193. Doi: 10.1109/TGRS.2007.906085
6. Magli E., Olmo G., Quacchio E. Optimized onboard lossless and near-lossless compression of hyperspectral data using CALIC. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, 2004, vol. 1, no. 1, pp. 21–25. Doi: 10.1109/LGRS.2003.822312
7. Huang B. Lossless compression of hyperspectral imagery via lookup tables with predictor selection. *Proc. Image and Signal Processing for Remote Sensing XII*, 2006, vol. 6365, pp. 131–139. Doi: 10.1117/12.690659
8. Mielikainen J. Toivanen P. Lossless compression of hyperspectral images using a quantized index to lookup tables. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, 2008, vol. 5, no. 3, pp. 474–478. Doi: 10.1109/LGRS.2008.917598
9. Tang X., Pearlman W.A. Three-Dimensional Wavelet-Based Compression of Hyperspectral Images. *Hyperspectral Data Compression*. Berlin, Springer, 2006, pp. 273–308. Doi: 10.1007/0-387-28600-4_10
10. Christophe E. Hyperspectral Data Compression Tradeoff. *Optical Remote Sensing*. Berlin, Springer, 2011, pp. 9–29. Doi: 10.1007/978-3-642-14212-3_2

Информация об авторах

Дудкин Александр Арсентьевич – доктор технических наук, заведующий лабораторией, Объединенный институт проблем информатики, Национальная академия наук Беларуси (ул. Сурганова, 6, 220012, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: doudkin@newman.bas-net.by

Перцев Дмитрий Юрьевич – младший научный сотрудник, Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (ул. П. Бровки, 6, 220600, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: DmitryPertsev@gmail.com

Information about the authors

Doudkin Alexander Arsent'evich – D. Sc. (Engineering), Head of the Laboratory, United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus (6, Surganov Str., 220012, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: doudkin@newman.bas-net.by

Pertsau Dmitry Yur'evich – Junior Researcher, Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (6, P. Brovka Str., 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: DmitryPertsev@gmail.com

Для цитирования

Дудкин, А. А. Алгоритм сжатия гиперспектральных данных дистанционного зондирования Земли / А. А. Дудкин, Д. Ю. Перцев // Вест. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2017. – № 1. – С. 120–126.

For citation

Doudkin A.A., Pertsau D.Yu. Compression algorithm of the hyperspectral data of Earth remote sensing. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series], 2017, no. 1, pp. 120–126. (In Russian).

УЧЕНЫЕ БЕЛАРУСИ
SCIENTISTS OF BELARUS

ВАЛЕНТИН АНТОНОВИЧ ОРЛОВИЧ

(К 70-летию со дня рождения)



2 января 2017 г. исполнилось 70 лет со дня рождения академика Валентина Антоновича Орловича — известного ученого в области лазерной физики, нелинейной оптики, спектроскопии, лазерно-оптического приборостроения.

Валентин Антонович родился 2 января 1947 г. в д. Красное Молодечненского района Минской области. В 1964 г. окончил с золотой медалью среднюю школу и поступил на физический факультет (отделение радиофизики) Белорусского государственного университета, после окончания которого был распределен в Институт физики АН БССР. В 1969–1994 гг. — стажер-исследователь, младший, старший, ведущий, главный научный сотрудник, с 1994 г. — заведующий лабораторией, с 1998 г. — заместитель директора Института физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси. С 2003 г. — председатель Научного совета — директор Исполнительной дирекции Белорусского республиканского фон-

да фундаментальных исследований. С 2014 г. — академик-секретарь Отделения физики, математики и информатики НАН Беларуси.

Первый цикл исследований В. А. Орловича, завершившийся защитой кандидатской диссертации в 1976 г., был посвящен изучению закономерностей развития вынужденного комбинационного рассеяния (ВКР) в жидких средах и разработке методов измерения коэффициентов ВКР-усиления, а также сечений комбинационного рассеяния (КР). В дальнейшем разнообразие исследуемых нелинейно-оптических явлений, рассеивающих сред и вариантов постановки эксперимента были существенно расширены. При этом большое внимание уделялось как познанию физической сущности изучаемых явлений, так и выяснению возможностей их практического применения. С использованием ВКР-преобразования и лазеров на растворах красителей уже в середине 1970-х гг. в Институте была создана уникальная лазерная система, позволяющая получать когерентное излучение на длинах волн, плавно перестраиваемых в диапазоне 0,3–8,1 мкм. За этот цикл работ В. А. Орловичу (в составе коллектива сотрудников других лабораторий института) присуждена премия Ленинского комсомола Беларуси (1978).

В 1980-е гг. В. А. Орловичем с коллегами выполнен большой цикл работ по спектроскопии когерентного антистоксового рассеяния света (КАРС) и развитию методов спектроскопии резонансного комбинационного рассеяния. Одним из результатов этих исследований явилось создание (с мировым приоритетом) в Институте лабораторной установки невырожденного КАРС, позволяющей измерять все компоненты тензора кубической восприимчивости и другие характеристики колебаний молекул в основном и возбужденных электронных состояниях. Был также разработан и практически реализован метод спектроскопии насыщения КР, что, совместно с методами наведенного поглощения и спонтанного КР, позволило обнаружить и объяснить ряд эффектов и фотохимических реакций, возникающих при взаимодействии молекул металлопорфиринов с молекулами растворителей, ДНК и ДНК-моделирующих соединений.

Валентин Антонович всегда уделял большое внимание вопросам совершенствования и создания новых источников когерентного излучения. В частности им предложен и практически

реализован в лазерах различного типа новый метод повышения яркости генерируемых световых пучков путем использования неустойчивого телескопического резонатора с поляризационным выводом излучения. Применение данного метода в эксимерном лазере позволило получить потоки УФ-излучения с расходимостью порядка 0,1 мрад, что дало возможность эффективно преобразовывать это излучение с помощью ВКР в большое число стоковых компонент. В. А. Орлович внес большой вклад в разработку и создание ряда других ВКР-преобразователей и мощных лазерных источников, часть из которых была доведена до мелкосерийного выпуска. Результаты работ ученого по исследованию и применениям КАРС и ВКР-преобразователей лазерного излучения легли в основу его докторской диссертации, защищенной в 1990 г. В дальнейшем значительное место в научной деятельности В. А. Орловича и возглавляемой им лаборатории заняли исследования макроскопических проявлений квантовых шумов в энергии, интенсивности и спектре ВКР-преобразованного излучения и накачки. Важным результатом этих работ стало открытие возможности получения с помощью ВКР-преобразования излучения с супергауссовой статистикой и доказательство того факта, что при ВКР-преобразовании лазерных импульсов могут быть получены солитоноподобные волны разных типов, в том числе с детерминированной возможностью генерации солитонов определенного типа.

В последние годы внимание ученого сосредоточено на исследованиях ВКР в кристаллических средах, на решении проблем создания высокотехнологичных полностью твердотельных, в том числе и малогабаритных, лазерных систем, позволяющих получать мощное когерентное излучение в широком диапазоне длин волн. В этом направлении им совместно с учениками предложена и реализована концепция создания полностью твердотельной лазерной системы, позволяющей получать мощное высокомонохроматическое излучение на любой из длин волн, в том числе плавно перестраиваемое, в диапазоне 0,188–1,8 мкм; обнаружен и исследован эффект ВКР-самопреобразования частоты в мини- и микрочип-лазерах на различных кристаллах; получено ВКР-преобразование частоты фемтосекундных лазерных импульсов в кристаллических средах в условиях, когда длительность импульсов сравнима или меньше периода колебаний рассеивающей среды; получено ВКР-преобразование непрерывного лазерного излучения в кристаллических средах; реализовано многокомпонентное ВКР-преобразование на кристаллах в резонаторе; предсказана и впервые реализована генерация на ряде новых перспективных кристаллах, созданы новые типы лазеров и нелинейно-оптических преобразователей частоты для специальных применений.

Научные результаты В. А. Орловича изложены более чем в 600 публикациях, отмечены Государственной премией Республики Беларусь (2000). Он награжден медалью Международного оптического общества им. Д. С. Рождественского (Россия), Золотой медалью Академии наук Монголии и др.; в 2016 г. удостоен звания «Заслуженный деятель науки Республики Беларусь».

В настоящее время как академик-секретарь Отделения физики математики и информатики НАН Беларуси Валентин Антонович проводит большую научно-организационную работу, предлагает новые формы развития Отделения, перспективные направления фундаментальных исследований. Имя В. А. Орловича широко известно мировой научной общественности. Он принимает активное участие в международных конгрессах, конференциях, школах, сотрудничает с физическими центрами многих стран, является директором Международного научного центра Центральной Европейской инициативы в г. Минске.

Глубокие творческие идеи, энергия ученого и высокие моральные качества позволили В. А. Орловичу снискать авторитет чуткого и доброжелательного человека, мудрого руководителя. Сердечно поздравляем Валентина Антоновича с юбилеем, желаем ему крепкого здоровья и дальнейших творческих успехов.

*Отделение физики, математики и информатики НАН Беларуси,
Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси, Белорусское физическое общество*