

ВЕСЦІ НАЦЫЯНАЛЬнай АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСІ

СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК. 2017. № 2

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ

СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК. 2017. № 2

Журнал основан в январе 1965 г.

Выходит четыре раза в год

Учредитель – Национальная академия наук Беларуси

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь,
свидетельство о регистрации № 392 от 18.05.2009

*Входит в Перечень научных изданий Республики Беларусь
для опубликования результатов диссертационных исследований,
включен в базу данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ)*

Главный редактор

Сергей Яковлевич Килин – Президиум Национальной академии наук Беларуси

Редакционная коллегия

- Н. М. Олехнович** – Научно-практический центр Национальной академии наук Беларуси по материаловедению (*заместитель главного редактора*)
- В. А. Орлович** – Отделение физики, математики и информатики Национальной академии наук Беларуси (*заместитель главного редактора*)
- Т. Е. Янчук** – (*ведущий редактор журнала*)
- С. В. Абламейко** – Белорусский государственный университет
- С. М. Абрамов** – Институт программных систем Российской академии наук
- В. М. Анищик** – Белорусский государственный университет
- А. И. Белоус** – Холдинг «ИНТЕГРАЛ»
- И. В. Гайшун** – Институт математики Национальной академии наук Беларуси
- С. В. Гапоненко** – Белорусский республиканский фонд фундаментальных исследований
- А. М. Гончаренко** – Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси
- А. П. Достанко** – Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
- Н. А. Изобов** – Институт математики Национальной академии наук Беларуси
- Н. С. Казак** – Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси

В. И. Корзюк – Белорусский государственный университет
Ф. П. Коршунов – Научно-практический центр Национальной академии наук Беларуси по материаловедению
Ю. А. Курочкин – Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси
Н. А. Поклонский – Белорусский государственный университет
С. А. Тихомиров – Отделение физики, математики и информатики Национальной академии наук Беларуси
Л. М. Томильчик – Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси
А. В. Тузиков – Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси
Ю. С. Харин – Научно-исследовательский институт прикладных проблем математики и информатики Белорусского государственного университета
А. Ф. Чернявский – Институт прикладных физических проблем имени А. Н. Севченко Белорусского государственного университета
Л. А. Янович – Институт математики Национальной академии наук Беларуси
В. И. Янчевский – Институт математики Национальной академии наук Беларуси

Редакционный совет

С. Я. Килин – Президиум Национальной академии наук Беларуси (Республика Беларусь)
С. В. Абламейко – Белорусский государственный университет (Республика Беларусь)
Ж. И. Алферов – Санкт-Петербургский национальный исследовательский Академический университет Российской академии наук (Российская Федерация)
А. Л. Асеев – Президиум Сибирского отделения Российской академии наук (Российская Федерация)
Й. Врахтруп – Институт физики (3) Штутгартского университета (Федеративная Республика Германия)
И. В. Гайшун – Институт математики Национальной академии наук Беларуси (Республика Беларусь)
А. М. Желтиков – Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (Российская Федерация)
В. В. Козлов – Математический институт имени В. А. Стеклова Российской академии наук (Российская Федерация)
Г. Лёйхс – Институт физики света имени М. Планка (Федеративная Республика Германия)
Д. С. Могилевцев – Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси (Республика Беларусь)
В. А. Орлович – Отделение физики, математики и информатики Национальной академии наук Беларуси (Республика Беларусь)
А. Цайлингер – Институт квантовой оптики и квантовой информатики Австрийской академии наук (Австрийская Республика)

Адрес редакции:

*ул. Академическая, 1, к. 119, 220072, г. Минск, Республика Беларусь.
Тел.: + 375 17 284-19-19; e-mail: fmvesti@mail.ru*

vestifm.belnauka.by

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ.

Серия физико-математических наук. 2017. № 2.

Выходит на русском, белорусском и английском языках

Редактор *Т. Е. Янчук*

Компьютерная верстка *О. Л. Смольской, О. А. Толстой*

Подписано в печать 21.06.2017. Выход в свет 28.06.2017. Формат 60×84^{1/8}. Бумага офсетная.

Печать цифровая. Усл. печ. л. 14,88. Уч.-изд. л. 16,4. Тираж 70 экз. Заказ 114.

Цена: индивидуальная подписка – 10,34 руб., ведомственная подписка – 25,29 руб.

Издатель и полиграфическое исполнение:

Республиканское унитарное предприятие «Издательский дом «Беларуская навука».

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/18 от 02.08.2013. ЛП № 02330/455 от 30.12.2013. Ул. Ф. Скорины, 40, 220141, г. Минск, Республика Беларусь

© РУП «Издательский дом «Беларуская навука»,
Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук, 2017

PROCEEDINGS OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF BELARUS

PHYSICS AND MATHEMATICS SERIES, 2017, no. 2

The Journal was founded in January 1965

Periodicity is 4 issues per annum

Founder is the National Academy of Sciences of Belarus

The journal is registered on May 18, 2009 by the Ministry of Information of the Republic of Belarus
in the State Registry of Mass Media, reg. no. 392

*The Journal is included in The List of Journals for Publication
of the Results of Dissertation Research in the Republic of Belarus
and in the database of Russian Science Citation Index (RSCI)*

Editor-in-Chief

Sergei Kilin – Presidium of the National Academy of Sciences of Belarus

Editorial Board

- N. M. Olekhnovich** – The Scientific and Practical Materials Research Center of the National Academy of Sciences of Belarus (*Associate Editor-in-Chief*)
V. A. Orlovich – Department of Physics, Mathematics and Informatics of the National Academy of Sciences of Belarus (*Associate Editor-in-Chief*)
T. E. Yanchuk (*lead editor*)
S. V. Ablameyko – Belarusian State University
S. M. Abramov – Program Systems Institute of the Russian Academy of Sciences
V. M. Anishchik – Belarusian State University
A. I. Belous – “INTEGRAL” Holding
I. V. Gaishun – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus
S. V. Gaponenko – Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research
A. M. Goncharenko – B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus
A. P. Dostanko – Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics
N. A. Izobov – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus
N. S. Kazak – B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus
V. I. Korzyuk – Belarusian State University
F. P. Korshunov – The Scientific and Practical Materials Research Center of the National Academy of Sciences of Belarus
Yu. A. Kurochkin – B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus
N. A. Poklonskii – Belarusian State University
S. A. Tikhomirov – Department of Physics, Mathematics and Informatics of the National Academy of Sciences of Belarus
L. M. Tomil'chik – B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus
A. V. Tuzikov – United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus

Yu. S. Kharin – Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics of the Belarusian State University
A. F. Chernyavskii – A. N. Sevchenko Institute of Applied Physical Problems of Belarusian State University
L. A. Yanovich – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus
V. I. Yanchevskii – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus

Editorial Council

S. Ya. Kilin – Presidium of the National Academy of Sciences of Belarus (Republic of Belarus)
S. V. Ablameyko – Belarusian State University (Republic of Belarus)
Z. I. Alferov – St Petersburg National Research Academic University of the Russian Academy of Sciences (Russian Federation)
A. L. Aseev – Presidium of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences (Russian Federation)
J. Wrachtrup – Institute of Physics (3) of the University of Stuttgart (Federal Republic of Germany)
I. V. Gaishun – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (Republic of Belarus)
A. M. Zheltikov – Lomonosov Moscow State University (Russian Federation)
V. V. Kozlov – Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences (Russian Federation)
G. Leuchs – Max Planck Institute for the Science of Light (Federal Republic of Germany)
D. S. Mogilevcev – B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (Republic of Belarus)
V. A. Orlovich – Department of Physics, Mathematics and Informatics of the National Academy of Sciences of Belarus (Republic of Belarus)
A. Zeilinger – Institute for Quantum Optics and Quantum Information of the Austrian Academy of Sciences (Republic of Austria)

Address of the Editorial Office:

*1, Akademicheskaya Str., room 119, 220072, Minsk, Republic of Belarus.
Tel.: +375 17 284-19-19; e-mail: fmvesti@mail.ru*

vestifm.belnauka.by

PROCEEDING OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF BELARUS.

Physics and Mathematics series, 2017, no. 2.

Printed in Russian, Belarusian and English languages

Editor *T. E. Yanchuk*

Computer imposition *O. L. Smolskaya, O. A. Tolstaya*

It is sent of the press 21.06.2017. Appearance 28.06.2017. Format 60×84¹/₈. Offset paper.
The press digital. Printed pages 14,88. Publisher's signatures 16,4. Circulation 70 copies. Order 114.
Price: individual subscription – 10,34 byn., departmental subscription – 25,29 byn.

Publisher and printing execution:

Republican unitary enterprise "Publishing House "Belaruskaya Navuka".

Certificate on the state registration of the publisher, manufacturer, distributor of printing editions

No. 1/18 dated August 2, 2013. License for the press no. 02330/455 dated December 30, 2013.

Address: F. Scorina Str., 40, 220141, Minsk, Republic of Belarus.

© RUE "Publishing House "Belaruskaya Navuka",
Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series, 2017

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Янович Л. А., Игнатенко М. В. К теории интерполирования Эрмита – Биркгофа нелинейных обыкновенных дифференциальных операторов	7
Юхимук М. М. Однородная краевая задача Римана с мероморфными коэффициентами для бесконечно связных областей	24
Минченко Л. И., Бережнов Д. Е. О псевдолипшицевости множества решений параметрических задач оптимизации	36
Гальмак А. М., Русаков А. Д. О полиадической операции специального вида	44
Жук Е. Е. Статистическое отнесение реализаций нестационарных временных рядов к заданным трендовым моделям	52
Липницкий В. А., Сергей А. И. О стабилизации количества орбит кэмероновских матриц большого ранга	60

ФИЗИКА

Веко О. В., Овсюк Е. М., Редьков В. М. Нерелятивистская частица Кокса с внутренней структурой в электрическом поле: анализ в пространстве Лобачевского	71
Буганов О. В., Замковец А. Д., Понявина А. Н., Тихомиров С. А., Фам Хон Мынь, Нгуен Тан Бынь, Нгуен Дай Хунг. Спектрально-временная динамика нестационарного поглощения многослойных периодических плазмонных наноструктур	82
Балыкин И. В., Железнякова Т. А., Рыжевич А. А. Изменение мощности световых пучков различных типов при прохождении слоев рассеивающей среды	91

ИНФОРМАТИКА

Поляков А. С. Коррекция ошибок при передаче информации по значениям четности координат бинарной матрицы	101
Левин Г. М., Розин Б. М. Оптимизация выпуска комплектов изделий и интенсивностей их изготовления в условиях случайного спроса	110

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Чумаков Ф. В., Василец С. И. О явном решении одного вида интегрального уравнения Вольтерра на симметричном отрезке с суммарно-разностным ядром	119
---	-----

УЧЕНЫЕ БЕЛАРУСИ

Килин Сергей Яковлевич (К 65-летию со дня рождения)	125
--	-----

CONTENTS**MATHEMATICS**

Yanovich L. A., Ignatenko M. V. To the theory of Hermite – Birkhoff interpolation of nonlinear ordinary differential operators	7
Yukhimuk M. M. Homogeneous Riemann boundary value problem with meromorphic coefficients for infinitely connected domains	24
Minchenko L. I., Berezhnov D. E. Pseudo-lipschitzian continuity of solution mappings in parametrical optimization problems	36
Gal'mak A. M., Rusakov A. D. Polyadic operation of special type	44
Zhuk E. E. Statistical assignment of realizations of non-stationary time series to the fixed trend models	52
Lipnitski V. A., Sergey A. I. On the stabilization of the number of orbits of high-rank Cameron matrices	60

PHYSICS

Veko O. V., Ovsyuk E. M., Red'kov V. M. Cox nonrelativistic particle of intrinsic structure in the electric field: analysis in the Lobachevsky space	71
Buganov O. V., Zamkovets A. D., Ponyavina A. N., Tikhomirov S. A., Pham Hong Minh, Nguyen Thanh Binh, Nguyen Dai Hung. Spectral-temporal dynamics of transient absorption of multilayer periodic plasmonic nanostructures	82
Balykin I. V., Zheleznyakova T. A., Ryzhevich A. A. Power changes in different-type light beams after passing through the layers of different-thickness scattering medium	91

INFORMATICS

Poljakov A. S. Error correction when transmitting information by a parity check of binary matrix coordinates ...	101
Levin G. M., Rozin B. M. Optimizing the output of product batches and intensity of their manufacture under random demand	110

SHORT COMMUNICATIONS

Chymakov F. V., Vasilets S. I. Explicit solution of one-type integral Volterra equation on the symmetric interval with a sum-difference kernel	119
---	-----

SCIENTISTS OF BELARUS

Kilin Sergei Yakovlevich (To the 65th anniversary of the birth).....	125
---	-----

МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

УДК 519.65

Поступила в редакцию 10.03.2017
Received 10.03.2017

Л. А. Янович¹, М. В. Игнатенко²

¹Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

²Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

**К ТЕОРИИ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ ЭРМИТА – БИРКГОФА
НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ**

Данная статья посвящена задаче построения и исследования обобщенных интерполяционных формул Эрмита – Биркгофа для операторов, заданных на функциональных пространствах. Построение операторных интерполяционных формул основано на интерполяционных полиномах для скалярных функций относительно произвольной чебышевской системы. Приведенные формулы содержат интегралы Стильтеса и дифференциалы Гато интерполируемого оператора и являются инвариантными для операторных многочленов специального класса. Получено явное представление погрешности операторного интерполирования обобщенными многочленами Эрмита – Биркгофа. На основе обобщенных интерполяционных формул Эрмита – Биркгофа построены интерполяционные многочлены для обыкновенных дифференциальных операторов произвольного порядка, заданных в пространстве непрерывно дифференцируемых функций. Рассмотрены также некоторые частные случаи формул Эрмита – Биркгофа такого вида для различных чебышевских систем скалярных функций. Полученные результаты могут быть использованы в теоретических исследованиях как основа построения приближенных методов решения некоторых нелинейных операторных уравнений, встречающихся в нелинейной динамике, математической физике.

Ключевые слова: операторный многочлен, операторное интерполирование, обобщенное интерполирование типа Эрмита – Биркгофа, дифференциальный оператор, дифференциал Гато, интеграл Стильтеса, погрешность интерполяции

L. A. Yanovich¹, M. V. Ignatenko²

¹Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

²Belarusian State University, Minsk, Belarus

**TO THE THEORY OF HERMITE – BIRKHOFF INTERPOLATION
OF NONLINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL OPERATORS**

This article is devoted to the problem of construction and research of generalized interpolation formulas of Hermite – Birkhoff type for operators given on the function spaces. The construction of operator interpolation formulas is based on interpolation polynomials for scalar functions with respect to the arbitrary Chebyshev system of functions. The given formulas contain the Stieltjes integrals and the Gateaux differentials of an interpolated operator and are invariant for the special-class operator polynomials. An explicit representation of the error of the generalized Hermite – Birkhoff operator interpolation is obtained. On the basis of the generalized interpolation Hermite – Birkhoff formulas the interpolation polynomials for ordinary differential operators of arbitrary order given in the space of continuously differentiable functions are constructed. Some special cases of the Hermite – Birkhoff formulas of this type for various Chebyshev systems of scalar functions are also considered. The obtained results can be used in theoretical research as a basis for constructing approximate methods of solving some nonlinear operator equations that occur in nonlinear dynamics, mathematical physics.

Keywords: operator polynomial, operator interpolation, generalized Hermite – Birkhoff-type interpolation, differential operator, differential of Gateaux, integral of Stieltjes, interpolation error

Введение. Рассмотрим на числовом множестве $T \subseteq \mathbb{R}$ произвольную чебышевскую систему непрерывно дифференцируемых на T необходимое число раз функций $\{\varphi_k(t)\}_{k=0}^q$ и соответствующие многочлены вида

$$P_q(t) = \sum_{k=0}^q c_k \varphi_k(t), \quad (1)$$

где c_k – комплексные или действительные числа ($k = 0, 1, \dots, q$; $q = 0, 1, 2, \dots$).

Пусть $I_{m,n} = (\varepsilon_{ij})_{i,j=0}^{m,n}$ – матрица размерности $(m+1) \times (n+1)$, элементы ε_{ij} ($i = 0, 1, \dots, m$; $j = 0, 1, \dots, n$) которой 0 или 1. Через $N_{m,n}$ обозначим множество пар чисел (i, j) , которые определяют индексы ненулевых элементов этой матрицы, т. е. $N_{m,n} = \{(i, j) : \varepsilon_{ij} = 1, 0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n\}$, в том числе $N_{m,0} = \{(i, 0) : \varepsilon_{i0} = 1, 0 \leq i \leq m\}$, а через $M_{m,n} = N_{m,n} \setminus N_{m,0}$ – множество всех пар чисел (i, j) , соответствующих $\varepsilon_{ij} = 1$ ($0 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$).

Обобщенная интерполяционная задача Эрмита – Биркгофа для функции $f(t)$ ($t \in T$) состоит в построении многочлена $B_{m,n}(t) \equiv B_{m,n}(f; t)$ вида (1), удовлетворяющего условиям

$$D_j B_{m,n}(t_i) = D_j f(t_i), \quad (i, j) \in N_{m,n}, \quad (2)$$

где узлы t_i ($i = 0, 1, \dots, m$) – различные точки из T ; линейные дифференциальные операторы

$$D_j f(t) = \sum_{v=1}^j a_{vj} f^{(v)}(t), \quad (j = 1, 2, \dots, n); \quad a_{vj} - \text{заданные числа, } f^{(v)}(t) - \text{производная } v\text{-го порядка функции } f(t), D_0 f(t) = f(t).$$

В обычной постановке этой интерполяционной задачи оператор $D_j f(t) = f^{(j)}(t)$.

Отметим, что даже в частных случаях задача Эрмита – Биркгофа не всегда разрешима [1, 2]. Исследование регулярности интерполирования типа Эрмита – Биркгофа, различные постановки этой задачи и некоторые ее применения имеются в монографии [3] и работах [4, 5]. Поэтому для данного общего случая предположим, что указанный интерполяционный многочлен $B_{m,n}(f; t)$ существует и записан в виде

$$B_{m,n}(f; t) = \sum_{(i,j) \in N_{m,n}} H_{ij}^{(m)}(t) D_j f(t_i). \quad (3)$$

Здесь $H_{ij}^{(m)}(t)$ – многочлены класса (1), удовлетворяющие условиям $D_\nu H_{ij}^{(m)}(t_k) = \delta_{ik} \delta_{\nu j}$, где δ_{ij} – символ Кронекера ($0 \leq i, k \leq m; 0 \leq j, \nu \leq n$). В верхнем индексе (m) обозначения $H_{ij}^{(m)}(t)$ указан номер последней строки в соответствующей матрице $I_{m,n}$.

Для отдельных чебышевских систем функций в случае задачи Абеля – Гончарова интерполяционные многочлены вида (3), для которых справедливы равенства (2), ранее получены в [6], а для алгебраической системы функций и задачи Эрмита – Биркгофа специального вида – в работах [7–9].

Пусть $X = X(T)$ – заданное пространство гладких на T функций, на котором определен оператор $F : X \rightarrow Y$, где Y – также некоторое функциональное пространство. Далее будем рассматривать только те операторы, для которых ν -е дифференциалы Гато $\delta^\nu F[x; h_1, h_2, \dots, h_\nu]$ содержат произведение функций $h_1(t), h_2(t), \dots, h_\nu(t)$ ($h_i = h_i(t) \in X$). Предположим, что если в качестве аргумента t функций $\varphi_k(t)$ и $f(t)$ и узлов интерполирования t_k взять соответственно $x \equiv x(t)$ и $x_k \equiv x_k(t)$ ($t \in T$) – элементы пространства X (причем такие, что значения функций $x(t)$, $x_k(t)$ принадлежат $T \subseteq \mathbb{R}$), то формулы вида (3) существуют и для них выполняются условия, аналогичные условиям (2).

Будем рассматривать также операторные многочлены $P_{q,\nu} : X \rightarrow Y$ вида

$$P_{q,\nu}(x) = \sum_{k=0}^q \int_{k=0}^q a_k(\nu; s, t) \frac{d^\nu}{dt^\nu} \frac{\varphi_k(x(t))}{\sigma_m(x(t))} dt \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots), \quad (4)$$

где $a_k(\nu; s, t)$ – фиксированные функции ($s \in \mathbb{R}, t \in T$), а сумма фундаментальных многочленов

$$\sigma_m(x(t)) = \sum_{(i,0) \in N_{m,0}} H_{i0}^{(m)}(x(t)) - \text{постоянная или некоторая переменная на } T \text{ функция.}$$

Предполагается также, что интегралы, входящие в формулу (4), существуют, а необходимые в дальнейшем преобразования допустимы.

Рассмотрим следующие операторно-дифференциальные выражения вида

$$\tilde{D}_j F(x) = \sum_{v=1}^j a_{vj} \delta^v F[x; h_1 h_2 \dots h_j], \quad (5)$$

где $\delta^v F[x; h_1 h_2 \dots h_j]$ – дифференциал Гато v -го порядка оператора F в точке x , когда первые $(v - 1)$ направления $h_i = h_i(t) \equiv 1$ ($i = 1, 2, \dots, v - 1$), а последнее v -е направление является произведением вида $h_v = h_1 h_2 \dots h_j$ ($h_v = h_v(t) \in X$). Далее считаем, что $\tilde{D}_0 F(x) = F(x)$. В частном случае при $a_{vj} = \delta_{vj}$ будем иметь $\tilde{D}_j F(x) = \delta^j F[x; h_1 h_2 \dots h_j]$. Аналогично, через $\tilde{D}_j F[x; h]$ обозначим оператор вида (5), когда $h_v(t) \equiv 1$ для $v = 1, 2, \dots, j - 1$, а j -е направление равно $h(t)$.

Если $F(x) = f(x(t))$, где $f(u)$ – числовая функция, имеющая производную порядка j в точке $u = x(t)$, тогда справедливо равенство $\tilde{D}_j F(x) = D_j f(x) h_1(t) h_2(t) \dots h_j(t)$, в котором все направления $h_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, j$) входят в виде их произведения.

Заметим, что условия интерполирования требуют, как правило, совпадения значений интерполяционного и приближаемого оператора, а также их производных в заданных точках (узлах интерполирования). В приведенных далее формулах используются значения интерполируемого оператора на более широком множестве, чем совокупность узлов.

Интерполяционные формулы Эрмита – Биркгофа, содержащие дифференциалы интерполируемого оператора. Рассмотрим обыкновенные дифференциальные операторы $F : C^{(s)}(T) \rightarrow Y$ общего вида

$$F(x) = f\left(t, x(t), x'(t), x''(t), \dots, x^{(s)}(t)\right), \quad (6)$$

где $x^{(k)}(t) = \frac{d^k x(t)}{dt^k}$ ($k = 0, 1, \dots, s$), $C^{(s)}(T)$ – пространство s раз непрерывно дифференцируемых на $T \subseteq R$ функций $x(t)$, функция $y = f(t, u_0, u_1, \dots, u_s)$ переменных t, u_0, u_1, \dots, u_s задана на прямоугольнике $\Omega = T \times T_0 \times T_1 \times \dots \times T_s$, где $T_i \subseteq R$ ($i = 0, 1, \dots, s$), а Y – некоторое функциональное пространство.

Ранее в работе [10] на основе формул вида (3) были построены обобщенные интерполяционные операторные многочлены, заданные в функциональных пространствах, которые содержат дифференциалы интерполируемого оператора и являются инвариантными относительно многочленов вида (4). Доказана [10] следующая

Т е о р е м а 1. Для операторного многочлена

$$B_{m,n}(F; x) = F(x_p) + \sum_{(i,0) \in N_{m,0}} \int \delta F \left[x_p + \tau(x_i - x_p); \frac{H_{i0}^{(m)}(x)}{\sigma_m(x)}(x_i - x_p) \right] d\tau + \sum_{(i,j) \in M_{m,n}} \tilde{D}_j F \left[x_i; \frac{H_{ij}^{(m)}(x)}{\sigma_m(x)} \sigma_m(x_i) \right], \quad (7)$$

где x_p – фиксированный узел, соответствующий элементу ε_{p0} множества $N_{m,0}$, выполняются интерполяционные условия

$$B_{m,n}(F; x_i) = F(x_i), (i, 0) \in N_{m,0}; \quad \tilde{D}_j B_{m,n}(F; x_i) = \tilde{D}_j F(x_i), (i, j) \in M_{m,n}. \quad (8)$$

(Когда множество $N_{m,0}$ пустое, то

$$B_{m,n}(F; x) = \sum_{(i,j) \in M_{m,n}} \tilde{D}_j F \left[x_i; H_{ij}^{(m)}(x) \right]$$

и первая группа равенств в (8) отсутствует.) Если формула (3) точна для обобщенных многочленов (1) при некотором фиксированном значении q и любых различных узлах $t_i \in T$ ($i = 0, 1, \dots, m$), то интерполяционная формула (7) будет инвариантна относительно операторных многочленов вида (4) с таким же значением q .

Частный случай формулы (7) для $\sigma_m(x) \equiv 1$ получен в работе [11].

Заметим, что в интерполяционной задаче Эрмита – Биркгофа при добавлении узла x_{m+1} к системе узловых точек x_0, x_1, \dots, x_m размерность матрицы $I_{m,n}$ увеличивается: добавляется одна строка и k столбцов, где k может принимать значения $0, 1, 2, \dots$. В частности, для задачи Эрмита с двукратными узлами $k = 0$, а для задачи Абеля – Гончарова $k = 1$. При этом размерность новой матрицы $I_{m+1, n+k}$ становится равной $(m+2) \times (n+1+k)$, а множества $N_{m,0}, N_{m,n}, M_{m,n}$ преобразуются к виду $N_{m+1,0}, N_{m+1, n+k}, M_{m+1, n+k}$ соответственно. Отметим, что для одной и той же системы узлов x_0, x_1, \dots, x_m множества $M_{m,n}$ и $M_{m, n+k}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) – пары чисел (i, j) , соответствующих $\varepsilon_{ij} = 1$ ($0 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n+k$), совпадают.

В данной работе получим представление погрешности $r_{m,n}(x) = F(x) - B_{m,n}(F; x)$ интерполирования оператора $F(x)$ полиномом $B_{m,n}(F; x)$ вида (7).

Т е о р е м а 2. Для погрешности $r_{m,n}(x) = F(x) - B_{m,n}(F; x)$, где $B_{m,n}(F; x)$ – интерполяционный полином (7), имеет место представление

$$r_{m,n}(x) = \sum_{(i,0) \in N_{m+1,0,0}} \int_0^1 \delta F \left[x_p + \tau(x_i - x_p); \left\{ \frac{H_{i0}^{(m+1)}(x)}{\sigma_{m+1}(x)} - \frac{H_{i0}^{(m)}(x)}{\sigma_m(x)} \right\} (x_i - x_p) \right] d\tau +$$

$$+ \sum_{(i,j) \in M_{m+1, n+k}} \tilde{D}_j F \left[x_i; \frac{H_{ij}^{(m+1)}(x)}{\sigma_{m+1}(x)} \sigma_{m+1}(x_i) - \frac{H_{ij}^{(m)}(x)}{\sigma_m(x)} \sigma_m(x_i) \right], \quad (9)$$

где x_p – фиксированный узел, соответствующий элементу ε_{p0} множества $N_{m,0}$; $x_{m+1} = x$; k – разность числа столбцов матриц $I_{m+1, n+k}$ и $I_{m,n}$; $H_{m+1, j}^{(m)}(x) \equiv 0$ ($j = 0, 1, 2, \dots$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, погрешность $r_{m,n}(x_v) = 0$ для $(v, 0) \in N_{m,0}$. При $v = m+1$ с учетом тождества $M_{m,n} \equiv M_{m, n+k}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) получим

$$r_{m,n}(x_{m+1}) = \sum_{(i,0) \in N_{m+1,0,0}} \int_0^1 \delta F \left[x_p + \tau(x_i - x_p); \frac{H_{i0}^{(m+1)}(x_{m+1})}{\sigma_{m+1}(x_{m+1})} (x_i - x_p) \right] d\tau +$$

$$+ \sum_{(i,j) \in M_{m+1, n+k}} \tilde{D}_j F \left[x_i; \frac{H_{ij}^{(m+1)}(x_{m+1})}{\sigma_{m+1}(x_{m+1})} \sigma_{m+1}(x_i) \right] -$$

$$- \sum_{(i,0) \in N_{m+1,0,0}} \int_0^1 \delta F \left[x_p + \tau(x_i - x_p); \frac{H_{i0}^{(m)}(x_{m+1})}{\sigma_m(x_{m+1})} (x_i - x_p) \right] d\tau -$$

$$- \sum_{(i,j) \in M_{m+1, n+k}} \tilde{D}_j F \left[x_i; -\frac{H_{ij}^{(m)}(x_{m+1})}{\sigma_m(x_{m+1})} \sigma_m(x_i) \right] = F(x_{m+1}) -$$

$$- \left\{ \sum_{(i,0) \in N_{m,0,0}} \int_0^1 \delta F \left[x_p + \tau(x_i - x_p); \frac{H_{i0}^{(m)}(x_{m+1})}{\sigma_m(x_{m+1})} (x_i - x_p) \right] d\tau + \sum_{(i,j) \in M_{m,n}} \tilde{D}_j F \left[x_i; \frac{H_{ij}^{(m)}(x_{m+1})}{\sigma_m(x_{m+1})} \sigma_m(x_i) \right] \right\} =$$

$$= F(x_{m+1}) - B_{m,n}(F; x_{m+1}).$$

Таким образом, справедливо равенство $r_{m,n}(x) = F(x) - B_{m,n}(F; x)$, т. е. выражение (9) действительно представляет погрешность интерполирования оператора $F(x)$ полиномом $B_{m,n}(F; x)$ вида (7). Теорема 2 доказана.

Далее, на основе формулы (7), построим интерполяционный многочлен для обыкновенного дифференциального оператора (6). Дифференциальный оператор (6) зависит от одной функциональной переменной $x(t)$, для него дифференциал Гато $\delta F[x; h]$ в точке $x = x(t)$ по направлению $h = h(t)$ ($x, h \in C^{(s)}(T)$) вычисляется по правилу

$$\delta F[x; h] = \frac{\partial f}{\partial x} h(t) + \frac{\partial f}{\partial x'} h'(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^{(s)}} h^{(s)}(t) = \sum_{q=0}^s \frac{\partial}{\partial x^{(q)}} f\left(t, x(t), x'(t), x''(t), \dots, x^{(s)}(t)\right) h^{(q)}(t).$$

Дифференциал Габо второго порядка $\delta^2 F[x; h_1, h_2]$ оператора F в точке x по направлениям h_1, h_2 равен

$$\delta^2 F[x; h_1, h_2] = \sum_{q=0}^s \sum_{j=0}^s \frac{\partial^2}{\partial x^{(j)} \partial x^{(q)}} f\left(t, x(t), x'(t), x''(t), \dots, x^{(s)}(t)\right) h_1^{(j)}(t) h_2^{(q)}(t).$$

Обозначим $h_{1,j} = h_1 h_2 \dots h_j$ ($j = 2, 3, \dots$). Тогда

$$\delta^2 F[x; h_{1,2}] \equiv \delta^2 F[x; 1, h_{1,2}] = \sum_{q=0}^s \frac{\partial^2}{\partial x \partial x^{(q)}} f\left(t, x(t), x'(t), x''(t), \dots, x^{(s)}(t)\right) h_{1,2}^{(q)}(t).$$

Аналогично получим, что

$$\delta^v F[x; h_{1,v}] \equiv \delta^v F[x; \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{v-1}, h_{1,v}] = \sum_{q=0}^s \frac{\partial^v}{\partial x^{v-1} \partial x^{(q)}} f\left(t, x(t), x'(t), x''(t), \dots, x^{(s)}(t)\right) h_{1,v}^{(q)}(t).$$

Следовательно,

$$\tilde{D}_j F[x; h_{1,j}] = \sum_{v=1}^j \sum_{q=0}^s a_{vj} \frac{\partial^v}{\partial x^{v-1} \partial x^{(q)}} f\left(t, x(t), x'(t), x''(t), \dots, x^{(s)}(t)\right) h_{1,j}^{(q)}(t), \quad (10)$$

и для операторов (6) формула (7) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} B_{m,n}(F, x) &= f\left(t, x_p(t), x'_p(t), x''_p(t), \dots, x_p^{(s)}(t)\right) + \\ &+ \sum_{(i,0) \in N_{m,0}} \int \sum_{v=0}^s \frac{\partial}{\partial v_i^{(v)}} f\left(t, v_i(t, \tau), \frac{\partial}{\partial t} v_i(t, \tau), \dots, \frac{\partial^s}{\partial t^s} v_i(t, \tau)\right) \frac{\partial^v}{\partial t^v} \left\{ \frac{H_{i0}^{(m)}(x(t))}{\sigma_m(x(t))} (x_i(t) - x_p(t)) \right\} d\tau + \\ &+ \sum_{(i,j) \in M_{m,n}} \sum_{v=1}^j \sum_{q=0}^s a_{vj} \frac{\partial^v}{\partial x_i^{v-1} \partial x_i^{(q)}} f\left(t, x_i(t), x'_i(t), x''_i(t), \dots, x_i^{(s)}(t)\right) \frac{\partial^q}{\partial t^q} \left\{ \frac{H_{ij}^{(m)}(x(t))}{\sigma_m(x(t))} \sigma_m(x_i(t)) \right\}, \quad (11) \end{aligned}$$

где функция $v_i = v_i(t, \tau) = x_p(t) + \tau(x_i(t) - x_p(t))$, $v_i^{(v)} = \frac{\partial^v v_i}{\partial t^v}$, $(i, 0) \in N_{m,0}$.

Для погрешности $r_{m,n}(x) = F(x) - B_{m,n}(F; x)$, где $F(x)$ – обыкновенный дифференциальный оператор вида (6), а $B_{m,n}(F; x)$ – интерполяционный полином (11), представление (9) примет вид

$$\begin{aligned} r_{m,n}(x) &= \sum_{(i,0) \in N_{m+1,0}} \int \sum_{v=0}^s \frac{\partial}{\partial v_i^{(v)}} f\left(t, v_i(t, \tau), \frac{\partial}{\partial t} v_i(t, \tau), \dots, \frac{\partial^s}{\partial t^s} v_i(t, \tau)\right) \times \\ &\times \frac{\partial^v}{\partial t^v} \left\{ \left(\frac{H_{i0}^{(m+1)}(x(t))}{\sigma_{m+1}(x(t))} - \frac{H_{i0}^{(m)}(x(t))}{\sigma_m(x(t))} \right) (x_i(t) - x_p(t)) \right\} d\tau + \\ &+ \sum_{(i,j) \in M_{m+1,n+k}} \sum_{v=1}^j \sum_{q=0}^s a_{vj} \frac{\partial^v}{\partial x_i^{v-1} \partial x_i^{(q)}} f\left(t, x_i(t), x'_i(t), x''_i(t), \dots, x_i^{(s)}(t)\right) \times \\ &\times \frac{\partial^q}{\partial t^q} \left\{ \frac{H_{ij}^{(m+1)}(x(t))}{\sigma_{m+1}(x(t))} \sigma_{m+1}(x_i(t)) - \frac{H_{ij}^{(m)}(x(t))}{\sigma_m(x(t))} \sigma_m(x_i(t)) \right\}, \end{aligned}$$

где, как и ранее, $x_{m+1} = x$, k – разность числа столбцов матриц $I_{m+1, n+k}$ и $I_{m,n}$, $H_{m+1,j}^{(m)}(x) \equiv 0$ ($j = 0, 1, 2, \dots$).

В частности, если через $h_{m,k}(x)$ и $q_{m,k}(x)$ обозначить фундаментальные многочлены Эрмита в случае двукратных узлов x_0, x_1, \dots, x_m относительно чебышевской системы функций $\{\varphi_q(t)\}_{q=0}^{2m+1}$, для которых $h_{m,k}(x_j) = q'_{m,k}(x_j) = \delta_{kj}$, $h'_{m,k}(x_j) = q_{m,k}(x_j) = 0$ ($k, j = 0, 1, \dots, m$), $\sigma_m(x) = \sum_{k=0}^m h_{m,k}(x) \equiv 1$, то при $p = 0$ формула (7) принимает вид

$$B_{m,1}(F; x) = F(x_0) + \sum_{k=0}^m \delta F[x_k; q_{m,k}(x)] + \sum_{k=1}^m \int \delta F[x_0 + \tau(x_k - x_0); h_{m,k}(x)(x_k - x_0)] d\tau. \quad (12)$$

В работе [12] для обыкновенного дифференциального оператора (6) на основе операторного многочлена (12) построен интерполяционный многочлен

$$B_{m,1}(F; x) = f\left(t, x_0(t), x'_0(t), x''_0(t), \dots, x_0^{(s)}(t)\right) + \sum_{k=0}^m \sum_{v=0}^s \frac{\partial}{\partial x_k^{(v)}} f\left(t, x_k(t), x'_k(t), x''_k(t), \dots, x_k^{(s)}(t)\right) \frac{\partial^v}{\partial t^v} q_{m,k}(x(t)) + \sum_{k=1}^m \int \sum_{v=0}^s \frac{\partial}{\partial v_k^{(v)}} f\left(t, v_k(t, \tau), \frac{\partial}{\partial t} v_k(t, \tau), \dots, \frac{\partial^s}{\partial t^s} v_k(t, \tau)\right) \frac{\partial^v}{\partial t^v} \{h_{m,k}(x(t))(x_k(t) - x_0(t))\} d\tau, \quad (13)$$

где $v_k = v_k(t, \tau) = x_0(t) + \tau(x_k(t) - x_0(t))$, $v_k^{(v)} = \frac{\partial^v v_k}{\partial t^v}$, $k = 1, 2, \dots, m$.

Погрешность интерполирования многочленом (13) представима [12] в виде

$$r_{m,1}(x) = \sum_{k=1}^{m+1} \int \sum_{v=0}^s \frac{\partial}{\partial v_k^{(v)}} f\left(t, v_k(t, \tau), \frac{\partial}{\partial t} v_k(t, \tau), \dots, \frac{\partial^s}{\partial t^s} v_k(t, \tau)\right) \times \times \frac{\partial^v}{\partial t^v} \{(h_{m+1,k}(x) - h_{m,k}(x))(x_k(t) - x_0(t))\} d\tau + \sum_{k=0}^{m+1} \sum_{v=0}^s \frac{\partial}{\partial x_k^{(v)}} f\left(t, x_k(t), x'_k(t), x''_k(t), \dots, x_k^{(s)}(t)\right) \frac{\partial^v}{\partial t^v} \{q_{m+1,k}(x(t)) - q_{m,k}(x(t))\},$$

где $x_{m+1} = x$, $h_{m,m+1}(x) = q_{m,m+1}(x) \equiv 0$.

П р и м е р. Построим интерполяционный многочлен $B_{1,1}(F; x)$ вида (13) для дифференциального оператора

$$F(x) = f(t, x(t), x'(t), x''(t)) = x''(t) + \alpha x'(t) + \beta x^p(t) + \gamma x(t), \quad (14)$$

где p – целое фиксированное неотрицательное число. Матрица второго порядка $I_{1,1}$, соответствующая случаю $m = 1, n = 1$, имеет вид $I_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. В качестве фундаментальных многочленов интерполирования $h_{1,k}(x)$ и $q_{1,k}(x)$, $k = 0, 1$, выберем алгебраические многочлены

$$h_{1,k}(x) = l_{1,k}^2(x)(1 + 2l_{1,1-k}(x)), \\ q_{1,k}(x) = l_{1,k}^2(x)(x - x_k),$$

где $l_{1,k}(x) = \frac{x - x_{1-k}}{x_k - x_{1-k}}$, $k = 0, 1$, а в качестве узлов интерполирования $x_k(t)$, $k = 0, 1$, – тригонометрическую систему функций $x_0(t) \equiv 2, x_1(t) = \sin t$. Тогда функция $v_1(t, \tau) = 2 + \tau(\sin t - 2)$, значение $\sigma_1(x) \equiv 1$, а формула (13) при $m = 1$ примет вид

$$\begin{aligned}
 B_{1,1}(F; x) &= f(t, 2, 0, 0) + \sum_{k=0}^1 \sum_{v=0}^2 \frac{\partial}{\partial x_k^{(v)}} f(t, x_k(t), x'_k(t), x''_k(t)) \frac{\partial^v}{\partial t^v} q_{1,k}(x(t)) + \\
 &+ \int_0^1 \sum_{v=0}^2 \frac{\partial}{\partial v_1^{(v)}} f\left(t, v_1(t, \tau), \frac{\partial}{\partial t} v_1(t, \tau), \frac{\partial^2}{\partial t^2} v_1(t, \tau)\right) \frac{\partial^v}{\partial t^v} \{h_{1,1}(x(t))(\sin t - 2)\} d\tau. \quad (15)
 \end{aligned}$$

Преобразуем равенство (15) с учетом представления (14). Имеем

$$\begin{aligned}
 B_{1,1}(F; x) &= 2^p \beta + 2\gamma + (\beta p 2^{p-1} + \gamma) q_{1,0}(x(t)) + \alpha \sum_{k=0}^1 \frac{\partial}{\partial t} q_{1,k}(x(t)) + \\
 &+ \sum_{k=0}^1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} q_{1,k}(x(t)) + (\beta p \sin^{p-1} t + \gamma) q_{1,1}(x(t)) + \\
 &+ \int_0^1 (\beta p v_1^{p-1}(t, \tau) + \gamma) h_{1,1}(x(t))(\sin t - 2) + \alpha \frac{\partial}{\partial t} \{h_{1,1}(x(t))(\sin t - 2)\} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{h_{1,1}(x(t))(\sin t - 2)\} d\tau.
 \end{aligned}$$

Далее воспользуемся равенствами

$$\begin{aligned}
 v_1^{p-1}(t, \tau) &= (2 + \tau(\sin t - 2))^{p-1} = 2^{p-1} \sum_{k=0}^{p-1} C_{p-1}^k \frac{\tau^k (\sin t - 2)^k}{2^k}, \\
 \sum_{k=0}^{p-1} \frac{p!(\sin t - 2)^k}{(k+1)!(p-1-k)!2^k} &= \frac{2}{(\sin t - 2)} \left(\sum_{k=0}^p \frac{p!(\sin t - 2)^k}{k!(p-k)!2^k} - 1 \right) = \frac{2^{1-p} \sin^p t - 2}{\sin t - 2}.
 \end{aligned}$$

Получим, что для оператора (14) имеет место следующая интерполяционная формула Эрмита:

$$\begin{aligned}
 F(x) \approx B_{1,1}(F; x) &= 2^p \beta + 2\gamma + (\beta p 2^{p-1} + \gamma) q_{1,0}(x(t)) + \alpha \sum_{k=0}^1 \frac{\partial}{\partial t} q_{1,k}(x(t)) + \\
 &+ \sum_{k=0}^1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} q_{1,k}(x(t)) + (\beta p \sin^{p-1} t + \gamma) q_{1,1}(x(t)) + \\
 &+ \beta (\sin^p t - 2^p) h_{1,1}(x(t)) + \gamma (\sin t - 2) h_{1,1}(x(t)) + \\
 &+ \alpha \frac{\partial}{\partial t} \{h_{1,1}(x(t))(\sin t - 2)\} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{h_{1,1}(x(t))(\sin t - 2)\}. \quad (16)
 \end{aligned}$$

Непосредственными вычислениями убедимся в справедливости интерполяционных условий

$$B_{1,1}^{(j)}(F; x_i) = F^{(j)}(x_i) \quad (i, j = 0, 1). \quad (17)$$

Действительно, в силу равенств $h_{1,1}(2) = 0$, $q_{1,0}(2) = 0$ и $q_{1,1}(2) = 0$ получим, что $B_{1,1}(F; 2) = 2^p \beta + 2\gamma = F(2)$. Так как $h_{1,1}(\sin t) = 1$, $q_{1,0}(\sin t) = q_{1,1}(\sin t) = 0$, то

$$\begin{aligned}
 B_{1,1}(F; \sin t) &= 2^p \beta + 2\gamma + \beta (\sin^p t - 2^p) + \gamma (\sin t - 2) + \alpha \cos t - \sin t = \\
 &= -\sin t + \alpha \cos t + \beta \sin^p t + \gamma \sin t = F(\sin t).
 \end{aligned}$$

Далее, поскольку

$$q'_{1,0}(2) = q'_{1,1}(\sin t) = 1,$$

$$q'_{1,1}(2) = h'_{1,1}(2) = 0,$$

$$q'_{1,0}(\sin t) = h'_{1,1}(\sin t) = 0,$$

то

$$B'_{1,1}(F; 2) = \beta p 2^{p-1} + \gamma = F'(2),$$

$$B'_{1,1}(F; \sin t) = \beta p \sin^{p-1} t + \gamma = F'(\sin t).$$

Таким образом, интерполяционная формула Эрмита (16) удовлетворяет условиям (17).

Интерполяционные формулы Эрмита – Биркгофа, содержащие дифференциалы и интеграл Стилтеса интерполируемого оператора. В работе [10] на основе формул вида (3) построены обобщенные интерполяционные операторные многочлены, заданные в функциональных пространствах, содержащие дифференциалы и интегралы Стилтеса интерполируемого оператора. Интерполяционные формулы инвариантны относительно многочленов вида (4). Введем числовую функцию

$$\chi(\tau, t) = \begin{cases} 1, & \tau \geq t; \\ 0, & \tau < t, \end{cases}$$

где $0 < \tau < 1$, а $\chi(0, t) \equiv 0$ и $\chi(1, t) \equiv 1$. Для этого класса интерполяционных многочленов доказана [10] следующая

Т е о р е м а 3. *Операторный многочлен*

$$B_{m,n}(F; x) = F(x_p) + \sum_{(i,0) \in N_{m,0}} \int \frac{H_{i0}^{(m)}[x(\tau)]}{\sigma_m[x(\tau)]} d_\tau F[x_p(\cdot) + \chi(\tau, \cdot)(x_i(\cdot) - x_p(\cdot))] + \sum_{(i,j) \in M_{m,n}} \tilde{D}_j F \left[x_i; \frac{H_{ij}^{(m)}(x)}{\sigma_m(x)} \sigma_m(x_i) \right], \quad (18)$$

где, как и в теореме 1, x_p – фиксированный узел, соответствующий элементу ε_{p0} матрицы $I_{m,n}$, удовлетворяет интерполяционным условиям (8). (Когда множество $N_{m,0}$ пустое, то

$$B_{m,n}(F; x) = \sum_{(i,j) \in M_{m,n}} \tilde{D}_j F \left[x_i; H_{ij}^{(m)}(x) \right]$$

и первая группа равенств в (8) отсутствует.) Если формула (3) точна для обобщенных многочленов (1) при некотором фиксированном значении q и любых различных узлах $t_i \in T$ ($i = 0, 1, \dots, m$), то интерполяционная формула (18) будет инвариантна относительно операторных многочленов вида (4) с таким же значением q в случае $v = 0$ и $T = [0, 1]$.

Отметим, что частный случай формулы (18) для $\sigma_m(x) \equiv 1$ рассмотрен в работе [13].

Далее докажем теорему о представлении погрешности $r_{m,n}(x) = F(x) - B_{m,n}(F; x)$ интерполирования оператора $F(x)$ полиномом $B_{m,n}(F; x)$ вида (18).

Т е о р е м а 4. *Для погрешности $r_{m,n}(x) = F(x) - B_{m,n}(F; x)$, где $B_{m,n}(F; x)$ – интерполяционный полином (18), справедливо представление*

$$r_{m,n}(x) = \sum_{(i,0) \in N_{m+1,0}} \int \left\{ \frac{H_{i0}^{(m+1)}[x(\tau)]}{\sigma_{m+1}[x(\tau)]} - \frac{H_{i0}^{(m)}[x(\tau)]}{\sigma_m[x(\tau)]} \right\} d_\tau F[x_p(\cdot) + \chi(\tau, \cdot)(x_i(\cdot) - x_p(\cdot))] + \sum_{(i,j) \in M_{m+1,n+k}} \tilde{D}_j F \left[x_i; \frac{H_{ij}^{(m+1)}(x)}{\sigma_{m+1}(x)} \sigma_{m+1}(x_i) - \frac{H_{ij}^{(m)}(x)}{\sigma_m(x)} \sigma_m(x_i) \right], \quad (19)$$

где x_p – фиксированный узел, соответствующий элементу ε_{p0} множества $N_{m,0}$, $x_{m+1} = x$, k – разность числа столбцов матриц $I_{m+1,n+k}$ и $I_{m,n}$, $H_{m+1,j}^{(m)}(x) \equiv 0$ ($j = 0, 1, 2, \dots$).

Доказательство. Действительно, в случае $(v, 0) \in N_{m,0}$ погрешность $r_{m,n}(x_v) = 0$. Учитывая, что $M_{m,n} \equiv M_{m,n+k}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) при $v = m + 1$, получим

$$\begin{aligned} r_{m,n}(x_{m+1}) = & \sum_{(i,0) \in N_{m+1,0}} \int \frac{H_{i0}^{(m+1)}[x_{m+1}(\tau)]}{\sigma_{m+1}[x_{m+1}(\tau)]} d_\tau F[x_p(\cdot) + \chi(\tau, \cdot)(x_i(\cdot) - x_p(\cdot))] + \\ & + \sum_{(i,j) \in M_{m+1,n+k}} \tilde{D}_j F \left[x_i; \frac{H_{ij}^{(m+1)}(x_{m+1})}{\sigma_{m+1}(x_{m+1})} \sigma_{m+1}(x_i) \right] - \\ & - \sum_{(i,0) \in N_{m+1,0}} \int \frac{H_{i0}^{(m)}[x_{m+1}(\tau)]}{\sigma_m[x_{m+1}(\tau)]} d_\tau F[x_p(\cdot) + \chi(\tau, \cdot)(x_i(\cdot) - x_p(\cdot))] d\tau - \\ & - \sum_{(i,j) \in M_{m+1,n+k}} \tilde{D}_j F \left[x_i; \frac{H_{ij}^{(m)}(x_{m+1})}{\sigma_m(x_{m+1})} \sigma_m(x_i) \right] = F(x_{m+1}) - \\ & - \left\{ \sum_{(i,0) \in N_{m,0}} \int \frac{H_{i0}^{(m)}[x_{m+1}(\tau)]}{\sigma_m[x_{m+1}(\tau)]} d_\tau F[x_p(\cdot) + \chi(\tau, \cdot)(x_i(\cdot) - x_p(\cdot))] + \right. \\ & \left. + \sum_{(i,j) \in M_{m,n}} \tilde{D}_j F \left[x_i; \frac{H_{ij}^{(m)}(x_{m+1})}{\sigma_m(x_{m+1})} \sigma_m(x_i) \right] \right\} = F(x_{m+1}) - B_{m,n}(F; x_{m+1}). \end{aligned}$$

Таким образом, выражение (19) действительно задает погрешность $r_{m,n}(x) = F(x) - B_{m,n}(F; x)$ интерполирования оператора $F(x)$ полиномом $B_{m,n}(F; x)$ вида (18). Теорема 4 доказана.

Для обыкновенного дифференциального оператора (6) с учетом равенства (10) формула (18) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} B_{m,n}(F, x) = & f(t, x_p(t), x'_p(t), x''_p(t), \dots, x_p^{(s)}(t)) + \\ & + \sum_{(i,0) \in N_{m,0}} \int \frac{H_{i0}^{(m)}[x(\tau)]}{\sigma_m[x(\tau)]} d_\tau f \left(\theta, \xi_i(\theta, \tau), \frac{\partial}{\partial \theta} \xi_i(\theta, \tau), \dots, \frac{\partial^s}{\partial \theta^s} \xi_i(\theta, \tau) \right) + \\ & + \sum_{(i,j) \in M_{m,n}} \sum_{v=1}^j \sum_{q=0}^s a_{vj} \frac{\partial^v}{\partial x_i^{v-1} \partial x_i^{(q)}} f(t, x_i(t), x'_i(t), x''_i(t), \dots, x_i^{(s)}(t)) \frac{\partial^q}{\partial t^q} \left\{ \frac{H_{ij}^{(m)}(x(t))}{\sigma_m(x(t))} \sigma_m(x_i(t)) \right\}, \quad (20) \end{aligned}$$

где функция $\xi_i(\theta, \tau) = x_p(\theta) + \chi(\tau, \theta)(x_i(\theta) - x_p(\theta))$, $(i, 0) \in N_{m,0}$.

Погрешность $r_{m,n}(x) = F(x) - B_{m,n}(F; x)$, как частный случай формулы (19), где $F(x)$ – оператор вида (6), а $B_{m,n}(F; x)$ – интерполяционный полином (20), примет вид

$$\begin{aligned} r_{m,n}(x) = & \sum_{(i,0) \in N_{m+1,0}} \int \left(\frac{H_{i0}^{(m+1)}[x(t)]}{\sigma_{m+1}[x(t)]} - \frac{H_{i0}^{(m)}[x(t)]}{\sigma_m[x(t)]} \right) d_\tau f \left(\theta, \xi_i(\theta, \tau), \frac{\partial}{\partial \theta} \xi_i(\theta, \tau), \dots, \frac{\partial^s}{\partial \theta^s} \xi_i(\theta, \tau) \right) + \\ & + \sum_{(i,j) \in M_{m+1,n+k}} \sum_{v=1}^j \sum_{q=0}^s a_{vj} \frac{\partial^v}{\partial x_i^{v-1} \partial x_i^{(q)}} f(t, x_i(t), x'_i(t), x''_i(t), \dots, x_i^{(s)}(t)) \times \\ & \times \frac{\partial^q}{\partial t^q} \left\{ \frac{H_{ij}^{(m+1)}(x(t))}{\sigma_{m+1}(x(t))} \sigma_{m+1}(x_i(t)) - \frac{H_{ij}^{(m)}(x(t))}{\sigma_m(x(t))} \sigma_m(x_i(t)) \right\}, \end{aligned}$$

где $x_{m+1} = x$, k – разность числа столбцов матриц $I_{m+1,n+k}$ и $I_{m,n}$, $H_{m+1,j}^{(m)}(x) \equiv 0$ ($j = 0, 1, 2, \dots$).

В частности, в случае двукратных узлов x_0, x_1, \dots, x_m относительно чебышевской системы функций $\{\varphi_q(t)\}_{q=0}^{2m+1}$ с фундаментальными многочленами Эрмита $h_{m,k}(x)$ и $q_{m,k}(x)$, для которых

$$h_{m,k}(x_j) = q'_{m,k}(x_j) = \delta_{kj},$$

$$h'_{m,k}(x_j) = q_{m,k}(x_j) = 0 \quad (k, j = 0, 1, \dots, m),$$

$$\sigma_m(x) = \sum_{k=0}^m h_{m,k}(x) \equiv 1,$$

формула (18) при $p = 0$ принимает более простой вид

$$B_{m,1}(F; x) = F(x_0) + \sum_{k=0}^m \delta F[x_k; q_{m,k}(x)] + \sum_{k=1}^m \int_0^1 h_{m,k}(x(\tau)) d_\tau F[x_0(\cdot) + \chi(\tau, \cdot)(x_k(\cdot) - x_0(\cdot))]. \quad (21)$$

Для обыкновенного дифференциального оператора (6) интерполяционный операторный многочлен (21) преобразуется к виду

$$B_{m,1}(F; x) = f\left(t, x_0(t), x'_0(t), x''_0(t), \dots, x_0^{(s)}(t)\right) +$$

$$+ \sum_{k=0}^m \sum_{v=0}^s \frac{\partial}{\partial x_k^{(v)}} f\left(t, x_k(t), x'_k(t), x''_k(t), \dots, x_k^{(s)}(t)\right) \frac{\partial^v}{\partial t^v} q_{m,k}(x(t)) +$$

$$+ \sum_{k=1}^m \int_0^1 h_{m,k}(x(\tau)) d_\tau f\left(\theta, \xi_k(\theta, \tau), \frac{\partial}{\partial \theta} \xi_k(\theta, \tau), \dots, \frac{\partial^s}{\partial \theta^s} \xi_k(\theta, \tau)\right), \quad (22)$$

где $\xi_k(\theta, \tau) = x_0(\theta) + \chi(\tau, \theta)(x_k(\theta) - x_0(\theta))$, $k = 1, 2, \dots, m$.

Погрешность интерполирования $r_{m,1}(x) = F(x) - B_{m,1}(F; x)$ многочленом (22) имеет представление

$$r_{m,1}(x) = \sum_{k=1}^{m+1} \int_0^1 \{h_{m+1,k}(x(\tau)) - h_{m,k}(x(\tau))\} d_\tau f\left(\theta, \xi_k(\theta, \tau), \frac{\partial}{\partial \theta} \xi_k(\theta, \tau), \dots, \frac{\partial^s}{\partial \theta^s} \xi_k(\theta, \tau)\right) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{m+1} \sum_{v=0}^s \frac{\partial}{\partial x_k^{(v)}} f\left(t, x_k(t), x'_k(t), x''_k(t), \dots, x_k^{(s)}(t)\right) \frac{\partial^v}{\partial t^v} \{q_{m+1,k}(x(t)) - q_{m,k}(x(t))\},$$

где $x_{m+1} = x$, $h_{m,m+1}(x) = q_{m,m+1}(x) \equiv 0$.

Частные случаи формул Эрмита – Биркгофа. Рассмотрим интерполяционные операторные формулы Эрмита – Биркгофа, соответствующие различным матрицам $I_{m,n}$.

1. Если множество $N_{m,0} = \{(0, 0)\}$, то $\sigma_m(x(t)) = H_{00}^{(m)}(x(t))$. В этом случае вторая группа слагаемых в правой части формул (7) и (18) будет отсутствовать и соответствующий интерполяционный многочлен запишется как

$$B_{m,n}(x) = F(x_0) + \sum_{(i,j) \in M_{m,n}} \tilde{D}_j F \left[x_i; \frac{H_{ij}^{(m)}(x) H_{00}^{(m)}(x_i)}{H_{00}^{(m)}(x)} \right], \quad (23)$$

где x_0 – фиксированный узел, соответствующий ненулевому элементу ϵ_{00} матрицы $I_{m,n}$.

Рассмотрим частный случай формулы (23). В качестве чебышевской системы $\{\varphi_k(t)\}_{k=0}^2$ выберем экспоненциальную на \mathbb{R} систему функций $\{e^t, e^{2t}, e^{3t}\}$, а в качестве D_j – операторы дифференцирования: $D_j \varphi(t) = \varphi^{(j)}(t)$, и, соответственно, $\tilde{D}_j F(x) = \delta^j F[x; h_1 h_2 \dots h_j]$, $j = 1, 2$. Пусть матрица

$$I_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда для многочлена Эрмита – Биркгофа вида (23), удовлетворяющего условиям

$$B_{1,2}(x_0) = F(x_0); \delta B_{1,2}[x_1; h_1] = \delta F[x_1; h_1], \delta^2 B_{1,2}[x_1; h_1 h_2] = \delta^2 F[x_1; h_1 h_2],$$

справедливо представление

$$B_{1,2}(x) = F(x_0) + \sum_{j=1}^2 \delta^j F \left[x_1; \frac{H_{1j}^{(1)}(x) H_{00}^{(1)}(x_1)}{H_{00}^{(1)}(x)} \right],$$

где фундаментальные многочлены интерполирования $H_{00}^{(1)}(x)$, $H_{11}^{(1)}(x)$ и $H_{12}^{(1)}(x)$ задаются равенствами

$$\begin{aligned} H_{00}^{(1)}(x) &= K e^{x-x_0} (e^{2x} + 3e^{2x_1} - 3e^{x+x_1}), \\ H_{11}^{(1)}(x) &= \frac{K}{2} e^{x-2x_1} (e^x - e^{x_0}) (e^{x+x_0} + 9e^{2x_1} - 4e^{x_1} (e^x + e^{x_0})), \\ H_{12}^{(1)}(x) &= -\frac{K}{2} e^{x-2x_1} (e^x - e^{x_0}) (e^{x+x_0} + 3e^{2x_1} - 2e^{x_1} (e^x + e^{x_0})), \\ K &= (e^{2x_0} + 3e^{2x_1} - 3e^{x_0+x_1})^{-1}. \end{aligned}$$

Указанный многочлен $B_{1,2}(x)$ инвариантен относительно операторных полиномов

$$P_{2,\nu}(x) = \sum_{k=0}^2 \int_{\mathbb{R}} a_k(\nu; s, t) \frac{d^\nu}{dt^\nu} \frac{e^{(k+1)x(t)}}{H_{00}^{(1)}(x(t))} dt \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots),$$

где $a_k(\nu; s, t)$ – фиксированные функции ($s, t \in \mathbb{R}$).

Рассмотрим еще один частный случай формулы (23). В качестве чебышевской системы $\{\varphi_k(t)\}_{k=0}^2$ выберем тригонометрическую на $[0, 2\pi)$ систему функций $\{1, \sin t, \cos t\}$. Пусть оператор

$$D_j \varphi(t) = \varphi^{(j)}(t), \quad \tilde{D}_j F(x) = \delta^j F[x; h_1 h_2 \dots h_j] \quad (j = 1, 2),$$

а матрица

$$I_{1,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда для интерполяционного многочлена Эрмита – Биркгофа (23), удовлетворяющего условиям

$$B_{1,3}(x_0) = F(x_0); \delta^2 B_{1,3}[x_1; h_1 h_2] = \delta^2 F[x_1; h_1 h_2], \delta^3 B_{1,3}[x_1; h_1 h_2 h_3] = \delta^3 F[x_1; h_1 h_2 h_3],$$

справедливо представление

$$B_{1,3}(x) = F(x_0) + \sum_{j=2}^3 \delta^j F \left[x_1; H_{1j}^{(1)}(x) \right],$$

где $H_{12}^{(1)}(x) = \cos(x_0 - x_1) - \cos(x - x_1)$, $H_{13}^{(1)}(x) = \sin(x_0 - x_1) - \sin(x - x_1)$.

Операторный многочлен $B_{1,3}(x)$ инвариантен относительно операторных полиномов $P_{2,\nu}(x)$ вида (4), где $q = 2$, $\{\varphi_k(t)\}_{k=0}^2 = \{1, \sin x(t), \cos x(t)\}$, $\sigma_1(x(t)) \equiv 1$, $T = [0, 2\pi)$.

Рассмотрим несколько интерполяционных формул для функций от случайных процессов. Пусть S – множество процессов вида $\eta(t) = F(\xi(t))$, где $\xi = \xi(t)$ – гауссовский случайный процесс со средним $m = m(t)$ и дисперсией $\sigma = \sigma(t)$ ($t \in T \subseteq \mathbb{R}$); случайные процессы $\xi_0 = \xi_0(t)$, $\xi_1 = \xi_1(t)$ с той же областью определения, что и $\xi(t)$, – узлы интерполирования.

Введем обозначения

$$\begin{aligned} H_1(\xi) &= \sin(\xi - \xi_1) - \sin(\xi_0 - \xi_1), \\ H_2(x) &= \cos(\xi_0 - \xi_1) - \cos(\xi - \xi_1), \end{aligned}$$

где области значений функций $F(\xi)$, $H_1(\xi)$ и $H_2(\xi)$ совпадают. Тогда для случайного процесса

$$T_{10}(\xi) = F(\xi_0) + F'(\xi_1)H_1(\xi) + F''(\xi_1)H_2(\xi) \quad (24)$$

выполняются интерполяционные условия

$$T_{10}(\xi_0) = F(\xi_0), \quad T'_{10}(\xi_1) = F'(\xi_1), \quad T''_{10}(\xi_1) = F''(\xi_1).$$

Несложно проверить, что и для случайного процесса

$$T_{11}(\xi) = F(\xi_0) + F''(\xi_1)H_2(\xi) - F'''(\xi_1)H_1(\xi) \quad (25)$$

справедливы равенства $T_{11}(\xi_0) = F(\xi_0)$, $T''_{11}(\xi_1) = F''(\xi_1)$, $T'''_{11}(\xi_1) = F'''(\xi_1)$, а для процесса

$$T_{12}(\xi) = F(\xi_0) - F^{(4)}(\xi_1)H_2(\xi) + F^{(5)}(\xi_1)H_1(\xi) \quad (26)$$

условия вида $T_{12}(\xi_0) = F(\xi_0)$, $T^{(4)}_{12}(\xi_1) = F^{(4)}(\xi_1)$, $T^{(5)}_{12}(\xi_1) = F^{(5)}(\xi_1)$.

В общем случае аналогичные интерполяционные формулы имеют вид

$$\begin{aligned} T_n(\xi) &= F(\xi_0) + (-1)^{n-1} \left[F^{(2n)}(\xi_1)H_2(\xi) + F^{(2n-1)}(\xi_1)H_1(\xi) \right], \\ \tilde{T}_n(\xi) &= F(\xi_0) + (-1)^{n+1} \left[F^{(2n)}(\xi_1)H_2(\xi) - F^{(2n+1)}(\xi_1)H_1(\xi) \right], \end{aligned} \quad (27)$$

для которых соответственно имеют место равенства

$$\begin{aligned} T_n(\xi_0) &= F(\xi_0), \quad T_n^{(2n-1)}(\xi_1) = F^{(2n-1)}(\xi_1), \quad T_n^{(2n)}(\xi_1) = F^{(2n)}(\xi_1); \\ \tilde{T}_n(\xi_0) &= F(\xi_0), \quad \tilde{T}_n^{(2n)}(\xi_1) = F^{(2n)}(\xi_1), \quad \tilde{T}_n^{(2n+1)}(\xi_1) = F^{(2n+1)}(\xi_1) \\ &\quad (n = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned}$$

Эти условия выполняются в силу соотношений

$$\begin{aligned} (\cos x)^{(2n)} &= (-1)^n \cos x, \quad (\cos x)^{(2n+1)} = (-1)^{n+1} \sin x, \\ (\sin x)^{(2n)} &= (-1)^n \sin x, \quad (\sin x)^{(2n+1)} = (-1)^n \cos x. \end{aligned}$$

Формулы (24)–(27) точны для любых тригонометрических многочленов первой степени вида $F(x) = a \cos x + b \sin x + c$ ($a, b, c \in \mathbb{C}$).

Приведем еще одну интерполяционную формулу такого вида для операторов $F(\xi(t))$ общего вида. Пусть $F: S \rightarrow Y$, где Y – заданное множество детерминированных или случайных на T функций и для оператора F существуют дифференциалы Гато первого и второго порядка:

$\delta F[\xi; h], \delta^2 F[\xi; h_1, h_2]$ ($h, h_1, h_2 \in S$). Будем считать, что в дифференциале второго порядка $\delta^2 F[\xi; h]$ первое направление $h_1(t) \equiv 1$, а второе направление $h_2(t) = h(t)$.

Тогда для интерполяционной формулы

$$\hat{T}_{10}(\xi) = F(\xi_0) + \delta F[\xi_1; H_1(\xi)] + \delta^2 F[\xi_1; H_2(\xi)]$$

выполняются условия

$$\hat{T}_{10}(\xi_0) = F(\xi_0),$$

$$\delta \hat{T}_{10}[\xi_1; h] = \delta F[\xi_1; h],$$

$$\delta^2 \hat{T}_{10}[\xi_1; h_1 h_2] = \delta^2 F[\xi_1; h_1 h_2].$$

Эти равенства справедливы в силу соотношений $\delta H_i[\xi; h] = H'_i(\xi)h$, $\delta^2 H_i[\xi; h_1 h_2] = H''_i(\xi)h_1 h_2$ ($i = 1, 2$).

2. Пусть $I_{m,m}$ – квадратная диагональная матрица размерности $(m+1) \times (m+1)$ и рассматривается интерполяционная задача Абея – Гончарова. Тогда множество $N_{m,0}$ состоит из нулевой пары $(0,0)$, а множество $M_{m,m}$ – из элементов (k,k) , $k = 1, 2, \dots, m$. В этом случае $\sigma_m(x(t)) = H_{00}^{(m)}(x(t))$ и, следовательно, формула (23) примет вид

$$B_{m,m}(x) = F(x_0) + \sum_{k=1}^m \tilde{D}_k F \left[x_k; \frac{H_{kk}^{(m)}(x) H_{00}^{(m)}(x_k)}{H_{00}^{(m)}(x)} \right]. \quad (28)$$

Операторный многочлен $B_{m,m}(x)$ вида (28) удовлетворяет интерполяционным условиям

$$B_{m,m}(x_0) = F(x_0); \quad \tilde{D}_k B_{m,m}(x_k) = \tilde{D}_k F(x_k), \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Для погрешности $r_{m,m}(x) = F(x) - B_{m,m}(x)$, где $B_{m,m}(x)$ – интерполяционный полином вида (28), имеет место представление $r_{m,m}(x) = \tilde{D}_{m+1} F[x; H_{m+1, m+1}^{(m+1)}(x)]$. Через $\tilde{D}_{m+1} F[x; h]$, как и ранее, обозначен оператор вида (5), когда направления $h_\nu(t) \equiv 1$ для $\nu = 1, 2, \dots, m$, а $h_{m+1}(t) = h(t)$.

Если формула (3) точна для обобщенных многочленов (1) при некотором фиксированном значении q и любых различных узлах t_i ($i = 0, 1, \dots, m$), то интерполяционная формула (28) будет инвариантна относительно операторных многочленов вида (4) с тем же значением q .

Если $D_j \varphi(t) = \varphi^{(j)}(t)$, а $\tilde{D}_j F(x) = \delta^j F[x; h_1 h_2 \dots h_j]$, $j = 1, 2, \dots, m$, то интерполяционная формула (28) примет вид

$$B_{m,m}(x) = F(x_0) + \sum_{k=1}^m \delta^k F \left[x_k; \frac{H_{kk}^{(m)}(x) H_{00}^{(m)}(x_k)}{H_{00}^{(m)}(x)} \right]. \quad (29)$$

Операторный многочлен $B_{m,m}(x)$, заданный формулой (29), удовлетворяет интерполяционным условиям

$$B_{m,m}(x_0) = F(x_0), \quad \delta^k B_{m,m}[x_k; h_1 h_2 \dots h_k] = \delta^k F[x_k; h_1 h_2 \dots h_k], \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Для погрешности $r_{m,m}(x) = F(x) - B_{m,m}(x)$, где $B_{m,m}(x)$ – интерполяционный полином вида (29), имеет место представление

$$r_{m,m}(x) = \delta^{m+1} F \left[x; H_{m+1, m+1}^{(m+1)}(x) \right]. \quad (30)$$

Здесь, как и раньше, $\delta^{m+1} F[x; h]$ означает, что направления $h_\nu(t) \equiv 1$ для $\nu = 1, 2, \dots, m$, а $h_{m+1}(t) = h(t)$.

Предположим, что X и Y – нормированные пространства. Если в точке $x \in X$ для дифференциалов $\tilde{D}_j F[x; h]$ выполняются неравенства $\|\tilde{D}_j F[x; h]\| \leq c \|h\|$ ($0 \leq c < \infty$), тогда для погрешности интерполирования (30) справедлива оценка

$$\|r_{m,m}(x)\| \leq c \|H_{m+1 m+1}^{(m+1)}(x)\|. \tag{31}$$

Одна из возникающих здесь экстремальных задач состоит в нахождении узлов интерполяции $x_k(t)$ ($k = 0, 1, \dots, m$), для которых норма в правой части оценки погрешности (31) принимает наименьшее значение.

Явный вид алгебраических многочленов $H_{kk}^{(m)}(t)$, для которых выполняются условия $D_j H_{kk}^{(m)}(t_j) = \delta_{kj}$ ($k, j = 0, 1, \dots, m$), приведен в [14].

3. Пусть $I_{m,m+s} = \{\varepsilon_{ij}\}_{i,j=0}^{m,m+s}$ – матрица порядка $(m+1) \times (m+s+1)$, $s \geq 1$, соответствующая следующей интерполяционной задаче: множество $N_{m,0}$ состоит из пар $(k, 0)$, а множество $M_{m,m+s}$ – из элементов $(k, m+s)$, $k = 0, 1, \dots, m$ (т. е. крайние столбцы матрицы $I_{m,m+s}$ являются единичными, а остальные – нулевыми).

В этом случае $\sigma_m(x) = \sum_{i=0}^m H_{i0}^{(m)}(x)$, где $H_{i0}^{(m)}(t)$ – многочлены класса (1), удовлетворяющие условиям $D_\nu H_{i0}^{(m)}(t_k) = \delta_{ik} \delta_{\nu 0}$, а δ_{ij} – символ Кронекера ($0 \leq i, k \leq m$; $0 \leq \nu \leq m+s$). Здесь, как и ранее, в верхнем индексе (m) обозначения $H_{i0}^{(m)}(t)$ указан номер последней строки в соответствующей матрице $I_{m,m+s}$. Операторный многочлен (7) примет вид

$$B_{m,m+s}(x) = F(x_p) + \sum_{i=0}^m \int \delta F \left[x_p + \tau(x_i - x_p); \frac{H_{i0}^{(m)}(x)}{\sigma_m(x)}(x_i - x_p) \right] d\tau + \sum_{i=0}^m \tilde{D}_{m+s} F \left[x_i; \frac{H_{i m+s}^{(m)}(x)}{\sigma_m(x)} \right]. \tag{32}$$

Операторный многочлен (32) удовлетворяет интерполяционным условиям

$$B_{m,m+s}(x_k) = F(x_k); \tilde{D}_{m+s} B_{m,m+s}(x_k) = \tilde{D}_{m+s} F(x_k), \quad k = 0, 1, \dots, m. \tag{33}$$

Для погрешности $r_{m,m+s}(x) = F(x) - B_{m,m+s}(x)$, где $B_{m,m+s}(x)$ – интерполяционный полином вида (32), имеет место формула

$$r_{m,m+s}(x) = \int_0^1 \delta F \left[x_p + \tau(x - x_p); H_{m+1,0}^{(m+1)}(x)(x - x_p) \right] d\tau + \tilde{D}_{m+s} F \left[x; H_{m+1 m+s}^{(m+1)}(x) \right]. \tag{34}$$

Если $D_j \varphi(t) = \varphi^{(j)}(t)$, а $\tilde{D}_j F(x) = \delta^j F[x; h_1 h_2 \dots h_j]$, $j = 0, m+s$, то равенства (32)–(34) преобразуются соответственно к виду

$$B_{m,m+s}(x) = F(x_p) + \sum_{i=0}^m \int \delta F \left[x_p + \tau(x_i - x_p); \frac{H_{i0}^{(m)}(x)}{\sigma_m(x)}(x_i - x_p) \right] d\tau + \sum_{i=0}^m \delta^{m+s} F \left[x_i; \frac{H_{i m+s}^{(m)}(x)}{\sigma_m(x)} \right],$$

$$r_{m,m+s}(x) = \int_0^1 \delta F \left[x_p + \tau(x - x_p); H_{m+1,0}^{(m+1)}(x)(x - x_p) \right] d\tau + \delta^{m+s} F \left[x; H_{m+1 m+s}^{(m+1)}(x) \right],$$

$$B_{m,m+s}(x_k) = F(x_k); \delta^{m+s} B_{m,m+s} [x_k; h_1 h_2 \dots h_k] = \delta^{m+s} F [x_k; h_1 h_2 \dots h_k], \quad k = 0, 1, \dots, m.$$

Известно явное представление алгебраических многочленов $H_{ij}^{(m)}(t)$, $i = 0, 1, \dots, m$; $j = 0, m+s$, для которых выполняются условия $D_\nu H_{ij}^{(m)}(t_k) = \delta_{ik} \delta_{\nu j}$, $i, k = 0, 1, \dots, m$; $\nu, j = 0, m+s$.

4. Пусть $I_{m,m+s} = \{\varepsilon_{ij}\}_{i,j=0}^{m,m+s}$, $s \geq 1$, – прямоугольные матрицы размерности $(m+1) \times (m+s+1)$, соответствующие следующей интерполяционной задаче: множество $N_{m,0}$ состоит из пар $(i, 0)$, где $i = 0, 1, 2, \dots, m$, а множество $M_{m,m+s}$ – из элементов (s, j) , где $j = m+1, m+2, \dots, m+s$, а s – фиксированный номер одного из узлов ($0 \leq s \leq m$).

В этом случае $\sigma_m(x) = \sum_{i=0}^m H_{i0}^{(m)}(x)$, а операторный многочлен (7) при $p = 0$ примет вид

$$B_{m,m+s}(x) = F(x_0) + \sum_{i=0}^{m-1} \int \delta F \left[x_0 + \tau(x_i - x_0); \frac{H_{i0}^{(m)}(x)}{\sigma_m(x)}(x_i - x_0) \right] d\tau + \sum_{j=m+1}^{m+s} \tilde{D}_j F \left[x_s; \frac{H_{sj}^{(m)}(x)}{\sigma_m(x)} \right]. \quad (35)$$

Операторный многочлен (35) удовлетворяет интерполяционным условиям

$$B_{m,m+s}(x_k) = F(x_k), \quad k = 0, 1, \dots, m; \quad \tilde{D}_j B_{m,m+s}(x_s) = \tilde{D}_j F(x_s), \quad j = m+1, m+2, \dots, m+s. \quad (36)$$

Для погрешности $r_{m,m+s}(x) = F(x) - B_{m,m+s}(x)$, где $B_{m,m+s}(x)$ – интерполяционный полином вида (35), имеет место представление

$$r_{m,m+s}(x) = \int_0^1 \delta F \left[x_0 + \tau(x - x_0); H_{m+1,0}^{(m+1)}(x)(x - x_0) \right] d\tau + \tilde{D}_{m+s+1} F \left[x_s; H_{s, m+s+1}^{(m+1)}(x) \right]. \quad (37)$$

Пусть $D_j \varphi(t) = \varphi^{(j)}(t)$, а $\tilde{D}_j F(x) = \delta^j F[x; h_1 h_2 \dots h_j]$, $j = m+1, \dots, m+s$. Тогда равенства (35)–(37) примут соответственно вид

$$B_{m,m+s}(x) = F(x_0) + \sum_{i=0}^{m-1} \int \delta F \left[x_0 + \tau(x_i - x_0); \frac{H_{i0}^{(m)}(x)}{\sigma_m(x)}(x_i - x_0) \right] d\tau + \sum_{j=m+1}^{m+s} \delta^j F \left[x_s; \frac{H_{sj}^{(m)}(x)}{\sigma_m(x)} \right],$$

$$B_{m,m+s}(x_k) = F(x_k), \quad k = 0, 1, \dots, m; \quad \delta^j B_{m,m+s}[x_s; h_1 h_2 \dots h_j] = \delta^j F[x_s; h_1 h_2 \dots h_j], \quad j = m+1, m+2, \dots, m+s,$$

$$r_{m,m+s}(x) = \int_0^1 \delta F \left[x_0 + \tau(x - x_0); H_{m+1,0}^{(m+1)}(x)(x - x_0) \right] d\tau + \delta^{m+s+1} F \left[x_s; H_{s, m+s+1}^{(m+1)}(x) \right].$$

Явный вид алгебраических многочленов $H_{ij}^{(m)}(t)$, $i = 0, 1, \dots, m$; $j = 0, m+1, \dots, m+s$, для которых выполняются условия $D_\nu H_{ij}^{(m)}(t_k) = \delta_{ik} \delta_{\nu j}$, $i, k = 0, 1, \dots, m$; $\nu, j = 0, m+1, \dots, m+s$, приведен в работе [7].

В заключение отметим, что достаточно полная теория операторного интерполирования изложена в монографии [15], в которой, в частности, рассмотрены и специальные случаи интерполяционной задачи Эрмита – Биркгофа.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф15-35).

Acknowledgements. This work was supported by the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (Project No. F15-35).

Список использованных источников

1. Мысовских, И. П. Лекции по методам вычислений / И. П. Мысовских. – СПб: изд-во С.-Петербург. ун-та, 1998. – 470 с.
2. Турецкий, А. Х. Теория интерполирования в задачах / А. Х. Турецкий. – Минск: Выш. шк., 1968. – 317 с.
3. Shi, Y. G. Theory of Birkhoff Interpolation / Y. G. Shi. – New York: Nova Science Publishers, 2003. – 253 p.
4. Nazarzadeh, A. Another case of incidence matrix for bivariate Birkhoff interpolation / A. Nazarzadeh, Kh. Rahsepar Fard, A. Mahmoodi // J. Comput. Appl. Math. – 2016. – № 2 (122). – P. 55–70.
5. Zhao, T. G. On Two Birkhoff-Type Interpolations with First- and Second-Order Derivative / T. G. Zhao, Y. J. Li // J. Appl. Math. Phys. – 2016. – № 4. – P. 1269–1274.
6. Янович, Л. А. Обобщенная интерполяционная задача Абея – Гончарова / Л. А. Янович, В. В. Дорошко // Вестн. фонда фундам. исслед. – 1999. – № 4. – С. 34–44.

7. Янович, Л. А. Интерполяционные операторные многочлены Эрмита – Биркгофа в пространстве гладких функций / Л. А. Янович, М. В. Игнатенко // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2009. – Т. 53, № 5. – С. 15–21.
8. Янович, Л. А. Специальный случай интерполяционной задачи Эрмита – Биркгофа для операторов в пространстве гладких функций / Л. А. Янович, М. В. Игнатенко // Актуальные проблемы анализа: сб. науч. тр. – Гродно: ГрГУ, 2009. – С. 198–215.
9. Худяков, А. П. Интерполяционные формулы Эрмита – Биркгофа относительно алгебраической и тригонометрической систем функций с одним специальным узлом / А. П. Худяков, А. А. Трофимук // Вест. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2017. – № 1. – С. 14–28.
10. Янович, Л. А. Обобщенная интерполяционная задача Эрмита – Биркгофа для операторов / Л. А. Янович, М. В. Игнатенко // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений: сб. науч. тр. 5-й междунар. конф. – Минск, Ин-т математики НАН Беларуси, 2010. – Т. 1. – С. 140–147.
11. Янович, Л. А. Формулы операторного интерполирования, основанные на интерполяционных многочленах для числовых функций / Л. А. Янович, В. В. Дорошко // Вычислительная математика и математические проблемы механики: тр. Укр. мат. конгресса. – Киев, 2002. – С. 137–145.
12. Янович, Л. А. Об одном классе интерполяционных многочленов для нелинейных обыкновенных дифференциальных операторов / Л. А. Янович, М. В. Игнатенко // Математическое моделирование. – 2014. – Т. 26, № 11. – С. 90–96.
13. Янович, Л. А. Об одном классе формул операторного интерполирования Эрмита – Биркгофа в пространстве дифференцируемых функций / Л. А. Янович, М. В. Игнатенко // Вест. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2005. – № 2. – С. 11–16.
14. Евграфов, М. А. Интерполяционная задача Абеля – Гончарова / М. А. Евграфов. – М.: ГИТТЛ, 1954. – 128 с.
15. Makarov, V. L. Methods of Operator Interpolation / V. L. Makarov, V. V. Khlobystov, L. A. Yanovich // Праці Ін-ту математики НАН України. – Київ, 2010. – Vol. 83. – P. 1–517.

References

1. Mysovskikh I. P. *Lectures on numerical methods*. St. Petersburg, Publishing House of St. Petersburg University, 1998. 470 p. (in Russian).
2. Turetskii A. Kh. *The theory of interpolation in problems*. Minsk, Vysheishaya shkola, 1968. 317 p. (in Russian).
3. Shi Y. G. *Theory of Birkhoff Interpolation*. New York, Nova Science Publishers, 2003. 253 p.
4. Nazarzadeh A., Rahsepar Fard KH., Mahmoodi A. Another case of incidence matrix for bivariate Birkhoff interpolation. *Zhurnal obchislyuval'noi ta prikladnoi matematiki* = Journal of Computational and Applied Mathematics, 2016, no. 2 (122), pp. 55–70.
5. Zhao T. G., Li Y. J. On Two Birkhoff-Type Interpolations with First- and Second-Order Derivative. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 2016, no. 4, pp. 1269–1274. Doi: 10.4236/jamp.2016.47133
6. Yanovich L. A., Doroshko V. V. Generalized interpolation problem of Abel – Goncharov. *Vestnik fonda fundamental'nykh issledovaniy* [Vestnik of the Foundation for Fundamental Research], 1999, vol. 4, pp. 34–44. (in Russian).
7. Yanovich L. A., Ignatenko M. V. Interpolation operator polynomials of Hermite – Birkhoff in the space of smooth functions. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi* [Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus], 2009, vol. 53, no. 5, pp. 15–21. (in Russian).
8. Yanovich L. A., Ignatenko M. V. A special case of the Hermite – Birkhoff interpolation problem for operators in the space of smooth functions. *Aktual'nye problemy analiza. Sbornik nauchnykh trudov* [Actual problems of analysis Collection of Scientific Papers]. Grodno, Grodno State University, 2009, pp. 198–215. (in Russian).
9. Khudyakov A. P., Trofimuk A. A. The Hermite – Birkhoff interpolation formulas for algebraic and trigonometric systems of functions with one special node. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series], 2017, no. 1, pp. 14–28. (in Russian).
10. Yanovich L. A., Ignatenko M. V. Generalized interpolation problem of Hermite – Birkhoff for operators. *Analiticheskie metody analiza i differentsial'nykh uravnenii: Sbornik nauchnykh trudov 5-i mezhdunarodnoi konferentsii* [Analytical methods of analysis and differential equations: Collection of Scientific Papers of the 5th International Conference]. Minsk, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, 2010, vol. 1, pp. 140–147. (in Russian).
11. Yanovich L. A., Doroshko V. V. Formulas of operator interpolation based on interpolation polynomials for scalar functions. *Vychislitel'naya matematika i matematicheskie problemy mekhaniki: Trudy Ukrain'skogo matematicheskogo kongressa* [Computational Mathematics and Mathematical Problems in Mechanics: Proceedings of the Ukrainian Mathematical Congress]. Kiev, 2002, pp. 137–145. (in Russian).
12. Yanovich L. A., Ignatenko M. V. On a class of interpolation polynomials for nonlinear ordinary differential operators. *Matematicheskoe Modelirovanie* [Mathematical Models and Computer Simulations], 2014, vol. 26, no. 11, pp. 90–96.
13. Yanovich L. A., Ignatenko M. V. On a class of Hermite – Birkhoff operator interpolation formulas in the space of differentiable functions. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk*

[Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series], 2005, no. 2, p. 11–16. (in Russian).

14. Evgrafov M. A. *Abel – Goncharov interpolation problem*. Moscow, State Publishing House of Technical and Theoretical Literature, 1954. 127 p. (in Russian).

15. Makarov V. L., Khlobystov V. V., Yanovich L. A. Methods of Operator Interpolation. *Pratsi institutu matematiki NAN Ukraini* [Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine], Kiev, 2010, vol. 83, pp. 1–517.

Информация об авторах

Янович Леонид Александрович – член-корреспондент, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: yanovich@im.bas-net.by

Игнатенко Марина Викторовна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: ignatenkomv@bsu.by

Для цитирования

Янович, Л. А. К теории интерполирования Эрмита – Биркгофа нелинейных обыкновенных дифференциальных операторов / Л. А. Янович, М. В. Игнатенко // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2017. – № 2. – С. 7–23.

Information about the authors

Yanovich Leonid Aleksandrovich – Corresponding Member, D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Chief Researcher, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: yanovich@im.bas-net.by

Ignatenko Marina Viktorovna – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Associate Professor of Web-Technologies and Computer Simulation Department, Belarusian State University (4, Nezavimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: ignatenkomv@bsu.by

For citation

Yanovich L. A., Ignatenko M. V. To the theory of Hermite – Birkhoff interpolation of nonlinear ordinary differential operators. *Vesti Natsyional'noi akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series], 2017, no. 2, pp. 7–23. (in Russian).

М. М. Юхимук

Брестский государственный технический университет, Брест, Беларусь

ОДНОРОДНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА РИМАНА С МЕРОМОРФНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНО СВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ

В исследованиях эффективных свойств двумерных композиционных материалов наиболее изученным является случай материалов с периодической микроструктурой. Это связано с возможностью представления решений соответствующих краевых задач через значения некоторых эллиптических функций. В данной работе рассматривается однородная краевая задача Римана для бесконечно связных областей и мероморфных коэффициентов. В замкнутой форме дается решение задачи в классе кусочно-аналитических функций, допускающих мероморфное продолжение на всю комплексную плоскость. Как частный случай решается вопрос существования и единственности двоякопериодических решений задачи с эллиптическим коэффициентом. Приводится пример задачи, имеющей единственное, с точностью до произвольного числового множителя, решение, и пример задачи, решение которой зависит от произвольных независимых параметров. Полученные результаты могут служить базой для исследования случая, когда коэффициенты задачи являются различными для каждого из контуров, а также при решении неоднородной задачи Римана с мероморфными коэффициентами и свободными членами в бесконечно связных областях.

Ключевые слова: краевая задача Римана, мероморфный коэффициент, бесконечно связная область, эллиптические функции

M. M. Yukhimuk

Brest State Technical University, Brest, Belarus

HOMOGENEOUS RIEMANN BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH MEROMORPHIC COEFFICIENTS FOR INFINITELY CONNECTED DOMAINS

Homogeneous Riemann boundary value problem with meromorphic coefficients for infinitely connected domains is considered. In the closed form the problem is solved in the class of piece-wise analytic functions, possessing meromorphic continuation to the whole complex plane. Special attention is paid to the existence of doubly periodic solutions to the problem with elliptic coefficients. The example of the problem having a unique solution up to an arbitrary constant multiplier is presented, as well as of the problem with a solution depending on a number of arbitrary parameters. The obtained results can be used for solving of an inhomogeneous Riemann boundary value problem with meromorphic coefficients in an infinitely connected domain in the general statement.

Keywords: Riemann boundary value problem, meromorphic coefficient, infinitely connected domain, elliptic functions

Введение. Краевая задача для бесконечно связной области впервые была рассмотрена в работе [1]. В дальнейшем к этой тематике, а также к связанным с ней задачам с бесконечным индексом обращались многие математики (см., напр., [2] и обзор в монографии [3, § 49]). В связи с исследованием эффективных свойств двумерных композиционных материалов (см., напр., [4]) возникает интерес к решению в замкнутой форме специальных типов краевых задач для бесконечно связных областей. При этом наиболее изученным оказался случай материалов с двоякопериодической структурой. Это связано, в частности, с возможностью представления решений соответствующих краевых задач в явной форме через значения эллиптических функций (см., напр., [5, 6]).

В настоящей работе рассматривается однородная задача Римана для случая бесконечно связной области и мероморфных коэффициентов. Как частный случай такой задачи исследуется вопрос о существовании двоякопериодических решений задачи с эллиптическим коэффициентом, общим для всех контуров.

1. Однородная задача Римана с мероморфными коэффициентами. В данном разделе решается задача нахождения кусочно-аналитической в бесконечно связной области функции, допускающей мероморфное продолжение своих компонент на всю комплексную плоскость и удовлетворяющей заданному однородному граничному условию.

Уточним постановку задачи. Пусть задано счетное семейство простых гладких замкнутых попарно непересекающихся контуров $\{L_m \mid m \in \mathbf{N}\}$, ограничивающих непересекающиеся области D_m^+ , причем $\min_{t \in L_m} |t| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \infty$ и $\exists \delta > 0 \forall m \in \mathbf{N} \exists z_m \in D_m^+ \forall t \in L_m (|t - z_m| \geq \delta)$. Пусть также $I_1, I_2, \dots, I_N \subset \mathbf{N}$, причем $\prod_{k=1}^N I_k = \mathbf{N}$. Обозначим $L_{(k)} = \bigcup_{m \in I_k} L_m$, $D_{(k)}^+ = \bigcup_{m \in I_k} D_m^+$ ($k = \overline{1, N}$), $D^+ = \bigcup_{m \in \mathbf{N}} D_m^+$, $D^- = \mathbf{C} \setminus D^+$. Пусть также заданы мероморфные функции $G_k(z)$ ($k = \overline{1, N}$), не имеющие полюсов на множестве $\{L_m \mid m \in \mathbf{N}\}$. Требуется найти кусочно-аналитическую в области $D^- \cup D^+$ функцию

$$\Phi(z) = \begin{cases} \Phi^-(z), & z \in D^-, \\ \Phi_k^+(z), & z \in D_{(k)}^+ \quad (k = \overline{1, N}), \end{cases}$$

компоненты которой $\Phi^-(z)$, $\Phi_1^+(z)$, ..., $\Phi_N^+(z)$ непрерывны вплоть до кривых L_m ($m \in \mathbf{N}$), допускают мероморфные (вообще говоря, различные) продолжения из множеств $D^-, D_{(1)}^+, \dots, D_{(N)}^+$ соответственно на всю комплексную плоскость и удовлетворяют на контурах граничным условиям

$$\Phi_k^+(t) = \Phi^-(t) \cdot G_k(t), \quad t \in L_{(k)}, \quad k = \overline{1, N}. \tag{1}$$

Заметим, что в постановке задачи каких-либо требований на поведение решения на бесконечности не накладывается.

Для данной задачи установлено следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть

$$G_k(z) = \frac{a_k(z) \cdot b_k(z)}{c_k(z) \cdot d_k(z)} \quad (k = \overline{1, N}), \tag{2}$$

где $a_k(z)$, $b_k(z)$, $c_k(z)$, $d_k(z)$ – целые функции, причем нули $a_k(z)$ содержатся в $D_{(k)}^+$, нули $b_k(z)$ – в $\mathbf{C} \setminus D_{(k)}^+$, нули $c_k(z)$ – в D^+ , а нули $d_k(z)$ – в D^- . Тогда всякое решение задачи может быть представлено в виде

$$\Phi(z) = \begin{cases} \frac{\prod_{m=1}^N c_m(z)}{\prod_{m=1}^N a_m(z)} \cdot h(z), & z \in D^-, \\ \frac{b_k(z) \cdot \prod_{\substack{m=1, N \\ m \neq k}} c_m(z)}{d_k(z) \cdot \prod_{\substack{m=1, N \\ m \neq k}} a_m(z)} \cdot h(z), & z \in D_{(k)}^+ \quad (k = \overline{1, N}), \end{cases} \tag{3}$$

где $h(z)$ – некоторая целая функция.

Доказательство. Очевидно, всякая функция вида (3) является кусочно-аналитической в области $D^- \cup D^+$ и ее предельные значения удовлетворяют граничным условиям (1). Пусть теперь функции $\Phi^-(z)$, $\Phi_1^+(z)$, ..., $\Phi_N^+(z)$ аналитичны в областях $D^-, D_{(1)}^+, D_{(2)}^+, \dots, D_{(N)}^+$ соответственно, а их предельные значения удовлетворяют условиям (1). Тогда при фиксированном натуральном $k \in [1; N]$

$$\Phi_k^+(t) = \Phi^-(t) \cdot \frac{a_k(t) \cdot b_k(t)}{c_k(t) \cdot d_k(t)},$$

откуда

$$\Phi_k^+(t) \cdot \frac{d_k(t)}{b_k(t)} = \Phi^-(t) \cdot \frac{a_k(t)}{c_k(t)}.$$

Обе части последнего равенства можно рассматривать как предельные значения полных аналитических функций $\Phi_k^+(z) \cdot \frac{d_k(z)}{b_k(z)}$ и $\Phi^-(z) \cdot \frac{a_k(z)}{c_k(z)}$ на множестве $L_{(k)}$. Так как функции $\Phi_k^+(z) \cdot \frac{d_k(z)}{b_k(z)}$ и $\Phi^-(z) \cdot \frac{a_k(z)}{c_k(z)}$ аналитичны соответственно в областях $D_{(k)}^+$ и D^- , при этом непрерывны и совпадают на множестве $L_{(k)}$, то

$$\Phi_k^+(z) \cdot \frac{d_k(z)}{b_k(z)} = \Phi^-(z) \cdot \frac{a_k(z)}{c_k(z)} = h_k(z),$$

где $h_k(z)$ – целая функция. Таким образом, для любого натурального $k \in [1; N]$ существует целая функция $h_k(z)$, для которой

$$\Phi^-(z) = \frac{c_k(z)}{a_k(z)} \cdot h_k(z),$$

откуда следует, что

$$\Phi^-(z) = \frac{\prod_{m=1}^N c_m(z)}{\prod_{m=1}^N a_m(z)} \cdot h(z),$$

где $h(z)$ – некоторая целая функция. Выражая $\Phi_k^+(z)$ из соотношений

$$\Phi_k^+(z) \cdot \frac{d_k(z)}{b_k(z)} = \Phi^-(z) \cdot \frac{a_k(z)}{c_k(z)},$$

получим решение задачи в виде (3). Очевидно, представление функций $G_k(z)$ в виде (2) не является однозначным. Пусть

$$G_k(z) = \frac{A_k(z) \cdot B_k(z)}{C_k(z) \cdot D_k(z)},$$

причем нули целых функций $A_k(z)$, $B_k(z)$, $C_k(z)$, $D_k(z)$ содержатся в областях $D_{(k)}^+$, $\mathbb{C} \setminus D_{(k)}^+$, D^+ , D^- соответственно. Тогда, очевидно,

$$\frac{C_k(z)}{A_k(z)} = \frac{c_k(z)}{a_k(z)} \cdot \exp \varphi_k(z), \quad \frac{B_k(z)}{D_k(z)} = \frac{b_k(z)}{d_k(z)} \cdot \exp \varphi_k(z),$$

где $\varphi_k(z)$ ($k = \overline{1, N}$) – некоторые целые функции, и мы снова приходим к решению вида (3). Теорема 1 доказана.

Заметим, что факторизация коэффициента задачи, т. е. представление его в виде (2), является, вообще говоря, нетривиальной задачей для случая бесконечно связанных областей. Полученный результат позволяет, в частности, строить примеры задач с ограниченными и исчезающими на бесконечности мероморфными решениями.

2. Эллиптические решения однородной задачи Римана. В этом разделе решается вопрос существования двоякопериодических решений однородной краевой задачи Римана в бесконечно связанной области с заданным эллиптическим коэффициентом, общим для всех контуров. Приводятся примеры задач, допускающих такие решения.

Пусть задано счетное семейство простых гладких замкнутых попарно непересекающихся контуров $\{L_{m,n} \mid m, n \in \mathbf{Z}\}$, ограничивающих непересекающиеся области $D_{m,n}^+$ и образующих на комплексной плоскости двоякопериодическую структуру: $\exists \omega_1, \omega_2 \in \mathbf{C} \setminus \{0\} \quad \forall m, n \in \mathbf{Z} \left(\operatorname{Im} \frac{\omega_2}{\omega_1} > 0 \wedge L_{m,n} = \{t + 2\omega_1 m + 2\omega_2 n \mid t \in L_{0,0}\} \right)$. Пусть также задана эллиптическая функция $G(z)$ с основными периодами $2\omega_1, 2\omega_2$, не имеющая полюсов на множестве $\{L_{m,n} \mid m, n \in \mathbf{Z}\}$. Обозначим $D^+ = \bigcup_{m,n \in \mathbf{Z}} D_{m,n}^+, D^- = \mathbf{C} \setminus D^+$. Требуется выяснить, существует ли эллиптическая функция $\Phi^-(z)$, аналитическая в области D^- , и эллиптическая функция $\Phi^+(z)$, аналитическая в области D^+ , предельные значения которых непрерывны вплоть до кривых $L_{m,n}$ и удовлетворяют на них граничным условиям

$$\Phi^+(t) = \Phi^-(t) \cdot G(t), \quad t \in \{L_{m,n} \mid m, n \in \mathbf{Z}\}. \quad (4)$$

Методы решения краевых задач для абстрактной римановой поверхности описаны в [7]. Параллелограмм с попарно отождествленными противоположными сторонами топологически эквивалентен тору, т. е. римановой поверхности рода 1. Задача Римана на торе рассматривалась, например, в работах [8, 9]. Здесь же мы решим поставленную задачу как частный случай задачи, рассмотренной в предыдущем разделе.

Выберем некоторый параллелограмм периодов функции $G(z)$, например, параллелограмм Π с вершинами в точках $0, 2\omega_1, 2\omega_2$ и $2\omega_1 + 2\omega_2$ (для определенности будем считать, что отрезки, соединяющие точку $2\omega_1 + 2\omega_2$ с точками $2\omega_1$ и $2\omega_2$, этому параллелограмму не принадлежат). Обозначим через a_j нули $G(z)$ кратности k_j , принадлежащие множеству $\Pi \cap D^+ \left(j = \overline{1, N^+} \right)$, через b_j – нули кратности l_j , принадлежащие множеству $\Pi \cap \overline{D^-} \left(j = \overline{1, N^-} \right)$, через c_j – полюсы $G(z)$ кратности m_j , принадлежащие множеству $\Pi \cap D^+ \left(j = \overline{1, P^+} \right)$, через d_j – полюсы кратности n_j , принадлежащие множеству $\Pi \cap \overline{D^-} \left(j = \overline{1, P^-} \right)$. Тогда, согласно [10, с. 18], число указанных нулей и полюсов совпадает:

$$\sum_{j=1}^{N^+} k_j + \sum_{j=1}^{N^-} l_j = \sum_{j=1}^{P^+} m_j + \sum_{j=1}^{P^-} n_j,$$

причем их суммы конгруэнтны друг другу относительно периодов $2\omega_1, 2\omega_2$:

$$\sum_{j=1}^{N^+} k_j a_j + \sum_{j=1}^{N^-} l_j b_j \equiv \sum_{j=1}^{P^+} m_j c_j + \sum_{j=1}^{P^-} n_j d_j \pmod{(2\omega_1, 2\omega_2)}.$$

Заменяя, если потребуется, один из нулей или полюсов конгруэнтной величиной (обозначая его тем же символом), можно добиться равенства

$$\sum_{j=1}^{N^+} k_j a_j + \sum_{j=1}^{N^-} l_j b_j = \sum_{j=1}^{P^+} m_j c_j + \sum_{j=1}^{P^-} n_j d_j.$$

Так как функция $G(z)$ является эллиптической, то, согласно [10, с. 56], ее можно выразить через сигма-функцию Вейерштрасса

$$\sigma(z) = z \cdot \prod_{\substack{m,n \in \mathbf{Z} \\ (m;n) \neq (0;0)}} \left[\left(1 - \frac{z}{\Omega_{m,n}} \right) \cdot \exp \left(\frac{z}{\Omega_{m,n}} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{\Omega_{m,n}} \right)^2 \right) \right] \quad (\Omega_{m,n} = 2\omega_1 m + 2\omega_2 n)$$

с теми же основными периодами $2\omega_1, 2\omega_2$:

$$G(z) = C \cdot \frac{\prod_{j=1}^{N^+} \sigma^{k_j}(z - a_j) \cdot \prod_{j=1}^{N^-} \sigma^{l_j}(z - b_j)}{\prod_{j=1}^{P^+} \sigma^{m_j}(z - c_j) \cdot \prod_{j=1}^{P^-} \sigma^{n_j}(z - d_j)} \quad (C = \text{const} \neq 0). \quad (5)$$

Поскольку в любом параллелограмме периодов эллиптической функции содержится конечное число нулей и полюсов, то каждое из произведений в равенстве (5) также является конечным.

В случае если область D^+ не содержит нулей функции $G(z)$, будем полагать $N^+ = 0$, $\sum_{j=1}^{N^+} k_j = \sum_{j=1}^{N^+} k_j a_j = 0$, $\prod_{j=1}^{N^+} \sigma^{k_j}(z - a_j) = 1$. Подобные допущения примем и для остальных случаев, когда одна из областей не содержит нулей либо полюсов функции $G(z)$. Будем называть ненулевое решение задачи кусочно-эллиптическим, если каждая из его компонент $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$ является двоякопериодической функцией в области D^+ и D^- соответственно (наша постановка задачи согласуется с этим термином). Условимся также называть решение задачи единственным, если любые два решения задачи отличаются лишь постоянным множителем.

Обозначим символом χ алгебраическую сумму порядков нулей и полюсов функции $G(z)$, принадлежащих области $D_{0,0}^+$.

Теорема 2. Пусть $\chi = \sum_{j=1}^{N^+} k_j - \sum_{j=1}^{P^+} m_j$. Тогда

1) если $\chi > 0$, то однородная задача Римана с коэффициентом (5) и краевым условием (4) имеет кусочно-эллиптические решения, причем

1а) при $\chi = 1$ решение единственно,

1б) при $\chi > 1$ решение зависит от $\chi - 1$ произвольных независимых параметров;

2) если $\chi = 0$, то кусочно-эллиптическое решение существует лишь при выполнении условия

$$\sum_{j=1}^{N^+} k_j a_j = \sum_{j=1}^{P^+} m_j c_j, \text{ при этом данное решение является единственным};$$

3) если $\chi < 0$, то кусочно-эллиптических решений задача не имеет.

Доказательство. Согласно утверждению теоремы 1 для случая $N = 1$, кусочно-аналитическое решение задачи с граничным условием (4) запишется в виде (3):

$$\Phi(z) = \begin{cases} \frac{c_1(z)}{a_1(z)} \cdot h(z), & z \in D^-, \\ \frac{b_1(z)}{d_1(z)} \cdot h(z), & z \in D^+, \end{cases}$$

или

$$\Phi^-(z) = \frac{\prod_{j=1}^{P^+} \sigma^{m_j}(z - c_j)}{\prod_{j=1}^{N^+} \sigma^{k_j}(z - a_j)} \cdot h(z); \quad \Phi^+(z) = \frac{C \cdot \prod_{j=1}^{N^-} \sigma^{l_j}(z - b_j)}{\prod_{j=1}^{P^-} \sigma^{n_j}(z - d_j)} \cdot h(z), \quad (6)$$

где $C = \text{const}$, а $h(z)$ – произвольная целая функция. Рассмотрим возможные случаи.

1. Пусть

$$\chi = \sum_{j=1}^{N^+} k_j - \sum_{j=1}^{P^+} m_j > 0.$$

Из равенства

$$\sum_{j=1}^{N^+} k_j + \sum_{j=1}^{N^-} l_j = \sum_{j=1}^{P^+} m_j + \sum_{j=1}^{P^-} n_j$$

следует, что и

$$\sum_{j=1}^{P^-} n_j - \sum_{j=1}^{N^-} l_j = \chi > 0.$$

При $\chi > 1$ (случай 1б)) выберем произвольный вектор $H = (h_1; h_2; \dots; h_{\chi-1}) \in \mathbb{C}^{\chi-1}$ и построим целую функцию $h(z) = C_1 \cdot \prod_{j=1}^{\chi} \sigma(z - h_j)$, где $C = \text{const}$, а h_χ – пока неизвестное число. Для того чтобы функция $\Phi^-(z)$ в (6) являлась эллиптической, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\sum_{j=1}^{P^+} m_j c_j + \sum_{j=1}^{\chi} h_j = \sum_{j=1}^{N^+} k_j a_j,$$

откуда

$$h_\chi = \sum_{j=1}^{N^+} k_j a_j - \sum_{j=1}^{P^+} m_j c_j - \sum_{j=1}^{\chi-1} h_j.$$

В этом случае обе компоненты решения (6) будут эллиптическими функциями, зависящими от произвольных независимых параметров $h_1, h_2, \dots, h_{\chi-1}$. При $\chi = 1$ (случай 1а)) получим единственную функцию $h(z) = C_1 \cdot \sigma(z - h_1)$, где $C_1 = \text{const}$ и $h_1 = \sum_{j=1}^{N^+} k_j a_j - \sum_{j=1}^{P^+} m_j c_j$.

2. Пусть

$$\sum_{j=1}^{N^+} k_j = \sum_{j=1}^{P^+} m_j,$$

т. е. $\chi = 0$. В этом случае решения (6) будут кусочно-эллиптическими лишь тогда, когда

$$\sum_{j=1}^{N^+} k_j a_j = \sum_{j=1}^{P^+} m_j c_j, \quad h(z) \equiv C_1 = \text{const}.$$

При этом также имеют место равенства

$$\sum_{j=1}^{N^-} l_j = \sum_{j=1}^{P^-} n_j, \quad \sum_{j=1}^{N^-} l_j b_j = \sum_{j=1}^{P^-} n_j d_j,$$

откуда следует, что функция $G(z)$ представима в виде отношения двух эллиптических функций,

$$G_1(z) = \frac{CC_1 \cdot \prod_{j=1}^{N^-} \sigma^{l_j}(z - b_j)}{\prod_{j=1}^{P^-} \sigma^{n_j}(z - d_j)},$$

имеющей нули на множестве $\overline{D^-}$ и полюсы в области D^- , и

$$G_2(z) = \frac{C_1 \cdot \prod_{j=1}^{P^+} \sigma^{m_j}(z - c_j)}{\prod_{j=1}^{N^+} \sigma^{k_j}(z - a_j)},$$

имеющей нули и полюсы лишь в области D^+ . В частности, при $P^+ = N^+ = 0$ либо $P^- = N^- = 0$ решение (6) задачи запишется в виде

$$\Phi(z) = \begin{cases} h(z), & z \in D^-, \\ \frac{C \cdot \prod_{j=1}^{N^-} \sigma^{l_j}(z - b_j)}{\prod_{j=1}^{P^-} \sigma^{n_j}(z - d_j)} \cdot h(z), & z \in D^+ \end{cases}$$

либо соответственно

$$\Phi(z) = \begin{cases} \frac{\prod_{j=1}^{P^+} \sigma^{m_j}(z - c_j)}{\prod_{j=1}^{N^+} \sigma^{k_j}(z - a_j)} \cdot h(z), & z \in D^-, \\ C \cdot h(z), & z \in D^+. \end{cases}$$

При $h(z) \equiv C_1 = \text{const}$ (и только в этом случае) получим единственное кусочно-эллиптическое решение

$$\Phi(z) = \begin{cases} C_1, & z \in D^-, \\ C_1 \cdot G(z), & z \in D^+ \end{cases}$$

либо

$$\Phi(z) = \begin{cases} \frac{C_1}{G(z)}, & z \in D^-, \\ C_1, & z \in D^+, \end{cases}$$

одна из компонент которого является эллиптической дробно-рациональной функцией, а другая – постоянной.

3. Пусть $\chi < 0$, откуда

$$\sum_{j=1}^{P^+} m_j > \sum_{j=1}^{N^+} k_j, \quad \sum_{j=1}^{N^-} l_j > \sum_{j=1}^{P^-} n_j.$$

Тогда при любом выборе целой функции $h(z)$ компоненты $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$ решения (6) не являются эллиптическими функциями, поскольку в любом параллелограмме периодов число нулей этих компонент заведомо больше числа полюсов (с учетом порядка). В частности, если $N^+ = 0, P^+ > 0$ либо $P^- = 0, N^- > 0$, то одна из компонент решения является целой функцией, отличной от постоянной. Теорема 2 доказана.

Заметим, что в случае 1б) параметры $h_1, h_2, \dots, h_{\chi-1}$, являющиеся нулями «компенсирующей» функции $h(z)$, могут принимать любые, в том числе и повторяющиеся значения. Укажем, в частности, способ построения функции $h(z)$, имеющей в любом параллелограмме периодов функции $G(z)$ лишь один нуль порядка χ . Пусть $h(z) = C_1 \cdot \sigma^\chi(z - h_0)$. Для того чтобы функция

$$\Phi^-(z) = \frac{\left(\prod_{j=1}^{P^+} \sigma^{m_j}(z - c_j) \right) \cdot (C_1 \cdot \sigma^\chi(z - h_0))}{\prod_{j=1}^{N^+} \sigma^{k_j}(z - a_j)}$$

являлась эллиптической, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\sum_{j=1}^{P^+} m_j c_j + \chi h_0 = \sum_{j=1}^{N^+} k_j a_j,$$

откуда

$$h_0 = \frac{1}{\chi} \left(\sum_{j=1}^{N^+} k_j a_j - \sum_{j=1}^{P^+} m_j c_j \right).$$

При этом получим решение

$$\Phi(z) = \begin{cases} C_1 \frac{\prod_{j=1}^{P^+} \sigma^{m_j}(z - c_j)}{\prod_{j=1}^{N^+} \sigma^{k_j}(z - a_j)} \cdot \sigma^\chi \left(z - \frac{1}{\chi} \left(\sum_{j=1}^{N^+} k_j a_j - \sum_{j=1}^{P^+} m_j c_j \right) \right), & z \in D^-, \\ CC_1 \frac{\prod_{j=1}^{N^-} \sigma^{l_j}(z - b_j)}{\prod_{j=1}^{P^-} \sigma^{n_j}(z - d_j)} \cdot \sigma^\chi \left(z - \frac{1}{\chi} \left(\sum_{j=1}^{N^+} k_j a_j - \sum_{j=1}^{P^+} m_j c_j \right) \right), & z \in D^+, \end{cases}$$

не зависящее явно от параметров.

Пример 1. Построим соответствующие случаю 1а) эллиптическую функцию $G(z)$ и семейство контуров $\{L_{m,n} \mid m, n \in \mathbf{Z}\}$. Пусть основные периоды функции $G(z)$ равны 4 и $4i$, ее простые нули находятся в точках $a_1 = 1, a_2 = 2, b_1 = 3i$, а ее простые полюсы – в точках $c_1 = i, d_1 = 2i, d_2 = 3$. Пусть также внутри контуров $L_{m,n}$ ($m, n \in \mathbf{Z}$) находятся точки a_1, a_2, c_1 и им конгруэнтные, а вне их – точки b_1, d_1, d_2 и им конгруэнтные (относительно периодов 4, $4i$). Учитывая, что $a_1 + a_2 + b_1 = c_1 + d_1 + d_2$, построим функцию $G(z)$ в виде (5):

$$G(z) = C \cdot \frac{\sigma(z - a_1) \cdot \sigma(z - a_2) \cdot \sigma(z - b_1)}{\sigma(z - c_1) \cdot \sigma(z - d_1) \cdot \sigma(z - d_2)} \quad (C = \text{const} \neq 0).$$

Тогда кусочно-аналитическое решение задачи с краевым условием (4) запишется в виде (6):

$$\Phi(z) = \begin{cases} \Phi^-(z) = \frac{\sigma(z-c_1)}{\sigma(z-a_1) \cdot \sigma(z-a_2)} \cdot h(z), & z \in D^-; \\ \Phi^+(z) = \frac{C \cdot \sigma(z-b_1)}{\sigma(z-d_1) \cdot \sigma(z-d_2)} \cdot h(z), & z \in D^+. \end{cases}$$

Подберем целую функцию $h(z) = C_1 \cdot \sigma(z-h_1)$ ($C_1 = \text{const}$) таким образом, чтобы функция

$$\Phi^-(z) = C_1 \cdot \frac{\sigma(z-c_1) \cdot \sigma(z-h_1)}{\sigma(z-a_1) \cdot \sigma(z-a_2)}$$

была эллиптической: $c_1 + h_1 = a_1 + a_2 \Leftrightarrow h_1 = a_1 + a_2 - c_1 = 3 - i$. Тогда кусочно-эллиптическое решение задачи запишется в виде

$$\Phi(z) = \begin{cases} C_1 \cdot \frac{\sigma(z-i) \cdot \sigma(z-(3-i))}{\sigma(z-1) \cdot \sigma(z-2)}, & z \in D^-, \\ CC_1 \cdot \frac{\sigma(z-3i) \cdot \sigma(z-(3-i))}{\sigma(z-2i) \cdot \sigma(z-3)}, & z \in D^+, \end{cases}$$

и, очевидно, будет единственным с точностью до постоянного множителя.

Рассмотрим теперь соответствующий случаю 1б) пример, когда выбор «компенсирующей» целой функции уже не является определенным.

Пример 2. Пусть коэффициентом однородной задачи является \wp -функция Вейерштрасса

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{m,n \in \mathbf{Z} \\ (m;n) \neq (0;0)}} \left[\frac{1}{(z - \Omega_{m,n})^2} - \frac{1}{\Omega_{m,n}^2} \right],$$

параллелограммы периодов которой являются прямоугольниками со сторонами, параллельными действительной и мнимой оси. В этом случае простые нули находятся в точках вида $\omega_{m,n}^\pm = \alpha(2m+1) \pm \gamma + \beta(2n+1)i$ ($0 < \gamma < \alpha$), а полюсы второго порядка – в точках $\Omega_{m,n} = 2\alpha m + 2\beta ni$ ($\alpha, \beta \in \mathbf{R}_+$, $m, n \in \mathbf{Z}$). Поскольку сумма простых нулей $\omega_{0,0}^- = \alpha - \gamma + \beta i$ и $\omega_{-1,-1}^+ = -\alpha + \gamma - \beta i$ есть полюс второго порядка $\Omega_{0,0} = 0$, то имеет место следующее представление \wp -функции Вейерштрасса в виде (5):

$$\wp(z) = C \cdot \frac{\sigma(z - (\alpha - \gamma + \beta i)) \cdot \sigma(z + (\alpha - \gamma + \beta i))}{\sigma^2(z)},$$

где постоянная C зависит от чисел α и β . Рассмотрим всевозможные варианты расположения контуров $\{L_{m,n} \mid m, n \in \mathbf{Z}\}$, при которых ограничиваемые ими области $D_{m,n}^+$ образуют двоякопериодическую структуру на плоскости, согласованную с решеткой периодов функции $\wp(z)$: $\forall m, n \in \mathbf{Z} (L_{m,n} = \{t + 2\alpha m + 2\beta ni \mid t \in L_{0,0}\})$. Для каждого варианта рассмотрим вопрос о существовании двоякопериодических (как постоянных, так и дробно-рациональных) решений.

1. Пусть область $D_{0,0}^+$ не содержит нулей и полюсов функции $\wp(z)$, т. е. $P^+ = N^+ = 0$ (случай $\chi = 0$). Тогда, согласно (3), мероморфное решение задачи запишется в виде

$$\Phi(z) = \begin{cases} h(z), & z \in D^-, \\ \frac{C \cdot \sigma(z - (\alpha - \gamma + \beta i)) \cdot \sigma(z + (\alpha - \gamma + \beta i))}{\sigma^2(z)} \cdot h(z), & z \in D^+. \end{cases}$$

При $h(z) \equiv C_1 = \text{const}$ получим единственное кусочно-эллиптическое решение

$$\Phi(z) = \begin{cases} C_1, & z \in D^-, \\ C_1 \cdot \wp(z), & z \in D^+. \end{cases}$$

2. Пусть область $D_{0,0}^+$ содержит оба нуля функции $\wp(z)$ в прямоугольнике периодов, а ее полюс принадлежит области D^- . Тогда, используя разложение (2), приведем равенство (3) к виду

$$\Phi(z) = \begin{cases} \frac{h(z)}{\sigma(z - (\alpha - \gamma + \beta i)) \cdot \sigma(z + (\alpha - \gamma + \beta i))}, & z \in D^-, \\ \frac{C \cdot h(z)}{\sigma^2(z)}, & z \in D^+. \end{cases}$$

Следуя случаю 1б) теоремы 2, построим целую функцию $h(z) = C_1 \cdot \sigma(z - h_1) \cdot \sigma(z - h_2)$ ($C_1 = \text{const}$), для которой функция $\Phi(z)$ будет эллиптической в обеих областях D^+ и D^- . Так как $(\alpha - \gamma + \beta i) + (-\alpha + \gamma - \beta i) = 0$, то $h_1 + h_2 = 0$, откуда $h_2 = -h_1$ и $h(z) = C_1 \cdot \sigma(z - h_1) \cdot \sigma(z + h_1)$. Таким образом, получим бесконечное множество кусочно-эллиптических решений вида

$$\Phi(z) = \begin{cases} C_1 \cdot \frac{\sigma(z - h_1) \cdot \sigma(z + h_1)}{\sigma(z - (\alpha - \gamma + \beta i)) \cdot \sigma(z + (\alpha - \gamma + \beta i))}, & z \in D^-, \\ CC_1 \cdot \frac{\sigma(z - h_1) \cdot \sigma(z + h_1)}{\sigma^2(z)}, & z \in D^+, \end{cases}$$

зависящее от параметра $h_1 \in \mathbb{C}$. При $h_1 = 0$, $h_1 = \alpha - \gamma + \beta i$ или $h_1 = -\alpha + \gamma - \beta i$ одна из компонент решения будет постоянной, а в остальных случаях обе компоненты будут эллиптическими дробно-рациональными функциями.

3. Пусть область $D_{0,0}^+$ содержит полюс $z = 0$ функции $\wp(z)$, а оба нуля $\wp(z)$ лежат в области D^- , что соответствует случаю $N^+ = 0, P^+ > 0$ ($\chi < 0$). Тогда равенство (3) принимает вид

$$\Phi(z) = \begin{cases} \sigma^2(z) \cdot h(z), & z \in D^-, \\ C \cdot \sigma(z - (\alpha - \gamma + \beta i)) \cdot \sigma(z + (\alpha - \gamma + \beta i)) \cdot h(z), & z \in D^+, \end{cases}$$

и определяет кусочно-целую в области $D^- \cup D^+$ функцию. Эллиптических функций среди решений нет.

4. Пусть область $D_{0,0}^+$ содержит как полюс $\Omega_{0,0} = 0$ функции $\wp(z)$, так и оба ее нуля, т. е. $P^- = N^- = 0$ ($\chi = 0$). В этом случае единственное двоякопериодическое решение задачи запишется в виде

$$\Phi(z) = \begin{cases} \frac{C_1}{\wp(z)}, & z \in D^-, \\ C_1, & z \in D^+. \end{cases}$$

5. Пусть полюс $\Omega_{0,0} = 0$ и один из нулей $\omega_{0,0}^- = \alpha - \gamma + \beta i$ функции $\wp(z)$ принадлежат области $D_{0,0}^+$, а нуль $\omega_{0,0}^+ = \alpha + \gamma + \beta i$ – области D^- (случай $\chi < 0$). Тогда равенство (3) примет вид

$$\Phi(z) = \begin{cases} \frac{\sigma^2(z)}{\sigma(z - (\alpha - \gamma + \beta i))} \cdot h(z), & z \in D^-, \\ C \cdot \sigma(z + (\alpha - \gamma + \beta i)) \cdot h(z), & z \in D^+. \end{cases}$$

Очевидно, эллиптических функций среди решений нет.

6. Один из нулей $\omega_{0,0}^- = \alpha - \gamma + \beta i$ функции $\wp(z)$ принадлежит области $D_{0,0}^+$, а другой нуль $\omega_{0,0}^+ = \alpha + \gamma + \beta i$ и полюс $\Omega_{0,0} = 0$ – области D^- (случай $\chi < 0$). В этом случае равенство (3) запишется в виде

$$\Phi(z) = \begin{cases} \frac{\sigma(z + (\alpha - \gamma + \beta i))}{\sigma(z - (\alpha - \gamma + \beta i))} \cdot h(z), & z \in D^-, \\ \frac{C}{\sigma^2(z)} \cdot h(z), & z \in D^+. \end{cases}$$

Поскольку $\alpha - \gamma + \beta i \neq -\alpha + \gamma - \beta i$, то эллиптических функций среди решений в этом случае также нет.

Заключение. В данной работе в замкнутой форме было получено решение однородной краевой задачи Римана с мероморфными коэффициентами для бесконечно связных областей, а также решен вопрос существования двоякопериодических решений задачи с эллиптическим коэффициентом, общим для всех контуров. Полученные результаты могут служить базой для исследования случая, когда коэффициенты задачи являются различными для каждого из контуров L_k ($k \in \mathbf{N}$), а также при решении неоднородной задачи Римана с мероморфными коэффициентами и свободными членами в бесконечно связных областях.

Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность рецензенту за внимательное прочтение статьи и полезные советы по улучшению представления полученных результатов.

Acknowledgements. The author is grateful to the reviewer for careful reading of the article and useful advice how to better present the results obtained.

Список использованных источников

1. Ахиезер, Н. И. О некоторых формулах обращения сингулярных интегралов / Н. И. Ахиезер // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1945. – Т. 9. – С. 275–290.
2. Говоров, Н. В. Краевая задача Римана с бесконечным индексом / Н. В. Говоров. – М.: Наука, 1986. – 240 с.
3. Гахов, Ф. Д. Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
4. Mityushev, V. V. Analytical Methods for Heat Conduction in Composites and Porous Media / V. V. Mityushev, E. V. Pesetskaya, S. V. Rogosin // Cellular and Porous Materials: Thermal Properties Simulation and Prediction / eds.: A. Öchsner, G. Murch, M. de Lemos. – Amsterdam: Wiley-VCH, 2007. – P. 124–167.
5. Чибрикова, Л. И. О граничных задачах для прямоугольника / Л. И. Чибрикова // Учен. зап. Казан. ун-та. – 1964. – Т. 123, кн. 10. – С. 15–39.
6. Аксентьева, Е. П. Задача Римана в случае двоякопериодического расположения дуг. I / Е. П. Аксентьева, И. Г. Салехова // Учен. зап. Казан. ун-та. – 2008. – Т. 150, кн. 4. – С. 66–79.
7. Зверович, Э. И. Краевые задачи теории аналитических функций в гёльдеровских классах на римановых поверхностях / Э. И. Зверович // Успехи мат. наук. – 1971. – Т. 26, вып. 1 (157). – С. 113–179.
8. Зверович, Э. И. Ядро Бекенке – Штейна и решение в замкнутой форме краевой задачи Римана на торе / Э. И. Зверович // Докл. АН СССР. – 1969. – Т. 188, № 1. – С. 27–30.
9. Дегтяренко, Н. А. Двоякопериодический мероморфный аналог ядра Коши и некоторые его применения / Н. А. Дегтяренко // Изв. высш. учеб. заведений. Математика. – 1999. – № 8. – С. 11–19.
10. Ахиезер, Н. И. Элементы теории эллиптических функций / Н. И. Ахиезер. – М.: Наука, 1970. – 304 с.

References

1. Akhiezer N. I. On some inversion formulas for singular integrals. *Izvestiya AN SSSR. Seriya matematicheskaya* [Mathematics of the USSR - Izvestiya], 1945, vol. 9, pp. 275–290. (in Russian).
2. Govorov N. V. *Riemann's boundary problem with infinite index*. Moscow, Nauka Publ., 1986. 240 p. (in Russian).
3. Gakhov F. D. *Boundary value problems*. Moscow, Nauka Publ., 1977. 640 p. (in Russian).
4. Mityushev V. V., Pesetskaya E. V., Rogosin S. V. Analytical Methods for Heat Conduction in Composites and Porous Media. Öchsner A., Murch G., de Lemos M. (eds.). *Cellular and Porous Materials: Thermal Properties Simulation and Prediction*. Amsterdam, Wiley-VCH, 2007, pp. 124–167. Doi: 10.1002/9783527621408.ch5
5. Chibrikova L. I. Boundary value problems for a rectangle. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta* [Bulletin of the Kazan University], 1964, vol. 123, book 10, pp. 15–39. (in Russian).

6. Aksent'eva E. P., Salekhova I. G. Riemann problem in a case of doubly periodic arrangements of arches. I. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta* [Bulletin of the Kazan University], 2008, vol. 150, book 4, pp. 66–79. (in Russian).
7. Zverovich E. I. Boundary value problems in the theory of analytic functions in Hölder classes on Riemann surfaces. *Russian Mathematical Surveys*, 1971, vol. 26, no. 1, pp. 117–192. Doi: 10.1070/RM1971v026n01ABEH003811
8. Zverovich E. I. The Behnke – Stein kernel and closed-form solution of Riemann's boundary value problem on the torus. *Doklady Akademii nauk SSSR* [Proceedings of the Academy of Sciences of the USSR], 1969, vol. 188, no. 1, pp. 27–30. (in Russian).
9. Degtyarenko N. A. A doubly periodic meromorphic analogue of the Cauchy kernel and some of its applications. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Matematika* [Russian Mathematics], 1999, no. 8, pp. 11–19. (in Russian).
10. Akhiezer N. I. *Elements of theory of elliptic functions*. Moscow, Nauka Publ., 1970. 304 p. (in Russian).

Информация об авторе

Юхимук Михаил Михайлович – старший преподаватель кафедры высшей математики, Брестский государственный технический университет (ул. Московская, 267, 224017, г. Брест, Республика Беларусь). E-mail: umm@tut.by

Information about the author

Yukhimuk Mikhail Mikhailovich – Senior Lecturer of the Department of Higher Mathematics, Brest State Technical University (267, Moskovskaya Str., 224017, Brest, Republic of Belarus). E-mail: umm@tut.by

Для цитирования

Юхимук, М. М. Однородная краевая задача Римана с мероморфными коэффициентами для бесконечно связанных областей / М. М. Юхимук // Вес. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2017. – № 2. – С. 24–35.

For citation

Yukhimuk M. M. Homogeneous Riemann boundary value problem with meromorphic coefficients for infinitely connected domains. *Vesti Natsyional'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series], 2017, no. 2, pp. 24–35. (in Russian).

Л. И. Минченко, Д. Е. Бережнов

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь

О ПСЕВДОЛИПШИЦЕВОСТИ МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ

Исследование свойств множества решений параметрических задач оптимизации представляет собой достаточно актуальную проблему. Значительные усилия направлены, в частности, на поиск условий различных типов обобщенной липшицевости множества решений, в частности условий их устойчивости (calmness) и псевдолипшицевости (Aubin property) [1]. Новый интересный подход к исследованию устойчивости множества решений предложен в работе М. Кановас и др. [2] в случае параметрической задачи линейного программирования и распространен Д. Клатте и Б. Куммером [3] на существенно более широкий круг задач. В данном подходе устойчивость множества решений связывается с устойчивостью некоторой ассоциированной системы, представляющей ограничение множества уровня целевой функции на множестве допустимых точек задачи. В настоящей статье предлагается расширить применение подхода [3] на исследование псевдолипшицевости множества решений; представлены некоторые достаточные условия псевдолипшицевости множества решений, а также обобщение леммы Хоффмана.

Ключевые слова: нелинейное программирование, множество решений, устойчивость, псевдолипшицевость

L. I. Minchenko, D. E. Berezhnov

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Belarus

PSEUDO-LIPSCHITZIAN CONTINUITY OF SOLUTION MAPPINGS IN PARAMETRICAL OPTIMIZATION PROBLEMS

The study of the properties of solution mappings in parametrical optimization problems represents an urgent problem. Particularly, considerable efforts are directed to finding the conditions of different types of generalized Lipschitzian continuity of solution mappings, namely their calmness and pseudo-Lipschitzian continuity (also referred to as the Aubin property) [1]. A new interesting approach to investigating the calmness of solution mappings has recently been proposed by Canovas et al. [2] for parametrical linear programming problems and applied to a much wider range of problems by Klatte and Kummer [3]. In this approach, the calmness of solution mappings is related to the calmness of an associated system representing a constraint on the level set of the objective function on the domain of the problem. In our note, we propose to expand the use of the approach [3] for investigating the pseudo-Lipschitzian continuity of solution mappings. Several sufficient conditions for the pseudo-Lipschitzian continuity of solution mappings, as well as the generalization of the Hoffman lemma are presented.

Keywords: nonlinear programming, solution mapping, calmness, pseudo-Lipschitzian continuity

1. Введение и постановка задачи. В данной статье мы рассматриваем задачу параметрической нелинейной оптимизации в конечномерных пространствах. Проблема изучения характера зависимости множества решений относительно изменений параметров представляет значительный интерес [1]. В частности, это касается наличия различных типов обобщенной и ослабленной липшицевости для многозначного отображения (solution mapping), связывающего вектор параметров с совокупностью всех решений задачи. (В дальнейшем для простоты будем говорить о зависимости множества решений от вектора параметров.) Одним из свойств ослабленной липшицевости является так называемая устойчивость относительно параметров (calmness), изучению которой посвящено достаточно много публикаций (см., напр., [1, 4–6]). Более сильной разновидностью ослабленной липшицевости является псевдолипшицевость, именуемая также свойством Обена [1]. В статьях [2, 3] предложен новый подход к исследованию устойчивости (calmness), а в [3] получены новые достаточные условия устойчивости для общей задачи оптимизации с параметрами.

Целью данного исследования является получение условий, при которых множество решений параметрической задачи оптимизации псевдолипшицево относительно вектора параметров. Для исследования псевдолипшицевости множества решений применяется подход [2, 3] и получаются достаточные условия псевдолипшицевости для задачи математического программирования.

Рассмотрим задачу $P(x)$ минимизации функции $f(x, y)$ по переменной $y \in F(x)$, где $x \in R^n$ – вектор параметров, $y \in R^m$, F – многозначное отображение, ставящее в соответствие каждому $x \in R^n$ множество допустимых точек $F(x) \subset R^m$. Множество решений данной задачи при заданном значении вектора параметров $x \in R^n$ будем обозначать через $S(x)$.

Обозначим область определения и график отображения F через $\text{dom}F = \{x \in R^n \mid F(x) \neq \emptyset\}$ и $\text{gr}F = \{(x, y) \mid y \in F(x), x \in R^n\}$ соответственно. Пусть $v \in R^s$, $C \subset R^s$, где $s = m$ или $s = n$. Через $d(v, C)$ обозначим евклидово расстояние от вектора v до множества C , через $|v|$ – евклидову норму вектора v . Под нормой вектора $(x, y) \in R^n \times R^m$ будем понимать $|(x, y)| = |x| + |y|$. Обозначим также через B открытый единичный шар, а через $V_r(z)$ – окрестность точки z радиуса r в соответствующем пространстве R^n или R^m . Будем предполагать, что многозначное отображение F замкнуто (т. е. $\text{gr}F$ – замкнутое множество в $R^n \times R^m$), $(x^0, y^0) \in \text{gr}F$ – заданная точка, функция f липшицева в окрестности (x^0, y^0) .

Введем также функцию оптимального значения

$$\varphi(x) = \inf\{f(x, y) \mid y \in F(x)\}$$

и, следуя [3], многозначное отображение L , ставящее в соответствие каждой точке $(x, \mu) \in R^n \times R$ множество $L(x, \mu) = L(x, x^0, \mu) = \{y \in F(x) \mid f(x^0, y) \leq \mu\}$.

Многозначное отображение F называется *устойчивым (calm)* в точке $(x^0, y^0) \in \text{gr}F$, если существуют положительные числа l, ε и δ такие, что

$$F(x) \cap V_\varepsilon(y^0) \subset F(x^0) + l|x - x^0|B \quad \forall x \in V_\delta(x^0). \quad (1)$$

Отметим, что при этом возможно $F(x) \cap V_\varepsilon(y^0) = \emptyset$ при $x \neq x^0$.

Многозначное отображение F называется *псевдолипшицевым* (относительно $\text{dom}F$) в точке $(x^0, y^0) \in \text{gr}F$, если существуют положительные числа l, ε и δ такие, что

$$F(\tilde{x}) \cap V_\varepsilon(y^0) \subset F(x) + l|\tilde{x} - x|B, \quad \forall x, \tilde{x} \in V_\delta(x^0), \quad (\forall x, \tilde{x} \in V_\delta(x^0) \cap \text{dom}F). \quad (2)$$

Многозначное отображение F называется *полунепрерывным снизу по Липшицу* (Lipschitz l.s.c.) в точке $(x^0, y^0) \in \text{gr}F$, если существуют положительные числа l и δ такие, что

$$d(y^0, F(x)) \leq l|x - x^0| \quad \forall x \in V_\delta(x^0). \quad (3)$$

Отметим, что из (3) следует, что $F(x) \cap V_\varepsilon(y^0) \neq \emptyset$ для любого $\varepsilon > 0$, если $|x - x^0| < \min\{\delta, \varepsilon/l\}$.

Нижним топологическим пределом (Painleve-Kuratowski lower limit) многозначного отображения F в точке $x^0 \in \text{dom}F$ называется множество $\liminf_{x \rightarrow x^0} F(x) = \{y \in R^m \mid \forall x^k \rightarrow x^0 \exists \text{ последовательность } \{y^k\} \text{ такая, что } y^k \in F(x^k) \text{ и } y^k \rightarrow y \text{ при } k = 1, 2, \dots\}$.

Многозначное отображение F будем называть *полунепрерывным снизу* (п.н.сн.) в точке $(x^0, y^0) \in \text{gr}F$, если $y^0 \in \liminf_{x \rightarrow x^0} F(x)$.

Следуя [3], наряду с многозначным отображением S и функцией $\varphi(x)$ будем рассматривать для произвольного замкнутого множества $V \subset R^m$ отображение

$$S_V(x) = \arg \min_y \{f(x, y) \mid y \in F(x) \cap V\}$$

и функцию

$$\varphi_V(x) = \min_y \{f(x, y) \mid y \in F(x) \cap V\}.$$

В работе [3] получен следующий основной результат.

У т в е р ж д е н и е. Пусть $(x^0, y^0) \in \text{gr}S$. Тогда, если

(i) отображение F устойчиво и полунепрерывно снизу по Липшицу в точке (x^0, y^0) ,

(ii) отображение L устойчиво в точке $\left(\left(x^0, \varphi(x^0)\right), y^0\right)$,

то отображение S устойчиво в точке (x^0, y^0) .

2. Основные результаты. Рассмотрим задачу $P(x)$, относительно которой приняты предположения о замкнутости многозначного отображения F и липшицевости целевой функции f в окрестности точки $(x^0, y^0) \in \text{gr}S$.

Л е м м а 1. Пусть отображение F псевдोलипшицево в точке $(x^0, y^0) \in \text{gr}S$ относительно $\text{dom}F$ с параметрами $\varepsilon, \delta, l_F > 0$ такими, что $\varepsilon > \delta l_F$, и функция f липшицева в окрестности множества $V_\delta(x^0) \times V_\varepsilon(y^0)$ с постоянной Липшица $l_f > 0$. Тогда при $V = \varepsilon l_V V_\varepsilon(y^0)$ справедливо $F(x) \cap V \neq \emptyset \quad \forall x \in V_\delta(x^0) \cap \text{dom}F$ и выполняется условие

$$\begin{aligned} \varphi(x) - \varphi_V(\tilde{x}) &\leq l_\varphi |\tilde{x} - x|, \quad \varphi(\tilde{x}) - \varphi_V(x) \leq l_\varphi |\tilde{x} - x| \\ \forall x, \tilde{x} &\in V_\delta(x^0) \cap \text{dom}F, \end{aligned} \tag{4}$$

где $l_\varphi = l_f(1 + l_F)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $F(x) \cap V = \emptyset$ при некотором $x \in V_\delta(x^0) \cap \text{dom}F$. Тогда $d(y^0, F(x)) \geq \varepsilon$. Но $y^0 \in F(x^0) \cap V_\varepsilon(y^0)$, и, следовательно, $y^0 \in F(x) + l_F |x - x^0| B$ в силу (2). Таким образом, $\varepsilon \leq d(y^0, F(x)) < l_F \delta$, что противоречит условию $\varepsilon > \delta l_F$. Следовательно, $F(x) \cap V \neq \emptyset$ для всех $x \in V_\delta(x^0) \cap \text{dom}F$.

Далее, возьмем любые $\tilde{x}, x \in V_\delta(x^0) \cap \text{dom}F$. Выберем точку $y(x) \in F(x) \cap V$ такую, что $\varphi_V(x) = f(x, y(x))$. Обозначим через $\tilde{y}(\tilde{x})$ точку из $F(\tilde{x})$, ближайшую к $y(x)$. Тогда

$$\begin{aligned} \varphi(\tilde{x}) - \varphi_V(x) &\leq f(\tilde{x}, \tilde{y}(\tilde{x})) - f(x, y(x)) \leq \\ &\leq l_f (|\tilde{x} - x| + |\tilde{y}(\tilde{x}) - y(x)|) \leq l_f (|\tilde{x} - x| + l_F |\tilde{x} - x|) = l_\varphi |\tilde{x} - x|. \end{aligned}$$

Поскольку справедливо и обратное неравенство $\varphi(x) - \varphi_V(\tilde{x}) \leq l_\varphi |\tilde{x} - x|$, то получаем (4). Лемма 1 доказана.

Т е о р е м а 1. Пусть

(i) многозначное отображение F псевдोलипшицево в точке $(x^0, y^0) \in \text{gr}S$ относительно $\text{dom}F$,

(ii) многозначное отображение L псевдोलипшицево в точке $\left(\left(x^0, \varphi(x^0)\right), y^0\right)$ относительно $\text{dom}L$.

Тогда найдутся положительное число l_s , окрестность U точки x^0 и замкнутая окрестность V точки y^0 такие, что

$$S(x) \cap V \subset S(\tilde{x}) + l_s |\tilde{x} - x| B \tag{5}$$

для всех $x, \tilde{x} \in U$ таких, что $S(x) \cap V \neq \emptyset$ и $S(\tilde{x}) \cap V \neq \emptyset$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего покажем, что для любого замкнутого $V \subset R^m$ справедливо

$$S(x) \cap V \neq \emptyset \Rightarrow S_V(x) = S(x) \cap V. \tag{6}$$

Действительно, если $S(x) \cap V \neq \emptyset$, то $\varphi(x) = \varphi_V(x)$. Следовательно,

$$S_V(x) = F(x) \cap V \cap \{y | f(x, y) = \varphi(x)\} = S(x) \cap V.$$

Возьмем числа δ, ε и множество V таким образом, чтобы они удовлетворяли условиям леммы 1. Тогда постоянная Липшица функции f в окрестности множества $V_\delta(x^0) \times V_\varepsilon(y^0)$ будет равна $l_f > 0$.

Положим $\mu^0 = \varphi(x^0)$. Поскольку F и L псевдолипшицевы в точках (x^0, y^0) и $\left(\left(x^0, \varphi(x^0)\right), y^0\right)$ с постоянными Липшица l_F и l_L соответственно, то выполняются условия

$$\begin{aligned} F(\tilde{x}) \cap V_\varepsilon(y^0) &\subset F(x) + l_F |\tilde{x} - x| B \quad \forall x, \tilde{x} \in V_\delta(x^0) \cap \text{dom} F, \\ L(\tilde{x}, \tilde{\mu}) \cap V_\varepsilon(y^0) &\subset L(x, \mu) + l_L (|\tilde{x} - x| + |\tilde{\mu} - \mu|) B \\ &\quad \forall x, \tilde{x} \in V_\delta(x^0), \quad \forall \mu, \tilde{\mu} \in V_\delta(\mu^0) \end{aligned} \quad (7)$$

таких, что $(x, \mu), (\tilde{x}, \tilde{\mu}) \in \text{dom} L$.

Построим замкнутую окрестность $U = c l(x^0 + \delta_0 B)$ точки x^0 с радиусом $\delta_0 < \delta$ таким, что для всех $x, \tilde{x} \in U$ и всех $y \in V$ выполняются неравенства

$$l_\varphi |x - \tilde{x}| \leq \delta / 4, \quad |f(x, y) - f(\tilde{x}, y)| \leq l_f |x - \tilde{x}| \leq \delta / 4. \quad (8)$$

Возьмем точки $x, \tilde{x} \in U$ такие, что $S(x) \cap V \neq \emptyset$ и $S(\tilde{x}) \cap V \neq \emptyset$. Тогда $\varphi(x) = \varphi_V(x)$, и с учетом леммы, условия которой выполнены, получим $|\varphi(\tilde{x}) - \varphi(x)| \leq l_\varphi |\tilde{x} - x|$.

Далее,

$$\begin{aligned} y \in S(x) &\Leftrightarrow (y \in F(x) \text{ и } f(x, y) \leq \varphi(x)) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (y \in F(x) \text{ и } f(x^0, y) \leq \varphi(x) + f(x^0, y) - f(x, y)) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (y \in L(x, \mu(x, y))), \end{aligned}$$

где $\mu(x, y) = \varphi(x) + f(x^0, y) - f(x, y)$, причем $(x, \mu(x, y)) \in \text{dom} L$.

В силу (4) и (8) получаем

$$\begin{aligned} \left| \mu(x, y) - \varphi(x^0) \right| &\leq \left| \varphi(x) + f(x^0, y) - f(x, y) - \varphi(x^0) \right| \leq \\ &\leq \left| \varphi(x) - \varphi(x^0) \right| + \left| f(x^0, y) - f(x, y) \right| \leq \delta / 2, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \left| \mu(\tilde{x}, y) - \varphi(x^0) \right| &\leq \left| \varphi(\tilde{x}) + f(x^0, y) - f(\tilde{x}, y) - \varphi(x^0) \right| \leq \\ &\leq \left| \varphi(\tilde{x}) - \varphi(x^0) \right| + \left| f(x^0, y) - f(\tilde{x}, y) \right| \leq \delta / 2. \end{aligned} \quad (10)$$

Следовательно, $\mu(x, y), \mu(\tilde{x}, y) \in V_\delta(\mu^0)$ и $(\tilde{x}, \mu(\tilde{x}, y)), (x, \mu(x, y)) \in \text{dom} L$. С другой стороны, $L(x, \mu(x, y)) = S(x)$ и $L(\tilde{x}, \mu(\tilde{x}, y)) = S(\tilde{x})$, а условия (9), (10) обеспечивают справедливость (7) в точках x, \tilde{x} . Тогда, в силу (7),

$$\begin{aligned} S(x) \cap V &= L(x, \mu(x, y)) \cap V \subset \\ &\subset L(\tilde{x}, \mu(\tilde{x}, y)) + l_L \left(\left| \mu(x, y) - \mu(\tilde{x}, y) \right| + \left| x - \tilde{x} \right| \right) B \subset \\ &\subset S(\tilde{x}) + l_L \left(\left| \mu(x, y) - \mu(\tilde{x}, y) \right| + \left| x - \tilde{x} \right| \right) B. \end{aligned}$$

При этом

$$\begin{aligned} &\left| \mu(x, y) - \mu(\tilde{x}, y) \right| = \\ &= \left| \varphi(x) + f(x^0, y) - f(x, y) - \varphi(\tilde{x}) - f(x^0, y) + f(\tilde{x}, y) \right| \leq \\ &\leq \left| \varphi(x) - \varphi(x^0) \right| + \left| f(\tilde{x}, y) - f(x, y) \right| \leq l_\varphi |x - \tilde{x}| + l_f |x - \tilde{x}|. \end{aligned}$$

Следовательно, окончательно получаем

$$S(x) \cap V \subset S(\tilde{x}) + l_L(1 + l_\varphi + l_f) |x - x^0| B.$$

Таким образом, (5) справедливо при $l_S = l_L(1 + l_\varphi + l_f)$. Теорема 1 доказана.

Условие (5) теоремы 1 можно рассматривать как ослабленное свойство псевдолипшицевости множества решений $S(x)$. Подобного рода ослабленное свойство псевдолипшицевости вводилось в работе [7].

Из анализа доказательства теоремы 1 вытекает, что для утверждения о классической псевдолипшицевости $S(x)$ необходимо к предположениям теоремы 1 добавить требование полунепрерывности отображения S снизу в точке $(x^0, y^0) \in \text{gr}S$. То есть справедливо

С л е д с т в и е. Пусть

- (i) отображение F псевдолипшицево в точке $(x^0, y^0) \in \text{gr}S$ относительно $\text{dom}F$,
 - (ii) отображение $L(x, \mu)$ псевдолипшицево в точке $\left((x^0, \varphi(x^0)), y^0 \right)$ относительно $\text{dom}L$,
 - (iii) отображение S полунепрерывно снизу на $\text{dom}S$ в точке (x^0, y^0) .
- Тогда найдутся положительные числа l_s, ε и δ такие, что

$$S(x) \cap V_\varepsilon(y^0) \subset S(\tilde{x}) + l_S |\tilde{x} - x| B \quad \forall x, \tilde{x} \in V_\delta(x^0) \cap \text{dom}S,$$

т. е. многозначное отображение S псевдолипшицево относительно $\text{dom}S$ в точке (x^0, y^0) .

Достаточное условие полунепрерывности снизу отображения S дает

Л е м м а 2. Пусть

- (i) отображение S равномерно ограничено в точке x^0 ,
- (ii) функция φ полунепрерывна сверху в точке x^0 ,
- (iii) $S(x^0) = \{y^0\}$.

Тогда отображение S полунепрерывно снизу в точке (x^0, y^0) относительно $\text{dom}S$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем произвольную последовательность $x^k \rightarrow x^0$ в $\text{dom}S$ и рассмотрим любую последовательность $y^k \in S(x^k) \neq \emptyset$. Вследствие равномерной ограниченности отображения S можно из $\{y^k\}$ извлечь сходящуюся подпоследовательность $\{y^{k_l}\}$, т. е. $y^{k_l} \rightarrow \tilde{y}$. При этом $\tilde{y} \in F(x^0)$ в силу замкнутости отображения F . С другой стороны, $f(x^{k_l}, y^{k_l}) = \varphi(x^{k_l})$, откуда $f(x^0, \tilde{y}) \leq \varphi(x^0)$. Таким образом, $\tilde{y} \in S(x^0)$ и, следовательно, $\tilde{y} = y^0$. Последнее справедливо для любой сходящейся подпоследовательности из $\{y^k\}$, следовательно, $y^k \rightarrow y^0$. Таким образом, S п.н.сн. в точке (x^0, y^0) . Лемма 2 доказана.

Т е о р е м а 2. Пусть

- (i) отображение F псевдолипшицево в точке $(x^0, y^0) \in \text{gr}S$ относительно $\text{dom}F$,
- (ii) отображение $L(x, \mu)$ псевдолипшицево в точке $\left((x^0, \varphi(x^0)), y^0 \right)$ относительно $\text{dom}L$,
- (iii) S равномерно ограничено в точке x^0 и $S(x^0) = \{y^0\}$.

Тогда найдутся положительные числа l_s, ε и δ такие, что

$$S(x) \cap V_\varepsilon(y^0) \subset S(\tilde{x}) + l_S |\tilde{x} - x| B \quad \forall x, \tilde{x} \in V_\delta(x^0) \cap \text{dom}F,$$

т. е. многозначное отображение S псевдолипшицево в точке (x^0, y^0) относительно $\text{dom}F$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу леммы 1, условия которой можно считать выполненными, $\varphi(x) - \varphi_V(x^0) \leq l_\varphi |x - x^0|$ для всех $x \in V_\delta(x^0) \cap \text{dom}F$. Но $\varphi_V(x^0) = \varphi(x^0)$, таким образом, из последнего неравенства следует $\limsup_{x \rightarrow x^0, x \in \text{dom}F} \varphi(x) \leq \varphi(x^0)$.

Получаем, что выполнены условия леммы 2 и отображение S п.н.сн. в (x^0, y^0) . Тогда в силу следствия S псевдолипшицево в точке (x^0, y^0) относительно $\text{dom}F$. Теорема 2 доказана.

З а м е ч а н и е 1. Следует отметить, что условие $S(x^0) = \{y^0\}$ не является слишком жестким предположением в теореме 2, поскольку известно (теорема 2 [8]), что отображение S может быть псевдолиппицевым в точке $(x^0, y^0) \in \text{gr}S$ только в случае, когда множество $S(x^0)$ состоит из одной точки.

3. Примеры. Рассмотрим задачу математического программирования $P(x)$: $f(x, y) \rightarrow \min$, $y \in F(x)$, где $F(x) = \{y \in R^m \mid h_i(x, y) \leq 0 \quad i \in I\}$, $x \in R^n$, $I = \{1, \dots, p\}$, функции f, h_i непрерывно дифференцируемы.

Следуя [9, 10], многозначное отображение F будем называть R -регулярным (относительно $\text{dom}F$) в точке $(x^0, y^0) \in \text{gr}F$, если найдутся число $\alpha > 0$ и окрестности $V(y^0)$ точки y^0 и $V(x^0)$ точки x^0 такие, что $d(y, F(x)) \leq \alpha \max\{0, h_i(x, y) \mid i \in I\}$ для всех $y \in V(y^0)$ и $x \in V(x^0) \cap \text{dom}F$.

Следующее утверждение обобщает известную лемму Хоффмана [11]. Доказательство данного утверждения представляет развитие схемы доказательства леммы Хоффмана в [9].

Л е м м а 3. Пусть $F(x) = \{y \in R^m \mid h_i(x, y) \leq 0 \quad i \in I\}$, где $h_i(x, y) = \langle a_i, y \rangle + b_i(x)$, a_i – векторы, $b_i(x)$ – скалярные функции, $I = \{1, \dots, p\}$. Тогда существует число $M = \text{const} > 0$ такое, что для любого вектора $v \in R^m$ и любого $x \in \text{dom}F$ справедливо неравенство

$$d(v, F(x)) \leq M \max\{0, \langle a_i, v \rangle + b_i(x) \mid i = 1, \dots, p\}. \quad (11)$$

Доказательство. Пусть выполнены условия леммы. Положим $h(x, y) = \max\{h_i(x, y) \mid i = 1, \dots, p\}$. Тогда $F(x) = \{y \in R^m \mid h(x, y) \leq 0\}$. Зафиксируем любую точку $x \in \text{dom}F$. Если $v \in F(x)$, то неравенство (11) выполняется при любом $M > 0$.

Пусть y – произвольная граничная точка множества $F(x)$. Известно (см., напр., [9, 12]), что нормальный конус $N_{F(x)}(y)$ к множеству $F(x)$ в точке y задается условием $N_{F(x)}(y) = \left\{ \sum_{i \in I(x, y)} \lambda_i a_i \mid \lambda_i \geq 0 \quad i \in I \right\}$, где $I(x, y) = \{i \in I \mid h_i(x, y) = 0\}$. Соответственно, множество точек $v \in R^m$ таких, что $v \notin F(x)$ и $d(v, F(x)) = |v - y|$, совпадает с множеством $\{v = y(t) \mid y(t) = y + tl, \quad l \in N_{F(x)}(y), \quad |l| = 1\}$, причем $t = d(y(t), F(x))$.

Тогда, обозначив $N(x, y) = \{l \in R^m \mid l \in N_{F(x)}(y), \quad |l| = 1\}$, для каждого $l \in N(x, y)$ получим

$$\begin{aligned} h(x, y(t)) &\geq \max_{i \in I(x, y)} h_i(x, y(t)) = \max_{i \in I(x, y)} \{\langle a_i, y \rangle + t \langle a_i, l \rangle + b_i(x)\} = \\ &= t \max_{i \in I(x, y)} \langle a_i, l \rangle \geq t \min_{l \in N(x, y)} \max_{i \in I(x, y)} \langle a_i, l \rangle = t \delta(x, y). \end{aligned} \quad (12)$$

Покажем, что $\delta(x, y) > 0$. Предположим противное, т. е. что $\delta(x, y) \leq 0$. Тогда найдется вектор $l^0 \in N(x, y)$ такой, что

$$\delta(x, y) = \max_{i \in I(x, y)} \langle a_i, l^0 \rangle \leq 0. \quad (13)$$

Так как $h_i(x, y) < 0$ при $i \notin I(x, y)$, то вследствие непрерывности функций $h_i(x, y)$ по y существует число $t_0 > 0$ такое, что $h_i(x, y + tl^0) = \langle a_i, y \rangle + b_i(x) + t \langle a_i, l^0 \rangle < 0$ при всех $i \notin I(x, y)$ для всех положительных $t \leq t_0$. Следовательно, поскольку $y + tl^0 \notin F(x)$ при всех $t > 0$ и $h(x, y + tl^0) = \max_{i \in I(x, y)} h_i(x, y + tl^0)$ при всех $t \in (0, t_0]$, то при положительных $t \leq t_0$ справедливо

$$\begin{aligned} 0 < h(x, y + tl^0) &= \max_{i \in I(x, y)} h_i(x, y + tl^0) = \\ &= \max_{i \in I(x, y)} \{\langle a_i, y \rangle + t \langle a_i, l^0 \rangle + b_i(x)\} = \\ &= t \max_{i \in I(x, y)} \langle a_i, l^0 \rangle = t \delta(x, y) \leq 0. \end{aligned}$$

Полученное противоречие говорит о том, что $\delta(x, y) > 0$.

Положим

$$\tilde{\Lambda}(x, y) = \left\{ \lambda \in R^p \mid \lambda_j \geq 0 \quad j \in I(x, y), \quad \lambda_j = 0 \quad j \notin I(x, y), \quad \left| \sum_{j \in I(x, y)} \lambda_j a_j \right| = 1 \right\}.$$

Тогда

$$\delta(x, y) = \min_{l \in N(x, y)} \max_{i \in I(x, y)} \langle a_i, l \rangle = \min_{\lambda \in \tilde{\Lambda}(x, y)} \max_{i \in I(x, y)} \langle a_i, \sum_{j \in I(x, y)} \lambda_j a_j \rangle.$$

Так как $\delta(x, y)$ определяется множеством $I(x, y)$ и существует лишь конечное число подмножеств множества $I = \{1, \dots, p\}$, то $\delta(x, y) \geq \delta > 0$, когда y пробегает все граничные точки множества $F(x)$, а x пробегает все точки $\text{dom}F$. Поскольку любая точка $v \notin F(x)$ представима в виде $v = y + tl$, где $l \in N_{F(x)}(y)$, $|l| = 1$, $t > 0$, y – граничная точка $F(x)$, то из (12) следует, что для любого $v \notin F(x)$ справедливо $h(x, v) \geq \delta t \geq \delta d(v, F(x))$, откуда вытекает утверждение леммы.

П р и м е р 1. Положим $f(x, y) = \langle c(x), y \rangle$, $h_i(x, y) = \langle a_i, y \rangle + b_i(x)$, где a_i – векторы, $c(x)$ – векторная функция, $b_i(x)$ – функции. Пусть $(x^0, y^0) \in \text{gr}S$. Тогда отображение F R -регулярно относительно $\text{dom}F$ в силу леммы 3 и, значит, [10, 13] псевдолипшицево в точке (x^0, y^0) относительно $\text{dom}F$. С другой стороны, $L(x, \mu) = \{y \in F(x) \mid \langle c(x^0), y \rangle \leq \mu\}$ удовлетворяет условиям леммы 3, и в силу этой леммы отображение L является R -регулярным в $((x^0, \mu^0), y^0)$ относительно $\text{dom}L$, а значит, псевдолипшицевым в точке $((x^0, \mu^0), y^0)$ относительно $\text{dom}L$, где $\mu^0 = \varphi(x^0)$. Таким образом, условия теоремы 1 выполнены и справедливо (5).

Если дополнительно потребовать равномерной ограниченности $S(x)$ или $F(x)$ в точке x^0 и $S(x^0) = \{y^0\}$, то в силу теоремы 2 отображение S будет псевдолипшицевым в (x^0, y^0) .

З а м е ч а н и е 2. Хотя лемма 3 играет важную роль в примере 1, тем не менее она неприменима непосредственно к отображению S и сама по себе не может обеспечить псевдолипшицевость множества решений.

Следующий пример показывает, что для утверждения о псевдолипшицевости множества решений $S(x)$ существенны требования равномерной ограниченности и однозначности (или полунепрерывности снизу) отображения S .

П р и м е р 2. Пусть $y_2 - xy_1 \rightarrow \min$, $|y_1| \leq 1$, $|y_2| \leq 1$, $x \in R, y \in R^2$. Тогда $S(x) = \{(-1, -1)\}$ при $x < 0$, $S(0) = \{(y_1, -1) \mid |y_1| \leq 1\}$ и $S(x) = \{(1, -1)\}$ при $x > 0$. Многозначное отображение S не является псевдолипшицевым в точке $(0, (0, -1))$, в которой $S(x^0) \neq \{y^0\}$ и не выполнено условие полунепрерывности S снизу.

Список использованных источников

1. Rockafellar, R. T. Variational Analysis / R. T. Rockafellar, R.J.-B. Wets. – Berlin: Springer, 1998. – 732 p.
2. Calmness of the argmin mapping in linear semi-infinite optimization / M. J. Canovas [et al.] // J. on Optimization Theory and Applications. – 2014. – Vol. 160. – P. 111–126.
3. Klatte, D. On calmness of the argmin mapping in parametric optimization problems / D. Klatte, B. Kummer // J. on Optimization Theory and Applications. – 2015. – Vol. 165, № 3. – P. 708–719.
4. Henrion, R. Calmness of constraint systems with applications / R. Henrion, J. Outrata // Math. Programming. – 2005. – Vol. 104, № 2/3. – P. 437–464.
5. Ioffe, A. D. On metric and calmness qualification conditions in subdifferential calculus / A. D. Ioffe, J. Outrata // Set-Valued Analysis. – 2008. – Vol. 16. – P. 199–227.
6. Dontchev, A. L. Implicit functions and solution mappings / A. L. Dontchev, R. T. Rockafellar. – New York: Springer, 2009. – 574 p.
7. Shu Lu. Implications of the constant rank constraint qualification / Shu Lu // Math. Programming. – 2009. – Vol. 126. – P. 365–392.
8. Klatte, D. Aubin property and uniqueness of solutions in cone constrained optimization / D. Klatte, B. Kummer // Math. Methods of Operational Research. – 2013. – Vol. 77, № 3. – P. 291–304.

9. Федоров, В. В. Численные методы максимина / В. В. Федоров. – М.: Наука, 1979. – 280 с.
10. Luderer, B. Multivalued analysis and nonlinear programming problems with perturbations / B. Luderer, L. Minchenko, T. Satsura. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2002. – 207 p.
11. Hoffman, A. J. On approximate solutions of systems of linear inequalities / A. J. Hoffman // J. of Research of Natl. Bureau Stand. – 1952. – Vol. 49, № 4. – P. 263–265.
12. Пшеничный, Б. Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи / Б. Н. Пшеничный. – М.: Наука, 1980. – 320 с.
13. Minchenko, L. I. On second order derivatives of value functions / L. I. Minchenko, A. N. Tarakanov // Optimization. – 2015. – Vol. 64, № 2. – P. 389–407.

References

1. Rockafellar R. T., Wets R. J.-B. *Variational analysis*. Springer, Berlin, 1998. 732 p. Doi: 10.1007/978-3-642-02431-3
2. Canovas M. J., Hantoute A., Parra J., Toledo F. J. Calmness of the argmin mapping in linear semi-infinite optimization. *Journal on Optimization Theory and Applications*, 2014, vol. 160, pp. 111–126. Doi: 10.1007/s10957-013-0371-z
3. Klatte D., Kummer B. On calmness of the argmin mapping in parametric optimization problems. *Journal on Optimization Theory and Applications*, 2014, vol. 165, no. 3, pp. 708–719. Doi: 10.1007/s10957-014-0643-2
4. Henrion R., Outrata J. Calmness of constraint systems with applications. *Mathematical Programming*, 2005, vol. 104, no. 2-3, pp. 437–464. Doi: 10.1007/s10107-005-0623-2
5. Ioffe A. D., Outrata J. On metric and calmness qualification conditions in subdifferential calculus. *Set-Valued Analysis*, 2008, vol. 16, pp. 199–227. Doi: 10.1007/s11228-008-0076-x
6. Dontchev A. L., Rockafellar R. T. *Implicit functions and solution mappings*. New York, Springer, 2009. 574 p. Doi: 10.1007/978-0-387-87821-8
7. Shu Lu. Implications of the constant rank constraint qualification. *Mathematical Programming*, 2009, vol. 126, pp. 365–392. Doi: 10.1007/s10107-009-0288-3
8. Klatte D., Kummer B. Aubin property and uniqueness of solutions in cone constrained optimization. *Mathematical Methods of Operational Research*, 2013, vol. 77, no. 3, pp. 291–304. Doi: 10.1007/s00186-013-0429-6
9. Fedorov V. V. *Numerical Maximilian Methods*. Moscow, Nauka Publ., 1979. 280 p. (in Russian).
10. Luderer B., Minchenko L., Satsura T. *Multivalued analysis and nonlinear programming problems with perturbations*. Dordrecht, Kluwer Acad. Publ., 2002. 207 p. Doi: 10.1007/978-1-4757-3468-3
11. Hoffman A. J. On approximate solutions of systems of linear inequalities. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, 1952, vol. 49, no. 4, pp. 263–265.
12. Pshenichnyi B. N. *Convex Analysis and Extremum Problems*. Moscow, Nauka Publ., 1980. 320 p. (in Russian).
13. Minchenko L. I., Tarakanov A. N. On second order derivatives of value functions. *Optimization*, 2015, vol. 64, no. 2, pp. 389–407.

Информация об авторах

Минченко Леонид Иванович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры информатики, Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (ул. П. Бровки, 6, 220013, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: inform@bsuir.by

Бережнов Даниил Евгеньевич – ассистент, кафедры информатики, Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (ул. П. Бровки, 6, 220013, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: daniilberezhnov@gmail.com

Для цитирования

Минченко, Л. И. О псевдолипшицевости множества решений параметрических задач оптимизации / Л. И. Минченко, Д. Е. Бережнов // Вест. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2017. – № 2. – С. 36–43.

Information about the authors

Minchenko Leonid Ivanovich – D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Professor of the Department of Informatics, Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (P. Brovka Str., 6, 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: inform@bsuir.by

Berezhnov Daniil Evgenyevich – Assistant of the Department of Informatics, Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (P. Brovka Str., 6, 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: daniilberezhnov@gmail.com

For citation

Minchenko L. I., Berezhnov D. E. Pseudo-lipschitzian continuity of solution mappings in parametrical optimization problems. *Vestsi Natsyional'nai akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series], 2017, no. 2, pp. 36–43. (in Russian).

А. М. Гальмак¹, А. Д. Русаков²¹Могилевский государственный университет продовольствия, Могилев, Беларусь²Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь

О ПОЛИАДИЧЕСКОЙ ОПЕРАЦИИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

В статье продолжается изучение полиадической операции $\eta_{s, \sigma, k}$, которая была определена ранее на декартовой степени A^k n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$ с помощью подстановки $\sigma \in S_k$ и n -арной операции η . Частным случаем полиадической операции $\eta_{s, \sigma, k}$ является l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$, которую один из авторов определил для любых целых $k \geq 2$, $l \geq 2$ и любой подстановки σ множества $\{1, \dots, k\}$ на k -й декартовой степени A^k полугруппы A . В свою очередь, частными случаями l -арной операции $[]_{l, \sigma, k}$ являются две полиадические операции Э. Поста, одну из которых он определил на декартовой степени симметрической группы, вторую – на декартовой степени полной линейной группы над полем комплексных чисел. В статье приведены новые результаты об операции $\eta_{s, \sigma, k}$. В частности, получено новое доказательство ассоциативности этой полиадической операции.

Ключевые слова: полиадическая операция, ассоциативность, подстановка, группоид, полугруппа

A. M. Gal'mak¹, A. D. Rusakov²¹Mogilev State University of Food Technologies, Mogilev, Belarus²Francisk Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus

POLYADIC OPERATION OF SPECIAL TYPE

In the article the authors continue to study the polyadic operation $\eta_{s, \sigma, k}$ that was earlier defined at the Cartesian power A^k of the n th groupoid $\langle A, \eta \rangle$ by the substitution of $\sigma \in S_k$ and the n th operation η . The special case of the polyadic operation $\eta_{s, \sigma, k}$ is the l th operation $[]_{l, \sigma, k}$ that is defined by one of the authors for any integer $k \geq 2$, $l \geq 2$ and for any substitution of the σ set $\{1, \dots, k\}$ at the Cartesian power A^k of the semigroup A . In turn, the special case of the l th operation $[]_{l, \sigma, k}$ consists of two polyadic operations by E. Post, one of which he defined at the Cartesian power of the symmetric group and the second – at the Cartesian power of the general linear group over the field of complex numbers. The properties of the operations $\eta_{s, \sigma, k}$ are studied in the article. In particular, a new proof of the associativity of the polyadic operation $\eta_{s, \sigma, k}$ was obtained.

Keywords: polyadic operation, associativity, substitution, groupoid, semi-group

Введение. Полиадическая операция $\eta_{s, \sigma, k}$ была определена в [1] следующим образом.

Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арный группоид, $n \geq 2$, $s \geq 1$, $l = s(n - 1) + 1$, $k \geq 2$, $\sigma \in S_k$. Определим на A^k вначале n -арную операцию

$$\begin{aligned} \eta_{1, \sigma, k}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n) &= \eta_{1, \sigma, k}((x_{11}, \dots, x_{1k}) \dots (x_{n1}, \dots, x_{nk})) = \\ &= \left(\eta(x_{11}x_{2\sigma(1)} \dots x_{n\sigma^{n-1}(1)}), \dots, \eta(x_{1k}x_{2\sigma(k)} \dots x_{n\sigma^{n-1}(k)}) \right), \end{aligned} \quad (1)$$

а затем l -арную операцию

$$\begin{aligned} \eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_l) &= \eta_{s, \sigma, k}((x_{11}, \dots, x_{1k}) \dots (x_{l1}, \dots, x_{lk})) = \\ &= \eta_{1, \sigma, k}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{n-1} \eta_{1, \sigma, k}(\mathbf{x}_n \dots \mathbf{x}_{2(n-1)} \eta_{1, \sigma, k}(\dots \\ &\dots \eta_{1, \sigma, k}(\mathbf{x}_{(s-2)(n-1)+1} \dots \mathbf{x}_{(s-1)(n-1)} \eta_{1, \sigma, k}(\mathbf{x}_{(s-1)(n-1)+1} \dots \mathbf{x}_{s(n-1)+1})) \dots))). \end{aligned} \quad (2)$$

При $s = 1$ l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ совпадает с n -арной операцией $\eta_{1, \sigma, k}$.

Частными случаями l -арной операции $\eta_{s, \sigma, k}$ являются две полиадические операции, которые Э. Пост определил в [2]. Одна из них была определена им на декартовой степени симметрической группы, вторая – на декартовой степени полной линейной группы над полем комплексных чисел.

Конструкция, которую Э. Пост использовал при построении своих полиадических операций, допускает различные обобщения. Некоторые из таких обобщений реализованы в книге [3], где любых целых $k \geq 2$, $l \geq 2$ и любой подстановки σ множества $\{1, \dots, k\}$ на k -й декартовой степени A^k полугруппы A определена l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$, частными случаями которой являются отмеченные выше полиадические операции Э. Поста. Обе эти операции и почти все их обобщения характеризуются тем, что в определении каждой из них присутствует бинарная операция. В связи с этим возникает необходимость определения и изучения обобщений, в которых бинарная операция заменяется полиадической операцией арности больше двух. Такие полиадические операции были определены в работе [1]. В данной статье продолжается изучение полиадической операции $\eta_{s, \sigma, k}$. Проверка читателями приводимых далее в статье выкладок существенно упрощается, если элементы декартовой степени A^k представлять столбцами.

1. Используемые результаты. Явный вид l -арной операции $\eta_{s, \sigma, k}$ описывает

Т е о р е м а 1 [1]. *Если*

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_i &= (x_{i1}, \dots, x_{ik}), \quad i = 1, 2, \dots, l, \\ \eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_l) &= (y_1, \dots, y_k), \end{aligned}$$

то для любого $j \in \{1, \dots, k\}$ компонента y_j находится по формуле

$$\begin{aligned} y_j &= \eta(x_{1j}x_{2\sigma(j)} \dots x_{(n-1)\sigma^{n-2}(j)} \eta(x_{n\sigma^{n-1}(j)} \dots x_{(2(n-1))\sigma^{2(n-1)-1}(j)} \eta(\dots \\ &\dots \eta(x_{((s-1)(n-1)+1)\sigma^{(s-1)(n-1)}(j)} \dots x_{(s(n-1)+1)\sigma^{s(n-1)}(j)} \dots))). \end{aligned} \quad (3)$$

З а м е ч а н и е 1. Если n -арная операция η ассоциативна, то (3) может быть переписано следующим образом:

$$y_j = \eta(x_{1j}x_{2\sigma(j)} \dots x_{(s(n-1)+1)\sigma^{s(n-1)}(j)}) = \eta(x_{1j}x_{2\sigma(j)} \dots x_{l\sigma^{l-1}(j)}). \quad (4)$$

Если η – бинарная операция, обозначаемая символом \circ , то бинарная операция $\eta_{1, \sigma, k}$ совпадает с бинарной операцией \circ , а l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$, где $l = s + 1$, совпадает с $(s + 1)$ -арной операцией $[]_{s+1, \sigma, k}$ из [4]. При этом равенства (1)–(4) принимают вид

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{x}_2 &= (x_{11}, \dots, x_{1k}) \overset{\sigma}{\circ} (x_{21}, \dots, x_{2k}) = (x_{11}x_{2\sigma(1)}, \dots, x_{1k}x_{2\sigma(k)}), \\ [\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_l]_{l, \sigma, k} &= \mathbf{x}_1 \overset{\sigma}{\circ} (\mathbf{x}_2 \overset{\sigma}{\circ} (\dots (\mathbf{x}_{l-2} \overset{\sigma}{\circ} (\mathbf{x}_{l-1} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{x}_l)) \dots)), \\ y_j &= x_{1j} \left(x_{2\sigma(j)} \left(\dots \left(x_{s\sigma^{s-1}(j)} x_{(s+1)\sigma^s(j)} \right) \dots \right) \right), \\ y_j &= x_{1j} x_{2\sigma(j)} \dots x_{(s+1)\sigma^s(j)} = x_{1j} x_{2\sigma(j)} \dots x_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} x_{l\sigma^{l-1}(j)}. \end{aligned}$$

Для сокращения записей в правых частях последних двух равенств символ операции \circ не указан. Заметим, что именно последнее равенство использовалось в [3, определение 3.1.4] для определения l -арной операции $[]_{l, \sigma, k}$ на k -й декартовой степени полугруппы A .

Таким образом, l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ из [3], определенная на k -й декартовой степени полугруппы, является частным случаем l -арной операции $[]_{l, \sigma, k}$ из [4], определенной на k -й декартовой степени группоида. Последняя операция, в свою очередь, является частным случаем l -арной $\eta_{s, \sigma, k}$.

Частным случаем l -арной операции $\eta_{s, \sigma, k}$ является и n -арная операция $\tilde{\eta}$ из [3, с. 227], совпадающая с n -арной операцией $\eta_{1, (12 \dots n-1), n-1}$, с помощью которой, в свою очередь, определяется l -арная операция $\eta_{s, (12 \dots n-1), n-1}$. Укажем явный вид этой операции.

Т е о р е м а 3 [1]. Если n -арная операция η – ассоциативна, подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ ассоциативна.

Отметим, что в справедливости сформулированных выше теорем 1–3 читатель может убедиться самостоятельно, не обращаясь к [1].

2. Основные результаты. В доказательстве теоремы 3 существенно использовалась теорема 2 о совпадении l -арных операций $\eta_{s, \sigma, k}$ и $(\eta^{(s)})_{1, \sigma, k}$. Докажем более общий результат, не применяя при этом теорему 2. Для этого нам понадобится

Л е м м а 1. Пусть α – автоморфизм n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$, который обладает такими элементами $c_1, \dots, c_{n-1}, d_1, \dots, d_{n-1}$, что

$$\eta(c_1 \dots c_{n-1}x) = \eta(d_1 \dots d_{n-1}x)$$

для любого $x \in A$. Тогда

$$\eta(c_1^\alpha \dots c_{n-1}^\alpha y) = \eta(d_1^\alpha \dots d_{n-1}^\alpha y)$$

для любого $y \in A$.

Справедлива аналогичная

Л е м м а 2. Пусть α – автоморфизм n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$, который обладает такими элементами $c_1, \dots, c_{n-1}, d_1, \dots, d_{n-1}$, что

$$\eta(xc_1 \dots c_{n-1}) = \eta(xd_1 \dots d_{n-1})$$

для любого $x \in A$. Тогда

$$\eta(y c_1^\alpha \dots c_{n-1}^\alpha) = \eta(y d_1^\alpha \dots d_{n-1}^\alpha)$$

для любого $y \in A$.

Следующая теорема является полиадическим аналогом утверждения, обратного к теореме Поста – Глускина – Хоссу для полугрупп.

Т е о р е м а 4. Пусть $n \geq 2, s \geq 1, l = s(n-1) + 1, \langle A, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа; ее автоморфизм α и элементы c_1, \dots, c_{n-1} удовлетворяют условиям

$$\eta(c_1^\alpha \dots c_{n-1}^\alpha x) = \eta(c_1 \dots c_{n-1}x), \tag{5}$$

$$\eta(x^{\alpha^{l-1}} c_1 \dots c_{n-1}) = \eta(c_1 \dots c_{n-1}x) \tag{6}$$

для любого $x \in A$. Тогда l -арный группоид $\langle A, \mu \rangle$ с l -арной операцией

$$\mu(x_1 \dots x_l) = \eta(x_1 x_2^\alpha \dots x_{\alpha^{l-1}} c_1 \dots c_{n-1}) \tag{7}$$

является l -арной полугруппой. При этом биекция α является ее автоморфизмом.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применив к (5) лемму 1, убеждаемся в справедливости для любого $x \in A$ и любого целого $t \geq 2$ равенства

$$\eta(c_1^{\alpha^t} \dots c_{n-1}^{\alpha^t} x) = \eta(c_1^{\alpha^{t-1}} \dots c_{n-1}^{\alpha^{t-1}} x).$$

Используя полученное соотношение, ассоциативность n -арной операции η , а также (5), (6) и (7), будем иметь для любого $i \in \{1, \dots, l\}$

$$\begin{aligned}
 & \mu(x_1 \dots x_{i-1} \mu(x_i \dots x_{i+l-1}) x_{i+l} \dots x_{2l-1}) = \\
 & = \eta(x_1 x_2^\alpha \dots x_{i-1}^{\alpha^{i-2}} \mu(x_i \dots x_{i+l-1})^{\alpha^{i-1}} x_{i+l}^\alpha \dots x_{2l-1}^{\alpha^{l-1}} c_1 \dots c_{n-1}) = \\
 & = \eta(x_1 \dots x_{i-1}^{\alpha^{i-2}} \eta(x_i x_{i+1}^\alpha \dots x_{i+l-1}^{\alpha^{l-1}} c_1 \dots c_{n-1})^{\alpha^{i-1}} x_{i+l}^\alpha \dots x_{2l-1}^{\alpha^{l-1}} c_1 \dots c_{n-1}) = \\
 & = \eta(x_1 x_2^\alpha \dots x_{i-1}^{\alpha^{i-2}} \eta(x_i^{\alpha^{i-1}} x_{i+1}^\alpha \dots x_{i+l-1}^{\alpha^{i+l-2}} c_1^{\alpha^{i-1}} \dots c_{n-1}^{\alpha^{i-1}}) x_{i+l}^\alpha \dots x_{2l-1}^{\alpha^{l-1}} c_1 \dots c_{n-1}) = \\
 & = \eta(x_1 x_2^\alpha \dots x_{i-1}^{\alpha^{i-2}} x_i^{\alpha^{i-1}} x_{i+1}^\alpha \dots x_{i+l-1}^{\alpha^{i+l-2}} \eta(c_1^{\alpha^{i-1}} \dots c_{n-1}^{\alpha^{i-1}} x_{i+l}^\alpha) x_{i+l+1}^{\alpha^{i+1}} \dots x_{2l-1}^{\alpha^{l-1}} c_1 \dots c_{n-1}) = \\
 & = \eta(x_1 x_2^\alpha \dots x_i^{\alpha^{i-1}} x_{i+1}^\alpha \dots x_{i+l-1}^{\alpha^{i+l-2}} \eta(c_1^{\alpha^i} \dots c_{n-1}^{\alpha^i} x_{i+l}^\alpha) x_{i+l+1}^{\alpha^{i+1}} \dots x_{2l-1}^{\alpha^{l-1}} c_1 \dots c_{n-1}) = \\
 & = \eta(x_1 x_2^\alpha \dots x_i^{\alpha^{i-1}} x_{i+1}^\alpha \dots x_{i+l-1}^{\alpha^{i+l-2}} \eta((x_{i+l}^\alpha)^{\alpha^{l-1}} c_1^{\alpha^i} \dots c_{n-1}^{\alpha^i}) x_{i+l+1}^{\alpha^{i+1}} \dots x_{2l-1}^{\alpha^{l-1}} c_1 \dots c_{n-1}) = \\
 & = \eta(x_1 x_2^\alpha \dots x_i^{\alpha^{i-1}} \eta(x_{i+1}^\alpha \dots x_{i+l-1}^{\alpha^{i+l-2}} (x_{i+l}^\alpha)^{\alpha^{l-1}} c_1^{\alpha^i} \dots c_{n-1}^{\alpha^i}) x_{i+l+1}^{\alpha^{i+1}} \dots x_{2l-1}^{\alpha^{l-1}} c_1 \dots c_{n-1}) = \\
 & = \eta(x_1 x_2^\alpha \dots x_i^{\alpha^{i-1}} \eta(x_{i+1}^\alpha \dots x_{i+l-1}^{\alpha^{i+l-2}} x_{i+l}^{\alpha^{i+l-1}} c_1^{\alpha^i} \dots c_{n-1}^{\alpha^i}) x_{i+l+1}^{\alpha^{i+1}} \dots x_{2l-1}^{\alpha^{l-1}} c_1 \dots c_{n-1}) = \\
 & = \eta(x_1 x_2^\alpha \dots x_i^{\alpha^{i-1}} \eta(x_{i+1}^\alpha x_{i+2}^\alpha \dots x_{i+l}^{\alpha^{l-1}} c_1 \dots c_{n-1})^{\alpha^i} x_{i+l+1}^{\alpha^{i+1}} \dots x_{2l-1}^{\alpha^{l-1}} c_1 \dots c_{n-1}) = \\
 & = \eta(x_1 x_2^\alpha \dots x_i^{\alpha^{i-1}} \mu(x_{i+1} \dots x_{i+l})^{\alpha^i} x_{i+l+1}^{\alpha^{i+1}} \dots x_{2l-1}^{\alpha^{l-1}} c_1 \dots c_{n-1}) = \\
 & = \mu(x_1 \dots x_i \mu(x_{i+1} \dots x_{i+l}) x_{i+l+1} \dots x_{2l-1}),
 \end{aligned}$$

т. е.

$$\mu(x_1 \dots x_{i-1} \mu(x_i \dots x_{i+l-1}) x_{i+l} \dots x_{2l-1}) = \mu(x_1 \dots x_i \mu(x_{i+1} \dots x_{i+l}) x_{i+l+1} \dots x_{2l-1}).$$

Следовательно, l -арная операция η ассоциативна.

Используя ассоциативность n -арной операции η , а также (5), (6) и (7), будем иметь

$$\begin{aligned}
 & \mu(x_1 \dots x_l)^\alpha = \eta(x_1 x_2^\alpha \dots x_l^{\alpha^{l-1}} c_1 \dots c_{n-1})^\alpha = \eta(x_1^\alpha x_2^{\alpha^2} \dots x_{l-1}^{\alpha^{l-1}} x_l^\alpha c_1^\alpha \dots c_{n-1}^\alpha) = \\
 & = \eta(x_1^\alpha x_2^{\alpha^2} \dots x_{l-1}^{\alpha^{l-1}} \eta((x_l^\alpha)^{\alpha^{l-1}} c_1^\alpha \dots c_{n-1}^\alpha)) = \eta(x_1^\alpha x_2^{\alpha^2} \dots x_{l-1}^{\alpha^{l-1}} \eta(c_1^\alpha \dots c_{n-1}^\alpha x_l^\alpha)) = \\
 & = \eta(x_1^\alpha x_2^{\alpha^2} \dots x_{l-1}^{\alpha^{l-1}} \eta(c_1 \dots c_{n-1} x_l^\alpha)) = \eta(x_1^\alpha x_2^{\alpha^2} \dots x_{l-1}^{\alpha^{l-1}} \eta((x_l^\alpha)^{\alpha^{l-1}} c_1 \dots c_{n-1})) = \\
 & = \eta(x_1^\alpha (x_2^\alpha)^\alpha \dots (x_{l-1}^\alpha)^{\alpha^{l-2}} (x_l^\alpha)^{\alpha^{l-1}} c_1 \dots c_{n-1}) = \mu(x_1^\alpha x_2^\alpha \dots x_l^\alpha),
 \end{aligned}$$

т. е.

$$\mu(x_1 \dots x_l)^\alpha = \mu(x_1^\alpha x_2^\alpha \dots x_l^\alpha).$$

Следовательно, α – автоморфизм l -арной полугруппы $\langle A, \mu \rangle$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 2. Для полиадических групп результат, аналогичный теореме 4, доказан в статье [5].

Если в теореме 4 $c_1 \dots c_{n-1}$ – пустая последовательность, то равенство (5) выполняется тривиально ($x = x$), равенство (6) принимает вид $x^{\alpha^{l-1}} = x$, что равносильно тождественности подстановки α^{l-1} , а равенство (7) переписывается следующим образом:

$$\mu(x_1 \dots x_l) = \eta(x_1 x_2^\alpha \dots x_{l-1}^{\alpha^{l-2}} x_l).$$

Поэтому из теоремы 4 вытекает

С л е д с т в и е 1. Пусть $n \geq 2, s \geq 1, l = s(n - 1) + 1, \langle A, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа, α – ее автоморфизм, удовлетворяющий условию $\alpha^l = \alpha$. Тогда l -арный группоид $\langle A, \mu \rangle$ с l -арной операцией

$$\mu(x_1 \dots x_l) = \eta(x_1 x_2^\alpha \dots x_{l-1}^{\alpha^{l-2}} x_l)$$

является l -арной полугруппой. При этом биекция α является ее автоморфизмом.

З а м е ч а н и е 3. Если в следствии 1 n -арную полугруппу заменить полугруппой, то получим лемму 2.4.3 из [3].

Нам понадобится еще одна лемма, приведенная в [3].

Л е м м а 3 [3, с. 142]. Пусть A – множество, $k \geq 2, \sigma$ – подстановка из S_k, f_σ – преобразование декартовой степени A^k по правилу

$$f_\sigma: (x_1, x_2, \dots, x_k) \rightarrow (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(k)}).$$

Тогда:

1) f_σ – биекция;

2) для любого $i \geq 2$ преобразование f_σ^i множества A^k осуществляется по правилу

$$f_\sigma^i: (x_1, x_2, \dots, x_k) \rightarrow (x_{\sigma^i(1)}, x_{\sigma^i(2)}, \dots, x_{\sigma^i(k)});$$

3) $f_\sigma^i = f_{\sigma^i}$ для любого $i \geq 2$;

4) если $a \in A, \mathbf{a} = (\underbrace{a, \dots, a}_k)$, то $\mathbf{a}^{f_\sigma} = \mathbf{a}$;

5) если $\langle A, * \rangle$ – группоид, то f_σ – автоморфизм группоида $\langle A^k, * \rangle$ с операцией

$$\mathbf{x} * \mathbf{y} = (x_1, \dots, x_k) * (y_1, \dots, y_k) = (x_1 * y_1, \dots, x_k * y_k).$$

Утверждение 5) леммы 3 обобщается следующей леммой.

Л е м м а 4. Если в условиях леммы 3 $\langle A, \eta \rangle$ – n -арный группоид, то f_σ – автоморфизм n -арного группоида $\langle A^k, \eta \rangle$ с n -арной операцией η , которая определяется покомпонентно с помощью операции η :

$$\eta(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n) = \eta((x_{11}, \dots, x_{1k}) \dots (x_{n1}, \dots, x_{nk})) = (\eta(x_{11} \dots x_{n1}), \dots, \eta(x_{1k} \dots x_{nk})).$$

Следующая теорема получается с помощью леммы 4 и следствия 1.

Т е о р е м а 5. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа, σ – подстановка из S_k , удовлетворяющая условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда l -арная операция $\eta_{\sigma, \sigma, k}$ является ассоциативной и для всех

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik}) \in A^k, i = 1, 2, \dots, l$$

верны равенства

$$\eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_l) = \eta(\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2^{f_\sigma} \dots \mathbf{x}_{l-1}^{f_\sigma^{l-2}} \mathbf{x}_l) = \eta(\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2^{f_\sigma} \dots \mathbf{x}_{l-1}^{f_\sigma^{l-2}} \mathbf{x}_l), \quad (8)$$

где отображение $f_\sigma: A^k \rightarrow A^k$ определяется следующим образом:

$$f_\sigma: (x_1, x_2, \dots, x_k) \rightarrow (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(k)}).$$

Если σ – тождественная подстановка, то f_σ – тождественное отображение. Поэтому из теоремы 5 вытекает

С л е д с т в и е 2. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа, σ – тождественная подстановка из \mathbf{S}_k . Тогда l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ является ассоциативной и для всех

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik}) \in A^k, i = 1, 2, \dots, l$$

верно равенство

$$\eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_l) = \eta(\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_l),$$

т. е. l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ является производной от n -арной операцией η , которая определяется покомпонентно на A^k с помощью n -арной операции η (лемма 2.4).

Полагая в теореме 5 $n = 2$, получим следующую теорему 3.2.2 из [3] об ассоциативности l -арной операции $[\]_{l, \sigma, k}$

Т е о р е м а 6 [3, с. 144]. Пусть A – полугруппа, σ – подстановка из \mathbf{S}_k , удовлетворяющая условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда l -арная операция $[\]_{l, \sigma, k}$ является ассоциативной и для всех

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik}) \in A^k, i = 1, 2, \dots, l$$

верны равенства

$$[\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_l]_{l, \sigma, k} = \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2^{f_\sigma} \dots \mathbf{x}_{l-1}^{f_\sigma^{l-2}} \mathbf{x}_l = \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2^{f_\sigma} \dots \mathbf{x}_{l-1}^{f_\sigma^{l-2}} \mathbf{x}_l.$$

Список использованных источников

1. Гальмак, А. М. О полиадических операциях на декартовых степенях / А. М. Гальмак, А. Д. Русаков / Изв. ГГУ им. Ф. Скорины. – 2014. – № 3. – С. 35–40.
2. Post, E. L. Polyadic groups / E. L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.
3. Гальмак, А. М. Многместные операции на декартовых степенях / А. М. Гальмак. – Минск: Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.
4. Гальмак, А. М. Об операции $[\]_{l, \sigma, k}$ / А. М. Гальмак // Вестн. МДУ им. А. А. Куляшова. – 2010. – № 1 (35). – С. 34–38.
5. Гальмак, А. М. Приводимость полиадических групп / А. М. Гальмак // Докл. АН БССР. – 1985. – Т. 29, № 10. – С. 874–877.

References

1. Gal'mak A. M., Rusakov A. D. On polyadic operations on Cartesian powers. *Izvestiya Gomel'skogo gosudarstvennogo universiteta imeni F. Skoriny* [Proceedings of Francisk Scorina Gomel state university], 2014, no. 3, pp. 35–40. (in Russian).
2. Post E. L. Polyadic groups. *Transactions of the American Mathematical Society.*, 1940, vol. 48, no. 2, pp. 208–350. Doi: 10.1090/s0002-9947-1940-0002894-7
3. Gal'mak A. M. *Multiple operations at Cartesian powers*. Minsk, Publishing Center of the Belarusian State University, 2009. 265 p. (in Russian).
4. Gal'mak A. M. Operations $[\]_{l, \sigma, k}$. *Vestnik MDU imia A.A. Kuliashova. Series B. Mathematics, Physics, Biolog*, 2010, no. 1 (35), pp. 34–38. (in Russian).
5. Gal'mak A. M. Reducibility of polyadic groups. *Doklady Akademii nauk SSSR* [Proceedings of the Academy of Sciences of the USSR], 1985, vol. 29, no. 10, pp. 874–877. (in Russian).

Информация об авторах

Гальмак Александр Михайлович – доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой высшей математики, Могилевский государственный университет продовольствия (пр. Шмидта, 3, 212027, г. Могилев, Республика Беларусь). E-mail: halm54@mail.ru

Русаков Антон Дмитриевич – аспирант, Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины (ул. Советская, 104, 246019, г. Гомель, Республика Беларусь). E-mail: 5346200@gmail.com

Для цитирования

Гальмак, А. М. О полиадической операции специального вида / А. М. Гальмак, А. Д. Русаков // Вест. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2017. – № 2. – С. 44–51.

Information about the authors

Gal'mak Aleksandr Mikhailovich – D. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Head of the Department of Mathematics, Mogilev State University of Food Technologies (3, Schmidt Ave., 212027, Mogilev, Republic of Belarus). E-mail: halm54@mail.ru

Rusakov Anton Dmitrievich – Postgraduate, Francisk Scorina Gomel State University (104, Sovets-kaya Str., 246019, Gomel, Republic of Belarus). E-mail: 5346200@gmail.com

For citation

Gal'mak A. M., Rusakov A. D. Polyadic operation of special type. *Vestsi Natsyional'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series], 2017, no. 2, pp. 41–51. (in Russian).

Е. Е. Жук*Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь***СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОТНЕСЕНИЕ РЕАЛИЗАЦИЙ НЕСТАЦИОНАРНЫХ
ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ К ЗАДАНЫМ ТРЕНДОВЫМ МОДЕЛЯМ**

Исследуется проблема статистического отнесения реализаций нестационарных временных рядов к заданным трендовым моделям. Предлагается использовать решающее правило в пространстве коэффициентов трендов, определенных в одном и том же ортогональном базисе. В качестве меры эффективности принимаемых решений аналитически вычислен риск (вероятность ошибочно определить ближайший к реализации тренд). Как пример рассмотрен случай двух альтернативных трендов.

Ключевые слова: нестационарный временной ряд, трендовая модель, реализация, решающее правило, риск

E. E. Zhuk*Belarusian State University, Minsk, Belarus***STATISTICAL ASSIGNMENT OF REALIZATIONS OF NON-STATIONARY TIME SERIES
TO THE FIXED TREND MODELS**

The problem of statistical assignment of realizations of non-stationary time series to the fixed trend models is investigated. The decision rule in a space of trend coefficients determined on the same orthogonal basis is proposed and its efficiency is analytically studied. As an example the case of two alternative trends is studied.

Keywords: non-stationary time series, trend model, realization, decision rule, risk

1. Статистическое описание нестационарных временных рядов моделью с трендом в ортогональном базисе. Как известно [1–3], для статистического описания нестационарных временных рядов (ВР) используются две основные вероятностные модели: а) авторегрессии и проинтегрированного скользящего среднего; б) с трендом в ортогональном базисе. В первом случае пытаются подобрать порядок оператора конечной разности, приводящий исходный ВР к стационарному. Если это сделать не удастся, то используется трендовая модель. Здесь остановимся на последней и напомним связанные с ней основные результаты [2, 3], которые понадобятся далее.

Пусть $X = \{x_t\}_{t=1}^T$ – реализация длительности T нестационарного ВР. Согласно трендовой модели [2, 3], его отсчеты $x_t \in R$, $t = \overline{1, T}$, представимы в виде

$$x_t = f(t) + u_t, \quad (1)$$

где $f(t)$, $t = \overline{1, T}$ – детерминированная (неслучайная) функция, называемая трендом и зависящая от времени t . Случайные величины $\{u_t\}_{t=1}^T$ в (1) обычно считаются некоррелированными, имеют нулевые математические ожидания и одинаковую ограниченную дисперсию:

$$E\{u_t\} = 0, \quad D\{u_t\} = E\{u_t^2\} = \sigma^2 < +\infty; \quad (2)$$

$$E\{u_t u_l\} = 0, \quad \forall t, l = \overline{1, T}, \quad l \neq t,$$

и трактуются как ошибки измерений (наблюдений).

На практике модель (1), (2) уточняют [2, 3], представляя тренд $f(\cdot)$ разложением в ортогональном базисе:

$$f(t) = \sum_{j=1}^m b_j \phi_j(t), \quad t = \overline{1, T}, \quad (3)$$

а базисные функции $\{\phi_j(\cdot)\}_{j=1}^m$ выбираются ортогональными в следующем смысле:

$$\sum_{t=1}^T \phi_j(t) \phi_i(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j; \\ \sum_{t=1}^T \phi_j^2(t), & \text{если } i = j, \end{cases} \quad (4)$$

где T – длительность реализации X .

На практике в модели (1)–(4) количество используемых базисных функций m (порядок тренда [2, 3]) определяется требуемой точностью «подгонки», а коэффициенты $\{b_j\}_{j=1}^m$ неизвестны и подлежат оцениванию по имеющейся реализации $X = \{x_t\}_{t=1}^T$. В качестве статистических оценок $\{\hat{b}_j\}_{j=1}^m$ для $\{b_j\}_{j=1}^m$ обычно используют так называемые МНК-оценки [2, 3]:

$$\hat{b}_j = \frac{\sum_{t=1}^T x_t \phi_j(t)}{\sum_{t=1}^T \phi_j^2(t)}, \quad j = \overline{1, m}, \quad (5)$$

которые обладают следующими свойствами [2, 3].

Теорема 1. В условиях модели (1)–(4) МНК-оценки (5) несмещенные:

$$E\{\hat{b}_j\} = b_j, \quad \forall T, \quad j = \overline{1, m}, \quad (6)$$

и некоррелированы $(i, j = \overline{1, m})$:

$$\text{Cov}\{\hat{b}_i, \hat{b}_j\} = E\{(\hat{b}_i - b_i)(\hat{b}_j - b_j)\} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j; \\ \frac{\sigma^2}{\sum_{t=1}^T \phi_j^2(t)}, & \text{если } i = j. \end{cases} \quad (7)$$

Следствие 1. Пусть в условиях модели (1)–(4) случайные величины $\{u_t\}_{t=1}^T$ одинаково распределены по нормальному закону: $L\{u_t\} = N_1(0, \sigma^2)$, $t = \overline{1, T}$, тогда оценки $\{\hat{b}_j\}_{j=1}^m$ из (5) независимы в совокупности и имеют следующие нормальные законы распределения:

$$L\{\hat{b}_j\} = N_1 \left(b_j, \frac{\sigma^2}{\sum_{t=1}^T \phi_j^2(t)} \right), \quad \forall T, \quad j = \overline{1, m}. \quad (8)$$

Отметим, что базисные функции в (3), (4) следует выбирать так, чтобы они удовлетворяли асимптотике

$$\sum_{t=1}^T \phi_j^2(t) \rightarrow +\infty, \quad T \rightarrow +\infty, \quad j = \overline{1, m}. \quad (9)$$

В этом случае оценки (5) будут, исходя из (7), состоятельными в среднеквадратическом смысле и по вероятности, поскольку

$$D\{\hat{b}_j\} = E\left\{\left(\hat{b}_j - b_j\right)^2\right\} = \frac{\sigma^2}{\sum_{t=1}^T \phi_j^2(t)} \rightarrow 0, \quad T \rightarrow +\infty, \quad j = \overline{1, m}. \quad (10)$$

Требованию (9), в частности, удовлетворяют так называемые полиномиальные тренды [2, 3], когда базисная функция $\phi_j(t)$ – полином степени j по t , сам тренд $f(t)$ из (3) – полином степени m по t . Коэффициенты полиномов $\{\phi_j(t)\}_{j=1}^m$ (базисных функций) при этом выбираются исходя из условия ортогональности (4).

2. Постановка задачи отнесения и ее содержательный смысл. Пусть заданы $L \geq 2$ различных трендов $f_l(t)$, $t = \overline{1, T}$, $l \in S$, где $S = \{1, \dots, L\}$ – множество их номеров. Наблюдается реализация $X = \{x_t\}_{t=1}^T$ длительности T , описываемая моделью (1), (2) с трендом $f(t)$, $t = \overline{1, T}$, вообще говоря, отличным от трендов $\{f_l(\cdot)\}_{l \in S}$. Необходимо отнести данную реализацию X к той из заданных своими трендами $\{f_l(\cdot)\}_{l \in S}$ моделей, к которой она «ближе». При этом необходимо определить критерий (принцип), по которому будет производиться отнесение, уточнив понятие «близости» [4, 5].

По своему содержательному смыслу данная задача встречается, например, в экономике, когда необходимо определить, к какому известному статистическому типу ближе исследуемый финансовый рынок (по поведению цены) [6].

Если тренд $f(\cdot)$ для реализации X был бы известен, то в качестве меры близости $f(\cdot)$ и $\{f_l(\cdot)\}_{l \in S}$ можно было бы определить евклидово расстояние:

$$\rho(f, f_l) = \sqrt{\sum_{t=1}^T (f(t) - f_l(t))^2}, \quad l \in S, \quad (11)$$

а саму реализацию отнести к одной из моделей с номером из множества

$$D^o = \left\{ k : \rho(f, f_k) = \min_{l \in S} \rho(f, f_l) \right\}, \quad (12)$$

где учтено, что могут быть совпадающие по значению расстояния из (11) ($D^o \subseteq S$). Если таких совпадений нет (множество D^o состоит из одного элемента: $D^o = \{d^o\}$), то истинный номер $d^o \in S$ ближайшего к реализации X заданного тренда определяется как

$$d^o = \arg \min_{l \in S} \rho(f, f_l). \quad (13)$$

На практике же, поскольку тренд $f(\cdot)$ неизвестен, для решения задачи отнесения реализации X в качестве статистической оценки для d^o необходимо построить решающее правило (РП) [2, 4, 5]: $d = d(X) \in S$, в качестве меры эффективности которого, по аналогии с [4, 5], можно предложить риск

$$r_T = P\{d(X) \notin D^o\}, \tag{14}$$

где D^o – множество из (12). Если $D^o = \{d^o\}$ – один ближайший тренд в (13), то риск (14) –

$$r_T = P\{d(X) \neq d^o\}. \tag{15}$$

Риск r_T из (14), (15) имеет простой содержательный смысл – это вероятность не отнести при помощи РП $d = d(X)$ реализацию X к тому из заданных трендов $\{f_l(\cdot)\}_{l \in S}$, к которому ближе ее тренд $f(\cdot)$ в смысле расстояний (11). Чем меньше (ближе к нулю) значения риска r_T ($0 \leq r_T \leq 1$), тем эффективнее РП $d = d(X)$.

3. Решающее правило в пространстве коэффициентов трендов. Пусть тренды $\{f_l(\cdot)\}_{l \in S}$ заданы в виде разложений в одном и том же базисе $\{\phi_j(\cdot)\}_{j=1}^m$ из (4):

$$f_l(t) = \sum_{j=1}^m b_j^{(l)} \phi_j(t), \quad t = \overline{1, T}, \quad l \in S, \tag{16}$$

где $\{b_j^{(l)}\}_{j=1}^m$ – коэффициенты, определяющие l -й тренд (l -ю заданную модель, $l \in S$). Подлежащая отнесению реализация $X = \{x_t\}_{t=1}^T$ при этом описывается определенной ранее моделью (1)–(4) в том же базисе $\{\phi_j(\cdot)\}_{j=1}^m$.

С учетом условия ортогональности (4) вычислим расстояния (11) (для удобства – их квадраты):

$$\rho^2(f, f_l) = \sum_{t=1}^T (f(t) - f_l(t))^2 = \sum_{t=1}^T \left(\sum_{j=1}^m (b_j - b_j^{(l)}) \phi_j(t) \right)^2 = T \sum_{j=1}^m (b_j - b_j^{(l)})^2 \bar{\phi}_j^2, \quad l \in S, \tag{17}$$

где обозначено:

$$\bar{\phi}_j^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \phi_j^2(t), \quad j = \overline{1, m}. \tag{18}$$

Для построения РП воспользуемся подстановочным принципом [2, 4, 5] и оценим $d^o \in S$ из (13), заменив в (17) неизвестные коэффициенты $\{b_j\}_{j=1}^m$ на их МНК-оценки $\{\hat{b}_j\}_{j=1}^m$ из (5), построенные по реализации X . Получим следующую статистическую оценку (подстановочное РП [2, 4, 5]):

$$d = d(X) = \arg \min_{l \in S} \sum_{j=1}^m \bar{\phi}_j^2 (\hat{b}_j - b_j^{(l)})^2, \tag{19}$$

где $\{\bar{\phi}_j^2\}_{j=1}^m$ – величины из (18), играющие роль так называемых «весов», а само РП (19) имеет простой содержательный смысл: оно относит реализацию X к той трендовой модели, к коэффициентам которой ближе оценки $\{\hat{b}_j\}_{j=1}^m$ в смысле «взвешенного» евклидова расстояния (точнее, его

квадрата в (19)). Отметим, что использование РП (19) корректно, поскольку учтено, что статистические оценки коэффициентов $\{\hat{b}_j\}_{j=1}^m$ имеют абсолютно непрерывные распределения вероятностей [7], поэтому вероятность совпадения расстояний между $\{\hat{b}_j\}_{j=1}^m$ и $\{b_j^{(l)}\}_{j=1}^m$, $l \in S$, в (19) равна нулю и принимаемое решение однозначно.

4. Аналитическое вычисление риска. Вычислим риск r_T РП (19) в случае, когда к подлежащей отнесению реализации X наиболее близок в смысле (11) лишь один из заданных трендов $\{f_l(\cdot)\}_{l \in S}$.

Теорема 2. Пусть реализация $X = \{x_t\}_{t=1}^T$ описывается моделью (1)–(4), в которой случайные величины $\{u_t\}_{t=1}^T$ независимы в совокупности и одинаково распределены по нормальному закону $N_1(0, \sigma^2)$ ($0 < \sigma^2 < +\infty$). Тогда в предположении $D^o = \{d^o\}$ (d^o – истинный номер (13) ближайшего к X тренда) риск r_T из (15) для РП (19) удовлетворяет соотношению

$$r_T = 1 - E \left\{ \prod_{\substack{l \in S \\ l \neq d^o}} U \left(z_l + \frac{\sqrt{T}}{2\sigma} \cdot \frac{\sum_{j=1}^m \bar{\phi}_j^2 \left((b_j - b_j^{(l)})^2 - (b_j - b_j^{(d^o)})^2 \right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^m \bar{\phi}_i^2 \left(b_i^{(l)} - b_i^{(d^o)} \right)^2}} \right) \right\}, \quad (20)$$

где $U(y) = \{1, \text{если } y \geq 0; 0, \text{если } y < 0\}$ – единичная функция Хэвисайда, $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$, а стандартные нормальные случайные величины z_l , $L\{z_l\} = N_1(0, 1)$, $l \in S$, $l \neq d^o$, имеют совместное многомерное нормальное распределение [2, 7] с ковариациями

$$\begin{aligned} \text{Cov}\{z_l, z_k\} &= E\{z_l z_k\} = \\ &= \frac{\sum_{j=1}^m \bar{\phi}_j^2 \left(b_j^{(l)} - b_j^{(d^o)} \right) \left(b_j^{(k)} - b_j^{(d^o)} \right)}{\sqrt{\sum_{j=1}^m \bar{\phi}_j^2 \left(b_j^{(l)} - b_j^{(d^o)} \right)^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^m \bar{\phi}_i^2 \left(b_i^{(k)} - b_i^{(d^o)} \right)^2}}, \\ & \quad l, k \in S, \quad l \neq d^o, \quad k \neq d^o. \end{aligned}$$

Доказательство. Для риска r_T из (15) с учетом вида РП (19) будем иметь:

$$\begin{aligned} r_T &= P\{d(X) \neq d^o\} = 1 - P\{d(X) = d^o\} = \\ &= 1 - P \left\{ \bigcap_{\substack{l \in S \\ l \neq d^o}} \left\{ \sum_{j=1}^m \bar{\phi}_j^2 \left((\hat{b}_j - b_j^{(l)})^2 - (\hat{b}_j - b_j^{(d^o)})^2 \right) \geq 0 \right\} \right\}. \end{aligned} \quad (21)$$

Преобразуем встречающиеся в (21) случайные величины:

$$\xi_l = \sum_{j=1}^m \bar{\phi}_j^2 \left((\hat{b}_j - b_j^{(l)})^2 - (\hat{b}_j - b_j^{(d^o)})^2 \right) =$$

$$= 2 \sum_{j=1}^m \bar{\phi}_j^2 \left(\hat{b}_j - \frac{b_j^{(d^o)} + b_j^{(l)}}{2} \right) \left(b_j^{(d^o)} - b_j^{(l)} \right), \quad l \in S, \quad l \neq d^o. \quad (22)$$

Из (22) видно, что они линейны по статистическим оценкам $\{\hat{b}_j\}_{j=1}^m$, которые, согласно следствию 1 к теореме 1, независимы в совокупности и распределены по нормальным законам согласно (8). Поэтому сами случайные величины (22) совместно нормально распределены [2, 7] с характеристиками

$$L\{\xi_l\} = N_1 \left(\sum_{j=1}^m \bar{\phi}_j^2 \left((b_j - b_j^{(l)})^2 - (b_j - b_j^{(d^o)})^2 \right), \frac{4\sigma^2}{T} \sum_{j=1}^m \bar{\phi}_j^2 \left(b_j^{(l)} - b_j^{(d^o)} \right)^2 \right); \quad (23)$$

$$\text{Cov}\{\xi_l, \xi_k\} = \frac{4\sigma^2}{T} \sum_{j=1}^m \bar{\phi}_j^2 \left(b_j^{(l)} - b_j^{(d^o)} \right) \left(b_j^{(k)} - b_j^{(d^o)} \right),$$

$$l, k \in S, \quad l \neq d^o, \quad k \neq d^o,$$

где наряду с (8) использованы обозначения (18).

Справедливость (20) непосредственно следует из записи риска (21) через случайные величины (22)

$$r_T = 1 - P \left\{ \bigcap_{\substack{l \in S \\ l \neq d^o}} \{\xi_l \geq 0\} \right\},$$

с последующей их нормировкой [7] до стандартного нормального закона $N_1(0,1)$ с учетом найденных значений их характеристик из (23).

Практическая значимость полученного соотношения (20) заключается в том, что оно позволяет аналитически вычислить риск r_T и оценить эффективность принимаемых при помощи РП (19) решений. Однако простой вид выражение для риска (20) имеет только при $L = 2$ ($S = \{1,2\}$).

5. Случай двух альтернативных трендов. Пусть теперь заданы два ($L = 2, S = \{1,2\}$) различных, альтернативных друг другу, тренда $f_1(t)$ и $f_2(t)$, $t = \overline{1, T}$. При помощи РП (19) необходимо определить, к какому из них ближе наблюдаемая реализация $X = \{x_t\}_{t=1}^T$ с неизвестным трендом $f(t)$, $t = \overline{1, T}$, оценив при этом эффективность принимаемых решений.

В случае $L = 2$ РП (19) упрощается и через функцию Хэвисайда может быть записано как

$$d = d(X) = U \left(\sum_{j=1}^m \bar{\phi}_j^2 \left((\hat{b}_j - b_j^{(1)})^2 - (\hat{b}_j - b_j^{(2)})^2 \right) \right) + 1. \quad (24)$$

Вспользуемся доказанной выше теоремой 2 и вычислим риск РП (24).

С л е д с т в и е 2. Пусть $L = 2$, тогда в условиях теоремы 2 риск r_T РП (24) имеет вид

$$r_T = \Phi \left(-\sqrt{T} \frac{\left| \sum_{j=1}^m \bar{\phi}_j^2 \left((b_j - b_j^{(2)})^2 - (b_j - b_j^{(1)})^2 \right) \right|}{2\sigma\Delta} \right), \quad (25)$$

где $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z \exp\left(-\frac{w^2}{2}\right) dw$, $z \in R$, – функция распределения вероятностей стандартного нормального закона $N_1(0,1)$, а величина

$$\Delta = \sqrt{\sum_{i=1}^m \bar{\phi}_i^2 (b_i^{(2)} - b_i^{(1)})^2}. \tag{26}$$

Доказательство. При $L = 2$ с учетом (17), (18) величина d^o из (13)

$$d^o = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_{j=1}^m \bar{\phi}_j^2 \left((b_j - b_j^{(2)})^2 - (b_j - b_j^{(1)})^2 \right) > 0; \\ 2, & \text{иначе,} \end{cases}$$

а риск (20)

$$r_T = \begin{cases} \Phi \left(\frac{\sqrt{T}}{2\sigma} \cdot \frac{\sum_{j=1}^m \bar{\phi}_j^2 \left((b_j - b_j^{(2)})^2 - (b_j - b_j^{(1)})^2 \right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^m \bar{\phi}_i^2 (b_i^{(2)} - b_i^{(1)})^2}} \right), & \text{если } d^o = 1; \\ \Phi \left(\frac{\sqrt{T}}{2\sigma} \cdot \frac{\sum_{j=1}^m \bar{\phi}_j^2 \left((b_j - b_j^{(1)})^2 - (b_j - b_j^{(2)})^2 \right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^m \bar{\phi}_i^2 (b_i^{(1)} - b_i^{(2)})^2}} \right), & \text{если } d^o = 2, \end{cases}$$

откуда и получаем (25), (26).

Воспользуемся полученным в следствии 2 выражением для риска и проанализируем эффективность РП (24). Из (25) видно, что с ростом длительности T относимой при помощи РП (24) реализации $X = \{x_t\}_{t=1}^T$ (асимптотика (9)) эффективность решений может быть повышена так, чтобы $r_T \rightarrow 0$, $T \rightarrow +\infty$. Увеличивается она также и с ростом отличия друг от друга заданных альтернативных трендов $f_1(\cdot)$ и $f_2(\cdot)$, что определяется различием между собой коэффициентов $\{b_j^{(1)}\}_{j=1}^m$ и $\{b_j^{(2)}\}_{j=1}^m$ соответственно (значение модуля в (25) увеличивается, а риск r_T уменьшается).

Отметим, что в случае, когда тренд $f(\cdot)$, соответствующий относимой реализации X , совпадает с одним из заданных трендов: $f(\cdot) \equiv f_1(\cdot)$ ($b_j = b_j^{(1)}$, $j = \overline{1, m}$) или $f(\cdot) \equiv f_2(\cdot)$ ($b_j = b_j^{(2)}$, $j = \overline{1, m}$), то выражение для риска r_T из (25), (26) упрощается:

$$r_T = \Phi \left(-\sqrt{T} \frac{\Delta}{2\sigma} \right), \tag{27}$$

где величина Δ из (26) имеет смысл «взвешенного» евклидова расстояния между коэффициентами $\{b_j^{(1)}\}_{j=1}^m$ и $\{b_j^{(2)}\}_{j=1}^m$ трендов $f_1(\cdot)$ и $f_2(\cdot)$. Чем больше это расстояние Δ , тем эффективнее принимаемые решения (меньше риск (27)).

Отметим также, что если тренд $f(\cdot)$ подлежащей отнесению реализации равноудален от заданных трендов $f_1(\cdot)$ и $f_2(\cdot)$: $\rho(f, f_1) = \rho(f, f_2)$, то $D^o = \{1, 2\} = S$, а риск РП $d = d(X) \in S$ заведомо равен нулю: $r_T = P\{d(X) \notin D^o\} = P\{d(X) \notin S\} = 0$, и принимаемое решение не принципиально,

но соотношение (25) приводит к неверному результату: $r_T = \Phi(0) = \frac{1}{2}$ (модуль в (25) равен нулю), поскольку оно получено в предположении $D^o = \{d^o\}$ ($\rho(f, f_1) \neq \rho(f, f_2)$).

Список использованных источников

1. Андерсон, Т. Статистический анализ временных рядов: пер. с англ. / Т. Андерсон. – М.: Мир, 1976. – 759 с.
2. Харин, Ю. С. Математическая и прикладная статистика / Ю. С. Харин, Е. Е. Жук. – Минск: БГУ, 2005. – 276 с.
3. Харин, Ю. С. Практикум на ЭВМ по математической статистике / Ю. С. Харин, М. Д. Степанова. – Минск: Университетское, 1987. – 303 с.
4. Жук, Е. Е. Статистическое определение ближайших стационарных временных рядов в пространстве коэффициентов авторегрессии / Е. Е. Жук // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2016. – № 1. – С. 46–51.
5. Жук, Е. Е. Статистическое отнесение реализаций стационарных временных рядов к заданным авторегрессионным моделям / Е. Е. Жук // Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения: сб. науч. ст. – Минск: РИВШ, 2015. – С. 37–42.
6. Элдер, А. Как играть и выигрывать на бирже / А. Элдер. – М.: Альпина Паблишер, 2017. – 472 с.
7. Боровков, А. А. Теория вероятностей / А. А. Боровков. – М.: URSS: Либроком, 2016. – 652 с.

References

1. Anderson T. *Statistical Analysis of Time Series*. John Wiley & Sons, Inc., 1971. 704 p. Doi: 10.1002/9781118186428
2. Kharin Yu. S., Zhuk E. E. *Mathematical and applied statistics*. Minsk, Belarusian State University, 2005. 276 p. (in Russian).
3. Kharin Yu. S., Stepanova M. D. *Electronic computer training on mathematical statistics*. Minsk, Universitetskoe Publ., 1987. 303 p. (in Russian).
4. Statistical determination of the nearest stationary time series in a space of autoregressive coefficients. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series], 2016, no. 1, pp. 46–51. (in Russian).
5. Zhuk E. E. Statistics assignment of realizations of stationary time series to the predetermined autoregressive coefficients. *Teoriya veroyatnostei, sluchainye protsessy, matematicheskaya statistika i prilozheniya: sbornik nauchnykh statei* [Probability theory, ransom processes, mathematical statistics and applications: collection of scientific papers]. Minsk, Republican Institute of Higher Education, 2015, pp. 37–42. (in Russian).
6. Elder A. *How to play and win the stock market*. Moscow, Al'pina Publisher, 2017. 472 p. (in Russian).
7. Borovkov A. A. *Probability theory*. Moscow, URSS: Librokom Publ., 2016. 652 p. (in Russian).

Информация об авторе

Жук Евгений Евгеньевич – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математического моделирования и анализа данных факультета прикладной математики и информатики, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: zhukee@mail.ru

Information about the author

Zhuk Evgene Evgen'evich – D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Professor of the Department of Mathematical Modeling and Data Analysis, Faculty of Applied Mathematics and Computer Science, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: zhukee@mail.ru

Для цитирования

Жук, Е. Е. Статистическое отнесение реализаций нестационарных временных рядов к заданным трендовым моделям / Е. Е. Жук // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2017. – № 2. – С. 52–59.

For citation

Zhuk E. E. Statistical assignment of realizations of non-stationary time series to the fixed trend models. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series], 2017, no. 2, pp. 52–59. (in Russian).

В. А. Липницкий¹, А. И. Сергей²¹Военная академия Республики Беларусь, Минск, Беларусь
²Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь**О СТАБИЛИЗАЦИИ КОЛИЧЕСТВА ОРБИТ
КЭМЕРОНОВСКИХ МАТРИЦ БОЛЬШОГО РАНГА**

Назовем квадратную (0,1)-матрицу порядка n , среди элементов которой ровно n единиц, кэмероновской матрицей. Рассматриваются орбиты естественного действия группы $S_n \times S_n$ (квадрат симметрической группы степени n) на множестве кэмероновских матриц порядка n (независимое действие на строках и столбцах матриц). Установлено, что для фиксированного $d < n$ число таких орбит для матриц ранга $n - d$ постоянно при $n \geq 3d$ и растет с ростом n при $n < 3d$. Для каждой орбиты указан ее представитель в квазижордановой форме.

Ключевые слова: бинарная матрица, класс эквивалентности, орбита, двудольный граф, компонента связности

V. A. Lipnitski¹, A. I. Sergey²¹Military Academy of the Republic of Belarus, Minsk, Belarus
²Yanka Kupala State University of Grodno, Grodno, Belarus**ON THE STABILIZATION OF THE NUMBER OF ORBITS
OF HIGH-RANK CAMERON MATRICES**

A quadratic (0,1)-matrix of degree n with just n units among its elements will be called a Cameron matrix. The orbits of the natural action of the group $S_n \times S_n$ (the square of the symmetric group of degree n) on the set of Cameron matrices of degree n (an independent action on the rows and the columns of matrices) are considered. It is proved that for fixed $d < n$, the number of such orbits for matrices of rank $n - d$ is constant for $n \geq 3d$ and grows with the growth of n if $n < 3d$. For each orbit, its representative in a quasi-Jordan form is indicated.

Keywords: binary matrix, equivalence class, orbit, bipartite graph, connected component

Введение. Пусть P_n – множество всех квадратных (0,1)-матриц порядка n , содержащих в точности n единиц. На строках и столбцах этих матриц действует группа – квадрат $S_n^2 = S_n \times S_n$ симметрической группы S_n . Преобразующиеся при этом друг в друга матрицы называют эквивалентными. Задача классификации образующихся при указанном действии орбит возникает в различных областях науки и практики – в теории графов и теории групп подстановок [1, 2], в проблеме распознавания образов и в помехоустойчивом кодировании [3–6].

Задача подсчета количества α_n орбит, на которое разбивается множество P_n , имеет длительную и весьма интересную историю (см. [7]); составляет суть третьей из двадцати семи открытых проблем П. Кэмерона в теории групп подстановок [1]. Поэтому рассматриваемые в настоящей работе матрицы правомерно называть кэмероновскими в честь П. Кэмерона, который первым обратил внимание на важность данного класса матриц.

Проведенные исследования показывают, что общей формулы для величины α_n не существует. Тем не менее найден достаточно эффективный алгоритм вычисления α_n в зависимости от n [7, 8], также разработан практически значимый алгоритм формирования представителей орбит [9, 10].

Спектр орбит используется в задачах распознавания образов, в двумерном помехоустойчивом кодировании и других задачах. Однако стремительный рост α_n является серьезным препятствием на пути этих применений. Необходима внутренняя характеристика рассматриваемых орбит. Одним из первых шагов на этом пути стало проведение оценки мощности рассматриваемых

орбит, в частности, было установлено отсутствие полных орбит (имеющих максимально возможную мощность $(n!)^2$) при $n \geq 5$ [11].

Естественным представляется деление S_n^2 -орбит по значениям ранга их матриц – классической характеристики прямоугольных матриц над любым полем. Очевидно, матрицы, принадлежащие каждой отдельно взятой орбите, имеют один и тот же ранг. В работе [12] показано, что все матрицы ранга n образуют одну орбиту мощностью $n!$, что имеется в точности три различные орбиты матриц ранга $n-1$, $n > 2$, что при $n > 5$ имеется в точности 15 различных S_n^2 -орбит матриц ранга $n-2$. Количество орбит ранга 1 прямо зависит от наличия и количества делителей у числа n . Классификация орбит ранга 2 «тонет» в обилии разнообразных случаев и вариантов. Данная работа является непосредственным развитием [12] в сторону классификации орбит матриц большого ранга.

Основная задача. Обозначим через $F_{n,r}$ количество классов эквивалентности на множестве $P_n(0,1)$ -матриц порядка n , ранг которых равен r . Как сказано выше, $|F_{n,n}| = 1$; $|F_{n,n-1}| = 3$ при $n \geq 3$; $|F_{n,n-2}| = 15$ при $n \geq 6$. Отметим, что $|F_{5,3}| = 14$; $|F_{4,2}| = 9$. Оказывается, и в дальнейшем, с ростом n и r при фиксированном $d = n - r$, $d < n/2$, значения параметра $F_{n,r}$ вначале растут, а затем демонстрируют подобную же стабильность. Целью настоящей работы является доказательство следующего факта.

Теорема. При заданном d , $d < n$, количество орбит ранга $n - d$ с ростом n вначале растет, а затем стабилизируется, начиная с $n = 3d$, т. е. $|F_{3d,2d}| \leq |F_{n',n'-d}|$ для значений $n' > 3d$.

Доказательство опирается на взаимосвязь $(0,1)$ -матриц с графами.

Связные компоненты и квазидиагональная форма $(0,1)$ -матриц. С каждой матрицей $A \in P_n$ естественным и однозначным образом связывается неориентированный двудольный граф X_A достаточно специфического вида: одной его доле (будем считать ее левой) принадлежит n вершин, соответствующих n строкам матрицы A ; правой его доле принадлежит также n вершин, соответствующих столбцам матрицы A ; граф X_A содержит n ребер, соответствующих единицам матрицы A ; если единица расположена в i -й строке и j -м столбце матрицы A , то соответствующее ей ребро соединяет i -ю вершину левой доли с j -й вершиной правой доли в графе X_A . Степень вершины графа X_A равна весу соответствующей строки или столбца матрицы A и равна количеству единиц в этой строке или в этом столбце.

С матрицей $A \in P_n$ свяжем более прямым путем еще один граф, который будем обозначать Y_A . Это не двудольный граф. Он содержит в точности n вершин, ими являются все единицы матрицы A . Соседние единицы одной строки (одного столбца) соединяются ребром. Если в данной строке (столбце) имеется i , $i \geq 2$, единиц, то их последовательно соединяют $i-1$ ребер.

К фундаментальным понятиям теории графов относятся понятия маршрута, связности вершин, связных компонент (см., напр., [13], гл. 2). Связность вершин означает наличие маршрута из ребер между ними. Граф связан, если связны любые две его вершины. Из неравенства 4.23 [13, с. 87] следует, что во всяком связном графе с s ребрами и v вершинами имеет место соотношение

$$v \leq s + 1. \quad (1)$$

Следовательно, если граф X_A связан, то в силу (1) должно выполняться неравенство $2n \leq n + 1$ или $n \leq 1$. Таким образом, из формулы (1) следует, что при $n > 1$ реально никогда граф X_A не является связным.

Граф Y_A , наоборот, может быть связным при любом значении $n > 1$. Очевидным примером является матрица $A \in P_n$, у которой все единицы расположены в одной строке или же в одном столбце. Несложно доказывается небольшое обобщение этого примера.

Предложение 1. У всякой матрицы $A \in P_n$ ранга 1 граф Y_A связан.

Связность вершин определяет отношение эквивалентности на множестве вершин любого графа. Тем самым каждый граф, в том числе и графы X_A (а также и граф Y_A), разбивается в непесекающееся объединение своих связных компонент [13, теорема 2.2.1]. Каждая вершина графа и каждое его ребро принадлежат одной, однозначно определенной связной компоненте. Среди этих компонент могут быть и нуль-связные, т. е. не имеющие ни одного ребра, иными словами, состоящие из изолированных вершин. В графе X_A они соответствуют нулевым строкам и столбцам матрицы A . У кэмероновских матриц с условием $r(A) < n$ нулевые строки и/или столбцы обязательно существуют. В графе Y_A нуль-связными компонентами являются единицы, в единственном числе стоящие в конкретной строке и в конкретном столбце, т. е. единицы с весовым содержанием (1;1) по терминологии из [5, гл. 4]. Отсюда следует, что граф Y_A всякой матрицы $A \in P_n$ ранга n состоит в точности из n нуль-связных компонент.

Выбросим из матрицы $A \in P_n$ все нулевые строки и столбцы. Количество строк и столбцов полученной матрицы назовем упаковочными параметрами матрицы A . Некоторые особенности связных компонент графов X_A матриц $A \in P_n$ отражает следующее утверждение.

Предложение 2. Графы X_A всех матриц $A \in P_n$ ранга n , $n \geq 1$, не имеют нуль-связных компонент; эти графы состоят из n одинаковых компонент, содержащих по одному ребру и по одной вершине из каждой доли.

Пусть матрица $A \in P_n$ имеет ранг $r(A) < n$. Тогда граф X_A обязательно имеет нуль-связные компоненты; если k и t – упаковочные параметры матрицы A , то X_A содержит множество X_A^0 из $2n - k - t$ нуль-связных компонент. При этом множество X_A^{sv} действительно связных компонент – содержащих не менее двух вершин и не менее одного ребра – имеет мощность t , $1 \leq t \leq n - 1$; по крайней мере, одна из этих компонент содержит более одного ребра и более двух вершин.

Доказательство. Первая часть утверждения следует из того факта, что все матрицы $A \in P_n$ ранга n принадлежат одной-единственной S_n^2 -орбите $\langle E_n \rangle$, порожденной единичной матрицей $E_n \in P_n$ (см. [5, гл. 4] или [12]).

Вторая часть утверждения следует из того факта, что матрица $A \in P_n$, которая содержит единицы во всех строках и столбцах, может иметь только ранг n . Таким образом, матрицы $A \in P_n$ ранга $r(A) < n$ обязательно имеют нулевые строки и/или столбцы, соответствующие вершины в графе X_A обязательно имеют нулевую степень и неизбежно порождают нуль-связные компоненты. Пусть k и t – упаковочные параметры матрицы A . По крайней мере один из этих параметров имеет значение, меньшее n . В противном случае легко видеть, что матрица A должна быть перестановочной, т. е. иметь ранг n . Пусть, к примеру, $k < n$. Тогда в одной из строк матрицы A неизбежно имеется несколько единиц, соответствующая вершина левой доли графа X_A имеет степень, превосходящую 1. Тем самым завершено доказательство последней части предложения 2.

Далее рассматриваем только те матрицы $A \in P_n$, ранг которых меньше n . Связные компоненты X_A^i , $1 \leq i \leq t < n$, множества X_A^{sv} упорядочим по убыванию количества s_i ребер в них. Компоненты с одинаковым количеством ребер упорядочиваем по убыванию максимума степени вершин этих компонент. Нумерация нуль-связных компонент – по остаточному принципу.

Перенумеруем вершины обеих долей графа X_A , переходя постепенно от первой компоненты ко второй с продолжением нумерации, и так далее. Вершины каждой из долей каждой связной компоненты графа нумеруем в порядке убывания их степеней. Пусть v_i и w_i – количество вершин в левой и правой долях компоненты X_A^i , $1 \leq i \leq t$. Тогда $n \geq s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_t \geq 1$; $s_1 + s_2 + \dots + s_t = n$; $v_1 + v_2 + \dots + v_t = k$; $w_1 + w_2 + \dots + w_t = m$.

Соответствующую перестройку произведем и в матрице A . Строки и столбцы в ней переставим в соответствии с проведенной перенумерацией вершин графа X_A . В результате в S_n^2 -орбите матрицы A найдем матрицу A' с клеточно-диагональным расположением единиц:

$$A' = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & D_t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Здесь D_i , $1 \leq i \leq t$, является $(v_i \times w_i)$ -матрицей, соответствующей связной компоненте X_A^i . Тем самым доказано

Предложение 3. *Всякая матрица $A \in P_n$ ранга $r(A) < n$ и с упаковочными параметрами k и t S_n^2 -эквивалентна матрице A' из формулы (2). Количество клеток D_i в ней равно количеству связных компонент X_A^i в X_A , размеры этих клеток совпадают с мощностями долей графов X_A^i .*

Следствие 1. $r(A) = r(D_1) + r(D_2) + \dots + r(D_t)$.

Следствие 2. $t \leq r(A)$.

Матрицу A' (формула (2)) будем называть квазитордановой канонической формой матрицы $A \in P_n$.

В отличие от графа X_A граф Y_A строится легко – прямо на матрице A единицы соединяются отрезками горизонтальных и вертикальных прямых. Связные компоненты Y_A^i в точности соответствуют компонентам X_A^i из X_A^{sv} и получаются аналогичным начертанием отрезков прямых на соответствующих подматрицах D_i .

Свойства клеток D_i . Как уже отмечено выше, каждая клетка D_i , содержащая более одной единицы, по сути является связным подграфом Y_A^i . Связность влечет тот факт, что если данная единица единственна в своей строке (столбце), то в столбце (строке), в котором она расположена, должно быть более одной единицы. Отсюда для клеток D_i вытекает

Свойство 1 (ограниченность снизу весового содержания единиц клеток D_i). *Пусть единица из клетки D_i , содержащей более одной единицы, расположена в μ -й строке и в ν -м столбце матрицы $A' \in P_n$ и имеет весовое содержание $(f_\mu; g_\nu)$. Тогда $f_\mu + g_\nu \geq 3$.*

Замечание 1. Если для единиц подматрицы B матрицы $A \in P_n$ выполняются условия свойства 1, то отсюда вовсе не следует связность графа Y_B . Примером может служить подматрица B , составленная из нескольких клеток D_i , каждая из которых содержит более одной единицы.

Свойство 2 (эластичность и прочность связности клеток D_i). *Пусть клетка D_i содержит более двух единиц. В ней можно одну единицу заменить нулем, преобразованная клетка D_i' (т. е. соответствующий граф Y_i') по-прежнему останется связной. Пусть клетка D_i содержит более одной единицы. В ней можно заменить один из нулей единицей или же добавить к ней строку (столбец) с единственной единицей таким образом, что связность клетки сохраняется.*

Доказательство. Единицы матрицы D_i делятся на две категории – крайние и внутренние. Крайние – те, из которых в соответствующем этой клетке графе Y_i выходит единственное ребро. Остальные – внутренние. Очевидно, замена крайней единицы нулем не повлияет на связность остальных единиц.

Если все единицы клетки – внутренние, то в ней обязательно найдется «угловая» единица (вершина A весом 2 соответствующего графа Y_i), которая соединяется только с двумя соседними единицами одним горизонтальным и одним вертикальным ребром (вершины B и C графа Y_i). Построим путь F_1, F_2, \dots, F_t следующим образом. Положим $F_1 = B$. Так как вершина B внутренняя, существует вершина $F_2 \neq A$, соединенная с ней ребром. Ясно, что $F_2 \neq C$. Предположим,

что построен путь F_1, F_2, \dots, F_k без самопересечений и $F_j \neq C$ при $1 \leq j \leq k$. Если вершина F_k соединена ребром с C , положим $F_{k+1} = C$. Если же F_k не соединена с C , но соединена с какими-либо вершинами, отличными от F_1, F_2, \dots, F_{k-1} , выберем в качестве F_{k+1} одну из таких вершин. Будем продолжать этот процесс, пока возможно. Поскольку число вершин графа конечно, на каком-то шаге получим либо путь B, F_2, \dots, C , не проходящий через вершину A , либо путь F_1, F_2, \dots, F_t такой, что все вершины, с которыми F_t соединена ребром, содержатся в множестве F_1, F_2, \dots, F_{t-1} . Легко видеть, что в 1-м случае можно удалить вершину A (поставить нуль вместо единицы) без нарушения связности, а во 2-м – вершину F_t .

Если в клетке D_i имеются нули, то замена любого из них единицей не нарушит, как легко видеть, связности всех ее единиц. Если клетка D_i состоит из одних единиц, то добавим к ней новую строку (столбец) с одной единицей. Все единицы преобразованной клетки будут связанными друг с другом в смысле построения графа Y_i . Свойство 2 полностью доказано.

С в о й с т в о 3 (двусторонняя оценка количества единиц клеток D_i). Пусть клетка D_i расположена в k_i строках и в m_i столбцах матрицы $A' \in P_n$. Тогда количество s_i единиц клетки D_i ограничено неравенством

$$k_i + m_i - 1 \leq s_i \leq k_i m_i. \quad (3)$$

Доказательство. Произведение $k_i m_i$ равно количеству элементов подматрицы D_i . Ясно, что количество единиц не может превосходить такую величину.

Докажем левую часть двойного неравенства (3) методом математической индукции по числу s_i единиц в клетке D_i . Для $s_i = 2, 3, 4$ неравенство проверяется непосредственно. Предположим, что неравенство (3) верно для клеток D_i с числом $s_i \leq S$, где $S > 1$, и докажем его для клеток D_i с числом $s_i = S + 1$. Пусть D_i – любая из таких клеток. Согласно свойству 2 в ней можно занулить одну из единиц так, что полученная клетка D'_i останется связной и состоящей из S единиц. К ней применимо предположение индукции: если D'_i расположена в k'_i строках и в m'_i столбцах, то $k'_i + m'_i - 1 \leq S$. Согласно доказательству второй части свойства 2 возвращение от D'_i к D_i может осуществляться одним из двух путей – без добавления строки или столбца, или же с добавлением. Во втором случае получим неравенство $k'_i + m'_i - 1 \leq S < S + 1$. В первом же случае такой переход приведет к верному неравенству: $k'_i + m'_i \leq S + 1$.

Замечание 2. Границы, установленные формулой (3), точны и не улучшаемы. Клетки ранга 1 представляют примеры реализации правой границы этой формулы (см. предложение 1). Левую границу реализует, например, следующая клетка:

$$D_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть $[t]$ – целая часть вещественного числа t .

С в о й с т в о 4. Не существует клеток D_i ранга $r_i \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$ для четных n и ранга $r_i \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 2$ для нечетных n . Квазижорданова форма матриц A ранга $r(A) \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 2$ для нечетных n

и ранга $r_i \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$ для четных n содержит более одной клетки D_p , т. е. для них число клеток $t \geq 2$.

Доказательство. Отметим, что размеры k_i и m_i клетки D_i должны удовлетворять неравенствам $k_i \geq r_i$, $m_i \geq r_i$ и согласно свойству 3 количество единиц s_i в клетке D_i должно удовлетворять неравенству $s_i \geq k_i + m_i - 1$.

Пусть $n = 2v$ чётно. Тогда $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1 = v + 1 > \frac{n}{2}$. Если среди матриц $A \in P_n$ существует матрица с клеткой D_i ранга $r_i \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1 = v + 1$, то $s_i \geq k_i + m_i - 1 \geq 2(v + 1) - 1 = n + 1 > n$, чего быть не может.

Пусть $n = 2v + 1$ нечётно. Тогда $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1 = v + 1$. Если среди матриц $A \in P_n$ существует матрица с клеткой D_i ранга $r_i > \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1 = v + 1$, то $s_i \geq k_i + m_i - 1 > 2(v + 1) - 1 = n$, чего быть не может.

Вторая часть утверждения непосредственно вытекает из первой.

Замечание 3. Указанные свойством 4 границы точны. Для нечётных $n = 2v + 1$, $v \geq 1$, существуют матрицы ранга $v + 1$ с единственной клеткой D_1 . Примером такой клетки служит нижняя треугольная матрица N порядка $v + 1$ из формулы (4); в ней побочная диагональ и параллельная ей диагональ состоят из одних единиц, таким образом, в целом матрица содержит $(v + 1) + v = n$ единиц. Для чётных $n = 2v$, $v \geq 1$, существуют матрицы ранга v с единственной клеткой D_1 . Примером такой клетки служит матрица L порядка $(v \times (v + 1))$ из формулы (4) с двумя параллельными диагоналями из одних единиц.

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Формулы (4) доказывают существование матриц $A \in P_n$ с единственной клеткой D_1 при максимально допустимом для этого значении ранга $r(A)$. Предложение 1 фактически утверждает то же для матриц ранга 1. Образовавшийся промежуток в значениях ранга ликвидирует

Свойство 5. Для всех значений ранга $r(A)$ в промежутке $1 \leq r(A) \leq \frac{n}{2}$ существуют матрицы $A \in P_n$, квазижорданова форма которых содержит единственную клетку D_1 со всеми n единицами.

Доказательство. Пусть $2 \leq r \leq \frac{n}{2}$. Искомой матрицей ранга r является матрица $A \in P_n$, упаковочным содержанием которой (т. е. тем, что остается после выбрасывания из A всех нулевых строк и столбцов) является матрица $A_1 = (K N_r)$ порядка $r \times (f + r)$ для $f = n - 2r + 1$, где K – подматрица порядка $r \times f$, первые $r - 1$ строк – нулевые, а последняя, r -я, состоит из одних единиц, N_r – та же матрица N из формулы (4), только порядка r .

Каждая клетка D_i , $1 \leq i \leq t$, содержит s_i единиц, v_i строк и w_i столбцов. В силу формулы (1) эти параметры взаимосвязаны соотношением $v_i + w_i \leq s_i + 1$. Следовательно,

$$\min(v_i, w_i) \leq \left\lfloor \frac{s_i + 1}{2} \right\rfloor. \quad (5)$$

Квадратные скобки в правой части формулы (5), как уже отмечалось, означают, что берется целая часть заключенного в них числа. Ранг матрицы не может превосходить число ненулевых строк и столбцов в ней. Поэтому из формулы (5) следует

$$\text{Предложение 4. } r(D_i) \leq \left\lfloor \frac{s_i + 1}{2} \right\rfloor.$$

Общие свойства клеток у матриц с одинаково отклоняющимся от n рангом. Для доказательства очередного утверждения нам понадобится следующая

Лемма. Для любых натуральных значений t из условия $\left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor \leq d$ следует, что $t \leq 2d + 1$.

Доказательство. Для четных $t = 2\tau$, $\tau > 0$, величина $\left\lfloor t/2 \right\rfloor = \tau \leq d$. Тогда $t = 2\tau \leq 2d < 2d + 1$. Для нечетных $t = 2\tau + 1$, $\tau \geq 0$, по-прежнему величина $\left\lfloor t/2 \right\rfloor = \tau \leq d$. Тогда $t = 2\tau + 1 \leq 2d + 1$. Лемма доказана.

Предложение 5. В условиях предложений 3 и 4 положим $d = n - r$, $d_i = s_i - r_i$. Тогда выполняются следующие неравенства: $s_i \leq 2d_i + 1 \leq 2d + 1$; $r_i = r(D_i) \leq d_i + 1 \leq d + 1$.

Доказательство. Как отмечалось выше, $s_1 + s_2 + \dots + s_t = n$, $r_1 + r_2 + \dots + r_t = r = r(A) = n - d$ в данном случае. Поэтому $d_1 + d_2 + \dots + d_t = n - (n - d) = d$. Очевидно, $d_i \leq d$. Но в силу предложения 3 имеем

$$s_i - r_i \geq s_i - \left\lfloor \frac{s_i + 1}{2} \right\rfloor \geq s_i - \frac{s_i + 1}{2} = \frac{s_i - 1}{2} \geq \left\lfloor \frac{s_i}{2} \right\rfloor.$$

Следовательно, $\left\lfloor \frac{s_i}{2} \right\rfloor \leq d$ или, согласно лемме, $s_i \leq 2d + 1$. Отсюда, с учетом предложения 4, получаем и второе неравенство относительно рангов клеток.

Предложение 6. Для всех матриц $A \in P_n$ ранга $n - d$, $d \geq 1$, таких, что количество s_i единиц каждой их клетки D_i (см. предложение 3) не менее двух, выполняется условие $n \leq 3d$.

Доказательство. Для клеток D_i , введенных в предложении 2, их ранг $r(D_i) \leq \left\lfloor \frac{s_i + 1}{2} \right\rfloor$ согласно предложению 4. Из этого неравенства следует, что величина $d_i = s_i - r(D_i) \geq s_i - \left\lfloor \frac{s_i + 1}{2} \right\rfloor \geq s_i - \frac{s_i + 1}{2} = \frac{s_i - 1}{2} > 0$, поскольку $s_i \geq 2$. Более того, $d_i \geq 1$ как положительное число, являющееся разностью двух целых чисел. Тогда $2d_i + 1 \geq s_i$ и $\frac{s_i}{d_i} \leq 2 + \frac{1}{d_i} \leq 3$, поскольку $0 < \frac{1}{d_i} \leq 1$. Таким образом, $\frac{s_i}{d_i} \leq 3$ или $s_i \leq 3d_i$. Так как $\sum_{i=1}^t s_i = n$ и $\sum_{i=1}^t d_i = d$, то $n \leq 3d$, что и требовалось доказать.

Замечание 4. Отметим, что в предложении 6 при $s_i = 3$, $d_i = 1$, $1 \leq i \leq t$, достигается равенство $n = 3d$.

Следующее утверждение служит дополнением к доказанному факту.

Предложение 7. Для любых целых чисел n и d , таких что $1 \leq d < n \leq 3d$, существует матрица $A \in P_n$, имеющая ранг $r = n - d$, все клетки которой содержат не менее двух единиц.

Доказательство. Заметим, что в случае, когда $1 < n \leq 2d + 1$, согласно замечанию 3 к свойству 4, существует матрица с требуемыми параметрами, состоящая из одной клетки, которая содержит как минимум 2 единицы.

Покажем, как получить требуемую матрицу для $n > 2d + 1$. Для этого достаточно взять, например, матрицу в квазижордановой форме и состоящую из d клеток; при этом первые $n - 2d$ клеток одинаковы и имеют вид: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, оставшиеся $3d - n$ клеток также одинаковы и имеют вид: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$. Так как $n \leq 3d$, то $3d - n \geq 0$, а из того, что $n > 2d + 1$ следует, что $n - 2d > 1$, т. е. обе эти величины $n - 2d$ и $3d - n$ неотрицательны.

Убедимся, что построенная таким образом матрица обладает всеми необходимыми свойствами. Действительно, данная матрица A содержит $2(3d - n) + 3(n - 2d) = n$ единиц и имеет ранг, равный $(3d - n) + 2(n - 2d) = n - d$.

Предложение 8. Каноническая форма A' всякой матрицы $A \in P_{n'}$ ранга $n' - d$, $d \geq 1$, $n' > 3d$, $n - 3d = k \geq 1$, содержит не менее k (1×1) -клеток с одной единственной единицей.

Доказательство. Пусть в условиях сформулированного утверждения матрица A' содержит l клеток с единственным элементом 1, где $l < k$. Отбрасывание этих клеток приводит к канонической форме B' матрицы $B \in P_n$, где $n = n' - l = n' - k + (k - l) = 3d + (k - l) > 3d$. При этом каждая клетка матрицы B' содержит не менее двух единиц. Согласно предложению 5 в этом случае должно иметь место неравенство $n = n' - l \leq 3d$. Получено противоречие. Следовательно, $l \geq k$.

Доказательство теоремы. Обозначим через $O(P_n^r)$ множество всех S_n^2 -орбит матриц многообразия P_n , $n > 1$, имеющих ранг $r \geq 1$, точнее, множество однозначно их представляющих матриц A' в квазижордановой канонической форме. $F_{n,r}$ – мощность множества $O(P_n^r)$. Положим $d = n - r$. Множество $O(P_n^{n-d})$ вкладывается в множество $O(P_{n+1}^{n+1-d})$ добавлением к каждой матрице $A' \in O(P_n^{n-d})$ одной (1×1) -клетки с элементом 1. Ясно, что полученная таким образом матрица $B' \in O(P_{n+1}^{n+1-d})$. Аналогично для произвольного натурального l строится вложение $\varphi: O(P_n^{n-d}) \rightarrow O(P_{n+l}^{n+l-d})$. Такое вложение не является сюръективным для значений $n + l \leq 3d$ в силу предложения 7.

Покажем, что рассматриваемое вложение φ является взаимно-однозначным при $n \geq 3d$. Для доказательства достаточно взять $n = 3d$. При таких условиях возьмем произвольную матрицу $B' \in O(P_{n+l}^{n+l-d})$. Согласно предложению 6 в этой матрице содержится не менее l (1×1) -клеток с единственным элементом 1. Удалим из матрицы B' в точности l таких клеток. Получится матрица $A' \in P_n$, при этом ранг $r(A') = r(B') - l = n + l - d - l = n - d$. Следовательно, $A' \in O(P_n^{n-d})$. Несложно убедиться, что таким образом построенное обратное отображение также является инъективным: если B' и B_1' – различные представители множества $O(P_{n+l}^{n+l-d})$, то и построенные из них удалением l (1×1) -клеток с единственным элементом 1 матрицы A' и A_1' также будут различными элементами множества $O(P_n^{n-d})$. Теорема доказана.

Ніжэ прыведзена табліца раслічаных на камп'ютэре значеній $F_{n,r}$ для $d = n - r$ в дыяпазоне ад 0 да 5.

Значенія велічыны $F_{n,r}$ для фіксаваных $d = n - r$

		n									
$n - r$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
1		2	3	3	3	3	3	3	3	3	
2			2	9	14	15	15	15	15	15	
3				3	14	42	63	68	69	69	
4					2	25	94	217	309	336	
5						4	33	197	610	1187	

		n							
$n - r$	11	12	13	14	15	16	17		
0	1	1	1	1	1	1	1		
1	3	3	3	3	3	3	3		
2	15	15	15	15	15	15	15		
3	69	69	69	69	69	69	69		
4	341	342	342	342	342	342	342		
5	1589	1717	1744	1749	1750	1750	1750		

Заклученне. Доказана, што ліс орбіт кэмеронавскіх матрыц парадка n і ранга r пры естэственном действии групы $S_n \times S_n$ завісці толькі ад $n - r$, кслі $r \geq 2n/3$. В доказательстве использован аппарат теории графов.

Благодарности. Автор выражаєт глубокую благодарность рецензенту за внимательное прочтение статьи и полезные советы по улучшению представления полученных результатов.

Acknowledgements. The author is grateful to the reviewer for careful reading of the article and useful advice how to better present the results obtained.

Список использованных источников

1. Cameron, P. J. Problems on permutation groups [Electronic resource] / P. J. Cameron. – Mode of access: <http://www.maths.qmul.ac.uk/~pjc/pgprob.html>. – Date of access: 15.12.2013.
2. Cameron, P. J. Product action / P. J. Cameron, D. A. Gewurz, F. Merola // Discrete Math. – 2008. – Vol. 308, №. 2/3. – P. 386–394.
3. Конопелько, В. К. Классификация точечных образов и классическая проблема разбиения чисел / В. К. Конопелько, В. А. Липницкий, Н. В. Спичекова // Докл. БГУИР. – 2010. – № 8 (54). – С. 127–131.
4. Липницкий, В. А. Классификация точечных образов. История и современность / В. А. Липницкий, А. И. Сергей, Н. В. Спичекова // Технические средства защиты информации: тез. докл. XI Белорус.-рос. науч.-техн. конф., 5–6 мая 2013 г. Минск. – Минск: БГУИР, 2013. – С. 42.
5. Цветков, В. Ю. Предсказание, распознавание и формирование образов многокурсовых изображений с подвижных объектов / В. Ю. Цветков, В. К. Конопелько, В. А. Липницкий. – Минск: Изд. центр БГУ, 2014. – 224 с.
6. Конопелько, В. К. Формирование и обработка образов в помехоустойчивом кодировании и передаче изображений / В. К. Конопелько, В. Ю. Цветков. – Минск: Бестпринт, 2015. – 247 с.
7. The-Line Encyclopedia of Integer Sequences [Electronic resource]. – Mode of access: <http://oeis.org/>. – Date of access: 15.12.2013.
8. Сергей, А. И. Подсчет классов эквивалентности бинарных матриц / А. И. Сергей, В. А. Липницкий // Информационные компьютерные технологии: проектирование, разработка, применение: сб. науч. ст. – Гродно: ГрГУ, 2013. – 378 с.
9. Сергей А. И. Оптимизированный алгоритм генерации представителей классов эквивалентности бинарных матриц / А. И. Сергей, В. А. Липницкий // Управление инновациями: теория, методология, практика: материалы XII Междунар. науч.-практ. конф. – Новосибирск: Изд-во ЦРНС, 2015. – С. 101–105.

10. Сергей, А. И. Эффективный алгоритм формирования представителей орбит при действии квадрата симметрической группы на $(0, 1)$ -матрицах матриц / А. И. Сергей, В. А. Липницкий // Технические средства защиты информации: тез. докл. XII Белорус.-рос. науч.-техн. конф., 28–29 мая 2014 г., Минск. – Минск: БГУИР, 2014. – С. 37–38.
11. Конопелько, В. К. Действие квадрата симметрической группы на специальном классе $(0, 1)$ -матриц. Отсутствие полных орбит / В. К. Конопелько, В. А. Липницкий, Н. В. Спичекова // Докл. БГУИР. – 2010. – № 5 (51). – С. 40–46.
12. Конопелько, В. К. Общие семейства в орбитальной классификации точечных образов / В. К. Конопелько, В. А. Липницкий, Н. В. Спичекова // Телекоммуникации: сети и технологии, алгебраическое кодирование и безопасность данных: материалы междунар. науч.-техн. семинара. – Минск: БГУИР, 2011. – С. 17–25.
13. Опе, О. Теория графов / О. Опе. – М.: Наука, 1980. – 336 с.

References

1. Cameron P. J. *Problems on permutation groups*. Available at: <http://www.matches.qmul.ac.uk/~pjc/pgprob.html>. (accessed 15 December 2013).
2. Cameron P. J., Gewurz D. A., Merola F. Product action. *Discrete Mathematics*, 2008, vol. 308, no. 2-3, pp. 386–394. Doi: 10.1016/j.disc.2006.11.054
3. Konopel'ko V. K., Lipnitskii V. A., Spichekova N. V. Classification of point patterns and the classical problem of partition of integers. *Doklady BGUIR* [Proceedings of BSUIR], 2010, no. 8 (54), pp. 127–131. (in Russian).
4. Lipnitskii V. A., Sergei A. I., Spichekova N. V. Classification of point patterns. History and modern-state-of-art. *Tekhnicheskie sredstva zashchity informatsii: tezisy dokladov XI Belorussko-rossiiskoi nauchno-tekhnicheskoi konferentsii* [Information protection software: Book of Abstracts of XI Belarusian-Russian Scientific and Technical Conference, 5–6 may 2013, Minsk]. Minsk, Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, 2013, pp. 42. (in Russian).
5. Tsvetkov V. Yu., Konopel'ko V. K., Lipnitskii V. A. *Prediction, recognition and formation of patterns of many-position images with movable objects*. Minsk, Publishing Center of the Belarusian State University, 2014. 224 p. (in Russian).
6. Konopel'ko V. K., Tsvetkov V. Yu. *Formation and processing of images in anti-jamming coding and image transmission*. Minsk, Bestprint Publ., 2015. 247 p. (in Russian).
7. The-Line Encyclopedia of Integer Sequences. Available at: <http://oeis.org/>. (accessed 15 December 2013).
8. Sergei A. I., Lipnitskii V. A. Equivalence class counting of binary matrices. *Informatsionnye kompyuternye tekhnologii: proektirovanie, razrabotka, primenenie: sbornik nauchnykh statei* [Information computer technologies: designing, development, application: Collection of Scientific Works]. Grodno, Grodno State University, 2013. 378 p. (in Russian).
9. Sergei A. I., Lipnitskii V. A. Optimized generation algorithms of the equivalence class of binary matrices. *Upravlenie innovatsiyami: teoriya, metodologiya, praktika: materialy XII Mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii* [Innovation control: theory, methodology, experience: Proceedings of XII International Scientific and Practical Conference]. Novosibirsk, Center for the Development of Scientific Cooperation (CRNS), 2015, pp. 101–105. (in Russian).
10. Sergei A. I., Lipnitskii V. A. Effective algorithm of formation of orbit representatives under the action of the symmetric group square based on $(0, 1)$ -matrices of matrices. *Tekhnicheskie sredstva zashchity informatsii: Tezisy dokladov XII Belorussko-rossiiskoi nauchno-tekhnicheskoi konferentsii* [Information protection software: Book of Abstracts of the XII Belarusian-Russian Scientific and technical Conference, 28–29 may 2014, Minsk]. Minsk, Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, 2014, pp. 37–38. (in Russian).
11. Konopel'ko V. K., Lipnitskii V. A., Spichekova N. V. Action of the square of the symmetric group based on a special class of $(0, 1)$ -matrices. Absence of complete orbits. *Doklady BGUIR* [Proceedings of BSUIR], 2010, no. 5 (51), pp. 40–46. (in Russian).
12. Konopel'ko V. K., Lipnitskii V. A., Spichekova N. V. General families in the orbit classification of point patterns. *Telekommunikatsii: seti i tekhnologii, algebraicheskoe kodirovanie i bezopasnost' dannykh: materialy mezhdunarodnogo nauchno-tekhnicheskogo seminara* [Proceedings of MHTC “Telecommunications: networks and technologies, algebraic coding and data security”]. Minsk, Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, 2011, pp. 17–25. (in Russian).
13. Ope O. *Graph theory*. Moscow: Nauka Publ., 1980. 336 p. (in Russian).

Информация об авторах

Липницкий Валерий Антонович – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики, Военная академия Республики Беларусь (пр. Независимости, 220, 220057, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: valipnitski@yandex.by

Сергей Александр Иванович – аспирант, Гродненский государственный университет им. Я. Купалы (ул. Э. Ожэшко, 22, 230023, г. Гродно, Республика Беларусь). E-mail: sergej.a.i@mail.ru

Information about the authors

Lipnitski Valery Antonovich – D. Sc. (Engineering), Professor, Head of the Department of Mathematics, Military Academy of the Republic of Belarus (220, Nezavisimosti Ave., 220057, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: valipnitski@yandex.by

Sergey Alexander Ivanovich – Postgraduate, Yanka Kupala State University of Grodno (22, Azheshko Str., 230023, Grodno, Republic of Belarus). E-mail: sergej.a.i@mail.ru

Для цитирования

Липницкий, В. А. О стабилизации количества орбит кэмероновских матриц большого ранга / В. А. Липницкий, А. И. Сергей // Вест. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2017. – № 2. – С. 60–70.

For citation

Lipnitski V. A., Sergey A. I. On the stabilization of the number of orbits of high-rank Cameron matrices. *Vesti Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series], 2017, no. 2, pp. 60–70. (in Russian).

ISSN 1561-2430 (print)

ФИЗИКА
PHYSICS

УДК 539.12

Поступила в редакцию 07.04.2017
Received 07.04.2017**О. В. Веко¹, Е. М. Овсюк², В. М. Редьков¹**¹Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь²Мозырьский государственный педагогический университет им. И. П. Шамякина, Мозырь, Беларусь**НЕРЕЛЯТИВИСТСКАЯ ЧАСТИЦА КОКСА С ВНУТРЕННЕЙ СТРУКТУРОЙ
В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ: АНАЛИЗ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО**

Обобщенное нерелятивистское уравнение Шредингера для скалярной частицы Кокса с внутренней структурой исследовано в присутствии электрического поля на фоне пространства Лобачевского. Проведено разделение переменных. Уравнение, описывающее движение частицы вдоль оси z оказывается существенно более сложным, чем при рассмотрении частицы Кокса в пространстве Минковского. Оно приводится к уравнению с двумя регулярными особыми точками и одной нерегулярной ранга 2, т. е. к конфлюэнтному уравнению Гойна. Физическим бесконечностям $z \pm \infty$ соответствуют соседние особые точки построенного уравнения. Решения найдены в виде степенных рядов, сходимость которых исследована методом Пуанкаре – Перрона. Ряды сходятся во всей физической области переменной $z \in (-\infty, +\infty)$.

Ключевые слова: уравнение Шредингера, спин 0, внутренняя структура частицы Кокса, пространство Лобачевского, электрическое поле, разделение переменных, точные решения, вырожденное уравнение Гойна

O. V. Veko¹, E. M. Ovsyuk², V. M. Red'kov¹¹*B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus*²*Mozyr State Pedagogical University named after I. P. Shamyakin, Mozyr, Belarus***COX NONRELATIVISTIC PARTICLE OF INTRINSIC STRUCTURE IN THE ELECTRIC FIELD:
ANALYSIS IN THE LOBACHEVSKY SPACE**

The generalized Schrödinger equation for the Cox scalar particle is studied in the presence of the electric field on the background of the Lobachevsky space. Separation of variables is performed. The equation describing the motion along the z axis turns out to be much more complicated than that for the Cox particle in the Minkowski space. It is reduced to the second-order differential equation with two regular singularities and one irregular singularity of rank 2 that is identified as the confluent Heun equation. The nearby singular points of the derived equation correspond to the physical domains $z \pm \infty$. The solutions of the equation are constructed with the help of the power series. The series convergence is examined by the Poincaré – Perrone method. These series converge in the whole physical domain $z \in (-\infty, +\infty)$.

Keywords: Schrödinger equation, spin zero, intrinsic structure of the Cox particle, Lobachevsky space, electric field, separation of variables, exact solutions, confluent Heun equation

Разделение переменных. В рамках теории обобщенных релятивистских волновых уравнений В. Коксом была предложена [1] модель для скалярной частицы со спином нуль; изложение общего подхода к такого рода обобщенным уравнениям см. в работе [2]. В присутствии электромагнитных полей волновые уравнения с расширенными наборами представлений группы Лоренца после исключения вспомогательных компонент приводят к уравнениям для минимального набора компонент, модифицированных дополнительными членами взаимодействия с внешними электромагнитными полями. Эти дополнительные взаимодействия обусловлены некоторой электромагнитной внутренней структурой, проявляющейся явно во внешних полях. Отметим, что в книге С. С. Швебера [3] обсуждается дополнительный дарвиновский член взаимодействия скалярной частицы с внешним электрическим полем, который связан с распределением заряда по конечному объему частицы. Фактически, теория Кокса – это развитие старой идеи Дарвина.

В серии работ [4–8] исследовалось квантово-механическое поведение частицы Кокса во внешних магнитном и электрическом полях в пространствах с неевклидовой геометрией: моделях Лобачевского и Римана. В частности, было выведено обобщенное нерелятивистское уравнение Шредингера для частицы Кокса в этих моделях.

В настоящей работе мы исследуем нерелятивистскую частицу Кокса во внешнем электрическом поле на фоне геометрии пространства Лобачевского. После разделения переменных в обобщенном уравнении Шредингера основное внимание уделено построению возможных решений уравнения по переменной z . Здесь действуют два фактора: более сложное электрическое поле и очень существенное в больших масштабах влияние геометрии пространства Лобачевского. В конце работы исходная релятивистская 20-компонентная теория Кокса обобщается на случай присутствия внешних электромагнитного и гравитационного полей, выведена общеквариантная система уравнений типа Прока для скалярной частицы Кокса.

Используем обобщенные цилиндрические координаты $x^a = (t, r, \varphi, z)$:

$$dS^2 = dt^2 - \text{ch}^2 z (dr^2 + \text{sh}^2 r d\varphi^2) - dz^2, \quad \sqrt{-g} = \text{sh} r \text{ch}^2 z;$$

$$A_0 = -E\rho \text{th} z, E_3 = \frac{E}{\text{ch}^2 z}, E^3 = -\frac{E}{\text{ch}^2 z}, E_3 E^3 = -E^2 \text{ch}^{-4} z.$$

Ниже будем использовать операторы

$$i \frac{\hbar c}{\rho} \partial_t - eA_0 = D_t, \quad i \frac{\hbar}{\rho} \partial_k = D_k, \quad \frac{i\hbar/\rho}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^k} \sqrt{-g} = \overset{\circ}{D}_k.$$

Исходим из уравнения в виде

$$\left(D_t - c \frac{\Gamma^2 E_i E^i \mu + \Gamma E^j D_j}{2(1 + \Gamma^2 E_i E^i)} \right) \Psi = \frac{1}{2M\rho^2} \overset{\circ}{D}_k (-g^{kj}) \left(D_j + \frac{\Gamma^2 E_j (E^i D_i) + \mu \Gamma E_j}{1 + \Gamma^2 E_i E^i} \right) \Psi. \quad (1)$$

Вводим обозначение

$$\gamma(x) = (\Gamma E) \text{ch}^{-2} z = \gamma \text{ch}^{-2} z.$$

Рассматриваем оператор из левой части уравнения (1):

$$\left(D_t - c \frac{\Gamma^2 E_i E^i \mu + \Gamma E^j D_j}{2(1 + \Gamma^2 E_i E^i)} \right) = \frac{\hbar c}{\rho} \left(i\partial_t + \frac{eE\rho}{\hbar c/\rho} \text{th} z + \frac{1}{2} \frac{M c \rho}{\hbar} \frac{\gamma^2(z)}{1 - \gamma^2(z)} + \frac{1}{2} \frac{\gamma(z)}{1 - \gamma^2(z)} i\partial_z \right)$$

и оператор из правой части уравнения (1):

$$H = -\frac{\hbar^2}{2M\rho^2} \left[\frac{1}{\text{ch}^2 z} \left(\partial_r^2 + \frac{\text{ch} r}{\text{sh} r} \partial_r + \frac{\partial_\varphi^2}{\text{sh}^2 r} \right) + \left(\partial_z + 2 \frac{\text{sh} z}{\text{ch} z} \right) \left(\frac{1 - 2\gamma^2(z)}{1 - \gamma^2(z)} \partial_z - \frac{M c \rho}{\hbar} \frac{i\gamma(z)}{1 - \gamma^2(z)} \right) \right].$$

Так, для уравнения Шредингера находим представление

$$\begin{aligned} & \frac{\hbar c}{\rho} \left(i\partial_t + \frac{eE\rho}{\hbar c/\rho} \text{th} z + \frac{1}{2} \frac{M c \rho}{\hbar} \frac{\gamma^2(z)}{1 - \gamma^2(z)} + \frac{1}{2} \frac{\gamma(z)}{1 - \gamma^2(z)} i\partial_z \right) \Psi = \\ & = -\frac{\hbar^2}{2M\rho^2} \left[\frac{1}{\text{ch}^2 z} \left(\partial_r^2 + \frac{\text{ch} r}{\text{sh} r} \partial_r + \frac{\partial_\varphi^2}{\text{sh}^2 r} \right) + \left(\partial_z + 2 \frac{\text{sh} z}{\text{ch} z} \right) \left(\frac{1 - 2\gamma^2(z)}{1 - \gamma^2(z)} \partial_z - \frac{M c \rho}{\hbar} \frac{i\gamma(z)}{1 - \gamma^2(z)} \right) \right] \Psi. \end{aligned}$$

Также выполним обусловленную физическими причинами [6] формальную замену $i\gamma \rightarrow \gamma$ и отметим, что два члена, пропорциональных $i\gamma(z)\partial_z$, компенсируют друг друга. В результате приходим к уравнению

$$\begin{aligned} & \frac{\hbar c}{\rho} \left(i\partial_t + \frac{eE\rho}{\hbar c/\rho} \operatorname{th} z - \frac{1}{2} \frac{Mc\rho}{\hbar} \frac{\gamma^2(z)}{1+\gamma^2(z)} \right) \Psi = \\ & = -\frac{\hbar^2}{2M\rho^2} \left[\frac{1}{\operatorname{ch}^2 z} \left(\partial_r^2 + \frac{\operatorname{ch} r}{\operatorname{sh} r} \partial_r + \frac{\partial_\phi^2}{\operatorname{sh}^2 r} \right) + \left(\partial_z + 2 \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} \right) \left(\frac{1+2\gamma^2(z)}{1+\gamma^2(z)} \partial_z \right) - \right. \\ & \left. - \frac{Mc\rho}{\hbar} \left(\frac{d}{dz} \frac{\gamma(z)}{1+\gamma^2(z)} \right) - \frac{Mc\rho}{\hbar} 2 \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} \frac{\gamma(z)}{1+\gamma^2(z)} \right] \Psi. \end{aligned} \quad (2)$$

Учтем подстановку для волновой функции (W – энергия в обычных единицах)

$$\Psi = \exp(-iwt) e^{im\phi} R(r)Z(z), \quad w = \frac{W\rho}{\hbar c};$$

вводим обозначения:

$$\begin{aligned} W &= w \frac{\hbar c}{\rho} \frac{1}{\hbar^2/2M\rho^2} = 2w \frac{M\rho c}{\hbar}, \quad v = eE\rho \frac{1}{\hbar^2/2M\rho^2}, \\ \frac{1}{2} Mc^2 \frac{1}{\hbar^2/2M\rho^2} &= \frac{M^2 \rho^2 c^2}{\hbar^2} = \frac{\rho^2}{\lambda^2} = \mu^2; \end{aligned}$$

при этом уравнение (2) дает

$$\begin{aligned} & \operatorname{ch}^2 z \left(W + v \operatorname{th} z - \mu^2 \frac{\gamma^2(z)}{1+\gamma^2(z)} \right) R(r)Z(z) + \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\operatorname{ch} r}{\operatorname{sh} r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{m^2}{\operatorname{sh}^2 r} \right) R(r)Z(z) + \\ & + \operatorname{ch}^2 z \left[\left(\frac{\partial}{\partial z} + 2 \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} \right) \frac{1+2\gamma^2(z)}{1+\gamma^2(z)} \frac{\partial}{\partial z} - \mu \left(\frac{d}{dz} \frac{\gamma(z)}{1+\gamma^2(z)} \right) - 2\mu \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} \frac{\gamma(z)}{1+\gamma^2(z)} \right] R(r)Z(z) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

В этом уравнении переменные разделяются:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\operatorname{ch} r}{\operatorname{sh} r} \frac{d}{dr} - \frac{m^2}{\operatorname{sh}^2 r} + \Lambda \right) R(r) = 0, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{d}{dz} + 2 \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} \right) \left(1 + \frac{\gamma^2(z)}{1+\gamma^2(z)} \right) \frac{d}{dz} - \right. \\ & \left. - \mu \left(\frac{d}{dz} \frac{\gamma(z)}{1+\gamma^2(z)} \right) - 2\mu \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} \frac{\gamma(z)}{1+\gamma^2(z)} + \right. \\ & \left. + W + v \operatorname{th} z - \mu^2 \frac{\gamma^2(z)}{1+\gamma^2(z)} - \frac{\Lambda}{\operatorname{ch}^2 z} \right] Z(z) = 0; \end{aligned} \quad (5)$$

напоминаем, что $\gamma(z) = \gamma / \operatorname{ch}^2 z$. Уравнение для $Z(z)$ после преобразований примет вид

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{\gamma^2}{\operatorname{ch}^4 z + \gamma^2} \right) \frac{d^2}{dz^2} Z - \left(-1 + \gamma^2 \frac{\operatorname{ch}^4 z - \gamma^2}{(\operatorname{ch}^4 z + \gamma^2)^2} \right) 2 \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} \frac{d}{dz} Z + \\ & + \left[W + v z - \frac{\gamma^2 \mu^2}{\gamma^2 + \operatorname{ch}^4 z} - \frac{\Lambda}{\operatorname{ch}^2 z} - 4\mu \gamma^3 \frac{\operatorname{sh} z \operatorname{ch} z}{(\gamma^2 + \operatorname{ch}^4 z)^2} \right] Z = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Это уравнение по переменной z намного сложнее того, которое было в случае плоского пространства; и оно свидетельствует о высокой чувствительности внутренней структуры частицы к геометрии фонового пространства.

Решение уравнения по переменной r . В уравнении (4) сделаем замену переменных: $x = (1 + \operatorname{ch} r) / 2$, $x \in [1, +\infty)$, тогда

$$x(1-x) \frac{d^2 R}{dx^2} + (1-2x) \frac{dR}{dx} - \left(w_{\perp} + \frac{1}{4} \frac{m^2}{x} + \frac{1}{4} \frac{m^2}{1-x} \right) R = 0. \quad (7)$$

Используя подстановку $R = x^a(1-x)^b F$, при $a = \pm |m|/2$, $b = \pm |m|/2$ приходим к уравнению гипергеометрического типа с параметрами

$$\begin{aligned} F &= F(\alpha, \beta, \gamma; x), & \alpha &= a + b + \frac{1}{2} - i\sqrt{w_{\perp} - 1/4}, \\ \beta &= a + b + \frac{1}{2} + i\sqrt{w_{\perp} - 1/4}, & w_{\perp} &> \frac{1}{4}, & \gamma &= 2a + 1. \end{aligned} \quad (8)$$

Будем использовать решения, стремящиеся к нулю при $r = 0$:

$$F = u_2 = F(\alpha, \beta, \alpha + \beta + 1 - \gamma, 1 - x); \quad (9)$$

когда a и b положительные: $a = +|m|/2$, $b = +|m|/2$. Полная радиальная функция определяется выражением

$$R = x^a(1-x)^b F(\alpha, \beta, \alpha + \beta + 1 - \gamma, 1 - x). \quad (10)$$

Чтобы найти поведение решений на бесконечности $r \rightarrow +\infty$, воспользуемся одним из соотношений Куммера

$$u_2 = \frac{\Gamma(\alpha + \beta + 1 - \gamma)\Gamma(\beta - \alpha)}{\Gamma(\beta + 1 - \gamma)\Gamma(\beta)} e^{-i\pi\alpha} u_3 + \frac{\Gamma(\alpha + \beta + 1 - \gamma)\Gamma(\alpha - \beta)}{\Gamma(\alpha + 1 - \gamma)\Gamma(\alpha)} e^{-i\pi\beta} u_4,$$

$$u_2 = F(\alpha, \beta, \alpha + \beta + 1 - \gamma; 1 - x),$$

$$u_3 = (-x)^{-\alpha} F\left(\alpha, \alpha + 1 - \gamma, \alpha + 1 - \beta, \frac{1}{x}\right),$$

$$u_4 = (-x)^{-\beta} F\left(\beta, \beta + 1 - \gamma, \beta + 1 - \alpha, \frac{1}{x}\right).$$

Следовательно, поведение решений при $x \rightarrow 1$ ($r \rightarrow +\infty$) задается равенством (здесь $x \approx \frac{e^r}{4}$)

$$\begin{aligned} R &\approx (-1)^{a+b} \Gamma(\alpha + \beta + 1 - \gamma) (-x)^{-1/2} \times \\ &\times \left(\frac{\Gamma(\beta - \alpha)}{\Gamma(\beta + 1 - \gamma)\Gamma(\beta)} e^{-i\pi\alpha} (-x)^{+i\sqrt{\lambda-1/4}} + \frac{\Gamma(\alpha - \beta)}{\Gamma(\alpha + 1 - \gamma)\Gamma(\alpha)} e^{-i\pi\beta} (-x)^{-i\sqrt{\lambda-1/4}} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, по поперечной радиальной переменной построены решения, являющиеся стоячими волнами. Множитель $e^{-r/2}$ является несущественным для вероятностной интерпретации волновой функции: $dW = \sqrt{-g} \psi^* \psi$.

Анализ уравнения по переменной z . Исследуем уравнение по переменной z :

$$\left(1 + \frac{\gamma^2}{\operatorname{ch}^4 z + \gamma^2}\right) \frac{d^2}{dz^2} Z - \left(-1 + \gamma^2 \frac{\operatorname{ch}^4 z - \gamma^2}{(\operatorname{ch}^4 z + \gamma^2)^2}\right) 2 \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} \frac{d}{dz} Z + \left[\varepsilon + \nu \operatorname{th} z - \frac{\gamma^2 \mu^2}{\gamma^2 + \operatorname{ch}^4 z} - \frac{\Lambda}{\operatorname{ch}^2 z} - 4\mu\gamma^3 \frac{\operatorname{sh} z \operatorname{ch} z}{(\gamma^2 + \operatorname{ch}^4 z)^2}\right] Z = 0. \quad (11)$$

Уравнение сложное, пробуем его упростить, учитывая неравенство $|\gamma| \ll 1$; это позволяет получить приближенные соотношения

$$A^2 = \operatorname{ch}^4 z, \quad \frac{1}{A + \gamma^2} \approx \frac{1}{A} - \frac{\gamma^2}{A^2}, \quad \left(1 + \frac{\gamma^2}{\operatorname{ch}^4 z + \gamma^2}\right) \approx 1 + \frac{\gamma^2}{\operatorname{ch}^4 z},$$

$$\left(-1 + \gamma^2 \frac{\operatorname{ch}^4 z - \gamma^2}{(\operatorname{ch}^4 z + \gamma^2)^2}\right) \approx \left(-1 + \frac{\gamma^2}{\operatorname{ch}^4 z}\right), \quad \frac{\gamma^2 \mu^2}{\gamma^2 + \operatorname{ch}^4 z} \approx \mu^2 \frac{\gamma^2}{\operatorname{ch}^4 z},$$

$$4\mu\gamma^3 \frac{\operatorname{sh} z \operatorname{ch} z}{(\gamma^2 + \operatorname{ch}^4 z)^2} \approx 4\mu^2 \frac{\gamma^3}{\operatorname{ch}^6 z} \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}.$$

Соответственно, уравнение (11) заменяем на более простое

$$\frac{d^2}{dz^2} Z - \left(-1 + \frac{\gamma^2}{\operatorname{ch}^4 z}\right) \left(1 + \frac{\gamma^2}{\operatorname{ch}^4 z}\right)^{-1} 2 \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} \frac{d}{dz} Z + \left[\varepsilon + \nu \operatorname{th} z - \mu^2 \frac{\gamma^2}{\operatorname{ch}^4 z} - \frac{\Lambda}{\operatorname{ch}^2 z}\right] \left(1 + \frac{\gamma^2}{\operatorname{ch}^4 z}\right)^{-1} Z = 0. \quad (12)$$

Отсюда, пренебрегая пропорциональным Γ^2 членом в выражении в квадратных скобках, получаем

$$\frac{d^2}{dz^2} Z - \left(-1 + \frac{2\gamma^2}{\operatorname{ch}^4 z}\right) 2 \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} \frac{d}{dz} Z + \left[\left(\varepsilon + \nu \operatorname{th} z - \frac{\Lambda}{\operatorname{ch}^2 z}\right) - \frac{\gamma^2}{\operatorname{ch}^4 z} \left(\mu^2 + \varepsilon + \nu \operatorname{th} z - \frac{\Lambda}{\operatorname{ch}^2 z}\right)\right] Z = 0. \quad (13)$$

Кроме того, очевидно, можно воспользоваться приближенным равенством

$$\left(-1 + \frac{2\gamma^2}{\operatorname{ch}^4 z}\right) \approx -1;$$

тогда приходим к еще более простому уравнению

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} Z + 2 \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} \frac{d}{dz} Z + \varepsilon + \nu \operatorname{th} z - \frac{\Lambda}{\operatorname{ch}^2 z} - \frac{\mu^2 \gamma^2}{\operatorname{ch}^4 z}\right) Z = 0. \quad (14)$$

Введем эффективный квадрат импульса

$$P^2(z) = \varepsilon + \nu \operatorname{th} z - \frac{\Lambda}{\operatorname{ch}^2 z} - \frac{\mu^2 \gamma^2}{\operatorname{ch}^4 z}; \quad (15)$$

около точек $0, \pm\infty$ он ведет себя так:

$$\begin{aligned} z \rightarrow 0, \quad P^2 &\sim (\varepsilon - \Lambda - \gamma^2 \mu^2), \\ z \rightarrow +\infty, P^2 &\sim (\varepsilon + \nu), \quad z \rightarrow -\infty, P^2 \sim (\varepsilon - \nu). \end{aligned} \quad (16)$$

Для анализа уравнения (14) вводим новую переменную

$$\begin{aligned} e^{2z} = x, \quad x \in (0, +\infty), \quad \frac{d}{dz} &= 2x \frac{d}{dx}, \\ \frac{d^2}{dz^2} &= 4x^2 \frac{d^2}{dx^2} + 4x \frac{d}{dx}, \quad \frac{1}{\operatorname{ch}^2 z} = \frac{4x}{(x+1)^2}, \quad \operatorname{th} z = \frac{x-1}{x+1}; \end{aligned}$$

уравнение примет вид

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{2}{x+1} \frac{d}{dx} + \frac{\varepsilon/4 - \nu/4}{x^2} + \frac{\nu/2 - \Lambda}{x} + \frac{\Lambda - \nu/2}{x+1} + \frac{\Lambda}{(1+x)^2} - \frac{4\mu^2\gamma^2}{(x+1)^4} \right) Z = 0. \quad (17)$$

Около точки $x = 0$ решения ведут себя так:

$$Z'' + 2Z' + \frac{\varepsilon - \nu}{4x^2} Z = 0, \quad Z(x) = x^A, \quad A = \frac{1 \pm i\sqrt{\varepsilon - \nu - 1}}{2}. \quad (18)$$

Исследуем точку $x \rightarrow \infty$. Делаем замену переменной $X = x^{-1}$ и исследуем точку $X = 0$:

$$\left[\frac{d^2}{dX^2} + \frac{2}{1+X} \frac{d}{dX} + \frac{\varepsilon/4 + \nu/4}{X^2} - \frac{(\nu/2)}{X} + \frac{(\nu/2)}{1+X} - \frac{4\mu^2\gamma^2}{(X+1)^4} \right] Z = 0.$$

Из полученного легко находим асимптотику решений при $X \rightarrow 0$:

$$x \rightarrow \infty, \quad Z(x) = \left(\frac{1}{x} \right)^B, \quad B = \frac{1 \pm i\sqrt{\varepsilon + \nu - 1}}{2}. \quad (19)$$

Таким образом, имеем уравнение с двумя регулярными точками $x = 0, x = \infty$ и одной нерегулярной точкой $x = -1$ ранга 2; последняя лежит вне физической области изменения координаты $x \in (0, +\infty)$. Это уравнение можно преобразовать к виду конфлюэнтного уравнения Гойна [9–11]. Для этого введем переменную $y = (x+1)^{-1}$, уравнение примет вид

$$\left(\frac{d^2}{dy^2} + \frac{\varepsilon - \nu}{4} \frac{1}{y^2(y-1)^2} + \left(\Lambda - \frac{\nu}{2} \right) \frac{1}{y^2(y-1)} + \frac{\Lambda}{y^2} - 4\mu^2\gamma^2 \right) Z = 0. \quad (20)$$

Отметим связь переменной y с исходной переменной z :

$$y = \frac{1}{1+e^{2z}} = \begin{cases} z \rightarrow +\infty, & y \rightarrow 0, \\ z \rightarrow -\infty, & y \rightarrow 1, \\ 1+e^{2z} \rightarrow 0, & y \rightarrow \infty. \end{cases}$$

После разложения дробей на простые из (20) получаем

$$\left(\frac{d^2}{dy^2} - 4\mu^2\gamma^2 + \frac{\varepsilon + \nu}{4y^2} + \frac{-2\Lambda + \varepsilon}{2y} + \frac{2\Lambda - \varepsilon}{2(y-1)} + \frac{\varepsilon - \nu}{4(y-1)^2} \right) Z = 0. \quad (21)$$

Исследуем точку $y = \infty$. Для этого перейдем к переменной $Y = y^{-1}$:

$$\left(\frac{d^2}{dY^2} + \frac{2}{Y} \frac{dZ}{dY} - \frac{4\mu^2\gamma^2}{Y^4} + \frac{\varepsilon - \nu}{4(Y-1)^2} + \frac{\Lambda}{Y^2} - \frac{2\Lambda - \nu}{2(Y-1)} + \frac{2\Lambda - \nu}{2Y} \right) Z = 0.$$

Особая точка $y = \infty$ является нерегулярной ранга 2. Таким образом, имеем уравнение со структурной особой точкой: $\{0, 1, \infty_{[2]}\}$.

Введем подстановку $Z = e^{Ay}y^B(y-1)^C F(y)$. При ограничениях на параметры

$$A = \pm 2\mu\gamma, \quad B = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{-\varepsilon - \nu + 1}, \quad C = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{-\varepsilon + \nu + 1}$$

получаем

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 F}{dy^2} + \left(2A + \frac{2B}{y} + \frac{2C}{y-1} \right) \frac{dF}{dy} + \\ & + \left(\frac{1}{2} \frac{4B(A-C) + \varepsilon - 2\Lambda}{y} + \frac{1}{2} \frac{4C(A+B) - \varepsilon + 2\Lambda}{y-1} \right) F = 0; \end{aligned} \quad (22)$$

это каноническая форма уравнения для конфлюэнтной функции Гойна [11]

$$\frac{d^2 H}{dy^2} + \left(-t + \frac{c}{y} + \frac{d}{y-1} \right) \frac{dH}{dy} + \frac{-tay + \lambda}{y(y-1)} H = 0. \quad (23)$$

Физическим бесконечностям $z = \pm\infty$ соответствуют особые точки $y = 0, 1$. Решения этого уравнения можно строить в виде степенных рядов либо по переменной y , либо по переменной $(y-1)$.

Сходимость степенных рядов. Исходим из канонической формы конфлюэнтного уравнения (23). Построим основной степенной ряд в окрестности точки $y = 0$. Для этого запишем уравнение в виде

$$(y^2 - y) \frac{d^2 H}{dy^2} + [-t y^2 + (t + d + c) y - c] \frac{dH}{dy} + (\lambda - ta y) H = 0. \quad (24)$$

Учтем равенства

$$H = \sum_{k=0}^{\infty} d_k y^k, \quad H' = \sum_{k=1}^{\infty} k d_k y^{k-1}, \quad H'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) d_k y^{k-2};$$

уравнение для H дает

$$\begin{aligned} & \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) d_k y^k - \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) d_k y^{k-1} - \\ & - t \sum_{k=1}^{\infty} k d_k y^{k+1} + (t + d + c) \sum_{k=1}^{\infty} k d_k y^k - c \sum_{k=1}^{\infty} k d_k y^{k-1} + \lambda \sum_{k=0}^{\infty} d_k y^k - ta \sum_{k=0}^{\infty} d_k y^{k+1} = 0. \end{aligned}$$

Меняем обозначения в индексах суммирования

$$\begin{aligned} & \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) d_n y^n - \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) n d_{n+1} y^n - \\ & - t \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) d_{n-1} y^n + (t + d + c) \sum_{n=1}^{\infty} n d_n y^n - c \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) d_{n+1} y^n + \\ & + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} d_n y^n - ta \sum_{n=1}^{\infty} d_{n-1} y^n = 0. \end{aligned}$$

вспомогательные параметры $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, подчинены условиям

$$\lambda_2 \lambda_2^* - \lambda_3 \lambda_3^* = 0, \quad \lambda_1 \lambda_1^* - \frac{3}{2} \lambda_3 \lambda_3^* = 1; \quad (27)$$

символ D_α обозначает удлиненную производную с учетом присутствия внешних электромагнитного и гравитационного полей: $D_\alpha = i\hbar\nabla_\alpha - \frac{e}{c}A_\alpha$, $\mu = Mc$.

С помощью 3-го и 4-го уравнений в (1) исключаем тензоры 2-го ранга из двух оставшихся уравнений:

$$\lambda_1 D^\beta \Phi_\beta - \mu \Phi = 0, \quad (28)$$

$$\lambda_1^* D_\beta \Phi - \mu^{-1} (\lambda_2 \lambda_2^* + \lambda_3 \lambda_3^*) D^\alpha D_\beta \Phi_\alpha + \frac{1}{2} \mu^{-1} \lambda_3 \lambda_3^* D_\beta D^\rho \Phi_\rho - \mu \Phi_\beta = 0. \quad (29)$$

С учетом тождества $(\lambda_2 \lambda_2^* + \lambda_3 \lambda_3^*) = 2\lambda_3 \lambda_3^*$ уравнение (29) примет вид

$$\lambda_1^* D_\beta \Phi - \mu^{-1} 2\lambda_3 \lambda_3^* D_\alpha D_\beta \Phi^\alpha + \frac{1}{2} \mu^{-1} \lambda_3 \lambda_3^* D_\beta D_\alpha \Phi^\alpha - \mu \Phi_\beta = 0. \quad (30)$$

Учитывая соотношение

$$D_\alpha D_\beta \Phi^\alpha = D_\beta D_\alpha \Phi^\alpha + (D_\alpha D_\beta - D_\beta D_\alpha) \Phi^\alpha = D_\beta D_\alpha \Phi^\alpha + \hbar^2 \left(-i \frac{e}{\hbar c} F_{\alpha\beta} - R_{\alpha\beta} \right) \Phi^{\alpha\alpha},$$

уравнение (30) преобразуем в следующее:

$$\lambda_1^* D_\beta \Phi + \mu^{-1} 2\lambda_3 \lambda_3^* \hbar^2 \left(i \frac{e}{c} F_{\alpha\beta} + R_{\alpha\beta} \right) \Phi^\alpha - \frac{3}{2} \mu^{-1} \lambda_3 \lambda_3^* D_\beta (D_\alpha \Phi^\alpha) - \mu \Phi_\beta = 0.$$

Учитывая (28), получим

$$\lambda_1 \lambda_1^* D_\beta \Phi + \mu^{-1} 2\lambda_3 \lambda_3^* \hbar^2 \left(i \frac{e}{\hbar c} F_{\alpha\beta} + R_{\alpha\beta} \right) \lambda_1 \Phi^\alpha - \frac{3}{2} \lambda_3 \lambda_3^* D_\beta \Phi - \mu \lambda_1 \Phi_\beta = 0.$$

С учетом $\lambda_1 \lambda_1^* - \frac{3}{2} \lambda_3 \lambda_3^* = 1$ последнее уравнение приводим к виду

$$D_\beta \Phi + \mu^{-1} 2\lambda_3 \lambda_3^* \hbar^2 \left(i \frac{e}{\hbar c} F_{\alpha\beta} + R_{\alpha\beta} \right) \lambda_1 \Phi^\alpha - \mu \lambda_1 \Phi_\beta = 0.$$

Параметр λ_1 может быть внесен под знак волновой функции так: $\lambda_1 \Phi_\beta \rightarrow \Phi_\beta$; в результате получаем систему уравнений

$$D^\beta \Phi_\beta - \mu \Phi = 0, \quad D_\beta \Phi - i \frac{\hbar^2}{Mc} (2\lambda_3 \lambda_3^*) \left(\frac{e}{\hbar c} F_{\beta\alpha} + i R_{\beta\alpha} \right) \Phi^\alpha - \mu \Phi_\beta = 0. \quad (31)$$

Эти уравнения можно переписать компактнее:

$$D^\beta \Phi_\beta = \mu \Phi = 0, \quad D_\beta \Phi = \lambda \left(F_{\beta\alpha} + i \frac{\hbar c}{e} R_{\beta\alpha} \right) \Phi^\alpha + \mu \Phi_\beta, \quad (32)$$

где $\lambda = \frac{\hbar^2}{Mc} \frac{e}{\hbar c} (2i\lambda_3 \lambda_3^*)$.

В отсутствие электромагнитного поля уравнения (7) упрощаются:

$$D^\beta \Phi_\beta = \mu \Phi, \quad D_\beta \Phi = \left(i\lambda \frac{\hbar c}{e} R_{\beta\alpha}(x) + \mu g_{\beta\alpha}(x) \right) \Phi^\alpha, \quad (33)$$

это чисто геометрическая модификация системы уравнений Прока для скалярной частицы Кокса.

Список использованных источников

1. Cox, W. Higher-rank representations for zero-spin field theories / W. Cox // *J. Phys. Math. Gen.* – 1982. – Vol. 15, № 2. – P. 627–635.
2. Плетюхов, В. А. Релятивистские волновые уравнения и внутренние степени свободы / В. А. Плетюхов, В. М. Ред'ков, В. И. Стражев. – Минск: Беларус. навука, 2015. – 328 с.
3. Schweber, S. S. *An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory* / S. S. Schweber. – New York: Harper&Row, Publ., Inc., 1961. – 905 p.
4. Овсюк, Е. М. Скалярная частица с внутренней структурой в электромагнитном поле в искривленном пространстве-времени / Е. М. Овсюк, О. В. Веко, К. В. Казмерчук // *Проблемы физики, математики и техники.* – 2014. – № 3 (20). – С. 32–36.
5. Quantum mechanical scalar particle with intrinsic structure in external magnetic and electric fields: influence of geometrical background / O. V. Veko [et al.] // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems.* – 2014. – Vol. 17, № 4. – P. 464–466.
6. Ovsyuk, E. M. Spin zero Cox's particle with an intrinsic structure: general analysis in external electromagnetic and gravitational fields / E. M. Ovsyuk // *Ukr. J. Phys.* – 2015. – Vol. 60, № 6. – P. 485–496.
7. Veko, O. V. Cox's particle in magnetic and electric fields on the background of hyperbolic Lobachevsky geometry / O. V. Veko // *Proc. of the IX Int. Conf. «Methods of non-Euclidean geometry in physics and mathematics», Bolyai–Gauss–Lobachevsky-9 (BGL-9), Minsk, 27–30 Nov. 2015* / ed. by Yu. Kurochkin, V. Red'kov. – Minsk, 2015. – P. 284–294.
8. Veko, O. V. Cox's particle in magnetic and electric fields on the background of hyperbolic Lobachevsky geometry / O. V. Veko // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems.* – 2016. – Vol. 19, № 1. – P. 50–61.
9. Heun, K. Zur Theorie der Riemann'schen Functionen Zweiter Ordnung mit Verzweigungspunkten / K. Heun // *Math. Ann.* – 1989. – Vol. 33. – P. 161–179.
10. Ronveaux, A. *Heun's Differential Equation* / A. Ronveaux. – Oxford: Oxford University Press, 1995. – 380 p.
11. Slavyanov, S. Yu. *Special Functions. A Unified Theory Based on Singularities* / S. Yu. Slavyanov, W. Lay. – Oxford: Oxford University Press, 2000. – 312 p.

References

1. Cox W. Higher-rank representations for zero-spin field theories. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1982, vol. 15, no. 2, pp. 627–635. Doi: 10.1088/0305-4470/15/2/029
2. Pletyukhov V. A., Red'kov V. M., Strazhev V. I. *Relativistic wave equations and intrinsic degrees of freedom*. Minsk, Belaruskaya navuka, 2015. 328 p. (in Russian).
3. Schweber S. S. *An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory*. New York, Harper&Row, Publishers, Inc., 1961. 905 p.
4. Ovsyuk E. M., Veko O. V., Kazmerchuk K. V. Scalar particle with intrinsic structure in electromagnetic field in curved space. *Problemy fiziki, matematiki i tekhniki* [Problems of Physics, Mathematics and Technics], 2014, no. 3 (20), pp. 32–36. (in Russian).
5. Veko O. V., Kazmerchuk K. V., Kisel V. V., Ovsyuk E. M., Red'kov V. M. Quantum mechanical scalar particle with intrinsic structure in external magnetic and electric fields: influence of geometrical background. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, 2014, vol. 17, no. 4, pp. 464–466.
6. Ovsyuk E. M. Spin zero Cox's particle with an intrinsic structure: general analysis in external electromagnetic and gravitational fields. *Ukrainian Journal of Physics*, 2015, vol. 60, no. 6, pp. 485–496. Doi: 10.15407/ujpe60.06.0485
7. Veko O. V. Cox's particle in magnetic and electric fields on the background of hyperbolic Lobachevsky geometry. Kurochkin Yu., Red'kov V. (eds.) *Proceedings of the IX International Conference «Methods of non-Euclidean geometry in physics and mathematics», Bolyai – Gauss – Lobachevsky-9 (BGL-9), Minsk, 27–30 November 2015*. Minsk, 2015, pp. 284–294.
8. Veko O. V. Cox's particle in magnetic and electric fields on the background of hyperbolic Lobachevsky geometry. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, 2016, vol. 19, no. 1, pp. 50–61.
9. Heun K. Zur Theorie der Riemann'schen Functionen Zweiter Ordnung mit Verzweigungspunkte. *Mathematische Annalen*, 1989, vol. 33, pp. 161–179. Doi:10.1007/bf01443849
10. Ronveaux A. *Heun's Differential Equation*. Oxford, Oxford University Press, 1995. 380 p.
11. Slavyanov S. Yu., Lay W. *Special Functions. A Unified Theory Based on Singularities*. Oxford, Oxford University Press, 2000. 312 p.

Информация об авторах

Веко Ольга Владимировна – аспирант, Институт физики им. Б. И. Степанова, Национальная академия наук Беларуси (пр. Независимости, 68, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: vekoolga@mail.ru

Овсюк Елена Михайловна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей физики и методики преподавания физики, Мозырский государственный педагогический университет им. И. П. Шамякина (ул. Студенческая, 28, 247760, г. Мозырь, Гомельская обл., Республика Беларусь). E-mail: e.ovsiyuk@mail.ru

Редьков Виктор Михайлович – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Центра теоретической физики Института физики им. Б. И. Степанова, Национальная академия наук Беларуси (пр. Независимости, 68, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: redkov@dragon.bas-net.by

Для цитирования

Веко, О. В. Нерелятивистская частица Кокса с внутренней структурой в электрическом поле: анализ в пространстве Лобачевского / О. В. Веко, Е. М. Овсюк, В. М. Редьков // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2017. – № 2. – С. 71–81.

Information about the authors

Veko Olga Vladimirovna – Postgraduate, B. I. Stepanov Institute of Physics, National Academy of Sciences of Belarus (68, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: vekoolga@mail.ru

Ovsiyuk Elena Mikhaylovna – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Mozyr State Pedagogical University named after I. P. Shamyakin (28, Studencheskaya Str., 247760, Mozyr, Republic of Belarus). E-mail: e.ovsiyuk@mail.ru

Red'kov Viktor Mikhaylovich – D. Sc. (Physics and Mathematics), Chief Researcher, Center of Theoretical Physics, B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (68, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: redkov@dragon.bas-net.by

For citation

Veko O. V., Ovsiyuk E. M., Red'kov V. M. Cox nonrelativistic particle of intrinsic structure in the electric field: analysis in the Lobachevsky space. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series], 2017, no. 2, pp. 71–81. (in Russian).

**О. В. Буганов¹, А. Д. Замковец¹, А. Н. Понявина¹, С. А. Тихомиров¹,
Фам Хон Мынь², Нгуен Тан Бынь², Нгуен Дай Хунг²**

¹Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

²Институт физики Вьетнамской академии наук и технологий, Ханой, Вьетнам

СПЕКТРАЛЬНО-ВРЕМЕННАЯ ДИНАМИКА НЕСТАЦИОНАРНОГО ПОГЛОЩЕНИЯ МНОГОСЛОЙНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПЛАЗМОННЫХ НАНОСТРУКТУР

Изучены особенности наведенных изменений в спектрах оптической плотности многослойных наноструктур Ag-Na₃AlF₆ при их возбуждении фемтосекундными лазерными импульсами в полосе плазмонного поверхностного резонанса поглощения (ППРП). Зарегистрирована зависимость амплитуды наведенных изменений в области ППРП от толщины диэлектрических пленок Na₃AlF₆, разделяющих монослои наночастиц серебра. Обнаружено существенное увеличение амплитуды оптического отклика (до 80 %) для наноструктуры с четвертьволновыми прослойками Na₃AlF₆. Характеристические времена релаксации наводимых изменений при энергиях возбуждения 5–10 мкДж для наноструктур с различной толщиной диэлектрических прослоек Na₃AlF₆ практически не изменяются, составляют ~2 пс и совпадают с временными параметрами кинетического отклика, характерными для используемого монослоя наночастиц Ag.

Ключевые слова: ультракороткие лазерные импульсы, динамика электронных возбуждений, плотноупакованные наноструктуры, поверхностный плазмонный резонанс

**O. V. Buganov¹, A. D. Zamkovets¹, A. N. Ponyavina¹, S. A. Tikhomirov¹,
Pham Hong Minh², Nguyen Thanh Binh², Nguyen Dai Hung²**

¹B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

²Institute of Physics, Vietnam Academy of Science and Technology, Hanoi, Vietnam

SPECTRAL-TEMPORAL DYNAMICS OF TRANSIENT ABSORPTION OF MULTILAYER PERIODIC PLASMONIC NANOSTRUCTURES

The features of the induced changes in the optical density spectra of multilayer Ag-Na₃AlF₆ nanostructures under a femtosecond laser pulses excitation in the band of surface plasmonic resonance of absorption (SPRA) were studied. The dependence of the amplitude of the induced changes on the thickness of the dielectric Na₃AlF₆ films separating the monolayers of silver nanoparticles was registered. A significant increase of the optical response amplitude (up to 80 %) was found for the nanostructures with the quarter-wavelength Na₃AlF₆ interlayers. For nanostructures with different-thickness dielectric Na₃AlF₆ interlayers the characteristic relaxation times of induced changes at an excitation energy of 5–10 μJ do not practically vary, are equal to ~2 ps and coincide with the kinetic response time parameters of the used silver nanoparticle monolayers.

Keywords: ultrashort laser pulses, dynamics of electronic excitations, densely packed nanostructures, surface plasmonic absorption resonance.

Введение. В настоящее время интенсивно исследуются различного вида наноструктуры, в состав которых входят наночастицы благородных металлов. Такие системы характеризуются наличием полос поверхностного плазмонного резонансного поглощения (ППРП), возникающих вследствие коллективных колебаний электронов проводимости в металлических наночастицах. Возбуждение указанных наноструктур ультракороткими световыми импульсами приводит к созданию сильно неравновесного ансамбля носителей заряда в наночастицах, что существенно влияет на спектральные свойства системы. Быстрая эволюция неравновесного ансамбля и, соответственно, спектральных характеристик наноструктуры во времени происходит по законам, зависящим как от свойств металлических наночастиц, так и от диэлектрического окружения. При этом существенное влияние на процессы релаксации энергии электронных возбуждений могут оказывать морфологические характеристики наноструктурированных образцов.

Установление механизмов быстропротекающих процессов и оценка возможностей варьирования амплитудных и скоростных параметров оптического отклика образцов на возбуждение фемтосекундными световыми импульсами за счет материала и топологии наноструктуры необ-

ходимы для решения практических задач, связанных с созданием быстродействующих полностью оптических модулирующих устройств и переключателей, а также с поиском новых методов диагностики композитных материалов.

До недавнего времени динамика релаксации электронных возбуждений в плазмонных наноструктурах изучалась в основном для разреженных коллоидов и нанокompозитов, характеризующихся небольшой объемной концентрацией плазмонных частиц. В этом случае она определяется, главным образом, свойствами отдельных наночастиц и может зависеть как от материала частиц, так и от их размера и формы [1–5]. Дополнительные возможности управления оптическими характеристиками плазмонных наноструктур возникают при плотной упаковке и частичном пространственном упорядочении металлических наночастиц [6, 7], когда значимыми становятся эффекты коллективной природы. При определенных условиях в процессе изготовления наноструктур могут возникать кластеры из нанокристаллитов, в случае увеличения их концентрации может образоваться фрактальная структура, а при достаточно плотной упаковке возникает ближний порядок в расположении частиц.

В работе [8] установлено немонотонное изменение времени релаксации наведенных изменений в полосе ППРП при возрастании поверхностной плотности металла (ППМ) для плотноупакованных монослоев наночастиц Ag (островковых пленок) в тонкопленочных матрицах Na_3AlF_6 . Обнаруженная тенденция времен релаксации объяснена изменением относительного вклада внутренних размерных эффектов и процессов туннелирования электронов в регистрируемые эффекты в образцах с разной ППМ. Выявленные особенности интерпретированы с привлечением модели формирования коллективных электронных состояний в плотноупакованных нанокompозитах [9]. Для многослойных плазмонных наноструктур с субволновой периодичностью можно ожидать наличия дополнительных механизмов управления временными и амплитудными характеристиками оптического отклика на возбуждение ультракороткими лазерными импульсами, связанных с одновременной реализацией электронного и фотонного ограничения [10, 11].

В настоящей работе исследуется спектрально-временная динамика нестационарного поглощения многослойных наноструктур $\text{Ag-Na}_3\text{AlF}_6$, содержащих монослои плазмонных наночастиц Ag, которые контактируют с субволновыми разделительными диэлектрическими пленками Na_3AlF_6 .

Методика эксперимента. Планарные плазмонные наноструктуры $\text{Ag-Na}_3\text{AlF}_6$ изготавливались на вакуумной установке ВУ-1А последовательным термическим осаждением используемых

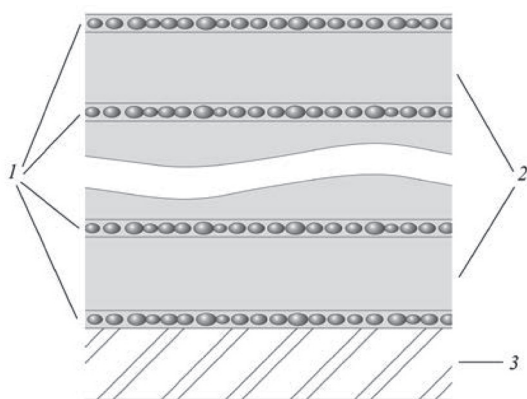


Рис. 1. Схематическое изображение многослойной периодической наноструктуры, состоящей из нескольких одинаковых монослоев плазмонных наночастиц (1), разделенных тонкими диэлектрическими пленками заданной толщины (2), и расположенной на диэлектрической подложке (3)

Fig. 1. Schematic of the multilayered periodic nanostructure composed of several identical monolayers of plasmonic nanoparticles (1) separated by thin dielectric films of defined thickness (2) and located on the dielectric substrate (3)

материалов на стеклянные или кварцевые подложки. Схематическое изображение многослойной периодической наноструктуры приведено на рис. 1. Контроль толщин осаждаемых слоев производился кварцевым датчиком. Давление остаточных газов составляло $(2-5) \cdot 10^{-3}$ Па. Температуры подложек были комнатными. Оптические спектры записывались на спектрофотометре Cary 500.

Измерения спектрально-кинетических характеристик образцов проводились с использованием фемтосекундного спектрометра [12], в основе которого лежит оригинальный генератор фемтосекундных импульсов – лазер на сапфире с титаном с импульсной синхронной накачкой. В качестве источника накачки фемтосекундного генератора использован импульсный лазер на Nd:YAG с гибридной синхронизацией мод на основе инерционной отрицательной обратной связи и нелинейного насыщающегося фильтра.

Возбуждение образцов производилось в полосе ППРП наноструктуры на длине волны 395 нм второй гармоникой титан-сапфирового лазера. Длительность

возбуждающих импульсов составляла ~ 140 фс, энергия $\sim 5\text{--}10$ мкДж. В качестве зондирующих импульсов использовалось излучение фемтосекундного суперконтинуума. Изменение оптической плотности ΔD рассчитывалось по формуле $\Delta D(\lambda, t) = \lg(T_0/T)$, где $T = I_{\text{проб}}/I_{\text{оп}}$ и $T_0 = I_{\text{проб}}^0/I_{\text{оп}}^0$ – отношения энергий пробного и опорного импульсов, прошедших через исследуемый образец при возбуждении и без него.

Обсуждение полученных результатов. Стационарные спектры оптической плотности исследованных наноструктур приведены на рис. 2. Здесь кривая 1 соответствует плотноупакованному монослою наночастиц Ag с ППМ $\sim 1,9 \cdot 10^{-6}$ г·см⁻² в тонкопленочной матрице Na₃AlF₆ с толщиной диэлектрического слоя 20 нм. С использованием АСМ-микроскопии установлено, что средний размер частиц в монослое составляет порядка 5 нм, а параметр перекрытия η , характеризующий отношение

площади монослоя, занятой частицами, к его общей площади, близок к $\sim 0,4\text{--}0,45$. Кривые 2 и 3 соответствуют многослойным наноструктурам (Ag-Na₃AlF₆)⁴Ag, содержащим пять монослоев Ag с такими же конструктивными параметрами, разделенных слоями Na₃AlF₆. Толщины разделительных пленок Na₃AlF₆ равны ~ 10 нм (кривая 2) и ~ 80 нм (кривая 3), что соответствует оптическим толщинам диэлектрических слоев $\sim \lambda_0/30$ и $\sim \lambda_0/4$, где $\lambda_0 = 440$ нм – длина волны максимума поглощения полосы ППРП плотноупакованного монослоя.

Из рис. 2 видно, что для обоих многослойников в окрестности λ_0 формируется полоса ППРП, которая для четвертьволновой системы имеет меньшую полуширину и большую интенсивность. Полуширина полосы ППРП связана со временем жизни плазмона, которое обычно хорошо коррелирует с обратной полушириной стационарных спектров. Меньшая полуширина спектра оптической плотности (пропускания) для наноструктуры с четвертьволновыми разделительными слоями Na₃AlF₆ (порядка 20 %) свидетельствует о большем времени жизни плазмона в данной наноструктуре. Более высокое значение оптической плотности в максимуме полосы ППРП четвертьволновой системы связано с выполнением в этой системе условий для деструктивной интерференции, которая в четвертьволновой многослойной металл-диэлектрической наноконструктивной системе одновременно минимизирует ее пропускание (T) и отражение (R) [10, 11]. Это приводит к увеличению поглощения (A), которое может быть определено по формуле $A = 1 - T - R$ (см. рис. 3, где представлены стационарные спектры пропускания, отражения и поглощения данных систем).

Следует отметить, что при высокой плотности упаковки наночастиц в монослое (соответствующей параметру перекрытия $\eta > 0,3$) их расположение в плоскости монослоя становится частично-коррелированным. Вследствие этого возникает ближний порядок в расположении частиц и значительно усиливается роль латеральных электродинамических взаимодействий, вызванных когерентным переоблучением частиц. В соответствии с этим полоса ППРП для монослоя серебра с приведенными выше конструктивными параметрами носит коллективный характер. Ее характеристики определяются размерами нового масштаба локализации плазмона, который может существенно превышать размеры отдельной частицы. Этот новый масштаб совпадает с областью их ближней упорядоченности и возрастает с увеличением плотности упаковки.

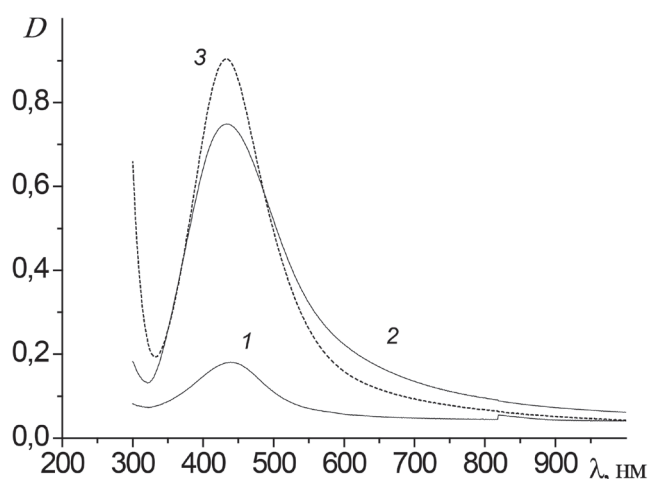


Рис. 2. Спектры оптической плотности монослоя наночастиц Ag (1) и многослойных наноструктур (Ag-Na₃AlF₆)⁴Ag (2, 3). Толщина пленок Na₃AlF₆: ~ 10 нм (2) и ~ 80 нм (3); поверхностная плотность Ag: $\sim 1,9 \cdot 10^{-6}$ г/см², $\eta \sim 0,4\text{--}0,45$

Fig. 2. Spectra of the optical density of the monolayer of silver nanoparticles (1) and multilayer nanostructures (Ag-Na₃AlF₆)⁴Ag (2, 3). The thickness of the Na₃AlF₆ films: ~ 10 nm (2) and ~ 80 nm (3); Ag MSD: $\sim 1,9 \cdot 10^{-6}$ g/cm², $\eta \sim 0,4\text{--}0,45$

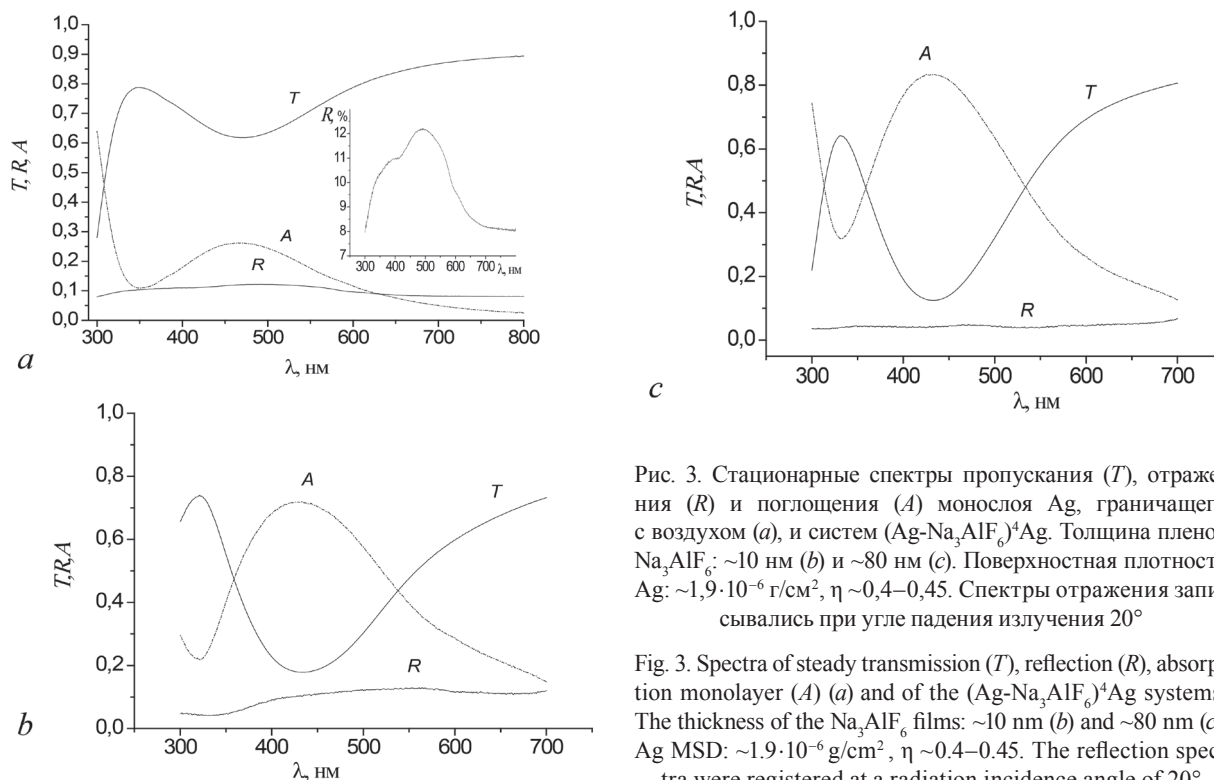


Рис. 3. Стационарные спектры пропускания (T), отражения (R) и поглощения (A) монослоя Ag, граничащего с воздухом (a), и систем $(Ag-Na_3AlF_6)^n Ag$. Толщина пленок Na_3AlF_6 : ~ 10 нм (b) и ~ 80 нм (c). Поверхностная плотность Ag: $\sim 1,9 \cdot 10^{-6}$ г/см², $\eta \sim 0,4-0,45$. Спектры отражения записывались при угле падения излучения 20°

Fig. 3. Spectra of steady transmission (T), reflection (R), absorption monolayer (A) (a) and of the $(Ag-Na_3AlF_6)^n Ag$ systems. The thickness of the Na_3AlF_6 films: ~ 10 nm (b) and ~ 80 nm (c). Ag MSD: $\sim 1,9 \cdot 10^{-6}$ g/cm², $\eta \sim 0,4-0,45$. The reflection spectra were registered at a radiation incidence angle of 20°

В спектральной области вблизи плазмонного резонанса существенно возрастает отражение плотноупакованного монослоя частиц, достигая значений порядка 10–15 % даже для частиц малого размера (см. вставку на рис. 3, a). В периодической многослойной системе возникает межслойная многолучевая интерференция волн, прошедших и отраженных от отдельных монослоев. Такая многослойная система, состоящая из ряда плотноупакованных монослоев металлических наночастиц, разделенных субволновыми диэлектрическими прослойками, представляет собой одномерный фотонно-плазмонный кристалл. В процессе фотонно-плазмонных взаимодействий дополнительно устанавливается электродинамическая связь между всеми монослоями, эффективность которой зависит от толщины диэлектрических разделительных прослоек.

Таким образом, с появлением ближнего порядка в расположении наночастиц возникает новый характерный корреляционный масштаб, а стратификация такой среды приводит к появлению выделенного направления. Все это может являться причиной качественного изменения спектров элементарных взаимодействий, чувствительных как к изменениям пространственных корреляционных масштабов, так и симметрии. Для многослойных плазмонных наноструктур с субволновой периодичностью можно ожидать наличия дополнительных механизмов управления временными и амплитудными характеристиками оптического отклика, связанных с одновременной реализацией электронного и фотонного ограничения.

Дифференциальные спектры поглощения изготовленных образцов, полученные при различных значениях времени задержки (Δt) между возбуждающими и зондирующими импульсами, приведены на рис. 4. Временная трансформация спектров определяется релаксационными процессами, связанными с возвратом разогретых мощным возбуждающим световым импульсом электронов к равновесной температуре, что осуществляется за счет взаимодействия горячих электронов с поверхностью наночастиц, с решеткой и далее за счет транспорта избыточной энергии в матрицу. Существенным является то обстоятельство, что в плотноупакованных системах эти процессы могут сопровождаться межчастичным туннелированием горячих электронов.

На рис. 4, a приведены дифференциальные спектры нестационарного поглощения плотноупакованного монослоя Ag, расположенного в тонкопленочной матрице Na_3AlF_6 . Данные спектры характеризуются наличием просветления системы в спектральной области вблизи максимума

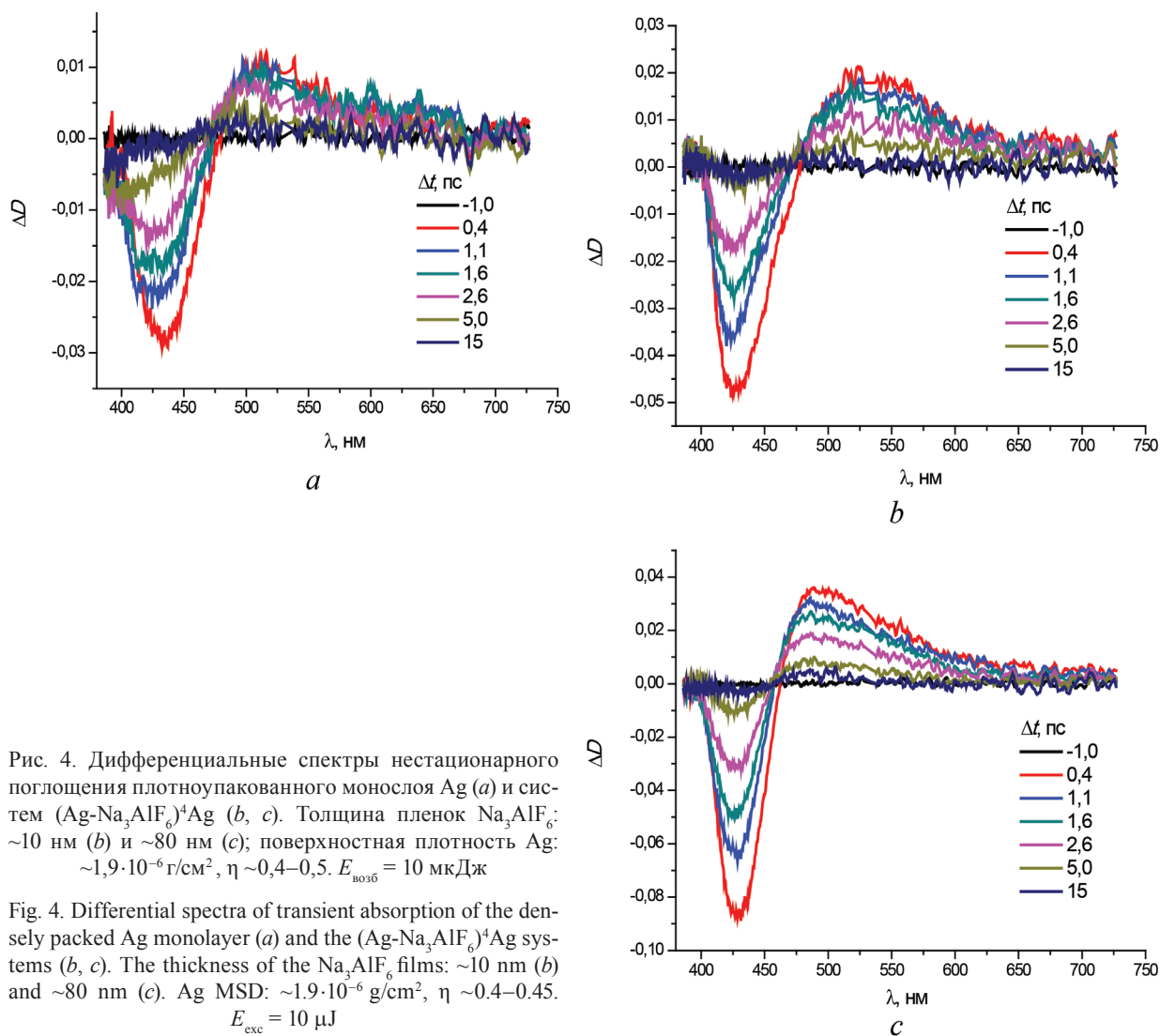


Рис. 4. Дифференциальные спектры нестационарного поглощения плотноупакованного монослоя Ag (*a*) и систем $(\text{Ag}-\text{Na}_3\text{AlF}_6)^4\text{Ag}$ (*b*, *c*). Толщина пленок Na_3AlF_6 : ~ 10 нм (*b*) и ~ 80 нм (*c*); поверхностная плотность Ag: $\sim 1,9 \cdot 10^{-6}$ г/см², $\eta \sim 0,4-0,5$. $E_{\text{возб}} = 10$ мкДж

Fig. 4. Differential spectra of transient absorption of the densely packed Ag monolayer (*a*) and the $(\text{Ag}-\text{Na}_3\text{AlF}_6)^4\text{Ag}$ systems (*b*, *c*). The thickness of the Na_3AlF_6 films: ~ 10 nm (*b*) and ~ 80 nm (*c*). Ag MSD: $\sim 1,9 \cdot 10^{-6}$ g/cm², $\eta \sim 0,4-0,45$. $E_{\text{exc}} = 10$ μJ

полосы ППРП и появлением наведенного поглощения на ее крыльях. Это свидетельствует об уширении и уменьшении интенсивности максимума полосы ППРП, что обычно связывают с двумя обстоятельствами – уменьшением времени дефазировки плазмона вследствие возрастания интенсивности рассеяния горячих электронов на поверхности наночастицы и модификацией диэлектрической функции металла при повышении электронной температуры под воздействием мощного возбуждающего лазерного импульса. Вместе с тем важно отметить, что максимальные изменения амплитуды сигнала наблюдаются на коротковолновом склоне полосы ППРП. Это означает, что помимо обычно регистрируемого при возбуждении плазмонных наночастиц фемтосекундными импульсами ослабления и уширения полосы ППРП происходит и ее смещение в длинноволновую сторону. Такое смещение поверхностного плазмонного резонансного поглощения может быть связано со специфическим для плотноупакованных систем процессом возрастания вероятности туннелирования электронов между близкорасположенными плазмонными наночастицами, возбужденными лазерным излучением, и с обусловленным этим возникновением коллективных «кластерных» электронных состояний [9]. Подобные закономерности наблюдаются и при воздействии ультракороткими лазерными импульсами с $E_{\text{возб}} = 10$ мкДж на монослои Ag с более высокими значениями ППМ в тонкослойных криолитовых матрицах [8].

Сравнение представленных на рис. 4, *b*, *c* дифференциальных спектров нестационарного поглощения многослойных систем $(\text{Ag}-\text{Na}_3\text{AlF}_6)^4\text{Ag}$ с дифференциальными спектрами монослоя показывает, что увеличенное число монослоев в многослойнике сопровождается возрастанием

амплитуды регистрируемых наведенных изменений. Это относится как к области максимального просветления, так и к области наведенного поглощения. Рассмотрим подробнее область максимального просветления исследованных наноструктур. Для системы с тонкими разделительными прослойками ($\lambda_0/30$) в этой спектральной области регистрируется неаддитивное умеренное увеличение относительно монослоя амплитуды наведенных изменений. Дополнительное существенное увеличение амплитуды оптического отклика (до 80 %) наблюдается в системах с четвертьволновыми разделительными слоями Na_3AlF_6 . Оно обусловлено эффектами, связанными с «продольным» фотонным ограничением в многослойных периодических субволновых наноструктурах и с изменением в них эффективности электродинамических фотонно-плазмонных взаимодействий при мощном лазерном возбуждении. При этом происходит не только частичная деградация коллективного плазмона, но и нарушаются резонансные условия, обеспечивавшие деструктивную многолучевую интерференцию в полосе ППП четвертьволновой системы в стационарном состоянии.

Для максимума полосы наведенного поглощения в дифференциальных спектрах также наблюдается закономерность, подобная установленной для полосы наведенного просветления. Его интенсивность последовательно увеличивается в ряду «монослой – многослойник с диэлектрическими прослойками $\lambda_0/30$ – многослойник с четвертьволновыми прослойками». Обращает на себя внимание то обстоятельство, что при переходе от монослоя к 5-слойной системе направление спектрального сдвига максимума наведенного поглощения зависит от типа системы – для многослойника с прослойками $\lambda_0/30$ этот сдвиг происходит в длинноволновую область, а для многослойника с четвертьволновыми прослойками – в коротковолновую. Величина сдвига составляет соответственно 10 и 30 нм. Коротковолновый сдвиг максимума наведенного поглощения для четвертьволновой системы сочетается с более узкой спектральной областью просветления и может также являться результатом проявления «продольного» фотонного ограничения.

На рис. 5, *a* представлена кинетика зависимости оптической плотности от времени задержки на длине волны 440 нм в полосе просветления исследованных систем. Характеристические вре-

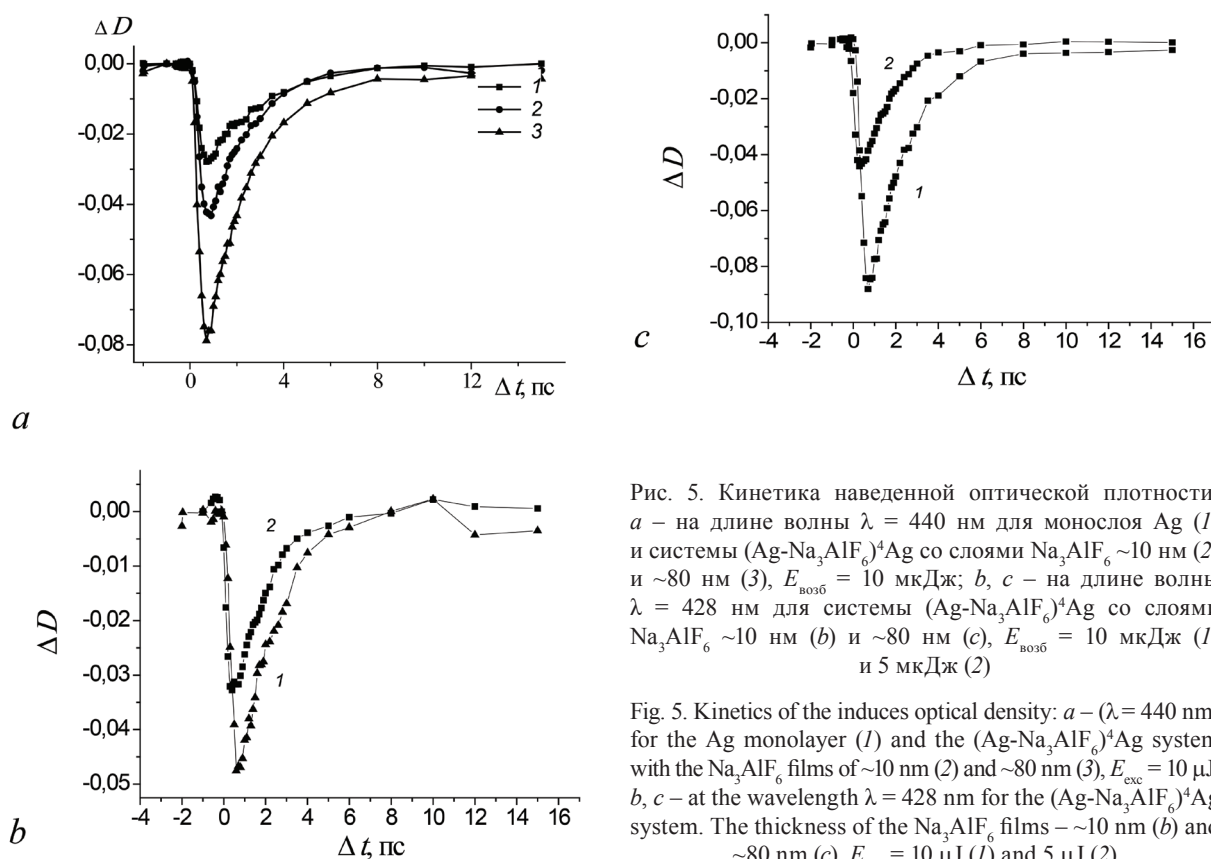


Рис. 5. Кинетика наведенной оптической плотности: *a* – на длине волны $\lambda = 440$ нм для монослоя Ag (1) и системы $(\text{Ag}-\text{Na}_3\text{AlF}_6)^4\text{Ag}$ со слоями Na_3AlF_6 ~ 10 нм (2) и ~ 80 нм (3), $E_{\text{возб}} = 10$ мкДж; *b*, *c* – на длине волны $\lambda = 428$ нм для системы $(\text{Ag}-\text{Na}_3\text{AlF}_6)^4\text{Ag}$ со слоями Na_3AlF_6 ~ 10 нм (*b*) и ~ 80 нм (*c*), $E_{\text{возб}} = 10$ мкДж (1) и 5 мкДж (2)

Fig. 5. Kinetics of the induced optical density: *a* – ($\lambda = 440$ nm) for the Ag monolayer (1) and the $(\text{Ag}-\text{Na}_3\text{AlF}_6)^4\text{Ag}$ system with the Na_3AlF_6 films of ~ 10 nm (2) and ~ 80 nm (3), $E_{\text{exc}} = 10$ μJ ; *b*, *c* – at the wavelength $\lambda = 428$ nm for the $(\text{Ag}-\text{Na}_3\text{AlF}_6)^4\text{Ag}$ system. The thickness of the Na_3AlF_6 films – ~ 10 nm (*b*) and ~ 80 nm (*c*), $E_{\text{exc}} = 10$ μJ (1) and 5 μJ (2)

мена релаксаци наводимых изменений для многослойных наноструктур $(\text{Ag-Na}_3\text{AlF}_6)^4\text{Ag}$ составляют порядка 2 пс и совпадают по величине с временными параметрами кинетического отклика, характерными для соответствующего плотноупакованного монослоя Ag. Затухание наведенных изменений в многослойных системах, как и в соответствующих монослоях, происходит моноэкспоненциально.

Использование более низких энергий возбуждения приводит к уменьшению величины оптического отклика как в области наведенного просветления, так и на длинах волн наведенного поглощения. Это видно из рис. 5, *b*, *c* где сопоставлены амплитуды максимальных наведенных изменений в полосе просветления для систем $(\text{Ag-Na}_3\text{AlF}_6)^4\text{Ag}$ при их облучении фемтосекундными лазерными импульсами с энергией 10 и 5 мкДж. При уменьшенной энергии возбуждения также получается достаточно интенсивный оптический отклик, причем его величина зависит от конструктивных параметров наноструктуры. Характеристические времена релаксации навонимых изменений при уменьшении энергии возбуждения от 10 до 5 мкДж сохраняют свои значения.

Заклучение. Таким образом, проявление эффектов фотонного ограничения в многослойных 1D периодических системах $\text{Ag-Na}_3\text{AlF}_6$ позволяет существенно влиять на спектрально-амплитудные характеристики оптического отклика такой системы на воздействие фемтосекундными лазерными импульсами путем изменения толщины субволновых разделительных диэлектрических прослоек $\text{Ag-Na}_3\text{AlF}_6$ при сохранении суммарной толщины активного плазмонного слоя. Изменение интенсивности возбуждения в исследованном диапазоне энергий также сопровождается симметричным изменением амплитуды оптического отклика, при этом во всех случаях сохраняются его временные параметры.

Благодарности. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке БРФФИ-ВАНТ проекта (Ф16В2-003, VAST.HTQT.BELARUS.02/16-17).

Acknowledgements. This work was partially financed according to the BRFFI-VANT Project (F16V2-003, VAST.HTQT.BELARUS.02/16-17).

Список использованных источников

1. Electron dynamics in metallic nanoparticles / J.-Y. Bigot [et al.] // *Chem. Phys.* – 2000. – Vol. 251, № 1/3. – P. 181–203.
2. Link, S. Optical Properties and Ultrafast Dynamics of Metallic Nanocrystals / S. Link, M. A. El-Sayed // *Annu. Rev. Phys. Chem.* – 2003. – Vol. 54, № 1. – P. 331–366.
3. Femtosecond transient absorption dynamics of closed-packed gold nanocrystal monolayer arrays / S.-K. Eah [et al.] // *Chem. Phys. Lett.* – 2004. – Vol. 386, № 4/6. – P. 390–395.
4. Drastic reduction of plasmon damping in gold nanorods / C. Sonnichsen [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* – 2002. – Vol. 88, № 7. – P. 077402–077404.
5. Teperik, T. Radiative decay of plasmons in a metallic nanoshell / T. Teperik, V. Popov, F. J. Garcia de Abajo // *Phys. Rev. B.* – 2004. – Vol. 69, № 15. – P. 155402–155407.
6. Kachan, S. M. Spectral properties of close-packed monolayers consisted of silver nanospheres / S. M. Kachan, A. N. Ponyavina // *J. Phys.: Cond. Mater.* – 2002. – Vol. 14, № 1. – P. 103–111.
7. Ultrafast spectral dynamics and electric properties of Cu/SiO₂ nanocomposites around the percolation threshold / O. V. Buganov [et al.] // *Proc. of 17th Int. Symp. “Nanostructures: Physics and Technology (NANO-2009)”*. – Minsk, 2009. – P. 93–94.
8. Dynamics of electron excitations in densely packed plasmonic $\text{Ag}/\text{Na}_3\text{AlF}_6$ nanostructures under pulsed laser action / O. V. Buganov [et al.] // *J. Appl. Spectrosc.* – 2011. – Vol. 78, № 5. – P. 686–691.
9. Properties of nanogranular metal–dielectric composites in strong electric fields and the cluster electronic states / L. V. Lutsev [et al.] // *Phys. Solid State.* – 2005. – Vol. 47, № 11. – P. 2169–2179.
10. Kachan, S. M. Spectral characteristics of confined photonic and plasmonic nanostructures / S. M. Kachan, A. N. Ponyavina // *Proc. SPIE.* – 2002. – Vol. 470. – P. 588–593.
11. Optical spectra of metal–dielectric nanocomposites with a layered subwave structure / A. D. Zamkovets [et al.] // *J. Appl. Spectrosc.* – 2003. – Vol. 70, № 4. – P. 593–598.
12. Stsiapura, V. I. Charge transfer process determines ultrafast excited state deactivation of thioflavin T in low-viscosity solvents / V. I. Stsiapura [et al.] // *J. Phys. Chem. A* – 2010. – Vol. 114, № 32. – P. 8345–8350.

References

1. Bigot J.-Y., Halte V., Merle J.-C., Daunois A. Electron dynamics in metallic nanoparticles. *Chemical Physics*, 2000, vol. 251, no. 1–3, pp. 181–203. Doi: 10.1016/s0301-0104(99)00298-0
2. Link S., El-Sayed M. A. Optical Properties and Ultrafast Dynamics of Metallic Nanocrystals. *Annual Review of Physical Chemistry*, 2003, vol. 54, no. 1, pp. 331–366. Doi: 10.1146/annurev.physchem.54.011002.103759
3. Eah S.-K., Jaeger H. M., Scherer N. F., Lin X.-M., Wiederrecht G. P. Femtosecond transient absorption dynamics of closed-packed gold nanocrystal monolayer arrays. *Chemical Physics Letters*, 2004, vol. 386, no. 4–6, pp. 390–395. Doi: 10.1016/j.cplett.2004.01.056
4. Sonnichsen C., Franzl T., Wilk T., Von Plessen G., Feldmann J. Drastic reduction of plasmon damping in gold nanorods. *Physical Review Letters*, 2002, vol. 88, no. 7, pp. 077402–077404. Doi: 10.1103/physrevlett.88.077402
5. Teperik T., Popov V., Garcia de Abajo F. J. Radiative decay of plasmons in a metallic nanoshell. *Physical Review B*, 2004, vol. 69, no. 15, pp. 155402–155407. Doi: 10.1103/physrevb.69.155402
6. Kachan S. M., Ponyavina A. N. Spectral properties of close-packed monolayers consisted of silver nanospheres. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 2002, vol. 14, no. 1, pp. 103–111. Doi: 10.1088/0953-8984/14/1/309
7. Buganov O. V., Kachan S. M., Ponyavina A. N., Svito I. A., Fedotova J. A., Fedotov A. K., Tikhomirov S. A. Ultrafast spectral dynamics and electric properties of Cu/SiO₂ nanocomposites around the percolation threshold. *Proceedings of 17th International Symposium “Nanostructures: Physics and Technology (NANO-2009)”*. Minsk, 2009, pp. 93–94.
8. Buganov O. V., Zamkovets A. D., Ponyavina A. N., Tikhomirov S. A., Baran L. V. Dynamics of electron excitations in densely packed plasmonic Ag/Na₃AlF₆ nanostructures under pulsed laser action. *Journal of Applied Spectroscopy*, 2011, vol. 78, no. 5, pp. 686–691. Doi: 10.1007/s10812-011-9518-6
9. Lutsev L. V., Kopytin M. N., Sitnikov A. V., Stogney O. V. Properties of nanogranular metal-dielectric composites in strong electric fields and the cluster electronic states. *Physics of the Solid State*, 2005, vol. 47, no. 11, pp. 2169–2179. Doi: 10.1134/1.2131164
10. Kachan S. M., Ponyavina A. N. Spectral characteristics of confined photonic and plasmonic nanostructures. *Proceedings SPIE*, 2002, vol. 470, pp. 588–593.
11. Zamkovets A. D., Kachan S. M., Ponyavina A. N., Sil’vanovich N. I. Optical spectra of metal-dielectric nanocomposites with a layered subwave structure. *Journal of Applied Spectroscopy*, 2003, vol. 70, no. 4, pp. 593–598. Doi: 10.1023/A:1026110817465
12. Stsiapura V. I., Maskevich A. A., Tikhomirov S. A., Buganov O. V. Charge transfer process determines ultrafast excited state deactivation of thioflavin T in low-viscosity solvents. *The Journal of Physical Chemistry A*, 2010, vol. 114, no. 32, pp. 8345–8350. Doi: 10.1021/jp105186z

Информация об авторах

Замковец Анатолий Дмитриевич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории физики инфракрасных лучей, Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси (пр. Независимости, 68, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: a.zamkovets@dragon.bas-net.by

Понявина Алина Николаевна – доктор физико-математических наук, доцент, главный научный сотрудник лаборатории физики инфракрасных лучей, Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси (пр. Независимости, 68, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: ponyavin@imaph.bas-net.by

Буганов Олег Васильевич – кандидат физико-математических наук, заместитель заведующего лабораторией физики инфракрасных лучей, Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси (пр. Независимости, 68, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: o.buganov@ifanbel.bas-net.by

Тихомиров Сергей Александрович – доктор физико-математических наук, член-корреспондент, заведующий лабораторией физики инфракрасных лучей, Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси (пр. Независимости, 68, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: s.tik@ifanbel.bas-net.by

Information about the authors

Zamkovets Anatoly Dmitrievich – Ph. D. (Physics and Mathematics), Senior Researcher of the Laboratory of Physics of Infrared Rays, B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (68, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: a.zamkovets@dragon.bas-net.by

Ponyavina Alina Nikolaevna – D. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Chief Researcher of the Laboratory of Physics of Infrared Rays, B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (68, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: ponyavin@imaph.bas-net.by

Buganov Oleg Vasil’evich – Ph. D. (Physics and Mathematics), Deputy Head of the Laboratory of Physics of Infrared Rays, B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (68, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: o.buganov@ifanbel.bas-net.by

Tikhomirov Sergei Aleksandrovich – D. Sc. (Physics and Mathematics), Corresponding Member, Head of the Laboratory of Physics of Infrared Rays, B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (68, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: s.tik@ifanbel.bas-net.by

Фам Хон Мынь – кандидат физико-математических наук, заведующий лабораторией, Институт физики Вьетнамской академии наук и технологий (10, Dao Tan street, Cong Vi, Da Dinh, Hanoi, Vietnam). E-mail: phminh@iop.vast.ac.vn

Нгуен Тан Бынь – профессор, Институт физики Вьетнамской академии наук и технологий (10, Dao Tan street, Cong Vi, Da Dinh, Hanoi, Vietnam). E-mail: ntbinh@gmail.com

Нгуен Дай Хунг – профессор, Институт физики Вьетнамской академии наук и технологий (10, Dao Tan street, Cong Vi, Da Dinh, Hanoi, Vietnam). E-mail: daihung@iop.vast.ac.vn

Для цитирования

Спектрально-временная динамика нестационарного поглощения многослойных периодических плазмонных наноструктур / О. В. Буганов [и др.] // Вест. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2017. – № 2. – С. 82–90.

Pham Hong Minh – Ph. D. (Physics and Mathematics), Head of the Laboratory, Institute of Physics of the Vietnam Academy of Science and Technology (10, Dao Tan Str., Cong Vi, Da Dinh, Hanoi, Vietnam). E-mail: phminh@iop.vast.ac.vn

Nguyen Thanh Binh – Professor, Institute of Physics of the Vietnam Academy of Science and Technology (10, Dao Tan Str., Cong Vi, Da Dinh, Hanoi, Vietnam). E-mail: phminh@iop.vast.ac.vn

Nguyen Dai Hung – Professor, Institute of Physics of the Vietnam Academy of Science and Technology (10, Dao Tan Str., Cong Vi, Da Dinh, Hanoi, Vietnam). E-mail: phminh@iop.vast.ac.vn

For citation

Buganov O. V., Zamkovets A. D., Ponyavina A. N., Tikhomirov S. A., Pham Hong Minh, Nguyen Thanh Binh, Nguyen Dai Hung. Spectral-temporal dynamics of transient absorption of multilayer periodic plasmonic nanostructures. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series], 2017, no. 2, pp. 82–90. (in Russian).

И. В. Балыкин^{1,2}, Т. А. Железнякова^{1,2}, А. А. Рыжевич¹¹Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь²Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь**ИЗМЕНЕНИЕ МОЩНОСТИ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ ПРИ ПРОХОЖДЕНИИ СЛОЕВ РАССЕИВАЮЩЕЙ СРЕДЫ**

Лазерное излучение широко используется для оптической диагностики различных рассеивающих сред. В подавляющем большинстве случаев для этих целей применяются лазерные пучки, имеющие гауссов профиль. В то же время световые пучки других типов имеют ряд особенностей, с помощью которых можно получить дополнительную информацию об исследуемых объектах. В данном контексте актуальной является задача выявления проникающей способности световых пучков различных типов в рассеивающей среде с целью их последующего применения для неразрушающего контроля различных объектов, в том числе биотканей. В настоящей работе проведен сравнительный анализ четырех различных конфигураций лазерных световых пучков: гауссова, лагерь-гауссова и бесселевых световых пучков нулевого и первого порядков в отношении сохраненной ими мощности после прохождения слоя рассеивающей среды. Для формирования световых пучков применялся гелий-неоновый лазер, излучающий на длине волны 0,633 мкм, и модульная оптическая схема, позволяющая изменять профиль светового пучка путем включения/исключения из светового тракта соответствующих модулей. В качестве рассеивающей среды использовались плоскопараллельные слои полупрозрачной силиконовой резины различных толщин в диапазоне от 0,17 до 6,61 мм. По результатам экспериментальных измерений построены аппроксимирующие кривые для зависимости мощности прошедших через слой рассеивающей среды световых пучков четырех типов от толщины слоя вида $I = \exp(-Dx)$, где D – показатель ослабления, I – суммарная мощность пучка, x – толщина слоя. Рассчитаны значения коэффициента D для разных типов пучков. Значения D мало (в пределах стандартной ошибки) отличаются для разных типов пучков, из чего следует, что тип пучка в данной конфигурации оптической схемы практически не влияет на его проникающие свойства и суммарную энергию света, прошедшего через слой рассеивающего материала.

Ключевые слова: гауссов световой пучок, лагерь-гауссов световой пучок, бесселев световой пучок нулевого порядка, бесселев световой пучок первого порядка, рассеивающая среда

I. V. Balykin^{1,2}, T. A. Zheleznyakova^{1,2}, A. A. Ryzhevich¹¹B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus²Belarusian State University, Minsk, Belarus**POWER CHANGES IN DIFFERENT-TYPE LIGHT BEAMS AFTER PASSING THROUGH THE LAYERS OF DIFFERENT-THICKNESS SCATTERING MEDIUM**

Laser radiation is extensively used for optical diagnostics of various scattering media. In most cases, laser beams having a Gaussian profile are applied for this task. At the same time, other-type light beams have some features that can be used to obtain additional information about investigated objects. In this context, a relevant task is to reveal the penetrability of different-type light beams in a scattering medium with their subsequent application for the nondestructive testing of various objects, including biological tissues. In this article, a comparative analysis is carried out for four different configurations of laser light beams (Gaussian, Laguerre-Gaussian, and zero- and first-order Bessel light beams) in relation to the power stored by them after passing through a scattering medium layer. To form the light beams we used helium-neon laser emitting at a wavelength of 0.633 micrometers, and a modular optical system. This system makes it possible to change the light beam profile by the inclusion / exclusion of the corresponding modules from the light path. As the scattering medium we used plane-parallel layers of semi-transparent silastic with the thickness ranging from 0.17 to 6.61 mm. It is investigated experimentally how the power of the light beam passing through the scattering medium layer depends on the layer thickness. According to the obtained results, the approximating curves are plotted in the form $I = \exp(-Dx)$ where D is the attenuation coefficient, I is the total power of the beam, x is the layer thickness. The values of the coefficient D for different-type beams are calculated. The D values for different-type beams scarcely differ (within the standard error) from each other. It means that the beam type in the optical system configuration has almost no effect on the penetration properties of the light beam, and on the total energy of the light passing through the scattering medium layer.

Keywords: Gaussian light beam, Laguerre-Gaussian light beam, zero-and first-order Bessel light beam, first-order Bessel light beam, scattering media

Введение. В настоящее время лазерное излучение широко используется для оптической диагностики различных рассеивающих сред, включая биоткани. В подавляющем большинстве случаев для этих целей применяются лазерные пучки, имеющие гауссов профиль [1]. В то же время световые пучки других типов имеют ряд особенностей, с помощью которых можно получить дополнительную информацию об исследуемых объектах либо оказать дополнительное воздействие на них.

Одним из наиболее важных свойств световых пучков в данном контексте является их проникающая способность. Актуальной представляется задача выявления проникающей способности световых пучков различных типов в рассеивающей среде с целью последующего их использования для неразрушающего контроля различных объектов, в том числе биотканей [2–4]. В настоящей работе проведен сравнительный анализ четырех различных конфигураций лазерных световых пучков: гауссова, лаггерр-гауссова [5] и бесселевых световых пучков нулевого (БСП₀) [6] и первого (БСП₁) [7] порядков в отношении сохранения ими энергии после прохождения слоя рассеивающей среды [4].

1. Прохождение гауссова светового пучка через наборы тонких образцов фантомов биоткани. В данном случае для исследований нами были использованы два парных комплекта из четырех различных по толщине образцов фантомов, моделирующих биологическую ткань. Образцы были изготовлены из силикона методом центрифугирования и предоставлены авторам для исследования сотрудниками Yonsei University (Южная Корея). Всего четыре различных толщины имевшихся в наличии образцов не позволяли определить даже качественной зависимости, поэтому была использована следующая методика: образцы из обоих одинаковых наборов последовательно объединялись в группы по три с помощью жесткой направляющей и исследовались как единое целое (рис. 1). Таким образом было составлено 25 возможных групп образцов с различными общими средними толщинами, которые варьировались от 315,4 до 401,9 мкм с переменной разницей между ближайшими толщинами от 2,3 до 9,4 мкм.

Для большей репрезентативности полученных данных измерения энергии проходящего через образцы пучка производились не в одной отдельной точке за образцом, а в двадцати шести, расположенных на отрезке длиной 25 мм с шагом 1 мм. Эта процедура автоматически осуществлялась с использованием моторизованного актуатора 6, который перемещал направляющую 3 с образцами вдоль прямой в плоскости, перпендикулярной оси пучка.

Однородность фантомов биологической ткани исследовалась путем измерения средней интенсивности проходящего гауссова светового пучка с длиной волны 0,633 мкм и диаметром примерно 1 мм в различных точках за образцами. Средняя яркость пиксела в данном случае отождествлялась с мощностью лазерного излучения в условных единицах. Для исключения эффектов, связанных со стационарностью режима работы лазера, измерения проводились дважды: один раз при движении направляющей с образцами в направлении увеличения поперечной координаты, второй – при движении в направлении уменьшения поперечной координаты. Результаты для 4 серий измерений приведены в табл. 1. На графиках зависимости показаны не экспериментальными точками, а линиями, их соединяющими, потому что таким образом легче визуально оценить, насколько полученные экспериментальные зависимости близки друг к другу. Видно, что внешне распределения интенсивности для одних и тех же координат очень схожи между собой, что свидетельствует о хорошей воспроизводимости результатов при использовании актуатора. Из сравнения распределений понятно, что флуктуации интенсивности по большей части не являются случайными, а вызваны, в основном, неоднородностью образца. Значения флуктуаций интенсивности зачастую превышают 10 % от максимального значения, поэтому однородность образцов, изготовленных методом центрифугирования, нельзя признать удовлетворительной.

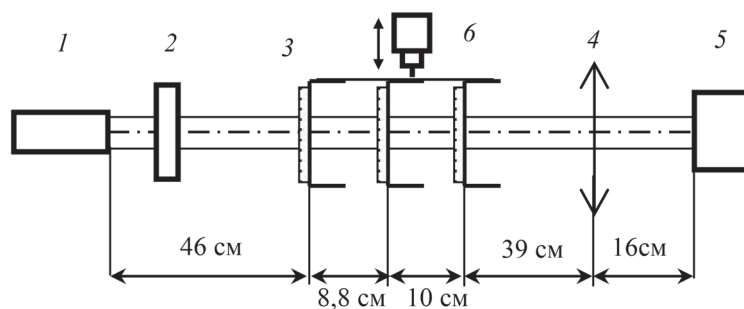


Рис. 1. Схема установки: 1 – лазер ЛГН-207а; 2 – фильтр 0,3×0,8; 3 – направляющая с образцами; 4 – положительная линза; 5 – CCD-камера CoolSnapEZ; 6 – моторизованный актуатор, сопряженный с компьютером

Fig. 1. Schematic of the experimental setup: 1 – He-Ne laser LGN-207a; 2 – 0.3×0.8 filter; 3 – guide with samples; 4 – positive lens; 5 – CCD-camera CoolSnapEZ; 6 – motorized actuator connected to PC

Таблица 1. Зависимость средней яркости пиксела от величины поперечного смещения образца

Table 1. Average pixel brightness dependence on the transverse displacement of a sample

Наименование серии	Суммарная толщина, мкм	График полученной зависимости
'1-1', '1-2', '1-4'	359,8	<p>Средняя яркость пиксела, отн. ед. Average brightness of a pixel, arb. units</p> <p>— При смещении в прямом направлении By displacement in forward direction</p> <p>— При смещении в обратном направлении By displacement in reverse direction</p> <p>Поперечное смещение, см Transverse displacement, cm</p>
'1-1', '1-3', '1-4'	348,2	<p>Средняя яркость пиксела, отн. ед. Average brightness of a pixel, arb. units</p> <p>— При смещении в прямом направлении By displacement in forward direction</p> <p>— При смещении в обратном направлении By displacement in reverse direction</p> <p>Поперечное смещение, см Transverse displacement, cm</p>
'1-3', '1-4', '2-3'	324,8	<p>Средняя яркость пиксела, отн. ед. Average brightness of a pixel, arb. units</p> <p>— При смещении в прямом направлении By displacement in forward direction</p> <p>— При смещении в обратном направлении By displacement in reverse direction</p> <p>Поперечное смещение, см Transverse displacement, cm</p>
'1-4''2-2''2-4'	329,5	<p>Средняя яркость пиксела, отн. ед. Average brightness of a pixel, arb. units</p> <p>— При смещении в прямом направлении By displacement in forward direction</p> <p>— При смещении в обратном направлении By displacement in reverse direction</p> <p>Поперечное смещение, см Transverse displacement, cm</p>

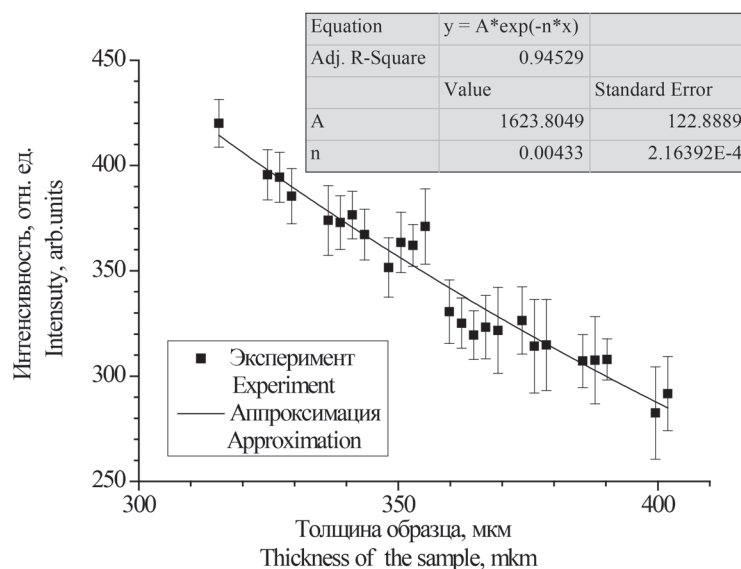


Рис. 2. Зависимость интенсивности прошедшего излучения от толщины образца и ее аппроксимация экспоненциальной функцией

Fig. 2. Dependence of the passed radiation intensity on the sample thickness and its approximation by the exponential function

После обработки данных был получен график зависимости интенсивности проходящего излучения от толщины образца, приведенный на рис. 2.

Точки соответствуют среднему значению средней яркости всех кадров в серии (яркость кадра определяется как среднее по всем пикселям), отрезки с засечками обозначают стандартное отклонение значения яркости кадра.

Поскольку по меньшей мере три отрезка среднеквадратических отклонений даже не пересекают построенную аппроксимирующую кривую, можно усомниться в том, что эта кривая, если ее продлить, достаточно точно опишет закономерность ослабления светового пучка после прохождения рассеивающих слоев большей толщины (10 и более миллиметров).

2. Сравнение проникающей способности различных типов пучков. Так как в ходе исследований стало очевидным, что объединение предоставленных образцов в серии не позволяет достичь достаточно информативного диапазона толщин, было принято решение изготовить

Таблица 2. Толщины изготовленных плоскопараллельных силиконовых образцов
Table 2. Thicknesses of the produced plane-parallel silicone samples

Комплект 1. «Тонкие»		Комплект 2. «Толстые»	
Наименование	Толщина, мм	Наименование	Толщина, мм
1	0,17	1	1,07
2	0,34	2	2,2
3	0,51	3	3,31
4	0,68	4	4,37
5	0,85	5	5,585
6	1,02	6	6,615
7	1,19		
8	1,36		
9	1,53		
10	1,70		
11	1,87		
12	2,04		

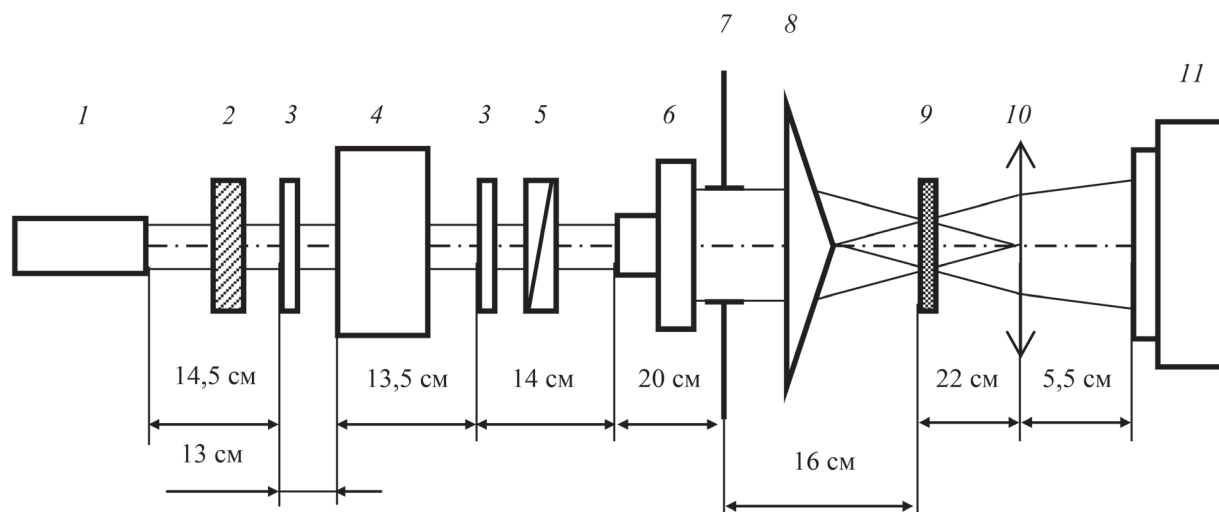


Рис. 3. Установка для изучения закономерностей прохождения световых пучков различных типов через тонкие образцы фантомов биологической ткани:

1 – лазер ЛГН-207; 2 – фильтр; 3 – пластинки $\lambda/4$; 4 – двуосный кристалл; 5 – поляризатор; 6 – телескоп; 7 – диафрагма; 8 – аксикон с углом при основании конуса 1° ; 9 – образец; 10 – линза; 11 – CCD-камера

Fig. 3. Experimental setup for investigation of the regularities of different-type light beams passing through the thin samples of biological tissue phantoms:

1 – He-Ne laser LGN-207a; 2 – filter; 3 – $\lambda/4$ -plates; 4 – biaxial crystal; 5 – polarizer; 6 – telescope; 7 – diaphragm; 8 – axicon with an angle of 1° at the cone base; 9 – sample; 10 – lens; 11 – CCD-camera

удовлетворяющий всем требованиям набор плоскопараллельных образцов из полупрозрачной силиконовой резины на уксусном растворителе, при этом их плоскопараллельность и определенная толщина (табл. 2) обеспечивались полированными до оптической чистоты стеклянными пластинами, находящимися на фиксированном расстоянии друг от друга.

Именно на этом наборе образцов и выполнялся сравнительный анализ характеристик разных световых пучков. Оптическая модульная схема установки, на которой проводились исследования, приведена на рис. 3.

Конфигурация установки была подобрана таким образом, чтобы, извлекая или добавляя в нее оптические элементы, можно было формировать четыре различных вида световых пучков: гауссов (стоят элементы 1–3, 5–7, 9–11), лаггерр-гауссов (стоят элементы 1–7, 9–11), бесселевы нулевого (стоят элементы 1–3, 5–11) и первого (стоят элементы 1–11) порядков. Следует отметить, что для достижения равных диаметров светового пучка в плоскости образца увеличение телескопа было различным для разных пучков: для БСП₀ и БСП₁ оно составляло 6, для гауссова и лаггерр-гауссова – 3. При изучении закономерностей распространения БСП₀ и БСП₁ образец помещался в середину ромбоида, формируемого аксиконом с углом при основании 1 градус. Методика измерений была аналогична описанной в разделе 1: образец смещался вдоль отрезка в плоскости, поперечной оси пучка, всего проводилось 26 измерений с интервалом в 0,2 мм, затем полученные значения средней яркости кадра усреднялись.

Сделанные авторами образцы показали более высокую однородность, нежели изготовленные методом центрифугирования. В табл. 3 приведены зависимости средней по кадру яркости пиксела от поперечного смещения образца в одном направлении для наиболее тонкого и наиболее толстого образцов из комплекта 1 и аналогичной пары образцов из комплекта 2. Данные зависимости были получены для всех образцов, и во всех случаях максимальная разница значений мощности светового пучка, прошедшего сквозь образец в разных местах, не превышала 1 % от максимального значения мощности прошедшего пучка.

Конечные результаты для мощности прошедших сквозь образец пучков с усреднением по 26 значениям приведены на рис. 4.

Таблица 3. Зависимость средней по кадру яркости пиксела от величины поперечного смещения образца

Table 3. Dependence of frame-average pixel brightness on the transverse displacement of a sample

Наименование образца	Толщина, мм	График полученной зависимости
Комплект 1, образец 1	0,17	<p>Средняя яркость пиксела, отн. ед. Average brightness of a pixel, arb. units</p> <p>Поперечное смещение, см Transverse displacement, cm</p>
Комплект 1, образец 12	2,04	<p>Средняя яркость пиксела, отн. ед. Average brightness of a pixel, arb. units</p> <p>Поперечное смещение, см Transverse displacement, cm</p>
Комплект 2, образец 1	1,07	<p>Средняя яркость пиксела, отн. ед. Average brightness of a pixel, arb. units</p> <p>Поперечное смещение, см Transverse displacement, cm</p>
Комплект 2, образец 6	6,615	<p>Средняя яркость пиксела, отн. ед. Average brightness of a pixel, arb. units</p> <p>Поперечное смещение, см Transverse displacement, cm</p>

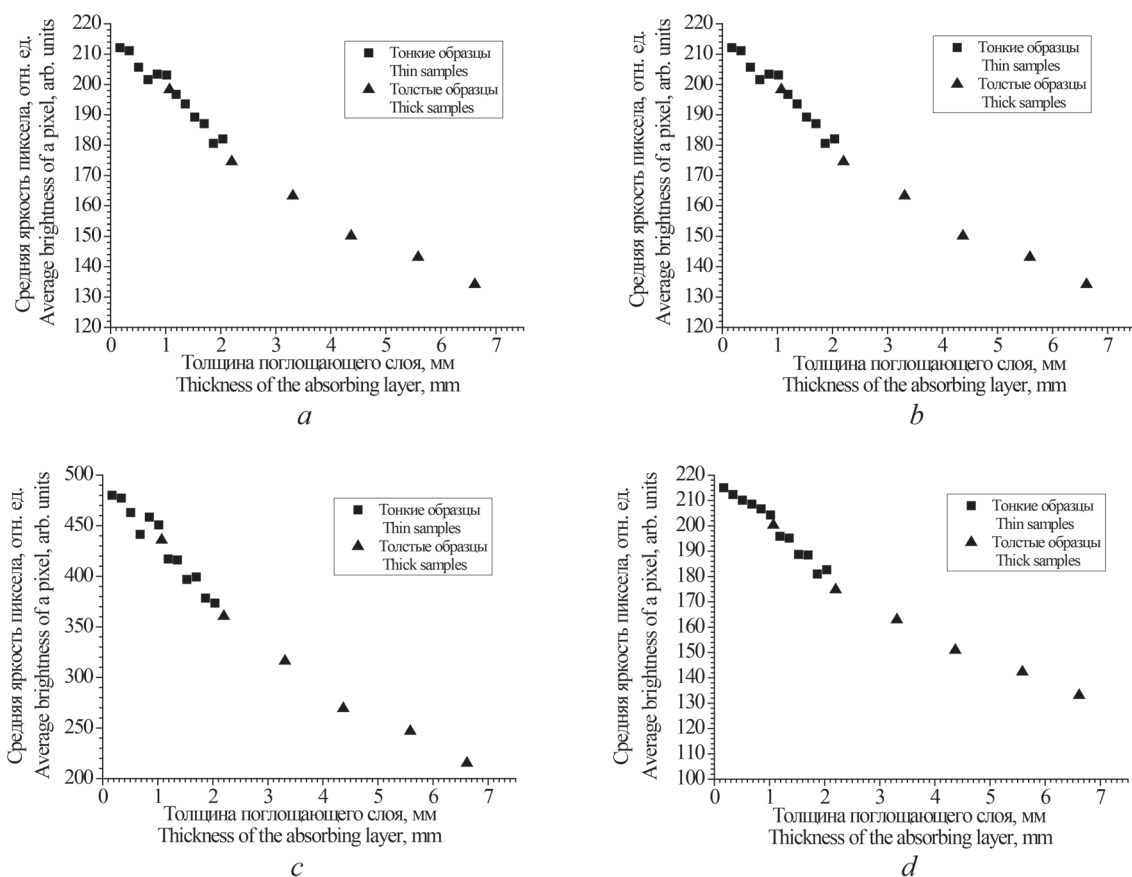


Рис. 4. Зависимость мощности прошедшего через образец излучения от толщины образца:
 а – гауссов световой пучок; б – лаггерр-гауссов световой пучок; с – БСП₀; д – БСП₁

Fig. 4. Dependence of the power of radiation passed through the sample on the sample thickness:
 а – Gaussian light beam; б – Laguerre-Gaussian light beam; с – BLB₀; д – BLB₁

По результатам экспериментальных измерений построены аппроксимирующие кривые для зависимости мощности прошедших через слой рассеивающей среды световых пучков четырех типов от толщины слоя, имеющие вид $I = \exp(-Dx)$, где D – показатель ослабления, I – суммарная мощность пучка, x – толщина слоя. Рассчитанные значения коэффициента D со значениями стандартной ошибки для разных типов пучков приведены в табл. 4.

Таблица 4. Значения показателя ослабления D для различных пучков

Table 4. Attenuation coefficients D for different beams

Тип пучка	D , 1/мм	Стандартная ошибка среднего, 1/мм
БСП ₀	0,192	0,007
БСП ₁	0,197	0,009
Гауссов световой пучок	0,188	0,009
Лагерр-гауссов световой пучок	0,189	0,009

Видно, что значения коэффициента D мало (в пределах стандартной ошибки) отличаются для разных типов пучков, особенно хорошо это демонстрирует рис. 5, на котором представлены нормированные по динамическому диапазону сигнала графики аппроксимаций для разных типов пучков. Поскольку на рис. 5, а различить кривые практически невозможно, на рис. 5, б мы показали участки кривых в диапазоне толщин 6–10 см, что позволило увидеть хотя бы незначительную ранжировку по мощности различных типов световых пучков, прошедших через образцы.

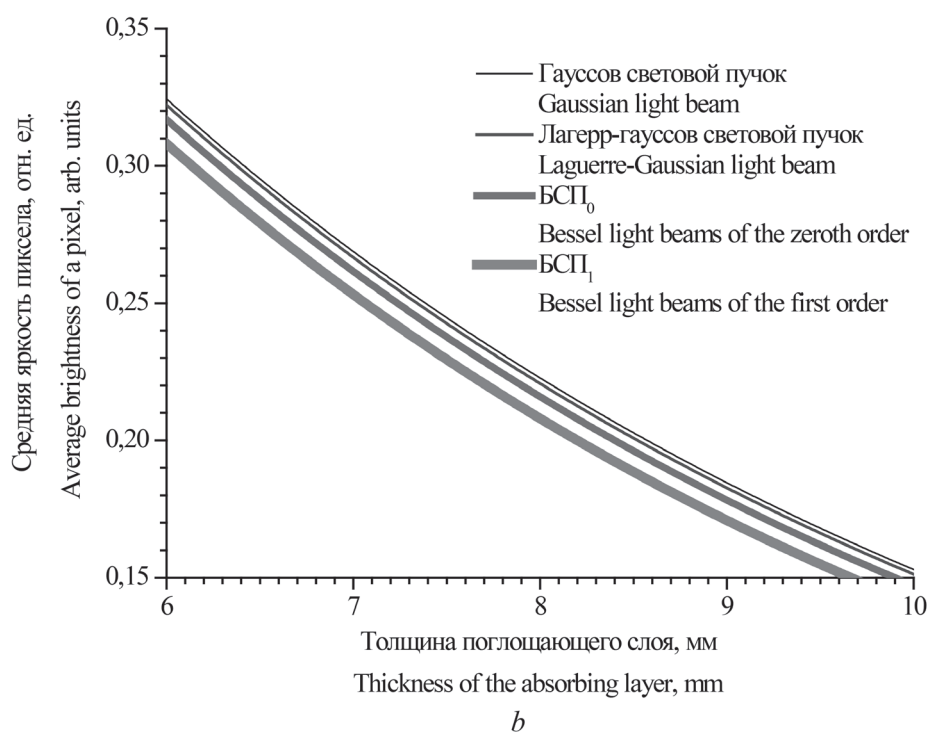
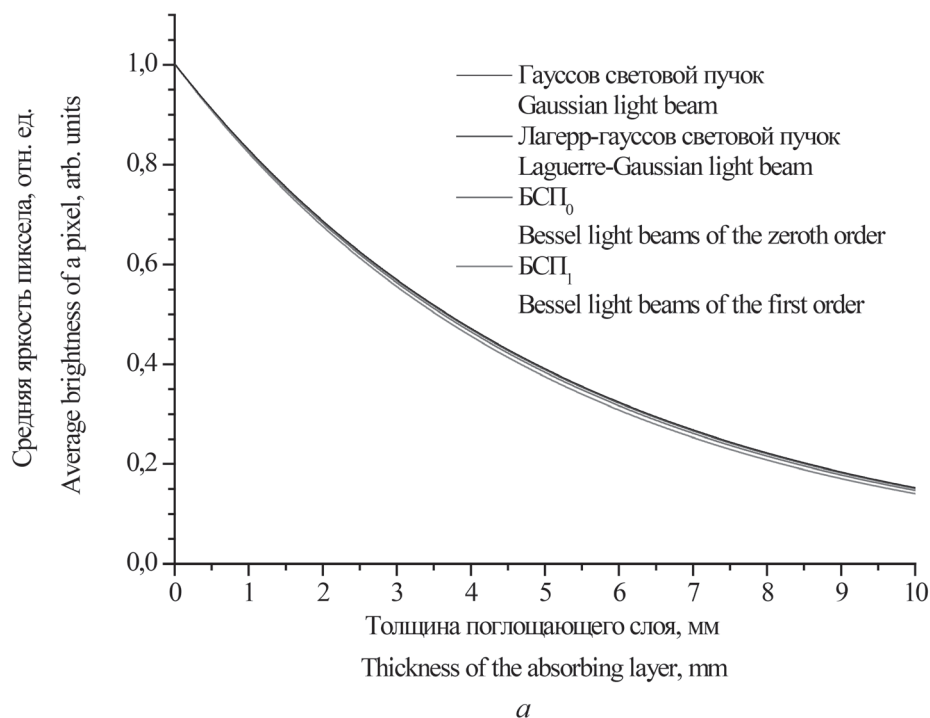


Рис. 5. Зависимости энергии проходящих пучков от толщины поглощающего слоя, полученные аппроксимацией экспериментальных данных: *a* – аппроксимация в диапазоне 0–10 мм; *b* – аппроксимация в диапазоне 6–10 мм

Fig. 5. Dependences of the energy of passing beams on the absorbing layer thickness obtained by the approximation of the experimental data: *a* – approximation over the range 0–10 mm; *b* – approximation over the range 6–10 mm

Из этого следует, что тип пучка в данной конфигурации экспериментальной схемы практически не влияет на его проникающие свойства и суммарную энергию света, прошедшего через слой рассеивающего материала.

Выводы. В результате экспериментов не обнаружилось существенного преимущества какого-либо типа пучка перед другими в отношении проникающей способности. При этом следует привести довод в пользу применения в клинической практике бесселевых пучков по сравнению с гауссовыми и лаггерр-гауссовыми. Так, в процессе неинвазивной диагностики и лечения продольные (вдоль направления распространения света) колебания локальных участков кожи, обусловленные дыханием, дрожью и другими перемещениями участков организма, не оказывают влияния на эффект от применяемого метода. Это объясняется тем, что бесселев пучок имеет относительно длинный локализованный пик интенсивности на оси, который распространяется без изменения ширины даже в сильно рассеивающих средах, таких как биологические ткани, на расстояния, на порядок превосходящие достижимые с обычными гауссовыми пучками. Благодаря стабильности диаметра осевого максимума БСП, их можно также использовать для обнаружения и изучения очень небольших подозрительных объектов внутри толстого образца, что невозможно при использовании гауссова пучка.

Благодарности. Работа выполнена в рамках Государственной программы научных исследований «Фотоника, опто- и микроэлектроника», 2016–2017 гг., задание 1.1.01. Авторы выражают благодарность профессору Бюнгю Джангу (Yonsei University, Южная Корея) за предоставленные для исследования образцы фантомов биоткани.

Acknowledgements. This work is executed within the framework of the State Program of Scientific Investigations “Photonics, Opto- and Microelectronics”, 2016–2017, Task 1.1.01. The authors are grateful to Prof. Byungio Jung (Yonsei University, Gangwon-do, Korea) for the biological tissue phantom samples given for investigation.

Список использованных источников

1. Гончаренко, А. М. Гауссовы пучки света / А. М. Гончаренко. – Минск: Наука и техника, 1977. – 144 с.
2. Rohrbach, A. Artifacts resulting from imaging in scattering media: a theoretical prediction / A. Rohrbach // *Opt. Lett.* – 2009. – Vol. 34. № 19. – P. 3041–3043.
3. Peculiarities of propagation of quasi-diffraction-free light beams in strongly scattering absorbing media / I. L. Katsev [et al.] // *Quant. Electron.* – 2006. – Vol. 36, № 4. – P. 357–362.
4. Kulikov, K. *Laser Interaction with Biological Material* / K. Kulikov. – [S. l.]: Springer Int. Publ., Switzerland, 2014. – 155 p. – (Biological and Medical Physics, Biomedical Engineering).
5. Kazak, N. S. Formation and Transformation of Non-Bessel Multiring Light Beams / N. S. Kazak, E. G. Katranzhi, A. A. Ryzhevich // *J. Appl. Spectrosc.* – 2002. – Vol. 69, № 2. – P. 279–285.
6. Durnin, J. Diffraction-Free Beams / J. Durnin, J. J. Jr. Miceli, J. H. Eberly // *Phys. Rev. Lett.* – 1987. – Vol. 58, № 15. – P. 1499–1501.
7. Formation of higher-order Bessel light beams in biaxial crystals / T. A. King [et al.] // *Opt. Commun.* – 2001. – Vol. 187, № 4/6. – P. 407–414.

References

1. Goncharenko A. M. *Gauss Light Beam*. Minsk, Nauka i Tekhnika Publ., 1977. 144 p. (in Russian).
2. Rohrbach A. Artifacts resulting from imaging in scattering media: a theoretical prediction. *Optical Letters*, 2009, vol. 34, no. 19, pp. 3041–3043. Doi: 10.1364/OL.34.003041
3. Katsev I. L., Prikhach A. S., Kazak N. S., Kroening M. Peculiarities of propagation of quasi-diffraction-free light beams in strongly scattering absorbing media. *Quantum Electronics*, 2006, vol. 36, no. 4, pp. 357–362. Doi: 10.1070/qe2006v-036n04abeh013151
4. Kulikov K. *Laser Interaction with Biological Material. Biological and Medical Physics, Biomedical Engineering*. Springer International Publishing Switzerland, 2014. 155 p. Doi: 10.1007/978-3-319-01739-6
5. Kazak N. S. Katranzhi E. G., Ryzhevich A. A. Formation and Transformation of Non-Bessel Multiring Light Beams. *Journal of Applied Spectroscopy*, 2002, vol. 69, no. 2, pp. 279–285. Doi: 10.1023/A:1016105706082
6. Durnin J., Miceli J. J. Jr., Eberly J. H. Diffraction-Free Beams. *Physics Review Letters*, 1987, vol. 58, no. 15, pp. 1499–1501. Doi: 10.1103/physrevlett.58.1499
7. King T. A. Hogervorst W., Kazak N. S., Khilo N. A., Ryzhevich A. A. Formation of higher-order Bessel light beams in biaxial crystals. *Optics Communications*, 2001, vol. 187, no. 4/6, pp. 407–414. Doi: 10.1016/s0030-4018(00)01124-x

Информация об авторах

Балыкин Игорь Валерьевич – лаборант Центра «Диагностические системы» (лаборатория оптической диагностики), Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси (пр. Независимости, 68, 220072, г. Минск, Республика Беларусь); студент факультета радиопизики и компьютерных технологий, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: b97@dragon.bas-net.by

Железнякова Татьяна Александровна – младший научный сотрудник Центра «Диагностические системы» (лаборатория оптической диагностики), Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси (пр. Независимости, 68, 220072, г. Минск, Республика Беларусь); старший преподаватель кафедры физики и аэрокосмических технологий Белорусского государственного университета (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: zhelez@bsu.by

Рыжевич Анатолий Анатольевич – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Центра «Диагностические системы» (лаборатория оптической диагностики), Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси (пр. Независимости, 68, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: tol@dragon.bas-net.by

Для цитирования

Балыкин, И. В. Изменение мощности световых пучков различных типов при прохождении слоев рассеивающей среды / И. В. Балыкин, Т. А. Железнякова, А. А. Рыжевич // Вест. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2017. – № 2. – С. 91–100.

Information about the authors

Balykin Igor Valerievich – Laboratory Assistant, the Centre “Diagnostic Systems” (Laboratory for Optical Diagnostics), B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (68, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus); Student of Radiophysics and Computer Technologies Faculty, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: b97@dragon.bas-net.by

Zheleznyakova Tatyana Aleksandrovna – Junior Researcher, Centre “Diagnostic Systems” (Laboratory for Optical Diagnostics), B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (68, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus); Senior Lecturer at the Department of Physics and Aerospace Technologies, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: zhelez@bsu.by

Ryzhevich Anatol Anatolievich – Ph. D. (Physics and Mathematics), Leading Researcher, Centre “Diagnostic Systems” (Laboratory for Optical Diagnostics), B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (68, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: tol@dragon.bas-net.by

For citation

Balykin I. V., Zheleznyakova T. A., Ryzhevich A. A. Power changes in different-type light beams after passing through the layers of different-thickness scattering medium. *Vesti Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series], 2017, no. 2, pp. 91–100. (in Russian).

ИНФОРМАТИКА
INFORMATICS

УДК 621.391.01

Поступила в редакцию 23.12.2016

Received 23.12.2016

А. С. Поляков

*Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси,
Минск, Беларусь*

**КОРРЕКЦИЯ ОШИБОК ПРИ ПЕРЕДАЧЕ ИНФОРМАЦИИ
ПО ЗНАЧЕНИЯМ ЧЕТНОСТИ КООРДИНАТ БИНАРНОЙ МАТРИЦЫ**

Предлагаемый способ обнаружения и исправления ошибок в передаваемой по каналам связи информации основан на использовании хорошо известного в теории связи критерия «четность координат бинарной матрицы», которая представляет собой содержание передаваемого сообщения. Обычно используется четность по двум координатам: строкам и столбцам матрицы. В настоящей работе, в отличие от устоявшегося на практике учета только двух координат, коррекция ошибок производится на основе расширенного множества координат элементов бинарной матрицы, к которым относятся строки, столбцы, главные и вспомогательные диагонали матрицы. Поиск ошибок выполняется путем формирования множества вероятных адресов ошибочных элементов на основе списков номеров ошибочных координат и последующего анализа этого множества с целью исключения адресов ложных (несуществующих) ошибок. При этом учитываются все четыре координаты элементов бинарной матрицы, что позволяет с небольшими затратами быстро обнаруживать одиночные, двойные и групповые ошибки. Эффективность способа повышается с увеличением отношения «число столбцов / число строк» бинарной матрицы.

Ключевые слова: бинарная матрица, диагонали, ошибки, координаты ошибок, четность координат, главные диагонали матрицы, вспомогательные диагонали матрицы

A. S. Poljakov

United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

**ERROR CORRECTION WHEN TRANSMITTING INFORMATION
BY A PARITY CHECK OF BINARY MATRIX COORDINATES**

A method is offered for detecting and correcting the errors of information transmitted over communication channels based on the use of well-known in the theory of communication "parity coordinate" of a binary matrix which is the content of the message being transmitted. The parity is commonly used in two coordinates: rows and columns of the matrix. In contrast to the well-established practice of considering only two coordinates, it is proposed to do the error correction on the basis of an extended set of coordinates of matrix elements, among which are rows, columns, as well as main and auxiliary diagonals. Troubleshooting is made by generating a set of possible addresses of erroneous elements and a subsequent analysis of this set to avoid false addresses (non-existent) errors. This takes into account the four coordinates of binary matrix elements, which allows a low cost and fast detection of single, double, and group errors. The effectiveness of the method becomes higher with increase in the ratio "number of columns / rows number" of a binary matrix.

Keywords: binary matrix, diagonal, errors, error coordinates, coordinate parity, main diagonals of the matrix, auxiliary diagonals of the matrix

Введение. Несмотря на серьезные достижения в области обеспечения надежного обмена информацией по каналам связи, проблема защиты информации от ошибок при ее передаче остается достаточно актуальной. В настоящее время для решения этой задачи применяются различные методы кодирования-декодирования информации [1–6]. К сожалению, эти методы достаточно сложны, трудоемки при реализации и не всегда удовлетворяют требованиям по производительности (быстродействию). Более простые способы основаны на использовании данных о четности строк или столбцов бинарной матрицы. Часто это бывают одномерные коды (т. е. использующие

только одну координату – строку матрицы). Они требуют большого количества так называемых добавочных битов и позволяют обнаруживать небольшое количество ошибок в передаваемой информации. Для двумерных кодов эти способы позволяют определять ошибки в случае, когда в матрице имеется только одна ошибка, координаты (адрес) которой задаются номерами ошибочной строки и ошибочного столбца. При наличии более сложных типов ошибок, например двойных или групповых, их обнаружение на основании сведений только о номерах ошибочных строк и столбцов затруднительно или вообще невозможно.

Существует множество практических задач, в которых требуются коды, исправляющие ошибки, к тому же с простыми процедурами кодирования-декодирования. В настоящей работе предлагается способ поиска ошибок на основе данных о четности координат бинарной матрицы, число которых увеличено с общепринятых двух (номер строки и номер столбца) до четырех путем включения в рассмотрение номеров главных и вспомогательных диагоналей матрицы.

1. Определения и обозначения. Будем рассматривать бинарную матрицу с размерами $m \times n$, где m – количество строк, n – количество столбцов. Предположим, что матрица представляет собой сообщение, передаваемое по каналам связи. Введем обозначения и определения, для иллюстрации которых используем матрицу M , представленную на рис. 1:

x – номер строки матрицы;

y – номер столбца в прямом направлении;

\bar{y} – номер столбца в обратном направлении;

d – номер главной диагонали;

\bar{d} – номер вспомогательной диагонали;

(x,y) – элемент матрицы на пересечении строки x и столбца y ;

$d(x,y) = d_{x,y}$ – номер главной диагонали, соответствующий элементу (x,y) ;

$\bar{d}(x,y) = \bar{d}_{x,y}$ – номер вспомогательной диагонали, соответствующий элементу (x,y) .

Идея использования главных диагоналей для обнаружения ошибок была предложена в работе [7]. Под «главными диагоналями» будем понимать как основную главную диагональ матрицы, так и все параллельные ей диагонали, рассматриваемые в качестве непрерывных цепочек элементов матрицы, которые начинаются в первой строке и проходят в направлении «сверху – вниз – направо» через все строки матрицы с переходом на левый элемент следующей строки при достижении крайнего правого элемента предыдущей строки. Нумерация элементов новой строки начинается с номера, который был последним в предыдущей строке. На рис. 1 элементы основной главной диагонали обозначены цифрой **1**, а номера остальных «главных диагоналей» – цифрами, расположенными в верхних левых углах элементов матрицы.

В настоящей работе вводится понятие *вспомогательных диагоналей*, под которыми подразумеваются основная вспомогательная диагональ матрицы и все параллельные ей диагонали, проходящие в направлении «сверху – вниз – налево», начиная с первой строки матрицы и заканчивая последней строкой. С крайнего левого элемента строки происходит переход на крайний правый элемент следующей строки. Номера вспомогательных диагоналей на рис. 1 выделены курсивом и размещены в нижних правых углах элементов матрицы.

Номера главных и вспомогательных диагоналей соответствуют номерам столбцов в первой строке матрицы: для главных диагоналей – в прямом направлении, для вспомогательных – в обратном. Отметим также, что номера главных и вспомогательных диагоналей в столбцах матрицы повторяются через каждые n строк, поэтому при $m > n$ в каждом столбце матрицы имеется несколько элементов, которым соответствуют одинаковые номера диагоналей.

Для указания адреса элемента матрицы будем использовать четыре координаты: номера строки, столбца, главной и вспомогательной диагоналей, соответствующих этому элементу. В матрице, предназначенной для передачи, производится вычисление четности по всем координатам. Результаты подсчета четности отображаются в дополнительно вводимых в матрицу: столбце ChX и строках ChD, Ch \bar{D} , ChY, представляющих значения четности по строкам, главным диагоналям, вспомогательным диагоналям и столбцам матрицы соответственно. Запись значений четности по главным и вспомогательным диагоналям производится в строки ChD и Ch \bar{D} по направлениям диагоналей (при записи в строку Ch \bar{D} строка ChD не учитывается, пропускается).

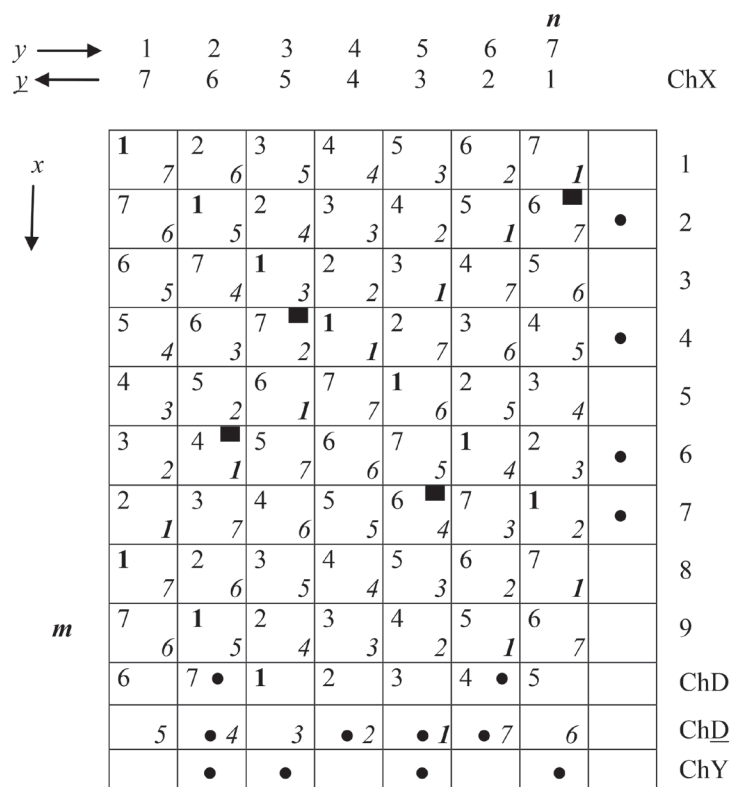


Рис. 1. Матрица M с обозначениями

Fig.1. Matrix M with the notations

В матрице, принятой после передачи по каналам связи, снова производится вычисление четности по всем координатам, в результате чего выявляются строки, столбцы и диагонали, в которых полученные значения четности не совпадают со значениями, вычисленными в исходной матрице. Элементы матрицы, значение которых было изменено при передаче, а также координаты, значение четности которых отличается от значений в исходной матрице, будем называть *ошибочными*. Номера ошибочных координат заносятся в списки SX , SY , SD и SD (ошибочных строк, столбцов, главных диагоналей и вспомогательных диагоналей соответственно).

Рассмотрим конкретный вариант, представленный на рис. 1. Предположим, что в процессе передачи произошло изменение значений элементов матрицы, отмеченных значком \blacksquare . В результате вычисления четности по координатам будут сформированы списки ошибочных координат: $SX = \{2,4,6,7\}$, $SY = \{2,3,5,7\}$, $SD = \{4,7\}$, $SD = \{1,2,4,7\}$. Ошибочные координаты отмечены символом \bullet в столбце ChX и строках ChD, ChD, ChY соответственно.

Обратим внимание на разницу в количестве элементов в списках: в SD имеется два элемента, а в остальных – по четыре. Это является следствием того, что в главной диагонали с номером 6 имеются две ошибки – (2,7) и (7,5), поэтому подсчет четности по этой диагонали ошибок не выявил.

Отметим три важных свойства рассматриваемых матриц:

Свойство 1. В списки ошибочных координат попадают только те координаты, в которых имеется нечетное число ошибок.

Свойство 2. На основании анализа количества элементов в списках SX , SY , SD и SD нельзя определить фактическое количество ошибок в матрице, поскольку изменения значения четности координат не всегда отображаются во всех указанных списках в связи с наличием кратных ошибок.

Свойство 3. Если число строк превышает число столбцов ($m > n$), то в некоторых столбцах матрицы появляются элементы, которым соответствуют одинаковые номера и главных, и вспомогательных диагоналей. Например, на рис. 1 номера диагоналей в строке 8 совпадают с номерами

диагоналей в строке 1, а в строке 9 – со строкой 2. В общем случае совпадают значения диагоналей в строках с номерами z_i и z_p , если $z_i \bmod n = z_j \bmod n$.

С учетом принятых выше обозначений можно вывести достаточно очевидные формулы для вычисления номеров строк, столбцов и диагоналей:

$$x(y, d) = (y + n - d + 1) \bmod n, \quad (1)$$

$$y(x, d) = (x + d - n - 1) \bmod n, \quad (2)$$

$$d(x, y) = (n - x + y + 1) \bmod n, \quad (3)$$

$$y = n - y + 1, \quad (4)$$

$$\underline{d}(x, y) = (n - x + y + 1) \bmod n. \quad (5)$$

Подставив значение y из (4) в формулу (5), найдем

$$\underline{d}(x, y) = (n - x + (n - y + 1) + 1) \bmod n = (2n + 2 - x - y) \bmod n. \quad (6)$$

Необходимо учитывать, что для приведенных выше формул приняты следующие соглашения: если $z < 0$, то $z \bmod n = n - |z| \bmod n$; если $z = 0$, или $z = n$, то $z \bmod n = n$.

В тех случаях, когда нумерация элементов матрицы начинается с 0 (как обычно принято в программировании), вместо приведенных формул (1)–(3) и (6) используются формулы (7)–(10):

$$x(y, d) = (y + n - d) \bmod n, \quad (7)$$

$$y(x, d) = (x + d - n) \bmod n, \quad (8)$$

$$d(x, y) = (n - x + y) \bmod n, \quad (9)$$

$$\underline{d}(x, y) = (2n - 1 - x - y) \bmod n. \quad (10)$$

Для этих формул справедливо: если $z < 0$, то $z \bmod n = n - |z| \bmod n$.

2. Описание способа. Предлагаемый способ поиска ошибок основан на использовании данных о четности координат матрицы: строк, столбцов, главных и вспомогательных диагоналей. Поскольку, в соответствии с указанным выше свойством 3, в матрице с числом строк, превышающим число столбцов (т. е. при $m > n$), появляются элементы с одинаковыми значениями главных и вспомогательных диагоналей, что создает неоднозначность при определении адресов элементов матрицы, то ниже будут рассматриваться матрицы, у которых $m \leq n$.

Если $MO = \{(x_{i1}, y_{j1}), (x_{i2}, y_{j2}), \dots, (x_{ik}, y_{jk})\}$ – множество ошибок в рассматриваемой матрице, то адрес любого ошибочного элемента (x_p, y_j) должен присутствовать в списках всех ошибочных координат, т. е. справедливо

$$((x_i, y_j) \in MO) \Leftrightarrow ((x_i \in SX) \wedge (y_j \in SY) \wedge (d_{i,j} \in SD) \wedge (\underline{d}_{i,j} \in \underline{SD})).$$

К сожалению, это условие полностью выполняется лишь в том случае, когда в матрице имеются только одиночные ошибки в строках, столбцах, главных и вспомогательных диагоналях. При наличии двойных или кратных ошибок их координаты могут отсутствовать в некоторых списках ошибочных координат. Это обстоятельство существенно усложняет вычисление адресов ошибок.

С учетом отмеченных выше свойств 1–3 поиск ошибок предлагается производить путем формирования множества вероятных адресов ошибочных элементов на основе списков ошибочных координат SX , SY , SD , \underline{SD} и анализа этого множества с целью исключения адресов «ложных», не существующих ошибок. Вероятные адреса ошибок записываются в таблицу, состоящую

из столбцов S_1, S_2, S_3, S_4 , соответствующих элементам списков SX, SY, SD и \underline{SD} . Вероятный адрес ошибочного элемента приводится в виде строки $S_1-S_2-S_3-S_4$, в которой S_1 и S_2 представляют значения элементов из списков SX и SY , а S_3 и S_4 – значения соответствующих им главных и вспомогательных диагоналей. Полученная таблица содержит множество $S = \{S_1-S_2-S_3-S_4\}$ строк, представляющих вероятные адреса ошибок.

В качестве основы для формирования множества S выбираются два списка ошибочных координат: SX и SY , или SX и SD , или SY и \underline{SD} . Составляются все возможные пары элементов из выбранных списков, значения которых записываются в соответствующие столбцы таблицы, затем с помощью формул (1)–(6) вычисляются значения элементов остальных столбцов. Из полученного множества S удаляются строки с признаками «ложных» ошибок. К ним относятся строки, у которых

значение элемента строки в некотором столбце отсутствует в соответствующем списке ошибочной координаты;

в разных строках таблицы имеются одинаковые значения элементов в одном столбце; номер вычисленной строки превышает значение m .

Строки, оставшиеся после удаления адресов «ложных» ошибок, представляют собой адреса настоящих ошибок. Значения элементов этих строк удаляются из соответствующих списков ошибочных координат. Если при этом в каком-то списке отсутствует значение столбца оставшейся строки, то это значение записывается в данный список. Производится выбор следующей пары списков ошибочных элементов, формируется новое множество S и выполняется его анализ.

Выбор списков для формирования множества S производится на основе анализа состояния списков $SX, SY, SD, \underline{SD}$ и зависит от наличия или отсутствия в них элементов. Если в SX и SY имеются элементы, то формирование S производится на основе этих списков. Если $|SX| = 0$ или $|SX| < |SY|$, то используются списки SY и SD , если $|SY| = 0$ или $|SY| < |SX|$, то используются списки SX и SD .

В зависимости от конкретной ситуации (т. е. состояния списков ошибочных координат и результатов анализа текущего множества S) одна и та же пара списков может быть использована несколько раз подряд в качестве основы для формирования множества S . Но в случае отрицательного результата поиска ошибок в текущем множестве S для формирования нового множества S в качестве основы должна выбираться другая пара списков.

Не всегда анализ текущего множества S приводит к положительному результату, т. е. обнаружению ошибок. В числе удаляемых из S могут оказаться и строки, соответствующие адресам настоящих ошибок, которые в таком случае на данном этапе поиска будут утеряны, и процедура поиска ошибок будет unsuccessful, если множество S после удаления таких строк окажется пустым. Неудачный поиск ошибок обусловлен наличием в S строк с одинаковыми значениями в столбце S_4 или S_3 , поскольку такие строки в процессе анализа удаляются из множества S .

Основные информационные объекты и функциональные блоки, реализующие представленный выше способ коррекции ошибок в передаваемой информации, представлены на рис. 2. Жирным шрифтом выделена исходная матрица, которая должна быть передана по каналу связи, а также результирующая матрица после коррекции ошибок.

3. Пример применения способа. Поиск ошибок в соответствии с предлагаемым способом рассмотрим на примере матрицы M_1 , представленной на рис. 3. Ошибочные элементы отмечены значком ■, ошибочные координаты – значком ● в столбце ChX и строках $ChD, Ch\underline{D}, ChY$. Всего имеется шесть ошибок с адресами (3,4), (5,11), (9,4), (10,7), (10,8), (10,9), из них одна двойная ошибка в столбце 4 и групповая ошибка в строке 10. С целью обеспечения наглядности при анализе выполняемых ниже операций в элементах матрицы показаны номера главных и вспомогательных диагоналей.

Процесс поиска ошибок отображен в приведенной таблице, в первом столбце которой представлены значения списков ошибочных координат, а в следующих – значения множеств S . Начальные значения списков ошибочных координат показаны в первом столбце выше штриховой

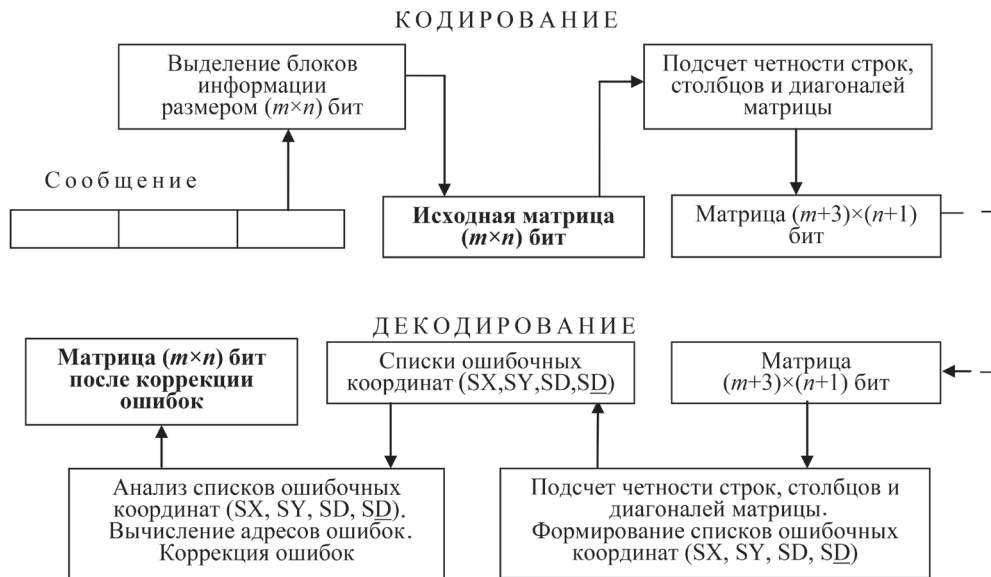


Рис. 2. Функциональная схема коррекции ошибок

Fig. 2. Functional scheme of error correction

линии. Учитывая, что $|SX| > 0$ и $|SY| > 0$, на основе списков SX и SY составляется множество S_1 , представленное во втором столбце таблицы.

Из S_1 удаляются строки с признаками «ложных» ошибок. К ним относятся строки, в которых значение в столбце $S4$ отсутствует в списке \underline{SD} (обозначены --); значение в столбце $S3$ отсутствует в списке SD (обозначены ---); имеются одинаковые значения в столбце $S4$ (обозначены ^ и >>).

Оставшиеся строки (обозначены ++), представляющие собой ошибки. Из списков ошибочных координат удаляются элементы, значения которых имеются в оставшихся строках, т. е. из \underline{SD} – значения 1 и 17, из SD – 16 и 17, из SY – 8 и 9, из SX при рассмотрении строки 10–8–16–1 удаляется значение 10, а при рассмотрении строки 10–9–17–17 значение 10 снова записывается в SX . Новые значения списков показаны под штриховой линией.

В SX и в SY имеются элементы, поэтому множество S_2 (третий столбец таблицы) составляется на основе этих списков. Из S_2 удаляются строки, в которых значения в столбце $S4$ отсутствуют в столбце \underline{SD} (обозначены --), а значения в столбце $S3$ отсутствуют в SD (обозначены ---). Оставшиеся строки представляют координаты ошибок. Из списков SX , SY , SD и \underline{SD} удаляются значения, содержащиеся в оставшихся строках (из \underline{SD} – значения 2 и 3, из SD – 7 и 15, из SY – 7 и 11, из SX – 5 и 10). Новое состояние списков SX и SY показано ниже сплошной линией.

Поскольку $|SY| = 0$, то множество S_3 формируется на основе списков SX и SD (выделены курсивом и жирным шрифтом). Из S_3 удаляются строки, в которых значения столбца $S4$ отсутствуют в \underline{SD} (обозначены --). Оставшиеся строки представляют адреса ошибок (3,4) и (9,4). Таким образом, в результате анализа множеств S_1 , S_2 , S_3 и удаления ложных ошибок обнаружены все имевшиеся в матрице ошибки.

В некоторых ситуациях обнаруживаются не все ошибки, что обусловлено совпадением номеров главных и вспомогательных диагоналей, соответствующих различным ошибочным элементам матрицы, вследствие чего в разных строках множества S появляются одинаковые значения в столбцах $S4$ и $S3$. В соответствии с алгоритмом такие строки исключаются из рассмотрения (удаляются из множества S), что приводит к потере адресов ошибок.

Матрица $M2$ с неблагоприятным размещением ошибок представлена на рис. 4. Обнаружить ошибки в данном случае невозможно из-за совпадения номеров главных и вспомогательных диагоналей, вследствие чего из S удаляются все строки.

		<i>n</i>																	
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	ChX
<i>m</i>	1	1 17	2 16	3 15	4 14	5 13	6 12	7 11	8 10	9	10	11	12	13	14	15	16	17	
	2	17 16	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
	3	16 15	17 14	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	•
	4	15 14	16 13	17 12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
	5	14 13	15 12	16 11	17 10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	•
	6	13 12	14 11	15 10	16 9	17 8	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
	7	12 11	13 10	14 9	15 8	16 7	17 6	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
	8	11 10	12 9	13 8	14 7	15 6	16 5	17 4	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
	9	10 9	11 8	12 7	13 6	14 5	15 4	16 3	17 2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	•
	10	9 8	10 7	11 6	12 5	13 4	14 3	15 2	16 1	17	16	15	14	13	12	11	10	9	•
	11	8 7	9 6	10 5	11 4	12 3	13 2	14 1	15 17	16 16	17 15	1	2	3	4	5	6	7	8
	12	7 6	8 5	9 4	10 3	11 2	12 1	13 17	14 16	15 15	16 14	17 13	1	2	3	4	5	6	7
	ChD	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	1	2	3	4	5	
	ChD	5	4	3	2	1	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	
	ChY							•	•	•		•							

Рис. 3. Матрица M1
Fig. 3. Matrix M1

Процедура поиска ошибок в матрице M1
Error check procedure in the matrix M1

Списки Lists				Множество строк S ₁ Set of Lines S ₁				Множество строк S ₂ Set of Lines S ₂				Множество строк S ₃ Set of Lines S ₃			
SX	SY	SD	SD	S1	S2	S3	S4	S1	S2	S3	S4	S1	S2	S3	S4
3	7	2	1	3	7	5	9	3	7	5	9	3	4	2	12 ++
5	8	7	2	3	8	6	8	3	11	9	5	3	15	13	1 --
9	9	13	3	3	9	7	7	5	7	3	7	9	10	2	17 --
10	11	15	6	3	11	9	5	5	11	7	3	9	4	13	6 ++
		16	12	5	7	3	7	9	7	16	3				
		17	17	5	8	4	6	9	11	3	16				
-----				5	9	5	5	10	7	15	2				
	3	7	2	5	11	7	3	10	11	2	15				
	5	11	7	9	7	16	3								
	9	-	13	9	8	17	2								
	10	-	15	9	9	1	1								
-----				9	11	3	16								
	3	-	2	10	7	15	2								
	9	-	13	10	8	16	1								
				10	9	17	17								
				10	11	2	5								

Матрица M2							Списки				Множество строк S																																																																																	
Матрица M2							SX	SY	SD	SD	S1	S2	S3	S4																																																																														
<table border="1"> <tr> <td></td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>6</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>6</td> </tr> <tr> <td></td> <td>6</td> <td>5</td> <td>4</td> <td>3</td> <td>2</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>6</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td></td> <td>5</td> <td>4</td> <td>3</td> <td>2</td> <td>1</td> <td>6</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>5</td> <td>6</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> </tr> <tr> <td></td> <td>4</td> <td>3</td> <td>2</td> <td>1</td> <td>6</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>6</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td></td> <td>3</td> <td>2</td> <td>1</td> <td>6</td> <td>5</td> <td>4</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>6</td> <td>1</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td></td> <td>2</td> <td>1</td> <td>6</td> <td>5</td> <td>4</td> <td>3</td> </tr> </table>								1	2	3	4	5	6	1	1	2	3	4	5	6		6	5	4	3	2	1	2	6	1	2	3	4	5		5	4	3	2	1	6	3	5	6	1	2	3	4		4	3	2	1	6	5	4	4	5	6	1	2	3		3	2	1	6	5	4	5	3	4	5	6	1	2		2	1	6	5	4	3	–	2	2	2	1	2	2	5	^
	1	2	3	4	5	6																																																																																						
1	1	2	3	4	5	6																																																																																						
	6	5	4	3	2	1																																																																																						
2	6	1	2	3	4	5																																																																																						
	5	4	3	2	1	6																																																																																						
3	5	6	1	2	3	4																																																																																						
	4	3	2	1	6	5																																																																																						
4	4	5	6	1	2	3																																																																																						
	3	2	1	6	5	4																																																																																						
5	3	4	5	6	1	2																																																																																						
	2	1	6	5	4	3																																																																																						
							–	5	5	5	4	2	5	2	>>																																																																													
											4	5	2	5	^																																																																													
											1	5	5	2	>>																																																																													

Рис. 4. Матрица M2 и процедура поиска ошибок

Fig. 4. Matrix M2 and the error check procedure

Вероятность возникновения неблагоприятных ситуаций, связанная с появлением в различных строках множества S одинаковых номеров главных и вспомогательных диагоналей, соответствующих различным элементам матрицы, уменьшается с увеличением числа столбцов. Действительно, если вероятность выбора одного элемента матрицы, которому соответствует некоторый номер диагонали, равна $1/n$, то вероятность выбора второго элемента матрицы с таким же номером диагонали равна $1/n^2$. Следовательно, чем больше значение n , тем выше вероятность обнаружения всех ошибок.

Заключение. Предлагаемый способ обнаружения ошибок в переданной по каналам связи информации характеризуется следующими положительными свойствами.

Обнаруживает и вычисляет адреса ошибок различного типа – одиночных, четной кратности, групповых.

Данный способ коррекции ошибок в информации, переданной по каналам связи, чрезвычайно прост, не требует построения никаких таблиц кодирования, синдромов и прочих стандартных средств коррекции ошибок – достаточно только сведений о четности координат бинарной матрицы, представляющей собой передаваемое сообщение.

Требует небольшого количества контрольных (добавочных) разрядов к общему объему передаваемых единиц информации и малых затрат на вычисление значений добавочных разрядов (т. е. значений четности координат матрицы); имеет хорошие показатели такой важной характеристики, как «скорость кода» (sk), определяемой отношением количества информационных бит к количеству передаваемой информации. В данном случае $sk = m*n / (m*n + 3n + m + 3)$. Например, при $m = 10$ и $n = 32$ $sk = 0,76$; при $m = 20$ и $n = 32$ $sk = 0,84$; при $m = 20$ и $n = 64$ $sk = 0,86$.

Обеспечивает высокое быстродействие, поскольку, как показывает анализ процедуры поиска ошибок в матрице M1, для нахождения адресов ошибочных элементов требуется выполнение небольшого количества простых операций.

Список использованных источников

1. Морелос-Сарагоса, Р. Искусство помехоустойчивого кодирования. Методы, алгоритмы, применение / Р. Морелос-Сарагоса; пер. с англ. В. Б. Афанасьева. – М.: Техносфера, 2005. – 319 с.
2. Никитин, Г. И. Помехоустойчивые циклические коды / Г. И. Никитин, С. С. Поддубный. – СПб: СПбГУАП, 1998. – 71 с.
3. Питерсон, У. Коды, исправляющие ошибки: пер. с англ. / У. Питерсон, Э. Уэлдон. – М.: Мир, 1976. – 594 с.
4. Скляр, Б. Цифровая связь: теоретические основы и практическое применение: пер. с англ. / Бернард Скляр. – М. [и др.]: Вильямс, 2003. – 1099 с.

5. Шульгин, В. И. Основы теории передачи информации. Помехоустойчивое кодирование / В. И. Шульгин. – Харьков: ХАИ, 2003. – 87 с.
6. Вернер, М. Основы кодирования / М. Вернер. – М.: Техносфера, 2004. – 286 с. – (Мир программирования).
7. Enhanced Turbo Product Codes (eTPC). [Electronic resource]. – Mode of access: http://aha.com/Uploads/ANtpc12_03063. – Date of access: 10.05.2016.

References

1. Morelos Zaragoza R. *The Art of Error Correcting Coding*. New York, Wiley, 2006. Doi: 10.1002/0470035706
2. Nikitin G. I. *The Error Correcting Coding*. Saint-Petersburg, Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation (SUAI), 2003. 71 p. (in Russian).
3. Peterson W. W., Weldon E. J. *Error-Correcting Codes*. 2nd ed. Cambridge, MIT Press, 1972.
4. Sklar B. *Digital Communications: Fundamentals and Applications*. Second Edition. Los Angeles, California and University of California, 2001.
5. Shul'gin V. I. *The Base of Information Transmission. The Error Correcting Coding*. Kharkov, Kharkov Aviation University, 2003. 87 p. (in Russian).
6. Werner M. *Information und Codierung*. Wiesbaden, Vieweg+Teubner Verlag, 2002. Doi: 10.1007/978-3-322-92887-0
7. Enhanced Turbo Product Codes (eTPC). Available at: http://aha.com/Uploads/ANtpc12_03063. (accessed 10 May 2016).

Сведения об авторе

Поляков Александр Сергеевич – кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник, Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 6, 220012, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail.: alexpolja@tut.by

Information about the author

Poljakov Aleksandr Sergeevich – Ph. D. (Engineering), Leading Researcher, United Institute of Informatics Problems National Academy of Sciences of Belarus (6, Sursganov Str., 220012, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: alexpolja@tut.by

Для цитирования

Поляков, А. С. Коррекция ошибок при передаче информации по значениям четности координат бинарной матрицы / А. С. Поляков // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2017. – № 2. – С. 101–109.

For citation

Poljakov A. S. Error correction when transmitting information by a parity check of binary matrix coordinates. *Vesti Natsyional'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series], 2017, no. 2, pp. 101–109. (in Russian).

Г. М. Левин, Б. М. Розин

Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

ОПТИМИЗАЦИЯ ВЫПУСКА КОМПЛЕКТОВ ИЗДЕЛИЙ И ИНТЕНСИВНОСТЕЙ ИХ ИЗГОТОВЛЕНИЯ В УСЛОВИЯХ СЛУЧАЙНОГО СПРОСА

Рассматривается задача оптимизации на ряде временных интервалов программы выпуска производственной линии комплектов изделий нескольких наименований и интенсивностей их изготовления. Линия состоит из ряда линейно упорядоченных рабочих позиций без буферов. Заготовки из входной последовательности, состоящей из циклически повторяющихся идентичных подпоследовательностей (комплектов), обрабатываются последовательно одна за другой на каждой рабочей позиции линии в порядке их расположения, и в каждый момент времени на каждой позиции обрабатывается только одна заготовка. Работа линии состоит из тактов одновременной обработки на всех позициях всех расположенных на них заготовок соответствующими позициям и заготовкам наборами инструментов. Состав комплекта не изменяется от интервала к интервалу. Диапазоны возможных величин спроса на каждое изделие комплекта и распределение вероятностей спроса в этих диапазонах считаются известными для каждого временного интервала. В качестве целевой функции используется сумма производственных затрат, затрат на хранение невостребованных изделий и/или штрафов за неудовлетворенный спрос на них. Производственные затраты зависят от принимаемой интенсивности обработки и возрастают с увеличением количества комплектов, выпускаемых в текущем интервале. Затраты на хранение невостребованных изделий каждого наименования, а также штрафы за непоставленные заказчиком изделия не убывают с ростом числа таких изделий. Предложен двухуровневый декомпозиционный метод решения задачи, основанный на идеях многошаговой оптимизации.

Ключевые слова: комплект изделий, размер партии, интенсивность обработки, случайный спрос, минимизация затрат, декомпозиционный метод

G. M. Levin, B. M. Rozin

United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

OPTIMIZING THE OUTPUT OF PRODUCT BATCHES AND INTENSITY OF THEIR MANUFACTURE UNDER RANDOM DEMAND

The problem of optimizing the output of multi-product batch and the intensities of its items manufacture in the production line over a number of time intervals is considered. The line has a linearly ordered multiple positions without buffers. Workpieces of the input sequence composed of cyclically repeated identical subsequences (batches) are processed consecutively one by one in each working position in the order of their location in the line. Only a single workpiece is disposed in each position at each time point. The operation of the line consists of takts of simultaneous processing of all workpieces located in respective positions by the sets of tools corresponding to workpieces and positions. The composition of a batch does not vary from interval to interval. The ranges of possible demand quantities for each product and the probability distribution of the demand in these ranges are assumed known for each time interval. The sum of manufacturing cost, costs of storage and/or penalties for unmet demand on products is used as objective function. Manufacturing cost depends on processing intensities to be defined and increases with an increase in the number of batches produced in the current interval. Storage cost of unclaimed product units as well as penalty for product units not supplied to the customer do not decrease with the increase of number of such units. A two-level decomposition method for solving the problem based on the ideas of multi-step optimization is proposed.

Keywords: batch of products, lot size, processing intensity, random demand, cost minimization, decomposition method

Введение. Задачам планирования производства партий изделий с учетом затрат на их выпуск и хранение посвящен ряд исследований (см., напр., [1–4]). Большая их часть касается выпуска изделий одного наименования. Вместе с тем внимание многих исследователей привлекают также задачи планирования размера партий для одновременного выпуска группы различных изделий. Для решения задач рассматриваемого типа с ограниченной производственной мощностью, являющихся NP-трудными [4], наиболее часто используются методы динамического программирования. В рассмотренных в литературе постановках задач как правило затраты на выпуск определяются известной функцией от его объема.

В работе [5] исследуется комплексная задача совместной оптимизации программы выпуска группы изделий постоянного состава (далее – комплекта изделий) и интенсивностей их изготовления на заданном горизонте планирования при известных величинах спроса на изделия комплекта в каждом временном интервале. Предполагается, что изделия производятся на многопозиционной производственной линии конвейерного типа и имеется возможность оптимизировать интенсивность их изготовления на каждой позиции с учетом планируемой программы выпуска в данном временном интервале. Помимо затрат на изготовление, учитываются также затраты на хранение их невостребованной части и штрафы за недопоставленные вовремя изделия. Допускается отложенный спрос, т. е. недопоставленные изделия могут быть поставлены заказчиком в следующих временных интервалах.

Поскольку во многих ситуациях прогнозировать спрос можно лишь с некоторой вероятностью, зависящей от условий рынка, значительный интерес представляют исследования, в которых спрос на выпускаемые изделия является случайным.

Исследованию стохастических многопродуктовых задач планирования размера выпуска производственной системой на конечном наборе временных интервалов при случайном спросе посвящены, в частности, работы [6–8]. В этих исследованиях допускался отложенный спрос на невыполненные заказы. В [6] неопределенность спроса моделировалась деревом сценариев, что позволило свести задачу к многостадийной смешанной целочисленной задаче стохастического программирования с рекурсией. Предложены основанная на локализации производства формулировка модели и эвристический подход к решению задачи, базирующийся на стратегии фиксации переменных и ослабления ограничений. В [7] целевая функция общих затрат включала стоимость переналадки для серийного производства, стоимость хранения запасов и издержки, связанные с дефицитом. Разработана модель ожидаемых затрат в расчете на единицу времени. Показано, что при некоторых условиях приближенная функция стоимости является выпуклой. В статье [8] особое внимание уделялось оперативности выполнения заказов. Предложена эвристическая процедура решения задачи, являющаяся обобщением для условий случайного спроса эвристики, введенной в [9] для детерминированной задачи планирования размера партий.

Ниже рассмотренная в [5] задача решается в более общей постановке, когда возможный спрос на изделия комплекта является случайным, определяемым заданными функциями распределения, причем эти функции предполагаются взаимно независимыми и различными как для разных изделий комплекта, так и для разных временных интервалов. В качестве основных отличий исследуемой постановки от известных можно отметить следующие. Во-первых, состав комплекта не изменяется от интервала к интервалу (что определяется спецификой используемой производственной линии), в то время как случайно реализуемые объемы спроса на различные изделия комплекта в различных временных интервалах не связаны между собой. Во-вторых, решения о размере выпуска в любом временном интервале принимаются одновременно с выбором интенсивностей изготовления изделий, определяющих как возможность изготовления планируемого количества комплектов, так и стоимость их выпуска. С учетом отсутствия взаимосвязей между функциями распределения спроса на различные изделия комплекта рассматриваемая задача занимает промежуточное место между многопродуктовыми и однопродуктовыми стохастическими задачами.

Получаемые с помощью предлагаемого подхода решения могут быть использованы, в частности, для корректировки в начале каждого очередного временного интервала ранее запланированных программ выпуска комплектов изделий и интенсивностей их изготовления исходя из уточненной (по текущей информации) возможного вероятностного спроса на различные изделия комплекта.

1. Постановка задачи и математическая модель. Рассматривается задача управления программой выпуска и интенсивностью изготовления заданного множества $D = \{1, 2, \dots, m\}$ изделий на временных интервалах $T_1, \dots, T_p, \dots, T_n$ горизонта планирования $T = \sum_{i=1}^n T_i$ с учетом случайного спроса на различные изделия, затрат на их производство, затрат на хранение невостребованных изделий и/или штрафов за неудовлетворенный вовремя спрос на некоторые из них. Предполагается, что

изделия выпускаются идентичными комплектами, каждый из которых включает h_d изделий $d \in D$, $\sum_{d \in D} h_d = h$.

Диапазоны $L_{dt} = [\underline{\lambda}_{dt}, \bar{\lambda}_{dt}]$ возможного спроса λ_{dt} на каждое из изделий $d \in D$ в интервалах $t = 1, \dots, n$ и функции распределения $P_{dt}(\lambda_{dt})$ этого спроса на L_{dt} предполагаются заданными, причем все λ_{dt} считаются взаимно независимыми случайными величинами и $0 \leq \underline{\lambda}_{dt} \leq \bar{\lambda}_{dt}$.

Для каждого изделия $d \in D$ задано также число y_{d0} , обозначающее количество таких изделий либо на хранении (при $y_{d0} > 0$) или недопоставленных заказчиком (при $y_{d0} < 0$) к моменту планирования (т. е. к началу временного интервала $t = 1$).

В результате выпуска комплектов и поставок заказчиком различных изделий из их состава к концу каждого интервала $t = 1, \dots, n$ может образоваться некоторое количество y_{dt} либо уже произведенных и невостребованных заказчиком ($y_{dt} > 0$), либо недопоставленных заказчиком ($y_{dt} < 0$) изделий $d \in D$. Функции $H_{dt}(y_{dt})$ средних затрат на хранение невостребованных изделий или штрафов за недопоставленные изделия $d \in D$ в интервале t предполагаются известными для каждого интервала $t = 1, \dots, n$, причем эти функции не возрастают при $y_{dt} < 0$, не убывают при $y_{dt} > 0$ и $H_{dt}(0) = 0$.

На момент планирования y_{dt} для всех $d \in D$, $t = 1, \dots, n$, являются взаимно независимыми случайными величинами, определяемыми как планируемой программой x_1, \dots, x_t выпуска комплектов, так и возможным спросом λ_{dr} на изделие $d \in D$ в предыдущие (включая текущий) временные интервалы $r = 1, \dots, t$, т. е.

$$y_{dt} = y_{d0} + \sum_{r=1}^t h_d x_r - \Lambda_{dt},$$

где $\Lambda_{dt} = \sum_{r=1}^t \lambda_{dr}$ – случайный кумулятивный спрос на это изделие за первые t интервалов. Для всех $t = 1, \dots, n$ в силу независимости случайных величин $\lambda_{dr} \in L_{dr}$ функции распределения $\bar{P}_{dt}(\Lambda_{dt})$ величин Λ_{dt} в диапазоне $\bar{\Lambda}_{dt} = [\Lambda_{dt}^1, \Lambda_{dt}^2]$ их возможных значений определяются сверткой (см., напр., [10]) заданных функций распределения $P_{dr}(\lambda_{dr})$ возможного спроса λ_{dr} в интервалах $r = 1, \dots, t$, где $\Lambda_{dt}^1 = \sum_{r=1}^t \underline{\lambda}_{dr}$ и $\Lambda_{dt}^2 = \sum_{r=1}^t \bar{\lambda}_{dr}$.

Изготовление комплектов осуществляется на многопозиционной производственной линии конвейерного типа, состоящей из ряда линейно упорядоченных рабочих позиций [5, 11]. Заготовка каждого изделия комплекта последовательно в этом порядке обрабатывается на каждой рабочей позиции, причем в каждый момент времени на каждой позиции может обрабатываться лишь одно изделие. Один такт работы линии состоит в одновременной обработке на каждой из рабочих позиций единственного соответствующего (такту и позиции) изделия.

После завершения любого такта обрабатываемые изделия со своих позиций синхронно перемещаются на следующие, изделие с последней рабочей позиции поступает на позицию разгрузки, а на первую рабочую позицию поступает очередное изделие последовательности. Одновременно на линии могут находиться изделия из нескольких (идентичных) комплектов. Цикл изготовления одного комплекта состоит из h тактов и может включать идентичные такты (характеризуемые идентичным расположением изделий на всех рабочих позициях с соответствующей их одинаковой обработкой). В дальнейшем $I = \{1, \dots, \eta\}$ – множество номеров различных тактов и k_i – количество идентичных тактов $i \in I$ в цикле, $\sum_{i \in I} k_i = h$.

Изготовление изделия на каждой рабочей позиции может осуществляться одним либо одновременно несколькими (соответствующими позиции и изделию) не связанными между собой блоками инструментов, причем все инструменты одного блока работают параллельно и имеют общий параметр интенсивности обработки (например, минутную подачу). Таким образом, каждый такт $i \in I$ заключается в одновременной обработке различных изделий соответствующим подмножеством J_i блоков (инструментов) из множества J блоков, установленных на линии, причем такт i может включать обработку m_{ij} идентичными блоками $j \in J_i$. Подмножества блоков из семейства $\{J_1, \dots, J_i, \dots, J_\eta\}$

могут пересекаться и $\bigcup_{i=1}^n J_i = J$. Далее под парой ij подразумевается блок $j \in J$, выполняющий в такте $i \in I$ обработку соответствующего (позиции, на которой блок выполняет обработку, и такту) изделия комплекта.

Обработка каждым блоком инструментов в некотором такте связана с расходом соответствующих возобновляемых ресурсов (в частности, инструментов, изнашиваемых в процессе обработки). Скорость расхода ресурса зависит как от объема обработки, так и от интенсивности ее выполнения [5, 11]. Восстановление любого из ресурсов (в частности, смена инструментов) осуществляется после его полного расходования (износа) по завершении такта, во время которого это произошло. Выполнение очередного такта может начаться лишь после выполнения процесса восстановления соответствующего ресурса (смены инструментов).

В данной работе предполагается, что выбираемая интенсивность обработки изделий блоком $j \in J$ остается одинаковой для всех обрабатываемых им изделий комплекта, т. е. не изменяется от такта к такту в течение текущего временного интервала $t, t = 1, \dots, n$. Обозначим эту интенсивность (являющуюся искомым параметром) через z_{jt} и положим $z_t = (z_{jt} | j \in J)$ и $z = (z_t | t = 1, \dots, n)$.

Предельное количество \bar{x}_t комплектов, которое может быть выпущено в интервале $t = 1, \dots, n$, исходя из производственных условий, предполагается известным.

Для пар $ij \in G = \{ij | i \in I, j \in J\}$ считаются заданными следующие параметры:

- объем V_{ij} обработки изделий блоком j в такте i ;
- отрезок $[z_{1jt}, z_{2jt}]$ возможных значений интенсивности z_{jt} в интервале t ;
- определенные на этом отрезке функции $f_{ij}(z_{jt})$ и $\phi_{ij}(z_{jt})$, представляющие зависимости от принимаемой интенсивности z_{jt} отнесенных к единице объема затрат (включая затраты на ресурсы и их восстановление) на обработку изделий блоком j в такте i и времени восстановления ресурсов соответственно.

При фиксированном значении

$$z_t \in Z_t = \prod_{j \in J} [z_{1jt}, z_{2jt}]$$

длительность обработки в интервале t изделия блоком $j \in J$ в такте $i \in I$ и длительность этого такта равны $V_{ij}z_{jt}$ и $\max\{V_{ij}z_{jt} | j \in J_i\}$ соответственно, а затраты на обработку изделия блоком $j \in J$ в такте $i \in I$ и затраты времени на восстановление ресурсов, отнесенные к этой обработке, равны соответственно $V_{ij}f_{ij}(z_{jt})$ и $V_{ij}\phi_{ij}(z_{jt})$.

Общие затраты (как материальные, так и временные) на выполнение каждого из тактов $i \in I$ помимо суммарных затрат по всем составляющим его блокам включают также дополнительные затраты. В достаточно общем случае можно принять, что эти дополнительные затраты представляются линейными функциями длительности такта. Параметры $E_{1it}, E_{2it}, R_{1it}$ и R_{2it} указанных линейных зависимостей для каждого интервала $t \in \{1, \dots, n\}$ предполагаются заданными.

Таким образом, при принятых предположениях общие затраты $F_{1t}(z_t)$ на выполнение всех тактов одного цикла обработки комплекта и общая длительность $F_{2t}(z_t)$ цикла в интервале t в зависимости от значения $z_t \in Z_t$ определяются следующими соотношениями:

$$F_{1t}(z_t) = \sum_{i \in I} k_i \left(E_{1it} + E_{2it} \max_{j \in J_i} \{V_{ij}z_{jt}\} + \sum_{j \in J_i} m_{ij} V_{ij} f_{ij}(z_{jt}) \right),$$

$$F_{2t}(z_t) = \sum_{i \in I} k_i \left(R_{1it} + R_{2it} \max_{j \in J_i} \{V_{ij}z_{jt}\} + \sum_{j \in J_i} m_{ij} V_{ij} \phi_{ij}(z_{jt}) \right).$$

Выбранные для интервала t интенсивности z_t однозначно определяют максимальное количество $\tilde{x}_t(z_t) = \min\{\bar{x}_t, T_t / F_{2t}(z_t)\}$ комплектов, которые могут быть выпущены в этом интервале.

Введем функцию средних общих затрат за период планирования на выпуск комплектов изделий, хранение неостребованных изделий и штрафы за недопоставленные заказчиком в срок изделия при фиксированных количествах $x = (x_1, \dots, x_n)$ выпущенных комплектов и интенсивностях $z = (z_t | t = 1, \dots, n)$ их изготовления за этот период:

$$\Psi(x, z) = \sum_{t=1}^n F_{1t}(z_t)x_t + \sum_{t=1}^n \sum_{d \in D} M_{\Lambda_{dt}} \left\{ H_{dt} \left(h_d \sum_{r=1}^t x_r - \Lambda_{dt} \right) \right\}, \quad (1)$$

где $M_a\{g(\cdot)\}$ – математическое ожидание значения функции $g(\cdot)$ случайной величины a .

С учетом изложенного рассматриваемая задача определения оптимальных (в совокупности) программы x выпуска комплектов изделий и интенсивностей z их обработки в каждом интервале времени $t = 1, \dots, n$ в условиях случайного спроса и ограниченной пропускной способности производственной линии сводится к следующей задаче математического программирования:

$$\Psi(x, z) \rightarrow \min, \quad (2)$$

$$F_{2t}(z_t)x_t \leq T_t, \quad t = 1, \dots, n, \quad (3)$$

$$x_t \in [0, \bar{x}_t], \quad t = 1, \dots, n, \quad (4)$$

$$z_t \in Z_t, \quad t = 1, \dots, n. \quad (5)$$

В задаче (2)–(5) целевая функция (2) представляет зависимость средних суммарных затрат от объема выпуска комплектов изделий с учетом характера спроса на изделия на всех интервалах горизонта планирования. Ограничение (3) обеспечивает возможность выпуска в интервале t планируемого количества комплектов изделий. Задачу (2)–(5) будем называть в дальнейшем задачей **A**.

Следует отметить, что в реальных ситуациях необходимость решения задачи **A** может возникнуть по завершении каждого временного интервала t , когда уже известны фактические значения $\tilde{\lambda}_{dr}$ спроса на интервалах $r = 1, \dots, t$ на изделия $d \in D$ и могут быть уточнены функции распределения спроса на каждое из изделий в последующих интервалах. Поскольку количество y_{dt} неостребованных заказчиками либо недопоставленных им изделий $d \in D$ к концу периода t равно

$$y_{d0} + \sum_{r=1}^t (h_d x_r - \tilde{\lambda}_{dr}),$$

то задачу планирования на оставшиеся временные интервалы можно рассматривать как задачу **A** на $n - t$ интервалах $t + 1, \dots, n$ с исходными величинами y_{d0} вместо y_{d0} и уточненными функциями распределения спроса на этих интервалах.

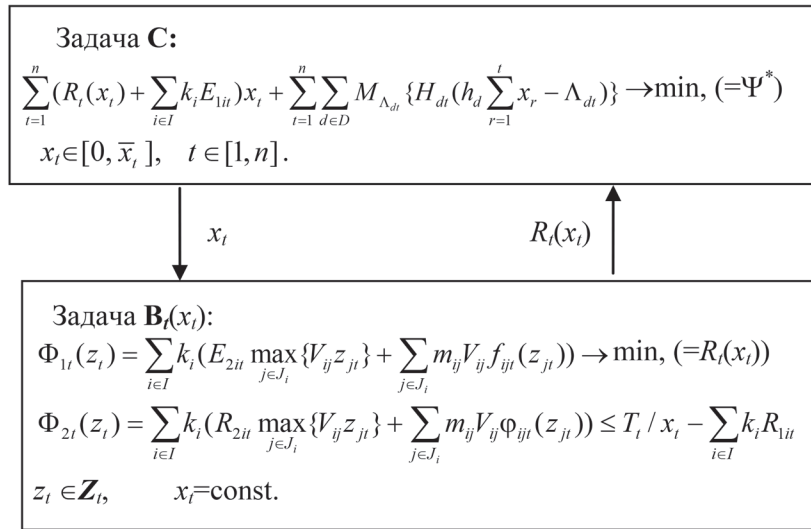
2. Методы решения. Для решения задачи **A** можно воспользоваться декомпозиционной схемой, укрупненно представленной на рисунке:

– на нижнем уровне для некоторой фиксированной программы выпуска $x = (x_1, \dots, x_n)$ и каждого $t = 1, \dots, n$ решается автономная подзадача $\mathbf{B}_t(x_t)$ по определению оптимальных (для этой программы) значений $z_t^*(x_t)$ интенсивностей;

– на верхнем уровне решается координирующая подзадача **C** по определению оптимальной программы x^* выпуска комплектов изделий для всех интервалов горизонта планирования с учетом неопределенности спроса на изделия, совокупности всех рассматриваемых затрат и пропускной способности производственной линии в каждом из интервалов.

При формировании предлагаемой схемы решения задачи **A** использованы общие идеи декомпозиции оптимизационных задач (см., в частности, обзор в [11]).

Нетрудно показать, что если $z_t^*(x_t)$ являются решениями подзадач $\mathbf{B}_t(x_t)$ для $t = 1, \dots, n$ и $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ – решение подзадачи **C**, то $(x^*, z^*(x^*))$ – решение задачи **A**. Здесь предполагается, что $R_t(x_t) = \infty$, если для некоторого значения x_t подзадача $\mathbf{B}_t(x_t)$ не имеет решения.



Декомпозиционная схема решения задачи А
Decomposition scheme for solving the problem А

Если функции $f_{ijt}(z_{jt})$ и $\phi_{ijt}(z_{jt})$ выпуклы на отрезках $[z_{1jt}, z_{2jt}]$ для всех $i \in I, j \in J_i$ и $t = 1, \dots, n$ (что имеет место во многих реальных ситуациях), то подзадачи $\mathbf{B}_t(x_t)$ являются задачами выпуклого программирования. Для их решения могут быть использованы соответствующие известные методы и реализующие их пакеты программ. В частности, эти подзадачи могут быть сведены к задачам линейного программирования посредством аппроксимации функций $f_{ijt}(z_{jt})$ и $\phi_{ijt}(z_{jt})$ кусочно-линейными функциями [12], причем, если функции $f_{ijt}(z_{jt})$ и $\phi_{ijt}(z_{jt})$ одинаковы для всех интервалов t , то эти аппроксимации не зависят от t .

В свою очередь, подзадача С может решаться как задача многошаговой оптимизации.

Для описания такого подхода к решению подзадачи С введем следующие дополнительные обозначения:

– $s_t = \sum_{r=1}^t x_r$ – кумулятивное число выпущенных комплектов изделий за t временных интервалов, принимаемое в качестве состояния многошагового процесса после шага $t = 1, \dots, n$,

$$s_t \in \left[0, \bar{s}_t = \sum_{r=1}^t \bar{x}_r \right];$$

– $\tilde{H}_{dt}(s_t) = M_{\Lambda_{dt}} \{H_{dt} (h_d s_t - \Lambda_{dt})\}$ – математическое ожидание затрат в интервале t на хранение невостребованных изделий либо на штрафы за недопоставленные изделия $d \in D$ для состояния s_t ;

– $\Theta_t(s_t)$ – наименьшее значение функции $\sum_{r=1}^t \left(R_r(x_r) + \sum_{i \in I} k_i E_{1ir} \right) x_r + \sum_{r=1}^t \sum_{d \in D} \tilde{H}_{dr}(s_r)$ средних суммарных затрат по всем таким программам выпуска $x^t = (x_1, \dots, x_r, \dots, x_t)$, что $x_r \in [0, \bar{x}_r]$ для всех $r = 1, \dots, t$ и $\sum_{r=1}^t x_r = s_t$.

Поскольку $\Psi^* = \min \{ \Theta_n(s_n) \mid s_n \in [0, \bar{s}_n] \}$, то решение подзадачи С может быть получено с использованием следующего рекуррентного соотношения динамического программирования:

$$\Theta_t(s_t) = \min \left\{ \Theta_{t-1}(s_{t-1}) + \left(R_t(s_t - s_{t-1}) + \sum_{i \in I} k_i E_{1it} \right) \times \right. \\ \left. \times (s_t - s_{t-1}) + \sum_{d \in D} \tilde{H}_{dt}(s_t) \mid s_{t-1} \in [0, \bar{s}_{t-1}], s_t - s_{t-1} \in [0, \bar{x}_t] \right\}, \quad (6)$$

$$s_t \in [0, \bar{s}_t], \quad t = 1, \dots, n,$$

где $\Theta_0(0) = 0$.

Трудоёмкость решения исходной задачи **A** по предлагаемой декомпозиционной схеме складывается из трудоёмкостей трех основных компонент: вычисления значений функций $R_t(x_t)$ (решение подзадач $\mathbf{B}_t(x_t)$ нижнего уровня) и функций $\sum_{d \in D} \tilde{H}_{dt}(s_t)$ для различных значений $x_t \in [0, \bar{x}_t]$ и $s_t \in \left[0, \bar{s}_t = \sum_{r=1}^t \bar{x}_r\right]$ $t = 1, \dots, n$, а также решения подзадачи **C** верхнего уровня при известных значениях этих функций. Поскольку достаточно однократного вычисления функций $R_t(x_t)$ и $\sum_{d \in D} \tilde{H}_{dt}(s_t)$ для каждого $x_t \in [0, \bar{x}_t]$, $s_t \in [0, \bar{s}_t]$ и $t = 1, \dots, n$, то число вычисляемых значений функций $R_t(x_t)$ и $\tilde{H}_{dt}(s_t)$ не превосходит $\sum_{t=1}^n \bar{x}_t$ и $m \sum_{t=1}^n \sum_{r=1}^t \bar{x}_r$ соответственно.

Трудоёмкость решения подзадачи $\mathbf{B}_t(x_t)$ при фиксированных $x_t \in [0, \bar{x}_t]$, и $t = 1, \dots, n$ определяется структурой и параметрами процесса обработки комплекта изделий на производственной линии (т. е. числом $|I|$ различных тактов в цикле обработки комплекта, количествами $|J_i|$ и составом соответствующих блоков инструментов в тактах), а также сложностью вычисления функций $f_{ij}(z_{jt})$ и $\varphi_{ij}(z_{jt})$ зависимости материальных и временных затрат на обработку изделий блоком инструментов от искомой интенсивности обработки z_{jt} , $i \in I, j \in J_i$. В первом приближении можно считать число операций, необходимое для вычисления значений $R_t(x_t)$, не зависящим от параметров x_t . Тогда зависимость трудоёмкости вычисления функций $R_t(x_t)$ от параметров $n, \bar{x}_t, t = 1, \dots, n$, задачи **A** можно оценить как

$$O\left(\sum_{t=1}^n \bar{x}_t\right).$$

В свою очередь трудоёмкость вычисления функций $\tilde{H}_{dt}(s_t)$ для фиксированного $s_t \in [0, \bar{s}_t]$ определяется сложностью функций $H_{dt}(y_{dt})$ затрат на хранение невостребованных изделий или штрафов за недопоставленные изделия $d \in D$ в интервале t , диапазонами $L_{dt} = [\underline{\lambda}_{dt}, \bar{\lambda}_{dt}]$ возможных значений спроса λ_{dt} и видом функций $P_{dt}(\lambda_{dt})$ распределения этого спроса λ_{dt} , $d \in D, t = 1, \dots, n$.

При предположении, что сложность вычисления функций $H_{dt}(y_{dt})$ не зависит от y_{dt} , $t = 1, \dots, n$, трудоёмкость вычисления $\tilde{H}_{dt}(s_t)$ можно оценить как

$$O\left(\sum_{r=1}^t (\bar{\lambda}_{dr} - \underline{\lambda}_{dr})\right),$$

а зависимость трудоёмкости вычисления $\sum_{d \in D} \tilde{H}_{dt}(s_t)$ от параметров $m, n, \bar{x}_t, t = 1, \dots, n$, задачи для различных значений $s_t \in \left[0, \sum_{r=1}^t \bar{x}_r\right]$ – как

$$O\left(m \sum_{t=1}^n \left(\sum_{r=1}^t \bar{x}_r \sum_{r=1}^t (\bar{\lambda}_{dr} - \underline{\lambda}_{dr})\right)\right).$$

Наконец, при решении подзадачи **C** необходимая для хранения значений функций $R_t(x_t)$ и $\sum_{d \in D} \tilde{H}_{dt}(s_t)$ память может быть оценена как

$$O\left(\sum_{t=1}^n \sum_{r=1}^t \bar{x}_r\right),$$

а трудоёмкость реализации соотношения (6) при известных значениях этих функций – как

$$O\left(\sum_{t=1}^n \bar{x}_t \sum_{r=1}^{t-1} \bar{x}_r\right)$$

операций.

При большой трудоемкости точного решения подзадачи С ее приближенное решение может быть получено с использованием известных приближенных методов многошаговой оптимизации, в частности метода «плавающих трубок». В этом случае может потребоваться существенно меньшее число вычислений значений функций $R_i(x_i)$ и $\hat{H}_{dt}(s_t)$. На первом этапе решения можно ограничиться рассмотрением лишь таких программ выпуска $x = (x_1, \dots, x_r, \dots, x_n)$, что для всех $t = 1, \dots, n$ значение $x_t \geq \underline{x}_t$ и x_t кратно a , где \underline{x}_t и a – некоторые выбираемые константы. Очевидно, что в этом случае пространство состояний оптимизируемого многошагового процесса будет образовано лишь такими $s_t \in \left[\sum_{r=1}^t \underline{x}_r, \sum_{r=1}^t \bar{x}_r \right]$, которые кратны принятому числу a , $t = 1, \dots, n$.

Заключение. Рассмотрена задача оптимизации средней стоимости серийного выпуска комплекта изделий нескольких наименований и интенсивностей обработки заготовок изделий набором блоков инструментов на многопозиционной производственной линии ограниченной мощности на ряде временных интервалов. При расчете средней стоимости выпуска учитываются суммарные затраты на изготовление комплектов и математическое ожидание затрат на хранение невостребованных в текущем интервале уже произведенных изделий и штрафов за недопоставленные заказчику вовремя изделия в условиях случайного спроса на них.

Предложена двухуровневая декомпозиционная схема решения этой задачи. На нижнем уровне для каждого временного интервала решаются подзадачи оптимизации интенсивностей обработки изделий соответствующими блоками инструментов при фиксированном объеме выпуска. На верхнем уровне методом динамического программирования оптимизируются количества выпускаемых комплектов для всех интервалов. Если зависимости удельных (отнесенных к единице объема) затрат на обработку изделий от принимаемой ее интенсивности представляются для каждого блока инструментов выпуклыми функциями, то подзадачи нижнего уровня являются задачами выпуклого программирования. Отмечается один из эффективных подходов к их решению.

В дальнейшем предполагается исследовать более общие постановки рассмотренной выше задачи, в которых, в частности,

учитывается влияние интенсивности изготовления изделий на количество брака, причем это влияние может быть различным для разных изделий,

фактический спрос и степень его удовлетворения на отдельные изделия в начальные временные интервалы влияет на последующих интервалах как на возможный спрос на эти изделия, так и на штрафы за их возможную недопоставку.

Список использованных источников

1. Karimi, B. The capacitated lot sizing problem: a review of models and algorithms / B. Karimi, S. Fatemi Ghomi, J. M. Wilson // *Omega*. – 2003. – Vol. 31, № 5. – P. 365–378.
2. Ullah, H. A Literature Review on Inventory Lot Sizing Problems / H. Ullah, S. Parveen // *Global Journal of Researches in Engineering*. – 2010. – Vol. 10, № 5. – P. 21–36.
3. Jans, R. Modeling industrial lot sizing problems: a review / R. Jans, Z. Degraeve // *Int. J. Prod. Res.* – 2008. – Vol. 46, № 6. – P. 1619–1643.
4. Ng, C. T. A simple FPTAS for a single-item capacitated economic lot-sizing problem with monotone cost structure / C. T. Ng, M. Y. Kovalyov, T. C. E. Cheng // *Eur. J. Oper. Res.* – 2010. – Vol. 200, № 2. – P. 621–624.
5. Левин, Г. М. Оптимизация выпуска и интенсивностей обработки группы деталей при нестационарном спросе / Г. М. Левин, Б. М. Розин, А. Б. Долгий // *Весці Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук*. – 2016. – № 3. – С. 102–109.
6. Brandimarte, P. Multi-item capacitated lot-sizing with demand uncertainty / P. Brandimarte // *Int. J. Prod. Res.* – 2006. – Vol. 44, № 15. – P. 2997–3022.
7. Lee, S.-D. Economic lot sizing in a production system with random demand / S.-D. Lee, C.-M. Yang, S.-C. Lan // *Int. J. Prod. Res.* – 2016. – Vol. 47, № 5. – P. 1142–1154.
8. Tempelmeier, H. ABC β - a heuristic for dynamic capacitated lot sizing with random demand under a fillrate constraint / H. Tempelmeier, S. Herpers // *Int. J. Prod. Res.* – 2010. – Vol. 48, № 17. – P. 5181–5193.
9. Maes, J. Multi Item Single Level Capacitated Dynamic Lotsizing Heuristics: A Computational Comparison (Part II: Rolling Horizon) / J. Maes, L. N. Van Wassenhove // *IIE Transactions*. – 1986. – Vol. 18, № 2. – P. 124–129.
10. Гнеденко, Б. В. Курс теории вероятностей / Б. В. Гнеденко. – М.: Едиториал УРСС, 2005. – 448 с.

11. Левин, Г. М. Декомпозиционные методы оптимизации проектных решений / Г. М. Левин, В. С. Танаев. – Минск: Наука и техника, 1978. – 240 с.
12. Левин, Г. М. Линейная аппроксимация задачи оптимизации интенсивностей последовательно-параллельного выполнения пересекающихся множеств операций / Г. М. Левин, Б. М. Розин, А. Б. Долгий // Информатика. – 2014. – № 3. – С. 44–51.

References

1. Karimi B., Fatemi Ghomi S., Wilson J. M. The capacitated lot sizing problem: a review of models and algorithms. *Omega*, 2003, vol. 31, no. 5, pp. 365–378. Doi: 10.1016/s0305-0483(03)00059-8
2. Ullah H., Parveen S. A Literature Review on Inventory Lot Sizing Problems. *Global Journal of Researches in Engineering*, 2010, vol. 10, no. 5, pp. 21–36.
3. Jans R., Degraeve Z. Modeling industrial lot sizing problems: a review. *International Journal of Production Research*, 2008, vol. 46, no. 6, pp. 1619–1643. Doi: 10.1080/00207540600902262
4. Ng C. T., Kovalyov M. Y., Cheng T. C. E. A simple FPTAS for a single-item capacitated economic lot-sizing problem with monotone cost structure. *European Journal of Operational Research*, 2010, vol. 200, no. 2, pp. 621–624. Doi: 10.1016/j.ejor.2009.01.040
5. Levin G. M., Rozin B. M., Dolgui A. B. Optimizing the output and the intensities of processing a batch of parts under non-stationary demand. *Vestsi Natsyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series], 2016, no. 3, pp. 102–109 (in Russian).
6. Brandimarte P. Multi-item capacitated lot-sizing with demand uncertainty. *International Journal of Production Research*, 2006, vol. 44, no. 15, pp. 2997–3022. Doi: 10.1080/00207540500435116
7. Lee S.-D., Yang C.-M., Lan S.-C. Economic lot sizing in a production system with random demand. *International Journal of Systems Science*, 2014, vol. 47, no. 5, pp. 1142–1154. Doi: 10.1080/00207721.2014.915354
8. Tempelmeier H., Herpers S. ABCB - a heuristic for dynamic capacitated lot sizing with random demand under a fillrate constraint. *International Journal of Production Research*, 2010, vol. 48, no. 17, pp. 5181–5193. Doi: 10.1080/00207540903179782
9. Maes J., Van Wassenhove L. N. Multi Item Single Level Capacitated Dynamic Lotsizing Heuristics: A Computational Comparison (Part II: Rolling Horizon). *IIE Transactions*, 1986, vol. 18, no. 2, pp. 124–129. Doi: 10.1080/07408178608975339
10. Gnedenko B. V. *Probability theory course*. Moscow, Editorial URSS Publ., 2005. 448 p. (in Russian).
11. Levin G., Tanaev V. *Decomposition techniques for optimization of design decisions*. Minsk, Nauka i Technika Publ., 1978. 240 p. (in Russian).
12. Levin G. M., Rozin B. M., Dolgui A. B. Linear approximation for intensities optimization problem of sequential-parallel execution of intersecting operation sets. *Informatika* [Informatics], 2014, no. 3, pp. 44–51. (in Russian).

Информация об авторах

Левин Генрих Моисеевич – доктор технических наук, главный научный сотрудник лаборатории исследования операций, Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 6, г. Минск, 220012, Республика Беларусь). E-mail: levin@newman.bas-net.by

Розин Борис Матвеевич – кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории исследования операций, Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 6, г. Минск, 220012, Республика Беларусь). E-mail: rozin@newman.bas-net.by

Для цитирования

Левин, Г. М. Оптимизация выпуска комплектов изделий и интенсивностей их изготовления в условиях случайного спроса / Г. М. Левин, Б. М. Розин // Вест. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2017. – № 2. – С. 110–118.

Information about the authors

Levin Genrikh Moiseevich – D. Sc. (Engineering), Principle Researcher of the Operational Research Laboratory, United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus (6, Surganov Str., 220012, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: levin@newman.bas-net.by

Rozin Boris Matveevich – Ph. D. (Engineering), Leading Researcher of the Operational Research Laboratory, United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus (6, Surganov Str., 220012, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: rozin@newman.bas-net.by

For citation

Levin G. M., Rozin B. M. Optimizing the output of product batches and the intensity of their manufacture under random demand. *Vestsi Natsyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series], 2017, no. 2, pp. 110–118. (in Russian).

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ
SHORT COMMUNICATIONS

УДК 517.968

Поступила в редакцию 19.04.2017
Received 19.04.2017

Ф. В. Чумаков¹, С. И. Василец²

¹Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

²Белорусский государственный педагогический университет им. Максима Танка, Минск, Беларусь

**О ЯВНОМ РЕШЕНИИ ОДНОГО ВИДА ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА
НА СИММЕТРИЧНОМ ОТРЕЗКЕ С СУММАРНО-РАЗНОСТНЫМ ЯДРОМ**

Многие задачи теории и практики сводятся к решению интегральных уравнений первого рода со «слабым» ядром, т. е. с ядром, обращающимся в бесконечность интегрируемого порядка при совпадении аргументов. Успех исследования таких задач часто зависит от решения соответствующего уравнения в явной форме. В некоторых случаях удается получить такое решение. В данной статье рассматривается на симметричном отрезке уравнение первого рода с ядром, представляющим квадратный корень из дробно-линейной функции. Учитывая симметрию задания уравнения, удается свести его к равносильной системе двух уравнений, каждое из которых сводится к решению уравнения Абеля и его обобщений. Решение выписывается в явной форме и приводятся примеры.

Ключевые слова: интегральное уравнение первого рода, уравнение типа Вольтерра, дробно-линейная функция, явная форма решения уравнения, класс решений, симметрия, уравнение Абеля

F. V. Chymakov¹, S. I. Vasilets²

¹Belarusian State University, Minsk, Belarus

²Belarusian State Pedagogical University named after Maxim Tank, Minsk, Belarus

**EXPLICIT SOLUTION OF ONE-TYPE INTEGRAL VOLTERRA EQUATION
ON THE SYMMETRIC INTERVAL WITH A SUM-DIFFERENCE KERNEL**

Many problems in the theory and practice are reduced to solving the first-kind integral equations with a “weak” kernel, i. e. the kernel goes to the infinity of integrable order when arguments are matching. The success of investigation of such problems often depends on the solution of the explicit equation corresponding to the problem. In some cases, it is possible to get such a solution. In our case, we consider the first-kind equation with a kernel, which represents the square root of a fractional-linear function, on a symmetric interval. Given the equation symmetry, this equation can be reduced to an equivalent two-equation system, each of which is reduced to the Abel equation solution and its generalizations. The solution is written in explicit form. The examples are presented.

Keywords: first-kind integral equation, Volterra equation, fractional-linear function, explicit equation solution, solutions class, symmetry, Abel equation

Дадим здесь в явной форме решение интегрального уравнения вида

$$a(x) \int_{-x}^x \sqrt{\frac{x-t}{x+t}} \varphi(t) dt + b(x) \int_{-x}^x \sqrt{\frac{x+t}{x-t}} \varphi(t) dt = f(x), \quad (1)$$

где переменные x и t изменяются на отрезке $[-1,1]$, $a(x)$, $b(x)$ – заданные на этом отрезке дифференцируемые функции, удовлетворяющие условию

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} a(x) & b(x) \\ b(-x) & a(-x) \end{vmatrix} = a(x)a(-x) - b(x)b(-x) \neq 0. \quad (2)$$

Без ограничения общности будем считать, что $x > 0$. Решение уравнения $\varphi(x)$ будем искать в классе функций, обеспечивающих существование интегралов как несобственных. Для этого достаточно допустить для искомого решения обращение в бесконечность порядка меньшего $\frac{1}{2}$ на концах отрезка $[-1, 1]$. Необходимым условием существования такого решения является представление свободного члена уравнения в виде $f(x) = xf^*(x)$, где $f^*(x)$ – дифференцируемая функция. При сделанных предположениях уравнение имеет единственное решение. Изложим схему нахождения решения приведенного уравнения.

Предположим, что решение уравнения существует, т. е. равенство (1) выполняется. Тогда в силу имеющейся здесь симметрии должно выполняться также равенство, полученное в результате подстановки $-x$ в исходное уравнение (1) вместо x , т. е.

$$a(-x) \int_x^{-x} \sqrt{\frac{-x-t}{-x+t}} \varphi(t) dt + b(-x) \int_x^{-x} \sqrt{\frac{-x+t}{-x-t}} \varphi(t) dt = f(-x),$$

или, что то же самое,

$$a(-x) \int_{-x}^x \sqrt{\frac{x+t}{x-t}} \varphi(t) dt + b(-x) \int_{-x}^x \sqrt{\frac{x-t}{x+t}} \varphi(t) dt = -f(-x).$$

Запишем полученные равенства в виде системы

$$\begin{cases} a(x) \int_{-x}^x \sqrt{\frac{x-t}{x+t}} \varphi(t) dt + b(x) \int_{-x}^x \sqrt{\frac{x+t}{x-t}} \varphi(t) dt = f(x), \\ b(-x) \int_{-x}^x \sqrt{\frac{x-t}{x+t}} \varphi(t) dt + a(-x) \int_{-x}^x \sqrt{\frac{x+t}{x-t}} \varphi(t) dt = -f(-x), \end{cases}$$

из которой находим

$$\begin{cases} \int_{-x}^x \sqrt{\frac{x-t}{x+t}} \varphi(t) dt = \frac{a(-x)f(x) + b(x)f(-x)}{a(x)a(-x) - b(x)b(-x)} = \frac{a(-x)}{\Delta(x)} f(x) + \frac{b(x)}{\Delta(x)} f(-x), \\ \int_{-x}^x \sqrt{\frac{x+t}{x-t}} \varphi(t) dt = -\frac{a(x)f(-x) + b(-x)f(x)}{a(x)a(-x) - b(x)b(-x)} = -\frac{a(x)}{\Delta(x)} f(-x) - \frac{b(-x)}{\Delta(x)} f(x). \end{cases}$$

Складывая и вычитая полученные равенства, приходим к новой системе

$$\begin{cases} \int_{-x}^x \left(\sqrt{\frac{x-t}{x+t}} + \sqrt{\frac{x+t}{x-t}} \right) \varphi(t) dt = f_1(x), \\ \int_{-x}^x \left(\sqrt{\frac{x-t}{x+t}} - \sqrt{\frac{x+t}{x-t}} \right) \varphi(t) dt = f_2(x), \end{cases}$$

где

$$\begin{cases} f_1(x) = \frac{a(-x) - b(-x)}{\Delta(x)} f(x) + \frac{b(x) - a(x)}{\Delta(x)} f(-x) = xf_1^*(x), \\ f_1^*(x) = \frac{a(-x) - b(-x)}{\Delta(x)} f^*(x) - \frac{b(x) - a(x)}{\Delta(x)} f^*(-x), \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} f_2(x) = \frac{a(-x)+b(-x)}{\Delta(x)} f(x) + \frac{a(x)+b(x)}{\Delta(x)} f(-x) = xf_2^*(x), \\ f_2^*(x) = \frac{a(-x)+b(-x)}{\Delta(x)} f^*(x) - \frac{a(x)+b(x)}{\Delta(x)} f^*(-x), \end{cases} \quad (4)$$

которую запишем в виде двух уравнений, удобных для решения

$$\begin{cases} \int_0^x \frac{\varphi(t) + \varphi(-t)}{\sqrt{x^2 - t^2}} dt = \frac{1}{2x} f_1(x), \\ \int_0^x \frac{t(\varphi(-t) - \varphi(t))}{\sqrt{x^2 - t^2}} dt = \frac{1}{2} f_2(x). \end{cases} \quad (5)$$

Таким образом, исходное уравнение (1) свелось к системе двух уравнений (5), которая равносильна уравнению (1), так как от уравнения (1) легко перейти к системе (5), и наоборот. Решения уравнений системы (5) можно найти, сводя их к уравнениям Абеля [1, § 54; 2, гл. 1, § 2], и получить таким образом решение уравнения

$$\int_0^x \frac{u(t) dt}{\sqrt{x^2 - t^2}} = f(x)$$

по формуле

$$u(x) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{tf(t) dt}{\sqrt{x^2 - t^2}}.$$

Применяя эту формулу, запишем последовательно решения уравнений системы (5):

$$\begin{cases} \varphi(-x) + \varphi(x) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f_1(t)}{\sqrt{x^2 - t^2}} dt, \\ \varphi(-x) - \varphi(x) = \frac{1}{\pi x} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{tf_2(t)}{\sqrt{x^2 - t^2}} dt. \end{cases} \quad (6)$$

Вычитая из первого равенства второе, а затем складывая их, получим две формулы

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f_1(t) dt}{\sqrt{x^2 - t^2}} - \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{tf_2(t) dt}{\sqrt{x^2 - t^2}} \right), \quad (7)$$

$$\varphi(-x) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f_1(t) dt}{\sqrt{x^2 - t^2}} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{tf_2(t) dt}{\sqrt{x^2 - t^2}} \right). \quad (8)$$

Первая функция является решением уравнения (1), а вторая – решением уравнения

$$a(x) \int_{-x}^x \sqrt{\frac{x+t}{x-t}} \varphi(-t) dt + b(x) \int_{-x}^x \sqrt{\frac{x-t}{x+t}} \varphi(-t) dt = f(x), \quad (9)$$

которое будем называть *сопутствующим* уравнению (1). Действительно, меняя переменную t интегрирования на $-t$ в уравнении (1), получим уравнение (9):

$$a(x) \int_x^{-x} \sqrt{\frac{x+t}{x-t}} \varphi(-t) d(-t) + b(x) \int_x^{-x} \sqrt{\frac{x-t}{x+t}} \varphi(-t) d(-t) = a(x) \int_{-x}^x \sqrt{\frac{x-t}{x+t}} \varphi(-t) dt + \\ + b(x) \int_{-x}^x \sqrt{\frac{x+t}{x-t}} \varphi(-t) dt = f(x).$$

Формулы (7) и (8) можно записать в другой форме, сводя непосредственно уравнения системы (5) к решению уравнения Абеля [1, § 54]:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \left(f_1^*(x) - f_2^*(x) + \int_0^x \frac{xf_1^*(x) - xf_1^*(t) - xf_2^*(x) + tf_2^*(t)}{(x^2 - t^2)\sqrt{x^2 - t^2}} t dt \right), \quad (10)$$

$$\varphi(-x) = \frac{1}{2\pi} \left(f_1^*(x) + f_2^*(x) + \int_0^x \frac{xf_1^*(x) - xf_1^*(t) + xf_2^*(t) - tf_2^*(t)}{(x^2 - t^2)\sqrt{x^2 - t^2}} t dt \right). \quad (11)$$

Заметим, что можно получить и другие формулы, отличающиеся от полученных здесь, для нахождения решений как исходного, так и сопутствующего ему уравнений.

Решим уравнение

$$3 \int_{-x}^x \sqrt{\frac{x-t}{x+t}} \varphi(t) dt + \int_{-x}^x \sqrt{\frac{x+t}{x-t}} \varphi(t) dt = 3x + x^2.$$

По формулам (2), (3), (4) находим $\Delta(x) = 8$,

$$f_1(x) = \frac{2(3x + x^2) - 2(-3x + x^2)}{8} = \frac{3}{2}x, \quad f_2(x) = \frac{4(3x + x^2) + 4(-3x + 2x^2)}{8} = 2x^2,$$

по формуле (7) определяем решение

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f_1(t) dt}{\sqrt{x^2 - t^2}} - \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{tf_2(t) dt}{\sqrt{x^2 - t^2}} \right) = \\ = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{3}{2} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{t dt}{\sqrt{x^2 - t^2}} - \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{2t^3 dt}{\sqrt{x^2 - t^2}} \right) = \frac{3}{4\pi} \frac{d}{dx} (x) - \frac{1}{x\pi} \frac{d}{dx} \left(\frac{2}{3} x^3 \right) = \frac{3}{4\pi} - \frac{2}{\pi} x,$$

так как

$$\int_0^x \frac{t dt}{\sqrt{x^2 - t^2}} = x, \quad \int_0^x \frac{t^3 dt}{\sqrt{x^2 - t^2}} = \frac{2}{3} x^3.$$

Проверка. Имеем

$$\begin{aligned} & 3 \int_{-x}^x \sqrt{\frac{x-t}{x+t}} \left(\frac{3}{4\pi} - \frac{2}{\pi} t \right) dt + \int_{-x}^x \sqrt{\frac{x+t}{x-t}} \left(\frac{3}{4\pi} - \frac{2}{\pi} t \right) dt = \\ & = \frac{9}{4\pi} \int_{-x}^x \sqrt{\frac{x-t}{x+t}} dt - \frac{6}{\pi} \int_{-x}^x \sqrt{\frac{x-t}{x+t}} t dt + \frac{3}{4\pi} \int_{-x}^x \sqrt{\frac{x+t}{x-t}} dt - \frac{2}{\pi} \int_{-x}^x \sqrt{\frac{x+t}{x-t}} t dt = \\ & = \left(\frac{9}{4\pi} + \frac{3}{4\pi} \right) \pi x - \frac{6}{\pi} \left(-\frac{\pi}{2} x^2 \right) - \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} x^2 \right) = 3x + x^2, \end{aligned}$$

так как

$$\begin{aligned} \int_{-x}^x \sqrt{\frac{x-t}{x+t}} dt &= \int_{-x}^x \sqrt{\frac{x+t}{x-t}} dt = \pi x, \\ \int_{-x}^x \sqrt{\frac{x-t}{x+t}} t dt &= -\frac{\pi}{2} x^2, \\ \int_{-x}^x \sqrt{\frac{x+t}{x-t}} t dt &= \frac{\pi}{2} x^2. \end{aligned}$$

Заметим, что в работе [3] приводится в явной форме решение интегрального уравнения Вольтерра первого рода с ядром $\sqrt{x-t/x+t}$ и со внутренними коэффициентами на симметричном отрезке.

Список использованных источников

1. Гахов, Ф. Д.. Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
2. Самко, С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
3. Чумаков, Ф. В. Решение в явной форме интегрального уравнения Вольтерра первого рода с ядром $\sqrt{x-t/x+t}$ и внутренними коэффициентами на симметричном отрезке / Ф. В. Чумаков, С. И. Василец // Вес. БДПУ. Сер. 3, Фізика. Матэматыка. Інфарматыка. Біялогія. Геаграфія. – 2015. – № 4. – С. 7–10.

References

1. Gakhov F. D. *Boundary Value Problems*. Moscow, Nauka Publ., 1977. 640 p. (in Russian).
2. Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. *Integrals and Fractional-Order Derivatives and Some of their Applications*. Minsk, Nauka i tekhnika Publ., 1987. 688 p. (in Russian).
3. Chumakov F. V., Vasilets S. I. Explicit solution of the first-kind integral Volterra equation with the kernel $\sqrt{x-t/x+t}$ and the internal coefficients on the symmetric interval. *Vesti BDPU. Seryya 3, Fizika. Matematyka. Infarmatyka. Biyalogiya. Geagrafiya* [Bulletin of BSPU. Series 3, Physics. Mathematics. Informatics. Biology. Geography], 2015, no. 4, pp. 7–10. (in Russian).

Сведения об авторах

Чумаков Федор Васильевич – кандидат физико-математических наук, доцент, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: fchumakov@tut.by

Information about the authors

Chumakov Fedor Vfsil'evich – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: fchumakov@tut.by

Василец Сергей Иванович – кандидат физико-математических наук, доцент, декан физико-математического факультета, Белорусский государственный педагогический университет им. Максима Танка (ул. Козыревская, 18, 220028, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: svselets@tut.by

Для цитирования

Чумаков, Ф. В. О явном решении одного вида интегрального уравнения Вольтерра на симметричном отрезке с суммарно-разностным ядром / Ф. В. Чумаков, С. И. Василец // Вест. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2017. – № 2. – С. 119–124.

Vasilets Sergei Ivanovich – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Dean, Physics and Mathematics Department, Belarusian State Pedagogical University named after Maxim Tank (Kozyrevskaya Str., 18, 220028, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: svselets@tut.by

For citation

Chymakov F. V., Vasilets S. I. Explicit solution of one-type integral Volterra equation on the symmetric interval with a sum-difference kernel. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series], 2017, no. 2, pp. 119–124. (in Russian).

УЧЕНЫЕ БЕЛАРУСИ
SCIENTISTS OF BELARUS

КИЛИН СЕРГЕЙ ЯКОВЛЕВИЧ

(К 65-летию со дня рождения)



18 мая 2017 г. исполнилось 65 лет со дня рождения академика Сергея Яковлевича Килина – известного ученого в области нелинейной оптики, квантовой оптики и квантовой информатики.

Сергей Яковлевич родился в г. Гомеле. В 1969 г. после окончания средней школы в г. Минске поступил в Белорусский государственный университет на физический факультет, окончил его с отличием в 1974 г. и был распределен в Институт физики АН БССР. Работал стажером-исследователем, младшим, старшим, ведущим и главным научным сотрудником, заведующим лабораторией. С октября 2008 г. – заместитель академика-секретаря Отделения физики, математики и информатики Национальной академии наук Беларуси, с февраля 2012 г. – главный ученый секретарь НАН Беларуси, с мая 2014 г. – заместитель Председателя Президиума НАН Беларуси.

С самого начала своей научной деятельности Сергей Яковлевич занимался исследованием объектов, квантовые особенности которых являются определяющими в их поведении – одиночными атомами и молекулами, а также свойствами фотонов, создаваемых ими. Именно эти объекты стали основными для новых технологий – квантовых информационных технологий, включающих квантовые компьютеры, квантовую криптографию и квантовые коммуникации. Разработка данной тематики составила главное направление научной деятельности С. Я. Килина в последние двадцать лет.

Ученым разработана теория квантовых флуктуаций при нелинейно-оптических взаимодействиях и на этой основе предсказан и объяснен ряд эффектов и явлений, характерных для испускания фотонов одиночными атомами и молекулами: эффект группировки и антигруппировки разночастотных фотонов; «замораживание» спонтанного распада возбужденных состояний в фотонных кристаллах, генерация сжатых и других неклассических состояний в многофотонных процессах; квантовая неустойчивость дипольного момента атомов; подавление квантового динамического туннелирования лазерным излучением; одноатомная оптическая бистабильность в микрорезонаторах и др.

Созданные С. Я. Килиным теории непрерывных квантовых наблюдений (скачков), управления состояниями фотонов при нелинейных взаимодействиях, квантовой диссипации в дальнейшем были использованы ученым для решения широкого круга задач квантовой физики и позволили объяснить и предсказать ряд новых физических эффектов и явлений, играющих принципиальную роль в решении проблем создания квантовых компьютеров и защиты информации с помощью методов квантовой криптографии.

Сергеем Яковлевичем разработаны новые методы и предложены новые системы для квантовых информационных технологий: новые схемы и протоколы квантовой криптографии и квантовой телепортации, доказано преимущество кубитного кодирования в сравнении с другими базисами, предложено решение проблемы декогеренции, представляющей одно из основных препятствий

на пути создания квантовых процессоров. Обоснована возможность создания квантового компьютера и других квантово-информационных устройств (квантового повторителя, квантовой памяти) на основе одиночных центров «азот-вакансия» (NV-центров) в алмазе.

Под руководством ученого создана первая в СНГ волоконно-оптическая система квантовой криптографии на основе генерации, квантового кодирования во временные интервалы, пересылки и регистрации квантовых битов в виде однофотонных импульсов, а также уникальные квантовооптические генераторы случайных числовых последовательностей, обеспечивающие надежное функционирование криптографических систем.

Сергей Яковлевич сформировал признанную в мире научную школу квантовой оптики и квантовой информатики. Под его руководством подготовлено и защищено 4 докторские и 6 кандидатских диссертаций. Он автор более 460 научных работ, в том числе 4 монографий. С 1988 г. читает спецкурсы по квантовой оптике и квантовой информатике для студентов Белорусского государственного университета.

Научная деятельность С. Я. Килина активно включена в мировой научный процесс, под его руководством выполнено и продолжает выполняться значительное число крупных международных научных проектов, включая проекты программы ЕС «Горизонт 2020». Он один из организаторов многочисленных международных научных конференций по квантовой оптике и квантовой информатике (ICQOQI), конференций по когерентной и нелинейной оптике (ICONO), конгрессов белорусских физиков и других представительных форумов. В качестве приглашенного профессора читал лекции по квантовой физике и квантовой информатике в Нью-Йоркском, Рочестерском, Колорадском, Орегонском, Мичиганском, Техасском (США), Штуттгартском (Германия) университетах, в Высшей нормальной школе (Париж, Франция), в Институте квантовой оптики общества Макса Планка (Гархинг, Германия) и других международных физических центрах.

Как главный ученый секретарь НАН Беларуси и заместитель Председателя Президиума НАН Беларуси С. Я. Килин внес большой вклад в развитие и становление современного облика Академии наук как организации, выполняющей полный цикл инновационной цепочки – от проведения передовых фундаментальных исследований до разработки и создания наукоемкой, конкурентоспособной продукции.

Значительна роль Сергея Яковлевича в развитии общественных организаций Академии наук, включая Совет молодых ученых академии, который он возглавлял в 1981–1983 гг., Белорусское физическое общество, председателем которого был в 2005–2011 гг.

С. Я. Килин – член Президиума и Бюро Президиума НАН Беларуси, главный редактор журнала «Весті Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук», заместитель главного редактора журнала «Доклады Национальной академии наук Беларуси», научный руководитель Центра «Квантовая оптика и квантовая информатика» в Институте физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси, руководитель Академического квантового центра, член Консультативного научного совета фонда «Сколково», член ученого совета Объединенного института ядерных исследований (Дубна, Россия), член Совета по сотрудничеству в области фундаментальной науки государств – участников СНГ, иностранный член Общества Institute of Physics (IOP, Великобритания).

С. Я. Килин является лауреатом Государственной премии Республики Беларусь (2002 г.) и премии Ленинского комсомола Беларуси (1982 г.), награжден медалью Франциска Скорины (2014 г.), медалью им. Д. С. Рождественского Оптического общества России (2015 г.), нагрудным знаком Госкорпорации «Росатом» «За вклад в развитие атомной отрасли» 2-й степени (2015 г.), нагрудным знаком «Золотая медаль Национальной академии наук Беларуси “За большой вклад в развитие науки”» (2017 г.).

Глубокие творческие идеи, высокий профессионализм и организаторские способности, культура общения, принципиальность и такт обеспечили С. Я. Килину авторитет талантливого ученого, мудрого руководителя, чуткого и доброжелательного человека. Сердечно поздравляем Сергея Яковлевича с юбилеем, желаем ему крепкого здоровья и дальнейших творческих успехов.

*Отделение физики, математики и информатики НАН Беларуси,
Институт физики НАН Беларуси,
Белорусское физическое общество*

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Редакция журнала «Весті Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук» просит авторов руководствоваться приведенными ниже правилами.

I. Статьи о результатах работ, проведенных в научных учреждениях, должны иметь разрешение на опубликование (сопроводительное письмо ректората или дирекции соответствующего института либо выписку из протокола заседания ученого совета, отдела или кафедры, а также акт экспертизы).

II. Статья предоставляется в редакцию в двух экземплярах на белорусском, русском или английском языках; шрифт – Times New Roman, кегль – 11 (в том числе в формулах); межстрочный интервал – 1,5. Занумерованные формулы выключаются в отдельную строку. Формулировки утверждений (теорем, лемм, предложений и следствий) должны быть выполнены курсивом. В тексте не допускаются рукописные вставки и вклейки. Статья должна быть подписана всеми авторами.

III. Статья должна иметь следующую структуру:

1. Индекс по Универсальной десятичной классификации (УДК);

инициалы и фамилии авторов;

название статьи;

полное наименование учреждений, где работают авторы, с указанием города и страны, адрес электронной почты каждого автора.

2. Аннотация (авторское резюме) объемом 150–250 слов должна кратко представлять результаты работы и быть понятной, в том числе и в отрыве от основного текста статьи; должна быть информативной, хорошо структурированной (один из вариантов написания аннотации – краткое повторение структуры статьи, включающее введение, цели и задачи, методы, результаты, заключение или выводы).

3. Ключевые слова – набор слов, отражающих содержание текста в терминах объекта, научной отрасли и методов исследования; рекомендуемое количество ключевых слов 5–10.

4. Затем метатекстовые данные (все то, что предшествует основному тексту статьи) приводятся *на английском языке*, причем аннотация должна быть оригинальной (т. е. не являться дословным переводом русскоязычной аннотации). Если статья англоязычная – вышеуказанные данные приводятся на русском (белорусском) языке.

5. Основной текст статьи не должен превышать 16 с. (т. е. около 40 тыс. знаков); в этот объем также входят таблицы и рисунки (до 7–8). Изложенный материал должен быть четко структурированным: введение, цели и задачи, методы, результаты, заключение (выводы). В русско- и белорусскоязычных статьях рекомендуется делать подрисунковые подписи и надписи на самих иллюстрациях на двух языках – *русском (белорусском) и английском*.

6. Список использованной литературы (не более 40 ссылок) оформляется в соответствии с требованиями Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь (ГОСТ 7.1-2003). Цитируемая литература приводится общим списком по мере упоминания, ссылки в тексте даются порядковым номером в квадратных скобках (напр., [1]); ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

7. Затем приводится список цитированных источников *в романском алфавите* (латиница) («References») со следующей структурой: авторы, название статьи (после русскоязычного названия в квадратных скобках дается его перевод на английский язык), название источника (после русскоязычного источника в квадратных скобках дается перевод его названия на английский язык), выходные данные с обозначениями на английском языке.

IV. Для подготовки метаданных (так называемый информационный лист) на отдельной странице следует указать *на русском и английском языках* для каждого автора: фамилию, имя и отчество (полностью), ученую степень, звание, должность, место работы с указанием адреса, контактную информацию (e-mail, телефоны).

V. Электронный вариант статьи предоставляется на диске, флэшке или присылается по электронной почте в редакцию журнала – fmvesti@mail.ru. Текст должен быть набран в Word под Windows, формулы – в редакторе MathType. Собственным редактором формул версий Microsoft Office 2007 и выше пользоваться нельзя, так как в редакционно-издательском процессе он не поддерживается. Вставку символов выполнять через меню «Вставка\Символ». Выключку вверх и вниз (C^2 , C_4) выполнять через меню «Формат\

Шрыфт\Верхний индекс», «Формат\Шрыфт\Нижний индекс». Латинские буквы необходимо набирать *курсивом*, греческие – прямо (для набора греческих символов следует пользоваться гарнитурой Symbol). Обозначения математических функций (lim, sup, In, sin, Re, Im и т. п.), символы химических элементов (N, Cl) также набираются прямым шрифтом.

VI. Черно-белые и цветные рисунки вставляются в текст статьи (Word), а также даются в виде отдельных файлов в формате tif (600 точек на дюйм). Желательно также предоставлять их в формате оригинала (Corel, диаграммы в Excel, Origin Pro и т. д.), т. е. в той программе, в которой они выполнены. Текст на рисунках набирается основной гарнитурой, причем начертание символов (греческое, латинское) должно соответствовать их начертанию в тексте. Размер кегля соизмерим с размером рисунка (желательно 8 пунктов). На обороте рисунков (если они даются отдельно) указываются фамилии авторов, название статьи. Фотографии предоставляются в виде файлов (tif, jpg, png, eps) и в распечатанном виде.

VII. Поступившая в редакцию статья направляется на рецензию, затем визируется членом редколлегии. Основным критерием целесообразности публикации является новизна и информативность статьи. Если по рекомендации рецензента статья возвращается автору на доработку, то переработанная рукопись вновь рассматривается редколлегией. Статьи не по профилю журнала возвращаются авторам после заключения редколлегии.

Материалы для публикации следует направлять по адресу: ул. Академическая, 1, к. 119, редакция журнала «Весті НАН Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук», 220072, г. Минск, Республика Беларусь; тел. для справок: +375 17 369 76 52 (среда); +375 17 284 19 19 (четверг, пятница), либо по электронной почте: fmvesti@mail.ru. либо через онлайн-форму на сайте.