

ВЕСЦІ НАЦЫЯНАЛЬнай АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСІ

СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК. 2018. Т. 54, № 2

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ

СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК. 2018. Т. 54, № 2

Журнал основан в январе 1965 г.

Выходит четыре раза в год

Учредитель – Национальная академия наук Беларуси

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь,
свидетельство о регистрации № 392 от 18.05.2009

*Входит в Перечень научных изданий Республики Беларусь
для опубликования результатов диссертационных исследований,
включен в базу данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ)*

Главный редактор

Сергей Яковлевич Килин – Президиум Национальной академии наук Беларуси

Редакционная коллегия

- Н. М. Олехнович** – Научно-практический центр Национальной академии наук Беларуси по материаловедению, Минск, Беларусь (*заместитель главного редактора*),
В. А. Орлович – Отделение физики, математики и информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь (*заместитель главного редактора*),
Т. Е. Янчук – (*ведущий редактор журнала*)
С. В. Абламейко – Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
С. М. Абрамов – Институт программных систем Российской академии наук, Москва, Россия
В. М. Анищик – Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
А. И. Белоус – Холдинг «ИНТЕГРАЛ», Минск, Беларусь
И. В. Гайшун – Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
С. В. Гапоненко – Белорусский республиканский фонд фундаментальных исследований, Минск, Беларусь
А. М. Гончаренко – Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
А. П. Достанко – Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь
Н. А. Изобов – Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

Н. С. Казак – Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
В. И. Корзюк – Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
Ф. П. Коршунов – Научно-практический центр Национальной академии наук Беларуси по материаловедению, Минск, Беларусь
Ю. А. Курочкин – Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
Н. А. Поклонский – Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
С. А. Тихомиров – Отделение физики, математики и информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
Л. М. Томильчик – Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
А. В. Тузиков – Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
Ю. С. Харин – Научно-исследовательский институт прикладных проблем математики и информатики Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь
А. Ф. Чернявский – Институт прикладных физических проблем имени А. Н. Севченко Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь
Л. А. Янович – Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
В. И. Янчевский – Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

Редакционный совет

С. Я. Килин – Президиум Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
С. В. Абламейко – Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
Ж. И. Алферов – Санкт-Петербургский национальный исследовательский Академический университет Российской академии наук, Санкт-Петербург, Россия
А. Л. Асеев – Президиум Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирск, Россия
Й. Врахтруп – Институт физики (3) Штутгартского университета, Штутгарт, Германия
И. В. Гайшун – Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
А. М. Желтиков – Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия
В. В. Козлов – Математический институт имени В. А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия
Г. Лёйхс – Институт физики света имени М. Планка, Эрланген, Германия
Д. С. Могилевцев – Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
Нгуен Дай Хунг – Институт физики Вьетнамской академии наук и технологий, Ханой, Вьетнам
В. А. Орлович – Отделение физики, математики и информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
А. Цайлингер – Институт квантовой оптики и квантовой информатики Австрийской академии наук, Вена, Австрия

Адрес редакции:

ул. Академическая, 1, к. 119, 220072, г. Минск, Республика Беларусь.

Тел.: + 375 17 284-19-19; e-mail: fmvesti@mail.ru

vestifm.belnauka.by

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ.

Серия физико-математических наук. 2018. Т. 54, № 2.

Выходит на русском, белорусском и английском языках

Редактор *Т. Е. Янчук*

Компьютерная верстка *О. А. Толстая*

Подписано в печать 20.06.2018. Выход в свет 28.06.2018. Формат 60×84 1/8. Бумага офсетная.

Печать цифровая. Усл. печ. л. 14,88. Уч.-изд. л. 16,4. Тираж 62 экз. Заказ 125.

Цена: индивидуальная подписка – 10,47 руб., ведомственная подписка – 25,45 руб.

Издатель и полиграфическое исполнение:

Республиканское унитарное предприятие «Издательский дом «Беларуская навука».

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/18 от 02.08.2013. ЛП № 02330/455 от 30.12.2013. Ул. Ф. Скорины, 40, 220141, г. Минск, Республика Беларусь

© РУП «Издательский дом «Беларуская навука»,

Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук, 2018

PROCEEDINGS OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF BELARUS

PHYSICS AND MATHEMATICS SERIES, 2018, vol. 54, no. 2

The Journal was founded in January 1965

Periodicity is 4 issues per annum

Founder is the National Academy of Sciences of Belarus

The journal is registered on May 18, 2009 by the Ministry of Information of the Republic of Belarus
in the State Registry of Mass Media, reg. no. 392

*The Journal is included in The List of Journals for Publication
of the Results of Dissertation Research in the Republic of Belarus
and in the database of Russian Science Citation Index (RSCI)*

Editor-in-Chief

Sergei Ya. Kilin – Presidium of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

Editorial Board

Nikolai M. Olekhovich – The Scientific and Practical Materials Research Center of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus (*Associate Editor-in-Chief*)

Valentin A. Orlovich – Department of Physics, Mathematics and Informatics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus (*Associate Editor-in-Chief*)

Tatiana E. Yanchuk (*lead editor*)

Sergey V. Ablameyko – Belarusian State University, Minsk, Belarus

Sergei M. Abramov – Program Systems Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Viktor M. Anishchik – Belarusian State University, Minsk, Belarus

Anatoliy I. Belous – “INTEGRAL” Holding, Minsk, Belarus

Ivan V. Gaishun – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

Sergey V. Gaponenko – Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research, Minsk, Belarus

Andrei M. Goncharenko – B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

Anatolii P. Dostanko – Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Belarus

Nikolai A. Izobov – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

Nikolai S. Kazak – B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

Viktor I. Korzyuk – Belarusian State University, Minsk, Belarus

Fyodor P. Korshunov – The Scientific and Practical Materials Research Center of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

Yurii A. Kurochkin – B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

Nikolai A. Poklonskii – Belarusian State University, Minsk, Belarus

Sergei A. Tikhomirov – Department of Physics, Mathematics and Informatics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

Lev M. Tomil'chik – B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
Aleksandr V. Tuzikov – United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
Yurii S. Kharin – Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics of the Belarusian State University, Minsk, Belarus
Aleksandr F. Chernyavskii – A. N. Sevchenko Institute of Applied Physical Problems of Belarusian State University, Minsk, Belarus
Leonid A. Yanovich – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
Vyacheslav I. Yanchevskii – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

Editorial Council

Sergei Ya. Kilin – Presidium of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
Sergei V. Ablameyko – Belarusian State University, Minsk, Belarus
Zhores I. Alferov – St Petersburg National Research Academic University of the Russian Academy of Sciences, St. Petersburg, Russia
Aleksandr L. Aseev – Presidium of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia
Jörg Wrachtrup – Institute of Physics (3) of the University of Stuttgart, Stuttgart, Germany
Ivan V. Gaishun – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
Aleksei M. Zheltikov – Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
Valery V. Kozlov – Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
Gerd Leuchs – Max Planck Institute for the Science of Light, Erlangen, Germany
Dmitrii S. Mogilevcev – B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
Nguyen Dai Hung – Institute of Physics of the Vietnam Academy of Science and Technology, Hanoi, Vietnam
Valentin A. Orlovich – Department of Physics, Mathematics and Informatics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
Anton Zeilinger – Institute for Quantum Optics and Quantum Information of the Austrian Academy of Sciences, Vienna, Austria

Address of the Editorial Office:

1, Akademicheskaya Str., room 119, 220072, Minsk, Republic of Belarus.

Tel.: +375 17 284-19-19; e-mail: fmvesti@mail.ru

vestifm.belnauka.by

PROCEEDING OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF BELARUS.

Physics and Mathematics series, 2018, vol. 54, no. 2.

Printed in Russian, Belarusian and English languages

Editor *T. E. Yanchuk*

Computer imposition *O. A. Tolstaya*

It is sent of the press 20.06.2018. Appearance 28.06.2018. Format 60×84¹/₈. Offset paper.

The press digital. Printed pages 14,88. Publisher's signatures 16,4. Circulation 62 copies. Order 125.

Price: individual subscription – 10,47 byn., departmental subscription – 25,45 byn.

Publisher and printing execution:

Republican unitary enterprise "Publishing House "Belaruskaya Navuka".

Certificate on the state registration of the publisher, manufacturer, distributor of printing editions

No. 1/18 dated August 2, 2013. License for the press no. 02330/455 dated December 30, 2013.

Address: F. Scorina Str., 40, 220141, Minsk, Republic of Belarus.

© RUE "Publishing House "Belaruskaya Navuka",

Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series, 2018

ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Корзюк В. И., Нгуен Ван Винь. Смешанная задача для одномерного гиперболического уравнения четвертого порядка с периодическими условиями	135
Игнатенко М. В., Янович Л. А. Обобщенные интерполяционные многочлены Эрмита – Биркгофа для дифференциальных операторов произвольного порядка в частных производных	149
Якуто К. Л. О целом положительном решении матричного уравнения $X^n = A$ для матриц третьего порядка в случае натуральных n	164
Харин А. Ю., Тон Тхат Ту. Анализ и исследование робастности последовательного критерия отношения вероятностей для модели независимых неодинаково распределенных наблюдений	179
Качан И. В. Непрерывная зависимость от начальных данных решений стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями	193

ФИЗИКА

Русак А. А., Дашкевич В. И., Орлович В. А., Шкадаревич А. П. Тепловые эффекты в безопасном для глаз кольцевом параметрическом генераторе света на кристаллах KTiOPO_4	210
Макаренко Л. Ф., Ластовский С. Б., Гаубас Э., Павлов Е., Молл М., Якушевич А. С., Мурин Л. И. Инжекционный отжиг комплекса собственное димеждоузлие – кислород в кремнии p -типа	220
Шелег А. У., Гременок В. Ф., Серeda А. С., Гуртовой В. Г., Чумак В. А., Цырельчук И. Н. Получение и рентгенографические исследования твердых растворов $\text{Cu}_2\text{CdSn}(\text{S}_x\text{Se}_{1-x})_4$	229
Пилипович В. А., Залесский В. Б., Конойко А. И., Кравченко В. М., Решиков К. А. Преобразователь ИК-излучения на базе микрорезонаторов Фабри – Перо	234

ИНФОРМАТИКА

Кульбак Л. И., Золотой С. А., Мартинович Т. С. Повышение информативности расчетных оценок надежности бортовой аппаратуры малогабаритных космических аппаратов	241
--	-----

УЧЕНЫЕ БЕЛАРУСИ

Памяти академика Владимира Антоновича Пилиповича	253
Памяти академика Ивана Васильевича Гайшуна	254

ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)

CONTENTS

MATHEMATICS

Korzyuk V. I., Nguyen Van Vinh. A mixed problem for the four-order one-dimensional hyperbolic equation with periodic conditions	135
Ignatenko M. V., Yanovich L. A. Generalized interpolation Hermite – Birkhoff polynomials for arbitrary-order partial differential operators	149
Yakuto K. L. Positive integer solution of the matrix equation $X^n = A$ for third-order matrices in the case of positive integers n	164
Kharin A. Yu., Ton That Tu. Performance analysis and robustness evaluation of a sequential probability ratio test for non-identically distributed observations	179
Kachan I. V. Continuous dependence on the initial data of the solutions of stochastic differential equations with fractional Brownian motions	193

PHYSICS

Rusak A. A., Dashkevich U. I., Orlovich V. A., Shkadarevich A. P. Thermal effects in the eye-safe ring optical parametric oscillator based on KTiOPO_4 crystals	210
Makarenko L. F., Lastovskii S. B., Gaubas E., Pavlov J., Moll M., Yakushevich H. S., Murin L. I. Injection annealing of the self di-interstitial – oxygen complex in p -type silicon	220
Sheleg A. U., Gremenok V. F., Sereda A. S., Hurtavy V. G., Chumak V. A., Tsyrelchuk I. N. Synthesis and X-ray investigation of $\text{Cu}_2\text{CdSn}(\text{S}_x\text{Se}_{1-x})_4$ solid solutions	229
Pilipovich V. A., Zaleski V. B., Konojko A. I., Kravchenko V. M., Reshikov C. A. Infrared radiation converter based on Fabry – Perot microresonators	234

INFORMATICS

Kulbak L. I., Zolotoy S. A., Martinovich T. S. Increase in the informative content of calculated reliability estimates of the on-board equipment of small spacecrafts	241
--	-----

SCIENTISTS OF BELARUS

In memory of Academician Ivan Vasilyevich Gaishun	253
In memory of Academician Vladimir Antonovich Pilipovich	254

ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)

МАТЕМАТИКА MATHEMATICS

УДК 517.958
<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-2-135-148>

Поступила в редакцию 14.03.2018
Received 14.03.2018

В. И. Корзюк^{1,2}, Нгуен Ван Винь^{1,3}

¹Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

²Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

³Хюэский университет, Хюэ, Вьетнам

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ УСЛОВИЯМИ

Аннотация. Изучается классическое решение граничной задачи для строго гиперболического уравнения четвертого порядка в случае двух независимых переменных с четырьмя различными семействами характеристик. Заметим, что корректная постановка смешанных задач для гиперболических уравнений зависит не только от количества характеристик, но также и от их расположения. Оператор уравнения представляет собой композицию дифференциальных операторов первого порядка. Уравнение задается в полуполосе двух независимых переменных. На нижнем основании области задаются условия Коши, а на боковых границах – периодические условия. Методом характеристик выписывается в аналитическом виде решение рассматриваемой задачи. Доказывается единственность решения. Заметим также, что решение во всей заданной области представляет собой композицию найденных решений в некоторых подобластях. Таким образом, для того чтобы найденное классическое решение обладало искомой гладкостью, необходимо, чтобы на границе данных подобластей значения этих кусочных решений, а также их производных до четвертого порядка, совпадали. Под классическим решением понимается функция, которая определена во всех точках замыкания заданной области и имеет все классические производные, входящие в уравнение и условия задачи.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, гиперболические уравнения, уравнения четвертого порядка, частные производные, граничные условия, условия Коши, периодические условия, условия согласования, классическое решение, строгое гиперболическое уравнение

Для цитирования. Корзюк, В. И. Смешанная задача для одномерного гиперболического уравнения четвертого порядка с периодическими условиями / В. И. Корзюк, Нгуен Ван Винь // Вест. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2018. – Т. 54, № 2. – С. 135–148. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-2-135-148>

V. I. Korzyuk^{1,2}, Nguyen Van Vinh^{1,3}

¹Belarusian State University, Minsk, Belarus

²Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

³Hue University's College of Education, Hue, Vietnam

A MIXED PROBLEM FOR THE FOUR-ORDER ONE-DIMENSIONAL HYPERBOLIC EQUATION WITH PERIODIC CONDITIONS

Abstract. This article considers a classical solution of the boundary problem for the four-order strictly hyperbolic equation with four different characteristics. Note that the well-posed statement of mixed problems for hyperbolic equations not only depends on the number of characteristics, but also on their location. The operator appearing in the equation involves a composition of first-order differential operators. The equation is defined in the half-strip of two independent variables. There are Cauchy's conditions at the domain bottom and periodic conditions at other boundaries. Using the method of characteristics, the analytic solution of the considered problem is obtained. The uniqueness of the solution is proved. We have also noted that the solution in the whole given domain is a composition of the solutions obtained in some subdomains. Thus, for the obtained classical solution to possess required smoothness, the values of these piecewise solutions, as well as their derivatives up to the fourth order must coincide at the boundary of these subdomains. A classical solution is understood as a function that is defined everywhere at all closure points of a given domain and has all classical derivatives entering the equation and the conditions of the problem.

Keywords: differential equations, hyperbolic equations, partial derivatives, boundary conditions, Cauchy's conditions, periodic conditions, matching conditions, classical solution, strictly hyperbolic equations

For citation. Korzyuk V. I., Nguyen Van Vinh. A mixed problem for the four-order one-dimensional hyperbolic equation with periodic conditions. *Vestsi Natsyional'nai akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, vol. 54, no. 2, pp. 135–148 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-2-135-148>

Введение. Задачам для одномерного гиперболического уравнения четвертого порядка посвящено немало исследований (см., напр., [1–5]), и во многих из них изучаются классические решения. Настоящая работа является продолжением построения классических решений задач для строго гиперболических уравнений четвертого порядка с четырьмя различными характеристическими направлениями. Рассматривается гиперболическое уравнение с постоянными коэффициентами, для которого находится классическое решение смешанной задачи с периодическими условиями. Оператор уравнения представим в виде композиции линейных операторов первого порядка. В данной работе используется метод характеристик для нахождения классического решения. С помощью характеристик для уравнения определяется его общее решение, и из него выделяется то, которое удовлетворяет условиям Коши и другим граничным условиям.

Постановка задачи. В замыкании области $Q = (0, \infty) \times (0, l)$ двух независимых переменных задано одномерное уравнение

$$Lu = (\partial_t - a^{(1)}\partial_x)(\partial_t - a^{(2)}\partial_x)(\partial_t - a^{(3)}\partial_x)(\partial_t - a^{(4)}\partial_x)u(t, x) = f(t, x), (t, x) \in \bar{Q} \quad (1)$$

относительно искомой функции $u: \mathbb{R}^2 \supset \bar{Q} \ni (t, x) \rightarrow u(t, x) \in \mathbb{R}$, где $a^{(i)}, i = \overline{1, 4}$, l – действительные числа и $a^{(i)} \neq a^{(j)} \forall i \neq j, 0 < l < +\infty$, ∂_t, ∂_x – частные производные по t и x соответственно.

В общем случае $\partial_t^k \partial_x^p = \frac{\partial^{k+p}}{\partial_t^k \partial_x^p}$ – частные производные по t и x порядка $k + p$, где k и p – целые неотрицательные числа. К уравнению (1) на части границы ∂Q области Q присоединяются условия Коши

$$\partial_t^j u(0, x) = \varphi_j(x), j = 0, 1, 2, 3, x \in [0, l], \quad (2)$$

и однородные периодические граничные условия

$$u(t, 0) = u(t, l), \partial_x u(t, 0) = \partial_x u(t, l), \partial_x^2 u(t, 0) = \partial_x^2 u(t, l), \partial_x^3 u(t, 0) = \partial_x^3 u(t, l), t \geq 0. \quad (3)$$

Здесь $f: \bar{Q} \ni (t, x) \rightarrow f(t, x) \in \mathbb{R}$, $\varphi_j: [0, l] \ni x \rightarrow \varphi_j(x), j = 0, 1, 2, 3$, – заданные функции. Таким образом, требуется найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям Коши (2), граничным условиям (3). Для определенности предположим, что $a^{(1)}, a^{(3)} < 0$ и $a^{(2)}, a^{(4)} > 0$.

Общее решение уравнения (1).

Лемма 1. *Общее решение уравнения (1) из класса четырежды непрерывно дифференцируемых функций представляется в виде суммы*

$$u(t, x) = g_1(x + a^{(1)}t) + g_2(x + a^{(2)}t) + g_3(x + a^{(3)}t) + g_4(x + a^{(4)}t) + v_p(t, x), \quad (4)$$

где $g_j (j = \overline{1, 4})$ – произвольные функции с областями определения $D(g_1), D(g_3) = ((-\infty, l])$, $D(g_2), D(g_4) = ([0, +\infty))$, если $(t, x) \in \bar{Q}$ и v_p – частное решение уравнения (1).

Доказательство. Введем обозначение

$$(\partial_t - a^{(3)}\partial_x)(\partial_t - a^{(4)}\partial_x)u_0(t, x) = w(t, x), (t, x) \in \bar{Q}. \quad (5)$$

Уравнение $Lu_0 = 0$ запишем в виде

$$(\partial_t - a^{(1)}\partial_x)(\partial_t - a^{(2)}\partial_x)w(t, x) = 0, (t, x) \in \bar{Q}. \quad (6)$$

Через функции характеристик делаем замену $x + a^{(1)}t = y_0$, $x + a^{(2)}t = y_1$. После приведения к каноническому виду уравнение (6) запишется так:

$$\left(-\left(a^{(1)} - a^{(2)}\right)^2\right) \partial_{y_0} \partial_{y_1} \tilde{w} = 0, \quad (7)$$

где $\tilde{w}(y_0, y_1) = w(t, x)$. Интегрируем уравнение (7). В результате получим

$$\tilde{w}(y_0, y_1) = h^{(1)}(y_1) + h^{(2)}(y_0),$$

или

$$\omega(t, x) = h^{(1)}(x + a^{(1)}t) + h^{(2)}(x + a^{(2)}t).$$

Аналогично получим

$$u_0(t, x) = g_1(x + a^{(1)}t) + g_2(x + a^{(2)}t) + g_3(x + a^{(3)}t) + g_4(x + a^{(4)}t)$$

(см. также [5]). Лемма 1 доказана.

Теорема 1. *Общее решение (4) однородного уравнения (1) $u_0(t, x) \in C^4(\bar{Q})$ тогда и только тогда, когда*

$$g_1, g_3 \in C^4(-\infty, l], g_2, g_4 \in C^4[0, \infty). \quad (8)$$

Доказательство. Если выполняются условия (8), то решение $u_0(t, x) = g_1(x + a^{(1)}t) + g_2(x + a^{(2)}t) + g_3(x + a^{(3)}t) + g_4(x + a^{(4)}t)$ однородного уравнения (1) принадлежит $C^4(\bar{Q})$.

Обратно, пусть $u_0(t, x) \in C^4(\bar{Q})$ и является решением однородного уравнения (1). Тогда производные $\partial_t^j \partial_x^k u_0(t, x) \in C^0(\bar{Q})$, где $t, k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ и $j + k = 4$. Расписывая данные производные более подробно, получим

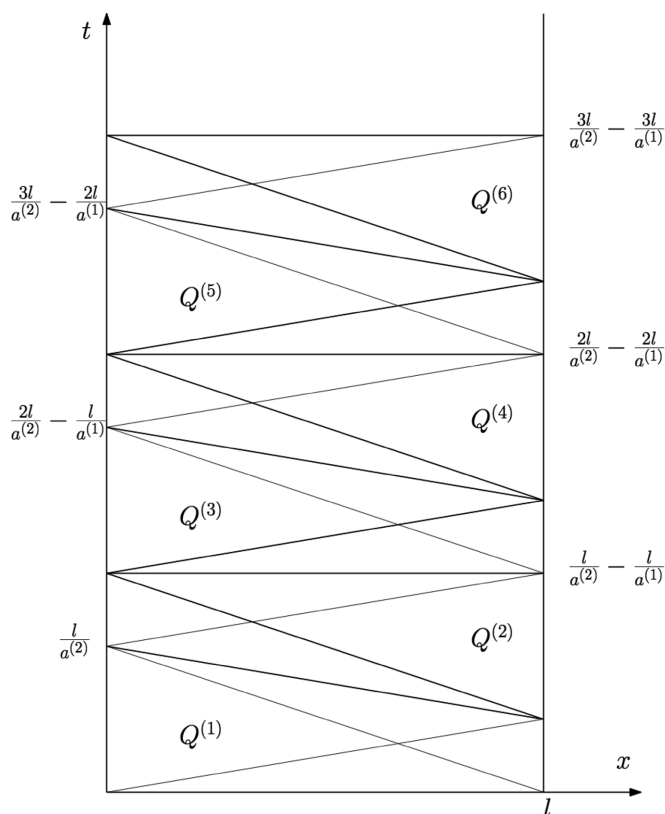
$$\begin{aligned} \partial_t^j \partial_x^k u_0(t, x) = & \left(a^{(1)}\right)^j d^4 g_1(x + a^{(1)}t) + \left(a^{(2)}\right)^j d^4 g_2(x + a^{(2)}t) + \\ & + \left(a^{(3)}\right)^j d^4 g_3(x + a^{(3)}t) + \left(a^{(4)}\right)^j d^4 g_4(x + a^{(4)}t), \end{aligned} \quad (9)$$

где d^4 – оператор обыкновенной производной четвертого порядка. Равенства (9) рассматриваются как система пяти уравнений относительно производных $d^4 g_i, i = \overline{1, 4}$. Нетрудно проверить, что определители четвертого порядка матрицы этих уравнений не равны нулю. Следовательно, производные $d^4 g_i$ определяются через производные $\partial_t^j \partial_x^k u_0(t, x)$ решения $u_0(t, x)$ однородного уравнения (1). Отсюда следует необходимость выполнения условий (8). Таким образом, доказано утверждение теоремы 1.

Частное решение уравнения (1). Конструкция частного решения будет осуществляться локально на подмножествах области Q . Конструкция состоит из двух этапов.

Первый этап. Сначала разобьем область Q на подобласти $Q^{(m)}$, $m = 1, 2, 3, \dots$, как это представлено на рис. 1:

$$\begin{aligned} Q^{(m)} = & \left\{ (t, x) \mid \frac{m-1}{2} \left(\frac{l}{a^{(2)}} - \frac{l}{a^{(1)}} \right) < t < -\frac{a^{(2)} + a^{(1)}}{a^{(1)} a^{(2)}} x + \frac{(m+1)l}{2a^{(2)}} - \frac{(m-1)l}{2a^{(1)}}, 0 < x < l \right\}, m = 1, 3, 5, \dots, \\ Q^{(m)} = & \left\{ (t, x) \mid -\frac{a^{(2)} + a^{(1)}}{a^{(1)} a^{(2)}} x + \frac{ml}{2a^{(2)}} - \frac{(m-2)l}{2a^{(1)}} < t < \frac{m}{2} \left(\frac{l}{a^{(2)}} - \frac{l}{a^{(1)}} \right), 0 < x < l \right\}, m = 2, 4, 6, \dots \end{aligned} \quad (10)$$

Рис. 1. Разбиение области Q на подобласти $Q^{(m)}$ Fig. 1. Partition of the domain Q into the subdomains $Q^{(m)}$

В замыкании $\overline{Q^{(m)}}$ подобласти $Q^{(m)}$ рассматриваем уравнение

$$(\partial_t - a^{(1)}\partial_x)(\partial_t - a^{(2)}\partial_x)w_p(t, x) = f(t, x). \quad (11)$$

После его интегрирования получаем решение

$$w_p^{(m)}(t, x) = f^{(1,m)}(x + a^{(1)}t) + f^{(2,m)}(x + a^{(2)}t) - \frac{1}{(a^{(2)} - a^{(1)})^2} \int_{A^{(m)}}^{x+a^{(1)}t} d\xi \int_{B^{(m)}}^{x+a^{(2)}t} f\left(\frac{\eta - \xi}{a^{(2)} - a^{(1)}}, \frac{a^{(2)}\xi - a^{(1)}\eta}{a^{(2)} - a^{(1)}}\right) d\eta, \quad (12)$$

где

$$A^{(m)} = \begin{cases} -\frac{(m-1)}{2}l + \frac{m-1}{2}\frac{la^{(1)}}{a^{(2)}}, & m = 1, 3, 5, \dots, \\ -\frac{(m-1)}{2}l + \frac{m}{2}\frac{la^{(1)}}{a^{(2)}}, & m = 2, 4, 6, \dots, \end{cases} \quad B^{(m)} = \begin{cases} l + \frac{m-1}{2}\left(l - \frac{la^{(2)}}{a^{(1)}}\right), & m = 1, 3, 5, \dots, \\ \frac{m}{2}\left(l - \frac{la^{(2)}}{a^{(1)}}\right), & m = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

Из формулы (12) видно, что для каждого $m = 1, 2, 3, \dots$, если функция f принадлежит $C^2(\bar{Q})$, функция $w_p^{(m)}$ является непрерывно дифференцируемой до третьего порядка включительно на множестве $\overline{Q^{(m)}}$ и удовлетворяет уравнению (11). Частное решение w_p уравнения (11) на множестве $\bar{Q}$ определим с помощью функций

$$w_p(t, x) = w_p^{(m)}(t, x), \quad (t, x) \in \overline{Q^{(m)}}, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (13)$$

Требуем выполнения условия гладкости w_p на $\overline{Q}$. За счет выбора функций $f^{(j,m)}$ и f из класса $C^2(\overline{Q})$ частное решение (13) должна быть из класса $C^3(\overline{Q})$. Это можно сделать следующим образом. При соответствующем выборе функций $f^{(j,1)}$, $j = 1, 2$,

$$w_p^{(1)}(0, x) = \partial_t w_p^{(1)}(0, x) = 0, \quad \partial_t^2 w_p^{(1)}(0, x) = f(0, x), \quad \partial_t^3 w_p^{(1)}(0, x) = \partial_t f(0, x).$$

Далее за счет функций $f^{(j,2)}$, $j = 1, 2$, при $t = \frac{l}{a^{(2)}} - \frac{a^{(1)} + a^{(2)}}{a^{(1)}a^{(2)}}x$ достигается выполнение условий Коши для функции $w_p^{(2)}$, т. е.

$$\begin{aligned} w_p^{(2)}\left(\frac{l}{a^{(2)}} - \frac{a^{(1)} + a^{(2)}}{a^{(1)}a^{(2)}}x, x\right) &= w_p^{(1)}\left(\frac{l}{a^{(2)}} - \frac{a^{(1)} + a^{(2)}}{a^{(1)}a^{(2)}}x, x\right), \\ \partial_t w_p^{(2)}\left(\frac{l}{a^{(2)}} - \frac{a^{(1)} + a^{(2)}}{a^{(1)}a^{(2)}}x, x\right) &= \partial_t w_p^{(1)}\left(\frac{l}{a^{(2)}} - \frac{a^{(1)} + a^{(2)}}{a^{(1)}a^{(2)}}x, x\right). \end{aligned} \quad (14)$$

Отсюда и из уравнения (11) следуют равенства для вторых и третьих производных

$$\begin{aligned} \partial_t^2 w_p^{(2)}\left(\frac{l}{a^{(2)}} - \frac{a^{(1)} + a^{(2)}}{a^{(1)}a^{(2)}}x, x\right) &= \partial_t^2 w_p^{(1)}\left(\frac{l}{a^{(2)}} - \frac{a^{(1)} + a^{(2)}}{a^{(1)}a^{(2)}}x, x\right), \\ \partial_t^3 w_p^{(2)}\left(\frac{l}{a^{(2)}} - \frac{a^{(1)} + a^{(2)}}{a^{(1)}a^{(2)}}x, x\right) &= \partial_t^3 w_p^{(1)}\left(\frac{l}{a^{(2)}} - \frac{a^{(1)} + a^{(2)}}{a^{(1)}a^{(2)}}x, x\right). \end{aligned} \quad (15)$$

Из равенств (14), (15) и предположения $f \in C^2(\overline{Q})$ следует, что $w_p(t, x) \in C^3(\overline{Q^{(1)}} \cup \overline{Q^{(2)}})$. За счет других функций $f^{(j,m)}$, $j = 1, 2$, $m = 3, 4, \dots$, из класса C^3 требуем, чтобы для примыкающих друг к другу функций $w_p^{(m+1)}$ и $w_p^{(m)}$ значения самих функций и их производных первого, второго и третьего порядков совпадали на общих границах, представляющих собой отрезки $x + \frac{a^{(1)}a^{(2)}}{a^{(1)} + a^{(2)}}t = \left(\frac{m+1}{2} \frac{l}{a^{(2)}} - \frac{m-1}{2} \frac{l}{a^{(1)}}\right) \frac{a^{(1)}a^{(2)}}{a^{(1)} + a^{(2)}}$, $m = 3, 5, \dots, x \in [0, l]$, и $t = \frac{m}{2} \left(\frac{l}{a^{(2)}} - \frac{l}{a^{(2)}}\right)$, $m = 4, 6, 8, \dots, x \in [0, l]$.

Второй этап. Разобьем область Q на подобласти $\Omega^{(k)}$, $k = 1, 2, 3, \dots$, как это представлено на рис. 2:

$$\begin{aligned} \Omega^{(k)} &= \left\{ (t, x) \mid \frac{k-1}{2} \left(\frac{l}{a^{(4)}} - \frac{l}{a^{(3)}} \right) < t < -\frac{a^{(4)} + a^{(3)}}{a^{(3)}a^{(4)}}x + \frac{(k+1)l}{2a^{(4)}} - \frac{(k-1)l}{2a^{(3)}}, 0 < x < l \right\}, k = 1, 3, 5, \dots, \\ \Omega^{(k)} &= \left\{ (t, x) \mid -\frac{a^{(4)} + a^{(3)}}{a^{(3)}a^{(4)}}x + \frac{kl}{2a^{(4)}} - \frac{(k-2)l}{2a^{(3)}} < t < \frac{k}{2} \left(\frac{l}{a^{(4)}} - \frac{l}{a^{(3)}} \right), 0 < x < l \right\}, k = 2, 4, 6, \dots \end{aligned} \quad (16)$$

Теперь в замыкании $\overline{\Omega^{(k)}}$ подобласти $\Omega^{(k)}$ рассматриваем уравнение

$$(\partial_t - a^{(3)}\partial_x)(\partial_t - a^{(4)}\partial_x)v_p(t, x) = w_p(t, x). \quad (17)$$

После его интегрирования получаем решение

$$v_p^{(k)}(t, x) = f^{(3,k)}(x + a^{(3)}t) + f^{(4,k)}(x + a^{(4)}t) - \frac{1}{(a^{(4)} - a^{(3)})^2} \int_{C^{(k)}}^{x+a^{(3)}t} d\xi \int_{D^{(k)}}^{x+a^{(4)}t} w_p \left(\frac{\eta - \xi}{a^{(4)} - a^{(3)}}, \frac{a^{(4)}\xi - a^{(3)}\eta}{a^{(4)} - a^{(3)}} \right) d\eta, \quad (18)$$

где

$$C^{(k)} = \begin{cases} -\frac{(k-1)}{2}l + \frac{k-1}{2} \frac{la^{(3)}}{a^{(4)}}, & k=1,3,5,\dots, \\ -\frac{(k-1)}{2}l + \frac{k}{2} \frac{la^{(3)}}{a^{(4)}}, & k=2,4,6,\dots, \end{cases} \quad D^{(k)} = \begin{cases} l + \frac{k-1}{2} \left(l - \frac{la^{(4)}}{a^{(3)}} \right), & k=1,3,5,\dots, \\ \frac{k}{2} \left(l - \frac{la^{(4)}}{a^{(3)}} \right), & k=2,4,6,\dots. \end{cases}$$

Из формулы (18) видно, что для каждого $k = 1, 2, 3, \dots$, если функция f принадлежит $C^2(\bar{Q})$ ($w_p \in C^3(\bar{Q})$), функция $v_p^{(k)}$ является непрерывно дифференцируемой до четвертого порядка включительно на множестве $\bar{\Omega}^{(k)}$ и удовлетворяет уравнению (1). Частное решение v_p уравнения (1) на множестве $\bar{Q}$ определим с помощью функций

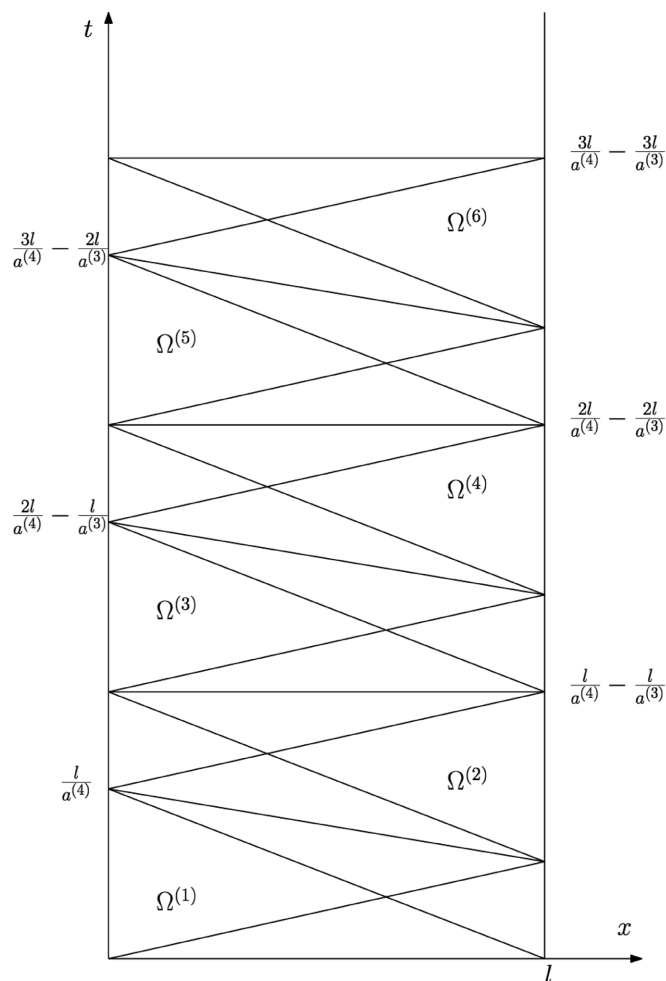


Рис. 2. Разбиение области Q на подобласти $\Omega^{(k)}$

Fig. 2. Partition of the domain Q into the subdomains $\Omega^{(k)}$

$$v_p(t, x) = v_p^{(k)}(t, x), \quad (t, x) \in \bar{\Omega}^{(k)}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (19)$$

Требуем выполнения условия гладкости v_p на $\bar{Q}$. За счет выбора функций $f^{(i,k)}$ и f из класса $C^2(\bar{Q})$ частное решение (1) должно быть из класса $C^4(\bar{Q})$. Это можно сделать следующим образом. При соответствующем выборе функций $f^{(i,1)}$, $i = 3, 4$,

$$v_p^{(1)}(0, x) = \partial_t v_p^{(1)}(0, x) = \partial_t^2 v_p^{(1)}(0, x) = \partial_t^3 v_p^{(1)}(0, x) = 0, \quad \partial_t^4 v_p^{(1)}(0, x) = f(0, x). \quad (20)$$

Далее за счет функций $f^{(i,2)}$, $i = 3, 4$, при $t = \frac{l}{a^{(4)}} - \frac{a^{(3)} + a^{(4)}}{a^{(3)}a^{(4)}}x$ достигается выполнение условий Коши для функции $v_p^{(2)}$, т. е.

$$\begin{aligned} v_p^{(2)}\left(\frac{l}{a^{(4)}} - \frac{a^{(3)} + a^{(4)}}{a^{(3)}a^{(4)}}x, x\right) &= v_p^{(1)}\left(\frac{l}{a^{(4)}} - \frac{a^{(3)} + a^{(4)}}{a^{(3)}a^{(4)}}x, x\right), \\ \partial_t v_p^{(2)}\left(\frac{l}{a^{(4)}} - \frac{a^{(3)} + a^{(4)}}{a^{(3)}a^{(4)}}x, x\right) &= \partial_t v_p^{(1)}\left(\frac{l}{a^{(4)}} - \frac{a^{(3)} + a^{(4)}}{a^{(3)}a^{(4)}}x, x\right). \end{aligned} \quad (21)$$

Отсюда и из уравнений (11), (17) следуют равенства для вторых, третьих и четвертых производных

$$\partial_t^j v_p^{(2)}\left(\frac{l}{a^{(4)}} - \frac{a^{(3)} + a^{(4)}}{a^{(3)}a^{(4)}}x, x\right) = \partial_t^j v_p^{(1)}\left(\frac{l}{a^{(4)}} - \frac{a^{(3)} + a^{(4)}}{a^{(3)}a^{(4)}}x, x\right), \quad j = 2, 3, 4. \quad (22)$$

Из равенств (21), (22) и предположения $f \in C^2(\bar{Q})$ следует, что $v_p(t, x) \in C^4(\bar{Q}^{(1)} \cup \bar{Q}^{(2)})$. За счет других функций $f^{(i,k)}$, $i = 3, 4$, $k = 3, 4, \dots$, из класса C^4 требуем, чтобы для примыкающих друг к другу функций $v_p^{(k+1)}$ и $v_p^{(k)}$ значения самих функций и их производных первого, второго, третьего и четвертого порядков совпадали на общих границах, представляющих собой отрезки $x + \frac{a^{(3)}a^{(4)}}{a^{(3)} + a^{(4)}}t = \left(\frac{k+1}{2} \frac{l}{a^{(4)}} - \frac{k-1}{2} \frac{l}{a^{(3)}}\right) \frac{a^{(3)}a^{(4)}}{a^{(3)} + a^{(4)}}$, $k = 3, 5, 7, 9, \dots$, $x \in [0, l]$, и $t = \frac{k}{2} \left(\frac{l}{a^{(4)}} - \frac{l}{a^{(3)}}\right)$, $k = 2, 4, 6, \dots$, $x \in [0, l]$.

Теорема 2. Пусть правая часть уравнения (1) $f \in C^2(\bar{Q})$. Тогда функция v_p , определяемая формулами (12), (18), (19) при соответствующем выборе функций $f^{(i,k)}$, $i = 1, 2, 3, 4$, $k \in \mathbb{N}$, принадлежит классу $C^4(\bar{Q})$, является решением уравнения (1) и удовлетворяет условиям (20).

Доказательство следует из предыдущих рассуждений.

Решение задачи (1)–(3). Удовлетворяя решение (4) условиям Коши (2), получаем систему

$$g_1(x) + g_2(x) + g_3(x) + g_4(x) = \varphi_0(x),$$

$$a^{(1)}g_1(x) + a^{(2)}g_2(x) + a^{(3)}g_3(x) + a^{(4)}g_4(x) = \int_0^x \varphi_1(y) dy + C_1,$$

$$\left(a^{(1)}\right)^2 g_1(x) + \left(a^{(2)}\right)^2 g_2(x) + \left(a^{(3)}\right)^2 g_3(x) + \left(a^{(4)}\right)^2 g_4(x) = \int_0^x (x-y) \varphi_2(y) dy + C_2 x + C_3, \quad (23)$$

$$\left(a^{(1)}\right)^3 g_1(x) + \left(a^{(2)}\right)^3 g_2(x) + \left(a^{(3)}\right)^3 g_3(x) + \left(a^{(4)}\right)^3 g_4(x) = \frac{1}{2} \int_0^x (x-y)^2 \varphi_3(y) dy + C_4 x^2 + C_5 x + C_6.$$

Решая систему (23), получим

$$g_1(z) = g_1^{(0)}(z) = \frac{1}{(a^{(1)} - a^{(2)})(a^{(1)} - a^{(3)})(a^{(1)} - a^{(4)})} \times \\ \times \left(-\left(a^{(2)} + a^{(3)} + a^{(4)}\right) \int_0^{\bar{z}} (z - \xi) \varphi_2(\xi) d\xi + \frac{1}{2} \int_0^{\bar{z}} (z - \xi)^2 \varphi_2(\xi) d\xi + C_6 - \right. \\ \left. - \left(a^{(2)} + a^{(3)} + a^{(4)}\right) C_3 + \left(a^{(2)} a^{(3)} + a^{(2)} a^{(4)} + a^{(3)} a^{(4)}\right) C_1 - a^{(2)} a^{(3)} a^{(4)} \varphi_0(z) + \right. \\ \left. + C_4 z^2 + C_5 z + \left(a^{(2)} a^{(3)} + a^{(2)} a^{(4)} + a^{(3)} a^{(4)}\right) \int_0^{\bar{z}} \varphi_1(\xi) d\xi - \left(a^{(2)} + a^{(3)} + a^{(4)}\right) C_2 z \right), \quad (24)$$

$$g_2(z) = g_2^{(0)}(z) = \frac{1}{(a^{(1)} - a^{(2)})(a^{(2)} - a^{(3)})(a^{(2)} - a^{(4)})} \times \\ \times \left(\left(a^{(1)} + a^{(3)} + a^{(4)}\right) \int_0^{\bar{z}} (z - \xi) \varphi_2(\xi) d\xi - \frac{1}{2} \int_0^{\bar{z}} (z - \xi)^2 \varphi_2(\xi) d\xi - C_6 + \right. \\ \left. + \left(a^{(1)} + a^{(3)} + a^{(4)}\right) C_3 - \left(a^{(1)} a^{(3)} + a^{(1)} a^{(4)} + a^{(3)} a^{(4)}\right) C_1 - a^{(1)} a^{(3)} a^{(4)} \varphi_0(z) - \right. \\ \left. - \left(a^{(1)} a^{(3)} + a^{(1)} a^{(4)} + a^{(3)} a^{(4)}\right) \int_0^{\bar{z}} \varphi_1(\xi) d\xi + \left(a^{(1)} + a^{(3)} + a^{(4)}\right) C_2 z - C_4 z^2 - C_5 z \right), \quad (25)$$

$$g_3(z) = g_3^{(0)}(z) = \frac{1}{(a^{(1)} - a^{(3)})(a^{(2)} - a^{(3)})(a^{(3)} - a^{(4)})} \times \\ \times \left(-\left(a^{(1)} + a^{(2)} + a^{(4)}\right) \int_0^{\bar{z}} (z - \xi) \varphi_2(\xi) d\xi + \frac{1}{2} \int_0^{\bar{z}} (z - \xi)^2 \varphi_2(\xi) d\xi + C_6 - \right. \\ \left. - \left(a^{(1)} + a^{(2)} + a^{(4)}\right) C_3 + \left(a^{(1)} a^{(2)} + a^{(1)} a^{(4)} + a^{(2)} a^{(4)}\right) C_1 - a^{(1)} a^{(2)} a^{(4)} \varphi_0(z) + \right. \\ \left. + C_4 z^2 + C_5 z + \left(a^{(1)} a^{(2)} + a^{(1)} a^{(4)} + a^{(2)} a^{(4)}\right) \int_0^{\bar{z}} \varphi_1(\xi) d\xi - \left(a^{(1)} + a^{(2)} + a^{(4)}\right) C_2 z \right), \quad (26)$$

$$g_4(z) = g_4^{(0)}(z) = \frac{1}{(a^{(1)} - a^{(4)})(a^{(2)} - a^{(4)})(a^{(3)} - a^{(4)})} \times \\ \times \left(\left(a^{(1)} + a^{(2)} + a^{(3)}\right) \int_0^{\bar{z}} (z - \xi) \varphi_2(\xi) d\xi - \frac{1}{2} \int_0^{\bar{z}} (z - \xi)^2 \varphi_2(\xi) d\xi - C_6 + \right. \\ \left. + \left(a^{(1)} + a^{(2)} + a^{(3)}\right) C_3 - \left(a^{(1)} a^{(2)} + a^{(1)} a^{(3)} + a^{(2)} a^{(3)}\right) C_1 - a^{(1)} a^{(2)} a^{(3)} \varphi_0(z) - \right. \\ \left. - C_4 z^2 - C_5 z - \left(a^{(1)} a^{(2)} + a^{(1)} a^{(3)} + a^{(2)} a^{(3)}\right) \int_0^{\bar{z}} \varphi_1(\xi) d\xi + \left(a^{(1)} + a^{(2)} + a^{(3)}\right) C_2 z \right) \quad (27)$$

для $z \in [0, l]$, где $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ – произвольные постоянные.

Для других значений аргумента z функции $g_j(z)$, $j = \overline{1, 4}$, определяются поэтапно, удовлетворяя искомого решение (4) граничным условиям (3). Удовлетворяя условию (3), получаем систему уравнений

$$\begin{aligned}
& g_1(a^{(1)}t) + g_3(a^{(3)}t) - g_2(l + a^{(2)}t) - g_4(l + a^{(4)}t) = v_p(t, l) - v_p(t, 0) - \\
& - g_2(a^{(2)}t) - g_4(a^{(4)}t) + g_1(l + a^{(1)}t) + g_3(l + a^{(3)}t), \\
& \frac{g_1(a^{(1)}t)}{a^{(1)}} + \frac{g_3(a^{(3)}t)}{a^{(3)}} - \frac{g_2(l + a^{(2)}t)}{a^{(2)}} - \frac{g_4(l + a^{(4)}t)}{a^{(4)}} = \tilde{C}_1 - \frac{g_2(a^{(2)}t)}{a^{(2)}} + \\
& + \int_0^t (\partial_x v_p(\xi, l) - \partial_x v_p(\xi, 0)) d\xi - \frac{g_4(a^{(4)}t)}{a^{(4)}} + \frac{g_1(l + a^{(1)}t)}{a^{(1)}} + \frac{g_3(l + a^{(3)}t)}{a^{(3)}}, \\
& \frac{g_1(a^{(1)}t)}{(a^{(1)})^2} + \frac{g_3(a^{(3)}t)}{(a^{(3)})^2} - \frac{g_2(l + a^{(2)}t)}{(a^{(2)})^2} - \frac{g_4(l + a^{(4)}t)}{(a^{(4)})^2} = \tilde{C}_2 t + \tilde{C}_3 - \frac{g_2(a^{(2)}t)}{(a^{(2)})^2} + \\
& + \int_0^t (t - \xi) (\partial_x^2 v_p(\xi, l) - \partial_x^2 v_p(\xi, 0)) d\xi - \frac{g_4(a^{(4)}t)}{(a^{(4)})^2} + \frac{g_1(l + a^{(1)}t)}{(a^{(1)})^2} + \frac{g_3(l + a^{(3)}t)}{(a^{(3)})^2}, \\
& \frac{g_1(a^{(1)}t)}{(a^{(1)})^3} + \frac{g_3(a^{(3)}t)}{(a^{(3)})^3} - \frac{g_2(l + a^{(2)}t)}{(a^{(2)})^3} - \frac{g_4(l + a^{(4)}t)}{(a^{(4)})^3} = \tilde{C}_4 t^2 + \tilde{C}_5 t + \tilde{C}_6 - \frac{g_2(a^{(2)}t)}{(a^{(2)})^3} + \\
& + \int_0^t \frac{(t - \xi)^2}{2} (\partial_x^3 v_p(\xi, l) - \partial_x^3 v_p(\xi, 0)) d\xi - \frac{g_4(a^{(4)}t)}{(a^{(4)})^3} + \frac{g_1(l + a^{(1)}t)}{(a^{(1)})^3} + \frac{g_3(l + a^{(3)}t)}{(a^{(3)})^3},
\end{aligned} \tag{28}$$

где

$$\begin{aligned}
\tilde{C}_1 &= \frac{g_1^{(0)}(0) - g_1^{(0)}(l)}{a^{(1)}} + \frac{g_2^{(0)}(0) - g_2^{(0)}(l)}{a^{(2)}} + \frac{g_3^{(0)}(0) - g_3^{(0)}(l)}{a^{(3)}} + \frac{g_4^{(0)}(0) - g_4^{(0)}(l)}{a^{(4)}}, \\
\tilde{C}_2 &= \frac{dg_1^{(0)}(0) - dg_1^{(0)}(l)}{a^{(1)}} + \frac{dg_2^{(0)}(0) - dg_2^{(0)}(l)}{a^{(2)}} + \frac{dg_3^{(0)}(0) - dg_3^{(0)}(l)}{a^{(3)}} + \frac{dg_4^{(0)}(0) - dg_4^{(0)}(l)}{a^{(4)}}, \\
\tilde{C}_3 &= \frac{g_1^{(0)}(0) - g_1^{(0)}(l)}{(a^{(1)})^2} + \frac{g_2^{(0)}(0) - g_2^{(0)}(l)}{(a^{(2)})^2} + \frac{g_3^{(0)}(0) - g_3^{(0)}(l)}{(a^{(3)})^2} + \frac{g_4^{(0)}(0) - g_4^{(0)}(l)}{(a^{(4)})^2}, \\
\tilde{C}_4 &= \frac{d^2 g_1^{(0)}(0) - d^2 g_1^{(0)}(l)}{2a^{(1)}} + \frac{d^2 g_2^{(0)}(0) - d^2 g_2^{(0)}(l)}{2a^{(2)}} + \frac{d^2 g_3^{(0)}(0) - d^2 g_3^{(0)}(l)}{2a^{(3)}} + \frac{d^2 g_4^{(0)}(0) - d^2 g_4^{(0)}(l)}{2a^{(4)}}, \\
\tilde{C}_5 &= \frac{dg_1^{(0)}(0) - dg_1^{(0)}(l)}{(a^{(1)})^2} + \frac{dg_2^{(0)}(0) - dg_2^{(0)}(l)}{(a^{(2)})^2} + \frac{dg_3^{(0)}(0) - dg_3^{(0)}(l)}{(a^{(3)})^2} + \frac{dg_4^{(0)}(0) - dg_4^{(0)}(l)}{(a^{(4)})^2}, \\
\tilde{C}_6 &= \frac{g_1^{(0)}(0) - g_1^{(0)}(l)}{(a^{(1)})^3} + \frac{g_2^{(0)}(0) - g_2^{(0)}(l)}{(a^{(2)})^3} + \frac{g_3^{(0)}(0) - g_3^{(0)}(l)}{(a^{(3)})^3} + \frac{g_4^{(0)}(0) - g_4^{(0)}(l)}{(a^{(4)})^3}.
\end{aligned}$$

Решая систему (28) для $g_1(a^{(1)}t), g_3(a^{(3)}t), g_2(l+a^{(2)}t), g_4(l+a^{(4)}t)$, получим

$$g_1^{(k+1)}(z) = \frac{\mathbb{M}^{(1)}}{2(a^{(1)} - a^{(2)})(a^{(1)} - a^{(3)})(a^{(1)} - a^{(4)})}, \quad z \in [-(k+1)l, -kl], \quad (29)$$

$$g_2^{(k+1)}(z) = \frac{-\mathbb{M}^{(2)}}{2(a^{(2)} - a^{(1)})(a^{(2)} - a^{(3)})(a^{(2)} - a^{(4)})}, \quad z \in [kl, (k+1)l], \quad (30)$$

$$g_3^{(k+1)}(z) = \frac{-\mathbb{M}^{(3)}}{2(a^{(3)} - a^{(1)})(a^{(3)} - a^{(2)})(a^{(3)} - a^{(4)})}, \quad z \in [-(k+1)l, -kl], \quad (31)$$

$$g_4^{(k+1)}(z) = \frac{-\mathbb{M}^{(4)}}{2(a^{(4)} - a^{(1)})(a^{(4)} - a^{(2)})(a^{(4)} - a^{(3)})}, \quad z \in [kl, (k+1)l], \quad (32)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbb{M}^{(1)} = & 2\left((a^{(1)} - a^{(2)})(a^{(1)} - a^{(3)})(a^{(1)} - a^{(4)})\right)g_1^{(k)}(z+l) - 2C_4l^2 - 4C_4lz - 2C_5l - \\ & - 2\left(a^{(3)}a^{(4)} + a^{(2)}a^{(3)} + a^{(2)}a^{(4)}\right)\left(\int_0^l \varphi_1(\xi)d\xi + \left(a^{(1)}\right)^3 J\left(\frac{z}{a^{(1)}}\right)\right) + \\ & + 2z\left(\left(a^{(1)}\right)^2 - a^{(2)}a^{(3)} - a^{(2)}a^{(4)} - a^{(3)}a^{(4)}\right)(\varphi_1(l) - \varphi_1(0)) + 2\left(a^{(2)} + a^{(3)} + a^{(4)}\right)C_2l + \\ & + z^2\left(a^{(1)} + a^{(2)} + a^{(3)} + a^{(4)}\right)(\varphi_2(l) - \varphi_2(0)) + 2\left(\left(a^{(1)}\right)^3 + a^{(2)}a^{(3)}a^{(4)}\right)(\varphi_0(l) - \varphi_0(0)) + \\ & + 2z\left(\left(a^{(1)}\right)^2 a^{(2)} + \left(a^{(1)}\right)^2 a^{(3)} + \left(a^{(1)}\right)^2 a^{(4)} - a^{(2)}a^{(3)}a^{(4)}\right)(d\varphi_0(0) - d\varphi_0(l)) + \\ & + z^2\left(a^{(1)}a^{(2)} + a^{(1)}a^{(3)} + a^{(2)}a^{(3)} + a^{(1)}a^{(4)} + a^{(2)}a^{(4)} + a^{(3)}a^{(4)}\right)(d\varphi_1(0) - d\varphi_1(l)) + \\ & + z^2\left(a^{(1)}a^{(2)}a^{(3)} + a^{(1)}a^{(2)}a^{(4)} + a^{(1)}a^{(3)}a^{(4)} + a^{(2)}a^{(3)}a^{(4)}\right)(d^2\varphi_0(l) - d^2\varphi_0(0)) + \\ & + 2\left(a^{(1)}\right)^3\left(K\left(\frac{z}{a^{(1)}}\right) - \left(a^{(2)} + a^{(3)} + a^{(4)}\right)H\left(\frac{z}{a^{(1)}}\right) - a^{(2)}a^{(3)}a^{(4)}L\left(\frac{z}{a^{(1)}}\right)\right) + \\ & + 2\left(a^{(2)} + a^{(3)} + a^{(4)}\right)\int_0^l (z+l-\xi)\varphi_2(\xi)d\xi - \int_0^l (z+l-\xi)^2\varphi_3(\xi)d\xi, \\ \mathbb{M}^{(2)} = & 2\left(a^{(2)} - a^{(1)}\right)\left(a^{(2)} - a^{(3)}\right)\left(a^{(2)} - a^{(4)}\right)g_2^{(k)}(z-l) + 2C_4l^2 - 4C_4lz - 2C_5l - \\ & - 2\left(a^{(1)}a^{(3)} + a^{(1)}a^{(4)} + a^{(3)}a^{(4)}\right)\left(\int_0^l \varphi_1(\xi)d\xi - \left(a^{(2)}\right)^3 J\left(\frac{z-l}{a^{(2)}}\right)\right) + 2(z-l) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\left(a^{(2)} \right)^2 - a^{(1)} a^{(3)} - a^{(1)} a^{(4)} - a^{(3)} a^{(4)} \right) \left(\varphi_1(l) - \varphi_1(0) \right) + (z-l)^2 \left(a^{(1)} + a^{(2)} + a^{(3)} + a^{(4)} \right) \times \\
& \times \left(\varphi_2(l) - \varphi_2(0) \right) + 2 \left(\left(a^{(2)} \right)^3 + a^{(1)} a^{(3)} a^{(4)} \right) \left(\varphi_0(l) - \varphi_0(0) \right) - 2 \left(a^{(1)} + a^{(2)} + a^{(4)} \right) C_2 l + \\
& + 2(z-l) \left(\left(a^{(2)} \right)^2 a^{(3)} + \left(a^{(2)} \right)^2 a^{(4)} + \left(a^{(2)} \right)^2 a^{(1)} - a^{(1)} a^{(3)} a^{(4)} \right) \left(d\varphi_0(0) - d\varphi_0(l) \right) + \\
& + (z-l)^2 \left(a^{(1)} a^{(2)} + a^{(1)} a^{(3)} + a^{(2)} a^{(3)} + a^{(1)} a^{(4)} + a^{(2)} a^{(4)} + a^{(3)} a^{(4)} \right) \left(d\varphi_1(0) - d\varphi_1(l) \right) - \\
& - (z-l)^2 \left(a^{(1)} a^{(2)} a^{(3)} + a^{(1)} a^{(2)} a^{(4)} + a^{(1)} a^{(3)} a^{(4)} + a^{(2)} a^{(3)} a^{(4)} \right) \left(d^2 \varphi_0(0) - d^2 \varphi_0(l) \right) + \\
& + 2 \left(a^{(2)} \right)^3 \left(K \left(\frac{z-l}{a^{(2)}} \right) - \left(a^{(1)} + a^{(3)} + a^{(4)} \right) H \left(\frac{z-l}{a^{(2)}} \right) - a^{(1)} a^{(3)} a^{(4)} L \left(\frac{z-l}{a^{(2)}} \right) \right) + \\
& + 2 \left(a^{(1)} + a^{(3)} + a^{(4)} \right) \int_0^l (z-\xi) \varphi_2(\xi) d\xi - \int_0^l (z-\xi)^2 \varphi_3(\xi) d\xi, \\
\mathbb{M}^{(3)} &= 2 \left(a^{(3)} - a^{(1)} \right) \left(a^{(3)} - a^{(2)} \right) \left(a^{(3)} - a^{(4)} \right) g_3^{(k)}(z+l) + 2C_4 l^2 + 4C_4 l z + 2C_5 l + \\
& + 2 \left(a^{(2)} a^{(4)} + a^{(1)} a^{(2)} + a^{(1)} a^{(4)} \right) \left(\int_0^l \varphi_1(\xi) d\xi - \left(a^{(3)} \right)^3 J \left(\frac{z}{a^{(1)}} \right) \right) + \\
& + 2z \left(a^{(1)} a^{(2)} - \left(a^{(3)} \right)^2 + a^{(1)} a^{(4)} + a^{(2)} a^{(4)} \right) \left(\varphi_1(l) - \varphi_1(0) \right) - 2 \left(a^{(1)} + a^{(2)} + a^{(4)} \right) C_2 l - \\
& - z^2 \left(a^{(1)} + a^{(2)} + a^{(3)} + a^{(4)} \right) \left(\varphi_2(l) - \varphi_2(0) \right) + 2 \left(\left(a^{(3)} \right)^3 + a^{(1)} a^{(2)} a^{(4)} \right) \left(\varphi_0(0) - \varphi_0(l) \right) + \\
& + 2z \left(\left(a^{(3)} \right)^2 a^{(1)} + \left(a^{(3)} \right)^2 a^{(2)} + \left(a^{(3)} \right)^2 a^{(4)} - a^{(1)} a^{(2)} a^{(4)} \right) \left(d\varphi_0(l) - d\varphi_0(0) \right) + \\
& + z^2 \left(a^{(1)} a^{(2)} + a^{(1)} a^{(3)} + a^{(2)} a^{(3)} + a^{(1)} a^{(4)} + a^{(2)} a^{(4)} + a^{(3)} a^{(4)} \right) \left(d\varphi_1(l) - d\varphi_1(0) \right) + \\
& + 2 \left(a^{(3)} \right)^3 \left(K \left(\frac{z}{a^{(3)}} \right) - \left(a^{(1)} + a^{(2)} + a^{(4)} \right) H \left(\frac{z}{a^{(3)}} \right) - a^{(1)} a^{(2)} a^{(4)} L \left(\frac{z}{a^{(3)}} \right) \right) - \\
& - 2 \left(a^{(1)} + a^{(2)} + a^{(4)} \right) \int_0^l (z+l-\xi) \varphi_2(\xi) d\xi + \int_0^l (z+l-\xi)^2 \varphi_3(\xi) d\xi, \\
\mathbb{M}^{(4)} &= 2 \left(a^{(2)} - a^{(1)} \right) \left(a^{(2)} - a^{(3)} \right) \left(a^{(2)} - a^{(4)} \right) g_4^{(k)}(z-l) + 2C_4 l^2 - 4C_4 l z - 2C_5 l - \\
& - 2 \left(a^{(2)} a^{(3)} + a^{(1)} a^{(2)} + a^{(1)} a^{(3)} \right) \left(\int_0^l \varphi_1(\xi) d\xi - \left(a^{(4)} \right)^3 J \left(\frac{z-l}{a^{(4)}} \right) \right) + \\
& + 2(z-l) \left(\left(a^{(4)} \right)^2 - a^{(1)} a^{(2)} - a^{(1)} a^{(3)} - a^{(2)} a^{(3)} \right) \left(\varphi_1(l) - \varphi_1(0) \right) + (z-l)^2 \left(a^{(1)} + a^{(2)} + a^{(3)} + a^{(4)} \right) \times \\
& \times \left(\varphi_2(l) - \varphi_2(0) \right) + 2 \left(\left(a^{(4)} \right)^3 + a^{(1)} a^{(2)} a^{(3)} \right) \left(\varphi_0(l) - \varphi_0(0) \right) + 2 \left(a^{(1)} + a^{(2)} + a^{(3)} \right) C_2 l + \\
& + 2(l-z) \left(\left(a^{(4)} \right)^2 a^{(1)} + \left(a^{(4)} \right)^2 a^{(2)} + \left(a^{(4)} \right)^2 a^{(3)} - a^{(1)} a^{(2)} a^{(3)} \right) \left(d\varphi_0(0) - d\varphi_0(l) \right) + \\
& + (z-l)^2 \left(a^{(1)} a^{(2)} + a^{(1)} a^{(3)} + a^{(2)} a^{(3)} + a^{(1)} a^{(4)} + a^{(2)} a^{(4)} + a^{(3)} a^{(4)} \right) \left(d\varphi_1(0) - d\varphi_1(l) \right) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (z-l)^2 \left(a^{(1)} a^{(2)} a^{(3)} + a^{(1)} a^{(2)} a^{(4)} + a^{(1)} a^{(3)} a^{(4)} + a^{(2)} a^{(3)} a^{(4)} \right) \left(d^2 \varphi_0(0) - d^2 \varphi_0(l) \right) + \\
& + 2 \left(a^{(4)} \right)^3 \left(K \left(\frac{z-l}{a^{(4)}} \right) - \left(a^{(1)} + a^{(2)} + a^{(3)} \right) H \left(\frac{z-l}{a^{(4)}} \right) - a^{(1)} a^{(2)} a^{(3)} L \left(\frac{z-l}{a^{(4)}} \right) \right) + \\
& + 2 \left(a^{(1)} + a^{(2)} + a^{(3)} \right) \int_0^l (z-\xi) \varphi_2(\xi) d\xi - \int_0^l (z-\xi)^2 \varphi_3(\xi) d\xi,
\end{aligned}$$

$$K(t) = v_p(t, l) - v_p(t, 0), \quad H(t) = \int_0^t \left(\partial_x v_p(\xi, l) - \partial_x v_p(\xi, 0) \right) d\xi,$$

$$J(t) = \int_0^t \left(\partial_x^2 v_p(\xi, l) - \partial_x^2 v_p(\xi, 0) \right) d\xi, \quad L(t) = \int_0^t \left(\partial_x^3 v_p(\xi, l) - \partial_x^3 v_p(\xi, 0) \right) d\xi.$$

Чтобы функции g_2, g_4 принадлежали классу $C^4([0, +\infty))$, а g_1, g_3 – классу $C^4((-\infty, l])$, кроме требований на гладкость заданных функций задачи (3) должны выполняться равенства для $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ в общих точках соприкосновения

$$\begin{aligned}
d^p g_1^{(k+1)}(-kl) &= d^p g_1^{(k)}(-kl), & p = \overline{0, 4}, \\
d^p g_2^{(k+1)}(l+kl) &= d^p g_2^{(k)}(l+kl), & p = \overline{0, 4}, \\
d^p g_3^{(k+1)}(-kl) &= d^p g_3^{(k)}(-kl), & p = \overline{0, 4}, \\
d^p g_4^{(k+1)}(l+kl) &= d^p g_4^{(k)}(l+kl), & p = \overline{0, 4}.
\end{aligned} \tag{33}$$

Л е м м а 2. Для любого номера $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ значения функций $g_1^{(k)}(z)$, $g_2^{(k)}(z)$, $g_3^{(k)}(z)$, $g_4^{(k)}(z)$ всегда можно представить в виде

$$\begin{aligned}
g_1^{(k)}(z) &= \psi_1^{(k)}(z) + \frac{\left(a^{(2)} a^{(3)} + a^{(2)} a^{(4)} + a^{(3)} a^{(4)} \right) C_1 - \left(a^{(2)} + a^{(3)} + a^{(4)} \right) (C_2 z + C_3) + C_4 z^2 + C_5 z + C_6}{\left(a^{(1)} - a^{(2)} \right) \left(a^{(1)} - a^{(3)} \right) \left(a^{(1)} - a^{(4)} \right)}, \\
g_2^{(k)}(z) &= \psi_2^{(k)}(z) + \frac{- \left(a^{(1)} a^{(3)} + a^{(1)} a^{(4)} + a^{(3)} a^{(4)} \right) C_1 + \left(a^{(1)} + a^{(3)} + a^{(4)} \right) (C_2 z + C_3) - C_4 z^2 - C_5 z - C_6}{\left(a^{(1)} - a^{(2)} \right) \left(a^{(2)} - a^{(3)} \right) \left(a^{(2)} - a^{(4)} \right)}, \\
g_3^{(k)}(z) &= \psi_3^{(k)}(z) + \frac{- \left(a^{(1)} a^{(3)} + a^{(1)} a^{(4)} + a^{(3)} a^{(4)} \right) C_1 + \left(a^{(1)} + a^{(3)} + a^{(4)} \right) (C_2 z + C_3) - C_4 z^2 - C_5 z - C_6}{\left(a^{(1)} - a^{(2)} \right) \left(a^{(2)} - a^{(3)} \right) \left(a^{(2)} - a^{(4)} \right)}, \\
g_4^{(k)}(z) &= \psi_4^{(k)}(z) + \frac{- \left(a^{(1)} a^{(3)} + a^{(1)} a^{(4)} + a^{(3)} a^{(4)} \right) C_1 + \left(a^{(1)} + a^{(3)} + a^{(4)} \right) (C_2 z + C_3) - C_4 z^2 - C_5 z - C_6}{\left(a^{(1)} - a^{(2)} \right) \left(a^{(2)} - a^{(3)} \right) \left(a^{(2)} - a^{(4)} \right)},
\end{aligned}$$

где функции $\psi_i^{(k)}$, $i = \overline{1, 4}$, не зависят от констант $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение леммы докажем для функции $g_1^{(k)}(z)$ методом математической индукции. Для $k = 0$ данное утверждение следует из формулы (24). Предположим, что лемма справедлива для всех $k = 0, 1, \dots, n$. Докажем ее утверждение для функции $g_1^{(n+1)}(z)$. Согласно формуле (29) имеем

$$\begin{aligned}
g_1^{(n+1)}(z) &= \frac{1}{2 \left(a^{(1)} - a^{(2)} \right) \left(a^{(1)} - a^{(3)} \right) \left(a^{(1)} - a^{(4)} \right)} \left(- \int_0^l (z+l-\xi)^2 \varphi_3(\xi) d\xi + \right. \\
& \left. + 2 \left(\left(a^{(2)} a^{(3)} + a^{(2)} a^{(4)} + a^{(3)} a^{(4)} \right) C_1 - \left(a^{(2)} + a^{(3)} + a^{(4)} \right) (C_2(z+l) + C_3) \right) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2C_4(z+l)^2 + 2C_5(z+l) + 2C_6 + 2(a^{(1)} - a^{(2)})(a^{(1)} - a^{(3)})(a^{(1)} - a^{(4)})\psi_1^{(n)}(z-l) - \\
& -2C_4l^2 - 4C_4lz - 2C_5l - 2(a^{(3)}a^{(4)} + a^{(2)}a^{(3)} + a^{(2)}a^{(4)})\left(\int_0^l \varphi_1(\xi)d\xi + (a^{(1)})^3 J\left(\frac{z}{a^{(1)}}\right)\right) + \\
& +2z\left((a^{(1)})^2 - a^{(2)}a^{(3)} - a^{(2)}a^{(4)} - a^{(3)}a^{(4)}\right)(\varphi_1(l) - \varphi_1(0)) + 2(a^{(2)} + a^{(3)} + a^{(4)})C_2l + \\
& +z^2(a^{(1)} + a^{(2)} + a^{(3)} + a^{(4)})(\varphi_2(l) - \varphi_2(0)) + 2\left((a^{(1)})^3 + a^{(2)}a^{(3)}a^{(4)}\right)(\varphi_0(l) - \varphi_0(0)) + \\
& +2z\left((a^{(1)})^2 a^{(2)} + (a^{(1)})^2 a^{(3)} + (a^{(1)})^2 a^{(4)} - a^{(2)}a^{(3)}a^{(4)}\right)(d\varphi_0(0) - d\varphi_0(l)) + \\
& +z^2(a^{(1)}a^{(2)} + a^{(1)}a^{(3)} + a^{(2)}a^{(3)} + a^{(1)}a^{(4)} + a^{(2)}a^{(4)} + a^{(3)}a^{(4)})(d\varphi_1(0) - d\varphi_1(l)) + \\
& +z^2(a^{(1)}a^{(2)}a^{(3)} + a^{(1)}a^{(2)}a^{(4)} + a^{(1)}a^{(3)}a^{(4)} + a^{(2)}a^{(3)}a^{(4)})(d^2\varphi_0(l) - d^2\varphi_0(0)) + \\
& +2(a^{(1)})^3\left(K\left(\frac{z}{a^{(1)}}\right) - (a^{(2)} + a^{(3)} + a^{(4)})H\left(\frac{z}{a^{(1)}}\right) - a^{(2)}a^{(3)}a^{(4)}L\left(\frac{z}{a^{(1)}}\right)\right) + \\
& +2(a^{(2)} + a^{(3)} + a^{(4)})\int_0^l (z+l-\xi)\varphi_2(\xi)d\xi = \psi_1^{(n+1)}(z) + \\
& + \frac{(a^{(2)}a^{(3)} + a^{(2)}a^{(4)} + a^{(3)}a^{(4)})C_1 - (a^{(2)} + a^{(3)} + a^{(4)})(C_2z + C_3) + C_4z^2 + C_5z + C_6}{(a^{(1)} - a^{(2)})(a^{(1)} - a^{(3)})(a^{(1)} - a^{(4)})}.
\end{aligned}$$

Аналогічно доводяться представлення лемми для значень $g_j^{(k)}(z)$, $j = 2, 3, 4$.

С л е д с т в и е. Для любых $r, s, k, n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ сумма

$$g_1^{(r)}(x + a^{(1)}t) + g_2^{(s)}(x + a^{(2)}t) + g_3^{(k)}(x + a^{(3)}t) + g_4^{(n)}(x + a^{(4)}t)$$

не зависит от $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$.

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из леммы 2.

Л е м м а 3. Предположим, что функции $\varphi_j \in C^{4-j}([0, l])$, $j = \overline{0, 3}$, и $f \in C^2(\overline{Q})$. Равенства (33) имеют место тогда и только тогда, когда они выполняются только для $k = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из формул (29)–(32) получим

$$\begin{aligned}
& d^p g_1^{(k+1)}(-kl) - d^p g_1^{(k)}(-kl) = d^p g_1^{(k)}(l - kl) - d^p g_1^{(k-1)}(l - kl) = \\
& = d^p g_1^{(k-1)}(2l - kl) - d^p g_1^{(k-2)}(2l - kl) = \dots = d^p g_1^{(1)}(0) - d^p g_1^{(0)}(0), \quad p = \overline{0, 4},
\end{aligned} \tag{34}$$

и

$$\begin{aligned}
& d^p g_2^{(k+1)}(l + kl) - d^p g_2^{(k)}(l + kl) = d^p g_2^{(k)}(kl) - d^p g_2^{(k-1)}(kl) = \\
& = d^p g_2^{(k-1)}(kl - l) - d^p g_2^{(k-2)}(kl - l) = \dots = d^p g_2^{(1)}(l) - d^p g_2^{(0)}(l), \quad p = \overline{0, 4}.
\end{aligned} \tag{35}$$

Полученные равенства (34) и (35) доказывают утверждение леммы 3.

Т е о р е м а 3. Предположим, что функции $\varphi_j \in C^{4-j}([0, l])$, $j = \overline{0, 3}$, и $f \equiv 0$. В классе функций $C^4(\overline{Q})$ существует единственное классическое решение задачи (1)–(3) при выполнении условий гладкости на заданные функции тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования

$$d^i \varphi_j(0) = d^i \varphi_j(l), \quad j = \overline{0, 3}, \quad i = \overline{0, 4-j}.$$

Доказательство следует из предыдущих рассуждений, лемм 2, 3 и следствия.

Теорема 4. *Предположим, что функции $\varphi_j \in C^{4-j}([0, l])$, $j = \overline{0, 3}$, и $f \in C^2(\overline{Q})$. В классе функций $C^4(\overline{Q})$ существует единственное классическое решение задачи (1)–(3) при выполнении условий гладкости на заданные функции тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования*

$$d^i \varphi_j(0) = d^i \varphi_j(l), \quad j = \overline{0, 3}, \quad i = \overline{0, 4-j}, \quad f(0, 0) = f(0, l).$$

Доказательство аналогично следует из предыдущих рассуждений, лемм 2, 3, следствия и теоремы 2.

Заключение. Получены формулы классического решения смешанной задачи для строго гиперболического уравнения четвертого порядка с четырьмя различными семействами характеристик. Доказано, что эта задача имеет единственное решение только тогда, когда выполняются в угловых точках заданной области изменения независимых переменных условия согласования для заданных функций уравнения, условий Коши и граничных условий. Следует отметить, что эти условия являются необходимыми и достаточными.

Список использованных источников

1. Корзюк, В. И. Классические решения смешанных задач для одномерного биволнового уравнения / В. И. Корзюк, Нгуен Ван Винь // Вес. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2016. – № 1. – С. 69–79.
2. Корзюк, В. И. Классическое решение задачи с интегральным условием для одномерного биволнового уравнения / В. И. Корзюк, Нгуен Ван Винь // Вес. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2016. – № 3. – С. 16–29.
3. Корзюк, В. И. Решение задачи для нестрого гиперболического уравнения четвертого порядка с двукратными характеристиками / В. И. Корзюк, Нгуен Ван Винь // Вес. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2017. – № 1. – С. 38–52.
4. Korzyuk, V. I. Cauchy problem for some fourth-order nonstrictly hyperbolic equations / V. I. Korzyuk, N. V. Vinh // *Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics*. – 2016. – 7 (5). – P. 869–879. <https://doi.org/10.17586/2220-8054-2016-7-5-869-879>
5. Корзюк, В. И. Решение задачи Коши для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами в случае двух независимых переменных / В. И. Корзюк, И. С. Козловская // Дифференц. уравнения. – 2012. – Т. 48, № 5. – С. 700–709.

References

1. Korzyuk V. I., N. V. Vinh. Classical solutions of mixed problem for one-dimensional biwave equation. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2016, no 1, pp. 69–79 (in Russian).
2. Korzyuk V. I., Nguen Van Vinh. Classical solution of a problem with an integral condition for the one-dimensional biwave equation. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2016, no 3, pp. 16–29 (in Russian).
3. Korzyuk V. I., Nguen Van Vinh. Solving the problem for the nonstrictly fourth order hyperbolic equation with double characteristics. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2017, no 1, pp. 38–52 (in Russian).
4. Korzyuk V. I., Vinh N. V. Cauchy problem for some fourth-order nonstrictly hyperbolic equations. *Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics*, 2016, 7 (5), pp. 869–879. <https://doi.org/10.17586/2220-8054-2016-7-5-869-879>
5. Korzyuk V. I., Kozlovskaya I. S. Solution of the Cauchy problem for a hyperbolic equation with constant coefficients in the case of two independent variables. *Differential Equations*, 2012, vol. 48, no. 5, pp. 707–716. <https://doi.org/10.1134/s0012266112050096>

Информация об авторах

Виктор Иванович Корзюк – академик, профессор, доктор физико-математических наук, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Республика Беларусь), Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: korzyuk@bsu.by

Нгуен Ван Винь – аспирант, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: vinhnguyen0109@gmail.com

Information about the authors

Viktor I. Korzyuk – Academician, Professor, D. Sc. (Physics and Mathematics), Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus), Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: korzyuk@bsu.by

Nguyen Van Vinh – Postgraduate Student, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: vinhnguyen0109@gmail.com

ISSN 1561-2430 (Print)

ISSN 2524-2415 (Online)

УДК 517.988,519.63,519.65

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-2-149-163>

Поступила в редакцию 05.04.2018

Received 05.04.2018

М. В. Игнатенко¹, Л. А. Янович²¹Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь²Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь**ОБОБЩЕННЫЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ ЭРМИТА – БИРКГОФА
ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА
В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ**

Аннотация. Рассматривается проблема построения и исследования обобщенных интерполяционных формул Эрмита – Биркгофа для дифференциальных операторов произвольного порядка в частных производных, заданных в пространстве непрерывно-дифференцируемых функций многих переменных. Построение операторных многочленов основано на интерполяционных полиномах для скалярных функций относительно произвольной чебышевской системы, а также на обобщенных интерполяционных формулах Эрмита – Биркгофа, полученных авторами ранее для операторов общего вида в функциональных пространствах. Приведенные операторные формулы имеют различную структуру и содержат интегралы Стильтьеса и дифференциалы Гато интерполируемого оператора. Получено явное представление погрешности операторного интерполирования. Рассмотрены некоторые частные случаи обобщенных формул Эрмита – Биркгофа для дифференциальных операторов в частных производных. Представленные результаты могут быть использованы в теоретических исследованиях как основа построения приближенных методов решения некоторых нелинейных операторно-дифференциальных уравнений, встречающихся в математической физике.

Ключевые слова: операторный многочлен, операторное интерполирование, обобщенное интерполирование типа Эрмита – Биркгофа, дифференциальный оператор, дифференциал Гато, интеграл Стильтьеса, погрешность интерполяции

Для цитирования. Игнатенко, М. В. Обобщенные интерполяционные многочлены Эрмита – Биркгофа для дифференциальных операторов произвольного порядка в частных производных / М. В. Игнатенко, Л. А. Янович // Вест. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2018. – Т. 54, № 2. – С. 149–163. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-2-149-163>

M. V. Ignatenko¹, L. A. Yanovich²¹Belarusian State University, Minsk, Belarus²Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus**GENERALIZED INTERPOLATION HERMITE – BIRKHOFF POLYNOMIALS
FOR ARBITRARY-ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL OPERATORS**

Abstract. This article is devoted to the problem of construction and research of the generalized Hermite – Birkhoff interpolation formulas for arbitrary-order partial differential operators given in the space of continuously differentiable functions of many variables. The construction of operator interpolation polynomials is based both on interpolation polynomials for scalar functions with respect to an arbitrary Chebyshev system, and on the generalized Hermite – Birkhoff interpolation formulas obtained earlier by the authors for general operators in functional spaces. The presented operator formulas contain the Stieltjes integrals and the Gateaux differentials of an interpolated operator. An explicit representation of the error of operator interpolation was obtained. Some special cases of the generalized Hermite – Birkhoff formulas for partial differential operators are considered. The obtained results can be used in theoretical research as the basis for constructing approximate methods for solution of some nonlinear operator-differential equations found in mathematical physics.

Keywords: operator polynomial, operator interpolation, generalized Hermite – Birkhoff interpolation, differential operator, Gateaux differential, Stieltjes integral, interpolation error

For citation. Ignatenko M. V., Yanovich L. A. Generalized interpolation Hermite – Birkhoff polynomials for arbitrary-order partial differential operators. *Vestsi Natsyional'nai akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, vol. 54, no. 2, pp. 149–163 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-2-149-163>

Введение. Рассмотрим задачу применения обобщенных операторных интерполяционных формул Эрмита – Биркгофа, полученных авторами ранее в работе [1] для операторов общего вида в функциональных пространствах, к построению интерполяционных многочленов типа Эрмита – Биркгофа для одного частного случая – дифференциальных операторов произвольного фиксированного порядка в частных производных, заданных в пространстве непрерывно-дифференцируемых функций многих переменных.

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ – мультииндекс с неотрицательными составляющими $\{0 \leq \alpha_j \leq m\}_{j=1}^m$ и точка $t = (t_1, t_2, \dots, t_m) \in \mathbb{R}^m$. Через $D^\alpha x(t)$ обозначим производную функции $x(t) = x(t_1, t_2, \dots, t_m)$ порядка $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m$ вида

$$D^\alpha x(t) = \frac{\partial^{|\alpha|} x(t_1, t_2, \dots, t_m)}{\partial t_1^{\alpha_1} \partial t_2^{\alpha_2} \dots \partial t_m^{\alpha_m}}, \quad D^0 x(t) = x(t).$$

Для производных невысоких порядков будем использовать также обозначения $x'_{t_i}(t) = \frac{\partial x(t)}{\partial t_i}$, $x''_{t_i, t_j}(t) = \frac{\partial^2 x(t)}{\partial t_i \partial t_j}$.

Рассмотрим дифференциальные операторы $F : C^{(m)}(T) \rightarrow Y$ фиксированного порядка m в частных производных:

$$F(x) = f\left(t, \left\{D^\alpha x(t)\right\}_{|\alpha|=0}^m\right), \quad (1)$$

где $C^{(m)}(T)$ – пространство функций $x(t) = x(t_1, t_2, \dots, t_m)$ непрерывно-дифференцируемых m раз на прямоугольнике $T = T_1 \times T_2 \times \dots \times T_m \subseteq \mathbb{R}^m$; Y – некоторое функциональное пространство; функция $y = f(t, u_0, u_1, \dots, u_\mu)$ задана на прямоугольнике $\Omega = T \times U_0 \times U_1 \times \dots \times U_\mu$,

U_i – отрезки действительной оси ($i = 0, 1, \dots, \mu$), $\mu = C_{2m}^m - 1 = \frac{(2m)!}{(m!)^2} - 1$; $\left\{D^\alpha x(t)\right\}_{|\alpha|=0}^m =$

$$= \left\{x(t), x'_{t_1}(t), x'_{t_2}(t), \dots, x'_{t_m}(t), x''_{t_1^2}(t), x''_{t_1 t_2}(t), \dots, x''_{t_m^2}(t), \dots, \frac{\partial^m x(t)}{\partial t_1^m}, \frac{\partial^m x(t)}{\partial t_1^{m-1} \partial t_2}, \dots, \frac{\partial^m x(t)}{\partial t_m^m}\right\}. \text{ Далее предпо-}$$

лагаем, что смешанные производные одинакового порядка, отличающиеся лишь последовательностью дифференцирования по одним и тем же переменным, совпадают, например, $x''_{t_1 t_2}(t_1, t_2) = x''_{t_2 t_1}(t_1, t_2)$ при $m = 2$.

Формулы Эрмита – Биркгофа, содержащие дифференциалы Гато интерполируемого оператора. Пусть $I_{k,n} = (\varepsilon_{ij})_{i,j=0}^{k,n}$ – прямоугольная матрица размерности $(k+1) \times (n+1)$, элементы ε_{ij} ($i = 0, 1, \dots, k$; $j = 0, 1, \dots, n$) которой 0 или 1; множество $N_{k,n} = \{(i, j) : \varepsilon_{ij} = 1, 0 \leq i \leq k, 0 \leq j \leq n\}$, $M_{k,n} = \{(i, j) : \varepsilon_{ij} = 1, 0 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq n\}$; функции $H_{ij}^{(k)}(t)$ – фундаментальные интерполяционные многочлены, соответствующие задаче Эрмита – Биркгофа для случая скалярной чебышевской системы функций $\{\varphi_i(t)\}_{i=0}^r$, $r \in \mathbb{N}$; $D_\nu H_{ij}^{(k)}(t_p) = \delta_{ip} \delta_{\nu j}$, где $D_0 f(t) = f(t)$, $D_\nu f(t) = \sum_{j=0}^n a_{j\nu} f^{(j)}(t)$, $a_{j\nu}$ – заданные числа, δ_{ij} – символ Кронекера; $\sigma_k(t) = \sum_{(i,0) \in N_{k,0}} H_{i0}^{(k)}(t)$ – некоторая постоянная или переменная на $T \subseteq \mathbb{R}$ величина. Заметим, что в верхнем индексе (k) обозначения $H_{ij}^{(k)}(t)$ указан номер последней строки в соответствующей матрице $I_{k,n}$.

Рассмотрим операторно-дифференциальные выражения

$$\tilde{D}_j F(x) \equiv \tilde{D}_j F[x; h_1 h_2 \dots h_j] = \sum_{\nu=1}^j a_{\nu j} \delta^\nu F[x; h_1 h_2 \dots h_j], \quad \tilde{D}_0 F(x) = F(x), \quad (2)$$

где $\delta^\nu F[x; h_1 h_2 \dots h_j] = \delta^\nu F[x; \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{\nu-1}, h_1 h_2 \dots h_j]$ – дифференциал Гато ν -го порядка оператора F в точке x , когда первые $(\nu - 1)$ направления $h_i = h_i(t) \equiv 1$ ($i = 1, 2, \dots, \nu - 1$), а последнее ν -е направление h_ν является произведением вида $h_\nu = h_1 h_2 \dots h_j$ ($h_\nu = h_\nu(t) \in C^{(m)}(T)$).

Ранее в работе [1] для операторов $F(x)$ общего вида, заданных на функциональных пространствах непрерывных и гладких функций, были построены обобщенные интерполяционные операторные многочлены Эрмита – Биркгофа

$$B_{k,n}(F;x) = F(x_p) + \sum_{(i,0) \in N_{k,0}} \int_0^1 \delta F \left[x_p + \tau(x_i - x_p); \frac{H_{i0}^{(k)}(x)}{\sigma_k(x)}(x_i - x_p) \right] d\tau + \\ + \sum_{(i,j) \in M_{k,n}} \tilde{D}_j F \left[x_i; \frac{H_{ij}^{(k)}(x)}{\sigma_k(x)} \sigma_k(x_i) \right], \quad (3)$$

где x_p – фиксированный узел, соответствующий элементу ε_{p0} множества $N_{k,0}$, для которых выполняются условия

$$B_{k,n}(F;x_i) = F(x_i), (i,0) \in N_{k,0}; \quad \tilde{D}_j B_{k,n}(F;x_i) = \tilde{D}_j F(x_i), (i,j) \in M_{k,n}. \quad (4)$$

Когда множество $N_{k,0}$ пустое, то $B_{k,n}(F;x) = \sum_{(i,j) \in M_{k,n}} \tilde{D}_j F \left[x_i; H_{ij}^{(k)}(x) \right]$ и первая группа равенств в условиях (4) отсутствует.

Для погрешности $r_{k,n}(x) = F(x) - B_{k,n}(F;x)$, где $B_{k,n}(F;x)$ – интерполяционный полином (3), в работе [2] было указано явное представление:

$$r_{k,n}(x) = \sum_{(i,0) \in N_{k+1,0}} \int_0^1 \delta F \left[x_p + \tau(x_i - x_p); \left\{ \frac{H_{i0}^{(k+1)}(x)}{\sigma_{k+1}(x)} - \frac{H_{i0}^{(k)}(x)}{\sigma_k(x)} \right\} (x_i - x_p) \right] d\tau + \\ + \sum_{(i,j) \in M_{k+1,n+k}} \tilde{D}_j F \left[x_i; \frac{H_{ij}^{(m+1)}(x)}{\sigma_{k+1}(x)} \sigma_{k+1}(x_i) - \frac{H_{ij}^{(k)}(x)}{\sigma_k(x)} \sigma_k(x_i) \right], \quad (5)$$

где x_p , как и ранее, – фиксированный узел, соответствующий элементу ε_{p0} множества $N_{k,0}$; $x_{k+1} = x$; q – разность числа столбцов матриц $I_{k+1,n+q}$ и $I_{k,n}$; $H_{k+1,j}^{(k)}(x) \equiv 0$ ($j = 0, 1, 2, \dots$).

В данной работе для дифференциального оператора (1) на основе формул (3) и (5) получим интерполяционный многочлен и представление его погрешности.

Отметим, что дифференциальный оператор (1) зависит от одной функциональной переменной $x(t)$. Поэтому дифференциал Гато $\delta F[x; h]$ в точке $x = x(t)$ по направлению $h = h(t)$ ($x, h \in C^{(m)}(T)$) для этого оператора вычисляется по правилу

$$\delta F[x; h] = \frac{\partial f}{\partial x(t)} h(t) + \frac{\partial f}{\partial x'_{t_1}(t)} h'_{t_1}(t) + \frac{\partial f}{\partial x'_{t_2}(t)} h'_{t_2}(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x'_{t_m}(t)} h'_{t_m}(t) + \\ + \frac{\partial f}{\partial x''_{t_1}(t)} h''_{t_1}(t) + \frac{\partial f}{\partial x''_{t_1, t_2}(t)} h''_{t_1, t_2}(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x''_{t_m}(t)} h''_{t_m}(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial \left(\frac{\partial^m x(t)}{\partial t_1^m} \right)} \frac{\partial^m h(t)}{\partial t_1^m} + \\ + \frac{\partial f}{\partial \left(\frac{\partial^m x(t)}{\partial t_1^{m-1} \partial t_2} \right)} \frac{\partial^m h(t)}{\partial t_1^{m-1} \partial t_2} + \dots + \frac{\partial f}{\partial \left(\frac{\partial^m x(t)}{\partial t_m^m} \right)} \frac{\partial^m h(t)}{\partial t_m^m} \equiv \sum_{|\alpha|=0}^m \frac{\partial f \left(t, \{ D^\beta x(t) \}_{|\beta|=0}^m \right)}{\partial (D^\alpha x(t))} D^\alpha h(t),$$

где $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$ – мультииндекс, $|\beta| = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_m$.

Далее, дифференциал Гато второго порядка $\delta^2 F[x; h_1, h_2]$ оператора F в точке $x = x(t)$ по направлениям $h_1 = h_1(t)$, $h_2 = h_2(t)$ ($x, h_1, h_2 \in C^{(m)}(T)$) равен

$$\delta^2 F[x; h_1, h_2] = \sum_{|\alpha|=0}^m \sum_{|\gamma|=0}^m \frac{\partial^2 f \left(t, \{D^\beta x(t)\}_{|\beta|=0}^m \right)}{\partial (D^\alpha x(t)) \partial (D^\gamma x(t))} D^\alpha h_1(t) D^\gamma h_2(t).$$

Следовательно,

$$\delta^2 F[x; h] \equiv \delta^2 F[x; 1, h] = \sum_{|\alpha|=0}^m \frac{\partial^2 f \left(t, \{D^\beta x(t)\}_{|\beta|=0}^m \right)}{\partial x(t) \partial (D^\alpha x(t))} D^\alpha h(t).$$

В случае $v=3, 4, \dots$ аналогично получим, что для операторов (1) дифференциал Гато $\delta^v F[x; h_1, h_2, \dots, h_v]$ порядка v содержит произведение производных D^α от функций $h_1(t), h_2(t), \dots, h_v(t)$ ($x(t), h_i(t) \in C^{(m)}(T); t \in T$), а

$$\delta^v F[x; h] \equiv \delta^v F[x; \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{v-1}, h] = \sum_{|\alpha|=0}^m \frac{\partial^v f \left(t, \{D^\beta x(t)\}_{|\beta|=0}^m \right)}{\partial x^{v-1}(t) \partial (D^\alpha x(t))} D^\alpha h(t).$$

Обозначим $h_{1,j} = h_1 h_2 \dots h_j$ ($j = 2, 3, \dots$). Тогда по определению

$$\tilde{D}_j F[x; h_{1,j}] = \sum_{v=1}^j \sum_{|\alpha|=0}^m a_{vj} \frac{\partial^v f \left(t, \{D^\beta x(t)\}_{|\beta|=0}^m \right)}{\partial x^{v-1}(t) \partial (D^\alpha x(t))} D^\alpha h_{1,j}(t). \quad (6)$$

Следовательно, для операторов (1) формула (3) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} B_{k,n}(F; x) &= f \left(t, \{D^\alpha x_p(t)\}_{|\alpha|=0}^m \right) + \\ &+ \sum_{(i,0) \in N_{k,0}} \int \sum_{|\alpha|=0}^m \frac{\partial f \left(t, \{D^\beta v_i(t, \tau)\}_{|\beta|=0}^m \right)}{\partial (D^\alpha v_i(t, \tau))} D^\alpha \left\{ \frac{H_{i0}^{(k)}(x(t))}{\sigma_k(x(t))} (x_i(t) - x_p(t)) \right\} d\tau + \\ &+ \sum_{(i,j) \in M_{k,n}} \sum_{v=1}^j \sum_{|\alpha|=0}^m a_{vj} \frac{\partial^v f \left(t, \{D^\beta x_i(t)\}_{|\beta|=0}^m \right)}{\partial x_i^{v-1}(t) \partial (D^\alpha x_i(t))} D^\alpha \left\{ \frac{H_{ij}^{(k)}(x(t))}{\sigma_k(x(t))} \sigma_k(x_i(t)) \right\}, \end{aligned} \quad (7)$$

где функция $v_i(t, \tau) = x_p(t) + \tau(x_i(t) - x_p(t))$, $D^\alpha v_i(t, \tau) = \frac{\partial^{|\alpha|} v_i(t_1, t_2, \dots, t_m, \tau)}{\partial t_1^{\alpha_1} \partial t_2^{\alpha_2} \dots \partial t_m^{\alpha_m}}$, $(i, 0) \in N_{k,0}$; x_p –

фиксированный узел, соответствующий элементу ε_{p0} множества $N_{k,0}$.

Таким образом, справедлива

Т е о р е м а 1. *Обобщенный операторный многочлен (7) является интерполяционным для заданного на множестве $C^{(m)}(T)$ оператора $F(x)$ вида (1), и для него имеют место условия (4).*

Воспользуемся правилом (5) для представления погрешности интерполирования оператора (1) полиномом (7).

С л е д с т в и е 1. Для погрешности интерполирования $r_{k,n}(x) = F(x) - B_{k,n}(F; x)$ дифференциального оператора $F(x)$ вида (1) полиномом $B_{k,n}(F; x)$, заданным равенством (7), имеет место представление

$$r_{k,n}(x) = \sum_{(i,0) \in N_{k+1,0} \mid |\alpha|=0} \int \sum_{|\beta|=0}^m \frac{\partial f \left(t, \{D^\beta v_i(t, \tau)\} \right)}{\partial (D^\alpha v_i(t, \tau))} D^\alpha \left\{ \left(\frac{H_{i0}^{(k+1)}(x(t))}{\sigma_{k+1}(x(t))} - \frac{H_{i0}^{(k)}(x(t))}{\sigma_k(x(t))} \right) (x_i(t) - x_p(t)) \right\} d\tau +$$

$$+ \sum_{(i,j) \in M_{k+1,n+q}} \sum_{v=1}^j \sum_{|\alpha|=0}^m a_{vj} \frac{\partial^v f \left(t, \{D^\beta x_i(t)\} \right)}{\partial x_i^{v-1}(t) \partial (D^\alpha x_i(t))} D^\alpha \left\{ \frac{H_{ij}^{(k+1)}(x(t))}{\sigma_{k+1}(x(t))} \sigma_{k+1}(x_i(t)) - \frac{H_{ij}^{(k)}(x(t))}{\sigma_k(x(t))} \sigma_k(x_i(t)) \right\},$$

где $x_{k+1} = x$; q – разность числа столбцов матриц $I_{k+1,n+q}$ и $I_{k,n}$; $H_{k+1,j}^{(k)}(x) \equiv 0$ ($j = 0, 1, 2, \dots$).

Формулы лагранжева и эрмитова типа с узлами второй кратности для рассматриваемого дифференциального оператора вида (1) в частных производных, а также явные представления погрешности интерполирования получены в работе [3].

Многочлены Эрмита – Биркгофа, содержащие дифференциалы Гато и интеграл Стильтьеса интерполируемого оператора. Ранее в работе [1] были построены обобщенные интерполяционные операторные многочлены, которые заданы на множествах функций одной переменной и содержат дифференциалы Гато и интегралы Стильтьеса интерполируемого оператора. В частности, если числовая функция

$$\chi_1(\tau_1, t_1) = \begin{cases} 1, & \tau_1 \geq t_1; \\ 0, & \tau_1 < t_1, \end{cases} \quad (8)$$

где $0 < \tau_1 < 1$, $t_1 \in \mathbb{R}$, $\chi_1(0, t_1) \equiv 0$, а $\chi_1(1, t_1) \equiv 1$, то для операторного многочлена

$$B_{k,n}(F; x) = F(x_p) + \sum_{(i,0) \in N_{k,0}} \int \frac{H_{i0}^{(k)}[x(\tau_1)]}{\sigma_k[x(\tau_1)]} d\tau_1 F[x_p(\cdot) + \chi_1(\tau_1, \cdot)(x_i(\cdot) - x_p(\cdot))] +$$

$$+ \sum_{(i,j) \in M_{k,n}} \tilde{D}_j F \left[x_i; \frac{H_{ij}^{(k)}(x)}{\sigma_k(x)} \sigma_k(x_i) \right], \quad (9)$$

где x_p – фиксированный узел, соответствующий элементу ε_{p0} матрицы $I_{m,n}$, также выполняются интерполяционные условия (4). Когда множество $N_{k,0}$ пустое, то, как и ранее,

$$B_{k,n}(F; x) = \sum_{(i,j) \in M_{k,n}} \tilde{D}_j F \left[x_i; H_{ij}^{(k)}(x) \right]$$

и первая группа равенств в условиях (4) отсутствует.

В работе [2] для погрешности $r_{k,n}(x) = F(x) - B_{k,n}(F; x)$, где $B_{k,n}(F; x)$ – интерполяционный полином (9), получено следующее представление:

$$r_{k,n}(x) = \sum_{(i,0) \in N_{k+1,0}} \int \left\{ \frac{H_{i0}^{(k+1)}[x(\tau_1)]}{\sigma_{k+1}[x(\tau_1)]} - \frac{H_{i0}^{(k)}[x(\tau_1)]}{\sigma_k[x(\tau_1)]} \right\} d\tau_1 F[x_p(\cdot) + \gamma(\tau, \cdot)(x_i(\cdot) - x_p(\cdot))] +$$

$$+ \sum_{(i,j) \in M_{k+1,n+q}} \tilde{D}_j F \left[x_i; \frac{H_{ij}^{(k+1)}(x)}{\sigma_{k+1}(x)} \sigma_{k+1}(x_i) - \frac{H_{ij}^{(k)}(x)}{\sigma_k(x)} \sigma_k(x_i) \right], \quad (10)$$

где x_p – фиксированный узел, соответствующий элементу ε_{p0} множества $N_{k,0}$, $x_{k+1} = x$, q – разность числа столбцов матриц $I_{k+1,n+q}$ и $I_{k,n}$, $H_{k+1,j}^{(k)}(x) \equiv 0$ ($j = 0, 1, 2, \dots$).

В этой работе обобщим формулы (9) и (10) на случай функций многих переменных $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) \in [0, 1]^m$ и $t = (t_1, t_2, \dots, t_m) \in \mathbb{R}^m$. Введем числовую функцию

$$\chi(\tau, t) \equiv \chi(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m, t_1, t_2, \dots, t_m) = \prod_{i=1}^m \chi_1(\tau_i, t_i),$$

где $\chi_1(\tau_i, t_i)$ задается по правилу (8). Учитывая определение $\chi_1(\tau_i, t_i)$, для $\chi(\tau, t)$ имеем

$$\chi(\tau, t) = \begin{cases} 1, & \tau_i \geq t_i, i = 1, 2, \dots, m; \\ 0, & \tau_j < t_j, j \in \{1, 2, \dots, m\}, \end{cases}$$

где $0 < \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m < 1$, $\chi(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_m, t) \equiv 0$, а $\chi(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_m, t) \equiv 1$.

Т е о р е м а 2. Для операторного многочлена

$$\begin{aligned} B_{k,n}(F; x) = F(x_p) + \sum_{(i,0) \in N_{k,0}} \int_{[0,1]^m} \frac{H_{i0}^{(k)}[x(\tau)]}{\sigma_k[x(\tau)]} d_\tau F[x_p(\cdot) + \chi(\tau, \cdot)(x_i(\cdot) - x_p(\cdot))] + \\ + \sum_{(i,j) \in M_{k,n}} \tilde{D}_j F \left[x_i; \frac{H_{ij}^{(k)}(x)}{\sigma_k(x)} \sigma_k(x_i) \right], \end{aligned} \quad (11)$$

где x_p – фиксированный узел, соответствующий элементу ε_{p0} матрицы $I_{m,n}$, выполняются интерполяционные условия (4). Когда множество $N_{k,0}$ пустое, то

$$B_{k,n}(F; x) = \sum_{(i,j) \in M_{k,n}} \tilde{D}_j F \left[x_i; H_{ij}^{(k)}(x) \right]$$

и первая группа равенств в условиях (4) отсутствует.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $x = x_q$ (здесь индексу q соответствует первый индекс элемента $\varepsilon_{p0} = 1$ матрицы $I_{k,n}$) значение $\sigma_k(x_q) = 1$ и справедливы равенства $\tilde{D}_0 \frac{H_{i0}^{(k)}(x_q)}{\sigma_k(x_q)} = \delta_{iq}$ для $(i, 0) \in N_{k,0}$ и $\tilde{D}_0 \frac{H_{ij}^{(k)}(x_q) \sigma_k(x_i)}{\sigma_k(x_q)} = \delta_{iq} \delta_{0j} \sigma_k(x_i) = 0$ для $(i, j) \in M_{k,n}$. Поэтому в узлах x_q , где $(q, 0) \in N_{k,0}$, имеем

$$B_{k,n}(x_q) = F(x_p) + \int_{[0,1]^m} d_\tau F[x_p(\cdot) + \chi(\tau, \cdot)(x_q(\cdot) - x_p(\cdot))] = F(x_q).$$

Заметим, если порядок дифференцирования $s \geq 1$, $q = 0, 1, \dots, k$, то для производной $\frac{d^s}{dx^s} \sigma_k(x)$ выполняются равенства $\frac{d^s}{dx^s} \sigma_k(x_q) = \sum_{(i,0) \in N_{k,0}} \delta_{iq} \delta_{0s} = 0$. Учитывая это, несложно убедиться также в справедливости равенства

$$D_s \left[\frac{H_{ij}^{(k)}(x_q)}{\sigma_k(x_q)} \right] = \frac{D_s [H_{ij}^{(k)}(x_q)]}{\sigma_k(x_q)},$$

где, как и ранее, $D_s f(t) = \sum_{j=0}^s a_{js} f^{(j)}(t)$, a_{js} – заданные числа. При $(q, j) \in M_{k,n}$, т. е. для $j \geq 1$,

с учетом (2) получим $\tilde{D}_j B_{k,n}(x_q) = \sum_{v=1}^j a_{vj} \delta^v B_{k,n}[x_q; h_1 h_2 \dots h_j]$. Поэтому

$$\tilde{D}_s \left[\frac{H_{ij}^{(k)}(x_q) \sigma_k(x_i)}{\sigma_k(x_q)} \right] = D_s \left[H_{ij}^{(k)}(x_q) \right] \frac{\sigma_k(x_i)}{\sigma_k(x_q)} h_1(t) h_2(t) \dots h_s(t)$$

для $s \geq 1$. Так как значение $D_s \left[H_{ij}^{(k)}(x_q) \right] = \delta_{iq} \delta_{sj}$, то из всех слагаемых в (11), содержащих выражения $\frac{H_{ij}^{(k)}(x) \sigma_k(x_i)}{\sigma_k(x)}$, останутся только те, для которых $i = q$ и $s = j$. Отсюда следует вторая группа равенств в (4). Теорема 2 доказана.

Т е о р е м а 3. Для погрешности $r_{k,n}(x) = F(x) - B_{k,n}(F; x)$, где $B_{k,n}(F; x)$ – интерполяционный полином (11), справедливо следующее представление:

$$\begin{aligned} r_{k,n}(x) = & \sum_{(i,0) \in N_{k+1,0} [0,1]^m} \int \left\{ \frac{H_{i0}^{(k+1)}[x(\tau)]}{\sigma_{k+1}[x(\tau)]} - \frac{H_{i0}^{(k)}[x(\tau)]}{\sigma_k[x(\tau)]} \right\} d_\tau F \left[x_p(\cdot) + \chi(\tau, \cdot) (x_i(\cdot) - x_p(\cdot)) \right] + \\ & + \sum_{(i,j) \in M_{k+1,n+q}} \tilde{D}_j F \left[x_i; \frac{H_{ij}^{(k+1)}(x)}{\sigma_{k+1}(x)} \sigma_{k+1}(x_i) - \frac{H_{ij}^{(k)}(x)}{\sigma_k(x)} \sigma_k(x_i) \right], \end{aligned} \quad (12)$$

где x_p – фиксированный узел, соответствующий элементу ε_{p0} множества $N_{m,0}$, $x_{k+1} = x$, q – разность числа столбцов матриц $I_{k+1,n+q}$ и $I_{k,n}$, $H_{k+1,j}^{(k)}(x) \equiv 0$ ($j = 0, 1, 2, \dots$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, в случае $(v, 0) \in N_{k,0}$ погрешность $r_{k,n}(x_v) = 0$. Учитывая, что $M_{k,n} \equiv M_{k,n+q}$ ($q = 0, 1, 2, \dots$), при $v = k+1$ получим

$$\begin{aligned} r_{k,n}(x_{k+1}) = & \sum_{(i,0) \in N_{k+1,0} [0,1]^m} \int \frac{H_{i0}^{(k+1)}[x_{k+1}(\tau)]}{\sigma_{k+1}[x_{k+1}(\tau)]} d_\tau F \left[x_p(\cdot) + \chi(\tau, \cdot) (x_i(\cdot) - x_p(\cdot)) \right] + \\ & + \sum_{(i,j) \in M_{k+1,n+q}} \tilde{D}_j F \left[x_i; \frac{H_{ij}^{(k+1)}(x_{k+1})}{\sigma_{k+1}(x_{k+1})} \sigma_{k+1}(x_i) \right] - \\ & - \sum_{(i,0) \in N_{k+1,0} [0,1]^m} \int \frac{H_{i0}^{(k)}[x_{k+1}(\tau)]}{\sigma_k[x_{k+1}(\tau)]} d_\tau F \left[x_p(\cdot) + \chi(\tau, \cdot) (x_i(\cdot) - x_p(\cdot)) \right] - \\ & - \sum_{(i,j) \in M_{k+1,n+q}} \tilde{D}_j F \left[x_i; \frac{H_{ij}^{(k)}(x_{k+1})}{\sigma_k(x_{k+1})} \sigma_k(x_i) \right] = \\ = & F(x_{k+1}) - \sum_{(i,0) \in N_{k,0} [0,1]^m} \int \frac{H_{i0}^{(k)}[x_{k+1}(\tau)]}{\sigma_k[x_{k+1}(\tau)]} d_\tau F \left[x_p(\cdot) + \chi(\tau, \cdot) (x_i(\cdot) - x_p(\cdot)) \right] - \\ & - \sum_{(i,j) \in M_{k,n}} \tilde{D}_j F \left[x_i; \frac{H_{ij}^{(k)}(x_{k+1})}{\sigma_k(x_{k+1})} \sigma_m(x_i) \right] = F(x_{k+1}) - B_{k,n}(F; x_{k+1}). \end{aligned}$$

Таким образом, теорема 3 доказана.

Воспользуемся формулами (11) и (12) для построения интерполяционного многочлена и представления его погрешности в случае дифференциального оператора в частных производных вида (1). С учетом равенства (6) формула (11) для оператора (1) преобразуется к виду

$$B_{k,n}(F; x) = f\left(t, \left\{D^\alpha x_p(t)\right\}_{|\alpha|=0}^m\right) + \sum_{(i,0) \in N_{k,0}} \int_{[0,1]^m} \frac{H_{i0}^{(k)}[x(\tau)]}{\sigma_k[x(\tau)]} d\tau f\left(t, \left\{D^\alpha \xi_i(t, \tau)\right\}_{|\alpha|=0}^m\right) +$$

$$+ \sum_{(i,j) \in M_{k,n}} \sum_{v=1}^j \sum_{|\alpha|=0}^m a_{vj} \frac{\partial^v f\left(t, \left\{D^\beta x_i(t)\right\}_{|\beta|=0}^m\right)}{\partial x_i^{v-1}(t) \partial (D^\alpha x_i(t))} D^\alpha \left\{ \frac{H_{ij}^{(k)}(x(t))}{\sigma_k(x(t))} \sigma_k(x_i(t)) \right\}, \quad (13)$$

где функция $\xi_i(t, \tau) = x_p(t) + \chi(\tau, t)(x_i(t) - x_p(t))$, $D^\alpha \xi_i(t, \tau) = \frac{\partial^{|\alpha|} \xi_i(t_1, t_2, \dots, t_m, \tau)}{\partial t_1^{\alpha_1} \partial t_2^{\alpha_2} \dots \partial t_m^{\alpha_m}}$, $(i, 0) \in N_{k,0}$;

x_p – фиксированный узел, соответствующий элементу ε_{p0} множества $N_{k,0}$. Итак, доказана

Т е о р е м а 4. *Обобщенный операторный многочлен (13) является интерполяционным для заданного на множестве $C^{(m)}(T)$ дифференциального оператора $F(x)$ вида (1), и для него справедливы равенства (4).*

Воспользуемся формулой (12) для представления погрешности интерполирования оператора (1) полиномом (13).

С л е д с т в и е 2. *Для погрешности интерполирования $r_{k,n}(x) = F(x) - B_{k,n}(F; x)$ дифференциального оператора $F(x)$ вида (1) полиномом $B_{k,n}(F; x)$, заданным по правилу (13), имеет место представление*

$$r_{k,n}(x) = \sum_{(i,0) \in N_{k+1,0}} \int_{[0,1]^m} \left\{ \frac{H_{i0}^{(k+1)}[x(\tau)]}{\sigma_{k+1}[x(\tau)]} - \frac{H_{i0}^{(k)}[x(\tau)]}{\sigma_k[x(\tau)]} \right\} \times$$

$$\times d\tau f\left(t, \left\{D^\alpha \xi_i(t, \tau)\right\}_{|\alpha|=0}^m\right) + \sum_{(i,j) \in M_{k+1,n+q}} \sum_{v=1}^j \sum_{|\alpha|=0}^m a_{vj} \frac{\partial^v f\left(t, \left\{D^\beta x_i(t)\right\}_{|\beta|=0}^m\right)}{\partial x_i^{v-1}(t) \partial (D^\alpha x_i(t))} \times$$

$$\times D^\alpha \left\{ \frac{H_{ij}^{(k+1)}(x(t))}{\sigma_{k+1}(x(t))} \sigma_{k+1}(x_i(t)) - \frac{H_{ij}^{(k)}(x(t))}{\sigma_k(x(t))} \sigma_k(x_i(t)) \right\}, \quad (14)$$

где $x_{k+1} = x$; q – разность числа столбцов матриц $I_{k+1,n+q}$ и $I_{k,n}$; многочлен $H_{k+1,j}^{(k)}(x) \equiv 0$ ($j = 0, 1, 2, \dots$).

В частности, если через $l_{k,i}(x)$ обозначить фундаментальные многочлены, соответствующие задаче Лагранжа для узлов $x_0, x_1, \dots, x_k$ относительно чебышевской системы функций $\{\varphi_q(t)\}_{q=0}^k$, для которых справедливы равенства $l_{k,i}(x_j) = \delta_{ij}$ ($i, j = 0, 1, \dots, k$), то при $p = 0$ формула (11) принимает достаточно простую форму:

$$B_{k,0}(F; x) = F(x_0) + \sum_{i=1}^k \int_{[0,1]^m} \frac{l_{k,i}[x(\tau)]}{\sigma_k[x(\tau)]} d\tau F[x_0(\cdot) + \chi(\tau, \cdot)(x_i(\cdot) - x_0(\cdot))], \quad (15)$$

где $\sigma_k(x) = \sum_{i=0}^k l_{k,i}(x)$.

Интерполяционный многочлен (15) для дифференциального оператора (1) преобразуется к виду

$$B_{k,0}(F; x) = f\left(t, \left\{D^\alpha x_0(t)\right\}_{|\alpha|=0}^m\right) + \sum_{i=1}^k \int_{[0,1]^m} \frac{l_{k,i}[x(\tau)]}{\sigma_k[x(\tau)]} d\tau f\left(t, \left\{D^\alpha \xi_i(t, \tau)\right\}_{|\alpha|=0}^m\right), \quad (16)$$

где функция $\xi_i(t, \tau) = x_0(t) + \chi(\tau, t)(x_i(t) - x_0(t))$, а ее производная $D^\alpha \xi_i(t, \tau) = \frac{\partial^{|\alpha|} \xi_i(t_1, t_2, \dots, t_m, \tau)}{\partial t_1^{\alpha_1} \partial t_2^{\alpha_2} \dots \partial t_m^{\alpha_m}}$ ($i = 1, 2, \dots, k$).

Как частный случай формулы (14), погрешность интерполирования $r_{k,0}(x) = F(x) - B_{k,0}(F; x)$ дифференциального оператора $F(x)$ вида (1) многочленом $B_{k,0}(F; x)$, заданным по правилу (16), имеет представление

$$r_{k,0}(x) = \sum_{i=1}^{k+1} \int_{[0,1]^m} \left\{ \frac{l_{k+1,i}[x(\tau)]}{\sigma_{k+1}[x(\tau)]} - \frac{l_{k,i}[x(\tau)]}{\sigma_k[x(\tau)]} \right\} d_{\tau} f \left(t, \{D^{\alpha} \xi_i(t, \tau)\}_{|\alpha|=0}^m \right),$$

где $x_{k+1} = x$, $l_{k,k+1}(x) \equiv 0$.

Далее, если через $h_{k,i}(x)$ и $q_{k,i}(x)$ обозначить фундаментальные многочлены, соответствующие задаче Эрмита в случае двукратных узлов $x_0, x_1, \dots, x_k$ относительно чебышевской системы функций $\{\varphi_q(t)\}_{q=0}^{2k+1}$, для которых справедливы равенства $h_{k,i}(x_j) = q'_{k,i}(x_j) = \delta_{ij}$, $h'_{k,i}(x_j) = q_{k,i}(x_j) = 0$ ($i, j = 0, 1, \dots, k$), то в случае $\tilde{D}_1 F(x) = \delta F[x; h]$ и $p = 0$ формула (11) принимает сравнительно простую форму:

$$B_{k,1}(F; x) = F(x_0) + \sum_{i=1}^k \int_{[0,1]^m} \frac{h_{k,i}[x(\tau)]}{\sigma_k[x(\tau)]} d_{\tau} F[x_0(\cdot) + \chi(\tau, \cdot)(x_i(\cdot) - x_0(\cdot))] + \\ + \sum_{i=0}^k \delta F \left[x_i; \frac{q_{k,i}(x(t))}{\sigma_k(x(t))} \sigma_k(x_i(t)) \right], \quad (17)$$

где сумма $\sigma_k(x) = \sum_{i=0}^k h_{k,i}(x)$.

Для дифференциального оператора (1) интерполяционный многочлен (17) преобразуется к виду

$$B_{k,1}(F; x) = f \left(t, \{D^{\alpha} x_0(t)\}_{|\alpha|=0}^m \right) + \sum_{i=1}^k \int_{[0,1]^m} \frac{h_{k,i}[x(\tau)]}{\sigma_k[x(\tau)]} d_{\tau} f \left(t, \{D^{\alpha} \xi_i(t, \tau)\}_{|\alpha|=0}^m \right) + \\ + \sum_{i=0}^k \sum_{|\alpha|=0}^m \frac{\partial f \left(t, \{D^{\beta} x_i(t)\}_{|\beta|=0}^m \right)}{\partial (D^{\alpha} x_i(t))} D^{\alpha} \left\{ \frac{q_{k,i}(x(t))}{\sigma_k(x(t))} \sigma_k(x_i(t)) \right\}, \quad (18)$$

где, как и ранее, функция $\xi_i(t, \tau) = x_0(t) + \chi(\tau, t)(x_i(t) - x_0(t))$, а ее производная $D^{\alpha} \xi_i(t, \tau) = \frac{\partial^{|\alpha|} \xi_i(t_1, t_2, \dots, t_m, \tau)}{\partial t_1^{\alpha_1} \partial t_2^{\alpha_2} \dots \partial t_m^{\alpha_m}} \quad (i = 1, 2, \dots, k)$.

Для погрешности интерполирования $r_{k,1}(x) = F(x) - B_{k,1}(F; x)$ многочленом (18), как частного случая правила (14), справедливо следующее представление:

$$r_{k,1}(x) = \sum_{i=1}^{k+1} \int_{[0,1]^m} \left\{ \frac{h_{k+1,i}[x(\tau)]}{\sigma_{k+1}[x(\tau)]} - \frac{h_{k,i}[x(\tau)]}{\sigma_k[x(\tau)]} \right\} d_{\tau} f \left(t, \{D^{\alpha} \xi_i(t, \tau)\}_{|\alpha|=0}^m \right) + \\ + \sum_{i=0}^{k+1} \sum_{|\alpha|=0}^m \frac{\partial f \left(t, \{D^{\beta} x_i(t)\}_{|\beta|=0}^m \right)}{\partial (D^{\alpha} x_i(t))} D^{\alpha} \left\{ \frac{q_{k+1,i}(x(t))}{\sigma_{k+1}(x(t))} \sigma_{k+1}(x_i(t)) - \frac{q_{k,i}(x(t))}{\sigma_k(x(t))} \sigma_k(x_i(t)) \right\},$$

где $x_{k+1} = x$, $h_{k,k+1}(x) = q_{k,k+1}(x) \equiv 0$.

Частные случаи обобщенных формул Эрмита – Биркгофа. Если множество $N_{k,0} = \{(0,0)\}$, то $\sigma_k(x(t)) = H_{00}^{(k)}(x(t))$. В этом случае вторая группа слагаемых в правой части формул (7) и (13) будет отсутствовать и соответствующие интерполяционные многочлены $B_{k,n}(x)$ для оператора (1) примут одинаковый вид:

$$B_{k,n}(x) = f\left(t, \left\{D^\alpha x_0(t)\right\}_{|\alpha|=0}^m\right) + \sum_{(i,j) \in M_{k,n}} \sum_{v=1}^j \sum_{|\alpha|=0}^m a_{vj} \frac{\partial^v f\left(t, \left\{D^\beta x_i(t)\right\}_{|\beta|=0}^m\right)}{\partial x_i^{v-1}(t) \partial (D^\alpha x_i(t))} D^\alpha \left\{ \frac{H_{ij}^{(k)}(x(t)) H_{00}^{(k)}(x_i(t))}{H_{00}^{(k)}(x(t))} \right\}, \quad (19)$$

где x_0 – фиксированный узел, соответствующий ненулевому элементу ε_{00} матрицы $I_{k,n}$.

Рассмотрим частный случай формулы (19). В качестве чебышевской системы $\{\varphi_k(u)\}_{k=0}^2$ выберем экспоненциальную на $\mathbb{R}$ систему функций $\{e^u, e^{2u}, e^{3u}\}$, а в качестве D_j – операторы дифференцирования: $D_j \varphi(u) = \varphi^{(j)}(u)$ и, соответственно, $\tilde{D}_j F(x) = \delta^j F[x; h_1 h_2 \dots h_j]$, $j=1,2$. Пусть матрица

$$I_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда для многочлена Эрмита – Биркгофа вида (19), удовлетворяющего условиям

$$B_{1,2}(x_0) = F(x_0); \delta B_{1,2}[x_1; h_1] = \delta F[x_1; h_1], \delta^2 B_{1,2}[x_1; h_1 h_2] = \delta^2 F[x_1; h_1 h_2],$$

справедливо представление

$$B_{1,2}(x) = f\left(t, \left\{D^\alpha x_0(t)\right\}_{|\alpha|=0}^m\right) + \sum_{j=1}^2 \sum_{|\alpha|=0}^m \frac{\partial^j f\left(t, \left\{D^\beta x_1(t)\right\}_{|\beta|=0}^m\right)}{\partial x^{j-1}(t) \partial (D^\alpha x_1(t))} D^\alpha \left\{ \frac{H_{1j}^{(1)}(x(t)) H_{00}^{(1)}(x_1(t))}{H_{00}^{(1)}(x(t))} \right\},$$

где фундаментальные многочлены интерполирования $H_{00}^{(1)}(x)$, $H_{11}^{(1)}(x)$ и $H_{12}^{(1)}(x)$ задаются равенствами

$$\begin{aligned} H_{00}^{(1)}(x) &= K e^{x-x_0} (e^{2x} + 3e^{2x_1} - 3e^{x+x_1}), \\ H_{11}^{(1)}(x) &= \frac{K}{2} e^{x-2x_1} (e^x - e^{x_0}) (e^{x+x_0} + 9e^{2x_1} - 4e^{x_1} (e^x + e^{x_0})), \\ H_{12}^{(1)}(x) &= -\frac{K}{2} e^{x-2x_1} (e^x - e^{x_0}) (e^{x+x_0} + 3e^{2x_1} - 2e^{x_1} (e^x + e^{x_0})), \\ K &= (e^{2x_0} + 3e^{2x_1} - 3e^{x_0+x_1})^{-1}. \end{aligned}$$

Рассмотрим еще один частный случай формулы (19). В качестве чебышевской системы $\{\varphi_k(u)\}_{k=0}^2$ выберем тригонометрическую на $[0, 2\pi]$ систему функций $\{1, \sin u, \cos u\}$. Пусть и в этом случае $D_j \varphi(u) = \varphi^{(j)}(u)$, оператор $\tilde{D}_j F(x) = \delta^j F[x; h_1 h_2 \dots h_j]$ ($j=2,3$), а матрица

$$I_{1,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда для интерполяционного многочлена Эрмита – Биркгофа $B_{1,3}(x)$ вида (19), удовлетворяющего условиям

$$B_{1,3}(x_0) = F(x_0); \delta^2 B_{1,3}[x_1; h_1 h_2] = \delta^2 F[x_1; h_1 h_2], \delta^3 B_{1,3}[x_1; h_1 h_2 h_3] = \delta^3 F[x_1; h_1 h_2 h_3], \quad (20)$$

справедливо представление

$$\begin{aligned} B_{1,3}(x) &= F(x_0) + \sum_{j=2}^3 \delta^j F[x_1; H_{1j}^{(1)}(x)] = \\ &= f\left(t, \{D^\alpha x_0(t)\}_{|\alpha|=0}^m\right) + \sum_{j=2}^3 \sum_{|\alpha|=0}^m \frac{\partial^j f\left(t, \{D^\beta x_1(t)\}_{|\beta|=0}^m\right)}{\partial x^{j-1}(t) \partial (D^\alpha x_1(t))} D^\alpha H_{1j}^{(1)}(x(t)), \end{aligned} \quad (21)$$

где $H_{12}^{(1)}(x) = \cos(x_0 - x_1) - \cos(x - x_1)$, $H_{13}^{(1)}(x) = \sin(x_0 - x_1) - \sin(x - x_1)$.

П р и м е р 1. Рассмотрим дифференциальный оператор порядка m в частных производных

$$F(x) = \varphi(t) + a(t)x(t) + b(t)x^p(t) + \sum_{|\alpha|=1}^m c_\alpha(t)D^\alpha x(t), \quad (22)$$

где p – фиксированное целое неотрицательное число, а $\varphi(t), a(t), b(t), c_\alpha(t)$ – произвольно заданные функции переменной $t = (t_1, t_2, \dots, t_m)$. Для оператора (22) построим интерполяционный многочлен $B_{1,3}(x)$ вида (21).

Сначала вычислим дифференциалы Гато, входящие в формулу (21). Поскольку дифференциал первого порядка $\delta F[x; h_1] = \left\{ a(t) + pb(t)x^{p-1}(t) \right\} h_1(t) + \sum_{|\alpha|=1}^m c_\alpha(t)D^\alpha h_1(t)$, то дифференциалы

Гато второго и третьего порядка задаются формулами $\delta^2 F[x; h_1 h_2] = p(p-1)b(t)x^{p-2}(t)h_1(t)h_2(t)$ и $\delta^3 F[x; h_1 h_2 h_3] = p(p-1)(p-2)b(t)x^{p-3}(t)h_1(t)h_2(t)h_3(t)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} B_{1,3}(x) &= F(x_0) + \delta^2 F[x_1; H_{12}^{(1)}(x)] + \delta^3 F[x_1; H_{13}^{(1)}(x)] = \\ &= \varphi(t) + a(t)x_0(t) + b(t)x_0^p(t) + \sum_{|\alpha|=1}^m c_\alpha(t)D^\alpha x_0(t) + p(p-1)b(t)x_1^{p-2}(t)H_{12}^{(1)}(x(t)) + \\ &\quad + p(p-1)(p-2)b(t)x_1^{p-3}(t)H_{13}^{(1)}(x(t)). \end{aligned} \quad (23)$$

Проверим выполнение интерполяционных условий (20). Так как $H_{12}^{(1)}(x_0) = 0$ и $H_{13}^{(1)}(x_0) = 0$, то $B_{1,3}(x_0) = F(x_0)$. Далее, с учетом равенств $\left[H_{12}^{(1)}(x_1) \right]'' = 1$, $\left[H_{13}^{(1)}(x_1) \right]'' = 0$, $\left[H_{12}^{(1)}(x_1) \right]''' = 0$, $\left[H_{13}^{(1)}(x_1) \right]''' = 1$, получим, что для оператора (22) и интерполяционной формулы (23) выполняются равенства

$$\delta^2 B_{1,3}[x_1; h_1 h_2] = \left\{ p(p-1)b(t)x_1^{p-2}(t) \right\} h_1(t)h_2(t) \equiv \delta^2 F[x_1; h_1 h_2],$$

$$\delta^3 B_{1,3}[x_1; h_1 h_2 h_3] = \left\{ p(p-1)(p-2)b(t)x_1^{p-3}(t) \right\} h_1(t)h_2(t)h_3(t) \equiv \delta^3 F[x_1; h_1 h_2 h_3].$$

Таким образом, для оператора $B_{1,3}(x)$ вида (23) справедливы интерполяционные условия (20).

Пусть далее $I_{k,k}$ – квадратная диагональная матрица размерности $(k+1) \times (k+1)$ и рассматривается интерполяционная задача Абеля – Гончарова. В этом частном случае интерполяционной задачи Эрмита – Биркгофа множество $N_{k,0}$ состоит из нулевой пары $(0,0)$, множество $M_{k,k}$ – из элементов (q,q) ($q = 1, 2, \dots, k$), сумма $\sigma_k(x(t)) = H_{00}^{(k)}(x(t))$ и формула (19) принимает вид

$$B_{k,k}(x) = f\left(t, \left\{D^\alpha x_0(t)\right\}_{|\alpha|=0}^m\right) + \\ + \sum_{q=1}^k \sum_{v=1}^q \sum_{|\alpha|=0}^m a_{vq} \frac{\partial^v f\left(t, \left\{D^\beta x_q(t)\right\}_{|\beta|=0}^m\right)}{\partial x_q^{v-1}(t) \partial (D^\alpha x_q(t))} D^\alpha \left\{ \frac{H_{qq}^{(k)}(x(t)) H_{00}^{(k)}(x_q(t))}{H_{00}^{(k)}(x(t))} \right\}. \quad (24)$$

Здесь функции $H_{qq}^{(k)}(t)$ ($q = 0, 1, \dots, k$) – фундаментальные интерполяционные многочлены, соответствующие задаче Абеля – Гончарова для случая произвольной чебышевской системы функций, для которых выполняются условия $D_j H_{qq}^{(k)}(t_j) = \delta_{qj}$ ($q, j = 0, 1, \dots, k$).

Операторный многочлен $B_{k,k}(x)$ вида (24) удовлетворяет интерполяционным условиям

$$B_{k,k}(x_0) = F(x_0); \quad \tilde{D}_q B_{k,k}(x_q) = \tilde{D}_q F(x_q), \quad q = 1, 2, \dots, k.$$

Для погрешности $r_{k,k}(x) = F(x) - B_{k,k}(x)$, где $B_{k,k}(x)$ – интерполяционный полином вида (24), имеет место представление

$$r_{k,k}(x) = \tilde{D}_{k+1} F[x; H_{k+1,k+1}^{(k+1)}(x)] = \sum_{v=1}^{k+1} \sum_{|\alpha|=0}^m a_{vj} \frac{\partial^v f\left(t, \left\{D^\beta x(t)\right\}_{|\beta|=0}^m\right)}{\partial x^{v-1}(t) \partial (D^\alpha x(t))} D^\alpha H_{k+1,k+1}^{(k+1)}(x(t)).$$

Через $\tilde{D}_{k+1} F[x; h]$, как и ранее, обозначен оператор вида (2), когда направления $h_v(t) \equiv 1$ для $v = 1, 2, \dots, k$, а $h_{k+1}(t) = h(t)$.

Если $D_j \varphi(t) = \varphi^{(j)}(t)$, а $\tilde{D}_j F(x) = \delta^j F[x; h_1 h_2 \dots h_j]$, $j = 1, 2, \dots, k$, то интерполяционная формула (24) примет вид

$$B_{k,k}(x) = f\left(t, \left\{D^\alpha x_0(t)\right\}_{|\alpha|=0}^m\right) + \\ + \sum_{q=1}^k \sum_{|\alpha|=0}^m \frac{\partial^q f\left(t, \left\{D^\beta x_q(t)\right\}_{|\beta|=0}^m\right)}{\partial x_q^{q-1}(t) \partial (D^\alpha x_q(t))} D^\alpha \left\{ \frac{H_{qq}^{(k)}(x(t)) H_{00}^{(k)}(x_q(t))}{H_{00}^{(k)}(x(t))} \right\}. \quad (25)$$

Операторный многочлен $B_{k,k}(x)$, заданный формулой (25), удовлетворяет интерполяционным условиям

$$B_{k,k}(x_0) = F(x_0), \quad \delta^q B_{k,k}[x_q; h_1 h_2 \dots h_q] = \delta^q F[x_q; h_1 h_2 \dots h_q], \quad q = 1, 2, \dots, k. \quad (26)$$

Для погрешности $r_{k,k}(x) = F(x) - B_{k,k}(x)$, где $B_{k,k}(x)$ – интерполяционный полином вида (25), справедливо представление

$$r_{k,k}(x) = \delta^{k+1} F[x; H_{k+1,k+1}^{(k+1)}(x)] = \sum_{|\alpha|=0}^m \frac{\partial^{k+1} f\left(t, \{D^\beta x(t)\}_{|\beta|=0}^m\right)}{\partial x^k(t) \partial (D^\alpha x(t))} D^\alpha H_{k+1,k+1}^{(k+1)}(x(t)).$$

Здесь, как и ранее, $\delta^{k+1} F[x; h]$ означает, что направления $h_v(t) \equiv 1$ для $v = 1, 2, \dots, k$, а $h_{k+1}(t) = h(t)$.

Отметим, что явный вид алгебраических фундаментальных многочленов $H_{qq}^{(k)}(t)$, удовлетворяющих условиям $D_j H_{qq}^{(k)}(t_j) = \delta_{qj}$ ($q, j = 0, 1, \dots, k$), приведен в монографии [4], в которой достаточно полно исследована задача Абеля – Гончарова для функций скалярного аргумента.

П р и м е р 2. Построим интерполяционный многочлен $B_{k,k}(x)$ вида (25), как и раньше, для дифференциального оператора порядка m в частных производных, заданного формулой (22). Для этого вычислим дифференциалы Гато порядка $q = 2, 3, \dots, k$ рассматриваемого оператора. Так как

$$\delta F[x_1; H_{11}^{(k)}] = \{a(t) + pb(t)x_1^{p-1}(t)\} H_{11}^{(k)}(x(t)) + \sum_{|\alpha|=1}^m c_\alpha(t) D^\alpha H_{11}^{(k)}(x(t)),$$

$$\delta^2 F[x_2; H_{22}^{(k)}] = p(p-1)b(t)x_2^{p-2}(t)H_{22}^{(k)}(x(t)),$$

$$\delta^3 F[x_3; H_{33}^{(k)}] = p(p-1)(p-2)b(t)x_3^{p-3}(t)H_{33}^{(k)}(x(t)),$$

то, очевидно, что

$$\delta^q F[x_q; H_{qq}^{(k)}(x)] = \frac{p!}{(p-q)!} b(t)x_q^{p-q}(t)H_{qq}^{(k)}(x(t)) \quad (q = 2, 3, \dots, k).$$

Следовательно, формула (25) для оператора (22) примет вид

$$\begin{aligned} B_{k,k}(x) = F(x_0) + \sum_{q=1}^k \delta^q F[x_q; H_{qq}^{(k)}(x)] = & \varphi(t) + a(t)x_0(t) + b(t)x_0^p(t) + \sum_{|\alpha|=1}^m c_\alpha(t) D^\alpha x_0(t) + \\ & + a(t)H_{11}^{(k)}(x(t)) + \sum_{|\alpha|=1}^m c_\alpha(t) D^\alpha H_{11}^{(k)}(x(t)) + \frac{p!}{(p-q)!} b(t) \sum_{q=1}^k x_q^{p-q}(t) H_{qq}^{(k)}(x(t)). \end{aligned} \quad (27)$$

Проверим выполнение интерполяционных условий (26). Так как $H_{qq}^{(k)}(x_0) = 0$ при всех $q = 1, 2, \dots, k$, то $B_{1,3}(x_0) = F(x_0)$. Далее, с учетом равенств $[H_{qq}^{(k)}(t_j)]^{(j)} = \delta_{qj}$ ($q, j = 0, 1, \dots, k$), получим, что

$$\delta B_{k,k}[x_1; h_1] = \{a(t) + pb(t)x_1^{p-1}(t)\} h_1(x(t)) + \sum_{|\alpha|=1}^m c_\alpha(t) D^\alpha h_1(x(t)) \equiv \delta F[x_1; h_1],$$

$$\delta^q B_{k,k}[x_q; h_1 h_2 \dots h_q] = \frac{p!}{(p-q)!} b(t)x_q^{p-q}(t)h_1(x(t))h_2(x(t))\dots h_q(x(t)) \equiv \delta^q F[x_q; h_1 h_2 \dots h_q], \quad q = 2, 3, \dots, k.$$

Итак, для оператора $B_{k,k}(x)$ вида (27) справедливы интерполяционные условия (26).

В заключение отметим, что результаты, полученные в работе, могут быть использованы в качестве основы для построения приближенных методов решения некоторых нелинейных операторно-дифференциальных уравнений с частными производными, встречающихся в том числе

в различных областях математической физики. Ряд интерполяционных формул, представляющих решение задачи Лагранжа и Эрмита с узлами второй кратности, а также обобщенной проблемы Эрмита – Биркгофа, для нелинейных обыкновенных дифференциальных операторов приведен в работах [2, 5]. Статьи [6–11] посвящены построению интерполяционных многочленов Эрмита – Биркгофа различной структуры для операторов в функциональных пространствах. Исследование регулярности интерполирования типа Эрмита – Биркгофа, различные постановки этой задачи и некоторые ее применения имеются в монографии [12] и работах [13, 14]. Достаточно полная теория операторного интерполирования изложена в [15, 16].

Список использованных источников

1. Янович, Л. А. Обобщенная интерполяционная задача Эрмита – Биркгофа для операторов / Л. А. Янович, М. В. Игнатенко // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений: сб. науч. тр. 5-й междунар. конф. – Минск, Ин-т математики НАН Беларуси, 2010. – Т. 1. – С. 140–147.
2. Янович, Л. А. К теории интерполирования Эрмита – Биркгофа нелинейных обыкновенных дифференциальных операторов / Л. А. Янович, М. В. Игнатенко // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2017. – № 2. – С. 7–23.
3. Игнатенко, М. В. К теории интерполирования дифференциальных операторов произвольного порядка в частных производных / М. В. Игнатенко // Тр. Ин-та математики Нац. акад. наук Беларуси. – 2017. – Т. 25, № 2. – С. 11–20.
4. Евграфов, М. А. Интерполяционная задача Абеля – Гончарова / М. А. Евграфов. – М.: ГИТТЛ, 1954. – 128 с.
5. Янович, Л. А. Об одном классе интерполяционных многочленов для нелинейных обыкновенных дифференциальных операторов / Л. А. Янович, М. В. Игнатенко // Мат. моделирование. – 2014. – Т. 26, № 11. – С. 90–96.
6. Янович, Л. А. Обобщенная интерполяционная задача Абеля – Гончарова / Л. А. Янович, В. В. Дорошко // Вестн. фонда фундам. исслед. – 1999. – № 4. – С. 34–44.
7. Янович, Л. А. Формулы операторного интерполирования, основанные на интерполяционных многочленах для числовых функций / Л. А. Янович, В. В. Дорошко // Вычислительная математика и математические проблемы механики: тр. Укр. мат. конгресса. – Киев, 2002. – С. 137–145.
8. Янович, Л. А. Об одном классе формул операторного интерполирования Эрмита – Биркгофа в пространстве дифференцируемых функций / Л. А. Янович, М. В. Игнатенко // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2005. – № 2. – С. 11–16.
9. Янович, Л. А. Интерполяционные операторные многочлены Эрмита – Биркгофа в пространстве гладких функций / Л. А. Янович, М. В. Игнатенко // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2009. – Т. 53, № 5. – С. 15–21.
10. Янович, Л. А. Специальный случай интерполяционной задачи Эрмита – Биркгофа для операторов в пространстве гладких функций / Л. А. Янович, М. В. Игнатенко // Актуальные проблемы анализа: сб. науч. тр. – Гродно: ГрГУ, 2009. – С. 198–215.
11. Худяков, А. П. Интерполяционные формулы Эрмита – Биркгофа относительно алгебраической и тригонометрической систем функций с одним специальным узлом / А. П. Худяков, А. А. Трофимук // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2017. – № 1. – С. 14–28.
12. Shi, Y. G. Theory of Birkhoff Interpolation / Y. G. Shi. – New York: Nova Science Publishers, 2003. – 253 p.
13. Nazarzadeh, A. Another case of incidence matrix for bivariate Birkhoff interpolation / A. Nazarzadeh, Kh. Rahsepar Fard, A. Mahmoodi // J. Numerical & Applied Mathematics. – 2016. – № 2 (122). – P. 55–70.
14. Zhao, T. G. On Two Birkhoff-Type Interpolations with First- and Second-Order Derivative / T. G. Zhao, Y. J. Li // J. Appl. Math. Phys. – 2016. – Vol. 4, № 7. – P. 1269–1274. <https://doi.org/10.4236/jamp.2016.47133>
15. Makarov, V. L. Methods of Operator Interpolation / V. L. Makarov, V. V. Khlobystov, L. A. Yanovich. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2010. – 516 с. – (Праці Ін-ту математики НАН України. – Vol. 83: Математика та її застосування).
16. Янович, Л. А. Основы теории интерполирования функций матричных переменных / Л. А. Янович, М. В. Игнатенко. – Минск: Беларус. навука, 2016. – 281 с.

References

1. Yanovich L. A., Ignatenko M. V. Generalized interpolation problem of Hermite – Birkhoff for operators. *Analitycheskie metody analiza i differentsial'nykh uravnenii: Sbornik nauchnykh trudov 5-i mezhdunarodnoi konferentsii* [Analytical methods of analysis and differential equations]: Collection of Scientific Papers of the 5-th International Conference]. Minsk, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, 2010, vol. 1, pp. 140–147 (in Russian).
2. Yanovich L. A., Ignatenko M. V. On the theory of Hermite – Birkhoff interpolation of nonlinear ordinary differential operators. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navyk* = *Proceeding of the National Academy of Sciences of Belarus, Physics and Mathematics Series*, 2017, no. 2, pp. 7–23 (in Russian).
3. Ignatenko M. V. To the interpolation theory of arbitrary order partial differential operators. *Trudy Instituta matematiki Natsional'noy akademii nauk Belarusi* = *Proceeding of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2017, vol. 25, no. 2, pp. 11–20 (in Russian).

4. Evgrafov M. A. *Abel – Goncharov interpolation problem*. Moscow, State Publishing House of Technical and Theretical Literature, 1954. 127 p. (in Russian).
5. Yanovich L. A., Ignatenko M. V. On a class of interpolation polynomials for nonlinear ordinary differential operators. *Matematicheskoe Modelirovanie = Mathematical Models and Computer Simulations*, 2014, vol. 26, no. 11, pp. 90–96.
6. Yanovich L. A., Doroshko V. V. Generalized interpolation problem of Abel – Goncharov. *Vestnik fonda fundamental'nykh issledovaniy = Vestnik of the Foundation for Fundamental Research*, 1999, vol. 4, pp. 34–44 (in Russian).
7. Yanovich L. A., Doroshko V. V. Formulas of operator interpolation based on interpolation polynomials for scalar functions. *Vychislitel'naya matematika i matematicheskie problemy mekhaniki: Trudy Ukrainskogo matematicheskogo kongressa* [Computational Mathematics and Mathematical Problems in Mechanics: Proceedings of the Ukrainian Mathematical Congress]. Kiev, 2002, pp. 137–145 (in Russian).
8. Yanovich L. A., Ignatenko M. V. On a class of Hermite-Birkhoff operator interpolation formulas in the space of differentiable functions. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navyk = Proceeding of the National Academy of Sciences of Belarus, Physics and Mathematics Series*, 2005, no. 2, pp. 11–16 (in Russian).
9. Yanovich L. A., Ignatenko M. V. Interpolation operator polynomials of Hermite – Birkhoff in the space of smooth functions. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2009, vol. 53, no. 5, pp. 15–21 (in Russian).
10. Yanovich L. A., Ignatenko M. V. A special case of the Hermite-Birkhoff interpolation problem for operators in the space of smooth functions. *Aktual'nyye problemy analiza. Sbornik nauchnykh trudov* [Actual problems of analysis. Collection of Scientific Papers]. Grodno, Grodno State University, 2009, pp. 198–215 (in Russian).
11. Khudyakov A. P., Trofimuk A. A. The Hermite-Birkhoff interpolation formulas for algebraic and trigonometric systems of functions with one special node. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navyk = Proceeding of the National Academy of Sciences of Belarus, Physics and Mathematics Series*, 2017, no. 1, pp. 14–28 (in Russian).
12. Shi Y. G. *Theory of Birkhoff Interpolation*. New York, Nova Science Publishers, 2003. 253 p.
13. Nazarzadeh A., Rahsepar Fard Kh., Mahmoodi A. Another case of incidence matrix for bivariate Birkhoff interpolation. *Zhurnal obchislyuval'noi ta prikladnoi matematiki = Journal of Numerical & Applied Mathematics*, 2016, no. 2 (122), pp. 55–70.
14. Zhao T. G., Li Y. J. On Two Birkhoff-Type Interpolations with First- and Second-Order Derivative. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 2016, vol. 4, no. 7, pp. 1269–1274. <https://doi.org/10.4236/jamp.2016.47133>
15. Makarov V. L., Khloubystov V. V., Yanovich L. A. Methods of Operator Interpolation. *Proceedings of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine. Vol. 83: Mathematics and its applications*. Kiev, 2010. 516 p.
16. Yanovich L. A., Ignatenko M. V. *Bases of the theory of interpolation of functions of matrix variables*. Minsk, Belarusian science, 2016. 281 p. (in Russian).

Информация об авторах

Игнатенко Марина Викторовна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: ignatenkomv@bsu.by. <https://orcid.org/0000-0002-8029-1842>

Янович Леонид Александрович – член-корреспондент, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: yanovich@im.bas-net.by

Information about the authors

Marina V. Ignatenko – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Associate Professor of Web-Technologies and Computer Simulation Department, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: ignatenkomv@bsu.by. <https://orcid.org/0000-0002-8029-1842>

Leonid A. Yanovich – Corresponding Member, D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Chief Researcher, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: yanovich@im.bas-net.by

ISSN 1561-2430 (Print)
 ISSN 2524-2415 (Online)
 УДК 512.643.4

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-2-164-178>

Поступила в редакцию 11.03.2017

Received 11.03.2017

К. Л. Якуто

Витебский государственный университет им. П. М. Машерова, Витебск, Беларусь

О ЦЕЛОМ ПОЛОЖИТЕЛЬНОМ РЕШЕНИИ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ $X^n = A$ ДЛЯ МАТРИЦ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА В СЛУЧАЕ НАТУРАЛЬНЫХ n

Аннотация. Цель данной работы – исследовать возможность использования аналитических методов для нахождения целых положительных решений нелинейных матричных уравнений вида $X^n = A$, где A, X – матрицы третьего порядка, n – натуральное число. Элементы исходной матрицы A являются целыми положительными числами. Решаемое уравнение записывалось в виде системы, состоящей из девяти нелинейных уравнений, которая затем решалась аналитическими методами. Предложенная методика решения поставленной задачи предполагает нахождение внедиагональных элементов в общем случае для каждой возможной комбинации диагональных элементов матрицы X (если необходимо найти матрицу-корень X , диагональные элементы которой не являются нулевыми). Задача решалась в два этапа. Первый предусматривал нахождение произведений пар, симметричных относительно главной диагонали элементов. На втором этапе для каждой пары внедиагональных элементов матрицы X составлялась система уравнений, которая включала в себя два соответствующих уравнения для внедиагональных элементов исходной матрицы и уравнение, представляющее собой произведение вычисляемых элементов матрицы X . Решая полученные таким образом системы для всех трех пар внедиагональных элементов матрицы X , можно найти последние. Если все рассчитанные внедиагональные элементы представляют собой натуральные числа, то исходная матрица A имеет натуральную матрицу-корень X . В ходе проведенного исследования соблюдался принцип от простого к сложному, от частного к общему. В связи с этим в данной статье представлена лишь часть полученных результатов: рассматриваются только решения вида

$$X = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ d & 0 & f \\ g & h & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & 0 & f \\ g & h & 0 \end{pmatrix}.$$

Было показано, что для решения задачи по нахождению целых положительных решений матричного уравнения $X^n = A$ для матриц третьего порядка в случае натуральных n можно использовать аналитические методы. Методику, представленную в статье, можно применять и для нахождения натуральных корней матриц третьего порядка и при больших n .

Ключевые слова: нелинейное матричное уравнение, аналитические методы, система нелинейных алгебраических уравнений, натуральные корни уравнения, диагональные элементы матрицы, внедиагональные элементы матрицы

Для цитирования. Якуто, К. Л. О целом положительном решении матричного уравнения $X^n = A$ для матриц третьего порядка в случае натуральных n / К. Л. Якуто // Вест. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2018. – Т. 54, № 2. – С. 164–178. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-2-164-178>

K. L. Yakuto

Vitebsk State University named after P. M. Masherov, Vitebsk, Belarus

POSITIVE INTEGER SOLUTION OF THE MATRIX EQUATION $X^n = A$ FOR THIRD-ORDER MATRICES IN THE CASE OF POSITIVE INTEGERS n

Abstract. The problem of the positive integer solution of the equation $X^n = A$ for different-order matrices is important to solve a large range of problems related to the modeling of economic and social processes. The need to solve similar problems also arises in areas such as management theory, dynamic programming technique for solving some differential equations. In this connection, it is interesting to question the existence of positive and positive integer solutions of the nonlinear equations of the form $X^n = A$ for different-order matrices in the case of the positive integer n . The purpose of this work is to explore the possibility of using analytical methods to obtain positive integer solutions of nonlinear matrix equations of the form $X^n = A$ where A, X are the third-order matrices, n is the positive integer. Elements of the original matrix A are integer and positive numbers. The present study found that when the root of the n th degree of the third-order matrix will have zero diagonal elements and nonzero and positive off-diagonal elements, the root of the n th degree of the third-order matrix will have two zero diagonal elements and nonzero positive off-diagonal elements. It was shown that to solve the problem of finding positive integer solutions of the matrix equation for third-order matrices in the case of the positive integer n , the analytical techniques can

be used. The article presents the formulas that allow one to find the roots of positive integer matrices for $n = 3, \dots, 5$. However, the methodology described in the article can be adopted to find the natural roots of the third-order matrices for large n .

Keywords: nonlinear matrix equation, analytical methods, nonlinear algebraic equations system, natural roots, matrix diagonal elements, matrix off-diagonal elements

For citation. Yakuto K. L. Positive integer solution of the matrix equation $X^n = A$ for third-order matrices in the case of positive integers n . *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, vol. 54, no. 2, pp. 164–178 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-2-164-178>

Введение. Важное значение для решения широкого круга проблем, связанных с моделированием экономических, социальных процессов, имеет задача о нахождении целого положительно-го решения уравнения $X^n = A$ для матриц различных порядков [1, с. 189]. Необходимость решать подобные задачи также возникает в таких областях, как теория управления, динамическое программирование, методика решения некоторых дифференциальных уравнений. В связи с этим представляет интерес вопрос о наличии положительных и целых положительных решений нелинейного матричного уравнения вида $X^n = A$ для матриц различных порядков в случае целых положительных n .

К настоящему моменту разработано несколько алгоритмов для нахождения решений нелинейных матричных уравнений. Основными итерационными методами являются метод Ньютона [2] и метод Шура [3], но они имеют ряд недостатков, среди которых проблема выбора начального приближения, проблема сходимости и скорости сходимости итерационного процесса к решению. Кроме того, нелинейные матричные уравнения можно решать, используя метод разложения Жордана [4] и метод интерполяционных полиномов [5]. Однако особенностью данных подходов в условиях решаемой задачи является тот факт, что в результате решения мы получаем все возможные значения матрицы X , неоправданно тратя на это время. Предлагаемый нами метод не имеет указанных выше недостатков.

Целью настоящей работы является доказательство эффективности использования аналитических методов для решения задачи по нахождению целых положительных решений нелинейного матричного уравнения $X^n = A$ для матриц третьего порядка в случае целых положительных n .

Материал и методы. Изучались нелинейные матричные уравнения вида $X^n = A$, где A , X – матрицы третьего порядка, n – натуральное число. Элементы исходной матрицы A являются целыми и положительными числами. Методика проводимого исследования была подобна подходу, предложенному в [6, 7]: решаемое уравнение записывалось в виде системы, состоящей из девяти нелинейных уравнений, которая затем решалась аналитическими методами. В процессе проведения исследования использовался пакет символьной математики Maple 15.

Результаты и их обсуждение. Пусть в общем случае

$$X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} K & L & M \\ N & P & Q \\ R & S & T \end{pmatrix}.$$

Пусть необходимо выяснить, когда корень n -й степени матрицы третьего порядка будет иметь нулевые диагональные и отличные от нуля внедиагональные элементы, т. е.

$$\begin{pmatrix} 0 & b & c \\ d & 0 & f \\ g & h & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} K & L & M \\ N & P & Q \\ R & S & T \end{pmatrix}.$$

Л е м м а 1. Чтобы найти целый положительный корень рассматриваемого вида уравнения $X^4 = A$ или показать, что таковой отсутствует, необходимо оценить возможные значения $\gamma = fh: 1 \leq \gamma \leq \sqrt{P-5}$, затем для каждого возможного значения γ найти значения переменных

$$\alpha = bd = \frac{4\gamma^2(P-T) + (-K+P+T)(-K+P+T-2\gamma^2)}{4\gamma(-K+P+T)},$$

$$\beta = cg = \frac{-4\gamma^2(P-T) + (-K+P+T)(-K+P+T-2\gamma^2)}{4\gamma(-K+P+T)},$$

$$C = LN + \beta\gamma(\alpha^2 - (2\alpha + \beta + \gamma)^2), \quad B = MR + \alpha\gamma(\beta^2 - (\alpha + 2\beta + \gamma)^2), \quad E = QS + \alpha\beta(\gamma^2 - (\alpha + \beta + 2\gamma)^2).$$

После этого, разрешив уравнения $\frac{L\alpha^2\gamma}{x} + N\beta x = C$, $\frac{R\alpha\gamma}{y} + M\beta^2 y = B$, $\frac{S\beta}{z} + Q\alpha\gamma^2 z = E$ относительно переменных x, y, z соответственно, найти значения переменных b, c, f , используя формулы $b = \sqrt[4]{\frac{x^3 z}{y}}$, $c = \sqrt[4]{\frac{x}{y^3 z}}$, $f = \sqrt[4]{\frac{1}{xyz^3}}$, и значения переменных d, g, h , используя формулы $d = \frac{\alpha}{b}$, $g = \frac{\beta}{c}$, $h = \frac{\gamma}{f}$. Если в результате вычислений все внедиагональные элементы матрицы X будут представлять собой целые положительные числа, то уравнение $X^4 = A$ имеет целый положительный корень, иначе такой корень отсутствует. Если установлено, что существует несколько целых положительных вариантов матрицы X , то рассматриваемое матричное уравнение имеет столько же целых положительных решений.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В рассматриваемом случае система уравнений будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} b^2 d^2 + 2bcdg + bdfh + cfgh + c^2 g^2 = K, \\ 2bcdh + b^2 fg + c^2 gh + cfh^2 = L, \\ 2bcfg + c^2 dh + b^2 df + bf^2 h = M, \\ 2bdfg + cd^2 h + cfg^2 + f^2 gh = N, \\ b^2 d^2 + 2bdfh + bcdg + cfgh + f^2 h^2 = P, \\ 2cdfh + bcd^2 + c^2 dg + bf^2 g = Q, \\ 2cdgh + bd^2 h + dfh^2 + bfg^2 = R, \\ 2bfgh + b^2 dg + bcg^2 + cdh^2 = S, \\ c^2 g^2 + 2cgfh + bcdg + bdfh + f^2 h^2 = T. \end{cases} \quad (1)$$

Рассмотрим 1-е, 5-е и 9-е уравнения системы (1):

$$\begin{cases} b^2 d^2 + 2bcdg + bdfh + cfgh + c^2 g^2 = K, \\ b^2 d^2 + 2bdfh + bcdg + cfgh + f^2 h^2 = P, \\ c^2 g^2 + 2cgfh + bcdg + bdfh + f^2 h^2 = T. \end{cases} \quad (2)$$

Решая систему (2), можно найти переменные α и β , которые в данном случае будут зависеть от переменной γ :

$$\alpha = \frac{4\gamma^2(P-T) + (-K+P+T)(-K+P+T-2\gamma^2)}{4\gamma(-K+P+T)},$$

$$\beta = \frac{-4\gamma^2(P-T) + (-K+P+T)(-K+P+T-2\gamma^2)}{4\gamma(-K+P+T)}.$$

Оценка для γ имеет вид $1 \leq \gamma \leq \sqrt{P-5}$.

Таким образом, произведения всех пар, симметричных относительно главной диагонали элементов, считаем известными. Перепишем 2-е и 4-е уравнения системы (1) в следующем виде:

$$\begin{cases} ch(2bd + cg + fh) = L - b^2 fg, \\ fg(2bd + cg + fh) = N - cd^2 h. \end{cases} \quad (3)$$

Перемножив уравнения системы (3), получим

$$Lcd^2 h + Nb^2 gh = C, \quad (4)$$

где $C = LN + \beta\gamma(\alpha^2 - (2\alpha + \beta + \gamma)^2)$.

Перепишем 3-е и 7-е уравнения системы (1) в следующем виде:

$$\begin{cases} bf(bd + 2cg + fh) = M - c^2 dh, \\ dh(bd + 2cg + fh) = R - bfg^2. \end{cases} \quad (5)$$

Перемножив уравнения системы (5), получим

$$Rc^2 dh + Mbfg^2 = B, \quad (6)$$

где $B = MR + \alpha\gamma(\beta^2 - (\alpha + 2\beta + \gamma)^2)$.

Перепишем 6-е и 8-е уравнения системы (1) в следующем виде:

$$\begin{cases} cd(bd + cg + 2fh) = Q - bfg^2, \\ bg(bd + cg + 2fh) = S - cdh^2. \end{cases} \quad (7)$$

Перемножив уравнения системы (7), получим

$$Qcdh^2 + Sbf^2 g = E, \quad (8)$$

где $E = QS + \alpha\beta(\gamma^2 - (\alpha + \beta + 2\gamma)^2)$.

Поскольку α, β, γ считаем известными, то C, B, E также можем считать известными.

Таким образом, имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} Lcd^2 h + Nb^2 gh = C, \\ Rc^2 dh + Mbfg^2 = B, \\ Qcdh^2 + Sbf^2 g = E, \\ bd = \alpha, \\ cg = \beta, \\ fh = \gamma. \end{cases} \quad (9)$$

Выразив переменные d, g, h из трех последних уравнений системы (9) и подставив полученные значения в первые три уравнения, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{L\alpha^2\gamma}{x} + N\beta x = C, \\ \frac{R\alpha\gamma}{y} + M\beta^2 y = B, \\ \frac{S\beta}{z} + Q\alpha\gamma^2 z = E, \end{cases} \quad (10)$$

где $x = \frac{b^2 f}{c}$, $y = \frac{bf}{c^2}$, $z = \frac{c}{bf^2}$.

Зная x, y, z , можно найти переменные b, c, f :

$$b = \sqrt[4]{\frac{x^3 z}{y}}, \quad c = \sqrt[4]{\frac{x}{y^3 z}}, \quad f = \sqrt[4]{\frac{1}{xyz^3}}.$$

Т е о р е м а 1. *Необходимым условием существования корня четвертой степени с нулевыми диагональными и целыми положительными внедиагональными элементами у матрицы A является существование хотя бы одного общего делителя у диагональных элементов матрицы A .*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Перепишем систему уравнений (2) в следующем виде:

$$\begin{cases} (\alpha + \beta)(\alpha + \beta + \gamma) = K, \\ (\alpha + \gamma)(\alpha + \beta + \gamma) = P, \\ (\beta + \gamma)(\alpha + \beta + \gamma) = T. \end{cases} \quad (2')$$

Из системы (2') следует, что диагональные элементы матрицы A имеют общий делитель. Поскольку необходимым условием существования корня четвертой степени с нулевыми диагональными и целыми положительными внедиагональными элементами у матрицы A является целочисленность и положительность всех элементов тройки (α, β, γ) , то общий делитель является натуральным числом.

А л г о р и т м 1. Нахождение корня (корней) четвертой степени с нулевыми диагональными и целыми положительными внедиагональными элементами у матрицы A , если такой корень (или корни) существует (существуют).

Шаг 1. Выяснить, имеют ли диагональные элементы матрицы A хотя бы один общий делитель. Если такой делитель отсутствует, то матрица A не имеет ни одного корня четвертой степени рассматриваемого вида. Если такой делитель (делители) существует (существуют), то перейти к шагу 2.

Шаг 2. Используя приведенную в лемме 1 оценку, определить возможные значения переменной γ .

Шаг 3. Найти для каждого возможного значения γ значения переменных α и β . Если у всех троек (α, β, γ) хотя бы одна из переменных не является натуральным числом, то матрица A не имеет ни одного корня четвертой степени рассматриваемого вида. Если все переменные хотя бы одной из троек являются натуральными числами, то необходимо перейти к шагу 4.

Шаг 4. Для всех троек, все переменные которых являются натуральными числами, необходимо найти переменные C, B, E по формулам, представленным в лемме 1.

Шаг 5. Разрешив систему (10), найти переменные $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$.

Шаг 6. По формулам связи троек (x, y, z) и (b, c, f) найти переменные b, c, f . Зная соответствующие тройке (x, y, z) произведения, найти переменные d, g, h . Если все переменные, являю-

щиея элементами матрицы X , представляют собой целые положительные числа, то система уравнений (1) разрешима в целых положительных числах, иначе можно сделать вывод, что матрица A не имеет ни одного корня четвертой степени рассматриваемого вида.

П р и м е р. Пусть матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 88 & 35 & 59 \\ 125 & 55 & 83 \\ 61 & 46 & 99 \end{pmatrix}.$$

Оценка для γ имеет вид $1 \leq \gamma \leq 7$. Используя формулы связи переменных α и γ , а также β и γ , получим, что лишь в случае, когда $\gamma = 3$, имеет место тройка $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 6, 3)$. При всех других значениях переменной γ переменные α и β не представляют собой натуральные числа. Следовательно, в дальнейшем проводить расчеты необходимо только с данными значениями переменных α, β, γ . Далее для решения системы уравнений (10) необходимо вычислить C, B, E . В рассматриваемом примере для тройки $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 6, 3)$, $C = 1405$, $B = 2081$, $E = 1574$. Решая 1-е уравнение системы (10), получим $x_1 = 1,5$; $x_2 = 0,37(3)$. Решая 2-е уравнение системы (10), получим $y_1 = 0,75$, $y_2 = 0,23$. Решая 3-е уравнение системы (10), получим $z_1 = 0,83$, $z_2 = 0,2(2)$. Вычислив значения переменных b, c, f для тройки (x_1, y_1, z_1) , получим $b = 1$, $c = 2$, $f = 3$. Исходя из того, что произведения всех трех пар диагональных элементов матрицы X , симметричных относительно главной диагонали, известны, можно найти значения переменных d, g, h : $b = 2$, $g = 3$, $h = 1$. Таким образом, искомая матрица X имеет вид

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Л е м м а 2. Чтобы найти целый положительный корень рассматриваемого вида уравнения $X^5 = A$ или показать, что таковой отсутствует, необходимо оценить возможные значения $\gamma = fh: 1 \leq \gamma \leq \sqrt{M-10}$, затем для каждого возможного значения γ найти значения переменных

$$\begin{aligned} \alpha = bd &= \frac{\gamma(2KP - 3PT + 2P^2)}{-3KP + 2PT + 2P^2}, \quad \beta = cg = \frac{\gamma(2KP + 2PT - 3P^2)}{-3KP + 2PT + 2P^2}, \\ C &= LN + \alpha(\beta^2\gamma^2 - (\alpha^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 3\beta\gamma + \beta^2 + \gamma^2)^2), \\ B &= MR + \beta(\alpha^2\gamma^2 - (\beta^2 + 2\beta\gamma + 2\alpha\beta + 3\alpha\gamma + \alpha^2 + \gamma^2)^2), \\ E &= QS + \gamma(\alpha^2\beta^2 - (\gamma^2 + 2\beta\gamma + 2\alpha\gamma + 3\alpha\beta + \alpha^2 + \beta^2)^2). \end{aligned}$$

После этого, разрешив уравнения

$$\frac{M\alpha^2\gamma^2}{y} + R\beta y = B, \quad \frac{L\beta^2}{x} + N\alpha\gamma^2 x = C, \quad \frac{S\alpha^2\gamma}{z} + Q\beta^2 z = E$$

относительно переменных x, y, z соответственно, найти значения переменных b, c, f , используя формулы

$$b = \sqrt[5]{x^3 y^2 z^2}, \quad c = \sqrt[5]{\frac{x^2 y^3}{z^2}}, \quad f = \sqrt[5]{\frac{y^2}{x^2 z^3}},$$

и значения переменных d, g, h , используя формулы

$$d = \frac{\alpha}{b}, \quad g = \frac{\beta}{c}, \quad h = \frac{\gamma}{f}.$$

Если в результате вычислений все внедиагональные элементы матрицы X будут представлять собой целые положительные числа, то уравнение $X^5 = A$ имеет целый положительный корень, иначе такой корень отсутствует. Если установлено, что существует несколько целых положительных вариантов матрицы X , то рассматриваемое матричное уравнение имеет столько же целых положительных решений.

Доказательство. В рассматриваемом случае система уравнений будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} 2b^2dfg + 2c^2dgh + 2bcd^2h + 2bcfg^2 + cdfh^2 + bf^2gh = K, \\ b^3d^2 + 2b^2cdg + 2b^2dfh + 3bcfgh + bc^2g^2 + bf^2h^2 + c^2dh^2 = L, \\ c^3g^2 + 2c^2fgh + 2bc^2dg + 3bcdfh + b^2cd^2 + b^2f^2g + cf^2h^2 = M, \\ b^2d^3 + 2bcd^2g + 2bd^2fh + 3cdfgh + df^2h^2 + c^2dg^2 + bf^2g^2 = N, \\ 2bcd^2h + 2b^2dfg + 2cdfh^2 + 2bf^2gh + bcfg^2 + c^2dgh = P, \\ f^3h^2 + 2cf^2gh + 2bdf^2h + 3bcdfg + c^2d^2h + c^2fg^2 + b^2d^2f = Q, \\ c^2g^3 + 2bcdg^2 + 2cfg^2h + 3bdfgh + b^2d^2g + cd^2h^2 + f^2gh^2 = R, \\ f^2h^3 + 2bdfh^2 + 2cfgh^2 + 3bcdgh + b^2d^2h + c^2g^2h + b^2fg^2 = S, \\ 2cdfh^2 + 2bcfg^2 + 2c^2dgh + 2bf^2gh + bcd^2h + b^2dfg = T. \end{cases} \quad (11)$$

Рассмотрим 1-е, 5-е и 9-е уравнения системы (11):

$$\begin{cases} 2b^2dfg + 2c^2dgh + 2bcd^2h + 2bcfg^2 + cdfh^2 + bf^2gh = K, \\ 2bcd^2h + 2b^2dfg + 2cdfh^2 + 2bf^2gh + bcfg^2 + c^2dgh = P, \\ 2cdfh^2 + 2bcfg^2 + 2c^2dgh + 2bf^2gh + bcd^2h + b^2dfg = T. \end{cases} \quad (12)$$

Решая систему (12), можно найти переменные α и β , которые в данном случае будут зависеть от переменной γ :

$$\alpha = \frac{\gamma(2KP - 3PT + 2P^2)}{-3KP + 2PT + 2P^2}, \quad \beta = \frac{\gamma(2KP + 2PT - 3P^2)}{-3KP + 2PT + 2P^2}.$$

Оценка для γ имеет вид $1 \leq \gamma \leq \sqrt{M - 10}$.

Таким образом, произведения всех пар, симметричных относительно главной диагонали элементов, считаем известными.

Действуя аналогично предложенному выше в лемме 1, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{L\beta^2}{x} + N\alpha\gamma^2x = C, \\ \frac{M\alpha^2\gamma^2}{y} + R\beta y = B, \\ \frac{S\alpha^2\gamma}{z} + Q\beta^2z = E, \end{cases} \quad (13)$$

где $x = \frac{c^2}{bf^2}$, $y = \frac{b^2f^2}{c}$, $z = \frac{b^2f}{c^2}$.

Зная x, y, z , можно найти переменные b, c, f :

$$b = \sqrt[5]{x^3 y^2 z^2}, \quad c = \sqrt[5]{\frac{x^2 y^3}{z^2}}, \quad f = \sqrt[5]{\frac{y^2}{x^2 z^3}}.$$

Т е о р е м а 2. *Необходимым условием существования корня пятой степени с нулевыми диагональными и целыми положительными внедиагональными элементами у матрицы A является существование хотя бы одного общего делителя у диагональных элементов матрицы A .*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Перепишем систему уравнений (12) в следующем виде:

$$\begin{cases} (\alpha + \beta)(\alpha + \beta + \gamma) = K, \\ (\alpha + \gamma)(\alpha + \beta + \gamma) = P, \\ (\beta + \gamma)(\alpha + \beta + \gamma) = T. \end{cases} \quad (12')$$

Из системы (12') следует, что диагональные элементы матрицы A имеют общий делитель. Поскольку необходимым условием существования корня пятой степени с нулевыми диагональными и целыми положительными внедиагональными элементами у матрицы A является целочисленность и положительность всех элементов тройки (α, β, γ) , то общий делитель является натуральным числом.

Алгоритм нахождения корня (корней) пятой степени с нулевыми диагональными и целыми положительными внедиагональными элементами у матрицы A аналогичен алгоритму нахождения корня (корней) четвертой степени с нулевыми диагональными и целыми положительными внедиагональными элементами.

Необходимо выяснить, когда корень n -й степени матрицы третьего порядка будет иметь два нулевых диагональных и отличные от нуля внедиагональные элементы, т. е.

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & 0 & f \\ g & h & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} K & L & M \\ N & P & Q \\ R & S & T \end{pmatrix}.$$

Л е м м а 3. *Чтобы найти целый положительный корень рассматриваемого вида уравнения $X^3 = A$ или показать, что таковой отсутствует, необходимо оценить возможные значения переменных a : $1 \leq a \leq \sqrt[3]{K-6}$ и $\gamma = fh$: $1 \leq \gamma \leq L-4$, затем для каждого возможного значения пары переменных (a, γ) найти значения переменных*

$$\begin{aligned} \alpha &= bd = \frac{k+P-2T}{3a}, \quad \beta = cg = \frac{k-2P+T}{3a}, \\ I &= a^2 + bd + cg + fh, \quad H = bd + cg + fh, \quad U = \frac{LN + I^2 bd - a^2 cg fh}{I}, \\ V &= \frac{MR + I^2 cg - a^2 bdfh}{I}, \quad W = \frac{QS + H^2 fh - a^2 bdcg}{H}, \end{aligned}$$

где $k = K - a^3$. После этого найти значения переменных b, c, f , используя формулы

$$b = \frac{U \pm \sqrt{U^2 - 4LN\alpha}}{2N}, \quad c = \frac{V \pm \sqrt{V^2 - 4MR\beta}}{2R}, \quad f = \frac{W \pm \sqrt{W^2 - 4QS\gamma}}{2S},$$

и значения переменных d, g, h , используя формулы

$$d = \frac{\alpha}{b}, \quad g = \frac{\beta}{c}, \quad h = \frac{\gamma}{f}.$$

Если в результате вычислений все внедиагональные элементы матрицы X будут представлять собой целые положительные числа, то уравнение $X^3 = A$ имеет целый положительный корень, иначе такой корень отсутствует. Если установлено, что существует несколько целых положительных вариантов матрицы X , то рассматриваемое матричное уравнение имеет столько же целых положительных решений.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В рассматриваемом случае система уравнений будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} a^3 + 2a(bd + cg) + cdh + bfg = K, b(a^2 + bd + cg + fh) + ach = L, c(a^2 + bd + cg + gh) + abf = M, \\ a^2d + afg + bd^2 + cdg + dfh = N, abd + cdh + bfg = P, acd + cfg + bdf + f^2h = Q, \\ a^2g + adh + bdg + cg^2 + fgh = R, abg + cgh + bdh + fh^2 = S, acg + cdh + bfg = T. \end{cases} \quad (14)$$

Рассмотрим 1-е, 5-е и 9-е уравнения системы (14):

$$\begin{cases} 2abd + 2acg + cdh + bfg = k, \\ abd + cdh + bfg = P, \\ acg + cdh + bfg = T, \end{cases} \quad (15)$$

где $k = K - a^3$.

Решая систему (15), получим $bd = \frac{k + P - 2T}{3a}$, $cg = \frac{k - 2P + T}{3a}$.

Таким образом, известны все пары произведений, симметричных относительно главной диагонали элементов матрицы X .

Перемножив соответствующие уравнения системы (14) и подставив вместо переменных d, g, h соответственно $\frac{\alpha}{b}, \frac{\beta}{c}, \frac{\gamma}{f}$, как сделано выше для системы (1), получим

$$\begin{cases} b = \frac{U \pm \sqrt{U^2 - 4LN\alpha}}{2N}, \\ c = \frac{V \pm \sqrt{V^2 - 4MR\beta}}{2R}, \\ f = \frac{W \pm \sqrt{W^2 - 4QS\gamma}}{2S}, \end{cases} \quad (16)$$

найдем значения переменных d, g, h , используя формулы $d = \frac{\alpha}{b}$, $g = \frac{\beta}{c}$, $h = \frac{\gamma}{f}$.

А л г о р и т м 2. Нахождение корня (корней) третьей степени с нулевыми диагональными и целыми положительными внедиагональными элементами у матрицы A , если такой корень (или корни) существует (существуют).

Шаг 1. Используя приведенную в лемме 3 оценку, определить возможные значения переменной a .

Шаг 2. Используя приведенную в лемме 3 оценку, определить возможные значения переменной γ .

Шаг 3. (Для каждого из возможных значений переменной a .) Найти для каждого возможного значения γ значения переменных α и β . Если у всех троек (α, β, γ) хотя бы одна из переменных не является натуральным числом, то матрица A не имеет ни одного корня третьей степени рас-

смагриваемого вида. Если все переменные хотя бы одной из троек являются натуральными числами, то необходимо перейти к шагу 4.

Шаг 4. Для всех троек, все переменные которых являются натуральными числами, необходимо найти переменные U, V, W по формулам, представленным в лемме 3.

Шаг 5. Разрешив уравнения системы (16), найти соответственно переменные $b_1, b_2, c_1, c_2, f_1, f_2$.

Шаг 6. Зная произведения α, β, γ , найти переменные d, g, h . Если все переменные, являющиеся элементами матрицы X , представляют собой целые положительные числа, то система уравнений (14) разрешима в целых положительных числах, иначе можно сделать вывод, что матрица A не имеет ни одного корня третьей степени рассматриваемого вида.

Л е м м а 4. *Чтобы найти целый положительный корень рассматриваемого вида уравнения $X^4 = A$ или показать, что таковой отсутствует, необходимо оценить возможные значения переменной a : $1 \leq a \leq \sqrt[4]{K-16}$ и $\gamma = fh$: $1 \leq \gamma \leq \sqrt{P-8}$, затем для каждого возможного значения пары переменных (a, γ) найти значения переменных*

$$\alpha = \frac{a^2(I+P-T) + \gamma(I-P+T)}{2(a^4 - \gamma^2)}, \quad \beta = \frac{a^2(I-P+T) + \gamma(I+P-T)}{2(a^4 - \gamma^2)}, \quad I = \frac{k - P - T + 2\gamma^2}{2},$$

$$\delta = bfg + cdh = \frac{T - a^2cg - bcdg - bdfh - c^2g^2 - 2cgfh - f^2h^2}{a},$$

$$U = \frac{LN + bdX_1^2 - cgfhY_1^2 - b^2d^2cgfh - Y_1(\delta^2 - 2bdcgfh)}{X_1}, \quad X_1 = a^3 + 2abd + 2acg + afh,$$

$$Y_1 = a^2 + 2bd + cg + fh,$$

$$V = \frac{MR + cgX_2^2 - bdfhY_2^2 - bdc^2g^2fh - Y_2(\delta^2 - 2bdcgfh)}{X_2}, \quad X_2 = a^3 + 2abd + 2acg + afh,$$

$$Y_2 = a^2 + bd + 2cg + fh,$$

$$W = \frac{QS + fhX_3^2 - bdcgY_3^2 - bdcgf^2h^2 - Y_3(\delta^2 - 2bdcgfh)}{X_3}, \quad X = abd + acg \quad Y_3 = a^2 + bd + cg + 2fh,$$

где $k = K - a^4$. После этого найти значения переменных b, c, f , используя формулы

$$b = \frac{U \pm \sqrt{U^2 - 4LN\alpha}}{2N}, \quad c = \frac{V \pm \sqrt{V^2 - 4MR\beta}}{2R}, \quad f = \frac{W \pm \sqrt{W^2 - 4QS\gamma}}{2S},$$

и значения переменных d, g, h , используя формулы

$$d = \frac{\alpha}{b}, \quad g = \frac{\beta}{c}, \quad h = \frac{\gamma}{f}.$$

Если в результате вычислений все внедиагональные элементы матрицы X будут представлять собой целые положительные числа, то уравнение $X^4 = A$ имеет целый положительный корень, иначе такой корень отсутствует.

Доказательство. В рассматриваемом случае система уравнений будет иметь вид

$$\begin{cases} a^4 + 3a^2bd + 3a^2cg + 2abfg + 2acd h + b^2d^2 + 2bcdg + bdfh + cfgh + c^2g^2 = K, \\ a^3b + a^2ch + 2ab^2d + 2abcg + abfh + 2bcdh + b^2fg + c^2gh + cfh^2 = L, \\ a^3c + a^2bf + 2abcd + 2ac^2g + acfh + 2bcfg + c^2dh + b^2df + bf^2h = M, \\ a^3d + a^2fg + 2abd^2 + 2acd g + adfh + 2bdfg + cd^2h + cfg^2 + f^2gh = N, \\ a^2bd + abfg + acdh + b^2d^2 + 2bdfh + bcdg + cfgh + f^2h^2 = P, \\ a^2cd + abdf + acfg + 2cdfh + bcd^2 + c^2dg + bf^2g = Q, \\ a^3g + a^2dh + 2abdg + 2acg^2 + afg h + 2cdgh + bd^2h + dfh^2 + bfg^2 = R, \\ a^2bg + abdh + acgh + 2bfgh + b^2dg + bcg^2 + cdh^2 = S, \\ a^2cg + abfg + acdh + c^2g^2 + 2cgfh + bcdg + bdfh + f^2h^2 = T. \end{cases} \quad (17)$$

Рассмотрим 1-е, 5-е и 9-е уравнения системы (17):

$$\begin{cases} 3a^2bd + 3a^2cg + 2abfg + 2acd h + b^2d^2 + 2bcdg + bdfh + cfgh + c^2g^2 = k, \\ a^2bd + abfg + acdh + b^2d^2 + 2bdfh + bcdg + cfgh + f^2h^2 = P, \\ a^2cg + abfg + acdh + c^2g^2 + 2cgfh + bcdg + bdfh + f^2h^2 = T, \end{cases} \quad (18)$$

где $k = K - a^4$.

Составим новую систему уравнений, первое из уравнений которой будет представлять собой разность 1-го уравнения системы (18) и суммы 2-го и 3-го уравнений той же системы; второе – разность 2-го и 3-го уравнений той же системы:

$$\begin{cases} k - P - T = 2a^2bd + 2a^2cg - 2bdfh - 2cgfh - 2f^2h^2, \\ P - T = a^2bd - a^2cg + b^2d^2 - c^2g^2 + bdfh - cgfh. \end{cases} \quad (19)$$

Решая данную систему, находим, что

$$\alpha = \frac{a^2(I + P - T) + \gamma(I - P + T)}{2(a^4 - \gamma^2)}, \quad \beta = \frac{a^2(I - P + T) + \gamma(I + P - T)}{2(a^4 - \gamma^2)}, \quad I = \frac{k - P - T + 2\gamma^2}{2}.$$

Таким образом, известны все пары произведений симметричных относительно главной диагонали элементов матрицы X .

Перемножив соответствующие уравнения системы (17) и подставив вместо переменных d, g, h соответственно $\frac{\alpha}{b}, \frac{\beta}{c}, \frac{\gamma}{f}$, как сделано выше для системы (1), получим

$$\begin{cases} b = \frac{U \pm \sqrt{U^2 - 4LN\alpha}}{2N}, \\ c = \frac{V \pm \sqrt{V^2 - 4MR\beta}}{2R}, \\ f = \frac{W \pm \sqrt{W^2 - 4QS\gamma}}{2S}, \end{cases} \quad (20)$$

найдем значения переменных d, g, h , используя формулы $d = \frac{\alpha}{b}, g = \frac{\beta}{c}, h = \frac{\gamma}{f}$.

При перемножении уравнений возникает необходимость нахождения суммы квадратов $(bfg)^2 + (cdh)^2$. Из 9-го уравнения системы (17), можно найти сумму bfg и cdh : $\delta = bfg + cdh = \frac{T - a^2cg - bcdg - bdfh - c^2g^2 - 2cgfh - f^2h^2}{a}$. Учитывая, что $(bfg)(cdh) = \alpha\beta\gamma$, можно найти сумму квадратов $(bfg)^2 + (cdh)^2$.

А л г о р и т м 3. Нахождение корня (корней) четвертой степени с нулевыми диагональными и целыми положительными внедиагональными элементами у матрицы A , если такой корень (или корни) существует (существуют).

Шаг 1. Используя приведенную в лемме 4 оценку, определить возможные значения переменной a .

Шаг 2. Используя приведенную в лемме 4 оценку, определить возможные значения переменной γ .

Шаг 3. (Для каждого из возможных значений переменной a .) Найти для каждого возможного значения γ значения переменных α и β . Если у всех троек (α, β, γ) хотя бы одна из переменных не является натуральным числом, то матрица A не имеет ни одного корня четвертой степени рассматриваемого вида. Если все переменные хотя бы одной из троек являются натуральными числами, то необходимо перейти к шагу 4.

Шаг 4. Для всех троек, все переменные которых являются натуральными числами, необходимо найти переменные $U, V, W, X_1, Y_1, X_2, Y_2, X_3, Y_3, \delta$ по формулам, представленным в лемме 5.

Шаг 5. Разрешив уравнения системы (20), найти соответственно переменные $b_1, b_2, c_1, c_2, f_1, f_2$.

Шаг 6. Зная произведения α, β, γ , найти переменные d, g, h . Если все переменные, являющиеся элементами матрицы X , представляют собой целые положительные числа, то система уравнений (17) разрешима в целых положительных числах, иначе можно сделать вывод, что матрица A не имеет ни одного корня четвертой степени рассматриваемого вида.

Л е м м а 5. Чтобы найти целый положительный корень рассматриваемого вида уравнения $X^5 = A$ или показать, что таковой отсутствует, необходимо оценить возможные значения переменной a : $1 \leq a \leq \sqrt[5]{K-40}$, $\alpha = bd$: $1 \leq \alpha \leq \sqrt{\frac{P-18}{2}}$ и $\beta = cg$: $1 \leq \beta \leq \sqrt{\frac{T-18}{2}}$, затем для каждого возможного значения тройки переменных (a, α, β) решить уравнение второго порядка $\varphi\gamma^2 + \rho\gamma + \mu = 0$, где $\varphi = 2a(\alpha - \beta)$, $\rho = 3a^3(\alpha - \beta) + 4a(\alpha^2 - \beta^2) + 2(T - P)$, $\mu = a^5(\alpha - \beta) + 3a^3(\alpha^2 - \beta^2) + 2a(\alpha^3 + 2\alpha^2\beta - 2\alpha\beta^2 - 2\beta^3) + a^2(P - T) + \alpha(2T - P) + \beta(T - 2P)$ и найти значения переменных

$$\psi = bfg + cdh = \frac{T - a^3\beta - 2a\alpha\beta - a\alpha\gamma - 2a\beta^2 - 2a\beta\gamma}{a^2 + \alpha + 2\beta + 2\gamma},$$

$$U = \frac{LN + \alpha X_1^2 - \beta\gamma Y_1^2 - \alpha\beta^2\gamma^2 - 4a^2\alpha^2\beta\gamma - Y_1\beta\gamma\psi - 2aY_1(\psi^2 - 2\alpha\beta\gamma) - 2a\psi(\psi^2 - 3\alpha\beta\gamma)}{X_1},$$

$$X_1 = a^4 + 3a^2\alpha + 3a^2\beta + a^2\gamma + \alpha^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + \beta^2 + 3\beta\gamma + \gamma^2, Y_1 = a^3 + 4a\alpha + 2a\beta + a\gamma,$$

$$V = \frac{MR + \beta X_2^2 - \alpha\gamma Y_2^2 - \alpha^2\beta\gamma^2 - 4a^2\alpha\beta^2\gamma - Y_2\alpha\gamma\psi - 2aY_2(\psi^2 - 2\alpha\beta\gamma) - 2a\psi(\psi^2 - 3\alpha\beta\gamma)}{X_2},$$

$$X_2 = a^4 + 3a^2\alpha + 3a^2\beta + a^2\gamma + \alpha^2 + 2\alpha\beta + 3\alpha\gamma + \beta^2 + 2\beta\gamma + \gamma^2, Y_2 = a^3 + 2a\alpha + 4a\beta + a\gamma,$$

$$W = \frac{QS + \gamma X_3^2 - \alpha\beta Y_3^2 - \alpha^2\beta^2\gamma - a^2\alpha\beta\gamma^2 - Y_3\alpha\beta\psi - aY_3(\psi^2 - 2\alpha\beta\gamma) - a\psi(\psi^2 - 3\alpha\beta\gamma)}{X_3},$$

$$X_3 = a^2\alpha + a^2\beta + \alpha^2 + 3\alpha\beta + 2\alpha\gamma + \beta^2 + 2\beta\gamma + \gamma^2, Y_3 = a^3 + 2a\alpha + 2a\beta + 2a\gamma.$$

После этого найти значения переменных b, c, f , используя формулы

$$b = \frac{U \pm \sqrt{U^2 - 4LN\alpha}}{2N}, \quad c = \frac{V \pm \sqrt{V^2 - 4MR\beta}}{2R}, \quad f = \frac{W \pm \sqrt{W^2 - 4QS\gamma}}{2S},$$

и значения переменных d, g, h , используя формулы

$$d = \frac{\alpha}{b}, \quad g = \frac{\beta}{c}, \quad h = \frac{\gamma}{f}.$$

Если в результате вычислений все внедиагональные элементы матрицы X будут представлять собой целые положительные числа, то уравнение $X^5 = A$ имеет целый положительный корень, иначе такой корень отсутствует. Если установлено, что существует несколько целых положительных вариантов матрицы X , то рассматриваемое матричное уравнение имеет столько же целых положительных решений.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В рассматриваемом случае система уравнений будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} a^5 + 4a^3(\alpha + \beta) + 3a(\alpha^2 + \beta^2) + 2a(3\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) + (bfg + cdh)(3a^2 + 2\alpha + 2\beta + \gamma) = K, \\ bX_1 + cY_1 + c^2dh^2 + 2ab^2fg = L, \\ cX_2 + bY_2 + 2ac^2dh + b^2f^2g = M, \\ dX_1 + fY_1 + bf^2g^2 + 2acd^2h = N, \\ a^3\alpha + 2a\alpha^2 + a(2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + \beta\gamma) + (bfg + cdh)(a^2 + 2\alpha + \beta + 2\gamma) = P, \\ fX_3 + cY_3 + abf^2g + c^2d^2h = Q, \\ gX_2 + dY_2 + 2abfg^2 + cd^2h^2 = R, \\ hX_3 + bY_3 + acgh^2 + b^2fg^2 = S, \\ a^3\beta + 2a\beta^2 + a(2\alpha\beta + \alpha\gamma + 2\beta\gamma) + (bfg + cdh)(a^2 + \alpha + 2\beta + 2\gamma) = T. \end{cases} \quad (21)$$

Рассмотрим 5-е и 9-е уравнения системы (21):

$$\begin{cases} P = a^3\alpha + 2a\alpha^2 + a(2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + \beta\gamma) + (bfg + cdh)(a^2 + 2\alpha + \beta + 2\gamma), \\ T = a^3\beta + 2a\beta^2 + a(2\alpha\beta + \alpha\gamma + 2\beta\gamma) + (bfg + cdh)(a^2 + \alpha + 2\beta + 2\gamma). \end{cases} \quad (22)$$

Выразив $(bfg + cdh)$ из 2-го уравнения системы (22) и подставив полученный результат в 1-е уравнение той же системы, получим уравнение относительно переменной γ , в котором α и β играют роль параметров:

$$\phi\gamma^2 + \rho\gamma + \mu = 0, \quad (23)$$

где $\mu = a^5(\alpha - \beta) + 3a^3(\alpha^2 - \beta^2) + 2a(\alpha^3 + 2\alpha^2\beta - 2\alpha\beta^2 - 2\beta^3) + a^2(P - T) + \alpha(2T - P) + \beta(T - 2P)$,
 $\rho = 3a^3(\alpha - \beta) + 4a(\alpha^2 - \beta^2) + 2(T - P)$, $\phi = 2a(\alpha - \beta)$. Корни уравнения (23) имеют вид

$$\gamma = \frac{-\rho \pm \sqrt{\rho^2 - 4\phi\mu}}{2\phi}. \quad (24)$$

Таким образом, будем считать, что известны все пары произведений, симметричных относительно главной диагонали элементов матрицы X .

Перемножив соответствующие уравнения системы (21) и подставив вместо переменных d, g, h соответственно $\frac{\alpha}{b}, \frac{\beta}{c}, \frac{\gamma}{f}$, как сделано выше для системы (1), получим

$$\begin{cases} b = \frac{U \pm \sqrt{U^2 - 4LN\alpha}}{2N}, \\ c = \frac{V \pm \sqrt{V^2 - 4MR\beta}}{2R}, \\ f = \frac{W \pm \sqrt{W^2 - 4QS\gamma}}{2S}, \end{cases} \quad (25)$$

найдем значения переменных d, g, h , используя формулы $d = \frac{\alpha}{b}, g = \frac{\beta}{c}, h = \frac{\gamma}{f}$.

При перемножении уравнений возникает необходимость нахождения суммы квадратов $(bfg)^2 + (cdh)^2$ и суммы кубов $(bfg)^3 + (cdh)^3$. Из 9-го уравнения системы (21) можно найти сумму bfg и cdh : $\psi = bfg + cdh = \frac{T - a^3\beta - 2a\alpha\beta - a\alpha\gamma - 2a\beta^2 - 2a\beta\gamma}{a^2 + \alpha + 2\beta + 2\gamma}$. Учитывая, что $(bfg)(cdh) = \alpha\beta\gamma$,

можно найти сумму квадратов $(bfg)^2 + (cdh)^2$ и сумму кубов $(bfg)^3 + (cdh)^3$.

А л г о р и т м 4. Нахождение корня (корней) пятой степени с нулевыми диагональными и целыми положительными внедиагональными элементами у матрицы A , если такой корень (или корни) существует (существуют).

Шаг 1. Используя приведенную в лемме 5 оценку, определить возможные значения переменной a .

Шаг 2. Используя приведенную в лемме 5 оценку, определить возможные значения переменных α и β .

Шаг 3. (Для каждого из возможных значений переменной a .) Найти для каждой возможной пары значений α и β значение переменной γ . Если у всех троек (α, β, γ) хотя бы одна из переменных не является натуральным числом, то матрица A не имеет ни одного корня пятой степени рассматриваемого вида. Если все переменные хотя бы одной из троек являются натуральными числами, то необходимо перейти к шагу 4.

Шаг 4. Для всех троек, все переменные которых являются натуральными числами, необходимо найти переменные $U, V, W, X_1, Y_1, X_2, Y_2, X_3, Y_3, \delta$ по формулам, представленным в лемме 6.

Шаг 5. Разрешив уравнения системы (25), найти соответственно переменные $b_1, b_2, c_1, c_2, f_1, f_2$.

Шаг 6. Зная произведения α, β, γ , найти переменные d, g, h . Если все переменные, являющиеся элементами матрицы X , представляют собой целые положительные числа, то система уравнений (21) разрешима в целых положительных числах, иначе можно сделать вывод, что матрица A не имеет ни одного корня пятой степени рассматриваемого вида.

Очевидно также, что необходимым условием существования корней всех рассматриваемых в данной статье уравнений, если таковые имеют место, является целочисленность и положительность всех элементов тройки (α, β, γ) .

Теорема 3. *Необходимым условием существования решений рассматриваемых видов уравнения $X^n = A$ является целочисленность корня соответствующей степени n определителя матрицы A , причем этот корень будет представлять собой определитель матрицы X .*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Исходя из постановки задачи очевидно, что определители обеих матриц X и $A \in \mathbb{Z}$. Согласно теореме о связи определителей исходной матрицы A и матрицы-корня X корень n -й степени определителя матрицы A равен определителю матрицы X . Следовательно, необходимым условием существования решений рассматриваемых видов уравнения $X^n = A$ является целочисленность корня соответствующей степени n определителя матрицы A .

Заклучение. В результате проведенного исследования было показано, что для решения задачи по нахождению целых положительных решений матричного уравнения $X^n = A$ для матриц третьего порядка в случае натуральных n можно использовать аналитические методы. Приведены формулы, позволяющие находить целые положительные корни матриц при $n = 3, \dots, 5$. Однако представленную методику можно использовать и для нахождения натуральных корней матриц третьего порядка и при больших n . Преимуществом данного подхода является поиск всех корней рассматриваемого вида, если таковые имеют место. Задача, связанная с выяснением условий существования и единственности целых положительных решений нелинейных уравнений для исходных матриц с также целыми положительными коэффициентами, является достаточно сложной. В связи с этим в статье приведены лишь теоремы, устанавливающие необходимые условия существования целых положительных решений.

В следующей работе будет рассматриваться методика нахождения решений вида

$$X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & 0 \end{pmatrix} \text{ и } X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}, \text{ если таковые имеют место.}$$

Список использованных источников

1. Буснюк, Н. Н. Математическое моделирование / Н. Н. Буснюк, А. А. Черняк. – Минск: Беларусь, 2014. – 214 с.
2. Higham, N. J. Newton's method for the matrix square root / N. J. Higham // *Math. Computation*. – 1986. – Vol. 46, № 174. – P. 537–549. <https://doi.org/10.1090/s0025-5718-1986-0829624-5>
3. Björck, A. A Schur method for the square root of a matrix / A. Björck, S. Hammarling // *Linear Algebra and its Applications*. – 1983. – Vol. 52/53. – P. 127–140. [https://doi.org/10.1016/0024-3795\(83\)80010-x](https://doi.org/10.1016/0024-3795(83)80010-x)
4. Гантмахер, Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М.: Физматлит, 2004. – 560 с.
5. Якуто, К. Л. Функции от матриц / К. Л. Якуто // Наука – образованию, производству, экономике: материалы XXI (68) Регион. науч.-практ. конф. преподавателей, науч. сотрудников и аспирантов, Витебск, 11–12 февр. 2016 г.: в 2 т. / Витеб. гос. ун-т; редкол.: И. М. Прищепа [и др.]. – Витебск, 2016. – Т. 1. – С. 36–38.
6. Якуто, К. Л. О положительном решении матричного уравнения $X^2 = A$ для матриц второго порядка / К. Л. Якуто // Молодость. Интеллект. Инициатива: материалы IV Междунар. науч.-практ. конф. студентов и магистрантов, Витебск, 29 апр. 2016 г. / Витеб. гос. ун-т; редкол.: И. М. Прищепа [и др.]. – Витебск, 2016. – С. 24–25.
7. Якуто, К. Л. Уравнение $X^n = A$ для матриц третьего порядка / К. Л. Якуто // Наука – образованию, производству, экономике: материалы XXII (69) Регион. науч.-практ. конф. преподавателей, науч. сотрудников и аспирантов, Витебск, 9–10 февр. 2017 г.: в 2 т. / Витеб. гос. ун-т; редкол.: И. М. Прищепа [и др.]. – Витебск, 2017. – Т. 1. – С. 45–47.

References

1. Busnuck N. N., Chernyak A. A. *Mathematical modeling*. Minsk, Belarus Publ., 2014. 214 p. (in Russian).
2. Higham N. J. Newton's method for the matrix square root. *Mathematics of Computation*, 1986, vol. 46, no. 174, pp. 537–549. <https://doi.org/10.1090/s0025-5718-1986-0829624-5>
3. Björck A., Hammarling S. A Schur method for the square root of a matrix. *Linear Algebra and its Applications*, 1983, vol. 52–53, pp. 127–140. [https://doi.org/10.1016/0024-3795\(83\)80010-x](https://doi.org/10.1016/0024-3795(83)80010-x)
4. Gantmakher F. R. *Theory of Matrix*. Moscow, Fizmatlit Publ., 2004. 560 p. (in Russian).
5. Yakuto K. L. Matrix functions. *Materialy XXI (68) Regional'noi nauchno-prakticheskoi konferentsii prepodavatelei, nauchnykh sotrudnikov i aspirantov "Nauka – obrazovaniyu, proizvodstvu, ekonomike"*. T. 1 [Materials of XXI (68) Regional science-practical conference of lecturers, researchers and postgraduates "Science – education, industry, economics". Vol. 1]. Vitebsk, 2016, pp. 36–38 (in Russian).
6. Yakuto K. L. About positive decision of matrix equation $X^2 = A$ for second-order matrices. *Materialy IV Mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii studentov i magistrantov "Molodost'. Intellect. Initsiativa"* [Materials of the 4th International science-practical conference of students and graduates "Youth. Intellect. Initiative"]. Vitebsk, 2016, pp. 24–25 (in Russian).
7. Yakuto K. L. Equation $X^n = A$ for the third order matrices. *Materialy XXII (69) Regional'noi nauchno-prakticheskoi konferentsii prepodavatelei, nauchnykh sotrudnikov i aspirantov "Nauka – obrazovaniyu, proizvodstvu, ekonomike"*. T. 1 [Materials of XXII (69) Regional science-practical conference of lecturers, researchers and postgraduates "Science – education, industry, economics". Vol. 1]. Vitebsk, 2017, pp. 45–47 (in Russian).

Информация об авторе

Якуто Константин Леонидович – магистр физико-математических наук, аспирант, Витебский государственный университет им. П. М. Машерова (пр. Московский, 33, 210038, г. Витебск, Республика Беларусь). E-mail: k.yakuto@mail.ru

Information about the author

Konstantin L. Yakuto – Master of Physics and Mathematics, Postgraduate Student, Vitebsk State University named after P. M. Masherov (33, Moskovskiy Ave., 210038, Vitebsk, Republic of Belarus). E-mail: k.yakuto@mail.ru

ISSN 1561-2430 (Print)/
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 519.2

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-2-179-192>

Received 16.03.2018
Поступила в редакцию 16.03.2018

A. Yu. Kharin^{1,2}, Ton That Tu^{1,3}

¹Belarusian State University, Minsk, Belarus

²Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics, Minsk, Belarus

³Da Nang University of Education, Da Nang, Vietnam

PERFORMANCE ANALYSIS AND ROBUSTNESS EVALUATION OF A SEQUENTIAL PROBABILITY RATIO TEST FOR NON-IDENTICALLY DISTRIBUTED OBSERVATIONS

Abstract. In this article the problem of a sequential test for the model of independent non-identically distributed observations is considered. Based on recursive calculation a new numerical approach to approximate test characteristics for a sequential probability ratio test (SPRT) and a truncated SPRT (TSPRT) is constructed. The problem of robustness evaluation is also studied when the contamination is presented by the distortion of the distributions of all increments of the log-likelihood ratio statistics. The two-side truncated functions are proposed to be used for constructing the robustified SPRT. An algorithm to choose the thresholds of these truncated functions is indicated. The results are applied for a sequential test on parameters of time series with trend. Some kinds of the contaminated models of time series with trend are used to study the robustness of the truncated SPRT. Numerical examples confirming the theoretical results mentioned above are given.

Keywords: sequential test, simple hypotheses, approximation, test characteristics, truncation, non-identically distributed data, robustness evaluation

For citation. Kharin A. Yu., Ton That Tu. Performance analysis and robustness evaluation of a sequential probability ratio test for non-identically distributed observations. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk* = *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, vol. 54, no. 2, pp. 179–192. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-2-179-192>

А. Ю. Харин^{1,2}, Тон Тхат Ту^{1,3}

¹Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

²Научно-исследовательский институт прикладных проблем математики и информатики, Минск, Беларусь

³Педагогический университет Дананг, Дананг, Вьетнам

АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ РОБАСТНОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО КРИТЕРИЯ ОТНОШЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДЛЯ МОДЕЛИ НЕЗАВИСИМЫХ НЕОДИНАКОВО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ НАБЛЮДЕНИЙ

Аннотация. Рассмотрена проблема последовательного теста для модели независимых неодинаково распределенных наблюдений. На основе рекурсивного расчета построен новый численный подход для аппроксимации тестовых характеристик последовательного критерия отношения вероятностей (ПКОВ) и усеченного ПКОВ (УПКОВ). Исследована проблема анализа робастности, когда «засорение» представлено искажением распределений всех приращений статистики логарифмического отношения правдоподобия. Предложено использование двухсторонних усеченных функций для построения робастного ПКОВ. Указан алгоритм для выбора порогов этих усеченных функций. Результаты применены для последовательной проверки гипотез о параметрах временных рядов с трендом. Для некоторых моделей «засорения» временных рядов с трендом исследована робастность усеченного ПКОВ. Проведенные в работе численные эксперименты подтверждают теоретические выводы.

Ключевые слова: последовательный тест, простые гипотезы, аппроксимация, характеристики теста, усечение, неодинаково распределенные наблюдения, анализ робастности

Для цитирования. Харин, А. Ю. Анализ и исследование робастности последовательного критерия отношения вероятностей для модели независимых неодинаково распределенных наблюдений / А. Ю. Харин, Тон Тхат Ту // Вест. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2018. – Т. 54, № 2. – С. 179–192. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-2-179-192>

Introduction. Sequential analysis was first developed by Abraham Wald [1] and has been widely applied in many fields because of its optimal properties. In practice, the error probabilities α , β of type I and II can be different from the preassigned values α_0 , β_0 . In addition, the calculation of conditional average number of observations is very important in optimal evaluation of this approach. In the case of independent identically distributed observations, there have been some approaches to approximate

the indicated test characteristics. Based on Wald's fundamental identity and likelihood ratio identity, some approximations for the average numbers of observations have been obtained [1–3]. An important improvement in computing these characteristics is that the operating characteristics (OC) and average sample number (ASN) functions were proved to satisfy the Fredholm integral equation of the second kind (FIESK) [3, 4]. Neglecting the conditions on the existence of their solutions, we can resort numerical methods to get the approximations of these characteristics. Another approach to calculate is to use the properties of absorbing Markov chains [5–7]. This approach allows not only to get the approximate values of test characteristics but also to evaluate the robustness of statistical procedures [6, 8, 9]. For the TSPRT, the upper bounds for the error probabilities of type I and II were achieved by using normal approximation for the accumulated log-likelihood ratio statistic when the maximum number of observations is relatively large [1], or in more general case [2]. In the case of non-identical distributed observations, Liu Y. and Li X. R. [10] have shown numerical solutions in some special cases to the OC and ASN functions by constructing the sequence of the FIESK with respect to the sequence of new stopping times. In this paper, another method based on recursive calculations is constructed for approximating the test characteristics of the SPRT and TSPRT as well. Evaluation of robustness for the truncated sequential test is also studied and these results will be applied for sequentially testing the parameters of time series with trend.

1. Mathematical model and auxiliary results

Let $\{X_n, n \geq 1\}$ be a sequence of independent random variables on the same probability space $(\Omega, \mathbf{F}, P)$ with probability density functions $\{p_n(x, \theta), x \in \mathbf{R}^1, n \geq 1\}$ respectively, where θ is an unknown vector of parameters.

Consider two simple hypotheses:

$$H_0 : \theta = \theta^0, H_1 : \theta = \theta^1, \quad (1)$$

where $\theta^0, \theta^1 \in \mathbf{R}^m$ are known vectors, $\theta^0 \neq \theta^1$.

Denote the accumulated log-likelihood ratio statistic for n observations:

$$\Lambda_n = \Lambda_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \lambda_i, \quad (2)$$

where $\lambda_i = \ln(p_i(x_i, \theta^1) / p_i(x_i, \theta^0))$ is the log-likelihood ratio calculated on the observation x_i , and $p_i(x, \theta)$ is the probability density function of x_i provided the true parameter value is θ .

After n observations one makes the decision:

$$d = \mathbf{1}_{[C_+, +\infty)}(\Lambda_n) + 2 \cdot \mathbf{1}_{(C_-, C_+)}(\Lambda_n), \quad (3)$$

where the thresholds C_- and C_+ are the parameters of the test. According to Wald [12], C_- and C_+ can be calculated as follows:

$$C_+ = \ln((1 - \beta_0) / \alpha_0), C_- = \ln(\beta_0 / (1 - \alpha_0)), \quad (4)$$

where α_0, β_0 are the given values for error probabilities of types I and II respectively.

Denote $N = \inf\{n : \Lambda_n \notin (C_-, C_+)\}$, $\alpha = P_0(\Lambda_N \geq C_+)$, $\beta = P_1(\Lambda_N \leq C_-)$, where $P_k(\cdot)$ means the probability measure under $H_k, k \in \{0, 1\}$. We will use the following auxiliary results.

L e m m a 1 [11]. *If X is a non-negative, integer valued random variable, then $E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n)$.*

T h e o r e m 1 [12]. *If f is continuous on $[a, b]$ and g is monotonic on $[a, b]$, then there exists Riemann – Stieltjes integral $\int_a^b f(x)dg(x)$.*

C o r o l l a r y 1. *If g is monotonic on $[a, b]$ and f is C -Lipschitzian on $[a, b]$, i. e., there exists a positive constant C such that $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|, \forall x, y \in [a, b]$, then the following expansion holds:*

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \frac{f(a) + f(b)}{2}(g(b) - g(a)) + O(b - a).$$

Theorem 2 [13]. Let $f(x), g(x)$ be two functions defined on $[a, b]$. Suppose that f'' and g'' are continuous on $[a, b]$ and that g is monotonic there. Then, there exist $\xi, \tau, \eta, \sigma \in (a, b)$ such that

$$\int_a^b f dg - \frac{f(a) + f(b)}{2} [g(b) - g(a)] = [g''(\xi)f'(\tau) - f''(\eta)g'(\sigma)] \frac{(b-a)^3}{12}.$$

2. Main results

2.1. Numerical approach to calculate the test characteristics. Put $S_1^{(k)}(x) = P_k(\Lambda_1 < x)$, and for $n > 1$, $S_n^{(k)}(x) = P_k(\Lambda_n < x, \text{ and } \Lambda_i \in (C_-, C_+), i = \overline{1, n-1})$, $k \in \{0, 1\}$.

Clearly, the function $S_n^{(k)}(x)$ satisfies the following recurrent relation:

$$S_n^{(k)}(x) = \int_{C_-}^{C_+} F_n^{(k)}(x-y) dS_{n-1}^{(k)}(y), \quad n > 1, \quad k \in \{0, 1\}, \quad (5)$$

where $F_n^{(k)}(x)$ is the cumulative distribution functions of λ_n under hypothesis H_k , and $S_1^{(k)}(x) = F_1^{(k)}(x)$.

Assume that $F_n^{(k)}(x)$, $S_n^{(k)}(x)$, $n \geq 1$, $k \in \{0, 1\}$, are continuous functions in $\mathbf{R}$. Then, from the definitions of α , β and Lemma 1 the test characteristics can be expressed as follows:

$$\alpha = G^{(0)}(+\infty) - G^{(0)}(C_+), \quad \beta = G^{(1)}(C_-) - G^{(1)}(-\infty), \quad E^{(k)}(N) = 1 + G^{(k)}(C_+) - G^{(k)}(C_-),$$

where $G^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} S_n^{(k)}(x)$, $k \in \{0, 1\}$, $E^{(k)}(\cdot)$ means expectation under H_k . Since $G^{(1)}(-\infty) = 0$, and

$$G^{(0)}(+\infty) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} P_0(\Lambda_i \in (C_-, C_+), i = \overline{1, n}) = 1 + G^{(0)}(C_+) - G^{(0)}(C_-), \text{ we have}$$

$$\alpha = 1 - G^{(0)}(C_-), \quad \beta = G^{(1)}(C_-), \quad (6)$$

$$E^{(k)}(N) = 1 + G^{(k)}(C_+) - G^{(k)}(C_-), \quad k \in \{0, 1\}. \quad (7)$$

Assume that $E^{(k)}(N) < +\infty$, $k \in \{0, 1\}$. In this case, from Lemma 1 we get

$$p_n^{(k)} = \sum_{j=n}^{\infty} P_k(\Lambda_i \in (C_-, C_+), i = \overline{1, j}) \rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow \infty, k \in \{0, 1\}.$$

Given a very small positive value ε_0 , there exists $n_0 \in \mathbf{N}$ such that $p_n^{(k)} \leq \varepsilon_0$, $\forall n \geq n_0$, $k \in \{0, 1\}$. Note that $S_{n+1}^{(k)}(x) \leq P_k(\Lambda_i, i = \overline{1, n})$, $\forall x \in \mathbf{R}$, $n \geq 1$, which allows us to approximate $G^{(k)}(x)$ by the new function $\bar{G}^{(k)}(x)$:

$$G^{(k)}(x) \approx \bar{G}^{(k)}(x) = \sum_{i=1}^{n_0} S_i^{(k)}(x), \quad \forall x, \quad k \in \{0, 1\}, \quad (8)$$

where $|G^{(k)}(x) - \bar{G}^{(k)}(x)| \leq \varepsilon_0, \forall x$.

Next, we use a numerical method for approximating the values of functions $S_n^{(k)}(x)$, $n \geq 2$, $k \in \{0, 1\}$. Without loss of generality, assume that H_0 is true. Let $H > 1$ be a fixed positive integer, and $\{t_i, i = \overline{1, H}\}$ be a partition of $[C_-, C_+]$, where $t_i = C_- + (i-1)h$, $i = \overline{1, H}$, $h = \frac{C_+ - C_-}{H-1}$. Using Theorem 2, under some assumptions of the functions $F_n^{(0)}(x)$ and $S_n^{(0)}(x)$, the Riemann-Stieltjes integral $\int_{C_-}^{C_+} F_n^{(0)}(x-y) dS_{n-1}^{(0)}(y)$ can be expanded as $h \rightarrow 0$:

$$S_n^{(0)}(x) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{H-1} \left[F_n^{(0)}(x-t_j) + F_n^{(0)}(x-t_{j+1}) \right] \left[S_{n-1}^{(0)}(t_{j+1}) - S_{n-1}^{(0)}(t_j) \right] + O(h^2). \quad (9)$$

This can be rewritten:

$$S_n^{(0)}(x) = -\frac{1}{2} \left[F_n^{(0)}(x-t_1) + F_n^{(0)}(x-t_2) \right] S_{n-1}^{(0)}(t_1) + \frac{1}{2} \left[F_n^{(0)}(x-t_{H-1}) + F_n^{(0)}(x-t_H) \right] S_{n-1}^{(0)}(t_H) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{H-1} \left[F_n^{(0)}(x-t_{j-1}) + F_n^{(0)}(x-t_{j+1}) \right] S_{n-1}^{(0)}(t_j) + O(h^2).$$

Denote $f_i^{(j)} = S_j^{(0)}(t_i)$, $j = \overline{1, n_0}$, $i = \overline{1, H}$. For $2 \leq n \leq n_0$, we obtain the following systems of linear equations:

$$f_i^{(n)} = -\frac{1}{2} \left[F_n^{(0)}(t_i-t_1) + F_n^{(0)}(t_i-t_2) \right] f_1^{(n-1)} + \frac{1}{2} \left[F_n^{(0)}(t_i-t_{H-1}) + F_n^{(0)}(t_i-t_H) \right] f_H^{(n-1)} + \\ + \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{H-1} \left[F_n^{(0)}(t_i-t_{j-1}) + F_n^{(0)}(t_i-t_{j+1}) \right] f_j^{(n-1)}, \quad i = \overline{1, H}. \quad (10)$$

Denote $f^{(n)} = (f_1^{(n)}, \dots, f_H^{(n)})^T$, $n \geq 1$, and $D^{(n)} = \{d_{ij}^n\}_{H \times H}$, $n \geq 2$, where

$$d_{ij}^n = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[F_n^{(0)}(t_i-t_{j-1}) - F_n^{(0)}(t_i-t_{j+1}) \right], & i = \overline{1, H}, j = \overline{2, H-1}, \\ -\frac{1}{2} \left[F_n^{(0)}(t_i-t_1) + F_n^{(0)}(t_i-t_2) \right], & i = \overline{1, H}, j = 1, \\ \frac{1}{2} \left[F_n^{(0)}(t_i-t_{H-1}) + F_n^{(0)}(t_i-t_H) \right], & i = \overline{1, H}, j = H. \end{cases}$$

We get $f^{(n)} = D^{(n)} f^{(n-1)}$, $2 \leq n \leq n_0$, where $f^{(1)} = (f_1^{(1)}, \dots, f_H^{(1)})^T$, and $f_i^{(1)} = F_1^{(0)}(t_i)$, $i = \overline{1, H}$. If the tailed sum $\sum_{i=n_0+1}^{\infty} F_i^{(0)}(x)$ was neglected, the following theorem has been proved.

Theorem 3. Assume that $E^{(k)}(N) < +\infty$, $k \in \{0, 1\}$. If $F_n^{(k)}(x)$, $n \geq 1$, $k \in \{0, 1\}$, have continuous derivatives of second order in $[C_- - C_+, C_+ - C_-]$, then the following asymptotic expansions hold at $h \rightarrow 0$, $\varepsilon_0 \rightarrow 0$:

$$\alpha = 1 - \sum_{i=1}^{n_0^{(0)}} f_1^{(i)} + O(h^2) + O(\varepsilon_0), \quad \beta = \sum_{i=1}^{n_0^{(1)}} g_1^{(i)} + O(h^2) + O(\varepsilon_0),$$

$$E^{(0)}(N) = 1 + \sum_{i=1}^{n_0^{(0)}} (f_H^{(i)} - f_1^{(i)}) + O(h^2) + O(\varepsilon_0), \quad E^{(1)}(N) = 1 + \sum_{i=1}^{n_0^{(1)}} (g_H^{(i)} - g_1^{(i)}) + O(h^2) + O(\varepsilon_0),$$

where $n_0^{(k)} = \min\{n : p_n^{(k)} \leq \varepsilon_0\}$, $k \in \{0, 1\}$, $g^{(i)} = (g_1^{(i)}, \dots, g_H^{(i)})^T$, $i = \overline{1, n_0^{(1)}}$, are calculated similarly to $f^{(i)}$ replacing $F_i^{(0)}(x)$ with $F_i^{(1)}(x)$ – the distribution function of λ_i under hypothesis H_1 .

P r o o f. Note that by the way of selecting $n_0^{(k)}$, we have $|G^{(k)}(x) - \bar{G}^{(k)}(x)| \leq \varepsilon_0$, $\forall x \in \mathbf{R}$, $k \in \{0, 1\}$. The result is directly derived from (6), (7), (10) and Theorem 2.

R e m a r k 1. In practice, it is not easy to determine $n_0^{(k)}$ theoretically with respect to a given value ε_0 . However, if we know $q_n^{(k)} = P_k(\Lambda_n \in (C_-, C_+)) \rightarrow 0$ as $n \rightarrow +\infty$, then $n_0^{(k)}$ can be chosen from the weaker condition: $n_0^{(k)} = \min\{n : q_n^{(k)} \leq \varepsilon_0\}$. This condition seems to be reasonable: in this case, all probabilities of the form $P_k(\Lambda \in (C_-, C_+), i = \overline{1, n})$, $n \geq n_0^{(k)}$, are much less than ε_0 and the test will terminate finitely with probability 1 as well.

Remark 2. In general, there is still a problem of calculating the probability $q_n = P_k(\Lambda_n \in (C_-, C_+))$ because of the difficulty in getting theoretically the probability distribution for the sum of independent random variables λ_n , $n \geq 1$. Note that $P_0(\Lambda_i \in (C_-, C_+), i = \overline{1, n}) = f_H^{(n)} - f_1^{(n)} + O(h^2)$. Therefore, if the way of finding index $n_0^{(k)}$ in Remark 1 is not feasible, these indices can be possibly chosen from the following conditions:

$$n_0^{(0)} = \inf \{n \geq 1 : f_H^{(n)} - f_1^{(n)} \leq \varepsilon_0\}, \quad n_0^{(1)} = \inf \{n \geq 1 : g_H^{(n)} - g_1^{(n)} \leq \varepsilon_0\}.$$

Remark 3. In the case of independent identically distributed observations, due to Stein's lemma [3] a sufficient condition for $E^{(k)}(N) < +\infty$, $k \in \{0, 1\}$, is $P_k(\lambda_1 = 0) < 1$, $k \in \{0, 1\}$.

Next, we modify the method above to approximate error probabilities of type I and II for the TSPRT. Let M be the maximal number of observations that we may measure. The Wald's TSPRT is formulated as follows. If the sampling process has progressed to the n -th stage ($n < M$):

$$\begin{cases} \text{reject } H_0 & \text{if } \Lambda_n \geq C_+, \\ \text{accept } H_0 & \text{if } \Lambda_n \leq C_-, \end{cases} \quad (11)$$

and takes one more observation if $\Lambda_n \in (C_-, C_+)$. If the SPRT does not lead to the terminal decision for $n < M$, then

$$\begin{cases} \text{reject } H_0 & \text{if } \Lambda_M > 0, \\ \text{accept } H_0 & \text{if } \Lambda_M < 0. \end{cases} \quad (12)$$

For the partition $\{t_i, i = \overline{1, H}\}$ defined above, we set the value t_{i_0} with respect to the smallest absolute value to be zero. Denote type I, II error probabilities and the number of observations used in TSPRT at the stage M by α_M , β_M and N_M respectively.

Theorem 4. If the functions $F_n^{(k)}(x)$, $n \geq 1$, $k \in \{0, 1\}$, have continuous derivatives of second order in $[C_- - C_+, C_+ - C_-]$, then the following expressions are valid:

$$\begin{aligned} \alpha_M &= 1 - \sum_{i=1}^{M-1} f_1^{(i)} - f_{i_0}^{(M)} + O(h^2), \quad \beta_M = \sum_{i=1}^{M-1} g_1^{(i)} + g_{i_0}^{(M)} + O(h^2), \\ E^{(0)}(N_M) &= 1 + \sum_{i=1}^{M-1} (f_H^{(i)} - f_1^{(i)}) + O(h^2), \quad E^{(1)}(N_M) = 1 + \sum_{i=1}^{M-1} (g_H^{(i)} - g_1^{(i)}) + O(h^2). \end{aligned}$$

Proof. We have:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{M-1} P_0(\Lambda_i \in (C_-, C_+), i = \overline{1, n-1}, \Lambda_n \geq C_+) = \\ &= 1 - P_0(\Lambda_1 < C_+) + \sum_{n=1}^{M-2} P_0(\Lambda_i \in (C_-, C_+), i = \overline{1, n}) - \sum_{n=2}^{M-1} P_0(\Lambda_i \in (C_-, C_+), i = \overline{1, n-1}, \Lambda_n < C_+) = \\ &= 1 - f_H^1 + \sum_{n=1}^{M-2} (f_H^n - f_1^n) - \sum_{n=2}^{M-1} f_H^n + O(h^2) = 1 - f_H^{(M-1)} - \sum_{n=1}^{M-2} f_1^{(n)} + O(h^2), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & P_0(\Lambda_i \in (C_-, C_+), i = \overline{1, M-1}, \Lambda_M > 0) = \\ &= P_0(\Lambda_i \in (C_-, C_+), i = \overline{1, M-1}) - P_0(\Lambda_i \in (C_-, C_+), i = \overline{1, M-1}, \Lambda_M \leq 0) = \\ &= f_H^{(M-1)} - f_1^{(M-1)} - f_{i_0}^{(M)} + O(h^2). \end{aligned} \quad (14)$$

From (11)–(12) and (13)–(14), we obtain $\alpha_M = 1 - \sum_{i=1}^{M-1} f_1^{(i)} - f_{i_0}^{(M)} + O(h^2)$. Furthermore, we also have

$$P_0(N_M = 1) = P_0(\Lambda_1 \leq C_-) + P_0(\Lambda_1 \geq C_+) = 1 + f_1^{(1)} - f_H^{(1)} + O(h^2),$$

$$P_0(N_M = M) = P_0(\Lambda_i \in (C_-, C_+), i = \overline{1, M-1}) = f_H^{(M-1)} - f_1^{(M-1)} + O(h^2),$$

and for $2 \leq i \leq M-1$,

$$\begin{aligned} P_0(N_M = i) &= P_0(\Lambda_j \in (C_-, C_+), j = \overline{1, i-1}, \Lambda_i \leq C_-) + P_0(\Lambda_j \in (C_-, C_+), j = \overline{1, i-1}, \Lambda_i \geq C_+) = \\ &= f_1^{(i)} + P_0(\Lambda_j \in (C_-, C_+), j = \overline{1, i-1}) - P_0(\Lambda_j \in (C_-, C_+), j = \overline{1, i-1}, \Lambda_i \leq C_+) + O(h^2) = \\ &= f_1^{(i)} - f_H^{(i)} + f_H^{(i-1)} - f_1^{(i-1)} + O(h^2). \end{aligned}$$

From that we get:

$$\begin{aligned} E^{(0)}(N_M) &= \sum_{i=1}^M iP_0(N_M) = \\ &= 1 + f_1^{(1)} - f_H^{(1)} + M(f_H^{(M-1)} - f_1^{(M-1)}) + \sum_{i=2}^{M-1} i(f_1^{(i)} - f_H^{(i)} + f_H^{(i-1)} - f_1^{(i-1)}) + O(h^2) = \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{M-1} (f_H^{(i)} - f_1^{(i)}) + O(h^2). \end{aligned}$$

The rest part is proved similarly.

R e m a r k 4. From Theorem 1 and Corollary 1, we have:

(i) In the case that functions $F_n^{(k)}(x)$, $k \in \{0, 1\}$, are C-Lipschitzian on $[C_- - C_+, C_+ - C_-]$, the formulas in Theorem 3 and Theorem 4 are still valid with the order of accuracy $O(1)$.

(ii) By the definition of the Riemann – Stieltjes integral and Theorem 1, these formulas in Theorem 3 and Theorem 4 are still applicable in the case of continuous functions $F_n^{(k)}(x)$, $k \in \{0, 1\}$, without any conclusion about the order of accuracy. For the TSPRT, due to the limited number of terms in the sum we can increase the number H to get better approximation.

2.2. Robustness evaluation. In practice, there is often the case that the observed data do not follow the hypothetical model exactly, e. g. the hypothetical model is distorted [14]. This leads to the distortion in the distributions of increments λ_n of log-likelihood statistic Λ_n . In this section, we study the case where these influences can be described in the form of contaminated model of Huber type [15] for each increment λ_n as follows:

$$\bar{F}_n(x) = (1 - \delta)F_n(x) + \delta\tilde{F}_n(x), \quad n \geq 1,$$

where $\tilde{F}_n(x)$ is a contaminating CDF, and $\delta \in [0, 1/2]$ is the level of contamination.

Introduce the notation: $\bar{p}_n^{(k)}, \bar{f}^{(n)}, \bar{D}^{(n)}, \bar{\alpha}, \bar{\alpha}_M$ are the elements calculated similarly to $p_n^{(k)}, f^{(n)}, D^{(n)}, \alpha, \alpha_M$ replacing $F_n^{(0)}(x)$ with $\bar{F}_n^{(0)}(x)$, $n \geq 1$, $\bar{N}$ and $\bar{N}_M$ are the new stopping times for the SPRT and TSPRT respectively; $\hat{D}^{(n)}$ are the elements also calculated analogously to $D^{(n)}$ replacing $F_n^{(0)}(x)$ with $\tilde{F}_n^{(0)}(x) - F_n^{(0)}(x)$, $n \geq 1$. Put $Q^{(1)} = \hat{f}^{(1)}$ that is computed similarly to $f^{(1)}$ replacing $F_1^{(0)}(x)$ with $\tilde{F}_1^{(0)}(x) - F_1^{(0)}(x)$, and for $n \geq 2$:

$$Q^{(n)} = \hat{D}^{(n)}D^{(n-1)}D^{(2)}f^{(1)} + \dots + D^{(n)}D^{(n-1)}\hat{D}^{(2)}f^{(1)} + D^{(n)}D^{(n-1)}D^{(2)}\hat{f}^{(1)}.$$

Theorem 5. Assume that $E^{(k)}(N) < +\infty$ and $E^{(k)}(\bar{N}) < +\infty$, $k \in \{0, 1\}$. If the functions $F_n^{(k)}(x)$ and $\tilde{F}_n^{(k)}(x)$, $n \geq 1$, $k \in \{0, 1\}$, have continuous derivatives of second order in $[C_- - C_+, C_+ - C_-]$, then the following expressions hold:

$$\bar{\alpha} - \alpha = -\delta \sum_{i=1}^{n_0^{(0)}} Q_1^{(i)} + O(h^2) + O(\delta^2) + O(\varepsilon_0), \quad \bar{\beta} - \beta = \delta \sum_{i=1}^{n_0^{(1)}} R_1^{(i)} + O(h^2) + O(\delta^2) + O(\varepsilon_0),$$

$$E^{(0)}(\bar{N}) - E^{(0)}(N) = \delta \sum_{i=1}^{n_0^{(0)}} (Q_H^{(i)} - Q_1^{(i)}) + O(h^2) + O(\delta^2) + O(\varepsilon_0),$$

$$E^{(1)}(\bar{N}) - E^{(1)}(N) = \delta \sum_{i=1}^{n_0^{(1)}} (R_H^{(i)} - R_1^{(i)}) + O(h^2) + O(\delta^2) + O(\varepsilon_0),$$

where $n_0^{(k)} = \inf\{n \geq 1 : p_n^{(k)} \leq \varepsilon_0 \text{ and } \bar{p}_n^{(k)} \leq \varepsilon_0\}$, $k \in \{0, 1\}$, $R^{(n)}$, $n \geq 1$, are calculated similarly to $Q^{(n)}$ replacing $F_n^{(0)}(x)$, $\tilde{F}_n^{(0)}(x)$ with $F_n^{(1)}(x)$, $\tilde{F}_n^{(1)}(x)$.

Proof. Note that $\bar{f}^{(1)} = f^{(1)} + \delta \hat{f}^{(1)}$, $\bar{D}^{(n)} = D^{(n)} + \delta \hat{D}^{(n)}$, $f^n = D^{(n)} f^{(n-1)}$, $\bar{f}^n = \bar{D}^{(n)} \bar{f}^{(n-1)}$, $n \geq 2$. From that, we have:

$$\begin{aligned} \bar{f}^{(2)} &= \bar{D}^{(2)} \bar{f}^{(1)} = (D^{(2)} + \delta \hat{D}^{(2)})(f^{(1)} + \delta \hat{f}^{(1)}) = f^{(2)} + \delta Q^{(2)} + O_H(\delta^2), \\ \bar{f}^{(3)} &= \bar{D}^{(3)} \bar{f}^{(2)} = (D^{(3)} + \delta \hat{D}^{(3)})(f^{(2)} + \delta Q^{(2)}) + O_H(\delta^2) = f^{(3)} + \delta Q^{(3)} + O_H(\delta^2), \end{aligned}$$

where $O_H(\delta^2)$ is an H -dimensional column vector with all elements that are $O(\delta^2)$.

By induction, we get: $\bar{f}^{(n)} = f^{(n)} + \delta Q^{(n)} + O_H(\delta^2)$, $n \geq 1$. The rest parts of proof are derived from the proof of Theorem 3.

Similarly, we also have the following result for the TSPRT.

Theorem 6. If the functions $F_n^{(k)}(x)$ and $\tilde{F}_n^{(k)}(x)$, $n = \overline{1, M}$, $k \in \{0, 1\}$, have continuous derivatives of second order in $[C_- - C_+, C_+ - C_-]$, then the following expressions hold:

$$\bar{\alpha}_M - \alpha_M = -\delta \left(\sum_{i=1}^{M-1} Q_1^{(i)} + Q_{i_0}^{(M)} \right) + O(h^2) + O(\delta^2), \quad \bar{\beta}_M - \beta_M = \delta \left(\sum_{i=1}^{M-1} R_1^{(i)} + R_{i_0}^{(M)} \right) + O(h^2) + O(\delta^2),$$

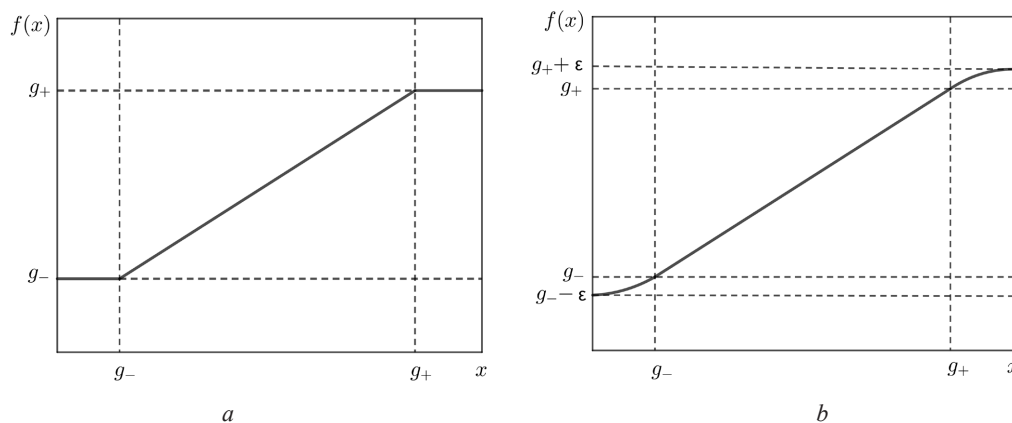
$$E^{(0)}(\bar{N}_M) - E^{(0)}(N_M) = \delta \sum_{i=1}^{M-1} (Q_H^{(i)} - Q_1^{(i)}) + O(h^2) + O(\delta^2),$$

$$E^{(1)}(\bar{N}_M) - E^{(1)}(N_M) = \delta \sum_{i=1}^{M-1} (R_H^{(i)} - R_1^{(i)}) + O(h^2) + O(\delta^2).$$

2.3. Robustifying the TSPRT. To reduce the influence of outliers in λ_n , we can truncate the values of λ_n by the following function (Figure a):

$$f_{g_-}^{g_+}(x) = g_- \mathbf{1}_{(-\infty, g_-]}(x) + x \mathbf{1}_{(g_-, g_+)}(x) + g_+ \mathbf{1}_{[g_+, +\infty)}(x), \quad (15)$$

where g_- , g_+ are two given values, $g_- < 0 < g_+$.



Plots of truncated functions

Put $\bar{\lambda}_n = f_{g_-}^{g_+}(\lambda_n)$, $\bar{\Lambda}_n = \bar{\lambda}_1 + \dots + \bar{\lambda}_n$, $\bar{N} = \inf \{n : \bar{\Lambda}_n \notin (C_-, C_+)\}$, $\bar{\alpha} = P_0(\bar{\Lambda}_{\bar{N}} \geq C_+)$, $\bar{\beta} = P_1(\bar{\Lambda}_{\bar{N}} \leq C_-)$.

L e m m a 2. *If $g_- \leq C_- - C_+$ and $g_+ \geq C_+ - C_-$, then:*

(i) $P_k(N = i) = P_k(\bar{N} = i)$, $i \geq 1$, $k \in \{0, 1\}$,

(ii) $\alpha = \bar{\alpha}$, $\beta = \bar{\beta}$.

P r o o f.

(i) Clearly, $\bar{\lambda}_t = \lambda_t$ if and only if $\lambda_t \in [g_-, g_+]$, and $P_k(\bar{\lambda}_t > x) = P_k(\lambda_t > x)$, $\forall x \in [g_-, g_+]$, $k \in \{0, 1\}$. Additionally, if $x, x + y \in (C_-, C_+)$ then $|y| < C_+ - C_-$. Therefore,

$$P_k(\bar{N} = 1) = P_k(\bar{\lambda}_1 \geq C_+) + P_k(\bar{\lambda}_1 \leq C_-) = P_k(\lambda_1 \geq C_+) + P_k(\lambda_1 \leq C_-) = P_k(N = 1).$$

For $i > 1$, we get

$$\begin{aligned} P_k(\bar{N} = i) &= P_k(\bar{\Lambda}_j \in (C_-, C_+), j = \overline{1, i-1}, \bar{\Lambda}_i \notin (C_-, C_+)) = \\ &= P_k(\Lambda_j \in (C_-, C_+), j = \overline{1, i-1}, \Lambda_{i-1} + \bar{\lambda}_i \notin (C_-, C_+)) = \\ &= P_k(\Lambda_j \in (C_-, C_+), j = \overline{1, i-1}) - P_k(\Lambda_j \in (C_-, C_+), j = \overline{1, i-1}, \Lambda_i \in (C_-, C_+)) = \\ &= P_k(\Lambda_j \in (C_-, C_+), j = \overline{1, i-1}, \Lambda_i \notin (C_-, C_+)). \end{aligned}$$

So, N and $\bar{N}$ have the same probability distributions.

(ii) Similarly, $P_0(\bar{\Lambda}_1 \geq C_+) = P_0(\bar{\lambda}_1 \geq C_+) = P_0(\lambda_1 \geq C_+) = P_0(\Lambda_1 \geq C_+)$ and

$$\begin{aligned} P_0(\bar{\Lambda}_j \in (C_-, C_+), j = \overline{1, i-1}, \bar{\Lambda}_i \geq C_+) &= P_0(\Lambda_j \in (C_-, C_+), j = \overline{1, i-1}, \bar{\lambda}_i \geq C_+ - \Lambda_{i-1}) = \\ &= \int_{C_-}^{C_+} dx_1 \int_{C_-}^{C_+} dx_2 \int_{C_-}^{C_+} dx_{i-2} \int_{C_-}^{C_+} f_{\Lambda_1, \dots, \Lambda_{i-1}}(x_1, \dots, x_{i-1}) P_0(\bar{\lambda}_i \geq C_+ - x_{i-1}) dx_{i-1} = \\ &= \int_{C_-}^{C_+} dx_1 \int_{C_-}^{C_+} dx_2 \int_{C_-}^{C_+} dx_{i-2} \int_{C_-}^{C_+} f_{\Lambda_1, \dots, \Lambda_{i-1}}(x_1, \dots, x_{i-1}) P_0(\lambda_i \geq C_+ - x_{i-1}) dx_{i-1} = \\ &= P_0(\Lambda_j \in (C_-, C_+), j = \overline{1, i-1}, \lambda_i \geq C_+ - \Lambda_{i-1}) = P_0(\Lambda_j \in (C_-, C_+), j = \overline{1, i-1}, \Lambda_i \geq C_+). \end{aligned}$$

Therefore, $P_0(\bar{\Lambda}_{\bar{N}} \geq C_+) = P_0(\Lambda_N \geq C_+)$. Similarly, we obtain $P_1(\bar{\Lambda}_{\bar{N}} \leq C_-) = P_1(\Lambda_N \leq C_-)$.

C o r o l l a r y 2. *The results of Lemma 2 are still valid for the TSPRT.*

R e m a r k 5. There are some remarks for choosing the thresholds g_- and g_+ :

(i) If $g_- \geq 0$, then $\beta_M = 0$; if $g_+ \leq 0$, then $\alpha_M = 0$. Therefore, the possible choice is that we should select $g_- \in (C_- - C_+, 0)$ and $g_+ \in (0, C_+ - C_-)$.

(ii) If g_- increases, β_M will decrease, but α_M will increase. If g_+ decreases, there is an opposite picture. So, the possible and reasonable criterion for choosing g_- and g_+ is to minimize the sum $\alpha_M + \beta_M$ for the TSPRT.

Using the truncated function (15), the distribution function of $\bar{\lambda}_n$ is:

$$F_{\bar{\lambda}_n}(x) = P(\bar{\lambda}_n < x) = \begin{cases} 0, & x \leq g_-, \\ F_{\lambda_n}(x), & g_- < x \leq g_+, \\ 1, & x > g_+, \end{cases}$$

which is generally a discontinuous function. Therefore, the numerical results in Theorem 3 and Theorem 4 cannot be applied for calculating the test characteristics. To make use of the proposed numerical approach, we can use a modified version of the function (15) in the following form (Figure b):

$$f_{g_-}^{g_+}(x) = \begin{cases} \frac{\varepsilon g_-}{x} + g_- - \varepsilon, & x \leq g_-, \\ x, & g_- < x < g_+, \\ -\frac{\varepsilon g_+}{x} + g_+ + \varepsilon, & x \geq g_+. \end{cases} \quad (16)$$

In this case, when $F_{\lambda_n}(x)$ is continuous, the distribution function of $\bar{\lambda}_n$ is also continuous and has the following form:

$$F_{\bar{\lambda}_n}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq g_- - \varepsilon, \\ F_{\lambda_n}\left(\frac{\varepsilon g_-}{x - g_- + \varepsilon}\right), & g_- - \varepsilon < x \leq g_-, \\ F_{\lambda_n}(x), & g_- < x < g_+, \\ F_{\lambda_n}\left(\frac{\varepsilon g_+}{g_+ + \varepsilon - x}\right), & g_+ \leq x < g_+ + \varepsilon, \\ 1, & x \geq g_+ + \varepsilon. \end{cases}$$

When $|g_+ - g_-|$ is small, we have to take more observations for the sequential test (e. g. the number of observations tends to the maximum number M). This means that we have more information for the test and this leads to the downward trend of both error probabilities. However, when $|g_+ - g_-|$ is sufficiently small, the number of observations are mostly M and we have to make the final decision according to (15). In this case, both error probabilities can increase again.

The following algorithm can be used to choose thresholds g_- and g_+ :

- choose a positive value $K \in \mathbf{N}$ and a small value $\varepsilon > 0$;
- split $[C_- - C_+, 0]$ and $[0, C_+ - C_-]$ into cells by points $\{g_-(i), i = \overline{1, K}\}$ and $\{g_+(i), i = \overline{1, K}\}$ respectively, where $g_-(i) = -ih$, $g_+(i) = ih$, $h = \frac{C_+ - C_-}{K+1}$;
- for each pair $(g_-(i), g_+(j))$ calculate $\alpha_M(i, j)$ and $\beta_M(i, j)$ using Theorem 4 and truncated function (16);
- choose $(g_-(i), g_+(j))$ such that $\alpha_M(i, j) + \beta_M(i, j)$ is minimal.

In practice, due to the limitation of time and capacity of computation we can consider only the symmetric case $g_- = -g_+$ and select $(g_-(i), g_+(i))$ such that $\alpha_M(i, i) + \beta_M(i, i)$ is minimal.

2.4. Application for sequential testing on parameters of time series with trend. Let $x_1, x_2, \dots$ be the observed time series with a trend in the following form [8]:

$$x_t = \theta^T \psi(t) + \xi_t, \quad t \geq 1, \quad (17)$$

where $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_m(t))^T$, $t \geq 1$, is the vector of basic functions of trend, $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)^T \in \mathbf{R}^m$ is an unknown vector of coefficients, and $\{\xi_t, t \geq 1\}$ is the sequence of independent identically distributed random variables, $\xi_t \sim N(0, \sigma^2)$, σ is a given positive constant.

Consider two simple hypotheses concerning the trend coefficients:

$$H_0: \theta = \theta^0, H_1: \theta = \theta^1,$$

where $\theta^0, \theta^1 \in \mathbf{R}^m$ are two given vectors, $\theta^0 \neq \theta^1$.

For all $t \geq 1$ we have: $x_t \sim N(\theta^T \psi(t); \sigma^2)$, $t \geq 1$, $p_t(x, \theta) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x - \theta^T \psi(t))^2\right\}$ and

$$\lambda_t = \lambda_t(x_t) = -\frac{1}{2\sigma^2} \left\{ 2x_t(\theta^0 - \theta^1)^T \psi(t) + (\theta^1)^T \psi(t) \psi^T(t) \theta^1 - (\theta^0)^T \psi(t) \psi^T(t) \theta^0 \right\}.$$

Put $V_n = \sum_{t=1}^n \psi(t) \psi^T(t)$. Due to the properties of the normal distribution, λ_t and Λ_n also have the normal distributions with the following parameters:

$$E(\lambda_t) = -\frac{1}{2\sigma^2} \left\{ 2(\theta^0 - \theta^1)^T \psi(t) \psi^T(t) \theta + (\theta^1)^T \psi(t) \psi^T(t) \theta^1 - (\theta^0)^T \psi(t) \psi^T(t) \theta^0 \right\},$$

$$E(\Lambda_n) = -\frac{1}{2\sigma^2} \left\{ 2(\theta^0 - \theta^1)^T V_n \theta + (\theta^1)^T V_n \theta^1 - (\theta^0)^T V_n \theta^0 \right\},$$

$$D(\lambda_t) = \frac{(\theta^0 - \theta^1)^T \psi(t) \psi^T(t) (\theta^0 - \theta^1)}{\sigma^2}, \quad D(\Lambda_n) = \frac{(\theta^0 - \theta^1)^T V_n (\theta^0 - \theta^1)}{\sigma^2}.$$

Introduce the notation: $\Gamma = (\theta^0 - \theta^1)(\theta^0 - \theta^1)^T$, $\sigma_n^2 = D^{(0)}(\lambda_n) = D^{(1)}(\lambda_n) = \frac{(\theta^0 - \theta^1)^T \psi(n) \psi^T(n) (\theta^0 - \theta^1)}{\sigma^2}$ and for $k \in \{0, 1\}$

$$\mu_n^{(k)} = E^{(k)}(\lambda_n) = \frac{(-1)^{k+1}}{2\sigma^2} (\theta^0 - \theta^1)^T \psi(n) \psi^T(n) (\theta^0 - \theta^1) = \frac{(-1)^{k+1} \sigma_n^2}{2},$$

$$s_n^2 = \sum_{t=1}^n \sigma_t^2, \quad m_n^{(k)} = \sum_{t=1}^n \mu_t^{(k)} = \frac{(-1)^{k+1} s_n^2}{2}.$$

Without loss of generality assume that hypothesis H_0 is true and we are interested in studying type I error probability α and the average number of observations $E^{(0)}(N)$.

2.4.1. Calculation of the test characteristics. A sufficient condition for the termination of the test can be found in [16].

Theorem 7 [16]. *If $\text{tr}(\Gamma V_n) \rightarrow +\infty$ as $n \rightarrow +\infty$, then the test (3)–(4) terminates finitely with probability 1.*

Furthermore, in this case we know the exact probability distribution of Λ_n , $\Lambda_n \sim N(m_n^{(k)}, s_n^2)$. When hypothesis H_k is true, the index $n_0^{(k)}$, $k \in \{0, 1\}$, can be chosen from the condition:

$$n_0^{(k)} = \inf \{n \geq 1 : P_k(\Lambda_n \in (C_-, C_+)) \leq \varepsilon_0\}, \quad k \in \{0, 1\},$$

where ε_0 is a given small positive value.

Next, we can use Theorem 3 and Theorem 4 for calculating the test characteristics for the SPRT and TSPRT as well, where $F_n^{(k)}(x)$, $n \geq 1$, are the normal distribution functions $N(\mu_n^{(k)}, \sigma_n^2)$, and the index $n_0^{(k)}$ can be calculated following Remarks 1, 2. In practice, the condition $E^{(k)}(N) < +\infty$ of Theorem 3 can be neglected because under the condition $\text{tr}(\Gamma V_n) \rightarrow +\infty$ as $n \rightarrow +\infty$, we have [16]:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_k(\Lambda_n \in (C_-, C_+)) = 0, \quad k \in \{0, 1\}.$$

2.4.2. Robustness evaluation for the TSPRT. In this section, we will use the results of Theorem 4 and Theorem 6 for evaluating the robustness of the TSPRT with the maximum number of observations M for model (17) under the distortion on its different components.

Case 1. Distortion in the error component ξ_t . Instead of hypothetical model (17) we consider the following contaminated model:

$$\bar{x}_t = \theta^T \psi(t) + \bar{\xi}_t, \quad t \geq 1, \quad (18)$$

where $\bar{\xi}_t = (1 - \tau_t)\xi_t + \tau_t \tilde{\xi}_t$, $t \geq 1$, $\{\tilde{\xi}_t, t \geq 1\}$ is a sequence of independent random variables, $\{\tau_t, t \geq 1\}$ is a sequence of independent identically distributed random variables, $P(\tau_t = 0) = 1 - \delta$, $P(\tau_t = 1) = \delta$, $\tau_t, \xi_t, \tilde{\xi}_t$ are independent and $\delta \in [0, 1/2)$ is the level of contamination.

Let $\bar{\alpha}_M$ be the error probability of type I when replacing λ_t by $\bar{\lambda}_t$, where $\bar{\lambda}_t = \lambda_t(\bar{x}_t)$, $t \geq 1$, and $\bar{N}_M$ is the new stopping time for the TSPRT at stage M .

Theorem 8. *For the model (18) and the TSPRT (3), (11)–(12), the following expressions are valid:*

$$\bar{\alpha}_M = \alpha_M + O(h^2) + O(\delta), \quad E^{(0)}(\bar{N}_M) = E^{(0)}(N_M) + O(h^2) + O(\delta).$$

P r o o f. Under hypothesis H_0 , we have: $\bar{\lambda}_t = -\frac{\sigma_t^2}{2} - \frac{(\theta^0 - \theta^1)^T \psi(t)}{\sigma^2} \bar{\xi}_t$, $t \geq 1$. From that we get:

$$\begin{aligned} \bar{F}_n^{(0)}(x) &= P_0(\bar{\lambda}_n < x) = P_0(\bar{\lambda}_n < x, \tau_n = 0) + P_0(\bar{\lambda}_n < x, \tau_n = 1) = \\ &= (1 - \delta) P_0\left(-\frac{\sigma_n^2}{2} - \frac{(\theta^0 - \theta^1)^T \psi(n)}{\sigma^2} \xi_n < x\right) + \delta P_0\left(-\frac{\sigma_n^2}{2} - \frac{(\theta^0 - \theta^1)^T \psi(n)}{\sigma^2} \tilde{\xi}_n < x\right) = \\ &= (1 - \delta) F_n^{(0)}(x) + \delta \tilde{F}_n^{(0)}(x), \end{aligned} \quad (19)$$

where $\tilde{F}_n^{(0)}(x)$ is the distribution function of random variable $\zeta_n = -\frac{\sigma_n^2}{2} - \frac{(\theta^0 - \theta^1)^T \psi(n)}{\sigma^2} \tilde{\xi}_n$. The rest part of proof is directly derived from (19) and Theorem 6.

C a s e 2. Distortion in the basic function of trend $\psi(t)$. We consider the following model:

$$\bar{x}_t = \theta^T \tilde{\psi}(t) + \xi_t, \quad t \geq 1, \quad (20)$$

where $\tilde{\psi}(t) = (\tilde{\psi}_1(t), \dots, \tilde{\psi}_m(t))^T$ is a basic function of trend such that with a given positive δ ,

$$\|\tilde{\psi}(t) - \psi(t)\| = \max_{1 \leq i \leq m} \sup_{t \geq 1} |\tilde{\psi}_i(t) - \psi_i(t)| \leq \delta.$$

Theorem 9. For the model (20) and the TSPRT (3), (11)–(12), the following expressions are valid:

$$\bar{\alpha}_M = \alpha_M + O(h^2) + O(\delta), \quad E^{(0)}(\bar{N}_M) = E^{(0)}(N_M) + O(h^2) + O(\delta).$$

P r o o f. Put $\eta(t) = (\theta^0 - \theta^1)^T \tilde{\psi}(t) - (\theta^0 - \theta^1)^T \psi(t)$, $t \geq 1$, then $|\eta(t)| \leq \delta \sum_{i=1}^m |\theta_i^0 - \theta_i^1|$. Under hypothesis H_0 , we have $\lambda_n \sim N(\mu_n^{(0)}, \sigma_n^2)$, $\bar{\lambda}_n \sim N(\tilde{\mu}_n^{(0)}, \tilde{\sigma}_n^2)$. Let $\varphi(x)$ and $\Phi(x)$ be the standard normal PDF and CDF. Therefore, for all $x \in [C_- - C_+, C_+ - C_-]$, $\bar{F}_n^{(0)}(x) - F_n^{(0)}(x) = \Phi\left(\frac{x - \tilde{\mu}_n^{(0)}}{\tilde{\sigma}_n}\right) - \Phi\left(\frac{x - \mu_n^{(0)}}{\sigma_n}\right)$.

Using mean value theorem, there exists $\zeta \in \mathbf{R}$ such that

$$\bar{F}_n^{(0)}(x) - F_n^{(0)}(x) = \left(\frac{x - \tilde{\mu}_n^{(0)}}{\tilde{\sigma}_n} - \frac{x - \mu_n^{(0)}}{\sigma_n}\right) \varphi(\zeta) = \left(\frac{x}{\tilde{\sigma}_n} + \frac{\tilde{\sigma}_n}{2} - \frac{x}{\sigma_n} - \frac{\sigma_n}{2}\right) \varphi(\zeta) = (\tilde{\sigma}_n - \sigma_n) \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{\sigma_n \tilde{\sigma}_n}\right) \varphi(\zeta).$$

On the other hand, $|\tilde{\sigma}_n - \sigma_n| = \frac{\|(\theta^0 - \theta^1)^T \tilde{\psi}(n) - (\theta^0 - \theta^1)^T \psi(n)\|}{\sigma} \leq \frac{|\eta(n)|}{\sigma}$. From that, we get:

$$\bar{F}_n^{(0)}(x) - F_n^{(0)}(x) = O(\delta), \quad \forall x \in [C_- - C_+, C_+ - C_-], \quad n \geq 1,$$

which implies $\bar{f}^{(1)} = f^{(1)} + O_H(\delta)$, $\bar{D}^{(n)} = D^{(n)} + O_{H \times H}(\delta)$, $n \geq 2$. Therefore, $\bar{f}^{(n)} = f^{(n)} + O_H(\delta)$, $n \geq 1$. The rest part of proof is derived from Theorem 3.

C a s e 3. Joint distortion in both components $\psi(t)$ and ξ_t . Consider the following mixed model:

$$\bar{x}_t = \theta^T \tilde{\psi}(t) + (1 - \tau_t) \xi_t + \tau_t \tilde{\xi}_t, \quad t \geq 1, \quad (21)$$

where $\{\tau_t, t \geq 1\}$ is a sequence of independent identically distributed random variables, $P(\tau_t = 0) = 1 - \delta_1$, $P(\tau_t = 1) = \delta_1$, and $\tau_t, \xi_t, \tilde{\xi}_t$ are independent, $\|\tilde{\psi}(t) - \psi(t)\| \leq \delta_2$, δ_1 and δ_2 are given positive constants, $\delta_1 \in (0, 1)$.

Theorem 10. For the model (21) and the TSPRT (3), (11)–(12), the following expressions are valid:

$$\bar{\alpha}_M = \alpha_M + O(h^2) + O(\delta_1) + O(\delta_2), E^{(0)}(\bar{N}_M) = E^{(0)}(N_M) + O(h^2) + O(\delta_1) + O(\delta_2).$$

Proof. Denote:

$$h(\psi, \xi, t) = -\frac{((\theta^0 - \theta^2)^T \psi(t))^2}{2\sigma^2} - \frac{(\theta^0 - \theta^1)^T \psi(t)}{\sigma^2} \xi_t, \quad t \geq 1.$$

For $n \geq 1$, we have

$$\begin{aligned} \bar{F}_n^{(0)}(x) &= P_0(\bar{\lambda}_n < x, \tau_n = 0) + P_0(\bar{\lambda}_n < x, \tau_n = 1) = (1 - \delta_1)P_0(h(\tilde{\psi}, \xi, n) < x) + \delta_1 P_0(h(\tilde{\psi}, \tilde{\xi}, n) < x) = \\ &= P_0(h(\tilde{\psi}, \xi, n) < x) + \delta_1 [P_0(h(\tilde{\psi}, \tilde{\xi}, n) < x) - P_0(h(\tilde{\psi}, \xi, n) < x)]. \end{aligned}$$

From the proof of Theorem 9, we knew $P_0(h(\tilde{\psi}, \xi, n) < x) = F_n^{(0)}(x) + O(\delta_2)$, $\forall x \in [C_- - C_+, C_+ - C_-]$. Therefore, $\bar{F}_n^{(0)}(x) = F_n^{(0)}(x) + O(\delta_1) + O(\delta_2)$. The rest part of the proof is similar to the proof of Theorem 9.

3. Numerical examples

The probability model (17) was considered and the hypotheses (2) were tested with the following values of parameters: $\sigma = 10$, $\theta^0 = (1, 2, 2, 2)^T$, $\theta^1 = (1, 1, 2, 1)^T$, $\psi(t) = (1, t/10, t^2/10, 1/t)$. The thresholds C_- and C_+ were calculated according to Wald [1]. Denote the sample estimate of a characteristic γ with Monte-Carlo method by $\hat{\gamma}$. The number of repetitions used in Monte-Carlo simulation was 100 000. The index $n_0^{(0)}$ was chosen according to Remark 1 with $\varepsilon_0 = 10^{-5}$. The approximate values $\bar{\alpha}, \bar{t}_0$ constructed as main terms in Theorem 3 and Monte-Carlo estimates $\hat{\alpha}, \hat{t}_0$ are presented in Tab. 1 for different values of partition number H , where $t_0 = E^{(0)}(N)$.

Table 1. Approximate values of the test characteristics for SPRT

α_0	β_0	$n_0^{(0)}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{t}_0$	H	$\bar{\alpha}$	$\bar{t}_0$
0.1	0.1	134	0.07896	46.37639	50	0.08345	46.13523
					100	0.07940	46.35240
0.1	0.05	136	0.07482	51.49942	50	0.08376	51.15358
					100	0.078362	51.43005

With very small value $\varepsilon_0 = 10^{-5}$, the change in value of index n_0 is negligible corresponding to different values of α_0 and β_0 . When the value H increases, the approximate values $\bar{\alpha}$ and $\bar{t}_0$ are much closer to their Monte-Carlo estimates $\hat{\alpha}$ and $\hat{t}_0$ respectively. To get better approximate values, we can increase $n_0^{(0)}$ or H , or both of them, but we should consider the possible amount of time used for calculating as well as computation capacity of the machine.

Next, we choose H to be 200. The approximate values of test characteristics calculated according Theorem 4 and Monte-Carlo estimates for the TSPRT are shown in Tab. 2 with different possible numbers of observations M .

Table 2. Approximate values of the test characteristics for TSPRT

α_0	β_0	M	$\hat{\alpha}_M$	$\bar{\alpha}_M$	$\hat{t}_0(M)$	$\bar{t}_0(M)$
0.1	0.1	40	0.22447	0.22427	38.08305	38.05922
		50	0.15096	0.15226	43.14025	43.11857
0.1	0.05	40	0.22345	0.22472	39.22610	39.22269
		50	0.15435	0.15490	45.97958	45.95119

For the TSPRT, there is no requirement of determining the index n_0 , and the maximum number of observations M is usually not too large. Due to these advantages we can possibly increase the number of partitions H to get better accuracy of approximation. In Tab. 2, with the same levels of α_0 , β_0 when the value M increases, the error probability α_M decreases but the average number of observations $E^{(0)}(N_M)$ increases. This can easily be understood because the more observations we have, the higher accuracy of the test is. In addition, the average number of observation has an upward trend with respect to M to reach its real expected values in Tab. 1. With $H = 200$, the approximate values $\bar{\alpha}_M$ and $\bar{t}_0(M)$ are relatively close to their Monte-Carlo estimates. Furthermore, compared with Tab. 1, the limitation of maximum number of observations leads to so remarkable change in error probabilities of the test.

References

1. Wald A. *Sequential Analysis*. New York, John Wiley and Sons, 1947. 212 p.
2. Govindarajulu Z. *Sequential Statistics*. Singapore, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 2004. 680 p. <https://doi.org/10.1142/5575>
3. Tartakovsky A., Nikiforov I., Basseville M. *Sequential Analysis: Hypothesis Testing and Changepoint Detection*. CRC Press, 2015. 603 p. <https://doi.org/10.1201/b17279>
4. Cox D. R., Miller H. D. *The theory of stochastic processes*. New York, John Wiley and Sons, 1965. 398 p.
5. Kharin A. An approach to performance analysis of the sequential probability ratio test for the simple hypotheses testing. *Vestnik BGU. Seriya 1, Fizika. Matematika. Informatika = Proceedings of the Belarusian State University*, 2002, no. 1, pp. 92–96 (in Russian).
6. Kharin A. Performance and robustness evaluation in sequential hypotheses testing. *Communications in Statistics – Theory and Methods*, 2016, vol. 45, no. 6, pp. 1693–1709. <https://doi.org/10.1080/03610926.2014.944659>
7. Kharin A. Robustness evaluation in sequential testing of composite hypotheses. *Austrian Journal of Statistics*, 2008, vol. 37, no. 1, pp. 51–60. <https://doi.org/10.17713/ajs.v37i1.286>
8. Kharin A. Y. *Robustness of Bayesian and Sequential Statistical Decision Rules*. Minsk, BSU, 2013, 207 p. (in Russian).
9. Kharin A. Robustness analysis for Bayesian sequential testing of composite hypotheses under simultaneous distortions of priors and likelihoods. *Austrian Journal of Statistics*, 2011, vol. 40, no. 1–2, pp. 65–73. <https://doi.org/10.17713/ajs.v40i1&2.198>
10. Liu Y., Li X. R. Performance analysis of sequential probability ratio test. *Sequential Analysis*, 2013, vol. 32, no. 4, pp. 469–497. <https://doi.org/10.1080/07474946.2013.843329>
11. Gut A. *Probability: A Graduate Course*. New York, Springer Science-Business Media, 2005. 603 p. <https://doi.org/10.1007/b138932>
12. Rudin W. *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw-Hill, 1976. 342 p.
13. Mercer P. R. Hadamard's inequality and Trapezoid Rules for the Riemann-Stieltjes integral. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2008, vol. 334, no. 2, pp. 921–926. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2008.03.026>
14. Kharin A., Galinskij V. On minimax robustness of Bayesian statistical prediction. *Probability Theory and Mathematical Statistics*. Vilnius, TEV, 1999, pp. 259–266.
15. Huber P. *Robust Statistics*. New York, John Wiley and Sons, 1981. 308 p. <https://doi.org/10.1002/0471725250>
16. Kharin A., Ton That Tu. Performance and robustness analysis of sequential hypotheses testing for time series with trend. *Austrian Journal of Statistics*, 2017, vol. 46, no. 3–4, pp. 23–36. <https://doi.org/10.17713/ajs.v46i3-4.668>

Список использованных источников

1. Wald, A. *Sequential Analysis* / A. Wald. – New York: John Wiley and Sons, 1947. – 212 p.
2. Govindarajulu, Z. *Sequential Statistics* / Z. Govindarajulu. – Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 2004. – 680 p. <https://doi.org/10.1142/5575>
3. Tartakovsky, A. *Sequential Analysis: Hypothesis Testing and Changepoint Detection* / A. Tartakovsky, I. Nikiforov, M. Basseville. – New York: Chapman and Hall/CRC, 2014. – 603 p. <https://doi.org/10.1201/b17279>
4. Cox, D. R. *The theory of stochastic processes* / D. R. Cox, H. D. Miller. – New York: John Wiley and Sons, 1965. – 398 p.
5. Харин, А. Ю. Об одном подходе к анализу последовательного критерия отношения правдоподобия для различения простых гипотез / А. Харин // Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. – 2002. – № 1. – С. 92–96.
6. Kharin, A. Performance and robustness evaluation in sequential hypotheses testing / A. Kharin // *Communications in Statistics – Theory and Methods*. – 2016. – Vol. 45, № 6. – P. 1693–1709. <https://doi.org/10.1080/03610926.2014.944659>
7. Kharin, A. Robustness evaluation in sequential testing of composite hypotheses / A. Kharin // *Aust. J. Stat.* – 2008. – Vol. 37, № 1. – P. 51–60. <https://doi.org/10.17713/ajs.v37i1.286>
8. Харин, А. Ю. Робастность байесовских и последовательных статистических решающих правил / А. Ю. Харин. – Минск: БГУ, 2013. – 207 с.
9. Kharin, A. Robustness analysis for Bayesian sequential testing of composite hypotheses under simultaneous distortions of priors and likelihoods / A. Kharin // *Aust. J. Stat.* – 2011. – Vol. 40, № 1/2. – P. 65–73. <https://doi.org/10.17713/ajs.v40i1&2.198>

10. Liu, Y. Performance analysis of sequential probability ratio test / Y. Liu, X. R. Li // *Sequential Analysis*. – 2013. – Vol. 32, № 4. – P. 469–497. <https://doi.org/10.1080/07474946.2013.843329>
11. Gut, A. *Probability: A Graduate Course* / A. Gut. – New York: Springer Science-Business Media, 2005. – 603 p. <https://doi.org/10.1007/b138932>
12. Rudin, W. *Principles of mathematical analysis* / W. Rudin. – McGraw-Hill, 1976. – 342 p.
13. Mercer, P. R. Hadamard's inequality and Trapezoid Rules for the Riemann-Stieltjes integral / P. R. Mercer // *J. Math. Analysis and Applications*. – 2008. – Vol. 334, № 2. – P. 921–926. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2008.03.026>
14. Kharin, A. On minimax robustness of Bayesian statistical prediction / A. Kharin, V. Galinskij // *Probability Theory and Mathematical Statistics*. – Vilnius: TEV, 1999. – P. 259–266.
15. Huber, P. *Robust Statistics* / P. Huber. – New York: John Wiley and Sons, 1981. – 308 p. <https://doi.org/10.1002/0471725250>
16. Kharin, A. Performance and robustness analysis of sequential hypotheses testing for time series with trend / A. Kharin, Ton That Tu // *Aust. J. Stat.* – 2017. – Vol. 46, № 3&4. – P. 23–36. <https://doi.org/10.17713/ajs.v46i3-4.668>

Information about the authors

Alexey Yu. Kharin – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Head of the Department of Probability Theory and Mathematical Statistics, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: kharinAY@bsu.by. <https://orcid.org/0000-0002-5790-1956>

Ton That Tu – Postgraduate Student, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: tthattu@gmail.com

Информация об авторах

Харин Алексей Юрьевич – кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой теории вероятностей и математической статистики, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: kharinAY@bsu.by. <https://orcid.org/0000-0002-5790-1956>

Тон Тхат Ту – соискатель, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: tthattu@gmail.com

ISSN 1561-2430 (Print)
 ISSN 2524-2415 (Online)
 УДК 519.216.73

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-2-193-209>

Поступила в редакцию 13.03.2018

Received 13.03.2018

И. В. Качан

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

НЕПРЕРЫВНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ОТ НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДРОБНЫМИ БРОУНОВСКИМИ ДВИЖЕНИЯМИ

Аннотация. Рассматриваются конечномерные стохастические дифференциальные уравнения с дробными броуновскими движениями, имеющими различные индексы Харста, большие $1/3$, и со сносом. Данные разнородные составные компоненты уравнений объединены в единый процесс. Решения уравнений понимаются в интегральном смысле, а интегралы, в свою очередь, являются потраекторными интегралами Губинелли [1] и, таким образом, реализуют известный подход в теории грубых траекторий (rough path) [2]. Указаны условия, обеспечивающие существование и единственность решений рассматриваемых стохастических дифференциальных уравнений. Такие условия оказываются достаточными для получения результатов, касающихся непрерывной зависимости от начальных данных. В работе доказывается потраекторная непрерывная зависимость от начальных условий и правых частей решений рассматриваемых стохастических дифференциальных уравнений. Полученный результат не зависит от вероятностных свойств дробных броуновских движений и поэтому легко переносится на произвольные процессы, непрерывные по Гельдеру с показателем, большим $1/3$. При этом возникающая в оценке константа получается экспоненциально зависящей от норм дробных броуновских движений. С учетом последнего факта и доказанного потраекторного результата впоследствии выводится логарифмическая непрерывная зависимость в среднем от начальных условий и правых частей решений рассматриваемых стохастических дифференциальных уравнений, представляющая собой основной результат настоящей статьи.

Ключевые слова: дробное броуновское движение, потраекторный интеграл Губинелли, стохастическое дифференциальное уравнение, интегральная непрерывность, устойчивость

Для цитирования. Качан, И. В. Непрерывная зависимость от начальных данных решений стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями / И. В. Качан // Вест. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2018. – Т. 54, № 2. – С. 193–209. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-2-193-209>

I. V. Kachan

Belarusian State University, Minsk, Belarus

CONTINUOUS DEPENDENCE ON THE INITIAL DATA OF THE SOLUTIONS OF STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH FRACTIONAL BROWNIAN MOTIONS

Abstract. In the present article we consider finite-dimensional stochastic differential equations with fractional Brownian motions having different Hurst indices larger than $1/3$ and a drift. These heterogeneous components of the equations are combined into a single process. The solutions of the equations are understood in the integral sense, and the integrals in turn are Gubinelli's rough path integrals [1] realizing the well-known approach of the rough paths theory [2]. The existence and uniqueness conditions of the solutions of these stochastic differential equations are specified. Such conditions are sufficient to obtain the results related the continuous dependence on the initial data. In this article, we have first proved a continuous dependence on the initial conditions and the right-hand sides of the solutions of the stochastic differential equations under consideration for almost all their trajectories. The result obtained does not depend on the probabilistic properties of fractional Brownian motions, and therefore it can be easily generalized to the case of arbitrary Holder-continuous processes with an exponent greater than $1/3$. In this case, the constant arising in the estimates appears to be exponentially dependent on the norms of fractional Brownian motions. Taking into account the last fact and the proved result, an expected logarithmic continuous dependence on the initial conditions and the right-hand sides of the solutions of the stochastic differential equations considered is subsequently derived. This is the major result of this article.

Keywords: multivariate fractional Brownian motion, rough paths theory, Gubinelli's derivative, stochastic differential equation, integral continuity, stability

For citation. Kachan I. V. Continuous dependence on the initial data of the solutions of stochastic differential equations with fractional Brownian motions. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk* = *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, vol. 54, no. 2, pp. 193–209 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-2-193-209>

Введение. Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение следующего вида:

$$dX_t = f(X_t)dB_t, \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

где $f = (f_0, \dots, f_d)$, $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $i = 0, \dots, d$, – достаточно гладкие функции с ограниченными производными, $B_t = (B_t^{(0)}, \dots, B_t^{(d)})^T$, $B_t^{(0)} = t$, $B_t^{(i)}$, $i = 1, \dots, d$, – независимые одномерные дробные броуновские движения с индексами Харста $H_i \in (1/3, 1)$. Наряду с уравнением (1) рассмотрим аналогичное уравнение с возмущенной правой частью

$$d\tilde{X}_t = \tilde{f}(\tilde{X}_t)dB_t, \quad t \in [0, T], \quad (2)$$

где $\tilde{f} = (\tilde{f}_0, \dots, \tilde{f}_d)$, $\tilde{f}_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $i = 0, \dots, d$, – также достаточно гладкие функции с ограниченными производными.

Существуют различные подходы к определению интегралов по дробному броуновскому движению (см. напр., [1; 2, гл. 5; 3]). В работе М. Губинелли [1] впервые вводится понятие поттраекторного интеграла для уравнений (1) общего вида, где в качестве $(B_t)_{t \in [0, T]}$ выступают функции, непрерывные по Гельдеру с показателем $\alpha > 1/3$. В монографии [2, гл. 4, 8] выводятся оценки простого вида для поттраекторных интегралов. В этих же работах получены результаты, касающиеся интегральной непрерывности решений уравнений (1) общего вида, см. [1, предложение 8; 2, теорема 8.5]. В приложении к стохастическим дифференциальным уравнениям указанные результаты означают, что имеет место почти наверное поттраекторная интегральная непрерывность решений уравнений вида (1) с дробным броуновским движением B_t , компоненты которого имеют один и тот же индекс Харста $H > 1/3$, в условиях существования указанных решений.

В [3] впервые исследуются уравнения смешанного типа, содержащие дробное броуновское движение B_t^H с индексом Харста $H > 1/2$ и стандартное броуновское движение W_t (являющееся частным случаем B_t^H при $H = 1/2$). Здесь интеграл по W_t рассматривается как стохастический интеграл Ито, а интеграл по B_t^H – как поттраекторный интеграл Римана – Стилтеса, введенный в [4]. Стоит отметить, что из выведенных в [3] оценок можно получить условия, обеспечивающие интегральную непрерывность решений уравнений смешанного типа. В [5] получены условия, гарантирующие (α, p) -асимптотическую устойчивость по вероятности и (α, p) -притяжение решений, [5, теоремы 1, 2]. Нетрудно заметить, что уравнения смешанного типа являются частным случаем уравнений (1).

Исследованию устойчивости уравнений вида (1) также посвящена статья [6]. В ней получены условия, обеспечивающие локальную почти наверное экспоненциальную устойчивость нулевого решения уравнения (1) на конечном отрезке $[0, T]$ с дробным броуновским движением B_t , компоненты которого имеют один и тот же индекс Харста $H > 1/2$.

Целью настоящей работы является доказательство непрерывной зависимости от начальных условий и правых частей решений уравнений (1), (2) с броуновским движением B_t , компоненты которого имеют различные индексы Харста $H_i > 1/3$, $i = 1, \dots, d$, в условиях существования указанных решений.

Обозначения. Будем использовать обозначение $|\cdot|$ для евклидовой нормы, U_1 , U_2 – для нормированных векторных пространств над полем $\mathbb{R}$. Пространство функций, непрерывных по Гельдеру с показателем $\alpha \in (0, 1]$, будем обозначать следующим образом:

$$C^\alpha([0, T], U_1) = \left\{ Y: [0, T] \rightarrow U_1 \mid \|Y\|_\alpha = \sup_{s, t \in [0, T], s \neq t} \frac{|Y_t - Y_s|_{U_1}}{|t - s|^\alpha} < \infty \right\}.$$

Выделим также класс $C_2^\alpha([0, T]^2, U_2)$ функций двух переменных $R(s, t) = R_{s,t}$, принимающих значения в U_2 , для которых существует константа C такая, что $|R_{s,t}| \leq C|t - s|^\alpha$ для всех $(s, t) \in [0, T]^2$.

Наименьшую такую константу будем обозначать $\|R\|_\alpha = \sup_{s, t \in [0, T], s \neq t} \frac{|R_{s,t}|_{U_2}}{|t - s|^\alpha}$.

Отметим, что для функции $Y \in C^\alpha([0, T], U_1)$ можно определить приращения $Y_{s,t} = Y_t - Y_s$, $(s, t) \in [0, T]^2$, принадлежащие $C_2^\alpha([0, T]^2, U_1)$. Поэтому мы будем также использовать обозначение $Y_{s,t}$ для соответствующих приращений функции одной переменной Y_t .

Будем использовать символ I для обозначения отрезков вещественной прямой: $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Длины таких отрезков также будем обозначать $|I| = b - a$. Через $\|\cdot\|_{\alpha, I}$ обозначим норму Гельдера с показателем α на отрезке $I \subset [0, T]$, а через $\|\cdot\|_{\alpha, I, \delta}$ – норму Гельдера с показателем α , взятую по подотрезкам отрезка I длины не более δ , т. е.

$$\|Y\|_{\alpha, I} = \sup_{\substack{s, t \in I \\ s \neq t}} \frac{|Y_{s,t}|}{|t-s|^\alpha}, \quad \|Y\|_{\alpha, I, \delta} = \sup_{\substack{s, t \in I \\ 0 < |t-s| \leq \delta}} \frac{|Y_{s,t}|}{|t-s|^\alpha}$$

для функций $Y \in C^\alpha([0, T], U_1)$ или $Y \in C_2^\alpha([0, T]^2, U_2)$. Очевидно,

$$\|\cdot\|_{\alpha, I, \delta} \leq \|\cdot\|_{\alpha, I} \leq \|\cdot\|_{\alpha, [0, T], |I|} \leq \|\cdot\|_{\alpha, [0, T]}$$

для любых $I \subset [0, T]$, $\delta \in (0, |I|]$. Для краткости будем опускать индекс $[0, T]$ для норм, связанных с исходным отрезком интегрирования, полагая $\|\cdot\|_\alpha := \|\cdot\|_{\alpha, [0, T]}$, $\|\cdot\|_{\alpha, \delta} := \|\cdot\|_{\alpha, [0, T], \delta}$.

Через $\mathfrak{L}(U_1, U_2)$ будем обозначать пространство линейных ограниченных операторов, действующих из U_1 в U_2 . Через $C_b^k(U_1, U_2)$ будем обозначать множество функций $\varphi: U_1 \rightarrow U_2$, имеющих непрерывные и ограниченные производные до порядка k включительно. Пусть

$$\|\varphi\|_{C_b^k} = \sum_{j=0}^k \|D^j \varphi\|_\infty,$$

где $\|\cdot\|_\infty$ – максимум-норма: $\|D^j \varphi\|_\infty = \max_{x \in U_1} |D^j \varphi(x)|$, $j = 0, \dots, k$; $D^0 \varphi = \varphi$, D – оператор дифференцирования.

Необходимые определения. Прежде чем определить решение уравнения (1), приведем некоторые необходимые сведения из теории интегрирования Губинелли [1; 2, гл. 4].

Пусть V, W – конечномерные банаховы пространства над полем $\mathbb{R}$, $\alpha \in (1/3, 1/2]$.

Определение 1. Для заданной функции $Z \in C^\alpha([0, T], W)$ будем говорить, что $Y \in C^\alpha([0, T], \mathfrak{L}(W, V))$ управляется Z , если существует $Y' \in C^\alpha([0, T], \mathfrak{L}(W, \mathfrak{L}(W, V)))$ (называемое производной Губинелли Y) такое, что остаток $R_{s,t}^Y = Y_{s,t} - Y'_s Z_{s,t}$ удовлетворяет $\|R^Y\|_{2\alpha} < \infty$.

Множество всех (Y, Y') таких, что Y управляется Z , будем обозначать $\mathfrak{D}_Z^{2\alpha}([0, T], \mathfrak{L}(W, V))$.

Определение 2. Для заданной функции $Z: [0, T] \rightarrow W$ будем говорить, что функция $\mathbb{Z}: [0, T]^2 \rightarrow W \otimes W$ является процессом второго порядка над Z , если она удовлетворяет следующему тождеству Чена:

$$\mathbb{Z}_{s,t} - \mathbb{Z}_{s,u} - \mathbb{Z}_{u,t} = Z_{s,u} \otimes Z_{u,t}$$

для любой тройки $(s, u, t) \in [0, T]^3$.

Определение 3. Пусть $(Y, Y') \in \mathfrak{D}_Z^{2\alpha}([0, T], \mathfrak{L}(W, V))$. Потраекторным интегралом Губинелли Y по Z будем называть предел интегральных сумм

$$\int_0^T Y dZ = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{t_i, t_{i+1} \in P} (Y_{t_i} Z_{t_i, t_{i+1}} + Y'_{t_i} \mathbb{Z}_{t_i, t_{i+1}}),$$

где $|P| = \max |t_i - t_{i+1}|$ – диаметр разбиения $P = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_l = T\}$, $\mathbb{Z}: [0, T]^2 \rightarrow W \otimes W$ – процесс второго порядка над Z , а предел понимается не зависящим от разбиений P .

З а м е ч а н и е 1. Слагаемое $Y'_t \mathbb{Z}_{t_i, t_{i+1}}$ записано корректно в том смысле, что имеет место изометрия $\mathcal{L}(W, \mathcal{L}(W, V)) \cong \mathcal{L}(W \otimes W, V)$. Действительно, мы можем понимать указанное выше произведение как действие билинейной формы на множитель, являющийся тензорным произведением двух векторов. Более точно, если

$$\mathbb{Z} = z \otimes z = (z_j z_k), \quad Y' = (y'_{ijk}), \quad i = 1, 2, \dots, \dim V, \quad j, k = 1, 2, \dots, \dim W,$$

то

$$Y' \mathbb{Z} = \left(\sum_{j,k=1}^{\dim W} y'_{ijk} z_j z_k \right)_{i=1}^{\dim V}.$$

Таким образом, потраекторный интеграл Губинелли $\int_0^T Y d\mathbb{Z}$ принимает значения в V .

В дальнейшем будем считать, что $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^{d+1}$.

Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ – вероятностное пространство, на котором заданы компоненты $B_t^{(i)}$, $i = 1, \dots, d$, дробного броуновского движения B_t и случайного процесса X_t . Введем обозначение: $H_{\min} = \min_{i=0, \dots, d} H_i$. Выберем и зафиксируем $H \in (1/3, 1/2]$ такое, что $H < H_{\min}$. Пусть $\xi, \tilde{\xi}$ – случайные величины, заданные на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ и принимающие значения в $\mathbb{R}^n$. Будем писать кратко «п.н.», подразумевая под этим сокращением «почти наверное». Для дробного броуновского движения B_t процесс второго порядка над ним можно определить явным образом.

О п р е д е л е н и е 4. Процессом второго порядка над B будем называть случайный процесс $\mathbb{B}: [0, T]^2 \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{(d+1) \times (d+1)}$, $\mathbb{B}_{s,t} = \left(\mathbb{B}_{s,t}^{(i,j)} \right)_{i,j=0}^d$, определенный следующими равенствами:

$$\begin{aligned} \mathbb{B}_{s,t}^{(i,j)} &= \lim_{|P| \rightarrow 0} \int_P B_{s,r}^{(i)} dB_r^{(j)}, \quad \int_P B_{s,r}^{(i)} dB_r^{(j)} = \sum_{t_k, t_{k+1} \in P} B_{s,t_k}^{(i)} B_{t_k, t_{k+1}}^{(j)}, \quad 1 \leq i < j \leq d, \\ \mathbb{B}_{s,t}^{(0,j)} &= \int_s^t B_{s,r}^{(j)} dr = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{t_k, t_{k+1} \in P} B_{s,t_k}^{(j)} (t_{k+1} - t_k), \quad 1 \leq j \leq d, \\ \mathbb{B}_{s,t}^{(i,i)} &= \frac{1}{2} \left(B_{s,t}^{(i)} \right)^2, \quad 0 \leq i \leq d, \quad \mathbb{B}_{s,t}^{(i,j)} = -\mathbb{B}_{s,t}^{(j,i)} + B_{s,t}^{(i)} B_{s,t}^{(j)}, \quad 0 \leq j < i \leq d, \end{aligned}$$

для всех пар $(s, t) \in [0, T]^2$, где $P = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_l = T\}$ – произвольное разбиение отрезка $[s, t]$,

$|P| = \max |t_k - t_{k+1}|$. Здесь также используются обозначения $\overset{L^2}{=} \overset{\text{п.н.}}{=}$ для того, чтобы показать, что соответствующие пределы понимаются в смысле $L^2(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ и п.н. соответственно.

З а м е ч а н и е 2. Следует пояснить корректность данного определения. Интегралы, входящие в $\mathbb{B}_{s,t}^{(0,j)}$, являются потраекторными интегралами Янга, соответствующие интегральные суммы сходятся п.н., поскольку сумма показателей Гельдера функции $B_{s,\cdot}^{(j)}$ и тождественной функции больше 1. Интегральные суммы $\mathbb{B}_{s,t}^{(i,j)}$ имеют конечный предел в L_2 ввиду [2, предложение 10.3], поскольку ковариационные функции процессов $B_t^{(i)}$, $B_t^{(j)}$ имеют конечную ρ -вариацию, $\rho = 1 / 2H < 2$ (см. [6, с. 417, предложение 2.2]). В справедливости тождества Чена для $\mathbb{B}$ можно убедиться непосредственной проверкой.

З а м е ч а н и е 3. Как следует из [2, теорема 10.4], имеет место конечность моментов $\mathbb{E} \|\mathbb{B}\|_{2H}^q$ любого порядка $q \geq 1$.

О п р е д е л е н и е 5. Решением уравнения (1) будем называть случайный процесс X_t такой, что $(X, X') \in \mathcal{D}_B^{2H}([0, T], \mathbb{R}^n)$ п.н. и почти наверное удовлетворяющий интегральному уравнению

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(X_s) dB_s, \quad t \in [0, T],$$

где интеграл понимается как потраекторный интеграл Губинелли. Будем говорить, что решение X_t уравнения (1) с начальным условием $X_0 = \xi$ единственно, если для любого другого решения Y_t уравнения (1) с начальным условием $Y_0 = \xi$ выполняется равенство $\mathbb{P}(X_t = Y_t \forall t \in [0, T]) = 1$.

Тривиальное обобщение теоремы 8.4 из [2] показывает, что достаточным условием существования и единственности решения уравнения (1) с начальным условием $X_0 = \xi$ является принадлежность $f \in C_b^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n \times (d+1)})$. Поэтому будем предполагать далее, что $f, \tilde{f} \in C_b^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n \times (d+1)})$. Причем f будем считать фиксированной, а $\tilde{f}$ – изменяющейся в малой окрестности f в пространстве $C_b^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n \times (d+1)})$.

Вспомогательные утверждения. Приведем ряд утверждений, которые будем использовать в дальнейшем для проведения оценок.

Пусть $Y \in C^\alpha([0, T], U)$, $I \subset [0, T]$. Следующие предложения касаются свойств гильбертовых норм.

Предложение 1. Если $\|Y\|_{\alpha; I, \delta} \leq M$, $\delta \leq |I|$, то $\|Y\|_{\alpha; I} \leq M(1 \vee 2\delta^{-(1-\alpha)} |I|^{1-\alpha})$.

Доказательство дословно повторяет доказательство утверждения 4.24 на с. 77 в [2].

Предложение 2. Пусть $t_j = (j \cdot \delta) \wedge T$, $I_j = [t_j, t_{j+1}] \subset [0, T]$, $j = 0, 1, \dots$. Тогда $\|Y\|_{H; \delta} \leq 2^{1-H} \bigvee_{j=0}^{[T/\delta]} \|Y\|_{H; I_j}$.

Доказательство. Зафиксируем произвольные $s, t \in [0, T]$ такие, что $0 < |t - s| \leq \delta$, $s < t$. Если $s, t \in I_j$ для некоторого j , то, очевидно, $|Y_{s,t}| \leq \|Y\|_{H; I_j} |t - s|^H \leq |t - s|^H \bigvee_{j=0}^{[T/\delta]} \|Y\|_{H; I_j}$. Иначе $s \in I_{j-1}$, $t \in I_j$. В таком случае

$$\begin{aligned} |Y_{s,t}| &\leq |Y_{s,t_j}| + |Y_{t_j,t}| \leq \|Y\|_{H; I_{j-1}} |t_j - s|^H + \|Y\|_{H; I_j} |t - t_j|^H \leq \\ &\leq (|t - t_j|^H + |t_j - s|^H) \bigvee_{j=0}^{[T/\delta]} \|Y\|_{H; I_j} \leq 2^{1-H} |t - s|^H \bigvee_{j=0}^{[T/\delta]} \|Y\|_{H; I_j}, \end{aligned}$$

где в последнем переходе было применено неравенство Йенсена для вогнутой функции $\phi(t) = t^H$, $t > 0$, $H \in (0, 1)$. Так как $1 - H > 0$, то $2^{1-H} > 1$, и в любом из рассмотренных случаев

$$|Y_{s,t}| \leq 2^{1-H} |t - s|^H \bigvee_{j=0}^{[T/\delta]} \|Y\|_{H; I_j}$$

для $|t - s| \leq \delta$. Из последнего неравенства следует требуемое утверждение.

В технических выкладках будет полезно следующее элементарное предложение.

Предложение 3. Пусть $u, \tilde{u} \in U$, $v, \tilde{v} \in V$, $u, \tilde{u} \in U \times V^{\otimes k}$, $v, \tilde{v} \in V^{\otimes k}$ – тензоры, U, V, U, V – нормированные векторные пространства над полем $\mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда справедливы неравенства

$$\begin{aligned} |uv - \tilde{u}\tilde{v}| &\leq |u| |v - \tilde{v}| + |\tilde{v}| |u - \tilde{u}|, \\ |uv - \tilde{u}\tilde{v}| &\leq |u| |v - \tilde{v}| + |\tilde{v}| |u - \tilde{u}|. \end{aligned}$$

Далее будет существенно использоваться следующее предложение [1, предложение 1; 2, теорема 4.10].

Предложение 4. Пусть функция $Z \in C^\alpha(I, W)$ такова, что $\|Z\|_{2\alpha; I} < \infty$ и $(Y, Y') \in \mathfrak{D}_Z^{2\alpha}(I, \mathcal{L}(W, V))$, $I = [0, T]$. Тогда существует константа $C > 0$, зависящая лишь от α и $|I| = T$, такая, что для любых $s, t \in I$ выполняется неравенство

$$\left| \int_s^t Y_r dZ_r - Y_s Z_{s,t} - Y'_s \bar{Z}_{s,t} \right| \leq C \left(\|Z\|_{\alpha; I} \|R^Y\|_{2\alpha; I} + \|Z\|_{2\alpha; I} \|Y'\|_{\alpha; I} \right) |t - s|^{3\alpha}.$$

Причем константа $C = C(\alpha, |I|)$ может быть выбрана не зависящей от $|I| = T$, если $T \in (0, 1]$.

Замечание 4. В предложении 4 несущественен тот факт, что отрезок I имеет вид $[0, T]$. Для произвольного отрезка $I = [a, a + T]$ предложение также справедливо ввиду замены переменных $\bar{s} = s - a$, $\bar{t} = t - a$ ($s, t \in [a, a + T]$, $\bar{s}, \bar{t} \in [0, T]$) и замен функций $\bar{Y}_{\bar{s}} = Y_{a+\bar{s}}$, $\bar{Z}_{\bar{s}} = Z_{a+\bar{s}}$ (очевидно, указанные нормы и интегралы сохраняют свои значения).

Предложение 5. Пусть X_t – решение уравнения. Тогда для любого $I \subset [0, T]$ длины $|I| \leq 1$ п.н. справедливы неравенства

$$\|X\|_{H;I} \leq K \left(C_B \|f\|_{C_b^2} \vee \left(C_B \|f\|_{C_b^2} \right)^{1/H} \right), \quad (3)$$

$$\|R^X\|_{2H;I} \leq \hat{K} \left(\left(C_B \|f\|_{C_b^2} \right)^2 \vee \left(C_B \|f\|_{C_b^2} \right)^{1+(1/H)} \right), \quad (4)$$

где $C_B = C_B(\|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H}) = \|B\|_H + \sqrt{\|\mathbb{B}\|_{2H}}$, а константы $K, \hat{K}$ зависят лишь от H .

Равенство (3) является простым следствием [2, предложение 8.3]. Поясним, как из [2, предложение 8.3] вывести равенство (4). Воспользуемся неравенствами из [2, предложение 8.3]:

$$\|R^X\|_{2H;\delta} \leq c_1 \|f\|_{C_b^2}^2 \|\mathbb{B}\|_{2H} + \|X\|_{H;\delta}^2, \quad \|X\|_{H;\delta} \leq c_0 \|f\|_{C_b^2} C_B,$$

справедливыми для достаточно малых $\delta \leq c_2 \left(C_B \|f\|_{C_b^2} \right)^{-1/H}$; здесь c_0, c_1, c_2 – некоторые константы, зависящие лишь от H . Комбинируя их, получим

$$\|R^X\|_{2H;\delta} \leq \|f\|_{C_b^2}^2 (c_1 + c_0^2) C_B^2 = c_3 \left(C_B \|f\|_{C_b^2} \right)^2,$$

где $c_3 = c_1 + c_0^2$. Применяя предложение 1, с учетом $|I| \leq 1$, будем иметь

$$\|R^X\|_{2H;I} \leq c_3 \left(C_B \|f\|_{C_b^2} \right)^2 (1 \vee 2\delta^{H-1}) \leq c_4 \left(\left(C_B \|f\|_{C_b^2} \right)^2 \vee \left(C_B \|f\|_{C_b^2} \right)^{1+\frac{1}{H}} \right),$$

где $c_4 = c_3 (1 \vee 2c_2^{H-1})$ зависит лишь от H .

Промежуточные результаты. В данном разделе мы получим ряд вспомогательных лемм, на которые будут опираться доказательства результатов, связанных с непрерывной зависимостью решений уравнений (1), (2). Все неравенства в дальнейшем понимаются выполненными почти наверное.

Лемма 1. Пусть X_t и $\tilde{X}_t$ – решения уравнений (1) и (2) соответственно с правыми частями $f, \tilde{f}$ из класса $C_b^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n \times (d+1)})$, причем функция $\tilde{f}$ такова, что $\|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} \leq 1$. Тогда для любого отрезка $I = [u, v] \subset [0, T]$ длины $|I| \leq 1$ и любых $s, t \in I$ п.н. имеет место следующее неравенство:

$$\left| \int_s^t (f(\tilde{X}_\tau) - \tilde{f}(\tilde{X}_\tau)) dB_\tau \right| \leq C_f \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} |t - s|^H,$$

где $C_f = C_f(H, \|f\|_{C_b^3}, \|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H})$ – случайная величина.

Доказательство. Используя предложение 4, получим оценку

$$\begin{aligned} \left| \int_s^t (f(\tilde{X}_\tau) - \tilde{f}(\tilde{X}_\tau)) dB_\tau \right| &\leq |f(\tilde{X}_s) - \tilde{f}(\tilde{X}_s)| |B_{s,t}| + |f(\tilde{X}_s)' - \tilde{f}(\tilde{X}_s)'| |\mathbb{B}_{s,t}| + \\ &+ C \left(\|B\|_H \|R^{f(\tilde{X}) - \tilde{f}(\tilde{X})}\|_{2H;I} + \|\mathbb{B}\|_{2H} \|f(\tilde{X})' - \tilde{f}(\tilde{X})'\|_{H;I} \right) |t - s|^{3H}. \end{aligned} \quad (5)$$

Следуя [2, лемма 7.3, теорема 8.4], имеют место следующие соотношения для производных Губинелли:

$$f(\tilde{X} \cdot)' = Df(\tilde{X} \cdot) \cdot \tilde{X}' = Df(\tilde{X} \cdot) \cdot \tilde{f}(\tilde{X} \cdot) = (Df \cdot \tilde{f})(\tilde{X} \cdot), \quad (6)$$

$$\tilde{f}(\tilde{X} \cdot)' = D\tilde{f}(\tilde{X} \cdot) \cdot \tilde{X}' = D\tilde{f}(\tilde{X} \cdot) \cdot \tilde{f}(\tilde{X} \cdot) = (D\tilde{f} \cdot \tilde{f})(\tilde{X} \cdot). \quad (7)$$

Из соотношений (6), (7) очевидным образом следуют оценки

$$\begin{aligned} |f(\tilde{X}_s) - \tilde{f}(\tilde{X}_s)| |B_{s,t}| &\leq \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} \|B\|_H |t-s|^H, \\ |f(\tilde{X}_s)' - \tilde{f}(\tilde{X}_s)'| |\mathbb{B}_{s,t}| &\leq \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} \|\tilde{f}\|_{C_b^2} \|\mathbb{B}\|_{2H} |t-s|^H \end{aligned}$$

для любых $s, t \in I$, $|I| \leq 1$. Из неравенства треугольника следует, что $\|\tilde{f}\|_{C_b^2} \leq \|f\|_{C_b^2} + 1$. Таким образом,

$$|f(\tilde{X}_s) - \tilde{f}(\tilde{X}_s)| |B_{s,t}| + |f(\tilde{X}_s)' - \tilde{f}(\tilde{X}_s)'| |\mathbb{B}_{s,t}| \leq c_0 \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} |t-s|^H, \quad (8)$$

где $c_0 = \|B\|_H + (1 + \|f\|_{C_b^3}) \|\mathbb{B}\|_{2H}$.

Далее оценим $\|f(\tilde{X})' - \tilde{f}(\tilde{X})'\|_{H;I}$. Используя соотношения (6), (7) и формулу конечных приращений, будем иметь

$$|f(\tilde{X} \cdot)'_{s,t} - \tilde{f}(\tilde{X} \cdot)'_{s,t}| = |(Df \cdot \tilde{f} - D\tilde{f} \cdot \tilde{f})(\tilde{X} \cdot)_{s,t}| \leq \|D((Df - D\tilde{f}) \cdot \tilde{f})\|_{\infty} \|\tilde{X}\|_{H;I} |t-s|^H.$$

Поскольку $D((Df - D\tilde{f}) \cdot \tilde{f}) = (D^2 f - D^2 \tilde{f}) \cdot \tilde{f} + (Df - D\tilde{f}) \cdot D\tilde{f}$, то нетрудно видеть, что $\|D((Df - D\tilde{f}) \cdot \tilde{f})\|_{\infty} \leq 2\|\tilde{f}\|_{C_b^2} \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} \leq 2(1 + \|f\|_{C_b^3}) \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2}$. Отсюда ввиду предложения 5 выведем неравенство

$$\|f(\tilde{X})' - \tilde{f}(\tilde{X})'\|_{H;I} \leq c_{f'} \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2}, \quad (9)$$

где $c_{f'} = 2(1 + \|f\|_{C_b^3}) K \left((1 + \|f\|_{C_b^3}) C_B \vee \left((1 + \|f\|_{C_b^3}) C_B \right)^{1/H} \right)$.

Осталось оценить $\|R^{f(\tilde{X}) - \tilde{f}(\tilde{X})}\|_{2H;I}$. Учитывая соотношения (6), (7) и формулу конечных приращений, для некоторого $\tilde{\theta} \in (0, 1)$ будем иметь

$$\begin{aligned} R_{s,t}^{f(\tilde{X}) - \tilde{f}(\tilde{X})} &= f(\tilde{X} \cdot)_{s,t} - \tilde{f}(\tilde{X} \cdot)_{s,t} - Df(\tilde{X}_s) \tilde{X}'_s B_{s,t} + D\tilde{f}(\tilde{X}_s) \tilde{X}'_s B_{s,t} = \\ &= ((f - \tilde{f})(\tilde{X} \cdot)_{s,t} - D(f - \tilde{f})(\tilde{X}_s) \tilde{X}_{s,t}) + (Df(\tilde{X}_s) - D\tilde{f}(\tilde{X}_s)) \tilde{X}_{s,t}^{\tilde{X}} = \\ &= \frac{1}{2} D^2(f - \tilde{f})(\tilde{X}_{s,t}(\tilde{\theta})) \tilde{X}_{s,t}^{\otimes 2} + (Df(\tilde{X}_s) - D\tilde{f}(\tilde{X}_s)) R_{s,t}^{\tilde{X}}. \end{aligned}$$

Из последнего равенства и формулы конечных приращений следует, что для любых $s, t \in I$ имеет место оценка

$$|R_{s,t}^{f(\tilde{X}) - \tilde{f}(\tilde{X})}| \leq \left(\frac{1}{2} \|\tilde{X}\|_{H;I}^2 + \|R^{\tilde{X}}\|_{2H;I} \right) \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} |t-s|^{2H},$$

из которой с учетом предложения 5 устанавливаем неравенство

$$\left\| R_{s,t}^{f(\tilde{X})-\tilde{f}(\tilde{X})} \right\|_{2H;I} \leq c_R \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} \quad (10)$$

где

$$c_R = \frac{1}{2} K^2 \left(\left((1 + \|f\|_{C_b^3}) C_B \right)^2 \vee \left((1 + \|f\|_{C_b^3}) C_B \right)^{2/H} \right) + \hat{K} \left(\left((1 + \|f\|_{C_b^3}) C_B \right)^2 \vee \left((1 + \|f\|_{C_b^3}) C_B \right)^{1+(1/H)} \right).$$

Применяя неравенства (8)–(10) к правой части (5), получим

$$\left| \int_s^t (f(\tilde{X}_\tau) - \tilde{f}(\tilde{X}_\tau)) dB_\tau \right| \leq (c_0 + C c_R \|B\|_H + C c_f \|\mathbb{B}\|_{2H}) \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} |t - s|^H,$$

что и требовалось. Лемма доказана.

Л е м м а 2. Пусть X_t и $\tilde{X}_t$ – решения уравнений (1) и (2) соответственно с правыми частями $f, \tilde{f}$ из класса $C_b^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n \times (d+1)})$, причем функция $\tilde{f}$ такова, что $\|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} \leq 1$. Тогда для любых функций $g, \tilde{g} \in C_b^1$, любого отрезка $I = [u, v] \subset [0, T]$ длины $|I| \leq 1$ и любого $s \in I$ п.н. справедливо неравенство

$$\begin{aligned} |g(X_s) - \tilde{g}(\tilde{X}_s)| &\leq \|g - \tilde{g}\|_\infty + C_{0,g} \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} + C_{1,g} |X_u - \tilde{X}_u| + \\ &+ C_{2,g} \left(\|B\|_H \left\| R^{f(X)-f(\tilde{X})} \right\|_{2H;I} + \|\mathbb{B}\|_{2H} \|f(X)' - f(\tilde{X})'\|_{H;I} \right) |I|^{3H}, \end{aligned}$$

где $C_{0,g} = C_{0,g}(H, \|g\|_{C_b^1}, \|f\|_{C_b^3}, \|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H})$, $C_{1,g} = C_{1,g}(H, \|g\|_{C_b^1}, \|f\|_{C_b^3}, \|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H})$ – случайные величины, $C_{2,g} = C_{2,g}(H, \|g\|_{C_b^1})$ – константа.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из формулы конечных приращений следует, что имеет место неравенство

$$\begin{aligned} |g(X_s) - \tilde{g}(\tilde{X}_s)| &\leq |g(X_s) - g(\tilde{X}_s)| + |g(\tilde{X}_s) - \tilde{g}(\tilde{X}_s)| \leq \|Dg\|_\infty |X_s - \tilde{X}_s| + \|g - \tilde{g}\|_\infty \leq \\ &\leq \|g - \tilde{g}\|_\infty + \|g\|_{C_b^1} (|X_u - \tilde{X}_u| + |X_{u,s} - \tilde{X}_{u,s}|). \end{aligned} \quad (11)$$

Поэтому осталось оценить $|X_{u,s} - \tilde{X}_{u,s}|$. Для этого воспользуемся определением решения и предложением 4. Будем иметь

$$|X_{u,s} - \tilde{X}_{u,s}| = \left| \int_u^s (f(X_\tau) - \tilde{f}(\tilde{X}_\tau)) dB_\tau \right| \leq M_1 + M_2,$$

где $M_1 = \left| \int_u^s (f(X_\tau) - f(\tilde{X}_\tau)) dB_\tau \right|$, $M_2 = \left| \int_u^s (f(\tilde{X}_\tau) - \tilde{f}(\tilde{X}_\tau)) dB_\tau \right|$. Оценку для второго выражения дает лемма 1: $M_2 \leq C_f \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} |s - u|^H$.

Оценим M_1 . С учетом соотношений, аналогичных (6), (7), и предложения 4 получим

$$\begin{aligned} M_1 &\leq |f(X_u) - f(\tilde{X}_u)| |B_{u,s}| + |(Df \cdot f)(X_u) - (Df \cdot \tilde{f})(\tilde{X}_u)| |\mathbb{B}_{u,s}| + \\ &+ C \left(\|B\|_{H;I} \left\| R^{f(X)-f(\tilde{X})} \right\|_{2H;I} + \|\mathbb{B}\|_{2H;I} \|f(X)' - f(\tilde{X})'\|_{H;I} \right) |s - u|^{3H}. \end{aligned} \quad (12)$$

Осталось заметить, что ввиду формулы конечных приращений, примененной к функциям f и $Df \cdot f$, для любого $s \in I$, $|I| \leq 1$ будем иметь

$$|f(X_u) - f(\tilde{X}_u)| |B_{u,s}| \leq \|Df\|_\infty |X_u - \tilde{X}_u| \cdot \|B\|_{H;I} |s - u|^H \leq \|f\|_{C_b^3} \|B\|_H |X_u - \tilde{X}_u|, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} |Df(X_u)f(X_u) - Df(\tilde{X}_u)\tilde{f}(\tilde{X}_u)| |B_{u,s}| &\leq \left(\|D(Df \cdot f)\|_\infty |X_u - \tilde{X}_u| + \|Df\|_\infty \|f - \tilde{f}\|_\infty \right) |B_{u,s}| \leq \\ &\leq \|f\|_{C_b^3}^2 \|B\|_{2H} |X_u - \tilde{X}_u| + \|f\|_{C_b^3} \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} \|B\|_{2H}. \end{aligned} \quad (14)$$

Окончательно из соотношений (11)–(14) и леммы 1 выводим

$$\begin{aligned} |g(X_s) - g(\tilde{X}_s)| &\leq \|g - \tilde{g}\|_\infty + C_{0;g} \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} + C_{1;g} |X_u - \tilde{X}_u| + \\ &+ C_{2;g} \left(\|B\|_H \|R^{f(X)-f(\tilde{X})}\|_{2H;I} + \|B\|_{2H} \|f(X)' - f(\tilde{X})'\|_{H;I} \right) |I|^{3H}, \end{aligned}$$

где $C_{0;g} = \|g\|_{C_b^1} \left(\|f\|_{C_b^3} \|B\|_{2H} + C_f \right)$, $C_{1;g} = \|g\|_{C_b^1} \left(1 + \|f\|_{C_b^3} \|B\|_H + \|f\|_{C_b^3}^2 \|B\|_{2H} \right)$, $C_{2;g} = C \|g\|_{C_b^1}$. Последнее соотношение доказывает лемму.

Лемма 3. Пусть X_t и $\tilde{X}_t$ – решения уравнений (1) и (2) соответственно с правыми частями $f, \tilde{f}$ из класса $C_b^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n \times (d+1)})$, причем функция $\tilde{f}$ такова, что $\|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} \leq 1$. Для любого отрезка $I = [u, v] \subset [0, T]$ длины $|I| \leq 1$ п.н. имеет место следующее неравенство:

$$\|f(X)' - f(\tilde{X})'\|_{H;I} \leq C_1 |X_u - \tilde{X}_u| + C_2 \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} + C_3 \|X - \tilde{X}\|_{H;I},$$

где $C_j = C_j(H, \|f\|_{C_b^3}, \|B\|_H, \|B\|_{2H})$, $j = 1, 2, 3$, – случайные величины.

Доказательство. Введем обозначения: $Y_{s,t}(\theta) = Y_s + \theta Y_{s,t}$, $\theta \in (0, 1)$, $s, t \in I$, $\varphi = Df \cdot f$. С учетом соотношений, аналогичных (6), (7), следуя формуле конечных приращений, найдутся $\theta_1, \theta_2, \theta \in (0, 1)$ такие, что

$$\begin{aligned} \left| (f(X)' - f(\tilde{X}'))_{s,t} \right| &\leq \left| (Df \cdot f)(X)_{s,t} - (Df \cdot f)(\tilde{X})_{s,t} \right| + \left| (Df \cdot (f - \tilde{f}))(\tilde{X})_{s,t} \right| = \\ &= \left| D\varphi(X_{s,t}(\theta_1))X_{s,t} - D\varphi(\tilde{X}_{s,t}(\theta_2))\tilde{X}_{s,t} \right| + \left| D(Df \cdot (f - \tilde{f}))(\tilde{X}_{s,t}(\theta))\tilde{X}_{s,t} \right| \leq \\ &\leq D\varphi(X_{s,t}(\theta_1)) \cdot |X_{s,t} - \tilde{X}_{s,t}| + |\tilde{X}_{s,t}| \cdot \left| D\varphi(X_{s,t}(\theta_1)) - D\varphi(\tilde{X}_{s,t}(\theta_2)) \right| + \\ &\quad + \|D^2 f \cdot (f - \tilde{f}) + Df \cdot (Df - D\tilde{f})\|_\infty |\tilde{X}_{s,t}|. \end{aligned} \quad (15)$$

Легко видеть, что $\|D^2 f \cdot (f - \tilde{f}) + Df \cdot (Df - D\tilde{f})\|_\infty \leq 2\|f\|_{C_b^3} \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2}$. Оценим второе слагаемое в (15). Из формулы конечных приращений следует:

$$\begin{aligned} \left| D\varphi(X_{s,t}(\theta_1)) - D\varphi(\tilde{X}_{s,t}(\theta_2)) \right| &\leq \|D^2 \varphi\|_\infty (|X_s - \tilde{X}_s| + |\theta_1 - \theta_2| \cdot |X_{s,t} - \tilde{X}_{s,t}|) \leq \\ &\leq \|f\|_{C_b^3}^2 \left(|X_u - \tilde{X}_u| + \|X - \tilde{X}\|_{H;I} |u - s|^H + \|X - \tilde{X}\|_{H;I} |t - s|^H \right). \end{aligned} \quad (16)$$

С учетом соотношений (15), (16), очевидных неравенств $|\tilde{X}_{s,t}| \leq \|\tilde{X}\|_{H;I} |t - s|^H$, $\|\tilde{f}\|_{C_b^2} \leq 1 + \|f\|_{C_b^3}$ и предложения 5 для любых $s, t \in I$ будем иметь

$$\left| (f(X)' - f(\tilde{X}'))_{s,t} \right| \leq \left(C_1 |X_u - \tilde{X}_u| + C_2 \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} + C_3 \|X - \tilde{X}\|_{H;I} \right) |t - s|^H,$$

где $C_1 = \|f\|_{C_b^3}^2 C_{\tilde{X}}$, $C_2 = 2\|f\|_{C_b^3} C_{\tilde{X}}$, $C_3 = (1 + 2C_{\tilde{X}})\|f\|_{C_b^3}^2$, $C_{\tilde{X}} = K \left((1 + \|f\|_{C_b^3})C_B \vee \left((1 + \|f\|_{C_b^3})C_B \right)^{1/H} \right)$.

Из последнего неравенства следует требуемое утверждение. Лемма доказана.

Лемма 4. Пусть X_t и $\tilde{X}_t$ – решения уравнений (1) и (2) соответственно с правыми частями $f, \tilde{f}$ из класса $C_b^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n \times (d+1)})$, причем функция $\tilde{f}$ такова, что $\|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} \leq 1$. Для любого отрезка $I = [u, v] \subset [0, T]$ длины $|I| \leq 1$ п.н. имеет место следующее неравенство:

$$\left\| R^{f(X) - f(\tilde{X})} \right\|_{2H; I} \leq C_4 |X_u - \tilde{X}_u| + C_5 \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} + C_6 \|X - \tilde{X}\|_{H; I},$$

где $C_j = C_j \left(H, \|f\|_{C_b^3}, \|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H} \right)$, $j = 4, 5, 6$, – случайные величины.

Доказательство. По определению

$$\begin{aligned} R_{s,t}^{f(X) - f(\tilde{X})} &= \left(f(X_{s,t}) - f(\tilde{X}_{s,t}) \right) - Df(X_s) X'_{s,t} B_{s,t} + Df(\tilde{X}_s) \tilde{X}'_{s,t} B_{s,t} = \\ &= \left(f(X_{s,t}) - f(\tilde{X}_{s,t}) \right) - Df(X_s) X_{s,t} + Df(\tilde{X}_s) \tilde{X}_{s,t} + Df(X_s) R_{s,t}^X - Df(\tilde{X}_s) R_{s,t}^{\tilde{X}}. \end{aligned} \quad (17)$$

Рассмотрим функцию $g(x, \tilde{x}) = f(x) - f(\tilde{x})$. Она дифференцируема по обоим переменным до 3-го порядка включительно и ввиду разложения в ряд Тейлора для некоторого $\theta \in (0, 1)$:

$$\begin{aligned} g(X_t, \tilde{X}_t) &= g(X_s, \tilde{X}_s) + \left(X_{s,t} \frac{\partial g(\cdot)}{\partial x} + \tilde{X}_{s,t} \frac{\partial g(\cdot)}{\partial \tilde{x}} \right) \Big|_{(X_s, \tilde{X}_s)} + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g(\cdot)}{\partial x^2} X_{s,t}^{\otimes 2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 g(\cdot)}{\partial x \partial \tilde{x}} (X_{s,t} \otimes \tilde{X}_{s,t}) + \frac{\partial^2 g(\cdot)}{\partial \tilde{x}^2} \tilde{X}_{s,t}^{\otimes 2} \right) \Big|_{(X_s(\theta), \tilde{X}_s(\theta))}. \end{aligned} \quad (18)$$

Вернемся к исходным обозначениям:

$$\frac{\partial^i g(x, \tilde{x})}{\partial x^i} = D^i f(x), \quad \frac{\partial^i g(x, \tilde{x})}{\partial \tilde{x}^i} = -D^i f(\tilde{x}), \quad i = 1, 2; \quad \frac{\partial^2 g(x, \tilde{x})}{\partial x \partial \tilde{x}} = 0. \quad (19)$$

Учитывая равенства (17)–(19), получим

$$R_{s,t}^{f(X) - f(\tilde{X})} = \frac{1}{2} \left(D^2 f(X_{s,t}(\theta)) X_{s,t}^{\otimes 2} - D^2 f(\tilde{X}_{s,t}(\theta)) \tilde{X}_{s,t}^{\otimes 2} \right) + \left(Df(X_s) R_{s,t}^X - Df(\tilde{X}_s) R_{s,t}^{\tilde{X}} \right). \quad (20)$$

Далее зафиксируем произвольные $s, t \in I$ такие, что $|t - s| \leq \delta$ для некоторого $\delta \leq |I|$ и получим оценку на $\left\| R^{f(X) - f(\tilde{X})} \right\|_{2H; \delta}$, оценивая слагаемые в равенстве (20). Выберем отрезок $I_\delta \subset I$ длины $|I_\delta| \leq \delta$, содержащий точки $s, t \in I_\delta$.

Шаг 1. Оценим первое слагаемое в (20). Очевидно,

$$\begin{aligned} \left| D^2 f(X_{s,t}(\theta)) X_{s,t}^{\otimes 2} - D^2 f(\tilde{X}_{s,t}(\theta)) \tilde{X}_{s,t}^{\otimes 2} \right| &\leq \left| D^2 f(X_{s,t}(\theta)) \right| \left| X_{s,t}^{\otimes 2} - \tilde{X}_{s,t}^{\otimes 2} \right| + \\ &+ \left| \tilde{X}_{s,t}^{\otimes 2} \right| \left| D^2 f(X_{s,t}(\theta)) - D^2 f(\tilde{X}_{s,t}(\theta)) \right|. \end{aligned} \quad (21)$$

Ввиду формулы конечных приращений и неравенства $|I| \leq 1$:

$$\begin{aligned} \left| D^2 f(X_{s,t}(\theta)) - D^2 f(\tilde{X}_{s,t}(\theta)) \right| &\leq \left\| D^3 f \right\|_\infty \left(|X_s - \tilde{X}_s| + |\theta| |X_{s,t} - \tilde{X}_{s,t}| \right) \leq \\ &\leq \|f\|_{C_b^3} \left(|X_u - \tilde{X}_u| + 2 \|X - \tilde{X}\|_{H; I} \right). \end{aligned} \quad (22)$$

Из определения евклидовой нормы нетрудно установить справедливость соотношений

$$\left| \widetilde{X}_{s,t}^{\otimes 2} \right| = \left| \widetilde{X}_{s,t} \right|^2 \leq \left\| \widetilde{X} \right\|_{H;I}^2 |t-s|^{2H}, \quad (23)$$

$$\left| X_{s,t}^{\otimes 2} - \widetilde{X}_{s,t}^{\otimes 2} \right| \leq \sqrt{2 \left(\left\| X \right\|_{H;I}^2 + \left\| \widetilde{X} \right\|_{H;I}^2 \right)} \left\| X - \widetilde{X} \right\|_{H;I} |t-s|^{2H}. \quad (24)$$

Учитывая равенства (21)–(24) и предложение 5, получаем окончательно оценку:

$$\left| D^2 f(X_{s,t}(\theta)) X_{s,t}^{\otimes 2} - D^2 f(\widetilde{X}_{s,t}(\theta)) \widetilde{X}_{s,t}^{\otimes 2} \right| \leq \left(c_1 |X_u - \widetilde{X}_u| + c_2 \left\| X - \widetilde{X} \right\|_{H;I} \right) |t-s|^{2H}, \quad (25)$$

где $c_1 = \|f\|_{C_b^3} C_{\widetilde{X}}^2$, $c_2 = 2c_1 + \|f\|_{C_b^3} \sqrt{2(C_X^2 + C_{\widetilde{X}}^2)}$, $C_{\widetilde{X}} = K \left(C_B \left(1 + \|f\|_{C_b^3} \right) \vee \left(C_B \left(1 + \|f\|_{C_b^3} \right) \right)^{1/H} \right)$,
 $C_X = K \left(C_B \|f\|_{C_b^3} \vee \left(C_B \|f\|_{C_b^3} \right)^{1/H} \right)$.

Шаг 2. Оценим второе слагаемое в (20). Очевидно,

$$\left| Df(X_s) R_{s,t}^X - Df(\widetilde{X}_s) R_{s,t}^{\widetilde{X}} \right| \leq \left| Df(X_s) \right| \left| R_{s,t}^X - R_{s,t}^{\widetilde{X}} \right| + \left| R_{s,t}^{\widetilde{X}} \right| \left| Df(X_s) - Df(\widetilde{X}_s) \right|. \quad (26)$$

Ввиду формулы конечных приращений

$$\left| Df(X_s) - Df(\widetilde{X}_s) \right| \leq \left\| D^2 f \right\|_{\infty} \left| X_s - \widetilde{X}_s \right| \leq \|f\|_{C_b^3} \left(|X_u - \widetilde{X}_u| + \left\| X - \widetilde{X} \right\|_{H;I} \right). \quad (27)$$

Рассмотрим разность остатков:

$$\begin{aligned} \left| R_{s,t}^X - R_{s,t}^{\widetilde{X}} \right| &= \left| X_{s,t} - \widetilde{X}_{s,t} - (X'_s - \widetilde{X}'_s) B_{s,t} \right| = \\ &= \left| \int_s^t (f(X_\tau) - \widetilde{f}(\widetilde{X}_\tau)) dB_\tau - (f(X_s) - \widetilde{f}(\widetilde{X}_s)) B_{s,t} \right| \leq M_1 + M_2, \\ M_1 &= \left| \int_s^t (f(X_\tau) - f(\widetilde{X}_\tau)) dB_\tau - (f(X_s) - f(\widetilde{X}_s)) B_{s,t} \right|, \\ M_2 &= \left| \int_s^t (f(\widetilde{X}_\tau) - \widetilde{f}(\widetilde{X}_\tau)) dB_\tau - (f(\widetilde{X}_s) - \widetilde{f}(\widetilde{X}_s)) B_{s,t} \right|. \end{aligned} \quad (28)$$

Оценим M_1 , применяя предложение 4:

$$\begin{aligned} M_1 &\leq \left| (Df \cdot f)(X_s) - (Df \cdot \widetilde{f})(\widetilde{X}_s) \right| |B_{s,t}| + \\ &+ C \left(\|B\|_H \left\| R^{f(X) - f(\widetilde{X})} \right\|_{2H;I_\delta} + \|\mathbb{B}\|_{2H} \left\| f(X)' - f(\widetilde{X})' \right\|_{H;I_\delta} \right) \delta^H |t-s|^{2H}, \end{aligned} \quad (29)$$

где константа C зависит лишь от H . По аналогии с неравенством (14) можем записать

$$\begin{aligned} \left| (Df \cdot f)(X_s) - (Df \cdot \widetilde{f})(\widetilde{X}_s) \right| &\leq \|D(Df \cdot f)\|_{\infty} |X_s - \widetilde{X}_s| + \|Df\|_{\infty} \|f - \widetilde{f}\|_{\infty} \leq \\ &\leq \|f\|_{C_b^3}^2 \left(|X_u - \widetilde{X}_u| + \left\| X - \widetilde{X} \right\|_{H;I} \right) + \|f\|_{C_b^3} \|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2}. \end{aligned} \quad (30)$$

Согласно лемме 3 найдутся случайные величины C_1 , C_2 , C_3 (зависящие только от H , $\|f\|_{C_b^3}$, $\|B\|_H$, $\|\mathbb{B}\|_{2H}$) такие, что

$$\left\| f(X)' - f(\widetilde{X})' \right\|_{H;I} \leq C_1 |X_u - \widetilde{X}_u| + C_2 \|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2} + C_3 \left\| X - \widetilde{X} \right\|_{H;I}. \quad (31)$$

Учитывая, что $\|\cdot\|_{H;I_\delta} \leq \|\cdot\|_{H;I}$, $\|\cdot\|_{2H;I_\delta} \leq \|\cdot\|_{2H;I}$, $\delta \leq 1$, подставляя (30), (31) в (29), получим оценку

$$M_1 \leq \left(C_{M_1,1} |X_u - \tilde{X}_u| + C_{M_1,2} \|X - \tilde{X}\|_{H;I} + C_{M_1,3} \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} + C\|B\|_H \delta^H \|R^{f(X)-f(\tilde{X})}\|_{2H;I,\delta} \right) |t-s|^{2H}, \quad (32)$$

где $C_{M_1,1} = \|\mathbb{B}\|_{2H} \left(\|f\|_{C_b^3}^2 + CC_1 \right)$, $C_{M_1,2} = \|\mathbb{B}\|_{2H} \left(\|f\|_{C_b^3}^2 + CC_3 \right)$, $C_{M_1,3} = \|\mathbb{B}\|_{2H} \left(\|f\|_{C_b^3} + CC_2 \right)$.

Оценим M_2 , также применяя предложение 4:

$$M_2 \leq \left| (Df \cdot \tilde{f})(\tilde{X}_s) - (D\tilde{f} \cdot \tilde{f})(\tilde{X}_s) \right| |\mathbb{B}_{s,t}| + \\ + C \left(\|B\|_H \|R^{f(\tilde{X})-\tilde{f}(\tilde{X})}\|_{2H;I_\delta} + \|\mathbb{B}\|_{2H} \|f(\tilde{X})' - \tilde{f}(\tilde{X})'\|_{H;I_\delta} \right) |t-s|^{2H}.$$

Используя неравенства (8)–(10), из последнего соотношения можно вывести неравенство

$$M_2 \leq C_{M_2,3} \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} |t-s|^{2H}, \quad (33)$$

где $C_{M_2,3} = \left(1 + \|f\|_{C_b^3} \right) \|\mathbb{B}\|_{2H} + Cc_R \|B\|_H + Cc_{f'} \|\mathbb{B}\|_{2H}$.

Учитывая равенства (26), (27), (32), (33) и предложение 5, получаем окончательно оценку:

$$\left| Df(X_s)R_{s,t}^X - Df(\tilde{X}_s)R_{s,t}^{\tilde{X}} \right| \leq (c_3 |X_u - \tilde{X}_u| + c_4 \|X - \tilde{X}\|_{H;I} + c_5 \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} + \\ + c_6 \delta^H \|R^{f(X)-f(\tilde{X})}\|_{2H;I,\delta}) |t-s|^{2H}, \quad (34)$$

где $c_i = c_i \left(H, \|f\|_{C_b^3}, \|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H} \right) = c_{3,4} \left(C_{M_1,i-2} \right)$, $i = 3, 4$, $c_5 = c_{3,4} \left(C_{M_1,3} + C_{M_2,3} \right)$, $c_6 = C\|B\|_H$,

а в свою очередь, $c_{3,4}(y) = \|f\|_{C_b^3} \left(\hat{K} \left(\left(C_B \left(1 + \|f\|_{C_b^3} \right) \right)^2 \vee \left(C_B \left(1 + \|f\|_{C_b^3} \right) \right)^{1+(1/H)} + y \right) \right)$.

Применяя оценки (25), (34) к равенству (20), получим, что для любых $s, t \in I$ таких, что $|t-s| \leq \delta$, справедливо неравенство

$$\left| R_{s,t}^{f(X)-f(\tilde{X})} \right| \leq \left(c_8 |X_u - \tilde{X}_u| + c_7 \|X - \tilde{X}\|_{H;I} + c_5 \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} + c_6 \delta^H \|R^{f(X)-f(\tilde{X})}\|_{2H;I,\delta} \right) |t-s|^{2H},$$

где $c_8 = \frac{1}{2}c_1 + c_3$, $c_7 = \frac{1}{2}c_2 + c_4$. Отсюда заключаем, что

$$\left\| R^{f(X)-f(\tilde{X})} \right\|_{2H;I,\delta} \leq c_8 |X_u - \tilde{X}_u| + c_7 \|X - \tilde{X}\|_{H;I} + c_5 \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} + c_6 \delta^H \left\| R^{f(X)-f(\tilde{X})} \right\|_{2H;I,\delta}$$

для произвольного $\delta \in (0, |I|]$. Теперь выберем и зафиксируем δ таким, чтобы

$$c_6 \delta^H = C\|B\|_H \delta^H \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \delta \leq \left(2C\|B\|_H \right)^{-1/H},$$

т. е. положим $\delta := |I| \wedge \left(2C\|B\|_H \right)^{-1/H}$. При таком выборе

$$\left\| R^{f(X)-f(\tilde{X})} \right\|_{2H;I,\delta} \leq 2c_8 |X_u - \tilde{X}_u| + 2c_7 \|X - \tilde{X}\|_{H;I} + 2c_5 \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2}.$$

Из последнего равенства, предложения 1 и неравенства $|I| \leq 1$ вытекает

$$\left\| R^{f(X)-f(\tilde{X})} \right\|_{2H;I} \leq 2 \left(1 \vee 2 \left(2C \|B\|_H \right)^{\frac{1-H}{H}} \right) \left(c_8 |X_u - \tilde{X}_u| + c_7 \|X - \tilde{X}\|_{H;I} + c_5 \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} \right),$$

откуда и следует требуемое неравенство. Лемма доказана.

Основные результаты. Перейдем к основным результатам, касающимся непрерывной зависимости от начальных условий и правых частей решений уравнений (1), (2) на отрезке $[0, T]$. Следующая теорема устанавливает потраекторную непрерывную зависимость.

Теорема 1. Пусть $f, \tilde{f} \in C_b^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n \times (d+1)})$, причем функция $\tilde{f}$ такова, что $\|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} \leq 1$. Тогда для решений $X_t, \tilde{X}_t$ уравнений (1), (2) с начальными условиями $X_0 = \xi, \tilde{X}_0 = \tilde{\xi}$ соответственно п.н. справедлива следующая оценка:

$$\|X - \tilde{X}\|_H \leq C \left(|\xi - \tilde{\xi}| + \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} \right) \quad (35)$$

для некоторой случайной величины $C = C(H, T, \|f\|_{C_b^3}, \|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H})$. Причем C может быть выбрана не зависящей от T , если $T \in (0, 1]$.

Доказательство. Зафиксируем произвольный отрезок $I = [u, v] \subset [0, T]$ достаточно малой длины $|I| \leq 1 \wedge T$ (точное значение длины $|I|$ будет указано ниже) и получим оценку на $\|X - \tilde{X}\|_{H;I}$. Выберем произвольные $s, t \in I$, очевидно справедливо неравенство

$$|X_{s,t} - \tilde{X}_{s,t}| = \left| \int_s^t f(X_\tau) dB_\tau - \int_s^t \tilde{f}(\tilde{X}_\tau) dB_\tau \right| \leq M_1 + M_2, \quad (36)$$

$$\text{где } M_1 = \left| \int_s^t (f(X_\tau) - f(\tilde{X}_\tau)) dB_\tau \right|, \quad M_2 = \left| \int_s^t (f(\tilde{X}_\tau) - \tilde{f}(\tilde{X}_\tau)) dB_\tau \right|.$$

Оценим M_1 . Из предложения 4 следует, что

$$\begin{aligned} M_1 \leq & |f(X_s) - f(\tilde{X}_s)| \|B\|_H |t - s|^H + |(Df \cdot f)(X_s) - (Df \cdot \tilde{f})(\tilde{X}_s)| \|\mathbb{B}\|_{2H} |t - s|^{2H} + \\ & + C \left(\|B\|_H \left\| R^{f(X)-f(\tilde{X})} \right\|_{2H;I} + \|\mathbb{B}\|_{2H} \|f(X)' - f(\tilde{X})'\|_{H;I} \right) |t - s|^{3H}. \end{aligned}$$

Введем обозначение: $c_{1,2}(K_1, K_2) = K_1 \|B\|_H + K_2 \|\mathbb{B}\|_{2H}$. Применяя лемму 2 к функциям f и $\tilde{f}$, $Df \cdot f$ и $Df \cdot \tilde{f}$, учитывая, $|I| \leq 1$, из последнего неравенства легко вывести

$$\begin{aligned} \frac{|X_{s,t} - \tilde{X}_{s,t}|}{|t - s|^H} \leq & c_0 \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} + c_1 |X_u - \tilde{X}_u| + \\ & + \tilde{C} \left(\|B\|_H \left\| R^{f(X)-f(\tilde{X})} \right\|_{2H;I} + \|\mathbb{B}\|_{2H} \|f(X)' - f(\tilde{X})'\|_{H;I} \right) |I|^{2H}, \end{aligned}$$

где $c_0 = c_{1,2}(1, \|f\|_{C_b^3})$, $c_1 = c_{1,2}(C_{1,f}, C_{1,Df \cdot f})$, $\tilde{C} = c_{1,2}(C_{2,f}, C_{2,Df \cdot f}) + C$. Причем c_1, c_2 – случайные величины, зависящие только от $H, \|f\|_{C_b^3}, \|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H}$, но не зависящие от s, t, I .

Далее, применяя леммы 3, 4 к правой части последнего неравенства, с учетом $|I| \leq 1$ получим

$$\frac{M_1}{|t-s|^H} \leq c_2 \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} + c_3 |X_u - \tilde{X}_u| + c_4 |I|^H \|X - \tilde{X}\|_{H;I},$$

где $c_2 = c_0 + \tilde{C} \cdot c_{1,2}(C_5, C_3)$, $c_3 = c_1 + \tilde{C} \cdot c_{1,2}(C_4, C_1)$, $c_4 = \tilde{C} \cdot c_{1,2}(C_6, C_3)$. Причем c_3, c_4 – случайные величины, зависящие от $H, \|f\|_{C_b^3}, \|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H}$, но не зависящие от s, t, I . Из леммы 1 следует, что $\frac{M_2}{|t-s|^H} \leq C_f \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2}$, а посему

$$\frac{|X_{s,t} - \tilde{X}_{s,t}|}{|t-s|^H} \leq c_3 |X_u - \tilde{X}_u| + c_4 |I|^H \|X - \tilde{X}\|_{H;I} + c_5 \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2},$$

где $c_5 = c_2 + C_f$. Последнее неравенство справедливо для любых $s, t \in I, s \neq t$, а значит,

$$\|X - \tilde{X}\|_{H;I} \leq c_3 |X_u - \tilde{X}_u| + c_5 \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} + c_4 |I|^H \|X - \tilde{X}\|_{H;I}$$

для произвольного $|I| \in (0, 1]$. Теперь выберем $|I|$ таким, чтобы выполнялось соотношение

$$c_4 |I|^H \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow |I| \leq (2c_4)^{-1/H} =: \delta_0.$$

Таким образом, для любого отрезка $I = [u, v] \subset [0, T]$ длины $|I| \leq 1 \wedge T \wedge \delta_0$ справедливо неравенство

$$\|X - \tilde{X}\|_{H;I} \leq c |X_u - \tilde{X}_u| + c_f \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2}, \quad (37)$$

где $c = 2c_3, c_f = 2c_5$. Если $1 \wedge T \wedge \delta_0 = T$, то $I = [0, T]$, и неравенство (37) доказывает требуемое. Поэтому пусть далее $T > 1 \wedge \delta_0 := \delta_1$.

Построим разбиение отрезка $[0, T]$ точками $t_j = (j \cdot \delta) \wedge T$, где $j = 0, 1, \dots$. Заметим, что $t_N = T$ при $N \geq T / \delta_1$, а также, что отрезки $I_j = [t_j, t_{j+1}]$ имеют длины $|I_j| \leq \delta_1, j = 0, 1, \dots$. Поэтому из неравенства (37) следуют оценки

$$\|X - \tilde{X}\|_{H;I_j} \leq c |X_{t_j} - \tilde{X}_{t_j}| + c_f \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2},$$

для $j < T / \delta_1$. Заметим, что

$$|X_{t_j} - \tilde{X}_{t_j}| \leq |X_{t_{j-1}} - \tilde{X}_{t_{j-1}}| + \delta_1^H \|X - \tilde{X}\|_{H;I_{j-1}} \leq (1 + c\delta_1^H) |X_{t_{j-1}} - \tilde{X}_{t_{j-1}}| + c_f \delta_1^H \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2}.$$

Из полученного рекуррентного соотношения очевидной индукцией выводим неравенство:

$$\begin{aligned} |X_{t_j} - \tilde{X}_{t_j}| &\leq (1 + c\delta_1^H)^j |X_0 - \tilde{X}_0| + c_f \delta_1^H \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} \sum_{k=0}^{j-1} (1 + c\delta_1^H)^k = \\ &= (1 + c\delta_1^H)^j |\xi - \tilde{\xi}| + \frac{c_f}{c} \left((1 + c\delta_1^H)^j - 1 \right) \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} \end{aligned}$$

для $j < T / \delta_1$. Таким образом,

$$\|X - \tilde{X}\|_{H;I_j} \leq (1 + c\delta_1^H)^{T/\delta_1} \left(c |\xi - \tilde{\xi}| + c_f \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} \right) \quad (38)$$

для любого $j = 0, 1, \dots, [T / \delta_1]$.

Применяя предложение 1 с учетом неравенства (38) получим

$$\|X - \tilde{X}\|_{H; \delta_1} \leq 2^{1-H} (1 + c\delta_1^H)^{T/\delta_1} \left(c|\xi - \tilde{\xi}| + c_f \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} \right).$$

Рассмотрим выражение $(1 + c\delta_1^H)^{T/\delta_1}$, $\delta_1 = 1 \wedge \delta_0$. Если $\delta_1 = 1$, то оно принимает значение $(1 + c)^T$. В противном случае $\delta_1 = \delta_0$, $\delta_0 = (2c_4)^{-1/H} < 1$, $2c_4 > 1$ и

$$(1 + c\delta_0^H)^{\frac{T}{\delta_0}} = \left(1 + \frac{c}{2c_4}\right)^{(2c_4)^H T} \leq \left(1 + \frac{c}{2c_4}\right)^{2c_4 T} = \left(\left(1 + \frac{c}{2c_4}\right)^{2c_4/c}\right)^{cT} \leq e^{cT},$$

поскольку функция $\varphi(x) = (1 + 1/x)^x$, $x > 0$ ограничена сверху числом e . Кроме того, $(1 + c)^T = \varphi(1/c) \leq e^{cT}$. Поэтому $(1 + c\delta_1^H)^{T/\delta_1} \leq e^{cT}$ и

$$\|X - \tilde{X}\|_{H; \delta_1} \leq 2^{1-H} e^{cT} \left(c|\xi - \tilde{\xi}| + c_f \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} \right).$$

Теперь из предложения 1 и последнего неравенства получим оценку требуемого вида:

$$\|X - \tilde{X}\|_H \leq 2^{2-H} e^{2c_3 T} \left(1 \vee 2T^{1-H} \vee 2(2c_4)^{\frac{1-H}{H}} T^{1-H} \right) (c_3 \vee c_5) \left(|\xi - \tilde{\xi}| + \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} \right). \quad (39)$$

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 5. Нетрудно видеть, что в приведенном доказательстве не использовалось никаких других свойств дробного броуновского движения $(B_t)_{t \in [0, T]}$, кроме свойства непрерывности траекторий по Гельдеру с показателем H . Это означает, что теорема справедлива для произвольных гильбертовских функций $B \in C^H([0, T], \mathbb{R}^{d+1})$.

З а м е ч а н и е 6. Рассмотрим зависимость случайных величин c_3 , c_4 , c_5 , фигурирующих в равенстве (39) от $\|B\|_H$, $\|B\|_{2H}$ при фиксированных $T, H, \|f\|_{C_b^3}$. Из доказательства теоремы следует, что эта зависимость выражается в виде композиции конечного числа функций $\Sigma_{\alpha, \beta, \gamma}(u, v) = \alpha u + \beta v + \gamma$, $\Pi(u, v) = u \cdot v$, $\vee(u, v) = u \vee v$, $\psi_s(u) = u^s$ ($\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{R}^+$ – параметрами) вещественных аргументов $u, v \in \mathbb{R}^+$.

Следующая теорема, устанавливающая непрерывную зависимость в среднем, является основным результатом представленной работы.

Теорема 2. Пусть $f, \tilde{f} \in C_b^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n \times (d+1)})$, причем функция $\tilde{f}$ такова, что $\|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} \leq 1$. Тогда для решений $X_t, \tilde{X}_t$ уравнений (1), (2) с начальными условиями $X_0 = \xi$, $\tilde{X}_0 = \tilde{\xi}$ соответственно имеет место следующее неравенство:

$$\mathbb{E} \left(\ln \|X - \tilde{X}\|_H \right) \leq C + \ln \left(\mathbb{E} |\xi - \tilde{\xi}| + \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} \right),$$

где $C = C \left(H, H_1, \dots, H_d, T, \|f\|_{C_b^3} \right) \in \mathbb{R}$ – константа, вообще говоря, зависящая от $H, H_1, \dots, H_d, T, \|f\|_{C_b^3}$.

Доказательство. Применим логарифм к обеим частям неравенства (39). Учитывая, что $x \vee y \leq x + y$ для $x, y > 0$, будем иметь

$$\ln \|X - \tilde{X}\|_H \leq \mu + 2c_3 T + \ln(c_3 + c_5) + \ln \left(1 + 2T^{1-H} + 2(2c_4)^{(1-H)/H} T^{1-H} \right) + \ln \left(|\xi - \tilde{\xi}| + \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} \right),$$

где $\mu = (2 - H) \ln 2$. Возьмем математическое ожидание от обеих частей последнего неравенства.

Ввиду вогнутости логарифма и неравенства Йенсена $\mathbb{E}(\ln \eta) \leq \ln(\mathbb{E}\eta)$ для любой случайной величины η . С учетом этого выводим неравенство

$$\mathbb{E}\left(\ln\|X - \tilde{X}\|_H\right) \leq \mu + 2T\mathbb{E}c_3 + \ln(\mathbb{E}c_3 + \mathbb{E}c_5) + \ln\left(1 + 2T^{1-H} + T^{1-H}2^{1/H}\mathbb{E}\left(c_4^{(1-H)/H}\right)\right) + \\ + \ln\left(|\xi - \tilde{\xi}| + \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2}\right).$$

Таким образом, осталось доказать, что $\mathbb{E}c_3 < \infty$, $\mathbb{E}c_5 < \infty$, $\mathbb{E}\left(c_4^{(1-H)/H}\right) < \infty$. Однако мы установим даже большее: для любого $r > 0$ конечны моменты $\mathbb{E}c_j^r = \mathbb{E}c_j^r(\|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H})$, $j = 3, 4, 5$.

Воспользуемся замечанием 6: зависимость $c_j^r = c_j^r(\|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H})$, $j = 3, 4, 5$, от норм $\|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H}$ выражается в виде композиции конечного числа функций $\Sigma_{\alpha,\beta,\gamma}(u,v)$, $\Pi(u,v)$, $\vee(u,v)$, $\psi_s(u)$. Но очевидно, что $\vee(u,v) = u \vee v \leq u + v = \Sigma_{1,1,0}(u,v)$ для $u, v \in \mathbb{R}^+$. Также понятно, что для $u = u(\|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H}) \in \mathbb{R}^+$, $v = v(\|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H}) \in \mathbb{R}^+$ справедливы соотношения

$$\mathbb{E}\Sigma_{\alpha,\beta,\gamma}(u,v) = \alpha\mathbb{E}u + \beta\mathbb{E}v + \gamma, \quad \mathbb{E}(u \vee v) \leq \mathbb{E}u + \mathbb{E}v, \quad \mathbb{E}\Pi(u,v) \leq (\mathbb{E}u^2)^{1/2}(\mathbb{E}v^2)^{1/2}.$$

Значит, конечность указанных математических ожиданий от функций $\Sigma_{\alpha,\beta,\gamma}$, Π , $\vee$ будет обеспечена конечностью моментов их аргументов. Осталось рассмотреть функцию $\psi_s(u) = u^s$.

Если $s \in (0, 1]$, то из неравенства Иенсена следует оценка $\mathbb{E}\psi_s(u) \leq \psi_s(\mathbb{E}u) = (\mathbb{E}u)^s$. Если же $s \in (1, \infty)$, то справедливы соотношения

$$\mathbb{E}\psi_s(\Sigma_{\alpha,\beta,\gamma}(u,v)) = \mathbb{E}(\alpha u + \beta v + \gamma)^s \leq 3^{s-1}(\alpha^s \mathbb{E}u^s + \beta^s \mathbb{E}v^s + \gamma^s), \\ \mathbb{E}\psi_s(u \vee v) \leq \mathbb{E}(u + v)^s \leq 2^{s-1}(\mathbb{E}u^s + \mathbb{E}v^s), \quad \mathbb{E}\psi_s(uv) = \mathbb{E}u^s v^s \leq (\mathbb{E}u^{2s})^{1/2}(\mathbb{E}v^{2s})^{1/2}.$$

В то же время, как следует из [3, лемма 7.4], любой s -момент, $s \geq 1$ случайной величины $\|B\|_H$ (а значит, и любой s -момент, $s > 0$ ввиду неравенства Иенсена) конечен, т. е. $\mathbb{E}\psi_s(\|B\|_H) = \mathbb{E}\|B\|_H^s < \infty$, $s > 0$. То же самое справедливо для случайной величины $\|\mathbb{B}\|_{2H}$ (см. замечание 3): $\mathbb{E}\psi_s(\|\mathbb{B}\|_{2H}) = \mathbb{E}\|\mathbb{B}\|_{2H}^s < \infty$, $s > 0$.

Из полученных соотношений следует, что композиция конечного числа указанных функций с нормами $\|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H}$ в качестве аргументов будет иметь конечное математическое ожидание и, в частности, $\mathbb{E}c_j^r(\|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H}) < \infty$, $j = 3, 4, 5$, для любого $r > 0$. Теорема доказана.

Благодарности. Автор выражает благодарность М. М. Васьковскому за постановку задачи и внимание, проявленное к работе.

Acknowledgements. The author is grateful to M. Vaszkouski for the statement of the problem and attention shown to the work.

Список использованных источников

1. Gubinelli, M. Controlling rough paths / M. Gubinelli // J. Functional Analysis. – 2004. – Vol. 216, № 1. – P. 86–140. <https://doi.org/10.1016/j.jfa.2004.01.002>
2. Friz, P. A Course on Rough Paths with an Introduction to Regularity Structures / P. Friz, M. Hairer. – Cham, Springer International Publishing Switzerland, 2014. – 263 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-08332-2>
3. Nualart, D. Differential equations driven by fractional Brownian motion / D. Nualart, A. Rascanu // Collectanea Mathematica. – 2002. – Vol. 53, № 1. – P. 55–81.
4. Zahle, M. Integration with respect to fractal functions and stochastic calculus. I / Zahle, M. // Probability Theory and Related Fields. – 1998. – Vol. 111, № 3. – P. 333–374. <https://doi.org/10.1007/s004400050171>
5. Васьковский, М. М. Устойчивость и притяжение решений нелинейных стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновскими движениями / М. М. Васьковский // Дифференц. уравнения. – 2017. – № 2. – С. 160–173.
6. Garrido-Atienza, M. J. Asymptotical stability of differential equations driven by Hölder-continuous paths // M. J. Garrido-Atienza, A. Neuenkirch, B. Schmalz // J. Dynamics and Differential Equations. – 2017. – Vol. 30, № 1. – P. 359–377. <https://doi.org/10.1007/s10884-017-9574-6>
7. Large Deviations and Asymptotic Methods in Finance / P. Friz Cham [et al.]. – Springer International Publishing Switzerland, 2015. – 590 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-11605-1>

References

1. Gubinelli M. Controlling rough paths. *Journal of Functional Analysis*, 2004, vol. 216, no. 1, pp. 86–140. <https://doi.org/10.1016/j.jfa.2004.01.002>
2. Friz P., Hairer M. *A Course on Rough Paths with an introduction to regularity structures*. Cham, Springer International Publishing Switzerland, 2014. 263 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-08332-2>
3. Nualart D., Rascanu A. Differential equations driven by fractional Brownian motion. *Collectanea Mathematica*, 2002, vol. 53, no. 1, pp. 55–81.
4. Zahle M. Integration with respect to fractal functions and stochastic calculus. I. *Probability Theory and Related Fields*, 1998, vol. 111, no. 3, pp. 333–374. <https://doi.org/10.1007/s004400050171>
5. Vas'kovskii M. M. Stability and attraction of solutions of nonlinear stochastic differential equations with standard and fractional Brownian motions. *Differential equations*, 2017, vol. 53, no. 2, pp. 157–170. <https://doi.org/10.1134/s0012266117020021>
6. Garrido-Atienza M. J., Neuenkirch A., Schmalz B. Asymptotical stability of differential equations driven by Hölder-continuous paths. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 2017, vol. 30, no. 1, pp. 359–377. <https://doi.org/10.1007/s10884-017-9574-6>
7. Friz P., Gatheral J., Gulisashvili A., Jacquier A., Teichmann J. *Large Deviations and Asymptotic Methods in Finance*. Cham, Springer International Publishing Switzerland, 2015. 590 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-11605-1>

Інфармацыя аб аўтары

Качан Ілья Вадимавіч – магістрант, асістэнт кафедры вышэй матэматыкі, Беларускі дзяржаўны ўніверсітэт (пр. Незавіскасці, 4, 220072, г. Мінск, Рэспубліка Беларусь). E-mail: ilyakachan@gmail.com

Information about the author

Ilya V. Kachan – Undergraduate, Assistant of the Department of Higher Mathematics, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: ilyakachan@gmail.com

ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)

ФИЗИКА PHYSICS

УДК 535.375.5:621.375.8
<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-2-210-219>

Поступила в редакцию 02.02.2018
Received 02.02.2018

А. А. Русак¹, В. И. Дашкевич¹, В. А. Орлович¹, А. П. Шкадаревич²

¹*Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь*

²*Научно-технический центр «ЛЭМТ» БелОМО, Минск, Беларусь*

ТЕПЛОВЫЕ ЭФФЕКТЫ В БЕЗОПАСНОМ ДЛЯ ГЛАЗ КОЛЬЦЕВОМ ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ГЕНЕРАТОРЕ СВЕТА НА КРИСТАЛЛАХ КTiOPO₄

Аннотация. Для безопасного для глаз параметрического генератора света (ПГС), выполненного на основе трех-зеркального кольцевого резонатора, каждая секция которого (пространство между плоскими соседними зеркалами) содержит кристалл КTiOPO₄ (КТР) *x*-среза размером 15(*x*) × 7(*y*) × 7(*z*) мм³, проведено исследование тепловых эффектов, обусловленных поглощением холостой волны в кристаллах КТР. Оценка тепловых эффектов проводилась посредством экспериментального определения изменений в рабочих характеристиках параметрического генератора света (расходимости выходного пучка и энергии импульса) при его переводе из режима генерации редко повторяющихся одиночных импульсов в режим генерации периодически повторяющихся импульсов. Выявлено, что в случае, когда безопасный для глаз ПГС, накачиваемый многомодовым излучением YAG:Nd-лазера, генерирует 8-наносекундные импульсы с частотой следования 10 Гц и энергией 30–35 мДж, термоискажения кристаллов КТР, помещенных в металлические держатели при их естественном воздушном охлаждении, носят умеренный характер. Суммарное действие положительных термолинз, наведенных в нелинейных кристаллах, вызывает увеличение расходимости пучка безопасного для глаз параметрического генератора света на 10 % и снижение эффективности ПГС на 0,76 % в силу того, что наведенные термолинзы не являются идеальными и поэтому вносят в резонатор ПГС дополнительные аберрационные потери. Теоретическое моделирование работы кольцевого параметрического генератора света в плосковолновом приближении с использованием системы трех связанных укороченных дифференциальных уравнений первого порядка показало, что среди трех кристаллов наиболее сильной тепловой нагрузке и воздействию наиболее интенсивных пучков подвергается кристалл КТР, расположенный первым по ходу излучения накачки в ПГС.

Ключевые слова: безопасный для глаз кольцевой параметрический генератор света, кристаллы КTiOPO₄, поглощение холостой волны, термоискажения нелинейных кристаллов

Для цитирования. Тепловые эффекты в безопасном для глаз кольцевом параметрическом генераторе света на кристаллах КTiOPO₄ / А. А. Русак [и др.] // Вес. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2018. – Т. 54, № 2. – С. 210–219. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-2-210-219>

A. A. Rusak¹, U. I. Dashkevich¹, V. A. Orlovich¹, A. P. Shkadarevich²

¹*B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus*

²*LEMT Scientific and Technical Center of BelOMO, Minsk, Belarus*

THERMAL EFFECTS IN THE EYE-SAFE RING OPTICAL PARAMETRIC OSCILLATOR BASED ON KTiOPO₄ CRYSTALS

Abstract. For an eye-safe optical parametric oscillator (OPO) built on the basis of a three-mirror ring cavity, each section of which (the space between adjacent plane mirrors) contains a *x*-cut KTiOPO₄ (KTP) crystal having a size of 15(*x*) × 7(*y*) × 7(*z*) mm³, the thermal effects due to idler wave absorption in KTP crystals were investigated. These thermal effects were evaluated by means of experimental measurement of the change in the OPO performance (divergence of the output beam and pulse energy) when transferring the OPO from the mode of generation of occasional single pulses to the mode of generation of periodically repetitive pulses. It was found when the eye-safe OPO pumped by multimode YAG: Nd laser radiation generates 8-ns pulses with a repetition rate of 10 Hz and an energy of 30–35 mJ, thermal distortions of KTP crystals placed in metal holders at their natural air-cooling, are moderate. The total effect of positive thermolenses induced in nonlinear crystals leads to an increase in the divergence of the beam of the eye-safe OPO by 10 % and to a decrease in the efficiency of the OPO by 0.76 %, by virtue of fact that the induced thermal lenses are not ideal and thereby introduce additional aberration losses into the OPO cavity. The theoretical simulation of the OPO operation in the plane-wave approximation with the use of a system of three coupled first-order abridged differential equations showed that among three KTP

crystals the KTP crystal placed first in the path of pump radiation in the OPO is the largest thermal load and the action of the most intense beams.

Keywords: Eye-safe ring optical parametric oscillator, KTiOPO_4 crystals, idler wave absorption, thermal distortions of nonlinear crystals

For citation. Rusak A. A., Dashkevich U. I., Orlovich V. A., Shkadarevich A. P. Thermal effects in the eye-safe ring optical parametric oscillator based on KTiOPO_4 crystals. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, vol. 54, no. 2, pp. 210–219 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-2-210-219>

Введение. Параметрические генераторы света на кристаллах семейства КТР (калий титанил фосфат – KTiOPO_4) являются высокоэффективными нелинейно-оптическими преобразователями 1-микронного излучения неодимовых лазеров в безопасный для глаз спектральный диапазон 1,5–1,6 мкм [1–10]. Компактные, надежные, конструктивно крепкие лазерные источники безопасного для глаз излучения востребованы для широкого круга практических применений, к числу которых можно отнести детектирование загрязнений атмосферы, связь с использованием открытого пространства, дальнометрию, подсветку, целеуказание и т. п.

Недавно нами был продемонстрирован [11] компактный высокоэффективный безопасный для глаз лазерный источник, состоящий из YAG:Nd-лазера накачки и кольцевого трехзеркального параметрического генератора света (ПГС) бегущей волны на кристаллах КТР. Следует отметить, что ПГС бегущей волны весьма удобны для создания компактных источников излучения, поскольку кольцевой резонатор позволяет без использования дополнительных элементов, во-первых, избежать образования обратной связи по основному лазерному излучению между ПГС и лазером накачки, а во-вторых, пространственно разнести пучки составляющих источника.

Хотя кристаллы КТР и обладают высокими нелинейностями второго порядка, что обеспечивает эффективное преобразование излучения накачки, но все же имеют один существенный недостаток. Вскоре после их открытия и синтеза* было установлено, что присутствие в данных кристаллах катионов PO_4 является причиной возникновения поглощения в ИК-области спектра, где генерируется холостая волна безопасного для глаз ПГС ($\lambda \sim 3,3$ мкм). Таким образом, поглощение излучения холостой волны самими кристаллами КТР предопределило, с одной стороны, наличие сильных термооптических искажений в безопасных для глаз КТР-ПГС, а с другой – возникновение риска повреждения и выхода из строя нелинейных кристаллов. В работе [12], где проводилось исследование кольцевых четырехзеркальных параметрических генераторов света на кристаллах КТР и КТА (KTiOAsO_4 -изоморфная разновидность КТР), показано, что даже при умеренной мощности генерации ПГС (энергия импульса сигнальной волны $E_s \sim 80$ мДж) кристаллам КТР свойственны сильные термооптические искажения, приводящие к уменьшению диаметра пучка генерации безопасного для глаз ПГС примерно в 5 раз.

Настоящая работа посвящена исследованию влияния тепловых эффектов, связанных с поглощением холостой волны, на работу безопасного для глаз трехзеркального кольцевого параметрического генератора света, продемонстрированного нами в [11]. Данный ПГС на кристаллах КТР обеспечивает генерацию импульсов безопасного для глаз излучения с энергией $E_s \sim 35\text{--}40$ мДж при частоте их следования 10,0–12,5 Гц.

Экспериментальная часть. Схема безопасного для глаз лазерного источника на основе кольцевого КТР-ПГС приведена рис. 1. Кольцевой резонатор параметрического генератора света на кристаллах КТР образован плоскими зеркалами $M_1\text{--}M_3$. Оптический осевой контур резонатора представляет собой равносторонний треугольник с периметром примерно 90 мм. Входное зеркало резонатора M_1 является прозрачным ($T \sim 98\%$) для излучения накачки ($\lambda_p = 1064$ нм) и полностью отражает ($R \sim 99,9\%$) излучение сигнальной волны ($\lambda_s = 1571$ нм). Выходное зеркало ПГС M_2 полностью отражает излучение накачки и частично – излучение сигнальной волны. Зеркало M_3 является высокоотражающим для излучения как накачки, так и сигнальной волны. Коэффициенты отражения зеркал для излучения холостой волны ($\lambda \sim 3,3$ мкм) не специфицируются, однако в силу его сильного поглощения в кристаллах КТР рассматриваемый ПГС является однорезонаторным, т. е. имеет высокую добротность резонатора лишь для сигнальной волны.

* Pat. US 3949323 / J. D. Bierlein, N. D. Gier. – Publ. date 06.04.1976.

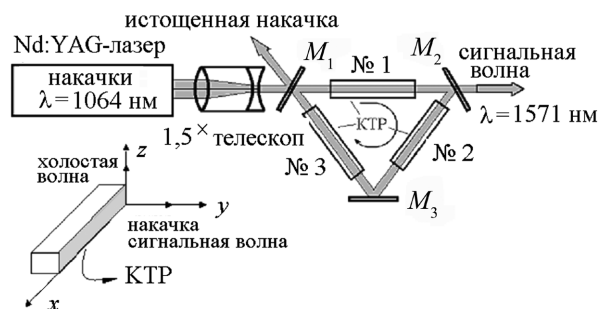


Рис. 1. Оптическая схема безопасного для глаз лазерного источника на основе кольцевого ПГС. На вставке: ориентация поляризаций излучения накачки и ПГС относительно осей оптической индикатрисы кристалла КТР

Fig. 1. Optical scheme of the eye-safe laser source based on the ring OPO. The insert shows the orientation of the polarizations of the pump and OPO radiation with respect to the axes of the optical indicatrix of the KTP crystal

В каждую секцию резонатора (пространство между зеркалами) помещены кристаллы КТР x -среза ($\theta = 90^\circ$, $\varphi = 0^\circ$), имеющие размер $7 \times 7 \times 15 \text{ мм}^3$. Кристаллы указанного среза обеспечивают преобразование излучения накачки в условиях выполнения II типа некритического фазового синхронизма. Рабочие грани кристаллов размером $7 \times 7 \text{ мм}^2$ просветлены для излучения на длинах волн 1064 и 1571 нм ($R_{s,p} \leq 0,3 \%$).

В ПГС кристаллы КТР установлены так, что вектор электрического поля линейно поляризованного излучения накачки, распространяющегося вдоль оси x оптической индикатрисы КТР, совершает колебания вдоль направления, совпадающего с осью оптической индикатрисы y (см. вставку на рис. 1). Только при такой ориентации кристаллов КТР возможно возбуждение параметрической генерации, при этом излучение сигнальной волны поляризовано вдоль оси y (обыкновенная волна), в то время как холостая волна имеет ортогональную поляризацию и является необыкновенной волной. В рассматриваемом параметрическом генераторе света излучение накачки (излучение Nd:YAG-лазера) совершает один полный обход резонатора ПГС и, истекая в кристаллах КТР, выходит из резонатора через зеркало M_1 . При этом импульс сигнальной волны генерируется в пределах той части импульса накачки, где интенсивность излучения на длине волны 1064 нм является достаточной для возбуждения ПГС.

При исследовании тепловых эффектов кристаллы КТР были помещены в металлические держатели, которые находились в условиях естественного воздушного охлаждения при температуре в лабораторном помещении $\sim 23^\circ \text{C}$.

Диаметр пучка Nd:YAG-лазера накачки согласовывался с апертурой кристаллов КТР с помощью $1,5\times$ уменьшающего телескопа. Кроме того, применение такого телескопа приводило к увеличению плотности мощности излучения накачки в кристаллах КТР, что повышало эффективность работы ПГС.

Методика оценки влияния тепловых эффектов в кристаллах КТР на работу ПГС была выбрана исходя из следующих обстоятельств.

Во-первых, явление поглощения излучения холостой волны сопровождается преобразованием поглощенной энергии в тепловую в объеме нелинейной среды и неизбежно приводит к термооптическими искажениями кристаллов КТР.

Во-вторых, известно [13], что если система, характеризующаяся тепловыделением, работает в режиме периодически повторяющихся импульсов, то по прошествии некоторого числа актов тепловыделения в ее элементах (в данном случае – в кристаллах КТР спустя некоторое число импульсов Nd:YAG-лазера накачки) устанавливается квазистационарный тепловой режим, в котором в сходственные моменты каждого последующего цикла воспроизводится температурное поле. При этом температурные перепады в элементах значительно превосходят перепады температуры, обусловленные неравномерностями нагрева (накачки) при работе в режиме редких одиночных импульсов.

В-третьих, поскольку КТР имеет положительные температурные коэффициенты показателя преломления n ($dn/dT > 0$) [14], то можно ожидать, что в результате неоднородного нагрева различных участков нелинейных кристаллов КТР в них сформируются положительные термолинзы.

И, наконец, в одном из предварительных экспериментов было установлено, что замена в резонаторе ПГС плоского глухого зеркала M_3 на вогнутое сферическое зеркало с радиусом кривизны 400 см (по сути равносильная внесению в резонатор, составленный плоскими зеркалами, положительной фокусирующей линзы) приводит к увеличению расходимости пучка сигнальной волны в 1,97 раза.

В силу вышеизложенного оценка тепловых эффектов в кольцевом параметрическом генераторе света была проведена на основе экспериментальной оценки изменения энергии импульса ПГС и расходимости его выходного пучка при переводе ПГС из режима редких импульсов в режим периодически повторяющихся (частота следования 10 Гц).

Оценка изменений энергии параметрического генератора света обусловлена тем, что они также являются доказательством влияния тепловых эффектов на работу ПГС. Дело в том, что в подавляющем числе случаев формирующаяся в любой среде термолинза не является идеальной (гауссовой). Обычно изменения оптического пути в термоискаженном кристалле совпадают с изменениями оптического пути при аппроксимации этого кристалла идеальной линзой с тем же фокусным расстоянием, но только в центральной части термолинзы. При приближении к периферическим участкам термолинзы различия в изменении оптических путей в резонаторе для идеальной и реальной линз становятся сначала существенными, а затем большими. Это и есть следствие неидеальности сформировавшейся термолинзы, поэтому кроме эффекта фокусировки/расфокусировки излучения [15–17] термолинза вызывает появление и рост абберационных потерь [18–20]. Абберационные потери сигнальной волны значительно возрастают с увеличением поглощения в кристаллах КТР и могут приводить к снижению эффективности ПГС. Таким образом, сравнение средних энергий импульса параметрического генератора света при его работе в указанных выше режимах позволяет оценить влияние абберационных потерь.

Диаметр пучка ПГС в дальней волновой зоне измерялся в фокальной плоскости положительной линзы, имеющей на длине волны 1571 нм фокусное расстояние $f = 300,8$ мм. Для измерений использовалась ПЗС-камера (модель BeamOn IR1550, DUMA OPTRONICS LTD). Энергетические характеристики излучения определялись с помощью пирозлектрического датчика PE50-DIF.

Работа ПГС в режиме редких импульсов обеспечивалась возвратно-поступательными перемещениями механического прерывателя пучка Nd:YAG-лазера накачки. Частота перемещения прерывателя была выбрана такой, что импульс Nd:YAG-лазера накачивал ПГС примерно один раз в 1–2 мин. Для получения режима периодически повторяющихся импульсов прерыватель останавливался, и пучок Nd:YAG-лазера беспрепятственно попадал в параметрический генератор света. При этом измерения расходимости пучка сигнальной волны и энергии импульса начинались спустя 30 мин после начала работы ПГС.

Следует отметить, что в отличие от [11], где ПГС возбуждался Nd:YAG-лазером с ламповой накачкой, в настоящей работе использован Nd:YAG-лазер с поперечной диодной накачкой, обеспечивающий генерацию импульсов накачки с частотой 10–30 Гц при их энергии до 180 мДж.

Результаты и их интерпретация. Исследование зависимости средней энергии импульса ПГС $E_{\text{ПГС}}$ от коэффициента отражения R_{2s} выходного зеркала параметрического генератора света M_2 (см. рис. 1) на длине волны 1571 нм показало, что оптимальное (с точки зрения достижения максимальной энергии импульса ПГС) значение R_{2s} составляет ≈ 50 %. Выходные зеркала с $R_{2s} > 50$ % естественно снижали порог генерации ПГС, однако при этом ее эффективность генерации ПГС ($\eta = E_{\text{ПГС}}/E_p$, где E_p – энергия импульса Nd:YAG-лазера накачки) при $E_{\text{ПГС}} > 10$ мДж уменьшалась. При $R_{2s} \approx 50$ % указанная в [11] энергия импульса ПГС $E_{\text{ПГС}} \sim 35$ мДж при использовании нового диодно-накачиваемого Nd:YAG-лазера обеспечивалась при энергии импульса накачки $E_p \sim 130$ мДж. Наивысшая же эффективность надежной работы параметрического генератора света достигалась при энергии импульса накачки $E_p \sim 150$ мДж. Значение $E_{\text{ПГС}}$ составляло ~ 48 мДж, т. е. $\eta = 32$ %. Накачка с энергией импульса $E_p > 150$ мДж для исследуемого ПГС являлась критической. При полуторакратном уменьшающем телескопе повышение энергии импульса накачки E_p до ~ 170 мДж неизбежно приводило к повреждению обращенного к выходному зеркалу M_2 торца кристалла КТР № 1 (см. рис. 1).

Распределение интенсивности в пучке параметрического генератора света в дальнем поле для режимов редких и периодически повторяющихся импульсов при $E_{\text{ПГС}} \sim 35$ мДж показано на рис. 2. Как видно, пучок ПГС является эллиптическим. Это обусловлено тем, что эллиптическим является и пучок Nd:YAG-лазера накачки. Эллиптичность распределения плотности энергии ПГС (отношение минимальной ширины пучка к максимальной) составляет $\varepsilon \sim 0,72$. Характер пространственных распределений для режимов редких и периодически повторяющихся импульсов практически один и тот же. Отличие этих двух режимов состоит лишь в разнице ширины пучка

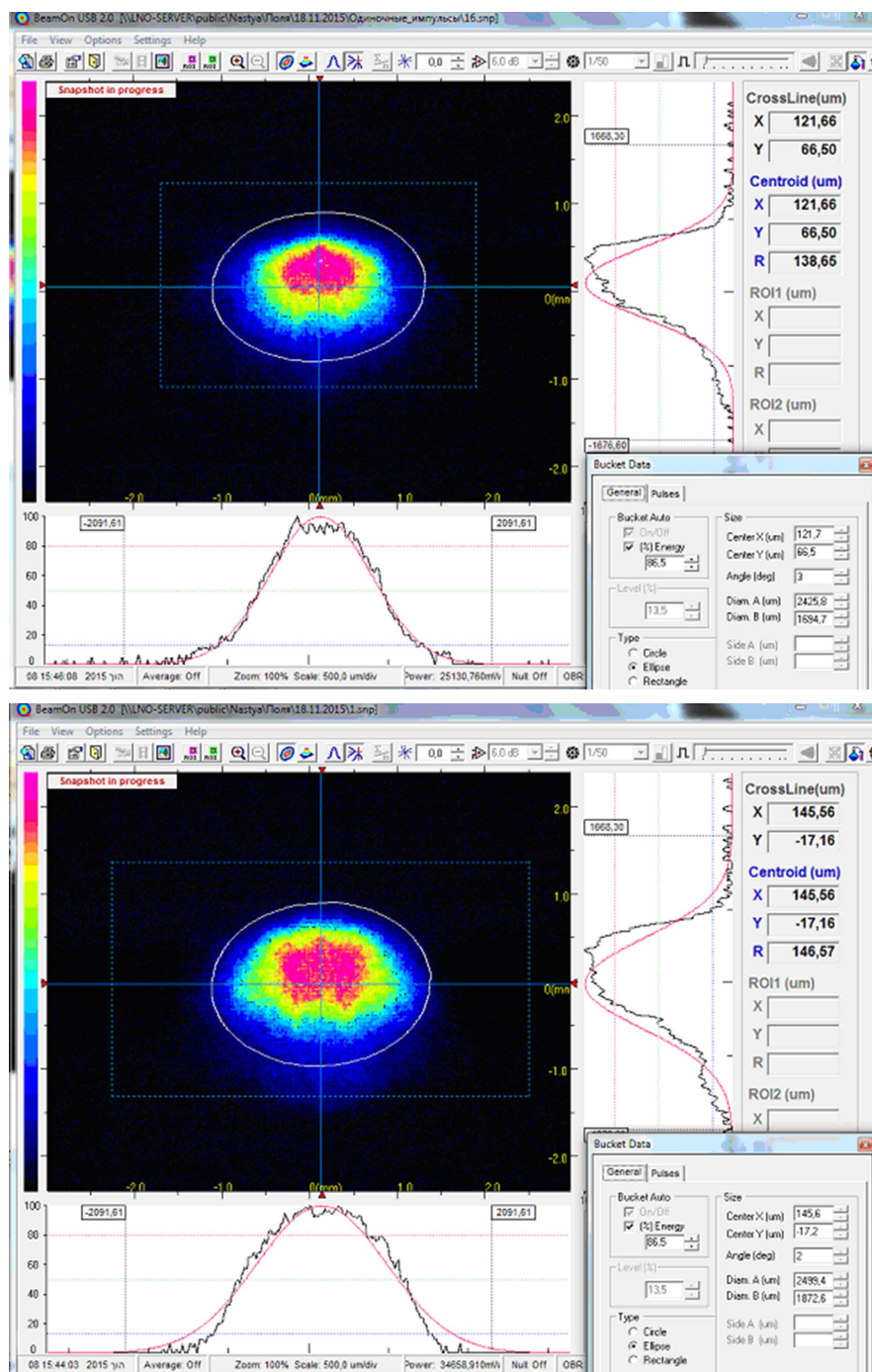


Рис. 2. Типичное дальнопольное пространственное распределение энергии в пучке безопасного для глаз излучения при работе ПГС в режиме одиночных импульсов (а) и с частотой повторения импульсов 10 Гц (б)

Fig. 2. Typical far-field distribution of energy in the eye-safe radiation beam during the OPO operation (a) in the regime of occasional single pulses and (b) with a pulse repetition rate of 10 Hz

ков $d_{\text{гор}}$ и $d_{\text{верт}}$ для горизонтального и вертикального направлений. Для режима редких импульсов диаметры $d_{\text{гор}}^1$ и $d_{\text{верт}}^1$, определенные на уровне 86,5 % полной энергии импульса как среднее 30 измерений распределения плотности энергии, составляют 2,373 и 1,705 мм соответственно. Это означает, что соответствующие углы расходимости пучка ПГС, которые рассчитываются по формулам $\theta_{\text{гор}}^1 = \frac{d_{\text{гор}}^1}{f}$ и $\theta_{\text{верт}}^1 = \frac{d_{\text{верт}}^1}{f}$, составляют 7,9 и 5,7 мрад.

Для режима периодически повторяющихся импульсов усреднение данных 30 измерений пространственного распределения плотности энергии дает результат $d_{\text{гор}}^2 = 2,605$ мм и $d_{\text{верт}}^2 = 1,891$ мм. Следовательно, соответствующие углы расходимости составляют $\theta_{\text{гор}}^2 = 8,7$ мрад и $\theta_{\text{верт}}^2 = 6,3$ мрад. Таким образом, выполненные измерения приводят к соотношениям $\theta_{\text{гор}}^2 > \theta_{\text{гор}}^1$, $\theta_{\text{верт}}^2 > \theta_{\text{верт}}^1$, и $\theta_{\text{гор}}^2 / \theta_{\text{гор}}^1 \approx \theta_{\text{верт}}^2 / \theta_{\text{верт}}^1 \approx 1,1$, которые показывают, что при работе параметрического генератора света в режиме периодически повторяющихся импульсов поглощение холостой волны действительно сопровождается термооптическими искажениями кристаллов КТР в виде образования в них положительных термолинз. Увеличение расходимости пучка практически одинаково для обоих направлений, т. е. формирующиеся термолинзы не являются бифокальными. Суммарное действие термолинз увеличивает расходимость пучка примерно на 10 %. Это позволяет считать, что при генерации ПГС-импульсов с частотой следования 10 Гц и энергией сигнальной волны ~30–35 мДж термоискажения кристаллов КТР при их пассивном охлаждении достаточно умеренны.

Сплошная черная линия на рис. 3 соответствует средней энергии импульса при работе параметрического генератора света в режиме редких импульсов. Ее значение по результатам 53 измерений составляет $E_s = 35,6$ мДж. Сплошная светлая линия соответствует средней энергии, измеренной в режиме периодически повторяющихся импульсов. Она равна $E_r = 34,6$ мДж. Указанное снижение энергии импульса сигнальной волны означает, что термоискажения кристаллов КТР приводят к проявлению абберационных потерь, которые снижают эффективность работы ПГС лишь на 0,76 % ($(E_s - E_r) / E_r$).

Уменьшающий согласующий телескоп, расположенный достаточно близко к входному зеркалу ПГС, не дал возможности оценить величину искажений первого по ходу излучения накачки кристалла КТР методом измерения отклонения коллимированного пробного пучка, проходящего через нелинейный кристалл на некотором расстоянии от его оси. Пробные же пучки, пропущенные сквозь другие кристаллы КТР, не проявили при длительной работе ПГС никакого отклонения от своего первоначального направления. В силу этого распределение термоискажений по кристаллам КТР было выявлено численным методом путем расчета энергии холостой волны, поглощенной в каждом из кристаллов.

При теоретическом анализе ПГС процесс коллинеарного трехчастотного параметрического взаимодействия плоских волн в каждом из кристаллов КТР описывался следующей системой укороченных уравнений [21]:

$$\begin{aligned} \frac{dE_s}{dz} &= -\alpha_s E_s - \frac{2\pi d_{\text{eff}}}{n_s \lambda_s} E_p E_i^*, \\ \frac{dE_i}{dz} &= -\alpha_i E_i - \frac{2\pi d_{\text{eff}}}{n_i \lambda_i} E_p E_s^*, \\ \frac{dE_p}{dz} &= -\alpha_p E_p + \frac{2\pi d_{\text{eff}}}{n_p \lambda_p} E_i E_s, \end{aligned} \quad (1)$$

где индексы p , s , i обозначают соответственно накачку, сигнальную и холостую волны; z – координата вдоль распространения излучения; α – коэффициент поглощения; λ – длина волны; n – показатель

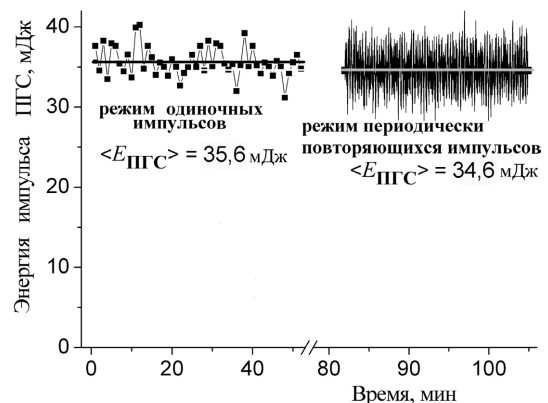


Рис. 3. Поведение энергии безопасного для глаз излучения при работе ПГС в режиме одиночных импульсов и с частотой повторения импульсов 10 Гц

Fig. 3. Behavior of eye-safe radiation energy during the OPO operation in the mode of occasional single pulses and at a pulse repetition rate of 10 Hz

преломления; d_{eff} – коэффициент нелинейной связи в кристалле КТР. Используемые уравнения учитывают поглощение волн в кристаллах КТР. Значения $\alpha_{p,s}$ и α_i брались равными соответственно 0,7 и 0,52 м⁻¹ [23]. Связь между волнами E_p , E_s и E_i на границах участков резонатора, свободных от нелинейных кристаллов, устанавливалась исходя из условий отражения на зеркалах M_1 – M_3 . Полагалось, что ПГС возбуждается гауссовским импульсом с амплитудой поля на входе

$$E_{pin}(t) = E_{0p} \exp \left[-2 \ln 2 \left(\frac{t}{t_p} \right)^2 \right],$$

где E_{0p} – амплитуда поля в максимуме импульса; t_p – длительность импульса по уровню 0,5 максимальной интенсивности. Поскольку t_p значительно превосходит время обхода светом кольцевого резонатора τ_0 , то импульс накачки подвергался аппроксимации ступенчатой функцией времени с шириной ступеньки τ_0 и постоянной в пределах каждой ступеньки величиной поля накачки. При расчетах поглощенной энергии для простоты полагалось, что все зеркала кольцевого резонатора ПГС имеют одинаковый коэффициент отражения R_i для излучения холостой волны.

Представление о поглощенных в кристаллах энергиях $E_{полг}$ с учетом поглощения на частотах всех волн в зависимости от указанного коэффициента отражения R_i дает рис. 4. Как видно, распределение поглощения зависит также от коэффициента отражения выходного зеркала ПГС на частоте сигнальной волны. При $R_{2s} = 65\%$ наиболее сильно холостая волна поглощается кристаллом КТР № 1. Таким образом, при $R_{2s} = 65\%$ данный кристалл испытывает в кольцевом параметрическом генераторе света наиболее сильную тепловую нагрузку. Например, при $R_i = 50\%$ он поглощает примерно в 3 раза больше, чем второй кристалл, и в 6 раз больше, чем третий. В случае оптимального выходного зеркала ПГС с $R_{2s} = 50\%$ при $R_i > 60\%$ большую тепловую нагрузку начинает испытывать кристалл КТР № 2. Именно термоискажения этих кристаллов (№ 1 и № 2) в основном влияют на расходимость пучка и эффективность работы ПГС при $R_i > 60\%$. Из данных рис. 4 следует практически важный вывод о том, что уменьшение R_i приводит к ослаблению тепловых эффектов в параметрическом генераторе света. Следует отметить, что, согласно расчетам, распределение поглощенной энергии по кристаллам носит указанный характер и в случае реальных разных значений R_i , которые для используемых в экспериментах зеркал лежали в пределах от 5 до 25 %, т. е. в исследуемом трехзеркальном кольцевом ПГС основную роль играют термоискажения кристалла КТР № 1.

Однако, как показывает численный анализ, наиболее сильное поглощение холостой волны (или, иными словами, сильная тепловая нагрузка) не является единственным негативным факто-

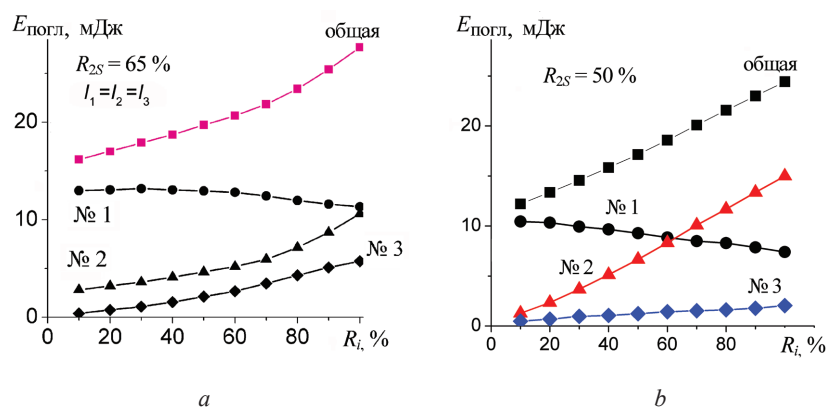


Рис. 4. Зависимость энергии, поглощенной кристаллом, от коэффициента отражения зеркал резонатора на длине холостой волны при коэффициенте отражения выходного зеркала ПГС 65 % (а) и 50 % (б) и постоянной энергии импульса накачки 100 мДж (расчет)

Fig. 4. Dependence of the crystal-absorbed energy on the reflectivity of the cavity mirrors for the idler wave at the OPO output coupler reflectivity of (a) 65 % and (b) 50 % and constant pump pulse energy of 100 mJ (calculation)

ром для кристалла КТР № 1. Хотя в энергию сигнальной волны преобразуется лишь некоторая доля энергии импульса накачки, наличие в ПГС обратной резонансной связи для сигнальной волны приводит к тому, что ее максимальная интенсивность на выходе из кристалла № 1 всегда превосходит пиковую интенсивность ($\sim E_{0p}^2$) неистощенного импульса накачки (рис. 5). Отмеченное превышение зависит также от коэффициента отражения выходного зеркала R_{2s} и может достигать до двух раз. При некоторых значениях R_{2s} превышение наблюдается и на выходах кристаллов № 2 и № 3. Таким образом, при уровнях накачки, которые еще не представляют собой опасности для кристаллов, интенсивность сигнальной волны в резонаторе ПГС может достигать значений, превосходящих порог лучевой стойкости кристаллов КТР. На наш взгляд, именно этот фактор (учитывая долговременную работу ПГС при $E_p \sim 150$ мДж) является определяющим в отмеченном выше разрушении торца кристалла КТР при $E_p \sim 170$ мДж.

Вывод. Таким образом, при генерации ПГС импульсов с частотой следования 10 Гц и энергией ~ 30 – 35 мДж, термоискажения кристаллов КТР при их естественном охлаждении носят достаточно умеренный характер. Суммарное действие сформировавшихся положительных термолинз приводит по сравнению со случаем редких импульсов к увеличению расходимости пучка ПГС на 10 %. Неидеальность сформировавшихся термолинз вносит в кольцевой резонатор дополнительные абберационные потери, что выражается в уменьшении средней энергии параметрического генератора света с 35,6 до 34,6 мДж. Это соответствует снижению эффективности преобразования на 0,76 %. Теоретически показано, что тепловые эффекты наиболее сильно выражены в кристалле КТР, расположенном первым по ходу излучения накачки. Этот же кристалл подвергается воздействию и наиболее интенсивных пучков.

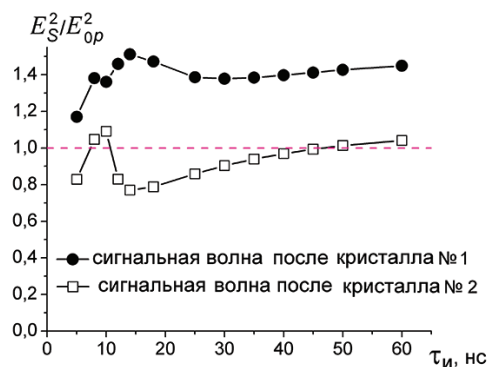


Рис. 5. Максимальные интенсивности сигнальной волны в резонаторе ПГС, нормированные на пиковую интенсивность неистощенной накачки, при различных длительностях импульса накачки (расчет: энергия импульса накачки ~ 120 мДж, $R_{2s} = 50\%$)

Fig. 5. For the OPO resonator, maximum signal wave intensities normalized to the peak intensity of the undepleted pump at different pump pulse widths (calculation: pump pulse energy is 120 mJ, $R_{2s} = 50\%$)

Список использованных источников

1. Efficient optical parametric oscillator at $1.6 \mu\text{m}$ / L. R. Marshall [et al.] // Opt. Lett. – 1991. – Vol. 16, № 9. – P. 681–683. <https://doi.org/10.1364/ol.16.000681>
2. Marshall, L. R. Diode-pumped eye-safe laser source exceeding 1% efficiency / L. R. Marshall, J. Kasinski, R. L. Burnham // Opt. Lett. – 1991. – Vol. 16, № 21. – P. 1680–1682. <https://doi.org/10.1364/ol.16.001680>
3. Marshall, L. R. Eye-safe output from noncritically phase-matched parametric oscillators / L. R. Marshall, A. Kaz // J. Opt. Soc. Am. B. – 1993. – Vol. 10, № 9. – P. 1730–1736. <https://doi.org/10.1364/josab.10.001730>
4. Chuang, T. A KTA optical parametric oscillator pumped by a Q-switched, injection seeded Nd:YAG laser / T. Chuang, J. Kasinski, H. R. Verdún // Advanced Solid-State Lasers / eds.: S. A. Payne and C.R. Pollock. – San Francisco, 1996. – P. 179–181. <https://doi.org/10.1364/assl.1996.op4>
5. Hansson, G. Unstable resonator optical parametric oscillator based on quasi-phase-matched RbTiOAsO_4 / G. Hansson, H. Karlsson, F. Laurell // Appl. Opt. – 2001. – Vol. 40, № 30. – P. 5446–5451. <https://doi.org/10.1364/ao.40.005446>
6. Numerical simulation and experimental investigation of parametric generation of light pulses in a KTP crystal / B. B. Sevruk [et al.] // J. Appl. Spectrosc. – 2000. – T. 67, № 1. – P. 70–76. <https://doi.org/10.1007/bf02681423>
7. High-power sources of eye-safe radiation, based on nonlinear-optical conversion of the radiation of YAG:Nd lasers / V. A. Orlovich [et al.] // J. Opt. Technol. – 2000. – Vol. 67, № 11. – P. 984–989. <https://doi.org/10.1364/jot.67.000984>
8. Highly efficient source of eye-safe radiation based on KTP optical parametric oscillator / D. E. Gakhovich [et al.] // Laser Optics '95: Solid State Lasers. – 1996. – Vol. 2772. – P. 53–61. <https://doi.org/10.1117/12.238081>
9. Eye-safe radiation source based on an optical parametric oscillator / A. I. Vodchits [et al.] // J. Appl. Spectrosc. – 2006. – Vol. 73, № 2. – P. 285–291. <https://doi.org/10.1007/s10812-006-0070-8>
10. Comparative studies of eye-safe intracavity and extracavity optical parametric oscillators with an unstable telescopic cavity / V. I. Dashkevich [et al.] // J. Appl. Spectrosc. – 2006. – Vol. 73, № 4. – P. 604–612. <https://doi.org/10.1007/s10812-006-0070-8>
11. Travelling-wave $1.57\text{-}\mu\text{m}$ optical parametric oscillator driven by a pulsed multimode Nd^{3+} :YAG laser / V. I. Dashkevich [et al.] // J Appl. Spectr. – 2008. – Vol. 75, № 4. – P. 285–291. <https://doi.org/10.1007/s10812-008-9077-7>

12. High-average-power KTiOAsO_4 optical parametric oscillator / M. S. Webb [et al.] // *Opt. Lett.* – 1998. – Vol. 23, № 15. – P. 1161–1163. <https://doi.org/10.1364/ol.23.001161>
13. Мезенов, А. В. Термооптика твердотельных лазеров / А. В. Мезенов, Л. Н. Сомс, А. И. Степанов. – Л.: Машиностроение, Ленингр. отд-ние, 1986. – 197 с.
14. Bierlein, J. D. Potassium titanyl phosphate: properties and new applications / J. D. Bierlein, H. Vanherzeele // *J. Opt. Soc. Am. B.* – 1989. – Vol. 6, № 4. – P. 622–633. <https://doi.org/10.1364/josab.6.000622>
15. On thermal effects in solid-state lasers: The case of ytterbium-doped materials / S. Chenais [et al.] // *Prog. Quantum Electron.* – 2006. – Vol. 30, № 4. – P. 89–153. <https://doi.org/10.1016/j.pquantelec.2006.12.001>
16. Thermal modeling of continuous-wave end-pumped solid-state lasers / M. E. Innocenzi [et al.] // *Appl. Phys. Lett.* – 1990. – Vol. 56, № 19. – P. 1831–1833. <https://doi.org/10.1063/1.103083>
17. Optimization in scaling fiber-coupled laser-diode end-pumped lasers to higher power: influence of thermal effect / Y. F. Chen [et al.] // *IEEE J. Quantum Electron.* – 1997. – Vol. 33, № 8. – P. 1424–1429. <https://doi.org/10.1109/3.605566>
18. Influence of aberrations on fundamental mode of high power rod solid-state lasers / J. Bourderionneta [et al.] // *Opt. Commun.* – 2002. – Vol. 204, № 1/6. – P. 299–310. [https://doi.org/10.1016/s0030-4018\(02\)01202-6](https://doi.org/10.1016/s0030-4018(02)01202-6)
19. More precise determination of thermal lens focal length for end-pumped solid-state lasers / S. Fan [et al.] // *Opt. Commun.* – 2006. – Vol. 266, № 2. – P. 620–626. <https://doi.org/10.1016/j.optcom.2006.05.023>
20. Thermally induced diffraction losses for a Gaussian pump beam and optimization of the mode-to-pump ratio in an end-pumped Nd:GdVO_4 laser / Y. T. Wang [et al.] // *Laser Phys.* – 2013. – Vol. 23, № 10. – P. 105–109. <https://doi.org/10.1088/1054-660x/23/10/105002>
21. Brosnan, S. J. Optical parametric oscillator threshold and linewidth studies / S. J. Brosnan, R. L. Bayer // *IEEE J. Quantum Electron.* – 1979. – Vol. 15, № 6. – P. 1415–432. <https://doi.org/10.1109/jqe.1979.1070027>
22. Hansson, G. Transmission measurements in KTP and isomorphic compounds / G. Hansson, H. Karlsson // *Appl. Opt.* – 2000. – Vol. 39, № 27. – P. 5058–5069. <https://doi.org/10.1364/ao.39.005058>

References

1. Marshall L. R., Kasinski J., Hays A. D., Burnham R. L. Efficient optical parametric oscillator at 1.6 μm . *Optics Letters*, 1991, vol. 16, no. 9, pp. 681–683. <https://doi.org/10.1364/ol.16.000681>
2. Marshall L. R., Kasinski J., Burnham R. L. Diode-pumped eye-safe laser source exceeding 1 % efficiency. *Optics Letters*, 1991, vol. 16, no. 21, pp. 1680–1682. <https://doi.org/10.1364/ol.16.001680>
3. Marshall L. R., Kaz A. Eye-safe output from noncritically phase-matched parametric oscillators. *Journal of the Optical Society of America B*, 1993, vol. 10, no. 9, pp. 1730–1736. <https://doi.org/10.1364/josab.10.001730>
4. Chuang T., Kasinski J., Verdún H. R. A KTA optical parametric oscillator pumped by a Q-switched, injection seeded Nd:YAG laser. *Advanced Solid-State Lasers*. San Francisco, 1996, pp. 179–181. <https://doi.org/10.1364/assl.1996.op4>
5. Hansson G., Karlsson H., Laurell F. Unstable resonator optical parametric oscillator based on quasi-phase-matched RbTiOAsO_4 . *Applied Optics*, 2001, vol. 40, no. 30, pp. 5446–5451. <https://doi.org/10.1364/ao.40.005446>
6. Sevruk B. B., Belyi V. N., Gakhovich D. E., Orlovich V. A. Numerical simulation and experimental investigation of parametric generation of light pulses in a KTP crystal. *Journal of Applied Spectroscopy*, 2000, vol. 67, no. 1, pp. 70–76. <https://doi.org/10.1007/bf02681423>
7. Orlovich V. A., Apanasevich P. A., Batishche S. A., Belyi V. N., Bui A. A., Grabchikov A. S., Kazak N. S., Kachinskii A. V. High-power sources of eye-safe radiation, based on nonlinear-optical conversion of the radiation of YAG:Nd lasers. *Journal of Optical Technology*, 2000, vol. 67, no. 11, pp. 984–989. <https://doi.org/10.1364/jot.67.000984>
8. Gakhovich D. E., Grabchikov A. S., Orlovich V. A., Pesotskij V. I., Sevruk B. B., Kamach Yu. T., Shapiro L. L., Dvornikov S. S., Tugbaev V. A. Highly efficient source of eye-safe radiation based on KTP optical parametric oscillator. *Laser Optics '95: Solid State Lasers*, 1996, vol. 2772, pp. 53–61. <https://doi.org/10.1117/12.238081>
9. Vodchits A. I., Vodchits A. I., Dashkevich V. I., Kazak N. S., Pavlenko V. K., Pokryshkin V. I., Petrovich I. P., Rukhovets V. V., Kraskovskii A. S., Orlovich V. A. Eye-safe radiation source based on an optical parametric oscillator. *Journal of Applied Spectroscopy*, 2006, vol. 73, no. 2, pp. 285–291. <https://doi.org/10.1007/s10812-006-0070-8>
10. Dashkevich V. I., Vodchits A. I., Orlovich V. A., Kazak N. S., Pavlenko V. K., Pokryshkin V. I., Petrovich I. P., Rukhovets V. V. Comparative studies of eye-safe intracavity and extracavity optical parametric oscillators with an unstable telescopic cavity. *Journal of Applied Spectroscopy*, 2006, vol. 73, no. 4, pp. 604–612. <https://doi.org/10.1007/s10812-006-0070-8>
11. Dashkevich V. I., Orlovich V. A., Shkadarevich A. P., Shushpanov A. S. Travelling-wave 1.57- μm optical parametric oscillator driven by a pulsed multimode Nd^{3+} :YAG laser. *Journal of Applied Spectroscopy*, 2008, vol. 75, no. 4, pp. 285–291. <https://doi.org/10.1007/s10812-008-9077-7>
12. Webb M. S., Moulton P. F., Kasinski J. J., Burnham R. L., Loiacono G., Stolzenberger R. High-average-power KTiOAsO_4 optical parametric oscillator. *Optics Letters*, 1998, vol. 23, no. 15, pp. 1161–1163. <https://doi.org/10.1364/ol.23.001161>
13. Mezenov A. V., Soms L. N., Stepanov A. I. *Thermo-optics of solid-state lasers*. Leningrad, Mechanical engineering, Leningrad Branch Publ., 1986. 197 p. (in Russian).
14. Bierlein J. D., Vanherzeele H. Potassium titanyl phosphate: properties and new applications. *Journal of the Optical Society of America B*, 1989, vol. 6, no. 4, pp. 622–633. <https://doi.org/10.1364/josab.6.000622>
15. Chenais S., Druon F., Forget S., Balembois F., Georges P. On thermal effects in solid-state lasers: The case of ytterbium-doped materials. *Progress in Quantum Electron*, 2006, vol. 30, no. 4, pp. 89–153. <https://doi.org/10.1016/j.pquantelec.2006.12.001>

16. Innocenzi M. E., Yura H. T., Fincher C. L., Fields R. A. Thermal modeling of continuous-wave end-pumped solid-state lasers. *Applied Physics Letters*, 1990, vol. 56, no. 19, pp. 1831–1833. <https://doi.org/10.1063/1.103083>
17. Chen Y. F., Kao C. F., Huang T. M., Wang C. L., Wang S. C. Optimization in scaling fiber-coupled laser-diode end-pumped lasers to higher power: influence of thermal effect. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 1997, vol. 33, no. 8, pp. 1424–1429. <https://doi.org/10.1109/3.605566>
18. Bourderionneta J., Brignona A., Huignarda J.-P., Freyb R. Influence of aberrations on fundamental mode of high power rod solid-state lasers. *Optics Communication*, 2002, vol. 204, no. 1–6, pp. 299–310. [https://doi.org/10.1016/s0030-4018\(02\)01202-6](https://doi.org/10.1016/s0030-4018(02)01202-6)
19. Fan S., Zhang X., Wang Q., Li S., Ding S., Su F. More precise determination of thermal lens focal length for end-pumped solid-state lasers. *Optics Communication*, 2006, vol. 266, no. 2, pp. 620–626. <https://doi.org/10.1016/j.optcom.2006.05.023>
20. Wang Y. T., Li W. J., Pan L. L., Yu J. T., Zhang R. H. Thermally induced diffraction losses for a Gaussian pump beam and optimization of the mode-to-pump ratio in an end-pumped Nd:GdVO₄ laser. *Laser Physics*, 2013, vol. 23, no. 10, pp. 105–109. <https://doi.org/10.1088/1054-660x/23/10/105002>
21. Brosnan S. J., Bayer R. L. Optical parametric oscillator threshold and linewidth studies. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 1979, vol. 15, no. 6, pp. 1415–432. <https://doi.org/10.1109/jqe.1979.1070027>
22. Hansson G., Karlsson H. Transmission measurements in KTP and isomorphic compounds. *Applied Optics*, 2000, vol. 39, no. 27, pp. 5058–5069. <https://doi.org/10.1364/ao.39.005058>

Інфармацыя аб аўтарах

Руса́к Анастасія Александровна – научный сотрудник лаборатории нелинейной оптики, Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси (пр. Независимости, 68-2, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: bui.anastasiya@gmail.com

Дашкевич Владимир Иванович – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории нелинейной оптики, Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси (пр. Независимости, 68-2, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: v.dashkevich@dragon.bas-net.by

Орлович Валентин Антонович – академик, доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией нелинейной оптики, Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси (пр. Независимости, 68-2, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: v.orlovich@dragon.bas-net.by

Шкадаревич Алексей Петрович – академик, доктор физико-математических наук, директор НПЦ «ЛЭМТ» БелОМО (ул. Макаенка, 23, 220023, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: shkad@lemt.by

Information about the authors

Anastasiya A. Rusak – Scientific Researcher of the Laboratory of Nonlinear Optics, B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (68-2, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: bui.anastasiya@gmail.com

Uladzimir I. Dashkevich – Ph. D. (Physics and Mathematics, Leading Scientific Researcher of the Laboratory of Nonlinear Optics, B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (68-2, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: v.dashkevich@dragon.bas-net.by

Valtntin A. Orlovich – Academician, D. Sc. (Physics and Mathematics), Head of the Laboratory of Nonlinear Optics, B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (68-2, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: v.orlovich@dragon.bas-net.by

Aliaksei P. Shradarevich – Academician, Ph. D. (Physics and Mathematics), Director of the Unitary Enterprise STC “LEMT” BelOMO (23, Makaenka Str., 220023, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: shkad@lemt.by

ISSN 1561-2430 (Print)

ISSN 2524-2415 (Online)

УДК 537.312.5

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-2-220-228>

Поступила в редакцию 01.03.2018

Received 01.03.2018

Л. Ф. Макаренко¹, С. Б. Ластовский², Э. Гаубас³, Е. Павлов³,
М. Молл⁴, А. С. Якушевич², Л. И. Мурин²

¹Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь²Научно-практический центр Национальной академии наук Беларуси
по материаловедению, Минск, Беларусь³Институт фотоники и нанотехнологии, Вильнюс, Литва⁴ЦЕРН, Женева, Швейцария

ИНЖЕКЦИОННЫЙ ОТЖИГ КОМПЛЕКСА СОБСТВЕННОЕ ДИМЕЖДОУЗЛИЕ – КИСЛОРОД В КРЕМНИИ *p*-ТИПА

Аннотация. Методом нестационарной спектроскопии глубоких уровней (DLTS) с использованием n^+-p -структур исследовано влияние инъекции неосновных носителей заряда (электронов) на отжиг комплекса собственное димеждоузлие – кислород (I_2O) в кремнии, облученном альфа-частицами. Показано, что в легированном бором кремнии, имеющем удельное сопротивление 10 Ом·см, инжекционно-стимулированный отжиг этого комплекса при комнатной температуре начинается при плотности прямого тока $\sim 1,5$ А/см². При этом суммарная концентрация радиационных дефектов не превышала 15 % от начальной концентрации бора. В результате инжекционно-стимулированного отжига I_2O образуется двухвалентная дырочная ловушка с уровнями $E_v + 0,43$ эВ и $E_v + 0,54$ эВ. Установлено, что в кремнии p -типа проводимости эта ловушка соответствует эмиссии дырок метастабильной конфигурацией бистабильного дефекта (BH -конфигурация). В основной конфигурации (ME -конфигурация) этот бистабильный дефект проявляет себя как электронная ловушка с уровнем $E_c - 0,35$ эВ. На основании данных об отношении амплитуд сигнала DLTS бистабильного дефекта в различных конфигурациях сделан вывод, что в ME -конфигурации он ведет себя как центр с отрицательной корреляционной энергией. Показано, что наличие инжекционно-стимулированных процессов существенно затрудняет получение достоверных данных о кинетике образования бистабильного дефекта в BH -конфигурации при исследовании термического отжига комплекса собственное димеждоузлие – кислород.

Ключевые слова: кремний, радиационные дефекты, междоузельные атомы, рекомбинационно-ускоренные реакции

Для цитирования. Инжекционный отжиг комплекса собственное димеждоузлие – кислород в кремнии p -типа / Л. Ф. Макаренко [и др.] // Вест. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2018. – Т. 54, № 2. – С. 220–228. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-2-220-228>

L. F. Makarenko¹, S. B. Lastovskii², E. Gaubas³, J. Pavlov³, M. Moll⁴, H. S. Yakushevich², L. I. Murin²

¹Belarusian State University, Minsk, Belarus²Scientific and Practical Materials Research Center of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus³Institute of Photonics and Nanotechnology, Vilnius, Lithuania⁴CERN, Geneva, Switzerland

INJECTION ANNEALING OF THE SELF DI-INTERSTITIAL – OXYGEN COMPLEX IN p -TYPE SILICON

Abstract. With the use of deep level transient spectroscopy (DLTS) the effect of injection of minority charge carriers (electrons) on an annealing rate of self di-interstitial – oxygen (I_2O) complex in silicon has been studied. The complex has been formed by irradiation of epitaxial boron-doped n^+-p diode structures with alpha-particles at room temperature. It has been shown that the disappearance of this complex at room temperature begins at a direct current density of ~ 1.5 A/cm². This characteristic current density has been found for 10 Ω -cm p -type silicon when the total radiation defect density was less than 15 % of the initial boron concentration, a divalent hole trap with energy levels of $E_v + 0.43$ eV and $E_v + 0.54$ eV has been found to appear as a result of recombination-enhanced annealing of the I_2O . When the I_2O complex is annealed thermally, the concurrent appearance of an electron trap with an energy level of $E_c - 0.35$ eV has been observed. It has been shown that the divalent hole trap represents a metastable configuration (BH -configuration) of the bistable defect, whereas the electron trap is stable in the p -Si configuration (ME -configuration). From the comparison of DLTS signals related to different defect configurations it is found that the ME -configuration of this bistable defect can be characterized as a center with negative correlation energy. It has been shown that the injection-stimulated processes make it very difficult to obtain reliable data on the formation kinetics of the bistable defect in the BH -configuration when studying the thermal annealing of the I_2O complex.

Keywords: silicon, radiation defects, interstitial atoms, recombination-enhanced reactions

For citation. Makarenko L. F., Lastovskii S. B., Gaubas E., Pavlov J., Moll M., Yakushevich H. S., Murin L. I. Injection annealing of the self di-interstitial – oxygen complex in p -type silicon. *Vestsi Natsyional'nei akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk* = *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, vol. 54, no. 2, pp. 220–228 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-2-220-228>

Введение. Явление инжекционно-ускоренного отжига радиационных дефектов в кремнии p -типа проводимости было впервые обнаружено достаточно давно. Так, в работе [1] сообщалось об инжекционно-ускоренном отжиге одиночных вакансий. Ускорение миграции междоузельных атомов бора (B_i) и алюминия (Al_i) посредством возбуждения электронно-дырочной подсистемы кристалла наблюдалась в [2, 3]. Наиболее чувствительным к такому возбуждению являются реакции собственного междоузельного атома кремния ($I \equiv Si_i$). В статьях [4, 5] показано, что активация реакций с участием собственного междоузельного атома при температуре жидкого азота в диодах на основе p -Si наблюдается уже при пропускании прямого тока $J_f \sim 0,01$ А/см². Величина J_f значительно ниже плотности тока, требуемого для активации миграции междоузельного атома примеси бора [5].

Рекомбинационно-стимулированному отжигу подвержены не только простейшие дефекты (V , I , B_i , Al_i), но и комплексы дефектов. Так, в работе [6] было показано, что при инжекции электронов энергия активации бор-кислородного комплекса B_iO_i понижается на величину ~ 1 эВ, которая сравнима с шириной запрещенной зоны кремния. Однако для такого существенного понижения энергии отжига требуются значительно более высокие плотности токов инжекции, чем это необходимо для дефектов типа B_i или Al_i .

Примесные атомы кислорода служат ловушкой как для одиночных междоузельных атомов, так и для более сложных междоузельных комплексов, одним из которых является пара междоузельных атомов кремния – димеждоузельный комплекс (I_2). Впервые на возможность образования комплекса димеждоузельный – междоузельный атом кислорода (I_2O) было указано в [7]. Этот комплекс может быть зарегистрирован с использованием спектроскопии ИК-поглощения как линия 936 см⁻¹, которая возникает при облучении кристаллов кремния, выращенных по методу Чохральского. Как показано в [8], комплекс I_2O является одним из доминирующих радиационных дефектов в сильно облученных кристаллах кремния. Было установлено [9], что он имеет донорный уровень вблизи $E_v + 0,09$ эВ и может, таким образом, наблюдаться посредством метода емкостной спектроскопии глубоких уровней (DLTS). Используя этот метод, удалось определить ряд характеристик комплекса I_2O , в частности энергию активации отжига, которая составляет $E_a = 1,05$ эВ. Кроме того, в дополнение к данным ИК-поглощения с использованием метода DLTS найден новый бистабильный электрически активный дефект (BH -центр), который представляет собой продукт отжига центра $E_v + 0,09$ эВ. Обнаружение продукта отжига I_2O важно для установления механизма его исчезновения, развития представлений о поведении междоузельных дефектов в кремнии и их влияния на свойства приборных кремниевых структур.

Вместе с тем имеет место некоторое несоответствие между температурами отжига центра $E_v + 0,09$ эВ, наблюдаемых в [9], и температурами появления бистабильного дефекта, приведенных в [10]. В настоящей работе будет показано, что это несоответствие может быть связано с инжекционно-стимулированным отжигом комплекса.

Методика эксперимента. Исследовались кремниевые n^+p -структуры (диоды), созданные на основе эпитаксиальных слоев кремния p -типа толщиной 50 мкм, выращенных на легированной бором кремниевой подложке толщиной 525 мкм с удельным сопротивлением 0,006 Ом·см. n^+ -Слой создавался посредством диффузии фосфора при температуре 1050 °С. Концентрация дырок в p -областях структур, обусловленная легированием бором во время эпитаксиального роста слоев, оценивалась исходя из измерений вольт-фарадных характеристик и составила $9 \cdot 10^{14}$ см⁻³. Содержание кислорода, проникшего в диоды в процессе их изготовления, определялось по скорости отжига междоузельного углерода с применением представленной в [11] калибровки и составляло $[O] \approx 1,5 \cdot 10^{17}$ см⁻³. Концентрация углерода рассчитывалась с использованием соотношения между сечениями захвата собственных междоузельных атомов бором и углеродом [12] и составила $\approx 2 \cdot 10^{15}$ см⁻³.

Облучение осуществлялось α -частицами с помощью поверхностного источника частиц при температурах примерно 280–290 К. Энергия α -частиц имела значения ~ 5 МэВ, время облучения составляло 40–150 мин. Поверхностная активность источника была около $2 \cdot 10^7$ Бк/см². Распределение радиационно-индуцированных дефектов, создаваемых при облучении таким поверхностным источником, приводится в [11].

Исследование электрически активных радиационно-индуцированных дефектов выполнялось методом емкостной спектроскопии глубоких уровней. Далее будут использоваться два обозначения для экспериментальных спектров: DLTS, когда заполнение ловушек осуществлялось основными носителями заряда (напряжение 0 В или заполняющие импульсы обратного смещения диода), и MC-DLTS, когда в процессе заполнения ловушек инжектировались неосновные носители заряда (заполняющие импульсы прямого смещения). Очевидно, что в спектрах DLTS проявляются только ловушки основных носителей заряда. В спектрах MC-DLTS дополнительно проявляются и ловушки неосновных носителей заряда, но лишь те, которые характеризуются достаточно высокой асимметрией сечений захвата носителей заряда разных знаков. При этом амплитуда ловушек основных носителей заряда может даже увеличиваться за счет большего расширения квазинейтральной области при положительных напряжениях заполняющего импульса.

Для регистрации спектров DLTS использовались две установки. Измерения в диапазоне температур 30–270 К проводились с применением спектрометра HERA-DLTS FT-1300 [12], в диапазоне температур 79–270 К – спектрометра «Світанак», созданного в НИИ прикладных физических проблем БГУ. Установка «Світанак» позволяла также реализовать при измерениях MC-DLTS более высокие максимальные значения прямого тока во время заполняющего импульса.

Идентификация ловушек проводилась на основании определения их параметров (E_t и A_t), определяющих температурную зависимость скорости эмиссии захваченных носителей заряда в соответствии с уравнением

$$e_t(T) = A_t T^2 \exp\left(-\frac{E_t}{kT}\right). \quad (1)$$

Параметр E_t есть энергия ионизации ловушки, а множитель A_t определяется свойствами полупроводника и сечением захвата носителей заряда ловушкой.

Отжиг при температурах свыше 100 °С в течение ~30 мин проводился на воздухе в модифицированной трубчатой печи, колебания температуры в которой в стационарном режиме не превышали ± 3 К. Ниже 100 °С образцы отжигались непосредственно в криостате DLTS-спектрометра.

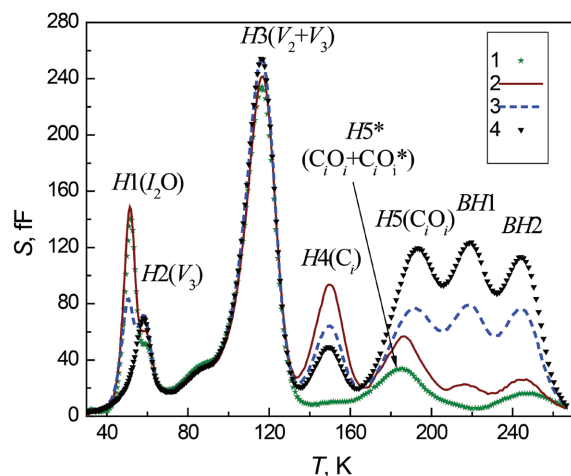


Рис. 1. Эволюция спектров DLTS после альфа-облучения (1) и последующего пропускания в течение 2 мин прямого тока с плотностью $J_f = 1,6$ А/см² (2); $J_f = 6,4$ А/см² (3); $J_f = 12,8$ А/см² (4). Условия измерения: окно скоростей эмиссии $e_w = 57$ с⁻¹ для всех спектров; изменение смещения $-3 \rightarrow 0$ В и длительность заполняющего импульса $t_p = 10$ мс

Fig. 1. DLTS spectra registered after irradiation with alpha-particles (1) and after subsequent direct current injection during 2 min with the density $J_f = 1.6$ А/см² (2); $J_f = 6.4$ А/см² (3); $J_f = 12.8$ А/см² (4). Measurement conditions: emission rate window $e_w = 57$ s⁻¹ for all spectra, the bias change $-3 \rightarrow 0$ V, and the filling pulse duration $t_p = 10$ ms

Экспериментальные результаты и их обсуждение. Сигнал DLTS, связанный с уровнем $E_v + 0,09$ эВ, может быть зарегистрирован только в области температур 40–50 К. Исследование поведения этого пика проводилось нами с использованием спектрометра HERA-DLTS. Полученные спектры DLTS для исследованных n^+p -диодов приведены на рис. 1, где кривая 1 соответствует спектру, полученному сразу после облучения. В спектре проявляется ряд ловушек, которые были идентифицированы ранее (см. [9, 13, 14]). Пик H1 соответствует ионизации комплекса I_2O . Значения его параметров были определены нами как $E_{H1} = 0,091$ эВ и $A_{H1} = 1,3 \cdot 10^7$ с⁻¹ и согласуются с данными работы [9]. Пик H2 соответствует ионизации одной из конфигураций тривакансии [14]. Значения энергии активации эмиссии дырок и предэкспоненциальный фактор этого центра равны $E_{H2} = 0,103$ эВ и $A_{H2} = 8,5 \cdot 10^5$ с⁻¹ и также согласуются с данными, полученными ранее [14]. Пик H3 соответствует суперпозиции пиков ионизации дивакансии (V_2) и тривакансии (V_3) [14].

Пики $H4$ и $H5$ связаны с междоузельным углеродом (C_i) и комплексом междоузельный углерод – междоузельный кислород (C_iO_i) соответственно. Пики $H3$, $H4$ и $H5$ хорошо известны и неоднократно наблюдались нами ранее [15]. Пик $H5^*$ представляет собой суперпозицию сигнала DLTS комплекса междоузельный углерод – междоузельный кислород в основной (C_iO_i) и метастабильной ($C_iO_i^*$) конфигурациях [16]. При комнатной температуре $C_iO_i^*$ постепенно преобразуется в основную (стабильную) конфигурацию C_iO_i [16], при этом происходит постепенный сдвиг пика $H5^*$ в более высокотемпературную область, приближаясь к пику $H5$.

Длительное хранение при комнатной температуре приводит к постепенному исчезновению ловушки $H1$. Постоянная времени ее исчезновения, оцененная из экспериментальных данных работы [9] для эпитаксиальных диодов, составляет порядка 6 недель при 24 °C. В экспериментах же по исследованию изохронного отжига (время отжига 20–30 мин) его исчезновение начинается при $T > 60^\circ\text{C}$ [9]. Однако отжиг ловушки $H1$ при комнатной температуре может быть существенно ускорен путем пропускания прямого тока через облученную n^+p -структуру.

Это хорошо видно из спектров 2–4 на рис. 1, которые показывают, что изменения спектра DLTS начинают происходить уже при пропускании через структуру прямого тока плотностью $J_f = 1,6 \text{ A/cm}^2$ в течение двух минут (кривая 2). Данные изменения становятся более ярко выраженными при повышении плотности прямого тока до $6,4 \text{ A/cm}^2$ (кривая 3). После пропускания такого тока в течение двух минут происходит существенное уменьшение амплитуды пика $H1$ и увеличение амплитуд пиков $BH1$ и $BH2$. После пропускания прямого тока с плотностью $12,8 \text{ A/cm}^2$ в течение такого же промежутка времени пик $H1$ исчезает полностью, а амплитуда пиков $BH1$ и $BH2$ достигает максимума (кривая 4). Одновременно изменяются амплитуды пиков $H4$ и $H5$. Но, как показывают наши предыдущие исследования [4], изменения амплитуд пиков $H4$ и $H5$ не связаны с пропусканием прямого тока, а обусловлены термическим отжигом междоузельного углерода (пик $H4$) за время нахождения диода при комнатной температуре. Наблюдаемые изменения амплитуд пиков $H4$ и $H5$ позволяют утверждать, что увеличение температуры диода в процессе инжекционного отжига не превышало 12–15 K при максимальном прямом токе (0,8 A).

Параметры ловушек, ответственных за появление пиков $BH1$ и $BH2$, были определены нами как $E_{BH1} = 0,434 \text{ эВ}$, $A_{BH1} = 1,4 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$ и $E_{BH2} = 0,528 \text{ эВ}$, $A_{BH2} = 7,9 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$ соответственно. Эти ловушки наблюдались ранее в работах [10, 17] и были связаны с разными зарядовыми состояниями BH -центра [10]. Бистабильность дефекта, ответственного за ловушки $BH1$ и $BH2$, подтверждается путем проведения многократных циклов 20-минутного отжига при 80 °C и последующего пропускания прямого тока с достаточно высокой плотностью.

Изменения спектров DLTS и MC-DLTS до начала и после окончания каждого цикла такой обработки исследуемых n^+p -структур с применением установки «Світанак» показаны на рис. 2. При этом использовался тот же самый диод, спектры DLTS которого (см. рис. 1) были получены ранее с помощью установки HERA-DLTS. Перед измерениями диод прошел термообработку при 80 °C в течение 20 мин. Как видно из кривой 1, в спектре DLTS наблюдаются только два

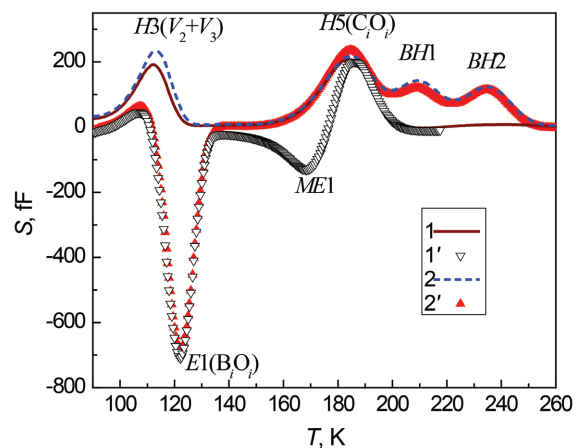


Рис. 2. Типичные спектры DLTS (линии) и спектры MC-DLTS (символы) для того же самого диода, что и на рис. 1, полученные сразу после отжига при 80 °C в течение 20 мин (1, 1') и после пропускания прямого тока плотностью $J_f = 3,2 \text{ A/cm}^2$ (2, 2'). Условия измерения: окно скоростей эмиссии $e_w = 19 \text{ с}^{-1}$ для всех спектров; изменение смещения $-3 \rightarrow 0 \text{ В}$, длительность заполняющего импульса $t_p = 10 \text{ мс}$ для спектров 1, 2; изменение смещения $-3 \rightarrow +2,0 \text{ В}$, длительность заполняющего импульса $t_p = 10 \text{ мс}$ для спектров 1', 2'

Fig. 2. Conventional DLTS (lines) and MC-DLTS (symbols) spectra for the same diode as in Fig. 1 registered immediately after 80 °C annealing during 20 min (1, 1') and after direct current injection with the density $J_f = 3.2 \text{ A/cm}^2$ (2, 2'). Measurement conditions: emission rate window $e_w = 19 \text{ s}^{-1}$ for all spectra, the bias change $-3 \rightarrow 0 \text{ V}$, and the filling pulse duration $t_p = 10 \text{ ms}$ for spectra 1, 2; the bias change $-3 \rightarrow +2.0 \text{ V}$, and the filling pulse duration $t_p = 10 \text{ ms}$ for spectra 1', 2'

пика $H3$ и $H5$ (кривая 1). Если же через диод перед измерением дополнительно пропустить прямой ток плотностью $3,2 \text{ А/см}^2$ в течение двух минут, что гарантирует полную перестройку BH -центра в метастабильную конфигурацию, то появляются пики $BH1$ и $BH2$, которые наблюдались ранее (см. рис. 1). Как показывает сравнение рис. 1 и 2, имеет место согласие между результатами измерений на установках HERA-DLTS и «Світанак». Некоторое отличие в температурах положения пиков связаны с различием в окнах эмиссии, используемых в указанных установках.

В спектрах MC-DLTS (кривая 1', рис. 2) дополнительно к дырочным ловушкам наблюдаются и ловушки электронов, которые обозначены как $E1$ и $ME1$. Ловушка $E1$ ($E_{E1} = 0,227 \text{ эВ}$, $A_{E1} = 3,9 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$) хорошо известна и идентифицирована как комплекс междоузельный бор – междоузельный кислород (B_iO_i) [12]. Ловушка $ME1$ ($E_{ME1} = 0,353 \text{ эВ}$, $A_{ME1} = 5,0 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$) наблюдалась ранее в [18], где было показано, что она относится к метастабильному дефекту. Результаты наших измерений подтверждают эту точку зрения. Как видно из рис. 2, эта ловушка исчезает после пропускания прямого тока, и в спектрах DLTS появляются пики $BH1$ и $BH2$. То есть исчезновение ловушки $ME1$ сопровождается появлением пиков двухвалентной ловушки $BH1/BH2$. Последующий отжиг при 80°C приводит к восстановлению $ME1$ и исчезновению $BH1/BH2$. Эта конверсия $ME1 \leftrightarrow BH1/BH2$ имеет место при многократном циклировании обработок – отжиге при 80°C в течение 20 мин и пропускании прямого тока с плотностью $\sim 3\text{--}6 \text{ А/см}^2$. Таким образом, можно предположить, что и ловушка $ME1$, и ловушка $BH1/BH2$ представляют собой различные конфигурации одного и того же дефекта. Это предположение было впервые сделано в работе [19] на основании изучения кинетики перестройки ловушки $BH1/BH2$ в стабильную конфигурацию.

Особенностью наблюдения ловушки $ME1$ является требование достаточно больших по амплитуде прямых напряжений в импульсе заполнения в процессе регистрации спектров MC-DLTS. Иными словами, для наблюдения центра $ME1$ требуется достаточно высокая плотность инжектируемых неосновных носителей заряда во время импульса заполнения. Реализация импульсов заполнения с достаточно высоким уровнем инжекции обычно не предусмотрена в стандартных спектрометрах DLTS, что может препятствовать исследованиям центра $ME1$ с их применением.

Необходимость высоких уровней инжекции электронов для наблюдения ловушки $ME1$ свидетельствует об относительно небольшой асимметрии сечений захвата электронов и дырок этой ловушкой, что может затруднять количественную оценку концентрации центра $ME1$. Поэтому

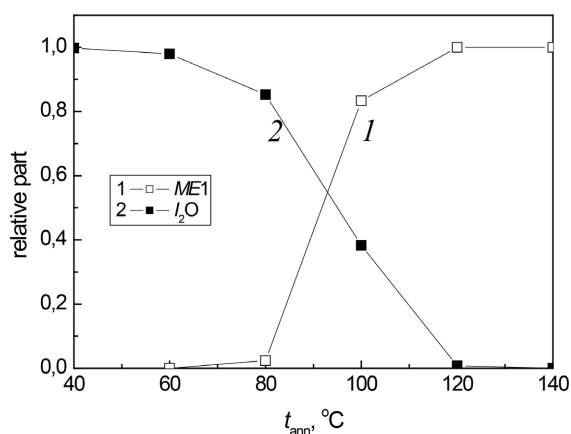


Рис. 3. Образование ловушки $ME1$ в процессе изохронного отжига (1). Кривая 2, рассчитанная из данных работы [9], соответствует исчезновению I_2O при тех же условиях отжига, длительность которого составляла 20 мин, шаг по температуре – 20 K

Fig. 3. Formation of the $ME1$ trap under isochronal annealing (1). Curve 2 (calculated from the experimental data [9]) – I_2O disappearance under the same annealing conditions, the annealing duration – 20 min with a temperature step of 20 K

при регистрации спектров MC-DLTS мы использовали максимальные уровни инжекции от генератора импульсов установки «Світанак».

На рис. 3 приведены результаты изохронного отжига, при котором появляется ловушка $ME1$. Температура ее появления (кривая 1, рис. 3) несколько выше температуры отжига C_i (см. [4]) и совпадает с температурой отжига комплекса I_2O . Кривая 2 на рис. 3 построена на основании данных, приведенных в [9] для аналогичных эпитаксиальных диодов. Таким образом, полученные результаты изохронного отжига свидетельствуют о том, что ловушка $ME1$, так же как и двойной пик $BH1/BH2$, появляется в результате отжига комплекса I_2O . Из рис. 2 видно, что амплитуда пика $ME1$ $S_{\text{max}}(ME1)$ больше амплитуды каждого из пиков: $BH1$ $S_{\text{max}}(BH1)$ и $BH2$ $S_{\text{max}}(BH1)$. Использование разности спектров 1' и 2', представленных на рис. 2, показывает, что амплитуда сигнала пика $ME1$ в 2 раза больше амплитуды каждого из пиков $BH1$ и $BH2$. На основании этого факта можно сделать вывод, что ловушка $ME1$

одновременно испускает 2 электрона, т. е. она является центром с отрицательной корреляционной энергией (negative-U-центр).

Обсуждение результатов. Для наблюдения пиков $BH1/BH2$ необходимо перевести соответствующий бистабильный центр в конфигурацию, имеющую уровни в нижней половине запрещенной зоны кремния. Для этого требуется пропускание через диод прямого тока достаточно высокой плотности. Так, в [10, 20] для такой перестройки использовались плотности тока в интервале 4,8–16 А/см². Как следует из полученных нами результатов, такие токи не только переводили уже имеющиеся бистабильные центры в требуемую конфигурацию, но и обуславливали образование новых бистабильных центров в результате инжекционного отжига комплекса I_2O . Таким образом, мы не можем установить, какая доля наблюдаемых BH -центров появилась в ходе термического отжига, а какая – вследствие инжекции электронов в процессе его конфигурационной перестройки. Отсюда можно сделать вывод, что получить однозначные результаты о кинетике образования бистабильного центра из результатов изохронного термического отжига не всегда возможно.

Именно этим объясняются противоречия по температурам образования бистабильного центра и исчезновения ловушки $E_v + 0,09$ эВ, присутствующие в [9, 10, 20]. С использованием чисто термического отжига может быть исследована только корреляция между исчезновением центра $E_v + 0,09$ эВ и бистабильной ловушкой, находящейся в конфигурации $ME1$, как это показано на рис. 3.

Важной проблемой является идентификация атомной структуры бистабильного центра $ME1/BH1/BH2$. В [10] выдвинуто предположение о том, что этот центр может быть либо комплексом собственное междоузлие – междоузельный углерод (IC_i), либо комплексом собственное междоузлие – междоузельный бор (IB_i). В последующей работе [20] считалось, что образование комплекса IC_i является более вероятным механизмом отжига I_2O , тем не менее убедительных свидетельств в пользу указанной гипотезы не получено. Так, в [20] методом ИК-поглощения исследовался отжиг дефекта, ответственного за линию 936 см⁻¹. Было установлено, что в материалах с более высоким содержанием бора и углерода температура изохронного отжига этого дефекта понижается. Однако ясно, что этот факт не позволяет однозначно установить механизм отжига I_2O и природу бистабильного BH -центра, образующегося после его распада. По нашему мнению, нет оснований отдать предпочтение какой-либо из этих гипотез о природе бистабильного центра, и для выяснения механизма отжига I_2O требуются дополнительные эксперименты с использованием образцов, содержащих различные соотношения концентраций бора и углерода.

Заключение. С применением метода нестационарной емкостной спектроскопии глубоких уровней обнаружено, что отжиг комплекса собственное димеждоузлие – кислород (I_2O) может быть существенно ускорен путем инжекции неосновных носителей заряда (электронов). Проведены исследования электрических характеристик бистабильного дефекта, образующегося в результате отжига I_2O . Показано, что плотности токов, приводящие к исчезновению I_2O , находятся в том же интервале, что и плотности тока инжекции, требуемые для перестройки в электрически активную конфигурацию возникающего бистабильного дефекта. Это делает невозможным проведение корректного эксперимента по изучению корреляции между термическим отжигом комплекса собственное димеждоузлие – кислород и появлением бистабильного дефекта.

Выявлен новый уровень бистабильного дефекта в его основной конфигурации. Получены данные, которые свидетельствуют о том, что основная конфигурация исследованного дефекта имеет инверсный порядок следования энергетических уровней.

Благодарности. Работа выполнена в рамках задания 1.31 программы «Физическое материаловедение, новые материалы и технологии», а также при частичной финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант № Ф17МС-022) и Академия наук Литвы (грант № LMA-CERN-2017/2018-309326434).

Acknowledgements. This study was partially supported by the State Research Program of the Republic of Belarus “Physical material science, new materials and technologies”, the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (Grant No. F17MS-022) and by the Lithuanian Academy of Sciences (Grant No. LMA-CERN-2017/2018-309326434).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Gregory, B. L. Injection-stimulated vacancy reordering in p-type silicon at 76 °K / B. L. Gregory // J. Appl. Phys. – 1965. – Vol. 36, № 12. – P. 3765–3769. <https://doi.org/10.1063/1.1713944>
2. Troxell, J. R. Interstitial boron in silicon: A negative-U system. / J. R. Troxell, G. D. Watkins // Phys. Rev. B. – 1980. – Vol. 22, № 2. – P. 921–931. <https://doi.org/10.1103/physrevb.22.921>
3. Recombination-enhanced migration of interstitial aluminum in silicon / J. R. Troxell [et al.] // Phys. Rev. B. – 1979. – Vol. 19, № 10. – P. 5336–5348. <https://doi.org/10.1103/physrevb.19.5336>
4. Effect of electron injection on defect reactions in irradiated silicon containing boron, carbon, and oxygen / L. F. Makarenko [et al.] // J. Appl. Phys. – 2018. – Vol. 123, № 16. – P. 161576 (7 p.). <https://doi.org/10.1063/1.5010965>
5. Инжекционный отжиг радиационных дефектов междоузельного типа в легированных бором кристаллах кремния / Л. Ф. Макаренко [и др.] // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2017. – № 3. – С. 108–117.
6. Forward current enhanced elimination of the radiation induced boron-oxygen complex in silicon n^+p diodes / L. F. Makarenko [et al.] // Phys. Status Solidi A. – 2014. – Vol. 211, № 11. – P. 2558–2562. <https://doi.org/10.1002/pssa.201431315>
7. Complexes of the self-interstitial with oxygen in irradiated silicon: a new assignment of the 936 cm^{-1} band / J. Hermansson [et al.] // Phys. B: Condens. Matter. – 2001. – Vol. 302/303. – P. 188–192. [https://doi.org/10.1016/s0921-4526\(01\)00426-4](https://doi.org/10.1016/s0921-4526(01)00426-4)
8. Radiation damage in silicon exposed to high-energy protons / G. Davies [et al.] // Phys. Rev. B. – 2006. – Vol. 73, № 16. – P. 165202 (10 p.). <https://doi.org/10.1103/physrevb.73.165202>
9. Structure, electronic properties and annealing behavior of di-interstitial-oxygen center in silicon / V. P. Markevich [et al.] // Solid State Phenomena. – 2015. – Vol. 242. – P. 290–295. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/ssp.242.290>
10. Radiation-induced bistable centers with deep levels in silicon n^+p structures. / S. B. Lastovskii [et al.] // Semiconductors. – 2016. – Vol. 50, № 6. – P. 751–755. <https://doi.org/10.1134/s1063782616060130>
11. Reactions of interstitial carbon with impurities in silicon particle detectors / L. F. Makarenko [et al.] // J. Appl. Phys. – 2007. – Vol. 101, № 11. – P. 113537 (6 p.). <https://doi.org/10.1063/1.2745328>
12. Interstitial defect reactions in silicon / L. C. Kimerling [et al.] // Mater. Sci. Forum. – 1989. – Vol. 38/41. – P. 141–150. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/msf.38-41.141>
13. New HERA-DLTS system [Electronic resource] // PhysTech. – Mode of access: <http://phystech.eu/products/dlts/dlhera.htm>. – Date of access: 27.02.2018.
14. Structure and electronic properties of trivacancy and trivacancy-oxygen complexes in silicon / V. P. Markevich [et al.] // Phys. Status Solidi A. – 2011. – Vol. 208, № 3. – P. 568–571. <https://doi.org/10.1002/pssa.201000265>
15. DLTS studies of carbon related complexes in irradiated n - and p -silicon / L. F. Makarenko [et al.] // Solid State Phenomena. – 2010. – Vol. 156/158. – P. 155–160. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/ssp.156-158.155>
16. Formation and annealing of metastable (interstitial oxygen)-(interstitial carbon) complexes in n - and p -type silicon / L. F. Makarenko [et al.] // Semiconductors. – 2014. – Vol. 48, № 11. – P. 1456–1462. <https://doi.org/10.1134/s1063782614110141>
17. Transformation kinetics of an intrinsic bistable defect in damaged silicon / R. M. Fleming [et al.] // J. Appl. Phys. – 2012. – Vol. 111, № 2. – P. 023715 (7 p.). <https://doi.org/10.1063/1.3678581>
18. Formation and annealing of boron-oxygen defects in irradiated silicon and silicon-germanium n^+p structures / L. F. Makarenko [et al.] // AIP Conf. Proc. – 2014. – Vol. 1583, № 1. – P. 123–126. <https://doi.org/10.1063/1.4865618>
19. Бистабильные центры с глубокими уровнями в кремниевых n^+p -структурах, облученных альфа-частицами / А. С. Якушевич [и др.] // Актуальные проблемы физики твердого тела (ФТТ-2016): сб. докл. Междунар. науч. конф., Минск, 22–25 нояб. 2016 г.: в 3 т. / редкол.: Н. М. Олехнович (пред.) [и др.]. – Минск: Ковчег, 2016. – Т. 2. – С. 105–107.
20. The di-interstitial in silicon: Electronic properties and interactions with oxygen and carbon impurity atoms / V. E. Gusakov [et al.] // Phys. Status Solidi A. – 2017. – Vol. 214, № 7. – P. 1700261 (6 p.). <https://doi.org/10.1002/pssa.201700261>

References

1. Gregory B. L. Injection-stimulated vacancy reordering in p-type silicon at 76 °K. *Journal of Applied Physics*, 1965, vol. 36, no. 12, pp. 3765–3769. <https://doi.org/10.1063/1.1713944>
2. Troxell J. R., Watkins G. D. Interstitial boron in silicon: A negative-U system. *Physical Review B*, 1980, vol. 22, no. 2, pp. 921–931. <https://doi.org/10.1103/physrevb.22.921>
3. Troxell J. R., Chatterjee A. P., Watkins G. D., Kimerling L. C. Recombination-enhanced migration of interstitial aluminum in silicon. *Physical Review B*, 1979, vol. 19, no. 10, pp. 5336–5348. <https://doi.org/10.1103/physrevb.19.5336>
4. Makarenko L. F., Lastovskii S. B., Yakushevich H. S., Moll M., Pintilie I. Effect of electron injection on defect reactions in irradiated silicon containing boron, carbon, and oxygen. *Journal of Applied Physics*, 2018, vol. 123, no. 16, pp. 161576 (1–7). <https://doi.org/10.1063/1.5010965>

5. Makarenko L. F., Lastovskii S. B., Yakushevich H. S., Moll M., Pintilie I. Injection annealing of radiation-induced interstitial defects in boron doped silicon crystals. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus, Physics and Mathematics series*, 2017, no. 3, pp. 108–117 (in Russian).
6. Makarenko L. F., Lastovskii S. B., Yakushevich H. S., Moll M., Pintilie I. Forward current enhanced elimination of the radiation induced boron-oxygen complex in silicon n^+p diodes. *Physica Status Solidi A*, 2014, vol. 211, no. 11, pp. 2558–2562. <https://doi.org/10.1002/pssa.201431315>
7. Hermansson J., Murin L. I., Hallberg T., Markevich V. P., Lindström J. L., Kleverman M., Svensson B. G. Complexes of the self-interstitial with oxygen in irradiated silicon: a new assignment of the 936 cm^{-1} band. *Physica B: Condensed Matter*, 2001, vol. 302–303, pp. 188–192. [https://doi.org/10.1016/s0921-4526\(01\)00426-4](https://doi.org/10.1016/s0921-4526(01)00426-4)
8. Davies G., Hayama S., Murin L., Krause-Rehberg R., Bondarenko V., Sengupta A., Davia C., Karpenko A. Radiation damage in silicon exposed to high-energy protons. *Physical Review B*, 2006, vol. 73, no. 16, pp. 165202 (1–10). <https://doi.org/10.1103/physrevb.73.165202>
9. Markevich V. P., Peaker A. R., Hamilton B., Gusakov V. E., Lastovskii S. B., Murin L. I., Ganagana N., Monakhov E. V., Svensson B. G. Structure, electronic properties and annealing behavior of di-interstitial-oxygen center in silicon. *Solid State Phenomena*, 2015, vol. 242, pp. 290–295. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/ssp.242.290>
10. Lastovskii S. B., Markevich V. P., Yakushevich H. S., Murin L. I., Krylov V. P. Radiation-induced bistable centers with deep levels in silicon n^+p structures. *Semiconductors*, 2016, vol. 50, no. 6, pp. 751–755. <https://doi.org/10.1134/s1063782616060130>
11. Makarenko L. F., Moll M., Korshunov F. P., Lastovski S. B. Reactions of interstitial carbon with impurities in silicon particle detectors. *Journal of Applied Physics*, 2007, vol. 101, no. 11, pp. 113537 (1–6). <https://doi.org/10.1063/1.2745328>
12. Kimerling L. C., Asom M. T., Benton J. L., Drevinsky P. J., Cafer C. E. Interstitial defect reactions in silicon. *Materials Science Forum*, 1989, vol. 38–41, pp. 141–150. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/msf.38-41.141>
13. New HERA-DLTS system. *PhysTech*. Available at: <http://phystech.eu/products/dlts/dlhera.htm> (accessed 27 February 2018).
14. Markevich V. P., Peaker A. R., Hamilton B., Lastovskii S. B., Murin L. I., Coutinho J., Torres V. J., Dobaczewski L., Svensson B. G. Structure and electronic properties of trivacancy and trivacancy-oxygen complexes in silicon. *Physica Status Solidi A*, 2011, vol. 208, no. 3, pp. 568–571. <https://doi.org/10.1002/pssa.201000265>
15. Makarenko L. F., Korshunov F. P., Lastovskii S. B., Murin L. I., Moll M. DLTS studies of carbon related complexes in irradiated n - and p -silicon. *Solid State Phenomena*, 2010, vol. 156–158, pp. 155–160. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/ssp.156-158.155>
16. Makarenko L. F., Korshunov F. P., Lastovskii S. B., Murin L. I., Moll M., Pintilie I. Formation and annealing of metastable (interstitial oxygen)-(interstitial carbon) complexes in n - and p -type silicon. *Semiconductors*, 2014, vol. 48, no. 11, pp. 1456–1462. <https://doi.org/10.1134/s1063782614110141>
17. Fleming R. M., Seager C. H., Lang D. V., Campbell J. M. Transformation kinetics of an intrinsic bistable defect in damaged silicon. *Journal of Applied Physics*, 2012, vol. 111, no. 2, pp. 023715 (1–7). <https://doi.org/10.1063/1.3678581>
18. Makarenko L. F., Lastovskii S. B., Korshunov F. P., Moll M., Pintilie I., Abrosimov N. V. Formation and annealing of boron-oxygen defects in irradiated silicon and silicon-germanium n^+p structures. *AIP Conference Proceedings*, 2014, vol. 1583, no. 1, pp. 123–126. <https://doi.org/10.1063/1.4865618>
19. Yakushevich H. S., Lastovskii S. B., Makarenko L. F., Murin L. I. Bistable centres with deep levels in silicon n^+p structures irradiated with alpha-particles. *Actual'nyye problemy fiziki tverdogo tela (FTT – 2016) : sbornik dokladov Mezhdunarodnoy konferentsii, Minsk, 22–25 noyabrya 2016. T. 2* [Actual Problems of Solid State Physics (SSP – 2016) : Proceedings of the International Scientific Conference, Minsk, 22 – 25 November 2016. Vol. 2]. Minsk, Kovcheg Publ., 2016, pp. 105–107 (in Russian).
20. Gusakov V. E., Lastovskii S. B., Murin L. I., Tolkacheva E. A., Khirunen L. I., Sosnin M. G., Duvanskii A. V., Markevich V. P., Halsall M. P., Peaker A. R., Kolevator I. The di-interstitial in silicon: Electronic properties and interactions with oxygen and carbon impurity atoms. *Physica Status Solidi A*, 2017, vol. 214, no. 7, pp. 1700261 (1–6). <https://doi.org/10.1002/pssa.201700261>

Информация об авторах

Макаренко Леонид Федорович – кандидат физико-математических наук, доцент, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: makarenko@bsu.by. <https://orcid.org/0000-0002-9883-581X>

Ластовский Станислав Брониславович – кандидат физико-математических наук, заведующий лабораторией, ГНПО «НПЦ НАН Беларуси по материаловедению» (ул. П. Бровки, 19, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: lastov@ifttp.bas-net.by

Information about the authors

Leonid F. Makarenko – Ph. D. (Physics and Mathematics), Assistant Professor, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: makarenko@bsu.by. <https://orcid.org/0000-0002-9883-581X>

Stanislav B. Lastovskii – Ph. D. (Physics and Mathematics), Head of the Laboratory, SSPA “Scientific-Practical Materials Research Centre of NAS of Belarus” (19, P. Brovka Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: lastov@ifttp.bas-net.by

Гаубас Эугениюс – доктор физико-математических наук, профессор, Институт фотоники и нанотехнологии, Вильнюсский университет (Sauletekio Ave., 3, 10257, Vilnius, Republic of Lithuania). E-mail: eugenijus.gaubas@ff.vu.lt. <http://orcid.org/0000-0003-3079-8140>

Павлов Евгений – доктор философии (физика), научный сотрудник, Институт фотоники и нанотехнологии, Вильнюсский университет (Sauletekio Ave., 3, 10257, Vilnius, Republic of Lithuania). E-mail: jevgenij.pavlov@tmi.vu.lt

Молл Майкл – доктор философии (физика), руководитель проекта, EP Department (CERN EP-DT, CH-1211 Geneva 23, Switzerland). E-mail: michael.moll@cern.ch

Якушевич Анна Сергеевна – младший научный сотрудник, ГНПО «НПЦ НАН Беларуси по материаловедению» (ул. П. Бровки, 19, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: yakushevich@ifftp.bas-net.by

Мурин Леонид Иванович – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, ГНПО «НПЦ НАН Беларуси по материаловедению» (ул. П. Бровки, 19, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: murin@ifftp.bas-net.by

Gaubas Eugenijus – Dr. Sc. (Habil. Dr.), Professor, Institute of Photonics and Nanotechnology, Faculty of Physics, Vilnius University (3, Sauletekio Ave., 10257, Vilnius, Republic of Lithuania). E-mail: eugenijus.gaubas@ff.vu.lt. <http://orcid.org/0000-0003-3079-8140>

Jevgenij A. Pavlov – Ph. D. (Physics), Researcher, Institute of Photonics and Nanotechnology, Vilnius University (3, Sauletekio Ave., 10257, Vilnius, Republic of Lithuania). E-mail: jevgenij.pavlov@tmi.vu.lt

Michael Moll – Ph. D. (Physics), Project Leader, EP Department (CERN EP-DT, CH-1211 Geneva 23, Switzerland). E-mail: michael.moll@cern.ch

Hanna S. Yakushevich – Junior Researcher, SSPA “Scientific-Practical Materials Research Centre of NAS of Belarus” (19, P. Brovka Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: yakushevich@ifftp.bas-net.by

Leonid I. Murin – Ph. D. (Physics and Mathematics), Leading Researcher, SSPA “Scientific-Practical Materials Research Centre of NAS of Belarus” (19, P. Brovka Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: murin@ifftp.bas-net.by

ISSN 1561-2430 (Print)

ISSN 2524-2415 (Online)

УДК 548.736.5, 539.26, 538.913, 538.953

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-2-229-233>

Поступила в редакцию 02.11.2017

Received 02.11.2017

А. У. Шелег¹, В. Ф. Гременок¹, А. С. Середя^{1,2}, В. Г. Гуртовой¹,
В. А. Чумак¹, И. Н. Цырельчук²

¹Научно-практический центр Национальной академии наук Беларуси по материаловедению, Минск, Беларусь²Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь

ПОЛУЧЕНИЕ И РЕНТГЕНОГРАФИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ТВЕРДЫХ РАСТВОРОВ $\text{Cu}_2\text{CdSn}(\text{S}_x\text{Se}_{1-x})_4$

Аннотация. Методом однотемпературного синтеза из элементарных компонентов синтезированы четверные полупроводниковые соединения $\text{Cu}_2\text{CdSnS}_4$, $\text{Cu}_2\text{CdSnSe}_4$ и твердые растворы $\text{Cu}_2\text{CdSn}(\text{S}_x\text{Se}_{1-x})_4$. Рентгенографическим методом показано, что полученные поликристаллические образцы являются однофазными. Из дифракционных спектров полнопрофильным анализом по методу Ритвельда с использованием программного пакета Fullprof определены параметры элементарной ячейки синтезированных соединений и твердых растворов $\text{Cu}_2\text{CdSn}(\text{S}_x\text{Se}_{1-x})_4$. Установлено, что с ростом концентрации серы параметры элементарной ячейки плавно уменьшаются по линейному закону в соответствии с правилом Вегарда, что свидетельствует об образовании в системе $\text{Cu}_2\text{CdSn}(\text{S}_x\text{Se}_{1-x})_4$ непрерывного ряда твердых растворов в области $0 \leq x \leq 1$. Рассчитан параметр тетрагональных искажений кристаллической решетки исследованных соединений η . Значения η близки к единице для всех изученных составов, что свидетельствует о малых искажениях кристаллической решетки полученных образцов.

Ключевые слова: четверные полупроводники, параметры элементарной ячейки, рентгенографические исследования, твердые растворы, тетрагональные искажения

Для цитирования. Получение и рентгенографические исследования твердых растворов $\text{Cu}_2\text{CdSn}(\text{S}_x\text{Se}_{1-x})_4$ / А. У. Шелег [и др.] // Вест. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2018. – Т. 54, № 2. – С. 229–233. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-2-229-233>

A. U. Sheleg¹, V. F. Gremenok¹, A. S. Sereda^{1,2}, V. G. Hurtavy¹, V. A. Chumak¹, I. N. Tsyrelchuk²

¹Scientific and Practical Materials Research Center of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus²Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Belarus

SYNTHESIS AND X-RAY INVESTIGATION OF $\text{Cu}_2\text{CdSn}(\text{S}_x\text{Se}_{1-x})_4$ SOLID SOLUTIONS

Abstract. The quaternary semiconductors $\text{Cu}_2\text{CdSnS}_4$, $\text{Cu}_2\text{CdSnSe}_4$ and $\text{Cu}_2\text{CdSn}(\text{S}_x\text{Se}_{1-x})_4$ solid solutions were synthesized by the one-temperature method from the elementary components. The X-ray diffraction method showed that the obtained polycrystalline samples are single-phased. The unit cell parameters of the synthesized compounds and $\text{Cu}_2\text{CdSn}(\text{S}_x\text{Se}_{1-x})_4$ solid solutions were determined from diffraction spectra by the full-profile analysis using the Rietveld method with the Fullprof software package. It has been established that with an increase in sulfur concentration, the unit cell parameters decrease smoothly linearly in accordance with the Vegard rule, which indicates the formation of a continuous series of solid solutions in the $\text{Cu}_2\text{CdSn}(\text{S}_x\text{Se}_{1-x})_4$ system within the range $0 \leq x \leq 1$. The parameter of crystal lattice tetragonal distortions η of the investigated compounds is calculated. The η values are close to 1 for all the compositions studied, which indicates a small crystal lattice distortion of the obtained samples.

Keywords: quaternary semiconductors, cell parameters, X-ray investigations, solid solutions, tetragonal distortions

For citation. Sheleg A. U., Gremenok V. F., Sereda A. S., Hurtavy V. G., Chumak V. A., Tsyrelchuk I. N. Synthesis and X-ray investigation of $\text{Cu}_2\text{CdSn}(\text{S}_x\text{Se}_{1-x})_4$ solid solutions. *Vestsi Natsyional'noi akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, vol. 54, no. 2, pp. 229–233 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-2-229-233>

Введение. Четверные соединения $\text{Cu}_2\text{CdSnSe}_4$ и $\text{Cu}_2\text{CdSnS}_4$ являются представителями большого семейства халькогенидных полупроводников типа $\text{Cu}_2B^{II}C^{IV}X_4$ (где $B = \text{Zn}, \text{Cd}$; $C = \text{Si}, \text{Ge}, \text{Sn}$; $X = \text{S}, \text{Se}, \text{Te}$), которые по своим физико-химическим свойствам представляют большой как научный, так и практический интерес и поэтому в последнее время находятся под пристальным вниманием исследователей. Ряд кристаллов этого семейства обладают нелинейными оптическими характеристиками и могут найти широкое применение в оптоэлектронике. Некоторые из них являются хорошими высокотемпературными термоэлектрическими материалами [1, 2]. Однако основная масса кристаллов соединений этого семейства перспективны для использования в ка-

честве поглощающих слоев в преобразователях солнечного излучения в электрический ток [3–8]. Но, несмотря на большие усилия исследователей по получению и изучению свойств соединений типа $\text{Cu}_2\text{B}^{\text{II}}\text{C}^{\text{IV}}\text{X}_4$, максимальный КПД преобразования солнечного излучения к настоящему времени получен на уровне ~11,1–12,6 % для $\text{Cu}_2\text{ZnSnSe}_4$ [9]. Одной из причин низкого КПД этих материалов является то, что существующие технологии их синтеза и получения тонких пленок не обеспечивают высокого качества структуры и оптимальных параметров электрических характеристик, необходимых для солнечных элементов. При синтезе этих соединений или получении пленок возникает целый ряд проблем, которые не позволяют увеличить эффективность фотоэлектрического преобразования данных материалов. Так, значительное отклонение от стехиометрического состава этих соединений приводит к высокой концентрации собственных структурных дефектов разной природы и образованию нежелательных примесей в виде двойных или тройных фаз.

Соединения $\text{Cu}_2\text{CdSnSe}_4$ и $\text{Cu}_2\text{CdSnS}_4$ являются типичными полупроводниками с p -типом проводимости, шириной запрещенной зоны равной 0,96 и 1,4 эВ соответственно. Они кристаллизуются в тетрагональную кристаллическую структуру с пространственной группой $I-42m$ с параметрами элементарной ячейки $a = 5,832 \text{ \AA}$, $c = 11,389 \text{ \AA}$ для $\text{Cu}_2\text{CdSnSe}_4$ [10] и $a = 5,592 \text{ \AA}$, $c = 10,857 \text{ \AA}$ для $\text{Cu}_2\text{CdSnS}_4$ [11].

Поскольку кристаллы соединений $\text{Cu}_2\text{CdSnSe}_4$ и $\text{Cu}_2\text{CdSnS}_4$ обладают интересными физическими свойствами, а также перспективны в практическом плане, значительный интерес представляют твердые растворы на их основе, поскольку, варьируя состав, можно получать новые материалы с непрерывно изменяющимися физическими свойствами и выбрать из них те, которые по своим физическим характеристикам наиболее пригодны для практического использования. Целью данной работы был синтез четверных соединений $\text{Cu}_2\text{CdSnSe}_4$, $\text{Cu}_2\text{CdSnS}_4$, а также твердых растворов $\text{Cu}_2\text{CdSn}(\text{S}_x\text{Se}_{1-x})_4$ и определение их кристаллографических характеристик в зависимости от состава.

Методика получения образцов. Синтез четверных соединений $\text{Cu}_2\text{CdSnS}_4$, $\text{Cu}_2\text{CdSnSe}_4$ и твердых растворов $\text{Cu}_2\text{CdSn}(\text{S}_x\text{Se}_{1-x})_4$ проводили в вертикальной однозонной печи, а исходными веществами служили элементарные компоненты: медь, кадмий, олово чистоты 99,999 %, сера и селен марки ОСЧ. Однотемпературный метод синтеза обеспечивает чистоту получаемого вещества и отсутствие потерь компонентов. Синтез проводился в двойных кварцевых ампулах. Исходные компоненты в соотношениях, соответствующих формульному составу, в количестве ~15 г загружали в ампулу, которую затем вакуумировали. Потом ее помещали в другую вакуумированную ампулу с предварительно припаянным к ней кварцевым штоком, которую устанавливали в вертикальной однозонной печи. Второй конец припаянного штока присоединяли к механическому вибратору. Следует отметить, что все ампулы подвергались предварительной химико-термической обработке – были протравлены в «царской водке», тщательно промыты дистиллированной водой и высушены в термошкафу при $T \sim 120 \text{ }^\circ\text{C}$. Двойные ампулы использовали для того, чтобы предохранить синтезируемый состав от окисления на воздухе в случае, если внутренняя ампула в процессе синтеза растрескается. Температуру в печи изменяли поэтапно, с двухчасовым выдерживанием, и поднимали до значений, на 20–30 $^\circ\text{C}$ превышающих температуру плавления соединения, либо до температуры ликвидуса соответствующего твердого раствора. При достижении нужной температуры включали вибрационное перемешивание и выдерживали в течение 4 ч. Затем вибрацию отключали и уменьшали температуру со скоростью 5 град/ч до полного затвердевания состава. Для гомогенизации полученных слитков соединений и твердых растворов проводили их изотермический отжиг в вакууме при $T = 750 \text{ }^\circ\text{C}$ в течение 300 ч.

Методика эксперимента. Рентгенографические исследования соединений $\text{Cu}_2\text{CdSnS}_4$, $\text{Cu}_2\text{CdSnSe}_4$ и твердых растворов $\text{Cu}_2\text{CdSn}(\text{S}_x\text{Se}_{1-x})_4$ проводили на рентгеновском дифрактометре ДРОН-3 в монохроматическом CuK_α -излучении. В качестве монохроматора применяли монокристаллическую пластинку графита, которую устанавливали на пути следования отраженного пучка. Образцами служили порошки полученных соединений и твердых растворов, запрессованные в пластмассовые кюветы. Дифрактограммы записывали с шагом $0,03^\circ$ по шкале 2θ и выдержкой 3 с. Параметры элементарной ячейки определялись из записанных дифракционных спектров методом Ритвельда с использованием программного пакета Fullprof [12].

Результаты исследований и их обсуждение. На рис. 1 приведены дифрактограммы соединений $\text{Cu}_2\text{CdSnS}_4$ и $\text{Cu}_2\text{CdSnSe}_4$ и твердых растворов на их основе $\text{Cu}_2\text{CdSn}(\text{S}_x\text{Se}_{1-x})_4$ для $x = 0,25; 0,5; 0,75$. На дифрактограммах наблюдаются рефлексы, характерные только для тетрагональной структуры этих соединений, что свидетельствует об однофазности полученных образцов. Кроме того, видно, что в системе $\text{Cu}_2\text{CdSn}(\text{S}_x\text{Se}_{1-x})_4$ при замещении атомов селена атомами серы с меньшим атомным радиусом все рефлексы с ростом x смещаются в область больших углов, т. е. происходит сжатие кристаллической решетки.

По полученным дифрактограммам были определены параметры элементарной ячейки исследуемых соединений и твердых растворов. На рис. 2 приведены зависимости параметров a и c поликристаллических образцов твердых растворов $\text{Cu}_2\text{CdSn}(\text{S}_x\text{Se}_{1-x})_4$ от состава. Видно, что параметры a и c с ростом x плавно уменьшаются по линейному закону, что соответствует правилу Вегарда и свидетельствует об образовании в системе $\text{Cu}_2\text{CdSn}(\text{S}_x\text{Se}_{1-x})_4$ непрерывного ряда твердых растворов в области $0 \leq x \leq 1$. Для сравнения на рис. 2 крестиками обозначены значения параметров элементарной ячейки для соединений $\text{Cu}_2\text{CdSnS}_4$ и $\text{Cu}_2\text{CdSnSe}_4$, взятых из [10, 11]. Видно, что результаты, полученные в настоящей работе, хорошо согласуются с литературными данными.

Значения структурных параметров твердых растворов $\text{Cu}_2\text{CdSn}(\text{S}_x\text{Se}_{1-x})_4$

The structure parameters values of $\text{Cu}_2\text{CdSn}(\text{S}_x\text{Se}_{1-x})_4$ solid solutions

x	a , Å	c , Å	V , Å ³	η	η [14]
0,0	5,832	11,405	387,909	0,978	0,976
0,25	5,775	11,275	376,028	0,976	—
0,50	5,708	11,123	362,401	0,974	—
0,75	5,653	10,992	351,264	0,972	—
1,0	5,586	10,867	339,087	0,973	0,971

Одной из важных характеристик исследуемых соединений, непосредственно связанной с электронной структурой, а следовательно, с эффективностью фотопреобразования, является параметр тетрагональных искажений кристаллической решетки, который определяется как отклонение соотношения $\eta = c/2a$ от единицы, где a и c – параметры элементарной ячейки [13]. В таблице приведены значения a , c и η для исследованных твердых растворов $\text{Cu}_2\text{CdSn}(\text{S}_x\text{Se}_{1-x})_4$, а также значения η для соединений $\text{Cu}_2\text{CdSnS}_4$ и $\text{Cu}_2\text{CdSnSe}_4$, взятые из [14], и значения объема элемен-

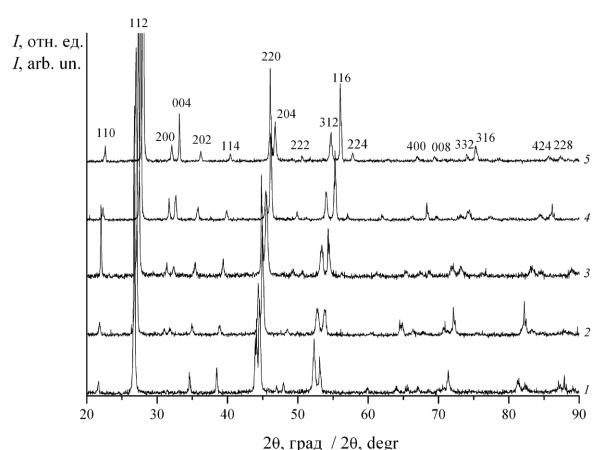


Рис. 1. Дифрактограммы соединений $\text{Cu}_2\text{CdSnS}_4$ и $\text{Cu}_2\text{CdSnSe}_4$ и твердых растворов на их основе $\text{Cu}_2\text{CdSn}(\text{S}_x\text{Se}_{1-x})_4$: 1 – $x = 0$; 2 – $x = 0,25$; 3 – $x = 0,5$; 4 – $x = 0,75$; 5 – $x = 1$

Fig. 1. X-ray patterns of $\text{Cu}_2\text{CdSnS}_4$, $\text{Cu}_2\text{CdSnSe}_4$ and their solid solutions $\text{Cu}_2\text{CdSn}(\text{S}_x\text{Se}_{1-x})_4$: 1 – $x = 0$; 2 – $x = 0,25$; 3 – $x = 0,5$; 4 – $x = 0,75$; 5 – $x = 1$

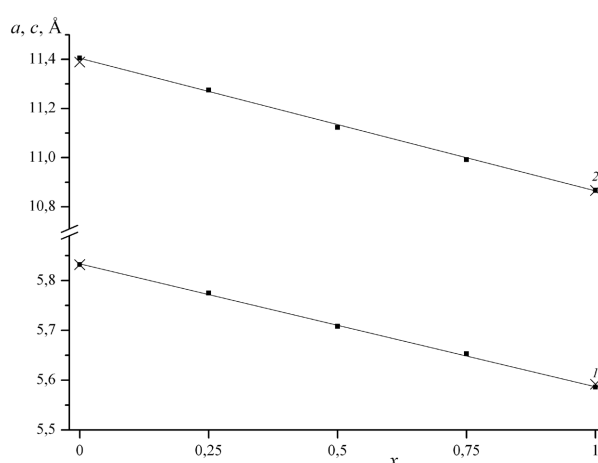


Рис. 2. Зависимости параметров элементарной ячейки поликристаллических образцов твердых растворов $\text{Cu}_2\text{CdSn}(\text{S}_x\text{Se}_{1-x})_4$ от состава: 1 – a ; 2 – c

Fig. 2. Crystal cell parameter dependences of polycrystalline solid solutions $\text{Cu}_2\text{CdSn}(\text{S}_x\text{Se}_{1-x})_4$ on the composition: 1 – a ; 2 – c

тарной ячейки *V*. Видно, что практически для всех составов твердых растворов значения η близки к единице, а для соединений – хорошо совпадают с литературными данными. Это свидетельствует о малых искажениях кристаллической решетки образцов соединений $\text{Cu}_2\text{CdSnS}_4$, $\text{Cu}_2\text{CdSnSe}_4$ и твердых растворов на их основе, полученных нами однотемпературным методом.

Закключение. Из элементарных компонентов Cu, Cd, Sn, Se, S однотемпературным методом синтезированы четверные полупроводниковые соединения $\text{Cu}_2\text{CdSnS}_4$, $\text{Cu}_2\text{CdSnSe}_4$ и система $\text{Cu}_2\text{CdSn}(\text{S}_x\text{Se}_{1-x})_4$. Рентгенографическим методом определены кристаллографические параметры полученных образцов и показано, что в системе $\text{Cu}_2\text{CdSn}(\text{S}_x\text{Se}_{1-x})_4$ в области $0 \leq x \leq 1$ образуется непрерывный ряд твердых растворов. Установлена зависимость параметров и объема элементарной ячейки кристаллов твердых растворов $\text{Cu}_2\text{CdSn}(\text{S}_x\text{Se}_{1-x})_4$ от состава. Показано, что значения *a*, *c* и *V* с ростом концентрации серы уменьшаются.

Список использованных источников

1. Thermoelectric properties of tetrahedrally bonded wide-gap stannite compounds $\text{Cu}_2\text{ZnSn}_{1-x}\text{In}_x\text{Se}_4$ / X. Y. Shi [et al.] // *Appl. Phys. Lett.* – 2009. – Vol. 94, № 12. – P. 122103. <https://doi.org/10.1063/1.3103604>
2. $\text{Cu}_2\text{ZnGeSe}_4$ Nanocrystals: Synthesis and Thermoelectric Properties / M. Ibáñez [et al.] // *J. Am. Chem. Soc.* – 2012. – Vol. 134, № 9. – P. 4060–4063. <https://doi.org/10.1021/ja211952z>
3. Beyond 11% Efficiency: Characteristics of State-of-the-Art $\text{Cu}_2\text{ZnSn}(\text{S},\text{Se})_4$ Solar Cells / T. K. Todorov [et al.] // *Adv. Energy Mater.* – 2013. – Vol. 3, № 1. – P. 34–38. <https://doi.org/10.1002/aenm.201200348>
4. The role of structural properties on deep defect states in $\text{Cu}_2\text{ZnSnS}_4$ studied by photoluminescence spectroscopy / M. Grossberg [et al.] // *Appl. Phys. Lett.* – 2012. – Vol. 101, № 10. – P. 102102–102102-4. <https://doi.org/10.1063/1.4750249>
5. Spectroscopic ellipsometry study of $\text{Cu}_2\text{ZnGeSe}_4$ and $\text{Cu}_2\text{ZnSiSe}_4$ poly-crystals / M. León [et al.] // *Mat. Chem. Phys.* – 2013. – Vol. 141, № 1. – P. 58–62. <https://doi.org/10.1016/j.matchemphys.2013.04.024>
6. Thermoelectric properties of indium doped $\text{Cu}_2\text{CdSnSe}_4$ / R. Chetty, A. Bali, R.C. Mallik // *Intermetallics*. – 2016. – Vol. 72. – P. 17–24. <https://doi.org/10.1016/j.intermet.2016.01.004>
7. Кристаллографические и оптические характеристики тонких пленок твердых растворов $\text{Cu}_2\text{ZnSn}(\text{S}_x\text{Se}_{1-x})_4$ / А. У. Шелег [и др.] // *Журн. приклад. спектроскопии*. – 2014. – Т. 81, № 5. – С. 704–709.
8. Шелег, А. У. Получение и рентгенографические исследования твердых растворов $\text{Cu}_2\text{ZnSn}(\text{S}_x\text{Se}_{1-x})_4$ / А. У. Шелег, В. Г. Гуртовой, В. А. Чумак // *Кристаллография*. – 2015. – Т. 60, № 5. – С. 826–830. <https://doi.org/10.7868/s0023476115040207>
9. Device Characteristics of CZTSSe Thin-Film Solar Cells with 12.6% Efficiency / W. Wang [et al.] // *Adv. Energy Mater.* – 2014. – Vol. 4, № 7. – P. 36–45. <https://doi.org/10.1002/aenm.201301465>
10. Thermal analysis and synthesis from the melts of Cu-based quaternary compounds Cu-III-IV-VI_4 and $\text{Cu}_2\text{-II-IV-VI}_4$ (II=Zn, Cd; III=Ga, In; IV=Ge, Sn; VI=Se) / H. Matsushita [et al.] // *J. Crystal Growth*. – 2000. – Vol. 208, № 1/4. – P. 416–422. [https://doi.org/10.1016/S0022-0248\(99\)00468-6](https://doi.org/10.1016/S0022-0248(99)00468-6)
11. Modification of the optoelectronic properties of $\text{Cu}_2\text{CdSnS}_4$ through low-temperature annealing / M. Pilvet [et al.] // *J. Alloys and Compd.* – 2017. – Vol. 723. – P. 820–825. <https://doi.org/10.1016/j.jallcom.2017.06.307>
12. Rodríguez-Carvajal, J. Recent developments of the program FULLPROF / J. Rodríguez-Carvajal // *Commission on powder diffraction (IUCr). Newsletter*. – 2001. – Vol. 26. – P. 12–19.
13. Siebentritt, S. Kesterites – a challenging material for solar cells / S. Siebentritt, S. Schorr // *Progress in Photovoltaics: Research and Applications*. – 2012. – Vol. 20, № 5. – P. 512–519. <https://doi.org/10.1002/pp.2156>
14. Structural properties and quasiparticle band structures of Cu-based quaternary semiconductors for photovoltaic applications / Y. Zhang [et al.] // *J. Appl. Phys.* – 2012. – Vol. 111, № 6. – P. 063709-1–063709-6. <https://doi.org/10.1063/1.3696964>

References

1. Shi X. Y., Huang F. Q., Liu M. L., Chen L. D. Thermoelectric properties of tetrahedrally bonded wide-gap stannite compounds $\text{Cu}_2\text{ZnSn}_{1-x}\text{In}_x\text{Se}_4$. *Applied Physics Letters*, 2009, vol. 94, no. 12, pp. 122103. <https://doi.org/10.1063/1.3103604>
2. Ibáñez M., Zamani R., LaLonde A., Cadavid D., Li W., Shavel A., Arbiol J., Morante J. R., Gorse S., Snyder G. J., Cabot A. $\text{Cu}_2\text{ZnGeSe}_4$ Nanocrystals: Synthesis and Thermoelectric Properties. *Journal of the American Chemical Society*, 2012, vol. 134, no. 9, pp. 4060–4063. <https://doi.org/10.1021/ja211952z>
3. Todorov T. K., Tang J., Bag S., Gunawan O., Gokmen T., Zhu Y., Mitzi D. B. Beyond 11% Efficiency: Characteristics of State-of-the-Art $\text{Cu}_2\text{ZnSn}(\text{S},\text{Se})_4$ Solar Cells. *Advanced Energy Materials*, 2013, vol. 3, no. 1, pp. 34–38. <https://doi.org/10.1002/aenm.201200348>
4. Grossberg M., Krustok J., Raudoja J., Raadik T. The role of structural properties on deep defect states in $\text{Cu}_2\text{ZnSnS}_4$ studied by photoluminescence spectroscopy. *Applied Physics Letters*, 2012, vol. 101, no. 10, pp. 102102–102102-4. <https://doi.org/10.1063/1.4750249>
5. León M., Levchenko S., Serna R., Nateprov A., Gurieva G., Merino J. M., Schorr S., Arushanov E. Spectroscopic ellipsometry study of $\text{Cu}_2\text{ZnGeSe}_4$ and $\text{Cu}_2\text{ZnSiSe}_4$ poly-crystals. *Materials Chemistry and Physics*, 2013, vol. 141, no. 1, pp. 58–62. <https://doi.org/10.1016/j.matchemphys.2013.04.024>

6. Chetty R., Bali A., Mallik R. C. Thermoelectric properties of indium doped $\text{Cu}_2\text{CdSnSe}_4$. *Intermetallics*, 2016, vol. 72, pp. 17–24. <https://doi.org/10.1016/j.intermet.2016.01.004>
7. Sheleg A. U., Hurtavy V. G., Mudryi A. V., Zhiulko V. D., Valakh M. Ya., Yuhimchuk V. A., Babichuk I. S., Xie H., Saucedo E. Crystallographic and Optical Characteristics of Thin Films of $\text{Cu}_2\text{ZnSn}(\text{S}_x\text{Se}_{1-x})_4$ Solid Solutions. *Journal of Applied Spectroscopy*, 2014, vol. 81, no. 5, pp. 776–781. <https://doi.org/10.1134/s1063774515040203>
8. Sheleg A. U., Hurtavy V. G., Chumak V. A. Synthesis and X-ray diffraction study of $\text{Cu}_2\text{ZnSn}(\text{S}_x\text{Se}_{1-x})_4$ solid solutions. *Crystallography Reports*, 2015, vol. 60, no. 5, pp. 758–762. <https://doi.org/10.1134/s1063774515040203>
9. Wang W., Winkler M. T., Gunawan O., Gokmen T., Todorov T. K., Zhu Y., Mitzi D. B. Device Characteristics of CZTSSe Thin-Film Solar Cells with 12.6% Efficiency. *Advanced Energy Materials*, 2014, vol. 4, no. 7, pp. 36–45. <https://doi.org/10.1002/aenm.201301465>
10. Matsushita H., Maeda T., Katsui A., Takizawa T. Thermal analysis and synthesis from the melts of Cu-based quaternary compounds Cu-III-IV-VI_4 and $\text{Cu}_2\text{-II-IV-VI}_4$ (II=Zn, Cd; III=Ga, In; IV=Ge, Sn; VI=Se). *Journal of Crystal Growth*, 2000, vol. 208, no. 1–4, pp. 416–422. [https://doi.org/10.1016/s0022-0248\(99\)00468-6](https://doi.org/10.1016/s0022-0248(99)00468-6)
11. Pilvet M., Kauk-Kuusik M., Grossberg M., Raadik T., Mikli V., Traksmaa R., Raudoja J., Timmo K., Krustok J. Modification of the optoelectronic properties of $\text{Cu}_2\text{CdSnS}_4$ through low-temperature annealing. *Journal of Alloys and Compounds*, 2017, vol. 723, pp. 820–825. <https://doi.org/10.1016/j.jallcom.2017.06.307>
12. Rodríguez-Carvajal J. Recent developments of the program FULLPROF. *Commission on powder diffraction (IUCr) Newsletter*, 2001, vol. 26, pp. 12–19.
13. Siebentritt S., Schorr S. Kesterites – a challenging material for solar cells. *Progress in Photovoltaics: Research and Applications*, 2012, vol. 20, no. 5, pp. 512–519. <https://doi.org/10.1002/pip.2156>
14. Zhang Y., Sun X., Zhang P., Yuan X., Huang F., Zhang W. Structural properties and quasiparticle band structures of Cu-based quaternary semiconductors for photovoltaic applications. *Journal of Applied Physics*, 2012, vol. 111, no. 6, pp. 063709-1–063709-6. <https://doi.org/10.1063/1.3696964>

Информация об авторах

Шелег Александр Устинович – доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Научно-практический центр Национальной академии наук Беларуси по материаловедению (ул. П. Бровки, 19, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: sheleg@physics.by

Гременок Валерий Феликсович – доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией физики полупроводников, Научно-практический центр Национальной академии наук Беларуси по материаловедению (ул. П. Бровки, 19, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: gremenok@physics.by

Серёда Александр Сергеевич – магистр, ассистент кафедры проектирования информационно-компьютерных систем, Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (ул. П. Бровки 6, 220013, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: sereda@bsuir.by

Гуртовой Виталий Геннадьевич – научный сотрудник, Научно-практический центр Национальной академии наук Беларуси по материаловедению (ул. П. Бровки, 19, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: hurtavy@physics.by. <https://orcid.org/0000-0003-1451-4988>

Чумак Виталий Александрович – младший научный сотрудник, Научно-практический центр Национальной академии наук Беларуси по материаловедению (ул. П. Бровки, 19, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: chumak@physics.by

Цырельчук Игорь Николаевич – кандидат технических наук, доцент, декан факультета инновационного непрерывного образования, Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (ул. П. Бровки 6, 220013, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: tsyrelchuk@bsuir.by

Information about the authors

Alexander U. Sheleg – D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Chief Researcher, Scientific-Practical Materials Research Center of the National Academy of Sciences of Belarus (19, P. Brovka Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: sheleg@physics.by

Valery F. Gremenok – D. Sc. (Physics and Mathematics), Head of the Laboratory of Semiconductors Physics, Scientific-Practical Materials Research Center of the National Academy of Sciences of Belarus (19, P. Brovka Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: gremenok@physics.by

Alexander S. Sereda – Master of Technical Sciences, Assistant of Information and Computer-Aided Systems Design Department, Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (6, P. Brovka Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: sereda@bsuir.by

Vitali G. Hurtavy – Researcher, Scientific-Practical Materials Research Center of the National Academy of Sciences of Belarus (19, P. Brovka Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: hurtavy@physics.by. <https://orcid.org/0000-0003-1451-4988>

Vitaly A. Chumak – Junior Researcher, Scientific-Practical Materials Research Center of the National Academy of Sciences of Belarus (19, P. Brovka Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: chumak@physics.by

Igor N. Tsyrelchuk – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Dean of the Faculty of Innovative Lifelong Learning, Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (6, P. Brovka Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: tsyrelchuk@bsuir.by

ISSN 1561-2430 (Print)

ISSN 2524-2415 (Online)

УДК 621.384.3

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-2-234-240>

Поступила в редакцию 24.10.2017

Received 24.10.2017

В. А. Пилипович¹, В. Б. Залесский², А. И. Конойко², В. М. Кравченко², К. А. Решиков³¹Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь²ГНПО «Оптика, оптоэлектроника и лазерная техника», Минск, Беларусь³Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь

ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЬ ИК-ИЗЛУЧЕНИЯ НА БАЗЕ МИКРОРЕЗОНАТОРОВ ФАБРИ – ПЕРО

Аннотация. Предлагается метод преобразования информации из одной области оптического спектра в другую на базе микрорезонаторов Фабри – Перо, использующий излучение, падающее от какого-либо объекта, как воздействующее на материал микрорезонатора (который должен поглощать это излучение) и видимое излучение оптической части спектра как зондирующее, или считывающее (поглощение этого излучения материалом микрорезонатора должно отсутствовать). Поглощенная энергия воздействующего излучения приводит к изменению температуры микрорезонатора, вследствие чего изменяется его оптическая база. Высокая чувствительность микрорезонаторов Фабри – Перо обусловлена тем, что принцип их работы базируется на физическом явлении многолучевой интерференции. Общим недостатком эталонов Фабри – Перо является их чувствительность к условиям работы, например к изменению температуры окружающей среды, что так же, как и влияние ИК-излучения, приводит к изменению оптической базы резонатора. Это вызывает смещение спектральной характеристики коэффициента пропускания или отражения эталонов Фабри – Перо, что ухудшает их эксплуатационные характеристики. Метод позволяет минимизировать влияние температурных флуктуаций окружающей среды на характеристики микрорезонатора Фабри – Перо, являющегося элементом, преобразующим информацию из одной области спектра в другую. Минимизация осуществляется в случае, когда начальная температурная рабочая точка микрорезонатора соответствует максимуму величины изменения интенсивности зондирующего излучения от температуры.

Ключевые слова: инфракрасное излучение, многолучевая интерференция, резонатор Фабри – Перо, матрица микрорезонаторов, термооптический преобразователь

Для цитирования. Преобразователь ИК-излучения на базе микрорезонаторов Фабри – Перо / В. А. Пилипович [и др.] // Вест. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2018. – Т. 54, № 2. – С. 234–240. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-2-234-240>

V. A. Pilipovich¹, V. B. Zaleski², A. I. Konojko², V. M. Kravchenko², C. A. Reshikov³¹*B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus*²*SSPA "Optics, Optoelectronics and Laser Technology", Minsk, Belarus*³*Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Belarus*

INFRARED RADIATION CONVERTER BASED ON FABRY – PEROT MICRORESONATORS

The method of transformation of information from one spectral range to another based on Fabry – Perot microresonators is offered. The method uses incident radiation of an object as affecting a microresonator material (a microresonator material must absorb this radiation), and visible radiation of the optical part of the spectrum as sensing, or reading radiation (a microresonator material should not absorb this radiation). The absorbed energy of incident radiation leads to a change in a microcavity temperature, which results in a change in the optical base of the resonator. The high sensitivity of the Fabry – Perot microcavities is a consequence of the fact that the principle of their operation is based on the physical phenomenon of multipath interference. A common shortcoming of the Fabry – Perot standards is their sensitivity to operating conditions, for example, to a change in the ambient temperature, which also leads to a change in the optical base of the resonator, as well as the influence of IR radiation. This leads to a shift in the spectral characteristics of transmittance or reflection of the Fabry – Perot standards, which worsens their performance characteristics. The method allows one to minimize the environmental temperature fluctuation influence on characteristics of the Fabry – Perot microresonator, which is an element that transforms the information from one spectral range to another. Minimization is performed when the starting temperature point of the microresonator corresponds to a maximum change in the probing radiation intensity due to the temperature.

Keywords: infrared radiation, multibeam interference, Fabry – Perot resonator, matrix of microresonators, thermo-optic converter

For citation. Pilipovich V. A., Zaleski V. B., Konojko A. I., Kravchenko V. M., Reshikov C. A. Infrared radiation converter based on Fabry – Perot microresonators. *Vestsi Natsyianal'най akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, vol. 54, no. 2, pp. 234–240 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-2-234-240>

Введение. Наиболее перспективным способом получения информации, имеющейся в разных спектральных оптических диапазонах, для технического зрения является метод преобразования информации из одной области спектра в другую, например из ИК-области в более коротковолновую [1]. Данный подход обеспечивает наибольшую чувствительность в случае применения матриц микрорезонаторов Фабри – Перо, которые могут быть изготовлены на базе технологий микроэлектроники. В методе используется излучение, падающее от какого-либо объекта, как воздействующее на материал микрорезонатора (который должен поглощать это излучение) и видимое излучение оптической части спектра как зондирующее, или считывающее (поглощение этого излучения материалом микрорезонатора должно отсутствовать). Высокая чувствительность микрорезонаторов Фабри – Перо обусловлена тем, что принцип их работы базируется на физическом явлении многолучевой интерференции. Общим недостатком эталонов Фабри – Перо является их чувствительность к условиям работы, например к изменению температуры окружающей среды, что так же, как и влияние ИК-излучения, приводит к изменению оптической базы резонатора [2, 3]. Это вызывает смещение спектральной характеристики коэффициента пропускания или отражения эталонов Фабри – Перо, что ухудшает их эксплуатационные характеристики [4].

Целью исследования является минимизация влияния температурных флуктуаций окружающей среды на работу микрорезонатора Фабри – Перо, являющегося элементом, преобразующим информацию из одной области спектра в другую.

Описание метода. Для преобразования ИК-излучения в более коротковолновое используется резонатор Фабри – Перо, работающий на пропускание или отражение зондирующего излучения. Минимизация влияния температурных флуктуаций окружающей среды осуществляется в том случае, когда начальная температурная рабочая точка микрорезонатора соответствует максимуму величины изменения интенсивности зондирующего излучения от температуры.

Основным термочувствительным элементом термооптического преобразователя является матрица пленочных микрорезонаторов Фабри – Перо, которая может работать в режиме пропускания или отражения зондирующего излучения (рис. 1, а).

Если на резонатор падает излучение со спектральным распределением интенсивности I_0 , то выражения для нахождения интенсивности прошедшего I_{t0} и отраженного I_{r0} излучения будут иметь следующий вид [5]:

$$I_{t0} = I_0 \frac{T_1 T_2 T}{1 + T^2 R_1 R_2 - 2T \sqrt{R_1 R_2} \cos(\varphi + \Delta\varphi)}; \quad (1)$$

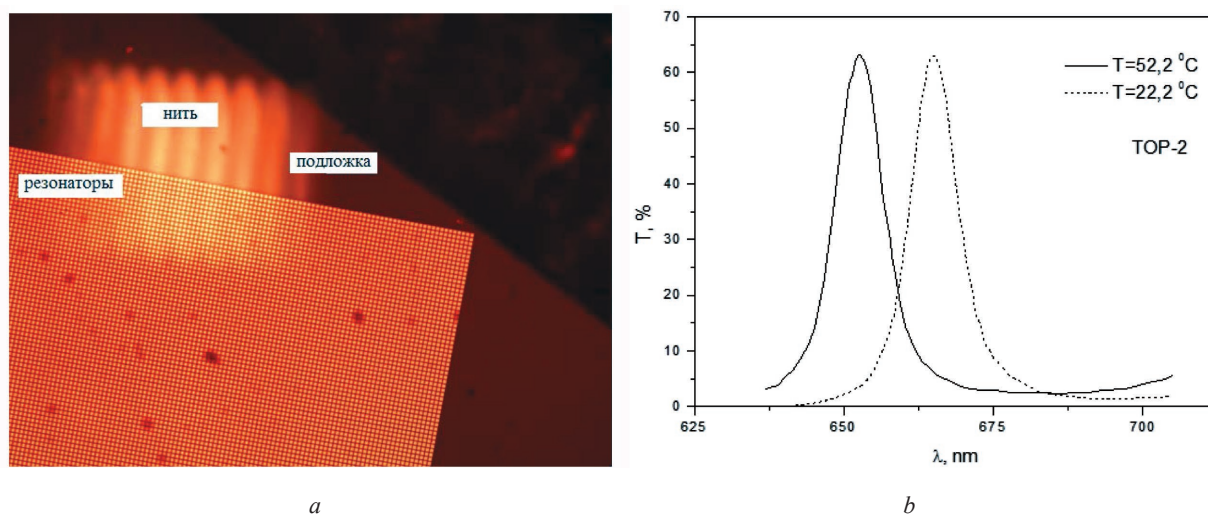


Рис. 1. Матрица микрорезонаторов Фабри – Перо: а – увеличенное изображение; б – спектральные характеристики ее коэффициента пропускания при температуре 22,2 и 52,2 °С

Fig. 1. Matrix of Fabry – Perot microcavities: а – enlarged image; б – spectral characteristics of its transmittance at a temperature of 22.2 and 52.2 °С

$$I_{r0} = I_0 \frac{R_1 + T^2 R_2 (1 - A_1)^2 - 2T \sqrt{R_2} \sqrt{R_1} (1 - A_1) \cos(\varphi + \Delta\varphi)}{1 + T^2 R_1 R_2 - 2T \sqrt{R_1} \sqrt{R_2} \cos(\varphi + \Delta\varphi)}. \quad (2)$$

А при воздействии на резонатор ИК-излучения выражения (1) и (2) примут вид

$$I_{r1} = I_0 \frac{T_1 T_2 T}{1 + T^2 R_1 R_2 - 2T \sqrt{R_1 R_2} \cos(\varphi + \Delta\varphi + \delta\varphi)}; \quad (3)$$

$$I_{r1} = I_0 \frac{R_1 + T^2 R_2 (1 - A_1)^2 - 2T \sqrt{R_2} \sqrt{R_1} (1 - A_1) \cos(\varphi + \Delta\varphi + \delta\varphi)}{1 + T^2 R_1 R_2 - 2T \sqrt{R_1} \sqrt{R_2} \cos(\varphi + \Delta\varphi + \delta\varphi)}, \quad (4)$$

где R_1, R_2, T_1, T_2 – коэффициенты отражения и пропускания первого и второго зеркал резонатора; T – коэффициент пропускания среды между зеркалами; $(\varphi + \Delta\varphi) = \frac{4\pi l n \cos(\beta)}{\lambda} [1 + \alpha_p(\Delta T)]$, $(\varphi + \Delta\varphi + \delta\varphi) = \frac{4\pi l n \cos(\beta)}{\lambda} [1 + \alpha_p(\Delta T + \delta T)]$ – разность фаз между интерферирующими световыми волнами, наводимая, соответственно, в невозбужденном и в возбужденном резонаторе; λ – длина волны зондирующего излучения; l – геометрическая база микрорезонатора; n – показатель преломления материала между зеркалами; β – угол падения зондирующего излучения; α_p – коэффициент температурного преобразования оптической базы резонатора; ΔT – величина изменения температуры в невозбужденном резонаторе; δT – величина изменения температуры под воздействием ИК-излучения.

Таким образом, светомодуляционные характеристики микрорезонатора определяются коэффициентом температурного преобразования оптической базы резонатора и величиной изменения его температуры.

Результаты и их обсуждение. Значение коэффициента температурного преобразования оптической базы резонатора определяется в основном физическими свойствами активного слоя, расположенного между зеркалами резонатора, а именно: температурным коэффициентом линейного расширения материала α_l и температурным коэффициентом изменения показателя преломления α_n активного слоя. Его значение можно также определить из спектральных характеристик коэффициента пропускания матрицы микрорезонаторов Фабри – Перо при температуре 22,2 и 52,2 °C (рис. 1, b).

Максимум пропускания резонатора при начальной температуре ΔT определяется условием

$$\frac{4\pi l n \cos(\beta)}{\lambda} [1 + \alpha_p \Delta T] = 2\pi m. \quad (5)$$

При изменении температуры окружающей среды на δT характеристика пропускания микрорезонатора сдвигается по спектру. Максимум пропускания резонатора при конечной температуре $\Delta T + \delta T$ будет соответствовать другой длине волны излучения, равной $\lambda + \Delta\lambda$, и определяться условием

$$\frac{4\pi l n \cos(\beta)}{\lambda + \Delta\lambda} [1 + \alpha_p (\Delta T + \delta T)] = 2\pi m. \quad (6)$$

Приравняв (5) и (6), будем иметь следующее выражение:

$$\frac{1 + \alpha_p \Delta T}{\lambda} = \frac{1 + \alpha_p (\Delta T + \delta T)}{\lambda + \Delta\lambda}. \quad (7)$$

Решая его относительно коэффициента температурного преобразования оптической базы резонатора α_p , получим

$$\alpha_p = \frac{1}{\delta T} \frac{\Delta \lambda}{\lambda}. \quad (8)$$

Подставляя в это выражение параметры, определенные из спектральных зависимостей (см. рис. 1, б), получим, что для рассматриваемых микрорезонаторов значение коэффициента температурного преобразования базы резонатора $\alpha_p = 6,266 \cdot 10^{-4} \text{ град}^{-1}$, что в 6,949 раза превышает данные, приведенные в [4].

Таким образом, значение коэффициента температурного преобразования оптической базы резонатора можно установить, определив величину спектрального смещения максимума коэффициента пропускания резонатора, значение изменения его температуры и длину волны зондирующего излучения. Следовательно, светомодуляционные характеристики каждого микрорезонатора рассматриваемой матрицы определяются величиной изменения его температуры, значением спектрального смещения максимума коэффициента пропускания или отражения резонатора и длиной волны зондирующего излучения.

Если на резонатор падает излучение со спектральным распределением интенсивности $I_{\text{лаз}}(\lambda)$, то выражения для определения интенсивности прошедшего $I_{t0}(\lambda)$ и отраженного $I_{r0}(\lambda)$ излучения будут иметь следующий вид:

$$I_{t0}(\lambda) = I_{\text{лаз}}(\lambda) \frac{T_1 T_2 T}{1 + T^2 R_1 R_2 - 2T \sqrt{R_1 R_2} \cos(\varphi + \Delta\varphi)}; \quad (9)$$

$$I_{r0}(\lambda) = I_{\text{лаз}}(\lambda) \frac{R_1 + T^2 R_2 (1 - A_1)^2 - 2T \sqrt{R_2} \sqrt{R_1} (1 - A_1) \cos(\varphi + \Delta\varphi)}{1 + T^2 R_1 R_2 - 2T \sqrt{R_1} \sqrt{R_2} \cos(\varphi + \Delta\varphi)}. \quad (10)$$

А при воздействии ИК-излучения выражения (9) и (10) примут вид

$$I_{t1}(\lambda) = I_{\text{лаз}}(\lambda) \frac{T_1 T_2 T}{1 + T^2 R_1 R_2 - 2T \sqrt{R_1 R_2} \cos(\varphi + \Delta\varphi + \delta\varphi)}; \quad (11)$$

$$I_{r1}(\lambda) = I_{\text{лаз}}(\lambda) \frac{R_1 + T^2 R_2 (1 - A_1)^2 - 2T \sqrt{R_2} \sqrt{R_1} (1 - A_1) \cos(\varphi + \Delta\varphi + \delta\varphi)}{1 + T^2 R_1 R_2 - 2T \sqrt{R_1} \sqrt{R_2} \cos(\varphi + \Delta\varphi + \delta\varphi)}. \quad (12)$$

Тогда значения проходящего или отраженного светового потока в том и в другом случае Φ_{ji} (где $j = t; r$ и $i = 0; 1$) и их изменения $\Delta\Phi_j$ можно определить из соотношений

$$\Phi_{ji} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} I_{ji}(\lambda) d\lambda; \quad \Delta\Phi_j = \Phi_{j1} - \Phi_{j0}.$$

На рис. 2, 3 представлены зависимости соответственно светового потока Φ_{ji} и изменения светового потока $\Delta\Phi_j$ прошедшего, а также отраженного резонатором без и под воздействием ИК-излучения, от величины изменения начальной температуры резонатора ΔT . Эти зависимости иллюстрируют случай, когда длина волны лазерного излучения, соответствующая максимуму его интенсивности при начальной температуре резонатора, совпадает со спектральным максимумом пропускания резонатора.

Из приведенных зависимостей следует, что при воздействии ИК-излучения максимум или минимум зависимости светового потока Φ_{ji} от величины изменения начальной температуры резонатора ΔT смещается относительно 0° , что приводит к изменению светового потока $\Delta\Phi_j$. Вблизи

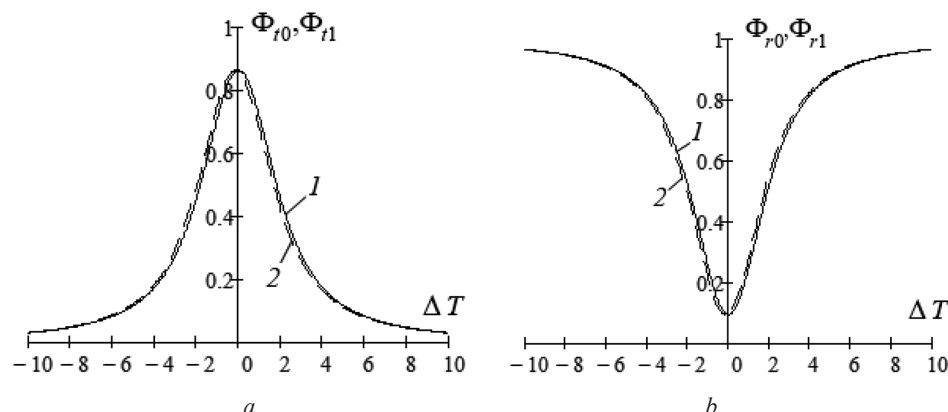


Рис. 2. Зависимости светового потока Φ_{ji} , прошедшего через резонатор (а) и отраженного резонатором (b) без воздействия (кривая 1) и под воздействием (кривая 2) ИК-излучения, от изменения начальной температуры ΔT

Fig. 2. Dependences of the light flux Φ_{ji} passing through the resonator (a) and reflected by the resonator (b) without (curve 1) and under the IR radiation influence (curve 2), on the change in the initial temperature ΔT

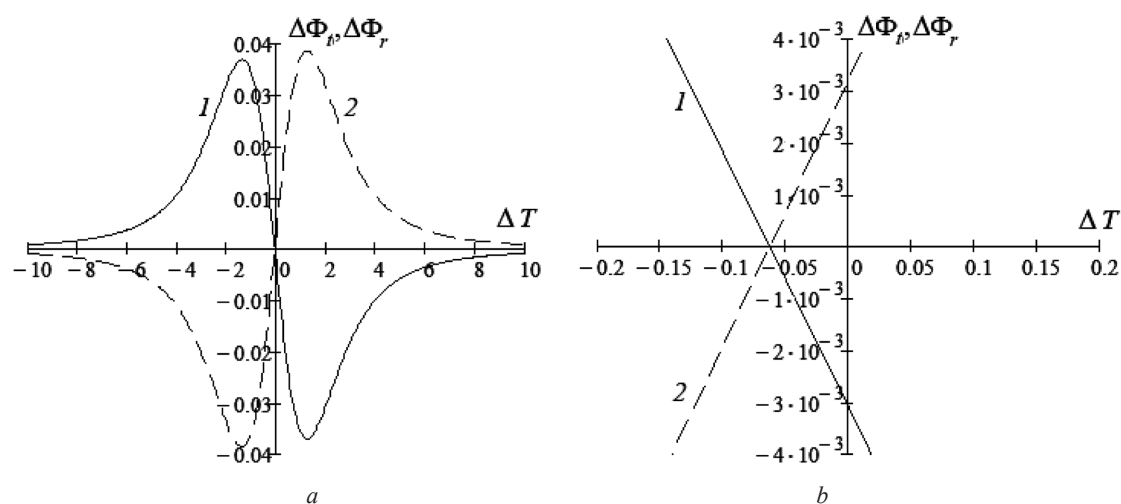


Рис. 3. Зависимости изменения светового потока $\Delta\Phi_j$, прошедшего через резонатор (кривая 1) и отраженного им (кривая 2) при воздействии ИК-излучения, от изменения начальной температуры резонатора ΔT : а – общий вид; б – увеличенный вид зависимости вблизи начала координат

Fig. 3. Dependences of the light flux $\Delta\Phi_j$ passing through the resonator (curve 1) and reflected by it (curve 2) under the IR radiation influence on the change in the initial resonator material temperature ΔT : а – general view; б – scaled view of the dependences near the coordinate origin

точки $\Delta T = 0^\circ$ изменение светового потока $\Delta\Phi_j$ имеет линейный характер, что и обуславливает температурную нестабильность работы резонатора.

Зависимости изменения светового потока $\Delta\Phi_j$ от изменения начальной температуры резонатора ΔT обладают экстремумами, вблизи которых значение его изменения по абсолютной величине максимально и для рассматриваемого резонатора практически не меняется. Поэтому для получения более температуростабильной работы резонатора необходимо, чтобы его начальная температура соответствовала экстремуму зависимости изменения светового потока от температуры. Чтобы реализовать это, достаточно нагреть резонатор до соответствующей температуры. Тогда, например, зависимости светового потока Φ_{ji} и изменения светового потока $\Delta\Phi_j$, отраженного резонатором зондирующего излучения без и под воздействием ИК-излучения, от изменения начальной температуры резонатора ΔT будут иметь вид, как показано на рис. 4.

На рис. 5 представлены графики зависимости изменения светового потока $\Delta\Phi$, отраженного резонатором, который находится под воздействием ИК-излучения, от изменения начальной тем-

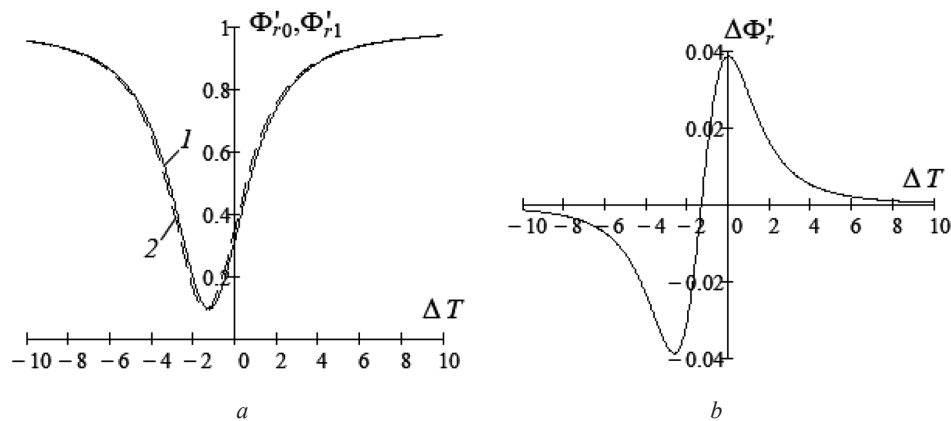


Рис. 4. Зависимости: *a* – светового потока зондирующего излучения, отраженного резонатором, без воздействия Φ'_{r0} и под воздействием Φ'_{r1} ИК-излучения, *b* – изменения светового потока, отраженного резонатором, $\Delta\Phi'_r$ под воздействием ИК-излучения от изменения начальной температуры резонатора ΔT

Fig. 4. Dependences of: *a* – light flux of probe radiation reflected by the resonator without (Φ'_{r0}) and under the IR radiation influence (Φ'_{r1}); *b* – variation of the light flux reflected by the resonator $\Delta\Phi'_r$ under the IR radiation influence on the change in the initial resonator temperature ΔT

пературы ΔT материала резонатора при базе резонатора, равной λ (кривая 1), 4λ (кривая 2), 8λ (кривая 3). Как видим, температурный диапазон, при котором значение изменения светового потока $\Delta\Phi$ практически постоянно, зависит от базы резонатора и может составлять (для его минимальной базы) порядка трех градусов. Этот температурный диапазон является динамическим температурным диапазоном микрорезонатора.

Заключение. Таким образом, для получения более температуростабильной работы резонатора, работающего в режиме преобразования информации из ИК-области спектра в другую, например более коротковолновую, необходимо, чтобы его начальная температура соответствовала экстремуму зависимости изменения светового потока от температуры. Динамический температурный диапазон микрорезонатора может составлять, в зависимости от оптической базы резонатора, от десятых долей градуса до трех градусов. При изменении этой величины соответственно изменяется чувствительность резонатора.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф17-138).

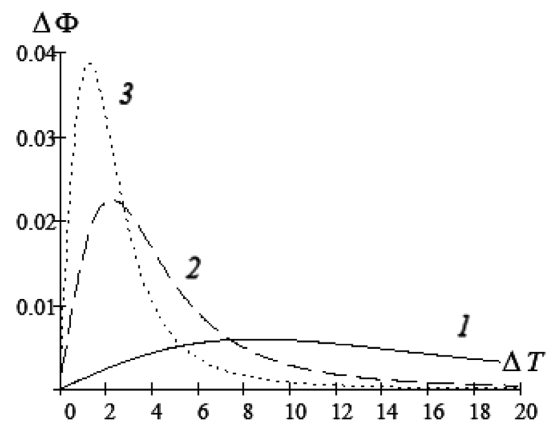


Рис. 5. Зависимости изменения светового потока, отраженного резонатором, находящимся под воздействием ИК-излучения, от изменения начальной температуры ΔT материала резонатора при базе резонатора, равной λ (кривая 1), 4λ (кривая 2) и 8λ (кривая 3)

Fig. 5. Dependences of the light flux reflected by the resonator under the IR radiation influence on the change in the initial resonator material temperature ΔT for the resonator base of λ (curve 1), 4λ (curve 2) and 8λ (curve 3)

Acknowledgements. This work was supported by the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (Project No. F17-138).

Список использованных источников

1. Тарасов, В. В. Современные проблемы инфракрасной техники / В. В. Тарасов, Ю. Г. Якушенков. – М.: Изд. МИИГА и К, 2011. – 84 с.
2. Мустель, Е. П. Методы модуляции и сканирования света / Е. П. Мустель, В. Н. Парыгин. – М.: Наука, 1970. – 296 с.
3. Ярив, А. Оптические волны в кристаллах / А. Ярив. – М.: Мир, 1987. – 616 с.
4. Novel low-cost uncooled infrared camera / Ming Wu [et al.] // Infrared Technology and Applications XXXI. – 2005. – Vol. 5783 – P. 69401I-1. <https://doi.org/10.1117/12.603905>
5. Борн, М. Основы оптики / М. Борн, Э. Вольф. – М.: Наука, 1973. – 720 с.

References

1. Tarasov V. V., Yakushenkov Yu. G. *Modern Problems of Infrared Technology*. Moscow, Moscow State University of Geodesy and Cartography, 2011. 84 p. (in Russian).
2. Mustel' E. P., Parygin V. N. *Methods of Light Modulation and Light Scanning*. Moscow, Nauka Publ., 1970. 296 p. (in Russian).
3. Yariv A., Yeh P. *Optical Waves in Crystals*. New York, Wiley, 1984. 589 p.
4. Ming Wu, Cook J., DeVito R., Jun Li, Ma E., Murano R., Nemchuk N., Tabasky M., Wagner M. Novel low-cost uncooled infrared camera. *Infrared Technology and Applications XXXI*, 2005, vol. 5783, pp. 69401I-1. <https://doi.org/10.1117/12.603905>
5. Born M., Vol'f E. *Principles of Optics*. Moscow, Nauka Publ., 1973. 720 p. (in Russian).

Информация об авторах

Пилипович Владимир Антонович – академик, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси (пр. Независимости, 68-2, 220072, г. Минск, Республика Беларусь).

Залесский Валерий Борисович – кандидат технических наук, заведующий лабораторией фотоэлектроники, ГНПО «Оптика, оптоэлектроника и лазерная техника» (пр. Независимости, 68-1, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: zalesski@inel.bas-net.by

Конойко Алексей Иванович – кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник лаборатории фотоэлектроники, ГНПО «Оптика, оптоэлектроника и лазерная техника» (пр. Независимости, 68-1, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: kon54@yandex.by

Кравченко Владимир Михайлович – кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории фотоэлектроники, ГНПО «Оптика, оптоэлектроника и лазерная техника» (пр. Независимости, 68-1, 220072, г. Минск, Республика Беларусь).

Решиков Константин Александрович – аспирант, Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (ул. П. Бровки, 6, 220013, г. Минск, Республика Беларусь).

Information about the authors

Vladimir M. Pilipovich – Academician, D. Sc. (Physics and Mathematics), Chief Researcher, B. I. Stepanov Institute of Physics, National Academy of Sciences of Belarus (68-2, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus).

Valery B. Zalesski – Ph. D. (Engineering), Head of the Laboratory, State Scientific and Production Association “Optics, Optoelectronics and Laser Technology” (68-1, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: zalesski@inel.bas-net.by

Alexey I. Kanojka – Ph. D. (Physics and Mathematics), Assistant Professor, Senior Researcher, State Scientific and Production Association “Optics, Optoelectronics and Laser Technology” (68-1, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: kon54@yandex.by

Vladimir M. Kravchenko – Ph. D. (Engineering), Leading Researcher, State Scientific and Production Association “Optics, Optoelectronics and Laser Technology” (68-1, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus).

Konstantin A. Reshikov – Postgraduate Student, Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (6, P. Brovka Str., 220013, Minsk, Republic of Belarus).

ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)

ИНФОРМАТИКА INFORMATICS

УДК 004.3
<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-2-241-252>

Поступила в редакцию 29.11.2017
Received 29.11.2017

Л. И. Кульбак¹, С. А. Золотой², Т. С. Мартинович¹

¹Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

²Научно-инженерное республиканское унитарное предприятие «Геоинформационные системы», Минск, Беларусь

ПОВЫШЕНИЕ ИНФОРМАТИВНОСТИ РАСЧЕТНЫХ ОЦЕНОК НАДЕЖНОСТИ БОРТОВОЙ АППАРАТУРЫ МАЛОГАБАРИТНЫХ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

Аннотация. Рассматривается вопрос повышения информативности расчетных значений показателей надежности (ПН) объектов (надежность которых обеспечивается путем резервирования структурных элементов) за счет использования их интервальных оценок. При обычном расчете надежности значение ПН объекта является однозначной величиной, а при интервальной оценке получается диапазон значений, что вполне можно считать повышением информативности. Выбор объектом исследований бортовой аппаратуры (БА) малогабаритных космических аппаратов (МКА) обусловлен следующим: в настоящее время подавляющее большинство космических аппаратов относятся к категории МКА; для МКА предъявляются высокие требования к надежности, что приводит к необходимости использования резервирования; Белорусский космический аппарат дистанционного зондирования Земли (БКА) относится к категории МКА. В ходе исследования установлены формулы вычисления результатов интервальной оценки при линейной и нелинейной зависимости ПН объекта от ПН его элементов. В качестве модели надежности объекта (системы) использовались структурные схемы надежности (ССН), в состав которых входят блоки из элементов без резервирования (простые) и с различными видами резервирования (сложные). Показатель надежности объекта устанавливается по его ССН, поэтому для получения его интервальной оценки необходимо определить интервальные оценки ПН его блоков. Получены интервальные оценки ПН простых и сложных блоков ССН. Сложные блоки рассматривались как совокупность параллельных цепей, обеспечивающих постоянное резервирование при всех нагруженных цепях, непостоянное резервирование нагруженных и ненагруженных цепей, резервирование замещением и голосованием. Приведены формулы интервальной оценки ПН объекта, представленного ССН, и пример использования методики на составной части реальной бортовой аппаратуры МКА – бортовой информационной системе, при этом граничные значения интервальных оценок можно принимать как оптимистические и пессимистические.

Ключевые слова: информативность, надежность, показатели надежности, интервальная оценка надежности, расчет надежности, бортовая аппаратура, малогабаритные космические аппараты

Для цитирования. Кульбак, Л. И. Повышение информативности расчетных оценок надежности бортовой аппаратуры малогабаритных космических аппаратов / Л. И. Кульбак, С. А. Золотой, Т. С. Мартинович // Вест. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. навук. – 2018. – Т. 54, № 2. – С. 241–252. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-2-241-252>

L. I. Kulbak¹, S. A. Zolotoy², T. S. Martinovich¹

¹United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

²Scientific-Engineering Republican Unitary Enterprise “Geoinformation Systems”, Minsk, Belarus

INCREASE IN THE INFORMATIVE CONTENT OF CALCULATED RELIABILITY ESTIMATES OF THE ON-BOARD EQUIPMENT OF SMALL SPACECRAFTS

Abstract. An increase in the informative content of the calculated values of the reliability measure (RM) of objects, whose reliability is ensured by the redundancy of structural elements, is considered in the article. The increase of the informative content is ensured using the interval estimates of the RM. In the normal reliability calculation, the calculated value of the object's RM is unambiguous, and for an interval reliability estimate, the value range is obtained, which can be quite appreciated as the increase in the informative content. The choice of on-board equipment for small spacecrafts as an object of research in this work is determined as follows: at present, the vast majority of spacecrafts can be classified as small spacecrafts; since the reliability of small spacecrafts is high, it is necessary to use redundancy; the Belarusian spacecraft for remote sensing of the Earth belongs to the category of small spacecrafts. As a result of research, the formulas for calculation of interval estimation results are established for the linear and nonlinear dependence of the object's RM on the RM of its elements. Structural reliability schemes (SSR) are used as an object (system) reliability model, which includes blocks of elements without redundancy (simple) and blocks with different-type redundancy (complex). The object's RM is a reliability measure determined by its SSR. Therefore, for an interval estimation of the object's RM to be obtained, the interval estimates of the RM of its blocks must be made. RM interval estimates of simple and complex SSR blocks are obtained in the article. Complex blocks were considered as a set of parallel circuits providing: continuous redundancy for all loaded circuits; non-continuous redundancy of loaded and unloaded circuits; standby redun-

dancy; redundancy by voting. The formulas for interval estimation of the object's RM represented by the SSR and the example of using the methodology on the component part of a real on-board information system are given in the article. The boundary values of the interval estimates of the example can be taken as optimistic and pessimistic estimates.

Keywords: informative content, reliability, reliability measure, interval reliability estimation, reliability calculation, on-board equipment, small spacecraft

For citation. Kulbak L. I., Zolotoy S. A., Martinovich T. S. Increase in the informative content of calculated reliability estimates of the on-board equipment of small spacecrafts. *Vestsi Natsyional'noi akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, vol. 54, no. 2, pp. 241–252 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-2-241-252>

Введение. Вопрос повышения информативности расчетных значений показателей надежности (ПН) объектов рассматривался в работе [1], однако исследовались только те объекты, где не использовалось резервирование для повышения их надежности. Повышение информативности расчетных значений ПН обеспечивалось путем применения интервальных оценок неразукрупняемых элементов объекта, т. е., по сути, осуществлялась интервальная оценка его надежности. Интервальное значение ПН представляет собой промежуток от нижнего значения ПН – R_n до верхнего значения ПН – R_v , в который попадает истинное значение ПН с определенной доверительной вероятностью. Среднее значение ПН определяется по формуле $R_{cp} = \frac{R_n + R_v}{2}$.

При обычном расчете надежности расчетным значением ПН объекта является R_{cp} , а при интервальной оценке мы получаем диапазон значений, что вполне можно считать повышением информативности. Выбор в данной работе объектом исследований бортовой аппаратуры (БА) малогабаритных космических аппаратов (МКА) обусловлен следующим: в настоящее время подавляющее большинство космических аппаратов (КА) относятся к категории малогабаритных; к МКА предъявляются высокие требования в отношении ПН, что требует использования резервирования для достижения этих показателей; Белорусский космический аппарат дистанционного зондирования Земли (БКА) относится к категории МКА.

Приняты следующие допущения и ограничения: восстановление работоспособности бортовой аппаратуры МКА в полете осуществляется автоматически путем применения резервных элементов, которые не подлежат восстановлению; элементы, подключающие резерв при замещении, имеют пренебрежимо малую интенсивность отказов; время, расходуемое на подключение резерва, пренебрежимо мало и не учитывается как время потери работоспособности МКА; в связи с малыми размерами МКА кратности резервирования рассматриваются не более двух; исследованию подлежит лишь одно свойство надежности – безотказность; отказы неразукрупняемых элементов БА являются независимыми событиями; в качестве показателей безотказности элементов будут использованы интенсивность отказов λ и вероятность безотказной работы (ВБР) $P(t)$; в качестве показателей безотказности составных частей и БА в целом будут использованы вероятность безотказной работы $P(t)$, интенсивность отказов Λ и средняя наработка до отказа T_{oc} ; закон распределения наработки до отказа элементов БА принимается экспоненциальный с параметром λ ; интенсивности отказов элементов БА задаются в виде интервальных оценок нижнего значения λ_n и верхнего значения λ_v с указанием доверительной вероятности интервала.

В результате исследования в [1] установлено, что при линейной зависимости ПН объекта R от ПН его элементов λ : $R = b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2 + \dots + b_m\lambda_m$, результаты интервальной оценки ПН объекта определяются по формулам $R \in (R_{cp} - \Delta R, R_{cp} + \Delta R)$,

$$R_{cp} = \sum_{i=1}^m b_i \lambda_{cp,i}, \quad (1)$$

$$\Delta R = \sum_{i=1}^m b_i \Delta \lambda_i, \quad (2)$$

где $b_1, b_2, \dots, b_m$ – постоянные коэффициенты при ПН элементов объекта; R – ПН объекта; R_{cp} – среднее значение ПН объекта; ΔR – погрешность определения ПН объекта (отклонение ПН объекта от своего среднего значения); $\lambda_{cp,i}$ – среднее значение ПН i -го элемента объекта; $\Delta \lambda_i$ – погрешность определения ПН i -го элемента объекта.

При *нелинейной зависимости* ПН объекта от ПН его элементов $R_n = f(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$, результаты интервальной оценки ПН объекта, согласно [1], определяются с достаточной точностью для практики расчетов надежности по формулам $R_n \in (R_{n,cr} - \Delta R, R_{n,cr} + \Delta R)$, $R_{n,cr} = f(\lambda_{cr,1}, \lambda_{cr,2}, \dots, \lambda_{cr,m})$,

$$\Delta R_n \approx \sum_{i=1}^m \left| \frac{\partial f}{\partial \lambda_i} \right| \Delta \lambda_i, \quad (3)$$

где R_n – ПН объекта при нелинейной зависимости этого показателя от ПН его элементов; $R_{n,cr}$ – среднее значение ПН объекта при нелинейной зависимости этого показателя от ПН его элементов; ΔR_n – погрешность определения ПН R_n ; $f(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ – функциональная зависимость ПН объекта R_n от ПН его элементов λ_i ; $\lambda_{cr,1}, \lambda_{cr,2}, \dots, \lambda_{cr,m}$ – средние значения ПН элементов объекта; $\frac{\partial f}{\partial \lambda_i}$ – первая производная от функции f по аргументу λ_i , вычисленная в точке $\lambda_{cr,1}, \lambda_{cr,2}, \dots, \lambda_{cr,m}$ без учета знака; $\Delta \lambda_i$ – погрешность определения λ_i .

Модель надежности бортовой аппаратуры МКА. В качестве модели надежности объекта (системы) нормативная документация (Надежность в технике. Расчет надежности. Общие положения: ГОСТ 27.301-95; Менеджмент риска. Структурная схема надежности и булевы методы: ГОСТ Р 51901.14-2007) рекомендует использовать структурные схемы надежности (ССН).

Установлено, что подавляющее число структур объектов, показатели надежности которых подлежат расчету, можно привести к последовательной схеме надежности. На рис. 1 приведена ССН объекта последовательного типа из m блоков. По аналогии с [2] примем, что блоки ССН (B_i) могут быть простыми (без резервирования элементов) и сложными (состоящими из резервируемых различными способами цепочек элементов). В качестве первичных исходных данных для интервальной оценки блоков ССН используется интервальная оценка интенсивности отказов составляющих элементов в виде $(\lambda_{i,n}, \lambda_{i,b})$, где $\lambda_{i,n}, \lambda_{i,b}$ – соответственно нижнее и верхнее значения интенсивности отказов i -го элемента блока ССН. Среднее значение интенсивности отказов i -го элемента блока рассчитывают по формулам $\lambda_{i,cr} = \lambda_{i,n} + \Delta \lambda_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, $\Delta \lambda_i = \frac{\lambda_{i,b} - \lambda_{i,n}}{2}$, $i = 1, 2, \dots, n$, где n – количество типов неразукрупняемых элементов в блоке ССН.

Простые блоки ССН объединяют элементы с одинаковыми значениями интенсивности отказов и коэффициентами интенсивности эксплуатации. Среднее значение интенсивности отказов таких простых блоков ССН вычисляется по формуле

$$\Lambda_{ПБ,j,cr} = k_j k_{иэ,j} \lambda_{j,cr}, \quad j = 1, 2, \dots, m_n, \quad (4)$$

где $\Lambda_{ПБ,j,cr}$ – среднее значение интенсивности отказов j -го простого блока ССН; k_j – количество элементов в j -м простом блоке ССН; $k_{иэ,j}$ – коэффициент интенсивности эксплуатации j -го простого блока ССН; $\lambda_{j,cr}$ – среднее значение интенсивности отказов элементов j -го простого блока ССН; m_n – количество простых блоков в ССН объекта. Среднее значение ВБР простых блоков ССН определяется как

$$P_{ПБ,j,cr}(t) = \exp(-\Lambda_{ПБ,j,cr} t) = \exp(-k_j k_{иэ,j} \lambda_{j,cr} t), \quad j = 1, 2, \dots, m_n, \quad (5)$$

где $P_{ПБ,j,cr}(t)$ – среднее значение ВБР j -го блока ССН объекта. Погрешность определения интенсивности отказов простого блока ССН в соответствии с (2) следует вычислять по формуле

$$\Delta \Lambda_{ПБ,j} = k_j k_{иэ,j} \Delta \lambda_j, \quad j = 1, 2, \dots, m_n, \quad (6)$$

где $\Delta \lambda_j$ – погрешность определения интенсивности отказов j -го элемента простого блока ССН. Погрешность определения ВБР простого блока ССН в соответствии с (3) вычисляется по формуле

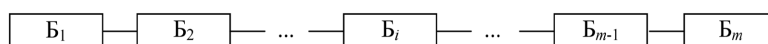


Рис. 1. Обобщенная последовательная структурная схема надежности объекта

Fig. 1. Generalized sequential structural reliability scheme of an object

$$\Delta P(t)_{\text{пб},j} = \frac{\partial P(t)_{\text{пб},j}}{\partial \lambda_j} \Delta \lambda_j = \exp(-k_j k_{\text{иэ},j} \lambda_{j,\text{ср}} t) k_j k_{\text{иэ},j} \lambda_{j,\text{ср}} t \Delta \lambda_j, \quad j = 1, 2, \dots, m_{\text{п}}.$$

Сложные блоки ССН, как правило, состоят из цепочек элементов, соединенных в резервируемую группу определенного вида. Заметим, что цепочка элементов в пределе может вырождаться в один элемент. Показателем надежности цепочки элементов, используемых для организации резервирования, является интенсивность отказов $\Lambda_{\text{ц}}$, которая представляет собой линейную функцию интенсивностей отказов входящих в ее состав элементов. В соответствии с (1) и (2) $\Lambda_{\text{ц,ср}} = \sum_{i=1}^r \lambda_{\text{ср},i}$, $\Delta \Lambda_{\text{ц}} = \sum_{i=1}^r \Delta \lambda_i$, где $\Lambda_{\text{ц,ср}}$ – среднее значение интенсивности отказов цепочки элементов блока ССН; $\lambda_{\text{ср},i}$ – среднее значение интенсивности отказов i -го элемента цепочки элементов блока; $\Delta \Lambda_{\text{ц}}$ – погрешность определения интенсивности отказов цепочки элементов блока; $\Delta \lambda_i$ – погрешность определения интенсивности отказов i -го элемента цепочки элементов блока. Будем различать несколько видов резервирования, которые, по данным [3], используются в бортовой аппаратуре МКА.

Параллельное соединение N цепей, обеспечивающих постоянное резервирование (все цепи нагружены), приведено на рис. 2. Расчет ВБР блока ССН $P(t)$ при этом виде резервирования имеет следующий вид:

$$P(t) = 1 - [1 - p_{\text{ц}}(t)]^N, \quad p_{\text{ц}}(t) = \exp\left(-t \sum_{i=1}^k \lambda_i n_i\right) = \exp(-\Lambda_{\text{ц}} t), \quad (7)$$

где $p_{\text{ц}}(t)$ – ВБР основной или резервной цепочки элементов блока ССН; λ_i – интенсивность отказов i -го типа элементов цепочки элементов блока ССН; n_i – количество элементов i -го типа в цепочке элементов блока ССН; k – количество типов элементов в цепочке элементов; $\Lambda_{\text{ц}}$ – интенсивность отказов цепочки элементов блока ССН: $\Lambda_{\text{ц}} = \sum_{i=1}^k \lambda_i n_i$.

Погрешность определения интенсивности отказов цепочки элементов блока ССН $\Delta \Lambda_{\text{ц}}$ вычисляется по формуле [1] $\Delta \Lambda_{\text{ц}} = \sum_{i=1}^k \frac{\partial \Lambda_{\text{ц}}}{\partial \lambda_i} \Delta \lambda_i = \sum_{i=1}^k n_i \Delta \lambda_i$, где $\Delta \lambda_i$ – погрешность определения интенсивности отказов i -го типа элемента цепочки элементов блока ССН.

В связи с малыми размерами МКА нами принято решение о том, что кратность резервирования блоков ССН должна быть не более двух. Представим ВБР для этих случаев:

$$P_1(t)_{\text{Б}} = 2 \exp(-\Lambda_{\text{ц}} t) - \exp(-2\Lambda_{\text{ц}} t) = \exp(-\Lambda_{\text{ц}} t) [2 - \exp(-\Lambda_{\text{ц}} t)], \quad (8)$$

$$P_2(t)_{\text{Б}} = 3 \exp(-\Lambda_{\text{ц}} t) - 3 \exp(-2\Lambda_{\text{ц}} t) + \exp(-3\Lambda_{\text{ц}} t),$$

где $P_1(t)_{\text{Б}}$, $P_2(t)_{\text{Б}}$ – ВБР блока ССН при кратности резервирования 1 и 2 соответственно.

Определим остальные показатели надежности блока ССН с кратностью резервирования 1. Интенсивность отказов в общем случае вычисляется как $\Lambda(t) = \frac{f(t)}{P(t)}$, где $f(t)$ – плотность распределения наработки до отказа; $P(t)$ – вероятность безотказной работы; $f(t) = -\frac{dP(t)}{dt}$. Для блока ССН с кратностью резервирования 1:

$$f_1(t)_{\text{Б}} = -\frac{dP_1(t)_{\text{Б}}}{dt} = 2\Lambda_{\text{ц}} \exp(-\Lambda_{\text{ц}} t) [1 - \exp(-\Lambda_{\text{ц}} t)],$$

$$\Lambda_1(t)_{\text{Б}} = \frac{f_1(t)_{\text{Б}}}{P_1(t)_{\text{Б}}} = \frac{2\Lambda_{\text{ц}} \exp(-\Lambda_{\text{ц}} t) [1 - \exp(-\Lambda_{\text{ц}} t)]}{2 \exp(-\Lambda_{\text{ц}} t) - \exp(-2\Lambda_{\text{ц}} t)}, \quad (9)$$

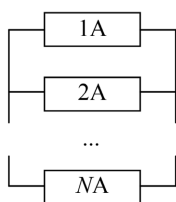


Рис. 2. Графическое представление постоянного резервирования при параллельном соединении

Fig. 2. Graphical representation of continuous redundancy with parallel connection

$$T_{O.1} = \int_0^{\infty} P_1(t)_B dt = 2 \int_0^{\infty} \exp(-\Lambda_{Ц} t) dt - \int_0^{\infty} \exp(-2\Lambda_{Ц} t) dt = \frac{2}{\Lambda_{Ц}} - \frac{1}{2\Lambda_{Ц}} = \frac{1}{2\Lambda_{Ц}},$$

где $T_{O.1}$ – средняя наработка до отказа блока ССН.

Погрешность определения ВБР блока ССН с однократным нагруженным резервом $\Delta P_1(t)_B$ и средняя наработка до отказа блока ССН $T_{O.1}$ вычисляются следующим образом:

$$\Delta P_1(t)_B = \frac{\partial P_1(t)_B}{\partial \Lambda_{Ц}} \Delta \Lambda_{Ц} = 2t \Delta \Lambda_{Ц} [\exp(-\Lambda_{Ц} t) - \exp(-2\Lambda_{Ц} t)],$$

$$T_{O.1} = \int_0^{\infty} P_1(t)_B dt = 2 \int_0^{\infty} \exp(-\Lambda_{Ц} t) dt - \int_0^{\infty} \exp(-2\Lambda_{Ц} t) dt = \frac{2}{\Lambda_{Ц}} - \frac{1}{2\Lambda_{Ц}} = \frac{1}{2\Lambda_{Ц}}.$$

Погрешность определения интенсивности отказа блока ССН при однократном резервировании $\Delta \Lambda_{1.Б}$ определяется как

$$\Delta \Lambda_{1.Б} = \frac{\partial \Lambda_1(t)_B}{\partial \Lambda_{Ц}} \Delta \Lambda_{Ц}. \quad (10)$$

Погрешность определения средней наработки до отказа блока ССН при однократном резервировании $\Delta T_{O.1}$ вычисляется по формуле

$$\Delta T_{O.1} = \frac{\partial T_{O.1}(t)}{\partial \Lambda_{Ц}} \Delta \Lambda_{Ц} = \frac{1}{2\Lambda_{Ц}^2} \Delta \Lambda_{Ц}.$$

Параллельное соединение N цепей, обеспечивающих непостоянное резервирование вида M нагруженных основных цепей, остальные $(N - M)$ цепей – резервные ненагруженные цепи, показано на рис. 3. Формула расчета ВБР блока ССН $P(t)$ при этом виде резервирования имеет вид [3]:

$$P(t) = p^M(t) \left[1 + \sum_{j=1}^{N-M} \frac{(-M \ln p(t))^j}{j!} \right].$$

Рассмотрим варианты возможной реализации резервирования для БА МКА. Если принять $M = 1$, то это будет соответствовать наличию в схеме резервирования одной основной нагруженной цепочки и $N - 1$ ненагруженных резервных цепочек, вводимых замещением. В этом случае

$$P_{1-N}(t)_B = p(t) \left[1 + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{(\ln p(t))^j}{j!} \right].$$

После подстановки $p(t)$ из (7) получим

$$P_{1-N}(t)_B = \exp(-\Lambda_{Ц} t) \left[1 + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{(\Lambda_{Ц} t)^j}{j!} \right].$$

При принятых ограничениях $N \leq 3$ возможны варианты $M = 1, N = 2; M = 1, N = 3$.

Вариант $M = 1, N = 2$ отмечается в последующих формулах цифровыми индексами 1–2:

$$P_{1-2}(t) = \exp(-\Lambda_{Ц} t)(1 + \Lambda_{Ц} t),$$

$$f_{1-2}(t)_B = -\frac{dP_{1-2}(t)_B}{dt} = \Lambda_{Ц}^2 t \exp(-\Lambda_{Ц} t),$$

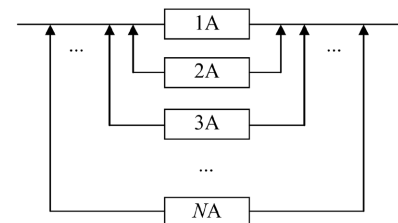


Рис. 3. Графическое представление непостоянного резервирования при параллельном соединении

Fig. 3. Graphical representation of non-continuous redundancy with parallel connection

$$\Lambda(t)_{1-2} = \frac{f_{1-2}(t)_B}{P_{1-2}(t)_B} = \frac{\Lambda_{\Pi}^2 t}{1 + \Lambda_{\Pi} t},$$

$$T_{O.1-2} = \int_0^\infty P_{1-2}(t)_B dt = \int_0^\infty \exp(-\Lambda_{\Pi} t) dt + \int_0^\infty \Lambda_{\Pi} t \exp(-\Lambda_{\Pi} t) dt = \frac{1}{\Lambda_{\Pi}} + \frac{1}{\Lambda_{\Pi}} = \frac{2}{\Lambda_{\Pi}}.$$

Погрешность определения ВБР блока ССН при $M = 1$, $N = 2$ вычисляется как

$$\Delta P_{1-2}(t)_B = \frac{\partial P_{1-2}(t)_B}{\partial \Lambda_{\Pi}} \Delta \Lambda_{\Pi} = \Lambda_{\Pi} t^2 \exp(-\Lambda_{\Pi} t) \Delta \Lambda_{\Pi}.$$

Погрешность определения интенсивности отказов блока ССН при $M = 1$, $N = 2$:

$$\Delta \Lambda_{1-2.B} = \frac{\partial \Lambda_{1-2}(t)_B}{\partial \Lambda_{\Pi}} \Delta \Lambda_{\Pi} = \frac{\Lambda_{\Pi} t (2 + \Lambda_{\Pi} t)}{(1 + \Lambda_{\Pi} t)^2} \Delta \Lambda_{\Pi}.$$

Погрешность определения средней наработки до отказа блока ССН при $M = 1$, $N = 2$:

$$\Delta T_{O.1-2} = \frac{\partial T_{O.1-2}(t)}{\partial \Lambda_{\Pi}} \Delta \Lambda_{\Pi} = \frac{2}{\Lambda_{\Pi}^2} \Delta \Lambda_{\Pi}.$$

Вариант $M = 1$, $N = 3$ отмечается в последующих формулах цифровыми индексами 1–3:

$$P_{1-3}(t) = \exp(-\Lambda_{\Pi} t) \left(1 + \Lambda_{\Pi} t + \frac{(\Lambda_{\Pi} t)^2}{2} \right), \quad f_{1-3}(t)_B = -\frac{dP_{1-3}(t)_B}{dt} = \exp(-\Lambda_{\Pi} t) \frac{\Lambda_{\Pi}^3 t^2}{2},$$

$$\Lambda(t)_{1-3} = \frac{f_{1-3}(t)_B}{P_{1-3}(t)_B} = \frac{\Lambda_{\Pi}^3 t^2}{2 + 2\Lambda_{\Pi} t + (\Lambda_{\Pi} t)^2},$$

$$T_{O.1-3} = \int_0^\infty P_{1-3}(t)_B dt = \int_0^\infty \exp(-\Lambda_{\Pi} t) dt + \int_0^\infty \Lambda_{\Pi} t \exp(-\Lambda_{\Pi} t) dt + \\ + \int_0^\infty \frac{(\Lambda_{\Pi} t)^2}{2} \exp(-\Lambda_{\Pi} t) dt = \frac{1}{\Lambda_{\Pi}} + \frac{1}{\Lambda_{\Pi}} + \frac{1}{\Lambda_{\Pi}} = \frac{3}{\Lambda_{\Pi}}.$$

Погрешность определения ВБР блока ССН при $M = 1$, $N = 3$ определяется по формуле

$$\Delta P_{1-3}(t)_B = \frac{\partial P_{1-3}(t)_B}{\partial \Lambda_{\Pi}} \Delta \Lambda_{\Pi} = \frac{\Lambda_{\Pi}^2 t^3}{2} \exp(-\Lambda_{\Pi} t) \Delta \Lambda_{\Pi}.$$

Погрешность определения интенсивности отказов блока ССН при $M = 1$, $N = 3$:

$$\Delta \Lambda_{1-3.B} = \frac{\partial \Lambda_{1-3}(t)_B}{\partial \Lambda_{\Pi}} \Delta \Lambda_{\Pi} = \frac{\Lambda_{\Pi}^2 t^2 (6 + 4\Lambda_{\Pi} t + \Lambda_{\Pi}^2 t^2)}{(2 + 2\Lambda_{\Pi} t + \Lambda_{\Pi}^2 t^2)^2} \Delta \Lambda_{\Pi}.$$

Погрешность определения средней наработки до отказа блока ССН при $M = 1$, $N = 3$:

$$\Delta T_{O.1-3} = \frac{\partial T_{O.1-3}(t)}{\partial \Lambda_{\Pi}} \Delta \Lambda_{\Pi} = \frac{3}{\Lambda_{\Pi}^2} \Delta \Lambda_{\Pi}.$$

Если принять $M = 2$, то это будет соответствовать наличию в схеме резервирования двух постоянно включенных нагруженных цепочек и $N - 2$ ненагруженных резервных цепочек, включающихся замещением. В этом случае

$$P_{2-N}(t)_B = \exp(-2\Lambda_{Ц}t) \left[1 + \sum_{j=1}^{N-2} \frac{(2\Lambda_{Ц}t)^j}{j!} \right].$$

С учетом принятых ограничений на кратность резервирования в МКА получаем вариант $M=2$, $N=3$. В этом случае показатели безотказности работы блока ССН следует вычислять по формулам с цифровой индексацией 2–3:

$$P_{2-3}(t) = \exp(-2\Lambda_{Ц}t)[1 + 2\Lambda_{Ц}t], \quad f_{2-3}(t)_B = -\frac{dP_{2-3}(t)_B}{dt} = 4\Lambda_{Ц}^2 t \exp(-2\Lambda_{Ц}t),$$

$$\Lambda(t)_{2-3} = \frac{f_{2-3}(t)_B}{P_{2-3}(t)_B} = \frac{4\Lambda_{Ц}^2 t}{1 + 2\Lambda_{Ц}t},$$

$$T_{O.2-3} = \int_0^\infty P_{2-3}(t)_B dt = \int_0^\infty \exp(-2\Lambda_{Ц}t) dt + \int_0^\infty 2\Lambda_{Ц}t \exp(-\Lambda_{Ц}t) dt = \frac{1}{2\Lambda_{Ц}} + \frac{2\Lambda_{Ц}}{4\Lambda_{Ц}^2} = \frac{1}{\Lambda_{Ц}}.$$

Погрешность определения ВБР блока ССН при $M=2$ и $N=3$:

$$\Delta P(t)_{2-3} = \frac{\partial P(t)_{2-3}}{\partial \Lambda_{Ц}} \Delta \Lambda_{Ц} = 4\Lambda_{Ц} t^2 \exp(-2\Lambda_{Ц}t) \Delta \Lambda_{Ц}.$$

Погрешность определения интенсивности отказов блока ССН с однократным ненагруженным резервом и средней наработки до отказа блока ССН определяются как

$$\Delta \Lambda(t)_{2-3} = \frac{\partial \Lambda(t)_{2-3}}{\partial \Lambda_{Ц}} \Delta \Lambda_{Ц} = \frac{2\Lambda_{Ц}t(1 + \Lambda_{Ц}t) - \Lambda_{Ц}^2 t^2}{1 + \Lambda_{Ц}t} \Delta \Lambda_{Ц} = \frac{2\Lambda_{Ц}t}{1 + \Lambda_{Ц}t} \Delta \Lambda_{Ц},$$

$$\Delta T_{O.2-3} = \frac{\partial T_{O.2-3}(t)}{\partial \Lambda_{Ц}} \Delta \Lambda_{Ц} = \frac{1}{\Lambda_{Ц}^2} \Delta \Lambda_{Ц}.$$

Параллельное соединение цепей, обеспечивающих резервирование замещением (одна цепь рабочая (А) и одна ненагруженная цепь (В), отличающаяся по надежности от рабочей), представлено на рис. 4. Формула расчета показателей безотказности блока ССН при этом виде резервирования имеет вид [2]

$$P(t)_B = \frac{1}{\Lambda_{Ц1} - \Lambda_{Ц2}} [\Lambda_{Ц1} \exp(-\Lambda_{Ц2}t) - \Lambda_{Ц2} \exp(-\Lambda_{Ц1}t)],$$

$$T_{O.B} = \int_0^\infty P(t) dt = \int_0^\infty \frac{1}{\Lambda_{Ц1} - \Lambda_{Ц2}} [\Lambda_{Ц1} \exp(-\Lambda_{Ц2}t) - \Lambda_{Ц2} \exp(-\Lambda_{Ц1}t)] dt = \frac{\Lambda_{Ц1} + \Lambda_{Ц2}}{\Lambda_{Ц1} \Lambda_{Ц2}},$$

$$\Lambda(t)_B = \Lambda_{Ц1} \Lambda_{Ц2} \frac{[\exp(-\Lambda_{Ц2}t) - \exp(-\Lambda_{Ц1}t)]}{[\Lambda_{Ц1} \exp(-\Lambda_{Ц2}t) - \Lambda_{Ц2} \exp(-\Lambda_{Ц1}t)]}.$$

Погрешность определения ВБР блока ССН с однократным резервированием замещением при отличии параметра основной цепи от резервной вычисляется по формуле

$$\Delta P(t)_B = \frac{\partial P(t)_B}{\partial \Lambda_{Ц1}} \Delta \Lambda_{Ц1} + \frac{\partial P(t)_B}{\partial \Lambda_{Ц2}} \Delta \Lambda_{Ц2}.$$

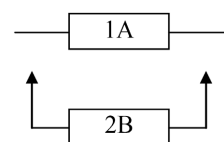


Рис. 4. Графическое представление резервирования замещением

Fig. 4. Graphical representation of standby redundancy

Погрешность определения интенсивности отказов блока ССН с однократным резервированием замещением при отличии структуры основной цепи от резервной рассчитывается как

$$\Delta\Lambda(t)_Б = \frac{\partial\Lambda(t)_Б}{\partial\Lambda_{Ц1}}\Delta\Lambda_{Ц1} + \frac{\partial\Lambda(t)_Б}{\partial\Lambda_{Ц2}}\Delta\Lambda_{Ц2}.$$

Погрешность определения средней наработки до отказа блока ССН с однократным резервированием замещением при отличии структуры основной цепи от резервной вычисляется как

$$\Delta T_{О.Б} = \frac{\partial T_{О.Б}(t)}{\partial\Lambda_{Ц1}}\Delta\Lambda_{Ц1} + \frac{\partial T_{О.Б}(t)}{\partial\Lambda_{Ц2}}\Delta\Lambda_{Ц2}.$$

Параллельное соединение N цепей, обеспечивающих резервирование голосованием по мажоритарной схеме M из N (все N цепей нагруженные), любые M из N цепей основные, представлено на рис. 5. Формула расчета ВБР блока ССН $P_M(t)$ при этом виде резервирования имеет вид [3]: $P_M(t) = \sum_{j=M}^N C_N^j p^j(t)[1-p(t)]^{N-j}$, где $C_b^a = \frac{b!}{a!(b-a)!}$, $a < b$.

Интерес для БА МКА представляет вариант 2 из 3. В этом случае вероятность безотказной работы $P_M(t)_{2-3}$ вычисляется по формуле

$$P_M(t)_{2-3} = \sum_{j=2}^3 C_3^j p^j(t)[1-p(t)]^{3-j} = C_3^2 p^2(t)[1-p(t)] + C_3^3 p^3(t) = 3\exp(-2\Lambda t) - 2\exp(-3\Lambda t).$$

Плотность распределения в этом случае определяется по формуле

$$f_M(t) = -\frac{dP_M(t)_{2-3}}{dt} = 6\Lambda_{Ц}[\exp(-3\Lambda_{Ц}t) - \exp(-2\Lambda_{Ц}t)].$$

Тогда интенсивность отказов блока ССН $\Lambda_Б(t)$ и средняя наработка до отказа блока ССН:

$$\Lambda_Б(t) = \frac{f_M(t)}{P_M(t)_{2-3}} = \frac{6\Lambda_{Ц}[\exp(-2\Lambda_{Ц}t) - \exp(-3\Lambda_{Ц}t)]}{3\exp(-2\Lambda_{Ц}t) - 2\exp(-3\Lambda_{Ц}t)} = \frac{6\Lambda_{Ц}[1 - \exp(-\Lambda_{Ц}t)]}{3 - 2\exp(-\Lambda_{Ц}t)},$$

$$T_{О.2-3} = \int_0^{\infty} P_M(t)_{2-3} dt = \int_0^{\infty} 3\exp(-2\Lambda_{Ц}t) dt - \int_0^{\infty} 2\exp(-3\Lambda_{Ц}t) dt = \frac{5}{6\Lambda_{Ц}}.$$

Погрешность определения ВБР блока ССН с мажоритарным резервированием 2 из 3 вычисляется по формуле $\Delta P_M(t)_{2-3} = \frac{\partial P_M(t)_{2-3}}{\partial\Lambda_{Ц}}\Delta\Lambda_{Ц} = 6t[\exp(-2\Lambda_{Ц}t) - \exp(-3\Lambda_{Ц}t)]\Delta\Lambda_{Ц}$.

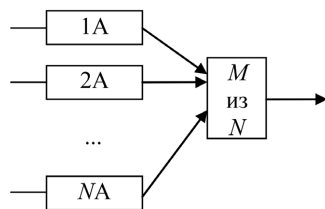


Рис. 5. Графическое представление резервирования голосованием

Fig. 5. Graphical representation of redundancy by voting

Погрешность определения интенсивности отказов блока ССН с мажоритарным резервированием 2 из 3 рассчитывается как

$$\Delta\Lambda_M(t)_{2-3} = \frac{\partial\Lambda_M(t)_{2-3}}{\partial\Lambda_{Ц}}\Delta\Lambda_{Ц}.$$

Погрешность определения средней наработки до отказа блока ССН с мажоритарным резервированием 2 из 3 вычисляется как

$$\Delta T_{О.2-3} = \frac{5}{6\Lambda_{Ц}^2}\Delta\Lambda_{Ц}.$$

Структурная схема надежности объекта в целом. Существуют методы, позволяющие последовательно-параллельную схему ССН объекта привести к последовательной. Один из них – метод свертки, который основан на последовательном преобразовании ССН объекта и ее сведении к основному соединению элементов. Покажем, как применяется этот подход в случае оценки вероятности безотказной работы объекта (рис. 6). Пусть каждый блок рассматриваемой ССН объекта характеризуется ВБР $P_i(t)$. Надо определить ВБР объекта. Метод свертки состоит из нескольких этапов.

На первом этапе рассматриваются все параллельные соединения, которые заменяются эквивалентными блоками с соответствующим показателем надежности. В данном случае такими являются 1-й и 2-й блоки. После чего структурная схема надежности примет вид, приведенный на рис. 7. Вероятность безотказной работы блока 8 ССН определяется формулой $P_8(t) = 1 - \{1 - P_1(t)[1 - P_2(t)]\}$.

На втором этапе рассматриваются все последовательные соединения, которые заменяются эквивалентными блоками. Здесь последовательными элементами являются 3-й и 4-й; 5-й и 6-й. После этого этапа преобразований ССН примет вид, показанный на рис. 8. Характеристики надежности элементов определяются с помощью следующих выражений ВБР блоков 9 и 10 ССН: $P_9(t) = P_3(t)P_4(t)$, $P_{10}(t) = P_5(t)P_6(t)$.

На третьем этапе вновь рассматриваются параллельные соединения, которые заменяются эквивалентными блоками. Здесь такими параллельными блоками являются 9-й и 10-й. После третьего этапа преобразований ССН примет вид, приведенный на рис. 9. Вероятность безотказной работы блока 11 ССН определяется формулой $P_{11}(t) = 1 - \{1 - P_9(t)[1 - P_{10}(t)]\}$. Структурная схема надежности (см. рис. 9) является сверткой исходной ССН (см. рис. 6), и согласно ей ВБР объекта следует определять как $P_{\text{об}}(t) = P_8(t)P_{11}(t)P_7(t)$. Таким образом, для дальнейшего исследования методики интервальной оценки расчетного значения показателей надежности объекта типа МКА можно использовать последовательную ССН, приведенную на рис. 1.

Исходными данными для интервальной оценки расчетных значений ПН объектов являются: количество блоков в последовательной ССН – m ; среднее значение ПН $R_{\text{ср}}$ каждого блока ССН объекта; погрешность определения ПН каждого блока ССН ΔR , определенное при заданной доверительной вероятности (см. [1]); заданная наработка объекта t . В соответствии со структурной схемой надежности объекта (см. рис. 1) средние значения ПН объекта вычисляются по формулам

$$P_{\text{об}}(t)_{\text{ср}} = \prod_{i=1}^m P_{\text{Б}i}(t)_{\text{ср}}, \quad (11)$$

$$\Lambda_{\text{об.ср}} = \sum_{i=1}^m \Lambda_{\text{Б}i,\text{ср}}, \quad (12)$$

$$T_{\text{о.об.ср}} = \int_0^{\infty} P_{\text{об}}(t)_{\text{ср}} dt, \quad (13)$$

где $P_{\text{об}}(t)_{\text{ср}}$, $\Lambda_{\text{об.ср}}$, $T_{\text{о.об.ср}}$ – средние значения вероятности безотказной работы, интенсивности отказов и средней наработки до отказа объекта соответственно; m – количество блоков в ССН. Значения $P_{\text{Б}i}(t)_{\text{ср}}$ и $\Lambda_{\text{Б}i,\text{ср}}$ находятся по формулам, полученным для блока ССН с соответствующими характеристиками. Значение $T_{\text{о.об.ср}}$ вычисляется по (13) приближенным методом, например по формуле Симпсона.

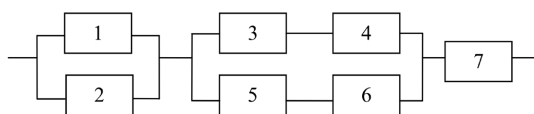


Рис. 6. Последовательно-параллельная структура ССН объекта

Fig. 6. Sequential-parallel structure of structural diagram reliability of object

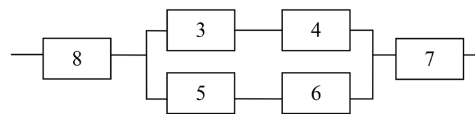


Рис. 7. Структурная схема надежности объекта после первого этапа преобразований

Fig. 7. Structural reliability scheme of an object after the first stage of transformation

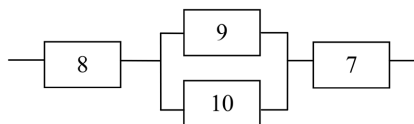


Рис. 8. Структурная схема надежности объекта после второго этапа преобразований

Fig. 8. Structural reliability scheme of an object after the second stage of transformation

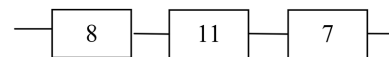


Рис. 9. Структурная схема надежности объекта после третьего этапа преобразований

Fig. 9. Structural reliability scheme of an object after the third stage of transformation

Погрешность определения ВБР объекта определяется в соответствии с (3):

$$\Delta P_{\text{ОБ}}(t_C) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial P_{\text{ОБ}}(t_C)_{\text{CP}}}{\partial P_{\text{Б}i}(t_C)_{\text{CP}}} \Delta P_{\text{Б}i}(t_C), \text{ где } \Delta P_{\text{Б}i}(t_C) - \text{погрешность определения ВБР } i\text{-го блока}$$

$$\text{ССН. Заметим, что } \frac{\partial P_{\text{ОБ}}(t_C)_{\text{CP}}}{\partial P_{\text{Б}i}(t_C)_{\text{CP}}} = \prod_{j=1, j \neq i}^m P_{\text{Б}j}(t_C)_{\text{CP}} = \frac{P_{\text{ОБ}}(t_C)_{\text{CP}}}{P_{\text{Б}i}(t_C)_{\text{CP}}}.$$

Следовательно,

$$\Delta P_{\text{ОБ}}(t)_{\text{Б}} = P_{\text{ОБ}}(t_C)_{\text{CP}} \sum_{i=1}^m \frac{\Delta P_{\text{Б}i}(t_C)}{P_{\text{Б}i}(t_C)_{\text{CP}}} = P_{\text{ОБ.СР}}(t_C) \sum_{i=1}^m W_{\text{РП}i}, \quad (14)$$

где $W_{\text{ОП}i}$ – относительная погрешность ВБР i -го блока ССН:

$$W_{\text{ОП}i} = \frac{\Delta P_{\text{Б}i}(t_C)}{P_{\text{Б}i}(t_C)_{\text{CP}}}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (15)$$

Погрешность определения интенсивности отказов объекта вычисляется по формуле

$$\Delta \Lambda_{\text{ОБ}}(t) = \sum_{i=1}^m \Delta \Lambda_{\text{Б}i}(t), \quad (16)$$

где $\Delta \Lambda_{\text{Б}i}$ – погрешность определения интенсивности отказов i -го блока ССН.

Граничные значения интервальной оценки ВБР объекта $P_{\text{ОБ.Н}}(t_C)$ (нижнее) и $P_{\text{ОБ.В}}(t_C)$ (верхнее) вычисляются по формулам $P_{\text{ОБ.Н}}(t_C) = P_{\text{ОБ.СР}}(t_C) - \Delta P_{\text{ОБ.СР}}(t_C)$, $P_{\text{ОБ.В}}(t_C) = P_{\text{ОБ.СР}}(t_C) + \Delta P_{\text{ОБ.СР}}(t_C)$.

Граничные значения интервальной оценки интенсивности отказов объекта вычисляются по формулам $\Lambda_{\text{ОБ.Н}} = \Lambda_{\text{СР.ОБ}} - \Delta \Lambda_{\text{ОБ}}$, $\Lambda_{\text{ОБ.В}} = \Lambda_{\text{СР.ОБ}} + \Delta \Lambda_{\text{ОБ}}$, где $\Lambda_{\text{ОБ.Н}}$, $\Lambda_{\text{ОБ.В}}$ – соответственно нижнее и верхнее значения интервала интенсивности отказов объекта.

Пример использования предлагаемой методики. Проведем интервальную оценку расчетных значений показателей безотказности бортовой информационной системы (БИС) – составной части реальной МКА по данным структурной схемы надежности БИС (рис. 10) и показателей надежности элементов ССН БИС (табл. 1). Численные значения показателей надежности элементов БИС определены экспертным методом. Нарботка БИС в течении пяти лет полета МКА составляет $t = 1500$ ч. Расчет проводился по двум показателям надежности БИС ВБР $P(t)_{\text{ОБ}}$ и интенсивности отказов $\Lambda(t)_{\text{ОБ}}$. Промежуточные результаты приведены в табл. 2. Расчет по простым блокам ССН (1–5, табл. 2) проводился по следующим формулам: (4) – для $\Lambda_{\text{СР}}$, (5) – для $P_{\text{СР}}(t)_{\text{Б}}$, (6) – для $\Delta \Lambda_{\text{Б}}$, (15) – для W . Расчет по сложным блокам ССН (6–11, табл. 2) проводился по формуле (9) для $\Lambda_{\text{СР}}$, (8) для $P_{\text{СР}}(t)_{\text{Б}}$, (10) для $\Delta \Lambda_{\text{Б}}$, (15) для W ; по объекту в целом – по формуле (11) для $P_{\text{ОБ}}(t)$, (12) для $\Lambda_{\text{ОБ}}$, (14) для $\Delta P_{\text{ОБ}}(t)$, (16) для $\Delta \Lambda_{\text{ОБ}}$. Результаты интервальной оценки расчетных значений показателей безотказности бортовой информационной системы (БИС) МКА следующие: среднее значение вероятности безотказной работы бортовой информационной системы за наработку 1500 ч в процессе пятилетнего полета МКА составляет $P(1500)_{\text{БИС.СР}} = 0,99700$, среднее значение интенсивности отказов БИС – $\Lambda_{\text{БИС.СР}} = 200 \cdot 10^{-8}$ 1/ч, погрешность оценки ВБР БИС – $\Delta P_{\text{БИС}}(1500) = 34502 \cdot 10^{-8} = 0,000345$; погрешность оценки интенсивности отказов БИС – $\Delta \Lambda_{\text{БИС}} = 23,41 \cdot 10^{-8}$ 1/ч.

Таблица 1. Показатели надежности элементов структурной схемы надежности бортовой информационной системы

Table 1. Reliability measure of the elements of the structural reliability scheme of the on-board information system

Наименование блока ССН	Интенсивность отказов элемента, 10^{-8} 1/ч			
	средняя	нижняя	верхняя	погрешность
Датчик телеметрии	10	9	11	1
Модуль управления нагревателями	10	9	11	1
Модуль технологического обмена	30	26	34	4
Бортовое запоминающее устройство	100	88	112	12
Вторичный источник питания	50	45	55	5
Контроллер межблочного обмена	100	92	108	8
Контроллер предобработки данных	100	90	110	10
Контроллер памяти	100	95	105	5
Контроллер управления питанием	100	93	107	7
Контроллер бортового обмена	120	105	135	15
Логическое ядро	120	103	137	17

Таблица 2. Бортовая информационная система малогабаритного космического аппарата. Интервальная оценка

Table 2. On-board information system of a small spacecraft. Interval estimation

№	Наименование блока ССН	Количество (к _р)	к _{из}	Средняя интенсивность отказов 10^{-8} 1/ч		ВБР $P_{CP}(t)_{Bi}$	Погрешность, 10^{-8} 1/ч		
				элемента λ_{CP}	блока Λ_{CP}		$\Delta\Lambda_{OB}$	$\Delta P(t)_{Bi}$	W_{Bi}
1	Датчик телеметрии	1	1	10,00	10,0000	0,999850	1,00	1499,8	1500
2	Модуль управления нагревателями	1	1	10,00	10,0000	0,999850	1,00	1499,8	1500
3	Модуль технологического обмена	1	1	30,00	30,0000	0,999550	4,00	5997,3	6000
4	Бортовое запоминающее устройство	1	1	100,00	100,0000	0,998500	12,00	17973	18000
5	Вторичный источник питания	1	1	50,00	50,0000	0,999250	5,00	7494	7500
6	Контроллер предобработки данных с нагруженным резервом	1	1	100,00	0,00020	0,999998	0,04790	0,2155	0,2155
7	Контроллер памяти с нагруженным резервом	1	1	100,00	0,00020	0,999998	0,05986	0,2694	0,2694
8	Контроллер управления питанием с нагруженным резервом	1	1	100,00	0,00020	0,999998	0,02993	0,1347	0,1347
9	Контроллер бортового обмена с нагруженным резервом	1	1	100,00	0,00020	0,999998	0,04191	0,1886	0,1886
10	Логическое ядро с нагруженным резервом	1	1	120,00	0,00024	0,999998	0,10771	0,5816	0,5816
11	Контроллер межблочного обмена с нагруженным резервом	1	1	120,00	0,00024	0,999994	0,12207	0,6592	0,6592

Граничные значения интервальной оценки ВБР БИС составляют: $P_{BIS.H}(1500) = 0,996655$, $P_{BIS.B}(1500) = 0,997345$, где $P_{BIS.H}(1500)$, $P_{BIS.B}(1500)$ – соответственно нижнее и верхнее значения ВБР БИС. Граничные значения интервальной оценки интенсивности отказов БИС следующие: $\Lambda_{BIS.H} = 176,59 \cdot 10^{-8}$ 1/ч, $\Lambda_{BIS.B} = 223,41 \cdot 10^{-8}$ 1/ч, где $\Lambda_{BIS.H}$, $\Lambda_{BIS.B}$ – соответственно нижнее и верхнее значения интервала интенсивности отказов БИС.



Рис. 10. Структурная схема надежности бортовой информационной системы малогабаритного космического аппарата

Fig. 10. Structural reliability scheme of an on-board information system of small spacecrafts

Заключение. Настоящая работа является продолжением исследования [1] и представляет собой методику интервальной оценки расчетных значений показателей надежности невосстанавливаемых объектов, надежность которых обеспечивается путем структурного резервирования с ограниченной кратностью. К числу таких объектов относится и бортовая аппаратура малогабаритных космических аппаратов. Приведен пример применения методики на составной части реальной БА МКА – бортовой информационной системе. В дальнейшем исследования будут продолжены для восстанавливаемых объектов с учетом отсутствия требований на ограничение кратности резервирования.

Список использованных источников

1. Кульбак, Л. И. Интервальная оценка расчетных показателей надежности объекта / Л. И. Кульбак // Информатика. – 2014. – № 1 (41). – С. 35–44.
2. Кульбак, Л. И. Оценка надежности бортовой аппаратуры малых космических аппаратов в процессе их полета / Л. И. Кульбак, В. Б. Алюшкевич, С. А. Золотой // Информатика. – 2015. – № 4 (48). – С. 109–118.
3. Максимов, Ю. В. Модель надежности космического аппарата / Ю. В. Максимов, В. Е. Патраев, В. А. Тололо // Сиб. журн. науки и технологий. – 2005. – Вып. 3. – С. 144–147.

References

1. Kulbak L. I. Interval estimation of calculated indicators of object reliability. *Informatika = Informatics*, 2014, no. 1 (41), pp. 35–44 (in Russian).
2. Kulbak L. I., Alyushkevich V. B., Zolotoy S. A. Evaluation of the reliability of on-board equipment of small spacecraft in the process of their flight. *Informatika = Informatics*, 2015, no. 4 (48), pp. 109–118 (in Russian).
3. Maksimov Y. V., Patraev V. E., Tololo V. A. The model of spacecraft reliability. *Sibirskii zhurnal nauki i tekhnologii = Scientific Journal of Science and Technology*, 2005, no. 3, pp. 144–147 (in Russian).

Информация об авторах

Кульбак Леонид Игоревич – кандидат технических наук, доцент, ведущий научный сотрудник, Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 6, 220012, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: lkulbak@yandex.ru

Золотой Сергей Анатольевич – кандидат технических наук, директор, УП «Геоинформационные системы» Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 6, 220012, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: gis@gis.by

Мартинovich Татьяна Сергеевна – научный сотрудник, Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 6, 220012, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: martintan@tut.by

Information about the authors

Leonid I. Kulbak – Ph. D. (Engineering), Assistant Professor, Leading Researcher, United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus (6, Surganov Str., 220012, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: lkulbak@yandex.ru

Sergey A. Zolotoy – Ph. D. (Engineering), Director, UE “Geoinformation Systems” of the National Academy of Sciences of Belarus (6, Surganov Str., 220012, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: gis@gis.by

Tatyana S. Martinovich – Researcher, United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus (6, Surganov Str., 220012, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: martintan@tut.by

УЧЕНЫЕ БЕЛАРУСИ
SCIENTISTS OF BELARUS

ПАМЯТИ АКАДЕМИКА ВЛАДИМИРА АНТОНОВИЧА ПИЛИПОВИЧА

2 апреля 2018 г. белорусская наука понесла тяжелую утрату: на 88-м году жизни скончался Владимир Антонович Пилипович – известный ученый в области лазерной физики и оптической обработки информации, Заслуженный деятель науки Республики Беларусь, лауреат Государственных премий СССР и Республики Беларусь, академик Национальной академии наук Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор. Жизненный путь Владимира Антоновича является достойным примером служения науке, а результаты научной деятельности по праву позволяют говорить о нем как о крупном ученом современности.

Владимир Антонович Пилипович родился 5 января 1931 г. в деревне Слобода Мозырского района Гомельской области. В 1949 г. окончил Гребеневскую среднюю школу Могилевского района, в 1954 г. – физико-математический факультет Белорусского государственного университета, а в 1957 г. – аспирантуру при Государственном оптическом институте им. С. И. Вавилова в Ленинграде. С 1957 г. работал младшим научным сотрудником Института физики АН БССР. В 1971 г. был назначен заведующим лабораторией электроники АН БССР, преобразованной два года спустя в Институт электроники АН БССР. Владимир Антонович возглавлял этот Институт на протяжении 25 лет (1973–1998 гг.), с 1998 г. был его почетным директором, одновременно с 1973 г. – заведующим лабораторией оптических методов обработки информации. В 1983–1987 гг. главный ученый секретарь Президиума Академии наук БССР. С 2007 г. заведующий лабораторией, с 2008 г. главный научный сотрудник Института физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси.

Владимир Антонович первым в республике начал экспериментальные исследования твердотельных лазеров. В 1963 г. (спустя 2 года после демонстрации лазера Т. Майманом) им был создан первый в Беларуси лазер на рубине, а впоследствии – и на неодимовом стекле. В. А. Пилиповичем разработаны чувствительные методы измерения потерь излучения, определяющих коэффициент полезного действия лазера, выполнены работы по исследованию фототропных сред и их применению в качестве пассивных затворов лазеров. Впервые экспериментально измерено развитие моноимпульсной генерации в лазерах с активными и пассивными затворами в широком диапазоне изменения интенсивности. Результаты исследований свойств лазеров с просветляющимися фильтрами обобщены и систематизированы в монографии «Оптические квантовые генераторы с просветляющимися фильтрами», изданной в 1975 г.

Владимир Антонович положил начало исследованиям по анизотропии вынужденного излучения растворов органических соединений, результаты которых вошли в цикл работ «Явления анизотропии в лазерах и принципы поляризационной лазерной спектроскопии», удостоенной в 1996 г. Государственной премии Республики Беларусь. По инициативе Владимира Антоновича и при непосредственном его участии в стране были развернуты исследования по перспективным направлениям микро- и оптоэлектроники, оптическим методам обработки информации, научному приборостроению, сформирована первая в Беларуси программа фундаментальных исследований по разработке научных основ создания элементной базы быстродействующих микро- и оптоэлектронных устройств обработки информации. Разработаны эффективные методы и средства многоканальной модуляции лазерных пучков на основе сегнетоэлектрических жидкокристаллических материалов, методы формирования и голографической записи двумерных массивов оптической информации, предложены и изучены новые материалы для реверсивной записи и отображения оптической информации, созданы макеты голографических запоминающих устройств. Часть из названных результатов вошла в цикл работ «Фундаментальные исследования фоторефрактивных и жидких кристаллов для оптических систем обработки информации», удостоенный в 1985 г. Государственной премии СССР.



В. А. Пилиповичем выполнены важные работы по компенсации затухания и усилению информационных цифровых сигналов в оптическом волокне, разработан эффективный метод амплитудной модуляции света, основанный на многократной, многолучевой интерференции, а также методы оптического мультиплексирования и многопараметрического кодирования информационных сигналов, обеспечивающие высокую надежность и скорость передачи информации, результаты которых нашли применение в таких областях микро- и оптоэлектроники, как полупроводниковые лавинные фотодиоды, приборы на основе интерферометров Фабри – Перо, фотопреобразователи и солнечные элементы различных типов.

Владимир Антонович автор свыше 400 научных публикаций, в том числе трех монографий, более 170 авторских свидетельств и патентов на изобретение; в данном номере журнала выходит последняя, написанная им, статья. В области лазерной физики и оптической обработки информации В. А. Пилиповичем создана признанная научная школа, среди его учеников 3 доктора и 32 кандидата наук, член-корреспондент НАН Беларуси. Владимир Антонович активно и плодотворно занимался научно-организационной деятельностью. На протяжении многих лет он являлся членом ряда научных и научно-технических советов и секций АН СССР, Госкомитета СССР по информатике и вычислительной технике Министерства радиопромышленности СССР, Высшей аттестационной комиссии СССР, комиссий Президиума Совета Министров БССР по вопросам научно-технического прогресса. За высокие достижения в научной, научно-организационной работе и подготовке научных кадров Владимир Антонович награжден орденом Трудового Красного Знамени, медалями.

Жизненный путь Владимира Антоновича Пилиповича является примером бескорыстного служения науке и обществу. Как талантливый ученый и организатор науки он всегда пользовался безграничным уважением и авторитетом у своих коллег и учеников. Светлая память о Владимире Антоновиче Пилиповиче навсегда сохранится в сердцах всех тех, кто знал его и трудился рядом с ним.

*Отделение физики, математики и информатики НАН Беларуси
Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси
Белорусское физическое общество*

ПАМЯТИ АКАДЕМИКА ИВАНА ВАСИЛЬЕВИЧА ГАЙШУНА



24 апреля 2018 г. ушел из жизни выдающийся ученый, академик Национальной академии наук Беларуси Иван Васильевич Гайшун – известный специалист в области дифференциальных уравнений, топологической динамики и методов математического моделирования, который внес неоценимый вклад в развитие математики.

Иван Васильевич родился в деревне Петровичи Бобруйского района Могилевской области. В 1964 г. после окончания Горбачевичской средней школы поступил в Белорусский государственный университет на математический факультет. В 1969 г. окончил его с отличием и был направлен на работу в Институт математики АН БССР, где до 1984 г. работал стажером-исследователем, младшим научным сотрудником, старшим научным сотрудником лаборатории теории процессов управления. В 1972 г. защитил кандидатскую, а в 1984 г. – докторскую диссертацию.

В декабре 1984 г. был избран заведующим лабораторией математического моделирования и анализа систем. С 1992 г. и до последних дней И. В. Гайшун – директор Института математики НАН Беларуси. С мая 1997 г. по апрель 2002 г. являлся вице-президентом НАН Беларуси.

Научное творчество И. В. Гайшуна началось еще со студенческой скамьи, когда под руководством академика Е. А. Барбашина ему удалось решить ряд задач теории устойчивости систем нелинейных дифференциальных уравнений. В результате этих исследований им был внесен заметный вклад в известную проблему абсолютной устойчивости, описание областей притяжения положения равновесия механических систем, периодических решений диф-

ференциальных уравнений и установлены условия устойчивости систем со случайными параметрами.

Высокий научный потенциал, тонкая математическая интуиция и широкая эрудиция позволили Ивану Васильевичу существенно расширить спектр проблем теории динамических систем, исследуемых в Беларуси, дополнив его, в частности, такими современными разделами, как многомерные, многопараметрические и нечеткие динамические системы; вполне интегрируемые системы на многообразиях; уравнения в полных производных в банаховых и локально выпуклых топологических пространствах; системы уравнений с изменяющейся структурой и системы с запаздыванием; управляемые непрерывные и дискретные линейные динамические системы, рассматриваемые совместно с различными топологическими и алгебраическими структурами. Он не только инициировал масштабные исследования в этих разделах, но и получил основополагающие результаты, среди которых развитие теории устойчивости инвариантных множеств, основанное на понятии фильтра в общей топологии; обобщение теории характеристических чисел Ляпунова на неавтономные линейные уравнения в полных производных в банаховых пространствах; критерии ограниченности, периодичности и почти периодичности уравнений в полных производных на локально выпуклых пространствах. Эти и ряд других результатов, например основы теории вполне разрешимых дискретных систем, опубликованы в монографиях «Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения» (1983), «Линейные уравнения в полных производных» (1989).

Теория уравнений в полных дифференциалах занимала важное место в научном творчестве Ивана Васильевича. Им определены гамильтоновы линейные и квазилинейные системы в полных дифференциалах и для указанного класса систем с периодическими коэффициентами получены критерии устойчивости и условия сильной устойчивости, т. е. условия грубости свойства устойчивости при малых возмущениях параметров, сохраняющих полную интегрируемость и гамильтоновость системы; также развита теория наблюдаемости линейных нестационарных систем в полных дифференциалах, доказан принцип максимума для класса таких систем и развит способ построения минимальных реализаций линейных стационарных систем в полных дифференциалах.

Иван Васильевич проводил исследования в области математической теории управления. Им разработаны основанные на идеях современной алгебры, функционального анализа и топологической динамики новые методы для изучения свойств робастности, устойчивости, стабилизируемости, управляемости и наблюдаемости различных классов линейных динамических систем.

И. В. Гайшун – автор более 300 научных публикаций, в том числе 8 монографий. Большой цикл исследований, выполненный им по линейной теории управления, представлен в работах «Введение в теорию линейных нестационарных систем» (1999), «Системы с дискретным временем» (2001). В книге «Многопараметрические системы управления» (1996) развиты методы качественной теории многопараметрических дискретных систем управления, отлично зарекомендовавшие себя при изучении популярного в приложениях класса 2D-систем. В монографии «Линейные системы с квазидифференцируемыми коэффициентами: управляемость и наблюдаемость движений» (2013; в соавт.) представлено систематическое применение техники квазидифференцирования в задачах наблюдения и управления линейных нестационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, что привело к новым, более сильным по сравнению с известными, условиям наблюдаемости и управляемости, а также позволило разработать эффективные процедуры построения канонических систем наблюдения со скалярным выходом и систем управления с одномерным входным сигналом.

И. В. Гайшун дал определение нечеткой динамической системы (F-системы), использующее оригинальную интерпретацию функции принадлежности Л. Заде, и провел полное исследование устойчивости (по некоторому фильтру, обладающему свойством инвариантности) нечетких точек F-систем. Он определил также управляемые линейные системы в нечетких пространствах и нашел признаки устойчивости и управляемости таких систем. Фундаментальной задаче моделирования с помощью дискретных систем распределенных в пространстве эволюционных процессов посвящен ряд его работ, в которых определены дискретные системы с изменяющейся структурой и изучены их свойства устойчивости, управляемости и вложимости.

Глубокие теоретические результаты, полученные Иваном Васильевичем, нашли приложение в различных разделах науки и техники. Так, в последние годы он построил и исследовал математические модели функционирования сердечно-сосудистой системы человека, которым посвящен ряд статей и монография «Демпфирующая функция артерий и неинвазивные методы ее оценки» (2016; в соавт.). С его участием разработаны алгоритмы для решения обратных задач восстановления негладких коэффициентов нелинейных уравнений теплопроводности, вошедшие в издание «Структурные свойства динамических систем и обратные задачи математической физики» (2009; в соавт.).

И. В. Гайшун много внимания уделял работе с молодежью. С 1994 г. на механико-математическом факультете БГУ работал в должности профессора. Под его руководством подготовлено 6 кандидатов и 4 доктора наук. Будучи лидером белорусской математической науки, он всегда ответственно относился к воспитанию молодых ученых, сохраняя и преумножая лучшие научные традиции, определял высокий уровень требований к подготовке научных кадров, работая в Президиуме ВАК Беларуси.

Иван Васильевич много и плодотворно трудился над организацией научных исследований в Беларуси. Он был членом Президиума НАН Беларуси, членом Президиума ВАК Беларуси, входил в Совет Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований. Являлся членом редколлегии журналов «Дифференциальные уравнения», «Доклады НАН Беларуси», «Весці НАН Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук», «Computational Methods in Applied Mathematics», «Труды Института математики», был руководителем республиканского научного семинара по математической теории систем, на котором прошли апробацию десятки диссертационных работ.

Имя И. В. Гайшуна широко известно мировой научной общественности. Он возглавлял Белорусское математическое общество, являлся членом Европейского математического общества, Американского математического общества, принимал участие в международных конгрессах, конференциях, школах, сотрудничал с математическими центрами многих стран.

И. В. Гайшун являлся лауреатом Государственной премии Республики Беларусь за цикл работ «Исследование асимптотических свойств дифференциальных и дискретных систем» (2000), удостоен премии комиссии СМ СССР (1981), Почетной грамоты СМ Беларуси за высокие достижения в научной деятельности (1996, 2011), премии Академий наук Украины, Беларуси и Молдовы (2011), награжден медалью Франциска Скорины (2017). Ему вынесена Благодарность Президента Республики Беларусь (2006).

Неиссякаемый запас идей и талант ученого сочетались в Иване Васильевиче с высокими человеческими качествами и умением создавать исключительно добрую и творческую атмосферу. Этим он снискал авторитет справедливого, чуткого и корректного руководителя. Светлая память об Иване Васильевиче навсегда сохранится в сердцах его коллег, учеников, друзей, всех тех, кто его знал и ценил его необыкновенную мудрость и талант.

*Отделение физики, математики и информатики НАН Беларуси
Институт математики НАН Беларуси
Белорусское математическое общество*