

ВЕСЦІ

НАЦЫЯНАЛЬНАЯ
АКАДЭМІЯ НАВУК БЕЛАРУСІ

СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК 2016 № 1

ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ
АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ

СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК 2016 № 1

ЗАСНАВАЛЬНІК – НАЦЫЯНАЛЬНАЯ АКАДЭМІЯ НАВУК БЕЛАРУСІ

Часопіс выдаецца са студзеня 1965 г.

Выходзіць чатыры разы ў год

ЗМЕСТ

МАТЭМАТЫКА

Корзюк В. И. Задачи сопряжения уравнений Пуассона	5
Амелькин В. В., Василевич М. Н. Построение методом ВКБ решения дифференциальной системы, возникающей в задаче Римана – Гильберта	17
Ломовцев Ф. Е. Необходимые и достаточные условия вынужденных колебаний полуограниченной струны с первой характеристической кривой производной в нестационарном граничном условии	21
Астровский А. И. Равномерная наблюдаемость и системы наблюдения в форме Шварца	28
Харин Ю. С., Журак М. К. Асимптотический анализ оценок максимального правдоподобия параметров биномиальной условно авторегрессионной модели пространственно-временных данных	36
Жук Е. Е. Статистическое определение ближайших стационарных временных рядов в пространстве коэффициентов авторегрессии	46
Беняш-Кривец В. В., Говорушко И. О. Многообразия представлений групп Баумслэга – Солитера в случае не взаимно простых показателей	52
Сарванов В. И., Ефимов О. В. Построение расписаний для двухстадийной системы обслуживания типа flowshop с блокировками	57
Корзюк В. И., Винь Н. В. Классические решения смешанных задач для одномерного биволнового уравнения	69

ФІЗІКА

Батище С. А., Бушук С. Б., Кузьмук А. А., Савич А. В., Татур Г. А., Грабнер Г., Котэк В. Самопоглощение излучения на длине волны 213 нм при лазерном воздействии на роговицу глаза	80
Данильчик А. В., Войнилович А. Г., Ржеуцкий Н. В., Шпак П. В., Борушко В. В., Трофимов Ю. В., Цвирко В. И., Луценко Е. В., Яблонский Г. П. Моделирование распределения температуры в матрице InGaN светодиодов с высокой плотностью мощности излучения	84
Корза Е. В. Усиление комбинационного рассеяния света неорганическими пигментами с использованием наночастиц золота и серебра	90
Ропот А. П., Хило Н. А. Генерация световых пучков Эйри при дифракции на синусоидальных фазовых решетках	95
Маркевич В. Ю., Чулков Р. В. Определение стационарного коэффициента ВКР-усиления калий-гадолиниевого вольфрамата на длине волны 532 нм	102
Рыжевич А. А., Солоневич С. В., Хило Н. А., Балыкин И. В. Преобразование конических лазерных пучков в двуосных кристаллах	107
Козленкова О. А., Плавская Л. Г., Микулич А. В., Леусенко И. А., Третьякова А. И., Плавский В. Ю. Фотосенсибилизирующее действие билирубина на клетки животных в культуре	117
Толкачева Е. А., Холод О. Н., Мурын Л. И. Особенности трансформации кислородосодержащих центров в кремнии при отжиге в интервале температур 450–700 °С: данные ИК-поглощения	124

ІЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ 2016 № 1

Серия физико-математических наук

На русском, белорусском и английском языках

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь,
свидетельство о регистрации № 392 от 18.05.2009

Комп'ютарная вёрстка *В. Л. Смольскай*

Здадзена ў набор 22.02.2016. Падпісана да друку 21.03.2016. Выхад у свет 29.03.2016. Фармац 60×84¹/₈.

Папера афсетная. Друк лічбавы. Ум. друк. арк. 14,88. Ул.-выд. арк. 16,4. Тыраж 66 экз. Заказ 64.

Кошт нумару: індывідуальная падпіска – 102 900 руб.; ведамасная падпіска – 252 168 руб.

Выдавец і паліграфічнае выкананне:

Рэспубліканскае ўнітарнае прадпрыемства «Выдавецкі дом «Беларуская навука». Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца, вытворцы, распаўсюджвальніка друкаваных выданняў № 1/18 ад 02.08.2013.

ЛП 02330/455 ад 30.12.2013. Вул. Ф. Скарыны, 40, 220141, г. Мінск.

© Выдавецкі дом «Беларуская навука».

Весці НАН Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук, 2016

PROCEEDINGS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF BELARUS

PHYSIC AND MATHEMATICS SERIES 2016 N 1

FOUNDED IS THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF BELARUS

The Journal has been published since January 1965

Issued four times a year

CONTENTS

MATHEMATICS

Korzyuk V. I. Problems of conjugation of the Poisson equations	5
Amel'kin V. V., Vasilevich M. N. JWKB-method and construction of a differential system emerging in the Riemann – Hilbert problem	17
Lomovtsev F. E. Necessary and sufficient conditions for forced vibrations of a semibounded string with the first characteristic directional derivative in the unsteady boundary condition	21
Astrovskii A. I. Uniform observability and observation systems in the Schwarz form	28
Kharin Yu. S., Zhurak M. K. Asymptotic analysis of the maximum likelihood estimates of the parameters for a binomial conditionally autoregressive model of spatio-temporal data	36
Zhuk E. E. Statistical determination of the nearest stationary time series in a space of autoregressive coefficients	46
Beniash-Kryvets V. V., Govorushko I. O. Representation variety of Baumslag – Solitar groups in the case of not coprime exponents	52
Sarvanov V. I., Yafimau A. V. Solving a two-machine blocking flowshop scheduling problem with due dates	57
Korzyuk V. I., Vinh N. V. Classical solutions of mixed problem for one-dimensional biwave equation	69

PHYSICS

Batishche S. A., Bushuk S. B., Kouzmouk A. A., Savitch A. V., Tatur H. A., Grabner G., Kautek W. Influence of self-absorption of 213 nm radiation on laser treatment of cornea	80
Danilchik A. V., Vainilovich A. G., Rzheutski M. V., Shpak P. V., Borushko V. V., Trofimov Y. V., Tsvirko V. I., Lutsenko E. V., Yablonskii G. P. Simulation of temperature distribution in the InGaN led matrix with high density of radiation power	84
Korza E. V. Light Raman scattering enhancement by inorganic pigments with the use of gold and silver nanoparticles	90

Ropot A. I., Khilo N. A. Generation of Airy light beams diffracted by a sinusoidal phase grating	95
Markevich V. U., Chulkov R. V. Determination of the steady-state Raman gain coefficients of potassium-gadolinium tungstate at a wavelength of 532 nm	102
Ryzhevich A. A., Solonevich S. V., Khilo N. A., Balykin I. V. Transformation of conical laser beams in biaxial crystals	107
Kozlenkova O. A, Plavskaya L. G., Mikulich A. V., Leusenko I. A., Tretyakova A. I., Plavskii V. Yu. Photosensitizing effects of bilirubin on animal cells in culture	117
Tolkacheva E. A., Kholad V. N., Murin L. I. Transformation peculiarities of oxygen-containing centers in silicon upon annealing in the temperature range 450–700 °C : IR absorption studies	124

МАТЭМАТЫКА

УДК 517.956.3

В. И. КОРЗЮК^{1,2}

ЗАДАЧИ СОПРЯЖЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПУАССОНА

¹*Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь,*

²*Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь,*

e-mail: korzyuk@bsu.by

В пространствах Соболева и их подпространствах с учетом граничных условий доказываются теоремы существования обобщенных решений задач сопряжения уравнений Пуассона. В процессе доказательства используются операторы осреднения с переменным шагом.

Ключевые слова: обобщенное решение, уравнение Пуассона, задача сопряжения, операторы осреднения с переменным шагом, эллиптическое уравнение.

V. I. KORZYUK^{1,2}

PROBLEMS OF CONJUGATION OF THE POISSON EQUATIONS

¹*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus*

²*Belarusian State University, Minsk, Belarus, e-mail: korzyuk@bsu.by*

In Sobolev spaces and its subspaces considering boundary conditions theorems of existence of the generalized solutions of the conjugation problems of the Poisson equation were proved. In these proofs the mollifiers operators with variable step are used.

Keywords: generalized solution, Poisson equation, conjugation problem, mollifiers operators with variable step, elliptic equation.

Введение. Задачи сопряжения эллиптических уравнений возникают при описании многих стационарных процессов в средах с резко отличающимися физическими свойствами. Эти свойства характеризуются тем, что при переходе от одной среды к другой искомые функции и их производные терпят резкие изменения, которые математически выражаются записью через условия сопряжения. В работах [1, 2] рассмотрены граничные задачи для уравнения Пуассона и других эллиптических уравнений второго порядка в областях с достаточно кусочно-гладкими границами. Используя методику этих работ, докажем разрешимость задач сопряжения уравнений Пуассона.

1. Постановка задачи. Пусть Ω – ограниченная область n -мерного евклидова пространства \mathbb{R}^n переменных $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$, для которой справедлива формула Остроградского. Такой же гладкостью обладает и гиперповерхность γ , которая делит область Ω на две подобласти $\Omega^{(1)}$ и $\Omega^{(2)}$.

Для функций $u^{(j)} : \Omega^{(j)} \ni \mathbf{x} \rightarrow u^{(j)}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ рассмотрим уравнения типа Пуассона

$$A^{(j)}u^{(j)} = \Delta u^{(j)} - a^{(j)}(\mathbf{x})u^{(j)} = f^{(j)}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega^{(j)}, j=1,2, \quad (1)$$

где Δ – оператор Лапласа и $\Delta = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2 = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$. Если $a^{(j)} \equiv 0$, то уравнения (1) – уравнения Пуассона.

Обозначим через $C^k(G)$ множество непрерывно дифференцируемых функций до порядка $k \in \mathbb{N}$, заданных на G , где G – области $\Omega^{(j)}$ или их замыкания $\overline{\Omega^{(j)}}$, $j = 1, 2$. В уравнениях (1) функции $u^{(j)}$ принадлежат пересечению $C^2(\Omega^{(j)}) \cap C^1(\overline{\Omega^{(j)}})$.

На границе $\partial\Omega$ области Ω к уравнениям (1) присоединяется одно из граничных условий

$$u(\mathbf{x} | \mathbf{x} \in \partial\Omega) = \varphi(\mathbf{x}), \quad (2)$$

$$\partial_{\mathbf{v}} u(\mathbf{x} | \mathbf{x} \in \partial\Omega) = \psi(\mathbf{x}), \quad (3)$$

где $\partial_{\mathbf{v}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}$ – производная по единичной внешней относительно области Ω нормали $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ в точках $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ гиперповерхности $\partial\Omega$. На границе раздела $\gamma = \overline{\Omega^{(1)}} \cap \overline{\Omega^{(2)}}$ областей $\Omega^{(j)}$ ($j = 1, 2$) задаются условия сопряжения

$$\begin{aligned} u^{(1)}(\mathbf{x} | \mathbf{x} \in \gamma) - k^{(0)} u^{(2)}(\mathbf{x} | \mathbf{x} \in \gamma) &= \psi^{(0)}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \gamma, \\ \partial_{\mathbf{v}} u^{(1)}(\mathbf{x} | \mathbf{x} \in \gamma) - k^{(1)} \partial_{\mathbf{v}} u^{(2)}(\mathbf{x} | \mathbf{x} \in \gamma) &= \psi^{(1)}(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (4)$$

где \mathbf{v} – единичная внешняя относительно подобластей $\Omega^{(j)}$ нормаль в точках \mathbf{x} гиперповерхности γ .

Таким образом, имеем две задачи сопряжения (1), (2), (4) и (1), (3), (4), которые условно назовем задачами \mathbf{D} и \mathbf{N} .

2. Вспомогательные утверждения. Обозначим через $H^2(\Omega^{(j)})$ пространство Соболева квадратично суммируемых в $\overline{\Omega^{(j)}}$ функций вместе с квадратично суммируемыми обобщенными производными первого и второго порядков. Пусть $\mathcal{H}^2(\Omega)$ – гильбертово пространство функций $u = u^{(j)}$, $\mathbf{x} \in \Omega^{(j)}$, ($j = 1, 2$), где $u^{(j)} \in H^2(\Omega^{(j)})$. Скалярное произведение $(u, v)_{\mathcal{H}^2(\Omega)}$ элементов $u, v \in \mathcal{H}^2(\Omega)$ определяется следующим образом:

$$(u, v)_{\mathcal{H}^2(\Omega)} = \sum_{j=1}^2 \sum_{|\alpha| \leq 2} (D^{\alpha} u^{(j)}, D^{\alpha} v^{(j)})_{L_2(\Omega^{(j)})}.$$

Здесь $D^{\alpha} u^{(j)}$ – производные порядка $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ и $D^{\alpha} u^{(j)} = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n} u^{(j)}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$, α_s – целые неотрицательные из \mathbb{R} числа, $s = 1, \dots, n$, $L_2(\Omega^{(j)})$ – пространство квадратично суммируемых на $\Omega^{(j)}$ функций.

Для доказательства корректной постановки названных задач используем теорему Рисса о представлении линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве [3, п. 17; 4, п. 6.1.3]. Для этого задачи запишем в виде интегральных равенств. Наша цель доказать существование решений, имеющих все обобщенные производные второго порядка.

Рассмотрим задачи \mathbf{D} и \mathbf{N} , когда граничные условия (2), (3) и условия сопряжения (4) являются однородными. Если эти условия являются неоднородными, то путем продолжения заданных функций $\varphi, \psi, \psi^{(j)}$ ($j = 1, 2$) и соответствующей замены искомой функции получим задачи \mathbf{D} и \mathbf{N} с однородными граничными условиями

$$u(\mathbf{x} | \mathbf{x} \in \partial\Omega) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad (5)$$

$$\partial_{\mathbf{v}} u(\mathbf{x} | \mathbf{x} \in \partial\Omega) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad (6)$$

и однородными условиями сопряжения

$$\begin{aligned} u^{(1)}(\mathbf{x} | \mathbf{x} \in \gamma) - k^{(0)} u^{(2)}(\mathbf{x} | \mathbf{x} \in \gamma) &= 0, \quad \mathbf{x} \in \gamma, \\ \partial_{\mathbf{v}} u^{(1)}(\mathbf{x} | \mathbf{x} \in \gamma) - k^{(1)} \partial_{\mathbf{v}} u^{(2)}(\mathbf{x} | \mathbf{x} \in \gamma) &= 0, \quad \mathbf{x} \in \gamma, \end{aligned} \quad (7)$$

где $k^{(j)}$ – некоторые константы, отличные от нуля, $j = 0, 1$.

Таким образом, теперь рассматриваемые задачи (1), (5)–(7) с однородными граничными условиями (5) или (6) и условиями сопряжения (7) отличаются друг от друга граничными условиями (5) и (6). Эти задачи условно будем называть задачей D_0 и задачей N_0 .

Запишем задачу D_0 в операторном виде

$$A^D u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad (8)$$

где $A^D u(\mathbf{x}) = A^{(j)} u^{(j)}(\mathbf{x})$, $u(\mathbf{x}) = u^{(j)}(\mathbf{x})$, $f(\mathbf{x}) = f^{(j)}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega^{(j)}$, $j = 1, 2$, $u^{(j)} \in C^2(\Omega^{(j)}) \cap C^1(\overline{\Omega^{(j)}})$, функция u удовлетворяет однородным условиям (5), (7). В этом случае будем говорить, что u принадлежит области определения $\mathcal{D}(A^D)$ оператора A^D уравнения (8).

Аналогично задачу N_0 рассматриваем как операторное уравнение

$$A^N u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad (9)$$

с областью определения $\mathcal{D}(A^N) = \left\{ u \mid u(\mathbf{x}) = u^{(j)}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega^{(j)}, u^{(j)} \in C^2(\Omega^{(j)}) \cap C^1(\overline{\Omega^{(j)}}) \right\}$, где u удовлетворяет условиям (6), (7). Здесь $A^N u(\mathbf{x}) = A^{(j)} u^{(j)}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega^{(j)}$, $j = 1, 2$.

Обозначим через $\mathcal{H}_{\text{гп}}^2(\Omega, D_0)$ подпространство гильбертова пространства $\mathcal{H}^2(\Omega)$, элементы которого почти всюду удовлетворяют условиям (5), (7). Аналогично $\mathcal{H}_{\text{гп}}^2(\Omega, N_0)$ – подпространство $\mathcal{H}^2(\Omega)$, элементы которого удовлетворяют условиям (6), (7).

Условие 1. Граница $\partial\Omega$ и поверхность раздела γ таковы, что замыкание множества $\mathcal{D}(A^D)$ по норме пространства $\mathcal{H}^2(\Omega)$ совпадает с пространством $\mathcal{H}_{\text{гп}}^2(\Omega, D_0)$.

Условие 2. Граница $\partial\Omega$ и гиперповерхность γ таковы, что замыкание множества $\mathcal{D}(A^N)$ по норме пространства $\mathcal{H}^2(\Omega)$ совпадает с пространством $\mathcal{H}_{\text{гп}}^2(\Omega, N_0)$.

Лемма 1. Для любых функций $u, v \in \mathcal{D}(A^D)$ или $u, v \in \mathcal{D}(A^N)$ существует такое число ρ , что справедливо равенство

$$\begin{aligned} & \left(\rho \Delta u^{(1)}, \Delta v^{(1)} \right)_{L_2(\Omega^{(1)})} + \left(\Delta u^{(2)}, \Delta v^{(2)} \right)_{L_2(\Omega^{(2)})} = \\ & = \sum_{k,l=1}^n \left(\rho \partial_{x_k} \partial_{x_l} u^{(1)}, \partial_{x_k} \partial_{x_l} v^{(1)} \right)_{L_2(\Omega^{(1)})} + \sum_{k,l=1}^n \left(\partial_{x_k} \partial_{x_l} u^{(2)}, \partial_{x_k} \partial_{x_l} v^{(2)} \right)_{L_2(\Omega^{(2)})}. \end{aligned} \quad (10)$$

Доказательство. Пусть функции u и v принадлежат множеству $\mathcal{D}(A^D)$. В силу формулы Остроградского, интегрируя по частям, получим равенства

$$\begin{aligned} & \left(\Delta u^{(j)}, \Delta v^{(j)} \right)_{L_2(\Omega^{(j)})} = \int_{\partial\Omega^{(j)}} \left[\partial_{\mathbf{v}} u^{(j)} \Delta v^{(j)} - \sum_{k=1}^n \partial_{x_k} u^{(j)} \cdot \partial_{\mathbf{v}} \partial_{x_k} v^{(j)} \right] ds + \\ & + \sum_{k,l=1}^n \left(\partial_{x_k} \partial_{x_l} u^{(j)}, \partial_{x_k} \partial_{x_l} v^{(j)} \right)_{L_2(\Omega^{(j)})}, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (11)$$

В точках $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ и $\mathbf{x} \in \gamma$ для функций $u^{(j)}, v^{(j)}$, $j = 1, 2$, с помощью локальной декартовой системы $\{\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}^{(1)}, \dots, \boldsymbol{\tau}^{(n-1)}\}$ доказываются равенства

$$\left(\partial_{\mathbf{v}} u^{(j)} \Delta v^{(j)} - \sum_{k=1}^n \partial_{x_k} u^{(j)} \cdot \partial_{\mathbf{v}} \partial_{x_k} v^{(j)} \right)(\mathbf{x}) = \left(\partial_{\mathbf{v}} u^{(j)} \sum_{k=1}^{n-1} \partial_{\delta^{(k)}}^2 v^{(j)} - \sum_{k=1}^{n-1} \partial_{\delta^{(k)}} u^{(j)} \partial_{\mathbf{v}} \partial_{\delta^{(k)}} v^{(j)} \right)(\mathbf{x}), \quad (12)$$

где векторы $\boldsymbol{\tau}^{(1)}, \dots, \boldsymbol{\tau}^{(n-1)}$ находятся в касательных гиперплоскостях к гиперповерхностям $\partial\Omega$ и γ с началом в точках $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ или $\mathbf{x} \in \gamma$.

В силу условия (5) в точках $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ выражение (12) обращается в нуль.
Пусть теперь $\mathbf{x} \in \gamma$. Используя условия сопряжения (7), получим равенство

$$\begin{aligned} & \left(\rho \partial_{\mathbf{v}} u^{(1)} \sum_{k=1}^{n-1} \partial_{\tau^{(k)}}^2 v^{(1)} - \rho \sum_{k=1}^{n-1} \partial_{\tau^{(k)}} u^{(1)} \partial_{\mathbf{v}} \partial_{\tau^{(k)}} v^{(1)} \right) (\mathbf{x}) = \\ & = \left(\rho k^{(1)} \partial_{\mathbf{v}} u^{(2)} \sum_{k=1}^{n-1} k^{(0)} \partial_{\tau^{(k)}}^2 v^{(2)} - \rho k^{(0)} k^{(1)} \sum_{k=1}^{n-1} \partial_{\tau^{(k)}} u^{(2)} \partial_{\mathbf{v}} \partial_{\tau^{(k)}} v^{(2)} \right) (\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \gamma. \end{aligned} \quad (13)$$

Равенство (13) складываем с равенством (12) в случае $j = 2$. В результате получим соотношение

$$\begin{aligned} & \left(\rho \partial_{\mathbf{v}} u^{(1)} \Delta v^{(1)} - \rho \sum_{k=1}^n \partial_{x_k} u^{(1)} \partial_{\mathbf{v}} \partial_{x_k} v^{(1)} + \partial_{\mathbf{v}} u^{(2)} \Delta v^{(2)} - \sum_{k=1}^n \partial_{x_k} u^{(2)} \partial_{\mathbf{v}} \partial_{x_k} v^{(2)} \right) (\mathbf{x}) = \\ & = \left(\left(1 + \rho k^{(0)} k^{(1)} \right) \left[\partial_{\mathbf{v}} u^{(2)} \Delta v^{(2)} - \sum_{k=1}^n \partial_{\tau^{(k)}} u^{(2)} \partial_{\mathbf{v}} \partial_{x_k} v^{(2)} \right] \right) (\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \gamma. \end{aligned} \quad (14)$$

Число ρ в (14) выбираем таким, чтобы сумма $\left(1 + \rho k^{(0)} k^{(1)} \right)$ равнялась нулю. В результате соотношение (14) тоже будет равно нулю для любого $\mathbf{x} \in \gamma$.

Таким образом, отсюда в силу равенств (11)–(13) и получим доказываемое равенство (10) для любых функций $u, v \in \mathcal{D}(A^D)$.

Равенство (10) для любых функций $u, v \in \mathcal{D}(A^N)$ доказывается аналогично, при этом используются соотношения (11)–(14) и условия (6) и (7).

З а м е ч а н и е 1. Утверждения леммы 1 путем предельного перехода распространяются на любые функции $u, v \in \mathcal{H}_{\text{гп}}^2(\Omega, \mathbf{D}_0)$ или $u, v \in \mathcal{H}_{\text{гп}}^2(\Omega, N_\theta)$.

3. Задача \mathbf{D}_θ . Рассмотрим операторное уравнение (8) с областью определения $\mathcal{D}(A^D)$. Поскольку множество $\mathcal{D}(A^D)$ является плотным в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_{\text{гп}}^2(\Omega, \mathbf{D}_\theta)$, то уравнение (8) по непрерывности можно продолжить для любой функции $u \in \mathcal{H}_{\text{гп}}^2(\Omega, \mathbf{D}_\theta)$. Полученное продолжение запишем в виде операторного уравнения

$$\overline{A^D} u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad u \in \mathcal{D}(\overline{A^D}) = \mathcal{H}_{\text{гп}}^2(\Omega, \mathbf{D}_\theta). \quad (15)$$

Расширенный оператор $\overline{A^D}$ можно рассматривать и как замыкание оператора A^D из пространства $\mathcal{H}_{\text{гп}}^2(\Omega, \mathbf{D}_\theta)$ в пространство $L_2(\Omega)$.

Существование решения уравнения (15) докажем на основании утверждения теоремы Рисса о представлении линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве. Данный функционал введем следующим образом.

Введем оператор $B = \Delta - \lambda$ с областью определения $\mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(\overline{A^D}) = \mathcal{H}_{\text{гп}}^2(\Omega, \mathbf{D}_\theta)$. Уравнение (15) умножим на функцию $\mathbf{p} = (\rho, 1)$, где $\mathbf{p} = \rho$, если $\mathbf{x} \in \Omega^{(1)}$, и $\mathbf{p} = 1$, если $\mathbf{x} \in \Omega^{(2)}$. Число $\rho = - / k^{(0)} k^{(1)}$. Полученный результат $\mathbf{p} A^D(\mathbf{x})$ скалярно в $L_2(\Omega)$ умножим на $Bv(\mathbf{x})$, где $u, v \in \mathcal{H}_{\text{гп}}^2(\Omega, \mathbf{D}_\theta)$. В результате получим соотношение

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \left(\mathbf{p} \overline{A^D} u, Bv \right)_{L_2(\Omega)} = \rho \left(\Delta u^{(1)}, \Delta v^{(1)} \right)_{L_2(\Omega^{(1)})} + \left(\Delta u^{(2)}, \Delta v^{(2)} \right)_{L_2(\Omega^{(2)})} - \\ & - \rho \lambda \left(\Delta u^{(1)}, v^{(1)} \right)_{L_2(\Omega^{(1)})} - \lambda \left(\Delta u^{(2)}, v^{(2)} \right)_{L_2(\Omega^{(2)})} - \rho \left(\alpha^{(1)} u^{(1)}, \Delta v^{(1)} \right)_{L_2(\Omega^{(1)})} - \\ & - \left(\alpha^{(2)} u^{(2)}, \Delta v^{(2)} \right)_{L_2(\Omega^{(2)})} + \rho \lambda \left(\alpha^{(1)} u^{(1)}, v^{(1)} \right)_{L_2(\Omega^{(1)})} + \lambda \left(\alpha^{(2)} u^{(2)}, v^{(2)} \right)_{L_2(\Omega^{(2)})}. \end{aligned} \quad (16)$$

Л е м м а 2. Пусть $\alpha^{(j)} \in C^1(\overline{\Omega^{(j)}})$. Тогда для любых функций $u, v \in \mathcal{D}(\overline{A^D})$ и $\rho = -1/k^{(0)}k^{(1)}$ справедливы равенства

$$\rho(\Delta u, v)_{L_2(\Omega)} = - \sum_{k=1}^n (\partial_{x_k} u, \partial_{x_k} v)_{L_2(\Omega)}, \quad (17)$$

$$\rho(\alpha u, \Delta v)_{L_2(\Omega)} = - \sum_{k=1}^n (\alpha \partial_{x_k} u, \partial_{x_k} v)_{L_2(\Omega)} + \sum_{k=1}^n (\partial_{x_k} \alpha u, \partial_{x_k} v)_{L_2(\Omega)}, \quad (18)$$

где $\Delta u^{(x)} = \Delta u^{(j)}(x)$, если $x \in \Omega^{(j)}$, и $\partial_{x_k} u(x) = \partial_{x_k} u^{(j)}(x)$, если $x \in \Omega^{(j)}$, и т. д.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 2 аналогично доказательству леммы 1.

В силу леммы 1 и 2 значение $a(u, v)$ запишется в виде

$$\begin{aligned} a(u, v) = & \rho \sum_{|\alpha|=2} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L_2(\Omega)} + \rho \lambda \sum_{k=1}^n (\partial_{x_k} u, \partial_{x_k} v)_{L_2(\Omega)} + \rho \sum_{k=1}^n (\alpha \partial_{x_k} u, \partial_{x_k} v)_{L_2(\Omega)} + \\ & + \rho \lambda (\alpha u, v)_{L_2(\Omega)} - \sum_{k=1}^n (u \partial_{x_k} \alpha, \partial_{x_k} v)_{L_2(\Omega)}, \quad u, v \in \mathcal{H}_{\text{гр}}^2(\Omega, \mathbf{D}_0), \end{aligned} \quad (19)$$

где $D^\alpha u = D^\alpha u^{(j)}$, $\Delta u = \Delta u^{(j)}$, $\partial_{x_k} u = \partial_{x_k} u^{(j)}$, $\partial_{x_k} \alpha = \partial_{x_k} \alpha^{(j)}$ и т. д., если $x \in \Omega^{(j)}$, $j = 1, 2$.

Справедливо следующее утверждение, которое сформулируем в виде теоремы.

Т е о р е м а 1. Пусть функция α удовлетворяет условиям леммы 2 и $\alpha(x) \geq 0$. Если числа $k^{(j)}$, $j = 1, 2$, не равны нулю и разных знаков, то существует такое положительное число λ_0 , что для всех $\lambda \geq \lambda_0$ отображение

$$a : \mathcal{H}_{\text{гр}}^2(\Omega, \mathbf{D}_0) \times \mathcal{H}_{\text{гр}}^2(\Omega, \mathbf{D}_0) \ni u, v \rightarrow a(u, v) \in \mathbb{R} \quad (20)$$

является скалярным произведением на декартовом произведении $\mathcal{H}_{\text{гр}}^2(\Omega, \mathbf{D}_0) \times \mathcal{H}_{\text{гр}}^2(\Omega, \mathbf{D}_0)$ и на множестве $\mathcal{H}_{\text{гр}}^2(\Omega, \mathbf{D}_0)$ порождает гильбертово пространство $\tilde{\mathcal{H}}_a^2(\mathbf{D}_0)$, эквивалентное пространству $\mathcal{H}_{\text{гр}}^2(\Omega, \mathbf{D}_0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. На основании определения скалярного произведения проверим, что отображение (20) действительно удовлетворяет его условиям.

Согласно неравенству Коши – Буняковского в случае скалярного произведения в $L_2(\Omega)$, существует константа $C_1 > 0$, для которой, любого числа ε и каждого элемента $u \in \mathcal{H}_{\text{гр}}^2(\Omega, \mathbf{D}_0)$ выполняется оценка

$$\left| - \sum_{k=1}^n (u \partial_{x_k} \alpha, \partial_{x_k} u)_{L_2(\Omega)} \right| \leq \varepsilon \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{C_1}{\varepsilon} \sum_{k=1}^n \|\partial_{x_k} u\|_{L_2(\Omega)}^2. \quad (21)$$

Так как $k^{(j)}$ разных знаков, то $\rho > 0$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ за счет выбора λ_0 существует константа $C_2 > 0$, для которой и для элемента $u \in \mathcal{H}_{\text{гр}}^2(\Omega, \mathbf{D}_0)$ выполняется неравенство

$$a(u, v) \geq C_2 \sum_{k=1}^n \|\partial_{x_k} u\|_{L_2(\Omega)}^2 - \varepsilon \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 + \max\{1, \rho\} \lambda_0 \|\sqrt{\alpha} u\|_{L_2(\Omega)}^2. \quad (22)$$

Поскольку в (22) ε – любое положительное число, то $a(u, v) \geq 0$ для достаточно большого положительного числа λ_0 . Здесь использован тот факт, что если $\partial_{x_k} \alpha(x) \neq 0$, то в этих точках и $\alpha(x) \neq 0$ почти всюду.

Если $a(u, v) = 0$, то это означает, что

$$\sum_{|\alpha|=1,2} \|\partial_{x_k}^\alpha u\|_{L_2(\Omega)}^2 = 0.$$

Отсюда следует, что все обобщенные производные функции и первого и второго порядков равны нулю в Ω . Таким образом, $u = \text{const}$. Но поскольку функция $u \in \mathcal{H}_{\text{гр}}^2(\Omega)$, то она удовлетворяет однородному условию (5). Следовательно, $u = \text{const} = 0$ на Ω .

Остальные свойства проверяются непосредственной проверкой [4; 5, п. 6.1.2].

Далее, как известно, через квадратичную форму (18) вводится норма по формуле

$$\|u\|_{\tilde{\mathcal{H}}_a^2(\mathbf{D}_0)} = a(u, v)^{1/2}. \quad (23)$$

Таким образом, в отличие от пространства $H_{\text{гр}}^2(\Omega, \mathbf{D}_0)$ на множестве $\mathcal{H}_{\text{гр}}^2(\Omega, \mathbf{D}_0)$ с помощью нормы (23), (19) определяется новое гильбертово пространство $\tilde{\mathcal{H}}_a^2(\mathbf{D}_0)$. Но пространства $\mathcal{H}_{\text{гр}}^2(\Omega, \mathbf{D}_0)$ и $\tilde{\mathcal{H}}_a^2(\mathbf{D}_0)$ представляют фактически одно и то же пространство, так как их нормы эквивалентны, т. е. существуют положительные константы C_3 и C_4 , для которых выполняются неравенства

$$C_3 \|u\|_{\tilde{\mathcal{H}}_a^2(\mathbf{D}_0)} \leq \|u\|_{\mathcal{H}_{\text{гр}}^2(\Omega, \mathbf{D}_0)} \leq C_4 \|u\|_{\tilde{\mathcal{H}}_a^2(\Omega)} \quad (24)$$

для любого элемента $u \in \mathcal{H}_{\text{гр}}^2(\Omega, \mathbf{D}_0)$.

Доказательство неравенств (24) без принципиальных изменений проводится по схеме доказательства аналогичного утверждения в [4, п. 1.2] или в [5, п. 5].

Тем самым теорема 1 доказана.

О п р е д е л е н и е 1. Функция $u \in \mathcal{H}_{\text{гр}}^2(\Omega, \mathbf{D}_0)$ называется обобщенным решением задачи \mathbf{D}_0 или задачи (1), (5), (7), если она удовлетворяет уравнению

$$a(u, v) = (\rho f, \bar{B}v)_{L_2(\Omega)} \quad (25)$$

для любой функции $v \in \mathcal{H}_{\text{гр}}^2(\Omega, \mathbf{D}_0)$ и некоторой заданной функции $f \in L_2(\Omega)$, $\lambda \geq \lambda_0$.

Уравнение (25) согласно (16) представляется в виде

$$\rho \left(\overline{A^D} u - f, \bar{B}v \right)_{L_2(\Omega)} = 0. \quad (26)$$

Очевидно, уравнения (15) и (26) будут эквивалентными, если множество значений $\Re(\bar{B})$ оператора \bar{B} будет плотным в $L_2(\Omega)$. Прежде чем доказывать последнее утверждение, рассмотрим сопряженную задачу для оператора \bar{B} , т. е.

$$\bar{B}w = g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad w \in \mathcal{H}^2(\Omega), \quad (27)$$

$$w(\mathbf{x} | \mathbf{x} \in \partial\Omega) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad (28)$$

$$k^{(1)} w^{(1)}(\mathbf{x} | \mathbf{x} \in \gamma) + w^{(2)}(\mathbf{x} | \mathbf{x} \in \gamma) = 0, \quad (29)$$

$$k^{(0)} \partial_{\mathbf{v}} w^{(1)}(\mathbf{x} | \mathbf{x} \in \gamma) + \partial_{\mathbf{v}} w^{(2)}(\mathbf{x} | \mathbf{x} \in \gamma) = 0.$$

Для любых функций $v \in \mathcal{H}_{\text{гр}}^2(\Omega, \mathbf{D}_0)$ и $w \in \mathcal{H}^2(\Omega)$, удовлетворяющих условиям (28) и (29), справедливо равенство

$$(\bar{B}v, w)_{L_2(\Omega)} = (v, \bar{B}w)_{L_2(\Omega)}. \quad (30)$$

Обозначим через $H^1(\Omega)$ гильбертово пространство квадратично суммируемых в $L_2(\Omega)$ функций вместе с квадратично суммируемыми обобщенными производными в $L_2(\Omega^{(j)})$ первого порядка. Скалярное произведение в $H^1(\Omega)$ задается формулой

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq 1} \sum_{j=1}^2 \left(D^\alpha u^{(j)}, D^\alpha v^{(j)} \right)_{L_2(\Omega^{(j)})}.$$

Теорема 2. Пусть коэффициенты $k^{(j)}$ ($j = 0, 1$) в условиях (29) разных знаков. Для оператора B , где $\lambda \geq 0$, справедливо энергетическое неравенство

$$\|w\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|\bar{B}w\|_{L_2(\Omega)} \quad (31)$$

для любой функции $w \in \mathcal{H}^2(\Omega)$, удовлетворяющей условиям (28), (29), где постоянная $C > 0$ не зависит от w , $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ – значение нормы элементов в пространстве $H^1(\Omega)$.

Доказательство. Пусть функция $w \in \mathcal{H}^2(\Omega)$ и удовлетворяет условиям (28), (29). Произведение $w^{(j)}Bw^{(j)}$ проинтегрируем по области $\Omega^{(j)}$, $j = 1, 2$. В результате получим соотношения

$$\left(Bw^{(j)}, w^{(j)} \right)_{L_2(\Omega^{(j)})} = \int_{\partial\Omega^{(j)}} w^{(j)} \cdot \partial_{\mathbf{v}} w^{(j)} ds - \sum_{k=1}^n \left\| \partial_{x_k} w^{(j)} \right\|_{L_2(\Omega^{(j)})}^2 - \lambda \left\| w^{(j)} \right\|_{L_2(\Omega^{(j)})}^2, \quad j = 1, 2. \quad (32)$$

Равенство (32) в случае $j = 2$ умножаем на число $\rho = -1/k^{(0)}k^{(1)}$. Полученные новые равенства для $j = 1, 2$ складываем друг с другом. Используя условия (28) и (29), в результате будем иметь соотношение

$$\rho \left(\sum_{k=1}^n \left\| \partial_{x_k} w \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + \lambda \left\| w \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \right) = -\rho(w, \bar{B}w)_{L_2(\Omega)}, \quad (33)$$

где $\rho = 1$, $\partial_{x_k} w = \partial_{x_k} w^{(1)}$, $\bar{B}w = Bw^{(1)}$, если $\mathbf{x} \in \Omega^{(1)}$; $\rho = \rho$, $\partial_{x_k} w = \partial_{x_k} w^{(2)}$, $\bar{B}w = Bw^{(2)}$, если $\mathbf{x} \in \Omega^{(2)}$ и т. д. Для оценки сверху правой части (33) применяем неравенство Коши – Буняковского с ε . После несложных преобразований получаем доказываемое неравенство (31).

Рассмотрим оператор B из пространства $\mathcal{H}_{\text{гп}}^1(\Omega, \mathbf{D}_0)$ в $L_2(\Omega)$ с областью определения $\mathcal{D}(B) = \mathcal{H}_{\text{гп}}^2(\Omega, \mathbf{D}_0)$, где $\mathcal{H}_{\text{гп}}^1(\Omega, \mathbf{D}_0)$ – подпространство пространства $\mathcal{H}^1(\Omega)$ и является пополнением множества $\mathcal{H}_{\text{гп}}^2(\Omega, \mathbf{D}_0)$ по норме

$$\|\cdot\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)} : \mathcal{H}_{\text{гп}}^2(\Omega, \mathbf{D}_0) \ni v \rightarrow \|v\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)} = (v, v)_{\mathcal{H}^1(\Omega)}^{1/2}.$$

Согласно определению замыкаемых операторов [3], оператор $B : \mathcal{H}^1(\Omega, \mathbf{D}_0) \ni v \rightarrow L_2(\Omega)$ допускает замыкание тогда и только тогда, если из условия $v_m \rightarrow 0$ в $\mathcal{H}_{\text{гп}}^1(\Omega, \mathbf{D}_0)$ следует сходимость к нулю последовательности $\{Bv_m\}_{m=1}^{\infty}$ по норме пространства $L_2(\Omega)$, т. е. $\|Bv_m\|_{L_2(\Omega)} \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$, где $\{v_m\}_{m=1}^{\infty}$ – последовательность функций $v_m \in \mathcal{H}_{\text{гп}}^2(\Omega, \mathbf{D}_0)$.

То, что оператор $B : \mathcal{H}_{\text{гп}}^1(\Omega, \mathbf{D}_0) \rightarrow L_2(\Omega)$ допускает замыкание, доказывается непосредственной проверкой сходимости последовательности Bv_m к нулю, если $v_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Замкнутый оператор, полученный замыканием оператора $B : \mathcal{H}_{\text{гп}}^1(\Omega, \mathbf{D}_0) \rightarrow L_2(\Omega)$, обозначим через \bar{B} . Справедлива следующая

Теорема 3. Для замкнутого оператора $\bar{B} : \mathcal{H}_{\text{гп}}^1(\Omega, \mathbf{D}_0) \rightarrow L_2(\Omega)$ справедливо энергетическое неравенство

$$\|v\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)} \leq C \|\bar{B}v\|_{L_2(\Omega)}, \quad v \in \mathcal{D}(\bar{B}), \quad (34)$$

где постоянная C не зависит от v , $\lambda \geq 0$.

Неравенство (34) доказывается сначала для гладких функций, например $v \in \mathcal{H}_{\text{гп}}^2(\Omega, \mathbf{D}_0)$. Доказательство проводится по схеме доказательства энергетического неравенства (31). Затем с помощью предельного перехода неравенство (34) получаем для любой функции $v \in \mathcal{D}(\bar{B})$.

На основании леммы 1 и схемы доказательства неравенства (31) доказывается энергетическое неравенство

$$\|v\|_{\mathcal{H}^2(\Omega)} \leq C \|Bv\|_{L_2(\Omega)}, \quad v \in \mathcal{H}_{\text{гп}}^2(\Omega, \mathbf{D}_0), \quad (35)$$

для оператора $B: \mathcal{H}_{\text{гп}}^2(\Omega, \mathbf{D}_0) \ni v \rightarrow Bv \in L_2(\Omega)$ и $\lambda \geq 0$. Если $\lambda = 0$, то следует воспользоваться методикой доказательства теоремы 1, где $a(u, v) = (\rho \Delta u, \Delta v)_{L_2(\Omega)}$.

Таким образом, оператор B можно рассматривать из пространств $\mathcal{H}_{\text{гп}}^2(\Omega, \mathbf{D}_0)$ или $\mathcal{H}_{\text{гп}}^1(\Omega, \mathbf{D}_0)$ в $L_2(\Omega)$. В первом случае он является непрерывным, а во втором – допускает замыкание \bar{B} .

Докажем плотность множества значений $\mathfrak{R}(B)$ оператора B в пространстве $L_2(\Omega)$.

Теорема 4. Множество значений $\mathfrak{R}(B)$ оператора $B: \mathcal{H}_{\text{гп}}^1(\Omega, \mathbf{D}_0) \ni v \rightarrow Bv \in L_2(\Omega)$ является плотным в $L_2(\Omega)$.

Доказательство. Пусть w – произвольная функция из $L_2(\Omega)$, к которой ортогональны все значения оператора B , т. е. выполняется равенство

$$(Bv, w)_{L_2(\Omega)} = 0 \quad (36)$$

для любой функции $v \in \mathcal{H}_{\text{гп}}^2(\Omega, \mathbf{D}_0)$. Поскольку имеется энергетическое неравенство (35), то, согласно теореме 3.4.1 монографии [6], равенство (36) эквивалентно равенству

$$(J_{(k)} Bv, w)_{L_2(\Omega)} = 0, \quad (37)$$

где $J_{(k)}$ – операторы осреднения с переменным шагом, сохраняющие граничные условия (6) на $\partial\Omega$ и условия сопряжения (7) на γ . В скалярном произведении (37) оператор осреднения $J_{(k)}$ перебрасываем на функцию w . В результате получим равенство

$$(Bv, J_{(k)}^* w)_{L_2(\Omega)} = 0, \quad (38)$$

где $J_{(k)}^*$ – сопряженный оператор по отношению к оператору $J_{(k)}$. Функция $J_{(k)}^* w$ является гладкой. Поэтому, интегрируя по частям, равенство (38) представим в виде

$$(v, BJ_{(k)}^* w)_{L_2(\Omega)} M(v, J_{(k)}^* w; \partial\Omega^{(j)}, \gamma) = 0. \quad (39)$$

В результате интегрирования по частям в левой части соотношения (39) присутствуют слагаемые, заданные на $\partial\Omega^{(j)}$ и без γ , из которых следуют граничные условия. Поскольку (38) выполняется для любой функции v из плотного в $L_2(\Omega)$ множества $\mathcal{H}_{\text{гп}}^2(\Omega, \mathbf{D}_0)$, то эти граничные условия обращаются в нуль, и для функций $J_{(k)}^* w$ получаем однородное уравнение (27) и однородные условия (28) и (29). В результате предельного перехода равенство (39) распространяется для любых функций $v \in L_2(\Omega)$. Полагаем $v = J_{(k)}^* w$ в соотношении (39). Полученное равенство

$$(J_{(k)}^* w, BJ_{(k)}^* w)_{L_2(\Omega)} = 0$$

порождает неравенство (31), из которого следует, что $w = 0$ в $L_2(\Omega)$.

Тем самым теорема 4 доказана.

Как было сказано ранее, из теоремы 4 следует, что уравнения (15) и (26) равносильны, где уравнение (26) выполняется для любой функции $v \in \mathcal{H}_{\text{гп}}^2(\Omega, \mathbf{D}_0)$.

Правая часть уравнения (29)

$$(\rho f, \bar{B}v)_{L_2(\Omega)} = l^f(v)$$

представляет собой линейный функционал относительно $v \in \mathcal{H}_{\text{гп}}^2(\Omega, \mathbf{D}_0)$. Если $f \in L_2(\Omega)$, то этот функционал является непрерывным, так как

$$|l^f(v)| \leq C \|f\|_{L_2(\Omega)} \|v\|_{\mathcal{H}^2(\Omega)}.$$

В силу теоремы 1 и теоремы Рисса существует единственный элемент $u \in \mathcal{H}_{\text{гр}}^2(\Omega, \mathbf{D}_\theta)$, через который и скалярное произведение $a(u, v)$ единственным образом представляется значение функционала $l^f(v)$, т. е. справедливо уравнение (25) или, в силу теоремы 4, уравнение (1).

Результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 5. Пусть $\alpha^{(j)} \in C^1(\Omega^{(j)})$ и коэффициенты $k^{(0)}$ и $k^{(1)}$ условий сопряжения (4) не равны нулю и разных знаков. Тогда существует единственный элемент $u \in \mathcal{H}_{\text{гр}}^2(\Omega, \mathbf{D}_\theta)$, который является обобщенным решением задачи \mathbf{D}_θ ((1), (5), (7)) в смысле определения 1 или решением этой задачи.

З а м е ч а н и е 2. Теоремы 3, 4 и неравенство (35) позволяют утверждать, что для любой функции $g \in L_2(\Omega)$ существуют единственные сильные решения задачи (27)–(29) из пространств $\mathcal{H}_{\text{гр}}^i(\Omega, \mathbf{D}_\theta)$, $j = 1, 2$.

4. Задача (1), (2), (4). Данная задача отличается от \mathbf{D}_θ тем, что здесь граничные условия и условия сопряжения неоднородные. Задача (1), (2), (4) сводится к \mathbf{D}_θ следующим образом. Сначала рассмотрим задачу (1), (2), (7). Если граница $\partial\Omega$ принадлежит классу C^2 и находится на положительном расстоянии от границы раздела γ , функция φ из класса $C^2(\partial\Omega)$ (см. [5, гл. III, § 4]), то тогда существует продолжение Φ функции φ на все области Ω таким образом, что $\Phi \in C^2(\bar{\Omega})$ и $\Phi = 0$ для всех $\mathbf{x} \in \gamma$. С помощью замены $w = u - \Phi$ задача (1), (2), (7) сведется к задаче \mathbf{D}_θ .

В общем случае задачи (1), (2), (4) автору не известны результаты о продолжении функций, которые прямо указывали бы на продолжение, которое при подстановке в условия (2), (4) давало бы значения функций φ , $\psi^{(0)}$ и $\psi^{(1)}$. Здесь требуются дополнительные исследования, и особенно в случае, когда пересечение $\partial\Omega$ с γ не пустое множество.

5. Задача N_θ . С помощью формы $a(u, v)$, определяемой правой частью (18), изучается и задача сопряжения N_θ с однородным условием Неймана (6).

Обозначим через $\mathcal{H}_{\text{гр}}^2(\Omega, N_\theta)$ подпространство пространства $\mathcal{H}^2(\Omega)$, элементы которого удовлетворяют однородным условиям (6), (7). Для данного множества $\mathcal{H}_{\text{гр}}^2(\Omega, N_\theta)$ справедлив аналог теоремы 1.

Теорема 6. Пусть функции $\alpha^{(j)}$ уравнения (1) таковы, что $\alpha^{(j)} \in C^1(\bar{\Omega}^{(j)})$, $\alpha^{(j)} \geq 0$,

$$\int_{\Omega} \alpha(\mathbf{x}) dx \neq 0, \quad (40)$$

для чисел $k^{(j)}$, $j = 1, 2$, произведение $k^{(1)}k^{(2)} < 0$. Тогда существует такое положительное число λ_0 , что для всех $\lambda \geq \lambda_0$ отображение

$$a : \mathcal{H}_{\text{гр}}^2(\Omega, N_\theta) \times \mathcal{H}_{\text{гр}}^2(\Omega, N_\theta) \ni u, v \rightarrow a(u, v) \in \mathbb{R}$$

является скалярным произведением на декартовом произведении $\mathcal{H}_{\text{гр}}^2(\Omega, N_\theta) \times \mathcal{H}_{\text{гр}}^2(\Omega, N_\theta)$, а на множестве $\mathcal{H}_{\text{гр}}^2(\Omega, N_\theta)$ порождает гильбертово пространство $\tilde{\mathcal{H}}_a^2(N_\theta)$, эквивалентное пространству $\mathcal{H}_{\text{гр}}^2(\Omega, N_\theta)$.

Доказательство данной теоремы проводится по схеме доказательства теоремы 1. Однако в отличие от того доказательства здесь используется условие (40), чтобы показать, что $a(u, u) = 0$ тогда и только тогда, когда $u = 0$ в $L_2(\Omega)$.

Для оператора $B : \mathcal{H}_{\text{гр}}^2(\Omega, N_\theta) \ni v \rightarrow Bv \in L_2(\Omega)$ справедлива теорема 4.

О п р е д е л е н и е 2. Функция $u \in \mathcal{H}_{\text{гр}}^2(\Omega, N_\theta)$ называется обобщенным решением задачи N_θ или задачи (1), (6), (7), если она удовлетворяет уравнению (25) для любой функции $v \in \mathcal{H}_{\text{гр}}^2(\Omega, N_\theta)$, $\lambda \geq \lambda_0$ и некоторой заданной функции $f \in L_2(\Omega)$.

Теорема 7. Пусть выполняются условия теоремы 6. Тогда существует единственный элемент $u \in \mathcal{H}_{\text{гр}}^2(\Omega, N_\theta)$, который является обобщенным решением задачи N_θ ((1), (6), (7)) в смысле определения 2 или решением задачи (1), (6), (7).

Доказательство теоремы 7 является фактически доказательством теоремы 5.

Пусть теперь $\alpha(\mathbf{x}) \equiv 0$, т. е. условие (40) не выполняется. В этом случае квадратичная форма (19) для функций $u, v \in \mathcal{H}_{\text{гр}}^2(\Omega, N_\theta)$ не будет скалярным произведением, так как не будет выполняться условие: значение $a(u, u) = 0$ тогда и только тогда, когда $u = 0$ в $\mathcal{H}_{\text{гр}}^2(\Omega, N_\theta)$.

Видоизменим соотношение (19) путем прибавления и вычитания слагаемого $(u, v)_{L_2(\Omega)}$. В результате получим новую форму $\tilde{a}(u, v) = a(u, v) + (u, v)_{L_2(\Omega)}$, через которую определяется решение задачи N_θ как решение уравнения

$$\tilde{a}(u, v) - (u, v)_{L_2(\Omega)} = (f, Bv)_{L_2(\Omega)} \quad (41)$$

для некоторой заданной функции $f \in L_2(\Omega)$, если v – любая функция из $\mathcal{H}_{\text{гр}}^2(\Omega, N_\theta)$. В данном случае форма $\tilde{a}(u, v)$ будет скалярным произведением, которое на множестве $\mathcal{H}_{\text{гр}}^2(\Omega, N_\theta)$ порождает гильбертово пространство $\mathcal{H}_{\tilde{a}}^2(N_\theta)$, норма которого эквивалентна норме пространства $\mathcal{H}_{\text{гр}}^2(\Omega, N_\theta)$.

Рассматривая отображения $v \rightarrow (u, v)_{L_2(\Omega)}$ и $v \rightarrow (f, Bv)_{L_2(\Omega)}$ как линейные непрерывные функционалы, получим равенства

$$(u, v)_{L_2(\Omega)} = (\mathcal{K}u, v)_{\mathcal{H}_{\tilde{a}}^2}, \quad (f, Bv)_{L_2(\Omega)} = (\mathcal{F}, v)_{\mathcal{H}_{\tilde{a}}^2}, \quad (42)$$

где \mathcal{K} – вполне непрерывный оператор в $\mathcal{H}_{\tilde{a}}^2(N_\theta)$, элемент $\mathcal{F} \in \mathcal{H}_{\tilde{a}}^2(N_\theta)$ определяется единственным образом через элемент $f \in L_2(\Omega)$. Согласно (41) и (42), задачу N_θ можно рассматривать как решение уравнения в пространстве $\mathcal{H}_{\tilde{a}}^2(N_\theta)$ или в $\mathcal{H}_{\text{гр}}^2(\Omega, N_\theta)$:

$$u - \mathcal{K}u = \mathcal{F} \quad (43)$$

с вполне непрерывным оператором \mathcal{K} . Согласно альтернативе Фредгольма, уравнение (43) разрешимо тогда и только тогда, когда \mathcal{F} ортогонально решению однородного уравнения

$$w - \mathcal{K}^*w = 0, \quad (44)$$

где $\mathcal{K}^* = \mathcal{K}$ – сопряженный по отношению к \mathcal{K} оператор. Решая уравнение (44), получим $w^{(0)} = (k^{(0)}, 1)$.

Таким образом, уравнение (43) разрешимо тогда и только тогда, когда

$$\left(\mathcal{F}, w^{(0)} \right)_{\mathcal{H}_{\tilde{a}}^2(N_\theta)} = \left(f, Bw^{(0)} \right)_{L_2(\Omega)} = k^{(0)} \int_{\Omega^{(1)}} f^{(1)}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\Omega^{(2)}} f^{(2)}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0. \quad (45)$$

Теорема 8. Если $f \in L_2(\Omega)$, $\partial\Omega$ и γ – кусочно-гладкие гиперповерхности, $\Omega^{(j)}$ – ограниченные в \mathbb{R}^n области, коэффициенты $\alpha^{(j)}(\mathbf{x}) \equiv 0$ уравнения (1), то обобщенное решение $u \in \mathcal{H}_{\text{гр}}^2(\Omega, N_\theta)$ в смысле определения 2 задачи N_θ тогда и только тогда, когда f удовлетворяет условию (45).

Доказательство следует из предыдущих рассуждений. Более подробно аналогичное доказательство для задачи Неймана уравнения Пуассона можно найти в [4, п. 6.2] или в [5].

В общем случае задачу (1), (3), (4) можно свести к задаче N_θ , если предварительно найти продолжение $\Phi(\mathbf{x})$, которое удовлетворяло бы неоднородным условиям (3) и (4). Но для этой задачи можно ввести обобщенное решение в другом пространстве.

6. Задача (1), (2), (4). Обозначим через $\mathcal{H}_{\text{гп}}^1(\Omega, N)$ подпространство пространства $\mathcal{H}^1(\Omega)$, элементы которого удовлетворяют первому условию сопряжения из (7). Для функций $u, v \in \mathcal{H}_{\text{гп}}^1(\Omega, N) \cap \mathcal{H}^2(\Omega)$ рассмотрим скалярные произведения

$$\begin{aligned} \left(A^{(j)} u^{(j)}, v^{(j)} \right)_{L_2(\Omega^{(j)})} &= \int_{\partial\Omega^{(j)}} \partial_{\mathbf{v}} u^{(j)} \cdot v^{(j)} ds - \sum_{k=1}^n \left(\partial_{x_k} u^{(j)}, \partial_{x_k} v^{(j)} \right)_{L_2(\Omega)} - \\ &- \left(\alpha u^{(j)}, v^{(j)} \right)_{L_2(\Omega)}, \quad j=1,2. \end{aligned} \quad (46)$$

Первое уравнение ($j=1$) (46) умножаем на $\rho = -1/k^{(0)}k^{(1)}$ и складываем со вторым ($j=2$). В результате получим соотношение

$$\begin{aligned} a^1(u, v) &= \sum_{k=1}^n \rho(\partial_{x_k} u, \partial_{x_k} v)_{L_2(\Omega)} + \rho(\alpha u, v)_{L_2(\Omega)} = \\ &= \rho(\Psi, v)_{L_2(\partial\Omega)} - \rho k^{(0)} \left(\Psi^{(1)}, v^{(2)} \right)_{L_2(\gamma)} - \rho(f, v)_{L_2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (47)$$

Лемма 3. Пусть выполняются условия теоремы 6. Тогда квадратичная форма левой части (47) представляет скалярное произведение на множестве $\mathcal{H}_{\text{гп}}^1(\Omega, N)$.

Доказательство проводится непосредственной проверкой условий скалярного произведения.

Обозначим через $\mathcal{H}_{a_1}^1(\Omega, N)$ подпространство пространства $\mathcal{H}^1(\Omega)$, норма которого определяется через скалярное произведение $a^1(u, v)$. Нетрудно поверить, что нормы пространств $\mathcal{H}_{\text{гп}}^1(\Omega, N)$ и $\mathcal{H}_{a_1}^1(\Omega, N)$ эквивалентны. Отсюда следует

Утверждение 1. Пространства $\mathcal{H}_{\text{гп}}^1(\Omega, N)$ и $\mathcal{H}_{a_1}^1(\Omega, N)$ с точностью до эквивалентных норм являются одним пространством.

Для доказательства необходимо установить эквивалентность норм. Это легко делается, если выписать значения норм и применить неравенство Коши – Буняковского.

Введем обозначение

$$\mathcal{F}(v) = \rho(\Psi, v)_{L_2(\partial\Omega)} - \rho k^{(0)} \left(\Psi^{(1)}, v^{(2)} \right)_{L_2(\gamma)} - \rho(f, v)_{L_2(\Omega)}. \quad (48)$$

Соотношение (48) можно рассматривать как значение линейного непрерывного функционала в пространстве $\mathcal{H}_{a_1}^1(\Omega, N)$ или $\mathcal{H}_{\text{гп}}^1(\Omega, N)$, если $\Psi \in L_2(\partial\Omega)$, $\Psi^{(1)} \in L_2(\gamma)$ и $f \in L_2(\Omega)$.

Определение 3. Обобщенным решением задачи (1), (3), (4), где первое условие сопряжения в (4) является однородным, называется функция $u \in \mathcal{H}_{\text{гп}}^1(\Omega, N)$, которая удовлетворяет уравнению

$$a^1(u, v) = \mathcal{F}(v) \quad (49)$$

для любой функции $v \in \mathcal{H}_{\text{гп}}^1(\Omega, N)$.

Теорема 9. Пусть выполняются условия теоремы 6 и, кроме этого, заданные функции $\Psi \in L_2(\partial\Omega)$, $\Psi^{(1)} \in L_2(\gamma)$ и $f \in L_2(\Omega)$. Тогда существует единственное из пространства $\mathcal{H}_{\text{гп}}^1(\Omega, N)$ обобщенное в смысле определения 3 решение и справедлива оценка

$$\|u\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)} \leq C \left(\|\Psi\|_{L_2(\partial\Omega)} + \|\Psi^{(1)}\|_{L_2(\gamma)} + \|f\|_{L_2(\Omega)} \right). \quad (50)$$

Доказательство. Выражение (48) рассматривается как значение линейного функционала. Доказывается путем критерия непрерывности, что функционал

$$\mathcal{F} : \mathcal{H}_a^1(\Omega, N) \ni v \rightarrow \mathcal{F}(v)$$

является непрерывным. В силу теоремы Рисса существует единственный элемент $u \in \mathcal{H}_a^1(\Omega, N)$, для которого выполняется равенство (49) и оценка (50).

Теорема 10. Если $\alpha(\mathbf{x}) \equiv 0$ и функции $\psi \in L_2(\partial\Omega)$, $\psi^{(1)} \in L_2(\gamma)$, $f \in L_2(\Omega)$, то обобщенное решение $u \in \mathcal{H}_{\text{гп}}^1(\Omega, N)$ существует тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\rho \int_{\partial\Omega} \psi(\mathbf{x}) ds - \rho k^{(0)} \int_{\gamma} \psi^{(1)}(\mathbf{x}) ds = \rho \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) dx. \quad (51)$$

При этом решение определяется с точностью до константы C в том смысле, что $C = (C^{(1)}, C^{(2)})$, где $C^{(1)} = k^{(0)}C$, $C^{(2)} = C$ и $C = C^{(j)}$, если $\mathbf{x} \in \Omega^{(j)}$.

Если и первое условие сопряжения (4) является также неоднородным, то этот случай сводится к предыдущему случаю. Пусть $\psi^{(0)} \in C^1(\partial\Omega)$. Тогда существует [5] продолжение $\Psi^{(1)}(\mathbf{x}) \in C^1(\Omega^{(1)})$ на $\Omega^{(1)}$ значения $1/2\psi^{(0)}(\mathbf{x})$. Аналогично существует продолжение $\Psi^{(2)}(\mathbf{x})$ на $\Omega^{(2)}$ функции $-1/2k^{(0)}\psi^{(0)}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \gamma$. Очевидно, функция $\Psi(\mathbf{x}) = (\Psi^{(1)}(\mathbf{x}), \Psi^{(2)}(\mathbf{x}))$ удовлетворяет неоднородному условию

$$\Psi^{(1)}(\mathbf{x} | \mathbf{x} \in \gamma) - k^{(0)}\Psi^{(2)}(\mathbf{x} | \mathbf{x} \in \gamma) = \psi^{(0)}(\mathbf{x}).$$

Делая замену $w(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) - \Psi(\mathbf{x})$ относительно функции w , приходим к только что рассмотренному случаю, так как

$$w^{(1)}(\mathbf{x} | \mathbf{x} \in \gamma) - k^{(0)}w^{(2)}(\mathbf{x} | \mathbf{x} \in \gamma) = 0.$$

Заключение. Рассмотрены задачи сопряжения уравнений Пуассона. Условия сопряжения являются неоднородными и представляют собой резкое изменение решения и его производной по нормали на границе раздела подобластей. Эти изменения представляют собой конечные разрывы. На границе заданных областей задается либо условие Дирихле, либо условие Неймана.

Для указанных задач рассмотрены обобщенные решения в пространствах Соболева. Методами функционального анализа с использованием операторов осреднения с переменным шагом доказываются теоремы существования и указываются условия, при которых эти решения существуют. Обобщенные решения имеют все обобщенные производные до второго порядка включительно.

Такого рода задачи возникают в электродинамике и других областях в средах с резко отличающимися физическими свойствами.

Легко делаются следующие обобщения:

1) вместо операторов Лапласа могут быть операторы второго порядка эллиптического типа, где вместо производных по нормали берутся производные по конормали;

2) условия на разных частях границы и поверхности раздела подобластей могут быть заданы смешанного типа.

Список использованной литературы

1. Корзюк, В. И. Операторы осреднения с переменным шагом в теории разрешимости эллиптических задач / В. И. Корзюк // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2005. – Т. 49, № 6. – С. 25–28.
2. Корзюк, В. И. Граничные задачи для эллиптических уравнений второго порядка / В. И. Корзюк, Е. С. Чеб // Тр. Ин-та математики Нац. акад. наук Беларуси. – 2007. – Т. 15, № 2. – С. 38–47.
3. Треногин, В. А. Функциональный анализ / В. А. Треногин. – М.: Наука, 1980.
4. Корзюк, В. И. Уравнения математической физики / В. И. Корзюк. – Минск: БГУ, 2011.
5. Михайлов, В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных / В. П. Михайлов. – М.: Наука, 1976.
6. Корзюк, В. И. Метод энергетических неравенств и операторов осреднения. Граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными / В. И. Корзюк. – Минск: БГУ, 2013.

Поступила в редакцию 30.12.2015

УДК 517.925.42,517.925.7

В. В. АМЕЛЬКИН, М. Н. ВАСИЛЕВИЧ

**ПОСТРОЕНИЕ МЕТОДОМ ВКБ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ,
ВОЗНИКАЮЩЕЙ В ЗАДАЧЕ РИМАНА – ГИЛЬБЕРТА**

*Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь,
e-mail: vamlkn@mail.ru, vasilevich.m@gmail.com*

В настоящей статье методом ВКБ строится такое решение системы трех дифференциальных уравнений, возникающей в задаче Римана – Гильберта, компоненты которого удовлетворяют определенным соотношениям.

Ключевые слова: дифференциальная система, задача Римана – Гильберта, метод ВКБ.

V. V. AMEL'KIN, M. N. VASILEVICH

**JWKВ-METHOD AND CONSTRUCTION OF A DIFFERENTIAL SYSTEM EMERGING
IN THE RIEMANN – HILBERT PROBLEM**

Belarusian State University, Minsk, Belarus, e-mail: vamlkn@mail.ru, vasilevich.m@gmail.com

In this paper, we construct by means of JWKB-method a solution of the differential system emerging in the Riemann – Hilbert problem, with components satisfying the defined relations.

Keywords: differential system, Riemann – Hilbert problem, JWKB-method.

В статье [1] при построении системы Фукса второго порядка с четырьмя особыми точками и неприводимыми матрицами-вычетами было отмечено, что реализация приведенного в [1] алгоритма решения соответствующей задачи Римана – Гильберта полностью определяется его первым пунктом, заключающимся в решении системы трех дифференциальных уравнений (с сохранением принятых в [1] обозначений)

$$\frac{d\Delta_{12}}{dz} = -\frac{\Delta_{13}\Delta_{23}}{z}, \quad \frac{d\Delta_{13}}{dz} = \frac{\Delta_{12}\Delta_{23}}{z-1}, \quad \frac{d\Delta_{23}}{dz} = -\frac{\Delta_{12}\Delta_{13}}{z(z-1)}. \quad (1)$$

Система (1) возникает и в статье [2] при изучении трехволнового резонансного взаимодействия в (2+1) измерениях. В указанной статье показывается, что систему (1) можно свести к дифференциальному уравнению второго порядка второй степени, между решениями которого и решениями шестого уравнения Пенлеве существует взаимно однозначное соответствие.

Но вопрос о нахождении решений системы (1), как в [1], так и в [2], не рассматривался.

В настоящей статье показывается, как система (1) может быть решена на основе ВКБ-метода. Так, обозначая

$$\Delta_{12} = -i\xi\Delta_1, \quad \Delta_{13} = -i\xi\Delta_2, \quad \Delta_{23} = -i\xi\Delta_3, \quad (2)$$

где $i = \sqrt{-1}$, ξ – константа, которую можно считать равной 1, перепишем систему (1) в виде

$$\frac{d\Delta_1}{dz} = i\frac{\xi}{z}\Delta_2\Delta_3, \quad \frac{d\Delta_2}{dz} = -i\frac{\xi}{z-1}\Delta_1\Delta_3, \quad \frac{d\Delta_3}{dz} = i\frac{\xi}{z(z-1)}\Delta_1\Delta_2. \quad (3)$$

Как показано в [3, с. 49–50], для точек сферы

$$\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 = 1, \quad (4)$$

являющейся частным интегралом системы (3), справедливо равенство

$$z(1 - \Delta_3) = \Delta_1 + i\Delta_2. \quad (5)$$

А в таком случае из соотношений (4) и (5) легко выводятся равенства

$$b\Delta_1 - ic\Delta_2 = 2, \quad 2\Delta_1 + c\Delta_3 = b, \quad 2i\Delta_2 + b\Delta_3 = c, \quad (6)$$

где

$$b = z + \frac{1}{z}, \quad c = z - \frac{1}{z},$$

которые означают, что систему (3) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta_1}{dz} &= \frac{\xi z}{(z^2 - 1)^2} \left(-2b\Delta_1^2 + (b^2 + 4)\Delta_1 - 2b \right), \\ \frac{d\Delta_2}{dz} &= -\frac{i\xi z^2}{(z-1)(z^2+1)^2} \left(2c\Delta_2^2 + i(c^2 - 4)\Delta_2 + 2c \right), \\ \frac{d\Delta_3}{dz} &= \frac{\xi}{4z(z-1)} \left(bc\Delta_3^2 - (b^2 + c^2)\Delta_3 + bc \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Каждое из уравнений системы (7) является уравнением Риккати, приводящимся к некоторому векторному линейному однородному дифференциальному уравнению первого порядка.

Рассуждения здесь следующие. Обозначим

$$\begin{aligned} f_1 &= -\frac{2\xi bz}{(z^2 - 1)^2} = -\frac{2\xi(z^2 + 1)}{(z^2 - 1)^2}, & g_1 &= \frac{\xi(b^2 + 4)z}{(z^2 - 1)^2} = \frac{\xi(z^4 + 6z^2 + 1)}{z(z^2 - 1)^2}, \\ f_2 &= -\frac{2i\xi cz^2}{(z-1)(z^2+1)^2} = -\frac{2i\xi z(z+1)}{(z^2+1)^2}, & g_2 &= \frac{\xi(c^2 - 4)z^2}{(z-1)(z^2+1)^2} = \frac{\xi(z^4 - 6z^2 + 1)}{(z-1)(z^2+1)^2}, \\ f_3 &= \frac{\xi bc}{4z(z-1)} = \frac{\xi(z+1)(z^2+1)}{4z^3}, & g_3 &= -\frac{\xi(b^2 + c^2)}{4z(z-1)} = -\frac{\xi(z^4 + 1)}{2z^3(z-1)}, \end{aligned}$$

тогда систему (7) можно переписать в виде

$$\Delta'_r = f_r \Delta_r^2 + g_r \Delta_r + f_r, \quad r = \overline{1, 3}, \quad ' = \frac{d}{dz}.$$

Полагая в полученной системе уравнений Риккати последовательно

$$\Delta_r = \frac{\bar{\Delta}_r}{f_r}, \quad \bar{\Delta}_r = u_r - \frac{1}{2} \left(\frac{f'_r}{f_r} + g_r \right), \quad u_r = -\frac{v'_r}{v_r}, \quad (8)$$

придем к системе

$$v''_r + \varphi_r(z)v_r = 0, \quad r = \overline{1, 3}, \quad '' = \frac{d^2}{dz^2}, \quad (9)$$

где

$$\varphi_r(z) = f_r^2 + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{f'_r}{f_r} \right)' + g'_r \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{f'_r}{f_r} + g_r \right)^2,$$

или к системе

$$v_r'' + (1 + h_r(z))v_r = 0, \quad r = \overline{1, 3}, \quad (10)$$

где $h_r(z) = \varphi_r(z) - 1$.

Следуя теперь [4, с. 27], будем искать v_r в виде

$$v_r = a_r^1(z)e^{iz} + a_r^2(z)e^{-iz}, \quad r = \overline{1, 3}.$$

Тогда при каждом фиксированном r уравнение (10) можно заменить [4, с. 28] системой двух дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \frac{da_r^1}{dz} &= \frac{1}{2}ih_r(z)(a_r^1(z) + a_r^2(z)e^{-2iz}), \\ \frac{da_r^2}{dz} &= -\frac{1}{2}ih_r(z)(a_r^2(z) + a_r^1(z)e^{2iz}), \end{aligned}$$

которую, вводя вектор-столбец

$$a_r = \begin{pmatrix} a_r^1(z) \\ a_r^2(z) \end{pmatrix}$$

и нильпотентную матрицу

$$M_r(z) = \frac{1}{2}ih_r(z) \begin{pmatrix} 1 & e^{-2iz} \\ -e^{2iz} & -1 \end{pmatrix},$$

можем записать в векторной форме

$$\frac{da_r}{dz} = M_r(z)a_r.$$

Это дифференциальное уравнение можно заменить интегральным уравнением

$$a_r(z) = a_r(z_0) + \int_{z_0}^z M_r(z_1)a_r(z_1)dz_1,$$

общее решение которого можно получить методом итераций [4, с. 29–33]. Оно имеет вид

$$a_r(z) = F_r(z, z_0)a_r(z_0), \quad (11)$$

где элементы фундаментальной матрицы

$$F_r(z, z_0) = \begin{pmatrix} F_{11}^r(z, z_0) & F_{12}^r(z, z_0) \\ F_{21}^r(z, z_0) & F_{22}^r(z, z_0) \end{pmatrix}$$

представимы в виде рядов

$$\begin{aligned} F_{11}^r(z, z_0) &= 1 + \frac{i}{2} \int_{z_0}^z h_r(z_1)dz_1 + \left(\frac{i}{2}\right)^2 \int_{z_0}^z h_r(z_1)dz_1 \int_{z_0}^{z_1} h_r(z_2)(1 - e^{-2i(z_1-z_2)})dz_2 + \\ &+ \left(\frac{i}{2}\right)^3 \int_{z_0}^z h_r(z_1)dz_1 \int_{z_0}^{z_1} h_r(z_2)(1 - e^{-2i(z_1-z_2)})dz_2 \int_{z_0}^{z_2} h_r(z_3)(1 - e^{-2i(z_2-z_3)})dz_3 + \dots, \\ F_{12}^r(z, z_0) &= \frac{i}{2} \int_{z_0}^z h_r(z_1)e^{-2iz_1}dz_1 + \left(\frac{i}{2}\right)^2 \int_{z_0}^z h_r(z_1)dz_1 \int_{z_0}^{z_1} h_r(z_2)(1 - e^{-2i(z_1-z_2)})e^{-2iz_2}dz_2 + \end{aligned}$$

$$+\left(\frac{i}{2}\right)^3 \int_{z_0}^z h_r(z_1) dz_1 \int_{z_0}^{z_1} h_r(z_2) (1 - e^{-2i(z_1-z_2)}) dz_2 \int_{z_0}^{z_2} h_r(z_3) (1 - e^{-2i(z_2-z_3)}) e^{-2iz_3} dz_3 + \dots$$

Элементы $F_{21}^r(z, z_0)$ и $F_{22}^r(z, z_0)$ получаются из выражений для $F_{12}^r(z, z_0)$ и $F_{11}^r(z, z_0)$ соответственно заменой i на $-i$.

В таком случае из (11) находим, что

$$\begin{aligned} a_r^1(z) &= F_{11}^r a_r^1(z_0) + F_{12}^r a_r^2(z_0), \\ a_r^2(z) &= F_{21}^r a_r^1(z_0) + F_{22}^r a_r^2(z_0), \end{aligned}$$

и, значит, общее решение уравнения (10) представимо в виде

$$v_r = a_r^1(z_0) (F_{11}^r e^{iz} + F_{12}^r e^{-iz}) + a_r^2(z_0) (F_{12}^r e^{iz} + F_{22}^r e^{-iz}).$$

Обозначая теперь через \bar{F}_r матрицу, полученную из матрицы F_r заменой функции $h_r(z)$ функцией $\varphi_r(z) = h_r(z) + 1$, получим общее решение уравнения (9)

$$v_r = a_r^1(z_0) (\bar{F}_{11}^r e^{iz} + \bar{F}_{12}^r e^{-iz}) + a_r^2(z_0) (\bar{F}_{12}^r e^{iz} + \bar{F}_{22}^r e^{-iz}).$$

Тогда, следуя цепочке равенств (8) в обратном порядке, находим, что

$$\Delta_r = -\frac{(a_r^1(z_0) (\bar{F}_{11}^r e^{iz} + \bar{F}_{12}^r e^{-iz}) + a_r^2(z_0) (\bar{F}_{12}^r e^{iz} + \bar{F}_{22}^r e^{-iz}))'}{f_r (a_r^1(z_0) (\bar{F}_{11}^r e^{iz} + \bar{F}_{12}^r e^{-iz}) + a_r^2(z_0) (\bar{F}_{12}^r e^{iz} + \bar{F}_{22}^r e^{-iz}))} - \frac{1}{2f_r} \left(\frac{f_r'}{f_r} + g_r \right), \quad r = \overline{1, 3}. \quad (12)$$

З а м е ч а н и е. В каждую из формул (12) входит в действительности одна произвольная постоянная $C_r = \frac{a_r^2(z_0)}{a_r^1(z_0)}$ (или $C_r = \frac{a_r^1(z_0)}{a_r^2(z_0)}$).

Результатом проведенных рассуждений является следующая

Теорема. *Общее решение системы (1), компоненты которого удовлетворяют равенствам (6), определяется соотношениями (12), (2).*

Исследование выполнено при поддержке проекта FP7-PEOPLE-2012-IRSES-316338.

Список использованной литературы

1. Амелькин, В. В. Построение системы Фукса второго порядка с четырьмя особыми точками и неприводимыми матрицами-вычетами / В. В. Амелькин, М. Н. Василевич // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2013. – № 4. – С. 107–116.
2. On Certain Symmetry Reduction Systems of the Three-Wave Resonant Interaction in (2+1) Dimensions / R. A. Leo [et al.] // Progr. Theor. Phys. – 1986. – Vol. 76, N 4. – P. 739–751.
3. Маркушевич, А. И. Теория аналитических функций / А. И. Маркушевич. – Л.; М.: Гостехтеоретиздат, 1950.
4. Фрёман, Н. ВКБ-приближение / Н. Фрёман, П. У. Фрёман. – М.: Мир, 1967.

Поступила в редакцию 14.05.2015

УДК 517.956.32

Ф. Е. ЛОМОВЦЕВ

**НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ
ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ СТРУНЫ С ПЕРВОЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ
КОСОЙ ПРОИЗВОДНОЙ В НЕСТАЦИОНАРНОМ ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ**

*Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь,
e-mail: lomovcev@bsu.by*

Методами характеристик и Дюамеля в явном виде выведено единственное классическое решение смешанной задачи для неоднородного уравнения колебаний полуограниченной струны при первой характеристической косо́й производной в граничном условии, в котором все коэффициенты зависят от времени. Характеристичность этой первой косо́й производной означает, что она направлена по критической характеристике уравнения колебаний. Найдены необходимые и достаточные условия на правую часть уравнения, начальные и граничные данные для однозначной везде разрешимости этой смешанной задачи во множестве классических решений.

Ключевые слова: смешанная задача, нестационарное граничное условие, характеристическая косая производная, классическое решение, необходимое и достаточное условие, условие согласования, требование гладкости.

F. E. LOMOVTSSEV

**NECESSARY AND SUFFICIENT CONDITIONS FOR FORCED VIBRATIONS
OF A SEMIBOUNDED STRING WITH THE FIRST CHARACTERISTIC DIRECTIONAL DERIVATIVE
IN THE UNSTEADY BOUNDARY CONDITION**

*Belarusian State University, Minsk, Belarus,
e-mail: lomovcev@bsu.by*

By means of the method of characteristics and the Duhamel's method we have derived a closed-form expression for a unique classical solution of a mixed problem for the inhomogeneous equation of vibration of a semibounded string with the first characteristic directional derivative in the boundary condition where all coefficients are time-dependent. The characteristic nature of this first directional derivative means that it is directed in terms of the critical characteristic of the vibration equation. We have found the necessary and sufficient conditions for the right-hand side of the equation and the initial and boundary data for single-valued everywhere solvability of this mixed problem in the set of classical solutions.

Keywords: mixed problem, unsteady boundary condition, characteristic directional derivative, classical solution, necessary and sufficient condition, reconciliation condition, smoothness requirement.

Введение. В настоящей работе методом характеристик и методом Дюамеля найдены формулы классических решений смешанной (начально-краевой) задачи для простейшего неоднородного уравнения колебаний полуограниченной струны в случае первой характеристической (направленной по критической характеристике уравнения) нестационарной (зависящей от времени t) косо́й производной в граничном условии. Этими же методами выведены необходимые и достаточные требования гладкости и условия согласования на исходные данные (правую часть уравнения, начальные данные и граничное данное) этой смешанной задачи, которые обеспечивают ее однозначную везде разрешимость. Впервые достаточные условия существования единственных классических решений этой смешанной задачи в случае однородного уравнения были установлены в [1]. Затем в работе [2] эти результаты были обобщены на однородное уравнение колебаний ограниченной струны при однородной стационарной первой косо́й производной на ее левом конце и однородном граничном условии первого рода на ее правом конце. Формулы классических

решений вместе с необходимыми и достаточными условиями их существования и единственности получены только для нехарактеристических косых производных первого и второго порядков в граничном условии для уравнения вынужденных колебаний полуограниченной струны [3, 4].

1. Постановка краевой задачи. На множестве $G_\infty = [0, \infty[\times [0, \infty[$ ставится смешанная задача:

$$u_{tt}(x, t) - a^2 u_{xx}(x, t) = f(x, t), \quad a > 0, \quad \{x, t\} \in G_\infty, \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}_+ = [0, \infty[, \quad (2)$$

$$[\alpha(t)u_t + \beta(t)u_x + \gamma(t)u]|_{x=0} = \mu(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (3)$$

где α, β, γ – заданные функции переменной t и нижними индексами искомой функции u обозначены ее частные производные по указанным переменным соответствующих порядков.

Требуется найти в явном виде классические решения $u \in C^2(G_\infty)$ и необходимые и достаточные условия на исходные данные этой задачи для ее однозначной везде разрешимости. Символом $C^k(\Omega)$ мы обозначаем множество k раз непрерывно дифференцируемых функций на множестве Ω .

2. Решение краевой задачи. Критической характеристикой $x = at$ уравнения (1) множество G_∞ разбивается на множества $G_- = \{\{x, t\} \in G_\infty : x > at > 0\}$, $G_+ = \{\{x, t\} \in G_\infty : 0 \leq x \leq at\}$. Для функций $u \in C^2(G_\infty)$ в граничном условии (3) и его первой производной по t мы полагаем $t = 0$, вычисляем значения полученных слагаемых с помощью начальных условий (2) при $x = 0$, уравнения (1) при $t = 0, x = 0$ и соответственно находим необходимые условия согласования:

$$J_1 \equiv \alpha(0)\psi(0) + \beta(0)\varphi'(0) + \gamma(0)\varphi(0) = \mu(0), \quad (4)$$

$$J_2 \equiv \alpha(0)[a^2\varphi''(0) + f(0, 0)] + [\alpha'(0) + \gamma(0)]\psi(0) + \beta(0)\psi'(0) + \beta'(0)\varphi'(0) + \gamma'(0)\varphi(0) = \mu'(0). \quad (5)$$

Методами характеристик и Дюамеля доказывается

Теорема. Пусть в граничном условии (3) коэффициенты $\alpha, \beta, \gamma \in C^2(\mathbb{R}_+)$ и косая производная является характеристической, т. е. $a\alpha(t) = \beta(t)$, $\gamma \neq 0$, $t \in \mathbb{R}_+$. Смешанная задача (1)–(3) на множестве G_- имеет единственное классическое решение

$$u_-(x, t) = \frac{\varphi(x + at) + \varphi(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(s) ds + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{0, x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(s, \tau) ds d\tau \quad (6)$$

тогда и только тогда, когда справедливы требования гладкости

$$\varphi \in C^2(\mathbb{R}_+), \quad \psi \in C^1(\mathbb{R}_+), \quad f \in C(G_-), \quad \int_0^t f(x \pm a(t - \tau), \tau) d\tau \in C^1(G_-), \quad (7)$$

и на множестве G_+ единственное классическое решение

$$u_+(x, t) = \frac{\varphi(x + at) - \varphi(at - x)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{x+at} \psi(s) ds + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{0, x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(|s|, \tau) ds d\tau + \\ + \left(a\gamma \left(t - \frac{x}{a} \right) \right)^{-1} \left\{ a\mu \left(t - \frac{x}{a} \right) - \beta \left(t - \frac{x}{a} \right) [a\varphi'(at - x) + \psi(at - x)] - \right. \\ \left. - \beta \left(t - \frac{x}{a} \right) \int_0^{t-x/a} f(a(t - \tau) - x, \tau) d\tau \right\} - \frac{1}{a} \int_0^{t-x/a} \int_0^{a(t-\tau)-x} f(s, \tau) ds d\tau \quad (8)$$

тогда и только тогда, когда справедливы требования гладкости

$$\varphi \in C^2(\mathbb{R}_+), \psi \in C^1(\mathbb{R}_+), \mu \in C^2(\mathbb{R}_+), \quad (9)$$

$$f \in C(G_\infty), \int_0^t f(|x \pm a(t-\tau)|, \tau) d\tau \in C^1(G_+), \quad (10)$$

$$\beta(t)\varphi'''(at), \beta(t)\psi''(at), \beta(t)\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\int_0^t f(a(t-\tau), \tau) d\tau \right) \in C(\mathbb{R}_+) \quad (11)$$

и условия согласования (4), (5) и

$$\begin{aligned} J_3 \equiv & \alpha''(0)\psi(0) + 2\alpha'(0)[a^2\varphi''(0) + f(0,0)] + \alpha(0)[a^2\psi''(0) + f_t(0,0)] + \\ & + \beta''(0)\varphi'(0) + 2\beta'(0)\psi'(0) + \beta(0)[a^2\varphi'''(0) + f_x(0,0)] + \\ & + \gamma''(0)\varphi(0) + 2\gamma'(0)\psi(0) + \gamma(0)[a^2\varphi''(0) + f(0,0)] = \mu''(0). \end{aligned} \quad (12)$$

Доказательство. Методом характеристик и методом Дюамеля выводится общий вид классических решений уравнения (1) на множестве G_∞ :

$$u(x,t) = g(x+at) + h(x-at) + F(x,t), \quad F(x,t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(|s|, \tau) ds d\tau, \quad (13)$$

если g, h – любые дважды непрерывно дифференцируемые функции своих переменных и $F(x,t)$ является дважды непрерывно дифференцируемой функцией на G_∞ .

Необходимость и достаточность в G_- . На множестве G_- классическим решением смешанной задачи (1)–(3) очевидно является единственное классическое решение задачи Коши (1), (2), которое выражается известной формулой Даламбера – Эйлера (6). Необходимость и достаточность требований гладкости (7) доказывается так же, как в [3, 4]. Условия согласования отсутствуют, потому что нет граничных условий для точек из-под критической характеристики.

Достаточность в G_+ . Решения смешанной задачи (1)–(3) на множестве G_+ ищутся как решения задачи Пикара для уравнения (1) с двумя следующими граничными условиями. Из естественного требования равенства решений $u_+(x,t) = u_-(x,t)$ на характеристике $x = at$ ввиду формул (6) и (13) имеем уравнение

$$g(2at) + h(0) = \frac{\varphi(2at) + \varphi(0)}{2} + \frac{1}{2a} \int_0^{2at} \psi(s) ds. \quad (14)$$

Подставляя решения (13) в граничное условие (3), получаем другое уравнение

$$\begin{aligned} \alpha\alpha(t) \left\{ g'(at) - h'(-at) + \frac{1}{a} \int_0^t f(a(t-\tau), \tau) d\tau \right\} + \beta(t) [g'(at) + h'(-at)] + \\ + \gamma(t) \left\{ g(at) + h(-at) + \frac{1}{a} \int_0^t \int_0^{a(t-\tau)} f(s, \tau) ds d\tau \right\} = \mu(t). \end{aligned} \quad (15)$$

Чтобы найти решения системы двух уравнений (14) и (15), из первого уравнения мы выражаем функцию g при $y = 2at \geq 0$:

$$g(y) = \frac{\varphi(y) + \varphi(0)}{2} + \frac{1}{2a} \int_0^y \psi(s) ds - h(0). \quad (16)$$

Благодаря характеристичности кривой производной $\alpha\alpha(t) = \beta(t)$, $t \in [0, \infty[$, во втором уравнении (15) мы приводим подобные члены и выражаем значения функции h :

$$h(-at) = \frac{1}{\gamma(t)} \left\{ \mu(t) - 2\beta(t)g'(at) - \alpha(t) \int_0^t f(a(t-\tau), \tau) d\tau \right\} - g(at) - \frac{1}{a} \int_0^t \int_0^{a(t-\tau)} f(s, \tau) ds d\tau,$$

в которой делаем замену $z = -at < 0$ и имеем функцию

$$h(z) = \gamma^{-1} \left(-\frac{z}{a} \right) \left\{ \mu \left(-\frac{z}{a} \right) - 2\beta \left(-\frac{z}{a} \right) g'(-z) - \alpha \left(-\frac{z}{a} \right) \int_0^{-z/a} f \left(a \left(-\frac{z}{a} - \tau \right), \tau \right) d\tau \right\} - \\ - g(-z) - \frac{1}{a} \int_0^{-z/a} \int_0^{-z-a\tau} f(s, \tau) ds d\tau. \quad (17)$$

Подставив в (17) значения функции g из (16), получаем функции

$$h(z) = -\frac{\varphi(-z) + \varphi(0)}{2} - \frac{1}{2a} \int_0^{-z} \psi(s) ds - \frac{1}{a} \int_0^{-z/a} \int_0^{-z-a\tau} f(s, \tau) ds d\tau + h(0) + \\ + a^{-1} \gamma^{-1} \left(-\frac{z}{a} \right) \left\{ a\mu \left(-\frac{z}{a} \right) - \beta \left(-\frac{z}{a} \right) [a\varphi'(-z) + \psi(-z)] - \beta \left(-\frac{z}{a} \right) \int_0^{-z/a} f(-z - a\tau, \tau) d\tau \right\}. \quad (18)$$

Теперь в общее решение (13) мы подставляем найденные функции g и h вида (16) и (18)

$$u_+(x, t) = \frac{\varphi(x + at) + \varphi(0)}{2} - \frac{\varphi(at - x) + \varphi(0)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{x+at} \psi(s) ds - h(0) - \\ - \frac{1}{a} \int_0^{t-x/a} \int_0^{a(t-\tau)-x} f(s, \tau) ds d\tau + h(0) + a^{-1} \gamma^{-1} \left(t - \frac{x}{a} \right) \left\{ a\mu \left(t - \frac{x}{a} \right) - \beta \left(t - \frac{x}{a} \right) [a\varphi'(at - x) + \psi(at - x)] - \right. \\ \left. - \beta \left(t - \frac{x}{a} \right) \int_0^{t-x/a} f(a(t-\tau) - x, \tau) d\tau \right\} + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(|s|, \tau) ds d\tau,$$

приводим подобные члены и приходим к единственному формальному решению (8).

Покажем, что требования гладкости (9)–(11) достаточны для дважды непрерывной дифференцируемости функции (8) в G_+ . Требования гладкости $\varphi \in C^2(\mathbb{R}_+)$, $\psi \in C^1(\mathbb{R}_+)$ очевидно достаточно для дважды непрерывной дифференцируемости в G_+ первых двух слагаемых функции u_+ . Непрерывность правой части $f \in C(G_\infty)$ обеспечивает существование и непрерывность частного решения $F(x, t)$ из (8) и его первой частной производной по t :

$$\frac{\partial F(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \int_0^t [f(x + a(t - \tau), \tau) + f(|x - a(t - \tau)|, \tau)] d\tau,$$

от которой первые частные производные по x и t тоже непрерывны на G_+ в силу интегрального требования гладкости на f из (10). Следовательно, вторые частные производные $\partial^2 F(x, t) / \partial t^2$, $\partial^2 F(x, t) / \partial x \partial t$ являются непрерывными функциями на G_+ . Аналогично доказывается непрерывность на G_+ вторых частных производных $\partial^2 F(x, t) / \partial x^2$ и $\partial^2 F(x, t) / \partial x \partial t$ от третьего слагаемого $F(x, t)$ формулы (8) с помощью условий (10). Дважды непрерывная дифференцируемость четвертого слагаемого в выражении (8) с фигурной скобкой следует из требований гладкости (9)–(11), так как коэффициенты $\beta, \gamma \in C^2(\mathbb{R}_+)$. В этих фигурных скобках для $f \in C(G_\infty)$ непрерывность всех первых и вторых частных производных от произведения

$$\beta \left(t - \frac{x}{a} \right) \int_0^{t-x/a} f(a(t-\tau) - x, \tau) d\tau = \left[\beta(t') \int_0^{t'} f(a(t'-\tau), \tau) d\tau \right] \Big|_{t'=t-x/a}, \quad t' \geq 0,$$

на G_+ вытекает из интегрального требования на f в (10) при $x = 0$ и последнего включения для f в (11), так как функция $\beta \in C^2(\mathbb{R}_+)$ и замена $t' = t - x/a$ – дважды непрерывно дифференцируема по x и t на G_+ . Для дважды непрерывной дифференцируемости последнего слагаемого формулы (8) на G_+ очевидно достаточно непрерывности $f \in C(G_\infty)$ и интегрального требования на f в (10) при $x = 0$, так как правая часть $f(s, \tau)$ находится под двойным повторным интегралом по s и τ . Итак,

функции (6) и (8) дважды непрерывно дифференцируемы на G_∞ вне критической характеристики $x = at$.

Ввиду условия согласования (4) функция (8) совпадает с предельным значением функции (6) на характеристике $x = at$: $u_+|_{x=at} - u_-|_{x=at} = (\mu(0) - J_1) / \gamma(0) = 0$. Остается проверить совпадение всех первых и вторых частных производных от функции (8) с соответствующими их предельными значениями от функции (6) на этой характеристике. Дифференцируя выражения (6) и (8) нужное число раз по x , t и полагая $x = at$, находим их разности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_+}{\partial x} \Big|_{x=at} - \frac{\partial u_-}{\partial x} \Big|_{x=at} &= \frac{J_2 - \mu'(0)}{a\gamma(0)} + \frac{\gamma'(0)(\mu(0) - J_1)}{a\gamma^2(0)}, \\ \frac{\partial u_+}{\partial t} \Big|_{x=at} - \frac{\partial u_-}{\partial t} \Big|_{x=at} &= \frac{J_2 - \mu'(0)}{\gamma(0)} + \frac{\gamma'(0)(\mu(0) - J_1)}{\gamma^2(0)}, \\ \frac{\partial^2 u_+}{\partial t^2} \Big|_{x=at} - \frac{\partial^2 u_-}{\partial t^2} \Big|_{x=at} &= \frac{J_3 - \mu''(0)}{\gamma(0)} + \frac{2\gamma'(0)(J_2 - \mu'(0))}{\gamma^2(0)} + \frac{\gamma''(0)\gamma(0) - 2(\gamma'(0))^2}{\gamma^3(0)}(J_1 - \mu(0)), \\ \frac{\partial^2 u_+}{\partial x^2} \Big|_{x=at} - \frac{\partial^2 u_-}{\partial x^2} \Big|_{x=at} &= \frac{J_3 - \mu''(0)}{a^2\gamma(0)} + \frac{2\gamma'(0)(J_2 - \mu'(0))}{a^2\gamma^2(0)} + \frac{\gamma''(0)\gamma(0) - 2(\gamma'(0))^2}{a^2\gamma^3(0)}(J_1 - \mu(0)), \\ \frac{\partial^2 u_+}{\partial x \partial t} \Big|_{x=at} - \frac{\partial^2 u_-}{\partial x \partial t} \Big|_{x=at} &= \frac{\mu''(0) - J_3}{a\gamma(0)} + \frac{2\gamma'(0)(\mu'(0) - J_2)}{a\gamma^2(0)} + \frac{\gamma''(0)\gamma(0) - 2(\gamma'(0))^2}{a\gamma^3(0)}(\mu(0) - J_1). \end{aligned}$$

Из них видно, что если выполняются условия согласования (4), (5) и (12), то все соответствующие первые и вторые частные производные от u_+ и u_- равны на характеристике $x = at$.

Необходимость в G_+ . Из уравнения (1) и гладкости классических решений $u \in C^2(G)$ вытекает требование гладкости $f \in C(G_+)$. Необходимость интегрального требования гладкости на правую часть f из (10) для дважды непрерывной дифференцируемости в G_+ частного решения $u_0(x, t) = F(x, t)$ уравнения (1) выводится так же, как в [3, 4]. Это требование вытекает из необходимости непрерывной дифференцируемости производных по направлению от $F = F(x, t)$ вдоль характеристик $x + at = C_1$, $x - at = C_2$, $\forall C_1, C_2 \in \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$.

Согласно определению классических решений краевой задачи (1)–(3), общее решение (13) должно сохранять свою гладкость не только при его подстановке в уравнение (1), но и при его подстановке в граничное условие (3). Отсюда следует, что для любой функции $h \in C^2(\mathbb{R})$ частные решения $u_1(x, t) = h(x - at)$ однородного уравнения (1) тоже должны сохранять свою гладкость при их подстановке в граничное условие (3):

$$[\alpha(t)(u_1)_t + \beta(t)(u_1)_x + \gamma(t)u_1]|_{x=0} = [\beta(t) - a\alpha(t)]h'(-at) + \gamma(t)h(-at) = \mu(t), \quad t \geq 0.$$

Поэтому в случае характеристической косой производной, т. е. $a\alpha(t) = \beta(t)$, $t \geq 0$, мы имеем равенство $\mu(t) = \gamma(t)h(-at)$, из которого заключаем, что граничное данное $\mu \in C^2(\mathbb{R}_+)$, так как функции $\gamma \in C^2(\mathbb{R}_+)$, $h \in C^2(\mathbb{R})$.

Частное решение $u_0(x, t) = F(x, t)$ неоднородного уравнения (1) также обязано сохранять свою гладкость при его подстановке в граничное условие (3) с характеристической косой производной:

$$\begin{aligned} [\alpha(t)(u_0)_t + \beta(t)(u_0)_x + \gamma(t)u_0]|_{x=0} &= \frac{1}{2a} \left\{ [a\alpha(t) + \beta(t)] \int_0^t f(x + a(t - \tau), \tau) d\tau + \right. \\ &\quad \left. + [a\alpha(t) - \beta(t)] \int_0^t f(|x - a(t - \tau)|, \tau) d\tau \right\} \Big|_{x=0} + \gamma(t)u_0(0, t) = \\ &= \frac{\beta(t)}{a} \int_0^t f(a(t - \tau), \tau) d\tau + \frac{\gamma(t)}{a} \int_0^t \int_0^{a(t-\tau)} f(s, \tau) ds d\tau = \mu(t), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Отсюда выводим тождество

$$\beta(t) \int_0^t f(a(t-\tau), \tau) d\tau = a\mu(t) - \gamma(t) \int_0^t \int_0^{a(t-\tau)} f(s, \tau) ds d\tau, \quad t \geq 0, \quad (19)$$

из которого следует включение

$$a\beta(t) \int_0^t f(a(t-\tau), \tau) d\tau \in C^2(\mathbb{R}_+), \quad (20)$$

так как функции $\mu, \gamma \in C^2(\mathbb{R}_+)$ и интеграл в правой части этого тождества дважды непрерывно дифференцируем на \mathbb{R}_+ . Действительно, первая производная от этого интеграла из (19) равна

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^t \int_0^{a(t-\tau)} f(s, \tau) ds d\tau \right) = a \int_0^t f(a(t-\tau), \tau) d\tau \in C^1(\mathbb{R}_+), \quad (21)$$

непрерывная дифференцируемость которой для функций $f \in C(G_\infty)$ обеспечивается интегральным требованием гладкости на f из (10) при $x=0$. Тогда необходимость последнего включения для f из условий (11) вытекает из формулы Лейбница для второй производной от произведения функции и интеграла в силу гладкости этих функции $\beta \in C^2(\mathbb{R}_+)$, интеграла (21) и их произведения (20).

Поскольку ввиду необходимых условий (7) любое начальное данное $\varphi \in C^2(\mathbb{R}_+)$, то можно взять $g = \varphi, h = 0, f = 0$ в общем решении (13) и получить частные решения $u_2(x, t) = \varphi(x + at)$ однородного уравнения (1), которые обязаны сохранять гладкость в граничном условии (3):

$$[\alpha(t)(u_2)_t + \beta(t)(u_2)_x + \gamma(t)u_2]_{x=0} = [a\alpha(t) + \beta(t)]\varphi'(at) + \gamma(t)\varphi(at) = \mu(t), \quad t \geq 0.$$

Если в этом граничном условии косая производная является характеристической, то из этого тождества выводим включение $2\beta(t)\varphi'(at) = \mu(t) - \gamma(t)\varphi(at) \in C^2(\mathbb{R}_+)$, потому что по уже доказанному функции $\mu, \varphi \in C^2(\mathbb{R}_+)$. Это включение эквивалентно первому включению для φ из (11), так как функции $\beta, \varphi \in C^2(\mathbb{R}_+)$.

Аналогичным образом ввиду необходимой гладкости любого второго начального данного $\psi \in C^1(\mathbb{R}_+)$ из (7) в общем решении (13) можно положить $g(y) = \int_0^y \psi(s) ds, h(z) = \int_{-z}^0 \psi(s) ds, f = 0$, иметь частные решения $u_3(x, t) = \int_{at-x}^{x+at} \psi(s) ds$ однородного уравнения (1) и подставить их в граничное условие (3). В результате этой подстановки приходим к тождеству

$$[\alpha(t)(u_3)_t + \beta(t)(u_3)_x + \gamma(t)u_3]_{x=0} = 2\beta(t)\psi(at) = \mu(t), \quad t \geq 0,$$

из которого в силу гладкости граничного данного $\mu \in C^2(\mathbb{R}_+)$ вытекает включение $\beta(t)\psi(at) \in C^2(\mathbb{R}_+)$, эквивалентное второму включению для ψ из требований (11), так как функции $\beta \in C^2(\mathbb{R}_+)$, $\psi \in C^1(\mathbb{R}_+)$. Таким образом, необходимость требований гладкости (9)–(11) для классического решения (8) в G_+ доказана.

Необходимость условий согласования (4), (5) для классических решений установлена перед формулировкой теоремы. Для любой функции $f \in C^2(G_\infty)$ при всех $t \geq 0$ справедливо тождество

$$J(t) \equiv \beta(t) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\int_0^t f(a(t-\tau), \tau) d\tau \right) = \beta(t) \left[f_t(0, t) + af_x(x, t) \Big|_{x=0} + a^2 \int_0^t f_{xx}(x, \tau) \Big|_{x=a(t-\tau)} d\tau \right] \in C(\mathbb{R}_+).$$

Из этого тождества при $t = 0$ мы получаем равенство

$$J(0) = \beta(0) \left[f_t(0, 0) \Big|_{t=0} + af_x(x, 0) \Big|_{x=0} \right] \in \mathbb{R}, \quad (22)$$

которое предельным переходом по f распространяем на все функции $f \in C(G_\infty)$, удовлетворяющие дополнительным требованиям гладкости на f из (10) и (11). Установленные выше необходимые требования гладкости (9)–(11) и существование следа (22), которое вытекает из налагаемых в них требований на f , позволяют нам взять вторую производную по t от граничного условия (3), положить $t = 0$, вычислить значения полученных слагаемых с помощью начальных условий (2) и их производных по x при $x = 0$, а также уравнения (1) и его первых частных производных по t и x при $t = 0, x = 0$ и установить необходимость третьего условия согласования (12) граничного условия с начальными условиями и уравнением. Теорема доказана.

3. Замечания. 1. Можно показать, что принадлежность указанных в предположениях (7) и (10) интегралов для непрерывных функций f в G_- и G_∞ соответственно множествам $C^1(G_-)$ и $C^1(G_+)$ эквивалентна их принадлежности соответственно множествам $C^{(1,0)}(G_-)$ и $C^{(1,0)}(G_+)$ или $C^{(0,1)}(G_-)$ и $C^{(0,1)}(G_+)$. Здесь $C^{(1,0)}(\Omega)$ и $C^{(0,1)}(\Omega)$ – соответственно множества непрерывно дифференцируемых по x и t и непрерывных по t и x функций на множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

2. В частном случае коэффициентов $\alpha \equiv \beta \equiv 0$ эта теорема содержит формулу единственного классического решения и необходимые и достаточные условия корректности первой смешанной задачи для уравнения (1) в G_∞ с начальными условиями (2) и граничным условием $u(0,t) = \mu(t) / \gamma(t), t \geq 0$. Для коэффициентов $\alpha \equiv \beta \equiv 0$ требования гладкости (11) исчезают, а условия (4), (5), (12) становятся условиями согласования:

$$\begin{aligned} \gamma(0)\varphi(0) &= \mu(0), \quad \gamma(0)\psi(0) + \gamma'(0)\varphi(0) = \mu'(0), \\ \gamma''(0)\varphi(0) + 2\gamma'(0)\psi(0) + \gamma(0)[a^2\varphi''(0) + f(0,0)] &= \mu''(0). \end{aligned}$$

При дополнительных достаточных предположениях $f \in C^2([0,l] \times \mathbb{R}_+)$, $f(0,t) = f(l,t) = 0, t \geq 0$, первая смешанная задача для уравнения колебаний ограниченной струны решалась в [5].

Заключение. В данной работе получены необходимые и достаточные условия на правую часть уравнения колебаний струны, начальные данные и граничное данное зависящей от времени характеристической первой косо́й производной в граничном условии для корректной везде разрешимости смешанной задачи. Выведена в явно аналитическом виде формула единственного классического решения этой смешанной задачи.

Список использованной литературы

1. Барановская, С. Н. Смешанная задача для уравнения колебания струны с зависящей от времени косо́й производной в краевом условии / С. Н. Барановская, Н. И. Юрчук // Дифференц. уравнения. – 2009. – Т. 45, № 8. – С. 1188–1191.
2. Шлапакова, Т. С. Смешанная задача для уравнения колебания ограниченной струны с зависящей от времени производной в краевом условии, направленной по характеристике / Т. С. Шлапакова, Н. И. Юрчук // Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер. 1. Физика. Математика. Информатика. – 2013. – № 2. – С. 84–90.
3. Ломовцев, Ф. Е. Метод Дюамеля решения неоднородного уравнения колебаний полуограниченной струны с косо́й производной в нестационарном граничном условии / Ф. Е. Ломовцев, Е. Н. Новиков // Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер. 1. Физика. Математика. Информатика. – 2012. – № 1. – С. 83–86.
4. Ломовцев, Ф. Е. Классические решения неоднородного факторизованного гиперболического уравнения второго порядка в четверти плоскости при полунестационарной второй косо́й производной в граничном условии / Ф. Е. Ломовцев, Е. Н. Новиков // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та. – 2015. – № 4 (88). – С. 5–11.
5. Корзюк, В. И. Уравнения математической физики / В. И. Корзюк. – Минск: БГУ, 2011.

Поступила в редакцию 03.12.2015

УДК 517.977

А. И. АСТРОВСКИЙ

РАВНОМЕРНАЯ НАБЛЮДАЕМОСТЬ И СИСТЕМЫ НАБЛЮДЕНИЯ В ФОРМЕ ШВАРЦА

*Белорусский государственный экономический университет, Минск, Беларусь,
e-mail: aastrov@tut.by*

Для равномерно наблюдаемых линейных нестационарных систем со скалярным выходом получены необходимые и достаточные условия приводимости к системам наблюдения в форме Шварца с помощью непрерывно дифференцируемой группы.

Ключевые слова: линейная нестационарная система наблюдения, равномерная наблюдаемость, система наблюдения в форме Шварца.

A. I. ASTROVSKII

UNIFORM OBSERVABILITY AND OBSERVATION SYSTEMS IN THE SCHWARZ FORM

Belarusian State Economic University, Minsk, Belarus, e-mail: aastrov@tut.by

The necessary and sufficient conditions for uniformly observed linear time-varying systems with scalar output to be transformed to the Schwarz form under the action of a linear continuously differentiable group are obtained.

Keywords: linear time-varying observation system, canonical form, observation system in Schwarz form.

Введение. Наблюдаемость наряду с устойчивостью, управляемостью, стабилизируемостью является фундаментальным структурным свойством динамических систем. Суть задачи наблюдаемости заключается в выяснении вопроса о возможности однозначного восстановления текущих (или начальных) состояний системы по данным наблюдений. В литературе [1–6] для линейных нестационарных систем изучаются различные понятия наблюдаемости, а именно полная, дифференциальная, равномерная, аппроксимативная, равномерно-точечная наблюдаемость, наблюдаемость в специальных классах разрешающих операций и др. Среди указанных типов наблюдаемости особо выделяют [1–5] равномерную наблюдаемость, наличие которой позволяет для системы формировать управления типа обратной связи. Заметим, что системы в канонической форме Фробениуса [3] обладают свойством равномерной наблюдаемости. Другими словами, свойство равномерной наблюдаемости является необходимым условием существования канонических форм Фробениуса для систем наблюдения. Отметим также, что в классической постановке понятие равномерной наблюдаемости определяется только для систем наблюдения с достаточно гладкими выходными функциями, например для систем наблюдения класса $(n-1)$ [3].

На примере систем наблюдения в форме Шварца можно показать, как исходя из знания выходной функции и специальным образом построенных ее квазипроизводных можно в момент времени t определить в этот же момент времени состояние системы, что важно для построения управлений типа обратной связи.

В данной работе, продолжая исследования [3–13], получены необходимые и достаточные условия приводимости линейных нестационарных систем наблюдения со скалярным выходом к форме Шварца [14–16] с помощью непрерывно дифференцируемой группы преобразований.

Общая концепция исследования линейных систем управления-наблюдения, основанная на классификации их относительно действия различных групп преобразований, изложена в [3], а реализация этой концепции достаточно полно разработана в [4, 7–13].

1. Системы наблюдения в форме Шварца. Рассмотрим на отрезке $T = [t_0, t_1]$ линейную нестационарную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx(t)}{dt} = H(t)x(t), \quad (1)$$

где $x(t)$ – n -вектор-столбец состояний, а $H(t)$ – $(n \times n)$ -матрица в форме Шварца:

$$H(t) = \begin{pmatrix} 0 & h_0(t) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & h_1(t) & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & h_{n-2}(t) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & h_{n-1}(t) \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Здесь $h_i(t)$ – непрерывные на T функции. Присоединим к системе (1) скалярный выход

$$y(t) = x_n(t), \quad t \in T = [t_0, t_1]. \quad (3)$$

Систему наблюдения (1), (3) назовем системой наблюдения в форме Шварца и для удобства изложения отождествим ее с парой (H, c^0) , где $c^0 = (0, 0, \dots, 1)$. Заметим, что выходные функции $y(t)$, $t \in T$ системы (1), (3), вообще говоря, являются только непрерывно дифференцируемыми функциями. Так как понятие равномерной наблюдаемости [3, 4] определено для линейных систем наблюдения, множество выходных функций которых $(n-1)$ раз непрерывно дифференцируемо, то в общем случае к системе наблюдения (1), (3) нельзя применить определение равномерной наблюдаемости. Вместе с тем несложно показать, что состояние $x(t)$ системы (1) в момент времени $t \in T$ можно однозначным образом определить по выходной функции $y(t)$, $t \in T$ следующим образом:

$$\begin{aligned} x_n(t) &= y(t), \quad x_{n-1}(t) = \frac{dy(t)}{dt} - h_{n-1}(t)y(t), \quad x_{n-2}(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy(t)}{dt} - h_{n-1}(t)y(t) \right) - h_{n-2}(t)y(t), \\ x_{n-3}(t) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{dy(t)}{dt} - h_{n-1}(t)y(t) \right) - h_{n-2}(t)y(t) \right) - h_{n-3}(t) \left(\frac{dy(t)}{dt} - h_{n-1}(t)y(t) \right), \dots, \\ x_2(t) &= \frac{dx_3(t)}{dt} - h_2(t)x_4(t), \quad x_1(t) = \frac{dx_2(t)}{dt} - h_1(t)x_3(t). \end{aligned} \quad (4)$$

Следовательно, можно утверждать, что для систем наблюдения в форме Шварца (H, c^0) существует взаимно-однозначное соответствие между состоянием $x(t)$ системы (1) в момент $t \in T$ и n -вектор-функцией, специальным образом построенной (4) по выходной функции $y(t)$, $t \in T$. Подчеркнем, что в отличие от классического определения равномерной наблюдаемости [3, 4] здесь не требуется $(n-1)$ раз непрерывная дифференцируемость выходных функций.

Опишем понятия и конструкции, которые будут использованы в дальнейшем.

2. Квазидифференцируемость. Пусть m – целое неотрицательное число. Обозначим через $\mathcal{U}_m(T)$ совокупность всех нижнетреугольных матриц $P(t)$ размера $((m+1) \times (m+1))$ с непрерывными на T элементами $p_{ki}(t)$ ($i, k = 0, 1, \dots, m$), удовлетворяющими условию

$$p_{kk}(t) \neq 0 \quad (t \in T), \quad (k = 0, 1, \dots, m).$$

Выберем какую-либо матрицу $P(t)$ из множества $\mathcal{U}_m(T)$. Квазипроизводные

$${}^0_P w(t), {}^1_P w(t), \dots, {}^m_P w(t)$$

порядка $0, 1, \dots, m$ относительно матрицы $P(t)$ для непрерывной функции $w: T \rightarrow \mathbb{R}$ определяются по следующим рекуррентным правилам [17]:

$$\begin{aligned} {}^0_P w(t) &= p_{00}(t)w(t), \quad {}^1_P w(t) = p_{11}(t) \frac{d({}^0_P w(t))}{dt} + p_{10}(t)({}^0_P w(t)), \dots, \\ {}^k_P w(t) &= p_{kk}(t) \frac{d({}^{k-1}_P w(t))}{dt} + \sum_{i=0}^{k-1} p_{ki}(t)({}^i_P w(t)) \quad (k = 2, 3, \dots, m). \end{aligned} \quad (5)$$

Предполагается, что операции дифференцирования в формулах (5) выполнимы и приводят к непрерывным функциям. Семейство всех непрерывных функций, обладающих непрерывными квазипроизводными относительно заданной матрицы $P \in \mathcal{U}_m(T)$, обозначим через $C^m_P(T)$.

Ясно, что всякая m раз непрерывно дифференцируемая функция квазидифференцируема по единичной матрице. Однако легко указать примеры, когда не дифференцируемая в обычном смысле функция m раз квазидифференцируема по некоторой матрице $P \in \mathcal{U}_m(T)$.

В литературе квазидифференцируемость активно применяется при исследовании различных краевых задач для дифференциальных уравнений, в теории неосцилляции, при факторизации дифференциальных уравнений, в том числе при разложении Пойа – Маммана и т. д.

Несложно заметить, что все выходные функции $y(t)$, $t \in T$ системы (1), (3) имеют непрерывные квазипроизводные

$$\begin{aligned} {}^0_Q y(t) &= y(t), \quad {}^1_Q y(t) = \frac{d({}^0_Q y(t))}{dt} - h_{n-1}(t)({}^0_Q y(t)), \quad {}^2_Q y(t) = \frac{d({}^1_Q y(t))}{dt} - h_{n-2}(t)({}^0_Q y(t)), \dots, \\ {}^k_Q y(t) &= \frac{d({}^{k-1}_Q y(t))}{dt} - h_{n-k}(t)({}^{k-2}_Q y(t)) \quad (k = 2, 3, \dots, n) \end{aligned}$$

относительно $((n+1) \times (n+1))$ -матрицы

$$Q(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -h_{n-1}(t) & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -h_{n-2}(t) & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -h_{n-3}(t) & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -h_0(t) & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

которая, очевидно, принадлежит множеству $\mathcal{U}_n(T)$.

Лемма 1. Все выходные функции системы (1), (3) в форме Шварца имеют непрерывные квазипроизводные ${}^k_Q y(t)$ порядка k ($k = 0, 1, \dots, n$) относительно матрицы $Q(t)$ вида (6), удовлетворяют квазидифференциальному уравнению ${}^n_Q y(t) = 0$, а координаты $x_i(t)$ состояний системы (1) равны соответствующим квазипроизводным: $x_i(t) = {}^{n-i}_Q y(t)$, ($i = 1, 2, \dots, n$).

Таким образом, в случае системы наблюдения в форме Шварца (H, c^0) без труда находится матрица $Q \in \mathcal{U}_n(T)$ и квазипроизводные выходных функций $y(t)$, $t \in T$ системы (1), (3), по которым довольно просто определяются состояния системы наблюдения.

3. Равномерная наблюдаемость. Пусть на отрезке $T = [t_0, t_1]$ задана линейная нестационарная система наблюдения

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t), \quad y(t) = c(t)x(t) \quad (t \in T), \quad (7)$$

в которой $(n \times n)$ -матрица $A(t)$ и n -вектор-строка $c(t)$ непрерывны на T . отождествим каждую такую систему (7) с парой (A, c) , а множество всех их обозначим через Σ_n . Приведем обобщение классического определения равномерной наблюдаемости [3].

Систему (7) назовем равномерно наблюдаемой на T , если существует такая матрица $P \in \mathcal{U}_n(T)$, что при любом $x_0 \in \mathbb{R}^n$ выходные функции $y(t) = y(t, x_0)$ имеют непрерывные квазипроизводные ${}^k_P y(t)$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) относительно матрицы $P(t)$ и отображение

$$x(t) \rightarrow \left({}^0_P y(t), {}^1_P y(t), \dots, {}^{n-1}_P y(t) \right)$$

инъективно для каждого $t \in T$.

Следуя [4], приведем ряд понятий и утверждений. Пусть $P(t)$ – заданная матрица из множества $\mathcal{U}_n(T)$. Говорят, что система наблюдения (7) имеет P -класс $(n-1)$, и при этом будем писать $(A, c) \in \{P, n-1\}$, если каждая выходная функция этой системы имеет непрерывные квазипроизводные до порядка $(n-1)$ включительно.

Лемма 2. Система (7) имеет P -класс $(n-1)$ тогда и только тогда, когда существуют и непрерывны n -вектор строки $s_k(t)$, определяемые формулами

$$\begin{aligned} s_0(t) &= p_{00}(t)c(t), \quad s_1(t) = p_{11}(t) \left(s_0(t)A(t) + \frac{ds_0(t)}{dt} \right) + p_{10}(t)s_0(t), \dots, \\ s_k(t) &= p_{kk}(t) \left(s_{k-1}(t)A(t) + \frac{ds_{k-1}(t)}{dt} \right) + \sum_{j=0}^{k-1} p_{kj}(t)s_j(t) \quad (k = 2, 3, \dots, n-1). \end{aligned} \quad (8)$$

Составим из строк $s_k(t)$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) матрицу наблюдаемости

$$S_P(t) = \begin{pmatrix} s_0(t) \\ s_1(t) \\ \dots \\ s_{n-1}(t) \end{pmatrix}.$$

Можно показать, что для любого решения $x(t)$ системы (7) и соответствующего ему выхода $y(t)$ выполняется равенство

$$Y(t) = S_P(t)x(t),$$

где $Y(t)$ – столбец, образованный элементами ${}^0_P y(t), {}^1_P y(t), \dots, {}^{n-1}_P y(t)$.

Обозначим через $P_n(A, c)$ семейство всех матриц $P(t)$ из множества $\mathcal{U}_n(T)$, относительно которых все выходные функции системы (7) $(n-1)$ раз непрерывно квазидифференцируемы. Для любой матрицы $P \in P_n(A, c)$ определим матрицу наблюдаемости $S_P(t)$ по формулам (8).

Теорема 1. Система наблюдения (A, c) класса $\{P, n-1\}$ равномерно наблюдаема на T тогда и только тогда, когда ранг $S_P(t) = n$ при каждом $t \in T$.

Из теоремы 1.3 монографии [4] следует, что условия равномерной наблюдаемости системы (7) не зависят от выбора матрицы $P \in P_n(A, c)$.

При использовании техники квазидифференцирования возникает нетривиальная проблема нахождения хотя бы одного элемента $P(t)$ множества $\mathcal{U}_n(T)$, относительно которого выходные функции системы наблюдения $(n-1)$ раз квазидифференцируемы. Как показано выше, эта проблема довольно просто решается для систем наблюдения в форме Шварца. Поэтому если исходную систему наблюдения (7) можно преобразовать с помощью подходящей замены переменных к системе в форме Шварца, то выходные функции системы (7) будут иметь непрерывные квазипроизводные порядка $0, 1, \dots, n$ относительно матрицы $Q(t)$ вида (6).

Пусть \mathcal{G}_n – совокупность всех невырожденных при каждом $t \in T$ ($n \times n$) матриц $G(t)$, принадлежащих классу $C^1(T, \mathbb{R}^{n \times n})$. Действие группы \mathcal{G}_n на паре (A, c) из Σ_n зададим по правилу

$$G^*(A, c) = \left(G^{-1}(t)A(t)G(t) - G^{-1}(t) \frac{dG(t)}{dt}, c(t)G(t) \right), \quad G \in \mathcal{G}_n.$$

Символом $\mathcal{O}(A, c)$ обозначим орбиту системы $(A, c) \in \Sigma_n$ относительно группы \mathcal{G}_n . Говорят, что система (7) обладает формой Шварца, если в множестве $\mathcal{O}(A, c)$ существует система (H, c^0) , где $H(t)$ – матрица вида (3).

Поскольку множество всех выходных функций пары (A, c) инвариантно относительно действия группы \mathcal{G}_n , то если система (A, c) имеет P -класс $(n-1)$, то такой же P -класс имеет и любая система орбиты $\mathcal{O}(A, c)$. Поэтому если в орбите $\mathcal{O}(A, c)$ содержится система в форме Шварца, то каждая выходная функция $y(t)$ пары (A, c) n раз квазидифференцируема относительно матрицы (6) и удовлетворяет однородному квазидифференциальному уравнению ${}^n_{\mathcal{O}}y(t) = 0$. Следовательно, наличие в орбите $\mathcal{O}(A, c)$ пары в форме Шварца позволяет сравнительно просто решить вопрос о квазидифференцируемости выходных функций и равномерной наблюдаемости системы (A, c) .

Сказанное выше приводит к необходимости исследования вопроса о возможности преобразования системы (A, c) к форме Шварца, т. е. к вопросу о наличии в орбите $\mathcal{O}(A, c)$ хотя бы одной пары (H, c^0) . Как показывают примеры, это бывает не всегда.

Отметим, что если в орбите $\mathcal{O}(A, c)$ пары (A, c) существует форма Шварца, то, вообще говоря, она не является единственной. Например, если $n=3$ и для системы (A, c) существует форма Шварца

$$H(t) = \begin{pmatrix} 0 & h_0(t) & 0 \\ 1 & 0 & h_1(t) \\ 0 & 1 & h_2(t) \end{pmatrix},$$

то у этой системы имеется множество форм Шварца

$$H_g(t) = \begin{pmatrix} 0 & h_0(t) \pm g(t) & 0 \\ 1 & 0 & h_1(t) \mp g(t) \\ 0 & 1 & h_2(t) \end{pmatrix},$$

где $g(t) = \exp\left(C - \int_{t_0}^t h_2(\tau) d\tau\right)$, C – произвольная постоянная. Других форм Шварца, кроме указанных, в данном случае нет.

З а м е ч а н и е. Если предположить, что $h_0(t) \equiv 1$, то при $n=2, 3, 4$ форма Шварца единственна.

4. Существование формы Шварца для систем наблюдения со скалярным выходом. Получим условия существования формы Шварца в орбите пары (A, c) . Предположим, что для системы (7) форма Шварца существует. Это значит, что найдется такая матрица $G \in \mathcal{G}_n$, что

$$G^{-1}(t)A(t)G(t) - G^{-1}(t)\frac{dG(t)}{dt} = H(t), \quad c(t)G(t) = c^0. \quad (9)$$

Анализ соотношения (9) показывает, что для существования формы Шварца (H, c^0) необходимо выполнение условий

$$c \in C^1(T, R^n) \text{ и } c(t) \neq 0, \quad t \in T.$$

Считая их выполненными, определим функции $b_{ij}(t)$ и n -вектор функции $p_i(t)$ ($i=1, 2, \dots, n$) по правилу

$$\begin{aligned} b_{10}(t) &= \|c(t)\|, \quad p_1(t) = \frac{c(t)}{\|c(t)\|}, \quad b_{nn}(t) = \left(p_1(t)A(t) + \frac{dp_1(t)}{dt} \right) p_1'(t), \\ b_{n,n-1}(t) &= \left\| p_1(t)A(t) + \frac{dp_1(t)}{dt} - b_{nn}(t)p_1(t) \right\|, \quad p_2(t) = \frac{p_1(t)A(t) + \frac{dp_1(t)}{dt} - b_{nn}(t)p_1(t)}{b_{n,n-1}(t)}, \dots, \\ b_{n+1-i, n+1-j}(t) &= \left(p_i(t)A(t) + \frac{dp_i(t)}{dt} \right) p_j'(t), \quad (j=1, 2, \dots, i), \end{aligned} \quad (10)$$

$$b_{n+1-i, n-i}(t) = \left\| p_i(t)A(t) + \frac{dp_i(t)}{dt} - \sum_{k=1}^i b_{n+1-i, n+1-k}(t)p_k(t) \right\|,$$

$$p_{i+1}(t) = \frac{p_i(t)A(t) + \frac{dp_i(t)}{dt} - \sum_{k=1}^i b_{n+1-i, n+1-k}(t)p_k(t)}{b_{n+1-i, n-i}(t)},$$

$$(i = 1, 2, \dots, n-1).$$

Далее по матрицам систем наблюдения (A, c) и (H, c^0) построим дифференциальное уравнение

$$\frac{dG(t)}{dt} = H(t)G(t) - G(t)A(t) \quad (t \in T) \quad (11)$$

относительно $(n \times n)$ -матрицы $G(t)$, которая подчиняется условию

$$c^0 G(t) = c(t) \quad (t \in T). \quad (12)$$

Обозначим через $q_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) строки матрицы $G(t)$. Несложно убедиться, что соотношения (11), (12) равносильны при $i = 1, 2, \dots, n-1$ уравнениям

$$q_n(t) = c(t), \quad q_{n-1}(t) = \frac{dq_{n-1}(t)}{dt} + q_{n-1}(t)A(t) - h_{n-1}(t)c(t), \quad q_{n-2}(t) = \frac{dq_{n-2}(t)}{dt} + q_{n-2}(t)A(t) - h_{n-2}(t)c(t),$$

$$q_{n-i}(t) = \frac{dq_{n-i}(t)}{dt} + q_{n-i}(t)A(t) - h_{n-i}(t)q_{n-i+1}(t) \quad (i = 3, 4, \dots, n-1),$$

$$\dot{q}_1(t) + q_1(t)A(t) - h_0(t)q_2(t) = 0 \quad (t \in T).$$

С помощью метода ортогонализации Грамма – Шмидта запишем матрицу $G(t)$ в виде произведения $G(t) = G_o(t)G_\Delta(t)$ ортогональной непрерывно дифференцируемой матрицы $G_o(t)$ и верхнетреугольной непрерывно дифференцируемой матрицы $G_\Delta(t)$. Пусть $p_n(t), p_{n-1}(t), \dots, p_1(t)$ соответственно первая, вторая, ..., n -я строки матрицы $G_o'(t)$ (штрих означает транспонирование), а $g_{ij}(t)$ – элементы матрицы $G_\Delta(t)$. Очевидно, функции $p_i(t)$ и $g_{ij}(t)$ удовлетворяют соотношениям

$$g_{ii}(t) \neq 0, \quad \|p_i(t)\| = 1, \quad p_i(t)p_j'(t) = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, n; i \neq j).$$

Используя разложение $G(t) = G_o(t)G_\Delta(t)$, представим равенство (9) следующим образом:

$$\left(G_o'(t)A(t) + \frac{dG_o'(t)}{dt} \right) G_o(t)G_\Delta(t) = G_\Delta(t)H(t) + \frac{dG_\Delta(t)}{dt}, \quad c(t)G_o(t) = c^0 G_\Delta^{-1}(t).$$

Анализ равенства $c(t)G_o(t) = c^0 G_\Delta^{-1}(t)$ приводит к соотношениям

$$\|c(t)\| \neq 0, \quad p_1(t) = c(t) \|c(t)\|^{-1}, \quad g_{nn}(t) = \|c(t)\|^{-1}.$$

Положим $B(t) = \left(G_o'(t)A(t) + \frac{dG_o'(t)}{dt} \right) G_o(t)$ и обозначим через $b_{ij}(t)$ элементы этой матрицы. Если для системы (A, c) существует форма Шварца, то, учитывая свойства матрицы $G_o(t)$, можно рекуррентно определить функции $b_{ij}(t), p_i(t)$ по формулам (10). Функции $h_i(t)$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$), определяющие форму Шварца, последовательно выражаются через элементы матрицы $G_\Delta(t)$, диагональные элементы которой равны

$$g_{nn}(t) = \frac{1}{\|c(t)\|}, \quad g_{i-1, i-1}(t) = \frac{g_{ii}(t)}{b_{i, i-1}(t)}.$$

Исходя из равенства наддиагональных элементов матриц $B(t)G_{\Delta}(t)$ и $G_{\Delta}(t)H(t) + \frac{dG_{\Delta}(t)}{dt}$ получаем дифференциальные уравнения для определения остальных неизвестных элементов матрицы $G_{\Delta}(t)$.

Справедлива

Теорема 2. Система (A, c) обладает формой Шварца, если функции $p_i(t)$ ($i=1, 2, \dots, n$) непрерывно дифференцируемы на T , функции $b_{ij}(t)$ ($i=1, 2, \dots, n; j=i, i+1, \dots, n$) $(n-2)$ раза непрерывно дифференцируемы и выполняются условия $b_{i,i-1}(t) \neq 0$ ($i=1, 2, \dots, n$), $t \in T$.

Формы Шварца тесно связаны с каноническими формами Фробениуса (A^0, c^0) , $A^0(t) = (\delta_{i,j+1} + \delta_{n,j} \alpha_{i-1}(t))_{i,j=1}^n$ (δ_{ij} – символ Кронекера), которые широко используются в математической теории систем [1, 3, 4]. Например, для систем пятого порядка форма Шварца (H, c^0) преобразуется к канонической форме Фробениуса с помощью следующей матрицы:

$$G(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & h_0(t) & -\dot{h}_0(t) & \ddot{h}_0(t) + h_0^2(t) + h_0(t)h_1(t) \\ 0 & 1 & 0 & h_0(t) + h_1(t) & -2\dot{h}_0(t) - \dot{h}_1(t) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & h_0(t) + h_1(t) + h_2(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

при этом функции, определяющие каноническую форму Фробениуса, находятся по формулам

$$\begin{aligned} \alpha_4(t) &= h_4(t), \quad \alpha_3(t) = h_0(t) + h_1(t) + h_2(t) + h_3(t), \\ \alpha_2(t) &= -3 \frac{dh_0(t)}{dt} - 2 \frac{dh_1(t)}{dt} - \frac{dh_2(t)}{dt} - h_4(t)(h_0(t) + h_1(t) + h_2(t)), \\ \alpha_1(t) &= 3 \frac{d^2 h_0(t)}{dt^2} + \frac{d^2 h_1(t)}{dt^2} + h_4(t) \left(2 \frac{dh_0(t)}{dt} + \frac{dh_1(t)}{dt} \right) - h_0(t)h_2(t) - h_3(t)(h_0(t) + h_1(t)), \\ \alpha_0(t) &= -\frac{d^3 h_0(t)}{dt^3} + \frac{dh_0(t)}{dt} h_2(t) + h_0(t) \frac{dh_2(t)}{dt} - h_4(t) \left(\frac{d^2 h_0(t)}{dt^2} - h_0(t)h_2(t) \right) + \frac{dh_0(t)}{dt} h_3(t). \end{aligned}$$

Заметим, что несмотря на неединственность формы Шварца, из всех таких форм, находящихся в орбите $\mathcal{O}(A, c)$, получается одна и та же каноническая форма Фробениуса.

5. Существование формы Шварца для равномерно наблюдаемых систем. Пусть на отрезке $T = [t_0, t_1]$ задана линейная нестационарная равномерно наблюдаемая система (A, c) класса n . Для такого класса систем существует непрерывно дифференцируемая невырожденная при каждом $t \in T$ матрица наблюдаемости $S(t)$, строки которой находятся по рекуррентным формулам

$$s_0(t) = c(t), \quad s_{i+1}(t) = s_i(t)A(t) + \frac{ds_i(t)}{dt} \quad (i=0, 1, \dots, n-1),$$

а полный инвариант пары (A, c) относительно действия группы \mathcal{G}_n равен

$$(f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)) = s_n(t)S^{-1}(t).$$

Теорема 3. Форма Шварца для равномерно наблюдаемых систем (A, c) класса n существует тогда и только тогда, когда $f_i \in C^{i-1}(T, R)$ ($i=1, 2, \dots, n$).

Например, для системы третьего порядка функции $h_0(t), h_1(t), h_2(t)$, определяющие форму Шварца, находятся по формулам

$$h_2(t) = f_3(t), \quad h_0(t) = f_2(t) - h_1(t) - 2f_3(t),$$

$$h_1(t) = \exp\left(-\int_{t_0}^t f_3(\tau) d\tau\right) \left(C + \int_{t_0}^t \left(f_1(\tau) + f_3(\tau)f_2(\tau) - \frac{d^2 f_3(\tau)}{dt^2} - 2f_3(\tau) \frac{df_3(\tau)}{dt} \right) \exp\left(-\int_{t_0}^t f_3(\xi) d\xi\right) d\tau \right),$$

где C – произвольная постоянная. Коэффициенты же канонической формы Фробениуса в данном случае имеют вид

$$\alpha_2(t) = f_3(t), \quad \alpha_1(t) = f_2(t) - 2f_3(t), \quad \alpha_0(t) = f_1(t) - \frac{df_2(t)}{dt} + \frac{d^2 f_3(t)}{dt^2}.$$

Список использованной литературы

1. *Silverman, L. M.* Transformation time-variable systems to canonical (phase-variable) form / L. M. Silverman // IEEE Trans. Autom. Control. – 1966. – Vol. AC-11, N 2. – P. 300–303.
2. *Silverman, L. M.* Controllability and observability in time-variable linear systems / L. M. Silverman, H. E. Meadows // SIAM J. Control. – 1967. – Vol. 5, N 1. – P. 64–73.
3. *Гайшун, И. В.* Введение в теорию линейных нестационарных систем / И. В. Гайшун. – М.: Едиториал УРСС, 2004.
4. *Астровский, А. И.* Линейные системы с квазидифференцируемыми коэффициентами: управляемость и наблюдаемость движений / А. И. Астровский, И. В. Гайшун. – Минск: Беларус. навука, 2013.
5. *Гайшун, И. В.* Описание множества равномерно наблюдаемых линейных нестационарных систем / И. В. Гайшун, А. И. Астровский // Докл. АН Беларуси. – 1996. – Т. 40, № 5. – С. 5–8.
6. *Астровский, А. И.* Равномерная и аппроксимативная наблюдаемость линейных нестационарных систем / А. И. Астровский, И. В. Гайшун // Автоматика и телемеханика. – 1998. – № 7. – С. 3–13.
7. *Астровский, А. И.* Связь между каноническими формами линейных дифференциальных систем наблюдения и каноническими формами их дискретных аппроксимаций / А. И. Астровский, И. В. Гайшун // Дифференц. уравнения. – 2011. – Т. 47, № 7. – С. 954–962.
8. *Астровский, А. И.* Канонические формы линейных нестационарных систем наблюдения с квазидифференцируемыми коэффициентами относительно различных групп преобразований / А. И. Астровский, И. В. Гайшун // Дифференц. уравнения. – 2011. – Т. 47, № 2. – С. 254–263.
9. *Астровский, А. И.* Один способ построения канонических форм Фробениуса линейных нестационарных систем наблюдения / А. И. Астровский, И. В. Гайшун // Дифференц. уравнения. – 2010. – Т. 46, № 10. – С. 1479–1487.
10. *Астровский, А. И.* Квазидифференцируемость и канонические формы линейных нестационарных систем наблюдения / А. И. Астровский, И. В. Гайшун // Дифференц. уравнения. – 2010. – Т. 46, № 3. – С. 423–431.
11. *Астровский, А. И.* Преобразование линейных нестационарных систем наблюдения со скалярным выходом к каноническим формам Фробениуса / А. И. Астровский // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2009. – Т. 53, № 6. – С. 16–21.
12. *Астровский, А. И.* Квазидифференцируемость и наблюдаемость линейных нестационарных систем / А. И. Астровский, И. В. Гайшун // Дифференц. уравнения. – 2009. – Т. 45, № 11. – С. 1567–1576.
13. *Астровский, А. И.* Канонические формы линейных нестационарных систем наблюдения и хессенбергова наблюдаемость / А. И. Астровский // Докл. Рос. акад. наук. – 2002. – Т. 383, № 4. – С. 439–442.
14. *Chen, C. F.* A matrix for evaluating Schwarz's form / C. F. Chen, H. Chu // IEEE Trans. Autom. Control. – 1966. – Vol. AC-11, N 2. – P. 303–305.
15. *Lab, M.* On Schwarz canonical form for large system simplification / M. Lab // IEEE Trans. Autom. Control. – 1975. – Vol. AC-20, N 2. – P. 262–263.
16. *Anderson, B. D. O.* Schwarz matrix properties for continuous and discrete systems / B. D. O. Anderson, E. I. Jury, M. Mansour // Int. J. Control. – 1976. – Vol. 23, N 1. – P. 1–16.
17. *Дерр, В. Я.* Неосцилляция решений линейного квазидифференциального уравнения / В. Я. Дерр // Изв. Ин-та математики и информатики Удмурт. гос. ун-та. – 1999. – Вып. 1 (16). – С. 3–105.

Поступила в редакцию 18.02.2016

УДК 519.2

Ю. С. ХАРИН, М. К. ЖУРАК

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ОЦЕНОК МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ ПАРАМЕТРОВ БИНОМИАЛЬНОЙ УСЛОВНО АВТОРЕГРЕССИОННОЙ МОДЕЛИ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫХ ДАННЫХ

*НИИ прикладных проблем математики и информатики Белорусского государственного университета,
Минск, Беларусь,
e-mail: kharin@bsu.by; mzhurak@gmail.com*

Исследованы асимптотические свойства оценок максимального правдоподобия параметров биномиальной условно авторегрессионной модели пространственно-временных данных. Доказана асимптотическая нормальность и найдена асимптотическая ковариационная матрица построенных оценок. Представлены результаты компьютерных экспериментов.

Ключевые слова: пространственно-временные данные, цепь Маркова, оценки максимального правдоподобия, информационная матрица Фишера, ковариационная матрица.

Yu. S. KHARIN, M. K. ZHURAK

ASYMPTOTIC ANALYSIS OF THE MAXIMUM LIKELIHOOD ESTIMATORS OF THE PARAMETERS FOR A BINOMIAL CONDITIONALLY AUTOREGRESSIVE MODEL OF SPATIO-TEMPORAL DATA

*Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics of the Belarusian State University, Minsk, Belarus,
e-mail: kharin@bsu.by; mzhurak@gmail.com*

Asymptotic properties of the maximum likelihood estimators of parameters for a binomial conditionally autoregressive model of spatio-temporal data are studied. The asymptotic normality is proved and the asymptotic covariance matrix is found for the estimators. The results of computer experiments are presented.

Keywords: spatio-temporal data, Markov chains, maximum likelihood estimators, Fisher information matrix, covariance matrix.

Введение. Моделирование и анализ пространственно-временных данных является актуальной научной задачей. В работе [1] байесовская пространственно-временная модель применялась для анализа случаев заболевания раком; в [2] байесовская пространственно-временная геостатистическая модель использовалась для решения задач при большом объеме данных. В [3] решается задача предсказания скорости ветра на основе пространственно-временных данных; в [4] изучена пуассоновская авторегрессионная модель, которая была применена для анализа финансовых данных фондовых операций.

При вероятностно-статистическом моделировании и анализе пространственно-временных данных возникают трудности двух типов. Во-первых, это необходимость совместного учета временных и пространственных зависимостей регистрируемых наблюдений, которая приводит к сложным моделям, содержащим много априорно неизвестных параметров. Во-вторых, это вычислительные проблемы, вызванные необходимостью обработки больших массивов пространственно-временных данных для достижения приемлемых уровней точности статистических оценок параметров, решений и прогнозов. В связи с этим в настоящее время большинство опубликованных работ имеет эмпирический характер: временные и пространственные зависимости рассматриваются по отдельности либо для этой цели приспособляются некоторые «близкие» модели без теоретического их обоснования.

В статье [5] разработана биномиальная условно авторегрессионная модель пространственно-временных данных и предложен алгоритм вычисления оценок максимального правдоподобия (ОМП), однако теоретический анализ свойств построенных ОМП не проводился. В данной работе продолжают начатые в [5] исследования: решается задача асимптотического анализа свойств построенных ОМП.

1. Биномиальная условно авторегрессионная модель пространственно-временных данных. Определим биномиальную условно авторегрессионную модель пространственно-временных данных, следуя [5]. Введем обозначения: (Ω, F, P) – вероятностное пространство; N – множество натуральных чисел; Z – множество целых чисел; $I\{H\}$ – индикаторная функция события H ; $s \in S = \{1, 2, \dots, n\}$ – индексная переменная, кодирующая пространственные координаты географических регионов (условимся далее называть их сайтами), на которые разбита изучаемая пространственная область; n – число сайтов; $t \in \{1, 2, \dots, T\}$ – дискретное время; $x_{s,t} \in \{0, 1, \dots, N\} = A$ – дискретная случайная величина наблюдения в момент времени t в сайте s ; $F_{<t} = \sigma\{x_{u,\tau} : u \in S, \tau \leq t-1\} \subset F$ – σ -алгебра, порожденная указанными в скобках случайными величинами; $z_{j,t} \geq 0, j = 1, \dots, m$ – наблюдаемый (известный) набор значений m внешних факторов в момент времени t ; $L(\xi)$ – закон распределения вероятностей случайной величины ξ ; $\mathbf{E}\{\cdot\}$, $\mathbf{D}\{\cdot\}$, $\mathbf{cov}\{\cdot, \cdot\}$ – символы математического ожидания, дисперсии, ковариации случайных величин соответственно; $\mathbf{Bi}(\cdot; N, p)$ – биномиальный закон распределения вероятностей с параметрами $N \in \mathbf{N}, 0 \leq p \leq 1$ для случайной величины ξ :

$$\mathbf{P}\{\xi = l\} = \mathbf{Bi}(l; N, p) ::= C_N^l p^l (1-p)^{N-l}, \quad l \in A, \quad L\{\xi\} = \mathbf{Bi}(\cdot; N, p), \quad (1)$$

где $C_N^l = (N! / (N-l)! l!)$.

Предполагается, что при фиксированной предыстории $F_{<t} = \{x_{s,\tau} : s \in S, \tau \leq t-1\}$ случайные величины $x_{1,t}, x_{2,t}, \dots, x_{n,t}$ условно независимы, причем

$$L\{x_{s,t} | F_{<t}\} = \mathbf{Bi}(\cdot; N, p_{s,t}), \quad (2)$$

$$\ln \frac{p_{s,t}}{1-p_{s,t}} = \sum_{i=1}^n a_{s,i} x_{i,t-1} + \sum_{j=1}^m b_{s,j} z_{j,t}, \quad s \in S, t \in Z, \quad (3)$$

где $a_s = (a_{s,1}, a_{s,2}, \dots, a_{s,n})' \in R^n$, $b_s = (b_{s,1}, \dots, b_{s,m})' \in R^m$, $\theta_s = (a_s', b_s')' \in R^{n+m}$, $s \in S$, $\theta = (\theta_1', \dots, \theta_n')' \in R^{n(n+m)}$ – составной вектор-столбец параметров модели, штрих обозначает транспонирование.

Справедливы следующие полезные выражения для вычисления вероятности $p_{s,t}$, вытекающие из (3):

$$p_{s,t} = p_s(X_{t-1}, Z_t) ::= \frac{\exp(a_s' X_{t-1} + b_s' Z_t)}{1 + \exp(a_s' X_{t-1} + b_s' Z_t)} = \frac{\exp(\theta_s' Y_t)}{1 + \exp(\theta_s' Y_t)}, \quad s \in S, t \in Z, \quad (4)$$

$$1 - p_{s,t} = \left(1 + \exp(\theta_s' Y_t)\right)^{-1}, \quad \frac{p_{s,t}}{1 - p_{s,t}} = \exp(\theta_s' Y_t),$$

где $Z_t = (z_{1,t}, z_{2,t}, \dots, z_{m,t})' \in R^m$ – вектор-столбец, задающий значения m внешних факторов в момент времени t ; $X_t = (x_{1,t}, x_{2,t}, \dots, x_{n,t})' \in A^n$ – вектор-столбец, задающий временной срез исследуемого явления по всем n сайтам в момент времени $t \in Z$; $Y_t = (X_{t-1}', Z_t')' \in R^{n+m}$ – составной вектор-столбец «предопределенных» переменных.

Обозначим $L = \left\{l_j = (l_{1,j}, \dots, l_{n,j})' \in A^n : j = 1, 2, \dots, (N+1)^n\right\}$ – лексикографически упорядоченное множество $v = (N+1)^n$ всевозможных значений, которые принимает вектор X_t : $|L| = v$.

2. Вероятностные свойства биномиальной условно авторегрессионной модели. Установим ряд свойств биномиальной условно авторегрессионной модели, которые понадобятся при асимптотическом анализе свойств ОМП параметров этой модели.

Теорема 1 [5]. *Если имеет место модель (2), (3), то наблюдаемый векторный временной ряд X_t является конечной неоднородной n -мерной векторной цепью Маркова с конечным пространством состояний L , матрицей вероятностей одношаговых переходов $Q = Q(\theta, t) = (q_{I,J}(\theta, t)) \in [0, 1]^{v \times v}$, $I = (I_s), J = (J_s) \in L$:*

$$q_{I,J} = q_{I,J}(\theta, t) := \prod_{s=1}^n C_N^{J_s} \left(\exp(a_s' I + b_s' Z_{t-1}) \right)^{J_s} \left(1 + \exp(a_s' I + b_s' Z_{t-1}) \right)^{-N}, \quad t \in \mathbf{Z}. \quad (5)$$

Отметим, что в условиях теоремы 1, если вектор внешних факторов $Z_t = Z = (z_1, \dots, z_m)' \in R^m$ не зависит от t , то матрица вероятностей одношаговых переходов (5) не зависит от t и цепь Маркова является однородной [6]:

$$Q(\theta) = (q_{I,J}(\theta)) \in [0, 1]^{v \times v},$$

$$q_{I,J}(\theta) = \prod_{s=1}^n C_N^{J_s} \left(\exp\{a_s' I + b_s' Z\} \right)^{J_s} \left(1 + \exp\{a_s' I + b_s' Z\} \right)^{-N}, \quad I, J \in L. \quad (6)$$

Как доказано в [5], если имеет место модель (2), (3) и $Z_t = Z = (z_1, \dots, z_m)' \in R^m$ не зависит от t , то для n -мерной конечной векторной цепи Маркова X_t выполняется условие эргодичности и существует единственное стационарное распределение вероятностей $\pi = (\pi_I) \in [0, 1]^v$, являющееся решением системы уравнений:

$$Q' \pi = \pi, \quad \sum_{I \in L} \pi_I = 1. \quad (7)$$

Лемма 1. *При фиксированной предыстории X_{t-1} вектор-столбец условного математического ожидания равен*

$$\mathbf{E}\{X_t | X_{t-1}\} = (N p_i(X_{t-1}, Z_t)) \in R^n,$$

а условная ковариационная матрица принимает диагональный вид:

$$\mathbf{cov}\{X_t, X_t | X_{t-1}\} = \text{diag}\{N p_i(X_{t-1}, Z_t)(1 - p_i(X_{t-1}, Z_t))\} \in R^{n \times n}.$$

Доказательство. В силу модели (2), (3) и свойств биномиального распределения условное математическое ожидание случайной величины $x_{i,t}$ при условии X_{t-1} имеет вид

$$\mathbf{E}\{x_{i,t} | X_{t-1}\} = N p_i(X_{t-1}, Z_t), \quad i = 1, \dots, n.$$

Найдем представление условной ковариационной матрицы $\mathbf{cov}\{X_t, X_t | X_{t-1}\} = (c_{i,j}) \in R^{n \times n}$, где $c_{i,j} = \mathbf{cov}\{x_{i,t}, x_{j,t} | X_{t-1}\} = \mathbf{E}\{(x_{i,t} - \mathbf{E}\{x_{i,t} | X_{t-1}\})(x_{j,t} - \mathbf{E}\{x_{j,t} | X_{t-1}\}) | X_{t-1}\}$. Для этого рассмотрим два случая. Если $i = j$, то дисперсия $c_{i,i} = \mathbf{D}\{x_{i,t} | X_{t-1}\} = N p_{i,t}(1 - p_{i,t})$.

Так как в условиях модели (2), (3) при фиксированной предыстории X_{t-1} случайные величины $x_{i,t}, x_{j,t}$, $i \neq j$, условно независимы, то согласно [7] ковариация $c_{i,j} = 0$.

Таким образом, матрица $\mathbf{cov}\{X_t, X_t | X_{t-1}\}$ является диагональной с диагональными элементами $N p_i(X_{t-1}, Z_t)(1 - p_i(X_{t-1}, Z_t))$.

Лемма 2. *Если имеет место модель (2), (3), то случайный процесс X_t является невырожденным при любых ограниченных значениях коэффициентов $\{\theta_s\}$ и $\{z_{i,t}\}$, т. е. в биномиальном распределении (2)*

$$0 < p_{s,t} < 1 \text{ для всех } s \in S, t \in \mathbf{Z}.$$

Доказательство. Из (4) имеем:

$$p_{s,t} = \frac{\exp(\theta_s' Y_t)}{1 + \exp(\theta_s' Y_t)} = \frac{1}{1 + \exp(-\theta_s' Y_t)}, Y_t = (X_{t-1}', Z_t')' \in R^{n+m}, t \in \mathbf{Z}.$$

Так как $x_{s,t} \in \{0, 1, \dots, N\}$, то при ограниченных значениях $\{\theta_s\}$ и $\{z_{i,t}\}$ величина $|\theta_s' Y_t| < \infty$, следовательно, $0 < p_{s,t} < 1$ для всех $s \in S$.

Лемма 3. Если имеет место модель (2), (3), то при любых ограниченных значениях коэффициентов $\{\theta_s\}$ и $\{z_{i,t}\}$ ковариационная матрица $\mathbf{cov}\{X_t, X_t\}$ является положительно определенной и принимает следующий вид:

$$\mathbf{cov}\{X_t, X_t\} = N \operatorname{diag}\{p_i(X_{t-1}, Z_t)(1 - p_i(X_{t-1}, Z_t))\} + D \in R^{n \times n},$$

$$D = (d_{ij}), d_{ij} = N^2 \mathbf{cov}\left\{\left(1 + \exp(-\theta_i Y_t)\right)^{-1}, \left(1 + \exp(-\theta_j Y_t)\right)^{-1}\right\}, i, j = 1, \dots, n.$$

Доказательство. Вычислим ковариационную матрицу, используя формулу полного математического ожидания:

$$\begin{aligned} \mathbf{cov}\{X_t, X_t\} &= \mathbf{E}\left\{(X_t - \mathbf{E}\{X_t\})(X_t - \mathbf{E}\{X_t\})'\right\} = \mathbf{E}\left\{\mathbf{E}\left\{(X_t - \mathbf{E}\{X_t\})(X_t - \mathbf{E}\{X_t\})' \mid X_{t-1}\right\}\right\} \equiv \\ &\equiv \mathbf{E}\left\{\mathbf{E}\left\{\left(X_t - \mathbf{E}\{X_t \mid X_{t-1}\} - (\mathbf{E}\{X_t\} - \mathbf{E}\{X_t \mid X_{t-1}\})\right)\left(X_t - \mathbf{E}\{X_t \mid X_{t-1}\} - (\mathbf{E}\{X_t\} - \mathbf{E}\{X_t \mid X_{t-1}\})\right)' \mid X_{t-1}\right\}\right\} = \\ &= \mathbf{E}\left\{\mathbf{E}\left\{\left(X_t - \mathbf{E}\{X_t \mid X_{t-1}\}\right)\left(X_t - \mathbf{E}\{X_t \mid X_{t-1}\}\right)' \mid X_{t-1}\right\}\right\} - \\ &- \mathbf{E}\left\{\mathbf{E}\left\{\left(X_t - \mathbf{E}\{X_t \mid X_{t-1}\}\right)\left(\mathbf{E}\{X_t\} - \mathbf{E}\{X_t \mid X_{t-1}\}\right)' \mid X_{t-1}\right\}\right\} - \\ &- \mathbf{E}\left\{\mathbf{E}\left\{\left(\mathbf{E}\{X_t\} - \mathbf{E}\{X_t \mid X_{t-1}\}\right)\left(X_t - \mathbf{E}\{X_t \mid X_{t-1}\}\right)' \mid X_{t-1}\right\}\right\} + \\ &+ \mathbf{E}\left\{\mathbf{E}\left\{\left(\mathbf{E}\{X_t\} - \mathbf{E}\{X_t \mid X_{t-1}\}\right)\left(\mathbf{E}\{X_t\} - \mathbf{E}\{X_t \mid X_{t-1}\}\right)' \mid X_{t-1}\right\}\right\} = \\ &= \mathbf{E}\left\{\mathbf{cov}\{X_t, X_t \mid X_{t-1}\}\right\} - \mathbf{E}\left\{\mathbf{E}\left\{\left(X_t - \mathbf{E}\{X_t \mid X_{t-1}\}\right) \mid X_{t-1}\right\}\left(\mathbf{E}\{X_t\} - \mathbf{E}\{X_t \mid X_{t-1}\}\right)'\right\} - \\ &- \mathbf{E}\left\{\left(\mathbf{E}\{X_t\} - \mathbf{E}\{X_t \mid X_{t-1}\}\right)\mathbf{E}\left\{\left(X_t - \mathbf{E}\{X_t \mid X_{t-1}\}\right)' \mid X_{t-1}\right\}\right\} + \\ &+ \mathbf{E}\left\{\left(\mathbf{E}\{X_t\} - \mathbf{E}\{X_t \mid X_{t-1}\}\right)\left(\mathbf{E}\{X_t\} - \mathbf{E}\{X_t \mid X_{t-1}\}\right)'\right\} = \mathbf{E}\left\{\mathbf{cov}\{X_t, X_t \mid X_{t-1}\}\right\} + D, \end{aligned}$$

где $D = \mathbf{cov}\{\mathbf{E}\{X_t \mid X_{t-1}\}, \mathbf{E}\{X_t \mid X_{t-1}\}\}$. Пользуясь леммой 1 и формулой (4), получим:

$$\mathbf{cov}\{X_t, X_t\} = N \operatorname{diag}\left\{\mathbf{E}\left\{p_i(X_{t-1}, Z_t)(1 - p_i(X_{t-1}, Z_t))\right\}\right\} + D, \quad (8)$$

где $D = (d_{ij}), d_{ij} = N^2 \mathbf{cov}\left\{\left(1 + \exp(-\theta_i Y_t)\right)^{-1}, \left(1 + \exp(-\theta_j Y_t)\right)^{-1}\right\}, i, j = 1, \dots, n$.

При любых ограниченных значениях коэффициентов $\{\theta_s\}$ и $\{z_{i,t}\}$, в силу леммы 2, диагональная матрица $N \operatorname{diag}\left\{\mathbf{E}\left\{p_i(X_{t-1}, Z_t)(1 - p_i(X_{t-1}, Z_t))\right\}\right\}$ является положительно определенной. В силу того, что D – ковариационная матрица, она неотрицательно определена [7]. Тогда из (8) и того факта [8], что сумма положительно определенной и неотрицательно определенной матриц

есть матрица положительно определенная, следует, что матрица $\text{cov}\{X_t, X_t\}$ положительно определена.

3. Оценки максимального правдоподобия параметров модели и их асимптотические свойства. Примем обозначения: $\theta = (\theta_1', \dots, \theta_n')' \in R^{n(n+m)}$ – составной вектор $n(n+m)$ параметров, подлежащих оцениванию; \mathbf{O}_m – m -нулевой вектор-столбец.

В рамках модели (2), (3) логарифмическая функция правдоподобия для T наблюдений $\{X_t : t = 1, 2, \dots, T\}$ имеет аддитивный по $\theta_1, \dots, \theta_n$ вид [5]:

$$l(\theta) = \sum_{s=1}^n l_s(\theta_s), l_s(\theta_s) = \sum_{t=1}^T \left(x_{s,t} \theta_s' Y_t - N \ln \left(1 + \exp(\theta_s' Y_t) \right) \right) + \ln C_N^{x_{s,t}}.$$

Оценка максимального правдоподобия $\hat{\theta} \in R^{n(n+m)}$ определяется как решение следующей экстремальной задачи [5]:

$$l(\theta) \rightarrow \max_{\theta}. \quad (9)$$

Лемма 4. Пусть $\xi \in R^k$ – некоторый случайный вектор, $C(\xi) \in R^N$ – некоторый случайный вектор-столбец, а $\alpha(\xi) > 0$ – положительная случайная величина, зависящие от ξ . Тогда, если матрица $\mathbf{E}\{C(\xi)C'(\xi)\}$ положительно определена, то таким же свойством обладает матрица $\mathbf{E}\{\alpha(\xi)C(\xi)C'(\xi)\}$.

Доказательство. Пусть $z \in R^N$ – произвольный неслучайный ненулевой вектор. Проверим выполнение условия $z' \mathbf{E}\{\alpha(\xi)C(\xi)C'(\xi)\}z > 0$, характеризующего положительную определенность матрицы:

$$z' \mathbf{E}\{\alpha(\xi)C(\xi)C'(\xi)\}z = \mathbf{E}\{\alpha(\xi)z' C(\xi)C'(\xi)z\}.$$

Поскольку в условиях леммы матрица $\mathbf{E}\{C(\xi)C'(\xi)\} > 0$ является положительно определенной, то для произвольного ненулевого вектора выполняется $\mathbf{E}\{z' C(\xi)C'(\xi)z\} > 0$. Так как $\alpha(\xi) > 0$, то в силу свойств математического ожидания $\mathbf{E}\{\alpha(\xi)z' C(\xi)C'(\xi)z\} > 0$. Таким образом, выполняется критерий положительной определенности для интересующей нас матрицы $\mathbf{E}\{\alpha(\xi)C(\xi)C'(\xi)\}$.

Теорема 2. Если имеет место модель (2), (3), $m = 1$, $z_{1t} = z \neq 0$ не зависит от t и цепь Маркова $X_t \in L$ является стационарной, то при любых ограниченных значениях коэффициентов $\{\theta_s\}$ и ограниченном $z \in R^1$ информационная матрица Фишера является невырожденной и имеет следующий блочно-диагональный вид:

$$G = N \text{diag} \left\{ \mathbf{E} \left\{ Y_t Y_t' p_i(X_{t-1}, z) (1 - p_i(X_{t-1}, z)) \right\}, Y_t = (X_{t-1}', z)', i = 1, \dots, n. \right\} \quad (10)$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что, как указано в п. 3 после теоремы 1, при $z_{1,t} = \text{const}$ цепь Маркова X_t эргодична. Условие стационарности означает, что распределение вероятностей X_t не зависит от t и совпадает со стационарным π , определенным в (7). Вычислим теперь матрицу $G = (g_{k,l}) \in R^{n(n+1) \times n(n+1)}$, введенную в [9], покажем ее связь с информационной матрицей Фишера и проверим ее невырожденность, следуя [9]:

$$g_{k,l} = \sum_{I,J} \left(\frac{\pi_I(\theta^0)}{q_{I,J}(\theta^0)} \left(\frac{\partial q_{I,J}}{\partial v_k} \right)_{\theta^0} \left(\frac{\partial q_{I,J}}{\partial v_l} \right)_{\theta^0} \right), \quad k, l = 1, 2, \dots, n(n+1), \quad (11)$$

где $q_{I,J} = q_{I,J}(V)$ определяется (6), $V = (v_k) = (\theta_{1,1}, \dots, \theta_{1,n+1}, \theta_{2,1}, \dots, \theta_{n,n+1}) \in R^{n(n+1)}$.

Поскольку справедливо тождество

$$\frac{\partial q_{I,J}}{\partial v_k} \equiv q_{I,J} \frac{\partial \ln q_{I,J}}{\partial v_k},$$

представим (11) в эквивалентном виде:

$$g_{k,l} = \sum_{I,J} \left(\frac{\pi_I(\theta^0)}{q_{I,J}(\theta^0)} \left(\frac{\partial q_{I,J}}{\partial v_k} \right)_{\theta^0} \left(\frac{\partial q_{I,J}}{\partial v_l} \right)_{\theta^0} \right) = \sum_{I,J} \left(\frac{\pi_I(\theta^0)}{q_{I,J}(\theta^0)} \left(q_{I,J} \frac{\partial \ln q_{I,J}}{\partial v_k} \right)_{\theta^0} \left(q_{I,J} \frac{\partial \ln q_{I,J}}{\partial v_l} \right)_{\theta^0} \right) = \sum_{I,J} \left(\pi_I(\theta^0) q_{I,J}(\theta^0) \left(\frac{\partial \ln q_{I,J}}{\partial v_k} \right)_{\theta^0} \left(\frac{\partial \ln q_{I,J}}{\partial v_l} \right)_{\theta^0} \right). \quad (12)$$

Из (12) и [7] видно, что матрица G представляет собой усредненную условную информационную матрицу Фишера $J_{kl}(X_{t-1})$ для условного распределения вероятностей X_t при условии X_{t-1} :

$$g_{kl} = \mathbf{E}\{J_{kl}(X_{t-1})\}, J_{kl}(X_{t-1}) = \mathbf{E}\left\{\left(\frac{\partial \ln q_{X_{t-1}, X_t}}{\partial v_k}\right)_{\theta^0} \left(\frac{\partial \ln q_{X_{t-1}, X_t}}{\partial v_l}\right)_{\theta^0} \middle| X_{t-1}\right\} \equiv \mathbf{E}\left\{-\frac{\partial^2 \ln q_{X_{t-1}, X_t}}{\partial v_k \partial v_l} \middle| X_{t-1}\right\}.$$

Матрицу $G = (g_{k,l}) \in R^{n(n+1) \times n(n+1)}$ разобьем на $n \times n$ блочных $(n+1) \times (n+1)$ матриц:

$$H_{i,j} = \sum_{I,J} \left(\pi_I(\theta^0) q_{I,J}(\theta^0) (\nabla_{\theta_i} \ln q_{I,J})_{\theta^0} (\nabla_{\theta_j} \ln q_{I,J})_{\theta^0}' \right) \in R^{(n+1) \times (n+1)}, i, j \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (13)$$

Используя (6), имеем ($i = 1, \dots, n$; $I = (I_s)$, $J = (J_s) \in L$):

$$\begin{aligned} \nabla_{\theta_i} \ln q_{I,J} &= \nabla_{\theta_i} \ln \left(\prod_{s=1}^n C_N^{J_s} \exp(J_s \theta_s' Y) (1 + \exp(\theta_s' Y))^{-N} \right) = \\ &= \nabla_{\theta_i} \left(\sum_{s=1}^n \ln C_N^{J_s} + J_s \theta_s' Y - N \ln(1 + \exp(\theta_s' Y)) \right) = J_i Y - N \frac{\exp(\theta_i' Y)}{1 + \exp(\theta_i' Y)} Y = (J_i - N p_i(Y)) Y, \quad Y = (I', z)'. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} H_{i,j} &= \sum_{I,J} \left(\pi_I(\theta^0) q_{I,J}(\theta^0) (J_i Y - N p_i(Y)) (J_j Y - N p_j(Y))' \right) = \\ &= \sum_{I,J} Y Y' \left(\pi_I(\theta^0) q_{I,J}(\theta^0) (J_i - N p_i(Y)) (J_j - N p_j(Y)) \right) = \\ &= \sum_I Y Y' \pi_I(\theta^0) \sum_J q_{I,J}(\theta^0) (J_i - \mathbf{E}\{x_{i,t} | X_{t-1} = I\}) (J_j - \mathbf{E}\{x_{j,t} | X_{t-1} = I\}) = \\ &= \sum_I Y Y' \pi_I(\theta^0) \mathbf{cov}\{x_{i,t}, x_{j,t} | X_{t-1} = I\} = \mathbf{E}\{Y_t Y_t' \mathbf{cov}\{x_{i,t}, x_{j,t} | X_{t-1} = I\}\}, \end{aligned}$$

где $Y_t = (X_{t-1}', z)'$. Воспользуемся леммой 1, тогда

$$H_{i,j} = \begin{cases} \mathbf{O}_{n+1}, & i \neq j; \\ N \mathbf{E}\{Y_t Y_t' p_i(X_{t-1}, z) (1 - p_i(X_{t-1}, z))\}, & i = j. \end{cases}$$

Таким образом, матрица G является блочно-диагональной с диагональными блоками $N \mathbf{E}\{Y_t Y_t' p_i(X_{t-1}, z) (1 - p_i(X_{t-1}, z))\}$. Тогда определитель матрицы G вычисляется следующим образом [8]:

$$\det(G) = N^{n(n+1)} \prod_{i=1}^n \det \left(\mathbf{E}\{Y_t Y_t' p_i(X_{t-1}, z) (1 - p_i(X_{t-1}, z))\} \right). \quad (14)$$

Вычислим $\det \mathbf{E}\{Y_t Y_t'\}$, используя свойства определителя блочных матриц [8]:

$$\begin{aligned} \det \mathbf{E}\{Y_t Y_t'\} &= \det \begin{pmatrix} \mathbf{E}\{X_{t-1} X_{t-1}'\} & z \mathbf{E}\{X_{t-1}\} \\ z \mathbf{E}\{X_{t-1}'\} & z^2 \end{pmatrix} = z^2 \det \left(\mathbf{E}\{X_{t-1} X_{t-1}'\} - \frac{1}{z^2} z \mathbf{E}\{X_{t-1}\} z \mathbf{E}\{X_{t-1}'\} \right) = \\ &= z^2 \det \left(\mathbf{E}\{X_{t-1} X_{t-1}'\} - \mathbf{E}\{X_{t-1}\} \mathbf{E}\{X_{t-1}'\} \right) = z^2 \det(\mathbf{cov}\{X_{t-1}, X_{t-1}\}). \end{aligned}$$

Так как $z \neq 0$ и в силу леммы 3 $\mathbf{cov}\{X_{t-1}, X_{t-1}\} \succ 0$, то $\det(\mathbf{cov}\{X_{t-1}, X_{t-1}\}) > 0$, поэтому $\det \mathbf{E}\{Y_t Y_t'\} > 0$. В силу леммы 2 имеем $p_i(X_{t-1}, z)(1 - p_i(X_{t-1}, z)) > 0$. Тогда, поскольку $\mathbf{E}\{Y_t Y_t'\} \succ 0$ – положительно определенная матрица, то по лемме 4 матрица $\mathbf{E}\{Y_t Y_t' p_i(X_{t-1}, z)(1 - p_i(X_{t-1}, z))\} \succ 0$ также является положительно определенной, поэтому $\det \left(N \mathbf{E}\{Y_t Y_t' p_i(X_{t-1}, z)(1 - p_i(X_{t-1}, z))\} \right) \neq 0, i \in S$. Тогда из (14) следует, что $\det(G) \neq 0$, откуда получаем, что матрица G – невырожденная.

Заметим, что если $m > 1$, но $Z_t = (z_{j,t}) \in R^m$ не зависит от времени, то этот случай сводится к случаю, рассмотренному в теореме, введением вспомогательного параметра $\tilde{b}_s := \sum_{j=1}^m b_{s,j} z_{j,1}, s \in S$.

Теорема 3. Если $m = 1, z_{1t} = z \neq 0$ не зависит от t и цепь Маркова $X_t \in L$ стационарна, то при любых ограниченных значениях коэффициентов $\{\theta_s\}$ и ограниченном $z \in R^1$ построенные согласно (9) оценки максимального правдоподобия $\{\hat{\theta}_s\}$ при $T \rightarrow +\infty$ являются асимптотически нормально распределенными:

$$L\{\sqrt{T}(\hat{\theta} - \theta^0)\} \longrightarrow N_{n(n+1)}(0, G^{-1}),$$

где информационная матрица Фишера G вычисляется по формулам (5), (10).

Доказательство. Для доказательства воспользуемся теоремой 2.2 из [9]. Для этого необходимо проверить следующие условия относительно матрицы вероятностей одношаговых переходов $Q = (q_{I,J})$, определенной (5):

У1. Если $q_{I,J}(\theta) = q_{I,J}(\eta)$ для всех $I, J \in L$, то $\theta = \eta$;

У2. Вероятность перехода $q_{I,J}(\theta)$ дважды непрерывно дифференцируема по параметру θ в точке θ^0 , где θ^0 – истинное значение вектора параметров;

У3. По крайней мере, одно из значений $\nabla_{\theta} q_{IJ}(\theta^0) \neq \mathbf{0}_{n(n+1)}$ при $I, J \in L$.

Представим $q_{I,J}, I, J \in L$, в следующем эквивалентном виде, используя (5):

$$\begin{aligned} q_{I,J}(\theta) &= \prod_{s=1}^n C_N^{J_s} \left(\exp(a_s' I + b_{s1} z) \right)^{J_s} \left(1 + \exp(a_s' I + b_{s1} z) \right)^{-N} = \\ &= \prod_{s=1}^n C_N^{J_s} \exp(J_s \theta_s' Y) \left(1 + \exp(\theta_s' Y) \right)^{-N}, \quad I = (I_s), J = (J_s) \in L, \end{aligned}$$

где $Y = (I', z)' \in R^{n+1}, \theta_s = (a_{s1}, \dots, a_{sn}, b_{s1})' \in R^{n+1}, \theta = (\theta_1', \dots, \theta_n')' \in R^{n(n+1)}$.

Для проверки условия У1 преобразуем равенство $q_{I,J}(\theta) - q_{I,J}(\eta) = 0$:

$$\begin{aligned} &\frac{\prod_{s=1}^n C_N^{J_s} \exp(J_s \theta_s' Y) \left(1 + \exp(\theta_s' Y) \right)^{-N} - \prod_{s=1}^n C_N^{J_s} \exp(J_s \eta_s' Y) \left(1 + \exp(\eta_s' Y) \right)^{-N}}{\prod_{s=1}^n \left(1 + \exp(\theta_s' Y) \right)^N \prod_{s=1}^n \left(1 + \exp(\eta_s' Y) \right)^N} = \\ &= \frac{\prod_{s=1}^n C_N^{J_s} \exp(J_s \theta_s' Y) \left(1 + \exp(\eta_s' Y) \right)^N - \prod_{s=1}^n C_N^{J_s} \exp(J_s \eta_s' Y) \left(1 + \exp(\theta_s' Y) \right)^N}{\prod_{s=1}^n \left(1 + \exp(\theta_s' Y) \right)^N \prod_{s=1}^n \left(1 + \exp(\eta_s' Y) \right)^N} = 0. \end{aligned}$$

Последнее равенство выполняется, только если числитель равен 0:

$$\begin{aligned}
& \prod_{s=1}^n C_N^{J_s} \exp(J_s \theta_s' Y) \left(1 + \exp(\eta_s' Y)\right)^N - \prod_{s=1}^n C_N^{J_s} \exp(J_s \eta_s' Y) \left(1 + \exp(\theta_s' Y)\right)^N = \\
& = \prod_{s=1}^n C_N^{J_s} \exp(J_s \theta_s' Y) \sum_{k=0}^N C_N^k \exp(k \eta_s' Y) - \prod_{s=1}^n C_N^{J_s} \exp(J_s \eta_s' Y) \sum_{k=0}^N C_N^k \exp(k \theta_s' Y) = \\
& = \prod_{s=1}^n \sum_{k=0}^N C_N^{J_s} C_N^k \exp((k \eta_s + J_s \theta_s)' Y) - \prod_{s=1}^n \sum_{k=0}^N C_N^k C_N^{J_s} \exp((k \theta_s + J_s \eta_s)' Y) = \\
& = \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^N \prod_{s=1}^n C_N^{J_s} C_N^{k_s} \exp((k_s \eta_s + J_s \theta_s)' Y) - \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^N \prod_{s=1}^n C_N^{J_s} C_N^{k_s} \exp((k_s \theta_s + J_s \eta_s)' Y) = \\
& = \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^N \left(\prod_{s=1}^n C_N^{J_s} C_N^{k_s} e^{(k_s \eta_s + J_s \theta_s)' Y} - \prod_{s=1}^n C_N^{J_s} C_N^{k_s} e^{(k_s \theta_s + J_s \eta_s)' Y} \right) = \\
& = \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^N \prod_{s=1}^n C_N^{J_s} C_N^{k_s} \left(e^{\sum_{s=1}^n (k_s \eta_s + J_s \theta_s)' Y} - e^{\sum_{s=1}^n (k_s \theta_s + J_s \eta_s)' Y} \right) = \\
& = \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^N \prod_{s=1}^n C_N^{J_s} C_N^{k_s} e^{\sum_{s=1}^n (J_s \eta_s + J_s \theta_s)' Y} \left(e^{\sum_{s=1}^n (k_s - J_s) \eta_s' Y} - e^{\sum_{s=1}^n (k_s - J_s) \theta_s' Y} \right) = 0.
\end{aligned}$$

Так как $\prod_{s=1}^n C_N^{J_s} C_N^{k_s} e^{\sum_{s=1}^n (J_s \eta_s + J_s \theta_s)' Y} > 0$, то данное равенство выполняется только в том случае, когда $e^{\sum_{s=1}^n (k_s - J_s) \eta_s' Y} - e^{\sum_{s=1}^n (k_s - J_s) \theta_s' Y} = 0$ для всех $I, J \in L, k_s = 0, \dots, N, s \in S$, т. е. если $\sum_{s=1}^n \alpha_s' \eta_s = \sum_{s=1}^n \alpha_s' \theta_s$, где $\alpha_s = (k_s - J_s)' Y \in R^{n+1}$. Данное условие представим в эквивалентном виде:

$$\sum_{s=1}^n \alpha_s' (\eta_s - \theta_s) = 0, \quad \alpha_s = \{-N, \dots, N\}. \quad (15)$$

Если $\alpha_s > 0$ для всех $s \in S$ (данное условие возможно, поскольку в условиях теоремы при $z \neq 0$ вектор Y – ненулевой), то условие (15) выполняется только при $\eta_s = \theta_s, s \in S$. Таким образом, доказано выполнение условия У1.

В силу (5) функция $q_{I,J}(\theta)$ является дважды дифференцируемой по параметру θ в точке θ^0 , т. е. выполняется условие У2.

Для проверки условия У3 рассмотрим вспомогательную функцию ($I = (I_s), J = (J_s) \in L, Y = (I', z)'$):

$$f_{I,J}(\theta_s) = C_N^{J_s} \frac{\exp(J_s \theta_s' Y)}{\left(1 + \exp(\theta_s' Y)\right)^N}.$$

Вычислим градиент этой функции:

$$\begin{aligned}
\nabla_{\theta_s} f_{I,J}(\theta_s^0) &= C_N^{J_s} \left[\frac{J_s \exp(J_s \theta_s' Y) Y}{\left(1 + \exp(\theta_s' Y)\right)^N} - N \frac{\exp((J_s + 1) \theta_s' Y) Y}{\left(1 + \exp(\theta_s' Y)\right)^{N+1}} \right] = \\
&= C_N^{J_s} \frac{\left(J_s \left(1 + \exp(\theta_s' Y)\right) - N \exp(\theta_s' Y) \right) \exp(J_s \theta_s' Y)}{\left(1 + \exp(\theta_s' Y)\right)^{N+1}} Y =
\end{aligned}$$

$$= C_N^{J_s} \frac{\left(J_s + (J_s - N) \exp(\theta_s' Y) \right) \exp(J_s \theta_s' Y)}{\left(1 + \exp(\theta_s' Y) \right)^{N+1}} Y \in R^{n+1}. \quad (16)$$

В условиях теоремы при $z \neq 0$ вектор $Y \in R^{n+1}$ – ненулевой, поэтому из (16) заключаем, что $\nabla_{\theta_s} f_{I,J}(\theta_s^0)$ является ненулевым вектором, а в силу формулы нахождения производной произведения и вектор $\nabla_{\theta_s} q_{I,J}(\theta_s^0)$ – ненулевой для всех $I, J \in L$, т. е. выполняется условие УЗ.

Таким образом, в силу выполнения условий У1–У3 ОМП $\{\hat{\theta}_s\}$ являются при $T \rightarrow \infty$ совместно асимптотически нормально распределенными [9]:

$$L\left\{\sqrt{T}(\hat{\theta} - \theta^0)\right\} \longrightarrow N_{n(n+1)}(0, G^{-1}),$$

где G – информационная матрица Фишера (10). Заметим, что в силу теоремы 2 при любых ограниченных значениях коэффициентов $\{\theta_s\}$ и ограниченном $z \in R^1$ матрица G является невырожденной, т. е. обратная матрица G^{-1} существует.

4. Результаты компьютерного моделирования. Компьютерные эксперименты проводились на модельных данных. Рассматривалась модель (1)–(3) при значениях параметров: $m = 1$, $z = 2$, $N = 4$, $A = \{0, 1, \dots, 4\}$, $n = 3$, $S = \{1, 2, 3\}$, $\theta_1 = (-0, 2; 0, 18; -0, 15; 0, 2)'$, $\theta_2 = (-0, 18; 0, 24; -0, 05; -0, 1)'$, $\theta_3 = (0, 13; -0, 13; -0, 29; 0, 3)$, $v = (N + 1)^n = 125$. Для этой модели была теоретически вычислена ковариационная матрица:

$$\mathbf{cov}\{X_t, X_t\} = \sum_{I \in A^n} II' \pi_I - \left(\sum_{I \in A^n} I \pi_I \right) \left(\sum_{I \in A^n} I \pi_I \right)',$$

где $\pi = (\pi_I)$ – 125-мерное стационарное распределение вероятностей цепи Маркова, для нахождения которого решалась система уравнений (7). Для рассматриваемой модели вычисленная теоретически ковариационная матрица имеет вид:

$$\mathbf{cov}\{X_t, X_t\} = \begin{pmatrix} 1,07 & 0,08 & 0,0002 \\ 0,08 & 1,05 & -0,03 \\ 0,0002 & -0,03 & 1,09 \end{pmatrix}.$$

На рисунке представлены графики зависимости экспериментальной и теоретической среднеквадратической ошибки оценивания параметров модели в зависимости от длительности наблюдений T ($T \in [20, 300]$). Экспериментальная (выборочная) среднеквадратическая ошибка оценивания параметров вычислена по методу Монте-Карло:

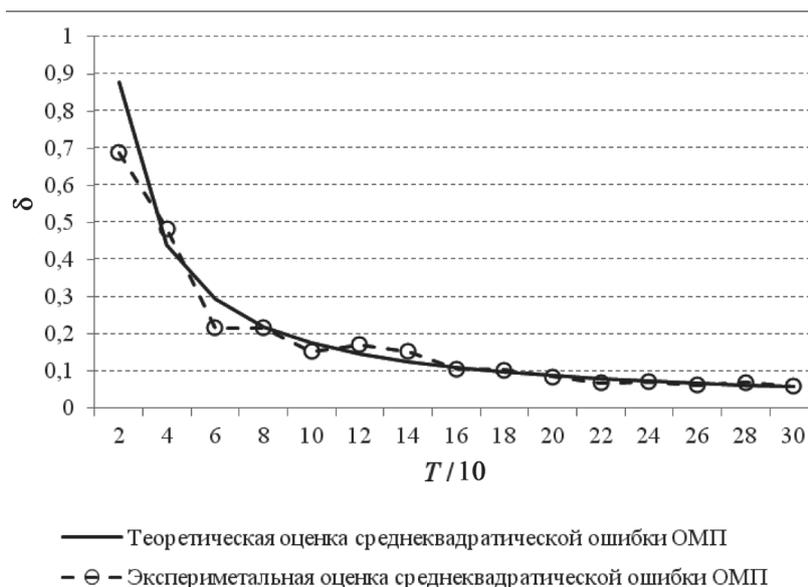
$$\hat{\delta} = \hat{\mathbf{E}} \left\{ \|\hat{\theta} - \theta\|^2 \right\} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \|\hat{\theta}^{(k)} - \theta\|^2,$$

где $\hat{\theta}^{(k)}$ – оценка максимального правдоподобия вектора 12 параметров по k -й реализации пространственно-временных данных, θ – истинное значение вектора параметров, $M = 1000$ – количество реализаций Монте-Карло. Теоретическая среднеквадратическая ошибка оценивания параметров модели вычислена с использованием результатов, полученных в теоремах 2, 3:

$$\delta = \frac{1}{T} \text{tr}(G^{-1}), \quad G = \text{diag} \left\{ \sum_{I \in L} YY' \pi_I \frac{\exp(\theta_s' Y)}{\left(1 + \exp(\theta_s' Y) \right)^2} \right\}, \quad Y = (I', z)', s \in S,$$

где $\text{tr}(\cdot)$ – след матрицы.

Рисунок иллюстрирует состоятельность построенной оценки параметров модели и соответствие теоретических и экспериментальных результатов.



Зависимость среднеквадратической ошибки от длительности наблюдений

Заключение. В статье исследованы асимптотические свойства оценок максимального правдоподобия параметров разработанной биномиальной условно авторегрессионной модели на основе пространственно-временных данных. Доказано, что оценки являются асимптотически нормально распределенными, и найдена асимптотическая ковариационная матрица оценок максимального правдоподобия, определяющая теоретическую среднеквадратическую погрешность оценивания. Проведены компьютерные эксперименты на модельных данных, показавшие согласие теоретических и экспериментальных результатов.

Список использованной литературы

1. Case Study for Modelling Cancer Incidence Using Bayesian Spatio-Temporal Models / S. Y. Kang [et al.] // Australian & New Zealand J. of Statistics. – 2015. – P. 325–345.
2. Xu, G. A Bayesian spatio-temporal geostatistical model with an auxiliary lattice for large datasets / G. Xu, F. Liang, M. G. Genton // Statistica Sinica. – 2015. – Vol. 25. – P. 61–79.
3. Space-time wind speed forecasting for improved power system dispatch (with discussion and rejoinder) / X. Zhu [et al.] // TEST. – 2014. – Vol. 23. – P. 1–25.
4. Zhu, F. Local influence analysis for Poisson autoregression with an application to stock transaction data / F. Zhu, S. Liu, L. Shi // Statistica Neerlandica. – 2016. – Vol. 7-1. – P. 4–25.
5. Харин, Ю. С. Биномиальная условно авторегрессионная модель пространственно-временных данных и ее вероятностно-статистический анализ / Ю. С. Харин, М. К. Журак // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2015. – Т. 59, № 6. – С. 5–12.
6. Кемени, Дж. Конечные цепи Маркова / Дж. Кемени, Дж. Снелл; пер. с англ. С. А. Молчанова [и др.]; под ред. А. А. Юшкевича. – М.: Наука, 1970.
7. Харин, Ю. С. Теория вероятностей, математическая и прикладная статистика: учебник / Ю. С. Харин, Н. М. Зуев, Е. Е. Жук. – Минск: БГУ, 2011.
8. Маркус, М. Обзор по теории матриц и матричных неравенств: пер. с англ. / М. Маркус, Х. Минк; под ред. В. Б. Лидского. – М.: Наука, 1972.
9. Basawa, I. V. Statistical Inference for Stochastic Processes / I. V. Basawa, B. P. Rao. – Academic Press, 1980. – P. 52–66.

Поступила в редакцию 28.01.2016

УДК 519.2

Е. Е. ЖУК

**СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ БЛИЖАЙШИХ
СТАЦИОНАРНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ
В ПРОСТРАНСТВЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ АВТОРЕГРЕССИИ**

*Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь,
e-mail: zhukee@mail.ru*

Исследуется проблема статистического определения ближайших стационарных в широком смысле временных рядов на основе их описания авторегрессионными моделями. Предлагается использовать решающие правила в пространстве коэффициентов авторегрессии. В качестве меры эффективности принимаемых решений аналитически вычислен риск (вероятность ошибочно определить ближайшие временные ряды). Рассмотрен случай двух классов.

Ключевые слова: стационарный временной ряд, авторегрессионная модель, реализация, решающее правило, риск.

Е. Е. ZHUK

**STATISTICAL DETERMINATION OF THE NEAREST STATIONARY TIME SERIES
IN A SPACE OF AUTOREGRESSIVE COEFFICIENTS**

Belarusian State University, Minsk, Belarus, e-mail: zhukee@mail.ru

The problem of statistical determination of the nearest stationary time series is considered. The decision rules in a space of autoregressive coefficients are proposed and their efficiency is analytically investigated. The case of two classes is studied.

Keywords: stationary time series, autoregressive model, realization, decision rule, risk.

1. Математическая модель и постановка задач. Как известно, при весьма общих условиях регулярности стационарный в широком смысле временной ряд (БР) $\{x_t\}_{t \in Z}$ ($Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ – множество целых чисел) с отсчетами $x_t \in R$, $t \in Z$, имеющими нулевое математическое ожидание: $E\{x_t\} = 0$, $t \in Z$, можно представить в виде разложения Вольда [1, 2]:

$$x_t + \sum_{j=1}^{+\infty} \beta_j x_{t-j} = u_t, \quad t \in Z; \quad \sum_{j=1}^{+\infty} \beta_j^2 < +\infty, \quad (1)$$

где случайные величины $\{u_t\}_{t \in Z}$ (ошибки наблюдений) некоррелированы и имеют нулевые математические ожидания и одинаковую ограниченную дисперсию:

$$E\{u_t\} = 0, \quad D\{u_t\} = E\{u_t^2\} = \sigma^2 < +\infty; \quad (2)$$
$$E\{u_t u_l\} = 0, \quad \forall t, l \in Z, \quad l \neq t.$$

Разложение (1), (2) представляет собой так называемую модель авторегрессии бесконечного порядка [1, 2] и однозначно определяется коэффициентами авторегрессии $\beta = (\beta_j)_{j=1}^{+\infty}$. Модель (1), (2) обозначим как $AR(+\infty, \beta, \sigma^2)$.

С другой стороны, из (1) видно, что $\beta_j \rightarrow 0$, $j \rightarrow +\infty$, и на практике порядок авторегрессии выбирают конечным [1, 2], пренебрегая близкими к нулю значениями коэффициентов и полагая $\beta_j = 0$, $j > p$, где p – порядок авторегрессии. Соотношение (1) при этом принимает вид

$$x_t + \sum_{j=1}^p \beta_j x_{t-j} = u_t, \quad t \in Z, \quad (3)$$

и временной ряд $\{x_t\}_{t \in Z}$ описывается моделью $AP(p, \beta_{(p)}, \sigma^2)$ [1, 2], где $\beta_{(p)} = (\beta_1, \dots, \beta_p)' \in R^p$ – p -вектор коэффициентов авторегрессии («'» – символ транспонирования), а случайные величины $\{u_t\}_{t \in Z}$ определены в (2).

Пусть наряду с ВР $\{x_t\}_{t \in Z}$, определяемым моделью $AP(p, \beta_{(p)}, \sigma^2)$ из (2), (3), имеется $L \geq 2$ стационарных в широком смысле ВР $\{x_t^{(i)}\}_{t \in Z}$, $i \in S$, где $S = \{1, \dots, L\}$ – множество номеров этих рядов. ВР $\{x_t^{(i)}\}_{t \in Z}$ задается своей моделью авторегрессии $AP(p, \beta_{(p)}^{(i)}, \sigma_{(i)}^2)$ типа (2), (3), где $\beta_{(p)}^{(i)} = (\beta_1^{(i)}, \dots, \beta_p^{(i)})'$ и $\sigma_{(i)}^2$ – соответствующие значения коэффициентов авторегрессии и дисперсии ошибок наблюдений ($i \in S$). Порядок авторегрессии p везде считается одинаковым и выбирается исходя из соображений: $\beta_j = 0$, $\beta_j^{(i)} = 0$, $i \in S$, $j > p$. Задача заключается в нахождении для ВР $\{x_t\}_{t \in Z}$ «ближайшего» среди $L \geq 2$ ВР $\{x_t^{(i)}\}_{t \in Z}$, $i \in S$.

Если все коэффициенты авторегрессионных моделей $\beta_{(p)} = (\beta_1, \dots, \beta_p)'$ и $\beta_{(p)}^{(i)} = (\beta_1^{(i)}, \dots, \beta_p^{(i)})'$, $i \in S$, заданы (известны), то в качестве решения задачи можно предложить

$$D^o = \left\{ k : \left| \beta_{(p)} - \beta_{(p)}^{(k)} \right| = \min_{i \in S} \left| \beta_{(p)} - \beta_{(p)}^{(i)} \right| \right\}, \quad (4)$$

где $D^o \subseteq S$ – множество номеров тех ВР из $\{x_t^{(i)}\}_{t \in Z}$, $i \in S$, к которым ВР $\{x_t\}_{t \in Z}$ ближе всего в смысле расстояний Евклида между векторами коэффициентов авторегрессии (учтено, что могут быть совпадающие по значению расстояния).

Если в (4) нет совпадающих между собой расстояний, то множество D^o состоит из одного элемента (имеется один ближайший ВР):

$$D^o = \{d^o\}, \quad d^o = d\left(\beta_{(p)}, \left\{ \beta_{(p)}^{(i)} \right\}_{i \in S}\right) = \arg \min_{i \in S} \left| \beta_{(p)} - \beta_{(p)}^{(i)} \right|, \quad (5)$$

где $d(\beta_{(p)}, \{\beta_{(p)}^{(i)}\}_{i \in S}) \in S$ – так называемое решающее правило (РП) L -средних [2–4].

По аналогии с [5] рассмотрим далее три случая априорной неопределенности.

I. Наблюдается реализация $X = \{x_t\}_{t=1}^T$ длительности T ВР $\{x_t\}_{t \in Z}$, а сами коэффициенты авторегрессии $\beta_{(p)}$ для него неизвестны. При этом коэффициенты $\{\beta_{(p)}^{(i)}\}_{i \in S}$ ВР $\{x_t^{(i)}\}_{t \in Z}$, $i \in S$, заданы.

II. Коэффициенты авторегрессии $\beta_{(p)}$ ВР $\{x_t\}_{t \in Z}$ известны, а вместо $\{\beta_{(p)}^{(i)}\}_{i \in S}$ предложены реализации $X^{(i)} = \{x_t^{(i)}\}_{t=1}^{T_i}$, $i \in S$, соответствующих им временных рядов.

III. Все временные ряды представлены своими реализациями $X = \{x_t\}_{t=1}^T$ и $X^{(i)} = \{x_t^{(i)}\}_{t=1}^{T_i}$, $i \in S$.

Для решения задачи воспользуемся подстановочным принципом [2], применив его к РП L -средних из (5).

2. Решающие правила в пространстве МНК-оценок коэффициентов авторегрессии и их риск. Построим по реализациям $X = \{x_t\}_{t=1}^T$ и $X^{(i)} = \{x_t^{(i)}\}_{t=1}^{T_i}$, $i \in S$, МНК-оценки [2] параметров $\beta_{(p)}$ и $\{\beta_{(p)}^{(i)}\}_{i \in S}$ соответственно:

$$\hat{\beta}_{(p)} = -\left(\sum_{t=p+1}^T X_t X_t'\right)^{-1} \sum_{t=p+1}^T x_t X_t; \quad \hat{\beta}_{(p)}^{(i)} = -\left(\sum_{t=p+1}^{T_i} X_t^{(i)} (X_t^{(i)})'\right)^{-1} \sum_{t=p+1}^{T_i} x_t^{(i)} X_t^{(i)}, \quad i \in S, \quad (6)$$

где предполагается, что $T > p$ и $T_i > p$, $i \in S$, и обозначено: $X_t = (x_{t-1}, \dots, x_{t-p})' \in R^p$, $t = \overline{p+1, T}$; $X_t^{(i)} = (x_{t-1}^{(i)}, \dots, x_{t-p}^{(i)})' \in R^p$, $t = \overline{p+1, T}$, $i \in S$.

В зависимости от уровня априорной неопределенности подстановочные РП, основанные на РП L -средних из (5), будут иметь вид

$$d_I = d\left(\hat{\beta}_{(p)}, \left\{\beta_{(p)}^{(i)}\right\}_{i \in S}\right), \quad d_{II} = d\left(\beta_{(p)}, \left\{\hat{\beta}_{(p)}^{(i)}\right\}_{i \in S}\right), \quad d_{III} = d\left(\hat{\beta}_{(p)}, \left\{\hat{\beta}_{(p)}^{(i)}\right\}_{i \in S}\right), \quad (7)$$

где учтено, что статистические оценки $\hat{\beta}_{(p)}$ и $\left\{\hat{\beta}_{(p)}^{(i)}\right\}_{i \in S}$ имеют абсолютно непрерывные распределения вероятностей [2], поэтому вероятность совпадения расстояний равна нулю и решения в (7) выносятся однозначно (как и в (5)).

В качестве меры эффективности РП (7) по аналогии с [4, 5] определим риск как вероятность ошибочно определить пару ближайших в смысле (4) временных рядов:

$$r_I = P\{d_I \notin D^o\}, \quad r_{II} = P\{d_{II} \notin D^o\}, \quad r_{III} = P\{d_{III} \notin D^o\}. \quad (8)$$

Отметим, что если $D^o = S$, то $r_I = r_{II} = r_{III} = 0$ и выносимое РП (7) решение не принципиально. Если множество D^o состоит из одного элемента (один ближайший ВР), то

$$r_I = P\{d_I \neq d^o\}, \quad r_{II} = P\{d_{II} \neq d^o\}, \quad r_{III} = P\{d_{III} \neq d^o\}, \quad d^o = \arg \min_{i \in S} |\beta_{(p)} - \beta_{(p)}^{(i)}|. \quad (9)$$

Чем меньше (ближе к нулю) значения риска из (8), (9), тем эффективнее выносимые при помощи РП (7) решения.

Вычислим здесь риск r_I (случаи II и III аналогичны в предположении, что реализации $X = \{x_t\}_{t=1}^T$ и $X^{(i)} = \{x_t^{(i)}\}_{t=1}^{T_i}$, $i \in S$, независимы в совокупности [2]). Введем обозначение:

$$n_N(y | \mu, \Sigma) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} (\det(\Sigma))^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(y - \mu)' \Sigma^{-1}(y - \mu)\right), \quad y \in R^N,$$

– плотность N -мерного нормального (гауссовского) закона распределения вероятностей (закон $N_N(\mu, \Sigma)$ [2]) с вектором математического ожидания $\mu \in R^N$ и невырожденной ковариационной $(N \times N)$ -матрицей Σ ($\det(\Sigma) \neq 0$).

Теорема. Пусть $X = \{x_t\}_{t=1}^T$ – реализация длительности T временного ряда, определяемого моделью $AR(p, \beta_{(p)}, \sigma^2)$ из (3), где случайные величины $\{u_t\}_{t \in Z}$ независимы в совокупности и одинаково распределены по нормальному закону $N_1(0, \sigma^2)$ ($\sigma^2 < +\infty$), а корни характеристического уравнения

$$\sum_{j=1}^p \beta_j z^{p-j} = 0$$

лежат внутри единичного круга ($|z| < 1$), тогда в условиях (5) риск $r_I = r_I(T) = P\{d_I \neq d^o\}$ РП $d_I = d\left(\hat{\beta}_{(p)}, \left\{\beta_{(p)}^{(i)}\right\}_{i \in S}\right)$ в асимптотике растущей длительности: $T \rightarrow +\infty$, удовлетворяет соотношению:

$$r_I(T)/\tilde{r}_I(T) \rightarrow 1, \quad T \rightarrow +\infty; \quad (10)$$

$$\tilde{r}_I(T) = 1 - \int_{R^p} \prod_{\substack{j \in S \\ j \neq d^0}} U\left(\left|y - \beta_{(p)}^{(j)}\right| - \left|y - \beta_{(p)}^{(d^0)}\right|\right) n_p\left(y \mid \beta_{(p)}, \frac{1}{T} \sigma^2 \Sigma_{p,p}^{-1}\right) dy,$$

где $U(z) = \{1, \text{если } z \geq 0; 0, \text{если } z < 0\}$ – единичная функция Хэвисайда, d^0 – истинный номер ближайшего ВР из (5), а $\Sigma_{p,p} = \Sigma_{p,p}(\beta_{(p)}) = (\sigma(i-j))_{i,j=1}^p$ – ковариационная $(p \times p)$ -матрица, элементы которой определяются ковариационной функцией $\sigma(\tau) = \text{cov}\{x_t, x_{t+\tau}\} = E\{x_t x_{t+\tau}\}$, $\forall t, \tau \in Z$, вычисляемой по $\beta_{(p)}$ из уравнений Юла – Уокера [1, 2]:

$$\sigma(\tau) + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma(\tau - j) = 0, \quad \tau = \overline{1, p}.$$

Доказательство. В условиях теоремы, согласно известным результатам [1, 2], при $T \rightarrow +\infty$ МНК-оценка $\hat{\beta}_{(p)}$ из (6) асимптотически нормально распределена:

$$L\left\{\sqrt{T}\left(\hat{\beta}_{(p)} - \beta_{(p)}\right)\right\} \rightarrow N_p\left(0_p, \sigma^2 \Sigma_{p,p}^{-1}\right), \quad (11)$$

где 0_p – нулевой p -вектор, а $\Sigma_{p,p} = (\sigma(i-j))_{i,j=1}^p$ – ковариационная $(p \times p)$ -матрица, описанная в условиях теоремы.

Для риска r_I из (9), с учетом вида соответствующего ему РП из (7):

$$d_I = d\left(\hat{\beta}_{(p)}, \left\{\beta_{(p)}^{(i)}\right\}_{i \in S}\right) = \arg \min_{i \in S} \left| \hat{\beta}_{(p)} - \beta_{(p)}^{(i)} \right|,$$

справедлива цепочка равенств:

$$r_I = P\{d_I \neq d^0\} = 1 - P\{d_I = d^0\} = 1 - P\left\{\bigcap_{\substack{j \in S \\ j \neq d^0}} \left\{ \left| \hat{\beta}_{(p)} - \beta_{(p)}^{(j)} \right| \geq \left| \hat{\beta}_{(p)} - \beta_{(p)}^{(d^0)} \right| \right\}\right\},$$

откуда с учетом (11) и получаем доказываемое асимптотическое соотношение (10).

Практическая значимость результата (10) состоит в том, что он позволяет при больших значениях длительности реализации ($T \rightarrow +\infty$) приближенно вычислить риск: $r_I \approx \tilde{r}_I$, аналитически оценив эффективность принимаемых решений. Однако простой вид величина $\tilde{r}_I = \tilde{r}_I(T)$ из (10) принимает лишь при $L = 2$.

3. Случай отнесения реализаций к двум временным рядам. Пусть своими коэффициентами $\beta_{(p)}^{(1)}$ и $\beta_{(p)}^{(2)}$ заданы два авторегрессионных временных ряда ($L = 2$, $S = \{1, 2\}$). И к ближайшему из них в смысле коэффициентов авторегрессии необходимо отнести реализацию $X = \{x_t\}_{t=1}^T$ длительности $T > p$ стационарного временного ряда, описываемого моделью $AR(p, \beta_{(p)}, \sigma^2)$. Соответствующее РП из (7) принимает при $L = 2$ вид

$$d_I = d\left(\hat{\beta}_{(p)}, \left\{\beta_{(p)}^{(i)}\right\}_{i \in S}\right) = U\left(\left| \hat{\beta}_{(p)} - \beta_{(p)}^{(1)} \right| - \left| \hat{\beta}_{(p)} - \beta_{(p)}^{(2)} \right|\right) + 1. \quad (12)$$

Вычислим риск РП (12).

Следствие. Пусть в условиях теоремы $L = 2$, тогда величина $\tilde{r}_I(T)$ из (10) может быть представлена в виде:

$$\tilde{r}_I(T) = \Phi \left(-\sqrt{T} \frac{\left| \beta_{(p)} - \beta_{(p)}^{(1)} \right|^2 - \left| \beta_{(p)} - \beta_{(p)}^{(2)} \right|^2}{2\sigma\Delta} \right), \quad (13)$$

где $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z \exp\left(-\frac{w^2}{2}\right) dw$, $z \in R$ – функция распределения вероятностей стандартного нормального закона $N_1(0,1)$, а величина

$$\Delta = \sqrt{\left(\beta_{(p)}^{(1)} - \beta_{(p)}^{(2)} \right)' \Sigma_{p,p}^{-1} \left(\beta_{(p)}^{(1)} - \beta_{(p)}^{(2)} \right)} \quad (14)$$

– аналог расстояния Махаланобиса [2] между $\beta_{(p)}^{(1)}$ и $\beta_{(p)}^{(2)}$ относительно ковариационной матрицы $\Sigma_{p,p}$ из (10).

Доказательство. Из (12) с учетом (11) получаем:

$$\tilde{r}_I(T) = \begin{cases} 1 - \mathbf{P} \left\{ \left| \xi - \beta_{(p)}^{(2)} \right|^2 - \left| \xi - \beta_{(p)}^{(1)} \right|^2 \geq 0 \right\}, & \text{если } d^o = 1; \\ \mathbf{P} \left\{ \left| \xi - \beta_{(p)}^{(2)} \right|^2 - \left| \xi - \beta_{(p)}^{(1)} \right|^2 \geq 0 \right\}, & \text{если } d^o = 2, \end{cases} \quad (15)$$

где случайный p -вектор $\xi \in R^p$ распределен по нормальному закону $N_p\left(\beta_{(p)}, \sigma^2 \Sigma_{p,p}^{-1} / T\right)$, а случайная величина

$$\left| \xi - \beta_{(p)}^{(2)} \right|^2 - \left| \xi - \beta_{(p)}^{(1)} \right|^2 = 2 \left(\xi - \frac{\beta_{(p)}^{(1)} + \beta_{(p)}^{(2)}}{2} \right) \left(\beta_{(p)}^{(1)} - \beta_{(p)}^{(2)} \right) \in R$$

линейна по ξ , и потому является нормальной случайной величиной с математическим ожиданием $\left| \beta_{(p)} - \beta_{(p)}^{(2)} \right|^2 - \left| \beta_{(p)} - \beta_{(p)}^{(1)} \right|^2$ и дисперсией $4\sigma^2 \left(\beta_{(p)}^{(1)} - \beta_{(p)}^{(2)} \right)' \Sigma_{p,p}^{-1} \left(\beta_{(p)}^{(1)} - \beta_{(p)}^{(2)} \right) / T = 4\sigma^2 \Delta^2 / T$.

Нормируя данную случайную величину до стандартного нормального закона $N_1(0,1)$, из (15) получаем:

$$\tilde{r}_T = \begin{cases} \Phi \left(-\sqrt{T} \frac{\left| \beta_{(p)} - \beta_{(p)}^{(2)} \right|^2 - \left| \beta_{(p)} - \beta_{(p)}^{(1)} \right|^2}{2\sigma\Delta} \right), & \text{если } d^o = 1; \\ \Phi \left(\sqrt{T} \frac{\left| \beta_{(p)} - \beta_{(p)}^{(2)} \right|^2 - \left| \beta_{(p)} - \beta_{(p)}^{(1)} \right|^2}{2\sigma\Delta} \right), & \text{если } d^o = 2, \end{cases}$$

где учтено известное свойство функции распределения вероятностей закона $N_1(0,1)$: $1 - \Phi(z) = \Phi(-z)$, $z \in R$. Но в данном случае, согласно условию теоремы, $\left| \beta_{(p)} - \beta_{(p)}^{(1)} \right| \neq \left| \beta_{(p)} - \beta_{(p)}^{(2)} \right|$ и

$$d^o = \begin{cases} 1, & \text{если } \left| \beta_{(p)} - \beta_{(p)}^{(1)} \right|^2 < \left| \beta_{(p)} - \beta_{(p)}^{(2)} \right|^2; \\ 2, & \text{если } \left| \beta_{(p)} - \beta_{(p)}^{(1)} \right|^2 > \left| \beta_{(p)} - \beta_{(p)}^{(2)} \right|^2, \end{cases}$$

что приводит к (13).

Из (13) следует (напомним: $r_I(T) / \tilde{r}_I(T) \rightarrow 1$, $T \rightarrow +\infty$), что $r_I = r_I(T) \rightarrow 0$, $T \rightarrow +\infty$, т. е. с увеличением длительности подлежащей отнесению реализации эффективность принимаемых решений повышается (значение риска уменьшается). Из (13) также видно, что риск уменьшается

с увеличением различия между собой расстояний $|\beta_{(p)} - \beta_{(p)}^{(1)}|$ и $|\beta_{(p)} - \beta_{(p)}^{(2)}|$ между коэффициентами авторегрессии $\beta_{(p)}$ подлежащего отнесению ВР и коэффициентами $\beta_{(p)}^{(1)}$ и $\beta_{(p)}^{(2)}$ заданных авторегрессионных моделей. При $|\beta_{(p)} - \beta_{(p)}^{(1)}| = |\beta_{(p)} - \beta_{(p)}^{(2)}|$ риск заведомо равен нулю: $r_l = r_l(T) = 0, \forall T$, а использование представления (13) некорректно, поскольку оно получено в предположении $|\beta_{(p)} - \beta_{(p)}^{(1)}| \neq |\beta_{(p)} - \beta_{(p)}^{(2)}|$.

Отметим также, что в [4] подобная задача соотношения решалась в пространстве ковариационных функций.

Список использованной литературы

1. *Андерсон, Т.* Статистический анализ временных рядов: пер. с англ. / Т. Андерсон. – М.: Мир, 1976.
2. *Харин, Ю. С.* Математическая и прикладная статистика: учеб. пособие / Ю. С. Харин, Е. Е. Жук. – Минск: БГУ, 2005.
3. *Жук, Е. Е.* Непараметрическая статистическая классификация стационарных временных рядов / Е. Е. Жук // Вес. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2004. – № 4. – С. 26–30.
4. *Жук, Е. Е.* Статистическое отнесение реализаций стационарных временных рядов к классам, определенным в пространстве ковариационных функций / Е. Е. Жук // Вес. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2015. – № 1. – С. 47–51.
5. *Жук, Е. Е.* Статистическое определение ближайших классов по многомерным обучающим выборкам / Е. Е. Жук // Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и их приложения: сб науч. ст. – Минск: РИВШ, 2014. – С. 59–63.

Поступила в редакцию 15.12.2015

УДК 512.543.76

В. В. БЕНЯШ-КРИВЕЦ¹, И. О. ГОВОРУШКО²**МНОГООБРАЗИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУПП БАУМСЛАГА – СОЛИТЕРА
В СЛУЧАЕ НЕ ВЗАИМНО ПРОСТЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ**¹Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь, e-mail: benyash@bsu.by²Белорусский государственный педагогический университет им. М. Танка, Минск, Беларусь,
e-mail: govorushko88@gmail.com

Исследуются многообразия представлений групп Баумслага – Солитера $BS(p, q)$ в случае, когда p и q не являются взаимно простыми. Найдены неприводимые компоненты этих многообразий, вычислены их размерности, а также доказана их рациональность.

Ключевые слова: группа Баумслага – Солитера, многообразии представлений, размерность многообразия, неприводимая компонента многообразия.

V. V. BENIASH-KRYVETS¹, I. O. GOVORUSHKO²**REPRESENTATION VARIETY OF BAUMSLAG-SOLITAR GROUPS
IN THE CASE OF NOT COPRIME EXPONENTS**¹Belarusian State University, Minsk, Belarus, e-mail: benyash@bsu.by²Belarusian State Pedagogical University named after M. Tank, Minsk, Belarus, e-mail: govorushko88@gmail.com

Representation varieties of Baumslag – Solitar groups $BS(p, q)$ are investigated in the case when p and q are not coprime. Irreducible components of these varieties are found, their dimensions are calculated and their rationality is proved.

Keywords: Baumslag – Solitar group, representation variety, dimension of a variety, irreducible component of a variety.

Введение. Пусть G – группа с образующими g_1, \dots, g_m и K – алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики. Тогда любому представлению $\rho: G \rightarrow GL_n(K)$ можно поставить в соответствие набор элементов $(\rho(g_1), \dots, \rho(g_m)) \in GL_n(K)^m$. Очевидно, что этот набор удовлетворяет всем определяющим соотношениям группы G . Поэтому соответствие $\rho \mapsto (\rho(g_1), \dots, \rho(g_m))$ задает биекцию между множеством $\text{Hom}(G, GL_n(K))$ и K -точками некоторого аффинного K -многообразия $R_n(G) \subset GL_n(K)^m$, называемого многообразием n -мерных представлений группы G . Мы будем пользоваться стандартными обозначениями и результатами, изложенными в работе [1].

Группы Баумслага – Солитера $BS(p, q)$ имеют копредставление

$$BS(p, q) = \langle a, t \mid ta^{p_t}t^{-1} = a^q \rangle,$$

где p и q не равны нулю. Эти группы предложены Г. Баумслагом и Д. Солитером в [2] как примеры нехопфовых конечно представленных групп, т. е. групп, которые изоморфны своей собственной факторгруппе. Легко видеть, что $BS(p, q) \cong BS(-p, -q)$ и $BS(p, q) \cong BS(q, p)$. В дальнейшем мы будем рассматривать группы $BS(p, q)$ такие, что $p > |q| > 1$. В [3] получено описание многообразий представлений $R_n(BS(p, q))$ групп Баумслага – Солитера $BS(p, q)$ в случае, когда p и q – взаимно простые числа.

В предлагаемой работе мы исследуем многообразия представлений $R_n(BS(p, q))$ в случае, когда $(p, q) = d > 1$.

Введем следующие обозначения. Обозначим через $\Omega(p, q)$ следующее множество матриц:

$$\Omega(p, q) = \{A \in GL_n(K) \mid A^p \text{ и } A^q \text{ сопряжены}\}.$$

Положим $p_1 = \frac{p}{d}$, $q_1 = \frac{q}{d}$. Пусть $A \in \Omega(p_1, q_1)$ – фиксированная матрица и пусть $B_0 \in GL_n(K)$ такая матрица, что $B_0 A^{p_1} B_0^{-1} = A^{q_1}$. Обозначим через $Z(A)$ централизатор матрицы A в $GL_n(K)$ и рассмотрим морфизм

$$f_A : Z(A) \times GL_n(K) \rightarrow GL_n(K) \times GL_n(K), (C, X) \mapsto (XAX^{-1}, XB_0CX^{-1}). \quad (1)$$

Замыкание в топологии Зарисского образа $\text{Im } f_A$ обозначим $W(A)$. В [2] доказано, что каждое многообразие $W(A)$ является неприводимой компонентой многообразия $R_n(BS(p_1, q_1))$ размерности n^2 и этими компонентами исчерпываются все неприводимые компоненты $R_n(BS(p_1, q_1))$.

Рассмотрим морфизм

$$h : R_n(BS(p, q)) \rightarrow R_n(BS(p_1, q_1)), (A, B) \mapsto (A^d, B). \quad (2)$$

Л е м м а 1. Морфизм h сюръективен.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $(A_1, B_1) \in R_n(BS(p_1, q_1))$, то существует матрица $A \in GL_n(K)$ такая, что $A^d = A_1$. Тогда

$$B_1 A^p B_1^{-1} = B_1 (A^d)^{p_1} B_1^{-1} = B_1 A_1^{p_1} B_1^{-1} = A_1^{q_1} = (A^d)^{q_1} = A^q,$$

следовательно, $(A, B_1) \in R_n(BS(p, q))$ и $h(A, B_1) = (A_1, B_1)$. Лемма доказана.

Пусть $C_0 \in \Omega(p, q)$ – фиксированная матрица, $A = C_0^d$ и $B_0 \in GL_n(K)$ такая матрица, что $B_0 A^{p_1} B_0^{-1} = A^{q_1}$. Рассмотрим отображение

$$g_{C_0} : Z(A) \times GL_n(K) \rightarrow GL_n(K) \times GL_n(K), (Z, X) \mapsto (XC_0X^{-1}, XB_0ZX^{-1}). \quad (3)$$

Обозначим через $H(C_0)$ замыкание в топологии Зарисского образа $\text{Im } g_{C_0}$.

Л е м м а 2. $H(C_0)$ не зависит от выбора матрицы B_0 в определении морфизма g_{C_0} и $H(C_0) \subset R_n(BS(p, q))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $B_1 \in GL_n(K)$ – другая матрица, такая, что $B_1 A^{p_1} B_1^{-1} = A^{q_1}$ и g'_{C_0} – соответствующий морфизм. Тогда $B_1 = B_0 Z_1$, где $Z_1 \in Z(A^{p_1})$. По лемме 1 из [2] $Z(A^{p_1}) = Z(A)$. Тогда произвольный элемент вида $(XC_0X^{-1}, XB_1ZX^{-1}) = (XC_0X^{-1}, XB_0(Z_1Z)X^{-1}) \in \text{Im } g'_{C_0}$ содержится в $\text{Im } g_{C_0}$. Аналогично доказывается противоположное включение $\text{Im } g_{C_0} \subset \text{Im } g'_{C_0}$. Значит, $\text{Im } g_{C_0} = \text{Im } g'_{C_0}$, что и требуется.

По построению $(C_0, B_0Z) \in R_n(BS(p, q))$, а значит, и все сопряженные представления $(XC_0X^{-1}, XB_0ZX^{-1})$ лежат в $R_n(BS(p, q))$. Следовательно, $\text{Im } g_{C_0} \subset R_n(BS(p, q))$. Поэтому замыкание $H(C_0) = \overline{\text{Im } g_{C_0}}$ содержится в $R_n(BS(p, q))$. Лемма 2 доказана.

Справедлива

Т е о р е м а. Каждое множество $H(C)$, где $C \in \Omega(p, q)$, является неприводимой компонентой многообразия представлений $R_n(BS(p, q))$ и этими множествами исчерпываются все неприводимые компоненты $R_n(BS(p, q))$. Размерность неприводимой компоненты $H(C)$ многообразия $R_n(BS(p, q))$ равна $n^2 + \dim Z(C^d) - \dim Z(C)$.

В дальнейшем через $Cl(B) = \{XBX^{-1} \mid X \in GL_n(K)\}$ будем обозначать класс сопряженности матрицы B .

Л е м м а 3. $h^{-1}(W(A)) \subset \bigcup_{\{C \mid C^d \in Cl(A)\}} H(C)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $(C, D) \in h^{-1}(W(A))$. Тогда $(C^d, D) \in W(A)$. Следовательно, $C^d \in Cl(A)$ и $D = B_0Z$, где $Z \in Z(C^d)$ и B_0 такая матрица, что $B_0(C^d)^{p_1} B_0^{-1} = (C^d)^{q_1}$. Значит, $(C, D) = (C, B_0Z) \in \text{Im } g_C \subset H(C)$. Лемма 3 доказана.

Л е м м а 4. $R_n(BS(p, q)) = \bigcup_{C \in \Omega(p, q)} H(C)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу леммы 1 морфизм h сюръективен, поэтому объединение замкнутых множеств $h^{-1}(W(A))$ совпадает с $R_n(BS(p, q))$. По лемме 3 каждое из многообразий $h^{-1}(W(A))$ содержится в объединении замкнутых неприводимых множеств вида $H(C)$, где $C \in \Omega(p, q)$ и $C^d \in \overline{CI(A)}$. Лемма 4 доказана.

Л е м м а 5. *Размерность многообразия $H(C)$ равна $n^2 + \dim Z(C^d) - \dim Z(C)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Найдем слои морфизма g_C . Пусть $(A_1, B_1) = g_C(Z_1, X_1) \in \text{Im } g_C$, где $Z_1 \in Z(C^d)$. Тогда

$$X_1 C X_1^{-1} = A_1, X_1 B_0 Z_1 X_1^{-1} = B_1.$$

Тогда слой $g_C^{-1}(A_1, B_1)$ состоит из пар матриц $(Z_2, X_2) \in Z(C^d) \times GL_n(K)$ таких, что

$$X_2 C X_2^{-1} = A_1 = X_1 C X_1^{-1}, \quad X_2 B_0 Z_2 X_2^{-1} = B_1 = X_1 B_0 Z_1 X_1^{-1}. \quad (4)$$

Из первого равенства в (4) получаем $X_1^{-1} X_2 = D \in Z(C) \subset Z(C^d)$, т. е. $X_2 = X_1 D$. Теперь из второго равенства в (4) имеем $Z_2 = B_0^{-1} D^{-1} B_0 Z_1 D$. Заметим, что если D – произвольная матрица из $Z(C)$, то пара матриц (Z_2, X_2) , где $X_2 = X_1 D$, $Z_2 = B_0^{-1} D^{-1} B_0 Z_1 D$, лежит в слое $g_C^{-1}(A_1, B_1)$. Действительно, равенство $X_2 C X_2^{-1} = A_1$ очевидно из построения. Проверим, что справедливо равенство $(B_0 Z_2) A_1^p (B_0 Z_2)^{-1} = A_1^q$. Подставив вместо Z_2 его значение и учитывая, что $B_0 C^p B_0^{-1} = C^q$, получим

$$(B_0 Z_2) C^p (B_0 Z_2)^{-1} = (D^{-1} B_0 Z_1 D) (C^d)^{p_1} (D^{-1} B_0 Z_1 D)^{-1} = D^{-1} B_0 (C^d)^{p_1} B_0^{-1} D = D^{-1} C^q D = C^q. \quad (5)$$

Из (5) следует, что $Z_2 \in Z(C^p)$. По лемме 1 из [2] $Z(C^p) = Z(C^d)$, следовательно, $Z_2 \in Z(C^d)$. Таким образом, имеем биективный морфизм

$$\alpha: Z(C) \rightarrow g_C^{-1}(A_1, B_1), \quad D \mapsto (B_0^{-1} D^{-1} B_0 Z_1 D, X_1 D).$$

Значит, $\dim g_C^{-1}(A_1, B_1) = \dim Z(C)$, т. е. все слои морфизма g_C имеют одинаковую размерность, равную $\dim Z(C)$. По теореме о размерности слоев морфизма [4, с. 97] получаем

$$\dim H(C) = \dim(Z(C^d) \times GL_n(K)) - \dim Z(C) = n^2 + \dim Z(C^d) - \dim Z(C).$$

Лемма 5 доказана.

Л е м м а 6. Пусть $C \in \Omega(p, q)$ и $A = C^d$. Тогда $\overline{h(H(C))} = W(A)$, где морфизм h определен в (2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Образ морфизма f_A , определенного в (1), состоит из элементов вида

$$(X A X^{-1}, X B_0 Z X^{-1}) = (X C^d X^{-1}, X B_0 Z X^{-1}), \quad (6)$$

где $Z \in Z(A) = Z(C^d)$. Образ морфизма g_C , определенного в (3), состоит из элементов вида

$$(X C X^{-1}, X B_0 Z X^{-1}), \quad (7)$$

где $Z \in Z(A) = Z(C^d)$. Из (7) следует, что $h(\text{Im } g_C)$ состоит из элементов вида $(X C^d X^{-1}, X B_0 Z X^{-1})$. Тогда из (6) получаем $h(\text{Im } g_C) = \text{Im } f_A$. Переходя к замыканиям, получаем требуемое равенство $\overline{h(H(C))} = W(A)$. Лемма 6 доказана.

Л е м м а 7. Если $C_0, C_1 \in \Omega(p, q)$ и матрицы C_0 и C_1 подобны, то $H(C_0) = H(C_1)$.

Доказательство. Пусть $C_1 = Y C_0 Y^{-1}$ и $B_0 \in GL_n(K)$ такая матрица, что $B_0 (C_0^d)^{p_1} B_0^{-1} = (C_0^d)^{q_1}$. Тогда $Z(C_1^d) = Y Z(C_0^d) Y^{-1}$ и матрица $B_1 = Y B_0 Y^{-1}$ обладает свойством $B_1 (C_1^d)^{p_1} B_1^{-1} = (C_1^d)^{q_1}$. Рассмотрим произвольный элемент $(X C_1 X^{-1}, X B_1 T X^{-1}) \in \text{Im } g_{C_1}$, где $T \in Z(C_1^d)$. Так как

$$(X C_1 X^{-1}, X B_1 T X^{-1}) = ((X Y) C_0 (X Y)^{-1}, (X Y) (B_0 Y^{-1} T Y) (X Y)^{-1})$$

и элемент $Y^{-1}TY \in Z(C_0^d)$, то $(XC_1X^{-1}, XB_1TX^{-1}) \in \text{Im } g_{C_0}$. Значит, $\text{Im } g_{C_1} \subset \text{Im } g_{C_0}$, откуда $H(C_1) \subset H(C_0)$. Противоположное включение доказывается аналогично. Лемма 7 доказана.

Л е м м а 8. Если $(A, B) \in H(C)$, то спектры матриц A и C равны.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\sigma_i(X)$ обозначает i -й коэффициент характеристического полинома матрицы X и пусть $\lambda_i = \sigma_i(C)$, $i = 1, \dots, n$. Тогда для любой точки $(A_1, B_1) \in \text{Im } g_C$ мы имеем $\sigma_i(A_1) - \lambda_i = 0$, $i = 1, \dots, n$, поскольку матрицы C и A_1 подобны. Это означает, что регулярная на $H(C)$ функция $\sigma_i(X) - \lambda_i$ обращается в нуль на $\text{Im } g_C$. Следовательно, $\sigma_i(X) - \lambda_i$ обращается в нуль на $H(C)$. Поэтому $\sigma_i(A) - \lambda_i = 0$, $i = 1, \dots, n$. Таким образом, характеристические полиномы у C и A совпадают, т. е. C и A имеют одинаковые спектры. Лемма 8 доказана.

Л е м м а 9. Если $C_0, C_1 \in \Omega(p, q)$ и матрицы C_0 и C_1 имеют разные спектры, то $H(C_0) \cap H(C_1) = \emptyset$.

Д о к а з а т е л ь с т в о непосредственно следует из леммы 8.

Л е м м а 10. Пусть $A, B \in GL_n(K)$ и $A \in \overline{CI(B)}$. Тогда спектры матриц A и B равны и для любого $\lambda \in K^$ и любого натурального k справедливо неравенство $\text{rank}(A - \lambda E)^k \leq \text{rank}(B - \lambda E)^k$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Равенство спектров A и B фактически доказано при доказательстве леммы 8. Докажем неравенство для рангов матриц. Установим сначала, что если $A, B \in M_n(K)$ – произвольные (не обязательно невырожденные) матрицы порядка n и $A \in \overline{CI(B)}$, то $\text{rank } A \leq \text{rank } B$. Для матрицы $X = (x_{ij})$ обозначим через $M_t(X)$ некоторый фиксированный минор порядка t . Допустим, что $\text{rank } B = s$. Тогда все миноры порядка $s + 1$ матрицы B равны нулю. В частности, регулярная функция $M_{s+1}(X)$ тождественно равна нулю на $CI(B)$, а значит, и на замыкании $\overline{CI(B)}$. Так как $A \in \overline{CI(B)}$, то $M_{s+1}(A) = 0$, т. е. все миноры порядка $s + 1$ матрицы A равны нулю. Значит, $\text{rank } A \leq s = \text{rank } B$.

Пусть теперь $\lambda \in K^*$. Тогда $A - \lambda E \in \overline{CI(B - \lambda E)}$ и для любого натурального k $(A - \lambda E)^k \in \overline{CI(B - \lambda E)^k}$. В силу доказанного выше справедливо неравенство $\text{rank}(A - \lambda E)^k \leq \text{rank}(B - \lambda E)^k$. Лемма 10 доказана.

Л е м м а 11. Если $C_0, C_1 \in \Omega(p, q)$, матрицы C_0 и C_1 имеют равные спектры и матрицы C_0^d и C_1^d не подобны, то многообразия $H(C_0)$ и $H(C_1)$ не содержатся друг в друге.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим противное. Пусть $H(C_0) \subset H(C_1)$. Положим $A = C_0^d$, $B = C_1^d$. По условию A и B не подобны. Значит, многообразия $W(A)$ и $W(B)$ не содержатся друг в друге. С другой стороны, по лемме 6 имеем $\overline{h(H(C_1))} = W(B) \supset \overline{h(H(C_0))} = W(A)$ – противоречие. Лемма 11 доказана.

Следующая лемма завершает доказательство теоремы.

Л е м м а 12. Если $C_0, C_1 \in \Omega(p, q)$, матрицы C_0 и C_1 имеют равные спектры и матрицы C_0^d и C_1^d подобны, то многообразия $H(C_0)$ и $H(C_1)$ не содержатся друг в друге.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Без ограничения общности можно считать, что $C_0^d = C_1^d = A$, где $A \in \Omega(p_1, q_1)$. Допустим, что $H(C_0) \subset H(C_1)$. Тогда $C_0 \in \overline{CI(C_1)}$. Пусть $J_{n_1}(\lambda), \dots, J_{n_k}(\lambda)$ – все блоки Жордана матрицы A с собственным значением λ и $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k$. Тогда C_0 и C_1 содержат блоки Жордана $J_{n_1}(\lambda_1), \dots, J_{n_k}(\lambda_k)$, где $\lambda_i^d = \lambda$, $i = 1, \dots, k$. Так как C_0 и C_1 не подобны, то найдется собственное значение λ_i , такое, что C_0 содержит несколько блоков Жордана с собственным значением λ_i , скажем, $J_{m_1}(\lambda_i), \dots, J_{m_s}(\lambda_i)$, $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_s$, а C_1 содержит блоки Жордана с собственным значением λ_i вида $J_{u_1}(\lambda_i), \dots, J_{u_a}(\lambda_i)$, $u_1 \geq u_2 \geq \dots \geq u_a$. При этом найдется индекс j такой, что $m_1 = u_1, \dots, m_{j-1} = u_{j-1}$, а $m_j > u_j$. Но тогда мы получим, что

$$\text{rank}(C_0 - \lambda_i)^{m_j-1} > \text{rank}(C_1 - \lambda_i)^{m_j-1},$$

а это противоречит лемме 10. Лемма 12 доказана.

Из лемм 7, 9, 11 и 12 получаем

С л е д с т в и е. Число неприводимых компонент многообразия $R_n(BS(p, q))$ равно числу классов сопряженных матриц в множестве $\Omega(p, q)$.

Список использованной литературы

1. *Lubotzky, A.* Varieties of representations of finitely generated groups / A. Lubotzky, A. Magid // *Memoirs AMS.* – 1985. – Vol. 58, N 336. – P. 1–116.
2. *Baumslag, G.* Some two-generator one-relator non-hopfian groups / G. Baumslag, D. Solitar // *Bull. AMS.* – 1962. – Vol. 68, N 3. – P. 199–201.
3. *Беняш-Кривец, В. В.* О многообразиях представлений групп Баумслэга – Солитера / В. В. Беняш-Кривец, И. О. Говорушко // *Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика.* – 2014. – № 2. – С. 43–45.
4. *Шафаревич, И. Р.* Основы алгебраической геометрии: в 2 т. / И. Р. Шафаревич. – М.: Наука, 1988. – Т. 1.

Поступила в редакцию 25.11.2015

УДК 519.8

В. И. САРВАНОВ¹, О. В. ЕФИМОВ²

ПОСТРОЕНИЕ РАСПИСАНИЙ ДЛЯ ДВУХСТАДИЙНОЙ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ ТИПА FLOWSHOP С БЛОКИРОВКАМИ

¹Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь,
e-mail: sarvanov@im.bas-net.by

²ИООО «EPAM Systems», Минск, Беларусь, e-mail: aleh.yafimau@gmail.com

Рассматривается система обслуживания, в которой множество требований $N = N_1 \cup N_2$, $N_1 \cap N_2 = \emptyset$, обслуживается на приборах M_1 и M_2 . Особенность системы состоит в том, что время обслуживания требования из $N_1(N_2)$ прибором $M_2(M_1)$ равно нулю и при этом занятый прибор M_1 блокирует доступ к прибору M_2 , а занятый прибор M_2 блокирует выход обслуженных требований из системы. Исследуется задача построения расписания, при котором каждое требование из $N_1(N_2)$ покидает систему не позже заданного директивного срока $D_1(D_2)$. Доказано, что эта задача является NP -трудной и предложен псевдополиномиальный алгоритм ее решения.

Ключевые слова: система обслуживания типа flowshop, блокировка, псевдополиномиальный алгоритм, динамическое программирование, NP -трудная проблема, директивные сроки.

V. I. SARVANOV¹, A. V. YAFIMAU²

SOLVING A TWO-MACHINE BLOCKING FLOWSHOP SCHEDULING PROBLEM WITH DUE DATES

¹Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus,
e-mail: sarvanov@im.bas-net.by

²FLLC «EPAM Systems», Minsk, Belarus, e-mail: aleh.yafimau@gmail.com

This work considers solving a particular type of blocking flowshop scheduling problem. In the environment under consideration there are only two machines (denoted as M_1 and M_2). For each job its execution time on one of these machines equals to zero. For each job with a non-zero execution time on machine $M_1(M_2)$ there is a due date $D_1(D_2)$ respectively. The authors prove that the problem is NP -hard and propose a pseudo-polynomial time algorithm that solves it.

Keywords: flowshop scheduling, blocking, pseudopolynomial algorithm, dynamic programming, NP -hard problem, due dates.

Введение. Одна из задач, возникающих при планировании и оперативном управлении технологическими процессами погрузки-разгрузки на железнодорожной станции, в общих чертах может быть сформулирована следующим образом. Имеется система (грузовой фронт), состоящая из железнодорожного пути и складов, расположенных вдоль этого пути. Каждому складу приписано определенное и известное заранее число вагонов, загрузка которых должна быть осуществлена на этом складе, при этом каждый вагон загружается только на одном складе. Путь имеет начало и конец, так что вагоны поступают в систему с начала пути, а покидают ее, проезжая в его конец. Занумеруем склады в том порядке, как они расположены вдоль пути, считая склад, ближайший к началу пути, первым. Тогда вагон может попасть на i -й склад только в том случае, если склады $1, 2, \dots, i-1$ свободны, т. е. там нет вагонов, а покинуть i -й склад он может только при условии, что свободны склады $i+1, i+2, \dots$. После того как вагон покинет систему, он направляется в назначенный ему формируемый поезд сразу либо после выполнения других технологических операций, длительности которых известны. Известно также время отправления каждого

формируемого состава, тем самым для каждого вагона задан срок, не позже которого он должен покинуть систему, чтобы успеть попасть в формируемый поезд.

Сформулированная практическая задача допускает естественную постановку в терминах теории расписаний (склады – приборы, вагоны – требования, время отправления формируемых поездов – директивные сроки). Настоящая работа посвящена исследованию соответствующей задачи построения допустимых относительно директивных сроков расписаний для случая двух приборов и двух директивных сроков. Показано, что уже при таких ограничениях она является *NP*-трудной и предложен псевдополиномиальный алгоритм ее решения при этих ограничениях.

Определения и постановка задачи. Далее при описании системы обслуживания и расписаний для этой системы мы придерживаемся терминологии из [1, 2].

Множество требований $N = \{1, 2, \dots, n\}$ необходимо обслужить в системе, состоящей из двух приборов M_1 и M_2 . Каждое требование $i \in N$ должно быть обслужено сначала прибором M_1 , затем – прибором M_2 . Каждый прибор может одновременно обслуживать лишь одно требование. Отсутствует буфер для промежуточного хранения требований при переходе с прибора M_1 на прибор M_2 . В результате, если прибор M_1 завершил обслуживание требования j_1 , а прибор M_2 занят обслуживанием требования j_2 , то j_1 остается на приборе M_1 , занимая его до завершения обслуживания требования j_2 и, соответственно, M_1 не может начинать обслуживание еще какого-либо требования. Особенность рассматриваемой задачи заключается в том, что для каждого требования длительность обслуживания на одном из этих приборов пренебрежимо мала, и можно считать ее равной нулю. Тем не менее требование с нулевой длительностью должно посетить соответствующий прибор и, следовательно, если прибор занят, то такое требование должно ждать момента его освобождения. В итоге множество N разбито на два подмножества N_1 и N_2 так, что требования множества N_1 имеют ненулевую длительность обслуживания на приборе M_1 , а требования из N_2 – на приборе M_2 . Ненулевую длительность обслуживания требования j обозначим через p_j . Прерывания при обслуживании требования прибором запрещены.

Для каждого требования задан директивный срок, к которому необходимо завершить его обслуживание, причем требования, относящиеся к одному и тому же из двух подмножеств N_1 и N_2 , имеют один и тот же директивный срок – D_1 и D_2 соответственно.

Необходимо построить расписание обслуживания всех требований, допустимое относительно заданных директивных сроков.

Ввиду отсутствия прерываний для задания расписания достаточно для каждого требования указать моменты начала его обслуживания приборами M_1 и M_2 .

Отметим, что отсутствие промежуточного буфера между приборами приводит к тому, что последовательности обслуживания требований приборами M_1 и M_2 совпадают, и расписание обслуживания требований однозначно определяется их перестановкой $\theta = (j_1, \dots, j_n)$ (см. [2]). Имея перестановку θ , нетрудно для каждого из требований вычислить моменты начала его обслуживания приборами M_1 и M_2 . Поэтому далее мы будем отождествлять расписание с соответствующей перестановкой.

Обозначим через $C_j(\theta)$ момент завершения обслуживания требования j при расписании θ . Расписание θ является допустимым относительно заданных директивных сроков, если для любого требования $j \in N_k$ выполняется $C_j(\theta) \leq D_k$, $k = 1, 2$.

Сформулированную задачу построения расписания, допустимого относительно двух заданных директивных сроков, будем далее обозначать через (Σ_2, D_1, D_2) .

Пусть $C_{\max}(\theta) = \max\{C_j(\theta) | j \in N\}$, т. е. $C_{\max}(\theta)$ – момент завершения обслуживания всех требований при расписании θ . Расписание θ^* , доставляющее минимум функции $C_{\max}(\theta)$, будем называть *кратчайшим*. Из дальнейшего будет видно, что кратчайшее расписание может быть построено простым и эффективным алгоритмом.

Если при некотором допустимом расписании θ требование $i \in N_2$ расположено в θ непосредственно после требования $j \in N_1$ и $p_j \geq p_i$, то, поменяв i и j местами, можно перейти к расписанию,

при котором обслуживание требований i и j начинается одновременно. При этом новое расписание останется допустимым, момент завершения обслуживания требования j не изменится, а требования i – уменьшится.

В итоге можно рассматривать расписание не как перестановку отдельных требований, а как последовательность $\Pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m)$, каждый элемент π_k которой является либо отдельным требованием $l, l \in N$ либо парой требований (i, j) , $i \in N_1, j \in N_2$, где момент начала обслуживания объединенных в пару требований – один и тот же. В первом случае элемент π_k будем называть простым, а требование l – одиночным. Во втором случае элемент π_k назовем составным. Далее используется именно такое представление расписания в виде последовательности $\Pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m)$, и эта последовательность называется расписанием.

Свойства и структура допустимых расписаний. Приведем ряд простых свойств допустимых расписаний. Справедливость каждого из них либо сразу вытекает из условий задачи, либо легко доказывается применением стандартного «перестановочного приема». Использование этих свойств позволит ограничиться рассмотрением расписаний специального вида.

Будем для краткости требование i называть ранним, если $d(i) = \min\{D_1, D_2\}$ и, соответственно, поздним, если $d(i) = \max\{D_1, D_2\}$.

Пусть $\Pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m)$ – допустимое расписание.

Свойство 1. Пусть $\pi_k = i$, $\pi_l = j$, $d(i) \geq d(j)$ и $k < l$. Тогда расписание, полученное из расписания Π транспозицией элементов π_k и π_l , также будет допустимым.

Отсюда следует, в частности, что можно ограничиться рассмотрением расписаний, согласно которым обслуживание одиночных поздних требований начинается только после завершения обслуживания всех одиночных ранних.

Свойство 2. Пусть $k, k \in [2; m]$, таково, что $\pi_k = (i, j)$ либо $\pi_k = l$, где l – раннее требование. Тогда расписание, полученное из расписания Π путем произвольной перестановки элементов $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{k-1}$, снова будет допустимым.

Свойство 3. Пусть $k, k \in [2; m]$, таково, что $\pi_{k-1} = l$, где l – позднее требование. Если π_k – составной элемент либо $\pi_k = i$, где i – позднее требование, то расписание, полученное из расписания Π транспозицией элементов π_{k-1} и π_k , также будет допустимым.

Свойство 4. Пусть $D_1 \leq D_2$, π_k – простой элемент, а π_{k+1} – составной. Тогда транспозиция элементов π_k, π_{k+1} оставляет расписание допустимым.

Для произвольного расписания $\Pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m)$ обозначим через $m_1 = m_1(\Pi)$ число его составных элементов, а через $m_2 = m_2(\Pi)$ и $m_3 = m_3(\Pi)$ – число простых элементов, являющихся, соответственно, ранними и поздними требованиями. Введем два типа расписаний специальной структуры. К первому типу (тип 1) отнесем расписания $\Pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m)$, структура которых задается следующими условиями:

- π_k – составной элемент, если $k = 1, 2, \dots, m_1$;
- π_k – раннее требование, если $k = m_1 + 1, \dots, m_1 + m_2$;
- π_k – позднее требование, если $k = m_1 + m_2 + 1, \dots, m$.

Расписания второго типа имеют сходную структуру, и различие, по существу, определяется позицией одного составного элемента, называемого далее особым элементом. К этому типу отнесем расписания, которые подчинены следующим условиям:

- π_k – составной элемент, если $k = 1, 2, \dots, m_1 - 1$ или $k = m_1 + m_2$ (в последнем случае π_k – особый элемент);
- π_k – раннее требование, если $k = m_1, m_1 + 1, \dots, m_1 + m_2 - 1$;
- π_k – позднее требование, если $k = m_1 + m_2 + 1, \dots, m$.

Теорема 1. Если множество допустимых расписаний не пусто, то оно содержит расписание первого либо второго типа.

Доказательство. Пусть $\Pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m)$ – произвольное допустимое расписание. Обозначим через t такой наибольший индекс, что π_t – составной элемент либо π_t – раннее требование (т. е. простой элемент, являющийся ранним требованием). Рассмотрим эти две возможности для π_t по отдельности, учитывая, что согласно выбору индекса t каждый элемент π_l , для $l > t$, является поздним требованием. Если π_t – раннее требование, то, используя сначала свойство 2, получим допустимое расписание, в котором составные элементы занимают первые m_1 позиций. После этого, выполнив на основе свойства 1 подходящие транспозиции, получим расписание типа 1.

Если π_t – составной элемент, то с использованием свойства 2 сначала получим расписание, в котором на первых $m_1 - 1$ позициях размещены составные элементы (все, кроме π_t). Затем, пользуясь свойствами 1 и 3, придем к расписанию, в котором все простые элементы, являющиеся поздними требованиями, займут позиции правее t . В результате получаем расписание типа 2, если множество элементов расписания Π , являющихся ранними требованиями, не пусто, и расписание типа 1 – в противном случае. Теорема 1 доказана.

Расписание Π типа 1 будем схематически представлять в виде $\Pi = (\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3)$, где Π_1 – отрезок последовательности Π , все элементы которого являются составными, а элементы отрезков Π_2 и Π_3 , соответственно, – ранними и поздними одиночными требованиями.

Похожее представление будем использовать и для расписаний второго типа. Схематически такое расписание Π будем записывать в виде $\Pi = (\Pi_1, \Pi_2, \pi', \Pi_3)$, где Π_2 и Π_3 имеют тот же смысл, что и выше, а отрезок Π_1 содержит все составные элементы расписания Π , кроме особого элемента $\pi' = \pi_{m_1+m_2}$. Заметим, что из определения расписания типа 2 следует, что $\Pi_2 \neq \emptyset$.

Если расписание Π (любого из двух типов) не содержит элементов какого-либо из трех упомянутых видов, то будем считать соответствующий отрезок Π_i , $i = 1, 2, 3$, пустым и использовать в этом случае обозначение $\Pi_i = \emptyset$.

Из свойств 1, 2 и определения отрезков Π_1 , Π_2 и Π_3 в расписаниях Π обоих типов вытекает справедливость следующих двух утверждений.

Утверждение 1. Если в допустимом расписании Π выполнить произвольную перестановку элементов отрезка Π_2 (Π_3), то снова получим допустимое расписание.

Утверждение 2. Если $\Pi_2 \neq \emptyset$, то любая перестановка элементов отрезка Π_1 оставляет расписание Π допустимым, а если $\Pi_2 = \emptyset$, то расписание остается допустимым при любой перестановке элементов $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{m_1-1}$, т. е. при перестановке, не затрагивающей последний элемент отрезка Π_1 .

Из теоремы 1 и свойства 4 легко получить

Утверждение 3. Если $D_1 \leq D_2$, то множество допустимых расписаний, когда оно не пусто, содержит расписание типа 1.

Пусть обслуживание начинается в момент времени 0 и пусть t_1 – момент времени, когда последнее из требований, скажем l , входящих в элементы отрезка Π_1 , покидает систему. По условию задачи можно считать, что $l \in N_1$. Кроме того, t_1 является суммой величин $t(\pi_k)$, $k = 1, 2, \dots, m_1$, где $t(\pi_k)$ – длина интервала времени от начала обслуживания элемента π_k до момента, когда начинается обслуживание элемента π_{k+1} . Таким образом, при любой перестановке элементов отрезка Π_1 величина t_1 не меняется. Если расписание $\Pi = (\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3)$ является допустимым и $D_1 \leq D_2$, то, с учетом утверждения 2, приходим к следующему.

Утверждение 4. Пусть $D_1 \leq D_2$ и $\Pi = (\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3)$ – допустимое расписание. Тогда любая перестановка элементов отрезка Π_1 приводит к допустимому расписанию.

Следующее утверждение, по-видимому, является «фольклорным». Его несложное доказательство, использующее стандартный «перестановочный прием», можно найти, например, в работе [2]. Оно показывает, как устроены элементы отрезка Π_1 в допустимых расписаниях обоих типов.

Утверждение 5. Пусть пара векторов $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ и $y = (y_1, y_2, \dots, y_p)$ и подстановка $\tau, \tau \in S_p$, таковы, что выполняются неравенства:

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_p \text{ и } y_{\tau(1)} \leq y_{\tau(2)} \leq \dots \leq y_{\tau(p)}.$$

Тогда для любой подстановки $\theta, \theta \in S_p$ справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^p \max(x_i, y_{\theta(i)}) \geq \sum_{i=1}^p \max(x_i, y_{\tau(i)}).$$

Согласно последнему утверждению, минимизировать общее время обслуживания (т. е. построить кратчайшее расписание) можно при помощи упорядочивания элементов по длительностям обслуживания.

Обозначим $d = \min\{D_1, D_2\}$, $D = \max\{D_1, D_2\}$, $D_1 \neq D_2$. Если общее время обслуживания в кратчайшем расписании располагается вне интервала $(d, D]$, то сразу можно ответить на вопрос о существовании допустимого расписания.

Легко видеть, что кратчайшее расписание можно рассматривать как расписание, допустимое относительно директивных сроков $d(i) = D, i \in N$, при соответствующем выборе значения D . Поэтому задача построения кратчайшего расписания полиномиально сводится к задаче построения допустимого, а обратное, вообще говоря, неверно.

Сложностной статус задачи.

Теорема 2. Задача (Σ_2, D_1, D_2) построения допустимого расписания в системе с двумя приборами является NP-трудной.

Доказательство.

Рассмотрим одну из основных NP-полных задач – задачу РАЗБИЕНИЕ.

УСЛОВИЕ. Заданы конечное множество A и «вес» $s(a) \in Z^+$ для каждого $a \in A$.

ВОПРОС. Существует ли подмножество $A' \subseteq A$, такое, что

$$\sum_{a \in A'} s(a) = \sum_{a \in A \setminus A'} s(a)?$$

Построим полиномиальное сведение задачи РАЗБИЕНИЕ к нашей задаче.

Пусть в задаче РАЗБИЕНИЕ $|A| = n, n > 0$. Положим $A = \{1, \dots, n\}$ и $s(i) = a_i, a_i \in Z^+, i = \overline{1, n}$. Выберем параметр δ из условия

$$\delta = n \cdot \max_{1 \leq i \leq n} \{a_i\}.$$

Определим множества требований и длительности их обслуживания следующим образом:

$$N_1 = \left\{ i \mid p_i = i\delta, i = \overline{1, n} \right\}, N_2 = \left\{ (2j-1), 2j \mid p_{2j-1} = j\delta - a_j; p_{2j} = j\delta + a_j; j = \overline{1, n} \right\}.$$

Положим

$$D_1 = \delta + 2\delta + \dots + n\delta + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i, \text{ а } D_2 = D_1 + \delta + 2\delta + \dots + n\delta \text{ (т. е. } D_1 < D_2)$$

и примем $D_i, i = 1, 2$, в качестве директивного срока для требований из множества $N_i, i = 1, 2$. Очевидно, что такое сведение является полиномиальным.

Покажем теперь, что задача РАЗБИЕНИЕ имеет решение тогда и только тогда, когда существует допустимое расписание для построенного примера рассматриваемой задачи.

Необходимость. Предположим, что существует подмножество $A' \subseteq A$ такое, что

$$\sum_{a \in A'} s(a) = \sum_{a \in A \setminus A'} s(a) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i.$$

Тогда можно построить расписание первого типа, имеющее вид:

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \{\pi_k\}, \text{ где } \begin{cases} \pi_k = (k, 2k), \text{ где } p_k = k\delta, p_{2k} = k\delta + a_k \text{ при } k \in A' \\ \pi_k = (k, 2k-1), \text{ где } p_k = k\delta, p_{2k-1} = k\delta - a_k \text{ при } k \in A \setminus A', \end{cases} \\ \Pi_2 &= \emptyset, \\ \Pi_3 &= \{\pi_k\}, \text{ где } \begin{cases} \pi_k = (2k), \text{ где } p_{2k} = k\delta + a_k \text{ при } k \in A \setminus A' \\ \pi_k = (2k-1), \text{ где } p_{2k-1} = k\delta - a_k \text{ при } k \in A'. \end{cases} \end{aligned}$$

Обслуживание элемента π_k из отрезка Π_1 потребует времени $k\delta + a_k$, если $\pi_k = (k, 2k)$, и времени $k\delta$, если $\pi_k = (k, 2k-1)$. Тогда обслуживание последнего элемента на отрезке Π_1 завершится к моменту времени

$$\sum_{k \in A'} (k\delta + a_k) + \sum_{k \in A \setminus A'} k\delta = \sum_{k \in A} k\delta + \sum_{k \in A'} a_k = \delta + 2\delta + \dots + n\delta + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i = D_1.$$

Обслуживание элемента π_k из отрезка Π_3 потребует времени $k\delta + a_k$, если $\pi_k = (2k)$, и времени $k\delta - a_k$, если $\pi_k = (2k-1)$. Тогда обслуживание последнего элемента на отрезке Π_3 завершится к моменту времени

$$D_1 + \sum_{k \in A'} (k\delta + a_k) + \sum_{k \in A \setminus A'} (k\delta - a_k) = D_1 + \sum_{k \in A} k\delta + \sum_{k \in A'} a_k - \sum_{k \in A \setminus A'} a_k = D_1 + \sum_{k \in A} k\delta = D_2.$$

Таким образом, построенное расписание является допустимым.

Достаточность. Предположим, что для построенного примера нашей задачи существует допустимое расписание. Установим свойства такого расписания.

Лемма 1. *Допустимое расписание является расписанием первого типа, в котором*

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \{\pi_k = (k, j)\}, \text{ причем, } j = 2k, \text{ где } p_{2k} = k\delta + a_k, \text{ либо } j = 2k-1, \text{ где } p_{2k-1} = k\delta - a_k, \\ \Pi_2 &= \emptyset, \\ \Pi_3 &= \{\pi_k\}, \text{ причем, } \pi_k = (2k), \text{ где } p_{2k} = k\delta + a_k, \text{ либо } \pi_k = (2k-1), \text{ где } p_{2k-1} = k\delta - a_k. \end{aligned}$$

Докажем это утверждение.

Предположим, что можно построить расписание типа 2, тогда в силу данных определений $\Pi_2 \neq \emptyset$, т. е. $\exists i_0 \in N_1$, что $(i_0) \in \Pi_2$. Так как каждое требование из множества N_2 должно быть обслужено, то общее время обслуживания этих требований не менее чем $(\delta - a_1) + (\delta + a_1) + \dots + (n\delta - a_n) + (n\delta + a_n)$. Кроме того, требование i_0 не входит в пару с каким-либо требованием. Поэтому его обслуживание потребует времени $i_0\delta$. Тогда общее время обслуживания всех требований не менее чем

$$\begin{aligned} &(\delta - a_1) + (\delta + a_1) + \dots + (n\delta - a_n) + (n\delta + a_n) + i_0\delta \geq [i_0 \geq 1] \geq \\ &\geq 2(\delta + \dots + n\delta) + \delta > \left[\delta > \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i \right] > 2(\delta + \dots + n\delta) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i = D_2. \end{aligned}$$

Получаем противоречие с допустимостью расписания.

Предположим, что в построенном допустимом расписании $\exists k_0 \in N_1$, что $\pi_{k_0} = (k_0, j_0) \in \Pi_1$, причем $j_0 \neq 2k_0$ и $j_0 \neq 2k_0 - 1$. Пусть $j_0 = 2l_0$ либо $j_0 = 2l_0 - 1$ ($l_0 \neq k_0$). Рассмотрим два случая.

а) $l_0 < k_0$.

Пусть для определенности $j_0 = 2l_0$ (случай $j_0 = 2l_0 - 1$ доказывается аналогично). Тогда для обслуживания всех требований из множества N_2 , за исключением $(2l_0)$, потребуется, по крайней мере, время

$$\begin{aligned} &(\delta - a_1) + (\delta + a_1) + \dots + [(l_0 - 1)\delta - a_{l_0-1}] + [(l_0 - 1)\delta + a_{l_0-1}] + (l_0\delta - a_{l_0}) + [(l_0 + 1)\delta - a_{l_0+1}] + \\ &+ [(l_0 + 1)\delta + a_{l_0+1}] + \dots + (n\delta - a_n) + (n\delta + a_n). \end{aligned}$$

Так как требование $(2l_0)$ обслуживается в паре с требованием k_0 и $p_{2l_0} = l_0\delta + a_{l_0}$, $p_{k_0} = k_0\delta$, то для обслуживания этой пары потребуется время $k_0\delta$, ибо

$$l_0\delta + a_{l_0} < l_0\delta + \delta \leq [l_0 + 1 \leq k_0] \leq k_0\delta.$$

Тогда общее время обслуживания всех упомянутых требований составляет

$$\begin{aligned} & (\delta - a_1) + (\delta + a_1) + \dots + [(l_0 - 1)\delta - a_{l_0-1}] + [(l_0 - 1)\delta + a_{l_0-1}] + (l_0\delta - a_{l_0}) + k_0\delta + \\ & + [(l_0 + 1)\delta - a_{l_0+1}] + [(l_0 + 1)\delta + a_{l_0+1}] + \dots + (n\delta - a_n) + (n\delta + a_n) = [k_0\delta = (l_0\delta + a_{l_0}) + ((k_0 - l_0)\delta - a_{l_0})] = \\ & = 2(\delta + \dots + n\delta) + ((k_0 - l_0)\delta - a_{l_0}) \geq [k_0 - l_0 \geq 1] \geq 2(\delta + \dots + n\delta) + (\delta - a_{l_0}) > \left[\delta - a_{l_0} > \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i \right] > \\ & > 2(\delta + \dots + n\delta) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i = D_2. \end{aligned}$$

Получаем противоречие с допустимостью расписания.

б) $l_0 > k_0$.

Здесь, для определенности, положим $j_0 = 2l_0 - 1$ (случай $j_0 = 2l_0$ доказывается аналогично). Для обслуживания всех требований из множества N_1 , за исключением (k_0) , потребуется, по крайней мере, время $\delta + \dots + (k_0 - 1)\delta + (k_0 + 1)\delta + \dots + n\delta$. Так как требования (k_0) и $(2l_0 - 1)$ обслуживаются в паре и $p_{k_0} = k_0\delta$, $p_{2l_0-1} = l_0\delta - a_{l_0}$, то для обслуживания этой пары потребуется время $l_0\delta - a_{l_0}$, ибо $l_0\delta - a_{l_0} > [a_{l_0} < \delta] > l_0\delta - \delta \geq [l_0 - 1 \geq k_0] \geq k_0\delta$. Учитывая время обслуживания пары $(k_0, 2l_0 - 1)$, обслуживание компонент из отрезка Π_1 завершится не ранее, чем к моменту времени

$$\begin{aligned} & \delta + \dots + (k_0 - 1)\delta + l_0\delta - a_{l_0} + (k_0 + 1)\delta + \dots + n\delta = [l_0\delta = k_0\delta + (l_0 - k_0)\delta] = (\delta + \dots + n\delta) + \\ & + (l_0 - k_0)\delta - a_{l_0} \geq [l_0 - k_0 \geq 1] \geq (\delta + \dots + n\delta) + \delta - a_{l_0} > \left[\delta - a_{l_0} > \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i \right] > (\delta + \dots + n\delta) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i = D_1. \end{aligned}$$

Противоречие с допустимостью расписания.

Таким образом, лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Расписание является допустимым тогда и только тогда, когда обслуживание компонент отрезка Π_1 завершается в момент времени D_1 .*

Введем следующие обозначения. Учитывая структуру расписания согласно свойству 1, обозначим через I множество индексов $\{1, \dots, n\}$, а через I' – его подмножество, а именно: $I' = \{i | i \in I, (i, 2i) \in \Pi_1, \text{ где } p_{2i} = i\delta + a_i\}$. В дальнейших рассуждениях будем также опираться на структуру расписания согласно свойству 1.

Достаточность леммы 2 почти очевидна: все требования с директивным сроком D_1 входят в компоненты отрезка Π_1 . Поскольку

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in I \setminus I'} i\delta + \sum_{i \in I'} (i\delta + a_i) = D_1, \text{ то } \sum_{i \in I} i\delta + \sum_{i \in I'} a_i = D_1, \\ & \text{т. е. } \sum_{i \in I'} a_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i \text{ и } \sum_{i \in I \setminus I'} a_i = \sum_{i \in I} a_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i. \end{aligned}$$

Тогда обслуживание всех требований закончится к моменту

$$D_1 + \sum_{i \in I'} (i\delta - a_i) + \sum_{i \in I \setminus I'} (i\delta + a_i) = D_1 + \sum_{i \in I} i\delta - \sum_{i \in I'} a_i + \sum_{i \in I \setminus I'} a_i = D_1 + \sum_{i \in I} i\delta = D_2.$$

Таким образом, расписание допустимо.

Необходимость докажем методом от противного. Предположим, что существует допустимое расписание, в котором обслуживание компонент отрезка Π_1 завершается ранее момента времени D_1 , т. е.

$$\sum_{i \in I \setminus I'} i\delta + \sum_{i \in I'} (i\delta + a_i) < D_1,$$

что равносильно неравенству

$$\sum_{i \in I} i\delta + \sum_{i \in I'} a_i < D_1 = \sum_{i \in I} i\delta + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i,$$

из которого следует, что

$$\sum_{i \in I'} a_i < \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i \text{ и } \sum_{i \in I \setminus I'} a_i = \sum_{i \in I} a_i - \sum_{i \in I'} a_i > \sum_{i \in I} a_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i.$$

Тогда общее время обслуживания составляет

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in I} i\delta + \sum_{i \in I'} a_i + \sum_{i \in I'} (i\delta - a_i) + \sum_{i \in I \setminus I'} (i\delta + a_i) = \\ & = \sum_{i \in I} i\delta + \sum_{i \in I'} a_i + \sum_{i \in I} i\delta - \sum_{i \in I'} a_i + \sum_{i \in I \setminus I'} a_i = 2 \sum_{i \in I} i\delta + \sum_{i \in I \setminus I'} a_i > 2 \sum_{i \in I} i\delta + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i = D_2. \end{aligned}$$

Последнее противоречит допустимости расписания. Лемма 2 доказана.

Итак, если существует допустимое расписание, то $\sum_{i \in I'} a_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i$, тогда в качестве $A' \subseteq A$ для задачи РАЗБИЕНИЕ можно взять множество I' . Таким образом, NP -трудность задачи построения допустимого расписания доказана полностью.

Можно доказать, что задача (Σ_2, D_1, D_2) остается NP -трудной и в случае, когда $D_2 < D_1$. Схема соответствующего доказательства выглядит следующим образом. Построим сведение задачи РАЗБИЕНИЕ аналогично случаю $D_1 < D_2$, с тем лишь отличием, что роли приборов инвертированы. Определим множества требований и длительности их обслуживания следующим образом:

$$\tilde{N}_1 = \left\{ (2j-1), 2j \mid p_{2j-1} = j\delta - a_j; p_{2j} = j\delta + a_j; j = \overline{1, n} \right\}, \tilde{N}_2 = \left\{ i \mid p_i = i\delta, i = \overline{1, n} \right\}.$$

Кроме того, дополним множество требований на прибор M_1 (M_2) одним требованием с длительностью обслуживания $(n+2)\delta$ ($(n+1)\delta$), полагая:

$$N_1 = \tilde{N}_1 \cup \left\{ (2n+1) \mid p_{2n+1} = (n+2)\delta \right\}, N_2 = \tilde{N}_2 \cup \left\{ (n+1) \mid p_{n+1} = (n+1)\delta \right\}.$$

Определим директивные сроки D_1 и D_2 следующим образом:

$$D_2 = \delta + 2\delta + \dots + n\delta + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i + (n+1)\delta, D_1 = D_2 + (\delta + 2\delta + \dots + n\delta) + \delta \text{ (т. е. } D_2 < D_1).$$

Можно показать, что если допустимое расписание существует, то требования $(2n+1)$ (где $p_{2n+1} = (n+2)\delta$) и $(n+1)$ (где $p_{n+1} = (n+1)\delta$) могут обслуживаться только в паре, и эта пара является особым элементом.

Теперь, когда особый элемент «зафиксирован», доказательство NP -трудности задачи для случая $D_2 < D_1$ проводится точно так же, как и в случае $D_1 < D_2$.

Псевдополиномиальный алгоритм. Введем обозначения для мощностей множеств N_1 и N_2 : $n_1 = |N_1|$, $n_2 = |N_2|$. Таким образом, $n_1 + n_2 = n$. Обозначим через a_i ($i = \overline{1, n_1}$) и b_j ($j = \overline{1, n_2}$) длительности обслуживания требований множеств N_1 и N_2 соответственно. Будем считать (не ограничивая общности), что $a_{i_1} \geq a_{i_2}$ ($i_1 < i_2$), $b_{j_1} \geq b_{j_2}$ ($j_1 < j_2$).

Вначале рассмотрим случай, когда $D_1 < D_2$ и, согласно утверждению 3, существует расписание типа 1.

Рассмотрим произвольное допустимое расписание Π . Пусть для некоторого элемента $(i_1, j_1) \in \Pi_1$ и элемента $i_2 \in \Pi_2$ выполняется соотношение $i_2 < i_1$ (т. е. $a_{i_2} > a_{i_1}$). Тогда замена элемента (i_1, j_1) на (i_2, j_1) и одновременно элемента i_2 на i_1 не нарушит допустимости расписания, ибо $\max(a_{i_1}, b_{j_1}) + a_{i_2} \geq \max(a_{i_2}, b_{j_1}) + a_{i_1}$. В связи с этим будем рассматривать лишь такие расписания, в которых $\forall (i_1, j_1) \in \Pi_1$ и $\forall i_2 \in \Pi_2$ выполняется $a_{i_1} > a_{i_2}$. Их далее будем называть каноническими расписаниями. Кроме того, согласно утверждению 4 можно переупорядочить требования на отрезке Π_1 , сохраняя допустимость расписания. Из приведенных ранее утверждений легко получить следующие свойства допустимого расписания канонического вида:

- 1) ранние требования обслуживаются в порядке невозрастания длительностей обслуживания;
- 2) на каждом из отрезков Π_1 и Π_3 поздние требования обслуживаются в порядке невозрастания длительностей обслуживания.

Таким образом, задача сводится к отысканию «назначения», т. е. формирования пар из ранних и поздних требований, составляющих отрезок Π_1 , так чтобы все требования множества N были обслужены согласно директивным срокам.

Так как требования начинают обслуживаться в нулевой момент времени, то обслуживание последней пары требований на отрезке Π_1 завершится к моменту $\sum_{(i,j) \in \pi_1} \max(a_i, b_j)$, последнего требования на отрезке Π_2 – к моменту

$$\sum_{(i,j) \in \Pi_1} \max(a_i, b_j) + \sum_{i \in \Pi_2} a_i,$$

а последнего требования на отрезке Π_3 – к моменту

$$\sum_{(i,j) \in \Pi_1} \max(a_i, b_j) + \sum_{i \in \Pi_2} a_i + \sum_{j \in \Pi_3} b_j.$$

Согласно условиям допустимости расписания, должны выполняться следующие неравенства (неравенства допустимости):

$$\sum_{(i,j) \in \Pi_1} \max(a_i, b_j) + \sum_{i \in \Pi_2} a_i \leq D_1, \quad \sum_{(i,j) \in \Pi_1} \max(a_i, b_j) + \sum_{i \in \Pi_2} a_i + \sum_{j \in \Pi_3} b_j \leq D_2.$$

Положим, что $A = \sum_{i=1}^{n_1} a_i$, т. е. A – величина, непосредственно определяемая на основании входных параметров задачи. Тогда неравенства допустимости можно переписать в виде:

$$\sum_{\substack{(i,j) \in \Pi_1 \\ b_j > a_i}} b_j \leq D_1 - A, \quad \sum_{\substack{(i,j) \in \Pi_1 \\ b_j > a_i}} b_j + \sum_{j \in \Pi_3} b_j \leq D_2 - A.$$

Сразу отметим, что в случае $D_1 < A$ задача решения не имеет. Таким образом, можно считать, что правые части указанных неравенств неотрицательны.

Положим далее, что $B = \sum_{j=1}^{n_2} b_j$. Аналогично величине A , величина B непосредственно определяется на основании входных параметров задачи. Отметим также, что множество поздних требований, которые представлены в элементах отрезков Π_1 и Π_3 , это в точности множество N_2 .

Потому выполняется равенство $\sum_{(i,j) \in \Pi_1} b_j + \sum_{j \in \Pi_3} b_j = B$.

Тогда второе неравенство допустимости можно записать в виде

$$\sum_{\substack{(i,j) \in \Pi_1 \\ b_j > a_i}} b_j + B - \sum_{(i,j) \in \Pi_1} b_j \leq D_2 - A, \quad \text{что равносильно} \quad \sum_{\substack{(i,j) \in \Pi_1 \\ b_j \leq a_i}} b_j \geq A + B - D_2.$$

Заметим, что в случае, когда $A + B \leq D_2$, задача является тривиальной (если $A \leq D_1$, то существование допустимого расписания очевидно, а в противном случае оно не существует). Поэтому нас интересует лишь случай, когда $A + B - D_2 > 0$.

Итак, требуется найти такое «назначение» в пары (i, j) , составляющие отрезок Π_1 , чтобы выполнялись оба неравенства:

$$\sum_{\substack{(i,j) \in \Pi_1 \\ b_j > a_i}} b_j \leq D_1 - A \quad \text{и} \quad \sum_{\substack{(i,j) \in \Pi_1 \\ b_j \leq a_i}} b_j \geq A + B - D_2.$$

Будем решать задачу максимизации суммы во втором неравенстве при ограничении на величину суммы в первом неравенстве. Для этого воспользуемся методом динамического программирования. В качестве подзадачи рассмотрим задачу, в которой заданы k поздних требований (т. е. b_1, \dots, b_k), требуется образовать l пар, и $\sum_{\substack{(i,j) \in \Pi_1 \\ b_j > a_i}} b_j = S$.

Рассмотрим функционал $F(k, l, S)$, определенный для $k = 0, \dots, n_2$, $l = 0, \dots, \min(n_1, n_2)$, $S = 0, \dots, (D_1 - A)$. $F(k, l, S)$ равно наибольшему значению $\sum_{\substack{(i,j) \in \Pi_1 \\ b_j \leq a_i}} b_j$ при условии, что рассматривается всего k значений b_j , образовано l пар (с a_1, \dots, a_l) и $\sum_{\substack{(i,j) \in \Pi_1 \\ b_j > a_i}} b_j = S$. Тогда справедливо следующее рекуррентное соотношение:

$$F(k, l, S) = \max \left\{ \begin{array}{ll} F(k-1, l, S), & F(k-1, l-1, S-b_k), \\ \text{только когда } b_k > a_l & \text{только когда } b_k \leq a_l \end{array} \right\}.$$

Заполнение таблицы будем производить по следующим формулам:

$$\begin{aligned} F(k+1, l, S) &= \max \{ F(k+1, l, S), F(k, l, S) \} \quad (\text{когда новая пара не образовывается}); \\ F(k+1, l+1, S+b_{k+1}) &= \max \{ F(k+1, l+1, S+b_{k+1}), F(k, l, S) \} \quad (\text{если } b_{k+1} > a_{l+1}); \\ F(k+1, l+1, S) &= \max \{ F(k+1, l+1, S), F(k, l, S) + b_{k+1} \} \quad (\text{если } b_{k+1} \leq a_{l+1}). \end{aligned}$$

Начальные условия: $F(0, 0, 0) = 0$. Во всех остальных ячейках таблицы записаны значения -1 . Для перехода к конечному состоянию (после того, как таблица заполнена) ищем максимум значений F по нижнему уровню таблицы (n_2, l, S) , где $l = 0, \dots, \min(n_1, n_2)$, $S = 0, \dots, (D_1 - A)$.

Если на нижнем уровне нашлись такие значения l_0 и S_0 , что $F(n_2, l_0, S_0) \geq A + B - D_2$, то существует допустимое расписание.

Заполнение таблицы происходит по столбцам в порядке возрастания значения уровня k , на каждом уровне столбцы обходятся в направлении увеличения значений l :

$$\begin{aligned} k &= 0, \dots, n_2, \\ l &= 0, \dots, \min(n_1, n_2), \\ S &= 0, \dots, (D_1 - A). \end{aligned}$$

Для заполнения значениями $F(k_0, l, S)$ на некотором уровне k_0 достаточно хранить в памяти две двумерные таблицы: для значений $F(k_0 - 1, l, S)$ и $F(k_0, l, S)$. Трудоемкость алгоритма определяется затратами времени на построение таблицы и составляет $O(n_2 \cdot \min(n_1, n_2) \cdot (D_1 - A))$.

Рассмотрим теперь случай, когда $D_2 < D_1$, и покажем, как модифицировать изложенный выше алгоритм, чтобы получить решение задачи в этой ситуации. Так как и в случае $D_2 < D_1$ может оказаться, что существует допустимое расписание типа 1, то попробуем сначала построить расписание этого типа по аналогии со случаем $D_1 < D_2$.

Обслуживание последней пары требований на отрезке Π_1 завершится к моменту $\sum_{(i,j) \in \Pi_1} \max(a_i, b_j)$, последнего требования на отрезке Π_2 – к моменту $\sum_{(i,j) \in \Pi_1} \max(a_i, b_j) + \sum_{j \in \Pi_2} b_j$, а последнего требования на отрезке Π_3 – к моменту $\sum_{(i,j) \in \Pi_1} \max(a_i, b_j) + \sum_{j \in \Pi_2} b_j + \sum_{i \in \Pi_3} a_i$.

Согласно условиям допустимости расписания, должны выполняться неравенства

$$\sum_{(i,j) \in \Pi_1} \max(a_i, b_j) + \sum_{j \in \Pi_2} b_j \leq D_2, \quad \sum_{(i,j) \in \Pi_1} \max(a_i, b_j) + \sum_{j \in \Pi_2} b_j + \sum_{i \in \Pi_3} a_i \leq D_1.$$

Следуя аналогичным определениям величин A и B , неравенства допустимости можно переписать в виде:

$$\sum_{\substack{(i,j) \in \Pi_1 \\ a_i > b_j}} (a_i - b_j) \leq D_2 - B, \quad \sum_{\substack{(i,j) \in \Pi_1 \\ a_i > b_j}} (a_i - b_j) + \sum_{i \in \Pi_3} a_i \leq D_1 - B.$$

Далее по аналогии со случаем $D_1 < D_2$ второе неравенство допустимости при помощи равносильных преобразований можно привести к виду $\sum_{(i,j) \in \Pi_1} \min(a_i, b_j) \geq A + B - D_1$.

Итак, требуется найти такое «назначение» в пары (i, j) на отрезке Π_1 , чтобы выполнялись оба неравенства:

$$\sum_{\substack{(i,j) \in \Pi_1 \\ a_i > b_j}} (a_i - b_j) \leq D_2 - B, \quad \sum_{(i,j) \in \Pi_1} \min(a_i, b_j) \geq A + B - D_1.$$

Будем решать задачу максимизации суммы во втором неравенстве при ограниченной сумме в первом неравенстве. Тогда, применяя метод динамического программирования, в качестве подзадачи рассмотрим задачу, в которой заданы k поздних требований (т. е. a_1, \dots, a_k), требуется образовать l пар, и

$$\sum_{\substack{(i,j) \in \Pi_1 \\ a_i > b_j}} (a_i - b_j) = S.$$

Рассмотрим функционал $G(k, l, S)$, определенный для $k = 0, \dots, n_1$, $l = 0, \dots, \min(n_1, n_2)$, $S = 0, \dots, (D_2 - B)$. $G(k, l, S)$ равно наибольшему значению $\sum_{(i,j) \in \Pi_1} \min(a_i, b_j)$ при условии, что рассматривается всего k значений a_i , образовано l пар (с b_1, \dots, b_l) и $\sum_{\substack{(i,j) \in \Pi_1 \\ a_i > b_j}} (a_i - b_j) = S$. Тогда справедливо следующее рекуррентное соотношение:

$$G(k, l, S) = \max \left\{ \begin{array}{ll} G(k-1, l, S), & G(k-1, l-1, S - (a_k - b_l)) + b_l, \\ \text{только когда } a_k > b_l & \text{только когда } a_k \leq b_l \end{array} \right\} + a_k.$$

Формулы для заполнения таблицы, в которой хранятся значения функционала $G(k, l, S)$, строятся по аналогии с формулами для таблицы, в которой хранятся значения функционала $F(k, l, S)$.

Если допустимое расписание типа 1 построить не удалось, то предположим существование допустимого расписания типа 2. Для особого элемента, представленного парой (a_{i_0}, b_{j_0}) в допустимом расписании типа 2, должно выполняться неравенство $a_{i_0} > b_{j_0}$, иначе рассматриваемый элемент не был бы особым.

На основании входных данных исходной задачи построим модифицированную задачу. В этой задаче множество ранних требований не содержит элемента с длительностью обслуживания b_{j_0} , множество поздних требований не содержит элемента с длительностью обслуживания a_{i_0} ,

а директивные сроки изменены следующим образом: $D_2' = D_2 - b_{j_0}$, $D_1' = D_1 - a_{i_0}$. Тогда если существует допустимое расписание типа 1 для модифицированной задачи, то можно очевидным образом перейти к расписанию типа 2 для исходной задачи. Таким образом, нужно последовательно фиксировать индекс j_0 раннего требования и в качестве пары для особого элемента рассматривать такие индексы i_0 поздних требований, что $a_{i_0} > b_{j_0}$. Для каждой такой зафиксированной пары можно решать описанную выше модифицированную задачу методом динамического программирования при помощи вычисления значений функционала $G(k, l, S)$.

Так как потребуется рассмотреть не более $n_1 \cdot n_2$ модифицированных задач, то для случая $D_2 < D_1$ трудоемкость алгоритма составит $O(n_1^2 \cdot n_2 \cdot \min(n_1, n_2) \cdot (D_2 - B))$.

Список использованной литературы

1. Танаев, В. С. Теория расписаний. Многостадийные системы / В. С. Танаев, Ю. Н. Сотсков, В. А. Струсевич. – М.: Наука, 1989.
2. Ronconi, D. P. A branch-and-bound algorithm to minimize the makespan in a flowshop with blocking / D. P. Ronconi // Annals of Operations Research. – 2005. – N 138. – P. 53–65.
3. Танаев, В. С. Теория расписаний. Групповые технологии / В. С. Танаев, М. Я. Ковалев, Я. М. Шафранский. – Минск: ОИПИ НАН Беларуси, 1998.

Поступила в редакцию 16.01.2016

УДК 517.956.32

В. И. КОРЗЮК^{1,2}, Н. В. ВИНЬ¹

КЛАССИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО БИВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

¹Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь,

²Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь,
e-mail: korzyuk@bsu.by, vinhnguyen0109@gmail.com

В данной работе рассмотрены смешанные задачи для биволнового уравнения. Методом характеристик строится аналитическое решение рассматриваемых задач. Доказывается единственность решения и выводятся условия согласования в угловых точках для заданных функций уравнения, условий Коши и граничных условий.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, гиперболические уравнения, биволновое уравнение, частные производные, граничные условия, условия Коши, условия согласования, классическое решение.

V. I. KORZYUK^{1,2}, N. V. VINH¹

CLASSICAL SOLUTIONS OF MIXED PROBLEM FOR ONE-DIMENSIONAL BIWAVE EQUATION

¹Belarusian State University, Minsk, Belarus,

²Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus,
e-mail: korzyuk@bsu.by, vinhnguyen0109@gmail.com

In this paper we consider the mixed problem of biwave equation. Using method of characteristics the analytical solution of the mixed problem for the equation is under construction. We prove the uniqueness of the solution and conditions of the coordination of initial and boundary condition are deduced.

Keywords: Differential equations, hyperbolic equations, biwave equation, partial derivatives, boundary conditions, Cauchy conditions, agreement conditions, classical solution.

Введение. Для биволнового уравнения в многомерном случае в работах [1–5] функциональными методами изучаются граничные задачи относительно корректной постановки их по Адамару [6, 7]. В [1, 2] рассматриваются смешанные задачи с различными условиями на боковой поверхности, однако смешанная задача, для которой на боковой поверхности задается искомая функция и ее производная первого порядка по нормали отсутствует. Для нее авторам не удалось доказать соответствующее энергетическое неравенство. В работе [5] постановки такой задачи также нет. Закономерно возникает вопрос: возможно, для указанной задачи в принципе нельзя доказать теорему существования и единственности решения в каком-либо виде. Как затем было установлено, данное предположение – ошибочно. Об этом свидетельствуют результаты, полученные в статье [8], где найдено классическое решение в аналитическом виде методом характеристик первой смешанной задачи в случае двух независимых переменных. Но здесь решение определено только при выполнении достаточных условий согласования на заданные функции задачи. В настоящей работе также рассматривается классическое решение при меньшем количестве условий согласования, которые являются не только достаточными, но и необходимыми, чтобы существовало единственное классическое решение из класса непрерывных и непрерывно дифференцируемых функций до четвертого порядка включительно.

1. Постановка задачи. В замыкании $\bar{Q} = [0, \infty) \times [0, l]$ области $Q = (0, \infty) \times (0, l)$ двух независимых переменных $(t, x) \in \bar{Q} \subset R^2$ задано одномерное биволновое уравнение

$$Lu = (\partial_t^2 - a^2 \partial_x^2)(\partial_t^2 - b^2 \partial_x^2)u(t, x) = f(t, x), \quad (t, x) \in \bar{Q}, \quad (1)$$

относительно искомой функции $u: R^2 \supset \bar{Q} \ni (t, x) \rightarrow u(t, x) \in R$, где $a^2, b^2, l \in R$, $a^2 > b^2 > 0$, $0 < l < +\infty$, $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_t^j \partial_x^k = \frac{\partial^{j+k}}{\partial t^j \partial x^k}$, $j, k = \{0, 1, 2, \dots\}$ – частные производные. К уравнению (1) на части границы ∂Q области Q присоединяются условия Коши

$$\partial_t^j u(0, x) = \varphi_j(x), \quad j = 0, 1, 2, 3, \quad x \in [0, l], \quad (2)$$

и граничные условия

$$u(t, 0) = \mu_1(t), \quad \alpha_0 u(t, 0) + \alpha_1 \partial_x u(t, 0) = \mu_2(t), \quad t \in [0, \infty), \quad (3)$$

$$u(t, l) = \chi_1(t), \quad \beta_0 u(t, l) + \beta_1 \partial_x u(t, l) = \chi_2(t), \quad t \in [0, \infty), \quad (4)$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$ – действительные числа и $\alpha_1, \beta_1 \neq 0$.

Здесь $f: \bar{Q} \ni (t, x) \rightarrow f(t, x) \in R$, $\varphi_j: [0, l] \ni x \rightarrow \varphi_j(x)$, $j = 0, 1, 2, 3$, $\mu_i: [0, \infty) \ni t \rightarrow \mu_i(t) \in R$, $\chi_i: [0, \infty) \ni t \rightarrow \chi_i(t) \in R$, $i = 1, 2$, – заданные функции.

Таким образом, требуется найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям Коши (2), граничным условиям (3) и (4).

2. Решение задачи (1)–(4) в случае однородного уравнения (1). Рассмотрим решение задачи (1)–(4) в случае, когда уравнение (1) является однородным, т. е.

$$Lu(t, x) = 0, \quad t > 0, \quad x \in (0, l). \quad (5)$$

Для определенности предположим, что $a, b > 0$. Справедлива

Л е м м а 1. *Общее решение уравнения (5) из класса четырежды непрерывно дифференцируемых функций $C^4(\bar{Q})$ представляется в виде суммы*

$$u(t, x) = g_1(x - at) + g_2(x + at) + g_3(x - bt) + g_4(x + bt), \quad (6)$$

где области определения $D(g_1), D(g_3) = ((-\infty, l])$, $D(g_2), D(g_4) = ([0, +\infty))$, если $(t, x) \in \bar{Q}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из [9] (см. также [10]).

Удовлетворяя решение (6) условиям Коши (2), получаем систему относительно функций $g_j(x)$, $j = \overline{1, 4}$, определенных на отрезке $[0, l]$:

$$\begin{aligned} g_1(x) + g_2(x) + g_3(x) + g_4(x) &= \varphi_0(x), \\ -ag'_1(x) + ag'_2(x) - bg'_3(x) + bg'_4(x) &= \varphi_1(x), \\ a^2 g''_1(x) + a^2 g''_2(x) + b^2 g''_3(x) + b^2 g''_4(x) &= \varphi_2(x), \\ -a^3 g'''_1(x) + a^3 g'''_2(x) - b^3 g'''_3(x) + b^3 g'''_4(x) &= \varphi_3(x). \end{aligned} \quad (7)$$

Решая систему (7), находим функции $g_j(z)$, $j = \overline{1, 4}$, определяемые равенствами

$$g_1(z) = g_1^{(0)}(z) = \frac{1}{2a(a^2 - b^2)} \left(b^2 \int_0^z \varphi_1(\xi) d\xi + a \int_0^z (z - \xi) \varphi_2(\xi) d\xi - \frac{1}{2} \int_0^z (z - \xi)^2 \varphi_3(\xi) d\xi - ab^2 \varphi_0(z) + C_1 b^2 + aC_2 z + C_3 a - C_4 z^2 - C_5 z - C_6 \right), \quad (8)$$

$$g_2(z) = g_2^{(0)}(z) = \frac{1}{2a(a^2 - b^2)} \left(-b^2 \int_0^z \varphi_1(\xi) d\xi + a \int_0^z (z - \xi) \varphi_2(\xi) d\xi + \frac{1}{2} \int_0^z (z - \xi)^2 \varphi_3(\xi) d\xi - ab^2 \varphi_0(z) - C_1 b^2 + aC_2 z + C_3 a + C_4 z^2 + C_5 z + C_6 \right), \quad (9)$$

$$g_3(z) = g_3^{(0)}(z) = \frac{1}{2b(a^2 - b^2)} \left(-a^2 \int_0^{\bar{z}} \varphi_1(\xi) d\xi - b \int_0^{\bar{z}} (z - \xi) \varphi_2(\xi) d\xi + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int_0^{\bar{z}} (z - \xi)^2 \varphi_3(\xi) d\xi + a^2 b \varphi_0(z) - C_1 a^2 - b C_2 z - C_3 b + C_4 z^2 + C_5 z + C_6 \right), \quad (10)$$

$$g_4(z) = g_4^{(0)}(z) = \frac{-1}{2b(a^2 - b^2)} \left(-a^2 \int_0^{\bar{z}} \varphi_1(\xi) d\xi + b \int_0^{\bar{z}} (z - \xi) \varphi_2(\xi) d\xi + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int_0^{\bar{z}} (z - \xi)^2 \varphi_3(\xi) d\xi - a^2 b \varphi_0(z) - C_1 a^2 + b C_2 z + C_3 b + C_4 z^2 + C_5 z + C_6 \right) \quad (11)$$

для $z \in [0, l]$, где $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ – произвольные постоянные.

Для других значений аргумента z функции $g_j(z)$, $j = \overline{1, 4}$ определяются поэтапно, удовлетворяя искомое решение (6) граничным условиям (3) и (4). Согласно условию (3), получаем систему уравнений с производными

$$g_1^{(1)}(-at) + g_2^{(0)}(at) + g_3^{(1)}(-bt) + g_4^{(0)}(bt) = \mu_1(t), \\ \alpha_0 \left(g_1^{(1)}(-at) + g_2^{(0)}(at) + g_3^{(1)}(-bt) + g_4^{(0)}(bt) \right) + \\ + \alpha_1 \left(dg_1^{(1)}(-at) + dg_2^{(0)}(at) + dg_3^{(1)}(-bt) + dg_4^{(0)}(bt) \right) = \mu_2(t), \quad (12)$$

где обозначение $d(\cdot)$ – оператор обыкновенной производной первого порядка. Из системы (12) имеем дифференциальное уравнение

$$\alpha_1 \left(dg_1^{(1)}(-at) + dg_2^{(0)}(at) + dg_3^{(1)}(-bt) + dg_4^{(0)}(bt) \right) = \mu_2(t) - \alpha_0 \mu_1(t),$$

из которого, интегрируя по переменной t , получим соотношение

$$\alpha_1 \left(\frac{g_1^{(1)}(-at)}{-a} + \frac{g_1^{(1)}(-at)}{b} \right) = \int_0^t (\mu_2(\xi) - \alpha_0 \mu_1(\xi)) d\xi + C^{(1)} + \\ + \frac{\alpha_1 \mu_1(t)}{b} - \alpha_1 \left(\frac{g_2^{(0)}(at)}{a} + \frac{g_2^{(0)}(at)}{b} \right) - \frac{2\alpha_1 g_4^{(0)}(bt)}{b}.$$

Отсюда и из первого уравнения системы (12) имеем

$$g_1(z) = g_1^{(1)}(z) = \frac{ab}{\alpha_1(a-b)} \left(\int_0^{-z/a} (\mu_2(\xi) - \alpha_0 \mu_1(\xi)) d\xi + C^{(1)} + \frac{\alpha_1}{b} \mu_1 \left(\frac{-z}{a} \right) - \right. \\ \left. - \frac{\alpha_1(a+b)}{ab} g_2^{(0)}(-z) - \frac{2\alpha_1}{b} g_4^{(0)} \left(\frac{-zb}{a} \right) \right), \quad (13)$$

$$g_3(z) = g_3^{(1)}(z) = \mu_1 \left(\frac{-z}{b} \right) - g_1^{(1)} \left(\frac{za}{b} \right) - g_2^{(0)} \left(-\frac{za}{b} \right) - g_4^{(0)}(-z). \quad (14)$$

Так как функции $g_2(z) = g_2^{(0)}(z)$ и $g_4(z) = g_4^{(0)}(z)$ уже определены равенствами (9) и (11), то, согласно выражениям (13) и (14), находим $g_1(z) = g_1^{(1)}(z)$ через заданные функции для $z \in [-l, 0]$ и $g_3(z) = g_3^{(1)}(z)$ для $z \in \left[-\frac{bl}{a}, 0 \right]$. Далее используем условие (4). Подставляя функцию (6) в равенство (4), будем иметь

$$\begin{aligned}
& g_1^{(0)}(l-at) + g_2^{(1)}(l+at) + g_3^{(0)}(l-bt) + g_4^{(1)}(l+bt) = \chi_1(t), \\
& \beta_0 \left(g_1^{(0)}(l-at) + g_2^{(1)}(l+at) + g_3^{(0)}(l-bt) + g_4^{(1)}(l+bt) \right) + \\
& + \beta_1 \left(dg_1^{(0)}(l-at) + dg_2^{(1)}(l+at) + dg_3^{(0)}(l-bt) + dg_4^{(1)}(l+bt) \right) = \chi_2(t).
\end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}
g_2(z) = g_2^{(1)}(z) &= \frac{ab}{\beta_1(b-a)} \left(\int_0^{(z-l)/a} (\chi_2(\xi) - \beta_0 \chi_1(\xi)) d\xi - \frac{\beta_1}{b} \chi_1 \left(\frac{z-l}{a} \right) + \tilde{C}^{(1)} + \right. \\
& \left. + \left(\frac{\beta_1}{a} + \frac{\beta_1}{b} \right) g_1^{(0)}(2l-z) + \frac{2\beta_1}{b} g_3^{(0)} \left(l + \frac{bl}{a} - b \frac{z}{a} \right) \right), \quad z \in [l, 2l],
\end{aligned} \quad (15)$$

и

$$g_4(z) = g_4^{(1)}(z) = \chi_1 \left(\frac{z-l}{b} \right) - g_2^{(1)} \left(l + \frac{za}{b} - \frac{la}{b} \right) - g_1^{(0)} \left(l + \frac{la}{b} - \frac{za}{b} \right) - g_3^{(0)}(2l-z), \quad z \in \left[l, l + \frac{bl}{a} \right]. \quad (16)$$

Возвращаясь к условию (3), находим значения $g_1^{(2)}(z)$ функции g_1 для $z \in [-2l, -l]$ и значения $g_3^{(2)}(z)$ функции g_3 для $z \in \left[-\frac{2bl}{a}, -\frac{bl}{a} \right]$, а затем из условия (4) определяем $g_2^{(2)}(z)$ функции g_2 для $z \in [2l, 3l]$ и значения $g_4^{(2)}(z)$ функции g_4 для $z \in \left[l + \frac{bl}{a}, l + \frac{2bl}{a} \right]$ и т. д. В общем случае изложенное выше можно записать в виде

$$\begin{aligned}
g_1^{(k)}(z) &= \frac{ab}{\alpha_1(b-a)} \left(\int_0^{-z/a} (\mu_2(\xi) - \alpha_0 \mu_1(\xi)) d\xi + C^{(k)} + \frac{\alpha_1}{b} \mu_1 \left(\frac{-z}{a} \right) - \right. \\
& \left. - \left(\frac{\alpha_1}{a} + \frac{\alpha_1}{b} \right) \tilde{g}_2^{(k-1)}(-z) - \frac{2\alpha_1}{b} \tilde{g}_4^{(k-1)} \left(-\frac{zb}{a} \right) \right), \quad z \in [-kl, -(k-1)l], \quad k=1, 2, 3, \dots,
\end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned}
g_2^{(k)}(z) &= \frac{ab}{\beta_1(b-a)} \left(\int_0^{(z-l)/a} (\chi_2(\xi) - \beta_0 \chi_1(\xi)) d\xi - \frac{\beta_1}{b} \chi_1 \left(\frac{z-l}{a} \right) + \tilde{C}^{(k)} + \right. \\
& \left. + \left(\frac{\beta_1}{a} + \frac{\beta_1}{b} \right) \tilde{g}_1^{(k-1)}(2l-z) + \frac{2\beta_1}{b} \tilde{g}_3^{(k-1)} \left(l + \frac{bl}{a} - b \frac{z}{a} \right) \right), \quad z \in [kl, (k+1)l], \quad k=1, 2, 3, \dots,
\end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned}
g_3^{(k)}(z) &= \mu_1 \left(\frac{-z}{b} \right) - g_1^{(k)} \left(\frac{za}{b} \right) - \tilde{g}_2^{(k-1)} \left(\frac{-za}{b} \right) - \tilde{g}_4^{(k-1)}(-z), \\
z &\in \left[\frac{-kbl}{a}, \frac{-(k-1)bl}{a} \right], \quad k=1, 2, 3, \dots,
\end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned}
g_4^{(k)}(z) &= \chi_1 \left(\frac{-z}{b} \right) - g_2^{(k)} \left(l + \frac{za}{b} - \frac{la}{b} \right) - \tilde{g}_1^{(k-1)} \left(l + \frac{la}{b} - \frac{za}{b} \right) - \tilde{g}_3^{(k-1)}(2l-z), \\
z &\in \left[l + \frac{(k-1)bl}{a}, l + \frac{kbl}{a} \right], \quad k=1, 2, 3, \dots,
\end{aligned} \quad (20)$$

где $C^{(k)}$ и $\tilde{C}^{(k)}$ – произвольные постоянные из множества действительных чисел R и

$$\tilde{g}_i^{(k)}(z) = g_i^{(j)}(z), \quad i = \overline{1, 4}, \quad j = \overline{0, k}. \quad (21)$$

Если $k = \infty$, то

$$g_i(z) = \tilde{g}_i^{(\infty)}(z) = g_i^{(j)}(z), \quad i = \overline{1, 4}, \quad j = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad z \in D(g_i).$$

Чтобы функции g_2, g_4 принадлежали классу $C^4([0, +\infty))$, а g_1, g_3 – классу $C^4((-\infty, l])$, кроме требований на гладкость заданных функций задачи (5), (2), (3), (4), должны выполняться равенства для $k=1, 2, 3, \dots$ в общих точках соприкосновения

$$d^p g_1^{(k)}(l-kl) = d^p g_1^{(k-1)}(l-kl), \quad p = \overline{0, 4}, \quad (22)$$

$$d^p g_2^{(k)}(kl) = d^p g_2^{(k-1)}(kl), \quad p = \overline{0, 4}, \quad (23)$$

$$d^p g_3^{(k)}\left(\frac{-(k-1)bl}{a}\right) = d^p g_3^{(k-1)}\left(\frac{-(k-1)bl}{a}\right), \quad p = \overline{0, 4}, \quad (24)$$

$$d^p g_4^{(k)}\left(l + \frac{(k-1)lb}{a}\right) = d^p g_4^{(k-1)}\left(l + \frac{(k-1)lb}{a}\right), \quad p = \overline{0, 4}, \quad (25)$$

где d^p – производные порядка $p = \overline{0, 4}$ и $d^p = \frac{d^p}{dz^p}$.

Из (17) и (22) получим

$$g_1^{(k)}(l-kl) - g_1^{(k-1)}(l-kl) = 0 = \frac{ab}{\alpha_1(b-a)} \left(C^{(k)} - \left(\frac{\alpha_1}{a} + \frac{\alpha_1}{b} \right) \tilde{g}_2^{(k-1)}(kl-l) - \frac{2\alpha_1}{b} \tilde{g}_4^{(k-1)}\left(\frac{(kl-l)b}{a}\right) - \right. \\ \left. - C^{(k-1)} + \left(\frac{\alpha_1}{a} + \frac{\alpha_1}{b} \right) \tilde{g}_2^{(k-2)}(kl-l) + \frac{2\alpha_1}{b} \tilde{g}_4^{(k-2)}\left(\frac{(kl-l)b}{a}\right) \right).$$

Но из соотношений (23), (24) и (21) имеем равенства $\tilde{g}_2^{(k-1)}(kl-l) = \tilde{g}_2^{(k-2)}(kl-l)$ и $\tilde{g}_4^{(k-1)}\left(\frac{(kl-l)b}{a}\right) = \tilde{g}_4^{(k-2)}\left(\frac{(kl-l)b}{a}\right)$.

Поэтому получим $C^{(k)} = C^{(k-1)} = \dots = C^{(1)}$ для любого номера $k=3, 4, \dots$. Из условия непрерывности $g_1^{(0)}(0) = g_1^{(1)}(0)$ находим эти константы, а именно:

$$C^{(k)} = C^{(1)} = \frac{\alpha_1 \left((a^2 + b^2) C_1 - C_6 \right)}{a^2 b^2}, \quad k = 2, 3, \dots$$

Аналогично,

$$\tilde{C}^{(k)} = \tilde{C}^{(1)} = \frac{\beta_1}{a^2 b^2} \left((a^2 + b^2) C_1 - C_6 - C_5 l - C_4 l^2 + \int_0^l \left((a^2 + b^2) \varphi_1(\xi) - \frac{(l-\xi)^2}{2} \varphi_3(\xi) \right) d\xi \right).$$

Л е м м а 2. Для любого номера $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ значения функций $g_1^{(k)}(z)$, $g_2^{(k)}(z)$, $g_3^{(k)}(z)$, $g_4^{(k)}(z)$ всегда можно представить в виде

$$g_1^{(k)}(z) = \psi_1^{(k)}(z, a, b) + \frac{C_1 b^2 + a C_2 z + C_3 a - C_4 z^2 - C_5 z - C_6}{2a(a^2 - b^2)}, \\ g_2^{(k)}(z) = \psi_2^{(k)}(z, a, b) + \frac{-C_1 b^2 + a C_2 z + C_3 a + C_4 z^2 + C_5 z + C_6}{2a(a^2 - b^2)}, \\ g_3^{(k)}(z) = \psi_3^{(k)}(z, a, b) + \frac{-C_1 a^2 - b C_2 z - C_3 b + C_4 z^2 + C_5 z + C_6}{2b(a^2 - b^2)}, \\ g_4^{(k)}(z) = \psi_4^{(k)}(z, a, b) - \frac{-C_1 a^2 + b C_2 z + C_3 b + C_4 z^2 + C_5 z + C_6}{2b(a^2 - b^2)},$$

где функции $\psi_i^{(k)}$, $i = \overline{1, 4}$, не зависят от констант $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$.

Утверждение леммы докажем для функции $g_1^{(k)}(z)$ методом математической индукции. Для $k = 0$ данное утверждение следует из формулы (8).

Предположим, что лемма справедлива для всех $k = 0, 1, \dots, n-1$. Докажем утверждение ее для функции $g_1^{(n)}$.

Согласно формуле (17), имеем

$$\begin{aligned} g_1^{(n)}(z) &= \frac{ab}{\alpha_1(b-a)} \left(\int_0^{-z/a} (\mu_2(\xi) - \alpha_0 \mu_1(\xi)) d\xi + C^{(n)} + \frac{\alpha_1}{b} \mu_1\left(\frac{-z}{a}\right) - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\alpha_1}{a} + \frac{\alpha_1}{b} \right) \tilde{g}_2^{(n-1)}(-z) - \frac{2\alpha_1}{b} \tilde{g}_4^{(n-1)}\left(-\frac{zb}{a}\right) \right) = \\ &= \frac{ab}{\alpha_1(b-a)} \left(\int_0^{-z/a} (\mu_2(\xi) - \alpha_0 \mu_1(\xi)) d\xi + \frac{\alpha_1}{a^2 b^2} \left((a^2 + b^2) C_1 - C_6 \right) + \frac{\alpha_1}{b} \mu_1\left(\frac{-z}{a}\right) - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\alpha_1}{a} + \frac{\alpha_1}{b} \right) \left(\tilde{\psi}_2^{(n-1)}(z, a, b) + \frac{-C_1 b^2 - a C_2 z + C_3 a + C_4 z^2 - C_5 z + C_6}{2a(a^2 - b^2)} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2\alpha_1}{b} \left(\tilde{\psi}_4^{(n-1)}(z, a, b) - \frac{-C_1 a^2 - \frac{b^2 C_2 z}{a} + C_3 b + C_4 \frac{b^2 z^2}{a^2} - C_5 \frac{zb}{a} + C_6}{2b(a^2 - b^2)} \right) \right) = \\ &= \psi_1^{(n)}(z, a, b) + \frac{C_1 b^2 + a C_2 z + C_3 a - C_4 z^2 - C_5 z - C_6}{2a(a^2 - b^2)}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \psi_1^{(n)}(z, a, b) &= \frac{ab}{\alpha_1(b-a)} \left(\int_0^{-z/a} (\mu_2(\xi) - \alpha_0 \mu_1(\xi)) d\xi + \frac{\alpha_1}{b} \mu_1(-z/a) - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\alpha_1}{a} + \frac{\alpha_1}{b} \right) \tilde{\psi}_2^{(n-1)}(z, a, b) - \frac{2\alpha_1}{b} \tilde{\psi}_4^{(n-1)}(z, a, b) \right), \end{aligned}$$

функции $\tilde{\psi}_j^{(n-1)}$ определяются через предыдущие функции $\psi_j^{(k)}$, $j = \overline{1, 4}$, $k = \overline{0, n-1}$.

Аналогично доказываются представления леммы и для значений $g_j^{(k)}(z)$, $j = 2, 3, 4$.

Следствие. Для любых $r, s, k, n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ сумма $g_1^{(r)}(x-at) + g_2^{(s)}(x+at) + g_3^{(k)}(x-bt) + g_4^{(n)}(x+bt)$ не зависит от $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$.

Лемма 3. Если функции $\varphi_j \in C^{4-j}([0, l])$, $j = \overline{0, 3}$, $\mu_i, \chi_i \in C^4([0, \infty))$, $i = 1, 2$, и выполняются условия (22)–(25), то функции $\tilde{g}_j^{(k)}(z)$, $j = \overline{1, 4}$, представленные формулами (21), принадлежат классам: $\tilde{g}_1^{(k)} \in C^4([-kl, 0])$, $\tilde{g}_2^{(k)} \in C^4([0, (k+1)l])$, $\tilde{g}_3^{(k)} \in C^4\left(\left[\frac{-klb}{a}, 0\right]\right)$ и $\tilde{g}_4^{(k)} \in C^4\left(\left[0, l + \frac{klb}{a}\right]\right)$, $k = 1, 2, 3, \dots$

Доказательство леммы 3 следует из соотношений (17)–(25).

Лемма 4. Если функции $\varphi_j \in C^{4-j}([0, l])$, $j = \overline{0, 3}$, $\mu_1, \mu_2, \chi_1, \chi_2 \in C^4([0, \infty))$, то равенства (22)–(25) имеют место тогда и только тогда, когда они выполняются только для $k = 1$.

Доказательство несложно осуществить с помощью метода математической индукции на основе равенств (22)–(25) и соотношений (17)–(20).

Лемма 5. Если функции $\varphi_j \in C^{4-j}([0, l])$, $j = \overline{0, 3}$, $\mu_1, \mu_2, \chi_1, \chi_2 \in C^4([0, \infty))$, то равенства (22)–(25) при $k=1$ выполняются тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия согласования:

$$\begin{aligned} d^j \mu_1(0) &= \varphi_j(0), \quad \alpha_0 d^j \mu_1(0) + \alpha_1 d \varphi_j(0) = d^j \mu_2(0), \quad j = 0, 1, 2, 3, \\ d^j \chi_1(0) &= \varphi_j(l), \quad \beta_0 d^j \chi_1(0) + \beta_1 d \varphi_j(l) = d^j \chi_2(0), \quad j = 0, 1, 2, 3, \\ (a^2 + b^2) d^2 \varphi_2(0) - a^2 b^2 d^4 \varphi_0(0) - d^4 \mu_1(0) &= 0, \\ (a^2 + b^2) d^2 \varphi_2(l) - a^2 b^2 d^4 \varphi_0(l) - d^4 \chi_1(0) &= 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Доказательство. Равенства (22)–(25) для $k=1$ запишем через значения заданных функций

$$\begin{aligned} g_1^{(1)}(0) - g_1^{(0)}(0) &= \frac{a(\mu_1(0) - \varphi_0(0))}{(a-b)}, \\ dg_1^{(1)}(0) - dg_1^{(0)}(0) &= \frac{\alpha_1(\varphi_1(0) - \mu_1'(0)) + b(\alpha_0 \mu_1(0) + \alpha_1 \varphi_0'(0) - \mu_2(0))}{(a-b)\alpha_1}, \\ d^2 g_1^{(1)}(0) - d^2 g_1^{(0)}(0) &= \frac{-\alpha_1(\varphi_2(0) - \mu_1''(0)) - b(\alpha_0 \mu_1'(0) + \alpha_1 \varphi_1'(0) - \mu_2'(0))}{a(a-b)\alpha_1}, \\ d^3 g_1^{(1)}(0) - d^3 g_1^{(0)}(0) &= \frac{\alpha_1(\varphi_3(0) - \mu_1'''(0)) + b(\alpha_0 \mu_1''(0) + \alpha_1 \varphi_2'(0) - \mu_2''(0))}{a^2(a-b)\alpha_1}, \\ d^4 g_1^{(1)}(0) - d^4 g_1^{(0)}(0) &= \frac{-b(\alpha_0 \mu_1'''(0) + \alpha_1 \varphi_3'(0) - \mu_2'''(0)) - \alpha_1((a^2 + b^2)\varphi_2''(0) - a^2 b^2 \varphi_0^{(4)}(0) - \mu_1^{(4)}(0))}{a^3(a-b)\alpha_1}, \\ g_3^{(1)}(0) - g_3^{(0)}(0) &= \frac{b(\varphi_0(0) - \mu_1(0))}{(a-b)}, \\ dg_3^{(1)}(0) - dg_3^{(0)}(0) &= \frac{-\alpha_1(\varphi_1(0) - \mu_1'(0)) - a(\alpha_0 \mu_1(0) + \alpha_1 \varphi_0'(0) - \mu_2(0))}{(a-b)\alpha_1}, \\ d^2 g_3^{(1)}(0) - d^2 g_3^{(0)}(0) &= \frac{\alpha_1(\varphi_2(0) - \mu_1''(0)) + a(\alpha_0 \mu_1'(0) + \alpha_1 \varphi_1'(0) - \mu_2'(0))}{b(a-b)\alpha_1}, \\ d^3 g_3^{(1)}(0) - d^3 g_3^{(0)}(0) &= \frac{-\alpha_1(\varphi_3(0) - \mu_1'''(0)) - a(\alpha_0 \mu_1''(0) + \alpha_1 \varphi_2'(0) - \mu_2''(0))}{b^2(a-b)\alpha_1}, \\ d^4 g_3^{(1)}(0) - d^4 g_3^{(0)}(0) &= \frac{a(\alpha_0 \mu_1'''(0) + \alpha_1 \varphi_3'(0) - \mu_2'''(0)) + \alpha_1((a^2 + b^2)\varphi_2''(0) - a^2 b^2 \varphi_0^{(4)}(0) - \mu_1^{(4)}(0))}{b^3(a-b)\alpha_1}, \\ g_2^{(1)}(l) - g_2^{(0)}(l) &= \frac{a(\chi_1(0) - \varphi_0(l))}{(a-b)}, \\ dg_2^{(1)}(l) - dg_2^{(0)}(l) &= \frac{\beta_1(\chi_1'(0) - \varphi_1(l)) + b(\beta_0 \chi_1(0) + \beta_1 \varphi_0'(l) - \chi_2(0))}{(a-b)\beta_1}, \\ d^2 g_2^{(1)}(l) - d^2 g_2^{(0)}(l) &= \frac{\beta_1(\chi_1''(0) - \varphi_2(l)) + b(\beta_0 \chi_1'(0) + \beta_1 \varphi_1'(l) - \chi_2'(0))}{a(a-b)\beta_1}, \\ d^3 g_2^{(1)}(l) - d^3 g_2^{(0)}(l) &= \frac{\beta_1(\chi_1'''(0) - \varphi_3(l)) + b(\beta_0 \chi_1''(0) + \alpha_1 \varphi_2'(l) - \chi_2''(0))}{a^2(a-b)\beta_1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d^4 g_2^{(1)}(l) - d^4 g_2^{(0)}(l) &= \frac{b(\beta_0 \chi_1'''(0) + \beta_1 \varphi_3'(l) - \chi_2'''(0)) + \beta_1 \left((a^2 + b^2) \varphi_2''(l) - a^2 b^2 \varphi_0^{(4)}(l) - \chi_1^{(4)}(0) \right)}{a^3 (a-b) \beta_1}, \\
g_4^{(1)}(l) - g_4^{(0)}(l) &= \frac{b(-\chi_1(0) + \varphi_0(l))}{(a-b)}, \\
d g_4^{(1)}(l) - d g_4^{(0)}(l) &= \frac{\beta_1(-\chi_1'(0) + \varphi_1(l)) - a(\beta_0 \chi_1(0) + \beta_1 \varphi_0'(l) - \chi_2(0))}{(a-b) \beta_1}, \\
d^2 g_4^{(1)}(l) - d^2 g_4^{(0)}(l) &= \frac{\beta_1(\chi_1''(0) - \varphi_2(l)) + a(\beta_0 \chi_1'(0) + \beta_1 \varphi_1'(l) - \chi_2'(0))}{b(b-a) \beta_1}, \\
d^3 g_4^{(1)}(l) - d^3 g_4^{(0)}(l) &= \frac{\beta_1(\chi_1'''(0) - \varphi_3(l)) + a(\beta_0 \chi_1''(0) + \alpha_1 \varphi_2'(l) - \chi_2''(0))}{b^2 (b-a) \beta_1}, \\
d^4 g_4^{(1)}(l) - d^4 g_4^{(0)}(l) &= \frac{a(\beta_0 \chi_1'''(0) + \beta_1 \varphi_3'(l) - \chi_2'''(0)) - \beta_1 \left((a^2 + b^2) \varphi_2''(l) - a^2 b^2 \varphi_0^{(4)}(l) - \chi_1^{(4)}(0) \right)}{b^3 (b-a) \beta_1}.
\end{aligned}$$

Такие равенства выполняются тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования (29). Это видно из соотношений (17)–(20). Лемма 5 доказана.

Пусть $\left[\frac{a}{b} \right] = m$ – целая часть числа $\frac{a}{b}$, $m > 1$. Разобьем область \bar{Q} с помощью характеристик уравнения на подобласти $Q^{(r,s,k,n)}$. Разбиение области \bar{Q} на подобласти представлено на рисунке.

Теорема 1. *Предположим, что функции $\varphi_j \in C^{4-j}([0, l])$, $j = \overline{0, 3}$, $\mu_1, \mu_2 \in C^4([0, \infty))$, $\chi_1, \chi_2 \in C^4([0, \infty))$. В классе функций $C^4(\bar{Q})$ существует единственное классическое решение $u(t, x)$ задачи (2)–(5) при выполнении указанных условий гладкости на заданные функции тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования (26).*

Доказательство теоремы 1 фактически проведено в предыдущих рассуждениях.

Перейдем к решению задачи (1)–(4). Находим частное решение уравнения (1).

Пусть $\omega(t, \tau, x)$ – решение следующей задачи:

$$\left(\partial_t^2 - a^2 \partial_x^2 \right) \left(\partial_t^2 - b^2 \partial_x^2 \right) \omega(t, \tau, x) = 0, \quad (27)$$

с начальными условиями

$$\partial_t^j \omega(0, \tau, x) = 0, \quad j = 0, 1, 2, \quad \text{и} \quad \partial_t^3 \omega(0, \tau, x) = \tilde{f}(\tau, x), \quad (28)$$

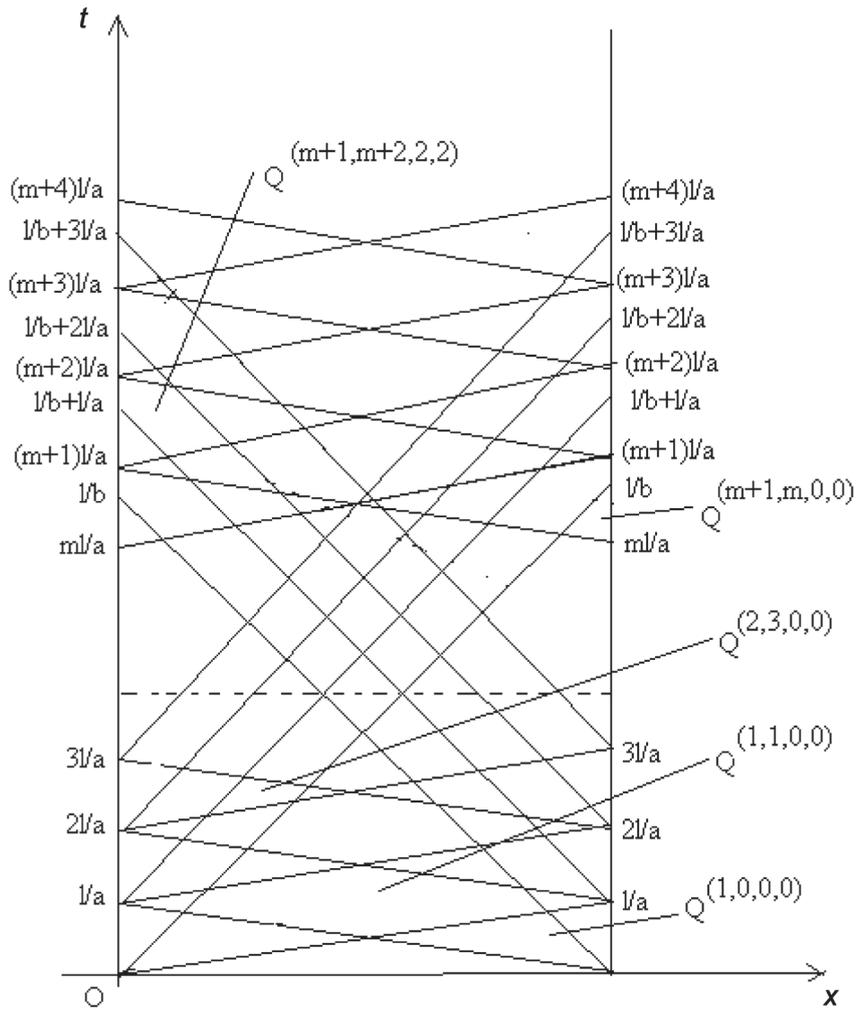
где \tilde{f} – продолжение функции f по переменной x с отрезка $[0, l]$ на всю полупрямую $[0, \infty)$.

Лемма 6. *Частное решение $v(t, x)$ уравнения (1) можно находить через решение однородного уравнения (27)–(28) с параметром $\tau \in [0, \infty)$ по формуле*

$$v(t, x) = \int_0^t \omega(t - \tau, \tau, x) d\tau. \quad (29)$$

Доказательство. Вычислим частные производные функции v , представленные формулой (29):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial t} &= \omega(0, t, x) + \int_0^t \frac{\partial \omega(t - \tau, \tau, x)}{\partial t} d\tau = \int_0^t \frac{\partial \omega(t - \tau, \tau, x)}{\partial t} d\tau, \\
\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{\partial \omega(0, t, x)}{\partial t} + \int_0^t \frac{\partial^2 \omega(t - \tau, \tau, x)}{\partial t^2} d\tau = \int_0^t \frac{\partial^2 \omega(t - \tau, \tau, x)}{\partial t^2} d\tau,
\end{aligned}$$



Разбиение области \bar{Q} на под области $Q^{(r,s,k,n)}$: $Q^{(-1,0,0,0)} = \emptyset$ – пустое множество;

$$Q^{(r,s,k,n)} = \{(t,x) \in \bar{Q}, sl - x \leq at \leq x + rl, nl - x \leq bt \leq x + kl\}; \bar{Q} = \bigcup_{s=0}^m \bigcup_{r=s-1}^{s+1} Q^{(r,s,0,0)} \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=i-1}^{i+1} \bigcup_{k=m+i-1}^{m+i} \bigcup_{s=m+j-1}^{m+j} Q^{(m+i,m+j,k,s)}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 v}{\partial t^3} &= \frac{\partial^2 \omega(0,t,x)}{\partial t^2} + \int_0^t \frac{\partial^3 \omega(t-\tau,\tau,x)}{\partial t^3} d\tau = \int_0^t \frac{\partial^3 \omega(t-\tau,\tau,x)}{\partial t^3} d\tau, \\ \frac{\partial^4 v}{\partial t^4} &= \frac{\partial^3 \omega(0,t,x)}{\partial t^3} + \int_0^t \frac{\partial^4 \omega(t-\tau,\tau,x)}{\partial t^4} d\tau = \tilde{f}(t,x) + \int_0^t \frac{\partial^4 \omega(t-\tau,\tau,x)}{\partial t^4} d\tau, \\ \frac{\partial^4 v}{\partial t^2 \partial x^2} &= \int_0^t \frac{\partial^4 \omega(t-\tau,\tau,x)}{\partial t^2 \partial x^2} d\tau, \quad \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = \int_0^t \frac{\partial^4 \omega(t-\tau,\tau,x)}{\partial x^4} d\tau. \end{aligned}$$

Далее имеем

$$\frac{\partial^4 v}{\partial t^4} - (a^2 + b^2) \frac{\partial^4 v}{\partial t^2 \partial x^2} + a^2 b^2 \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = \tilde{f}(t,x) + \int_0^t \left(\frac{\partial^4 \omega}{\partial t^4} - (a^2 + b^2) \frac{\partial^4 \omega}{\partial t^2 \partial x^2} + a^2 b^2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} \right) d\tau = \tilde{f}(t,x)$$

или

$$(\partial_t^2 - a^2 \partial_x^2)(\partial_t^2 - b^2 \partial_x^2)v(t,x) = \tilde{f}(t,x).$$

Лемма доказана.

Решение исходной задачи (1)–(4) можно представить в виде

$$u(t, x) = \hat{u}(t, x) + v(t, x),$$

где v , согласно формуле (29), – частное решение уравнения (1). Следовательно, \hat{u} – решение однородного уравнения

$$L\hat{u} = (\partial_t^2 - a^2\partial_x^2)(\partial_t^2 - b^2\partial_x^2)\hat{u}(t, x) = 0, \quad (t, x) \in \overline{Q}, \quad (30)$$

удовлетворяющее условиям Коши

$$\partial_t^j \hat{u}(0, x) = \varphi_j(x) - \int_0^0 \partial_t^j \omega(t - \tau, \tau, x) d\tau = \varphi_j(x), \quad j = 0, 1, 2, 3, \quad x \in [0, l], \quad (31)$$

граничным условиям

$$\hat{u}(t, 0) = \mu_1(t) - v(t, 0) = \hat{\mu}_1(t), \quad t \in [0, \infty), \quad (32)$$

$$\alpha_0 \hat{u}(t, 0) + \alpha_1 \partial_x \hat{u}(t, 0) = \mu_2(t) - \alpha_0 v(t, 0) - \alpha_1 \partial_x v(t, 0) = \hat{\mu}_2(t), \quad t \in [0, \infty), \quad (33)$$

$$\hat{u}(t, l) = \chi_1(t) - v(t, l) = \hat{\chi}_1(t), \quad t \in [0, \infty), \quad (34)$$

$$\beta_0 \hat{u}(t, l) + \beta_1 \partial_x \hat{u}(t, l) = \chi_2(t) - \beta_0 v(t, l) - \beta_1 \partial_x v(t, l) = \hat{\chi}_2(t), \quad t \in [0, \infty). \quad (35)$$

Так как \hat{u} – решение задачи (30)–(35), то в угловых точках $(0, 0)$ и $(0, l)$ для функций φ_j , $j = \overline{0, 3}$, $\hat{\mu}_i, \hat{\chi}_i$, $i = 1, 2$, должны выполняться условия согласования

$$\begin{aligned} d^j \hat{\mu}_1(0) &= \varphi_j(0), \quad \alpha_0 d^j \hat{\mu}_1(0) + \alpha_1 d \varphi_j(0) = d^j \hat{\mu}_2(0), \quad j = 0, 1, 2, 3, \\ d^j \hat{\chi}_1(0) &= \varphi_j(l), \quad \beta_0 d^j \hat{\chi}_1(0) + \beta_1 d \varphi_j(l) = d^j \hat{\chi}_2(0), \quad j = 0, 1, 2, 3, \\ (a^2 + b^2) d^2 \varphi_2(0) - a^2 b^2 d^4 \varphi_0(0) - d^4 \hat{\mu}_1(0) &= 0, \\ (a^2 + b^2) d^2 \varphi_2(l) - a^2 b^2 d^4 \varphi_0(l) - d^4 \hat{\chi}_1(0) &= 0. \end{aligned} \quad (36)$$

Из представления (29) и условий (28) следуют следующие соотношения:

$$\begin{aligned} v(0, 0) &= \partial_t v(0, 0) = \partial_t^2 v(0, 0) = \partial_t^3 v(0, 0) = 0, \quad \partial_t^4 v(0, 0) = \tilde{f}(0, 0), \\ v(0, l) &= \partial_t v(0, l) = \partial_t^2 v(0, l) = \partial_t^3 v(0, l) = 0, \quad \partial_t^4 v(0, l) = \tilde{f}(0, l), \\ \partial_x v(0, 0) &= \partial_t (\partial_x v(0, 0)) = \partial_t^2 (\partial_x v(0, 0)) = \partial_t^3 (\partial_x v(0, 0)) = 0, \\ \partial_x v(0, l) &= \partial_t (\partial_x v(0, l)) = \partial_t^2 (\partial_x v(0, l)) = \partial_t^3 (\partial_x v(0, l)) = 0. \end{aligned} \quad (37)$$

Из условий согласований (36) согласно (37) для функций φ_j , $j = \overline{0, 3}$, $\hat{\mu}_i, \hat{\chi}_i$, $i = 1, 2$, и f получаем необходимые и достаточные условия согласования для существования классического решения задачи (1)–(4):

$$\begin{aligned} d^j \mu_1(0) &= \varphi_j(0), \quad \alpha_0 d^j \mu_1(0) + \alpha_1 d \varphi_j(0) = d^j \mu_2(0), \quad j = 0, 1, 2, 3, \\ d^j \chi_1(0) &= \varphi_j(l), \quad \beta_0 d^j \chi_1(0) + \beta_1 d \varphi_j(l) = d^j \chi_2(0), \quad j = 0, 1, 2, 3, \\ (a^2 + b^2) d^2 \varphi_2(0) - a^2 b^2 d^4 \varphi_0(0) - d^4 \mu_1(0) &= f(0, 0), \\ (a^2 + b^2) d^2 \varphi_2(l) - a^2 b^2 d^4 \varphi_0(l) - d^4 \chi_1(0) &= f(0, l), \end{aligned} \quad (38)$$

где d^j – производные порядка $j = \overline{0, 4}$ и $d^j = \frac{d^j}{dt^j}$.

Т е о р е м а 2. *Предположим, что функции $f \in C^{0,3}(\overline{Q})$, $\varphi_j \in C^{4-j}([0, l])$, $j = \overline{0, 3}$, $\mu_1, \mu_2, \chi_1, \chi_2 \in C^4[0, \infty)$. При выполнении указанных условий гладкости на заданные функции*

существует единственное классическое решение $u(t, x) = \hat{u}(t, x) + v(t, x)$ задачи (1)–(4) из класса $C^4(\bar{Q})$, где \hat{u} – решение задачи (30)–(35), а функция v определяется формулой (29).

Заключение. В данной статье получены формулы классического решения смешанной задачи для биволнового уравнения. Доказано, что эта задача имеет единственное решение тогда и только тогда, когда выполняются в угловых точках заданной области изменения независимых переменных условия согласования для заданных функций уравнения, условий Коши и граничных условий. Следует отметить, что эти условия являются необходимыми и достаточными.

Список использованной литературы

1. Корзюк, В. И. Смешанная задача для гиперболического уравнения четвертого порядка / В. И. Корзюк, Е. С. Чеб // Вест. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2004. – № 2. – С. 9–13.
2. Корзюк, В. И. Смешанные задачи для биволнового уравнения / В. И. Корзюк, Е. С. Чеб // Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. – 2005. – № 1. – С. 63–68.
3. Korzyuk, V. I. Generalized-classical solution of the mixed problems for hyperbolic equations of the second order / V. I. Korzyuk // Analytic Methods of Analysis and Differential Equations: AMAD 2003. – Cottenham, Cambridge: Cambridge Scientific Publishers, 2006. – P. 133–154.
4. Корзюк, В. И. Задача Коши для уравнения четвертого порядка с биволновым оператором / В. И. Корзюк, Е. С. Чеб // Дифференц. уравнения. – 2007. – Т. 43, № 5. – С. 669–676.
5. Радыно, Я. В. Задача Коши для некоторых абстрактных гиперболических уравнений четного порядка / Я. В. Радыно, Н. И. Юрчук // Дифференц. уравнения. – 1976. – Т. 12, № 2. – С. 331–342.
6. Hadamard, J. Le problem de Cauchy et les equations aux derives partielles lineaires hyperboliques / J. Hadamard. – Paris, 1932.
7. Hadamard, J. Proprietes d'une equation lineaire aux derives partielles du quatrieme order // J. Hadamard // Tohoku Math. J. – 1933. – Vol. 37. – P. 133–150.
8. Корзюк, В. И. Классическое решение смешанной задачи для биволнового уравнения методом характеристик / В. И. Корзюк, Е. С. Чеб, Ле Тхи Тху // Тр. ин-та математики Нац. акад. наук Беларуси. – 2010. – Т. 18, № 2. – С. 36–54.
9. Korzyuk, V. I. Solution of the Cauchy problem for a hyperbolic equation with constant coefficients in the case of two independent variables / V. I. Korzyuk, I. S. Kozlovskaya // Differential equations. – 2012. – Vol. 48, no. 5. – P. 1–10.
10. Hetnarski, R. B. Mathematical theory of elasticity / R. B. Hetnarski, J. Ignaczak. – Taylor and Francis Books Inc., 2004.

Поступила в редакцию 25.02.2016

ФІЗІКА

УДК 535.21; 535.3

S. A. BATISHCHE¹, S. B. BUSHUK¹, A. A. KOUZMOUK¹, A. V. SAVITCH¹,
H. A. TATUR¹, G. GRABNER², W. KAUTEK³

INFLUENCE OF SELF-ABSORPTION OF 213 nm RADIATION ON LASER TREATMENT OF CORNEA

¹B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus,
e-mail: batis@dragon.bas-net.by

²Paracelsus Medical University, University Eye Clinic, Salzburg, Austria, e-mail: g.grabner@salk.at

³University of Vienna, Department of Physical Chemistry, Vienna, Austria, e-mail: wolfgang.kautek@univie.ac.at

The laser ablation efficiency of cornea at 213 nm radiation was investigated and optimized. It is shown that self-absorption of radiation at 213 nm in a thin cloud of ablated material takes place and strongly influences the ablation efficiency. Ablation products are being blown out in the lateral direction along the cornea surface, as a result of which the pulse fluence at the pit boundary F_{bnd} is more than the threshold fluence F_{th} . As a consequence, a pit radius r_{bnd} is less than a laser beam radius r_{th} corresponding to the threshold fluence F_{th} that should be taken into account in planning ablation surgery at 213 nm radiation.

Keywords: cornea, laser ablation, 213 nm, ablation threshold.

С. А. БАТИЩЕ¹, С. Б. БУШУК¹, А. А. КУЗЬМУК¹, А. В. САВИЧ¹, Г. А. ТАТУР¹, Г. ГРАБНЕР², В. КОТЭК³

САМОПОГЛОЩЕНИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ НА ДЛИНЕ ВОЛНЫ 213 нм ПРИ ЛАЗЕРНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ НА РОГОВИЦУ ГЛАЗА

¹Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь,
e-mail: batis@dragon.bas-net.by

²Глазная клиника медицинского университета им. Парацельса, Зальцбург, Австрия, e-mail: g.grabner@salk.at

³Венский университет, Вена, Австрия, e-mail: wolfgang.kautek@univie.ac.at

Исследована и оптимизирована эффективность лазерной абляции роговицы глаза УФ-излучением с длиной волны 213 нм. Показано, что самопоглощение лазерного излучения 213 нм в тонком облаке испаренного материала сильно влияет на эффективность абляции. Продукты абляции выбрасываются в боковом направлении вдоль поверхности роговицы, в результате чего плотность энергии импульса на границе абляционной лунки F_{bnd} выше, чем пороговая плотность энергии F_{th} . Как следствие, радиус лунки r_{bnd} меньше радиуса r_{th} лазерного луча, соответствующего пороговой плотности энергии импульса F_{th} , что необходимо учитывать при планировании абляционной хирургии глаза излучением 213 нм.

Ключевые слова: роговица глаза, лазерная абляция, 213 нм, порог абляции.

Introduction. In recent years, femtosecond lasers have attracted a lot of attention and in the first clinical applications in refractive and corneal surgery [1–3] much work has already been done with far UV excimer lasers at 193nm, e. g. in photorefractive keratectomy (PRK), Laser Epithelial Keratomileusis (LASEK), and Laser in Situ Keratomileusis (LASIK).

Due to the complexity and the cost of the lasers of these types, attention has also been focused on solid state lasers in the far UV range [4–7]. Currently the 5th harmonic (213 nm) of a Nd:YAG laser is also in use for LASIK and PRK.

During UV laser ablation cornea treatment, for the purposes of correction of eye vision a big spatially profiled volume of stroma is removed in accordance with a program allowing for the cornea ablation threshold F_{th} , the laser pulse energy, the pit radius r_{bnd} , and some other features. (F_{th} is the minimum laser beam intensity, for some pulse duration Δt and a number of N pulses per pit which stays an observable mark of damage at a cornea surface).

The present study is concerned with establishing some mechanisms of 213 nm laser ablation treatment of cornea by laser beams of small diameter and processes that influence the pit radius r_{bnd} .

Experimental. UV 213 nm cornea ablation investigations were carried out on a number of cuts made on freshly enucleated eyes at a constant depth of 260 μm to provide a flat surface of the 6–8 mm dia cornea (one eye gives one cut).

A laser setup for UV 213 nm cornea treatment is described in detail elsewhere in [8].

12 ablation pits were regularly done on the periphery of the round flat surface of a cornea slice to guarantee identical cornea ablation properties. Pits were treated in air at room temperature by N focused pulses in one spot with UV radiation of the fifth harmonic (213 nm) of the Nd:YAG laser with an energy of up to 15 mJ, a pulse duration of 10–15 ns, and a repetition rate of 1 Hz. For reproducibility of results, the enucleated eye was kept pressed at 26 mm Hg in a special holder, which allowed the flat surface of the cornea to be practically normal to the 213 nm laser beam (angle of not more than 5°).

A confocal Zeiss LSM 510 laser scanning microscope was used to determine a maximum pit depth H , a pit radius r_{bnd} , and a pit volume V_{exp} . The volume V_{exp} was calculated with the use of a specially developed program. A laser depth ablation rate $h = H/N$.

For each pit, the 213 nm laser pulse fluence $F_{213,\text{max}}$ in the pit center and the laser pulse fluence at the pit boundary F_{bnd} were determined from the experimentally measured energy E_{213} and the real laser beam distribution, which was close to the Gaussian distribution. In the experiment conducted, the Gaussian radius $w_0 = 347 \mu\text{m}$ for the 213 nm laser beam. (For w_0 , $F(w_0) = 1/e^2$).

A number of eyes were investigated under various conditions.

Results and discussion. Fig. 1 presents the typical one laser pulse ablation output V/NE and H/NE versus laser pulse energy E_{213} and laser pulse fluence $F_{213,\text{max}}$ in the pit center at $N = 40$ for one of the investigated eyes.

The optimum for the one laser pulse ablation output V/NE and H/NE lies in the range of $F_{213,\text{max}}$ from 0.2 to 0.4 J/cm^2 . With increasing the laser pulse fluence within the range of 0.4–2.2 J/cm^2 , V/NE and H/NE decrease.

Fig. 2 shows the typical $F_{213,\text{max}}$ dependence of the pulse fluence F_{bnd} , the optical densities $D_{\text{bnd}} = \lg(F_{\text{bnd}}/F_{\text{th}})$, and $D_0 = \lg(F_{213,\text{max}}/F_{\text{th}})$ of the ablated cloud of cornea material at the pit boundary and in the pit center, respectively, for one of the investigated eyes for $N = 40$.

The behavior is likely explained by self-absorption of 213 nm radiation in a thin cloud of the material removed. In the nanosecond range, the cloud of the removed practically undecomposed cornea material with high absorbance, mainly consisting of collagen and water vapor, appears at a forthcoming front of the laser pulse and effectively absorbs laser radiation at the backward front of the pulse.

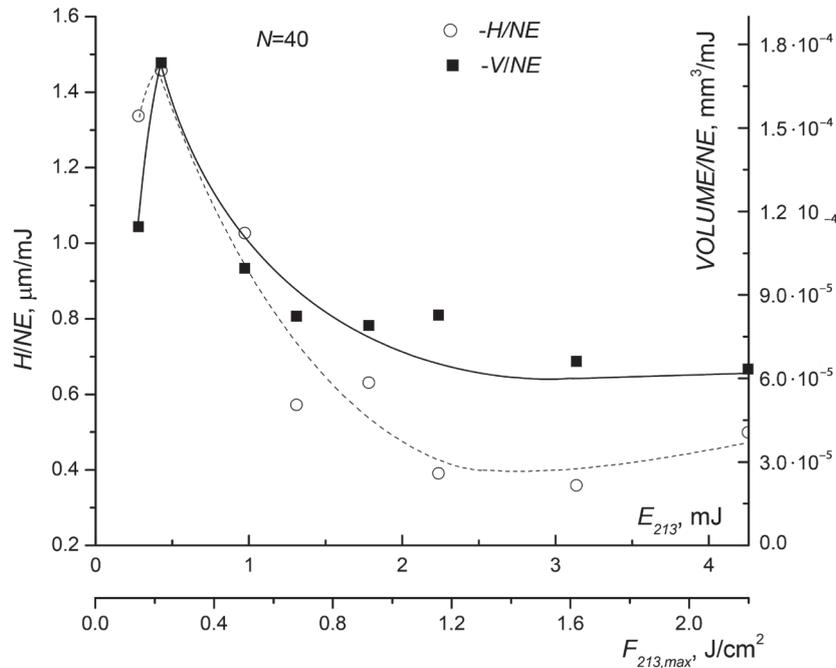


Fig. 1. One laser pulse ablation output V/NE and depth output H/NE vs. laser pulse energy E_{213} and laser pulse fluence $F_{213,\text{max}}$ in the pit center

The data obtained allow evaluating F_{th} in the absence of self-absorption. At the time, when a damage mark appears on the cornea only at the top of the laser beam distribution, no cloud exists, self-absorption is absent, and the minimum value of $F_{bnd} = F_{th} = F_{213,max}$.

To get F_{th} from the experimental data in Fig. 2, find the intersection of auxiliary dotted line 1 built at several initial points of the experimental dependence and auxiliary straight line $F_{th} = F_{213,max}$ built in Fig. 2. The intersection point gives the value of the threshold $F_{th} = F_{213,max}$ provided that no re-absorption takes place. Fig. 2 gives the value of $F_{th} \sim 0.03-0.04 \text{ J/cm}^2$. F_{th} is an individual eye property.

Fig. 2 illustrates that D_{bnd} significantly increases from 0.2–0.4 to 1.0–1.2 for the range of $F_{213,max} = 0.2-0.4 \text{ J/cm}^2$ to 1.7–2.2 J/cm^2 .

In essence, D_0 and D_{bnd} represent h_0^{cl} and h_{bnd}^{cl} , respectively. They are the equivalent thicknesses of the cloud in the center and at the boundary of the pit normalized to the initial state of the cornea before treatment. A conclusion can be made that D_0/D_{bnd} smoothly decreases from a value of about 5 for $F_{213,max} = 0.2-0.4 \text{ J/cm}^2$ to 1.8–2.2 for the range of $F_{213,max} = 0.5-2.2 \text{ J/cm}^2$. It is possible to say that at high fluencies the equivalent thickness of the cloud h_{bnd}^{cl} is approximately constant at the pit boundary. It is a result both of light self-absorption in the cloud and of sweeping off the evaporated material from the center of the laser beam to its periphery.

As a consequence, the pit radius r_{bnd} is less than the radius r_{th} of a laser beam with the threshold fluence F_{th} . This is illustrated in fig. 3 showing the dependences of r_{bnd} and r_{th} on $F_{213,max}$. It is seen that for the value of $F_{213,max}$ rather more than optimal, there is a significant difference between r_{th} and r_{bnd} .

The cloud ablation propagation velocity v_{cl} along the eye surface can be approximately estimated from the expression $v_{cl} = (r_{th} - r_{bnd})/\Delta t$ where Δt is the laser pulse duration.

Fig. 3 also depicts the dependence of v_{cl} on $F_{213,max}$ for $\Delta t = 15 \text{ ns}$.

Fig. 3 shows that the cloud ablation propagation velocity v_{cl} along the eye surface can reach 2–12 km/c. First v_{cl} sharply increases and then is saturated with $F_{213,max}$. Assuming the stability of material absorptance ability in the cloud, for the material with high absorptance (10^3 cm^{-1} or more, as in the case of the cornea) a significant part of laser energy is absorbed in the cloud and less affects the material surface. As a very high pressure is realized in the cornea ablation zone, ablation products form a cloud, quickly propagating in all possible directions. The high cloud propagation velocity v_{cl} along the eye surface provides for a displacement of ablation products along the surface by 100–150 μm or more in the course of the laser pulse duration. For smaller laser spots and for longer laser pulses, the effect is more

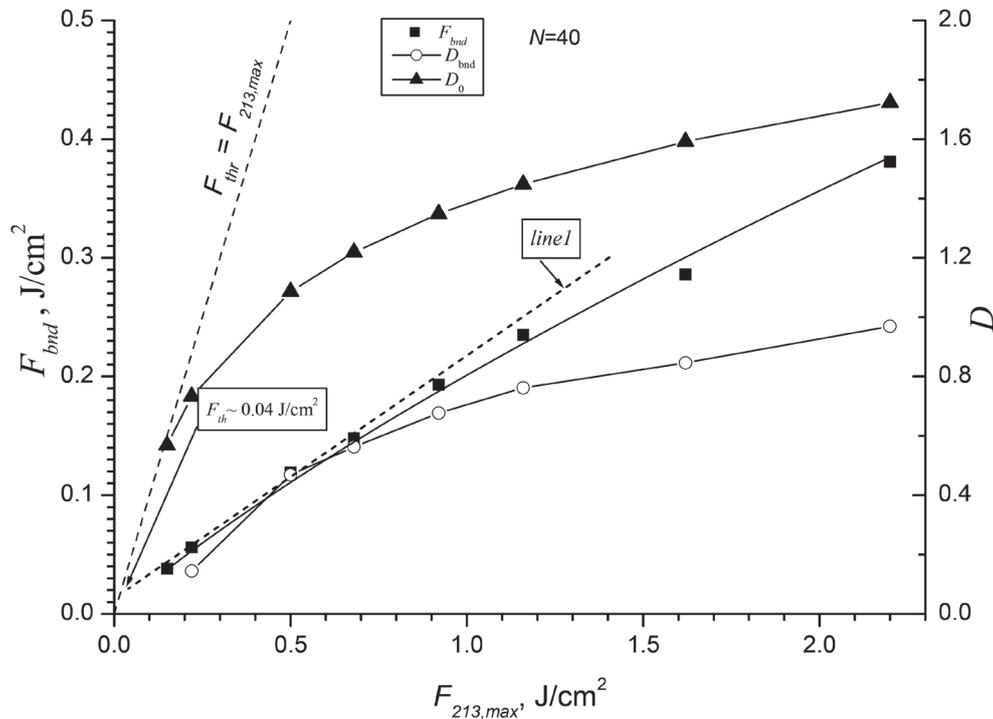


Fig. 2. Dependence of F_{bnd} , D_{bnd} , and D_0 on $F_{213,max}$ for the eye

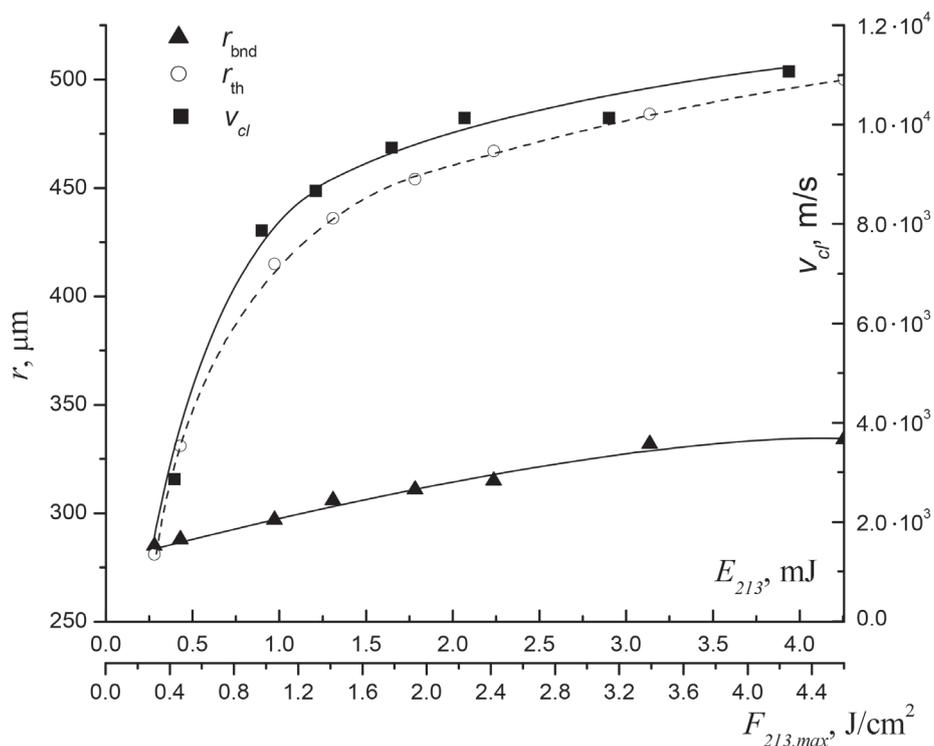


Fig. 3. The pit radius r_{bnd} , the radius r_{th} of a laser beam with the threshold fluence F_{th} , and the cloud ablation propagation velocity v_{cl} along the eye surface as a function of $F_{213,\text{max}}$

pronounced and should not be noticeable for femtosecond pulses. This mechanism effectively enhances F_{bnd} with increase in $F_{213,\text{max}}$. It is necessary to emphasize that the increase in F_{bnd} is connected with blowing out the ablation products in the lateral direction along the cornea surface.

For practical cornea laser ablation surgery, it is necessary to take into account that the value F_{th} defines a pit depth at given $F_{213,\text{max}}$, and the value F_{bnd} – an ablation pit size at the pit boundary. For example, fig. 3 shows that in the range of $F_{213,\text{max}} = 0.3\text{--}2.2 \text{ J/cm}^2$, r_{bnd} changes in a rather narrow range of 270–320 μm , but at the same time r_{th} changes in a wider range of 270–520 μm . These considerations are substantial for the cornea ablation treatment technology by a laser beam of small radius.

Conclusion. The laser ablation efficiency of the cornea at 213 nm was investigated and optimized. It is shown that self-absorption of radiation at 213 nm in a thin cloud of ablated material takes place and strongly influences the ablation efficiency. Ablation products are being blown out in the lateral direction along the cornea surface. As a result, the pulse fluence at the pit boundary F_{bnd} is more than the threshold fluence F_{th} . As a consequence, the pit radius r_{bnd} is less than the radius r_{th} of a laser beam with the threshold fluence F_{th} , which should be taken into account while planning ablation surgery at 213 nm radiation.

References

1. Femtosecond-pulse laser ablation of human corneas / W. Kautek [et al.] // Appl. Phys. A. – 1994. – Vol. 58. – P. 513–518.
2. Krüger, J. Ultrashort Pulse Laser Interaction with Dielectrics and Polymers / J. Krüger, W. Kautek // Adv. Polym. Sci. – 2004. – Vol. 168. – P. 247–289.
3. Lubatschowski, H. Ophthalmic Applications / H. Lubatschowski, A. Heisterka // Femtosecond Technology for Technical and Medical Applications. Topics in Applied Physics / eds: F. Dausinger, F. Lichtner, H. Lubatschowski. – Heidelberg: Springer-Verlag, 2004. – Vol. 96. – P. 187–201.
4. Fisher, B. T. Measurement of small-signal absorption coefficient and absorption cross section of collagen for 193-nm excimer laser light and the role of collagen in tissue ablation / B. T. Fisher, D. W. Hahn // Appl. Opt. – 2004. – Vol. 43. – P. 5443–5451.
5. Pettit, G. H. Corneal-tissue absorption coefficients for 193- and 213-nm ultraviolet radiation / G. H. Pettit, M. N. Ediger // Appl. Opt. – 1996. – Vol. 35. – P. 3386–3391.
6. UV Solid State Laser (213 nm) Photo-Refractive Keratectomy / Q. Ren [et al.] // Ophthalmology. – 1994. – Vol. 101. – P. 883–889.
7. Solid state lasers for ocular surgery: preclinical stud / R. Cubeddu [et al.] // Proc. SPIE. – 1994. – Vol. 2079. – P. 177–182.
8. Mechanistic comparison of pulse laser induced phase separation of particulates from cellulose paper at 213 nm and 532 nm / S. Arif [et al.] // Appl. Phys. A. – 2013. – Vol. 110. – P. 501–509.

Поступила в редакцию 18.06.2015

УДК 538.958

А. В. ДАНИЛЬЧИК¹, А. Г. ВОЙНИЛОВИЧ¹, Н. В. РЖЕУЦКИЙ¹, П. В. ШПАК¹, В. В. БОРУШКО²,
Ю. В. ТРОФИМОВ³, В. И. ЦВИРКО³, Е. В. ЛУЦЕНКО¹, Г. П. ЯБЛОНСКИЙ¹

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ В МАТРИЦЕ InGaN СВЕТОДИОДОВ С ВЫСОКОЙ ПЛОТНОСТЬЮ МОЩНОСТИ ИЗЛУЧЕНИЯ

¹Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь,
e-mail: a.danilchuk@ifanbel.bas-net.by

²Брестский государственный университет им. А. С. Пушкина, Брест, Беларусь,
e-mail: vadim79@tut.by

³Центр светодиодных и оптоэлектронных технологий Национальной академии наук Беларуси,
Минск, Беларусь; e-mail trofimov@inel.bas-net.by

Создана матрица, состоящая из 33 миниатюрных светодиодов Rebel Z-серии, излучающих в сине-зеленой области спектра. Максимальная плотность мощности излучения матрицы составила ~18 Вт/см² при непрерывном токе инжекции. Выполнена компьютерная модель, описывающая распределение температуры в матрице светодиодов в зависимости от потребляемой электрической мощности. Результаты моделирования согласуются с результатами измерений температуры светодиодов матрицы при помощи тепловизора, а также определения температуры активной области светодиодов оптическим методом.

Ключевые слова: матрица светодиодов, температура активной области, распределение температуры, тепловая модель.

A. V. DANILCHYK¹, A. G. VAINILOVICH¹, M. V. RZHEUTSKI¹, P. V. SHPAK¹, V. V. BORUSHKO²,
Y. V. TROFIMOV³, V. I. TSVIRKO³, E. V. LUTSENKO¹, G. P. YABLONSKI¹

SIMULATION OF TEMPERATURE DISTRIBUTION IN THE InGaN LED MATRIX WITH HIGH DENSITY OF RADIATION POWER

¹B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus,
e-mail: a.danilchuk@ifanbel.bas-net.by

²Brest State University named after A. S. Pushkin, Brest, Belarus; e-mail: vadim79@tut.by

³Center of LED and Optoelectronic Technologies of the National Academy of Sciences of Belarus,
Minsk, Belarus; e-mail: trofimov@inel.bas-net.by

The matrix consisting of 33 miniature LEDs of Rebel Z-series emitting in the blue-green region of the spectrum was created. The maximum emission power density of the matrix was ~18 W/cm² at continuous injection current. A computer model describing the temperature distribution in the matrix of LEDs depending on the supplied electrical power was developed. The simulation results are consistent with the results of measurement of the matrix LEDs temperature by a thermal imager, as well as with the results of determination of the LED active region temperature by the optical method.

Keywords: LED matrix, active region temperature, temperature distribution, thermal model.

Введение. Одним из путей улучшения характеристик мощных светодиодов (СД) является уменьшение теплового сопротивления между активной областью СД-кристалла и основанием светодиода. При этом происходит значительное уменьшение размеров корпуса СД вплоть до размеров кристалла [1]. Линейки или матрицы современных светодиодов с малой площадью поверхности могут иметь высокую суммарную интенсивность излучения, достаточную для накачки активных лазерных сред [2]. Использование в лазерах гибридной поперечно-продольной полихроматической накачки, поперечная накачка которых осуществляется светодиодами, в перспективе позволит создать мощные конкурентоспособные твердотельные лазеры с высоким качеством лазерного пучка [3]. Кроме того, матрицы светодиодов могут применяться в качестве мощных

источников света, например при высокоскоростной видеосъемке быстро происходящих событий, или в автомобилестроении.

Одним из важнейших параметров, влияющих на эффективность и срок службы светодиодов, является температура активной области. Однако определение температуры активных областей большого количества светодиодов, расположенных плотно на монтажной плате, представляет значительные трудности. Методы определения температуры, например основанные на сравнении прямого напряжения смещения на СД в импульсном режиме и в режиме постоянного тока или на сравнении длин волн электролюминесценции в импульсном режиме работы с длинами волн при непрерывном возбуждении [4], требуют для своей реализации импульсных источников тока большой мощности. Прямые методы определения температуры поверхности светодиодов с высокой точностью и пространственным разрешением требуют дорогостоящей тепловизионной техники.

Математическое моделирование и современные программные комплексы позволяют численными методами решать уравнения теплопереноса в различных средах. Разработка трехмерных (3D) цифровых моделей матриц светодиодов дает возможность проводить расчеты для изучения влияния теплофизических свойств материалов на распределение температуры внутри и на поверхности структур. Создание моделей, подробно описывающих СД и матрицы светодиодов, позволит проводить оценку температуры активной области и сравнивать полученные данные с результатами экспериментов по определению данной величины. Целью настоящей работы была апробация результатов математического моделирования распределения температуры в созданной цифровой модели матрицы светодиодов с полученными экспериментально различными методами величинами нагрева светодиодов в матрице. В дальнейшем можно будет с помощью численного моделирования проводить оценку температур нагрева матриц или линеек однотипных светодиодов, не прибегая к сложным экспериментальным исследованиям, а также разрабатывать оптимальные конструкции матриц СД.

Теоретическая модель. С целью теоретического определения температуры светодиодов была создана трехмерная цифровая модель, описывающая матрицу из тридцати трех СД Rebel LXZ1-PE01-0048, установленных методом поверхностного монтажа на плату с алюминиевым основанием (рис. 1, *а*). Данная матрица ранее была представлена в работе [5]: площадь основания отдельных светодиодов составляла всего $2,2 \text{ мм}^2$, при этом общая площадь светящейся области – $1,5 \times 0,5 \text{ см}^2$.

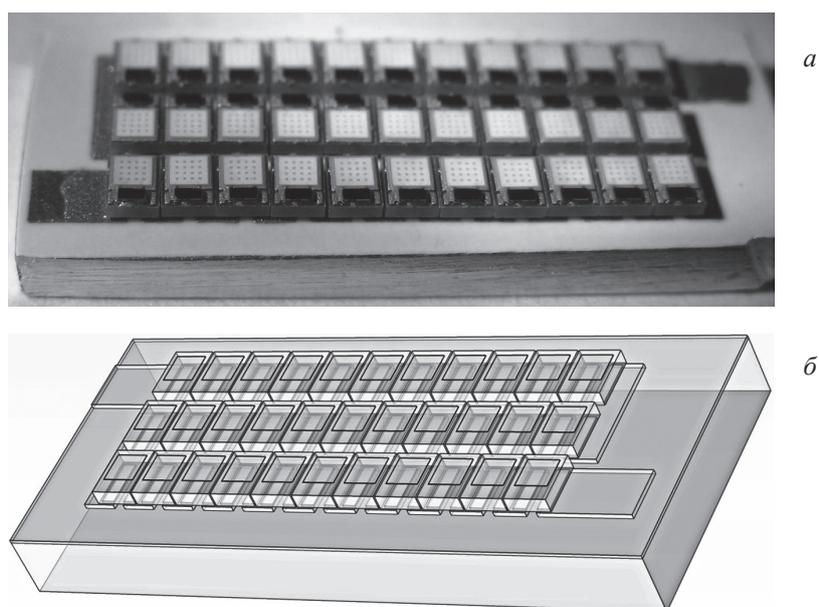


Рис. 1. Матрица светодиодов Rebel LXZ1-PE01-0048 (*а*) и ее цифровая 3D-модель (*б*)

В программной среде Comsol Multiphysics была создана 3D-модель матрицы, состоящая из следующих элементов: алюминиевого основания, слоя диэлектрика, площадки медной металлизации, слоя припоя (паяльной пасты), корпуса светодиода и активных областей светодиода. Изображение данной модели показано на рис. 1, б. Модель учитывает физические свойства материалов, размеры элементов и позволяет рассчитать распределение температуры в стационарном режиме для известной объемной плотности мощности, идущей на нагрев, которая определялась как отношение электрической мощности, подаваемой на светодиод и идущей на его нагрев $P_{\text{нагр}}$ к объему активной области светодиодного кристалла.

Площадь кристаллов отдельных светодиодов составляла $1 \times 1 \text{ мм}^2$, а толщина активной области принималась равной 10 мкм , таким образом, объем активной области $V_{\text{акт.обл.}} = 10^{-11} \text{ м}^3$. Также в данной модели учитывались геометрические размеры и тепловое сопротивление всех материалов, которые представлены в таблице (данные взяты из обширной справочной литературы).

Материал	Тепловое сопротивление, Вт/(м·К)	Толщина слоя, мкм
Кристалл светодиода, GaN	130	10
Корпус светодиода, Al ₂ O ₃	42	470
Припой, Sn ₆₀ Pb ₄₀	50	50
Контактные площадки, Cu	390	150
Диэлектрик	1,4	100
Основание монтажной платы, Al	160	2000

В указанной модели методом конечных элементов решалось уравнение распределения тепла в матрице. В качестве источников тепла выступали верхние слои светодиодов, т. е. собственно кристаллы. Граничные условия задавались таким образом, что температура основания алюминиевой платы принималась за постоянную величину $T = 20 \text{ }^\circ\text{C}$, моделируя условия стабилизации температуры. Отток тепла через все остальные поверхности не учитывался. Сетка конечных элементов генерировалась со средними параметрами точности при минимальном размере ее элементов $3,69 \cdot 10^{-4} \text{ м}$.

Методика эксперимента. Экспериментальное определение температуры на поверхности матрицы светодиодов проводилось при помощи стационарного научного тепловизора FLIR A655sc. Для стабилизации температуры основания матрицы светодиодов при больших токах инжекции использовался радиатор с воздушным охлаждением с низким тепловым сопротивлением $\sim 0,08 \text{ К/Вт}$, а также медный радиатор, охлаждаемый проточной водой.

Для определения температуры перегрева активной области светодиодов применялся метод, основанный на сравнении положений максимумов измеренных спектров электролюминесценции (ЭЛ) при непрерывном токе $\lambda_{\text{непр}}$ с положениями максимумов спектров ЭЛ при возбуждении короткими импульсами тока $\lambda_{\text{имп}}$ такой же величины [4, 6]. При этом импульсы тока, подаваемые на светодиод, имели длительность 500 нс и частоту повторения 1 кГц . При таких параметрах импульсного тока нагрев активной области светодиода незначителен, и с увеличением тока инжекции происходит только коротковолновое смещение положения спектров, обусловленное в основном заполнением состояний в InGaN. Из зависимости положения спектра ЭЛ светодиода от температуры при импульсном токе 100 мА получен коэффициент температурного смещения электролюминесценции $\Delta T/\Delta \lambda$. Для определения зависимости температуры перегрева активной области от тока инжекции разность положений спектров ЭЛ при непрерывном и импульсном токах $\Delta \lambda = \lambda_{\text{непр}} - \lambda_{\text{имп}}$ умножалась на коэффициент температурного смещения $\Delta T/\Delta \lambda$. В экспериментах по определению температуры перегрева активной области был использован один светодиод, который припаивался на монтажную плату с алюминиевым основанием по технологии поверхностного монтажа. Плата помещалась на элемент Пельтье, и заданная температура ее основания стабилизировалась при помощи термоконтроллера.

Для корректного определения электрической мощности, которая расходуется на нагрев светодиодов в матрице, была измерена оптическая мощность излучения $P_{\text{опт}}$ матрицы. Измерения проводились с использованием интегрирующей сферы при различных токах инжекции. Плотность

мощности излучения матрицы светодиодов от тока инжекции определялась при стабилизации температуры алюминиевого основания $20\text{ }^{\circ}\text{C}$. Максимальная плотность мощности излучения составила $\sim 18\text{ Вт/см}^2$ при токе $I = 1000\text{ мА}$ и напряжении $U = 100\text{ В}$. Однако максимальная эффективность светодиодов ($\eta \sim 37\%$) достигается при очень малом токе $\sim 10\text{ мА}$. Увеличение тока инжекции до значения 1000 мА приводит к падению эффективности до величины $\eta = 13,8\%$. Резкое уменьшение эффективности светодиодов с ростом тока инжекции в литературе связывают с такими эффектами, как Оже-рекомбинация [7] или токи утечки [8]. Из данных измерений оптической мощности и вольтамперной характеристики рассчитывалась мощность, которая шла на нагрев активной области светодиодов:

$$P_{\text{нагр}} = I \cdot U - P_{\text{опт}}$$

Результаты и их обсуждение. На рис. 2, *а* представлено изображение матрицы, состоящей из тридцати трех светодиодов Rebel LXZ1-PE01-0048, полученное при помощи тепловизора FLIR. Курсорами 1–4 обозначены точки, в которых производился замер температуры. Точки 1–3 показывают температуру светодиодов, находящихся на краю матрицы, а точка 4 – температуру светодиода, находящегося в центре. Значения температуры в точках 1–4 составляют: $T_1 = 59,1\text{ }^{\circ}\text{C}$; $T_2 = 59,2\text{ }^{\circ}\text{C}$; $T_3 = 56,8\text{ }^{\circ}\text{C}$; $T_4 = 64,4\text{ }^{\circ}\text{C}$.

На рис. 2, *б* приведен трехмерный график распределения температуры в модели матрицы светодиодов при объемной плотности мощности нагрева $7,86 \cdot 10^{10}\text{ Вт/м}^3$ в приближении отсутствия существенных градиентов температуры внутри светодиода. Температура на краях матрицы отличается от температуры в ее центре на величину порядка $5\text{ }^{\circ}\text{C}$. Данное значение объемной плотности мощности нагрева было получено как отношение $P_{\text{нагр}}$ при токе 350 мА к $V_{\text{акт.обл}}$. Максимальная величина нагрева кристаллов светодиода составляет 332 К . Однако следует отметить, что такая температура достигается в светодиодах, находящихся в середине структуры, при том что расположенные на краях светодиоды испытывают меньший нагрев. Такое поведение

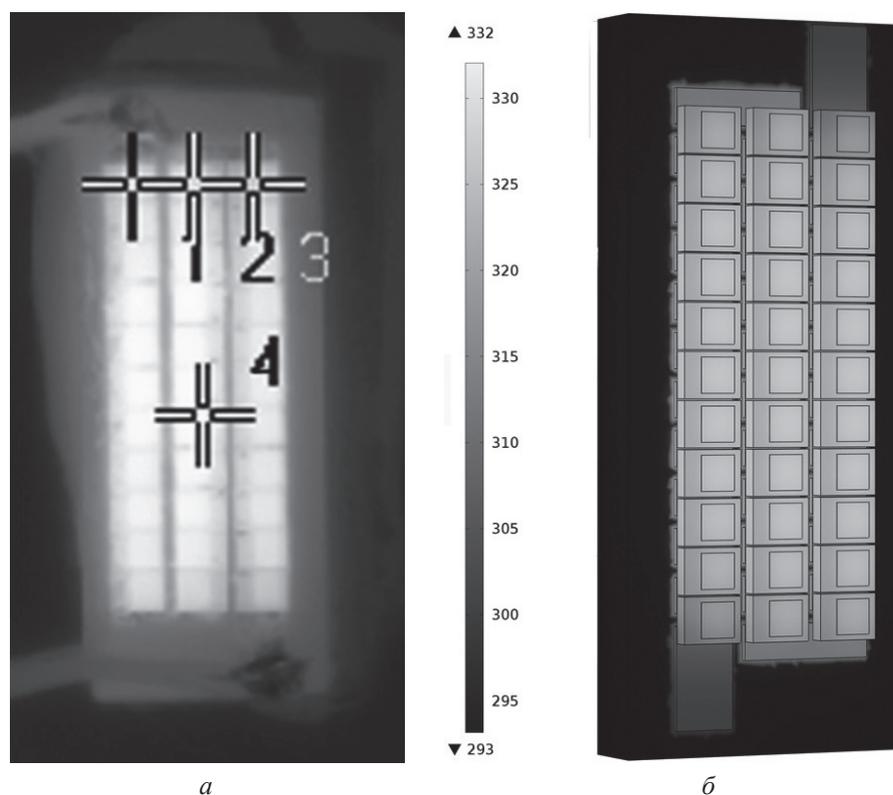


Рис. 2. Изображение матрицы светодиодов, полученное при помощи тепловизора при непрерывном токе 350 мА (*а*) и карта распределения температуры в матрице светодиодов, полученная в результате моделирования при токе инжекции 350 мА (*б*)

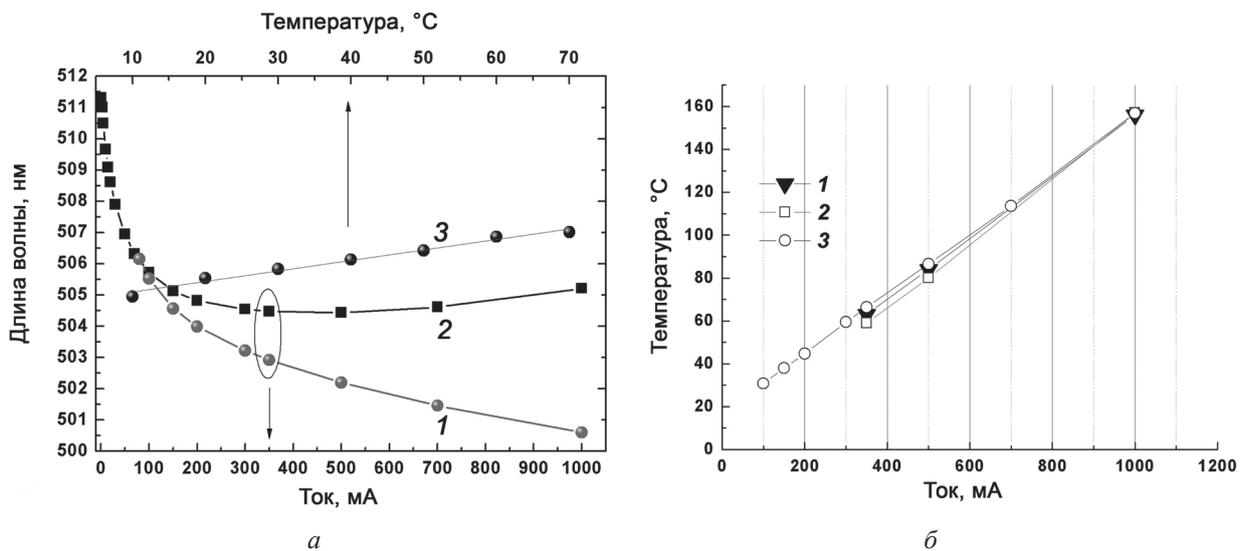


Рис. 3. Зависимости положений максимумов спектров ЭЛ светодиода LXZ1-PE01-0048 (а) от величины тока инжекции при импульсном (кривая 1) и непрерывном (кривая 2) токе, а также от температуры при импульсном токе 100 мА (кривая 3); максимальная температура светодиодов в матрице (б) в зависимости от тока инжекции, измеренная тепловизором (1), полученная в результате расчетов (2), а также температура активной области отдельного светодиода, полученная методом сравнения положений спектров ЭЛ (3)

обусловлено наличием на краях матрицы площадок медной металлизации, которые дополнительно отводят тепло от корпусов светодиодов. Данные площадки созданы для контакта светодиодов матрицы, соединенных последовательно, с источником тока. Как видно, результаты моделирования находятся в хорошем соответствии с данными, получаемыми при помощи тепловизора (см. рис. 2, а), отличие составляет ~ 2 °С. Также были проведены расчеты распределения температуры в модели матрицы для плотностей мощности, которые соответствуют токам инжекции 500 и 1000 мА. Полученные зависимости максимальных температур нагрева светодиодных кристаллов от плотностей мощности, которые соответствуют данным токам инжекции светодиодов, представлены на рис. 3, б.

На рис. 3, а приведены положения максимумов спектров электролюминесценции светодиода Rebel LXZ1-PE01-0048 в зависимости от тока инжекции при импульсном (кривая 1) и непрерывном (кривая 2) возбуждении. Измерения проводились при значениях токов от 1 до 1000 мА. Как видим, с ростом величины импульсного тока происходит только коротковолновое смещение спектра ЭЛ, что связано с заполнением состояний в квантовых ямах InGaN. Поведение кривой 2 обусловлено, помимо заполнения состояний, уменьшением ширины запрещенной зоны InGaN, которое вызвано нагревом с ростом величины непрерывного тока. Вычитая положения спектральных максимумов ЭЛ при импульсном токе из положений спектральных максимумов ЭЛ при таких же значениях непрерывного тока, получим зависимость изменения длины волны электролюминесценции от тока $\Delta\lambda(I)$, обусловленную только нагревом. Зависимость положения спектра ЭЛ светодиода LXZ1-PE01-0048 от температуры при импульсном токе 100 мА представлена на рис. 3, а (кривая 3). Из наклона данной зависимости получен коэффициент температурного смещения $\Delta T/\Delta\lambda = 29,71$ °С/нм. Умножая $\Delta\lambda(I)$ на $\Delta T/\Delta\lambda$, получаем зависимость температуры перегрева активной области светодиода от тока инжекции.

Максимальная температура перегрева активной области светодиода при токе инжекции 1 А составила $\Delta T_{\text{опт}} = 137$ °С. Зависимость температуры нагрева активной области светодиода от тока получалась прибавлением значения комнатной температуры (20 °С). Данная зависимость представлена на рис. 3, б (кривая 3), из которого видно, что рассчитанные значения температуры светодиодов в матрице (кривая 3) практически совпадают с соответствующими величинами, полученными при непосредственных измерениях (кривая 1) и оптическим методом (кривая 2), что свидетельствует о хорошем соответствии результатов моделирования измеренным величинам температуры.

Небольшое несоответствие результатов моделирования относительно непосредственных измерений тепловизором может быть объяснено упрощениями используемой цифровой модели. В модели не учитываются зависимость от температуры коэффициентов теплопроводности, наличие контактных слоев между кристаллом и основанием светодиода и т. д. Несоответствие наклонов измеренных и полученных оптическим методом температурных зависимостей обусловлено, по-видимому, пренебрежением разогрева светодиодов при импульсном возбуждении.

Заключение. По температурному смещению спектров излучения показано, что максимальная температура перегрева активной области светодиода Rebel LXZ1-PE01-0048 при токе инжекции 1 А составляет 137 °С. При таком токе была получена максимальная плотность мощности излучения ~18 Вт/см². Создана цифровая 3D-модель, которая позволяет произвести расчет распределения температуры светодиодов матрицы, при различных значениях подводимой к светодиодам мощности. Показано, что значения температуры светодиодов, полученные при помощи моделирования, близки к соответствующим величинам, полученным из оптических измерений и при непосредственных измерениях тепловизором.

Список использованной литературы

1. <http://www.digikey.com/en/articles/techzone/2015/aug/the-incredible-shrinking-led>
2. Study of a QCW light-emitting-diode (LED)-pumped solid-state laser / K. Lee [et al.] // J. Korean Phys. Soc. – 2011. – Vol. 59, no. 5. – P. 3239–3245.
3. Луценко, Е. В. Характеристики инжекционных лазеров видимого диапазона спектра и их возможные применения / Е. В. Луценко // Полупроводниковые лазеры: физика и технология: тез. докл. 4-го Всерос. симп. с междунар. участием, 10–13 нояб. 2014 г., Россия, Санкт-Петербург. – СПб., 2014. – С. 40.
4. Шуберт, Ф. Светодиоды: пер. с англ. / Ф. Шуберт; под ред. А. Э. Юновича. – 2-е изд. – М.: Физматлит, 2008. – С. 127–142.
5. Матрица светодиодов с принудительным охлаждением / А. В. Данильчик [и др.] // Полупроводниковые лазеры и системы на их основе: 9-й Белорус.-Рос. семинар, 28–31 мая 2013 г., Минск, Беларусь: сб. ст. – Минск, 2013. – С. 178–181.
6. Active region overheating temperature of commercial and active liquid cooled LEDs / E. V. Lutsenko [et al.] // Annual proceedings the technical university of Varna 2010. International Scientific and Applied Conference Opto-Nano Electronics and Renewable Energy Sources 2010, 21–25 Sept. 2010, St. Constantine and Helena Resort, Varna, Bulgaria: Proceedings. – [S. l.], 2010. – P. 38–42.
7. Efficiency droop suppression in InGaN-based blue LEDs: Experiment and numerical modeling / D. A. Zakheim [et al.] // Phys. Status Solidi A. – 2012. – Vol. 209, no. 3. – P. 456–460.
8. Carrier recombination mechanisms and efficiency droop in GaInN/GaN light-emitting diodes / Q. Dai [et al.] // Appl. Phys. Lett. – 2010. – Vol. 97, iss. 13. – P. 133507-1–133507-3.

Поступила в редакцию 25.11.2015

УДК 535.375.54

Е. В. КОРЗА

УСИЛЕНИЕ КОМБИНАЦИОННОГО РАССЕЙНИЯ СВЕТА НЕОРГАНИЧЕСКИМИ ПИГМЕНТАМИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НАНОЧАСТИЦ ЗОЛОТА И СЕРЕБРА

*Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь,
e-mail: korza_ev@list.ru*

В данной работе апробированы различные методики повышения интенсивности комбинационного рассеяния света неорганическими художественными пигментами. Показано, что для каждого пигмента существует индивидуальная зависимость фактора усиления от размеров наночастиц, при этом взаимное расположение аналита и наночастиц не имеет значительного влияния на его величину. Тем не менее нанесение наночастиц поверх аналита представляет собой наиболее простой и наименее времязатратный способ подготовки образцов. Кроме этого обнаружено, что интенсивность комбинационного рассеяния при использовании наночастиц золота и серебра соизмеримы, но применение золотых наноструктур позволяет снизить люминесцентный фон в ГКР-спектрах, что значительно упрощает их интерпретацию.

Ключевые слова: усиление комбинационного рассеяния света, наночастицы серебра, наночастицы золота, празеодим, ультрамарин фиолетовый, церулеум.

Е. V. KORZA

LIGHT RAMAN SCATTERING ENHANCEMENT BY INORGANIC PIGMENTS WITH THE USE OF GOLD AND SILVER NANOPARTICLES

*B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus,
e-mail: korza_ev@list.ru*

In this paper different techniques of surface enhanced Raman scattering (SERS) by inorganic art pigments have been tested. Every pigment has each own dependence of the enhancement factor on nanoparticles sizes. The relative position of analyte and metal nanoparticles has no significant impact on the value of the enhancement factor. However, applying nanoparticles on top of the pigment is the most simple and less time-consuming method for sample preparation. In addition, the use of gold and silver nanoparticles provide comparable values of the intensity in the SERS spectra, but the use of gold nanostructures allows reducing the fluorescent background. So, the interpretation of spectra becomes easier.

Keywords: Surface enhanced Raman scattering (SERS), silver nanoparticles, gold nanoparticles, praseodymium yellow, ultramarine violet, cerulean.

Введение. Одной из эффективных методик анализа веществ является спектроскопия комбинационного рассеяния света (КР). Спектры комбинационного рассеяния света каждого соединения настолько специфичны, что могут служить для идентификации этого соединения и обнаружения его в смесях [1]. Недостатком КР является его слабая интенсивность, в результате чего для анализа этим методом требуется достаточно большое количество вещества для исследования, что не может быть реализовано при исследовании объектов культурного наследия. Поэтому в настоящее время стоит задача повышения чувствительности КР-спектроскопии.

Решением данной задачи является гигантское комбинационное рассеяние света (ГКР), которое позволяет существенно снизить количество исследуемого вещества. ГКР основано на эффекте плазмонного резонанса, которым обладают наночастицы металлов размером от 1 до 100 нм (серебро, золото). Если исследуемое вещество находится вблизи наночастиц металла, то генерация локализованных поверхностных плазмонов на поверхности металла обуславливает усиление взаимодействия света с веществом и приводит к увеличению интенсивности рассеянного излучения

на несколько порядков [2]. Благодаря своим особым свойствам эффект ГКР света интенсивно используется для решения задач аналитической химии [3]. В последние годы появилось большое количество публикаций, в которых предлагается использовать ГКР для идентификации органических красителей в тканях, исторических манускриптах, произведений станковой живописи и др. [3–5]. Систематическое исследование неорганических художественных материалов до сих пор не выполнялась. В работах [6, 7] предложено несколько методик для усиления сечения КР неорганическими пигментами.

Цель данной работы – апробировать различные методики повышения интенсивности комбинационного рассеяния света неорганическими художественными пигментами на примере празеодима желтого, ультрамарина фиолетового и церулеума, а также исследовать влияния размера наночастиц благородных металлов, природы металлов и методики приготовления образцов на усиление комбинационного рассеяния.

Методика эксперимента. В качестве исследуемых образцов были использованы неорганические художественные пигменты: празеодим желтый, ультрамарин фиолетовый и церулеум, представленные в таблице.

Исследуемые неорганические художественные пигменты

Название	Химическая формула	Производитель	Инвентарный номер	Концентрация, моль/л
Празеодим желтый	$O_{21}Pr_2Si_7Zr_2$	«Kremerpigments» (Германия)	#43230	$0,56 \cdot 10^{-3}$
Ультрамарин фиолетовый	$Na_6Al_6Si_6O_{24}S_4$		#42600	$0,62 \cdot 10^{-3}$
Церулеум	Co_2SnO_4		#45730	$2,13 \cdot 10^{-3}$

Для усиления КР использовались золи наночастиц серебра (10–15 нм), полученные по методике восстановления нитрата серебра борогидридом натрия в присутствии цитрата натрия как стабилизатора [8], наночастиц серебра (50–80 нм), полученные восстановлением нитрата серебра цитратом натрия [8], наночастиц золота (10–14 нм), полученные по методике цитратного восстановления из водного раствора $HAuCl_4$ [9], а также пленки на их основе, приготовленные методом послойного электростатического осаждения. Спектры оптической плотности золь характеризуются максимумом плазмонного резонанса в области 399 нм для борогидритного золя серебра, 415 нм – для цитратного золя серебра и 520 нм – для цитратного золя золота (рис. 1, а). Вследствие агрегации наночастиц в приготовленных пленках происходит смещение пика плазмонного резонанса и возникновение дополнительной полосы в пленке наночастиц серебра (10–15 нм) в связи с более плотным расположением наночастиц и их взаимодействиями (рис. 1, б).

Для исследования и сравнения влияния размера наночастиц металлов, природы материала и методики подготовки образцов на усиление интенсивности комбинационного рассеяния было подготовлено три серии образцов:

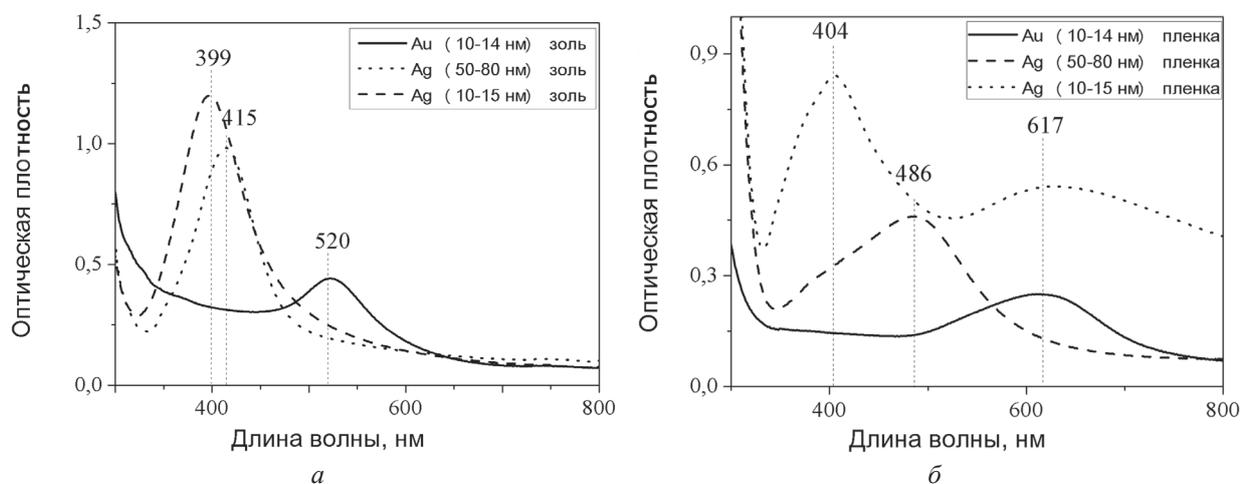


Рис. 1. Спектры оптической плотности золь наночастиц золота и серебра (а) и пленок, приготовленных на их основе (б)

– первая серия образцов представляла собой водные суспензии исследуемых пигментов, которые наносились на подложки, приготовленные на основе пленок наночастиц серебра или золота, и высушивались в горизонтальной плоскости при комнатной температуре;

– вторая серия образцов получена нанесением водных суспензий неорганических пигментов непосредственно на чистые стеклянные поверхности, которые высушивались в горизонтальной плоскости при комнатной температуре, после чего сверху наносились наночастицы благородных металлов и также высушивались в горизонтальной плоскости при комнатной температуре;

– третья серия образцов получена нанесением водной суспензии пигментов на подложки с пленками наночастиц золота, которые высушивались в горизонтальной плоскости при комнатной температуре, после чего сверху на пигмент наносились наночастицы золота и также высушивались в горизонтальной плоскости при комнатной температуре.

Спектры комбинационного рассеяния регистрировались на спектрографе (SolarTIS3901) с дифракционной решеткой 1200 штр./мм и ПЗС-матрицы (Princetoninstruments), охлаждаемой жидким азотом, по схеме обратного рассеяния. В качестве источника возбуждения использовался Nd:LSB-лазер с длиной волны излучения 531 нм. Спектры регистрировались в диапазоне $200\text{--}1800\text{ см}^{-1}$. Время накопления сигнала составляло 3 мин.

Результаты и их обсуждение. Для исследования влияния размера коллоидных наночастиц металла рассмотрим ГКР-спектры праезодима желтого и ультрамарина фиолетового, которые получены от образцов, приготовленных на пленках наночастиц серебра разного размера (рис. 2, а, б).

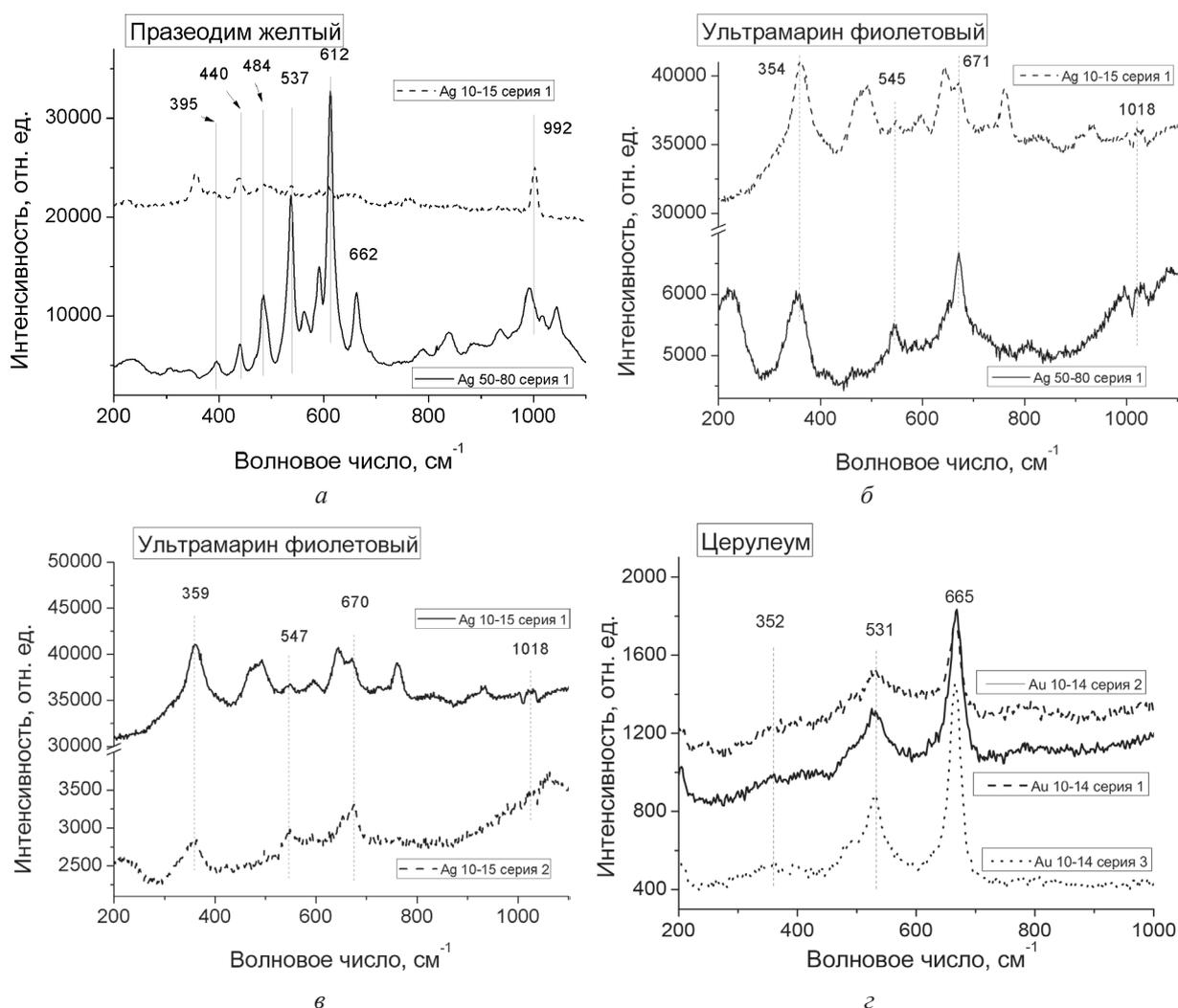


Рис. 2. ГКР-спектры праезодима желтого (а) и ультрамарина фиолетового (б) с наночастицами серебра разного размера, а также ультрамарина фиолетового (в) и церулеума (г) с разным способом подготовки образцов

У празеодима желтого, приготовленного на пленке серебра с размером наночастиц 50–80 нм, в ГКР-спектре проявились все полосы (см. рис. 2, *а*) с большой интенсивностью. Самая интенсивная полоса находится в области 612 см^{-1} и имеет интенсивность 13 840 отн. ед. на полуширине линии, в то время как при использовании наночастиц серебра размером 10–15 нм проявились только некоторые полосы и полоса 612 см^{-1} имеет интенсивность всего 574 отн. ед.

В ГКР-спектрах ультрамарина фиолетового (см. рис. 2, *б*) наблюдается обратная ситуация: наиболее интенсивная полоса в области 354 см^{-1} для образца с наночастицами серебра размером 50–80 нм имеет интенсивность 752 отн. ед., а для образца с наночастицами серебра размером 10–15 нм – 3145 отн. ед. Из полученных спектров также видно, что исследуемые пигменты вблизи наночастиц размером 5080 нм не дают такой высокий люминесцентный фон, как вблизи наночастиц размером 10–15 нм.

Рассмотрим влияние способа подготовки образцов на усиление КР. На рис. 2, *в* представлены ГКР-спектры ультрамарина фиолетового, полученные на образцах из серий 1 и 2 с наночастицами серебра размером 10–15 нм. Интенсивность полосы ультрамарина фиолетового на 359 см^{-1} составила 3145 отн. ед. для образца из серии 1 и 3467 отн. ед. для образца из серии 2. На рис. 2, *г* показаны ГКР-спектры церулеума, полученные на образцах из серий 1, 2 и 3 с наночастицами золота размером 10–14 нм. Интенсивность линии на 665 см^{-1} составила 394 отн. ед. для серии 1, 239 отн. ед. – для серии 2 и 518 отн. ед. – для серии 3. Таким образом, способ подготовки образцов не имеет значительного влияния на фактор усиления.

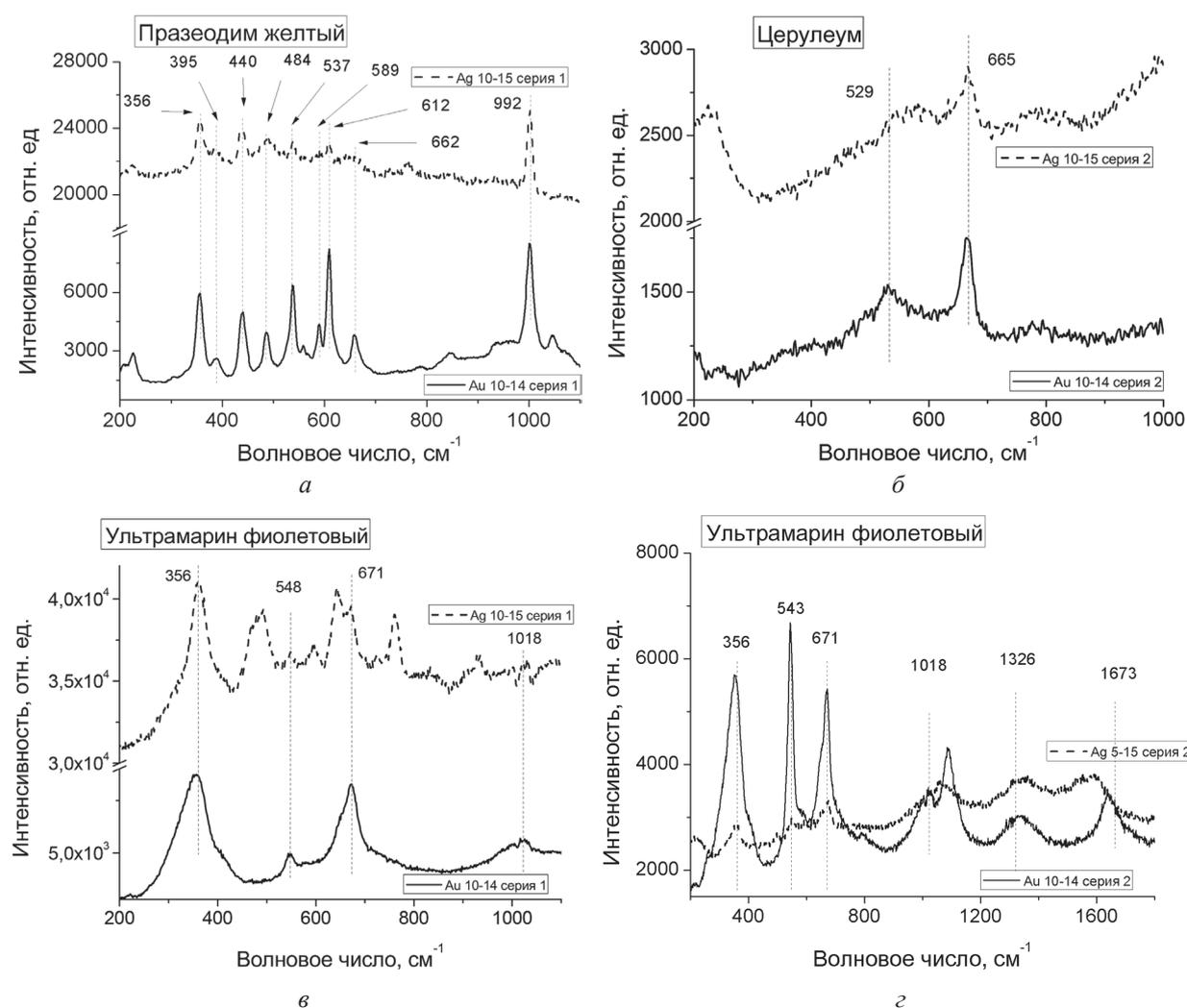


Рис. 3. ГКР-спектры празеодима желтого (*а*), церулеума (*б*) и ультрамарина фиолетового (*в* – серия 1; *г* – серия 2), полученные с помощью наночастиц разной природы

Для исследования влияния природы наночастиц рассмотрим ГКР-спектры, полученные от образцов серий 1 и 2, приготовленных с использованием наночастиц золота (10–14 нм) и серебра (10–15 нм). Рассмотрим ГКР-спектры празеодима желтого и ультрамарина фиолетового, которые были получены на пленках наночастиц (серия 1) золота и серебра размером 10–14 и 10–15 нм соответственно (рис. 3, а, в). У празеодима желтого на таких подложках полосы проявились с разной интенсивностью. Интенсивность полосы на 992 см^{-1} составила 2714 и 2419 отн. ед. на подложках наночастиц золота и серебра соответственно. У ультрамарина фиолетового интенсивность полосы 356 см^{-1} составила 3145 и 2711 отн. ед. на подложках с наночастицами серебра и золота соответственно. Таким образом, использование наночастиц серебра и золота позволило получить соизмеримое усиление сигнала КР.

На рис. 3, б, г представлены ГКР-спектры церулеума и ультрамарина фиолетового из серии 2, приготовленных с помощью наночастиц золота и серебра размером 10–14 и 10–15 нм. Интенсивность полосы церулеума на 665 см^{-1} составила 210 и 202 отн. ед. в присутствии наночастиц золота и серебра соответственно. Интенсивность полосы ультрамарина фиолетового на 353 см^{-1} составила 271 и 1915 отн. ед. вблизи наночастиц серебра и золота соответственно. Таким образом, для образцов из серии 2 наночастицы золота в сравнении с наночастицами серебра в индивидуальной зависимости дают соизмеримое либо в несколько раз превышающее усиление сигнала КР.

Выводы. При исследовании влияния размера наночастиц на усиление комбинационного рассеяния света неорганическими пигментами выявлено, что фактор усиления имеет индивидуальную зависимость от размеров наночастиц для каждого пигмента. Установлено, что способ подготовки образцов не имеет значительного влияния на фактор усиления, однако следует отметить, что способ, который использовался для приготовления образцов серии 2, является наиболее простым и быстрым.

Обнаружено, что интенсивности комбинационного рассеяния при использовании наночастиц золота и серебра соизмеримы, но в спектрах, полученных с помощью золотых наноструктур, отсутствует люминесцентный фон, что значительно упрощает их интерпретацию.

Таким образом, полученные результаты позволяют оптимизировать методику приготовления образцов для усиления комбинационного рассеяния при обнаружении и идентификации неорганических художественных пигментов.

Автор выражает благодарность кандидату физико-математических наук Е. В. Шабуне-Клячковой и кандидату химических наук О. С. Кулакович за плодотворные дискуссии, а также помощь в постановке задачи и проведении эксперимента.

Список использованной литературы

1. Ельяшевич, М. А. Атомная и молекулярная спектроскопия / М. А. Ельяшевич. – 2-е изд. – М.: Эдиториал УРСС.
2. Surface-enhanced Raman scattering and Biophysics / K. Kneipp [et al.] // J. Phys. Condens. – 2002. – P. R597–R624.
3. Geiman, I. Application of Raman Spectroscopy and Surface-Enhanced Raman Scattering to the Analysis of Synthetic Dyes Found in Ballpoint Pen Inks / I. Geiman, M. Leona, J. R. Lombardi // J. Forensic Sci. – 2009. – Vol. 54 (4). – P. 947–952.
4. Chen, K. Surface-enhanced Raman scattering for identification of organic pigments and dyes in works of art and cultural heritage material / K. Chen, M. Leona, T. Vo-Dinh // Sen. Review. – 2007. – Vol. 27 (2). – P. 109–120.
5. Bruni, S. Historical organic dyes: a surface-enhanced Raman scattering (SERS) spectral database on Ag Lee–Meisel colloids aggregated by NaClO_4 / S. Bruni, V. Guglielmi, F. Pozzi // J. Raman Spectrosc. – 2011. – Vol. 42. – P. 1267–1281.
6. Усиление комбинационного рассеяния света ультрамарином с помощью пленок серебра на поверхности квантовых точек германия на кремнии / Е. В. Клячковская [и др.] // Оптика и спектроскопия. – 2011. – № 110. – С. 53–59.
7. Enhancement of Raman scattering of light by ultramarine microcrystals in presence of silver nanoparticles / E. V. Klyachkovskaya [et al.] // J. Raman Spectrosc. – 2012. – Vol. 43. – P. 741–744.
8. Lee, P. C. Adsorption and surface-enhanced Raman of dyes on silver and gold sols / P. C. Lee, D. Meisel // J. Phys. Chem. – 1982. – Vol. 86 (17). – P. 3391–3395.
9. Turkevich, J. A study of the nucleation and growth processes in the synthesis of colloidal gold / J. Turkevich, P. Cooper Stevenson, J. Hillier // Discuss. Faraday Soc. – 1951. – Vol. 11. – P. 55–57.

Поступила в редакцию 11.02.2016

УДК 535.421

А. П. РОПОТ, Н. А. ХИЛО

ГЕНЕРАЦИЯ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ ЭЙРИ ПРИ ДИФРАКЦИИ НА СИНУСОИДАЛЬНЫХ ФАЗОВЫХ РЕШЕТКАХ

*Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь,
e-mail: AlexeiRAP@gmail.com, n.khilo@dragon.bas-net.by*

В работе рассмотрен новый акустооптический метод генерации динамических световых пучков Эйри. С применением SLM экспериментально подтверждена возможность получения неполных пучков Эйри при рефракции света на синусоидальной фазовой дифракционной решетке и изучены их свойства.

Ключевые слова: акустооптический метод, фазовая дифракционная решетка, стоячая волна, динамические световые пучки Эйри.

A. P. ROPOT, N. A. KHILO

GENERATION OF AIRY LIGHT BEAMS DIFFRACTED BY A SINUSOIDAL PHASE GRATING

*B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus,
e-mail: AlexeiRAP@gmail.com; n.khilo@dragon.bas-net.by*

The paper considers a new method for generation of Airy dynamic beams. Using SLM, the possibility of production of incomplete Airy beams due to light refraction by a sinusoidal phase grating is confirmed experimentally. The properties of such beams are studied.

Keywords: acousto-optical method, phase grating, standing wave, Airy dynamic light beams.

Введение. В последнее время интенсивно исследуются световые пучки Эйри (ЭП) (см., напр., [1–6]). Такой интерес вызван наличием свойства бездифракционности, способностью восстановления профиля за препятствиями [7], а также параболической пространственной формой максимума интенсивности пучка. Последнее позволяет говорить об ускоряющемся движении энергии в пучке при условии рассмотрения окрестности максимальной интенсивности поля.

Имеется также сообщение о применении ЭП для особого типа манипуляции микрочастицами [8] – удаления микрочастиц или биологических клеток из заданной области рабочей зоны. Следовательно, возникает необходимость в детальном исследовании основных свойства пучков Эйри с перспективой их последующего применения для задач манипуляции микрочастицами. Представляет также интерес и поиск новых возможностей формирования, исследования характеристик и применений световых ЭП.

Теоретическая часть. Пусть световое поле однородно, например, вдоль оси Y декартовой системы. Тогда любая из векторных компонент данного поля описывается одномерным уравнением Гельмгольца

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2 \right) E(x, z) = 0, \quad (1)$$

где $k_0 = 2\pi/\lambda$.

Решение уравнения (1) ищем в виде

$$E(x, z) = a(x, z) \exp(ik_0 z). \quad (2)$$

Предположим далее, что амплитуда $a(x, z)$ медленно меняется вдоль продольной оси Z . Подставляя (2) в (1), получим уравнение для амплитуды $a(x, z)$ в параболическом приближении

$$\left(2ik_0 \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) a(x, z) = 0. \quad (3)$$

В безразмерных переменных $s = x/x_0$, $\xi = z/k_0 x_0^2$, где x_0 – произвольный параметр, имеющий размерность длины, уравнение (3) примет вид

$$\left(i \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) a(s, \xi) = 0. \quad (4)$$

Интересующее нас точное решение данного уравнения, как впервые было показано в работе [1], имеет вид

$$a(s, \xi) = Ai(s - \xi^2/4) \exp(is\xi/2 - i\xi^3/12), \quad (5)$$

где $Ai(x)$ – функция Эйри [9].

Как видно из (5), в пучках Эйри линии постоянной интенсивности не совпадают с линиями постоянной фазы. Такого типа решения классифицированы в [10] как неоднородные световые волны. Особенностью таких волн является несовпадение направлений потока энергии и фазовой скорости. Данный эффект был обнаружен и для ЭП, что подтверждает общность данных пучков и неоднородных плоских волн.

Для построения оптической схемы формирования пучков Эйри могут быть использованы два подхода. Первый основан на переходе к различным приближениям к ЭП, имеющим конечную энергию. Наиболее распространена версия ЭП с экспоненциальным множителем $a(s, \xi = 0) = Ai(s) \exp(\alpha s)$, где параметр $\alpha > 0$ [3, 11].

Далее будет применен второй подход, основанный на использовании строгого решения и относительно большого диаметра входного пучка с целью минимизировать краевую дифракцию. Отметим, что второй подход широко используется в оптике бесселевых пучков, в то время как первый – приближенно соответствует Бессель-гауссовым пучкам. В рамках строгого решения исходим из известного выражения для преобразования Фурье функции Эйри [9]:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{ip^3}{3} - ipx\right) dp = Ai(x). \quad (6)$$

С другой стороны, поле в задней фокальной плоскости линзы описывается известной формулой

$$A(x) = \sqrt{\frac{-i}{\lambda f}} \int a_0(x_1) \exp\left(-\frac{ik_0 x x_1}{f}\right) dx_1, \quad (7)$$

где $a_0(x_1)$ – поле в передней фокальной плоскости. Если предположить, что поле на входе имеет вид $a_0(x_1) = \exp(-ix_1^3/3x_0^3)$, то из (7) и (6) получим

$$A(x) = 2\pi x_0 \sqrt{\frac{-i}{\lambda f}} Ai\left(\frac{k_0 x_0 x}{f}\right). \quad (8)$$

Как видим, для получения ЭП необходимо осуществить преобразование Фурье так называемой кубической линзы, т. е. сформировать фазовый транспарант, у которого функция пропускания пропорциональна кубу поперечной координаты. При этом перестройка параметра x_0 дает возможность генерировать динамический ЭП со скоростью перестройки порядка 60 Гц.

Существует еще один подход к получению динамических ЭП, который позволяет достигать значительно более высоких частот модуляции. Он основан на использовании акустооптической (АО)

дифракции в режиме Рамана – Ната и теоретически описан в работе [12]. Суть метода заключается в том, что падающий световой пучок проходит через АО ячейку, в которой возбуждается стоячая акустическая волна. В этом случае в АО ячейке индуцируется изменение показателя преломления вида

$$\Delta n(x,t) = \Delta n_0 \sin(Kx) \cos(\Omega t). \quad (9)$$

Здесь K – волновое число; Ω – частота звука; Δn_0 – амплитуда модуляции. Соответственно фазовый фронт светового поля на выходе АО ячейки толщиной h описывается формулой

$$\phi(x,t) = k_0 \Delta n_0 h \sin(Kx) \cos(\Omega t). \quad (10)$$

Если центр падающего светового пучка совпадает с узлом стоячей акустической волны (рис. 1, а), а его ширина в направлении X относительно невелика, то (10) приближенно можно представить в виде

$$\phi(x,t) \approx k_0 \Delta n_0 h \left(Kx - \frac{K^3 x^3}{3!} + \frac{K^5 x^5}{5!} \right) \cos(\Omega t). \quad (11)$$

Наличие кубического члена в (11) будет приводить к генерации динамического светового ЭП. При этом линейное слагаемое в (11) будет вызывать поперечное смещение ЭП, а слагаемое, пропорциональное пятой степени, – его абберацию. Отметим также, что разложение (11) принципиально ограничивает апертуру соответствующей кубической линзы, и поэтому генерируемые ЭП должны быть отнесены к классу так называемых неполных пучков Эйри [13].

Временная модуляция фазы в (11) играет существенную роль. В отличие от амплитудной модуляции, в данном случае будет меняться структура генерируемого пучка, что видно далее из экспериментальных данных. Отметим, что для реализации акустооптического метода генерации ЭП (см. рис. 1, а) существуют определенные трудности. Как показано в [12], поперечная структура формируемого ЭП обладает в пределах полупериода УЗ-волны временной динамикой, приводящей к размытию пучка. Для наблюдения динамических ЭП, согласно расчетам, требуемая акустическая частота должна составлять величину ~ 100 кГц и выше. Следовательно, для экспериментального фиксирования ЭП, сформированного АО методом, необходимо «заморозить» его структуру во времени, т. е. обеспечить регистрацию поперечного профиля пучка с экспозицией не более $\Delta t \approx 1/100f = 0,1$ мкс. Для этих целей требуется высокочувствительная сверхбыстродействующая CCD-камера.

Возможен и второй вариант реализации АО метода генерации ЭП – использование импульсного источника лазерного излучения. Так, для достаточно короткого светового импульса градиент показателя преломления АО ячейки практически не меняется, и за время АО взаимодействия

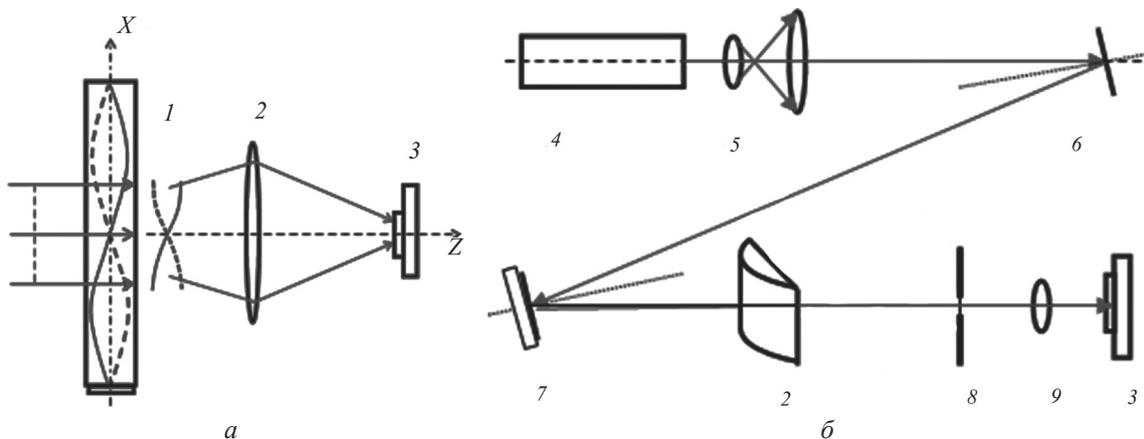


Рис. 1. Принципиальная схема, иллюстрирующая АО метод генерации ЭП (а), и схема генерации ЭП, использованная в эксперименте (б): 1 – АО ячейка; 2 – цилиндрическая линза; 3 – быстродействующая CCD-камера; 4 – He-Ne-лазер; 5 – телескопическая система; 6 – зеркало; 7 – SLM; 8 – диафрагма; 9 – объектив

световой пучок будет испытывать неискаженную фазовую модуляцию, т. е. для него произойдет эффект «замораживания» градиента показателя преломления. При этом момент появления светового импульса на входной грани АО ячейки должен совпадать с моментом возникновения желаемого градиента акустического поля. «Замороженный» градиент показателя преломления будет повторяться далее и для последующих световых импульсов при условии совпадения частоты их следования с частотой звука. Введение временной задержки, например, в акустический сигнал, позволит управлять величиной градиента показателя преломления и, как следствие, поперечной структурой и ускорением генерируемых ЭП.

Экспериментальная часть. В данной работе экспериментально реализован промежуточный вариант исходной идеи АО генерации ЭП. Он состоит в том, что синусоидальная фазовая решетка формировалась не методом акустооптики, а с использованием пространственного модулятора света (SLM). Формируя на SLM маску стоячей УЗ-волны, мы можем фиксировать во времени любое состояние модуляции показателя преломления и тем самым исключить потребность в высокочувствительной сверхбыстродействующей CCD-камере для регистрации временной динамики. На рис. 1, б представлена оптическая схема с применением SLM для экспериментальной реализации АО метода генерации пучков Эйри и наблюдения временной динамики пространственной структуры светового пучка. В данном эксперименте для моделирования дифракции светового пучка на различных фазах стоячей УЗ-волны был применен SLM модели Holoeye Pluto-VIS с разрешением 1920×1080 и размером пиксела 8×8 мкм. В качестве источника излучения использовался He-Ne-лазер с длиной волны 632 нм и мощностью 25 мВт. Эксперимент проводился при тех же значениях фазы стоячей волны (φ), что и в [12]. На рис. 2 показана развертка во времени светового поля, генерируемого в рассматриваемой схеме. Сопоставление с результатами расчета работы [12]

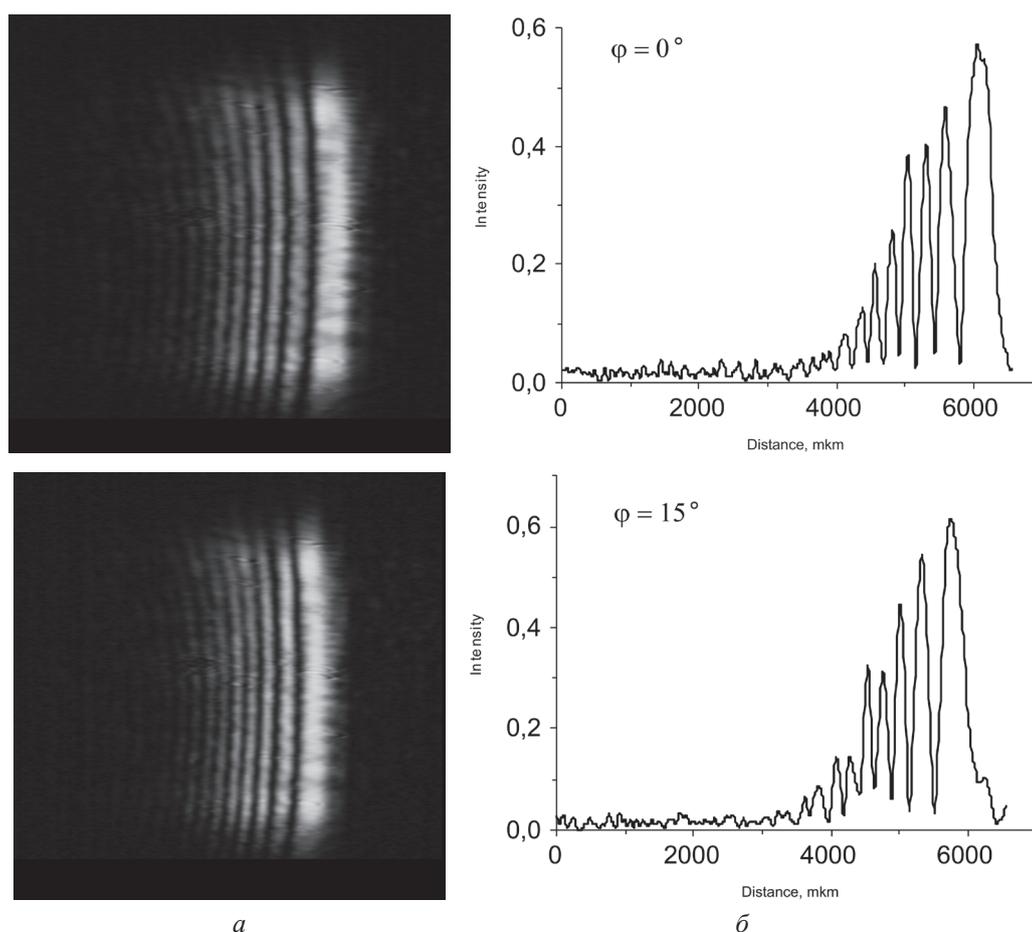
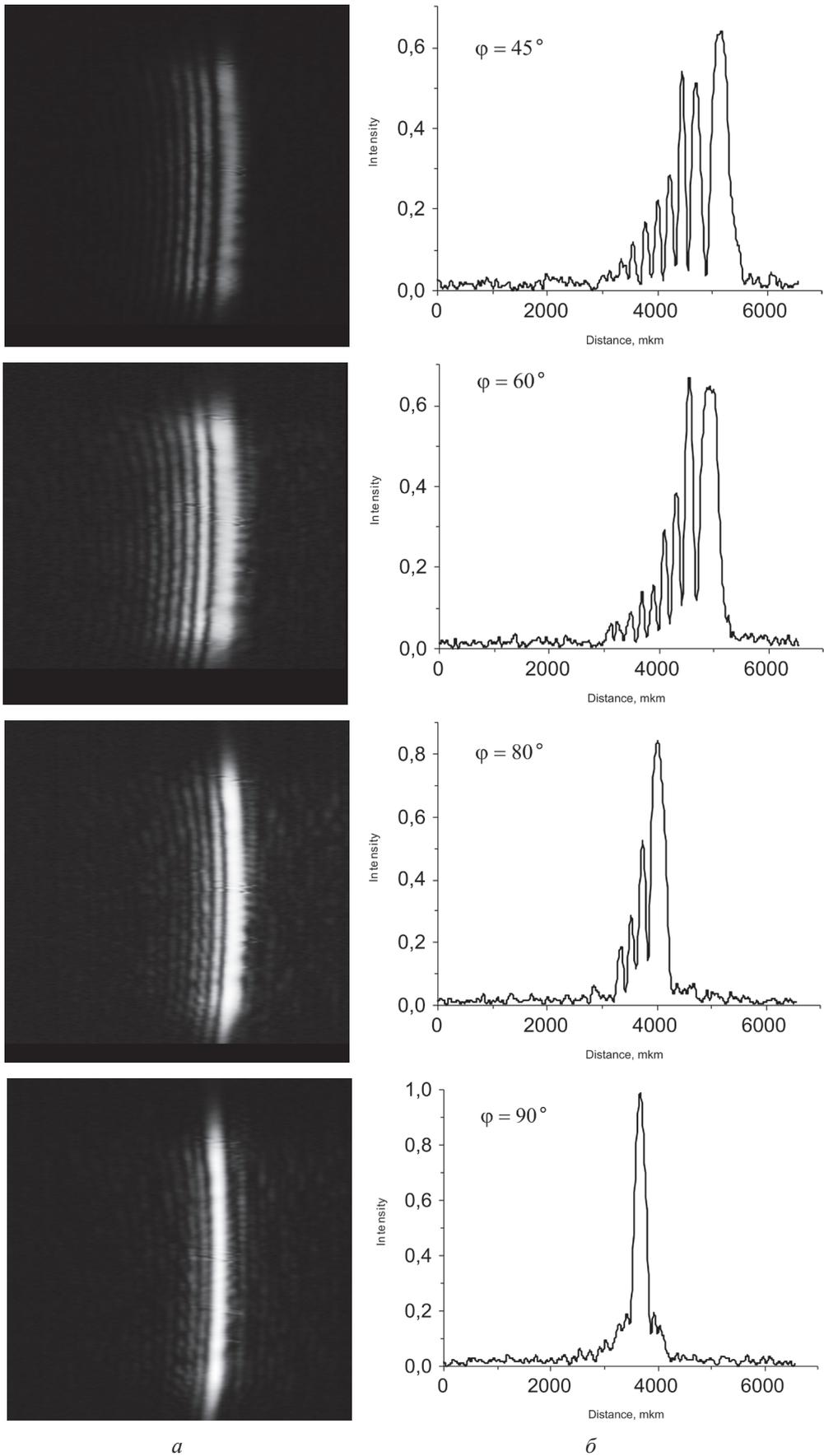


Рис. 2. Временная развертка динамического пучка Эйри, генерируемого схемой с синусоидальной фазовой дифракционной решеткой: *a* – изображение ЭП на CCD-камере; *б* – профиль пучка Эйри (1D – срез)



a *b*
 Рис. 2. Продолжение (начало см. на с. 98, окончание – на с. 100)

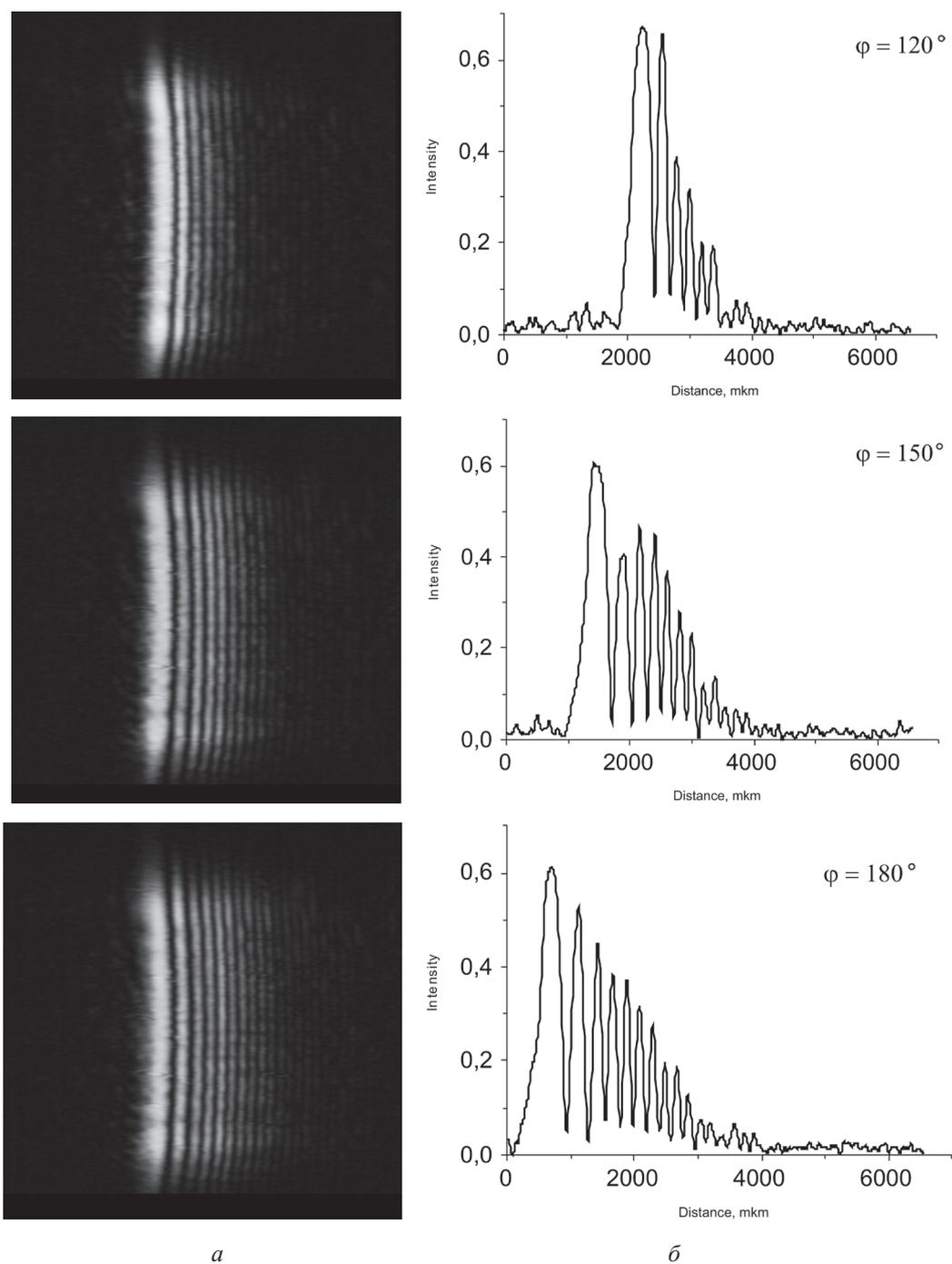


Рис. 2. Окончание (начало см. на с. 98 и 99)

указывает на хорошее соответствие экспериментальных данных с теоретическими, что является подтверждением генерации перестраиваемых во времени неполных ЭП в предложенной оптической схеме (см. рис. 1, б). В частности видно, что наблюдается симметрия ЭП при взаимодействии со стоячими волнами с фазами $90 + \alpha$ и $90 - \alpha$. При приближении фазы стоячей волны к 90° фазовая модуляция, как следует из (10), (11), исчезает, и тогда выходное поле вырождается в пучок гауссова типа.

Заключение. Таким образом, нами экспериментально подтверждена возможность генерации неполных пучков Эйри при рефракции света на синусоидальной фазовой дифракционной решетке. Из сопоставления формул (7), (8) и (11) следует, что характерный параметр x_0 пучков Эйри в рассматриваемой схеме зависит от времени и равен

$$x_0 = \pm \frac{\Lambda}{2\pi} \left(\frac{\lambda}{\pi \Delta n_0 h |\cos(\Omega t)|} \right)^{1/3}, \quad (12)$$

где Λ – длина волны звука. Знак параметра совпадает со знаком функции косинус. Как видим, увеличение частоты акустической волны, а также увеличение мощности звука приводит к уменьшению кривизны траектории потока энергии, т. е. к уменьшению ускорения ЭП. Из (12) следует, что предложенный метод позволяет оперативно перестраивать число боковых максимумов ЭП. Это происходит за счет изменения модуля параметра x_0 . Отметим, что при этом также будет изменяться и кривизна криволинейной траектории движения энергии в основном максимуме. Далее возможна перестройка взаимной ориентации основного и боковых максимумов. Это реализуется при изменении знака параметра в (12). Наконец при генерации ЭП данной схемой возможно поперечно смещать центр генерируемого пучка без изменения его формы. Это достигается за счет действия линейного слагаемого в фазе (11). Экспериментальная реализация генерации пучков Эйри с применением SLM показала (см. рис. 2), что все отмеченные особенности АО генерации динамических ЭП [12] наблюдаются экспериментально.

Список использованной литературы

1. Berry, M. V. Nonspreading wave packets / M. V. Berry, N. L. Balazs // Am. J. Phys. – 1979. – Vol. 47. – P. 264–267.
2. Observation of accelerating Airy beams / G. A. Siviloglou [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 2007. – Vol. 99. – P. 213901.
3. Besieris, I. M. A note on an accelerating finite energy Airy beam / I. M. Besieris, A. M. Shaarawi // Opt. Lett. – 2007. – Vol. 32. – P. 2447–2449.
4. Ballistic dynamics of Airy beams / G. A. Siviloglou [et al.] // Opt. Lett. – 2008. – Vol. 33. – P. 207–209.
5. Bandres, M. A. Airy-Gauss beams and their transformation by paraxial optical systems / M. A. Bandres, J. C. Guti'erez-Vega // Opt. Express. – 2007. – Vol. 15. – P. 16719–16728.
6. Sztul, H. I. The Poynting vector and angular momentum of Airy beams / H. I. Sztul, R. R. Alfano // Opt. Express. – 2008. – Vol. 16. – P. 9411–9416.
7. Self-healing properties of optical Airy beams / J. Broky [et al.] // Opt. Express. – 2008. – Vol. 16. – P. 12880–12891.
8. Baumgartl, J. Optically mediated particle clearing using Airy wavepackets. / J. Baumgartl, M. Mazilu, K. Dholakia // Nature Photonics. – 2008. – Vol. 2. – P. 675–678.
9. Abramowitz, M. Handbook of Mathematical Functions / M. Abramowitz, I. A. Stegun. – Dover, 1972.
10. Федоров, Ф. И. Оптика анизотропных сред / Ф. И. Федоров. – М.: Наука, 1958.
11. Siviloglou, G. A. Accelerating finite energy Airy beams / G. A. Siviloglou, D. N. Christodoulides // Opt. Lett. – 2007. – Vol. 32, no. 8. – P. 979–981.
12. Acoustooptic refraction-influenced generation of tunable incomplete Airy beams. / N. A. Khilo [et al.] // J. Opt. – 2014. – Vol. 16. – P. 085702.
13. Ring, J. D. Incomplete Airy beams: finite energy from a sharp spectral cutoff / J. D. Ring, Ch. J. Howls, M. R. Dennis // Opt. Lett. – 2013. – Vol. 38. – P. 1639–1641.

Поступила в редакцию 11.02.2016

УДК 535.530.182,621.373.826,535.544

В. Ю. МАРКЕВИЧ, Р. В. ЧУЛКОВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТАЦИОНАРНОГО КОЭФФИЦИЕНТА ВКР-УСИЛЕНИЯ КАЛИЙ-ГАДОЛИНИЕВОГО ВОЛЬФРАМАТА НА ДЛИНЕ ВОЛНЫ 532 нм*Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь,
e-mail: vumarkevich@gmail.com*

Предложен метод определения стационарных коэффициентов усиления вынужденного комбинационного рассеяния (ВКР) в кристаллах, в основе которого лежит сопоставление данных численного моделирования и экспериментальных результатов по ВКР-генерации. Предложенный подход был протестирован для нитрата бария (BN) в поле спектрально ограниченных наносекундных лазерных импульсов. Его использование для калий-гадолиниевого вольфрамата (KGW) позволило установить значения коэффициентов ВКР-усиления 14 ± 3 и 11 ± 3 см/ГВт на длине волны 532 нм для ориентаций $E \parallel N_m$ и $E \parallel N_g$ соответственно.

Ключевые слова: вынужденное комбинационное рассеяние, стационарный коэффициент усиления вынужденного комбинационного рассеяния (ВКР), нитрат бария (BN), калий-гадолиниевый вольфрамат (KGW).

V. U. MARKEVICH, R. V. CHULKOV

DETERMINATION OF THE STEADY-STATE RAMAN GAIN COEFFICIENTS OF POTASSIUM-GADOLINIUM TUNGSTATE AT A WAVELENGTH OF 532 nm*B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus,
e-mail: vumarkevich@gmail.com*

A method for determination of the steady-state Raman gain coefficients in crystals has been proposed. The method is based on comparing the numerical simulation data and the experimental Raman generation results. The proposed approach has been tested for barium nitrate in the field of spectrally limited nanosecond laser pulses. Its application for potassium-gadolinium tungstate has revealed the values of the Raman gain coefficients to be 14 ± 3 and 11 ± 3 cm/GW at a wavelength of 532 nm for the $E \parallel N_m$ and $E \parallel N_g$ sample orientations, respectively.

Keywords: stimulated Raman scattering, steady-state Raman gain coefficient, barium nitrate (BN), potassium-gadolinium tungstate (KGW).

Введение. Вынужденное комбинационное рассеяние (ВКР) традиционно используется для дискретного преобразования длины волны лазерного излучения в спектральные диапазоны, где прямая лазерная генерация затруднена либо невозможна. Использование твердотельных комбинационно-активных сред позволяет создать относительно дешевые, эффективные и компактные источники лазерного излучения [1–6]. Прогресс в разработке таких источников непосредственно связан с оптическими свойствами используемых комбинационно-активных кристаллов. Среди различных нелинейных оптических характеристик, определяющих порог ВКР и эффективность ВКР-преобразования, ключевую роль играет стационарный коэффициент усиления ВКР g_0 . В настоящее время известно несколько подходов, используемых для определения его значений в кристаллах.

Первый подход включает в себя определение энергии накачки E_p^{th} , соответствующей порогу ВКР при однопроходной генерации. Значение E_p^{th} далее используется для расчета g_0 [1, 7]. Данный метод довольно прост в реализации, но дает относительно большую ошибку вследствие произвольности определения значения E_p^{th} , а также значительных флуктуаций энергии стоковых импульсов E_S . Относительная дисперсия величины E_S может превышать 100 % вблизи порога ВКР [2]. Во втором подходе g_0 определяется на основе зависимости E_S от энергии импульсов накачки E_p в условиях малого усиления [8, 9]. Указанный метод имеет хорошую точность, однако его реализация требует серьезных экспериментальных усилий, что препятствует его широкому использованию.

В настоящей работе предлагается альтернативный подход к определению значения g_0 , который заключается в сравнении экспериментальных данных по ВКР-генерации с результатами численного моделирования. Предлагаемый подход тестируется на образце кристалла нитрата бария (BN). Далее мы используем этот метод для определения g_0 в кристалле калий-гадолиниевого вольфрамата (KGW) на длине волны возбуждения 532 нм, для которой отсутствуют надежные данные по его значению.

Экспериментальная установка. Оптическая схема включала в себя ВКР-преобразователь и Nd:YAG-лазер с пассивной модуляцией добротности. На длине волны 532 нм лазер генерировал спектрально-ограниченные импульсы длительностью $10,7 \pm 0,4$ нс на полувысоте с частотой 10 Гц. Расходимость пучка линейно-поляризованного излучения была близка к дифракционно-ограниченной ($M^2 < 1,2$). Пучок накачки фокусировался линзой с фокусным расстоянием 85 см в центр исследуемых кристаллов. Поперечные размеры пучка накачки в его перетяжке составляли 194 ± 6 и 182 ± 6 мкм (ширина пучка на уровне $1/e^2$) в горизонтальном и вертикальном направлениях соответственно, а длина Рэлея в воздухе достигала ~ 5 см. Это значение сравнимо с длиной кристаллов, используемых в эксперименте, что обеспечивало относительно низкое число Френеля области ВКР-взаимодействия и доминирующее возбуждение основной моды стоксового излучения. Система из полуволновой пластины на 532 нм и поляризатора позволяла плавно менять энергию импульсов накачки.

ВКР возбуждалось в схеме одно- и двухпроходного преобразователя, а также в схеме ВКР-лазера. Для формирования двухпроходной схемы преобразователя и резонатора ВКР-лазера использовались дополнительные зеркала. Пучок 1-й стоксовой компоненты спектрально выделялся с помощью призмы Пеллин – Брока. Энергия импульсов накачки и 1-й стоксовой компоненты регистрировалась измерителем энергии Ophir LaserStar с пироэлектрическими детекторами PE9 и PE10. Осциллограммы импульсов регистрировались цифровым осциллографом Tektronix TDS 5104 и скоростными pin-фотодиодами. Полоса пропускания аналогового тракта составляла 1 ГГц. Измерения поперечного профиля пучка накачки выполнялись с применением монохромной ПЗС камеры Pixelink PL-B741U. С помощью спектрофотометра CARY измерялись спектральные характеристики исследуемых кристаллов.

Численная модель. В основе используемой модели лежит система дифференциальных уравнений для комплексных амплитуд оптических полей и нелинейной поляризации среды, описывающая в параксиальном приближении взаимодействие угловых компонент амплитуд полей при нестационарном ВКР в условиях оптической обратной связи на торцах активного элемента и зеркалах ВКР-преобразователя. Модель также учитывает развитие генерации с уровня спонтанных шумов. Детальное описание модели дано в работе [10].

Тестирование метода. Применимость разработанного подхода оценивалась на примере кристалла BN. Этот кристалл является изотропным. Спектр спонтанного комбинационного рассеяния (КР) BN имеет несколько узких линий, наиболее интенсивная из которых соответствует комбинационному сдвигу 1047 см^{-1} [11]. Образец BN имел длину 69 мм, его торцы были просветлены на длинах волн накачки и 1-й стоксовой компоненты. Коэффициент поглощения образца не превышал $0,2 \text{ м}^{-1}$ в спектральном диапазоне 532–563 нм. ВКР возбуждалось по однопроходной схеме без использования дополнительных зеркал. Основные значения параметров эксперимента, которые использовались в качестве входных данных численной модели, приведены в таблице. На рис. 1, а представлены результаты расчетов и измерений, полученные для этого случая. Экспериментально порог ВКР-генерации наблюдался при $E_p^{th} \approx 90$ мкДж. При двукратном превышении порога энергия импульса 1-й стоксовой компоненты в попутном направлении достигала ~ 55 мкДж. Осциллограммы импульсов истощенной накачки и стоксового излучения, зарегистрированных при $E_p = 130$ мкДж, демонстрируют их ярко выраженную асимметрию (рис. 2, а), что объясняется оптической обратной связью на торцах кристалла. Этот вывод подтверждается сравнением численных результатов для условий возбуждения, реализованных в эксперименте (рис. 2, б) и при отсутствии обратной связи (рис. 2, в). Численные данные хорошо воспроизводят экспериментальные результаты при $g_0 = 43 \pm 5 \text{ см/ГВт}$. Это значение в пределах погрешности измерения находится в соответствии с известным из литературы $g_0 = 48 \pm 7 \text{ см/ГВт}$ [8].

Параметры численного моделирования

Параметр	Обозначение	KGW		
		BN	$E \parallel N_m$	$E \parallel N_g$
Геометрия возбуждения	—	—		
Расстояние между входным зеркалом и кристаллом, мм	l_r	—	22	22
Длина волны накачки, нм	λ_p	532	532	532
Длина волны 1-й стоксовой компоненты, нм	λ_{1S}	563	559	555
Коэффициент отражения входного зеркала на длине волны накачки	R_1^P	—	0,22	0,22
Коэффициент отражения входного зеркала на длине волны 1-й стоксовой компоненты	R_1^S	—	0,99	0,985
Коэффициент отражения от торца кристалла	$R_{cr}^{P,S}$	0,028	0,09	0,09
Время дефазировки доминирующего перехода КР, пс	T_2	25 [11]	2,0 [2, 12]	1,7 [2, 12]
Коэффициент поглощения кристалла на длине волны накачки, m^{-1}	γ_p	0,2	3,5	3,5
Коэффициент поглощения кристалла на длине волны 1-й стоксовой компоненты, m^{-1}	γ_s	0,2	3,6	3,6
Показатель преломления кристалла	$n_{p,s}$	1,57 [11]	2,06 [2]	2,09 [2]

Основной вклад в погрешность наших измерений вносили астигматизм пучка накачки, систематическая составляющая погрешности измерителя энергии импульсов, неточность позиционирования образца относительно центра перетяжки накачки, а также погрешность определения коэффициента отражения торцов кристалла. Так, нами было численно установлено, что определяемое значение g_0 возрастает почти в два раза, если R_{cr}^P взять меньше на 2,8 % от экспериментально измеренной величины.

Применение метода. Измерения проводились для образца KGW длиной 46 мм, вырезанного вдоль кристаллографического направления [010] (*b*-срез). KGW является двусосным анизотропным кристаллом. Наиболее интенсивные линии спектра спонтанного КР в этом кристалле соответствуют комбинационным сдвигам 84, 767 и 901 cm^{-1} [2]. ВКР наблюдалось в двух ортогональных ориентациях образца. Направление поляризации пучка накачки и стоксовых компонент в первой из них совпадало с главной осью N_m эллипсоида Френеля ($E \parallel N_m$). При этом возбуждался фононный переход с частотой 901 cm^{-1} , а длина волны 1-й стоксовой компоненты составляла $\lambda_{1S} = 559$ нм. В другой ориентации направление поляризации совпадало с осью N_g ($E \parallel N_g$). В этом случае ВКР развивалось преимущественно на переходе с 767 cm^{-1} , при этом $\lambda_{1S} = 555$ нм. Суммарные потери на деполяризацию в этих ориентациях не превышали 0,5 %. Торцы исследуемого образца имели диэлектрическое покрытие, коэффициент отражения которого составлял $R_{cr}^{P,S} = 9$ % в диапазоне длин волн 532–560 нм. Вследствие наличия примесных ионов, кристалл имел относительно высокое поглощение ~16 % в этой спектральной области.

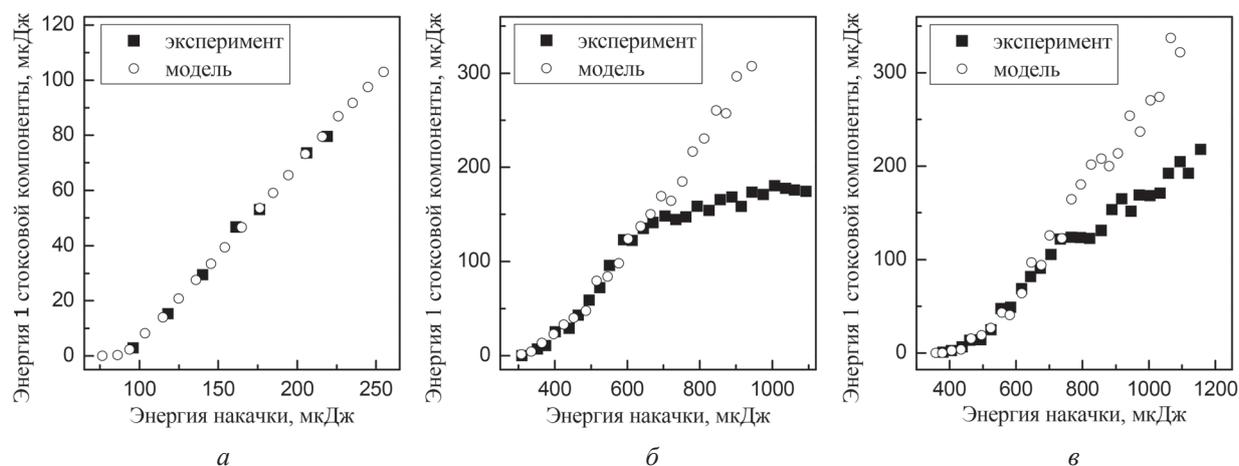


Рис. 1. Усредненные энергии импульсов 1-й стоксовой компоненты в зависимости от E_p при ВКР в BN (а), KGW для $E \parallel N_m$ (б) и $E \parallel N_g$ (в) ориентаций возбуждения

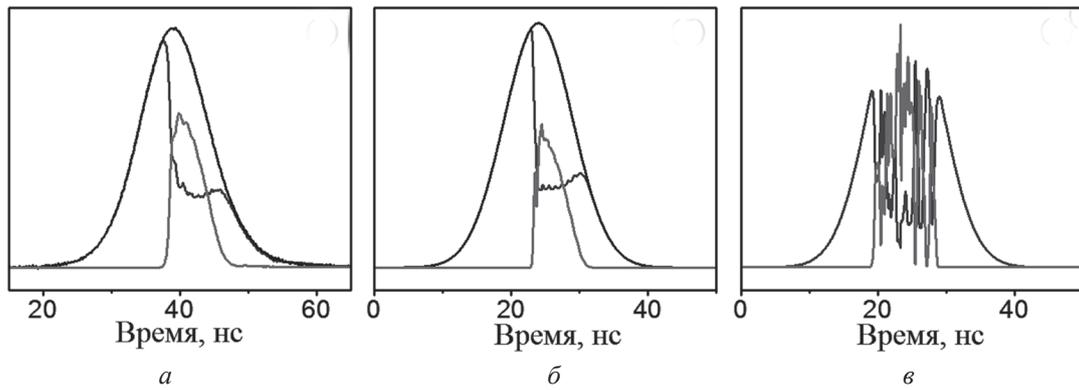


Рис. 2. Осциллограммы импульсов входной накачки (в черном), истощенной накачки (в темно-сером) и 1-й стоксовой компоненты (в светло-сером), измеренные (а) и смоделированные (б) для экспериментальных условий ВКР в ВН при $E_p = 130$ мкДж, а также смоделированные при отсутствии обратной связи и $E_p = 710$ мкДж (в)

Первоначально была рассмотрена схема ВКР-лазера, использование которой позволяло снизить порог ВКР и минимизировать риск повреждения активного элемента вследствие оптического пробоя. Входное зеркало резонатора имело высокий коэффициент отражения на длине волны 1-й стоксовой компоненты и пропускало 78 % энергии накачки. Выходное зеркало отражало 98 и 36 % энергии накачки и 1-й стоксовой компоненты соответственно. В данной схеме порог ВКР составил $E_p^{th} \approx 300$ мкДж. При этом энергия импульсов 1-й стоксовой компоненты сильно флуктуировала от выстрела к выстрелу. Ее относительная дисперсия достигала ~ 50 % при превышении порога ВКР в два раза. Отдельное исследование выявило четырехкратный рост разброса энергий импульсов накачки на выходе резонатора ВКР-лазера в отсутствие ВКР. Этот избыточный разброс был объяснен спектральным рассогласованием частоты накачки и частот собственных мод резонатора ВКР-лазера. Такое рассогласование должно проявляться, если ширина спектра накачки меньше области свободной дисперсии резонатора [12], что и соответствовало нашим экспериментальным условиям. На рис. 3 приведена численно смоделированная статистика энергий лазерных импульсов на выходе резонатора ВКР-лазера при трех различных коэффициентах отражения выходного зеркала R_2^p . Эти данные показывают, что первоначальный незначительный разброс энергий импульсов возрастает почти в 20 раз при проходе резонатора нашего ВКР-лазера. Такой избыточный разброс должен приводить к значительным флуктуациям внутрирезонаторной интенсивности накачки отдельных наблюдаемых событий и, как следствие, к большому разбросу импульсов ВКР-генерации.

Чтобы свести к минимуму этот эффект, дальнейшие измерения проводились в схеме ВКР-преобразователя без выходного зеркала. В указанных условиях относительная дисперсия энергии импульсов 1-й стоксовой компоненты составила 37 % при двукратном превышении порога ВКР. Результаты расчета хорошо согласуются с экспериментальными данными вплоть до $E_p \approx 550$ мкДж при выборе значения $g_0 = 14 \pm 3$ см/ГВт (см. рис. 1, б). При более высоких значениях E_p наблюдается расхождение расчетных и экспериментальных данных, что объясняется генерацией 2-й стоксовой компоненты, которая не учитывается нашей моделью. В случае ориентации образца КGW $E \parallel N_g$, пороговая энергия ВКР-генерации составила $E_p^{th} \approx 350$ мкДж. Энергия импульса 1-й стоксовой компоненты достигала ~ 125 мкДж при двойном превышении порога ВКР (см. рис. 1, в). При дальнейшем увеличении E_p рост энергии 1-й стоксовой компоненты замедлялся главным образом вследствие развития стоксовой генерации на конкурирующих комбинационных переходах. В условиях отсутствия конкурирующих стоксовых процессов результаты экспериментальных измерений воспроизводятся расчетными данными, если $g_0 = 11 \pm 3$ см/ГВт.

Вывод. Таким образом, нами предложен метод определения стационарных коэффициентов ВКР-усиления в кристаллах, в котором используются результаты расчетов, полученных в рамках модели, учитывающей оптическую обратную связь, спонтанную инициацию ВКР, дифракционные эффекты, а также сопоставление расчетных данных с экспериментальными

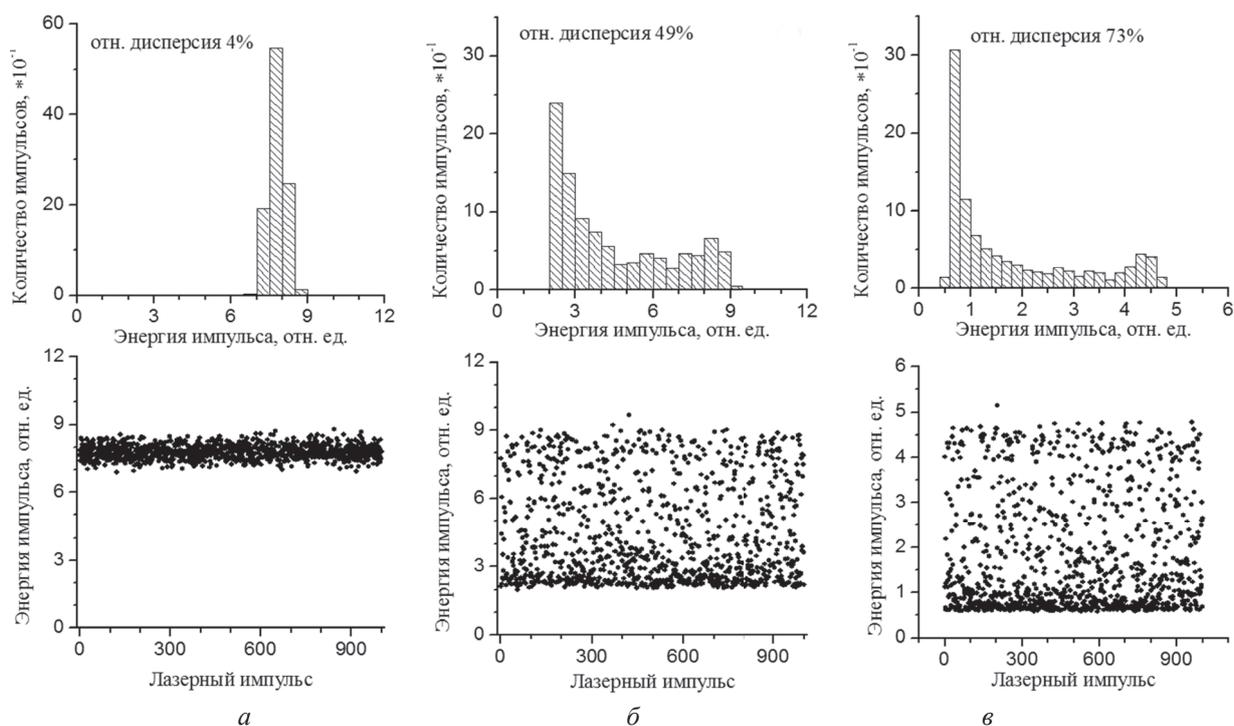


Рис. 3. Численно смоделированная статистика энергий лазерных импульсов на выходе резонатора ВКР-лазера при трех различных коэффициентах отражения выходного зеркала: *a* – 0 %; *б* – 9 %; *в* – 98 %

результатами по ВКР-генерации. Предложенный подход был протестирован для нитрата бария в поле спектрально ограниченных наносекундных лазерных импульсов. Определенное с помощью указанного метода значение $g_0 = 43 \pm 5$ см/ГВт для кристалла ВН в пределах погрешности измерения находится в соответствии с ранее известным значением [8]. Применение данного метода для калий-гадолиниевого вольфрамата позволило установить значения коэффициентов ВКР-усиления на длине волны 532 нм равными 14 ± 3 и 11 ± 3 см/ГВт для $E \parallel N_g$ ориентации образца соответственно.

Список использованной литературы

1. Generation of radiation in a resonator under conditions of stimulated Raman scattering / N. Karpukhin [et al.] // Sov. J. Quantum Electronics. – 1986. – Vol. 16. – P. 1027–1031.
2. Statistical characteristics of the energies of pulses of forward and backward stimulated Raman scattering under linear, intermediate, and nonlinear scattering conditions / P. A. Apanasevich [et al.] // Sov. J. Quantum Electronics. – 1992. – Vol. 22. – P. 822–827.
3. Ring solid-state Raman laser at 1538 nm / V. I. Dashkevich [et al.] // Phys. Lett. – 2011. – Vol. 8. – P. 661–667.
4. The generation of high pulse and average power radiation in eye-safe spectral region by the third Stokes generation in barium nitrate Raman laser / V. A. Lisisnetskii [et al.] // Opt. Commun. – 2008. – Vol. 281. – P. 2227–2232.
5. 20-Hz operation of an eye-safe cascade Raman laser with a $\text{Ba}(\text{NO}_3)_2$ crystal / N. Takei [et al.] // Appl. Phys. B. – 2002. – Vol. 74. – P. 521–527.
6. Thermal aberrations and high power frequency conversion in a barium nitrate Raman laser / R. Chulkov [et al.] // Appl. Phys. B. – 2012. – Vol. 106. – P. 867–875.
7. Mochalov, I. V. Laser and nonlinear properties of the potassium gadolinium tungstate laser crystal $\text{KGd}(\text{WO}_4)_2:\text{Nd}^{3+}$ (KGW:Nd) / I. V. Mochalov // Opt. Eng. – 1997. – Vol. 36. – P. 1660–1669.
8. Raman gain coefficient of barium nitrate measured for the spectral region of Ti:sapphire laser / V. A. Lisisnetskii [et al.] // J. Nonlinear Optical Physics & Materials. – 2005. – Vol. 14. – P. 1–8.
9. Measurement of Raman gain coefficients of hydrogen, deuterium, and methane / J. J. Ottush [et al.] // IEEE J. Quantum Electron. – 1988. – Vol. 24. – P. 2076–2080.
10. Self-mode locking at multiple Stokes generation in the Raman laser / V. A. Lisisnetskii [et al.] // Opt. Commun. – 2010. – Vol. 283. – P. 1454–1458.
11. Physical, chemical and optical properties of barium nitrate Raman crystal / P. G. Zverev [et al.] // Opt. Mater. – 1999. – Vol. 11. – P. 315–334.
12. Born, M. Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light / M. Born, E. Wolf. – 7th ed. – Cambridge University Press, 1999.

Поступила в редакцию 11.02.2016

УДК 535:628.373.8,535:548

А. А. РЫЖЕВИЧ¹, С. В. СОЛОНЕВИЧ¹, Н. А. ХИЛО¹, И. В. БАЛЫКИН^{1,2}

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КОНИЧЕСКИХ ЛАЗЕРНЫХ ПУЧКОВ В ДВУОСНЫХ КРИСТАЛЛАХ

¹*Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь,
e-mail: tol@dragon.bas-net.by*

²*Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь*

Исследованы методы преобразования когерентных монохроматических световых пучков в двуосных кристаллах в условиях конической рефракции. Разработана методика определения оптимальных параметров оптических элементов при создании преобразователя для получения радиально либо азимутально поляризованного лазерного излучения, а также конических световых пучков с винтовой дислокацией волнового фронта первого порядка в зависимости от используемых материала кристалла и длины волны лазерного излучения.

Ключевые слова: двуосный кристалл, винтовая дислокация волнового фронта, бесселев световой пучок, радиальная поляризация, азимутальная поляризация.

A. A. RYZHEVICH¹, S. V. SOLONEVICH¹, N. A. KHILO¹, I. V. BALYKIN^{1,2}

TRANSFORMATION OF CONICAL LASER BEAMS IN BIAXIAL CRYSTALS

¹*B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus,
e-mail: tol@dragon.bas-net.by*

²*Belarusian State University, Minsk, Belarus*

We investigated the methods of transformation of coherent monochromatic light beams in biaxial crystals under the conditions of conical refraction. Also, we developed the method for determining optimal parameters of optical elements to create a converter that forms radially or azimuthally polarized laser radiation, as well as conical light beams with dislocation of a first-order wave front depending on the material of the used crystal and laser radiation wavelength.

Keywords: biaxial crystal, screw wave front dislocation, Bessel light beam, radial polarization, azimuthal polarization.

Введение. Двуосные кристаллы, ориентированные вдоль бинормали, проявляют ряд интересных свойств при распространении сквозь них световых пучков различных поляризаций. Так, в [1–2] теоретически и экспериментально исследован новый оптический эффект трансформации порядка бесселева светового пучка (БСП) из нулевого в первый при распространении циркулярно поляризованного когерентного света вдоль оптических осей кристалла в условиях проявления эффекта внутренней конической рефракции [3–4]. Как известно, распределение интенсивности в БСП высших порядков (БСП_{*n*}, где *n* – порядок бесселева пучка) описывается квадратом функции Бесселя *n*-го порядка. При этом БСП_{*n*} содержит винтовую дислокацию волнового фронта (ВДВФ) порядка *n*. В [5] с использованием таким же образом ориентированных двуосных кристаллов предложен метод преобразования линейно поляризованных гауссовых пучков в многокольцевые световые пучки (МКСП), содержащие или не содержащие ВДВФ. Данный метод в работе [6] применен для формирования квазигиперболических световых пучков, а в [7] – для создания преобразователя лазерного излучения, производящего аподизацию светового пучка без увеличения его расходимости.

В настоящее время наблюдается возрастание интереса к световым пучкам, обладающим азимутальной (векторы электрической составляющей перпендикулярны направлению распространения электромагнитной волны и при этом лежат на касательных к окружностям, центры которых находятся на оптической оси пучка) и особенно радиальной поляризацией (векторы электрической

составляющей поля лежат на лучах, радиально расходящихся от оптической оси пучка) [8–10]. Особое внимание к данным пучкам объясняется, прежде всего, инвариантностью особенностей их отражения от цилиндрических и конических поверхностей даже при больших углах падения, благодаря чему можно производить контроль качества изделий, имеющих аксиальную симметрию, с большей точностью по сравнению с линейно и циркулярно поляризованными пучками, а также формировать аксиально симметричные перетяжки линзовыми системами с высокой числовой апертурой. Радиально поляризованные пучки, сфокусированные объективами с высокой числовой апертурой, имеют в фокусе сильную нераспространяющуюся продольную составляющую электрического поля и могут обеспечить существенно меньшие размеры светового пятна в фокусной плоскости по сравнению с линейно и циркулярно поляризованными пучками, благодаря чему может быть достигнута высокая точность лазерной обработки материалов, большая плотность мощности в месте взаимодействия излучения с веществом. Кроме того, они могут быть использованы для захвата и манипуляции частицами меньших размеров, чем это возможно с пучками, имеющими линейную или циркулярную поляризацию. В [10] был предложен и экспериментально реализован метод формирования лазерного пучка с радиальной поляризацией на основе двуосного кристалла.

Актуальной является задача разработки и совершенствования устройств для формирования лазерных пучков с ВДВФ, а также высокоинтенсивных радиально/азимутально поляризованных лазерных пучков. В настоящей работе экспериментально исследованы закономерности преобразования лазерных пучков с различными поляризациями в двуосных кристаллах, в результате которого формируются конические лазерные пучки с ВДВФ первого порядка либо радиально/азимутально поляризованные конические лазерные пучки с целью оптимизации параметров оптической схемы в зависимости от материала двуосного кристалла и длины волны используемого лазерного излучения.

1. Специфика метода формирования азимутально/радиально поляризованного излучения с применением двуосного кристалла. Предложенный в [10] метод получения азимутально либо радиально поляризованных световых пучков заключается в следующем. Исходный линейно поляризованный монохроматический конический световой пучок направляют на двуосный кристалл, ось x или y которого ориентирована параллельно входной грани кристалла и плоскости колебаний напряженности электрического поля входящего светового пучка таким образом, что ось конуса волновых векторов светового пучка перпендикулярна входной грани кристалла. В этом случае в кристалле возбуждаются две волны с поляризациями $\vec{c}_+ = (1 + \cos(\varphi))\vec{e}_1 + \sin(\varphi)\vec{e}_2$ и $\vec{c}_- = (1 - \cos(\varphi))\vec{e}_1 - \sin(\varphi)\vec{e}_2$ и различающимися фазовыми скоростями (φ – азимутальная координата в цилиндрической системе координат). Согласно [10], результирующее поле в кристалле представляет собой интерференцию указанных конических пучков и зависит на выходе от толщины кристалла. Расчет дифракционного интеграла дает для амплитуды выходного поля выражение

$$\vec{A}(\rho, L) = M_0(q_{in}\rho)\cos(\alpha q_{in}L)\vec{e}_1 - M_1(q_{in}\rho)\sin(\alpha q_{in}L)\vec{e}_\rho. \quad (1)$$

Здесь ρ – радиальная цилиндрическая координата, L – толщина кристалла, α – параметр анизотропии кристалла, $q_{in} = k_0 \sin(\gamma)$, γ – угол конусности падающего БСП, \vec{e}_1 – вектор поляризации падающего пучка, \vec{e}_ρ – единичный вектор радиальной поляризации, $k_0 = 2\pi/\lambda$, λ – длина волны излучения, $M_0(q_{in}\rho)$ и $M_1(q_{in}\rho)$ – аксиально симметричные функции, определяемые функцией распределения амплитуды входного поля.

Из (1) следует, что выходное поле будет полностью радиально поляризовано при соблюдении условия

$$\alpha q_{in}L = (2n + 1)\pi/2. \quad (2)$$

Аналогично для случая поляризации падающего пучка вдоль оси y получим для выходного поля

$$\vec{A}(\rho, L) = M_0(q_{in}\rho)\cos(\alpha q_{in}L)\vec{e}_2 + M_1(q_{in}\rho)\sin(\alpha q_{in}L)\vec{e}_\varphi, \quad (3)$$

где \vec{e}_φ – единичный вектор азимутальной поляризации.

Как видно из (3), в данном случае имеет место преобразование линейно поляризованного конического светового пучка в пучок азимутальной поляризации. Условие полного преобразования состояния поляризации в азимутальную совпадает с условием (2). При использовании в качестве входного линейно поляризованного БСП нулевого порядка с соответствующим условию (2) углом конусности радиально и азимутально поляризованные компоненты представляют собой БСП первого порядка. Таким образом, в кристалле происходит преобразование как состояния поляризации падающего пучка, так и порядка бесселевой функции:

$$\vec{\bar{A}}(\rho, L) = a_0 J_0(q_{in}\rho) \cos(\alpha q_{in}L) \vec{e}_2 + a_0 J_1(q_{in}\rho) \sin(\alpha q_{in}L) \vec{e}_\varphi, \quad (4)$$

$$\vec{\bar{A}}(\rho, L) = a_0 J_0(q_{in}\rho) \cos(\alpha q_{in}L) \vec{e}_1 - a_0 J_1(q_{in}\rho) \sin(\alpha q_{in}L) \vec{e}_\rho, \quad (5)$$

где J_0 и J_1 – функции Бесселя нулевого и первого порядков соответственно, a_0 – постоянный амплитудный множитель.

Из (2) следует, что для полного преобразования оптимальный угол конусности конического светового пучка, падающего на кристалл, должен составлять

$$\gamma_{\text{опт}} = \arcsin((2n + 1)\lambda/(4L\alpha)), \quad (6)$$

где n – любое целое число, λ – длина волны излучения, α – параметр анизотропии используемого двуосного кристалла, L – толщина (длина) этого кристалла. Путем выбора одной из двух ориентаций плоскости колебаний напряженности электрического поля входного пучка относительно осей x и y кристалла осуществляется выбор необходимой поляризации выходного пучка. Если плоскость колебаний напряженности электрического поля входного пучка параллельна оси x кристалла, на выходе формируется радиально поляризованный конический световой пучок, если плоскость колебаний напряженности электрического поля входящего светового пучка параллельна оси y кристалла, на выходе получают азимутально поляризованный конический световой пучок.

Условие (6) является также условием полного преобразования циркулярно поляризованного конического светового пучка в линейно поляризованный конический световой пучок с ВДВФ в оптической схеме на основе ориентированного таким же образом кристалла, что следует из [1–2]. Наличие или отсутствие ВДВФ в выходном пучке задается взаимной ориентацией оптических элементов, формирующих схему преобразователя, который используется в [1–2].

2. Экспериментальное изучение закономерностей преобразования излучения в двуосных кристаллах. Для исследования закономерностей преобразования конических световых пучков в двуосном кристалле, ориентированном вдоль бинормали, была собрана оптическая схема, показанная на рис. 1.

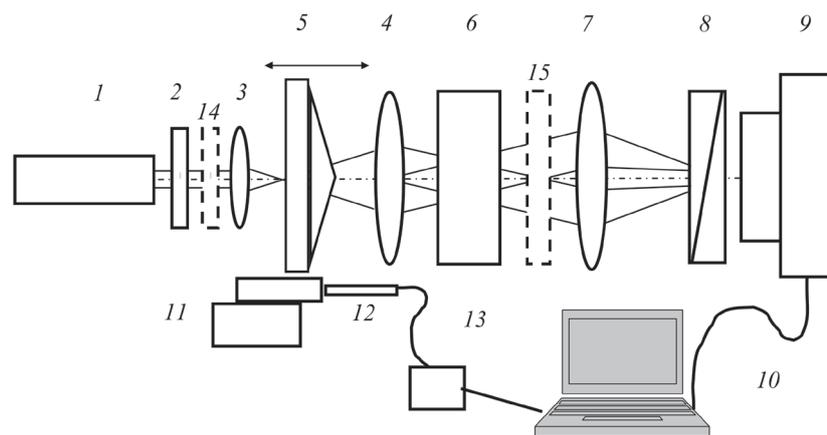
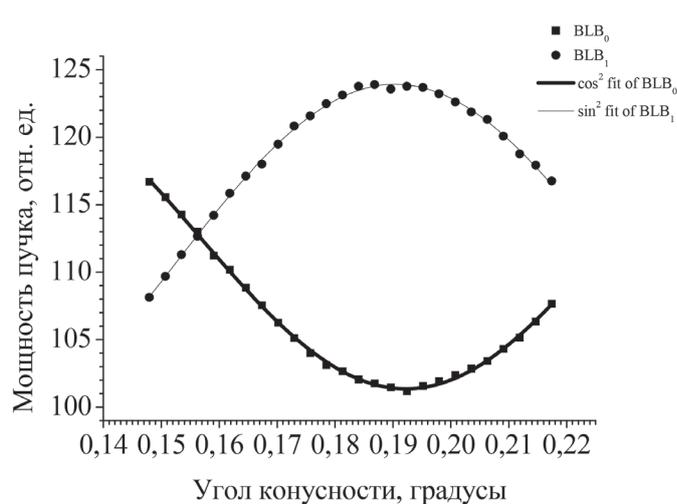


Рис. 1. Установка для преобразования лазерного излучения на основе двуосного кристалла: 1 – лазер; 2 – пластинка $\lambda/2$; 3, 4 – линзы, составляющие телескоп; 5 – аксикон, закрепленный на подвижке 11; 6 – двуосный кристалл; 7 – положительная линза, формирующая кольцевое поле; 8 – поляризатор; 9 – CCD-камера, сопряженная с компьютером 10; 12 – моторизованный актуатор, регулирующий положение подвижки 11; 13 – драйвер актуатора, сопряженный с компьютером 10; 14, 15 – пластинки $\lambda/4$ (опционально)

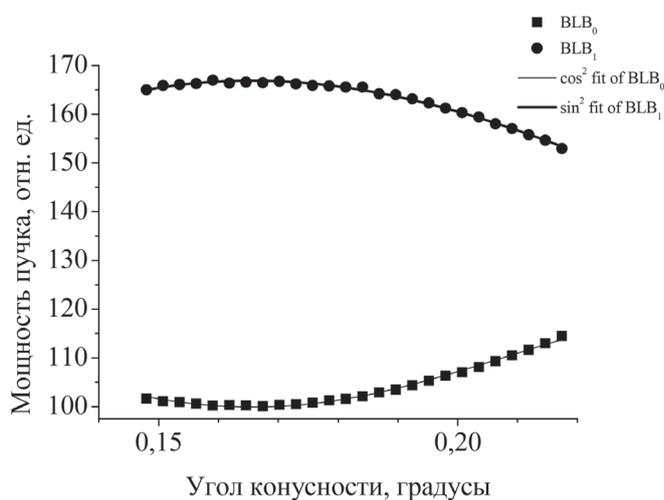
В качестве источника когерентного излучения использовался гелий-неоновый лазер ГН-25-1, генерирующий на длине волны 633 нм. Плавное изменение угла конусности конического пучка достигалось перемещением аксикона 5 внутри телескопа, состоящего из сферических линз 3, 4, с помощью электромеханического узла, состоящего из механического транслятора 11, моторизованного актуатора 12 модели Z825B (производства «Thorlabs», США) и контроллера двигателя 13, сопряженного с компьютером 10. Наличие данного электромеханического узла позволяло механизировать и упростить процесс подстройки угла конусности пучка, исключив грубые касания, которые искажают оптическую схему. При наличии четвертьволновых пластинок 14 и 15 из линейно поляризованного пучка лазера 1 после поляризатора δ формировался сходящийся конический световой пучок, содержащий или не содержащий ВДВФ первого порядка, т. е. БСП₁ либо БСП₀. Работу устройства мы тестировали с двусосными кристаллами КТР и KGW.



Equation	y = A + B*cos(x*C+D)		
Adj. R-Square	0,99909		
		Value	Standard Error
BLB0	A	112,65553	0,53438
BLB0	B	11,29212	2,028
BLB0	C	44,01946	1,32943
BLB0	D	-200,09903	0,30495

Equation	y = A - B*cos(x*C+D)		
Adj. R-Square	0,99843		
		Value	Standard Error
BLB1	A	110,47742	1,14624
BLB1	B	13,44265	3,9663
BLB1	C	41,03904	2,11517
BLB1	D	-199,45111	0,48065

a



Equation	y = A + B*cos(x*C+D)		
Adj. R-Square	0,99525		
		Value	Standard Error
Энергия пучка, от тн. ед. (90 гр.)	A	147,49365	6,60439
Энергия пучка, от тн. ед. (90 гр.)	B	-19,37867	14,45509
Энергия пучка, от тн. ед. (90 гр.)	C	24,51341	4,84187
Энергия пучка, от тн. ед. (90 гр.)	D	-189,42244	0,94889

Equation	y = A + B*cos(x*C+D)		
Adj. R-Square	0,99578		
		Value	Standard Error
Энергия пучка, от н. ед. (0 гр.)	A	110,43773	1,14473
Энергия пучка, от н. ед. (0 гр.)	B	10,52295	3,68466
Энергия пучка, от н. ед. (0 гр.)	C	36,57986	2,79213
Энергия пучка, от н. ед. (0 гр.)	D	-197,69927	0,55978

b

Рис. 2. Определение оптимального угла конусности для кристаллов KGW (a) и КТР (б)

Когда в БСП₁ с ВДВФ содержится максимальная доля мощности первоначального пучка, БСП₀ без ВДВФ при таком же угле конусности обладает минимальной мощностью, близкой к нулю и, соответственно, наоборот (рис. 2).

На практике искать оптимальный угол для максимальной перекачки мощности в пучок с ВДВФ проще и удобнее по минимальной мощности выходного пучка без ВДВФ. Кроме того, таким же образом определяется и оптимальный угол для наиболее полной перекачки мощности в выходной радиально/азимутально поляризованный пучок. Для этого из оптической схемы удаляются обе четвертьволновые пластинки. Ориентацией же полуволновой пластинки 2 (см. рис. 1) задается поляризация выходного пучка.

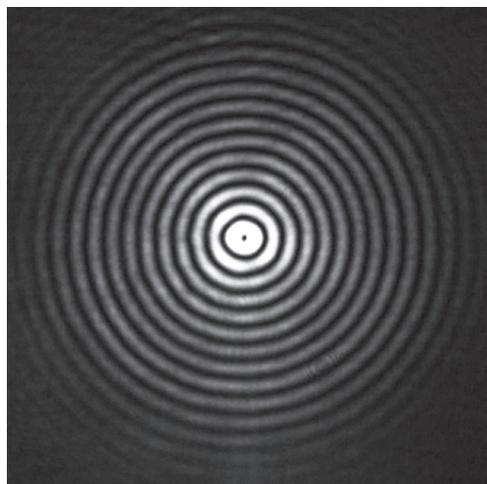
На рис. 3 показано распределение интенсивности в поперечном сечении выходного азимутально поляризованного конического пучка (рис. 3, а), а также диаметрально распределение интенсивности (рис. 3, б). Последнее достаточно хорошо описывается квадратом функции Бесселя первого порядка.

Наличие у выходного пучка радиальной поляризации подтверждается посредством вращения анализатора δ (см. рис. 1) вокруг оси светового пучка. При этом в пучке после анализатора возникает модуляция интенсивности с провалами до нулевого значения, подтверждающая наличие ориентации электрических векторов, лежащих в радиальных направлениях (рис. 4).

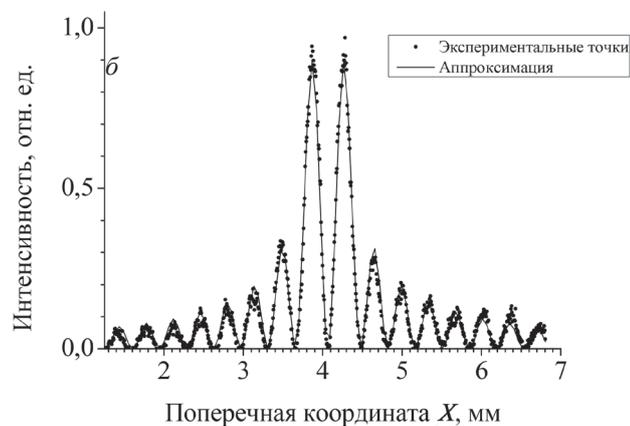
Световое поле с азимутальной поляризацией выглядит абсолютно так же, как и поле с радиальной поляризацией на рис. 3, а. Однако темные сектора, модулирующие интенсивность, повернуты относительно таковых на рис. 4 точно на 90 градусов.

На рис. 5 показан Фурье-спектр выходного БСП₁ с радиальной поляризацией после прохождения им анализатора (изображение поля получено в фокусе положительной сферической линзы с фокусным расстоянием 10 см).

Налицо существование модуляции интенсивности кольца, аналогичной модуляции на рис. 4, что подтверждает наличие в Фурье-спектре сильной радиально поляризованной поперечной компоненты, несмотря на некоторые изменения в направлениях распространения излучения при фокусировке сферической линзой.



а



б

Equation	$y=A*(J1(B*(x-C)))^2$		
Adj. R-Square	0,98633		
		Value	Standard Error
Normalized intensity	A	2,64333	0,009
Normalized intensity	B	9,24367	0,00614
Normalized intensity	C	4,06806	3,70384E-4

Рис. 3. Распределение интенсивности в поперечном сечении выходного пучка с радиальной поляризацией (а) и диаметрально распределение интенсивности (б)

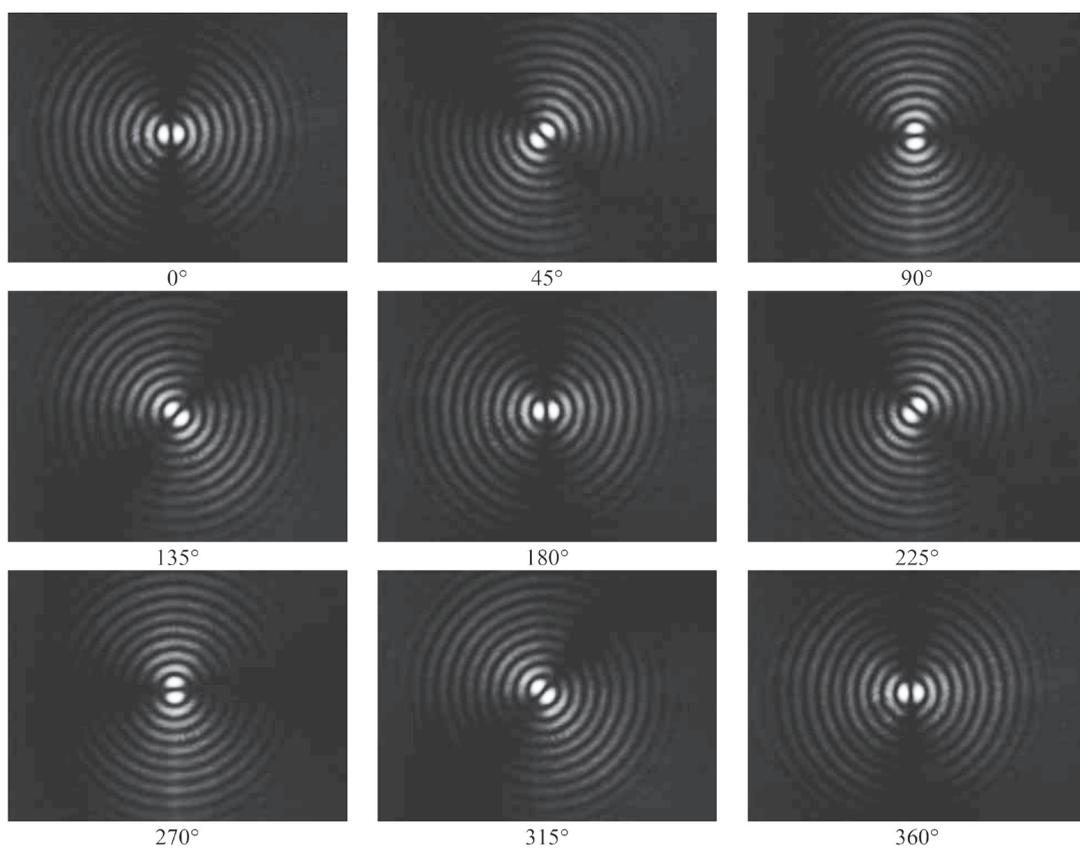


Рис. 4. Поле радиально поляризованного пучка за анализатором при различных ориентациях анализатора

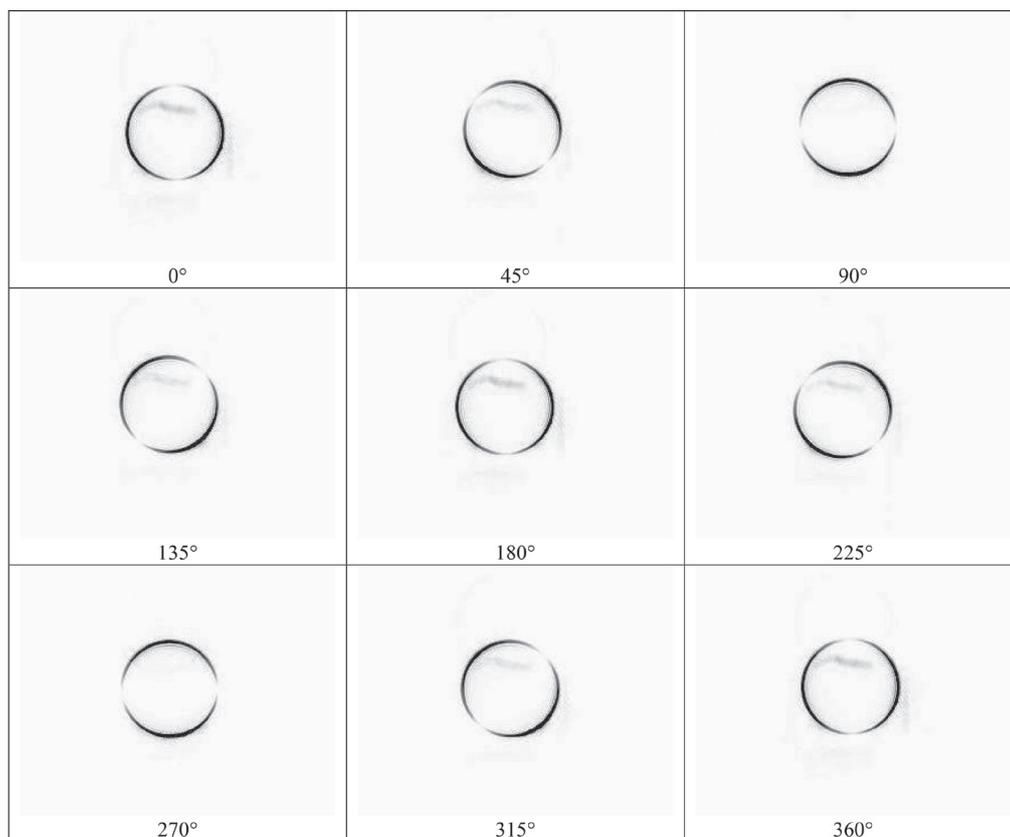


Рис. 5. Фурье-спектр радиально поляризованного БСП₁, прошедшего через анализатор, при различных ориентациях анализатора (изображения инвертированы)

3. Оптимизация оптических элементов схемы. Оптическую схему метода для формирования радиально/азимутально поляризованных конических лазерных пучков можно существенно упростить и сделать более компактной, если для получения БСП, падающего на кристалл, использовать аксикон, непосредственно создающий БСП с оптимальным углом конусности. Более того, двусный кристалл можно соединить с аксиконом в моноблок, сделав при этом плоскую поверхность аксикона выходной и прикрепив к ней кристалл. Следующей ступенью оптимизации могло быть формирование входной конической поверхности с нужным углом при основании прямо на самом кристалле, но такой путь сопряжен с рядом объективных технологических трудностей, связанных с ориентацией кристалла.

Для того чтобы расчетным образом определить необходимый угол конусности светового пучка, при малых углах конусности можно воспользоваться формулой $\gamma_{\text{опт}} = (m + 1/2)\lambda/(2\alpha L)$, следующей из (6). Однако параметр анизотропии у различных конкретных кристаллов, даже одинаковых по химическому составу и кристаллической структуре, может существенно отличаться. Так, согласно различным справочным данным, для кристалла КТР он может находиться в диапазоне $0,0144 \div 0,0160$. Минимальный угол полного преобразования соответствует углу расходимости первого кольца многокольцевого светового пучка с дислокацией волнового фронта $\gamma_{\text{мин}} = \lambda/(4\alpha L)$. Соответственно наименьший оптимальный угол конусности светового пучка для кристалла КТР длиной 12 мм может составлять от 0,047 до 0,052 градуса. Таким образом, точности расчета оптимального угла конусности в некоторых конкретных случаях, особенно для высокоанизотропных кристаллов длиной несколько миллиметров и более, может оказаться недостаточно для обеспечения полного преобразования начального излучения в излучение с нужной поляризацией. Более того, сами кристаллы зачастую изготавливаются с погрешностью относительно заказанных размеров. С другой стороны, в силу технических причин, минимальный угол при основании стеклянного аксикона составляет величину не менее 0,25 градуса. Наиболее качественно удается изготовить аксиконы с углами при основании от 1 до 5 градусов. Поскольку угол конусности БСП при малых углах и показателе преломления материала аксикона 1,5 примерно в 2 раза меньше угла при основании аксикона, оптимальная толщина кристалла КТР должна находиться в пределах от 1,2 до 6,0 мм.

Для создания максимально простой оптической схемы необходимо точно согласовать толщину кристалла и угол при основании аксикона. Поскольку аксиконы производят поштучно, а кристаллы могут изготавливаться партиями по несколько штук одинаковой толщины, целесообразно подбирать угол аксикона под готовые кристаллы. Чтобы определить для конкретного готового кристалла оптимальный с точки зрения преобразования в радиально/азимутально поляризованное излучение угол конусности светового пучка, мы предложили экспериментальный метод, основанный на том, что в условиях конической рефракции из расходящегося светового пучка формируются многокольцевые световые пучки с винтовой дислокацией волнового фронта либо без нее [5], причем кольцевые максимумы многокольцевого светового пучка с дислокацией волнового фронта первого порядка соответствуют по углу конусности конусным световым пучкам с радиальной поляризацией при условии полного преобразования.

Для быстрого экспериментального определения угла конусности светового пучка, при котором осуществляется полное преобразование исходного пучка в радиально поляризованный, использовалась оптическая схема, показанная на рис. 6.

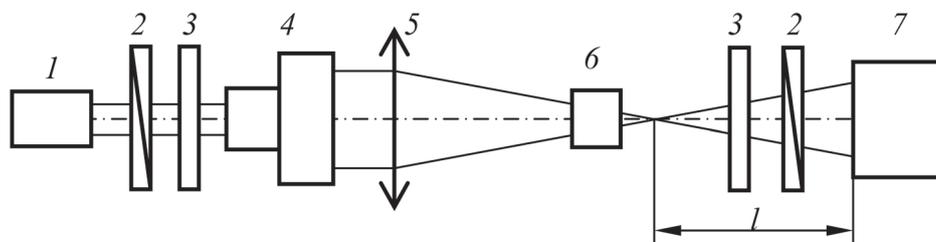


Рис. 6. Оптическая схема для определения оптимальных с точки зрения преобразования в радиально поляризованное излучение углов конусности исходного пучка: 1 – лазер; 2 – поляризатор; 3 – пластинка $\lambda/4$; 4 – телескоп; 5 – линза; 6 – кристалл; 7 – камера

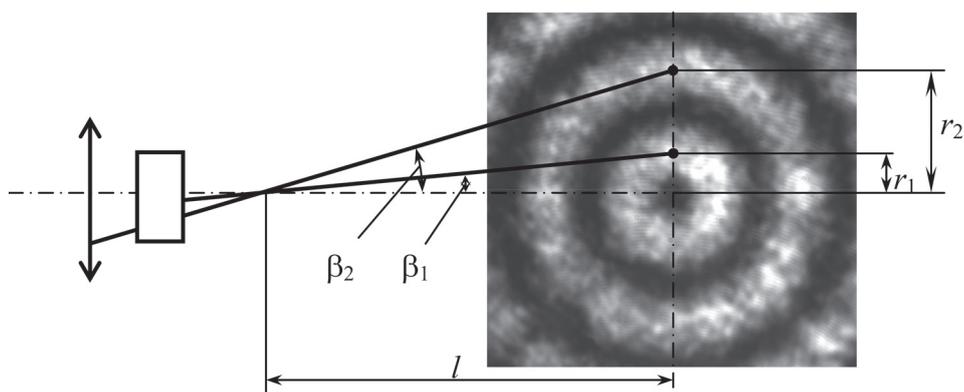


Рис. 7. Схема проведения измерений оптимального угла конусности

Данная схема позволяет с точностью примерно в сотую радиана находить угол конусности для максимально эффективного преобразования линейно поляризованного светового излучения в радиально поляризованное.

С помощью указанной оптической схемы (см. рис. 6) произведены измерения оптимального угла конусности (рис. 7). Непосредственно измеряются расстояние l от фокуса линзы до плоскости датчика CCD-камеры и расстояние от центра многокольцевого пучка до середины соответствующего кольцевого максимума в поперечном распределении интенсивности формируемого многокольцевого пучка.

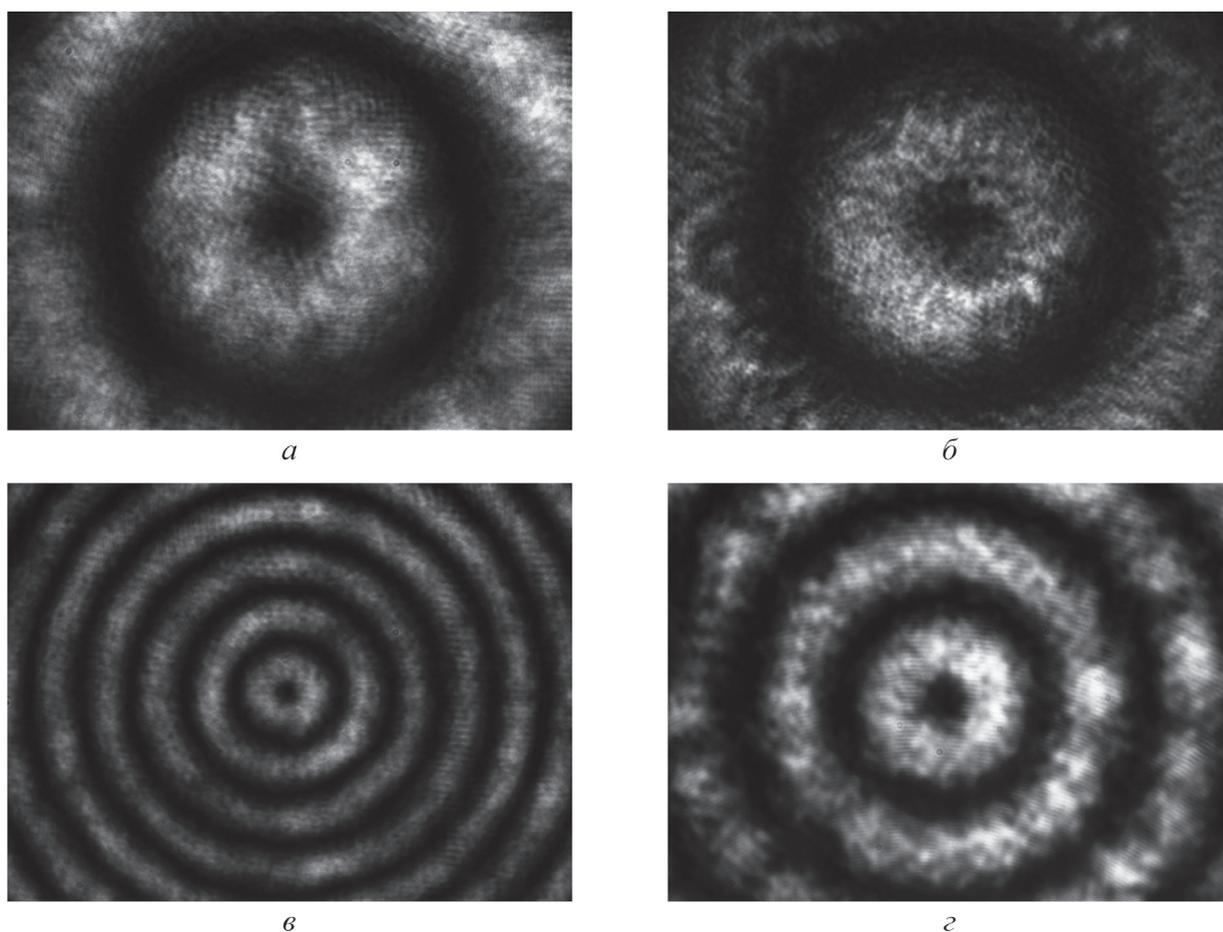


Рис. 8. Распределения интенсивности в поперечных сечениях многокольцевых световых пучков, используемых при определении оптимальных углов конусности: *a* – при $S = 3$ мм, $f = 5$ см, $l = 0,5$ м; *б* – при $S = 3$ мм, $f = 19$ см, $l = 0,5$ м; *в* – при $S = 12$ мм, $f = 5$ см, $l = 0,5$ м; *г* – при $S = 12$ мм, $f = 19$ см, $l = 1$ м

Оптическая схема (см. рис. 6) имела следующие параметры: лазер ГН-25-1; $\lambda/2$ на ослабителе установлена в положении 214° ; поляризатор; пластинка $\lambda/4$; телескоп $\times 5$; линза ($f = 19$ или 5 см); кристалл (толщина $S = 12$ или 3 мм); пластинка $\lambda/4$; поляризатор; светофильтр $0,1$; камера. Расстояние от фокуса линзы до камеры $l = 1$ или $0,5$ м.

При использовании распределений интенсивности, показанных на рис. 8, экспериментально получены следующие значения оптимальных углов конусности (табл. 1).

Таблица 1. Параметры для определения оптимальных углов конусности

Параметры оптических элементов	Кольцо 1	Кольцо 2	Кольцо 3
Толщина кристалла $S = 3$ мм, фокус линзы $f = 5$ см, расстояние от фокуса до камеры $l = 0,5$ м (рис. 8, а)	$r_1 = 1451,25$ мкм $\text{tg}\beta_1 = 0,0029025$ $\beta_1 = \mathbf{0,1663^\circ = 0,0029}$ рад	$r_2 = 4192,5$ мкм $\text{tg}\beta_2 = 0,008385$ $\beta_2 = \mathbf{0,4804^\circ = 0,0084}$ рад	—
$S = 3$ мм, $f = 19$ см, $l = 0,5$ м (рис. 8, б)	$r_1 = 1483,5$ мкм $\text{tg}\beta_1 = 0,002967$ $\beta_1 = \mathbf{0,1699^\circ = 0,0029}$ рад	$r_2 = 4257$ мкм $\text{tg}\beta_2 = 0,008514$ $\beta_2 = \mathbf{0,4878^\circ = 0,0085}$ рад	—
$S = 12$ мм, $f = 5$ см, $l = 0,5$ м (рис. 8, в)	$r_1 = 419,25$ мкм $\text{tg}\beta_1 = 0,0008385$ $\beta_1 = \mathbf{0,0480^\circ = 0,00084}$ рад	$r_2 = 1212,6$ мкм $\text{tg}\beta_2 = 0,0024252$ $\beta_2 = \mathbf{0,1389^\circ = 0,0024}$ рад	$r_3 = 2064$ мкм $\text{tg}\beta_3 = 0,004128$ $\beta_3 = \mathbf{0,2365^\circ = 0,0041}$ рад
$S = 12$ мм, $f = 19$ см, $l = 1$ м (рис. 8, г)	$r_1 = 838,5$ мкм $\text{tg}\beta_1 = 0,0008385$ $\beta_1 = \mathbf{0,0480^\circ = 0,00084}$ рад	$r_2 = 2418,75$ мкм $\text{tg}\beta_2 = 0,002419$ $\beta_2 = \mathbf{0,1386^\circ = 0,0024}$ рад	$r_3 = 4095,75$ мкм $\text{tg}\beta_3 = 0,004096$ $\beta_3 = \mathbf{0,2347^\circ = 0,0041}$ рад

Аналогичным образом произведено измерение оптимальных углов конусности для двуосного кристалла KGW длиной 7 мм. Однако в данном случае форма колец в выходном МКСП значительно отличалась от круглых. Поэтому измерения были проведены сразу по восьми разным направлениям с последующим усреднением (рис. 9). Измерения проводились при фокусировке линзой с фокусным расстоянием 150 мм на расстоянии от фокуса 500 мм.

Вычисленные оптимальные углы для формирования световых пучков в кристалле KGW приведены в табл. 2.

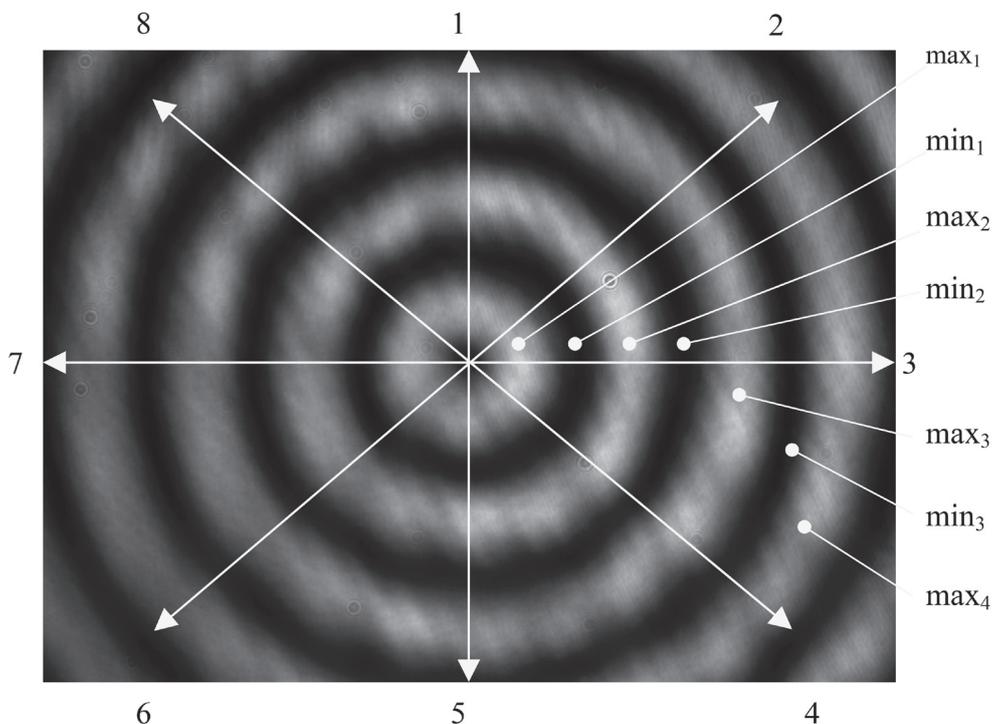


Рис. 9. Направления, вдоль которых определялись оптимальные углы конусности в кристалле KGW

Таблица 2. Оптимальные углы для кристалла KGW

Направление	Угол, градусы						
	max ₁	min ₁	max ₂	min ₂	max ₃	min ₃	max ₄
1	0,061	0,132	0,199	0,263	0,320	–	–
2	0,062	0,132	0,188	0,256	0,333	0,390	0,447
3	0,067	0,135	0,194	0,262	0,326	0,389	0,456
4	0,072	0,134	0,204	0,263	0,317	0,394	0,461
5	0,074	0,135	0,200	0,264	0,339	–	–
6	0,067	0,139	0,200	0,265	0,318	0,391	0,452
7	0,069	0,139	0,200	0,261	0,320	0,390	0,440
8	0,073	0,139	0,197	0,267	0,330	0,390	0,454
Среднее арифметическое	0,068	0,134	0,198	0,263	0,325	0,391	0,452

Заключение. Предложено и собрано высокоэффективное устройство для формирования конических световых пучков с радиальной или азимутальной поляризацией, а также конических световых пучков с линейной поляризацией, обладающих винтовой дислокацией волнового фронта, на основе двуосного кристалла КТР либо KGW, кристаллографическая ось X которого лежит в плоскости его оптических осей (бинормалей) и перпендикулярна той бинормали, вдоль которой ориентирован кристалл. В первом варианте устройство состоит из моторизованной опто-механической системы, формирующей линейно поляризованный конический лазерный пучок, который затем проходит через кристалл и преобразуется в радиально/азимутально поляризованный конический пучок. Во втором варианте падающий на кристалл пучок дополнительно поляризуется циркулярно, благодаря чему на выходе из кристалла с помощью четвертьволновой пластинки и линейного поляризатора можно сформировать выходной световой пучок с ВДВФ.

Сформированные радиально и азимутально поляризованные конические световые пучки перспективны для контроля качества изделий с аксиальной симметрией. После придания сходящимся радиально поляризованным коническим пучкам большого угла конусности они будут иметь в области перетяжки сильную продольную составляющую электрического поля, что обеспечит весьма малые размеры центрального максимума БСП₀, в виде которого формируется продольная компонента электрического поля. Благодаря этому полученные нами лазерные пучки перспективны для точной лазерной обработки материалов, управления частицами в био- и нанотехнологиях и точечного воздействия на биоткани.

Список использованной литературы

1. Казак, Н. С. Формирование бесселевых световых пучков в условиях внутренней конической рефракции / Н. С. Казак, Н. А. Хило, А. А. Рыжевич // Квантовая электроника – 1999. – Т. 29, № 2. – С. 184–188.
2. Formation of higher-order Bessel light beams in biaxial crystals / T. A. King [et al.] // Opt. Commun. – 2001. – Vol. 187, N 4/6. – P. 407–414.
3. Хаткевич, А. Г. Внутренняя коническая рефракция пучков света / А. Г. Хаткевич // Оптика и спектроскопия. – 1979. – Т. 46, вып. 3. – С. 505–509.
4. Хаткевич, А. Г. Коническая рефракция и преобразование излучения вблизи оптических осей / А. Г. Хаткевич // Журн. прикладной спектроскопии. – 1996. – Т. 63, № 6. – С. 1017–1025.
5. Казак, Н. С. Формирование и преобразование небесселевых многокольцевых световых пучков / Н. С. Казак, Е. Г. Катранжи, А. А. Рыжевич // Журн. прикладной спектроскопии. – 2002. – Т. 69, № 2. – С. 242–247.
6. Солоневич, С. В. Формирование квазигиперболического светового поля с использованием двуосного кристалла / С. В. Солоневич, А. А. Рыжевич // Вес. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2008. – № 4. – С. 97–101.
7. Преобразователи лазерного излучения на основе кристаллов / Н. А. Хило [и др.] // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 4. – С. 68–74.
8. Kozawa, Y. Generation of a radially polarized laser beam by use of a conical Brewster prism / Y. Kozawa, S. Sato // Opt. Lett. – 2005. – Vol. 30, N 22. – P. 3063–3065.
9. Yonezawa, K. Generation of a radially polarized laser beam by use of the birefringence of a c-cut Nd:YVO4 crystal / K. Yonezawa, Y. Yuichi, S. Sato // Opt. Lett. – 2006. – Vol. 31, N 14. – P. 2151–2153.
10. A high-efficient method for generating radially and azimuthally polarized Bessel beams using biaxial crystals / N. A. Khilo [et al.] // Opt. Commun. – 2012. – Vol. 285, N 24. – P. 4807–4810.

Поступила в редакцию 11.02.2016

УДК 577.344

*О. А. КОЗЛЕНКОВА, Л. Г. ПЛАВСКАЯ, А. В. МИКУЛИЧ, И. А. ЛЕУСЕНКО,
А. И. ТРЕТЬЯКОВА, В. Ю. ПЛАВСКИЙ*

ФОТОСЕНСИБИЛИЗИРУЮЩЕЕ ДЕЙСТВИЕ БИЛИРУБИНА НА КЛЕТКИ ЖИВОТНЫХ В КУЛЬТУРЕ

*Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь,
e-mail: olga.kozlenkova@gmail.com, v.plavskii@ifanbel.bas-net.by*

Исследования, выполненные в настоящей работе, показали, что воздействие излучения светодиодных источников с максимумом полосы излучения около 465 нм, соответствующего спектру поглощения билирубина, способно оказывать повреждающее действие на клетки животных в культуре, находящиеся в логарифмической стадии роста, предварительно инкубированные с билирубином. Фотобиологический эффект обусловлен фотодинамическими процессами с участием синглетного кислорода, генерируемого триплетно возбужденным сенсibilизатором. Вид зависимости выживаемости клеток от энергетической дозы указывает на то, что сенсibilизатором выступает билирубин, а не его фотопродукты.

Ключевые слова: гипербилирубинемия, билирубин, фотосенсibilизатор, жизнеспособность клеток, МТТ-тест, фототерапия, синглетный кислород.

*O. A. KOZLENKOVA, L. G. PLAVSKAYA, A. V. MIKULICH, I. A. LEUSENKO,
A. I. TRETYAKOVA, V. Yu. PLAVSKII*

PHOTOSENSITIZING EFFECTS OF BILIRUBIN ON ANIMAL CELLS IN CULTURE

*B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus,
e-mail: olga.kozlenkova@gmail.com, v.plavskii@ifanbel.bas-net.by*

The studies performed in this work have shown that the radiation exposure to LED sources with an emission band maximum of about 465 nm corresponding to the absorption spectrum of bilirubin is able to cause damaging effects on animal cells in culture, being in a logarithmic growth stage, that have been pre-incubated with bilirubin. The photobiological effect is caused by photo dynamic processes with participation of singlet oxygen generated by a triplet-excited sensitizer. The type of cell survival depending on an energy dose indicates that the sensitizer serves as bilirubin but not its photoproducts.

Keywords: hyperbilirubinemia, bilirubin, photosensitizer, cell viability, MTT-test, phototherapy, singlet oxygen.

Введение. Способность билирубина оказывать сенсibilизирующее действие на биологические системы различного уровня структурной организации является предметом многочисленных исследований [1–7] в связи с широким использованием фототерапии для лечения гипербилирубинемии новорожденных детей. Как известно, синдром гипербилирубинемии (желтухи) обусловлен избыточным накоплением в крови, а также в подкожном жировом слое ребенка желчного пигмента (продукта обмена гемоглобина) – билирубина, придающего коже характерный золотисто-желтый цвет. Одним из наиболее распространенных и эффективных способов лечения гипербилирубинемии является фототерапия, которая заключается в тотальном воздействии на поверхность тела ребенка светом плотностью мощности $P = 0,5–5,0$ мВт/см², спектральный состав которого соответствует длинноволновой полосе поглощения билирубина ($\lambda = 400–530$ нм) [7–11]. Считается [7–11], что определяющую роль в снижении уровня билирубина в организме новорожденных под действием света играют процессы фотоизомеризации пигмента – образование его конфигурационных и структурных изомеров, которые являются более гидрофильными соединениями, чем нативный билирубин, и быстрее выводятся из организма. Помимо процессов фотоизомеризации определенный вклад в снижение уровня билирубина вносят реакции

самосенсибилизированного фотолиза билирубина, протекающего с участием синглетного кислорода [12]. При этом нельзя исключать, что синглетный кислород, генерируемый триплетно возбужденным билирубином, не будет вызывать фотодинамические повреждения других жизненно важных молекулярных структур и органелл клетки. Имеются также сведения, что кроме билирубина фотосенсибилизирующими свойствами обладает продукт его структурной фотоизомеризации – люмирубин [2, 3]. Это указывает на необходимость исследования сенсибилизирующего действия билирубина и его фотопродуктов на важнейшие биологические структуры с целью выработки мер, направленных на снижение возможных побочных эффектов действия света при проведении фототерапии. В последние годы актуальность данной проблемы еще более усилилась в связи с применением для терапии гипербилирубинемии новорожденных новых источников излучения на основе сверхъярких светодиодов, позволяющих варьировать в широком диапазоне как интенсивность, так и длину волны воздействующего излучения в пределах полосы поглощения пигмента [7–11].

Цель настоящей работы – исследование фотосенсибилизирующего действия билирубина и его фотопродуктов на клетки животных в культуре.

Материалы и методы исследований. В качестве объекта исследования выбраны клетки почки зеленой африканской мартышки BGM. Клетки выращивали в одноразовых чашках Петри на питательной среде MEM (minimal essential medium) с 10 % сыворотки крупного рогатого скота при 37° С и 5%-м содержанием CO₂ в инкубаторе. В каждую чашку вносили по 3 мл ростовой среды с клетками. Посевная доза клеток составляла 130 000 мл⁻¹.

Использовали билирубин производства «Fluka» (Германия) без дополнительной очистки. По данным изготовителя, содержание основного вещества в препарате было не ниже 98,5 %. Раствор билирубина готовили по стандартной методике: 2,5 мг билирубина предварительно растворяли в 200 мкл 0,1 N NaOH (из-за его низкой растворимости в воде при физиологических значениях pH), а затем добавляли 1800 мкл бидистиллированной H₂O.

В качестве источника излучения использовали фототерапевтический аппарат «Ромашка» на базе светодиодного источника с длиной волны в максимуме полосы испускания при $\lambda_{исп} = 465$ нм, с регулируемой в диапазоне 5–20 мВт/см² плотностью мощности. Время облучения – 1–20 мин. Облучение монослоя клеток проводилось снизу, через дно чашек Петри. В эксперименте использовали культуру клеток в экспоненциальной стадии роста. На вторые сутки после посева в часть чашек Петри добавляли раствор билирубина в конечной концентрации 40 мкМ, инкубировали 2 ч при 37 °С в CO₂-инкубаторе, а затем облучали светодиодным источником. Для выяснения участия синглетного кислорода в механизме сенсибилизированного билирубином повреждения клеток в часть чашек перед облучением вносили тушитель синглетного кислорода азид натрия производства «Sigma-Aldrich» в концентрации 5·10⁻³ М. После облучения клетки инкубировали в термостате в течение 5 ч при 37 °С. В термостате обеспечивалось 5%-е содержание CO₂. Аналогичные манипуляции (за исключением облучения) выполняли с контрольными клетками. Оценку биологического действия оптического излучения проводили фотокolorиметрически с помощью МТТ-теста [13]. Данный тест основан на способности дегидрогеназ живых метаболически активных клеток превращать бледно-желтый водорастворимый 3-(4,5-диметилтиазол-2-ол)-2,5-дифенилтетразолий бромид в голубые кристаллы формазана (МТТ-ф), нерастворимые в воде. Нежизнеспособные мертвые клетки такой способностью не обладают. Использовали 3-(4,5-диметилтиазол-2-ол)-2,5-дифенил-2Н-тетразолий бромид (МТТ) производства «Applichem» (Германия). Раствор МТТ готовили по стандартной методике: 5 мг МТТ растворяли в 1 мл H₂O (концентрированный раствор). Спустя 5 ч инкубации клеток после облучения ростовую среду сливали и заливали новую (без сыворотки), содержащую 100 мкл концентрированного МТТ на 1 мл среды. С новой средой клетки инкубировали в течение 3 ч при 37 °С и 5%-м содержанием CO₂ в инкубаторе. После 3 ч инкубации, удаляли супернатант и оставляли монослой клеток в чашках Петри на ночь для высыхания. В каждую чашку Петри добавляли 1 мл диметилсульфоксида (ДМСО) и инкубировали 30 мин при комнатной температуре. Анализ выживаемости клеток проводили на длине волны $\lambda = 570$ нм. Жизнеспособность клеток после воздействия света характеризовали параметром $\gamma = (D_0/D_K) \cdot 100$ %, где D_0 и D_K – оптическая плот-

ность раствора формазана из опытных и контрольных чашек Петри соответственно. Каждая экспериментальная точка на графике зависимости γ от времени воздействия t является средним значением не менее пяти повторностей.

Статистическую обработку полученных данных проводили с использованием стандартного отклонения по генеральной совокупности.

Спектрофотометрические измерения выполняли на автоматизированном спектрофотометре Specord M 40 UV VIS («Jena», Германия), используя кюветы с базой 10 мм.

Результаты исследований и их обсуждение. Спектр испускания светодиодного источника (кривая 1), используемого для воздействия на клетки, и спектр поглощения билирубина в составе комплекса с сывороточным альбумином человека (кривая 2) представлены на рис. 1, а. Видно, что максимум спектра испускания светодиода ($\lambda_{\text{исп}} = 465$ нм) практически соответствует максимуму поглощения билирубина, связанного с альбумином ($\lambda_{\text{погл}} = 460$ нм). Следовательно, излучение светодиодного источника обеспечивает эффективное возбуждение билирубина.

Спектр поглощения питательной среды МЕМ с 10 % сыворотки крупного рогатого скота, используемой для выращивания клеток в отсутствие билирубина, показан на рис. 1, б (кривая 3). Как видно, спектр поглощения среды характеризуется выраженными максимумами в области $\lambda_{\text{погл}} = 411$ и 560 нм, а также «плечом» в области 445 нм. По всей видимости, максимум в области $\lambda_{\text{погл}} = 411$ нм и «плечо» на его длинноволновом склоне обусловлены присутствием в сыворотке крупного рогатого скота оксигемоглобина и дезоксигемоглобина соответственно в результате частичного гемолиза эритроцитов при получении сыворотки. Что касается максимума при $\lambda_{\text{погл}} = 560$ нм, то его происхождение связано главным образом с присутствием в питательной среде индикаторного красителя фенолового красного, используемого для визуального контроля

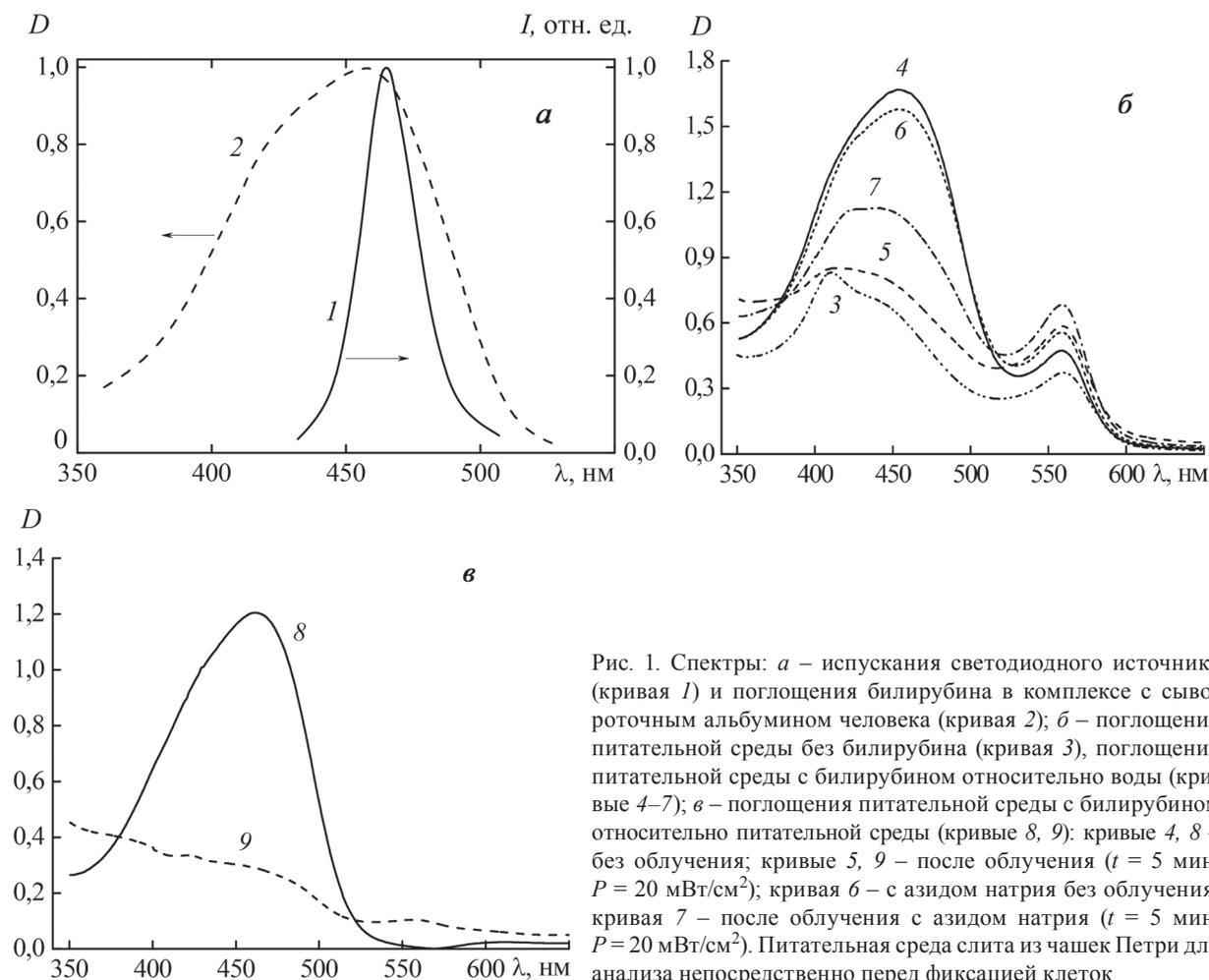


Рис. 1. Спектры: а – испускания светодиодного источника (кривая 1) и поглощения билирубина в комплексе с сывороточным альбумином человека (кривая 2); б – поглощения питательной среды без билирубина (кривая 3), поглощения питательной среды с билирубином относительно воды (кривые 4–7); в – поглощения питательной среды с билирубином относительно питательной среды (кривые 8, 9); кривые 4, 8 – без облучения; кривые 5, 9 – после облучения ($t = 5$ мин, $P = 20$ мВт/см²); кривая 6 – с азидом натрия без облучения; кривая 7 – после облучения с азидом натрия ($t = 5$ мин, $P = 20$ мВт/см²). Питательная среда слита из чашек Петри для анализа непосредственно перед фиксацией клеток

pH среды при культивировании клеток. Определенный вклад в поглощение в данной области спектра могут вносить и гемоглибиновые компоненты за счет Q-полос поглощения оксигемоглибина (с максимумами при $\lambda_{\text{max}} = 542$ и 578 нм) и дезоксигемоглибина (с максимумом при $\lambda_{\text{max}} = 554$ нм).

При внесении в питательную среду 40 мкМ билирубина (в конечной концентрации) в спектре поглощения доминирующими являются полоса с максимумом в области $\lambda_{\text{погл}} = 454$ нм (см. рис. 1, б, кривая 4), обусловленная указанным пигментом, и полоса с максимумом при $\lambda_{\text{погл}} = 560$ нм, сформированная главным образом за счет фенолового красного.

Поскольку токсичность билирубина в отношении клеток в культуре в основном определяется концентрацией неконъюгированного пигмента [14, 15], представляло интерес выяснить форму билирубина в питательной среде. Исследования показали, что в используемой среде билирубин находится в связанном состоянии, по всей видимости, в составе комплексов с белковыми молекулами (альбуминами, характеризующимися наиболее высоким сродством к билирубину [16, 17]). Как известно [16, 17], максимум в спектре поглощения свободной формы билирубина в воде при нейтральных значениях pH находится в области 440 нм, а в составе комплекса с сывороточными альбуминами – в области 460–462 нм. На первый взгляд, казалось бы, что положение максимума в области $\lambda_{\text{погл}} = 454$ нм (см. рис. 1, б, кривая 4) в спектре поглощения билирубинсодержащей питательной среды свидетельствует о том, что значительная часть молекул билирубина находится в свободном состоянии (вне комплексов с белковыми молекулами среды). Однако при записи дифференциального спектра поглощения билирубина в питательной среде относительно питательной среды (см. рис. 1, в, кривая 8) четко видно, что максимум в спектре поглощения билирубина соответствует его связанной форме ($\lambda_{\text{погл}} = 462$ нм). Поэтому следует отметить, что коротковолновое положение максимума в области $\lambda_{\text{погл}} = 454$ нм (см. рис. 1, б, кривая 4) обусловлено вкладом как билирубина, так и гемоглибина в формируемый суммарный спектр. Причем гемоглибиновые компоненты характеризуются более коротковолновым положением максимумов (полос Сорэ).

Из рис. 1, б (кривая 4) видно также, что оптическая плотность билирубинсодержащей питательной среды в 10-миллиметровой кювете имеет достаточно высокое значение ($D \approx 1,6$) на длине волны 465 нм, соответствующей максимуму спектра испускания светодиодного источника. Однако, поскольку облучение монослоя клеток производили снизу, через дно чашки Петри, это исключало возможность экранирования излучения, воздействующего на клетки, компонентами питательной среды. Отметим также, что феноловый красный характеризуется очень слабым поглощением в диапазоне спектра испускания светодиодного источника ($\lambda_{\text{исп}} = 465$ нм), используемого для воздействия на клетки.

Зависимость процента жизнеспособных клеток от времени воздействия излучения светодиодного источника ($\lambda_{\text{исп}} = 465$ нм) плотностью мощности $P = 20$ мВт/см² на культуру клеток в отсутствие билирубина (кривая 1) и после ее сенсibilизации билирубином в концентрации 40 мкМ (кривая 2) представлена на рис. 2, из которого следует, что воздействие оптического излучения

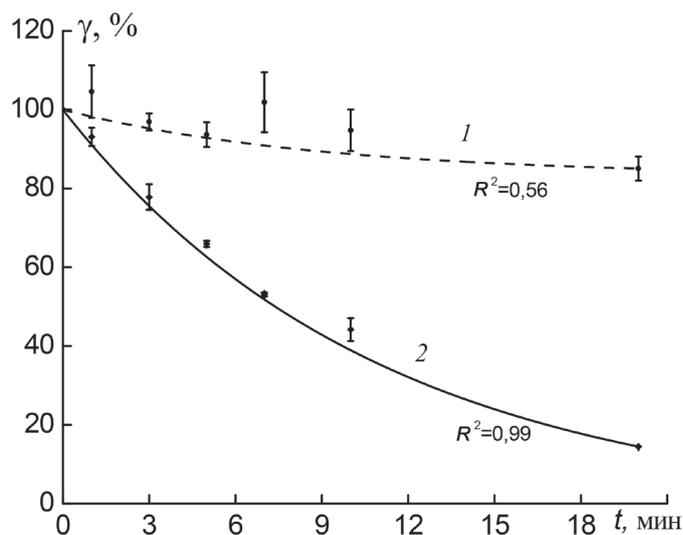


Рис. 2. Зависимость процента жизнеспособных клеток от времени воздействия излучения светодиодного источника с максимумом в спектре испускания при $\lambda_{\text{исп}} = 465$ нм, плотностью мощности $P = 20$ мВт/см² на клетки в отсутствие билирубина (кривая 1) и после их сенсibilизации билирубином в концентрации 40 мкМ (кривая 2)

на клетки в отсутствие билирубина в течение 1, 3, 5, 7, 10 мин практически не сказывается на их жизнеспособности (кривая 1). И только при максимальной использованной энергетической дозе $E = 24 \text{ Дж/см}^2$ ($t = 20$ мин) наблюдается снижение процента жизнеспособных клеток: $\gamma = (85,1 \pm 3,0) \%$.

Фотобиологический эффект значительно усиливается при сенсibilизации клеток билирубином (см. рис. 2, кривая 2). Для сравнения укажем, что при сенсibilизации клеток билирубином и энергетической дозе оптического излучения $E = 24 \text{ Дж/см}^2$ ($t = 20$ мин) $\gamma = (14,5 \pm 0,1) \%$. Характерно, что дозовая кривая в этом случае хорошо описывается ($R^2 = 0,99$) моноэкспоненциальной функцией. Это свидетельствует о том, что скорость фотосенсibilизированной деструкции клеток, оцениваемой по снижению их жизнеспособности, остается постоянной во всем исследуемом диапазоне дозовых нагрузок. Существенно также, что внесение в питательную среду 40 мкМ билирубина (в конечной концентрации) и последующая 2-часовая темновая инкубация клеток с сенсibilизатором практически не сказываются на жизнеспособности клеток. То есть регистрируемый эффект снижения жизнеспособности клеток при совместном действии света и билирубина (см. рис. 2, кривая 2) носит фотохимическую природу. По всей видимости, вклад фототермических процессов в сенсibilизированное билирубином снижение жизнеспособности клеток в выбранном интервале плотностей мощности (не более 20 мВт/см²) незначителен. На это указывают данные, представленные в таблице. Отсюда следует, что в условиях равенства энергетической дозы четырехкратное снижение плотности мощности воздействующего излучения (с 20 до 5 мВт/см²) при соответствующем четырехкратном увеличении времени воздействия (с 5 до 20 мин) практически не приводит к снижению фотобиологического эффекта. В то же время в случае заметного вклада фототермических реакций в фотодеструкцию клеток следовало бы ожидать более выраженного эффекта при воздействии излучения с большей плотностью мощности.

Следует отметить, что экспоненциальный характер дозовой зависимости при сенсibilизации клеток билирубином (см. рис. 2, кривая 2), свидетельствующий о неизменной скорости снижения жизнеспособности клеток в процессе их облучения, предполагает, как правило, и постоянство эффективной концентрации фотосенсibilизатора, ответственного за реализацию фотодинамического действия. В случае снижения концентрации сенсibilизатора из-за его фотодеструкции в процессе облучения угол наклона дозовой кривой к оси ординат должен увеличиваться, а при появлении в облучаемой системе фотопродуктов, характеризующихся более высокой эффективностью фотодинамического действия, – должен уменьшаться.

Влияние азид натрия на фотосенсibilизированное билирубином повреждение клеток в условиях постоянства энергетической дозы светового воздействия ($\lambda_{\text{исп}} = 465 \text{ нм}$) при варьировании времени и плотности мощности воздействующего излучения

Контролируемые параметры	Контрольная группа	Опытные группы		
		20	10	5
Плотность мощности воздействующего излучения, мВт/см ²	0	20	10	5
Время облучения, мин	0	5	10	20
Энергетическая доза, Дж/см ²	0	6	6	6
Процент жизнеспособных клеток, проинкубированных 2 ч с 40 мкМ билирубина, %	100,0 ± 7,5	45,5 ± 1,6	50,0 ± 6,4	48,7 ± 12,5
Процент жизнеспособных клеток, проинкубированных 2 ч с 40 мкМ билирубина и 5 мМ азид натрия, %	100,0 ± 13,5	97,9 ± 5,7	91,2 ± 10,4	90,2 ± 1,0

Как уже отмечалось ранее, один из продуктов структурной фотоизомеризации билирубина – люмирубин – способен оказывать более выраженное фотосенсibilизирующее действие [2] за счет более эффективной генерации синглетного кислорода [3]. С другой стороны, хорошо известно, что для билирубина в растворе, а также для его комплексов с белками при комнатной температуре характерна очень низкая фотохимическая стабильность [2, 17], что должно приводить к снижению концентрации фотосенсibilизатора в процессе облучения.

Действительно, из данных, представленных на рис. 1, б (кривые 4 и 5), видно, что при воздействии на клетки уже в течение 5 мин излучением с $\lambda_{\text{исп}} = 465 \text{ нм}$, плотностью мощности

$P = 20$ мВт/см² наблюдается значительное обесцвечивание питательной среды. Как следует из дифференциальных спектров, представленных на рис. 1, в (кривые 8 и 9), обесцвечивание среды при воздействии излучения с $\lambda_{исп} = 465$ нм происходит за счет деструкции билирубина. Более того, уже через 5 мин облучения полоса поглощения, характерная для билирубина, на фоне его фотопродуктов практически не регистрируется (рис. 1, в, кривая 9). Это свидетельствует о том, что через 5 мин после облучения концентрация интактного *Z,Z*-билирубина в растворе существенно уменьшилась. Имеются основания полагать, что в облученном растворе и концентрация конфигурационных стереоизомеров билирубина (*Z,E*-, *E,Z*-, *E,E*-билирубина) также незначительна, поскольку значения коэффициентов молярных экстинкций для указанных изомеров в области 460 нм очень близки к таковому для *Z,Z*-билирубина [2]. Существенно ниже (примерно в 2,0–2,7 раза) коэффициент молярной экстинкции для структурных фотоизомеров билирубина (*Z*- и *E*-люмирубина) [2]. По этой причине, а также учитывая необратимость процесса структурной фотоизомеризации (в отличие от конфигурационной), можно ожидать, что после 5 мин облучения среди изомеров билирубина наиболее значительный вклад в поглощение в видимой области спектра вносит люмирубин. Что касается продуктов фотоокисления билирубина на основе моно- и дипиррольных фрагментов, то они являются бесцветными и практически не поглощают излучение в диапазоне спектра испускания используемого светодиодного источника. Известно также, что при облучении билирубина в результате окисления метиленового мостика в следовых количествах образуется и биливердин, характеризующийся протяженной полосой поглощения с максимумами около 375 и 660 нм [2]. Однако в отличие от люмирубина биливердин практически не обладает фотосенсибилизирующим действием.

Выполненные исследования показали (см. рис. 1, б), что фотообесцвечивание билирубина в питательной среде осуществляется с участием синглетного кислорода, поскольку отношение оптических плотностей облученных ($D_{обл}$) и контрольных ($D_{к}$) растворов в присутствии тушителя синглетного кислорода азид натрия ($D_{обл}/D_{к} = 0,69$; см. рис. 1, б, кривые 6 и 7) значительно выше, чем для таких же растворов в отсутствие азид ($D_{обл}/D_{к} = 0,46$; см. рис. 1, б, кривые 4 и 5). Таким образом, азид натрия несколько снижает скорость фотолиза билирубина в питательной среде. При этом, по всей видимости, азид натрия не влияет на скорость фотоизомеризации пигмента. Отметим также, что указанный тушитель синглетного кислорода резко уменьшает и степень фотоповреждения клеток при их сенсибилизации билирубином. На это указывают данные МТТ-теста, приведенные в таблице. Видно, что при облучении клеток ($P = 20$ мВт/см², $t = 5$ мин), сенсибилизированных билирубином, фракция жизнеспособных клеток в отсутствие других добавок составляет (по отношению к контролю) $\gamma = (45,5 \pm 1,6)$ %. При таком же облучении клеток в присутствии 5 мМ азид натрия фракция жизнеспособных клеток значительно увеличивается и составляет $\gamma = (97,9 \pm 5,7)$ %. Таким образом, в отличие от фотолиза билирубина в питательной среде, азид натрия фактически блокирует разрушение клеток при их сенсибилизации билирубином. Данный факт является свидетельством определяющей роли синглетного кислорода в механизме сенсибилизированной билирубином фотодеструкции клеток. Действительно, выполненные ранее исследования показали [18], что триплетно-возбужденный билирубин способен генерировать синглетный кислород, хотя и с невысоким квантовым выходом ($\gamma_{\Delta} = 0,02$).

Итак, резюмируя сказанное, можно заключить, что, несмотря на значительную степень фотодеструкции билирубина в питательной среде уже через 5 мин облучения, кинетика снижения жизнеспособности клеток описывается экспоненциальной зависимостью даже при семикратном снижении (по сравнению с контролем, $\gamma = 100$ %) количества жизнеспособных клеток (при $t = 20$ мин $\gamma = (14,5 \pm 0,1)$ %).

Заключение. Результаты, полученные в настоящей работе, показывают, что воздействие на клетки животных с повышенным уровнем содержания билирубина излучения, соответствующего его спектру поглощения, способно инициировать их гибель. Эффект реализуется за счет фотодинамического действия с участием синглетного кислорода. Для дальнейшего развития технологий лечения гипербилирубинемии и снижения возможных побочных эффектов необходимо совместно со специалистами-медиками разработать подходы, направленные на снижение сенсибилизирующего действия билирубина при проведении фототерапии.

Список использованной литературы

1. The side effects of phototherapy for neonatal jaundice: what do we know? What should we do? / T. Xiong [et al.] // *Eur J. Pediatr.* – 2011. – Vol. 170. – P. 1247–1255.
2. Сенсибилизирующее действие *Z,Z*-билирубина IX α и его фотопродуктов на ферменты в модельных растворах / В. Ю. Плавский [и др.] // *Журн. прикладной спектроскопии.* – 2008. – Т. 75, № 3. – С. 383–394.
3. Bilirubin phototoxicity to human cells by green light phototherapy in vitro / F. Böhm [et al.] // *Photochem. Photobiol.* – 1995. – Vol. 62, N 6. – P. 980–983.
4. Long-term hazards of neonatal blue-light phototherapy / J. Oláh [et al.] // *Brit J. Dermatol.* – 2013. – Vol. 169, N 2. – P. 243–249.
5. Apoptosis in the small intestine of neonatal rat using blue light-emitting diode devices and conventional halogen-quartz devices in phototherapy / K. Tanaka [et al.] // *Pediatr Surg Int.* – 2008. – Vol. 24. – P. 837–842.
6. Effect of phototherapy on blood endothelin and nitric oxide levels: clinical significance in preterm infants / G. S. Liu [et al.] // *World J. Pediatr.* – 2008. – Vol. 4. – P. 31–35.
7. *Plavskii, V. Yu.* Bilirubin: Chemistry, Regulation and Disorder // V. Yu Plavskii; ed. J. F. Novotny, F. Sedlacek. – New York: Nova Science Publishers Inc., 2012. – P. 1–65.
8. *Maisels, M. J.* Phototherapy for neonatal jaundice / M. J. Maisels, A. F. McDonagh // *N. Engl. J. Med.* – 2008. – Vol. 358, N 9. – P. 920–928.
9. *Stokowski, L. A.* Fundamentals of phototherapy for neonatal jaundice / L. A. Stokowski // *Adv. Neonatal Care.* – 2006. – N 6. – P. 303–312.
10. *Плавский, В. Ю.* Фототерапевтические системы для лечения гипербилирубинемии новорожденных детей / В. Ю. Плавский, А. И. Третьякова, Г. Р. Мостовникова // *Опт. журн.* – 2014. – Т. 81, № 6. – С. 51–62.
11. Пути повышения эффективности фототерапевтических технологий лечения гипербилирубинемии новорожденных в свете современных представлений о биофизических механизмах фотоконверсии билирубина / В. Ю. Плавский [и др.] // *Инновационные технологии в медицине.* – 2014. – Т. 2, № 1. – С. 84–98.
12. *Landen, G. L.* On the role of singlet oxygen in the self-sensitized photo-oxygenation of bilirubin and its pyromethenone models / G. L. Landen, Y. T. Park, D. A. Lightner // *Tetrahedron.* – 1983. – Vol. 39, N 11. – P. 1893–1907.
13. *Mosmann, T.* Rapid colorimetric assay for cellular growth and survivals: application to proliferation and cytotoxicity assay / T. Mosmann // *J. Immunol Methods.* – 1983. – Vol. 65. – P. 55–63.
14. Cytotoxicity of bilirubin for human fibroblasts and rat astrocytes in culture: effect of the ratio of bilirubin to serum albumin / L. Chuniaud [et al.] // *Clin. Chim. Acta.* – 1996. – Vol. 256 – P. 103–114.
15. *Brito, M. A.* Bilirubin toxicity to human erythrocytes: A review / M. A. Brito, R. F. M. Silva, D. Brites // *Clin. Chim. Acta.* – 2006. – Vol. 374. – P. 46–56.
16. Спектрально-флуоресцентные и поляризационные характеристики *Z,Z*-билирубина IX α / В. Ю. Плавский [и др.] // *Журн. прикладной спектроскопии.* – 2007. – Т. 74, № 1. – С. 108–118.
17. *Мышкин, А. Е.* Фотохимия билирубина. *Успехи химии* / А. Е. Мышкин, В. Н. Сахаров. – 1982. – Т. 51, № 1. – С. 72–91.
18. Phosphorescence of bilirubin and efficiency of bilirubin-sensitized generation of singlet oxygen / V. Yu. Plavskii [et al.] // 37th Meeting of the American Society for Photobiology, San Diego, California, June 14–19, 2014. Program and Abstract. – [S. l.], 2014 – P. 82.

Поступила в редакцию 11.02.2016

УДК 621.315.592

Е. А. ТОЛКАЧЕВА, О. Н. ХОЛОД, Л. И. МУРИН

**ОСОБЕННОСТИ ТРАНСФОРМАЦИИ КИСЛОРОДОСОДЕРЖАЩИХ ЦЕНТРОВ
В КРЕМНИИ ПРИ ОТЖИГЕ В ИНТЕРВАЛЕ ТЕМПЕРАТУР 450–700 °С:
ДАННЫЕ ИК-ПОГЛОЩЕНИЯ**

*Научно-практический центр Национальной академии наук Беларуси по материаловедению, Минск, Беларусь,
e-mail: talkachova@physics.by, holodolga@ifftp.bas-net.by, murin@ifftp.bas-net.by*

Методом ИК-поглощения исследованы особенности трансформации кислородосодержащих радиационно-индуцированных центров в кристаллах кремния, полученных методом Чохральского и облученных быстрыми электронами или нейтронами, в процессе последующего высокотемпературного отжига при $T \geq 450$ °С. Установлено, что в интервале температур 450–700 °С имеет место формирование вакансионно-кислородных комплексов VO_m ($m \geq 5$), обуславливающих появление ряда колебательных полос поглощения в интервале волновых чисел 980–1115 cm^{-1} .

Ключевые слова: кремний, облучение, отжиг, вакансионно-кислородные комплексы, ИК-поглощение.

E. A. TOLKACHEVA, V. N. KHOLAD, L. I. MURIN

**TRANSFORMATION PECULIARITIES OF OXYGEN-CONTAINING CENTERS
IN SILICON UPON ANNEALING IN THE TEMPERATURE RANGE 450–700 °C : IR ABSORPTION STUDIES**

*Scientific-Practical Materials Research Centre of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus,
e-mail: talkachova@physics.by, holodolga@ifftp.bas-net.by, murin@ifftp.bas-net.by*

The transformation peculiarities of oxygen-containing radiation-induced defects in Czochralski-grown silicon irradiated with fast electrons or neutrons upon subsequent high temperature annealing at $T \geq 450$ °C have been investigated by means of IR absorption. It is found that in the temperature range 450–700 °C the vacancy-oxygen-related complexes VO_m ($m \geq 5$) are formed. These complexes are responsible for the appearance of a number of vibrational absorption bands in the wave number range 980–1115 cm^{-1} .

Keywords: silicon, irradiation, annealing, vacancy-oxygen-related complexes, IR absorption.

Введение. В технологии создания кремниевых приборов и интегральных микросхем одним из основных способов пассивации нежелательных примесей, в первую очередь примесей переходных металлов, является так называемое внутреннее геттерирование [1–3]. Суть его заключается в следующем: в объеме полупроводниковой пластины в результате высокотемпературных обработок формируются кислородные преципитаты, являющиеся стоками для фоновых примесей. В то же время в рабочей области полупроводниковых приборов создается бездефектная область в результате специально проведенной операции out-диффузии примесных атомов кислорода. Было проведено большое количество исследований, как экспериментальных, так и теоретических, по изучению механизмов формирования внутренних геттеров и в результате выяснено влияние ряда факторов (содержание примесных атомов кислорода, температура и длительность отжигов и т. д.) на процессы преципитации кислорода в кремниевых кристаллах и структурах. Однако до сих пор одним из основных нерешенных вопросов в этой области является проблема формирования центров зарождения кислородных преципитатов. Предполагается, что в специально нелегированных кристаллах кремния такими центрами могут быть вакансионно-кислородные комплексы, обладающие высокой термической стабильностью.

Известно [4–7], что предварительное облучение кристаллов кремния быстрыми электронами и/или нейтронами при комнатной температуре может приводить к значительному ускорению процессов преципитации кислорода в области температур 600–1000 °С. В то же время сам микроскопический механизм формирования радиационно-индуцированных центров (РИЦ), обладающих высокой термической стабильностью, которые могли бы служить предвестниками центров зарождения кислородных преципитатов, в работах [4–7] установлен не был и фактически даже не обсуждался. Лишь в более поздних работах [8–10], выполненных с участием авторов данной статьи, было высказано предположение, что такими РИЦ являются вакансионно-кислородные комплексы VO_m ($m \geq 5$), формирующиеся в процессе отжига облученных кристаллов кремния. В настоящей статье приведены результаты более детальных исследований особенностей отжига (трансформации) кислородосодержащих радиационно-индуцированных центров в кремнии в интервале температур 450–700 °С.

Методика эксперимента. Образцы, использованные в этом исследовании, изготовлялись из промышленных кристаллов кремния *n*-типа (легирующая примесь – фосфор), полученных методом Чохральского (Cz-Si), с удельным сопротивлением ~ 50 и ~ 5 Ом·см (Cz-Si-50, $N_p \approx 8 \cdot 10^{13}$ см⁻³ и Cz-Si-5, $N_p \approx 8 \cdot 10^{14}$ см⁻³). Концентрации междуузельного кислорода $[O_i]$ и углерода замещения $[C_s]$ в исследуемых материалах составляли: $[O_i] = 1,3 \cdot 10^{18}$ см⁻³, $[C_s] \leq 1 \cdot 10^{15}$ см⁻³ в Cz-Si-50 и $[O_i] = 1,1 \cdot 10^{18}$ см⁻³, $[C_s] \sim 5 \cdot 10^{15}$ см⁻³ в Cz-Si-5. Образцы полировались с двух сторон и имели размеры $10 \times 5 \times 3$ мм³. Спектры ИК-поглощения измерялись при 20 и 300 К (спектральное разрешение 0,5–1,0 см⁻¹) в области волновых чисел 400–4000 см⁻¹. Концентрации междуузельных атомов кислорода (O_i) и узловых атомов углерода (C_s) определялись по интенсивности полос поглощения у 1107 и 605 см⁻¹ с использованием калибровочных коэффициентов $3,14 \cdot 10^{17}$ и $0,94 \cdot 10^{17}$ см⁻² соответственно [11, 12].

Образцы облучались быстрыми электронами с различной энергией, в том числе с энергией 2 и 10 МэВ, в интервале флюенсов $3 \cdot 10^{17}$ – $4 \cdot 10^{18}$ см⁻² при комнатной температуре. Интенсивность потока электронов составляла $1 \cdot 10^{12}$ – $1 \cdot 10^{13}$ см⁻²с⁻¹. В большинстве случаев измерения спектров ИК-поглощения проводились после длительного хранения облученных образцов при комнатной температуре. Некоторые из образцов Si облучались быстрыми реакторными нейтронами при $T \sim 350$ К, а также быстрыми электронами с энергией 2 МэВ при 350 °С.

Результаты и их обсуждение. На рис. 1, *a* показаны фрагменты спектров ИК-поглощения в интервале волновых чисел 900–1115 см⁻¹ образца Cz-Si-5, облученного электронами с энергией 10 МэВ при комнатной температуре и затем отожженного изохронно (30 мин) от 75 до 500 °С с шагом 25 °С и далее от 500 вплоть до 700 °С с шагом 50 °С. Для упрощения представлены только спектры после отжигов при 600, 650 и 700 °С. После отжига при 600 °С полосы, связанные с VO_3 (при 910, 975 и 1005 см⁻¹) и VO_4 (при 991 и 1014 см⁻¹) [9], являются доминирующими. С возрастанием температуры до 650 °С они исчезают, в то же время генерируются новые полосы, подобные тем, которые наблюдались при отжиге кристаллов, прошедших предварительные термообработки при 450 °С [8, 10]. Наиболее интенсивные из них расположены у 1040, 1056 и 1108 см⁻¹. Идентичность полос, генерируемых при аннигиляции термодоноров и трансформации радиационно-индуцированных центров, наиболее четко видна на рис. 1, *b*, где показаны спектры образцов Cz-Si-50, как предварительно облученных быстрыми нейтронами, так и предварительно отожженных при 450 °С, после отжига при 650 °С в течение 1 ч.

Поскольку в облученных образцах новые полосы появляются при отжиге дефектов VO_3 и VO_4 , то разумно предположить, что они возникают из дефектов VO_5 и/или VO_6 . Положения основных полос при низкой температуре, которые могут быть приписаны данным центрам, показаны на рис. 1, *b*. О возможности трансформации комплексов VO_3 и VO_4 в VO_5 и VO_6 наглядно свидетельствуют и результаты, представленные на рис. 2. В процессе длительных отжигов при 450 °С кристалла Cz-Si, облученного большой дозой быстрых электронов с энергией 2 МэВ при 350 °С, наблюдалось уменьшение амплитуды полос, обусловленных VO_3 (при 905, 969 и 1000 см⁻¹) и VO_4 (при 985 и 1009 см⁻¹) и появлялись новые полосы (у 1020, 1036 и 1051 см⁻¹). Следует отметить, что вышеуказанные значения волновых чисел соответствуют комнатным температурам,

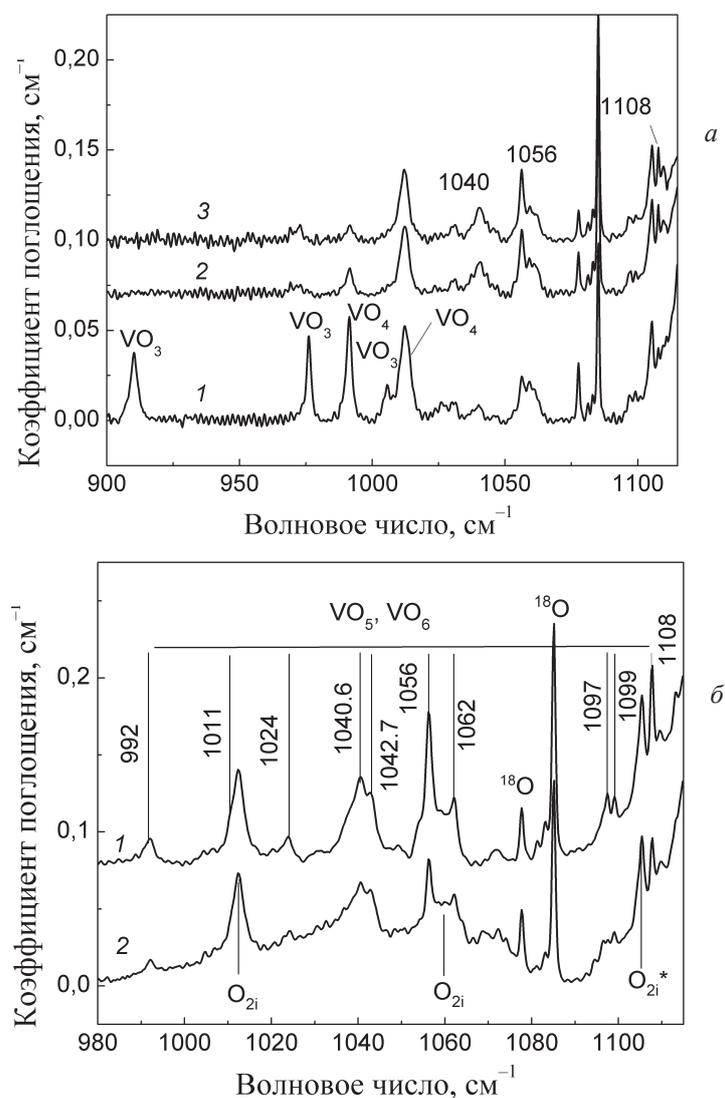


Рис. 1. Фрагменты спектров поглощения: *a* – в интервале волновых чисел 900–1115 см⁻¹, измеренных при 20 К, для образца Cz-Si-5, облученного электронами ($E = 10$ МэВ, $F = 3 \cdot 10^{17}$ см⁻²) при комнатной температуре и прошедшего отжиг в течение 30 мин (1 – при 600 °С; 2 – при 650 °С; 3 – при 700 °С); *б* – в интервале волновых чисел 980–1115 см⁻¹, измеренных при 20 К, для образцов Cz-Si-50, отожженных при 650 °С в течение 1 ч (1 – после облучения быстрыми реакторными нейтронами ($E = 5$ МэВ, $F = 1 \cdot 10^{17}$ см⁻²) при комнатной температуре; 2 – после отжига при 450 °С в течение 240 ч)

при этом имеющий место сдвиг положений максимумов полос от низких температур на 5–6 см⁻¹ является типичным для вакансионно-кислородных комплексов в кремнии.

Наиболее вероятно, что трансформация дефектов VO₃ и VO₄ в комплексы VO₅ и VO₆ может осуществляться посредством захвата подвижных междоузельных атомов кислорода и кислородных димеров, т. е. через реакции



В то же время образование этих же дефектов в предварительно отожженных кристаллах, содержащих малые кислородные кластеры различного типа, в области температур 600–700 °С может происходить в результате инъекции собственных междоузельных атомов Si комплексами O_{im} ($m \geq 5$) [8, 10], т. е. через реакцию



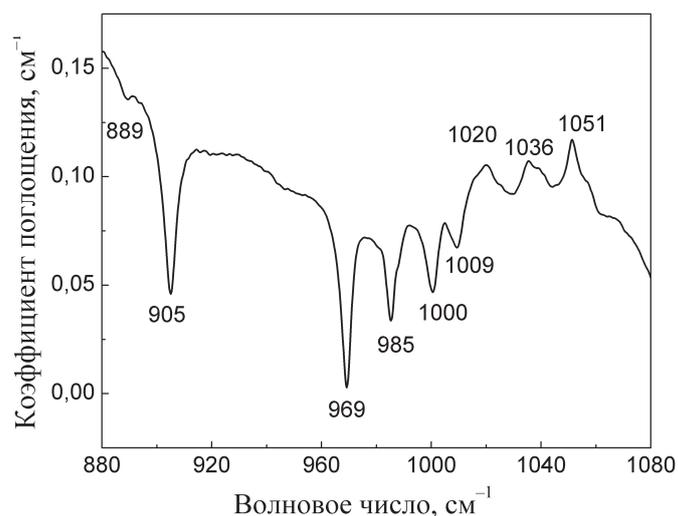


Рис. 2. Фрагмент разностного спектра поглощения в интервале волновых чисел 880–1080 см^{-1} , полученного вычитанием спектра для образца Cz-Si ($[\text{O}_i] = 1,1 \cdot 10^{18}$, $[\text{C}_s] = 5 \cdot 10^{15}$, $[\text{P}] = 7 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$, облученного быстрыми нейтронами ($E = 2,5 \text{ МэВ}$, $F = 4 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-2}$ при 350 °C), измеренного при 300 К после отжига при 450 °C в течение 32 ч из спектра, измеренного после отжига в течение 120 ч

Наиболее вероятно, что именно комплексы VO_{im} ($m \geq 5$), включающие в свой состав не менее пяти атомов кислорода, являются центрами зарождения кислородных преципитатов. Присутствие этих центров, скорее всего, и вызывает ускоренную преципитацию кислорода при повышенных температурах. На рис. 3 показано развитие спектров ИК-поглощения в процессе термического отжига при 650 °C образца Cz-Si-50, облученного быстрыми реакторными нейтронами. Уже после отжигов в течение 10 и 20 ч на спектрах наблюдается появление широкой полосы поглощения, обусловленной кислородными преципитатами [13]. В контрольных (необлученных) образцах аналогичные термообработки при 650 °C не приводили к заметным изменениям спектров поглощения в интервале волновых чисел 950–1250 см^{-1} . Очевидно, что наблюдаемая ускоренная преципитация кислорода в предварительно облученных кристаллах Si, как и в кристаллах, прошедших предварительный отжиг при 450 °C [8, 14], вероятнее всего связана с появлением в материале большого количества центров зарождения кислородных преципитатов. Данные центры являются оптически активными дефектами и проявляются в спектрах ИК-поглощения, измеренных как при низкой, так и при комнатной температуре.

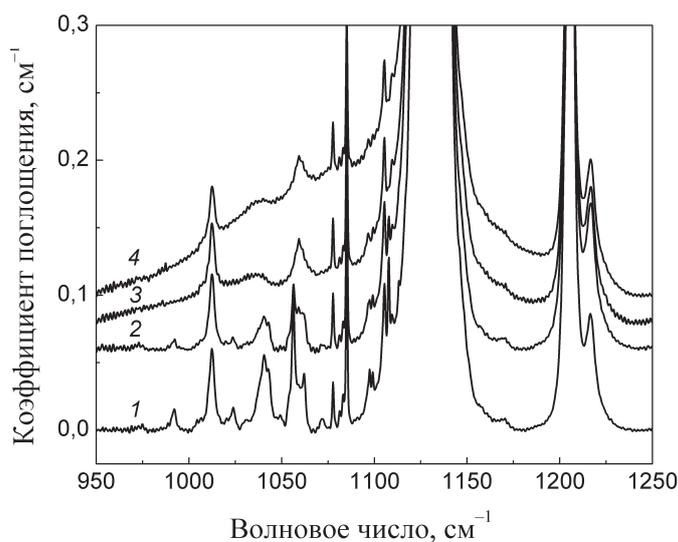


Рис. 3. Фрагменты спектров поглощения, измеренных при 20 К, для образца Cz-Si-50, облученного быстрыми реакторными нейтронами ($E = 5 \text{ МэВ}$, $F = 1 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-2}$) при комнатной температуре и прошедшего отжига различной длительности при 650 °C (1, 2, 3 и 4 – после отжига в течение 1, 2, 10 и 20 ч соответственно)

Заклучение. Методом ИК-поглощения исследованы особенности отжига (трансформации) кислородосодержащих радиационно-индуцированных центров в кремнии в интервале температур 450–700 °С. Установлено, что в кристаллах кремния, полученных методом Чохральского и облученных быстрыми электронами или реакторными нейтронами, в процессе последующего высокотемпературного отжига при $T \geq 450$ °С имеет место формирование вакансионно-кислородных комплексов различного типа, обуславливающих появление ряда колебательных полос поглощения в интервале волновых чисел 980–1120 см^{-1} . Предполагается, что комплексы, формирующиеся в области температур 450–700 °С и обуславливающие полосы у 1042, 1056 и 1107 см^{-1} , включают в свой состав не менее пяти атомов кислорода и являются центрами зарождения кислородных преципитатов.

Авторы выражают благодарность профессору Л. Линдстрему за помощь в проведении оптических измерений и полезные обсуждения. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Т14-040).

Список использованной литературы

1. Shimura, F. Oxygen in Silicon / F. Shimura. – San Diego: Academic Press Inc., 1994.
2. Бабич, В. М. Кислород в монокристаллах кремния / В. М. Бабич, Н. И. Блецкан, Е. Ф. Венгер. – Киев: Интерпрес ЛТД, 1997.
3. Vacancy-assisted oxygen precipitation phenomena in Si / R. Falster [et al.] // Solid State Phenomena. – 1997. – Vol. 57/58. – P. 129–136.
4. Defects in silicon crystals after the high temperature treatment / A. A. Groza [et al.] // Phys. Status Solidi. – 1982. – Vol. A70, N 2. – P. 763–768.
5. Бабицкий, Ю. М. Влияние облучения нейтронами реактора на генерацию высокотемпературных доноров и преципитацию кислорода в кремнии / Ю. М. Бабицкий, П. М. Гринштейн, М. А. Ильин // Физика и техника полупроводников. – 1985. – Т. 19, № 11. – С. 2070–2072.
6. Hallberg, T. Enhanced oxygen precipitation in electron irradiated silicon / T. Hallberg, J. L. Lindstrom // J. Appl. Phys. – 1992. – Vol. 72, N 11. – P. 5130–5138.
7. О влиянии нейтронного облучения на генерацию термодоноров и преципитацию кислорода в кремнии при 650 °С / В. Б. Неймаш [и др.] // Физика и техника полупроводников. – 1993. – Т. 27, № 10. – С. 1651–1655.
8. Thermal double donor annihilation and oxygen precipitation at around 650 °С in Czochralski-grown Si: local vibrational mode studies / L. I. Murin [et al.] // J. Phys.: Condens. Matter. – 2005. – Vol. 17, N 22. – P. S2237–S2246.
9. Мурин, Л. И. Механизмы формирования и термическая стабильность вакансионно-кислородных нанокластеров в облученных кристаллах Si / Л. И. Мурин // Материалы и структуры современной электроники: сб. науч. тр. III Междунар. науч. конф., Минск, 25–26 сент. 2008 г. – Минск: БГУ, 2008. – С. 132–136.
10. Murin, L. I. Oxygen-related nanoclusters formed upon thermal double donor annihilation in silicon / L. I. Murin, E. A. Tolkacheva, B. G. Svensson // Актуальные проблемы физики твердого тела: ФТТ-2009: сб. докл. Междунар. науч. конф., 20–23 окт. 2009 г., Минск: в 3 т. – Минск: А. Н. Вараксин, 2009. – Т. 3. – С. 14–16.
11. Interlaboratory determination of the calibration factor for the measurement of the interstitial oxygen content of silicon by infrared absorption / A. Baghdadi [et al.] // J. Electrochem. Soc. – 1989. – Vol. 136, N 7. – P. 2015–2024.
12. Davies, G. Carbon in monocrystalline silicon / G. Davies, R. C. Newman // Handbook on Semiconductors / ed. by S. Mahajan. – Amsterdam, 1994. – Vol. 3. – P. 1557–1635.
13. Oxygen precipitation in silicon / A. Borghesi [et al.] // J. Appl. Phys. – 1995. – Vol. 77, N 9. – P. 4169–4244.
14. Murin, L. I. Vacancy-oxygen nanoclusters and enhanced oxygen precipitation in silicon / L. I. Murin, E. A. Tolkacheva // Proc. 2nd Intern. Conf. on Modern Applications of Nanotechnology, Minsk, Belarus, 6–8 May 2015. – Minsk, 2015. – P. P096 (1–4).

Поступила в редакцию 27.11.2015