

# ВЕСЦІ НАЦЫЯНАЛЬнай АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСІ

---

СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК. 2018. Т. 54, № 4

---

# ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ

---

СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК. 2018. Т. 54, № 4

---

Журнал основан в 1965 г. как «Весці Акадэміі навук БССР. Серыя фізіка-матэматычных навук»,  
с 1992 г. – «Весці Акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук»,  
с 1998 г. – современное название

Выходит четыре раза в год

Учредитель – Национальная академия наук Беларуси

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь,  
свидетельство о регистрации № 392 от 18.05.2009

Издается при поддержке Белорусского физического общества

*Входит в Перечень научных изданий Республики Беларусь  
для опубликования результатов диссертационных исследований,  
включен в базу данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ)*

Главный редактор

**Сергей Яковлевич Килин** – Президиум Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

Редакционная коллегия

- Н. М. Олехнович** – Научно-практический центр Национальной академии наук Беларуси по материаловедению, Минск, Беларусь (*заместитель главного редактора*)  
**В. А. Орлович** – Отделение физики, математики и информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь (*заместитель главного редактора*)  
**Т. Е. Янчук** – (*ведущий редактор журнала*)  
**С. В. Абламейко** – Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь  
**С. М. Абрамов** – Институт программных систем Российской академии наук, Москва, Россия  
**В. М. Анищик** – Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь  
**А. И. Белоус** – Холдинг «ИНТЕГРАЛ», Минск, Беларусь  
**С. В. Гапоненко** – Белорусский республиканский фонд фундаментальных исследований, Минск, Беларусь  
**А. М. Гончаренко** – Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь  
**А. П. Достанко** – Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь

**Н. А. Изобов** – Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь  
**Н. С. Казак** – Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь  
**В. И. Корзюк** – Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь  
**Ф. П. Коршунов** – Научно-практический центр Национальной академии наук Беларуси по материаловедению, Минск, Беларусь  
**Ю. А. Курочкин** – Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь  
**Н. А. Поклонский** – Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь  
**С. А. Тихомиров** – Отделение физики, математики и информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь  
**Л. М. Томильчик** – Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь  
**А. В. Тузигов** – Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь  
**Ю. С. Харин** – Научно-исследовательский институт прикладных проблем математики и информатики Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь  
**А. Ф. Чернявский** – Институт прикладных физических проблем имени А. Н. Севченко Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь  
**Л. А. Янович** – Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь  
**В. И. Янчевский** – Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

#### Редакционный совет

**С. Я. Килин** – Президиум Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь  
**С. В. Абламейко** – Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь  
**Ж. И. Алферов** – Санкт-Петербургский национальный исследовательский Академический университет Российской академии наук, Санкт-Петербург, Россия  
**А. Л. Асеев** – Президиум Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирск, Россия  
**Й. Врахтруп** – Институт физики (3) Штутгартского университета, Штутгарт, Германия  
**А. М. Желтиков** – Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия  
**В. В. Козлов** – Математический институт имени В. А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия  
**Г. Лёйхс** – Институт физики света имени М. Планка, Эрланген, Германия  
**Д. С. Могилевцев** – Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь  
**Нгуен Дай Хунг** – Институт физики Вьетнамской академии наук и технологий, Ханой, Вьетнам  
**В. А. Орлович** – Отделение физики, математики и информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь  
**А. Цайлингер** – Институт квантовой оптики и квантовой информатики Австрийской академии наук, Вена, Австрия

#### Адрес редакции:

ул. Академическая, 1, к. 119, 220072, г. Минск, Республика Беларусь.

Тел.: + 375 17 284-19-19; e-mail: [fmvesti@mail.ru](mailto:fmvesti@mail.ru)

[vestifm.belnauka.by](http://vestifm.belnauka.by)

---

#### ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ.

Серия физико-математических наук. 2018. Т. 54, № 4.

Выходит на русском, белорусском и английском языках

---

Редактор *Т. Е. Янчук*

Компьютерная верстка *О. Л. Смольской*

Подписано в печать 17.12.2018. Выход в свет 28.12.2018. Формат 60×84<sup>1/8</sup>. Бумага офсетная.

Печать цифровая. Усл. печ. л. 14,88. Уч.-изд. л. 16,4. Тираж 62 экз. Заказ 283.

Цена: индивидуальная подписка – 10,66 руб., ведомственная подписка – 25,67 руб.

Издатель и полиграфическое исполнение:

Республиканское унитарное предприятие «Издательский дом «Беларуская навука».

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/18 от 02.08.2013. ЛП № 02330/455 от 30.12.2013. Ул. Ф. Скорины, 40, 220141, г. Минск, Республика Беларусь

© РУП «Издательский дом «Беларуская навука»,

Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук, 2018

# PROCEEDINGS OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF BELARUS

---

PHYSICS AND MATHEMATICS SERIES, 2018, vol. 54, no. 4

---

The Journal was founded in 1956 under the titles “Proceedings of the Academy of Sciences of BSSR. Physics and Mathematics Series”, since 1992 – “Proceedings of the Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series”, since 1998 – it comes under its actual title

Periodicity is 4 issues per annum

Founder is the National Academy of Sciences of Belarus

The journal is registered on May 18, 2009 by the Ministry of Information of the Republic of Belarus in the State Registry of Mass Media, reg. no. 392

It is published with support of the Belarusian Physical Society

*The Journal is included in The List of Journals for Publication  
of the Results of Dissertation Research in the Republic of Belarus  
and in the database of Russian Science Citation Index (RSCI)*

## Editor-in-Chief

**Sergei Ya. Kilin** – Presidium of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

## Editorial Board

**Nikolai M. Olekhovich** – The Scientific and Practical Materials Research Center of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus (*Associate Editor-in-Chief*)

**Valentin A. Orlovich** – Department of Physics, Mathematics and Informatics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus (*Associate Editor-in-Chief*)

**Tatiana E. Yanchuk** (*lead editor*)

**Sergey V. Ablameyko** – Belarusian State University, Minsk, Belarus

**Sergei M. Abramov** – Program Systems Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

**Viktor M. Anishchik** – Belarusian State University, Minsk, Belarus

**Anatoliy I. Belous** – “INTEGRAL” Holding, Minsk, Belarus

**Sergey V. Gaponenko** – Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research, Minsk, Belarus

**Andrei M. Goncharenko** – B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

**Anatolii P. Dostanko** – Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Belarus

**Nikolai A. Izobov** – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

**Nikolai S. Kazak** – B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

**Viktor I. Korzyuk** – Belarusian State University, Minsk, Belarus

**Fyodor P. Korshunov** – The Scientific and Practical Materials Research Center of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

**Yurii A. Kurochkin** – B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

**Nikolai A. Poklonskii** – Belarusian State University, Minsk, Belarus

**Sergei A. Tikhomirov** – Department of Physics, Mathematics and Informatics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

**Lev M. Tomil'chik** – B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus  
**Aleksandr V. Tuzikov** – United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus  
**Yurii S. Kharin** – Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics of the Belarusian State University, Minsk, Belarus  
**Aleksandr F. Chernyavskii** – A. N. Sevchenko Institute of Applied Physical Problems of Belarusian State University, Minsk, Belarus  
**Leonid A. Yanovich** – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus  
**Vyacheslav I. Yanchevskii** – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

#### Editorial Council

**Sergei Ya. Kilin** – Presidium of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus  
**Sergei V. Ablameyko** – Belarusian State University, Minsk, Belarus  
**Zhores I. Alferov** – St Petersburg National Research Academic University of the Russian Academy of Sciences, St. Petersburg, Russia  
**Aleksandr L. Aseev** – Presidium of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia  
**Jörg Wrachtrup** – Institute of Physics (3) of the University of Stuttgart, Stuttgart, Germany  
**Aleksei M. Zheltikov** – Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia  
**Valery V. Kozlov** – Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia  
**Gerd Leuchs** – Max Planck Institute for the Science of Light, Erlangen, Germany  
**Dmitrii S. Mogilevcev** – B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus  
**Nguyen Dai Hung** – Institute of Physics of the Vietnam Academy of Science and Technology, Hanoi, Vietnam  
**Valentin A. Orlovich** – Department of Physics, Mathematics and Informatics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus  
**Anton Zeilinger** – Institute for Quantum Optics and Quantum Information of the Austrian Academy of Sciences, Vienna, Austria

#### *Address of the Editorial Office:*

*1, Akademicheskaya Str., room 119, 220072, Minsk, Republic of Belarus.  
 Tel.: +375 17 284-19-19; e-mail: fmvesti@mail.ru*

***vestifm.belnauka.by***

---

PROCEEDING OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF BELARUS.

Physics and Mathematics series, 2018, vol. 54, no. 4.

*Printed in Russian, Belarusian and English languages*

---

Editor *T. E. Yanchuk*

Computer imposition *V. L. Smolskaya*

It is sent of the press 17.12.2018. Appearance 28.12.2018. Format 60×84<sup>1</sup>/<sub>8</sub>. Offset paper.  
 The press digital. Printed pages 14,88. Publisher's signatures 16,4. Circulation 62 copies. Order 283.  
 Price: individual subscription – 10,66 byn., departmental subscription – 25,67 byn.

Publisher and printing execution:

Republican unitary enterprise "Publishing House "Belaruskaya Navuka".

Certificate on the state registration of the publisher, manufacturer, distributor of printing editions

No. 1/18 dated August 2, 2013. License for the press no. 02330/455 dated December 30, 2013.

Address: F. Scorina Str., 40, 220141, Minsk, Republic of Belarus.

© RUE "Publishing House "Belaruskaya Navuka",  
 Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series, 2018

ISSN 1561-2430 (Print)  
ISSN 2524-2415 (Online)

## СОДЕРЖАНИЕ

### МАТЕМАТИКА

|                                                                                                                                                                                     |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Корзюк В. И., Столярчук И. И.</b> Классическое решение смешанной задачи для уравнения типа Клейна – Гордона – Фока в полуполосе с косыми производными в граничных условиях ..... | 391 |
| <b>Зверович Э. И., Шилин А. П.</b> Решение интегро-дифференциальных уравнений с сингулярными и гиперсингулярными интегралами специального вида .....                                | 404 |
| <b>Матысик О. В., Савчук В. Ф.</b> Метод итерации решения некорректных уравнений с приближенным оператором в случае априорного выбора параметра регуляризации .....                 | 408 |
| <b>Лиходед Н. А., Полещук М. А.</b> Построение двумерных зернистых параллельных вычислительных процессов .....                                                                      | 417 |
| <b>Жук Е. Е.</b> Статистическое определение тренда ближайшего типа для реализаций нестационарных временных рядов .....                                                              | 427 |
| <b>Бенедиктович В. И.</b> О разности между максимальной степенью и индексом графа .....                                                                                             | 434 |
| <b>Копать Д. Я., Маталыцкий М. А.</b> Анализ G-сети с ненадежными линиями обслуживания .....                                                                                        | 441 |
| <b>Волков В. М., Проконина Е. В.</b> Разностные схемы и итерационные методы для многомерных эллиптических уравнений со смешанными производными .....                                | 454 |
| <b>Башун С. Ю.</b> О перестановочности силовой 2-подгруппы с некоторыми бипримарными подгруппами .....                                                                              | 460 |
| <b>Ковалёва И. С.</b> Преобразование Маркова – Стильеса мер и некоторые его приложения .....                                                                                        | 468 |

### ФИЗИКА

|                                                                                                                                                                                                              |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Углов В. В.</b> Упругие свойства наноструктурированных материалов и их радиационная стойкость .....                                                                                                       | 480 |
| <b>Петров Н. С., Курилкина С. Н., Зимин А. Б., Белый В. Н.</b> Свойства и энергетические характеристики особых неоднородных электромагнитных волн в гиперболических метаматериалах .....                     | 488 |
| <b>Маршалова Г. С., Сверчков С. А.</b> Сравнительный анализ результатов экспериментального исследования и численного моделирования теплоотдачи однорядного пучка оребренных труб при смешанной конвекции ... | 499 |
| Перечень статей, опубликованных в журнале «Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук» в 2018 году .....                                                                    | 507 |

ISSN 1561-2430 (Print)

ISSN 2524-2415 (Online)

## ***CONTENTS***

### **MATHEMATICS**

|                                                                                                                                                                                                   |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Korzyuk V. I., Stolyarchuk I. I.</b> Classical solution of the mixed problem for the Klein – Gordon – Fock type equation in the half-strip with curve derivatives at boundary conditions ..... | 391 |
| <b>Zverovich E. I., Shilin A. P.</b> Integro-differential equations with singular and hypersingular integrals .....                                                                               | 404 |
| <b>Matysik O. V., Savchuk V. F.</b> Method of iteration of solving invariant equations with an approximate operator in the case of an arbitrary choice of the regularization parameter .....      | 408 |
| <b>Likhoded N. A., Paliashchuk M. A.</b> Tiled parallel 2D computational processes .....                                                                                                          | 417 |
| <b>Zhuk E. E.</b> Statistical determination of the nearest type trend for realizations of non-stationary time series .....                                                                        | 427 |
| <b>Benediktovich V. I.</b> Difference between the maximum degree and the index of a graph .....                                                                                                   | 434 |
| <b>Kopats D. J., Matalytski M. A.</b> Analysis of G-network with unreliable service systems .....                                                                                                 | 441 |
| <b>Volkov V. M., Prakonina A. U.</b> Finite-difference schemes and iterative methods for multidimensional elliptic equations with mixed derivatives .....                                         | 454 |
| <b>Bashun S. Yu.</b> Permutability of the Sylow 2-subgroup with some biprimary subgroups .....                                                                                                    | 460 |
| <b>Kovalyova I. S.</b> Markov – Stieltjes transformation of measures and some of its applications .....                                                                                           | 468 |

### **PHYSICS**

|                                                                                                                                                                                     |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Uglov V. V.</b> Elastic properties of nanostructured materials and their radiation resistance .....                                                                              | 480 |
| <b>Petrov N. S., Kurilkina S. N., Zimin A. B., Belyi V. N.</b> Features and energy characteristics of special inhomogeneous electromagnetic waves in hyperbolic metamaterials ..... | 488 |
| <b>Marshalova G. S., Sverchkov S. A.</b> Comparative analysis of experimental investigations and numerical simulation of single-row finned tube bundle at mixed convection .....    | 499 |
| List of Publications for 2018 in “Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series” .....                                                 | 507 |

ISSN 1561-2430 (Print)  
ISSN 2524-2415 (Online)

**МАТЕМАТИКА**  
**MATHEMATICS**

УДК 517.958  
<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-391-403>

Поступила в редакцию 22.10.2018  
Received 22.10.2018

**В. И. Корзюк<sup>1,2</sup>, И. И. Столярчук<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь*

<sup>2</sup>*Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь*

**КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ  
ТИПА КЛЕЙНА – ГОРДОНА – ФОКА В ПОЛУПОЛОСЕ  
С КОСЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ В ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ**

**Аннотация.** Рассматривается смешанная задача для уравнения типа Клейна – Гордона – Фока в полуполосе с первыми косыми производными в граничных условиях. При решении указанной задачи с помощью метода характеристик возникают эквивалентные интегральные уравнения Вольтерры второго рода. Для полученных интегральных уравнений доказано существование единственного решения в классе дважды непрерывно дифференцируемых функций при заданной гладкости исходных данных. Показывается, что для гладкости решения поставленной задачи необходимо и достаточно выполнения условий согласования заданных функций при их достаточной гладкости. Метод характеристик сводится к разбиению всей области решения на подобласти, в каждой из которых строятся решения подзадач с использованием начальных и граничных условий. Полученные решения затем склеиваются в общих точках, порождая условия склейки, которые и являются условиями согласования. В настоящей работе рассматривается случай, когда направления производных в граничных условиях не совпадают с характеристическими направлениями. Данный подход позволяет строить как точные решения, так и приближенные. Точные решения могут быть найдены в том случае, если удастся разрешить эквивалентные интегральные уравнения Вольтерры. В противном случае можно найти приближенное решение задачи либо в аналитическом, либо в численном виде. Наряду с этим при построении приближенного решения существенными оказываются условия согласования, которые необходимо учитывать при использовании численных методов решения задачи.

**Ключевые слова:** уравнение Клейна – Гордона – Фока, метод характеристик, косые производные, классическое решение, смешанная задача, условия согласования

**Для цитирования.** Корзюк, В. И. Классическое решение смешанной задачи для уравнения типа Клейна – Гордона – Фока в полуполосе с косыми производными в граничных условиях / В. И. Корзюк, И. И. Столярчук // Вест. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2018. – Т. 54, № 4. – С. 391–403. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-391-403>

**V. I. Korzyuk<sup>1,2</sup>, I. I. Stolyarchuk<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus*

<sup>2</sup>*Belarusian State University, Minsk, Belarus*

**CLASSICAL SOLUTION OF THE MIXED PROBLEM FOR THE KLEIN – GORDON – FOCK TYPE EQUATION  
IN THE HALF-STRIP WITH CURVE DERIVATIVES AT BOUNDARY CONDITIONS**

**Abstract.** The mixed problem for the one-dimensional Klein – Gordon – Fock type equation with curve derivatives at boundary conditions is considered in the half-strip. The solution of this problem is reduced to solving the second-type Volterra integral equations. Theorems of existence and uniqueness of the solution in the class of twice continuously differentiable functions were proven for these equations when initial functions are smooth enough. It is proven that the fulfillment of the matching conditions on the given functions is necessary and sufficient for the existence of the unique smooth solution when initial functions are smooth enough. The method of characteristics is used for the problem analysis. This method is reduced to splitting the original area of definition to the subdomains. The solution of the subproblem can be constructed in each subdomain with the help of the initial and boundary conditions. Then, the obtained solutions are glued in common

points, and the obtained glued conditions are the matching conditions. This approach can be used in constructing as an analytical solution when a solution of the integral equation can be found in an explicit way, so an approximate solution. Moreover, approximate solutions can be constructed in numerical or analytical form. When a numerical solution is built, the matching conditions are essential and they need to be considered while developing numerical methods.

**Keywords:** Klein – Gordon – Fock equation, characteristics method, curve derivatives, classical solution, mixed problem, matching conditions

**For citation.** Korzyuk V. I., Stolyarchuk I. I. Classical solution of the mixed problem for the Klein – Gordon – Fock type equation in the half-strip with curve derivatives at boundary conditions. *Vestsi Natsyional'noi akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, vol. 54, no. 4, pp. 391–403 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-391-403>

**Введение.** Уравнение типа Клейна – Гордона – Фока, описывающее динамику релятивистской квантовой системы [1, 2], представляет собой дифференциальное уравнение в частных производных, относящееся к классу гиперболических уравнений второго порядка.

В данной статье рассматривается смешанная задача для уравнения типа Клейна – Гордона – Фока с косыми производными первого порядка в граничных условиях для случая, когда направления косых производных в граничных условиях не совпадают с характеристическим. В [3] исследована смешанная задача для уравнения колебания полуограниченной струны. Статья [4] посвящена изучению задачи для колебания уже ограниченной струны с косыми производными в граничных условиях. В настоящей работе рассмотрена смешанная задача для уравнения Клейна – Гордона – Фока, в которой на обеих боковых границах полуполосы граничные условия содержат косые производные первого порядка. Для исследования поставленной задачи применяется хорошо зарекомендовавший себя метод характеристик, который использовался при изучении смешанных задач для волнового уравнения [5], а также первой смешанной задачи для уравнения Клейна – Гордона – Фока [6]. Решение получено в виде интегральных уравнений Вольтерры второго рода, которые достаточно легко поддаются численному решению. Выводятся необходимые и достаточные условия существования единственного решения в классе  $C^2(\overline{Q})$ .

**1. Постановка задачи.** В замыкании  $\overline{Q}$  области  $Q = \{(t, x) | t \in (0; \infty), x \in (0; l)\}$  задается гиперболическое дифференциальное уравнение второго порядка

$$\partial_t^2 w - a^2 \partial_x^2 w - \lambda(t, x)w = f(t, x), \quad (1)$$

где для определенности считаем, что  $a > 0$ .

К уравнению (1) присоединяются условия Коши

$$w(0, x) = \varphi(x), \partial_t w(0, x) = \psi(x), x \in [0; l], \quad (2)$$

и граничные условия

$$\begin{aligned} B^{(0)}w &= r_1^{(0)}(t)\partial_t w(t, 0) + r_2^{(0)}(t)\partial_x w(t, 0) + r_3^{(0)}(t)w(t, 0) = \widetilde{\mu}^{(0)}(t), t \in [0; \infty), \\ B^{(l)}w &= r_1^{(l)}(t)\partial_t w(t, l) + r_2^{(l)}(t)\partial_x w(t, l) + r_3^{(l)}(t)w(t, l) = \widetilde{\mu}^{(l)}(t), t \in [0; \infty), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $r_2^{(0)}(t) - ar_1^{(0)}(t) \neq 0$ ,  $r_2^{(l)}(t) + ar_1^{(l)}(t) \neq 0$  и  $\sum_{j=1}^3 \left(r_j^{(m)}(t)\right)^2 \neq 0 \quad \forall t, m \in \{0, l\}$ .

Условия (3) назовем граничными условиями с косыми производными [3; 4; 7, с. 403].

**2. Частное решение неоднородного уравнения.** В силу линейности задачи (1)–(3) общее решение  $w(t, x) \in C^2(\overline{Q})$  уравнения (1) представимо в виде  $w(t, x) = v(t, x) + u(t, x)$ , где  $v(t, x)$  – частное решение неоднородного уравнения из  $C^2(\overline{Q})$ , а  $u(t, x)$  – общее решение однородного уравнения, также из  $C^2(\overline{Q})$ .

Построение частного решения  $v(t, x)$  будем осуществлять локально на подмножествах  $Q^{(k)}$  области  $Q$ . Линиями  $t = \frac{kl}{a}$  разделим область  $Q$  на подобласти  $Q^{(k)}$ ,

где

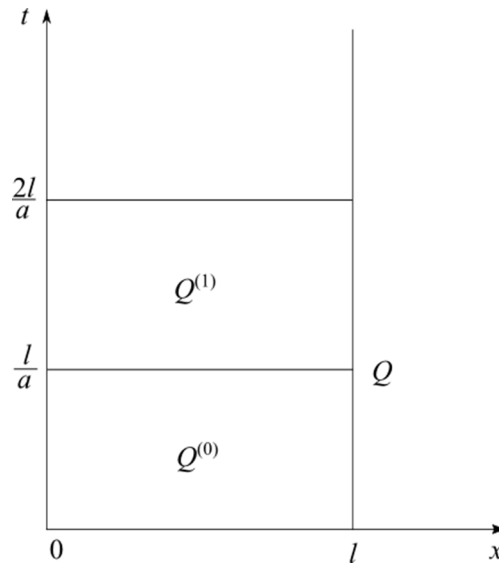


Рис. 1. Область  $Q$

Fig. 1. Domain  $Q$

$$Q^{(k)} = \left\{ (t, x) \mid t \in \left( \frac{kl}{a}, \frac{(k+1)l}{a} \right), x \in (0; l) \right\}, k = 0, 1, 2, \dots$$

Разбиение области  $Q$  на подобласти  $Q^{(k)}$  изображено на рис. 1.

Рассмотрим неоднородное уравнение

$$\partial_t^2 v - a^2 \partial_x^2 v - \lambda(t, x)v = f(t, x) \quad (4)$$

с однородными начальными условиями

$$v(0, x) = 0, \partial_t v(0, x) = 0, x \in [0; l]. \quad (5)$$

Общее решение уравнения (4) в области  $Q^{(k)}$  можно записать в виде

$$v^{(k)}(t, x) = -\frac{1}{4a^2} \int_{-kl}^{x-at} \int_{(k+1)l}^{x+at} (\lambda v^{(k)} + f) \left( \frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2} \right) dz dy + h^{(1,k)}(x-at) + h^{(2,k)}(x+at), \quad (6)$$

где  $h^{(1,k)}, h^{(2,k)}$  – произвольные функции из класса  $C^2$  на области своего задания, которые являются решениями однородного волнового уравнения  $\partial_t^2 v - a^2 \partial_x^2 v = 0$ . Решение уравнения (4) в области  $Q$  представимо как  $v(t, x) = v^{(k)}(t, x), (t, x) \in Q^{(k)}$ .

**Теорема 1.** Пусть  $\lambda(t, x), f(t, x) \in C^1(\overline{Q})$ ,  $h^{(1,k)} \in C^2([- (k+1)l; - (k-1)l])$ ,  $h^{(2,k)} \in C^2([kl; (k+2)l])$ , тогда решение уравнения (6) существует в классе  $C^2(Q^{(k)})$  и может быть найдено с помощью метода последовательных приближений. Кроме того,  $v(t, x) \in C^2(\overline{Q})$ .

Доказательство теоремы приведено в работах [8, 9].

Так как задача (1)–(3) линейна, то при выполнении теоремы 1 она сводится к решению задачи для однородного уравнения  $Lu = 0$ , т. е. задачи

$$\partial_t^2 u - a^2 \partial_x^2 u - \lambda(t, x)u = 0, \quad (7)$$

$$u(0, x) = \varphi(x), \partial_t u(0, x) = \psi(x), x \in [0; l], \quad (8)$$

$$\begin{aligned} r_1^{(0)}(t)\partial_t u(t,0) + r_2^{(0)}(t)\partial_x u(t,0) + r_3^{(0)}(t)u(t,0) &= \mu^{(0)}(t), \quad t \in [0;\infty), \\ r_1^{(l)}(t)\partial_t u(t,l) + r_2^{(l)}(t)\partial_x u(t,l) + r_3^{(l)}(t)u(t,l) &= \mu^{(l)}(t), \quad t \in [0;\infty). \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь  $\mu^{(i)}(t) = \widetilde{\mu^{(i)}}(t) - B^{(i)}v(t,i)$ ,  $i \in \{0,l\}$ ,  $v$  – решение задачи (4), (5) для неоднородного уравнения.

**3. Решение однородного уравнения.** Уравнение (7) можно записать в каноническом виде. Для этого сделаем замену независимых переменных

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at, \quad (10)$$

или

$$t = \frac{\eta - \xi}{2a}, \quad x = \frac{\eta + \xi}{2}. \quad (11)$$

В результате замены (10) или (11) уравнение (7) запишется в виде

$$\partial_{\xi\eta} v - b(\xi, \eta)v = 0, \quad (12)$$

где  $b(\xi, \eta) = -\lambda(t, x) \frac{1}{4a^2} = -\frac{1}{4a^2} \lambda\left(\frac{\xi - \eta}{2a}, \frac{\xi + \eta}{2}\right)$ .

Область  $\Omega$ , которая является образом области  $Q$  при преобразовании (10), разделим прямыми  $\eta = \xi + 2kl$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , на подобласти  $\Omega^{(k)}$ . Подобласть  $\Omega^{(k)}$  находится между прямыми  $\eta = \xi + 2kl$  и  $\eta = \xi + 2(k+1)l$ .

В подобластях  $\Omega^{(k)}$  решение  $v^{(k)}(\xi, \eta)$  уравнения (12) путем интегрирования представим в виде уравнения Вольтерры

$$v^{(k)}(\xi, \eta) = \int_{-kl}^{\xi} \int_{(k+1)l}^{\eta} b(y, z)v^{(k)}(y, z)dzdy + p^{(k)}(\xi) + g^{(k)}(\eta), \quad (13)$$

где  $p^{(k)}, g^{(k)}$  – произвольные функции.

В уравнении (13) вернемся к переменным  $(t, x)$  с помощью замены (11):

$$u^{(k)}(t, x) = -\frac{1}{4a^2} \int_{-kl}^{x-at} \int_{(k+1)l}^{x+at} (\lambda u^{(k)})\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right) dzdy + p^{(k)}(x-at) + g^{(k)}(x+at). \quad (14)$$

При замене (11) подобласти  $\Omega^{(k)}$  перейдут в подобласти  $Q^{(k)}$ , которые изображены на рис. 1.

**Теорема 2.** Пусть  $\lambda(t, x) \in C^1(\overline{Q^{(k)}})$ . Тогда решение  $u^{(k)}(t, x)$  уравнения (14) существует, единственно, принадлежит классу  $C^2(\overline{Q^{(k)}})$  и непрерывно зависит от правой части тогда и только тогда, когда  $p^{(k)} \in C^2([- (k+1)l; - (k-1)l])$ ,  $g^{(k)} \in C^2([kl; (k+2)l])$ .

Доказательство приведено в работах [8, 9].

Для применения метода характеристик область  $Q^{(k)}$  для каждого индекса  $k = 0, 1, 2, \dots$  с характеристиками  $x - at = -kl$ ,  $x + at = (k+1)l$  разделим на четыре подобласти  $Q^{(k,j)}$ ,  $j = \overline{1, 4}$ , следующим образом:

$$\begin{aligned} Q^{(k,1)} &= \{(t, x) \in Q^{(k)} \mid x \in (0; l/2], at < x - kl\} \cup \{(t, x) \in Q^{(k)} \mid x \in [l/2; l], at < -x + (k+1)l\}, \\ Q^{(k,2)} &= \{(t, x) \in Q^{(k)} \mid x \in (0; l/2), x - kl < at < -x + (k+1)l\}, \\ Q^{(k,3)} &= \{(t, x) \in Q^{(k)} \mid x \in (l/2; l), -x + (k+1)l < at < x - kl\}, \\ Q^{(k,4)} &= \{(t, x) \in Q^{(k)} \mid x \in (0; l/2], at > -x + (k+1)l\} \cup \{(t, x) \in Q^{(k)} \mid x \in [l/2; l], at > x - kl\}. \end{aligned}$$

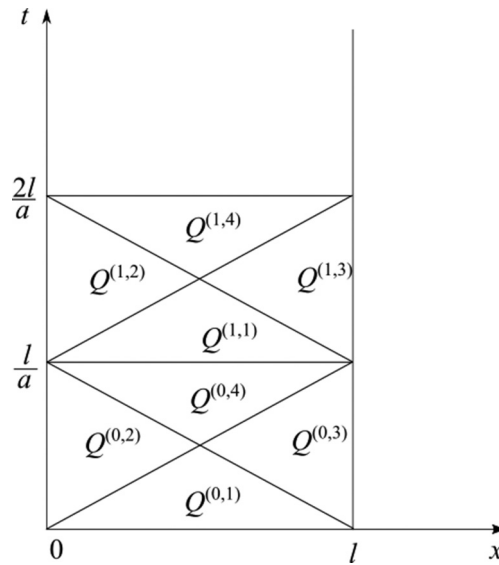


Рис. 2. Разбиение области  $Q^{(k)}$  на подобласти  $Q^{(k,j)}$ ,  $j = \overline{1,4}$

Fig. 2. Domain  $Q^{(k)}$  splitting to subdomains  $Q^{(k,j)}$ ,  $j = \overline{1,4}$

Подобласти  $Q^{(k,j)}$  представлены на рис. 2.

Рассмотрим решение задачи (7)–(9) в каждой из подобластей  $\overline{Q^{(k)}}$ , используя условия Коши и граничные условия с косыми производными.

**Задача Коши.** В области  $Q^{(k)}$  рассмотрим решение (14), удовлетворяющее условиям Коши

$$\begin{aligned} u(t, x)|_{t=kl/a} &= \varphi^{(k)}(x), \quad x \in [0; l], \\ \partial_t u(t, x)|_{t=kl/a} &= \psi^{(k)}(x), \quad x \in [0; l]. \end{aligned} \quad (15)$$

Задача Коши (14), (15) решается аналогично смешанной задаче с граничными условиями первого рода, которая рассмотрена в работе [6]. Приведем представления функций  $p^{(k)}$  и  $g^{(k)}$  для данного случая:

$$p^{(k)}(z) = \frac{1}{2} \left( \varphi^{(k)}(z + kl) - \Psi^{(k)}(z + kl) - C \right) + \int_{(k+1)l}^{z+2kl} \int_z^{\eta-2kl} \mathcal{L}u^{(k)}(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad z \in [-kl; -(k-1)l], \quad (16)$$

$$g^{(k)}(y) = \frac{1}{2} \left( \varphi^{(k)}(y - kl) + \Psi^{(k)}(y - kl) + C \right) + \int_{(k+1)l}^y \int_{\eta-2kl}^{-kl} \mathcal{L}u^{(k)}(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad y \in [kl; (k+1)l], \quad (17)$$

где  $\Psi^{(k)}(x) = \frac{1}{a} \int_l^x \psi^{(k)}(\xi) d\xi$  и  $\mathcal{L}u^{(k)}(y, z) = -\frac{1}{4a^2} \left( \lambda u^{(k)} \right) \left( \frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2} \right)$ .

Исходя из формул (16), (17), запишем представление решения задачи (14), (15) в области  $Q^{(k,1)}$ :

$$\begin{aligned} u^{(k)}(t, x) &= \int_{x+at-2kl}^{x-at} \int_{y+2kl}^{x+at} \mathcal{L}u^{(k)}(\xi, \eta) d\eta d\xi + \frac{1}{2} \left( \varphi^{(k)}(x - at + kl) + \varphi^{(k)}(x + at - kl) \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \left( \Psi^{(k)}(x + at - kl) - \Psi^{(k)}(x - at + kl) \right). \end{aligned} \quad (18)$$

**Условие на левой границе.** С помощью первого из условий (9) получаем следующее уравнение для нахождения неизвестной функции  $p^{(k)}$  в области  $Q^{(k,2)}$ :

$$\begin{aligned} & \left( r_2^{(0)}(t) - ar_1^{(0)}(t) \right) \left( \int_{(k+1)l}^{-at} \mathcal{L}u^{(k)}(-at, z) dz + dp^{(k)}(-at) \right) + \left( r_2^{(0)}(t) + ar_1^{(0)}(t) \right) \times \\ & \times \left( \int_{-kl}^{-at} \mathcal{L}u^{(k)}(y, at) dy + dg^{(k)}(at) \right) + r_3^{(0)}(t) \left( \int_{-kl(k+1)l}^{-at} \int_{-kl(k+1)l}^{at} \mathcal{L}u^{(k)}(y, z) dz dy + p^{(k)}(-at) + \right. \\ & \left. + \widetilde{g^{(k)}}(at) + \frac{C}{2} \right) = \mu^{(0)}(t), \end{aligned} \quad (19)$$

где  $\widetilde{g^{(k)}} = g^{(k)} - \frac{C}{2}$ .

Далее введем в рассмотрение функцию  $\theta(\xi)$ , которая определяется по формуле

$$\theta(\xi) = r_2^{(0)} \left( -\frac{\xi}{a} \right) - ar_1^{(0)} \left( -\frac{\xi}{a} \right). \quad (20)$$

В уравнении (19) в левую часть вынесем все слагаемые, содержащие неизвестную функцию  $p^{(k)}$ . С помощью (20) и замены  $-at = \xi$ ,  $\xi \in [-(k+1)l; -kl]$  уравнение (19) запишется в виде

$$\theta(\xi) dp^{(k)}(\xi) + r_3^{(0)} \left( -\frac{\xi}{a} \right) p^{(k)}(\xi) = Z^{(k)}(\xi) - r_3^{(0)} \left( -\frac{\xi}{a} \right) \frac{C}{2}, \quad (21)$$

где функция

$$\begin{aligned} Z^{(k)}(\xi) = & \mu^{(0)} \left( -\frac{\xi}{a} \right) - \theta(\xi) \int_{(k+1)l}^{-\xi} \mathcal{L}u^{(k)}(\xi, z) dz - \left( r_2^{(0)} \left( -\frac{\xi}{a} \right) + ar_1^{(0)} \left( -\frac{\xi}{a} \right) \right) \times \\ & \times \left( \int_{-kl}^{\xi} \mathcal{L}u^{(k)}(y, -\xi) dy + dg^{(k)}(-\xi) \right) - r_3^{(0)} \left( -\frac{\xi}{a} \right) \left( \int_{-kl(k+1)l}^{-\xi} \int_{-kl(k+1)l}^{\xi} \mathcal{L}u^{(k)}(y, z) dz dy + \widetilde{g^{(k)}}(-\xi) \right) \end{aligned} \quad (22)$$

не содержит ни неизвестной функции  $p^{(k)}$ , ни свободной постоянной  $C$ .

В рассматриваемом случае, когда  $\theta(\xi) \neq 0$ , уравнение (21) можно разделить на  $\theta(\xi)$ . В результате получим линейное дифференциальное уравнение для нахождения неизвестной функции  $p^{(k)}$ :

$$dp^{(k)}(\xi) + \frac{p^{(k)}(\xi)}{\theta(\xi)} r_3^{(0)} \left( -\frac{\xi}{a} \right) = \frac{Z^{(k)}(\xi)}{\theta(\xi)} - \frac{1}{\theta(\xi)} r_3^{(0)} \left( -\frac{\xi}{a} \right) \frac{C}{2}, \quad \xi \in [-(k+1)l; -kl]. \quad (23)$$

Как известно из теории обыкновенных дифференциальных уравнений, решение уравнения (23) можно записать в следующем виде [10, с. 35]:

$$p^{(k)}(\xi) = e^{-\int_{-kl}^{\xi} \frac{r_3^{(0)}(-\xi_1/a)}{\theta(\xi_1)} d\xi_1} \left( C_p + \int_{-kl}^{\xi} \frac{Z^{(k)}(\xi_1)}{\theta(\xi_1)} e^{-\int_{-kl}^{\xi_1} \frac{r_3^{(0)}(-\xi_2/a)}{\theta(\xi_2)} d\xi_2} d\xi_1 \right) - \frac{C}{2}, \quad \theta(\xi) \neq 0. \quad (24)$$

Для того чтобы функция  $p^{(k)}(\xi)$  была непрерывной в точке  $\xi = -kl$ , определим свободную константу  $C_p$ , приравняв значения функций  $p^{(k)}$ , определенных по формулам (16) и (24), в точке  $\xi = -kl$ . Искомая константа имеет следующий вид:

$$C_p = \frac{\varphi^{(k)}(0)}{2} - \frac{1}{2a_l} \int_l^0 \psi^{(k)}(\xi) d\xi + \int_{(k+1)l}^{kl} d\eta \int_{-kl}^{\eta-2kl} \mathcal{L}u^{(k)}(\xi, \eta) d\xi. \quad (25)$$

Исходя из условия (25), функция  $p^{(k)}$  из (24) записывается как

$$p^{(k)}(\xi) = e^{-\int_{-kl}^{\xi} \frac{r_3^{(0)}\left(\frac{-\xi_1}{a}\right)}{\theta(\xi_1)} d\xi_1} \left( \frac{1}{2} \varphi^{(k)}(0) - \frac{1}{2} \Psi^{(k)}(0) + \int_{(k+1)l}^{kl} \int_{-kl}^{z-2kl} \mathcal{L}u^{(k)}(y, z) dy dz + \right. \\ \left. + \int_{-kl}^{\xi} \frac{Z^{(k)}(\xi_1)}{\theta(\xi_1)} e^{-\int_{-kl}^{\xi_1} \frac{r_3^{(0)}\left(\frac{-\xi_2}{a}\right)}{\theta(\xi_2)} d\xi_2} d\xi_1 \right) - \frac{C}{2}, \quad \xi \in [-(k+1)l; -kl]. \quad (26)$$

Решение задачи (7)–(9) в области  $Q^{(k,2)}$  имеет следующий вид:

$$u^{(k)}(t, x) = \int_{-kl}^{x-at} \int_{(k+1)l}^{x+at} \mathcal{L}u^{(k)}(y, z) dy dz + p^{(k)}(x-at) + g^{(k)}(x+at), \quad (27)$$

где функция  $p^{(k)}$  определена по формуле (26).

Стоит отметить, что только при выборе константы  $C_p$  в виде выражения (25) решение  $u^{(k)}(t, x), (t, x) \in \overline{Q^{(k,j)}}, j=1, 2$ , задачи (7)–(9) будет принадлежать классу  $C(\overline{Q^{(k,1)}} \cup \overline{Q^{(k,2)}})$ .

Для того чтобы решение  $u^{(k)}(t, x)$  задачи (7)–(9) на множестве  $\overline{Q^{(k,1)}} \cup \overline{Q^{(k,2)}}$  было непрерывно дифференцируемым, необходимо совпадение производных первого порядка функций  $p^{(k)}$ , определенных по формулам (16) и (26). Приравнявая производные в точке  $\xi = -kl$ , получим условие согласования на производные заданных функций

$$\mu^{(0)}\left(\frac{kl}{a}\right) - r_3^{(0)}\left(\frac{kl}{a}\right) \left( \varphi^{(k)}(0) \right) - r_2^{(0)}\left(\frac{kl}{a}\right) d\varphi^{(k)}(0) - r_1^{(0)}\left(\frac{kl}{a}\right) \Psi^{(k)}(0) = 0. \quad (28)$$

Аналогично, дважды дифференцируя (16) и (26) и находя разность полученных выражений в точке согласования  $\xi = -kl$ , получаем очередное условие согласования на заданные функции

$$\left( r_2^{(0)}\left(\frac{kl}{a}\right) dr_1^{(0)}\left(\frac{kl}{a}\right) - r_1^{(0)}\left(\frac{kl}{a}\right) dr_2^{(0)}\left(\frac{kl}{a}\right) + r_2^{(0)}\left(\frac{kl}{a}\right) r_3^{(0)}\left(\frac{kl}{a}\right) \right) \times \\ \times \left( d\varphi^{(k)}(0) + \frac{1}{a} \Psi^{(k)}(0) \right) - (\theta(-kl))^2 \frac{1}{a} \left( d \frac{\mu^{(0)}(t)}{r_2^{(0)}(t) - ar_1^{(0)}(t)} \right) \Big|_{t=kl/a} - \\ - \mu^{(0)}\left(\frac{kl}{a}\right) r_3^{(0)}\left(\frac{kl}{a}\right) + \varphi^{(k)}(0) \left( -\frac{1}{a} (\theta(-kl))^2 \left( d \frac{r_3^{(0)}(t)}{r_2^{(0)}(t) - ar_1^{(0)}(t)} \right) \Big|_{t=kl/a} + \left( r_3^{(0)}\left(\frac{kl}{a}\right) \right)^2 \right) + \\ + \left( ad^2 \varphi^{(k)}(0) r_1^{(0)}\left(\frac{kl}{a}\right) + \frac{1}{a} d\Psi^{(k)}(0) r_2^{(0)}\left(\frac{kl}{a}\right) \right) \theta(-kl) - \frac{1}{2a^2} \theta(-kl) \lambda\left(\frac{kl}{a}, 0\right) \varphi^{(k)}(0) = 0. \quad (29)$$

**Лемма 1.** Пусть функции  $\varphi^{(k)} \in C^2([0; l])$ ,  $\Psi^{(k)} \in C^1([0; l])$ ; функция  $\mu^{(0)} \in C^1([0; \infty))$ ,  $r_i^{(0)} \in C^1([0; \infty))$ ,  $i = \overline{1, 3}$ , причем функция  $\theta(\xi) \neq 0 \forall \xi \in [-(k+1)l; -kl]$ ;  $\lambda(t, x) \in C^1(\overline{Q})$ . Функция  $p^{(k)}$ , определенная по формулам (16), (26), принадлежит классу  $C^2([-(k+1)l, -(k-1)l])$  тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования, определенные по формулам (28)–(29), а константа  $C_p$  выбирается по формуле (25).

**Условие на правой границе.** Исследование граничного условия на правой границе из (9) во многом повторяет исследование граничного условия на левой границе.

Из второго условия в (9) получаем следующее уравнение для нахождения неизвестной функции  $g^{(k)}$  в области  $Q^{(k,3)}$ :

$$\begin{aligned} & \left( r_2^{(l)}(t) + ar_1^{(l)}(t) \right) dg^{(k)}(l+at) + r_3^{(l)}(t)g^{(k)}(l+at) = \mu^{(l)}(t) - \\ & - r_1^{(l)}(t) \left( a \int_{-kl}^{l-at} \mathcal{L}u^{(k)}(y, l+at) dy - a \int_{(k+1)l}^{l+at} \mathcal{L}u^{(k)}(l-at, z) dz - adp^{(k)}(l-at) \right) - \\ & - r_2^{(l)}(t) \left( \int_{-kl}^{l-at} \mathcal{L}u^{(k)}(y, l+at) dy + \int_{(k+1)l}^{l+at} \mathcal{L}u^{(k)}(l-at, z) dz + dp^{(k)}(l-at) \right) - \\ & - r_3^{(l)}(t) \left( \int_{-kl}^{l-at} \int_{(k+1)l}^{l+at} \mathcal{L}u^{(k)}(y, z) dz dy + \widetilde{p^{(k)}}(l-at) \right) + r_3^{(l)}(t) \frac{C}{2}. \end{aligned} \quad (30)$$

Здесь  $\widetilde{p^{(k)}} = p^{(k)} + \frac{C}{2}$ . Введем обозначение

$$\rho(l+at) = r_2^{(l)}(t) + ar_1^{(l)}(t). \quad (31)$$

С помощью (31) и замены  $\eta = l+at$ ,  $\eta \in [(k+1)l, (k+2)l]$ , уравнение (30) запишется в виде

$$\rho(\eta)dg(\eta) + r_3^{(l)}\left(\frac{\eta-l}{a}\right)g(\eta) = Y^{(k)}(\eta) + r_3^{(l)}\left(\frac{\eta-l}{a}\right)\frac{C}{2}, \quad (32)$$

где

$$\begin{aligned} Y^{(k)}(\eta) = & \mu^{(l)}\left(\frac{\eta-l}{a}\right) - r_3^{(l)}\left(\frac{\eta-l}{a}\right) \left( \int_{-kl}^{2l-\eta} \int_{(k+1)l}^{\eta} \mathcal{L}u^{(k)}(y, z) dz dy + \widetilde{p^{(k)}}(2l-\eta) \right) - \\ & - \rho(\eta) \int_{-kl}^{2l-\eta} \mathcal{L}u^{(k)}(y, \eta) dy - \left( r_2^{(l)}\left(\frac{\eta-l}{a}\right) - ar_1^{(l)}\left(\frac{\eta-l}{a}\right) \right) \times \\ & \times \left( \int_{(k+1)l}^{\eta} \mathcal{L}u^{(k)}(2l-\eta, z) dz + dp^{(k)}(2l-\eta) \right). \end{aligned} \quad (33)$$

Так как в данной работе изучается случай, когда  $\rho(\eta) \neq 0$ , уравнение (32) можно разделить на  $\rho(\eta)$ . В результате получим линейное дифференциальное уравнение для нахождения неизвестной функции  $g^{(k)}$

$$dg^{(k)}(\eta) + \frac{r_3^{(l)}\left(\frac{\eta-l}{a}\right)}{\rho(\eta)}g^{(k)}(\eta) = \frac{Y^{(k)}(\eta)}{\rho(\eta)} + \frac{r_3^{(l)}\left(\frac{\eta-l}{a}\right)}{\rho(\eta)}\frac{C}{2}, \quad \eta \in [(k+1)l, (k+2)l]. \quad (34)$$

Общее решение дифференциального уравнения (34) записывается в виде

$$g^{(k)}(\eta) = e^{-\int_{(k+1)l}^{\eta} \frac{r_3^{(l)}((\eta_1-l)/a)}{\rho(\eta_1)} d\eta_1} \left( C_g + \int_{(k+1)l}^{\eta} \frac{Y^{(k)}(\eta_1)}{\rho(\eta_1)} e^{\int_{(k+1)l}^{\eta_1} \frac{r_3^{(l)}((\eta_2-l)/a)}{\rho(\eta_2)} d\eta_2} d\eta_1 \right) + \frac{C}{2}. \quad (35)$$

Проводя рассуждения, аналогичные тем, которые проведены при выводе (26), находим константу  $C_g$  в виде

$$C_g = \frac{\varphi^{(k)}(l)}{2}. \quad (36)$$

В результате получаем следующее представление решения  $g^{(k)}$ :

$$g^{(k)}(\eta) = e^{-\int_{(k+1)l}^{\eta} \frac{r_3^{(l)}\left(\frac{\eta_1-l}{a}\right)}{\rho(\eta_1)} d\eta_1} \left( \int_{(k+1)l}^{\eta} \frac{Y^{(k)}(\eta_1)}{\rho(\eta_1)} e^{\int_{(k+1)l}^{\eta_1} \frac{r_3^{(l)}\left(\frac{\eta_2-l}{a}\right)}{\rho(\eta_2)} d\eta_2} d\eta_1 + \frac{1}{2}\varphi^{(k)}(l) \right) + \frac{C}{2},$$

$$\eta \in [(k+1)l; (k+2)l]. \quad (37)$$

Решение задачи (7)–(9) в области  $Q^{(k,3)}$  имеет вид

$$u^{(k)}(t, x) = \int_{-kl}^{x-at} \int_{(k+1)l}^{x+at} \mathcal{L}u^{(k)}(y, z) dy dz + p^{(k)}(x-at) + g^{(k)}(x+at), \quad (38)$$

где функция  $g^{(k)}(\eta)$  определена по формуле (37).

Также стоит отметить, что только при выборе константы  $C_g$  в виде (36) решение  $u^{(k)}(t, x)$  задачи (7)–(9),  $(t, x) \in \overline{Q^{(k,j)}}$ ,  $j = 1, 3$ , будет принадлежать классу  $C(\overline{Q^{(k,1)}} \cup \overline{Q^{(k,3)}})$ , и при этом данное решение будет единственным.

Для того чтобы решение  $u^{(k)}(t, x)$  было дважды непрерывно дифференцируемым, необходимо и достаточно совпадения производных функций  $g^{(k)}$ , определенных по формулам (17) и (37), до второго порядка включительно в точке  $\eta = (k+1)l$ :

$$\mu^{(l)}\left(\frac{kl}{a}\right) - r_3^{(l)}\left(\frac{kl}{a}\right)\varphi^{(k)}(l) - r_2^{(l)}\left(\frac{kl}{a}\right)d\varphi^{(k)}(l) - r_1^{(l)}\left(\frac{kl}{a}\right)\psi^{(k)}(l) = 0. \quad (39)$$

Для непрерывности второй производной  $d^2g^{(k)}$  в точке  $\eta = (k+1)l$  находим условие согласования следующего вида:

$$\begin{aligned} & \left( r_2^{(l)}\left(\frac{kl}{a}\right)r_3^{(l)}\left(\frac{kl}{a}\right) - r_1^{(l)}\left(\frac{kl}{a}\right)dr_2^{(l)}\left(\frac{kl}{a}\right) + r_2^{(l)}\left(\frac{kl}{a}\right)dr_1^{(l)}\left(\frac{kl}{a}\right) \right) \left( d\varphi^{(k)}(l) + \frac{1}{a}\psi^{(k)}(l) \right) + \\ & + \frac{1}{a}(\rho((k+1)l))^2 \left( d \frac{\mu^{(l)}(t)}{r_2^{(l)}(t) + ar_1^{(l)}(t)} \right) \Big|_{t=kl/a} - \mu^{(l)}\left(\frac{kl}{a}\right)r_3^{(l)}\left(\frac{kl}{a}\right) + \\ & + \varphi^{(k)}(l) \left( -\frac{1}{a}(\rho((k+1)l))^2 \left( d \frac{r_3^{(l)}(t)}{r_2^{(l)}(t) + ar_1^{(l)}(t)} \right) \Big|_{t=kl/a} + \left( r_3^{(l)}\left(\frac{kl}{a}\right) \right)^2 \right) - \\ & - \left( ad^2\varphi^{(k)}(l)r_1^{(l)}\left(\frac{kl}{a}\right) + \frac{1}{a}d\psi^{(k)}(l)r_2^{(l)}\left(\frac{kl}{a}\right) \right) \rho((k+1)l) = 0. \end{aligned} \quad (40)$$

**Л е м м а 2.** Пусть функции  $\varphi^{(k)} \in C^2([0; l])$ ,  $\psi^{(k)} \in C^1([0; l])$ ;  $\mu^{(l)} \in C^1([0; +\infty))$ ,  $r_i^{(0)} \in C^1([0; +\infty))$ ,  $i = \overline{1, 3}$ ,  $\lambda(t, x) \in C^1(\overline{Q})$ . Функция  $g^{(k)}$  принадлежит классу  $C^2([kl; (k+2)l])$  тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования (39)–(40), а константа  $C_g$  выбирается по формуле (36).

**Нахождение решения в области  $Q^{(k,4)}$ .** В области  $Q^{(k,4)}$  решение строится автоматически по формуле (14), где функция  $g^{(k)}$  задается формулой (37), а функция  $p^{(k)}$  – выражением (26).

Из лемм 1, 2 вытекает

**Утверждение.** Пусть выполняются условия лемм 1, 2. Единственное решение  $u^{(k)}$  из класса  $C^2(\overline{Q^{(k)}})$ , определенное на всем подмножестве  $\overline{Q^{(k)}}$ , существует тогда и только тогда, когда выполнены условия согласования (28)–(29) и условие выбора константы (25), а также условия согласования (39)–(40) и условия выбора константы (36).

**4. Задача в полуполосе.** Выше было построено решение задачи (7)–(9) и получены условия согласования для него в каждой отдельной области  $Q^{(k)}$ . В работе [6] получены необходимые и достаточные условия существования единственного решения в классе  $C^2(\overline{Q})$  для первой смешанной задачи. Для задачи с косыми производными в случае, когда направление косой производной в граничных условиях (9) не совпадает с характеристическим, поступаем аналогично. Определим начальные функции  $\varphi^{(k)}$  и  $\psi^{(k)}$  следующим образом:

$$\begin{aligned}\varphi^{(k)}(x) &= u^{(k-1)}\left(\frac{kl}{a}, x\right) = \int_{-(k-1)l}^{x-kl} \int_{kl}^{x+kl} \mathcal{L}u^{(k)}(\xi, \eta) d\eta d\xi + p^{(k-1)}(x-kl) + g^{(k-1)}(x+kl), \\ \psi^{(k)}(x) &= \partial_t u^{(k-1)}\left(\frac{kl}{a}, x\right) = a \int_{-(k-1)l}^{x-kl} \mathcal{L}u^{(k)}(\xi, x+kl) d\xi - \\ &\quad - a \int_{kl}^{x+kl} \mathcal{L}u^{(k)}(x-kl, \eta) d\eta - adp^{(k-1)}(x-kl) + adg^{(k-1)}(x+kl), \quad x \in [0; l].\end{aligned}\quad (41)$$

Введем обозначение  $u^{(k,k+1)}(t, x) = u^{(i)}(t, x)$ ,  $(t, x) \in \overline{Q^{(i)}}$ ,  $i = k, k+1$ .

**Лемма 3.** Пусть выполнены условия утверждения в областях  $Q^{(k-1)}$  и  $Q^{(k)}$ . Для того чтобы решение  $u^{(k-1,k)}(t, x) \in C^2(\overline{Q^{(k-1)}} \cup \overline{Q^{(k)}})$ , необходимо и достаточно, чтобы функции  $\varphi^{(k)}$  и  $\psi^{(k)}$  были определены по формуле (41).

**Доказательство.** В силу утверждения, решение задачи в подобластях  $Q^{(k-1)}$  и  $Q^{(k)}$  принадлежит классу дважды непрерывно дифференцируемых функций. Для того чтобы решение  $u^{(k-1,k)}(t, x)$  принадлежало классу  $C^2(\overline{Q^{(k-1)}} \cup \overline{Q^{(k)}})$ , необходимо и достаточно, чтобы

$$\partial_t^{b_1} \partial_x^{b_2} u^{(k)}\left(\frac{kl}{a}, x\right) = \partial_t^{b_1} \partial_x^{b_2} u^{(k-1)}\left(\frac{kl}{a}, x\right), \quad 0 \leq b_1 + b_2 \leq 2; \quad b_1, b_2 = \overline{0, 2}.$$

Докажем достаточность выполнения условий (41). Из них следует, что  $u^{(k-1)}\left(\frac{kl}{a}, x\right) = u^{(k)}\left(\frac{kl}{a}, x\right)$ ,  $\partial_t u^{(k-1)}\left(\frac{kl}{a}, x\right) = \partial_t u^{(k)}\left(\frac{kl}{a}, x\right)$ . Равенства

$$\begin{aligned}\partial_x u^{(k-1)}\left(\frac{kl}{a}, x\right) &= \partial_x u^{(k)}\left(\frac{kl}{a}, x\right), \\ \partial_x^2 u^{(k-1)}\left(\frac{kl}{a}, x\right) &= \partial_x^2 u^{(k)}\left(\frac{kl}{a}, x\right), \\ \partial_t \partial_x u^{(k-1)}\left(\frac{kl}{a}, x\right) &= \partial_t \partial_x u^{(k)}\left(\frac{kl}{a}, x\right)\end{aligned}\quad (42)$$

следуют как равенства производных по касательным направлениям. Для доказательства равенства вторых производных по переменной  $t$  воспользуемся уравнением (7):

$$\begin{aligned}\partial_t^2 u^{(k)}\left(\frac{kl}{a}, x\right) &= a^2 \partial_x^2 u^{(k)}\left(\frac{kl}{a}, x\right) + \lambda(t, x) u^{(k)}\left(\frac{kl}{a}, x\right) = \\ &= a^2 \partial_x^2 u^{(k-1)}\left(\frac{kl}{a}, x\right) + \lambda(t, x) u^{(k-1)}\left(\frac{kl}{a}, x\right) = \partial_t^2 u^{(k-1)}\left(\frac{kl}{a}, x\right).\end{aligned}\quad (43)$$

Для доказательства необходимости условий (41) пойдем от противного. Пусть  $\varphi^{(k)}$  и  $\psi^{(k)}$  определены по формулам, отличным от вида (41). Тогда будут нарушаться равенства

$$u^{(k-1)}\left(\frac{kl}{a}, x\right) = u^{(k)}\left(\frac{kl}{a}, x\right), \quad \partial_t u^{(k-1)}\left(\frac{kl}{a}, x\right) = \partial_t u^{(k)}\left(\frac{kl}{a}, x\right),$$

а следовательно, функция  $u^{(k-1,k)}(t, x)$  либо ее производные будут терпеть разрыв на прямой  $t = \frac{kl}{a}$ .

Таким образом, гладкость решения смешанной задачи с косыми производными в граничных условиях сохраняется, если не совпадают характеристические направления уравнения и направления косых производных. Из данной леммы вытекает

**Следствие.** Условия согласования (28)–(29) и (39)–(40) выполняются при некотором  $k$  тогда и только тогда, когда они выполняются для  $k-1$ .

**Доказательство.** Рассмотрим, например, условие (28) при некотором  $k$ . Если подставить в данное условие выражение функций  $\varphi^{(k)}$  и  $\psi^{(k)}$  из формул (41), а также их производных, и далее упростить полученное выражение, то получится условие (39) в области  $Q^{(k-1)}$ . Аналогично рассматриваются и остальные случаи.

**Теорема 3.** Пусть  $\theta(\xi) \neq 0$  и  $\rho(\eta) \neq 0$ . Функции  $\varphi \in C^2([0; l])$ ,  $\psi \in C^1([0; l])$ ,  $\mu^{(j)}, r_i^{(j)} \in C^1([0; \infty))$ ,  $j = 0, l$ ,  $i = \overline{1, 3}$ ,  $\lambda \in C^1(\overline{Q})$ . Решение задачи (7)–(9) существует и единственно в классе  $C^2(\overline{Q})$  тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования

$$\begin{aligned} & \mu^{(0)}(0) - r_3^{(0)}(0)\varphi(0) - r_2^{(0)}(0)d\varphi(0) - r_1^{(0)}(0)\psi(0) = 0, \\ & \left( r_2^{(0)}(0)dr_1^{(0)}(0) - r_1^{(0)}(0)dr_2^{(0)}(0) + r_2^{(0)}(0)r_3^{(0)}(0) \right) \times \\ & \times \left( d\varphi(0) + \frac{1}{a}\psi(0) \right) - (\theta(0))^2 \frac{1}{a} \left( d \frac{\mu^{(0)}(t)}{r_2^{(0)}(t) - ar_1^{(0)}(t)} \right) \Big|_{t=0} - \\ & - \mu^{(0)}(0)r_3^{(0)}(0) + \varphi(0) \left( -\frac{1}{a}(\theta(0))^2 \left( d \frac{r_3^{(0)}(t)}{r_2^{(0)}(t) - ar_1^{(0)}(t)} \right) \Big|_{t=0} + (r_3^{(0)}(0))^2 \right) + \\ & + \left( ad^2\varphi(0)r_1^{(0)}(0) + \frac{1}{a}d\psi(0)r_2^{(0)}(0) \right) \theta(0) - \frac{1}{2a^2}\theta(0)\lambda(0,0)\varphi(0) = 0, \\ & \mu^{(l)}(0) - r_3^{(l)}(0)\varphi(l) - r_2^{(l)}(0)d\varphi(l) - r_1^{(l)}(0)\psi(l) = 0, \\ & \left( r_2^{(l)}(0)r_3^{(l)}(0) - r_1^{(l)}(0)dr_2^{(l)}(0) + r_2^{(l)}(0)dr_1^{(l)}(0) \right) \left( d\varphi(l) + \frac{1}{a}\psi(l) \right) + \\ & + \frac{1}{a}(\rho(l))^2 \left( d \frac{\mu^{(l)}(t)}{r_2^{(l)}(t) + ar_1^{(l)}(t)} \right) \Big|_{t=0} - \mu^{(l)}(0)r_3^{(l)}(0) + \\ & + \varphi(l) \left( -\frac{1}{a}(\rho(l))^2 \left( d \frac{r_3^{(l)}(t)}{r_2^{(l)}(t) + ar_1^{(l)}(t)} \right) \Big|_{t=0} + (r_3^{(l)}(0))^2 \right) - \\ & - \left( ad^2\varphi(l)r_1^{(l)}(0) + \frac{1}{a}d\psi(l)r_2^{(l)}(0) \right) \rho(l) = 0. \end{aligned}$$

Доказательство данной теоремы следует из лемм 1, 2, 3, а также следствия.

**5. Смешанная задача для неоднородного уравнения.** Теорема 2 сформулирована для однородного уравнения (7). Для того чтобы получить необходимые и достаточные условия существования единственного гладкого решения смешанной задачи для неоднородного уравнения (1)–(3),

воспользуемся условиями согласования, полученными для однородного уравнения, но заменим в них  $d^n \mu^{(i)}(0)$  на  $d^n \widetilde{\mu}^{(i)}(0) - d^n B^{(i)} v(t, i)|_{t=0}$ ,  $n = \overline{0, 1}$ ,  $i = \overline{0, l}$ , где  $v(t, x)$  – решение задачи (4)–(5).

Рассмотрим выражение  $d^n B^{(i)} v(t, i)|_{t=0} = d^n \left( r_1^{(i)}(t) \partial_t v(t, i) + r_2^{(i)}(t) \partial_x v(t, i) + r_3^{(i)}(t) v(t, i) \right)|_{t=0}$  подробнее. Данный полином представляет собой сумму

$$d^n B^{(i)} v(t, i)|_{t=0} = \sum_{j=0}^n C_n^j \left( d^{n-j} r_1^{(i)}(t) \partial_t^{j+1} v(t, i) + d^{n-j} r_1^{(i)}(t) \partial_t^j v(t, i) + d^{n-j} r_1^{(i)}(t) \partial_t^j \partial_x v(t, i) \right) \Big|_{t=0}, \quad (44)$$

где  $C_n^j = \frac{n!}{j!(n-j)!}$  – биномиальный коэффициент,  $i = \overline{0, l}$ .

Найдем значения выражений  $\partial_t^j v(t, i)|_{t=0}$ ,  $j = \overline{0, 2}$  и  $\partial_t^j \partial_x v(t, i)|_{t=0}$ ,  $j = \overline{0, 1}$ .

С учетом начальных условий (5) справедливо равенство  $v(0, i) = \partial_t v(0, i) = 0$ . Также из последнего выражения будет следовать, что  $\partial_t \partial_x v(t, i)|_{t=0} = 0$ ,  $i = \overline{0, l}$ , как касательные производные. Из уравнения (4) получаем, что  $\partial_t^2 v(0, i) = f(0, i)$ . Таким образом, для неоднородного уравнения справедлива

**Т е о р е м а 4.** Пусть  $\theta(\xi) \neq 0$  и  $\rho(\eta) \neq 0$ . Функции  $\varphi \in C^2([0; l])$ ,  $\psi \in C^1([0; l])$ ,  $\widetilde{\mu}^{(j)}, r_i^{(j)} \in C^1([0; \infty))$ ,  $j = \overline{0, l}$ ,  $i = \overline{1, 3}$ ,  $\lambda, f \in C^1(\overline{Q})$ . Решение задачи (1)–(3) существует и единственно в классе  $C^2(\overline{Q})$  тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования

$$\begin{aligned} & \widetilde{\mu}^{(0)}(0) - r_3^{(0)}(0)\varphi(0) - r_2^{(0)}(0)d\varphi(0) - r_1^{(0)}(0)\psi(0) = 0, \\ & \widetilde{\mu}^{(l)}(0) - r_3^{(l)}(0)\varphi(l) - r_2^{(l)}(0)d\varphi(l) - r_1^{(l)}(0)\psi(l) = 0, \\ & \left( r_2^{(0)}(0)dr_1^{(0)}(0) - r_1^{(0)}(0)dr_2^{(0)}(0) + r_2^{(0)}(0)r_3^{(0)}(0) \right) \times \\ & \times \left( d\varphi(0) + \frac{1}{a}\psi(0) \right) - (\theta(0))^2 \frac{1}{a} \left( d \frac{\widetilde{\mu}^{(0)}(t) - B^{(0)}v(t, 0)}{r_2^{(0)}(t) - ar_1^{(0)}(t)} \right) \Big|_{t=0} - \\ & - \widetilde{\mu}^{(0)}(0)r_3^{(0)}(0) + \varphi(0) \left( -\frac{1}{a}(\theta(0))^2 \left( d \frac{r_3^{(0)}(t)}{r_2^{(0)}(t) - ar_1^{(0)}(t)} \right) \Big|_{t=0} + (r_3^{(0)}(0))^2 \right) + \\ & + \left( ad^2\varphi(0)r_1^{(0)}(0) + \frac{1}{a}d\psi(0)r_2^{(0)}(0) \right) \theta(0) - \frac{1}{2a^2} \theta(0)\lambda(0, 0)\varphi(0) = 0, \\ & \left( r_2^{(l)}(0)r_3^{(l)}(0) - r_1^{(l)}(0)dr_2^{(l)}(0) + r_2^{(l)}(0)dr_1^{(l)}(0) \right) \left( d\varphi(l) + \frac{1}{a}\psi(l) \right) + \\ & + \frac{1}{a}(\rho(l))^2 \left( d \frac{\widetilde{\mu}^{(l)}(t) - B^{(l)}v(t, l)}{r_2^{(l)}(t) + ar_1^{(l)}(t)} \right) \Big|_{t=0} - \widetilde{\mu}^{(l)}(0)r_3^{(l)}(0) + \\ & + \varphi(l) \left( -\frac{1}{a}(\rho(l))^2 \left( d \frac{r_3^{(l)}(t)}{r_2^{(l)}(t) + ar_1^{(l)}(t)} \right) \Big|_{t=0} + (r_3^{(l)}(0))^2 \right) - \\ & - \left( ad^2\varphi(l)r_1^{(l)}(0) + \frac{1}{a}d\psi(l)r_2^{(l)}(0) \right) \rho(l) = 0. \end{aligned}$$

**З а к л ю ч е н и е.** В статье рассмотрена смешанная задача для уравнения типа Клейна – Гордона – Фока с косыми производными первого порядка в граничных условиях в случае, когда направление

данных производных отличается от направлений характеристик исходного уравнения. Для поставленной задачи с помощью метода характеристик выведены необходимые и достаточные условия существования единственного классического решения при заданной гладкости исходных данных.

### Список использованных источников

1. Боголюбов, Н. Н. Квантовые поля / Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков. – 3-е изд., доп. – М., ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 384 с.
2. Иваненко, Д. Д. Классическая теория поля (новые проблемы) / Д. Д. Иваненко, А. А. Соколов. – 2-е изд. – М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1951. – 479 с.
3. Барановская, С. Н. Смешанная задача для уравнения колебания струны с зависящей от времени косо́й производной в краевом условии / С. Н. Барановская, Н. И. Юрчук // Дифференц. уравнения. – 2009. – Т. 45, № 8. – С. 1188–1191.
4. Новиков, Е. Н. Необходимые и достаточные условия колебаний ограниченной струны при косых производных в граничных условиях / Ф. Е. Ломовцев, Е. Н. Новиков // Дифференц. уравнения. – 2014. – Т. 50, № 1. – С. 126–129.
5. Корзюк, В. И. Классическое решение смешанной задачи для волнового уравнения с интегральным условием / В. И. Корзюк, И. И. Столярчук // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2016. – Т. 6, № 60. – С. 22–27.
6. Корзюк, В. И. Первая смешанная задача для уравнения Клейна – Гордона – Фока в полуполосе / В. И. Корзюк, И. И. Столярчук // Дифференц. уравнения. – 2014. – Т. 50, № 8. – С. 1105–1117.
7. Михлин, С. Г. Курс математической физики / С. Г. Михлин. – 2-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2002. – 575 с.
8. Корзюк, В. И. Классическое решение смешанной задачи для уравнения Клейна – Гордона – Фока с нелокальными условиями / В. И. Корзюк, И. И. Столярчук // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2017. – Т. 61, № 6. – С. 20–27.
9. Корзюк, В. И. Классическое решение смешанной задачи для уравнения Клейна – Гордона – Фока с нелокальными условиями / В. И. Корзюк, И. И. Столярчук // Тр. Ин-та математики. – 2018. – Т. 26, № 1. – С. 56–72.
10. Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям: пер. с нем. / Э. Камке. – 6-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2003. – 576 с.

### References

1. Bogolyubov N. N., Shirkov D. V. *The Quantum Fields*. Moscow, Fizmatlit Publ., 2005. 384 p. (in Russian).
2. Ivanenko D. D., Sokolov A. A. *Classical Field Theory (New Problems)*. Moscow, Leningrad, Gostekhteorizdat Publ., 1951. 479 p. (in Russian).
3. Baranovskaya S. N., Yurchuk N. I. Mixed problem for the string vibration equation with a time-dependent oblique derivative in the boundary condition. *Differential Equations*, 2009, vol. 45, no. 8, pp. 1212–1215. <https://doi.org/10.1134/S0012266109080126>
4. Lomovtsev F. E., Novikov E. N. Necessary and sufficient conditions for the vibrations of a bounded string with directional derivatives in the boundary conditions. *Differential Equations*, 2014, vol. 50, no. 1, pp. 128–131. <https://doi.org/10.1134/S0374064114010178>
5. Korzyuk V. I., Stolyarchuk I. I. Classical solution to the mixed problem for the wave equation with the integral condition. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2016, vol. 60, no. 6, pp. 22–27 (in Russian).
6. Korzyuk V. I., Stolyarchuk I. I. Classical solution of the first mixed problem for the Klein-Gordon-Fock equation in a half-strip. *Differential Equations*, 2014, vol. 50, no. 8, pp. 1098–1111. <https://doi.org/10.1134/S0374064114080081>
7. Mikhlin S. G. *Course of Mathematical Physics*. 2<sup>nd</sup> ed. Saint Petersburg, Lan' Pybl., 2002. 575 p. (in Russian).
8. Korzyuk V. I., Stolyarchuk I. I. Classical solution to the mixed problem for the Klein-Gordon-Fock equation with the unlocal conditions. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2017, vol. 61, no. 6, pp. 20–27 (in Russian).
9. Korzyuk V. I., Stolyarchuk I. I. Classical solution to the mixed problem for the Klein – Gordon – Fock equation with the unlocal conditions. *Trudy Instituta matematiki = Proceedings of the Institute of Mathematics*, 2018. vol. 26, no. 1, pp. 56–72 (in Russian).
10. Kamke E. *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. St. Petersburg, Lan' Publ., 2003, 589 p. (in Russian).

### Информация об авторах

**Виктор Иванович Корзюк** – академик, профессор, доктор физико-математических наук, Институт математики НАН Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Республика Беларусь), Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: korzyuk@bsu.by

**Столярчук Иван Игоревич** – соискатель, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: ivan.telkontar@gmail.com. <https://orcid.org/0000-0001-6839-7997>

### Information about the authors

**Viktor I. Korzyuk** – Academician, D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus), Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: korzyuk@bsu.by

**Ivan I. Stolyarchuk** – Postgraduate Student, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: ivan.telkontar@gmail.com. <https://orcid.org/0000-0001-6839-7997>

ISSN 1561-2430 (Print)

ISSN 2524-2415 (Online)

УДК 517.948.32:517.544

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-404-407>

Поступила в редакцию 11.10.2018

Received 11.10.2018

Э. И. Зверович, А. П. Шилин

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

## РЕШЕНИЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С СИНГУЛЯРНЫМИ И ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

**Аннотация.** Приведены в явном виде решения линейных интегро-дифференциальных уравнений. Уравнения решаются на замкнутой кривой, принадлежащей комплексной плоскости. Коэффициенты уравнений имеют специальный вид. Интегралы в уравнениях понимаются в смысле главного значения и в смысле конечной части по Адамару.

**Ключевые слова:** интегро-дифференциальные уравнения, гиперсингулярные интегралы, обобщенные формулы Сохоцкого, краевая задача Римана

**Для цитирования.** Зверович, Э. И. Решение интегро-дифференциальных уравнений с сингулярными и гиперсингулярными интегралами специального вида / Э. И. Зверович, А. П. Шилин // Вес. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2018. – Т. 54, № 4. – С. 404–407. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-404-407>

E. I. Zverovich, A. P. Shilin

Belarusian State University, Minsk, Belarus

## INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH SINGULAR AND HYPERSINGULAR INTEGRALS

**Abstract.** Quadrature linear integro-differential equations on a closed curve located in the complex plane are solved. The equations contain singular integrals which are understood in the sense of the main value and hypersingular integrals which are understood in the sense of the Hadamard finite part. The coefficients of the equations have a special structure.

**Keywords:** integro-differential equations, hypersingular integrals, generalized Sokhotsky formulas, Riemann boundary problem

**For citation.** Zverovich E. I., Shilin A. P. Integro-differential equations with singular and hypersingular integrals. *Vestsi Natsyional'nai akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, vol. 54, no. 4, pp. 404–407 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-404-407>

Интегралы, которые далее будут содержать в знаменателе  $\tau - t$  в 1-й степени (сингулярные), понимаются в смысле главного значения, а в более высокой степени (гиперсингулярные) – в смысле конечной части по Адамару. Интегро-дифференциальные уравнения с такими интегралами в случае постоянных коэффициентов введены в рассмотрение и решены Э. И. Зверовичем [1]. Случай переменных коэффициентов в подобных уравнениях гораздо сложнее; здесь мы решим уравнения для переменных коэффициентов частного вида. Будут использоваться классические и обобщенные формулы Сохоцкого [2]:

$$\begin{cases} \Phi_+^{(k)}(t) - \Phi_-^{(k)}(t) = \varphi^{(k)}(t), \\ \Phi_+^{(k)}(t) + \Phi_-^{(k)}(t) = \frac{k!}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - t)^{k+1}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (1)$$

Пусть  $L$  – простая гладкая замкнутая кривая на комплексной плоскости,  $D_+$  и  $D_-$  – области с границей  $L$ , причем  $0 \in D_+$ ,  $\infty \in D_-$ . Зададим функции  $p_{\pm}(z)$ , аналитические в соответствующих областях  $D_{\pm}$  и имеющие  $H$ -непрерывные предельные значения  $p_{\pm}(t)$ ,  $p'_{\pm}(t)$ ,  $t \in L$ , причем  $p_{\pm}(z) \neq 0$ ,  $z \in D_{\pm} \cup L$ . Зададим также  $H$ -непрерывные функции  $a(t) \neq 0$ ,  $b(t) \neq 0$ ,  $f(t)$ ,  $t \in L$ . Рассмотрим уравнение с искомой функцией  $\varphi(t)$ ,  $H$ -непрерывной вместе со своей производной  $\varphi'(t)$ :

$$(a(t)p'_+(t) + b(t)p'_-(t))\varphi(t) - (a(t)p_+(t) + b(t)p_-(t))\varphi'(t) + \\ + \frac{a(t)p'_+(t) - b(t)p'_-(t)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t} - \frac{a(t)p_+(t) - b(t)p_-(t)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau - t)^2} = f(t), \quad t \in L. \quad (2)$$

Введем кусочно-аналитическую функцию

$$\Phi_{\pm}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - z}, \quad z \in D_{\pm}.$$

Используя для предельных значений  $\Phi_{\pm}(t)$ ,  $\Phi'_{\pm}(t)$ ,  $t \in L$ , этой функции и ее производной формулы Сохоцкого (1) при  $k = 0, 1$ , получим краевую задачу линейного сопряжения

$$(a(t)p'_+(t) + b(t)p'_-(t))(\Phi_+(t) - \Phi_-(t)) - (a(t)p_+(t) + b(t)p_-(t))(\Phi'_+(t) - \Phi'_-(t)) + \\ + (a(t)p'_+(t) - b(t)p'_-(t))(\Phi_+(t) + \Phi_-(t)) - (a(t)p_+(t) - b(t)p_-(t))(\Phi'_+(t) + \Phi'_-(t)) = f(t), \quad t \in L. \quad (3)$$

Вводя еще одну кусочно-аналитическую функцию

$$F_{\pm}(z) = p'_{\pm}(z)\Phi_{\pm}(z) - p_{\pm}(z)\Phi'_{\pm}(z), \quad z \in D_{\pm}, \quad (4)$$

задачу (3) можно преобразовать в краевую задачу Римана

$$F_+(t) = \frac{b(t)}{a(t)}F_-(t) + \frac{f(t)}{2a(t)}, \quad t \in L. \quad (5)$$

У функции  $\Phi_{\pm}(z)$ , введенной посредством интеграла типа Коши, должен быть нуль на бесконечности, тогда у функции  $F_{\pm}(z)$ , как видно из формулы (4) для этой функции, нуль на бесконечности должен быть по меньшей мере второго порядка. Это обстоятельство следует учитывать при решении задачи (5).

Если задача (5) окажется разрешимой и функции  $F_{\pm}(z)$  будут найдены, то соотношения (4) станут линейными дифференциальными уравнениями для нахождения функций  $\Phi_{\pm}(z)$ . Удобно этим соотношениям придать вид

$$\left( \frac{\Phi_{\pm}(z)}{p_{\pm}(z)} \right)' = -\frac{F_{\pm}(z)}{p_{\pm}^2(z)}, \quad z \in D_{\pm},$$

откуда

$$\Phi_+(z) = p_+(z) \left( C_+ - \int_0^z \frac{F_+(\zeta)d\zeta}{p_+^2(\zeta)} \right), \quad \Phi_-(z) = p_-(z) \left( C_- - \int_{\infty}^z \frac{F_-(\zeta)d\zeta}{p_-^2(\zeta)} \right),$$

где пути интегрирования лежат в  $D_+$  и  $D_-$  соответственно.

Константа  $C_+$  останется произвольной, а константу  $C_-$  следует взять равной нулю, добиваясь выполнения условия  $\Phi_-(\infty) = 0$ . Наконец, к решению уравнения (2) придем по формуле  $\varphi(t) = \Phi_+(t) - \Phi_-(t)$ .

Сформулируем окончательный результат в отношении уравнения (2), использующий формулы Ф. Д. Гахова [3] решения краевой задачи Римана (5); при этом  $\alpha = \text{Ind}_L \frac{b(t)}{a(t)}$ ,  $X_{\pm}(z)$  – канонические функции этой задачи.

**Теорема 1.** При  $\alpha \geq 1$  уравнение (2) безусловно разрешимо. При  $\alpha < 1$  для его разрешимости необходимо и достаточно выполнения  $|\alpha|+1$  условий разрешимости

$$\int_L \frac{f(\tau)\tau^k d\tau}{a(\tau)X_+(\tau)} = 0, \quad (6)$$

где  $k = 0, 1, \dots, |\alpha|$ .

Решение уравнения (2) в случае его разрешимости содержит  $1 + \max(0, \alpha - 1)$  произвольных постоянных и дается формулой

$$\varphi(t) = p_+(t) \left( C - \int_0^t \frac{F_+(z) dz}{p_+^2(z)} \right) + p_-(t) \int_{-\infty}^t \frac{F_-(z) dz}{p_-^2(z)},$$

где  $C$  – произвольная постоянная,

$$F_{\pm}(z) = X_{\pm}(z) \left( \frac{1}{4\pi i} \int_L \frac{f(\tau) d\tau}{a(\tau) X_{\pm}(\tau)(\tau - z)} + P(z) \right), \quad (7)$$

а  $P(z)$  – многочлен степени  $\alpha - 2$  с произвольными коэффициентами при  $\alpha \geq 2$ ,  $P(z) \equiv 0$  при  $\alpha < 2$ .

Рассмотрим пример:

$$\begin{aligned} & \left( e^t + \frac{2i}{(t+i)^2} \right) \varphi(t) - \left( e^t + \frac{t-i}{t+i} \right) \varphi'(t) + \left( e^t - \frac{2i}{(t+i)^2} \right) \frac{1}{\pi i} \int_{|\tau|=2} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - t} - \\ & - \left( e^t - \frac{t-i}{t+i} \right) \frac{1}{\pi i} \int_{|\tau|=2} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - t)^2} = 2 - 2 \left( \frac{t-i}{t+i} \right)^2, \quad |t| = 2. \end{aligned}$$

Так выглядит уравнение (2) при  $a(t) = b(t) = 1$ ,  $p_+(t) = e^t$ ,  $p_-(t) = \frac{t-i}{t+i}$ ; выражения для  $f(t)$  и  $L$  очевидны.

Теорема 1 устанавливает факт разрешимости этого уравнения и приводит к следующему его общему решению:

$$\varphi(t) = C e^t + \frac{1}{2} e^{-t} - \frac{t-i}{t(t+i)}.$$

Аналогично может быть решено уравнение

$$\begin{aligned} & (a(t)p'_+(t) + b(t)p'_-(t))\varphi(t) + (a(t)p_+(t) + b(t)p_-(t))\varphi'(t) + \\ & + \frac{a(t)p'_+(t) - b(t)p'_-(t)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - t} + \frac{a(t)p_+(t) - b(t)p_-(t)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - t)^2} = f(t), \quad t \in L, \end{aligned} \quad (8)$$

лишь двумя знаками в левой части отличающееся от уравнения (2). Отдельно решение уравнения (8) приводить не будем, поскольку его (в отличие от уравнения (2)) удобно расценивать как частный случай при  $n = 1$  решения более общего уравнения, в котором  $n \in \mathbf{N}$ :

$$\sum_{k=0}^n C_n^k \left[ (a(t)p_+^{(n-k)}(t) + b(t)p_-^{(n-k)}(t))\varphi^{(k)}(t) + (a(t)p_+^{(n-k)}(t) - b(t)p_-^{(n-k)}(t)) \frac{k!}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - t)^{k+1}} \right] = f(t), \quad (9)$$

$$t \in L.$$

В дополнение к предыдущим требованиям в уравнении (9) функции  $p_{\pm}(t), \varphi(t), t \in L$ , предполагаются имеющими  $H$ -непрерывные производные до порядка  $n$  включительно.

Используя формулы Сохоцкого (1) для  $k = 0, 1, \dots, n$ , снова аналогично приходим к задаче Римана (5), где теперь  $F_{\pm}(t)$  – предельные значения на кривой  $L$  кусочно-аналитической функции  $F_{\pm}(z) = (p_{\pm}(z)\Phi_{\pm}(z))^{(n)}$ ,  $z \in D_{\pm}$ .

Задачу (5) теперь следует решать в классе функций, имеющих на бесконечности нуль порядка не ниже  $n + 1$ . Учитывая это обстоятельство и делая несложное интегрирование после нахождения функций  $F_{\pm}(z)$ , получим следующий результат.

**Теорема 2.** При  $\alpha \geq n$  уравнение (9) безусловно разрешимо. При  $\alpha < n$  для его разрешимости необходимо и достаточно выполнение  $n - \alpha$  условий разрешимости (6), где  $k = 0, 1, \dots, n - \alpha - 1$ . Решение уравнения (9) в случае его разрешимости содержит  $n + \max(0, \alpha - n)$  произвольных постоянных и дается формулой

$$\varphi(t) = \frac{1}{p_+(t)} \left( Q(t) + \int_0^t d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \dots \int_0^{\tau_{n-1}} F_+(\tau_n) d\tau_n \right) - \frac{1}{p_-(t)} \int_{-\infty}^t d\tau_1 \int_{-\infty}^{\tau_1} d\tau_2 \dots \int_{-\infty}^{\tau_{n-1}} F_-(\tau_n) d\tau_n, \quad (10)$$

где  $Q(t)$  – многочлен степени  $n - 1$  с произвольными коэффициентами, а  $F_{\pm}(z)$  находятся по формулам (7), в которых  $P(z)$  – многочлен степени  $n - \alpha - 1$  с произвольными коэффициентами при  $\alpha \geq n + 1$ ,  $P(z) \equiv 0$  при  $\alpha < n + 1$ .

Пусть  $p(t)$  – функция,  $H$ -непрерывная на кривой  $L$  вместе со своими производными до порядка  $n$  включительно. Укажем еще один не слишком очевидный частный случай уравнения (9):

$$\frac{n!}{\pi i} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)!} \int_L \frac{\varphi^{(n-k)}(t) p(\tau) + p^{(n-k)}(t) \varphi(\tau)}{(\tau - t)^{k+1}} d\tau = f(t), \quad t \in L. \quad (11)$$

Так может быть записано уравнение (9), если в нем  $a(t) = b(t) = 1$ , а в роли функций  $p_{\pm}^{(k)}(t)$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ , будут предельные значения на кривой  $L$  интеграла типа Коши  $p_{\pm}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{p(\tau) d\tau}{\tau - z}$ ,  $z \in D_{\pm}$ , и его производных.

Для уравнения (11) мы сохраняем все предыдущие предположения, кроме предположения  $p_-(\infty) \neq 0$ , противоречащего свойству интеграла типа Коши. Пусть  $m$  – порядок нуля на бесконечности функции  $p_-(z)$ . Условие  $p_-(\infty) = 0$  повлияет лишь на разрешимость задачи Римана (5) и легко учитывается, поскольку эта задача теперь становится задачей о скачке  $F_+(t) = F_-(t) + \frac{f(t)}{2}$ ,  $t \in L$ . Обозначим  $l$  порядок нуля на бесконечности интеграла типа Коши

$$\frac{1}{4\pi i} \int_L \frac{f(\tau) d\tau}{\tau - z}, \quad z \in D_{\pm}. \quad (12)$$

**Следствие теоремы 2.** Для разрешимости уравнения (11) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство  $l \geq m + n + 1$ . При выполнении этого неравенства решение уравнения (11) дается формулой (10), в которой  $F_{\pm}(z)$  есть соответствующее значение интеграла типа Коши (12).

#### Список использованных источников

1. Зверович, Э. И. Решение гиперсингулярного интегро-дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами / Э. И. Зверович // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2010. – Т. 54, № 6. – С. 5–8.
2. Зверович, Э. И. Обобщение формул Сохоцкого / Э. И. Зверович // Вест. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2012. – № 2. – С. 24–28.
3. Гахов, Ф. Д. Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. – М.: Наука, 1977. – 640 с.

#### References

1. Zverovich E. I. Solution of the hypersingular integro-differential equation with constant coefficients. *Doklady Natsionalnoi Akademii Nauk Belarusi = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2010, vol. 54, no. 6, pp. 5–8 (in Russian).
2. Zverovich E. I. Generalization of Sokhotsky formulas. *Vestsi Natsyional'nei akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series*, 2012, no. 6, pp. 24–28 (in Russian).
3. Gakhov F. D. *Boundary Value Problems*. Moscow, Nauka Publ., 1977. 640 p. (in Russian).

#### Информация об авторах

**Зверович Эдмунд Иванович** – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры теории функций, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: zverovich@bsu.by

**Шилин Андрей Петрович** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики и математической физики, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: a.p.shilin@gmail.com

#### Information about the authors

**Edmund I. Zverovich** – D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Professor of the Department of Function Theory, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: zverovich@bsu.by

**Andrei P. Shilin** – Ph. D. (Physics and Mathematics), Assistant Professor, Assistant Professor of the Department of Higher Mathematics and Mathematical Physics, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: a.p.shilin@gmail.com

ISSN 1561-2430 (Print)

ISSN 2524-2415 (Online)

УДК 517.983.54+519.6

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-408-416>

Поступила в редакцию 15.07.2018

Received 15.07.2018

**О. В. Матысик, В. Ф. Савчук***Брестский государственный университет им. А. С. Пушкина, Брест, Беларусь***МЕТОД ИТЕРАЦИИ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ УРАВНЕНИЙ  
С ПРИБЛИЖЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ В СЛУЧАЕ АПРИОРНОГО ВЫБОРА  
ПАРАМЕТРА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ**

**Аннотация.** Указан объект исследования – некорректные задачи, описываемые операторными уравнениями I рода. Предмет исследования – явный итерационный метод решения уравнений I рода. Цель работы заключается в доказательстве сходимости предложенного метода простых итераций с попеременно чередующимся шагом и получении оценок погрешности в исходной норме гильбертова пространства для случаев самосопряженной и несамопряженной задач. Априорный выбор параметра регуляризации изучается для истокообразно представимого решения в предположении, что оператор и правая часть уравнения заданы приближенно. Достижение поставленной цели выражено в четырех приведенных и доказанных теоремах: записано уравнение I рода и предлагается новый явный метод простой итерации с попеременно чередующимся шагом для его решения; рассматривается случай самосопряженной задачи; доказана теорема 1 о сходимости метода и теорема 2, в которой получена оценка погрешности (для получения оценки погрешности потребовалось дополнительное условие – требование истокопредставимости точного решения); решается несамопряженная задача, доказана сходимость предложенного метода, который в этом случае запишется по-другому, и получена его оценка погрешности в случае априорного выбора параметра регуляризации. Полученные оценки погрешности оптимизированы, т. е. найдено значение  $n_{\text{опт}}$  – номер шага итерации, при котором оценка погрешности минимальна. Поскольку некорректные задачи постоянно возникают в многочисленных приложениях математики, то проблема их изучения и построения методов их решения является актуальной. Полученные результаты могут быть использованы в теоретических исследованиях при решении операторных уравнений I рода, а также прикладных некорректных задач, встречающихся в динамике и кинетике, математической экономике, геофизике, спектроскопии, системах полной автоматической обработки и интерпретации экспериментов, диагностике плазмы, сейсмике и медицине.

**Ключевые слова:** самосопряженный оператор, гильбертово пространство, спектр оператора, собственное значение оператора, сходимость метода, исходная норма пространства, оценка погрешности, параметр регуляризации

**Для цитирования.** Матысик, О. В. Метод итерации решения некорректных уравнений с приближенным оператором в случае априорного выбора параметра регуляризации / О. В. Матысик, В. Ф. Савчук // Вес. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2018. – Т. 54, № 4. – С. 408–416. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-408-416>

**O. V. Matysik, V. F. Savchuk***Brest State University named after A. S. Pushkin, Brest, Belarus***METHOD OF ITERATION OF SOLVING INVARIANT EQUATIONS  
WITH AN APPROXIMATE OPERATOR IN THE CASE OF AN ARBITRARY CHOICE  
OF THE REGULARIZATION PARAMETER**

**Abstract.** In the introduction, the object of investigation is indicated – incorrect problems described by first-kind operator equations. The subject of the study is an explicit iterative method for solving first-kind equations. The aim of the paper is to prove the convergence of the proposed method of simple iterations with an alternating step alternately and to obtain error estimates in the original norm of a Hilbert space for the cases of self-conjugated and non self-conjugated problems. The *a priori* choice of the regularization parameter is studied for a source-like representable solution under the assumption that the operator and the right-hand side of the equation are given approximately. In the main part of the work, the achievement of the stated goal is expressed in four reduced and proved theorems. In Section 1, the first-kind equation is written down and a new explicit method of simple iteration with alternating steps is proposed to solve it. In Section 2, we consider the case of the self-conjugated problem and prove Theorem 1 on the convergence of the method and Theorem 2, in which an error estimate is obtained. To obtain an error estimate, an additional condition is required – the requirement of the source representability of the exact solution. In Section 3, the non-self-conjugated problem is solved, the convergence of the proposed method is proved, which in this case is written differently, and its error estimate is obtained in the case of an *a priori* choice of the regularization parameter. In sections 2 and 3, the error estimates obtained are optimized, that is, a value is found – the step number of

the iteration, in which the error estimate is minimal. Since incorrect problems constantly arise in numerous applications of mathematics, the problem of studying them and constructing methods for their solution is topical. The obtained results can be used in theoretical studies of solution of first-kind operator equations, as well as applied ill-posed problems encountered in dynamics and kinetics, mathematical economics, geophysics, spectroscopy, systems for complete automatic processing and interpretation of experiments, plasma diagnostics, seismic and medicine.

**Keywords:** self-conjugate operator, Hilbert space, operator spectrum, operator eigenvalue, method convergence, initial space norm, error estimate, regularization parameter

**For citation.** Matysik O. V., Savchuk V. F. Method of iteration of solving invariant equations with an approximate operator in the case of an arbitrary choice of the regularization parameter. *Vestsi Natsyional'най akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk* = *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, vol. 54, no. 4, pp. 408–416 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-408-416>

**Введение.** Как известно, погрешность наиболее изученного в научной литературе метода простой итерации с постоянным шагом (метода Ландвебера) решения уравнения первого рода  $Ax = y$  [1–11]

$$x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha(y_\delta - Ax_{n,\delta}), \quad x_{0,\delta} = 0 \quad (1)$$

зависит от суммы шагов по антиградиенту и притом так, что для сокращения числа итераций желательно, чтобы шаг по антиградиенту был как можно большим. Однако на этот шаг накладывается ограничение сверху  $\left(0 < \alpha < \frac{2}{\|A\|}\right)$ . Возникла идея попытаться ослабить это ограничение, что удалось сделать, выбирая для шага попеременно два значения  $\alpha$  и  $\beta$ , где  $\beta$  уже не обязано удовлетворять прежним требованиям. В настоящей статье предлагается явный итерационный метод – метод простой итерации с попеременно чередующимся шагом решения некорректных задач, описываемых операторными уравнениями первого рода.

В работе [2] доказывается сходимость метода простой итерации (1). Показано, что метод итераций (1) сходится при условии  $0 < \alpha < \frac{2}{\|A\|}$ , если число итераций  $n$  выбирается так, чтобы  $n\delta \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ ,  $\delta \rightarrow 0$ . В предположении, что точное решение  $x^*$  уравнения  $Ax = y$  истокопредставимо, т. е.  $x^* = A^s z$ ,  $s > 0$ , в [2] при условии  $0 < \alpha \leq \frac{5}{4\|A\|}$  получена априорная оценка погрешности метода (1) при точном операторе и приближенной правой части  $y_\delta : \|y - y_\delta\| \leq \delta$ , которая затем оптимизирована, и найден априорный момент останова.

В работе [3] рассматривается сходимость метода простой итерации (1) в случае неединственного решения. Показано, что тогда метод итераций (1) сходится к нормальному решению операторного уравнения  $Ax = y$ .

В статье [4] изучена сходимость метода простой итерации в энергетической норме гильбертова пространства. Использование энергетической нормы позволило получить априорные оценки погрешности и априорный момент останова без дополнительного требования – истокопредставимости точного решения.

Впервые апостериорный выбор числа итераций был предложен для метода (1) И. В. Емелиным и М. А. Красносельским. Ими обоснована возможность применения правила останова по невязке [5] и правила останова по соседним приближениям [6] к явному методу простой итерации решения некорректных задач. В дальнейшем их идеи были продолжены Г. М. Вайникко и А. Ю. Веретенниковым [7]. Метод простой итерации решения уравнений I рода (1) изучался также А. Б. Бакушинским [8], М. М. Лаврентьевым [9], А. М. Денисовым [10], А. А. Самарским и П. Н. Вабишевичем [11].

Различные схемы явных и неявных итерационных методов с априорным и апостериорным выбором числа итераций предложены в работах В. Ф. Савчука и О. В. Матысика [12–15].

**1. Постановка задачи.** Пусть  $H$  и  $F$  – гильбертовы пространства и  $A \in L(H, F)$ , т. е.  $A$  – линейный непрерывный оператор, действующий из  $H$  в  $F$ . Предполагается, что нуль не является собственным значением оператора  $A$ , однако принадлежит его спектру. Решается уравнение

$$Ax = y. \quad (2)$$

Задача отыскания  $x^* \in H$  по элементу  $y \in F$  является некорректной, так как сколь угодно малые возмущения в правой части  $y$  могут вызывать сколь угодно большие возмущения решения.

Предположим, что точное решение  $x^* \in H$  уравнения (1) существует и является единственным. Будем искать его с помощью явного итерационного метода простой итерации с попеременно чередующимся шагом

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \alpha_{n+1}(y - Ax_n), \quad x_0 = 0, \\ \alpha_{2n+1} &= \alpha, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \alpha_{2n+2} = \beta, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3)$$

В случае приближенной правой части  $y_\delta : \|y - y_\delta\| \leq \delta$  метод (2) примет вид

$$\begin{aligned} x_{n+1,\delta} &= x_{n,\delta} - \alpha_{n+1}(Ax_{n,\delta} - y_\delta), \quad x_{0,\delta} = 0, \\ \alpha_{2n+1} &= \alpha, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \alpha_{2n+2} = \beta, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4)$$

Сходимость метода (3) при точном операторе  $A$  и приближенной правой части  $y_\delta$  изучена в [12–13, 15]. Не нарушая общности, будем считать, что  $\|A\| = 1$ . В [12] требуется для сходимости метода итераций (4) выполнение двух условий:  $|1 - \alpha\lambda| < 1$  и  $|(1 - \alpha\lambda)(1 - \beta\lambda)| < 1$ , где  $\beta > 0$  для  $\lambda \in (0, 1]$ , что равносильно выполнению следующих условий:

$$0 < \alpha < 2, \quad (5)$$

$$\alpha\beta < \alpha + \beta, \quad (6)$$

$$(\alpha + \beta)^2 < 8\alpha\beta. \quad (7)$$

При условиях (5), (6), (7) метод (4) сходится, если число итераций  $n$  выбирать из условия  $n\delta \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ ,  $\delta \rightarrow 0$ . В предположении, что точное решение  $x^*$  уравнения (2) истокорпредставимо, т. е.  $x^* = A^s z$ ,  $s > 0$ , для метода (4) получена оценка погрешности (при дополнительном условии  $\frac{1}{16} + \alpha\beta \leq \alpha + \beta$ ):  $\|x - x_{n,\delta}\| \leq s^s [n(\alpha + \beta)]^{-s} \|z\| + \frac{n}{2}(\alpha + \beta)\delta$ .

Ее оптимальная по  $n$  оценка погрешности имеет вид

$$\|x - x_{n,\delta}\|_{\text{опт}} \leq (1 + s) 2^{-\frac{s}{s+1}} \delta^{\frac{s}{s+1}} \|z\|^{\frac{1}{s+1}} \quad (8)$$

и получается при

$$n_{\text{опт}} = s \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) 2^{-\frac{s}{s+1}} \delta^{-\frac{1}{s+1}} \|z\|^{\frac{1}{s+1}}.$$

Оптимальная оценка погрешности (8) для метода (4) оказывается такой же, как и оптимальная оценка для метода Ландвебера (1). Как видно, метод (4) не дает преимуществ в мажорантных оценках по сравнению с методом (1). Но он дает выигрыш в следующем: в методе простых итераций с постоянным шагом (1) требуется условие  $0 < \alpha \leq 1,25$ ; в методе итераций (4)  $0 < \frac{\alpha + \beta}{2} < 4$ . Следовательно, выбирая  $\alpha$  и  $\beta$  соответствующим образом, можно сделать  $n_{\text{опт}}$  в методе (4) примерно втрое меньшим, чем для метода простой итерации с постоянным шагом. Таким образом, используя метод (4), для достижения оптимальной точности потребуется в три раза меньше итераций, чем по методу (1).

Приведем несколько подходящих значений  $\alpha$  и  $\beta$ , удовлетворяющих требуемым условиям:

|          |     |     |     |     |      |      |
|----------|-----|-----|-----|-----|------|------|
| $\alpha$ | 0,8 | 0,9 | 1,0 | 1,1 | 1,15 | 1,17 |
| $\beta$  | 4,4 | 5,0 | 5,5 | 6,1 | 6,4  | 6,5  |

Здесь  $x_n - x_{n,\delta} = \int_0^1 [1 - (1 - \alpha\lambda)^l (1 - \beta\lambda)^m] \lambda^{-1} dE_\lambda(y - y_\delta)$ , т. е.  $g_n(\lambda) = \lambda^{-1} [1 - (1 - \alpha\lambda)^l (1 - \beta\lambda)^m]$ .

Оценки сходимости были получены для случая, когда  $l = m = \frac{n}{2}$ . В случае, когда  $l = m + 1$  во всех оценках  $\frac{n(\alpha + \beta)}{2}$  следует заменить на  $l\alpha + m\beta$ . Мы считали, что  $\|A\| = 1$ . На самом деле все результаты легко переносятся на случай, когда  $\|A\| < \infty$ . При этом норму оператора не обязательно знать точно. Достаточно знать ее мажоранту.

В [12–13] исследована сходимость предложенного метода (3) в случае неединственного решения. Показано, что метод (3) сходится к решению с минимальной нормой. Также обоснована возможность применения к методу (4) правила останова по невязке, получена оценка для момента останова и оценка погрешности метода. При этом апостериорный выбор числа итераций не требует знания истокорпредставимости точного решения. Методу простой итерации с попеременно чередующимся шагом посвящена работа [15]. В дальнейшем считаем, что оператор  $A$  и правая часть  $y$  уравнения (2) заданы приближенно, т. е. вместо  $y$  известно  $y_\delta : \|y - y_\delta\| \leq \delta$ , а вместо оператора  $A$  известен оператор  $A_\eta$ ,  $\|A - A_\eta\| \leq \eta$ .

Предполагаем, что  $0 \in Sp(A_\eta)$ ,  $Sp(A_\eta) \subseteq [0, M]$ ,  $M = \|A\|$ . Тогда метод (4) примет вид

$$\begin{aligned} x_{n+1(\delta, \eta)} &= x_{n(\delta, \eta)} + \alpha_{n+1}(y_\delta - A_\eta x_{n(\delta, \eta)}), \quad x_{0(\delta, \eta)} = 0, \\ \alpha_{2n+1} &= \alpha, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \alpha_{2n+2} = \beta, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (9)$$

Целью настоящей работы является доказательство сходимости метода (9) в случае априорного выбора параметра регуляризации при решении уравнения  $A_\eta x = y_\delta$  и получение оценок погрешности.

**2. Случай самосопряженных неотрицательных операторов.** Пусть  $H = F$ ,  $A = A^* \geq 0$ ,  $A_\eta = A_\eta^* \geq 0$ ,  $Sp(A_\eta) \subseteq [0, M]$ ,  $0 < \eta \leq \eta_0$ . Итерационный метод (9) запишется в виде

$$x_{n(\delta, \eta)} = g_n(A_\eta)y_\delta, \quad (10)$$

где  $g_n(\lambda) = \lambda^{-1} [1 - (1 - \alpha\lambda)^{n/2} (1 - \beta\lambda)^{n/2}] \geq 0$ . В [12–13] получены следующие условия для функции  $g_n(\lambda)$ :

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq M} |g_n(\lambda)| \leq \frac{n}{2}(\alpha + \beta) \leq \gamma n, \quad \left( \gamma = \frac{\alpha + \beta}{2} \right), \quad (11)$$

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq M} \lambda^s |1 - \lambda g_n(\lambda)| \leq s^s [n(\alpha + \beta)]^{-s} = \gamma_s n^{-s} \quad (n > 0), \quad \gamma_s = \left( \frac{s}{\alpha + \beta} \right)^s, \quad 0 < s < \infty, \quad (12)$$

(здесь  $s$  – степень истокорпредставимости точного решения  $x^* = A^s z$  и  $\frac{1}{16} + \alpha\beta \leq \alpha + \beta$ ),

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq M} |1 - \lambda g_n(\lambda)| \leq \gamma_0 \quad (n > 0), \quad \gamma_0 = 1, \quad (13)$$

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq M} \lambda |1 - \lambda g_n(\lambda)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (14)$$

Справедлива

**Лемма 1.** Пусть  $A = A^* \geq 0$ ,  $A_\eta = A_\eta^* \geq 0$ ,  $\|A_\eta - A\| \leq \eta$ ,  $Sp(A_\eta) \subseteq [0, M]$  ( $0 < \eta \leq \eta_0$ ) и выполнены условия (13), (14). Тогда  $\|G_{m\eta} v\| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ ,  $\eta \rightarrow 0 \quad \forall v \in N(A)^\perp = \overline{R(A)}$ , где  $N(A) = \{x \in H \mid Ax = 0\}$  и  $G_{m\eta} = E - A_\eta g_n(A_\eta)$ .

**Доказательство.** В силу (13)  $\|G_{m\eta}\| = \|E - A_\eta g_n(A_\eta)\| \leq \gamma_0$  ( $n > 0$ ,  $0 < \eta \leq \eta_0$ ). Для элементов вида  $v = A\omega$ , образующих в  $\overline{R(A)}$  плотное подмножество, на основании (14) имеем

$$\|G_{m\eta}v\| = \|G_{m\eta}A\omega\| \leq \|G_{m\eta}(A - A_\eta)\omega\| + \|G_{m\eta}A_\eta\omega\| \leq \left( \gamma_0\eta + \sup_{0 \leq \lambda \leq M} \lambda |1 - \lambda g_n(\lambda)| \right) \|\omega\| \rightarrow 0$$

при  $n \rightarrow \infty, \eta \rightarrow 0$ . Лемма 1 доказана.

Условие сходимости для метода (9) дает

**Теорема 1.** Пусть  $A = A^* \geq 0$ ,  $A_\eta = A_\eta^* \geq 0$ ,  $\|A_\eta - A\| \leq \eta$ ,  $Sp(A_\eta) \subseteq [0, M]$  ( $0 < \eta \leq \eta_0$ ),  $y \in R(A)$ ,  $\|y - y_\delta\| \leq \delta$  и выполнены условия (11), (13), (14). Выберем параметр  $n = n(\delta, \eta)$  в приближении (9) так, чтобы  $n(\delta, \eta)(\delta + \eta) \rightarrow 0$  при  $n(\delta, \eta) \rightarrow \infty$ ,  $\delta \rightarrow 0$ ,  $\eta \rightarrow 0$ . Тогда  $x_{n(\delta, \eta)} \rightarrow x^*$  при  $\delta \rightarrow 0$ ,  $\eta \rightarrow 0$ .

**Доказательство.** Из равенства (10) имеем  $x_{n(\delta, \eta)} = g_n(A_\eta)y_\delta$ . Тогда получим

$$\begin{aligned} x_{n(\delta, \eta)} - x^* &= g_n(A_\eta)y_\delta - x^* = -G_{m\eta}x^* + G_{m\eta}x^* + g_n(A_\eta)y_\delta - x^* = \\ &= G_{m\eta}x^* + (E - A_\eta g_n(A_\eta))x^* + g_n(A_\eta)y_\delta - x^* = -G_{m\eta}x^* + g_n(A_\eta)(y_\delta - A_\eta x^*). \end{aligned}$$

Следовательно,  $x_{n(\delta, \eta)} - x^* = -G_{m\eta}x^* + g_n(A_\eta)(y_\delta - A_\eta x^*)$ . Так как по условию имеем

$$\|g_n(A_\eta)\| \leq \sup_{0 \leq \lambda \leq M} |g_n(\lambda)| \leq \gamma n, \quad \gamma = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad \text{то}$$

$$\|y_\delta - A_\eta x^*\| \leq \|y_\delta - y\| + \|y - A_\eta x^*\| = \|y_\delta - y\| + \|Ax^* - A_\eta x^*\| \leq \delta + \|A - A_\eta\| \|x^*\| \leq \delta + \eta \|x^*\|.$$

Следовательно,  $\|x_{n(\delta, \eta)} - x^*\| \leq \|G_{m\eta}x^*\| + \|g_n(A_\eta)(y_\delta - A_\eta x^*)\| \leq \|G_{m\eta}x^*\| + \gamma n(\delta + \eta \|x^*\|)$ .

Из леммы следует, что  $\|G_{m\eta}x^*\| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  и по условию теоремы  $n(\delta + \eta \|x^*\|) \rightarrow 0$ ,  $\delta \rightarrow 0$ ,  $\eta \rightarrow 0$ .

Таким образом,  $\|x_{n(\delta, \eta)} - x^*\| \rightarrow 0$ ,  $\delta \rightarrow 0$ ,  $\eta \rightarrow 0$ . Теорема 1 доказана.

**Теорема 2.** Пусть  $A = A^* \geq 0$ ,  $A_\eta = A_\eta \geq 0$ ,  $\|A - A_\eta\| \leq \eta$ ,  $Sp(A_\eta) \subseteq [0, M]$  ( $0 < \eta < \eta_0$ ),  $y \in R(A)$ ,  $\|y - y_\delta\| \leq \delta$  и выполнены условия (11), (12). Если точное решение истокорпредставимо, т. е.  $x^* = A^s z$ ,  $s > 0$ ,  $\|z\| \leq \rho$ , то справедлива оценка погрешности

$$\|x_{n(\delta, \eta)} - x^*\| \leq \gamma_0 c_s \eta^{\min(1, s)} \rho + \gamma_s n^{-s} \rho + \gamma n(\delta + \|x^*\| \eta), \quad 0 < s < \infty. \quad (15)$$

**Доказательство.** Имеем, используя истокорпредставимость точного решения,

$$\begin{aligned} \|G_{m\eta}x^*\| &= \|G_{m\eta}A^s z\| \leq \|G_{m\eta}(A^s - A_\eta^s)z\| + \|G_{m\eta}A_\eta^s z\| \leq \gamma_0 c_s \eta^{\min(1, s)} \rho + \gamma_s n^{-s} \rho, \quad \text{так как по лемме 1.1} \\ [7, \text{с. 91}] \quad \|A^s - A_\eta^s\| &\leq c_s \eta^{\min(1, s)}, \quad c_s = \text{const} \quad (c_s \leq 2 \text{ для } 0 \leq s \leq 1). \quad \text{Тогда} \end{aligned}$$

$$\|x_{n(\delta, \eta)} - x^*\| \leq \gamma_0 c_s \eta^{\min(1, s)} \rho + \gamma_s n^{-s} \rho + \gamma n(\delta + \|x^*\| \eta), \quad 0 < s < \infty.$$

Теорема 2 доказана.

Если минимизировать правую часть оценки (15) по  $n$ , то получим значение априорного момента останова

$$n_{\text{опт}} = \left[ \frac{\gamma_s \rho s}{\gamma(\delta + \|x^*\|_\eta)} \right]^{\frac{1}{s+1}} = s(\alpha + \beta)^{-1} 2^{\frac{1}{s+1}} \rho^{\frac{1}{s+1}} (\delta + \|x^*\|_\eta)^{-\frac{1}{s+1}}.$$

Подставим  $n_{\text{опт}}$  в (15), получим

$$\|x_{n(\delta, \eta)} - x^*\|_{\text{опт}} \leq \gamma_0 c_s \eta^{\min(1, s)} \rho + (1+s) 2^{\frac{s}{s+1}} \rho^{\frac{1}{s+1}} (\delta + \|x^*\|_\eta)^{\frac{s}{s+1}}.$$

**З а м е ч а н и е 1.** Оптимальная оценка погрешности метода (9) имеет порядок

$$O\left((\delta + \|x^*\|_\eta)^{\frac{s}{s+1}}\right).$$

**З а м е ч а н и е 2.** Оптимальная оценка погрешности не зависит от  $\alpha + \beta$ , но от  $\alpha + \beta$  зависит  $n_{\text{опт}}$  и, значит, объем вычислительной работы. Поэтому следует выбирать  $\alpha + \beta$  возможно большим из условия  $\alpha + \beta < 8$  и так, чтобы  $n_{\text{опт}}$  было целым.

**3. Случай несамосопряженных операторов.** В случае несамосопряженных операторов итерационный метод (9) примет вид

$$\begin{aligned} x_{n+1(\delta, \eta)} &= x_{n(\delta, \eta)} + \alpha_{n+1} [A_\eta^* y_\delta - A_\eta^* A_\eta x_{n(\delta, \eta)}], \quad x_{0(\delta, \eta)} = 0, \\ \alpha_{2n+1} &= \alpha, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \alpha_{2n+2} = \beta, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (16)$$

Его можно записать так:

$$x_{n(\delta, \eta)} = g_n(A_\eta^* A_\eta) A_\eta^* y_\delta. \quad (17)$$

Из леммы 1 следует

**Л е м м а 2.** Пусть  $A, A_\eta \in L(H, F)$ ,  $\|A_\eta\|^2 \leq M$ ,  $\|A_\eta - A\| \leq \eta$  и выполнимы условия (13), (14). Тогда  $\|K_{m\eta} v\| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ ,  $\eta \rightarrow 0 \quad \forall v \in N(A)^\perp = \overline{R(A^*)}$ ,

$$\|\widetilde{K}_{m\eta} z\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad \eta \rightarrow 0 \quad \forall z \in N(A^*)^\perp = \overline{R(A)}, \quad (18)$$

где  $K_{m\eta} = E - A_\eta^* A_\eta g_n(A_\eta^* A_\eta)$ ,  $\widetilde{K}_{m\eta} = E - A_\eta A_\eta^* g_n(A_\eta A_\eta^*)$ .

Используем лемму 2 для доказательства следующей теоремы.

**Т е о р е м а 3.** Пусть  $A, A_\eta \in L(H, F)$ ,  $\|A - A_\eta\| \leq \eta$ ,  $\|A_\eta\|^2 \leq M$  ( $0 < \eta < \eta_0$ ),  $y \in R(A)$ ,  $\|y - y_\delta\| \leq \delta$  и выполнены условия (11), (13), (14). Выберем параметр  $n = n(\delta, \eta)$  так, чтобы

$$(\delta + \eta) n^{\frac{1}{2}} (\delta, \eta) \rightarrow 0, \quad n(\delta, \eta) \rightarrow \infty, \quad \delta \rightarrow 0, \quad \eta \rightarrow 0. \quad (19)$$

Тогда  $x_{n(\delta, \eta)} \rightarrow x^*$  при  $\delta \rightarrow 0$ ,  $\eta \rightarrow 0$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Для погрешности приближения  $x_{n(\delta, \eta)}$  имеем

$$x_{n(\delta, \eta)} - x^* = -K_{m\eta} x^* + g_n(A_\eta^* A_\eta) A_\eta^* (y_\delta - A_\eta x^*). \quad (20)$$

Здесь

$$\|g_n(A_\eta^* A_\eta) A_\eta^*\| = \left\| g_n(A_\eta^* A_\eta) (A_\eta^* A_\eta)^{\frac{1}{2}} \right\| \leq \gamma^* n^{\frac{1}{2}},$$

где

$$\gamma^* = \sup_{n>0} \left( n^{-\frac{1}{2}} \sup_{0 \leq \lambda \leq M} \lambda^{\frac{1}{2}} |g_n(\lambda)| \right) \leq [2(\alpha + \beta)]^{\frac{1}{2}}$$

[12–13]. Поскольку

$$\|y_\delta - A_\eta x^*\| \leq \|y_\delta - y\| + \|y - A_\eta x^*\| = \|y_\delta - y\| + \|Ax^* - A_\eta x^*\| \leq \delta + \|A - A_\eta\| \|x^*\| \leq \delta + \eta \|x^*\|,$$

то

$$\|g_n(A_\eta^* A_\eta) A_\eta^* (y_\delta - A_\eta x^*)\| \leq [2(\alpha + \beta)]^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}} (\delta + \eta \|x^*\|).$$

Поэтому

$$x_{n(\delta, \eta)} - x^* \leq \|K_{m\eta} x^*\| + \|g_n(A_\eta^* A_\eta) A_\eta^* (y_\delta - A_\eta x^*)\| \leq \|K_{m\eta} x^*\| + [2(\alpha + \beta)]^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}} (\delta + \eta \|x^*\|).$$

Из леммы 2 следует, что  $\|K_{m\eta} x^*\| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ ,  $\delta \rightarrow 0$ ,  $\eta \rightarrow 0$ , а из условия (19)  $n^{1/2} (\delta + \eta \|x^*\|) \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ ,  $\delta \rightarrow 0$ ,  $\eta \rightarrow 0$ . Таким образом,  $\|x_{n(\delta, \eta)} - x^*\| \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ ,  $\delta \rightarrow 0$ ,  $\eta \rightarrow 0$ .

Теорема 3 доказана.

Справедлива

**Теорема 4.** Пусть  $A, A_\eta \in L(H, F)$ ,  $\|A - A_\eta\| \leq \eta$ ,  $\|A_\eta\|^2 \leq M$  ( $0 < \eta < \eta_0$ ),  $y \in R(A)$ ,  $\|y - y_\delta\| \leq \delta$ .

Если точное решение представимо в виде  $x^* = |A|^s z$ ,  $s > 0$ ,  $\|z\| \leq \rho$ ,  $|A| = (A^* A)^{\frac{1}{2}}$  и выполнены условия (11), (12), то справедлива оценка погрешности

$$\|x_{n(\delta, \eta)} - x^*\| \leq \gamma_0 c_s (1 + \ln |\eta|) \eta^{\min(1, s)} \rho + \gamma_{s/2} n^{-\frac{s}{2}} \rho + 2 [2(\alpha + \beta)]^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}} (\delta + \|x^*\| \eta).$$

**Доказательство.** В случае истокообразно представимого решения  $x^* = |A|^s z = (A^* A)^{\frac{s}{2}} z$  из (12) получим  $\sup_{0 \leq \lambda \leq M} \lambda^s |1 - \lambda g_n(\lambda)| \leq \gamma_s n^{-s}$ , где  $\gamma_s = \left( \frac{s}{\alpha + \beta} \right)^s$ . Тогда

$$\|K_{m\eta} |A_\eta|^s z\| = \| |A_\eta|^s [E - A_\eta^* A_\eta g_n(A_\eta^* A_\eta)] z \| = \left\| (A_\eta^* A_\eta)^{\frac{s}{2}} [E - A_\eta^* A_\eta g_n(A_\eta^* A_\eta)] z \right\| \leq \gamma_{\frac{s}{2}} n^{\frac{s}{2}} \rho.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \|K_{m\eta} x^*\| &= \|K_{m\eta} |A|^s z\| = \|K_{m\eta} (|A_\eta|^s - |A|^s) z\| + \left\| (A_\eta^* A_\eta)^{\frac{s}{2}} [E - A_\eta^* A_\eta g_n(A_\eta^* A_\eta)] z \right\| \leq \\ &\leq \gamma_0 c_s (1 + \ln |\eta|) \eta^{\min(1, s)} \rho + \gamma_{\frac{s}{2}} n^{\frac{s}{2}} \rho, \end{aligned}$$

так как из [7, с. 92] имеем  $\| |A_\eta|^s - |A|^s \| \leq c_s (1 + \ln |\eta|) \eta^{\min(n, s)}$ ,  $c_s = \text{const}$  ( $c_s \leq 2$  для  $0 < s < 1$ ). Из (20)

$$\begin{aligned} \|x_{n(\delta, \eta)} - x^*\| &\leq \|K_{n, \eta} x^*\| + \gamma^* n^{\frac{1}{2}} (\delta + \|x^*\| \eta) \leq \|K_{n, \eta} x^*\| + [2(\alpha + \beta)]^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}} (\delta + \|x^*\| \eta) \leq \\ &\leq \gamma_0 c_s (1 + \ln |\eta|) \eta^{\min(1, s)} \rho + \gamma_{\frac{s}{2}} n^{\frac{s}{2}} \rho + [2(\alpha + \beta)]^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}} (\delta + \|x^*\| \eta), \quad 0 < s < \infty. \end{aligned} \quad (21)$$

Из [7, с. 111] следует, что слагаемое  $\gamma_0 c_s (1 + \ln|\eta|) \eta^{\min(1,s)} \rho$  вносит в оценку погрешности вклад  $O\left(\delta + \|x^*\|_\eta\right)^{\frac{s}{s+1}}$ . Теорема 4 доказана.

Минимизируя правую часть (21) по  $n$ , получим значение априорного момента останова  $n_{\text{опт}} = s^{\frac{s+2}{s+1}} 2^{-1} (\alpha + \beta)^{-1} \left(\delta + \|x^*\|_\eta\right)^{\frac{2}{s+1}} \rho^{\frac{2}{s+1}}$ . Подставив  $n_{\text{опт}}$  в оценку погрешности для метода простой итерации с попеременно чередующимся шагом (21), получим

$$\|x_{n(\delta, \eta)} - x^*\|_{\text{опт}} \leq \gamma_0 c_s (1 + \ln|\eta|) \eta^{\min(1,s)} \rho + (1+s) s^{-\frac{s}{2(s+1)}} \left(\delta + \|x^*\|_\eta\right)^{\frac{s}{s+1}} \rho^{\frac{1}{s+1}}, \quad 0 < s < \infty.$$

**З а м е ч а н и е 3.** Оптимальная оценка погрешности имеет порядок  $O\left(\delta + \|x^*\|_\eta\right)^{\frac{s}{s+1}}$ , и, как следует из [7], этот порядок оптимален в классе задач с истокопредставимыми решениями.

**З а м е ч а н и е 4.** Оптимальная оценка погрешности не зависит от  $\alpha + \beta$ . Но от него зависит  $n_{\text{опт}}$  и, значит, объем вычислительной работы. Поэтому следует выбирать  $\alpha + \beta$  возможно большим из условия  $0 < \alpha + \beta < 8$  и так, чтобы  $n_{\text{опт}}$  было целым.

**З а к л ю ч е н и е.** В гильбертовом пространстве исследована сходимость предложенного явного метода итераций с попеременно чередующимся шагом решения некорректных уравнений первого рода в случае самосопряженного оператора. В предположении, что точное решение операторного уравнения (2) истокопредставимо, получена априорная оценка погрешности метода. Доказаны теоремы 1 и 2. Подобное исследование проведено и для случая несамосопряженной задачи. Доказана теорема 3 о сходимости метода и теорема 4, где получена априорная оценка погрешности метода (16). Полученные оценки погрешности оптимизированы и найдено значение априорного момента останова  $n_{\text{опт}}$  (для случаев самосопряженного и несамосопряженного операторов).

#### Список использованных источников

1. Landweber, L. An iteration formula for Fredholm integral equations of the first kind / L. Landweber // Am. J. Math. – 1951. – Vol. 73, № 3. – P. 615–624. <https://doi.org/10.2307/2372313>
2. Константинова, Я. В. Оценки погрешности в методе итераций для уравнений I рода / Я. В. Константинова, О. А. Лисковец // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. – 1973. – № 1. – С. 9–15.
3. Bialy, H. Iterative Behandlung linearer funktions gleichungen / H. Bialy // Arch. Ration. Much. Anal. – 1959. – Vol. 4, № 1. – P. 166–176. <https://doi.org/10.1007/bf00281385>
4. Лисковец, О. А. Сходимость в энергетической норме итеративного метода для уравнений I рода / О. А. Лисковец, В. Ф. Савчук // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1976. – № 2. – С. 19–23.
5. Емелин, И. В. К теории некорректных задач / И. В. Емелин, М. А. Красносельский // Докл. АН СССР. – 1979. – Т. 244, № 4. – С. 805–808.
6. Емелин, И. В. Правило останова в итерационных процедурах решения некорректных задач / И. В. Емелин, М. А. Красносельский // Автоматика и телемеханика. – 1978. – № 12. – С. 59–63.
7. Вайникко, Г. М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г. М. Вайникко, А. Ю. Веретенников. – М.: Наука, 1986. – 181 с.
8. Бакушинский, А. Б. Один общий прием построения регуляризующих алгоритмов для линейного некорректного уравнения в гильбертовом пространстве / А. Б. Бакушинский // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1967. – Т. 7, № 3. – С. 672–677.
9. Лаврентьев, М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики / М. М. Лаврентьев. – Новосибирск: СО АН СССР, 1962. – 92 с.
10. Денисов, А. М. Введение в теорию обратных задач / А. М. Денисов. – М.: МГУ, 1994. – 207 с.
11. Самарский, А. А. Численные методы решения обратных задач математической физики / А. А. Самарский, П. Н. Вабишевич. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 480 с.
12. Савчук, В. Ф. Регуляризация операторных уравнений в гильбертовом пространстве / В. Ф. Савчук, О. В. Матысик. – Брест: БрГУ им. А. С. Пушкина, 2008. – 196 с.
13. Матысик, О. В. Явные и неявные итерационные процедуры решения некорректно поставленных задач / О. В. Матысик. – Брест: БрГУ им. А. С. Пушкина, 2014. – 213 с.
14. Матысик, О. В. Итерационная регуляризация некорректных задач / О. В. Матысик. – Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015. – 188 с.
15. Matysik, O. V. Simple-iteration method with alternating step size for solving operator equations in Hilbert space / O. V. Matysik, M. M. Van Hulle // J. Comp. Appl. Math. – 2016. – Vol. 300. – P. 290–299. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2015.12.037>

## References

1. Landweber L. An iteration formula for Fredholm integral equations of the first kind. *American Journal of Mathematics*, 1951, vol. 73, no. 3, pp. 615–624. <https://doi.org/10.2307/2372313>
2. Konstantinova Ya. V., Liskovets O. A. The error estimates in the iteration method for equations of the first kind. *Vestnik Belorusskogo universiteta. Seriya 1. Fizika. Matematika. Informatika = Vestnik BSU. Series 1: Physics. Mathematics. Informatics*, 1973, no. 1, pp. 9–15 (in Russian).
3. Bialy H. Iterative behandlung linearer funktionalgleichungen, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1959, vol. 4, no. 1, pp. 166–176. <https://doi.org/10.1007/bf00281385>
4. Лисковец О. А., Савчук В. Ф. The convergence in the energy norm of the iterative method for equations of the first kind. *Izvestiya AN BSSR. Seriya fiziko-matematicheskikh nauk = News of the Academy of Sciences of the BSSR. Series of Physical and Mathematical Sciences*, 1976, no. 2, pp. 19–23 (in Russian).
5. Emelin I. V., Krasnosel'skii M. A. To the theory of ill-posed problems. *Doklady Akademii nauk SSSR = Reports of the USSR Academy of Sciences*, 1979, vol. 244, no. 4, pp. 805–808 (in Russian).
6. Emelin I. V., Krasnosel'skii M. A. The stoppage rule in iterative procedures of solving ill-posed problems. *Avtomatika i Telemekhanika = Automatics and Telemechanics*, 1978, no. 12, pp. 59–63 (in Russian).
7. Vainikko G. M., Veretennikov A. Yu. *The Iterative Procedures in Ill-posed Problems*. Moscow, Nauka Publ., 1986. 181 p. (in Russian).
8. Bakushinskii A. B. A general method of constructing regularizing algorithms for a linear incorrect equation in Hilbert space. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1967, vol. 7, no. 3, pp. 279–287. [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(67\)90047-x](https://doi.org/10.1016/0041-5553(67)90047-x)
9. Lavrent'ev M. M. *On Some Ill-posed Problems of Mathematical Physics*. Novosibirsk, Siberian Branch of the Academy of Sciences of the USSR, 1962. 92 p. (in Russian).
10. Denisov A. M. *The Introduction to the Theory of Inverse Problems*. Moscow, Moscow State University, 1994. 207 p. (in Russian).
11. Samarskii A. A., Vabishchevich P. N. *Numerical Methods for Solving Inverse Problems of Mathematical Physics*. Moscow, Editorial URSS Publ., 2004. 480 p. (in Russian).
12. Savchuk V. F., Matysik O. V. *The Regularization of Operator Equations in Hilbert Space*. Brest, Brest State University named after A. S. Pushkin, 2008. 196 p. (in Russian).
13. Matysik O. V. *Explicit and Implicit Iterative Procedures for Solving Ill-posed Problems*. Brest, Brest State University named after A. S. Pushkin, 2014. 213 p. (in Russian).
14. Matysik O. V. *Iterative Regularization of Ill-posed Problems*. Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015. 188 p. (in Russian).
15. Matysik, O. V., Van Hulle M. M. Simple-iteration method with alternating step size for solving operator equations in Hilbert space. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2016, no. 300, pp. 290–299. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2015.12.037>

## Информация об авторах

**Матысик Олег Викторович** – кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики, Брестский государственный университет им. А. С. Пушкина (бульвар Космонавтов, 21, 224016, г. Брест, Республика Беларусь). E-mail: matysikoleg@mail.ru.

**Савчук Вячеслав Федорович** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и информатики Брестский государственный университет им. А. С. Пушкина (бульвар Космонавтов, 21, 224016, г. Брест, Республика Беларусь).

## Information about the authors

**Oleg V. Matysik** – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Head of the Department of Applied Mathematics and Computer Science, Brest State University named after A. S. Pushkin (21, Kosmonavtov Blvd., 224016, Brest, Republic of Belarus). E-mail: matysikoleg@mail.ru

**Vyacheslav F. Savchuk** – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Associate Professor of the Department of Applied Mathematics and Computer Science, Brest State University named after A. S. Pushkin (21, Kosmonavtov Blvd., 224016, Brest, Republic of Belarus).

ISSN 1561-2430 (Print)  
ISSN 2524-2415 (Online)

УДК 519.67

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-417-426>

Поступила в редакцию 27.06.2017

Received 27.06.2017

**Н. А. Лиходед, М. А. Полещук**

*Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь*

## **ПОСТРОЕНИЕ ДВУМЕРНЫХ ЗЕРНИСТЫХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ**

**Аннотация.** Алгоритм, реализуемый на параллельном компьютере с распределенной памятью, имеет, как правило, зернистую структуру: множество операций разбито на подмножества, называемые зернами вычислений. Одним из современных подходов к получению зернистых вариантов алгоритмов является тайлинг – преобразование, основанное на информационных разрезах итерационного пространства, в результате которого получаются макрооперации-тайлы. Операции одного тайла выполняются атомарно, как одна единица вычислений, а обмен данными происходит массивами. В настоящей работе для алгоритмов, заданных вложенными многомерными циклами, предложен способ построения зернистых вычислительных процессов, логически организованных в двумерную структуру. По сравнению с одномерными структурами, использование двумерных структур возможно в меньшем числе случаев, но может иметь преимущества при реализации алгоритмов на параллельных компьютерах с распределенной памятью. К числу возможных преимуществ относятся уменьшение объема коммуникационных операций, уменьшение разгона и торможения вычислений, потенциально большее число вычислительных процессов, организация обменных операций только в пределах строк или столбцов процессов. Представленные исследования обобщают на случай двумерной структуры некоторые аспекты метода построения параллельных вычислительных процессов, организованных в одномерную структуру. В частности, исследована возможность организовать полностью загруженные работой параллельные вычислительные процессы. Показано, что при определенных ограничениях на структуру и длину циклов достаточно произвести тайлинг по трем координатам многомерного итерационного пространства. В более ранних теоретических исследованиях параллельность зернистых вычислений гарантировалась при наличии информационных разрезов по всем координатам итерационного пространства, а для более простого случая одномерной структуры – по двум координатам.

**Ключевые слова:** параллельные вычисления, распараллеливание алгоритмов, параллельный компьютер с распределенной памятью, уменьшение числа обменов данными

**Для цитирования.** Лиходед, Н. А. Построение двумерных зернистых параллельных вычислительных процессов / Н. А. Лиходед, М. А. Полещук // Вест. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2018. – Т. 54, № 4. – С. 417–426. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-417-426>

**N. A. Likhoded, M. A. Paliashchuk**

*Belarusian State University, Minsk, Belarus*

## **TILED PARALLEL 2D COMPUTATIONAL PROCESSES**

**Abstract.** The algorithm implemented on a parallel computer with distributed memory has, as a rule, a tiled structure: a set of operations is divided into subsets, called tiles. One of the modern approaches to obtaining tiled versions of algorithms is a tiling transformation based on information sections of the iteration space, resulting in macro-operations (tiles). The operations of one tile are performed atomically, as one unit of calculation, and the data exchange is done by arrays. The method of construction of tiled computational processes logically organized as a two-dimensional structure for algorithms given by multidimensional loops is stated. Compared to one-dimensional structures, the use of two-dimensional structures is possible in a smaller number of cases, but it can have advantages when implementing algorithms on parallel computers with distributed memory. Among the possible advantages are the reduction of the volume of communication operations, the reduction of acceleration and deceleration of computations, potentially a greater number of computation processes and the organization of data exchange operations only within the rows or columns of processes. The results are a generalization of some aspects of the method of construction of parallel computational processes organized in a one-dimensional structure to the case of a two-dimensional structure. It is shown that under certain restrictions on the structure and length of loops, it is sufficient to perform tiling on three coordinates of a multidimensional iteration space. In the earlier theoretical studies, the parallelism of tiled computations was guaranteed in the presence of information sections in all coordinates of the iteration space, and for a simpler case of a one-dimensional structure, in two coordinates

**Keywords:** parallel computations, parallelization of algorithms, distributed memory parallel computer, data exchange reduction

**For citation.** Likhoded N. A., Paliashchuk A. A. Tiled parallel 2D computational processes. *Vestsi Natsyional'nei akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk* = *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, vol. 54, no. 4, pp. 417–426 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-417-426>

**Введение.** Для реализации алгоритма на параллельном компьютере с распределенной памятью множество операций алгоритма должно быть, как правило, разбито на подмножества, называемые зернами вычислений. Такие алгоритмы называют зернистыми. Множество операций алгоритма разбить на зерна можно путем тайлинга (tiling) – преобразования алгоритма для получения макроопераций-тайлов [1–3]. Операции одного тайла выполняются атомарно, как одна единица вычислений, а обмен данными происходит массивами.

В настоящей работе для алгоритмов, заданных вложенными многомерными циклами, предложен способ построения зернистых вычислительных процессов, логически организованных в двумерную структуру. Такие процессы назовем двумерными (2D) процессами. Использование двумерных структур, по сравнению с одномерными, связано с дополнительными ограничениями, но имеет и ряд преимуществ при реализации алгоритмов на параллельных компьютерах с распределенной памятью: позволяет в некоторых случаях (пример, имеющий практическое значение, приведен ниже) уменьшить объем коммуникационных операций, уменьшить разгон и торможение вычислений, получить большее число вычислительных процессов (что важно, если число итераций по одной координате сравнительно небольшое), организовать обменные операции только в пределах строк или столбцов процессов.

Представленные в работе исследования являются обобщением некоторых аспектов метода построения параллельных вычислительных процессов, организованных в одномерную структуру [4, 5], на случай двумерной структуры. Показано, в частности, что для возможности организовать полностью загруженные работой параллельные вычислительные процессы достаточно, при определенных ограничениях на структуру и длину циклов, произвести тайлинг по трем координатам многомерного итерационного пространства, для частного случая одномерной структуры – по двум координатам [4, 5]. В более ранних теоретических исследованиях показана возможность организации зернистых параллельных вычислений при возможности произвести информационные разрезы по всем координатам многомерного итерационного пространства [6, с. 407]. Представленные в данной работе исследования являются также развитием и конкретизацией исследований [7] для частного случая 2D-структур: рассмотрен более широкий класс алгоритмов, получены условия загруженности работой всех зернистых вычислительных процессов.

**Предварительные сведения.** Приведем необходимые для дальнейшего изложения сведения о формальном описании алгоритма и зависимостях между операциями алгоритма.

Пусть алгоритм задан гнездом вложенных циклов, в котором имеется  $\Theta$  наборов выполняемых операторов. Под набором операторов будем понимать один или несколько выполняемых операторов, окруженных одним и тем же множеством циклов. Выполняемые операторы и наборы операторов линейно упорядочены расположением их в записи алгоритма. Обозначим  $V^0$ ,  $1 \leq \theta \leq \Theta$ , – область изменения параметров циклов, окружающих  $\theta$ -й набор операторов,  $n^0$  – размерность этой области.

Вхождением  $(a, S_\beta, q)$  будем называть  $q$ -е вхождение массива  $a$  в оператор  $S_\beta$ . Другими словами, вхождение  $(a, S_\beta, q)$  – это  $q$ -е обращение в последовательности обращений к элементам массива  $a$  при очередном выполнении оператора  $S_\beta$ . Выполнение оператора  $S_\beta$  при конкретных значениях  $\beta$  и вектора параметров цикла  $J$  будем называть операцией и обозначать  $S_\beta(J)$ . Пара вхождений  $(a, S_\alpha, p)$  и  $(a, S_\beta, q)$  порождает зависимость  $S_\alpha(I) \rightarrow S_\beta(J)$ , если  $S_\alpha(I)$  выполняется раньше  $S_\beta(J)$ ;  $S_\alpha(I)$  и  $S_\beta(J)$  используют один и тот же элемент какого-либо массива, и по крайней мере одно из использований есть переопределение элемента; между операциями  $S_\alpha(I)$  и  $S_\beta(J)$  этот элемент не переопределяется.

Зависимости  $S_\alpha(I) \rightarrow S_\beta(J)$  между операциями вложенных циклов будем характеризовать векторами  $d^{\alpha, \beta} = J - I$ . Если размерности векторов  $J$  и  $I$  не совпадают, то  $J - I$  определяется как раз-

ность векторов меньшей из размерностей. Векторы  $d^{\alpha,\beta}$  часто называют векторами зависимостей:  $d^{\alpha,\beta}$  определяет для операции  $S_\beta(J)$  операцию  $S_\alpha(I)$ , от которой  $S_\beta(J)$  зависит.

**Тайлинг.** Выделим макрооперации-тайлы путем разбиения циклов, окружающих операторы. При тайлинге каждый цикл разбивается на два цикла: глобальный, параметр которого определяет на данном уровне вложенности порядок вычисления тайлов, и локальный, в котором параметр исходного цикла изменяется в границах одного тайла. Если разбиение не производить и все итерации считать принадлежащими глобальному циклу, то получим так называемый глобальный не разбиваемый цикл; если все итерации отнести к локальному циклу, то получим локальный не разбиваемый цикл. Перестановкой и распределением циклов алгоритм преобразуется таким образом, чтобы глобальные циклы были внешними по отношению к локальным.

Пусть  $m_\zeta^\theta = \min_{J(j_1, j_2, \dots, j_{n^\theta}) \in V^\theta} j_\zeta$ ,  $M_\zeta^\theta = \max_{J(j_1, j_2, \dots, j_{n^\theta}) \in V^\theta} j_\zeta$ ,  $1 \leq \zeta \leq n^\theta$ , – предельные значения

изменения параметров циклов. Размеры тайлов задаются натуральными числами  $r_1^\theta, \dots, r_{n^\theta}^\theta$ .

Параметр  $r_\zeta^\theta$  обозначает число значений параметра  $j_\zeta$ , приходящихся на один тайл  $\theta$ -го набора операторов. Число частей  $Q_\zeta^\theta$ , на которые при формировании тайлов разбивается область значений параметра  $j_\zeta$  цикла, окружающего  $\theta$ -й набор операторов, находится согласно  $Q_\zeta^\theta = \lceil (M_\zeta^\theta - m_\zeta^\theta + 1) / r_\zeta^\theta \rceil$  ( $\lceil \cdot \rceil$  обозначает ближайшее «сверху» целое число). Тайлы нумеруются по каждой координате в пределах от 0 до  $Q_\zeta^\theta - 1$ ,  $1 \leq \zeta \leq n^\theta$ .

Обозначим  $V^{\theta, gl} = \{J^{gl}(j_1^{gl}, \dots, j_{n^\theta}^{gl}) \mid 0 \leq j_\zeta^{gl} \leq Q_\zeta^\theta - 1, 1 \leq \zeta \leq n^\theta\}$  – область изменения параметров глобальных, т. е. уровня тайлов, циклов. Если цикл является глобальным не разбиваемым, то условимся, что границы изменения этого цикла тайлинг оставляет прежними. Каждый тайл можно обозначить некоторым вектором  $J^{gl}$  или, подробнее, вектором  $J^{gl}(j_1^{gl}, \dots, j_{n^\theta}^{gl})$ . Обозначим  $V_{J^{gl}}^\theta = \{J(j_1, \dots, j_{n^\theta}) \in V^\theta \mid m_\zeta^\theta + j_\zeta^{gl} r_\zeta^\theta \leq j_\zeta \leq m_\zeta^\theta - 1 + (j_\zeta^{gl} + 1)r_\zeta^\theta, 1 \leq \zeta \leq n^\theta\}$  – область изменения параметров локальных (уровня операций тайлов) циклов при фиксированных значениях параметров глобальных циклов  $J^{gl} \in V^{\theta, gl}$ . Если это множество пустое, то тайл  $J^{gl}$  называется пустым, если это множество совпадает с множеством  $\{J(j_1, \dots, j_{n^\theta}) \in \mathbb{Z}^{n^\theta} \mid m_\zeta^\theta + j_\zeta^{gl} r_\zeta^\theta \leq j_\zeta \leq m_\zeta^\theta - 1 + (j_\zeta^{gl} + 1)r_\zeta^\theta, 1 \leq \zeta \leq n^\theta\}$ , то полным, иначе – неполным тайлом. Описанный подход к разбиению множества операций алгоритма на макрооперации-тайлы, при котором допускаются избыточные области изменения параметров глобальных циклов (некоторые множества  $V_{J^{gl}}^\theta$  могут быть пустыми), называется методом окаймления [8].

Итерации, порождающие зависимость, принадлежат некоторым тайлам. Таким образом, порождается зависимость уровня тайлов: данное, вычисленное при выполнении операции тайла  $I^{gl}$ , используется при выполнении зависимой операции тайла  $J^{gl}$ . Зависимость уровня тайлов будем характеризовать векторами глобальных зависимостей:  $d^{\alpha,\beta, gl} = J^{gl} - I^{gl}$ .

Достаточными условиями допустимости тайлинга циклов произвольной структуры вложенности являются неотрицательность координат всех векторов зависимостей ( $d_\zeta^{\alpha,\beta} \geq 0$ ,  $1 \leq \zeta \leq n^\theta$ ) и отсутствие зависимостей операторов с меньшим номером от операторов с большим номером (допускается только  $\theta^\beta \geq \theta^\alpha$ ) [2]. Если рассматривать тайлы произвольного фиксированного размера, то эти достаточные условия являются также и необходимыми; при допущении наличия глобальных и/или локальных не разбиваемых циклов достаточные условия можно ослабить [5].

Рассмотрим алгоритм следующего вида:

```

do  $t = 1, T$ 
  do  $j_2 = m_2, M_2$ 
    .....
    do  $j_n = m_n, M_n$ 
      Набор операторов
    enddo
  .....
enddo
enddo

```

(1)

Здесь выделен самый внешний цикл, выполняющий некоторое число итераций  $T$ . Наличие такого особого цикла типично для сеточных методов численного решения дифференциальных уравнений: параметр цикла  $t$  задает номер временного слоя или номер итерации итерационного алгоритма. В записи алгоритма (1) только один набор операторов, поэтому верхний индекс  $\theta$  в обозначениях не будем указывать.

Следующая лемма является следствием результатов работы [5] и устанавливает для случая алгоритма (1) более слабые, чем известное условие неотрицательности всех координат всех векторов зависимостей, достаточные условия допустимости тайлинга.

*Л е м м а.* Пусть алгоритм имеет вид (1),  $n \geq 4$ , самый внешний цикл является глобальным не разбиваемым, следующие три цикла, обозначим их параметры  $j_\eta, j_\xi, j_\tau$ , являются разбиваемыми, остальные (если  $n > 4$ ) – локальными не разбиваемыми. Пусть зависимости вида

$$S_\alpha(I(i_1, \dots, i_n)) \rightarrow S_\beta(J(j_1, \dots, j_n)), \quad i_1 = j_1,$$

либо отсутствуют, либо для них выполняются условия

$$j_\eta \geq i_\eta, j_\xi \geq i_\xi, j_\tau \geq i_\tau. \quad (2)$$

Тогда тайлинг допустим.

Запишем алгоритм (1) после преобразования тайлинга, определяемого предположениями леммы:

```

do  $t = 1, T$ 
  do  $j_\eta^{gl} = 0, Q_\eta - 1$ 
    do  $j_\xi^{gl} = 0, Q_\xi - 1$ 
      do  $j_\tau^{gl} = 0, Q_\tau - 1$ 
        Tile( $t, j_\eta^{gl}, j_\xi^{gl}, j_\tau^{gl}$ )
      enddo
    enddo
  enddo
enddo

```

(3)

Здесь тайл  $\text{Tile}(t, j_\eta^{gl}, j_\xi^{gl}, j_\tau^{gl})$  имеет следующий вид:

```

do  $j_\eta = m_\eta + j_\eta^{gl} r_\eta, \min(m_\eta - 1 + (j_\eta^{gl} + 1)r_\eta, M_\eta)$ 
  do  $j_\xi = m_\xi + j_\xi^{gl} r_\xi, \min(m_\xi - 1 + (j_\xi^{gl} + 1)r_\xi, M_\xi)$ 
    do  $j_\tau = m_\tau + j_\tau^{gl} r_\tau, \min(m_\tau - 1 + (j_\tau^{gl} + 1)r_\tau, M_\tau)$ 
      do  $j = \dots$  // локальный не разбиваемый цикл
        Набор операторов
      enddo
    enddo
  enddo
enddo

```

Указанный в тайле локальный не разбиваемый цикл может быть не один или, напротив, отсутствовать.

**Распределение зерен вычислений между двумерными процессами.** Рассмотрим следующий способ получения 2D зернистых (т. е. уровня макроопераций-тайлов) вычислительных процессов. Напомним, что каждому тайлу соответствует некоторый набор операторов  $\theta$ . Зафиксируем два глобальных цикла с уровнями вложенности  $\eta, \xi$  таких, что цикл с параметром  $j_{\xi}^{gl}$  окружен циклом с параметром  $j_{\eta}^{gl}$  (пока не предполагается, что алгоритм имеет вид (3)), и два таких числа  $P_{\eta}, P_{\xi}$ , что  $2 \leq P_{\eta} \leq Q_{\eta}^0, 2 \leq P_{\xi} \leq Q_{\xi}^0$ . К одному 2D-процессу с координатами  $(j_{\eta}^{gl} \bmod P_{\eta}, j_{\xi}^{gl} \bmod P_{\xi})$  отнесем вычисления всех тайлов с одинаковыми значениями функций

$$\text{Pr}^{\theta}(J^{gl}(j_1^{gl}, \dots, j_n^{gl})) = (j_{\eta}^{gl} \bmod P_{\eta}, j_{\xi}^{gl} \bmod P_{\xi}), \quad (4)$$

если тайл  $J^{gl}$  окружен циклами с параметрами  $j_{\eta}^{gl}, j_{\xi}^{gl}$  (в этом случае набор операторов  $\theta$  исходного алгоритма окружен циклами с параметрами  $j_{\eta}$  и  $j_{\xi}$ ). Отметим, что формально можно положить  $P_{\eta} = 1$  или  $P_{\xi} = 1$ , но в этом случае структура вычислительных процессов является одномерной.

Определим компоненты функции  $\text{Pr}^{\theta}(J^{gl})$  в случае, когда тайл  $J^{gl}$  не окружен циклами с параметрами  $j_{\eta}^{gl}, j_{\xi}^{gl}$ . Положим обе компоненты функции  $\text{Pr}^{\theta}(J^{gl})$  равными 0, если тайл расположен выше цикла с параметром  $j_{\eta}^{gl}$ ; положим первую и вторую компоненты  $\text{Pr}^{\theta}(J^{gl})$  равными  $(Q_{\eta}^0 - 1) \bmod P_{\eta}$  и  $(Q_{\xi}^0 - 1) \bmod P_{\xi}$  соответственно, если тайл расположен ниже цикла с параметром  $j_{\eta}^{gl}$ ; положим вторую компоненту  $\text{Pr}^{\theta}(J^{gl})$  равной 0, если тайл окружен циклом с параметром  $j_{\eta}^{gl}$  и расположен выше цикла с параметром  $j_{\xi}^{gl}$ ; положим вторую компоненту  $\text{Pr}^{\theta}(J^{gl})$  равной  $(Q_{\xi}^0 - 1) \bmod P_{\xi}$ , если тайл окружен циклом с параметром  $j_{\eta}^{gl}$  и расположен ниже цикла с параметром  $j_{\xi}^{gl}$ .

Вычислительный процесс с координатами  $(p_{\eta}, p_{\xi})$  будем обозначать  $\text{Pr}_{p_{\eta}, p_{\xi}}^{\theta}$ .

В случае алгоритма вида (1) (или, после тайлинга, алгоритма вида (3)) единый псевдокод для каждого из 2D вычислительных процессов  $\text{Pr}_{p_{\eta}, p_{\xi}}$ ,  $0 \leq p_{\eta} \leq P_{\eta} - 1, 0 \leq p_{\xi} \leq P_{\xi} - 1$ , порождаемых функцией (4), можно записать следующим образом:

```
do  $t = 1, T$ 
do  $j_{\eta}^{gl} = p_{\eta}, Q_{\eta} - 1, P_{\eta}$  // Цикл с шагом  $P_{\eta}$ 
do  $j_{\xi}^{gl} = p_{\xi}, Q_{\xi} - 1, P_{\xi}$  // Цикл с шагом  $P_{\xi}$ 
do  $j_{\tau}^{gl} = 0, Q_{\tau} - 1$ 
    Tile( $t, j_{\eta}^{gl}, j_{\xi}^{gl}, j_{\tau}^{gl}$ )
enddo
enddo
enddo
enddo
```

Если  $P_{\eta} = Q_{\eta}$  и  $P_{\xi} = Q_{\xi}$ , то циклы с параметрами  $j_{\eta}^{gl}$  и  $j_{\xi}^{gl}$  содержат только по одной итерации. В этом случае алгоритм (5) для каждого из 2D вычислительных процессов  $\text{Pr}_{p_{\eta}, p_{\xi}}$ ,  $0 \leq p_{\eta} \leq P_{\eta} - 1, 0 \leq p_{\xi} \leq P_{\xi} - 1$ , примет вид

```

do  $t = 1, T$ 
  do  $j_\tau^{gl} = 0, Q_\tau - 1$ 
    Tile( $t, p_\eta, p_\xi, j_\tau^{gl}$ )
  enddo
enddo

```

(6)

**Параллельность двумерных зернистых вычислительных процессов.** Исследуем для алгоритма вида (1) загруженность работой вычислительных процессов, организованных в двумерную структуру  $\text{Pr}_{p_\eta, p_\xi}$ ,  $0 \leq p_\eta \leq P_\eta - 1$ ,  $0 \leq p_\xi \leq P_\xi - 1$ . Исследования проведем в рамках абстрактной модели вычислений: все макрооперации зернистого алгоритма обеспечены необходимыми данными и одинаковы по длительности выполнения [6], возможные временные затраты на коммуникационные операции и на обработку пустых тайлов не учитываются. Примем, что множество операций любого тайла выполняется за одну единицу времени. Эти предположения, а также ограничения на вид рассматриваемых алгоритмов, накладываются для возможности формулировать и строго доказывать содержательные утверждения.

Определим продолжительность разгона (торможения) вычислений – число единиц времени, когда еще не все процессы начали (закончили) выполняться.

**Т е о р е м а.** Пусть выполняются предположения леммы и следующие условия:

$$Q_\tau \gg Q_\eta, \quad Q_\tau \gg Q_\xi; \quad (7)$$

$$\frac{Q_\eta}{P_\eta} \in \mathbb{Z}, \quad \frac{Q_\xi}{P_\xi} \in \mathbb{Z}; \quad (8)$$

и

$$|d_\tau^{gl}| < Q_\tau - (Q_\eta - 1) - (Q_\xi - 1), \quad (9)$$

если для какого-либо вектора глобальных зависимостей  $d^{\alpha, \beta, gl} = (d_1^{gl}, d_\eta^{gl}, d_\xi^{gl}, d_\tau^{gl}, \dots)$  имеет место  $d_1^{gl} = 1$ ,  $d_\tau^{gl} < 0$ , а также  $d_\eta^{gl} < 0$  и/или  $d_\xi^{gl} < 0$ . Тогда, без учета разгона и торможения вычислений, все зернистые вычислительные процессы в каждый момент времени загружены работой; продолжительности разгона и торможения вычислений намного меньше общей продолжительности вычислений.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Предположим сначала, что  $P_\eta = Q_\eta$ ,  $P_\xi = Q_\xi$ . В этом случае каждый из 2D вычислительных процессов  $\text{Pr}_{p_\eta, p_\xi}$ ,  $0 \leq p_\eta \leq P_\eta - 1$ ,  $0 \leq p_\xi \leq P_\xi - 1$ , выполняет алгоритм (6).

Из леммы следует, что первые четыре координаты всех векторов зависимостей неотрицательны для итераций алгоритма с фиксированным  $t$ :

$$d^{\alpha, \beta} = J(t, j_\eta, j_\xi, j_\tau, \dots, j_n) - I(t, i_\eta, i_\xi, i_\tau, \dots, i_n) = (0, j_\eta - i_\eta, j_\xi - i_\xi, j_\tau - i_\tau, \dots).$$

Тогда первые четыре координаты векторов глобальных зависимостей также являются неотрицательными. Отсюда следует, что для каждого  $t$  любой процесс  $\text{Pr}_{p_\eta, p_\xi}$  выполняет свои  $Q_\tau$  макроопераций Tile( $t, p_\eta, p_\xi, j_\tau^{gl}$ ) в подряд идущие моменты времени, причем процесс  $\text{Pr}_{p_\eta, p_\xi}$  начнет выполнение макроопераций не позже, чем через  $p_\eta + p_\xi$  единиц времени по сравнению с процессом  $\text{Pr}_{0,0}$ .

Условия (7), (9) гарантируют, что процесс  $\text{Pr}_{0,0}$  (а значит, и все другие процессы) сразу после выполнения  $Q_\tau$  макроопераций на текущей итерации  $t$  начнет выполнять  $Q_\tau$  макроопераций при  $t$  на следующей итерации.

Таким образом, разгон вычислений происходит при  $t = 1$ , его продолжительность не превосходит  $P_\eta + P_\xi - 2$ , торможение вычислений происходит при  $t = T$ , продолжительность его также равна  $P_\eta + P_\xi - 2$ . Общее время вычислений алгоритма (6) не превосходит  $TQ_\tau + P_\eta + P_\xi - 2$ . Минимально возможное время вычислений равно  $TQ_\tau$  и достигается в том случае, когда зависи-

мости позволяют начать всем процессам выполнять макрооперации одновременно. Вне разгона и торможения вычислений все зернистые вычислительные процессы в каждый момент времени загружены работой. Сравнивая величины  $2(P_\eta + P_\xi - 2) = 2(Q_\eta + Q_\xi - 2)$  и  $TQ_\tau + P_\eta + P_\xi - 2 = TQ_\tau + Q_\eta + Q_\xi - 2$  заключаем, что суммарное время разгона и торможения вычислений (напомним, по условию  $Q_\tau \gg Q_\eta$ ,  $Q_\tau \gg Q_\xi$ ) намного меньше общего времени вычислений алгоритма (6).

Предположим теперь, что  $P_\eta < Q_\eta$  и  $P_\xi < Q_\xi$  («промежуточный» случай  $P_\eta < Q_\eta$  или  $P_\xi < Q_\xi$  можно рассмотреть аналогично). Тогда 2D вычислительные процессы выполняют алгоритм (5).

В одном процессе производятся вычисления, приписанные  $\frac{Q_\eta}{P_\eta} \frac{Q_\xi}{P_\xi}$  процессам (см. условия (8)) рас-

смотренного случая  $P_\eta = Q_\eta$  и  $P_\xi = Q_\xi$ . Суммарная продолжительность разгона и торможения вычислений (будем считать, что они требуются) равна  $2(P_\eta + P_\xi - 2)$ , что намного меньше  $T \frac{Q_\eta}{P_\eta} \frac{Q_\xi}{P_\xi} Q_\tau + P_\eta + P_\xi - 2$  – общего времени вычислений алгоритма (5).

Теорема доказана.

Условия полной (не считая разгона и торможения вычислений) загруженности всех зернистых вычислительных процессов, организованных в одномерную структуру, исследованы в [4, 5].

**З а м е ч а н и е 1.** Условия теоремы, как следует из доказательства, могут быть ослаблены, если хотя бы один из циклов, порождающих координаты вычислительных процессов, является параллельным. Например, если параллельным является цикл с параметром  $j_\eta$ , то не требуется выполнения  $Q_\tau \gg Q_\eta$ , а суммарная продолжительность разгона и торможения вычислений не превосходит  $2(P_\xi - 1)$ .

**З а м е ч а н и е 2.** При выполнении условий (2) циклы с параметрами  $j_\eta, j_\xi, j_\tau$  переставляемы, поэтому теорема верна и в случае произвольного первоначального порядка следования этих циклов.

**З а м е ч а н и е 3.** Пусть в алгоритме (1) отсутствует самый внешний цикл. Утверждение теоремы остается верным, если потребовать выполнения условия (2) для каждой зависимости.

**П р и м е р.** Рассмотрим трехмерную задачу Дирихле для уравнения Пуассона, заданного в области  $G = [0 < x_1 < l_1] \times [0 < x_2 < l_2] \times [0 < x_3 < l_3]$  с границей  $\partial G$ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} - au = f(x_1, x_2, x_3), (x_1, x_2, x_3) \in G, \quad a > 0,$$

$$u(x_1, x_2, x_3)|_{\partial G} = \mu(x_1, x_2, x_3).$$

Для численного решения задачи введем в области  $G + \partial G$  сетку узлов  $\{(ih_1, jh_2, kh_3) | i = 0, 1, \dots, N_x, N_x h_1 = l_1, j = 0, 1, \dots, N_y, N_y h_2 = l_2, k = 0, 1, \dots, N_z, N_z h_3 = l_3\}$ . Используем семиточечный шаблон для аппроксимации значений производных и сеточного представления функций [9]. Основную часть алгоритма численного решения методом последовательной верхней релаксации можно представить в виде (1):

```
do t = 1, T // T – некоторое фиксированное число итераций
  do i = 1, Nx - 1
    do j = 1, Ny - 1
      do k = 1, Nz - 1
        y(i, j, k) = F(y(i - 1, j, k), y(i, j - 1, k), y(i, j, k - 1), y(i, j, k), y(i + 1, j, k), y(i, j + 1, k), y(i, j, k + 1))
      enddo
    enddo
  enddo
enddo
```

где функция  $F$  вычисляется по формуле

$$\begin{aligned}
& F(y(i-1, j, k), y(i, j-1, k), y(i, j, k-1), y(i, j, k), y(i+1, j, k), y(i, j+1, k), y(i, j, k+1)) = \\
& = (1-\omega)y(i, j, k) + \omega \left( (y(i+1, j, k) + y(i-1, j, k)) / h_1^2 + (y(i, j+1, k) + y(i, j-1, k)) / h_2^2 + \right. \\
& \quad \left. + (y(i, j, k+1) + y(i, j, k-1)) / h_3^2 - f_{i,j,k} \right) / (2 / h_1^2 + 2 / h_2^2 + 2 / h_3^2 + a).
\end{aligned}$$

Все зависимости алгоритма верхней релаксации являются однородными и выражаются векторами зависимостей  $(0,1,0,0)$ ,  $(0,0,1,0)$ ,  $(0,0,0,1)$ ,  $(1,0,0,0)$ ,  $(1,-1,0,0)$ ,  $(1,0,-1,0)$ ,  $(1,0,0,-1)$ . Осуществим тайлинг. При фиксированном  $t$  зависимости между итерациями алгоритма выражаются векторами  $(0,1,0,0)$ ,  $(0,0,1,0)$ ,  $(0,0,0,1)$  с неотрицательными координатами, поэтому достаточное условие допустимости тайлинга (утверждение леммы) выполнено.

Преобразуем циклы с параметрами  $i, j, k$  в двумерную циклическую конструкцию. Каждый из указанных циклов разбивается на глобальный и локальный: глобальные циклы определяют порядок вычисления тайлов, локальные циклы определяют порядок вычисления итераций исходного алгоритма в границах одного тайла. Зададим  $r_2, r_3, r_4$  – размеры тайла; тогда

$$Q_2 = \left\lceil \frac{N_x - 1}{r_2} \right\rceil, \quad Q_3 = \left\lceil \frac{N_y - 1}{r_3} \right\rceil, \quad Q_4 = \left\lceil \frac{N_z - 1}{r_4} \right\rceil - \text{число тайлов по измерениям. После разбиения}$$

и перестановки циклов получим

```

do  $t = 1, T$ 
  do  $i^{gl} = 0, Q_2 - 1$ 
    do  $j^{gl} = 0, Q_3 - 1$ 
      do  $k^{gl} = 0, Q_4 - 1$ 
        // Начало тайла  $\text{Tile}(t, i^{gl}, j^{gl}, k^{gl})$ 
        do  $i = 1 + i^{gl}r_2, \min((i^{gl} + 1)r_2, N_x - 1)$ 
          do  $j = 1 + j^{gl}r_3, \min((j^{gl} + 1)r_3, N_y - 1)$ 
            do  $k = 1 + k^{gl}r_4, \min((k^{gl} + 1)r_4, N_z - 1)$ 
               $y(i, j, k) = F(y(i-1, j, k), y(i, j-1, k), y(i, j, k-1), y(i, j, k), y(i+1, j, k), y(i, j+1, k), y(i, j, k+1))$ 
            enddo
          enddo
        enddo
      enddo
    enddo
  enddo
  // Конец тайла  $\text{Tile}(t, i^{gl}, j^{gl}, k^{gl})$ 
enddo
enddo
enddo
enddo

```

Пусть  $j_\eta = i, j_\xi = j, j_\tau = k, P_\eta \times P_\xi$  – число процессов, предназначенных для реализации алгоритма. Выберем, следуя теореме,  $Q_4 \gg Q_2, Q_4 \gg Q_3, \frac{Q_2}{P_2} \in \mathbb{Z}, \frac{Q_3}{P_3} \in \mathbb{Z}$ . Запишем псевдокод параллельного алгоритма с полной (не считая разгона и торможения вычислений) загруженностью зернистых вычислительных процессов. Для каждого процесса  $\text{Pr}_{p_\eta, p_\xi}, 0 \leq p_\eta \leq P_\eta - 1, 0 \leq p_\xi \leq P_\xi - 1$ :

```

do  $t = 1, T$ 
  do  $i^{gl} = p_\eta, Q_2 - 1, P_\eta$  // Цикл с шагом  $P_\eta$ 
    do  $j^{gl} = p_\xi, Q_3 - 1, P_\xi$  // Цикл с шагом  $P_\xi$ 
      do  $k^{gl} = 0, Q_4 - 1$ 
        получение данных
         $\text{Tile}(t, i^{gl}, j^{gl}, k^{gl})$ 
        отправка данных
      enddo
    enddo
  enddo
enddo
enddo

```

Произведем оценку объема передаваемых данных. Объем данных, отправляемых одним процессом на одной итерации  $t$ , оценивается (в случае  $P_\eta > 1$ ,  $P_\xi > 1$ ) величиной  $2 \left( r_2 N_z \frac{Q_3}{P_\xi} + r_3 N_z \frac{Q_2}{P_\eta} \right)$ .

Объем коммуникаций, осуществляемых всеми процессами, оценивается величиной  $2TP_\eta P_\xi N_z \left( \frac{N_x Q_3}{Q_2 P_\xi} + \frac{N_y Q_2}{Q_3 P_\eta} \right)$ . Оценим объем данных, отправляемых одним процессом на одной итерации  $t$ , в случае  $Q_2 = 1$  одномерной вычислительной структуры (тогда имеет место  $P_\eta = 1$ ,  $r_2 = N_x - 1$ ):  $2N_x N_z \frac{Q_3}{P_\xi}$ . Объем коммуникационных операций, осуществляемых всеми процессами на всех итерациях  $t$ , оценивается величиной  $2TN_x N_z Q_3$ .

Пусть, например,  $N_x = N_y = N_z = N$ . Если  $P^2$  процессов организованы в двумерную структуру и  $P_\eta \times P_\xi = P \times P = P^2$ ,  $Q_2 = Q_3 = P$ , то объем пересылаемых данных, осуществляемых всеми процессами, оценивается величиной  $4TN^2P$ . Если  $P^2$  процессов организовать в одномерную структуру и, для определенности,  $Q_2 = 1$ ,  $P_\eta = 1$ ,  $Q_3 = P_\xi = P^2$ , то объем коммуникационных операций оценивается величиной  $2TN^2P^2$ , что при большом числе процессов  $P$  существенно больше  $4TN^2P$ .

Таким образом, при достаточно большом числе процессов использование 2D-структуры позволило существенно уменьшить объем коммуникационных операций. В этом примере можно отметить и другие преимущества двумерных структур по сравнению с одномерными (при реализации алгоритмов на параллельных компьютерах с распределенной памятью): уменьшение разгона и торможения вычислений, возможность получения большего числа вычислительных процессов при сравнительно небольшом размере сетки узлов.

**Благодарности.** Работа выполнена в рамках Государственной программы научных исследований Республики Беларусь «Конвергенция-2020», подпрограмма «Методы математического моделирования сложных систем».

**Acknowledgments.** The prepared report was sponsored by the Government program of scientific research of the Republic of Belarus “Convergence-2020”, subprogram “Methods of mathematical modeling of complex systems”.

### Список использованных источников

1. Xue, J. Time-minimal tiling when rise is larger than zero / J. Xue, W. Cai // *Parallel Computing*. – 2002. – Vol. 28, №. 6. – P. 915–939. [https://doi.org/10.1016/s0167-8191\(02\)00098-4](https://doi.org/10.1016/s0167-8191(02)00098-4)
2. Kim, D. Parameterized tiling for imperfectly nested loops / D. Kim, S. Rajopadhye // Technical Report CS-09-101. – Colorado State University, Department of Computer Science, February 2009. – 21 p.
3. Dathathri, R. Compiling Affine Loop Nests for a Dynamic Scheduling Runtime on Shared and Distributed Memory / R. Dathathri, R. T. Mullapudi, U. Bondhugula // *ACM Transactions on Parallel Computing (TOPC)*. – 2016. – Vol. 3, №. 2. – P. 1–28. <https://doi.org/10.1145/2948975>
4. Лиходед, Н. А. Параллельные последовательности зернистых вычислений / Н. А. Лиходед, А. А. Толстиков // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2010. – Т. 54, № 4. – С. 36–41.
5. Толстиков, А. А. Корректность разбиений алгоритмов при организации зернистых параллельных вычислительных процессов / А. А. Толстиков, Н. А. Лиходед // Междунар. конгресс по информатике: информационные системы и технологии CSIST'2011, 31 окт. – 3 нояб. 2011 г. – Минск: БГУ, 2011. – Т. 2. – С. 122–126.
6. Воеводин, В. В. Параллельные вычисления / В. В. Воеводин, Вл. В. Воеводин. – СПб.: БХВ-Петербург, 2002. – 608 с.
7. Соболевский, П. И. Двухуровневый тайлинг и его применение при пространственно-временном отображении алгоритмов на параллельные архитектуры / П. И. Соболевский, С. В. Баханович // Вест. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2016. – № 2. – С. 85–97.
8. Parameterized tiled loops for free / L. Renganarayanan [et al.] // *ACM SIGPLAN Conference on Programming Language Design and Implementation*, San Diego, California, USA, June 2007. – [S. l.], 2007. – P. 126–138. <https://doi.org/10.1145/1250734.1250780>
9. Самарский, А. А. Методы решения сеточных уравнений / А. А. Самарский, Е. С. Николаев. – М.: Наука, 1978. – 592 с.

### References

1. Xue J., Cai W. Time-minimal tiling when rise is larger than zero. *Parallel Computing*, 2002, vol. 28, no. 6, pp. 915–939. [https://doi.org/10.1016/s0167-8191\(02\)00098-4](https://doi.org/10.1016/s0167-8191(02)00098-4)

2. Kim D., Rajopadhye S. *Parameterized Tiling for Imperfectly Nested Loops. Technical Report CS-09-101*. Colorado State University, Department of Computer Science, February 2009. 21 p.
3. Dathathri R., Mullapudi R. T., Bondhugula U. Compiling Affine Loop Nests for a Dynamic Scheduling Runtime on Shared and Distributed Memory. *ACM Transactions on Parallel Computing (TOPC)*, 2016, vol. 3, no. 2, pp. 1–28. <https://doi.org/10.1145/2948975>
4. Likhoded N. A., Tolstikov A. A. Parallel sequences of grain computations. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2010, vol. 54, no. 4, pp. 36–41 (in Russian).
5. Tolstikov A. A., Likhoded N. A. Correctness of tiling of algorithms for organization of tiled parallel computational processes. *Mezhdunarodnyi kongress po informatike: informatsionnye sistemy i tekhnologii CSIST'2011, 31 oktyabrya – 3 noyabrya 2011 g. T. 2* [International Congress on Computer Science: Information Systems and Technologies CSIST'2011, November 2011. Vol. 2]. Minsk, Belarusian State University, 2011, pp. 122–126 (in Russian).
6. Voevodin V. V., Voevodin V. V. *Parallel Computations*. St. Petersburg, BKhV-Petersburg Publ., 2002. 608 p. (in Russian).
7. Sobolevsky P. I., Bakhanovich S. V. Two-level tiling and its application in the space-time mapping of algorithms onto parallel architectures. *Vesti Natsional'noi akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2016, no. 2, pp. 85–97 (in Russian).
8. Renganarayanan L., Kim D., Rajopadhye S., Strout M. M. Parameterized tiled loops for free. *Proceedings of the 2007 ACM SIGPLAN conference on Programming language design and implementation - PLDI '07*. San Diego, California, USA, June 2007, pp. 126–138. <https://doi.org/10.1145/1250734.1250780>
9. Samarskii A. A., Nikolaev E. S. *Methods for Solving of the Grid Equations*. Moscow, Nauka Publ., 1978. 592 p. (in Russian).

### Информация об авторах

**Лиходед Николай Александрович** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики факультета прикладной математики и информатики, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: [likhoded@bsu.by](mailto:likhoded@bsu.by).

**Полещук Максим Александрович** – ассистент кафедры вычислительной математики факультета прикладной математики и информатики, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: [poleschuma@bsu.by](mailto:poleschuma@bsu.by).

### Information about the authors

**Nikolai A. Likhoded** – D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor of the Department of Applied Mathematics, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Str., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: [likhoded@bsu.by](mailto:likhoded@bsu.by)

**Maksim A. Paliashchuk** – Junior Researcher, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Str., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: [poleschuma@bsu.by](mailto:poleschuma@bsu.by)

ISSN 1561-2430 (Print)  
ISSN 2524-2415 (Online)

УДК 519.2

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-427-433>

Поступила в редакцию 29.06.2018

Received 29.06.2018

Е. Е. Жук

*Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь*

## СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТРЕНДА БЛИЖАЙШЕГО ТИПА ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИЙ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

**Аннотация.** Исследуется проблема выбора трендовой модели, ближайшей к реализации  $X = \{x_t\}_{t=1}^T$  длительности  $T$  нестационарного временного ряда:  $x_t = f(t) + u_t$ , где  $f(\cdot)$  – неизвестный (реальный) тренд, а случайные величины  $\{u_t\}_{t=1}^T$  являются ошибками наблюдений с нулевыми математическими ожиданиями и одинаковой ограниченной дисперсией. Причем здесь трендовые модели  $\{\Omega_l\}_{l \in S}$  задаются своими типовыми (базовыми) трендами  $\{f_l(\cdot)\}_{l \in S}$  ( $S = \{1, \dots, L\}$  – множество номеров этих моделей,  $L \geq 2$ ):  $\sum_{t=1}^T f_l(t) = 0$ ,  $l \in S$ , образуя семейства сдвига:  $f_l^a(t) = f_l(t) + a$ ,  $t = \overline{1, T}$ , где  $a \in R$  – параметр сдвига  $l \in S$ . Для принятия решений предлагается использовать решающее правило по методу наименьших квадратов. В качестве меры эффективности принимаемых решений аналитически вычислен риск (вероятность ошибочно определить ближайшую к реализации трендовую модель). Как пример рассмотрен случай двух альтернативных трендовых моделей.

**Ключевые слова:** нестационарный временной ряд, трендовая модель, реализация, решающее правило, риск

**Для цитирования.** Жук, Е. Е. Статистическое определение тренда ближайшего типа для реализаций нестационарных временных рядов / Е. Е. Жук // Вест. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2018. – Т. 54, № 4. – С. 427–433. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-427-433>

Е. Е. Zhuk

*Belarusian State University, Minsk, Belarus*

## STATISTICAL DETERMINATION OF THE NEAREST TYPE TREND FOR REALIZATIONS OF NON-STATIONARY TIME SERIES

**Abstract.** The problem of statistical assignment of realizations  $X = \{x_t\}_{t=1}^T$  of non-stationary time series to the nearest trend model is studied. Here, these trend models  $\{\Omega_l\}_{l \in S}$  ( $S = \{1, \dots, L\}$ ,  $L \geq 2$ ) are determined by their basic trends  $\{f_l(\cdot)\}_{l \in S}$ :  $\sum_{t=1}^T f_l(t) = 0$ ,  $l \in S$ , and constitute shift families:  $f_l^a(t) = f_l(t) + a$ ,  $t = \overline{1, T}$ , where  $a \in R$  is the shift parameter ( $l \in S$ ). For the decision making, the decision rule by the least-squares method is proposed and its efficiency is analytically investigated (as an efficiency measure its risk is evaluated). For illustration of the obtained results, the case of two alternative trend models is given.

**Keywords:** non-stationary time series, trend model, realization, decision rule, risk

**For citation.** Zhuk E. E. Statistical determination of the nearest type trend for realizations of non-stationary time series. *Vestsi Natsyional'nai akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, vol. 54, no. 4, pp. 427–433 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-427-433>

**1. Математическая модель и постановка задачи.** Данная статья по тематике продолжает исследования, начатые в [1], и посвящена проблеме выбора ближайшей к реализации нестационарного временного ряда трендовой модели. Причем здесь трендовые модели задаются каждая своим типовым (базовым) трендом, образуя семейства сдвига. Сформулируем математическую модель.

Пусть имеется реализация  $X = \{x_t\}_{t=1}^T$  длительности  $T$  нестационарного временного ряда (ВР). Согласно общепринятой трендовой модели [2, 3], отсчеты  $x_t \in R$ ,  $t = \overline{1, T}$ , этого ВР расположены возле своего тренда:

$$x_t = f(t) + u_t, \quad (1)$$

где  $f(t)$ ,  $t = \overline{1, T}$ , и есть тренд (детерминированная функция), а ее аргумент  $t$  интерпретируется как время. Величины  $\{u_t\}_{t=1}^T$  в (1) случайны, обычно считаются некоррелированными с нулевыми математическими ожиданиями и одинаковой ограниченной дисперсией:

$$\begin{aligned} E\{u_t\} &= 0, D\{u_t\} = E\{u_t^2\} = \sigma^2 < +\infty; \\ E\{u_t u_l\} &= 0 \quad \forall t, l = \overline{1, T}, l \neq t, \end{aligned} \quad (2)$$

и имеют смысл ошибок наблюдений.

Заданы  $L \geq 2$  различных трендовых моделей. Каждая такая трендовая модель  $\Omega_l$  определяется своим трендом  $f_l(t)$ ,  $t = \overline{1, T}$ ,  $l \in S$ , где  $S = \{1, \dots, L\}$  – множество номеров этих моделей. Причем все тренды  $\{f_l(\cdot)\}_{l \in S}$  отцентрированы относительно нулевого уровня в том смысле, что

$$\sum_{t=1}^T f_l(t) = 0, l \in S. \quad (3)$$

Сама модель  $\Omega_l$  ( $l \in S$ ) содержит всевозможные тренды вида

$$f_l^a(t) = f_l(t) + a, t = \overline{1, T}, \quad (4)$$

где  $a \in R$  – параметр (константа) сдвига [2, 3]. Таким образом, тренд  $f_l(\cdot)$  из (3) является типовым (базовым) и задает так называемую «тенденцию» [4], определяющую модель  $\Omega_l$  и не зависящую от абсолютных значений текущего (реального) тренда (4), принадлежащего этой модели.

Во многих приложениях, в том числе предсказание (прогнозирование) поведения цены на бирже [4], важно спрогнозировать не само значение цены, а ее поведение (тенденцию), которая и определяется базовыми (отцентрированными) трендами (3).

Таким образом, по реализации  $X = \{x_t\}_{t=1}^T$ , которой соответствует ненаблюдаемый (неизвестный) реальный тренд  $f(\cdot)$  из (1), необходимо решить, к какой трендовой модели из  $\{\Omega_l\}_{l \in S}$  она «ближе». Разумеется, предварительно необходимо определить это понятие, а также предложить критерий эффективности принимаемых решений [1].

**2. Решающее правило и определение его риска.** Воспользуемся методом наименьших квадратов (МНК) [3] и построим по реализации  $X = \{x_t\}_{t=1}^T$  решающее правило (РП) [1, 3]  $d = d(X) \in S$ , относящее реализацию  $X$  к той модели из  $\{\Omega_l\}_{l \in S}$ , к базовому тренду (3) которой она ближе (с учетом оценивания неизвестного параметра сдвига в (4)). Само РП будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} d = d(X) &= \arg \min_{l \in S} \min_{a \in R} \sum_{t=1}^T (x_t - f_l^a(t))^2 = \arg \min_{l \in S} \min_{a \in R} \sum_{t=1}^T (x_t - (f_l(t) + a))^2 = \\ &= \arg \min_{l \in S} \sum_{t=1}^T (x_t - \bar{x}_T - f_l(t))^2, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\bar{x}_T = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x_t \quad (6)$$

– арифметическое (выборочное [3]) среднее значений отсчетов из реализации  $X = \{x_t\}_{t=1}^T$ , являющееся, с учетом (3), очевидным решением экстремальной задачи ( $l \in S$ )

$$\sum_{t=1}^T (x_t - (f_l(t) + a))^2 \rightarrow \min_{a \in R}.$$

С другой стороны, по аналогии с [1], определим множество  $D^o \subseteq S$  номеров тех моделей из  $\{\Omega_l\}_{l \in S}$ , к которым реальный тренд  $f(\cdot)$  ближе (в смысле (5)):

$$D^o = \left\{ k : \rho_*(f, f_k) = \min_{l \in S} \rho_*(f, f_l) \right\}, \quad (7)$$

где

$$\rho_*^2(f, f_l) = \min_{a \in R} \sum_{t=1}^T (f(t) - f_l^a(t))^2 = \min_{a \in R} \sum_{t=1}^T (f(t) - (f_l(t) + a))^2 = \sum_{t=1}^T (f(t) - \bar{f}_T - f_l(t))^2, \quad (8)$$

$$\bar{f}_T = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T f(t), \quad l \in S.$$

В (7), (8)  $\bar{f}_T$  имеет смысл значения параметра сдвига, «приводящего» реальный тренд  $f(\cdot)$  из (1) к нулевому уровню в смысле (3):

$$\sum_{t=1}^T (f(t) - \bar{f}_T) = 0,$$

а  $\rho_*(f, f_l)$  – евклидова расстояния между трендом  $f(\cdot)$  реализации  $X$  (с учетом сдвига на нулевой уровень) и базовым трендом  $f_l(\cdot)$ , определяющим модель  $\Omega_l$  ( $l \in S$ ).

В качестве меры эффективности принимаемых решений будем использовать риск [1]

$$r_T = P\{d(X) \notin D^o\}, \quad (9)$$

имеющий смысл вероятности не отнести при помощи РП  $d = d(X) \in S$  из (5), (6) реализацию  $X$  к той трендовой модели, к которой она ближе в смысле «тенденции» [4] (в смысле базовых трендов  $\{f_l(\cdot)\}_{l \in S}$  из (3)).

Если  $D^o = \{d^o\}$  – есть только одна ближайшая к тренду  $f(\cdot)$  реализации  $X$  модель из  $\{\Omega_l\}_{l \in S}$ , то

$$r_T = P\{d(X) \neq d^o\}. \quad (10)$$

Чем меньше (ближе к 0) значения риска  $r_T$  ( $0 \leq r_T \leq 1$ ) из (9), (10), тем эффективнее принимаемые при помощи РП  $d = d(X)$  решения.

Отметим также, что РП (5), (6), благодаря сдвигу реализации  $X = \{x_t\}_{t=1}^T$ , по которой выносятся решение, на нулевой уровень

$$\sum_{t=1}^T (x_t - \bar{x}_T) = 0,$$

позволяет из нескольких ( $m \geq 2$ ) реализаций  $X^{(j)} = \{x_t^{(j)}\}_{t=1}^{T_j}$ ,  $j = \overline{1, m}$ , отнесенных РП (5), (6) к одной и той же трендовой модели:  $d = d(X^{(1)}) = \dots = d(X^{(m)}) \in S$ , выбрать наиболее близкую к ней. Ее номер

$$j^* = \arg \min_{1 \leq j \leq m} \sum_{t=1}^{T_j} (x_t^{(j)} - \bar{x}_{T_j}^{(j)} - f_d(t))^2, \quad \bar{x}_{T_j}^{(j)} = \frac{1}{T_j} \sum_{t=1}^{T_j} x_t^{(j)}.$$

**3. Вычисление риска в случае нескольких трендовых моделей.** Как и в [1], вычислим риск РП  $d = d(X)$  в ситуации, когда к тренду  $f(\cdot)$  наблюдаемой реализации  $X$  наиболее близок лишь один из  $L \geq 2$  базовых трендов  $\{f_l(\cdot)\}_{l \in S}$ , и

$$d^o = \arg \min_{l \in S} \rho^*(f, f_l) \quad (11)$$

– истинный номер ближайшего базового тренда через расстояния (8).

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \rho(f, f_l) &= \sqrt{\sum_{t=1}^T (f(t) - f_l(t))^2}, \quad l \in S; \\ \rho(f_l, f_k) &= \sqrt{\sum_{t=1}^T (f_l(t) - f_k(t))^2}, \quad l, k \in S, \end{aligned} \quad (12)$$

– обычные евклидовы расстояния между соответствующими трендами (без учета сдвига тренда  $f(\cdot)$  на нулевой уровень).

**Теорема.** Пусть реализация  $X = \{x_t\}_{t=1}^T$  и трендовые модели  $\{\Omega_l\}_{l \in S}$  определяются соотношениями (1)–(4), а случайные величины  $\{u_t\}_{t=1}^T$  в (2) вдобавок независимы в совокупности и одинаково распределены по нормальному закону  $N_1(0, \sigma^2)$  ( $0 < \sigma^2 < +\infty$ ). Если  $D^o = \{d^o\}$ , где  $d^o \in S$  – единственный истинный номер (11) ближайшей к  $X$  трендовой модели, то риск  $r_T$  из (10) РП (5), (6)

$$r_T = 1 - E \left\{ \prod_{\substack{l \in S \\ l \neq d^o}} U \left( z_l + \frac{\rho^2(f, f_l) - \rho^2(f, f_{d^o})}{2\sigma\rho(f_l, f_{d^o})} \right) \right\}, \quad (13)$$

где  $U(y) = \{1, \text{ если } y \geq 0; 0, \text{ если } y < 0\}$  – единичная функция Хэвисайда,  $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$  – среднее квадратическое отклонение, случайные величины  $z_l$ ,  $l \in S$ ,  $l \neq d^o$ , имеют стандартное нормальное распределение:  $L\{z_l\} = N_1(0, 1)$ , а их совместное распределение является многомерным нормальным [3, 5] со следующими ковариациями ( $l, k \in S$ ,  $l \neq d^o$ ,  $k \neq d^o$ ):

$$\text{Cov}\{z_l, z_k\} = E\{z_l z_k\} = \frac{\sum_{t=1}^T (f_l(t) - f_{d^o}(t))(f_k(t) - f_{d^o}(t))}{\rho(f_l, f_{d^o})\rho(f_k, f_{d^o})}.$$

**Доказательство.** Введем в рассмотрение случайные величины ( $l \in S$ ,  $l \neq d^o$ ):

$$\begin{aligned} \xi_l &= \sum_{t=1}^T \left( (x_t - \bar{x}_T - f_l(t))^2 - (x_t - \bar{x}_T - f_{d^o}(t))^2 \right) = \\ &= 2 \sum_{t=1}^T \left( x_t - \bar{x}_T - \frac{f_l(t) + f_{d^o}(t)}{2} \right) (f_{d^o}(t) - f_l(t)) = 2 \sum_{t=1}^T \left( x_t - \frac{f_l(t) + f_{d^o}(t)}{2} \right) (f_{d^o}(t) - f_l(t)), \end{aligned} \quad (14)$$

где учтены условия (3) на базовые тренды и тот факт, что  $\bar{x}_T$  не зависит от  $t$ . Тогда риск (10) РП (5), (6) через случайные величины (14) можно представить в виде

$$r_T = P\{d(X) \neq d^o\} = 1 - P\{d(X) = d^o\} = 1 - P \left\{ \bigcap_{\substack{l \in S \\ l \neq d^o}} \{\xi_l \geq 0\} \right\}. \quad (15)$$

Найдем математические ожидания, ковариации и дисперсии случайных величин (14), а также установим их распределения вероятностей. Из (14) видно, что они линейны по отсчетам реализации  $X = \{x_t\}_{t=1}^T$ , которые в условиях теоремы, исходя из (1), независимы в совокупности

и нормально распределены:  $L\{x_t\} = N_1(f(t), \sigma^2)$ ,  $t = \overline{1, T}$ . Поэтому сами случайные величины (14) нормально распределены и имеют совместное многомерное нормальное распределение [3, 5]. Осталось только найти их характеристики ( $l, k \in S$ ,  $l \neq d^o$ ,  $k \neq d^o$ ):

$$\begin{aligned} E\{\xi_l\} &= 2 \sum_{t=1}^T \left( f(t) - \frac{f_l(t) + f_{d^o}(t)}{2} \right) \left( f_{d^o}(t) - f_l(t) \right) = \rho^2(f, f_l) - \rho^2(f, f_{d^o}); \\ \text{Cov}\{\xi_l, \xi_k\} &= E\{(\xi_l - E\{\xi_l\})(\xi_k - E\{\xi_k\})\} = 4E\left\{\sum_{t_1=1}^T u_{t_1} \left( f_l(t_1) - f_{d^o}(t_1) \right) \sum_{t_2=1}^T u_{t_2} \left( f_k(t_2) - f_{d^o}(t_2) \right)\right\} = \\ &= 4\sigma^2 \sum_{t=1}^T \left( f_l(t) - f_{d^o}(t) \right) \left( f_k(t) - f_{d^o}(t) \right); \\ D\{\xi_l\} &= \text{Cov}\{\xi_l, \xi_l\} = 4\sigma^2 \sum_{t=1}^T \left( f_l(t) - f_{d^o}(t) \right)^2 = 4\sigma^2 \rho^2(f_l, f_{d^o}), \end{aligned} \quad (16)$$

где использованы обозначения (12) и учтена некоррелированность случайных величин  $\{u_t\}_{t=1}^T$  из (2).

Доказательство завершается нормировкой [5] в приведенной выше записи для риска (15) случайных величин (14) до стандартного нормального закона  $N_1(0, 1)$  с учетом найденных значений их характеристик (16).

Полученное соотношение (13) позволяет вычислить риск  $r_T$  РП  $d = d(X)$  и оценить теоретически его эффективность. Однако, как и в [1], простой вид риск имеет лишь при  $L = 2$ .

Отметим, что в силу центральной предельной теоремы [5], примененной к случайным величинам (14), можно установить их асимптотическую нормальность (при  $T \rightarrow +\infty$ ), ослабив условие теоремы и требуя лишь независимости в совокупности случайных величин из (2) и не требуя их нормальности. Однако использовать результат теоремы (соотношение (13) для вычисления риска) при этом можно лишь для достаточно больших значений длительности реализаций ( $T \rightarrow +\infty$ ), по которым принимается решение.

**3. Случай двух альтернативных трендовых моделей.** Пусть необходимо отнести реализацию  $X = \{x_t\}_{t=1}^T$  к одной из двух трендовых моделей ( $L = 2$ ,  $S = \{1, 2\}$ ), заданных своими базовыми трендами  $f_1(\cdot)$  и  $f_2(\cdot)$ , удовлетворяющими (3). Воспользуемся результатом (13) доказанной выше теоремы при  $L = 2$ , где величина  $d^o$  из (11) в обозначениях (12) примет вид

$$d^o = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_{t=1}^T \left( (f(t) - \bar{f}_T - f_2(t))^2 - (f(t) - \bar{f}_T - f_1(t))^2 \right) > 0; \\ 2, & \text{иначе;} \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{если } \rho^2(f, f_2) > \rho^2(f, f_1); \\ 2, & \text{иначе;} \end{cases} \quad (17)$$

где учтено соотношение

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^T \left( (f(t) - \bar{f}_T - f_2(t))^2 - (f(t) - \bar{f}_T - f_1(t))^2 \right) &= 2 \sum_{t=1}^T \left( f(t) - \bar{f}_T - \frac{f_1(t) + f_2(t)}{2} \right) (f_1(t) - f_2(t)) = \\ &= \rho^2(f, f_2) - \rho^2(f, f_1), \end{aligned}$$

полученное с использованием условия (3) аналогично (14), (16).

**С л е д с т в и е.** Пусть в условиях теоремы  $L = 2$ , тогда риск  $r_T$  решающего правила (5), (6)

$$r_T = \Phi \left( - \frac{|\rho^2(f, f_1) - \rho^2(f, f_2)|}{2\sigma\rho(f_1, f_2)} \right), \quad (18)$$

где  $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z \exp\left(-\frac{w^2}{2}\right) dw$ ,  $z \in R$ , — функция распределения стандартного нормального закона.

Доказательство. При  $L = 2$  для риска  $r_T$  из соотношения (13) с учетом нормальности встречающихся в нем случайных величин будем иметь

$$r_T = \begin{cases} \Phi\left(-\frac{\rho^2(f, f_2) - \rho^2(f, f_1)}{2\sigma\rho(f_2, f_1)}\right), & \text{если } d^o = 1; \\ \Phi\left(-\frac{\rho^2(f, f_1) - \rho^2(f, f_2)}{2\sigma\rho(f_1, f_2)}\right), & \text{если } d^o = 2, \end{cases}$$

откуда, воспользовавшись представлением (17) для величины  $d^o$ , и имеем (18) (очевидно, что  $\rho(f_2, f_1) = \rho(f_1, f_2)$ ).

Проанализируем полученное аналитическое выражение для риска (18). Величины  $\rho(f, f_1)$  и  $\rho(f, f_2)$  в (18) – евклидовы расстояния (12) между трендом  $f(\cdot)$  реализации  $X = \{x_t\}_{t=1}^T$  и базовыми трендами  $f_1(\cdot)$  и  $f_2(\cdot)$ . Чем больше различие между  $\rho(f, f_1)$  и  $\rho(f, f_2)$ , тем меньше значение риска  $r_T$  и эффективнее принимаемые при помощи РП  $d = d(X)$  из (5), (6) решения.

Если  $\rho(f, f_1) = \rho(f, f_2)$  (тренд  $f(\cdot)$  равноудален от трендов  $f_1(\cdot)$  и  $f_2(\cdot)$ ), то  $D^o = S$  (при  $L = 2$ ), а риск РП  $d = d(X) \in S$  не может быть вычислен по формуле (18), поскольку она получена для  $\rho(f, f_1) \neq \rho(f, f_2)$ . Исходя из (9):  $r_T = P\{d(X) \notin D^o\} = P\{d(X) \notin S\} = 0$ , и выносимое РП  $d = d(X)$  решение не существенно.

Отметим, что в ситуации, когда тренд  $f(\cdot)$ , соответствующий реализации  $X = \{x_t\}_{t=1}^T$ , принадлежит к одной из данных двух трендовых моделей, т. е. в (4) существует такое значение параметра сдвига  $a \in R$ , что  $f(t) = f_1(t) + a$ ,  $t = \overline{1, T}$ , или  $f(t) = f_2(t) + a$ ,  $t = \overline{1, T}$ , то аналогично рассуждениям в (17) получаем

$$|\rho^2(f, f_1) - \rho^2(f, f_2)| = \rho^2(f_1, f_2).$$

Риск  $r_T$  из (18) при этом упрощается:

$$r_T = \Phi\left(-\frac{\rho(f_1, f_2)}{2\sigma}\right), \quad (19)$$

где  $\rho(f_1, f_2)$  – евклидово расстояние из (12) между базовыми трендами  $f_1(\cdot)$  и  $f_2(\cdot)$  этих двух моделей. Чем больше  $\rho(f_1, f_2)$  (больше различие между трендовыми моделями), тем меньше риск (19) и эффективнее принимаемые решения.

В завершение исследуем асимптотическое поведение риска  $r_T$  с ростом длительности  $T$  реализации  $X = \{x_t\}_{t=1}^T : T \rightarrow +\infty$ . Очевидно, что евклидовы расстояния (12), встречающиеся в (18), (19) – чаще всего величины порядка  $O(\sqrt{T})$ , а сам риск  $r_T = \Phi(-C)$ , где  $C = O(\sqrt{T}) > 0$ , и  $r_T \rightarrow 0$ ,  $T \rightarrow +\infty$ . Таким образом, с ростом длительности реализации эффективность принимаемых решений повышается (значение риска уменьшается и стремится к 0). Поэтому, увеличивая длительность реализации, при помощи (18), (19) можно добиться любой, наперед заданной, точности принимаемых решений.

#### Список использованных источников

1. Жук, Е. Е. Статистическое отнесение реализаций нестационарных временных рядов к заданным трендовым моделям / Е. Е. Жук // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2017. – № 2. – С. 52–59.
2. Андерсон, Т. Статистический анализ временных рядов: пер с англ. / Т. Андерсон. – М.: Мир, 1976. – 759 с.
3. Харин, Ю. С. Математическая и прикладная статистика / Ю. С. Харин, Е. Е. Жук. – Минск: БГУ, 2005. – 276 с.
4. Элдер, А. Как играть и выигрывать на бирже / А. Элдер. – М.: Альпина Паблишер, 2017. – 472 с.
5. Боровков, А. А. Теория вероятностей / А. А. Боровков. – М.: URSS: Либроком, 2016. – 652 с.

## References

1. Zhuk E. E. Statistical assignment of realizations of non-stationary time series to the fixed trend models. *Vestsi Natsyional'noi akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk* = *Proceedings of the National Academy of Science of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2017, no. 2, pp. 52–59 (in Russian).
2. Anderson T. *Statistical Analysis of Time Series*. John Wileys & Sons, Inc., 1971. 704 p. <https://doi.org/10.1002/9781118186428>.
3. Kharin Yu. S., Zhuk E. E. *Mathematical and Applied Statistics*. Minsk, Belarusian State University, 2005. 276 p. (in Russian).
4. Elder A. *Trading for a Living. Psychology. Trading Tactics. Money Management*. Wiley, 1993. 289 p.
5. Borovkov A. A. *Probability Theory*. Moscow, URSS: Librokom Publ., 2016. 652 p. (in Russian).

## Информация об авторе

**Жук Евгений Евгеньевич** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического моделирования и анализа данных факультета прикладной математики и информатики, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: zhukee@mail.ru

## Information about the author

**Eugene E. Zhuk** – D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Professor of the Department of Mathematical Modeling and Data Analysis, Faculty of Applied Mathematics and Computer Science, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: zhukee@mail.ru

ISSN 1561-2430 (Print)

ISSN 2524-2415 (Online)

УДК 519.177

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-434-440>

Поступила в редакцию 29.06.2018

Received 29.06.2018

**В. И. Бенедиктович***Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь***О РАЗНОСТИ МЕЖДУ МАКСИМАЛЬНОЙ СТЕПЕНЬЮ И ИНДЕКСОМ ГРАФА**

**Аннотация.** Рассматривается алгебраический параметр графа – разность между его максимальной степенью и спектральным радиусом. Хорошо известно, что этот графовый параметр является всегда неотрицательным и представляет собой некоторую меру отклонения графа от регулярности. В последние два десятилетия множество статей было посвящено изучению этого параметра. В частности, в 2007 г. американским математиком S. M. Cioabă получена его нижняя оценка, зависящая от порядка и диаметра графа. В 2017 г. при изучении верхней и нижней оценок для этого параметра M. R. Oboudi выдвинул гипотезу о том, что нижней оценкой данного параметра для произвольного графа является разность между максимальной степенью и спектральным радиусом цепи. Это очень похоже на аналогичное утверждение для спектрального радиуса произвольного графа, нижней границей которого тоже является спектральный радиус цепи. Здесь вышеуказанная гипотеза подтверждается для некоторых классов графов.

**Ключевые слова:** регулярный, планарный, последовательно-параллельный, унициклический, расщепляемый граф, максимальная степень, матрица смежности, спектральный радиус

**Для цитирования.** Бенедиктович, В. И. О разности между максимальной степенью и индексом графа / В. И. Бенедиктович // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2018. – Т. 54, № 4. – С. 434–440. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-434-440>

**V. I. Benediktovich***Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus***DIFFERENCE BETWEEN THE MAXIMUM DEGREE AND THE INDEX OF A GRAPH**

**Abstract.** An algebraic parameter of a graph – a difference between its maximum degree and its spectral radius is considered in this paper. It is well known that this graph parameter is always nonnegative and represents some measure of deviation of a graph from its regularity. In the last two decades, many papers have been devoted to the study of this parameter. In particular, its lower bound depending on the graph order and diameter was obtained in 2007 by mathematician S. M. Cioabă. In 2017 when studying the upper and the lower bounds of this parameter, M. R. Oboudi made a conjecture that the lower bound of a given parameter for an arbitrary graph is the difference between a maximum degree and a spectral radius of a chain. This is very similar to the analogous statement for the spectral radius of an arbitrary graph whose lower boundary is also the spectral radius of a chain. In this paper, the above conjecture is confirmed for some graph classes.

**Keywords:** regular, planar, series-parallel, unicyclic, split graph, maximum degree, adjacency matrix, spectral radius

**For citation.** Benediktovich V. I. Difference between the maximum degree and the index of a graph. *Vestsi Natsyianal'noi akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, vol. 54, no. 4, pp. 434–440 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-434-440>

В данной статье рассматриваются конечные неориентированные простые графы. Пусть  $G = (V(G), E(G))$  простой граф порядка  $n$ . Две вершины  $u$  и  $v$  в графе  $G$  будем называть *смежными* и обозначать это через  $u \sim v$ , если  $uv \in E(G)$ . Для каждой вершины  $v \in V(G)$  его *степенью* называется мощность ее *окружения*  $N(v) = \{u \in V(G) | u \sim v\}$  и обозначается через  $\deg_G(v)$ . Через  $\Delta(G)$  будем обозначать *максимальную степень* вершин графа  $G$ . *Регулярный* граф – это граф, у которого все вершины имеют одну и ту же степень. Для двух вершин  $u$  и  $v$  *связного графа*  $G$ , расстоянием между  $u$  и  $v$  в графе  $G$ , которое обозначается через  $d(u, v)$ , называется длина кратчайшей цепи между  $u$  и  $v$ . Наибольшее расстояние между любыми двумя вершинами графа  $G$  называется его *диаметром* и обозначается через  $D(G)$ . *Полный граф*, *цикл* и *цепь* порядка  $n$  обозначаются через  $K_n$ ,  $C_n$  и  $P_n$  соответственно. *Полный двудольный граф* с долями порядков  $m$  и  $n$

будем обозначать через  $K_{m,n}$ . Звезда порядка  $n$ , которая обозначается через  $S_n$ , – это полный двудольный граф  $K_{1,n-1}$ .

Пусть  $G$  – граф с множеством вершин  $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ . Матрицей смежности графа  $G$   $A(G) = (a_{ij})$  называется квадратная матрица порядка  $n$ , такая, что

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } v_i v_j \in E(G), \\ 0, & \text{если } v_i v_j \notin E(G). \end{cases}$$

Следовательно, матрица  $A(G)$  является симметрической действительной матрицей с нулями на главной диагонали, и все ее собственные значения являются действительными числами. Они также называются собственными значениями графа  $G$  и с учетом своих кратностей образуют его спектр. Мы упорядочим их по невозрастанию:  $\lambda_1(G) \geq \lambda_2(G) \geq \dots \geq \lambda_n(G)$ . Спектральным радиусом или индексом графа  $G$  называется наибольшее собственное значение, которое по теореме Перрона – Фробениуса удовлетворяет неравенству  $\lambda_1(G) \geq |\lambda_i(G)| \quad \forall i > 1$ . Если граф  $G$  является связным, то спектральный радиус  $\lambda_1(G)$  имеет кратность 1 и существует соответствующий ему положительный собственный вектор. Часто спектральный радиус графа  $G$  обозначают через  $\rho(G)$ .

Хорошо известно, что  $\rho(G) \leq \Delta(G)$  [1]. Кроме того, для связного графа  $G$  равенство справедливо тогда и только тогда, когда граф  $G$  является регулярным. В дальнейшем неотрицательную разность  $\Delta(G) - \rho(G)$  будем обозначать через  $\beta(G)$ , и  $\beta(G)$  можно рассматривать как параметр, который указывает на меру нерегулярности графа  $G$ . В настоящее время существует много работ, посвященных изучению этого параметра. Например, в статье [2] показано, что если  $G$  является нерегулярным связным графом порядка  $n$  с диаметром  $D(G)$ , то справедливо неравенство  $\beta(G) > \frac{1}{nD(G)}$ . В работе [3] выявлено, что на всех нерегулярных графах одного и того же порядка  $n$  параметр  $\beta(G)$  достигает максимального значения на звезде  $S_n$ , которое, как известно, равно  $\beta(S_n) = n - 1 - \sqrt{n-1}$ . Кроме того, показано, что для деревьев порядка  $n$  минимальное значение параметра  $\beta(G)$  достигается на цепи  $P_n$ , для которой, как известно,  $\beta(P_n) = 4 \sin^2 \left( \frac{\pi}{2n+2} \right)$ . В той же статье им была высказана следующая гипотеза: пусть  $G$  – нерегулярный связный граф порядка  $n$ , отличный от цепи  $P_n$ , тогда справедливо неравенство  $\beta(G) > \beta(P_n)$ .

В настоящей статье мы подтверждаем эту гипотезу для некоторых классов графов. Отметим, что при ее рассмотрении мы можем ограничиться так называемыми  $\rho$ -экстремальными графами.

**О п р е д е л е н и е 1.** Связный нерегулярный граф  $G$  порядка  $n$  с максимальной степенью вершин  $\Delta(G)$  называется  $\rho$ -экстремальным, если  $\rho(G) \geq \rho(G')$  для произвольного связного нерегулярного графа  $G'$  того же порядка и с той же максимальной степенью вершин.

Для таких графов в [4] было показано, что справедливо следующее утверждение.

**Т е о р е м а 1.** Пусть  $G$  – связный нерегулярный граф порядка  $n$  с максимальной степенью вершин  $\Delta$ . Тогда справедливо неравенство

$$\beta(G) > \frac{\Delta + 1}{n(3n + \Delta - 8)}.$$

Из этого утверждения можно получить следующую теорему.

**Т е о р е м а 2.** Пусть  $G$  – связный нерегулярный граф порядка  $n$  с максимальной степенью вершин  $\Delta$ . Тогда справедливо неравенство  $\beta(G) > \beta(P_n)$  при следующих условиях:

- 1) когда  $\Delta \geq 34$ ,
- 2) когда  $\Delta = 33$  и  $n \geq 41$ ,
- 3) когда  $\Delta = 32$  и  $n \geq 51$ ,
- 4) когда  $\Delta = 31$  и  $n \geq 68$ ,
- 5) когда  $\Delta = 30$  и  $n \geq 112$ ,
- 6) когда  $\Delta = 29$  и  $n \geq 377$ .

Доказательство. Нетрудно видеть, что функция

$$f(x) = \frac{x+1}{n(3n+x-8)}$$

возрастает при  $n \geq 3$ . Заметим, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\Delta+1)(n+1)^2}{n(3n+\Delta-8)} = \frac{\Delta+1}{3} > \pi^2$$

только при  $\Delta \geq 29$ . Кроме того, нетрудно непосредственно проверить, что неравенство

$$\frac{(\Delta+1)(n+1)^2}{n(3n+\Delta-8)} > \pi^2$$

выполняется при

$$n > \frac{\pi^2(\Delta-8) - 2(\Delta+1) + \pi\sqrt{\Delta^2(\pi^2-4) + \Delta(40-16\pi^2) + (44+64\pi^2)}}{2(\Delta+1-3\pi^2)}.$$

Поэтому при  $\Delta \geq 34$  (поскольку  $n \geq \Delta+1$ ), либо при  $\Delta = 33$  и  $n \geq 41$ , либо при  $\Delta = 32$  и  $n \geq 51$ , либо при  $\Delta = 31$  и  $n \geq 68$ , либо при  $\Delta = 30$  и  $n \geq 112$ , либо при  $\Delta = 29$  и  $n \geq 377$  имеем цепочку неравенств

$$\beta(G) > \frac{\Delta+1}{n(3n+\Delta-8)} > \frac{\pi^2}{(n+1)^2} > 4\sin^2\left(\frac{\pi}{2n+2}\right) = \beta(P_n).$$

(Предпоследнее неравенство в этой цепочке следует из известного факта, что  $\sin(x) < x$  при  $x > 0$ .)

Далее нам понадобится следующее утверждение из [5].

**Теорема 3.** Пусть  $G$  – простой неориентированный граф с максимальной степенью вершин  $\Delta$ , чьи ребра могут быть ориентированы так, что максимальная выходящая степень вершин  $d$  не превосходит  $\Delta/2$ . Тогда справедливо неравенство  $\rho(G) \leq 2\sqrt{d(\Delta-d)}$ .

Отметим, что теорема 3 остается справедливой и в случае, когда выходящую степень в ее формулировке мы заменим на входящую степень.

Из этого утверждения можно получить следующую теорему.

**Теорема 4.** Пусть  $G$  – связный нерегулярный граф порядка  $n$  с максимальной степенью вершин  $\Delta$ , чьи ребра могут быть ориентированы так, что максимальная выходящая степень вершин  $d$  меньше  $\Delta/2$ . Тогда справедливо неравенство  $\beta(G) > \beta(P_n)$  при  $n \geq 17$ .

Доказательство. Рассмотрим функцию  $f(x) = x - 2\sqrt{d(x-d)}$ . Нетрудно видеть, что функция  $f(x)$  возрастает на интервале  $[2d, +\infty)$ . Поэтому при  $x \geq 2d+1$  имеем

$$f(x) \geq 2d+1 - 2\sqrt{d(d+1)}.$$

В частности, так как  $d < \Delta/2$ , то, согласно предыдущей теореме, имеем

$$\beta(G) \geq f(\Delta) \geq 2d+1 - 2\sqrt{d(d+1)}.$$

Положим  $y = 2d+1$ . Тогда

$$2d+1 - 2\sqrt{d(d+1)} = g(y),$$

где  $g(y) = y - \sqrt{y^2-1}$ . Нетрудно видеть, что функция  $g(y)$  убывает на интервале  $[1, +\infty)$ . Поэтому для  $y$  таких, что  $1 < y \leq \Delta \leq n-1$ , имеем

$$g(y) \geq g(n-1) = n-1 - \sqrt{(n-1)^2-1}.$$

Покажем, что

$$\left(n-1-\sqrt{(n-1)^2-1}\right)(n+1)^2 > \pi^2$$

при  $n \geq 17$ . Действительно, положим

$$h(x) = \left(x-1-\sqrt{(x-1)^2-1}\right)(x+1)^2.$$

Нетрудно проверить, что функция  $h(x)$  возрастает на интервале  $[4, +\infty)$ . С другой стороны,  $h(17) > \pi^2$ . Поэтому при  $n \geq 17$  имеем цепочку неравенств

$$\beta(G) \geq 2d+1-2\sqrt{d(d+1)} > \frac{\pi^2}{(n+1)^2} > 4\sin^2\left(\frac{\pi}{2n+2}\right) = \beta(P_n).$$

Теорема 4 доказана.

**З а м е ч а н и е.** Теорема 4 справедлива и для случая, когда максимальная входящая степень  $d$  удовлетворяет неравенству  $d < \Delta/2$ .

Воспользуемся теперь следующим утверждением из [6].

**Теорема 5.** *Каждый планарный граф  $G$  допускает ориентацию ребер с максимальной входящей степенью вершин  $d = 3$ .*

Отсюда можно получить следующее утверждение.

**Теорема 6.** *Пусть  $G$  – нерегулярный планарный граф порядка  $n \geq 11$  с максимальной степенью вершин  $\Delta \geq 7$ . Тогда справедливо неравенство  $\beta(G) > \beta(P_n)$ .*

**Доказательство.** Функция  $f(x) = x - 2\sqrt{3(x-3)}$  возрастает на интервале  $[6, +\infty)$ . Поэтому для графа  $G$  с максимальной степенью  $\Delta \geq 7$  порядка  $n \geq 11$ , согласно замечанию к теореме 4 и теореме 5, имеем

$$\beta(G) \geq f(\Delta) \geq f(7) = 7 - 4\sqrt{3} > \frac{\pi^2}{(11+1)^2} \geq \frac{\pi^2}{(n+1)^2} > 4\sin^2\left(\frac{\pi}{2n+2}\right) = \beta(P_n).$$

**О п р е д е л е н и е 2.** Пусть  $e = uv \in E(G)$  – произвольное ребро простого графа  $G$ . Стягиванием ребра  $e$  графа  $G$  называется операция над графом, которая состоит из удаления ребра  $e$  из графа  $G$  и слияния его конечных вершин  $u = v = w$ . При этом ребра, ранее инцидентные либо  $u$ , либо  $v$ , становятся инцидентными вершине  $w$ . Граф  $H$  называется минором графа  $G$ , если  $H$  может быть получен из подграфа  $G$  стягиванием его ребер. Граф  $G$  называется последовательно-параллельным, если он не содержит полный граф  $K_4$  в качестве минора. Это эквивалентно тому, что он является подграфом 2-дерева, которое получается из клики  $K_3$  многократным добавлением новых вершин, смежных с двумя уже ранее смежными вершинами.

Отметим также, что внешнепланарный граф является последовательно-параллельным графом.

Воспользуемся теперь следующим утверждением из [6].

**Теорема 7.** *Каждый последовательно-параллельный граф  $G$  допускает ориентацию ребер с максимальной входящей степенью вершин  $d = 2$ .*

Отсюда можно получить следующее утверждение.

**Теорема 8.** *Пусть  $G$  – нерегулярный последовательно-параллельный граф порядка  $n \geq 9$  с максимальной степенью вершин  $\Delta \geq 5$ . Тогда справедливо неравенство  $\beta(G) > \beta(P_n)$ .*

**Доказательство.** Функция  $f(x) = x - 2\sqrt{2(x-2)}$  возрастает на интервале  $[4, +\infty)$ . Поэтому для графа  $G$  с максимальной степенью  $\Delta \geq 5$  порядка  $n \geq 9$ , согласно замечанию к теореме 4 и теореме 7, имеем

$$\beta(G) \geq f(\Delta) \geq f(5) = 5 - 2\sqrt{6} > \frac{\pi^2}{(9+1)^2} \geq \frac{\pi^2}{(n+1)^2} > 4\sin^2\left(\frac{\pi}{2n+2}\right) = \beta(P_n).$$

**Теорема 9.** *Пусть  $G$  – нерегулярный унциклический граф порядка  $n \geq 7$  с максимальной степенью вершин  $\Delta \geq 3$ . Тогда справедливо неравенство  $\beta(G) > \beta(P_n)$ .*

**Доказательство.** Функция  $f(x) = x - 2\sqrt{x-1}$  возрастает на интервале  $[2, +\infty)$ . Нетрудно убедиться, что унициклический граф  $G$  имеет такую ориентацию ребер, при которой максимальная входящая степень вершин  $d$  равна 1. Поэтому для графа  $G$  с максимальной степенью  $\Delta \geq 3$  порядка  $n \geq 7$ , согласно замечанию к теореме 4, имеем

$$\beta(G) \geq f(\Delta) \geq f(3) = 3 - 2\sqrt{2} > \frac{\pi^2}{(7+1)^2} \geq \frac{\pi^2}{(n+1)^2} > 4 \sin^2 \left( \frac{\pi}{2n+2} \right) = \beta(P_n).$$

Далее воспользуемся следующим утверждением [1].

**Теорема 10.** Пусть  $G = (V(G), E(G))$  – произвольный связный граф и  $G'$  – его собственный подграф. Тогда справедливо неравенство

$$\rho(G) > \rho(G').$$

**Теорема 11.** Пусть  $G$  – произвольный нерегулярный связный подграф полного двудольного графа  $K_{m,n}$  ( $m > n$ ) с вершиной  $v$  степени  $\deg_G(v) = m$ . Тогда справедливо неравенство  $\beta(G) > \beta(P_n)$ .

**Доказательство.** В силу предыдущей теоремы 10, не ограничивая общности, можно считать, что  $G = K_{m,n}$  ( $m > n$ ). Положим  $k = m - n \geq 1$ . Тогда имеем следующую цепочку:

$$\beta(G) = \sqrt{m}(\sqrt{m} - \sqrt{n}) = \sqrt{n+k}(\sqrt{n+k} - \sqrt{n}) \geq \sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \beta(K_{n+1,n}).$$

Откуда заключаем, что достаточно доказать утверждение для графа  $G = K_{n+1,n}$ , т. е. надо показать, что

$$\beta(K_{n+1,n}) > \beta(P_{2n+1}) = 4 \sin^2 \left( \frac{\pi}{4n+4} \right).$$

Рассмотрим функцию  $f(x) = (x+1)^{5/2}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$ . Нетрудно видеть, что функция  $f(x)$  возрастает на интервале  $[1, +\infty)$ . Поэтому при натуральном  $n \geq 2$  имеем

$$(n+1)^{5/2}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \geq f(2) = 3^{5/2}(\sqrt{3} - \sqrt{2}) > \left( \frac{\pi}{2} \right)^2.$$

Следовательно, при  $n \geq 2$  справедливы неравенства

$$\beta(K_{n+1,n}) = \sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) > 4 \left( \frac{\pi}{4n+4} \right)^2 > 4 \sin^2 \left( \frac{\pi}{4n+4} \right) = \beta(P_{2n+1}).$$

Теорема 11 доказана.

Заметим, что при  $n = 1$   $\beta(K_{2,1}) = 2 - \sqrt{2} = 4 \sin^2 \frac{\pi}{8} = \beta(P_3)$ , поскольку  $K_{2,1} \simeq P_3$ .

Для произвольного подмножества вершин  $U \subset V(G)$  через  $G[U]$  обозначим индуцированный этим множеством подграф в  $G$ .

**Определение 3.** Соединением непересекающихся графов  $G$  и  $H$  называется граф  $GVH$ , получаемый из их дизъюнктного объединения добавлением всех ребер, которые соединяют каждую вершину графа  $G$  с каждой вершиной графа  $H$ .

**Определение 4.** Граф  $G$  называется расщепляемым графом, если существует такое разбиение его вершин  $V = V_1 \cup V_2$ , что граф  $G[V_1]$  является кликой, а граф  $G[V_2]$  – независимым множеством вершин. Граф  $G$  называется полным расщепляемым графом, если дополнительно выполняется условие  $G = G[V_1] \vee G[V_2]$ .

В дальнейшем будем обозначать порядок клики  $G[V_1]$  и независимого множества верши  $G[V_2]$  через  $N$  и  $M$  соответственно.

**Теорема 12.** Пусть  $G$  – произвольный нерегулярный связный подграф полного расщепляемого графа  $G = G[V_1] \vee G[V_2]$  с вершиной  $v$  степени  $\deg_G(v) = N + M - 1$ , где  $N$  и  $M$  – порядки клики и независимого множества соответственно. Тогда справедливо неравенство  $\beta(G) > \beta(P_n)$ .

Доказательство. В силу теоремы 10, не ограничивая общности, можно считать, что  $G = G[V_1] \vee G[V_2]$ . Нетрудно непосредственно убедиться, что спектральный радиус полного расщепляемого графа  $G = G[V_1] \vee G[V_2]$  равен

$$\rho(G) = \frac{N-1 + \sqrt{(N-1)^2 + 4MN}}{2}.$$

Поэтому имеем

$$\beta(G) = \frac{2M + N - 1 + \sqrt{(N-1)^2 + 4MN}}{2}.$$

Покажем, что выполняется неравенство  $\beta(G) \geq \frac{\pi^2}{(N+M+1)^2}$  при  $N = 1$  и  $M \geq 3$  (так как иначе граф  $G$  является цепью) или при  $N \geq 2$  и  $M \geq 2$ .

В первом случае

$$\left(2M + N - 1 + \sqrt{(N-1)^2 + 4MN}\right)(N+M+1)^2 = 2(M - \sqrt{M})(M+2)^2.$$

Нетрудно убедиться, что функция  $f(x) = 2(x - \sqrt{x})(x+2)^2$  возрастает на промежутке  $[3, +\infty)$  и  $f(3) = 2(3 - \sqrt{3}) \cdot 25 > 2\pi^2$ . Следовательно, при  $N = 1$  и  $M \geq 3$  имеем

$$\beta(G) = \frac{2M + N - 1 + \sqrt{(N-1)^2 + 4MN}}{2} > \frac{\pi^2}{(N+M+1)^2} > 4\sin^2 \frac{\pi}{2(N+M)+2} = \beta(P_{N+M}).$$

В случае, когда  $N \geq 2$  и  $M \geq 2$ , нетрудно убедиться, что справедливо неравенство

$$2M + N - 1 + \sqrt{(N-1)^2 + 4MN} \geq \frac{4}{3} \cdot \frac{2M-1}{2M+N-1}.$$

Действительно, обозначим  $A = 2M + N - 1$ ,  $B = 2M - 1$ . Тогда имеем

$$2M + N - 1 + \sqrt{(N-1)^2 + 4MN} = A - \sqrt{A^2 - B^2 + 1}.$$

Но последнее выражение оценивается снизу

$$A - \sqrt{A^2 - B^2 + 1} \geq \frac{4}{3} \cdot \frac{B}{A},$$

поскольку оно равносильно неравенству

$$\left(B - \frac{4}{3}\right)^2 + \frac{16}{9} \cdot \frac{B^2}{A^2} \geq \left(\frac{5}{3}\right)^2,$$

которое, очевидно, справедливо при  $B = 2M - 1 \geq 3$ .

Таким образом,

$$2M + N - 1 + \sqrt{(N-1)^2 + 4MN} \geq \frac{4}{3} \cdot \left(1 - \frac{N}{2M+N-1}\right) \geq \frac{4}{3} \cdot \left(1 - \frac{N}{M+N+1}\right).$$

А значит,

$$\left(1 - \frac{N}{M+N+1}\right)(N+M+1)^2 = (N+M+1)^2 - N(N+M+1) > \frac{3}{2} \cdot \pi^2$$

в случае, когда

$$N+M+1 > \frac{N + \sqrt{N^2 + 6\pi^2}}{2}.$$

Но последнее неравенство, очевидно, справедливо. Следовательно, при  $N \geq 2$  и  $M \geq 2$  имеем цепочку неравенств

$$\beta(G) = \frac{2M + N - 1 + \sqrt{(N-1)^2 + 4MN}}{2} \geq \frac{\pi^2}{(M+N+1)^2} > 4\sin^2 \frac{\pi}{2(M+N)+2} = \beta(P_{N+M}).$$

Теорема 12 доказана.

**Благодарности.** Работа выполнена при финансовой поддержке Института математики НАН Беларуси в рамках Государственной программы фундаментальных исследований «Конвергенция-2020» и Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований в рамках проекта № Ф18РА–014.

**Acknowledgements.** The work has carried out with financial support from the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus within the framework of the Government Research Program “Convergence-2020” and the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research within the framework of the project no. Ф18РА–014.

### Список использованных источников

1. Godsil, C. *Algebraic Graph Theory* / C. Godsil, G. Royle. – New York: Springer, 2001. – 463 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4613-0163-9>
2. Cioabă, S. M. The spectral radius and the maximum degree of irregular graphs / S. M. Cioabă // *Electron. J. Combin.* – 2007. – Vol. 14. – P. 1–10.
3. Oboudi, M. R. On the difference between the spectral radius and the maximum degree of graphs / M. R. Oboudi // *Algebra and Discrete Math.* – 2017. – Vol. 24. – P. 302–307.
4. Liu, B. A note on the largest eigenvalue of non-regular graphs / B. Liu, G. Li // *Electron. J. Linear Algebra.* – 2008. – Vol. 17, № 1. – P. 54–61. <https://doi.org/10.13001/1081-3810.1249>
5. Hayes, T. A simple condition implying rapid mixing of single-site dynamics on spin systems / T. Hayes // *Proc. 47th Annual IEEE Symposium on Foundation of Computer Science FOCS*, 2006. – P. 39–46. <https://doi.org/10.1109/focs.2006.6>
6. Chrobak, M. Planar orientations with low out-degree and compaction of adjacency matrices / M. Chrobak, D. Eppstein // *Theor. Comput. Sci.* – 1991. – Vol. 86, № 2. – P. 243–266. [https://doi.org/10.1016/0304-3975\(91\)90020-3](https://doi.org/10.1016/0304-3975(91)90020-3)

### References

1. Godsil C., Royle G. *Algebraic Graph Theory*. New York, Springer, 2001. 463 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4613-0163-9>
2. Cioabă S. M. The spectral radius and the maximum degree of irregular graphs. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 2007, vol. 14, pp. 1–10.
3. Oboudi M. R. On the difference between the spectral radius and the maximum degree of graphs. *Algebra and Discrete Mathematics*, 2017, vol. 24, pp. 302–307.
4. Liu B., Li G. A note on the largest eigenvalue of non-regular graphs. *Electronic Journal of Linear Algebra*, 2008, vol. 17, no. 1, pp. 54–61. <https://doi.org/10.13001/1081-3810.1249>
5. Hayes T. A simple condition implying rapid mixing of single-site dynamics on spin systems. *Proc. 47th Annual IEEE Symposium on Foundation of Computer Science FOCS*, 2006, pp. 39–46. <https://doi.org/10.1109/focs.2006.6>
6. Chrobak M., Eppstein D. Planar orientations with low out-degree and compaction of adjacency matrices. *Theoretical Computer Science*, 1991, vol. 86, no. 2, pp. 243–266. [https://doi.org/10.1016/0304-3975\(91\)90020-3](https://doi.org/10.1016/0304-3975(91)90020-3)

### Информация об авторе

**Бенедиктович Владимир Иванович** – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: vbened@im.bas-net.by

### Information about the author

**Vladimir I. Benediktovich** – Ph. D. (Physics and Mathematics), Leading Researcher, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: vbened@im.bas-net.by

ISSN 1561-2430 (Print)

ISSN 2524-2415 (Online)

УДК 519.872 01/10/2017

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-441-453>

Поступила в редакцию 01.10.2017

Received 01.10.2017

Д. Я. Копать, М. А. Маталыцкий

*Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь*

## АНАЛИЗ G-СЕТИ С НЕНАДЕЖНЫМИ ЛИНИЯМИ ОБСЛУЖИВАНИЯ

**Аннотация.** В настоящей статье объектом исследования является марковская сеть с положительными и отрицательными заявками и ненадежными линиями обслуживания с однолинейными системами массового обслуживания (СМО). Дисциплины обслуживания заявок в системах – FIFO («первым пришел – первым обслуживается») и время обслуживания заявок в каждой линии СМО сети распределены по экспоненциальному закону со своими параметрами для каждой СМО. Линии обслуживания в каждой СМО подвержены случайным поломкам, при этом время их исправной работы имеет показательное распределение с различными для каждой СМО параметрами. После поломки линия немедленно начинает восстанавливаться, и время восстановления также имеет показательное распределение, параметры которого различны для каждой СМО. Целью исследования является нахождение нестационарных вероятностей состояний сети. Для этого предложен модифицированный метод последовательных приближений, совмещенный с методом рядов, что позволяет снять условие высокой нагрузки. Доказаны свойства последовательных приближений. На основании полученных данных с помощью компьютера рассчитан модельный пример, который иллюстрирует нахождение зависящих от времени вероятностей состояний сети. Полученные результаты могут быть применены при моделировании различных информационных систем и сетей.

**Ключевые слова:** марковская сеть, ненадежные СМО, нестационарный режим, нестационарные вероятности состояний

**Для цитирования.** Копать, Д. Я. Анализ G-сети с ненадежными линиями обслуживания / Д. Я. Копать, М. А. Маталыцкий // Вест. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2018. – Т. 54, № 4. – С. 441–453. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-441-453>

D. J. Kopats, M. A. Matalytski

*Yanka Kupala State University of Grodno, Grodno, Belarus*

## ANALYSIS OF G-NETWORK WITH UNRELIABLE SERVICE SYSTEMS

**Abstract.** In this paper, the object of research is Markov's network with positive and negative customers and unreliable service lines with single-line queuing systems (QS). The discipline of service of customers in the systems – FIFO ("first come first served") and the service time of customers in each line of the QS network are distributed according to the exponential law with their parameters for each QS. The service lines in each QS are defeated by accidental breakdowns, and the time of correct operation of the service line in each SMO has an exponential distribution, with different parameters for each QS. After the breakdown, the line immediately begins to recover, and the recovery time also has an exponential distribution, the parameters of which are different for each QS. The aim of the study is to find the non-stationary probabilities of network states. To find them, a modified method of successive approximations combined with the method of series is proposed. This method allows one to remove the condition of high load. The properties of successive approximations are proved. On the basis of the obtained data, using a computer, a model example illustrating the finding of the time-dependent probabilities of network states is calculated. The results of this work can be applied to the modeling of various information systems and networks.

**Keywords:** Markov network, unreliable QS, non-stationary regime, non-stationary probability of states

**For citation.** Kopats D. J., Matalytski M. A. Analysis of G-network with unreliable service systems. *Vestsi Natsyional'nai akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, vol. 54, no. 4, pp. 441–453 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-441-453>

**1. Описание сети.** Рассмотрим открытую G-сеть массового обслуживания [1] с  $n$  однолинейными системами массового обслуживания (СМО). В  $i$ -ю СМО из внешней среды поступает простейший поток обычных положительных заявок с интенсивностью  $\lambda_{0i}^+$  и дополнительный поток отрицательных заявок с интенсивностью  $\lambda_{0i}^-$ . Все поступающие потоки независимы. Длительности обслуживания положительных заявок в  $i$ -й СМО распределены по экспоненциальному закону с параметром  $\mu_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ . После окончания обслуживания положительной заявки в  $i$ -й СМО

она направляется в  $j$ -ю СМО с вероятностью  $p_{ij}^+$  опять как положительная, а с вероятностью  $p_{ij}^-$  – как отрицательная заявка, которая уничтожает одну положительную заявку при ее наличии в данной системе в данный момент времени, и с вероятностью  $p_{i0} = 1 - \sum_{j=1}^n (p_{ij}^+ + p_{ij}^-)$  уходит из сети,  $i, j = \overline{1, n}$ . Линии обслуживания подвергаются случайным поломкам, причем время исправной работы каждой линии системы  $S_i$  имеет показательную функцию распределения с параметром  $\beta_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ . После поломки линия немедленно начинает восстанавливаться, и время восстановления также имеет показательную функцию распределения с параметром  $\gamma_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Под состоянием сети будем понимать вектор  $(\vec{d}, \vec{k}, t) = (d_1(t), d_2(t), \dots, d_n(t), k_1(t), k_2(t), \dots, k_n(t))$ , где  $d_i(t)$ ,  $k_i(t)$  – соответственно количество исправных линий обслуживания и количество заявок в  $i$ -й СМО в момент времени  $t$ . Так как системы однолинейны, то  $d_i(t) = 0 \vee 1$ . В монографии [2] проведено исследование многолинейных ненадежных сетей, но без отрицательных заявок. Для их решения был предложен метод многомерных производящих функций [3], пригодный для сети, когда в любой момент времени в ее системах функционирует хотя бы одна исправная линия обслуживания. Но для нашей сети в данном случае это не всегда выполнено. В работах [4, 5] для сети с многолинейными ненадежными СМО, но без отрицательных заявок, был разработан асимптотический метод при большом, но ограниченном числе заявок. В случае с G-сетью он также непригоден, так как начиная с определенного момента времени в сети может не оказаться положительных заявок. Поэтому для решения системы разностно-дифференциальных уравнений (РДУ) Колмогорова для сети, рассматриваемой в настоящей статье, применен модифицированный метод последовательных приближений, совмещенный с методом рядов, впервые предложенный в работах [6, 7], который позволяет снять условия высокой нагрузки.

**2. Система РДУ Колмогорова для вероятностей состояний сети.** Пусть  $I_i$  – нулевой вектор размерности  $n$ , за исключением компоненты с номером  $i$ , которая равна единице,  $I_0$  –  $n$ -вектор, состоящий из нулей,  $P(\vec{d}, \vec{k}, t)$  – вероятность состояния  $(\vec{d}, \vec{k}, t)$ ,  $u(x) = \begin{cases} 1, x > 0, \\ 0, x \leq 0, \end{cases}$  – функция Хевисайда. Так как  $d_i(t) = 0 \vee 1$ , то  $u(d_i(t)) = d_i(t)$ . Возможны следующие переходы нашей цепи Маркова процесса в состояние  $(\vec{d}, \vec{k}, t + \Delta t)$  за время  $\Delta t$ :

1) из состояния  $(\vec{d}, \vec{k} - I_i, t)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , с вероятностью  $\lambda_{0i}^+ u(k_i(t)) \Delta t + o(\Delta t)$ , в этом случае в  $i$ -ю СМО за время  $\Delta t$  поступит положительная заявка;

2) из состояния  $(\vec{d}, \vec{k} + I_i, t)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , с вероятностью  $d_i(t) (\mu_i p_{i0} + \lambda_{0i}^- + \mu_i p_{ij}^- (1 - u(k_i(t)))) \Delta t + o(\Delta t)$  за время  $\Delta t$  положительная заявка после завершения обслуживания в  $i$ -й СМО покинет сеть, или придет отрицательная заявка и уничтожит одну положительную, или после завершения обслуживания в  $i$ -й СМО положительная заявка перейдет в  $j$ -ю как отрицательная, но, не обнаружив там положительных заявок, покинет сеть;

3) из состояния  $(\vec{d}, \vec{k} + I_i - I_j, t)$  с вероятностью  $\mu_i d_i(t) p_{ij}^+ u(k_j(t)) \Delta t + o(\Delta t)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , за время  $\Delta t$  положительная заявка после завершения обслуживания в  $i$ -й СМО перейдет в  $j$ -ю как положительная заявка;

4) из состояния  $(\vec{d}, \vec{k} + I_i + I_j, t)$  с вероятностью  $\mu_i d_i(t) d_j(t) p_{ij}^- \Delta t + o(\Delta t)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , за время  $\Delta t$  положительная заявка после завершения обслуживания в  $i$ -й СМО перейдет в  $j$ -ю как отрицательная и уничтожит там одну положительную;

5) из состояния  $(\vec{d} - I_i, \vec{k}, t)$  с вероятностью  $\gamma_i d_i(t) \Delta t + o(\Delta t)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , за время  $\Delta t$  восстановится одна линия обслуживания;

6) из состояния  $(\vec{d} + I_i, \vec{k}, t)$  с вероятностью  $\beta_i (d_i(t) + 1) \Delta t + o(\Delta t)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , за время  $\Delta t$  сломается одна линия обслуживания;

7) из состояния  $(\vec{d}, \vec{k}, t)$  с вероятностью  $1 - \sum_{i=1}^n [\lambda_{0i}^+ + \lambda_{0i}^- d_i(t) + \mu_i d_i(t) + \gamma_i d_i(t) + \beta_i (1 - d_i(t))] \Delta t + o(\Delta t)$  состояние сети не изменилось.

Используя формулу полной вероятности и переходя к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ , получаем систему РДУ Колмогорова

$$\begin{aligned} \frac{P(\vec{d}, \vec{k}, t)}{dt} = & - \sum_{i=1}^n [\lambda_{0i}^+ u(k_i) + u(d_i)(\lambda_{0i}^- + \mu_i + \gamma_i) + \beta_i u(1 - d_i)] P(\vec{d}, \vec{k}, t) + \\ & + \sum_{i=1}^n \left\{ \lambda_{0i}^+ u(k_i) P(\vec{d}, \vec{k} - I_i, t) + \left( \mu_i u(d_i) p_{i0} + \lambda_{0i}^- + \sum_{j=1}^n \mu_j u(d_j) p_{ij}^- (1 - u(k_j(t))) \right) P(\vec{d}, \vec{k} + I_i, t) + \right. \\ & \left. + \gamma_i u(d_i) P(\vec{d} - I_i, \vec{k}, t) + \beta_i u(1 + d_i) P(\vec{d} + I_i, \vec{k}, t) + \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^n \left\{ \mu_j u(d_j) p_{ij}^+ u(k_j(t)) P(\vec{d}, \vec{k} + I_i - I_j, t) + \mu_j u(d_j) p_{ij}^- P(\vec{d}, \vec{k} + I_i + I_j, t) \right\} \right\}. \end{aligned} \quad (1)$$

**3. Нахождение среднего числа исправных линий обслуживания в сети.** Рассмотрим изменение среднего числа исправных линий обслуживания за промежутки времени  $[t; t + \Delta t)$ . Пусть  $\bar{d}_i(t)$  – среднее число исправных линий обслуживания в  $i$ -й СМО в момент времени  $t$ , т. е.  $M\{d_i(t)\} = \bar{d}_i(t)$ . Имеет место соотношение

$$\bar{d}_i(t + \Delta t) = \bar{d}_i(t) + d_i^+(t, \Delta t) - d_i^-(t, \Delta t), \quad (2)$$

где  $d_i^+(t, \Delta t)$  – среднее число восстановленных линий обслуживания на промежутке времени  $[t, t + \Delta t)$ ,  $d_i^-(t, \Delta t)$  – среднее число сломанных линий обслуживания на промежутке времени  $[t, t + \Delta t)$ . Тогда среднее число восстановленных линий обслуживания равно

$$M \left\{ \sum_{d_i=0}^1 d_i P_{d_i}(t, \Delta t) \right\} = M \{P_1(t, \Delta t)\} = M \{\gamma_i d_i(t) \Delta t + o(\Delta t)\} = \gamma_i \bar{d}_i(t) \Delta t + o(\Delta t),$$

где  $P_{d_i}(t, \Delta t)$  – вероятность того, что на интервале времени  $[t, t + \Delta t)$  восстановится  $d_i$  линий обслуживания. Аналогично можно показать, что  $\beta_i (\bar{d}_i(t) + 1) \Delta t + o(\Delta t)$ ,  $i = \overline{1, n}$  – среднее число сломавшихся линий обслуживания на интервале времени  $[t, t + \Delta t)$ . Подставляя данные выражения в (2), получим

$$\frac{d\bar{d}_i(t)}{dt} = -(\beta_i - \gamma_i) \bar{d}_i(t) - \beta_i. \quad (3)$$

Интегрируя (3), получим

$$\bar{d}_i(t) = C e^{-(\beta_i - \gamma_i)t} + \frac{\beta_i}{\beta_i - \gamma_i}, \quad (4)$$

где  $C$  – произвольная постоянная. Пусть  $\bar{d}_i(0) = m_{i0}$ , где  $m_{i0} = 0 \vee 1$ . Тогда (2) примет вид

$$m_{i0} = C + \frac{\beta_i}{\beta_i - \gamma_i}. \quad (5)$$

Подставив (4) в (3), получим

$$\bar{d}_i(t) = \left( \frac{\beta_i}{\beta_i - \gamma_i} - m_{i0} \right) e^{-(\gamma_i + \beta_i)t} + \frac{\beta_i}{\beta_i - \gamma_i}. \quad (6)$$

**4. Решение системы РДУ Колмогорова методом последовательных приближений, совмещенного с методом рядов.** Систему РДУ (1) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{dP(\vec{d}, \vec{k}, t)}{dt} = & -\Lambda(\vec{d}, \vec{k})P(\vec{d}, \vec{k}, t) + \sum_{i,j=1}^n \Phi_{ij}(\vec{d}, \vec{k})P(\vec{d}, \vec{k} + I_i - I_j, t) + \sum_{i,j=1}^n \Xi_{ij}(\vec{d}, \vec{k})P(\vec{d}, \vec{k} + I_i + I_j, t) + \\ & + \sum_{i,j=1}^n \Theta_{ij}(\vec{d}, \vec{k})P(\vec{d} + I_i - I_j, \vec{k}, t), \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda(\vec{d}, \vec{k}) = & \sum_{i=1}^n \left[ \lambda_{0i}^+ u(k_i) + u(d_i)(\lambda_{0i}^- + \mu_i + \gamma_i) + \beta_i(d_i + 1) \right], \\ \Phi_{ij}(\vec{d}, \vec{k}) = & \delta_{0i} \lambda_{0j}^+ u(k_j) + \delta_{0j} u(d_i) \left( \mu_i p_{i0} + \lambda_{0i}^- u(d_i) + \sum_{j=1}^n \mu_i p_{ij}^- (1 - u(k_i)) \right) + \\ & + \mu_i u(d_i) p_{ij}^+ u(k_j), \quad \Xi_{ij}(\vec{d}, \vec{k}) = \mu_i u(d_i) p_{ij}^-, \\ \Theta_{ij}(\vec{d}, \vec{k}) = & \delta_{0j} \gamma_j u(d_j) + \delta_{0i} \beta_i u(1 - d_i). \end{aligned}$$

Из (7) следует, что

$$\begin{aligned} P(\vec{d}, \vec{k}, t) = & e^{-\Lambda(\vec{d}, \vec{k})t} \left( P(\vec{d}, \vec{k}, 0) + \int_0^t e^{\Lambda(\vec{d}, \vec{k})x} \left\{ \sum_{i,j=1}^n \Phi_{ij}(\vec{d}, \vec{k})P(\vec{d}, \vec{k} + I_i - I_j, x) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_{i,j=1}^n \Xi_{ij}(\vec{d}, \vec{k})P(\vec{d}, \vec{k} + I_i + I_j, x) + \sum_{i,j=1}^n \Theta_{ij}(\vec{d}, \vec{k})P(\vec{d} + I_i - I_j, \vec{k}, x) \right\} dx \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Пусть  $P_q(\vec{d}, \vec{k}, t)$  – приближение  $P(\vec{d}, \vec{k}, t)$  на  $q$ -й итерации,  $P_{q+1}(\vec{d}, \vec{k}, t)$  – решение системы (7), полученное методом последовательных приближений. Тогда из (8) вытекает, что

$$\begin{aligned} P_{q+1}(\vec{d}, \vec{k}, t) = & e^{-\Lambda(\vec{d}, \vec{k})t} \left( P(\vec{d}, \vec{k}, 0) + \int_0^t e^{\Lambda(\vec{d}, \vec{k})x} \left\{ \sum_{i,j=1}^n \Phi_{ij}(\vec{d}, \vec{k})P_q(\vec{d}, \vec{k} + I_i - I_j, x) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_{i,j=1}^n \Xi_{ij}(\vec{d}, \vec{k})P_q(\vec{d}, \vec{k} + I_i + I_j, x) + \sum_{i,j=1}^n \Theta_{ij}(\vec{d}, \vec{k})P_q(\vec{d} + I_i - I_j, \vec{k}, x) \right\} dx \right). \end{aligned} \quad (9)$$

В качестве начального приближения возьмем стационарное распределение

$$P_0(\vec{d}, \vec{k}, t) = P(\vec{d}, \vec{k}) = \lim_{t \rightarrow \infty} P(\vec{d}, \vec{k}, t),$$

которое удовлетворяет соотношению

$$\begin{aligned} \Lambda(\vec{d}, \vec{k})P(\vec{d}, \vec{k}) = & \sum_{i,j=1}^n \Phi_{ij}(\vec{d}, \vec{k})P(\vec{d}, \vec{k} + I_i - I_j) + \sum_{i,j=1}^n \Xi_{ij}(\vec{d}, \vec{k})P(\vec{d}, \vec{k} + I_i + I_j) + \\ & + \sum_{i,j=1}^n \Theta_{ij}(\vec{d}, \vec{k})P(\vec{d} + I_i - I_j, \vec{k}). \end{aligned} \quad (10)$$

Справедливы следующие теоремы.

**Теорема 1.** Последовательные приближения  $P_q(\vec{d}, \vec{k}, t)$ ,  $q = 0, 1, 2, \dots$ , сходятся при  $t \rightarrow 0$  к стационарному решению системы уравнений (7).

Доказательство. Записав выражения для первого приближения, имеем

$$\begin{aligned}
 P_1(\vec{d}, \vec{k}, t) &= e^{-\Lambda(\vec{d}, \vec{k})t} \left( P(\vec{d}, \vec{k}, 0) + \int_0^t e^{\Lambda(\vec{d}, \vec{k})x} \left\{ \sum_{i,j=1}^n \Phi_{ij}(\vec{d}, \vec{k}) P_0(\vec{d}, \vec{k} + I_i - I_j, x) + \right. \right. \\
 &+ \sum_{i,j=1}^n \Xi_{ij}(\vec{d}, \vec{k}) P_0(\vec{d}, \vec{k} + I_i + I_j, x) + \sum_{i,j=1}^n \Theta_{ij}(\vec{d}, \vec{k}) P_0(\vec{d} + I_i - I_j, \vec{k}, x) \Big\} dx \Big) = \\
 &= e^{-\Lambda(\vec{d}, \vec{k})t} \left( P(\vec{d}, \vec{k}, 0) + \int_0^t e^{\Lambda(\vec{d}, \vec{k})x} \left\{ \sum_{i,j=1}^n \Phi_{ij}(\vec{d}, \vec{k}) P(\vec{d}, \vec{k} + I_i - I_j) + \right. \right. \\
 &+ \sum_{i,j=1}^n \Xi_{ij}(\vec{d}, \vec{k}) P(\vec{d}, \vec{k} + I_i + I_j) + \sum_{i,j=1}^n \Theta_{ij}(\vec{d}, \vec{k}) P(\vec{d} + I_i - I_j, \vec{k}) \Big\} dx \Big) = \\
 &= e^{-\Lambda(\vec{d}, \vec{k})t} \left( P(\vec{d}, \vec{k}, 0) + \frac{e^{\Lambda(\vec{d}, \vec{k})t} - 1}{\Lambda(\vec{d}, \vec{k})} \left\{ \sum_{i,j=1}^n \Phi_{ij}(\vec{d}, \vec{k}) P(\vec{d}, \vec{k} + I_i - I_j) + \right. \right. \\
 &+ \sum_{i,j=1}^n \Xi_{ij}(\vec{d}, \vec{k}) P(\vec{d}, \vec{k} + I_i + I_j) + \sum_{i,j=1}^n \Theta_{ij}(\vec{d}, \vec{k}) P(\vec{d} + I_i - I_j, \vec{k}) \Big\} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \\
 &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Lambda(\vec{d}, \vec{k})} \left\{ \sum_{i,j=1}^n \Phi_{ij}(\vec{d}, \vec{k}) P(\vec{d}, \vec{k} + I_i - I_j) + \right. \\
 &+ \sum_{i,j=1}^n \Xi_{ij}(\vec{d}, \vec{k}) P(\vec{d}, \vec{k} + I_i + I_j) + \sum_{i,j=1}^n \Theta_{ij}(\vec{d}, \vec{k}) P(\vec{d} + I_i - I_j, \vec{k}) \Big\}.
 \end{aligned}$$

Отсюда следует, что при  $q = 1$  теорема выполняется. Предположим, что утверждение теоремы справедливо до  $q$ -й итерации. Тогда, используя (9) и правило Лопиталя, будем иметь

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow \infty} P_{q+1}(\vec{d}, \vec{k}, t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\left( P(\vec{d}, \vec{k}, 0) + \int_0^t e^{\Lambda(\vec{d}, \vec{k})x} \left\{ \sum_{i,j=1}^n \Phi_{ij}(\vec{d}, \vec{k}) P_q(\vec{d}, \vec{k} + I_i - I_j, x) + \right. \right. \\
 &+ \sum_{i,j=1}^n \Xi_{ij}(\vec{d}, \vec{k}) P_q(\vec{d}, \vec{k} + I_i + I_j, x) + \sum_{i,j=1}^n \Theta_{ij}(\vec{d}, \vec{k}) P_q(\vec{d} + I_i - I_j, \vec{k}, x) \Big\} dx \Big)}{e^{\Lambda(\vec{d}, \vec{k})t}} = \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{\Lambda(\vec{d}, \vec{k})t} \left\{ \sum_{i,j=1}^n \Phi_{ij}(\vec{d}, \vec{k}) P_q(\vec{d}, \vec{k} + I_i - I_j, t) + \sum_{i,j=1}^n \Xi_{ij}(\vec{d}, \vec{k}) P_q(\vec{d}, \vec{k} + I_i + I_j, t) + \right. \\
 &+ \sum_{i,j=1}^n \Theta_{ij}(\vec{d}, \vec{k}) P_q(\vec{d} + I_i - I_j, \vec{k}, t) \Big\}}{\Lambda(\vec{d}, \vec{k}) e^{\Lambda(\vec{d}, \vec{k})t}} + \\
 &+ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\left( \sum_{i,j=1}^n \Phi_{ij}(\vec{d}, \vec{k}) P_q(\vec{d}, \vec{k} + I_i - I_j, t) + \sum_{i,j=1}^n \Xi_{ij}(\vec{d}, \vec{k}) P_q(\vec{d}, \vec{k} + I_i + I_j, t) + \sum_{i,j=1}^n \Theta_{ij}(\vec{d}, \vec{k}) P_q(\vec{d} + I_i - I_j, \vec{k}, t) \right)}{\Lambda(\vec{d}, \vec{k}) e^{\Lambda(\vec{d}, \vec{k})t}} = \frac{1}{\Lambda(\vec{d}, \vec{k})} \left\{ \sum_{i,j=1}^n \Phi_{ij}(\vec{d}, \vec{k}) P_q(\vec{d}, \vec{k} + I_i - I_j) + \right. \\
 &+ \sum_{i,j=1}^n \Xi_{ij}(\vec{d}, \vec{k}) P_q(\vec{d}, \vec{k} + I_i + I_j) + \sum_{i,j=1}^n \Theta_{ij}(\vec{d}, \vec{k}) P_q(\vec{d} + I_i - I_j, \vec{k}) \Big\} = P(\vec{d}, \vec{k}).
 \end{aligned}$$

Поэтому теорема справедлива и для  $q + 1$ . Тогда, используя метод математической индукции, получаем утверждение данной теоремы.

**Теорема 2.** Последовательность  $\{P_q(\vec{d}, \vec{k}, t)\}, q = 0, 1, 2, \dots$ , построенная по схеме (9), при любом ограниченном по  $t$  нулевом приближении  $P_0(\vec{d}, \vec{k}, t)$ , сходится при  $q \rightarrow \infty$  к единственному решению системы уравнений (7).

**Доказательство.** Поскольку  $P_0(\vec{d}, \vec{k}, t)$  – ограниченная по  $t$  функция, то в силу (8)  $P_1(\vec{d}, \vec{k}, t)$  также ограничена, поэтому

$$|P_1(\vec{d}, \vec{k}, t) - P_0(\vec{d}, \vec{k}, t)| \leq C(\vec{d}, \vec{k}). \quad (11)$$

Покажем, что выполняется неравенство

$$|P_q(\vec{d}, \vec{k}, t) - P_{q-1}(\vec{d}, \vec{k}, t)| \leq C^* (\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3)^{q-1} \frac{t^{q-1}}{(q-1)!}, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \max_{\vec{d}, \vec{k}} \kappa_1(\vec{d}, \vec{k}) = \kappa_1, \max_{\vec{d}, \vec{k}} \kappa_2(\vec{d}, \vec{k}) = \kappa_2, \max_{\vec{d}, \vec{k}} \kappa_3(\vec{d}, \vec{k}) = \kappa_3, \max_{\vec{d}, \vec{k}} C(\vec{d}, \vec{k}) = C^*, \\ \kappa_1(\vec{d}, \vec{k}) = \sum_{i,j=1}^n \Phi_{ij}(\vec{d}, \vec{k}), \kappa_2(\vec{d}, \vec{k}) = \sum_{i,j=1}^n \Xi_{ij}(\vec{d}, \vec{k}), \kappa_3(\vec{d}, \vec{k}) = \sum_{i,j=1}^n \Theta_{ij}(\vec{d}, \vec{k}). \end{aligned} \quad (13)$$

Из (11) следует, что при  $q = 1$  это неравенство выполняется. Предположим, что оно выполняется при  $q = N$ , и покажем, используя (9), его справедливость при  $q = N + 1$ . Имеем

$$\begin{aligned} |P_{N+1}(\vec{d}, \vec{k}, t) - P_N(\vec{d}, \vec{k}, t)| &= \left| e^{-\Lambda(\vec{d}, \vec{k})t} \left( P(\vec{d}, \vec{k}, 0) + \int_0^t e^{\Lambda(\vec{d}, \vec{k})x} \left\{ \sum_{i,j=1}^n \Phi_{ij}(\vec{d}, \vec{k}) P_N(\vec{d}, \vec{k} + I_i - I_j, x) + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{i,j=1}^n \Xi_{ij}(\vec{d}, \vec{k}) P_N(\vec{d}, \vec{k} + I_i + I_j, x) + \sum_{i,j=1}^n \Theta_{ij}(\vec{d}, \vec{k}) P_N(\vec{d} + I_i - I_j, \vec{k}, x) \right\} dx \right) - \\ &\quad - e^{-\Lambda(\vec{d}, \vec{k})t} \left( P(\vec{d}, \vec{k}, 0) + \int_0^t e^{\Lambda(\vec{d}, \vec{k})x} \left\{ \sum_{i,j=1}^n \Phi_{ij}(\vec{d}, \vec{k}) P_{N-1}(\vec{d}, \vec{k} + I_i - I_j, x) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{i,j=1}^n \Xi_{ij}(\vec{d}, \vec{k}) P_{N-1}(\vec{d}, \vec{k} + I_i + I_j, x) + \sum_{i,j=1}^n \Theta_{ij}(\vec{d}, \vec{k}) P_{N-1}(\vec{d} + I_i - I_j, \vec{k}, x) \right\} dx \right) \Bigg| \leq \\ &\leq \left| e^{-\Lambda(\vec{d}, \vec{k})t} \left( \int_0^t e^{\Lambda(\vec{d}, \vec{k})x} \left\{ \sum_{i,j=1}^n \Phi_{ij}(\vec{d}, \vec{k}) (P_N(\vec{d}, \vec{k} + I_i - I_j, x) - P_{N-1}(\vec{d}, \vec{k} + I_i - I_j, x)) + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{i,j=1}^n \Xi_{ij}(\vec{d}, \vec{k}) (P_N(\vec{d}, \vec{k} + I_i + I_j, x) - P_{N-1}(\vec{d}, \vec{k} + I_i + I_j, x)) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{i,j=1}^n \Theta_{ij}(\vec{d}, \vec{k}) (P_N(\vec{d} + I_i - I_j, \vec{k}, x) - P_{N-1}(\vec{d} + I_i - I_j, \vec{k}, x)) \right\} dx \right) \Bigg| \leq \\ &\leq e^{-\Lambda(\vec{d}, \vec{k})t} \left( \int_0^t e^{\Lambda(\vec{d}, \vec{k})x} \left\{ \sum_{i,j=1}^n \Phi_{ij}(\vec{d}, \vec{k}) |P_N(\vec{d}, \vec{k} + I_i - I_j, x) - P_{N-1}(\vec{d}, \vec{k} + I_i - I_j, x)| + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{i,j=1}^n \Xi_{ij}(\vec{d}, \vec{k}) |P_N(\vec{d}, \vec{k} + I_i + I_j, x) - P_{N-1}(\vec{d}, \vec{k} + I_i + I_j, x)| + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{i,j=1}^n \Theta_{ij}(\vec{d}, \vec{k}) |P_N(\vec{d} + I_i - I_j, \vec{k}, x) - P_{N-1}(\vec{d} + I_i - I_j, \vec{k}, x)| \right\} dx \right) \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i,j=1}^n \Theta_{ij}(\vec{d}, \vec{k}) \left| P_N(\vec{d} + I_i - I_j, \vec{k}, x) - P_{N-1}(\vec{d} + I_i - I_j, \vec{k}, x) \right| dx \leq \\
& \leq e^{-\Lambda(\vec{d}, \vec{k})t} \left( \int_0^t e^{\Lambda(\vec{d}, \vec{k})x} \left\{ k_1 (\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3)^{N-1} \frac{x^{N-1}}{(q-1)!} + k_2 (\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3)^{N-1} \frac{x^{N-1}}{(q-1)!} + \right. \right. \\
& \left. \left. + k_3 (\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3)^{N-1} \frac{x^{N-1}}{(q-1)!} \right\} dx \right) \leq (\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3)^N e^{-\Lambda(\vec{d}, \vec{k})t} \int_0^t e^{\Lambda(\vec{d}, \vec{k})x} \frac{x^{N-1}}{(q-1)!} dx. \quad (14)
\end{aligned}$$

Из неравенства  $e^{-\Lambda(\vec{d}, \vec{k})t} e^{\Lambda(\vec{d}, \vec{k})x} \leq 1, x \in [0, t]$ , следует, что

$$e^{-\Lambda(\vec{d}, \vec{k})t} \int_0^t e^{\Lambda(\vec{d}, \vec{k})x} \frac{x^{N-1}}{(N-1)!} dx \leq \int_0^t \frac{x^{N-1}}{(N-1)!} dx = \frac{t^N}{N!},$$

поэтому из (14) получаем, что неравенство (12) имеет место.

Поскольку справедливо неравенство

$$\begin{aligned}
\lim_{q \rightarrow \infty} P_q(\vec{d}, \vec{k}, t) &= \lim_{q \rightarrow \infty} \left( P_0(\vec{d}, \vec{k}, t) + \sum_{n=0}^{q-1} (P_{n+1}(\vec{d}, \vec{k}, t) - P_n(\vec{d}, \vec{k}, t)) \right) = \\
&= P_0(\vec{d}, \vec{k}, t) + \sum_{q=0}^{\infty} (P_{q+1}(\vec{d}, \vec{k}, t) - P_q(\vec{d}, \vec{k}, t)) \leq P_0(\vec{d}, \vec{k}, t) + C^* \sum_{q=0}^{\infty} (\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3)^{q-1} \frac{t^{q-1}}{(q-1)!} = \\
&= P_0(\vec{d}, \vec{k}, t) + e^{(\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3)t},
\end{aligned}$$

то предел последовательности  $\{P_q(\vec{d}, \vec{k}, t)\}, q=0, 1, 2, \dots$ , существует, обозначим его  $P_{\infty}(\vec{d}, \vec{k}, t)$ . Подставляя  $P_{\infty}(\vec{d}, \vec{k}, t)$  в (8) вместо  $P(\vec{d}, \vec{k}, t)$ , видим, что  $P_{\infty}(\vec{d}, \vec{k}, t)$  является решением системы уравнений (7), удовлетворяющим начальным условиям  $P_{\infty}(\vec{d}, \vec{k}, 0) = P(\vec{d}, \vec{k}, 0)$  согласно предыдущей теореме.

Предположим, что существует другое решение системы уравнений (7)  $P^*(\vec{d}, \vec{k}, t)$ . Тогда для него справедливо соотношение (9), если заменить в нем  $P(\vec{d}, \vec{k}, t)$ ,  $P(\vec{d}, \vec{k} + I_i - I_j, t)$ ,  $P(\vec{d}, \vec{k} + I_i + I_j, t)$ ,  $P(\vec{d} + I_i - I_j, \vec{k}, t)$  соответственно на  $P^*(\vec{d}, \vec{k}, t)$ ,  $P^*(\vec{d}, \vec{k} + I_i - I_j, t)$ ,  $P^*(\vec{d}, \vec{k} + I_i + I_j, t)$ ,  $P^*(\vec{d} + I_i - I_j, \vec{k}, t)$ . Поэтому, используя (14), будем иметь

$$\begin{aligned}
|P_q(\vec{d}, \vec{k}, t) - P^*(\vec{d}, \vec{k}, t)| &\leq \left| e^{-\Lambda(\vec{d}, \vec{k})t} \left( P(\vec{d}, \vec{k}, 0) + \int_0^t e^{\Lambda(\vec{d}, \vec{k})x} \left\{ \sum_{i,j=1}^n \Phi_{ij}(\vec{d}, \vec{k}) \times \right. \right. \right. \\
&\quad \times |P_{q-1}(\vec{d}, \vec{k} + I_i - I_j, x) - P^*(\vec{d}, \vec{k} + I_i - I_j, x)| + \\
&\quad + \sum_{i,j=1}^n \Xi_{ij}(\vec{d}, \vec{k}) |P_{q-1}(\vec{d}, \vec{k} + I_i + I_j, x) - P^*(\vec{d}, \vec{k} + I_i + I_j, x)| + \\
&\quad \left. \left. + \sum_{i,j=1}^n \Theta_{ij}(\vec{d}, \vec{k}) |P_{q-1}(\vec{d} + I_i - I_j, \vec{k}, x) - P^*(\vec{d} + I_i - I_j, \vec{k}, x)| \right\} dx \right) \right|.
\end{aligned}$$

Аналогично, как и при доказательстве неравенства (11), можно показать, что выполняется неравенство  $\left| P_q(\vec{d}, \vec{k}, t) - P^*(\vec{d}, \vec{k}, t) \right| \leq M(\kappa_1^* + \kappa_2^* + \kappa_3^*) \frac{q t^q}{q!}$ , где  $M$  – некоторая константа. Правая часть этого неравенства стремиться к нулю, как общий член сходящегося ряда  $\sum_{q=0}^{\infty} M(\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3)^q \frac{t^q}{q!} = M e^{(\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3)t}$ , поэтому  $\lim_{q \rightarrow \infty} P_q(\vec{d}, \vec{k}, t) = P^*(\vec{d}, \vec{k}, t)$ . Но ранее уже получили, что  $\lim_{q \rightarrow \infty} P_q(\vec{d}, \vec{k}, t) = P(\vec{d}, \vec{k}, t)$ , поэтому  $P^*(\vec{d}, \vec{k}, t) = P(\vec{d}, \vec{k}, t)$ , что и доказывает единственность решения системы уравнений (6).

**Теорема 3.** Каждое последовательное приближение  $P_q(\vec{d}, \vec{k}, t)$ ,  $q \geq 1$ , представимо в виде сходящегося степенного ряда

$$P_q(\vec{d}, \vec{k}, t) = \sum_{l=0}^{\infty} g_{ql}(\vec{d}, \vec{k}) t^l, \quad (15)$$

коэффициенты которого удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$g_{q+l}(\vec{d}, \vec{k}) = \frac{[-\Lambda(\vec{d}, \vec{k})]^l}{l!} \left\{ P(\vec{d}, \vec{k}, 0) + \sum_{u=0}^{l-1} \frac{(-1)^{u+1} u!}{\Lambda(\vec{d}, \vec{k})^{u+1}} G_{ql}(\vec{d}, \vec{k}) \right\}, \quad l \geq 0, \quad (16)$$

$$g_{q0}(\vec{d}, \vec{k}) = P(\vec{d}, \vec{k}, 0), \quad g_{0l}(\vec{d}, \vec{k}) = P(\vec{d}, \vec{k}, 0) \delta_{l0},$$

$$G_{ql}(\vec{d}, \vec{k}) = \sum_{i,j=1}^n \left[ \Phi_{ij}(\vec{d}, \vec{k}) g_{ql}(\vec{d}, \vec{k} + I_i - I_j) + \Xi_{ij}(\vec{d}, \vec{k}) g_{ql}(\vec{d}, \vec{k} + I_i + I_j) + \Theta_{ij}(\vec{d}, \vec{k}) g_{ql}(\vec{d} + I_i - I_j, \vec{k}) \right].$$

**Доказательство.** Покажем, что коэффициенты степенного ряда (15) удовлетворяют рекуррентным соотношениям (14). Подставим последовательные приближения (15) в соотношение (9). Тогда с учетом того, что

$$e^{-\Lambda(\vec{d}, \vec{k})t} \int_0^t e^{\Lambda(\vec{d}, \vec{k})x} x^l dx = \left[ \frac{1}{\Lambda(\vec{d}, \vec{k})} \right]^{l+1} l! \sum_{j=l+1}^{\infty} \frac{[-\Lambda(\vec{d}, \vec{k})]^j}{j!}, \quad l = 0, 1, 2, \dots,$$

получаем

$$\sum_{l=0}^{\infty} g_{ql}(\vec{d}, \vec{k}) t^l = e^{-\Lambda(\vec{d}, \vec{k})t} P(\vec{d}, \vec{k}, 0) + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{i,j=1}^n \left[ \Phi_{ij}(\vec{d}, \vec{k}) g_{ql}(\vec{k} + I_i - I_j) + \Xi_{ij}(\vec{d}, \vec{k}) g_{ql}(\vec{k} + I_i + I_j) + \right. \\ \left. + \Theta_{ij}(\vec{d}, \vec{k}) g_{ql}(\vec{d} + I_i - I_j, \vec{k}) \right] \left[ \frac{1}{\Lambda(\vec{d}, \vec{k})} \right]^{l+1} l! \sum_{u=l+1}^{\infty} \frac{[-\Lambda(\vec{d}, \vec{k})]^u}{u!}.$$

Используя (16), этот ряд можно записать в виде

$$\sum_{l=0}^{\infty} g_{ql}(\vec{d}, \vec{k}) t^l = e^{-\Lambda(\vec{d}, \vec{k})t} P(\vec{d}, \vec{k}, 0) + \sum_{l=0}^{\infty} G_{ql}(\vec{d}, \vec{k}) \left[ \frac{1}{\Lambda(\vec{d}, \vec{k})} \right]^{l+1} l! \sum_{u=l+1}^{\infty} \frac{[-\Lambda(\vec{d}, \vec{k})]^u}{u!} t^u.$$

Поменяв местами индексы суммирования и разлагая  $e^{-\Lambda(\vec{d}, \vec{k})t}$  в ряд по степени  $t$ , будем иметь

$$\sum_{l=0}^{\infty} g_{ql}(\vec{d}, \vec{k}) t^l = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{[-\Lambda(\vec{d}, \vec{k})]^l}{l!} \left\{ P(\vec{d}, \vec{k}, 0) + \sum_{u=0}^{l-1} \frac{(-1)^{u+1} u!}{[\Lambda(\vec{d}, \vec{k})]^{u+1}} G_{qu}(\vec{d}, \vec{k}) \right\} t^l. \quad (17)$$

Если в выражении (17) приравнять коэффициенты при  $t^l$ , то получим соотношения (16) для коэффициентов ряда (15). Для нахождения радиуса сходимости степенного ряда (15) воспользуемся формулой Коши – Адамара

$$\frac{1}{R(\vec{d}, \vec{k})} = \lim_{l \rightarrow \infty} \sqrt[l]{|g_{ql}(\vec{d}, \vec{k})|}.$$

Из (16) вытекает, что

$$|g_{q+l}(\vec{d}, \vec{k})| = \frac{\Lambda(\vec{d}, \vec{k})^l}{l!} \left| P(\vec{d}, \vec{k}, 0) - \sum_{u=0}^{l-1} \frac{(-1)^{u+1} u!}{\Lambda(\vec{d}, \vec{k})^{u+1}} G_{qu}(\vec{d}, \vec{k}) \right|, \quad l \geq 0.$$

Покажем, что  $|G_{qu}(\vec{d}, \vec{k})|$ ,  $q \geq 1$ ,  $u = \overline{0, l-1}$ , ограничено конечным значением  $Q_1(\vec{d}, \vec{k})$ . Из ограниченности  $P(\vec{d}, \vec{k}, 0)$  и определения  $G_{qu}(\vec{d}, \vec{k})$  следует, что

$$G_{00}(\vec{k}) = \sum_{i,j=1}^n \left[ \Phi_{ij}(\vec{d}, \vec{k}) P(\vec{d}, \vec{k} + I_i - I_j, 0) + \Xi_{ij}(\vec{d}, \vec{k}) P(\vec{d}, \vec{k} + I_i + I_j, 0) + \Theta_{ij}(\vec{d}, \vec{k}) P(\vec{d} + I_i - I_j, \vec{k}, 0) \right] \leq Q_{00}(\vec{d}, \vec{k}),$$

где  $Q_{00}(\vec{d}, \vec{k})$  – некоторая ограниченная величина, а все  $G_{0l}(\vec{d}, \vec{k}) = 0, l = 1, 2, \dots$ . Поскольку  $G_{q-10}(\vec{d}, \vec{k}) = G_{q-20}(\vec{d}, \vec{k}) = \dots = G_{10}(\vec{d}, \vec{k}) = G_{00}(\vec{d}, \vec{k})$ ,  $q \geq 1$ , то из (16) следует, что  $G_{q-10}(\vec{d}, \vec{k}) < Q_{00}(\vec{d}, \vec{k})$ ,  $q \geq 1$ .

По индукции можно показать, что

$$|G_{q-l}(\vec{d}, \vec{k})| \leq \frac{Q_{q-l}(\vec{d}, \vec{k})}{l!}, \quad l = 1, 2, \dots \quad (18)$$

Например, для  $l = 1$  имеем

$$\begin{aligned} G_{q-11}(\vec{d}, \vec{k}) &= \sum_{i,j=1}^n \left[ \Phi_{ij}(\vec{d}, \vec{k}) g_{q1}(\vec{d}, \vec{k} + I_i - I_j) + \Xi_{ij}(\vec{d}, \vec{k}) g_{q1}(\vec{d}, \vec{k} + I_i + I_j) + \Theta_{ij}(\vec{d}, \vec{k}) g_{q1}(\vec{d} + I_i - I_j, \vec{k}) \right] = \\ &= G_{q-11}(\vec{d}, \vec{k}) = \sum_{i,j=1}^n \left[ \Phi_{ij}(\vec{d}, \vec{k}) \left( -\Lambda(\vec{d}, \vec{k} + I_i - I_j) P(\vec{d}, \vec{k} + I_i - I_j, 0) + G_{q0}(\vec{d}, \vec{k} + I_i - I_j) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \Xi_{ij}(\vec{d}, \vec{k} + I_i + I_j) \left( -\Lambda(\vec{d}, \vec{k} + I_i + I_j) P(\vec{d}, \vec{k} + I_i + I_j, 0) + G_{q0}(\vec{d}, \vec{k} + I_i + I_j) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \Theta_{ij}(\vec{d} + I_i - I_j, \vec{k}) \left( -\Lambda(\vec{d} + I_i - I_j, \vec{k}) P(\vec{d} + I_i - I_j, \vec{k}, 0) + G_{q0}(\vec{d} + I_i - I_j, \vec{k}) \right) \right] \leq \frac{Q_{q-11}(\vec{d}, \vec{k})}{1!}, \end{aligned}$$

где  $Q_{q-11}(\vec{d}, \vec{k})$  – некоторая ограниченная величина. Предположим, что (17) справедливо для  $l-1$ , т. е.

$$|G_{q-l-1}(\vec{d}, \vec{k})| \leq \frac{Q_{q-l-1}(\vec{d}, \vec{k})}{(l-1)!}, \quad l = 1, 2, \dots \quad (19)$$

Докажем справедливость неравенства (18) для  $l$ . Используя (17), получим

$$G_{q-l}(\vec{d}, \vec{k}) = \sum_{i,j=1}^n \left[ \Phi_{ij}(\vec{d}, \vec{k}) g_{q-l}(\vec{d}, \vec{k} + I_i - I_j) + \Xi_{ij}(\vec{d}, \vec{k}) g_{q-l}(\vec{d}, \vec{k} + I_i + I_j) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \Theta_{ij}(\vec{d}, \vec{k}) g_{q-l}(\vec{d} + I_i - I_j, \vec{k}) \Big] = \\
& = \sum_{i,j=1}^n \Phi_{ij}(\vec{d}, \vec{k}) \left( \frac{[-\Lambda(\vec{d}, \vec{k} + I_i - I_j)]^l}{l!} \left\{ P(\vec{d}, \vec{k} + I_i - I_j, 0) + \sum_{u=0}^{l-1} \frac{(-1)^{u+1} u!}{\Lambda(\vec{d}, \vec{k} + I_i - I_j)^{u+1}} G_{q-lu}(\vec{d}, \vec{k} + I_i - I_j) \right\} \right) + \\
& + \sum_{i,j=1}^n \Xi_{ij}(\vec{d}, \vec{k}) \left( \frac{[-\Lambda(\vec{d}, \vec{k} + I_i + I_j)]^l}{l!} \left\{ P(\vec{d}, \vec{k} + I_i + I_j, 0) + \sum_{u=0}^{l-1} \frac{(-1)^{u+1} u!}{\Lambda(\vec{d}, \vec{k} + I_i + I_j)^{u+1}} G_{q-lu}(\vec{d}, \vec{k} + I_i + I_j) \right\} \right) + \\
& + \sum_{i,j=1}^n \Theta_{ij}(\vec{d}, \vec{k}) \left( \frac{[-\Lambda(\vec{d} + I_i - I_j, \vec{k})]^l}{l!} \left\{ P(\vec{d} + I_i - I_j, \vec{k}, 0) + \sum_{u=0}^{l-1} \frac{(-1)^{u+1} u!}{\Lambda(\vec{d} + I_i - I_j, \vec{k})^{u+1}} G_{q-lu}(\vec{d} + I_i - I_j, \vec{k}) \right\} \right) \leq \\
& \leq \sum_{i,j=1}^n \Phi_{ij}(\vec{d}, \vec{k}) \left( \frac{[-\Lambda(\vec{d}, \vec{k} + I_i - I_j)]^l}{l!} \left\{ P(\vec{d}, \vec{k} + I_i - I_j, 0) + \sum_{u=0}^{l-1} \frac{(-1)^{u+1} u!}{\Lambda(\vec{d}, \vec{k} + I_i - I_j)^{u+1}} \frac{Q_{q-lu}(\vec{d}, \vec{k} + I_i - I_j)}{u!} \right\} \right) + \\
& + \sum_{i,j=1}^n \Xi_{ij}(\vec{d}, \vec{k}) \left( \frac{[-\Lambda(\vec{d}, \vec{k} + I_i + I_j)]^l}{l!} \left\{ P(\vec{d}, \vec{k} + I_i + I_j, 0) + \sum_{u=0}^{l-1} \frac{(-1)^{u+1} u!}{\Lambda(\vec{d}, \vec{k} + I_i + I_j)^{u+1}} \frac{Q_{q-lu}(\vec{d}, \vec{k} + I_i + I_j)}{u!} \right\} \right) + \\
& + \sum_{i,j=1}^n \Theta_{ij}(\vec{d}, \vec{k}) \left( \frac{[-\Lambda(\vec{d} + I_i - I_j, \vec{k})]^l}{l!} \left\{ P(\vec{d} + I_i - I_j, \vec{k}, 0) + \sum_{u=0}^{l-1} \frac{(-1)^{u+1} u!}{\Lambda(\vec{d} + I_i - I_j, \vec{k})^{u+1}} \frac{Q_{q-lu}(\vec{d} + I_i - I_j, \vec{k})}{u!} \right\} \right).
\end{aligned}$$

Введем обозначение  $Q_l(\vec{d}, \vec{k}) = \max_{q,l} Q_{ql}(\vec{d}, \vec{k})$ , тогда

$$\begin{aligned}
& G_{q-l}(\vec{d}, \vec{k}) \leq \sum_{i,j=1}^n \Phi_{ij}(\vec{d}, \vec{k}) \times \\
& \times \left( \frac{[-\Lambda(\vec{d}, \vec{k} + I_i - I_j)]^l}{l!} \left\{ P(\vec{d}, \vec{k} + I_i - I_j, 0) + Q_1(\vec{d}, \vec{k} + I_i - I_j) \sum_{u=0}^{l-1} \frac{1}{\Lambda(\vec{d}, \vec{k} + I_i - I_j)^{u+1}} \right\} \right) + \\
& + \sum_{i,j=1}^n \Xi_{ij}(\vec{d}, \vec{k}) \left( \frac{[-\Lambda(\vec{d}, \vec{k} + I_i + I_j)]^l}{l!} \left\{ P(\vec{d}, \vec{k} + I_i + I_j, 0) + Q_1(\vec{d}, \vec{k} + I_i + I_j) \sum_{u=0}^{l-1} \frac{1}{\Lambda(\vec{d}, \vec{k} + I_i + I_j)^{u+1}} \right\} \right) + \\
& + \sum_{i,j=1}^n \Theta_{ij}(\vec{d}, \vec{k}) \left( \frac{[-\Lambda(\vec{d} + I_i - I_j, \vec{k})]^l}{l!} \left\{ P(\vec{d} + I_i - I_j, \vec{k}, 0) + Q_1(\vec{d} + I_i - I_j, \vec{k}) \sum_{u=0}^{l-1} \frac{1}{\Lambda(\vec{d} + I_i - I_j, \vec{k})^{u+1}} \right\} \right) \leq \\
& \leq \frac{1}{l!} \left\{ \sum_{i,j=1}^n \Phi_{ij}(\vec{d}, \vec{k}) \left( [-\Lambda(\vec{d}, \vec{k} + I_i - I_j)]^l \left\{ P(\vec{d}, \vec{k} + I_i - I_j, 0) + Q_1(\vec{d}, \vec{k} + I_i - I_j) \sum_{u=0}^{l-1} \frac{1}{\Lambda(\vec{d}, \vec{k} + I_i - I_j)^{u+1}} \right\} \right) \right\} + \\
& + \sum_{i,j=1}^n \Xi_{ij}(\vec{d}, \vec{k}) \left( [-\Lambda(\vec{d}, \vec{k} + I_i + I_j)]^l \left\{ P(\vec{d}, \vec{k} + I_i + I_j, 0) + Q_1(\vec{d}, \vec{k} + I_i + I_j) \sum_{u=0}^{l-1} \frac{1}{\Lambda(\vec{d}, \vec{k} + I_i + I_j)^{u+1}} \right\} \right) +
\end{aligned}$$

$$+ \sum_{i,j=1}^n \Theta_{ij}(\vec{d}, \vec{k}) \left( \left[ -\Lambda(\vec{d} + I_i - I_j, \vec{k}) \right]^l \left\{ P(\vec{d} + I_i - I_j, \vec{k}, 0) + Q_1(\vec{d} + I_i - I_j, \vec{k}) \sum_{u=0}^{l-1} \frac{1}{\Lambda(\vec{d} + I_i - I_j, \vec{k})^{u+1}} \right\} \right) \leq$$

$$\leq \frac{Q_{q-l}(\vec{d}, \vec{k})}{l!},$$

где  $Q_{q-l}(\vec{d}, \vec{k})$  – выражение в фигурных скобках, значит, неравенство (17) справедливо.

Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} \frac{1}{R(\vec{d}, \vec{k})} &= \lim_{l \rightarrow \infty} \sqrt[l]{\frac{\Lambda(\vec{d}, \vec{k})^l}{l!} \left| P(\vec{d}, \vec{k}, 0) + \sum_{u=0}^{l-1} \frac{(-1)^{u+1} u!}{\Lambda(\vec{d}, \vec{k})^{u+1}} G_{qu}(\vec{d}, \vec{k}) \right|} \leq \\ &\leq \Lambda(\vec{d}, \vec{k}) \lim_{l \rightarrow \infty} \sqrt[l]{\frac{1}{l!} \left| P(\vec{d}, \vec{k}, 0) + \sum_{u=0}^{l-1} \frac{(-1)^{u+1} u!}{\Lambda(\vec{d}, \vec{k})^{u+1}} Q_{q-lu}(\vec{d}, \vec{k}) \right|} \leq \\ &\leq \Lambda(\vec{d}, \vec{k}) \lim_{l \rightarrow \infty} \sqrt[l]{\frac{1}{l!} \left| P(\vec{d}, \vec{k}, 0) + Q_1(\vec{d}, \vec{k}) \sum_{u=0}^{l-1} \frac{(-1)^{u+1}}{\Lambda(\vec{d}, \vec{k})^{u+1}} \right|} \leq \\ &\leq \Lambda(\vec{d}, \vec{k}) \lim_{l \rightarrow \infty} \sqrt[l]{\frac{1}{(l-1)!}} \lim_{l \rightarrow \infty} \sqrt[l]{\left( \frac{P(\vec{d}, \vec{k}, 0)}{l} + \frac{Q_1(\vec{d}, \vec{k})}{l} \sum_{u=0}^{l-1} \frac{1}{\Lambda(\vec{d}, \vec{k})^{u+1}} \right)}. \end{aligned} \quad (20)$$

Так как

$$F_{l-1}(\vec{d}, \vec{k}) = \sum_{u=0}^{l-1} \frac{1}{[\Lambda(\vec{d}, \vec{k})]^{u+1}} = \begin{cases} \frac{1 - [\Lambda(\vec{d}, \vec{k})]^l}{(\Lambda(\vec{d}, \vec{k}) - 1)}, & \Lambda(\vec{d}, \vec{k}) \neq 1, \\ l, & \Lambda(\vec{d}, \vec{k}) = 1 \end{cases},$$

то

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{F_{l-1}(\vec{d}, \vec{k})}{l} = \begin{cases} 0, & \Lambda(\vec{d}, \vec{k}) > 1 \\ 1, & \Lambda(\vec{d}, \vec{k}) = 1 \end{cases}. \quad (21)$$

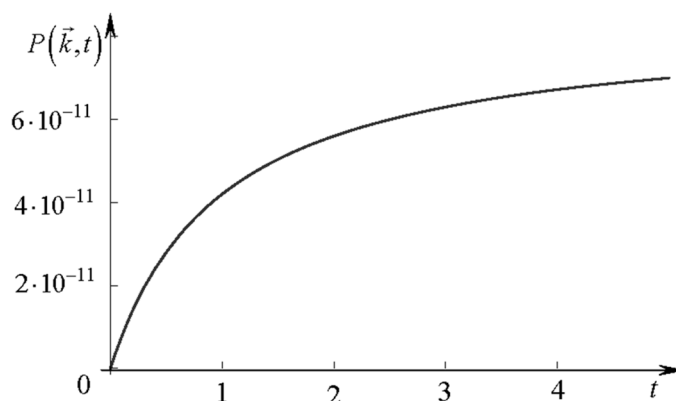
В [5] доказано, что имеет место равенство

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \sqrt[l]{\left( \frac{P(\vec{d}, \vec{k}, 0)}{l} + \frac{Q_1(\vec{d}, \vec{k})}{l} F_{l-1}(\vec{d}, \vec{k}) \right)} = 1.$$

Можно показать [5], что  $\lim_{l \rightarrow \infty} \sqrt[l]{\frac{1}{(l-1)!}} = 0$ . Поэтому, как следует из (21), радиус сходимости степенного ряда (15) равен  $+\infty$ .

**Пример.** Рассмотрим сеть, состоящую из  $n = 4$  СМО:

$$\begin{aligned} \lambda^+ &= 100, \lambda^- = 90, p_{0i}^+ = p_{0i}^- = 0,25; i = \overline{1,4}, \\ p_{ij}^+ &= p_{ij}^- = 0,1; p_{i0} = 0,2; i, j = \overline{1,4}, \mu_i = 20, \gamma_i = 15, \beta_i = 10, i = \overline{1,4}. \end{aligned}$$



Вероятность состояния  $(1,1,1,1,2,3,4,5,t)$  на отрезке времени  $[0;5]$   
 State probability  $(1,1,1,1,2,3,4,5,t)$  on the time interval  $[0;5]$

Найдем вероятность состояния  $\vec{k} = (1,1,1,1,2,3,4,5)$  при условии, что состояние  $(1,1,1,1,1,1,1,1)$  было начальным. Решая задачу при помощи языка программирования C# на отрезке  $[0,5]$  при  $\varepsilon = 10^{-6}$ , получим зависимость, представленную на рисунке.

Количество членов ряда, вычисляемых по формуле (17), находилось с использованием соотношения  $|d_{qt}(\vec{d}, \vec{k}^*)| \leq \varepsilon$ , где  $\vec{d}^*, \vec{k}^* : d_{qt}(\vec{d}^*, \vec{k}^*) = \max_{\vec{k}} |d_{qt}(\vec{d}, \vec{k})|$ , а количество итераций  $q$  – с помощью неравенства  $|P_{q+1}(1,1,1,1,2,3,4,5,t) - P_q(1,1,1,1,2,3,4,5,t)| \leq \varepsilon$ . Получили, что количество итераций  $q^* = 45$ , а членов ряда –  $l^* = 87$ .

### Список использованных источников

1. Gelenbe, E. Product-form queueing networks with negative and positive customers / E. Gelenbe // J. Appl. Probability. – 1991. – Vol. 28, № 3. – P. 656–663. <https://doi.org/10.2307/3214499>
2. Маталыцкий, М. А. Стохастические сети с ограниченным временем ожидания заявок и ненадежным обслуживанием: монография / М. А. Маталыцкий, С. Э. Статкевич. – Гродно: ГрГУ, 2014. – 248 с.
3. Статкевич, С. Э. Исследование сети массового обслуживания с ненадежными системами в переходном режиме / С. Э. Статкевич, М. А. Маталыцкий // Вестн. Том. гос. ун-та. Сер. управление, вычисл. техника и информатика. – 2012. – № 1. – С. 112–125.
4. Matalycki, M. Analiza asymptotyczna wykładniczej sieci zawodnych systemów kolejkowych / M. Matalycki, S. Statkiewicz // Studia Informatica. – 2012. – Vol. 33, № 3-A. – P. 29–36.
5. Маталыцкий, М. А. Исследование марковских НМ-сетей с разнотипными заявками многих классов методом последовательных приближений, совмещенным с методом рядов / М. А. Маталыцкий // Вес. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2008. – № 4. – С. 113–119.
6. Косарева, Е. В. О нахождении доходов в НМ-сетях с ограниченным временем ожидания заявок методом последовательных приближений, совмещенным с методом рядов / Е. В. Косарева, М. А. Маталыцкий, К. В. Розов // Весн. Гродз. дзярж. ун-та імя Янкі Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, выліч. тэхніка і ўпраўленне. – 2012. – № 3. – С. 125–130.
7. Науменко, В. В. Исследование в переходном режиме сети со случайным временем ожидания положительных и отрицательных заявок / В. В. Науменко, Д. Я. Копать, М. А. Маталыцкий // Весн. Гродз. дзярж. ун-та імя Янкі Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, выліч. тэхніка і ўпраўленне. – 2017. – Т. 7, № 1. – С. 154–163.

### References

1. Gelenbe E. Product-form queueing networks with negative and positive customers. *Journal of Applied Probability*, 1991, vol. 28, no. 1, pp. 656–663. <https://doi.org/10.2307/3214499>
2. Matalytski M. A., Statkevich S. E. *Stochastic Networks with Limited Waiting Times for Customers and Unreliable Services*. Grodno, State University of Grodno, 2014. 248 p. (in Russian).
3. Statkevich S. E., Matalytski M. A. Investigation queueing network with unreliable systems in transient mode. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika = Vestnik of Tomsk State University, Series Management, Computer Technology and Informatics*, 2012, no. 1, pp. 112–125 (in Russian).
4. Matalytski M., Statkiewicz S. Asimptotic analysis of open network unreliable systems in transient mode. *Studia Informatica*, 2012, vol. 33, no. 3-A, pp. 29–36.

5. Matalyski M. Investigation of Markov HM-network with multi-type applications of many classes by the method of successive approximations, combined with the method of series *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk* = *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2008, no. 4, pp. 113–119 (in Russian).

6. Kosareva E. V., Matalytski M. A. On finding incomes in HM-networks with a limited waiting time of applications using the method of successive approximations, combined with the method of series. *Vesnik Grodzenskaga dzyarzhaj'naga ŭniversiteta imya Yanki Kupaly. Seryya 2. Matematyka. Fizika. Infarmatyka, vylichal'naya tekhnika i ŭpraŭlenne* = *Vesnik of Yanka Kupala State University of Grodno. Series 2. Mathematics. Physics. Informatics, Computer Technology and its Contro*, 2012, no. 3, pp. 125–130 (in Russian).

7. Naumenko V. V., Kopats D. Ya., Matalytsky M. A. Research in the transient mode of the network with a random waiting time for positive and negative applications. *Vesnik Grodzenskaga dzyarzhaj'naga ŭniversiteta imya Yanki Kupaly. Seryya 2. Matematyka. Fizika. Infarmatyka, vylichal'naya tekhnika i ŭpraŭlenne* = *Vesnik of Yanka Kupala State University of Grodno. Series 2. Mathematics. Physics. Informatics, Computer Technology and its Contro*, 2017, vol. 7, no. 1, pp. 154–163 (in Russian).

### Информация об авторах

**Копать Дмитрий Ярославович** – аспирант, Гродненский государственный университет им. Я. Купалы (ул. Ожешко, 22, 230020, г. Гродно, Республика Беларусь). E-mail: dk80395@mail.ru

**Маталыцкий Михаил Алексеевич** – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры фундаментальной и прикладной математики факультета математики и информатики, Гродненский государственный университет им. Я. Купалы (ул. Ожешко, 22, 230020, г. Гродно, Республика Беларусь). E-mail: m.matalytski@gmail.com

### Information about the authors

**Dzmitry Ya. Kopats** – Postgraduate Student, Grodno State University of Yanka Kupala (22, Ozheshko Str., 230023, Grodno, Republic of Belarus). E-mail: dk80395@mail.ru

**Mikhail A. Matalytski** – D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Professor of the Department of Fundamental and Applied Mathematics, Faculty of Mathematics and Computer Science, Grodno State University of Yanka Kupala (22, Ozheshko Str., 230023, Grodno, Republic of Belarus). E-mail: m.matalytski@gmail.com

ISSN 1561-2430 (Print)  
 ISSN 2524-2415 (Online)  
 УДК 519.63

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-454-459>

Поступила в редакцию 26.04.2018

Received 26.04.2018

**В. М. Волков, Е. В. Проконина**

*Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь*

## **РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ И ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ СО СМЕШАННЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ**

**Аннотация.** Рассмотрены разностные схемы и итерационные методы для решения задач анизотропной диффузии, описываемых многомерными эллиптическими уравнениями со смешанными производными. На примере модельной двумерной задачи с разрывными коэффициентами показано, что спектральные свойства разностной задачи и эффективность ее переобусловливания при итерационной реализации зависят от способа аппроксимации смешанных производных. На основе сравнительного численного анализа выявлена наиболее адекватная схема аппроксимации смешанных производных, обеспечивающая максимальную скорость сходимости итерационного метода би-сопряженных градиентов с переобусловливателями Фурье – Якоби и неполной LU-факторизации. Показано, что свойство монотонности разностной схемы не гарантирует ее преимущество при итерационной реализации. Более того, в условиях сильной анизотропии не удастся обеспечить выполнение сеточного принципа максимума.

**Ключевые слова:** разностные схемы, эллиптические уравнения, смешанные производные, итерационные методы, сеточный принцип максимума

**Для цитирования.** Волков, В. М. Разностные схемы и итерационные методы для многомерных эллиптических уравнений со смешанными производными / В. М. Волков, Е. В. Проконина // Вест. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2018. – Т. 54, № 4. – С. 454–459. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-454-459>

**V. M. Volkov, A. U. Prakonina**

*Belarusian State University, Minsk, Belarus*

## **FINITE-DIFFERENCE SCHEMES AND ITERATIVE METHODS FOR MULTIDIMENSIONAL ELLIPTIC EQUATIONS WITH MIXED DERIVATIVES**

**Abstract.** Finite difference schemes and iterative methods of solving anisotropic diffusion problems governing multidimensional elliptic PDE with mixed derivatives are considered. By the example of the test problem with discontinuous coefficients, it is shown that the spectral characteristics of the finite difference problem and the efficiency of their preconditioning depend on the mixed derivatives approximation method. On the basis of the comparative numerical analysis, the most adequate approximation formulas for the mixed derivatives providing a maximum convergence rate of the bi-conjugate gradients method with the incomplete LU factorization and the Fourier – Jacobi preconditioners are discovered. It is shown that the monotonicity of the finite difference scheme does not guarantee advantages at their iterative implementation. Moreover, the grid maximum principle is not provided under the conditions of essential anisotropy.

**Keywords:** finite difference schemes, elliptic equations, mixed derivatives, iterative methods, grid maximum principle

**For citation.** Volkov V. M., Prakonina A. U. Finite-difference schemes and iterative methods for multidimensional elliptic equations with mixed derivatives. *Vestsi Natsyional'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, vol. 54, no. 4, pp. 454–459 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-454-459>

**Введение.** Краевые задачи для дифференциальных уравнений эллиптического типа составляют важный класс математических моделей, используемых для анализа стационарных полей различной физической природы [1]. Как и для большинства других задач математической физики, исчерпывающий анализ данных моделей в контексте конкретных приложений невозможен без использования численных методов. Для этих целей наиболее широко применяются методы конечных элементов и конечных разностей (см., напр., [2, 3]).

Разработка численной методики решения краевых задач для уравнений в частных производных включает две неотъемлемых составляющих. Во-первых, построение дискретной модели, которая ставит в соответствие дифференциальной задаче определенную систему линейных или нелинейных алгебраических уравнений. Во-вторых, поиск наиболее эффективного подхода к ре-

шению таких систем уравнений, которые, как правило, характеризуются большой разреженной матрицей специфической структуры.

В настоящей работе рассмотрены некоторые проблемы построения и реализации разностных схем для моделирования задач анизотропной диффузии, описываемых многомерными эллиптическими уравнениями со смешанными производными и кусочно-постоянными коэффициентами. Отсутствие непрерывности коэффициентов задачи приводит к ухудшению аппроксимирующих свойств разностных моделей, а наличие смешанных производных создает серьезные проблемы сохранения свойства эллиптичности разностного оператора, что может порождать сложности при итерационной реализации метода. Отмеченные обстоятельства, с точки зрения теории разностных схем [2], указывают на целесообразность использования дополнительных критериев оценки вычислительных качеств алгоритмов с учетом преемственности в рамках дискретной модели наиболее важных свойств дифференциальной задачи: законы сохранения, принцип максимума и т. п. Консервативные разностные схемы, удовлетворяющие дискретному принципу максимума (монотонности), для эллиптических уравнений со смешанными производными предложены и исследованы в работах [4–6], где также показано, что обеспечить выполнение этих двух характеристик не удастся без дополнительных условий. Условия монотонности налагают ограничение на соотношение шагов сетки и коэффициенты задачи в точках шаблона. Представляет интерес проверка выполнимости критерия монотонности и его влияние на эффективность итерационной реализации дискретной модели применительно к реальным задачам. В данной работе на примере модельной задачи проведен сравнительный анализ двух разностных схем с точки зрения эффективности их итерационной реализации методом би-сопряженных градиентов с различными типами переобусловливателей.

**Постановка задачи.** Рассмотрим задачу Дирихле для двумерного эллиптического уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \sigma_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \sigma_{yx} \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_{yy} \frac{\partial u}{\partial y} \right) = f(x, y), \quad |x| < 1, \quad |y| < 1, \quad u(x, y)|_{\Gamma} = 0. \quad (1)$$

Внутри квадратной области с изотропной однородной средой,  $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_0$ ,  $\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = 0$ , задана кольцевая подобласть  $\Theta$ , в которой тензор диффузии определяется следующим образом:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_r & 0 \\ 0 & \sigma_\tau \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Здесь  $\varphi$  – угловая полярная координата,  $\Theta = \{(x, y), 0, 4 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 0, 6\}$ ,  $\sigma_\tau = 1 / \sigma_r = \sqrt{\lambda}$ . Постановка задачи соответствует случаю, когда в кольцевой подобласти отношение коэффициентов диффузии в тангенциальном и радиальном направлениях равно коэффициенту анизотропии  $\lambda$ . Тензор диффузии симметричен и положительно определен. В случае  $\lambda \neq 1$  коэффициенты задачи являются знакопеременными и разрывными на границе области  $\Theta$ . В качестве правой части уравнения (1) использовалась функция в виде двух точечных источников противоположного знака и равной амплитуды, расположенных в кольцевой области на координатных осях. Таким образом, как коэффициенты, так и правая часть уравнения не являются гладкими.

Рассмотренная задача, в силу реалистичности и широких возможностей вариации параметров анизотропии, представляется хорошим примером для сравнительного анализа эффективности различных численных подходов к моделированию анизотропной диффузии в слоистых анизотропных средах.

**Численный метод.** Для решения рассмотренной задачи используем метод конечных разностей. На сетке  $\omega_h = \{(x_i, y_j), x_i = ih_x, y_j = jh_y, i = 1, N_x, j = 1, N_y\}$ , вторые производные уравнения аппроксимируем стандартным образом [1]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} = h_x^{-2} \left[ \sigma_{xx}^{i+0,5,j} U_{i+1,j} - (\sigma_{xx}^{i+0,5,j} + \sigma_{xx}^{i-0,5,j}) U_{i,j} + \sigma_{xx}^{i-0,5,j} U_{i-1,j} \right], \quad (3)$$

где  $\sigma_{xx}^{i\pm 0,5,j} = (\sigma_{xx}^{i,j} + \sigma_{xx}^{i\pm 1,j}) / 2$ ,  $U_{i,j} = U(x_i, y_j)$ .

Для аппроксимации смешанных производных рассмотрим два варианта разностных формул:

$$\frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} \cong \frac{1}{4h_x h_y} \left( \sigma_{xy}^{i+0,5,j} (U_{i+1,j+1} - U_{i+1,j-1} + U_{i,j+1} - U_{i,j-1}) - \right. \\ \left. - \sigma_{xy}^{i-0,5,j} (U_{i,j+1} - U_{i,j-1} + U_{i-1,j+1} - U_{i-1,j-1}) \right), \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xy} \frac{\partial}{\partial y} \cong \frac{1}{4h_x h_y} \left[ \sigma_{xy}^{+(i+0,5,j)} (U_{i+1,j+1} - U_{i+1,j}) - \sigma_{xy}^{+(i-0,5,j)} (U_{i,j+1} - U_{i,j}) \right] + \\ + \frac{1}{4h_x h_y} \left[ \sigma_{xy}^{+(i+0,5,j)} (U_{i,j} - U_{i,j-1}) - \sigma_{xy}^{+(i-0,5,j)} (U_{i-1,j} - U_{i-1,j-1}) \right] + \\ + \frac{1}{4h_x h_y} \left[ \sigma_{xy}^{-(i+0,5,j)} (U_{i+1,j} - U_{i+1,j-1}) - \sigma_{xy}^{-(i-0,5,j)} (U_{i,j} - U_{i,j-1}) \right] + \\ + \frac{1}{4h_x h_y} \left[ \sigma_{xy}^{-(i+0,5,j)} (U_{i,j+1} - U_{i,j}) - \sigma_{xy}^{-(i-0,5,j)} (U_{i-1,j+1} - U_{i-1,j}) \right]. \quad (5)$$

Здесь  $\sigma_{xy}^{\pm(i,j)} = \sigma_{xy}^{(i,j)} \pm \left| \sigma_{xy}^{(i,j)} \right|$ .

Обе схемы консервативны и обладают вторым порядком точности на достаточно гладких входных данных. Кроме того, как показано в работах [5, 6], при выполнении следующих условий:

$$\max \{k_1, k_2\} \leq \frac{h_1}{h_2} \leq \min \{k_3, k_4\},$$

где

$$k_1 = \frac{\left| \sigma_{xy}^{(i-0,5,j)} \right| - \sigma_{xy}^{(i-0,5,j)} + \left| \sigma_{xy}^{(i+0,5,j)} \right| + \sigma_{xy}^{(i+0,5,j)} + 2 \left| \sigma_{xy}^{(i,j-0,5)} \right|}{4\sigma_{yy}^{(i,j-0,5)}}, \\ k_2 = \frac{\left| \sigma_{xy}^{(i-0,5,j)} \right| + \sigma_{xy}^{(i-0,5,j)} + \left| \sigma_{xy}^{(i+0,5,j)} \right| - \sigma_{xy}^{(i+0,5,j)} + 2 \left| \sigma_{yx}^{(i,j+0,5)} \right|}{4\sigma_{yy}^{(i,j+0,5)}}, \\ k_3 = \frac{4\sigma_{xx}^{(i-0,5,j)}}{2 \left| \sigma_{xy}^{(i-0,5,j)} \right| + \left| \sigma_{yx}^{(i,j-0,5)} \right| - \sigma_{yx}^{(i,j-0,5)} + \sigma_{yx}^{(i,j+0,5)} + \left| \sigma_{yx}^{(i,j+0,5)} \right| + \sigma_{yx}^{(i,j+0,5)}}, \\ k_4 = \frac{4\sigma_{xx}^{(i+0,5,j)}}{2 \left| \sigma_{xy}^{(i+0,5,j)} \right| + \left| \sigma_{yx}^{(i,j-0,5)} \right| + \sigma_{yx}^{(i,j-0,5)} + \left| \sigma_{yx}^{(i,j+0,5)} \right| - \sigma_{yx}^{(i,j+0,5)}}. \quad (6)$$

разностная схема на основе аппроксимаций (3), (5) удовлетворяет сеточному принципу максимума и, как следствие, является монотонной. Следствием сеточного принципа максимума (монотонности) является также гарантированное диагональное доминирование и положительная определенность разностного оператора задачи. Последнее обстоятельство позволяет предположить, что свойство монотонности может обеспечить преимущество данного класса схем при итерационной реализации соответствующей системы разностных уравнений, поскольку скорость сходимости итерационных методов существенно зависит от числа обусловленности матрицы.

Использование разностной аппроксимации (4) приводит к консервативной, но не монотонной дискретной модели [7]. Тем не менее аппроксимация смешанных производных по формуле (4) представляется наиболее естественной. Несложно заметить, что аппроксимация внутренних производных в дивергентной записи уравнения (1) со вторым порядком точности, согласно формулам (3) и (4), достигается в одних и тех же полужелтых точках сетки  $(x_{i\pm 0,5}, y_j)$  и  $(x_i, y_{j\pm 0,5})$ . В этих же точках вычисляются и коэффициенты уравнения, определяемые как диагональными, так и недиагональными компонентами тензора диффузии. В отличие от (4), для разностной аппроксимации (5) второй порядок аппроксимации достигается благодаря усреднению смешанных производных

по диагонально симметричным ячейкам шаблона с центрами в точках  $(x_{i\pm 0,5}, y_{j\pm 0,5})$  для положительных и  $(x_{i\pm 0,5}, y_{j\pm 0,5})$  для отрицательных значений недиагональных компонент тензора диффузии.

Рассмотренные варианты разностных схем (3), (4) и (3), (5) сводятся к решению системы линейных алгебраических уравнений

$$AU = f, \quad (7)$$

где  $A$  – 9-диагональная разреженная матрица для разностных схем на основе формулы (4) и 7-диагональная матрица для схемы (5). Размерность матриц определяется числом узлов сетки, и при  $N_x = N_y = N > 100$  для реализации разностных схем предпочтительно использовать итерационные методы.

**Результаты численных экспериментов.** Для реализации систем разностных уравнений (7) использован метод би-сопряженных градиентов [8], для которого количество итераций, обеспечивающее заданную точность, оценивается величиной, пропорциональной корню квадратному из числа обусловленности матрицы системы. Численные эксперименты подтверждают указанные оценки скорости сходимости. В частности, количество необходимых итераций для явного метода би-сопряженных градиентов при реализации рассмотренных разностных схем возрастает обратно пропорционально шагу сетки, что полностью согласуется со спектральными свойствами разностного оператора Лапласа [2].

Для ускорения сходимости предпочтительно использовать неявные аналоги итерационных методов с переобуславливанием. Рассмотрены переобуславливатели на основе неполной LU-факторизации (iLU) и комбинированный переобуславливатель Фурье – Якоби (FJ), в качестве которого использована стандартная диагональная матрица, построенная из диагональных элементов системной матрицы, и матрица однородной изотропной задачи, для обращения которой применимо быстрое дискретное преобразование Фурье. Для численных экспериментов использованы функции Matlab bicg и iLU. Итерации прекращались, когда относительная норма невязки достигала значения  $\varepsilon = 10^{-9}$ .

На примере решения модельной задачи (1), (2) исследованы зависимости числа итераций от количества узлов сетки и коэффициента анизотропии  $\lambda$ . Кроме того, произведен сравнительный анализ эффективности рассмотренных переобуславливателей на основе оценок числа обусловленности матрицы системы разностных уравнений  $A$  и переобусловленной матрицы  $P^{-1}A$ , где  $P$  – матрица переобуславливателя. Оценка числа обусловленности матриц производилась на основе отношения максимального и минимального сингулярных значений, вычисленных с помощью функции Matlab svds. Результаты численных экспериментов представлены на рис. 1, 2.

Зависимости спектральных свойств матрицы дискретной задачи и скорости сходимости итерационных методов от размерности сетки (рис. 1) показывают, что наиболее эффективные результаты демонстрирует разностная схема (3), (4), реализуемая методом би-сопряженных градиентов (biCG) с использованием переобуславливателя Фурье – Якоби (FJ). Использование данного типа переобуславливателя практически полностью устраняет зависимость числа итераций от размерности сетки, что позволяет сравнить по эффективности данную технику с многосеточными итерационными методами [9]. Принимая во внимание, что вычислительные затраты на одну итерацию в методе biCG FJ превосходят данный показатель для метода biCG iLU приблизительно в 2–2,5 раза, легко видеть, что при  $N \geq 50$  наблюдается превосходство в эффективности метода biCG FJ, которое возрастает пропорционально  $N$ .

Ожидаемое преимущество монотонной схемы (3), (5) не нашло подтверждения в численных экспериментах. Более того, для рассмотренной модельной задачи критерии монотонности (6) выполнялись лишь при умеренных значениях анизотропии  $\lambda < 6 \div 7$ , а при  $\lambda \geq 10$  и более отмечалось прогрессирующее нарушение сеточного принципа максимума.

Отметим, что спектральные характеристики исходных разностных операторов на основе (4) и (5) практически совпадают. Вместе с тем разностная аппроксимация смешанных производных (4) неизменно обеспечивает лучшую сходимость итераций, особенно в комбинации biCG FJ, что, впрочем, не всегда коррелирует с соотношением числа обусловленности переобусловленных матриц.

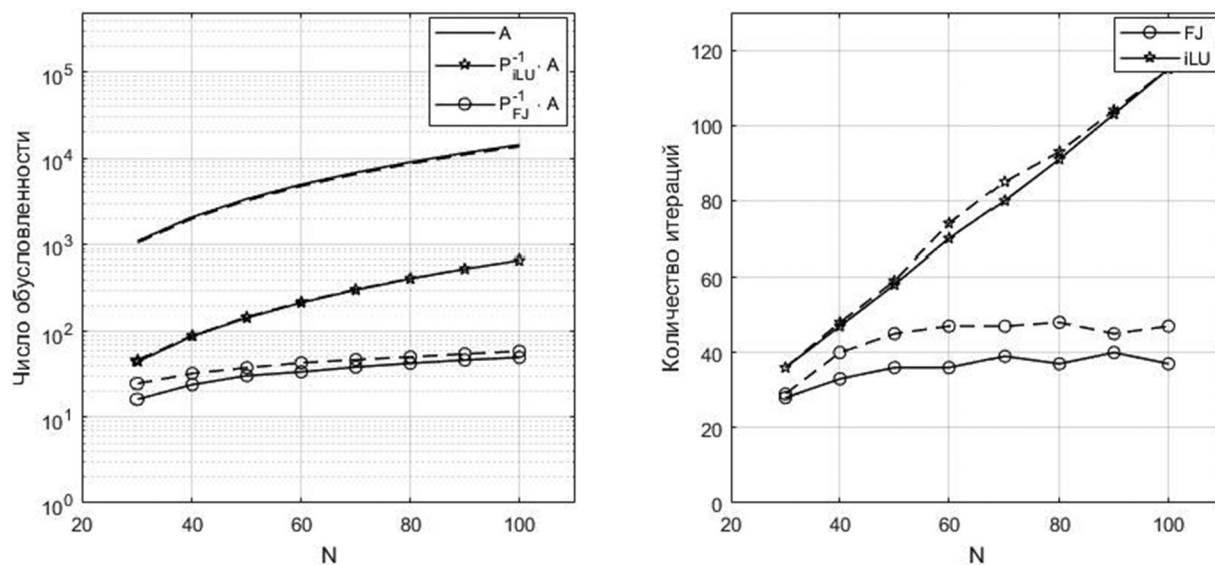


Рис. 1. Зависимости числа обусловленности исходных и переобусловленных матриц дискретной задачи (слева), а также количества итераций (справа) от числа узлов сетки  $N \times N$  для разностных схем (3), (5) – пунктирные линии и (3), (4) – сплошные линии,  $\lambda = 20$

Fig. 1. The dependences of the condition number of the original and preconditioned matrices of the discrete problem (left) and the iterations number (right) on the grid resolution  $N \times N$  for finite difference schemes (3), (5) – dashed lines and (3), (4) – solid lines,  $\lambda = 20$

**Закключение.** Представленные выше результаты показывают, что при решении краевых задач для эллиптических уравнений со смешанными производными вопросы построения и реализации разностных методов уместно рассматривать как единую проблему, поскольку выбор способа аппроксимации смешанных производных во многом определяет эффективность последующей итерационной реализации дискретной задачи. Среди известных переобусловливателей для данного класса задач лучшие результаты демонстрирует метод Фурье – Якоби, для которого при умеренной анизотропии практически устраняется зависимость числа итераций для достижения

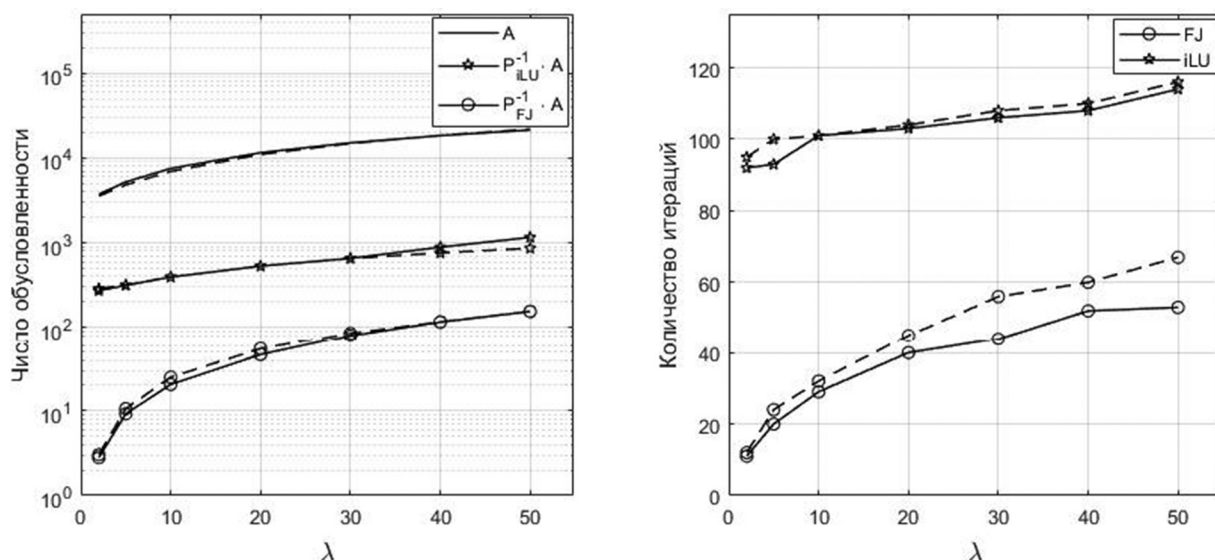


Рис. 2. Зависимости числа обусловленности исходных и переобусловленных матриц дискретной задачи (слева), а также количества итераций (справа) от коэффициента анизотропии  $\lambda$  для разностных схем (3), (5) – пунктирные линии и (3), (4) – сплошные линии,  $N = 90$

Fig. 2. The dependence of the condition number of the original and preconditioned matrices of the discrete problem (left) and the iterations number (right) on the anisotropy coefficient  $\lambda$  for finite difference schemes (3), (5) – dashed lines and (3), (4) – solid lines,  $N = 90$

заданной точности от шага сетки. В случае использования неполной LU-факторизации количество итераций для достижения заданной точности растёт обратно пропорционально шагу сетки, в силу чего данный тип переобусловливания может быть конкурентоспособен лишь при относительно крупных шагах сетки. Среди преимуществ переобусловливателя на основе неполного LU-разложения можно отметить, что он показал себя практически одинаково эффективным для рассмотренных разностных схем. Кроме того, использование данного переобусловливателя позволяет устранить существенный рост числа итераций при увеличении параметра анизотропии.

### Список использованных источников

1. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – 735 с.
2. Самарский, А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М.: Наука, 1989. – 432 с.
3. Ciarlet, P. G. The Finite Element Method for Elliptic Problems / P. G. Ciarlet. – SIAM, 2002. – 530 p. <https://doi.org/10.1137/1.9780898719208>
4. Шишкин, Г. И. Аппроксимация решений сингулярно возмущённых краевых задач с параболическим пограничным слоем // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1989. – Т. 29, № 7. – С. 963–977.
5. Монотонные разностные схемы для уравнений со смешанными производными / А. А. Самарский [и др.]. // Мат. моделирование. – 2001. – Т. 13, № 2. – С. 17–26.
6. Rybak, I. V. Monotone and conservative difference schemes for elliptic equations with mixed derivatives // I. V. Rybak // Mathematical Modelling and Analysis. – 2004. – Vol. 9, № 2. – P. 169–178.
7. 3D Finite-Difference BiCG Iterative Solver with the Fourier-Jacobi Preconditioner for the Anisotropic EIT/EEG Forward Problem / S. Turovets [et al.] // Comput. Math. Methods in Medicine. – 2014. – Vol. 2014. – P. 1–12. <https://doi.org/10.1155/2014/426902>
8. Templates for the solution of linear systems: building blocks for iterative methods / R. Barrett [et al.]. – SIAM, 1994. <https://doi.org/10.1137/1.9781611971538.ch2>
9. Мартыненко, С. И. Универсальная многосеточная технология для численного решения дифференциальных уравнений в частных производных на структурированных сетках / С. И. Мартыненко // Вычисл. методы и программирование. – 2000. – Т. 1, № 1. – С. 83–102.

### References

1. Tikhonov A. N., Samarskii A. A. *Equations of Mathematical Physics*. Moscow, Nauka Publ., 1977. 735 p. (in Russian).
2. Samarskii A. A. *The Theory of Finite Difference Schemes*. Moscow, Nauka Publ., 1989. 432 p. (in Russian).
3. Ciarlet P. G. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. SIAM, 2002. 530 p. <https://doi.org/10.1137/1.9780898719208>
4. Shishkin G. I. Approximation of the solutions of singularly perturbed boundary-value problems with a parabolic boundary layer. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1989, vol. 29, no. 4, pp. 1–10. [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(89\)90109-2](https://doi.org/10.1016/0041-5553(89)90109-2)
5. Samarskii A. A., Mazhukin V. I., Matus P. P., Shishkin G. I. Monotone difference schemes for equations with mixed derivative. *Computers and Mathematics with Applications*, vol. 44, no. 3–4, pp. 501–510. [https://doi.org/10.1016/s0898-1221\(02\)00164-5](https://doi.org/10.1016/s0898-1221(02)00164-5)
6. Rybak I. V. Monotone and conservative difference schemes for elliptic equations with mixed derivatives. *Mathematical Modelling and Analysis*, 2004, vol. 9, no. 2, pp. 169–178.
7. Turovets S., Volkov V., Zherdetsky A., Prakonina A., Malony A. D. 3D Finite-Difference BiCG Iterative Solver with the Fourier-Jacobi Preconditioner for the Anisotropic EIT/EEG Forward Problem. *Computational and Mathematical Methods in Medicine*, 2014, vol. 2014, pp. 1–12. <https://doi.org/10.1155/2014/426902>
8. *Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods*. SIAM, 1994. <https://doi.org/10.1137/1.9781611971538.ch2>
9. Martynenko S. I. Robust multigrid technique for solving partial differential equations on structured grids. *Vychislitel'nye metody i programmirovaniye = Numerical Methods and Programming*, 2000, vol. 1, no. 1, pp. 83–100. (in Russian).

### Информация об авторах

**Волков Василий Михайлович** – доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: v.volkov@tut.by

**Проконина Елена Владимировна** – старший преподаватель, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: helen.prokonina@mail.ru

### Information about the authors

**Vasily M. Volkov** – D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: v.volkov@tut.by

**Alena U. Prakonina** – Senior Lecturer, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: helen.prokonina@mail.ru

ISSN 1561-2430 (Print)

ISSN 2524-2415 (Online)

УДК 512.542

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-460-467>

Поступила в редакцию 22.10.2018

Received 22.10.2018

С. Ю. Башун

*Полоцкий государственный университет, Новополоцк, Беларусь***О ПЕРЕСТАНОВОЧНОСТИ СИЛОВСКОЙ 2-ПОДГРУППЫ  
С НЕКОТОРЫМИ БИПРИМАРНЫМИ ПОДГРУППАМИ**

**Аннотация.** Исследуется композиционное строение конечной группы  $G$ , у которой силовская 2-подгруппа перестановочна с некоторыми не  $p$ -нильпотентными бипримарными подгруппами, содержащими силовскую  $p$ -подгруппу из  $G$  для всех нечетных простых делителей  $p$  порядка группы  $G$ , и такие бипримарные подгруппы взяты по одной для каждого нечетного  $p$ , которые образуют множество  $SB(G)$ . Доказано существование подмножества  $SB(G)^*$  в  $SB(G)$ , состоящее из  $p$ -замкнутых подгрупп. Главный результат работы следующий: если силовская 2-подгруппа группы  $G$  перестановочна со всеми подгруппами  $SB(G)^*$ , то  $G$  может иметь простые неабелевы композиционные факторы только типа  $L_2(7)$ , если  $p > 3$ , и дополнительно типа  $L_2(3')$ ,  $f = 3^a$ ,  $a \geq 1$ , если  $p = 3$ .

**Ключевые слова:** конечная группа, бипримарная группа, перестановочные подгруппы

**Для цитирования.** Башун, С. Ю. О перестановочности силовской 2-подгруппы с некоторыми бипримарными подгруппами / С. Ю. Башун // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2018. – Т. 54, № 4. – С. 460–467. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-460-467>

S. Yu. Bashun

*Polotsk State University, Novopolotsk, Belarus***PERMUTABILITY OF THE SYLOW 2-SUBGROUP WITH SOME BIPRIMARY SUBGROUPS**

**Abstract.** In this paper, the compositional structure of a finite group  $G$  is investigated, which has the Sylow 2-subgroup that is permutable with some non  $p$ -nilpotent biprimary subgroups, which contain the Sylow  $p$ -subgroup of  $G$  for all odd simple divisors of the  $p$  order of the group  $G$ , and such biprimary subgroups are taken one by one for each odd  $p$ , and mark the set  $SB(G)$ . In this work, the existence of the subset  $SB(G)^*$  in  $SB(G)$  is proved, which consists of  $p$ -closed subgroups. The main result of this paper is as follows: if the Sylow 2-subgroup of the group  $G$  is permutable with all subgroups  $SB(G)^*$ , then  $G$  may have simple non-abelian compositional factors only of  $L_2(7)$  type, if  $p > 3$ , and additionally of  $L_2(3')$  type,  $f = 3^a$ ,  $a \geq 1$ , if  $p = 3$ .

**Keywords:** finite group, biprimary group, permutable subgroups

**For citation.** Bashun S. Yu. Permutability of the Sylow 2-subgroup with some biprimary subgroups. *Vestsi Natsyional'nei akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, vol. 54, no. 4, pp. 460–467 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-460-467>

В работе [1] доказан следующий интересный результат.

**Теорема 1 [1].** Пусть  $G$  – конечная  $K$ -группа,  $T$  – ее силовская 2-подгруппа. Если  $T$  перестановочна с силовскими  $p$ -подгруппами, взятыми по одной для каждого  $p \in \pi(G)$ , то  $G$  – разрешимая группа.

Целью настоящей работы является выяснение нормального и подгруппового строения конечной группы  $G$ , у которой силовская 2-подгруппа перестановочна с некоторыми силовскими и некоторыми не  $p$ -нильпотентными бипримарными подгруппами из  $G$ , содержащими  $S_p$ -подгруппу  $P$ , для всех  $2 < p \in \sigma \subset \pi(G)$  (см. ниже определение 1) (существование таких подгрупп доказано для не  $p$ -разрешимых групп в [2, следствие, с. 207]).

В работе используются стандартные обозначения и терминология современной теории конечных групп.

Приведем для удобства чтения некоторые обозначения:

$|X|$  – число различных элементов конечного множества  $X$  (порядок множества  $X$ );

$\pi$  – множество некоторых простых чисел;  
 $\pi'$  – множество всех простых чисел, не принадлежащих  $\pi$ ;  
 $\pi(n)$  – число различных простых делителей натурального числа  $n$ ;  
 $\pi(X) = \pi(|X|)$  для конечной группы  $X$ ;  
 $\pi$ -группа – группа  $X$  с  $\pi(X) \subseteq \pi$ ;  
 $(m, n)$  – наибольший общий делитель чисел  $m$  и  $n$ ;  
 холлова  $\pi$ -подгруппа ( $S_\pi$ -подгруппа) – подгруппа  $H$  конечной группы  $X$  такая, что  $\pi(H) \in \pi$  и  $\pi(X:H) \in \pi'$ ;  
 $E_\pi$ -свойство группы  $X$  – существование в  $X$  холловой  $\pi$ -подгруппы (кратко:  $X \in E_\pi$ );  
 бипримарная (примарная) группа – группа  $X$ , у которой  $|\pi(X)| = 2$  ( $|\pi(X)| = 1$ );  
 $cf(A)$ -свободная ( $A$ -свободная) группа – группа, у которой нет композиционных факторов (секций), изоморфных группе  $A$ ;  
 $E_{p^m}$  – элементарная абелева подгруппа порядка  $p^m$ ;  
 $A \triangleleft G$  ( $A \triangleleft\triangleleft G$ ) – подгруппа  $A$  нормальна (субнормальна) в группе  $G$ ;  
 $D_m$  – диэдральная группа порядка  $m$ ;  
 $Z_m$  – циклическая группа порядка  $m$ ;  
 $K$ -группа – конечная группа, у которой все простые неабелевы композиционные факторы исчерпываются известными простыми группами из множества  $\text{Chev} \cup \{A_n / n \geq 5\} \cup \text{Spor}$ ;  
 $p$ -нильпотентная группа – группа с нормальным  $p$ -дополнением;  
 $pd$ -группа – группа, порядок которой делится на простое число  $p$ ;  
 $G_p$  – силовская  $p$ -подгруппа группы  $G$  или  $S_p$ -подгруппа группы  $G$ ;  
 $A \lambda B$  – полупрямое произведение групп  $A$  и  $B$  с  $A \triangleleft A \lambda B$ ;  
 $A.B = G$  означает, что  $A \triangleleft G$ ,  $G/A \cong B$ ;  
 пусть  $q = p^f$ ,  $p > 2$ ,  $\varepsilon(q) \in \{+1, -1\}$ , т. е.  $\varepsilon(q) = (-1)^{(q-1)/2}$ ;  
 $p_+^{1+2n}$  – экстраспециальная группа экспоненты  $p$  порядка  $p^{1+2n}$ ;  
 $\text{Chev}(q)$ ,  $\text{Chev}^a(q)$  – группы лиевского типа характеристики  $p$  с полем определения  $GF(q)$ ,  
 $q = p^f$  ( $\text{Chev}^a(q)$  – группа  $\text{Chev}(q)$  с единичным центром);  
 $A \circ B$  – центральное произведение групп  $A$  и  $B$ ;  
 $n$ -примарное число  $m$  – это число с  $|\pi(m)| = n$ ;  
 $K < \cdot G - K$  есть максимальная подгруппа группы  $G$ .

Определение 1. Пусть  $\sigma$  – множество всех тех нечетных простых делителей  $p$  порядка конечной группы  $G$ , для которых  $G_2$  не перестановочна ни с одной силовской  $p$ -подгруппой из  $G$ , а  $\tau = \pi(G) \setminus \sigma$  и для  $2 < s \in \tau$  имеем  $G \in E_{\{2,s\}}$ . Если для каждого  $s \in \tau$  взять по одной силовской  $s$ -подгруппе, то это множество обозначим  $S_\tau(G)$ , а если для каждого  $p \in \sigma$  рассмотрим систему  $S_\sigma(G)$  бипримарных не  $p$ -нильпотентных подгрупп, содержащих  $S_p$ -подгруппы из  $G$ , также взятых по одной для каждого  $p \in \sigma$ , то обозначим  $S_\sigma(G) \cup S_\tau(G)$  через  $SB(G)$ .

Определение 2.  $sb\sigma$ -Системой  $SB(G)$  группы  $G$  назовем указанное в определении 1 множество  $SB(G)$ . Если  $B \in S_\sigma(G)$ , то  $|B| = |G_p| \cdot s^n$ , где  $s \in \pi(G)$  и простое число  $s \neq p$ . (Если в группе  $G$  имеется несколько не  $p$ -нильпотентных подгрупп, содержащих  $G_p$ , то для определенности в  $sb\sigma$ -систему  $SB(G)$  включаем подгруппу наибольшего порядка с наименьшим возможным  $s$ , так что  $|\sigma| = |S_\sigma(G)|$ .)

Определение 3. Если в определении 2  $S_\sigma(G)$  состоит из  $p$ -замкнутых групп, а при  $p = 3$  группа  $G$   $cf(X^*)$ -свободна с  $X^* \cong L_2(3^f)$ ,  $f = 3^a$ ,  $a \geq 1$ , то  $sb\sigma$ -систему  $SB(G)$  будем обозначать как  $SB(G)^*$ , а множество  $S_\sigma(G)$  – как  $S_\sigma(G)^*$ .

Теорема 2 [3, теорема 3.1]. Пусть  $X$  – конечная группа с  $S_2$ -подгруппой  $T$  и  $sb\sigma$ -системой  $SB(X)$ . Предположим, что  $T$  перестановочна с каждой подгруппой из множества  $SB(X)$ . Тогда имеют место следующие утверждения:

(1)  $X$  обладает свойством  $E_{\{2,p\}}$  для каждого  $p = 5$  и  $p > 7$ ; если  $\{3, 7\} \not\subseteq \sigma$ , то  $X$  – разрешимая группа и  $\sigma = \emptyset$ ;

(2)  $X$  либо обладает свойством  $E_{\{2,7\}}$ , либо  $X$  не  $L_2(7)$ -свободна и любая  $7d$ -подгруппа из  $SB(X)$  есть  $\{3, 7\}$ -группа, где  $\{3, 7\} \subseteq \sigma$ ;

(3)  $X$  либо обладает свойством  $E_{\{2,3\}}$ , либо не  $L_2(7)$ -свободна,  $3^6$  делит  $|X|$ ,  $X$  не  $E_{3^6}$ -свободна и любая  $3d$ -подгруппа из  $SB(X)$  есть  $\{3, 7\}$ -группа,  $\{3, 7\} \subseteq \sigma$ .

С л е д с т в и е [3, следствие 3.2]. Если конечная  $K$ -группа  $X$  удовлетворяет условию теоремы 2 и  $L_2(7)$ -свободна, то  $X$  – разрешимая группа и  $\sigma = \emptyset$ .

Л е м м а 1 [3, теорема 3.3.]. Пусть  $X$  – простая неабелева конечная группа с  $S_2$ -подгруппой  $T$ ,  $SB(X)$  – ее  $sb\sigma$ -система. Если  $T$  перестановочна со всеми подгруппами из  $SB(X)$  и  $|\pi(X)| = 3$ , то  $X \cong L_2(7)$ .

Л е м м а 2. Пусть  $G$  – конечная группа,  $|\pi(G)| = 3$  и  $G$  имеет холлову  $2'$ -подгруппу. Тогда либо  $G$  – разрешимая группа, либо не  $sf(L_2(7))$ -свободна.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть  $M \triangleleft N \triangleleft G$  – подгруппы из композиционного ряда группы  $G$  и  $N/M$  – простая неабелева группа.  $N$  и  $M$  пересекаются с холловой  $2'$ -подгруппой группы  $G$  по своим холловым подгруппам. Поэтому  $N/M$  имеет холлову  $2'$ -подгруппу. Согласно [4, следствие 5.6 (1)] и [5, с. 20],  $N/M \cong L_2(7)$ . Если же все композиционные факторы группы  $G$  простые абелевы группы, то  $G$  – разрешимая группа. Лемма доказана.

Л е м м а 3 [6, лемма 1.2]. Пусть  $p$  и  $s$  – различные простые числа,  $m$  и  $n$  – натуральные числа и  $p^m = s^n + 1$ . Тогда имеет место одно из следующих утверждений:

(1)  $s = 2, p = 3, n = 3, m = 2$ ;

(2)  $s = 2, m = 1, n$  – степень числа 2,  $p = s^n + 1$  – простое число Ферма;

(3)  $p = 2, n = 1, s = 2^m - 1$  – простое число Мерсенна, в частности,  $m$  – простое число.

В [7] доказана

Л е м м а 4 [7, лемма 1]. Если группа  $G = {}^2B_2(q)$  имеет подгруппу  $X$  бипримарного индекса, то  $q = 8$  или  $32$ ,  $X \cong G_2 \wr Z_{q-1}$ ,  $|G : X| = 5 \cdot 13$  или  $5^2 \cdot 41$  соответственно.

Л е м м а 5 [8]. Пусть  $G$  – простая неабелева группа,  $X$  и  $Y$  –  $t$ -разрешимые  $td$ -подгруппы бипримарного индекса  $i = r^a s^b$ . Тогда  $X$  и  $Y$  являются разрешимыми подгруппами и имеют место только следующие возможности, указанные в таблице.

Таблицу мы предваряем пояснениями. В столбце 1 указывается тип простой неабелевой группы  $G$ . В столбце 2 приводятся  $t$ -разрешимые подгруппы  $X$  для некоторого  $t \in \pi(X)$  (которые на самом деле оказываются разрешимыми), являющиеся максимальными подгруппами в  $G$ . В столбце 3 даются другие (не максимальные)  $t$ -разрешимые подгруппы  $Y$  в  $G$ . В столбце 4 указываются индексы  $i = r^a s^b$  этих подгрупп в  $G$  ( $\{r, s\} \subseteq \pi(G)$ ,  $r \neq s$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$  – натуральные числа). Для групп лиева типа с полем определения характеристики  $p$  подгруппа  $P = G_p$ ,  $PK$  – подгруппа Бореля,  $K$  – подгруппа Картана,  $R$  – подгруппа группы  $K$ . Подчеркнуты индексы холловых подгрупп группы  $G$ .

Таблица  
Table

| $G$   | $X < G$  | $Y \subset G$    | $i = r^a s^b$                                                                                |
|-------|----------|------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1     | 2        | 3                | 4                                                                                            |
| $A_5$ | $D_{10}$ | $Z_3$            | $2 \cdot 3, \underline{2^2 \cdot 5}$                                                         |
|       |          | $Z_5$            | $\underline{2^2 \cdot 3}$                                                                    |
|       |          | $Z_2 \times Z_2$ | $\underline{3 \cdot 5}$                                                                      |
| $A_6$ | $D_{10}$ | $Z_3, D_8, E_9$  | $2^2 \cdot 3^2, \underline{2^3 \cdot 3^2}, \underline{3^2 \cdot 5}, \underline{2^3 \cdot 5}$ |
|       |          | $E_9 \wr Z_2$    | $2^2 \cdot 5$                                                                                |
|       |          | $E_9 \wr Z_4$    | $2 \cdot 5$                                                                                  |

Продолжение таблицы

| $G$                   | $X < \cdot G$                                       | $Y \subset G$                                            | $i = r^a s^b$                                                                                          |
|-----------------------|-----------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1                     | 2                                                   | 3                                                        | 4                                                                                                      |
| $A_7$                 | $(A_4 \times Z_3) \lambda Z_2$                      |                                                          | $5 \cdot 7$                                                                                            |
| $A_8$                 | $E_{16} \lambda (S_3 \times S_3)$                   |                                                          | $5 \cdot 7$                                                                                            |
| $M_{11}$              |                                                     | $Z_{11} \lambda Z_5$                                     | $2^4 \cdot 3^2$                                                                                        |
|                       | $M_9 \lambda Z_2 \cong (E_9 \lambda Q_8) \cdot Z_2$ |                                                          | $5 \cdot 11$                                                                                           |
| $M_{12}$              |                                                     | $Z_{11} \lambda Z_5$                                     | $2^6 \cdot 3^3$                                                                                        |
| $L_2(11)$             | $A_4$                                               |                                                          | $11 \cdot 5$                                                                                           |
| $L_2(13)$             | $A_4$                                               |                                                          | $7 \cdot 13$                                                                                           |
| $L_2(23)$             | $S_4$                                               |                                                          | $11 \cdot 23$                                                                                          |
| $L_2(25)$             |                                                     | $S_4$                                                    | $5^2 \cdot 13$                                                                                         |
| $L_2(2^{2^i})$        | $D_{2(2^{2^i}-1)}$                                  | $Z_{2^{2^i}-1}$                                          | $2^{2^i-1} \cdot (2^{2^i} + 1)$ , $2^{2^i} + 1$ – простое число Ферма<br>$2^{2^i} \cdot (2^{2^i} + 1)$ |
| $L_2(2^f)$            | $D_{2(2^f+1)}$                                      | $Z_{2^f+1}$                                              | $2^{f-1} \cdot (2^f - 1)$ , $2^f - 1$ – простое число Мерсенна<br>$2^f \cdot (2^f - 1)$                |
| $L_2(8)$              |                                                     | $E_8, Z_7, G_3$                                          | $7 \cdot 3^2$ , $8 \cdot 3^2$ , $8 \cdot 7$                                                            |
| $L_2(p^{2^i})$        | $D_{p^{2^i}-1}$                                     |                                                          | $p^{2^i} (p^{2^i} + 1) / 2$ , $(p^{2^i} + 1) / 2$ – степень простого числа                             |
| $L_2(p)$              | $D_{p+1}$                                           |                                                          | $p(p-1) / 2$ , $(p-1) / 2$ – степень простого числа                                                    |
| $L_2(7)$              |                                                     | $Z_3, Z_7, D_8$                                          | $8 \cdot 7$ , $8 \cdot 3$ , $7 \cdot 3$                                                                |
|                       |                                                     | $A_4, Z_3 \lambda Z_2$                                   | $2 \cdot 7$ , $2^2 \cdot 7$                                                                            |
| $L_2(17)$             |                                                     | $D_{16}, Z_9, Z_{17}$                                    | $17 \cdot 3^2$ , $17 \cdot 2^4$ , $3^2 \cdot 2^4$                                                      |
| $L_2(p^f)$            | $N(G_p)$                                            |                                                          | $p^f + 1 = r^a s^b$                                                                                    |
| $L_3(3)$              | $Z_{13} \lambda Z_3$                                |                                                          | $2^4 \cdot 3^2$                                                                                        |
|                       |                                                     | $G_2, G_3, G_{13}$                                       | $3^3 \cdot 13$ , $2^4 \cdot 13$ , $2^4 \cdot 3^3$                                                      |
| $L_3(5)$              | $(Z_4 \times Z_4) \lambda S_3$                      |                                                          | $5^3 \cdot 31$                                                                                         |
|                       | $Z_{31} \lambda Z_3$                                |                                                          | $2^5 \cdot 5^3$                                                                                        |
| $L_3(q)$<br>$q = p^f$ |                                                     | $N(G_p)$                                                 | $(q^2 + q + 1)(q + 1) = r^a s^b$                                                                       |
| $PSp_4(3)$            |                                                     | $G_3, G_5, G_2$                                          | $2^6 \cdot 5$ , $2^6 \cdot 3^4$ , $3^4 \cdot 5$                                                        |
|                       |                                                     | $E_{16} \lambda A_4$                                     | $3^3 \cdot 5$                                                                                          |
|                       |                                                     | $E_{16} \lambda E_4$                                     | $3^4 \cdot 5$                                                                                          |
|                       |                                                     | $E_{16} \lambda D_{10}$                                  | $2 \cdot 3^4$                                                                                          |
|                       |                                                     | $E_{16} \lambda Z_5$                                     | $2^2 \cdot 3^4$                                                                                        |
|                       |                                                     | $Z_5 \lambda Z_4$                                        | $2^4 \cdot 3^4$                                                                                        |
|                       |                                                     | $3_+^{1+2} \lambda Z_2 \cdot A_4$ ; $E_{27} \lambda S_4$ | $2^3 \cdot 5$                                                                                          |
|                       |                                                     | $N(G_3)$                                                 | $2^5 \cdot 5$                                                                                          |

Окончание таблицы

| $G$               | $X < \cdot G$                  | $Y \subset G$                                            | $i = r^a s^b$                                  |
|-------------------|--------------------------------|----------------------------------------------------------|------------------------------------------------|
| 1                 | 2                              | 3                                                        | 4                                              |
| $PSp_4(q)$        |                                |                                                          |                                                |
| $q = 2^{2^i}$     |                                | $ P_1  = q^4(q-1)^2$                                     | $(q+1)^2(q^2+1)$                               |
| $q = p = 2^r - 1$ |                                | $ P_1  = p^4(p-1)^2$                                     | $(p+1)^2(p^2+1)$                               |
| $q = 2^{2^i}$     |                                | $ Y_1  = q^4(q-1)^2 / 2$                                 | $(q+1)^2(q^2+1) \cdot 2$                       |
| $q = p = 2^r - 1$ |                                | $Y_1 \cong G_p \lambda (Z_{(p-1)/2} \times Z_{(p-1)/a})$ | $(p+1)^2(p^2+1) \cdot 2a,$<br>$a \in \{1, 2\}$ |
| $U_3(3)$          | $(Z_4 \times Z_4) \cdot S_3$   |                                                          | $3^2 \cdot 7$                                  |
|                   |                                | $(Z_4 \times Z_4) \cdot Z_2$                             | $3^3 \cdot 7$                                  |
|                   |                                | $Z_7 \lambda Z_3$                                        | $2^5 \cdot 3^2$                                |
|                   |                                | $G_3, G_7$                                               | $2^5 \cdot 7, 2^5 \cdot 3^3$                   |
|                   | $N(G_3)$                       |                                                          | $2^2 \cdot 7$                                  |
| $U_3(4)$          | $E_{25} \lambda S_3$           |                                                          | $2^5 \cdot 13$                                 |
|                   | $Z_{13} \lambda Z_3$           |                                                          | $2^6 \cdot 5^2$                                |
|                   |                                | $E_{25} \lambda Z_3$                                     | $2^6 \cdot 13$                                 |
| $U_3(7)$          | $(Z_8 \times Z_8) \lambda S_3$ |                                                          | $7^3 \cdot 43$                                 |
|                   | $Z_{43} \lambda Z_3$           |                                                          | $2^7 \cdot 7^3$                                |
| $U_5(2)$          |                                | $Z_{11} \lambda Z_5$                                     | $2^{10} \cdot 3^5$                             |
| $U_3(q)$          |                                |                                                          |                                                |
| $q = 2^{2^i}$     |                                | $ P  = q^3(q^2-1)$                                       | $(q+1)(q^2-q+1)$                               |
| $q = p = 2^r - 1$ |                                | $P_1 \cong G_p \lambda (Z_{p-1} \times Z_{p+1})$         | $(p+1)(p^2-p+1)$                               |
| $q = p = 2^r - 1$ |                                | $ Y_1  =  G_p \cdot R_1  = p^3(p^2-1)/a$                 | $a(p+1)(p^2-p+1),$<br>$a   2^r,  K : R_1  = a$ |
| $q = 2^{2^i}$     |                                | $ Y_2  =  G_2 \cdot R_2  = q^3(q-1)$                     | $(q+1)^2(q^2-q+1),$<br>$ K : R_2  = q+1$       |
| ${}^2B_2(8)$      | $G_2 \lambda Z_{q-1}$          |                                                          | $5 \cdot 13$                                   |
| ${}^2B_2(32)$     | $G_2 \lambda Z_{q-1}$          |                                                          | $5^2 \cdot 41$                                 |

З а м е ч а н и е к лемме 5. В леммах 3.1, 3.2, 4.1, 4.2, 4.5, 5.1 работы [8] приведены подгруппы бипримарного индекса  $i = p^a r^b$ , где  $p$  и  $r$  – различные простые числа,  $a > 0$ ,  $b > 0$  – целые числа для всех конечных простых групп.

Укажем случаи, когда подгруппы  $X$  или  $Y$  являются не  $t$ -разрешимыми, и это не сразу очевидно в таблице.

(1) [8, табл. 4.2].

В группе  $PSp_4(q)$ ,  $q = p^f$ , подгруппа  $(Sp_2(q) \circ Sp_2(q)) \cdot Z_2$  является не  $t$ -разрешимой для  $q \neq 2, 3$ , так как  $Sp_2(q) \cong SL_2(q)$ . Случаи  $A_6 \cong PSp_4(2)'$  и  $PSp_4(3)$  рассмотрены выше в таблице.

В группе  $Sp_{2m}(2^f)$  подгруппа  $O_{2m}^+(2^f)$   $t$ -разрешима только в случае  $fm = 2$ . Но группа  $Sp_4(2)$  не простая [5, теорема 2.13]. Подгруппа  $O_4^-(2) \cong L_2(4)$  неразрешима.

(2) [8, табл. 4.3].

В группе  $G = U_3(q)$  параболическая подгруппа  $P_1$   $t$ -разрешима. Группы  $PR$ , где  $P$  – силовская  $p$ -подгруппа в  $G$ ,  $R$  – подгруппа группы Картана в  $G$ , разрешимы. Холловой является подгруппа

$PR$  индекса  $(q+1)^2(q^2-q+1)$  при  $q=2^{2^i}$ . При  $p=2^r-1$  порядок группы  $|PR|=p^3(p^2-1)$  не взаимно прост с индексом группы  $(p+1)(p^2-p+1)$ .

У групп  $U_4(p)$  нет  $t$ -разрешимых подгрупп бипримарного индекса [5, с. 76].

У группы  $U_n(q)$  подгруппа  $GU_{n-1}(q)$  имеет бипримарный индекс и является разрешимой только при  $n=3$ ,  $q \in \{2,3\}$ . Группа  $U_3(2)$  – не простая порядка  $3^2 \cdot 2^3$ . Случай группы  $U_3(3)$  рассмотрен выше в таблице. Кроме того, у группы  $U_3(3)$  исправлены опечатки в индексах.

(3) [8, таблицы 4.4, 4.5].

У групп  $P\Omega_{2m}^{\pm}(q)$ ,  $m \geq 4$ , нет  $t$ -разрешимых подгрупп бипримарного индекса.

(4) [8, табл. 5.1].

Из таблицы 5.1 и леммы 4 следует выполнение утверждения для групп  ${}^2B_2(q)$ .

**Т е о р е м а 3.** Пусть  $G$  – конечная простая группа и ее силовская 2-подгруппа  $S = G_2$  перестановочна со всеми подгруппами множества  $SB(G)$ , тогда  $G$  изоморфна только группе  $L_2(7)$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Рассмотрим отдельно случаи (1)  $G \in \text{Chev}^a(q)$ ,  $q=p^f$ ; (2)  $G \in \{A_n / n \geq 5\}$ ; (3)  $G \in \text{Spor}$ .

(1).  $G \in \text{Chev}^a(q)$ ,  $q=p^f$ . Согласно теореме 2(1), если  $p=2$ , то  $G$  обладает холловыми  $\{2,r\}$ -подгруппами для всех  $r \notin \{3,7\}$ . Так как  $\{2,r\}$ -подгруппы разрешимы, то по [9, теорема 8.3] все эти подгруппы лежат в подгруппе Бореля  $B = G_p \lambda H$ , где  $H$  – подгруппа Картана группы  $G$  (ввиду того, что все подгруппы Бореля сопряжены в  $G$ ). Тогда  $|G:B_0|=3^a \cdot 7^b$ ,  $B_0$  – холлова  $\{3,7\}'$ -подгруппа в  $B$  и  $G$ . Разрешимые подгруппы бипримарного индекса в группах лиева типа известны (см. лемму 5). Ни одна из них не имеет  $\{3,7\}$ -индекса, кроме  $L_2(8)$ . Но группа  $L_2(8)$  не удовлетворяет условию.

Пусть  $p > 2$ ,  $p \in \sigma$ .

По условию  $G_2$  перестановочна с подгруппой  $G_p T_s = T \in SB(G)$ .

Если для всех подгрупп  $T$  из  $SB(G)$  подгруппы  $X = G_2 T$  разрешимы, то утверждение следует из [10, теорема 1.15.1] и теоремы 1. Группа  $X = G_2 G_p T_s$  неразрешима, если имеет композиционный фактор  $\bar{L} \cong L_2(7)$  по лемме 2. Тогда  $p=7$ ,  $s=3$  или  $p=3$ ,  $s=7$ .

Согласно теореме 2,  $G$  имеет холловы  $\{2,s\}$ -подгруппы для всех  $s > 7$  и  $s=5$ . Пусть  $q=3^f$  или  $7^f$ . Пусть  $G \notin \{{}^2G_2(3^{2m+1})^a, {}^2B_2(2^{2m+1})^a, A_1(q)^a\}$ . По [9, теорема 8.9] все  $s \in \pi(q-1)$ , если  $\varepsilon(q)=1$ , и все  $s \in \pi(q+1)$ , если  $\varepsilon(q)=-1$ . Кроме того,  $2 \in \pi(q \pm 1)$ . Так как  $q(q^2-1)$  делит  $|G|$ , то получается, что либо  $q-1=3^x$ , либо  $q+1=3^y$  с  $q=7^f$ ; либо  $q-1=7^y$ , либо  $q+1=7^x$  с  $q=3^f$ . Согласно лемме 3, эти равенства невозможны.

Пусть теперь  $G = A_1(q)^a$ ,  $q \in \{3^f, 7^f\}$ . Так как подгруппа  $X$  предполагается неразрешимой, то по [12, теорема II.8.27]  $X \in \{L_2(5), L_2(p^m), m|f, PGL_2(p^m), 2m|f\}$ . Но  $X$  содержит  $G_p$ . Поэтому  $G \notin \{L_2(p^m), PGL_2(p^m)\}$ .

Предположим, что 5 делит  $|G|$ . По условию  $G_2$  перестановочна с подгруппой из  $SB(G)$  порядка  $|G_5| \cdot |R_h|$ , где  $R_h \triangleleft R = G_5 R_h$ ,  $h$  – простое число из  $\pi(G)$ . По [4, следствие 5.6 (1)] либо  $G_2(R)$  разрешимая группа, либо не  $cf(L_2(7))$ -свободна. Но тогда в группе  $G_2(R)$  нет секции, изоморфной  $L_2(5)$ . Поэтому все собственные подгруппы группы  $G$  разрешимы, т. е.  $X$  – не собственная подгруппа в  $G$ . Поэтому  $G = X$ , и по лемме 1  $G \cong L_2(7)$ .

Пусть теперь  $p \notin \sigma$  или  $G = {}^2G_2(3^{2m+1})$ . Если  $G = {}^2G_2(3^{2m+1})$  или  $p \notin \sigma$ , то  $G_2' = 1$  по [9, теорема 8.3] и  $G$  есть  $cf(L_2(7))$ -свободная группа. Согласно теореме 2 (3), группа  $G$  имеет холлову  $\{2,3\}$ -подгруппу. По теореме 2 (1) группа  $G$  разрешима. Противоречие. Если  $G = {}^2B_2(2^{2m+1})$ , то  $p=2$ , что исключено выше.

(2).  $G \in \{A_n / n \geq 5\}$ . Предположим, что  $G \cong A_n$ ,  $n \geq 5$ . Тогда по условию подгруппа  $X = G_2 T$ , где  $T \in SB(G)$  и  $G_5 = T_5$ , существует.  $X$  разрешима по лемме 2. По [9, табл. 2] в  $G$  холловых

$\{2,5\}$ -подгрупп нет, в то время как в разрешимой (по следствию) группе  $X$  холлова  $\{2,5\}$ -подгруппа существует. Противоречие.

(3).  $G \in \text{Spor}$ . Предположим, что 11 делит  $|G|$ . Согласно [12, 5.3],  $G \notin \{J_2, J_3, He, Ru, Th\}$ . По условию и [9, табл. 4]  $G_2T$  существует, где  $T \in SB(G)$  и  $T_{11} \cong G_{11}$ . Согласно лемме 2,  $G_2T$  – разрешимая группа. Тогда в этой группе есть холлова  $\{2,11\}$ -подгруппа  $G_2T_{11} \cong G_2G_{11}$ , что невозможно по [9, табл. 4]. Заменив в предыдущих рассуждениях 11 на 13, если  $G = Ru, Th$ , или 11 на 7, если  $G = J_2$ , 11 на 17, если  $G = J_3, He$  (см. [12, 5.3]), получим существование в этих группах холловых  $\{2,13\}$ -,  $\{2,7\}$ - или  $\{2,17\}$ -подгрупп. Но по [9, табл. 4] в этих группах таких холловых подгрупп нет. Противоречие. Теорема доказана.

Из леммы 5 и [5, теорема 1.42] легко вытекает следующая

**Теорема 4.** Пусть  $G$  – конечная простая группа,  $H$  – ее нильпотентная холлова подгруппа бипримарного индекса. Тогда имеет место только одна из следующих возможностей:

- (1)  $G \cong L_2(q)$ ,  $q = 2^{2^i}$ ,  $H \cong Z_{q-1}$ ,  $|G:H| = q(q+1)$ ,  $q+1$  – простое число Ферма;
- (2)  $G \cong L_2(q)$ ,  $q = 2^f$ ,  $H \cong Z_{q+1}$ ,  $|G:H| = q(q-1)$ ,  $q-1$  – простое число Мерсенна;
- (3)  $|\pi(G)| = 3$ .

Из множества не  $p$ -нильпотентных бипримарных подгрупп не  $p$ -разрешимой группы  $G$ ,  $p > 2$ , можно выделить более узкий класс таких подгрупп, которые являются  $p$ -замкнутыми для  $p > 3$  и для  $p = 3$  при условии, что  $G$  является  $cf(X^*)$ -свободной (см. определение 3).

Заметим также, что если группа  $p$ -разрешима, то  $G_p$  перестановочна с некоторыми силовскими  $p'$ -подгруппами  $G_s$  для всех  $s \in \pi(G)$  [10, теорема 4.3.1]. В частности,  $G_2G_p = G_pG_2$ .

**Теорема 5** [13]. Пусть  $p \neq 2$  – простое число. Если  $p = 3$ , то пусть группа  $G$   $cf(X^*)$ -свободна (см. определение 3). Пусть  $p \in \pi(G)$ ,  $P = G_p$ . Тогда

- (1) если  $N_G(P) = P$ , то  $G$  – разрешимая группа;
- (2) если  $N_G(P)$  есть  $p$ -нильпотентная группа, то группа  $G/O_{p'}(G)$  разрешима.

**Лемма 6.** Пусть  $p > 2$ ,  $G$  – не  $p$ -разрешимая группа и для  $p = 3$   $cf(X^*)$ -свободная группа (см. определение 3), тогда в  $G$  существует бипримарная  $p$ -замкнутая не  $p$ -нильпотентная подгруппа порядка  $|G_p| \cdot s^n$ ,  $p \neq s$ .

**Доказательство.** Пусть  $N = N_G(G_p)$ . Если  $s \in \pi(N)$  и  $N_s \ntriangleleft N$ , то  $N_pN_s$  – искомая подгруппа. Если же  $N_s \triangleleft N$  для всех  $s \in \pi(N)$ , то группа  $N$  имеет нормальное  $p$ -дополнение. Но тогда, согласно теореме 5,  $G$  есть  $p$ -разрешимая группа. Это противоречит условию. Лемма доказана.

**Теорема 6.** Пусть в конечной группе  $G$  силовская 2-подгруппа  $G_2$  перестановочна с подгруппами из множества  $SB(G)^*$  (определение 3, лемма 6) и если  $3 \in \sigma$ , то пусть группа  $G$  не имеет композиционных факторов типа  $L_2(3^f)$ ,  $f = 3^a$ ,  $a \geq 1$ . Тогда  $G$  может иметь простые неабелевы композиционные факторы, изоморфные только группе  $L_2(7)$ .

**Доказательство.** Если  $G$  – простая группа, то утверждение следует из теоремы 3, так как подгруппы из множества  $SB(G)^*$  не  $p$ -нильпотентны. Если  $S_\sigma(G)^* = \emptyset$ , то группа  $G$  разрешимая по определению 1 и теореме 1.

Пусть  $T \in S_\sigma(G)^*$ ,  $T = T_sT_r = G_sT_r$ ,  $Y = G_2T$ . Пусть  $1 \neq M \triangleleft G$ . Пусть  $M \cap Y = X = M_2M_sX_r$ . Если  $X_r = 1$ , то  $M \in E_{\{2,s\}}$ . Если  $X_r \neq 1$  и  $X_r \ntriangleleft M_sX_r$ , то  $X_rM_s \in S_\sigma(M)^*$ . Если  $X_r \triangleleft M_sX_r$ , то  $M_2(M_s \times X_r)$  – разрешимая группа как произведение нильпотентных групп. Тогда опять  $M \in E_{\{2,s\}}$  [10, теорема 4.3.1]. Таким образом, группа  $M$  удовлетворяет условию. Аналогично показывается, что в группе  $G/M = \bar{G}$  выполняются условия теоремы. Поэтому применение индукции к группам  $\bar{G}$  и  $M$  дает результат. Теорема доказана.

#### Список использованных источников

1. Тютянов, В. Н. О гипотезе Холла / В. Н. Тютянов // Укр. мат. журн. – 2002. – Т. 54, № 7. – С. 1181–1191.
2. Беркович, Я. Г. Существование нильпотентных разрешимых подгрупп у конечной неразрешимой группы / Я. Г. Беркович // Сиб. мат. журн. – 1966. – Т. 7, № 1. – С. 206–211.
3. Башун, С. Ю. О перестановочности подгрупп в конечных группах / С. Ю. Башун, А. В. Капусто, Э. М. Пальчик // Вестн. Полоц. гос. у-та. Сер. С, Фундам. науки. – 2006. – № 4. – С. 7–11.

4. Arad, Z. On finite factorizable groups / Z. Arad, E. Fisman // J. Algebra. – 1984. – Vol. 86, № 2. – P. 522–548. [https://doi.org/10.1016/0021-8693\(84\)90046-2](https://doi.org/10.1016/0021-8693(84)90046-2)
5. Горенштейн, Д. Конечные простые группы. Введение в их классификацию / Д. Горенштейн. – М.: Мир, 1985. – 352 с.
6. Huppert, B. Simple groups of order divisible by at most four primes / B. Huppert, W. Lempken // Изв. Гомел. гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2000. – № 3 (16). – С. 64–75.
7. Башун, С. Ю. Конечные простые группы, факторизуемые  $p$ -разрешимой и бипримарной подгруппами / С. Ю. Башун, Э. М. Пальчик // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения: XIII Междунар. конф., посвящ. 80-летию со дня рождения проф. С. С. Рышкова. – Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2015. – С. 57–59.
8. Li, C. H. On permutation groups of degree a product of two prime-powers / C. H. Li, X. Li // Commun. Algebra. – 2014. – Vol. 42, № 11. – P. 4722–4743. <https://doi.org/10.1080/00927872.2013.823500>
9. Вдовин, Е. П. Теоремы силовского типа / Е. П. Вдовин, Д. О. Ревин // Успехи мат. наук. – 2011. – Т. 66, вып. 5 (401). – С. 3–46. <https://doi.org/10.4213/rm9440>
10. Чунихин, С. А. Подгруппы конечных групп / С. А. Чунихин. – Минск: Наука и техника, 1964. – 154 с.
11. Huppert, B. Finite groups I / Huppert B. – Berlin: Springer, 1982. – 793 p.
12. Gorenstein, D. The Classification of the finite simple groups. Pt. I, Chapter A: Almost Simple K-Groups / D. Gorenstein, R. Lyons, R. Solomon. – American Mathematical Society, 1997. – 419 p.
13. Guralnik, R. Self-normalizing Sylow subgroups / R. Guralnik, G. Malle, G. Navarro // Proc. Am. Math. Soc. – 2004. – Vol. 132, № 4. – P. 973–979.

## References

1. Tyutyaynov V. N. About the Hall's hypothesis. *Ukrainskii matematicheskii zhurnal* = *Ukrainian Mathematical Journal*, 2002, vol. 54, no. 7, pp. 1181–1191 (in Russian).
2. Berkovich Ya. G. The existing of nonnilpotent solvable subgroups of a finite unsolvable group]. *Sibirskii matematicheskii zhurnal* = *Siberian Mathematical Journal*, 1966, vol. 7, no. 1, pp. 206–211 (in Russian).
3. Bashun S. Y., Kapusto A. V., Palchik E. M. About permutability subgroups in finite groups. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya S: Fundamental'nye nauki* = *Vestnik of Polotsk State University. Part C. Fundamental Sciences*, 2006, no. 4, pp. 7–11 (in Russian).
4. Arad Z., Fishman E. On finite factorizable groups. *Journal of Algebra*, 1984, vol. 86, no. 2, pp. 522–548. [https://doi.org/10.1016/0021-8693\(84\)90046-2](https://doi.org/10.1016/0021-8693(84)90046-2)
5. Gorenstein D. *Finite Simple Groups. An Introduction to Their Classification*. N. Y., Plenum Press, 1982. 333 p.
6. Huppert B., Lempken W. Simple groups of order divisible by at most four primes. *Izvestiya Gomeľ'skogo gosudarstvennogo universiteta imeni F. Skoriny* = *Proceedings of the Francisk Skorina Gomeľ State University*, 2000, no. 3 (16), pp. 64–75 (in Russian).
7. Bashun S. Y., Palchik E. M. Finite simple groups, factorized by  $p$ -solvable and biprimary sobgroups. *Algebra, teoriya chisel i diskretnaya geometriya: sovremennye problemy i prilozheniya, XIII Mezhdunarodnaya konferentsiya posvyashchennaya 80-letiyu so dnya rozhdeniya professora Sergeya Sergeevicha Ryshkova* [Algebra, the theory of numbers and discrete geometry: modern problems and applications, XIII International conference dedicated to the 80th anniversary of the birth of Professor Sergey Sergeevich Ryshkov]. Tula, Publishing house of L. N. Tolstoy Tula State Pedagogical University, 2015, pp. 57–59 (in Russian).
8. Li C.H., Li X. On permutation groups of degree a product of two prime-powers. *Communications in Algebra*, 2014, vol. 42, no. 11, pp. 4722–4743. <https://doi.org/10.1080/00927872.2013.823500>
9. Vdovin E. P., Revin D. O. Theorems of Sylow type. *Russian Mathematical Surveys*, 2011, vol. 66, no. 5, pp. 829–870. <https://dx.doi.org/10.1070/RM2011v066n05ABEH004762>
10. Chunikhin S. A. *Subgroups of Finite Groups*. Minsk, Nauka i tekhnika Publ., 1964. 154 p. (in Russian).
11. Huppert B. *Finite groups I*. Berlin, Springer, 1982. 793 p.
12. Gorenstein D., Lyons R., Solomon R. Gorenstein D. *The Classification of the finite simple groups. Part I, Chapter A: Almost Simple K-Groups*. American Mathematical Society, 1997. 419 p
13. Guralnik R., Malle G., Navarro G. Self-normalizing Sylow subgroups. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 2004, vol. 132, no. 4, pp. 973–979..

## Інфармацыя аб аўторэ

**Башун Светлана Юрьевна** – старший преподаватель кафедры высшей математики, Полоцкий государственный университет (ул. Блохина, 29, 211440, г. Новополоцк, Витебская обл., Республика Беларусь). E-mail: bashunsviat@mail.ru

## Information about the author

**Svetlana Y. Bashun** – Senior Lecturer of Higher Mathematics Department, Polotsk State University (29, Blokhin Str., 211440, Novopolotsk, Vitebsk region, Republic of Belarus). E-mail: bashunsviat@mail.ru

ISSN 1561-2430 (Print)  
 ISSN 2524-2415 (Online)  
 УДК 517.444

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-468-479>

Поступила в редакцию 24.06.2018

Received 24.06.2018

И. С. Ковалёва

*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь*

## ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МАРКОВА – СТИЛТЬЕСА МЕР И НЕКОТОРЫЕ ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

**Аннотация.** В предшествующих работах А. Р. Миротина и автора статьи исследовались свойства преобразования Маркова – Стильтьеса функций в пространствах Харди и Лебега. Данная работа посвящена изучению преобразования Маркова – Стильтьеса мер с точки зрения теории функций и теории интегральных преобразований. Доказана голоморфность данного преобразования в комплексной области с разрезом вдоль луча  $[1, +\infty)$ , теорема единственности. Установлены необходимые и достаточные условия, при которых функции могут быть представлены в виде преобразований Маркова – Стильтьеса положительных и знакопеременных мер. Доказаны формула обращения и теорема непрерывности. Исследованы предельные значения преобразования Маркова – Стильтьеса мер на границе области, в частности, установлены аналоги формул Сохоцкого – Племяля. Кроме того, изучаются граничные значения преобразования Маркова – Стильтьеса меры  $\mu$ , точнее, как эти граничные значения отражают свойства меры  $\mu$ . Указаны приложения полученных результатов к теории самосопряженных операторов: получен ряд утверждений о граничном поведении резольвенты без использования спектральной теоремы. Установленные результаты могут также найти применение в теории обработки сигналов.

**Ключевые слова:** интегральное преобразование, функция Маркова – Стильтьеса, мера, формула обращения, теорема непрерывности, граничное поведение, самосопряженный оператор

**Для цитирования.** Ковалёва, И. С. Преобразование Маркова – Стильтьеса мер и некоторые его приложения / И. С. Ковалёва // Вест. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2018. – Т. 54, № 4. – С. 468–479. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-468-479>

I. S. Kovalyova

*Francisk Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus*

## MARKOV – STIELTJES TRANSFORMATION OF MEASURES AND SOME OF ITS APPLICATIONS

**Abstract.** The paper is devoted to the study of the properties of the Markov – Stieltjes transformation of measures. In the works of J. Anderson, A. A. Pekarsky, N. S. Vyacheslavov, E. P. Mochalina et al., the functions of Markov – Stieltjes type were studied from the point of view of the approximation theory. In the works of A.R. Mirotin and the author, the Markov – Stieltjes transform of functions was studied as an operator in Hardy and Lebesgue spaces. In this paper, the general properties of the Markov – Stieltjes transform of measures are studied, the theorem of analyticity and the uniqueness theorem are proved, the Markov – Stieltjes transformations of positive and complex measures are described, the inversion formula and the continuity theorem are established, the boundary behavior of the given transformation is investigated. In particular, the analogues of the Sokhotsky – Plemelya formulas are established. Applications to the theory of self-conjugate operators are given. In addition, the results obtained can find use in the theory of functions and integral operators, as well as in the theory of information transfer, in particular, in the theory of signal processing.

**Keywords:** integral transform, Markov – Stieltjes function, measure, inversion formula, continuity theorem, boundary behavior, self-conjugate operator

**For citation.** Kovalyova I. S. Markov – Stieltjes transformation of measures and some of its applications. *Vestsi Natsyional'noi akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, vol. 54, no. 4, pp. 468–479 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-468-479>

**Введение.** Ниже через  $M^b([0,1],C)$  ( $M^b([0,1],R)$ ) будет обозначаться пространство всех ограниченных комплексных (вещественных) мер на  $[0,1]$ , а через  $M_+^b([0,1])$  – его подпространство, состоящее из положительных мер. Функция распределения меры  $\mu$  обозначается  $\mu(t)$ .

Определение 1 [1, гл. 6]. Преобразование Маркова – Стильеса меры  $\mu \in M^b([0,1], C)$  называется функцией, задаваемая при  $z \in C \setminus [1, +\infty)$  соотношением

$$S\mu(z) = \int_0^1 \frac{d\mu(t)}{1-tz}. \quad (1)$$

При  $z \in [1, +\infty)$  интеграл в правой части (1) понимается как предел

$$S\mu(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{[0,1] \cap \{|t-1/z| > \varepsilon\}} \frac{d\mu(t)}{1-tz}. \quad (1')$$

Теорема 1. Преобразование Маркова – Стильеса меры  $\mu \in M^b([0,1], C)$  голоморфно в области  $C \setminus [1, +\infty)$ , а также существует п.в. на луче  $[1, +\infty)$ .

Доказательство. Первое утверждение следует из законности дифференцирования по параметру под знаком интеграла в (1). Для доказательства второго утверждения заметим, что

$$S\mu(z) = \int_0^1 \frac{d\mu(t)}{1-tz} = \frac{1}{z} \int_0^1 \frac{d\mu(t)}{z^{-1}-t} = \frac{\pi}{z} H\mu_1\left(\frac{1}{z}\right),$$

где  $H\mu_1$  – преобразование Гильберта меры  $\mu_1$ , имеющей функцию распределения

$$\mu_1(t) := \begin{cases} \mu(t), & t \in (0,1), \\ 0, & t \notin (0,1). \end{cases}$$

Применение теоремы Люмиса о преобразовании Гильберта (см., напр., [2, с. 239]) завершает доказательство теоремы.

Следующий пример при  $\alpha = 1/2$  показывает, что утверждение о голоморфности в теореме 1 нельзя усилить (в том смысле, что  $C \setminus [1, +\infty)$  есть область голоморфности рассматриваемого в нем преобразования Маркова – Стильеса).

Пример. Пусть  $d\mu_\alpha(t) = t^{\alpha-1} / (1-t)^\alpha dt$  ( $0 < \operatorname{Re} \alpha < 1$ ). Имеем при  $z \neq 1$  (см. [3, с. 242])

$$S\mu_\alpha(z) = \begin{cases} (\pi \sin^{-1} \alpha \pi) (1-z)^{-\alpha}, & z \in C \setminus [1, +\infty), \\ (\pi \operatorname{ctg} \alpha \pi) (z-1)^{-\alpha}, & z \in (1, +\infty). \end{cases}$$

В частности,  $S\mu_{1/2}(z) = 0$  при всех  $z \in (1, +\infty)$ .

Теорема 2 (единственности). Пусть множество  $E \subseteq C \setminus [1, +\infty)$  имеет предельную точку в  $C \setminus [1, +\infty)$ ,  $\mu \in M^b([0,1], C)$ . Если  $S\mu(z) = 0$  для любого  $z \in E$ , то  $\mu = 0$ .

Доказательство. В силу предыдущей теоремы  $S\mu(z) = 0$  при  $z \in C \setminus [1, +\infty)$ . Разлагая ядро оператора в сумму бесконечной геометрической прогрессии и применяя теорему Лебега, имеем

$$S\mu(z) = \int_0^1 \frac{d\mu(t)}{1-tz} = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} t^n z^n d\mu(t) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \int_0^1 t^n d\mu(t) = 0 \quad (|z| < 1).$$

Следовательно,  $\int_0^1 t^n d\mu(t) = 0$  для любого  $n \geq 0$ , а потому (см., напр., [4, теорема 6.1])  $\mu = 0$ .

**1. Теорема непрерывности.** Напомним, что последовательность мер  $(\mu_n)$  из пространства  $M^b([0,1])$  (сопряженного пространству  $C[0,1]$ ) называется *\*-слабо сходящейся к мере*  $\mu \in M^b([0,1])$ , если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x(t) d\mu_n(t) = \int_0^1 x(t) d\mu(t)$  для каждой точки  $x \in C[0,1]$ .

**Теорема 3.** *Справедливы следующие утверждения.*

1) Если последовательность мер  $(\mu_n) \in M^b([0,1])$  сходится \*-слабо к мере  $\mu$ , то  $S\mu_n(z) \rightarrow S\mu(z)$  для всех  $z \in C \setminus [1, +\infty)$ .

2) Пусть множество  $E \subset (0,1)$  имеет предельную точку, отличную от 1. Если для  $\mu_n \in M_+^b([0,1])$  последовательность  $S\mu_n(z)$  сходится к  $F(z)$  при  $z \in E$ , то последовательность  $(\mu_n)$  сходится \*-слабо к мере  $\mu \in M_+^b([0,1])$  и  $S\mu(z) = F(z)$  для всех  $z \in E$ .

**Доказательство.** 1) Пусть  $\mu_n \rightarrow \mu$  \*-слабо. В силу непрерывности подынтегральной функции при каждом  $z \in C \setminus [1, +\infty)$ , первое утверждение теоремы следует сразу из определения.

2) Зафиксируем  $x_0 \in E$ . Так как  $S\mu_n(x_0) \rightarrow F(x_0)$ , то последовательность  $S\mu_n(x_0)$  ограничена, т. е. существует такое положительное  $a$ , что  $S\mu_n(x_0) < a$  при всех  $n$ . С другой стороны,

$$S\mu_n(x_0) = \int_0^1 \frac{d\mu_n(t)}{1-tx_0} > \int_0^1 d\mu_n(t) = \mu_n([0,1]) = \|\mu_n\|.$$

Следовательно,  $\|\mu_n\| < a$ , т. е. последовательность мер  $(\mu_n)$  ограничена по норме. По теореме Банаха – Алаоглу существует подпоследовательность  $(\mu_{n_k})$ , сходящаяся \*-слабо к некоторой мере  $\mu \in M_+^b([0,1])$ . Согласно пункту 1) теоремы,  $S\mu_{n_k}(z) \rightarrow S\mu(z)$  для всех  $z \in E$ .

Рассмотрим произвольную подпоследовательность  $(\mu'_{n_k})$  последовательности  $(\mu_n)$ , сходящуюся \*-слабо к некоторой мере  $\mu' \in M_+^b([0,1])$ . Снова применяя пункт 1), имеем  $S\mu'_{n_k}(z) \rightarrow S\mu'(z)$ . Но по условию теоремы  $S\mu'_{n_k}(z) \rightarrow F(z)$ . Следовательно,  $S\mu'(z) = F(z) = S\mu(z)$  на множестве  $E$  и по теореме единственности  $\mu = \mu'$ . А поскольку все \*-слабо сходящиеся подпоследовательности последовательности  $(\mu_n)$  \*-слабо сходятся к мере  $\mu$ , то и вся последовательность  $(\mu_n)$  \*-слабо сходится к этой же мере.

**2. Описание преобразований Маркова – Стилтеса мер.** Следующие теоремы описывают функции, представимые в виде (1), для комплексных и положительных мер.

**Теорема 4.** *Для функции  $F(z)$  следующие утверждения равносильны.*

1) Функция  $F(z)$  аналитична в единичном круге  $D$ ,  $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ , и существует константа  $c > 0$  такая, что для любых комплексных чисел  $\lambda_k$  и любого натурального  $m$

$$\left| \sum_{k=0}^m \lambda_k a_k \right| \leq c \max \left\{ \left| \sum_{k=0}^m \lambda_k t^k \right| : t \in [0,1] \right\}. \quad (2)$$

2) Существует мера  $\mu \in M^b([0,1], C)$  такая, что  $\|\mu\| \leq c$  и  $F = S\mu$ .

**Доказательство.** Докажем сначала, что из 2) следует 1). Пусть  $F = S\mu$ . Разлагая подынтегральную функцию в ряд и применяя теорему Лебега о почленном интегрировании, имеем

$$F(z) = \int_0^1 \frac{d\mu(t)}{1-tz} = \int_0^1 \left( \sum_{n=0}^{\infty} t^n z^n \right) d\mu(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

где  $a_n = \int_0^1 t^n d\mu(t)$ . Поэтому

$$\left| \sum_{k=0}^m \lambda_k a_k \right| = \left| \sum_{k=0}^m \lambda_k \int_0^1 t^k d\mu(t) \right| = \left| \int_0^1 \left( \sum_{k=0}^m \lambda_k t^k \right) d\mu(t) \right| \leq \|\mu\| \max \left\{ \left| \sum_{k=0}^m \lambda_k t^k \right| : t \in [0,1] \right\} \leq c \max \left\{ \left| \sum_{k=0}^m \lambda_k t^k \right| : t \in [0,1] \right\}.$$

Покажем теперь, что из 1) следует 2). Для произвольного полинома  $p(t) = \sum_{k=0}^m \lambda_k t^k$  положим  $\Lambda(p) := \sum_{k=0}^m \lambda_k a_k$ . Очевидно,  $\Lambda$  – линейный ограниченный функционал на пространстве всех

полиномов в метрике  $C[0,1]$  и  $\|\Lambda\| \leq c$ . Применяя теорему Хана – Банаха, продолжим его на  $C[0,1]$  с сохранением нормы. По теореме Ф. Рисса об общем виде функционалов в  $C[0,1]$  существует мера  $\mu \in M^b([0,1])$  такая, что  $\Lambda(x) = \int_{[0,1]} x(t) d\mu(t)$ , причем  $\|\mu\| = \|\Lambda\| \leq c$ . При этом  $a_k = \Lambda(t^k) = \int_0^1 t^k d\mu(t)$ .

Таким образом,

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \int_0^1 t^k d\mu(t) \right) z^k = \int_0^1 \left( \sum_{k=0}^{\infty} t^k z^k \right) d\mu(t) = \int_0^1 \frac{d\mu(t)}{1-tz} = S\mu(z),$$

что и завершает доказательство теоремы.

**Следствие 1.** Пусть  $F_n = S\mu_n$ ,  $\mu_n \in M^b([0,1], C)$ , и  $\|\mu_n\| \leq c$  при всех  $n \in N$ . Если для некоторой функции  $F$  имеем  $F_n(z) \rightarrow F(z)$  ( $n \rightarrow \infty$ ) в некоторой  $r$ -окрестности нуля  $U$ ,  $0 < r < 1$ , то существует такая (ограниченная комплексная) мера  $\mu$ , что  $\|\mu\| \leq c$ , и  $F = S\mu$ . Если дополнительно известно, что  $\mu_n \geq 0$ , то  $(\mu_n)$  сходится \*-слабо к мере  $\mu$ .

**Доказательство.** Последовательность  $F_n$  равномерно ограничена в  $U$ , так как при  $(z \in U)$

$$|F_n(z)| = \left| \int_0^1 \frac{d\mu_n(t)}{1-tz} \right| \leq \int_0^1 \frac{1}{|1-tz|} d|\mu_n(t)| \leq \frac{1}{\min_{0 \leq t \leq 1} |1-tz|} \|\mu_n\| \leq \frac{c}{1-r}.$$

По теореме Витали последовательность  $F_n$  равномерно сходится к  $F$  в  $U$  и, согласно теореме Вейерштрасса о почленном дифференцировании, для любого  $k \in N$   $F_n^{(k)}(z)$  сходится равномерно к  $F^{(k)}(z)$  ( $n \rightarrow \infty$ ) в этой области. Рассмотрим тейлоровские разложения  $z \in U$

$$F_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(n)} z^k, a_k^{(n)} = \frac{F_n^{(k)}(0)}{k!}$$

и

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, a_k = \frac{F^{(k)}(0)}{k!}.$$

Согласно теореме 4, для любого многочлена  $p(t) = \sum_{k=0}^m \lambda_k t^k$  справедливо неравенство  $\left| \sum_{k=0}^m \lambda_k a_k^{(n)} \right| \leq c \max_{0 \leq t \leq 1} |p(t)|$ , а поскольку  $F_n^{(k)}(0) \rightarrow F^{(k)}(0)$ , то  $a_k^{(n)} \rightarrow a_k$  ( $n \rightarrow \infty$ ), и потому  $\left| \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k a_k \right| \leq c \max_{0 \leq t \leq 1} |p(t)|$ . Следовательно, по теореме 4 существует такая мера  $\mu$ , что  $F = S\mu$  и  $\|\mu\| \leq c$ . Утверждение о \*-слабой сходимости следует из теоремы непрерывности.

**Теорема 5.** Функция  $F$  имеет вид  $S\mu$  для некоторой меры  $\mu \in M_+^b([0,1])$ , если и только если выполнены следующие два условия:

- 1)  $F$  голоморфна в  $C \setminus [1, +\infty)$  и положительна на интервале  $(-\infty, 1)$ ;
- 2) функция  $\zeta F(\zeta)$  отображает открытую нижнюю полуплоскость в свое замыкание.

**Доказательство.** Необходимость. Голоморфность  $F$  в  $C \setminus [1, +\infty)$  была уже отмечена выше. Далее, если  $\zeta < 1$ , то  $1-t\zeta > 0$  при  $t \in [0,1]$ , а потому и  $F(\zeta) > 0$ . А поскольку  $\text{Im}(\zeta / (1-t\zeta)) < 0$  при  $\text{Im}\zeta < 0$ ,  $t \in (0,1)$ , то  $\text{Im}(\zeta F(\zeta)) = \int_0^1 \text{Im}(\zeta / (1-t\zeta)) d\mu(t) \leq 0$ . Необходимость доказана.

Для доказательства достаточности заметим, что при условиях 1) и 2) функция  $(\zeta = 1/z)$   $F_1(z) := -1/z F(1/z) = -\zeta F(\zeta)$  голоморфна в верхней полуплоскости и  $\text{Im} F_1(z) \geq 0$  при  $\text{Im} z > 0$ . Кроме того, из условия 1) следует, что она голоморфна и отрицательна на интервале  $(0,1)$  и голоморфна и положительна на интервале  $(-\infty, 0)$ . Таким образом,  $F_1$  принадлежит классу  $R[0,1]$  функций типа Маркова (см. [5]), и в силу [5, теорема П.6]  $F_1(z) = \int_0^1 d\mu(t) / (t-z)$  для некоторой меры  $\mu \in M_+^b([0,1])$ , а потому  $F(\zeta) = \int_0^1 d\mu(t) / (1-t\zeta) = S\mu(\zeta)$ , что и требовалось доказать.

**3. Комплексная формула обращения.** Формула обращения для преобразования Маркова – Стилтеса мер может быть выведена из соответствующего результата для преобразования Стилтеса. Ниже приводится независимое доказательство.

**Теорема 6.** Пусть  $\mu$  – ограниченная комплексная мера,  $\xi \in (0,1)$ . Если  $F = S\mu$ , то

$$\frac{\mu(\xi-0) + \mu(\xi+0)}{2} - \frac{\mu(+0) + \mu(0)}{2} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\eta \rightarrow +0} \int_0^\xi \left( \frac{1}{t-i\eta} F\left(\frac{1}{t-i\eta}\right) - \frac{1}{t+i\eta} F\left(\frac{1}{t+i\eta}\right) \right) dt.$$

**Доказательство.** Заметим, что

$$\frac{1}{2\pi i} \left( \frac{1}{t-i\eta} F\left(\frac{1}{t-i\eta}\right) - \frac{1}{t+i\eta} F\left(\frac{1}{t+i\eta}\right) \right) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\eta}{(t-s)^2 + \eta^2} d\mu(s).$$

Полагая  $\mu(0) = 0$ , проинтегрируем полученное выражения по частям

$$\frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\eta}{(t-s)^2 + \eta^2} d\mu(s) = \frac{\eta}{\pi} \left( \frac{\mu(s)}{(t-s)^2 + \eta^2} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{2\mu(s)(t-s)}{((t-s)^2 + \eta^2)^2} ds \right) = \frac{\eta}{\pi} \left( \frac{\mu(1-0)}{(t-1)^2 + \eta^2} - \int_0^1 \frac{2\mu(s)(t-s)}{((t-s)^2 + \eta^2)^2} ds \right).$$

Обозначим

$$\begin{aligned} I_\eta &:= \frac{1}{2\pi i} \int_0^\xi \left( \frac{1}{t-i\eta} F\left(\frac{1}{t-i\eta}\right) - \frac{1}{t+i\eta} F\left(\frac{1}{t+i\eta}\right) \right) dt = \frac{\eta}{\pi} \int_0^\xi \left( \frac{\mu(1-0)}{(t-1)^2 + \eta^2} - \int_0^1 \frac{2\mu(s)(t-s)}{((t-s)^2 + \eta^2)^2} ds \right) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \mu(1-0) \left( \arctg \frac{\xi-1}{\eta} + \arctg \frac{1}{\eta} \right) - \int_0^1 \frac{\mu(s)\eta ds}{s^2 + \eta^2} + \int_0^1 \frac{\mu(s)\eta ds}{(s-\xi)^2 + \eta^2} \right). \end{aligned}$$

Переходя к пределу при  $\eta \rightarrow +0$  и учитывая, что

$$\lim_{\eta \rightarrow +0} \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\mu(s)\eta ds}{s^2 + \eta^2} = \frac{\mu(+0)}{2}, \quad \lim_{\eta \rightarrow +0} \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\mu(s)\eta ds}{(s-\xi)^2 + \eta^2} = \frac{\mu(\xi+0) + \mu(\xi-0)}{2}$$

(см., напр., леммы 7.1 и 7.2 из [4, с. 338]), имеем при  $\xi \in (0,1)$

$$\lim_{\eta \rightarrow +0} I_\eta = \frac{\mu(\xi+0) + \mu(\xi-0)}{2} - \frac{\mu(+0)}{2}.$$

Доказательство завершается заменой  $\mu(t)$  на  $\mu(t) - \mu(0)$ .

**Следствие 2.** Пусть  $\mu \in M^b([0,1], R)$ . Тогда

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int_{-i\eta}^{\xi-i\eta} \frac{1}{s} F(s) ds = \frac{\mu(\xi+0) + \mu(\xi-0)}{2} - \frac{\mu(0+) + \mu(0)}{2}.$$

**Доказательство.** Введем обозначения  $z = t + i\eta$ ,  $G(z) = (t - i\eta)^{-1} F\left((t - i\eta)^{-1}\right)$ . Заметим, что если мера  $\mu$  вещественная, то  $\overline{G(z)} = G(\bar{z})$  и  $G(z) - \overline{G(z)} = G(z) - G(\bar{z}) = 2i \operatorname{Im}(G(z))$ . Таким образом, правая часть формулы обращения может быть переписана в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\lim_{\eta \rightarrow +0} \frac{1}{2\pi i} \int_0^\xi \left( \frac{1}{t-i\eta} F\left(\frac{1}{t-i\eta}\right) - \frac{1}{t+i\eta} F\left(\frac{1}{t+i\eta}\right) \right) dt = \\ &= \lim_{\eta \rightarrow +0} \frac{1}{\pi} \int_0^\xi \operatorname{Im} \left( \frac{1}{t-i\eta} F\left(\frac{1}{t-i\eta}\right) \right) dt = \lim_{\eta \rightarrow +0} \operatorname{Im} \frac{1}{\pi} \int_{-i\eta}^{\xi-i\eta} \frac{1}{s} F(s) ds = \lim_{\eta \rightarrow +0} \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int_{-i\eta}^{\xi-i\eta} \frac{1}{s} F(s) ds. \end{aligned}$$

Отсюда и из теоремы 6 вытекает утверждение следствия.

**4. Граничное поведение.** В данном разделе рассматриваются предельные значения преобразования Маркова – Стилтеса на границе области  $C \setminus [1, +\infty)$ .

Следующая простая теорема описывает поведение преобразования Маркова – Стилтеса в  $-\infty$ .

**Теорема 7.** Пусть  $\mu$  – положительная мера на  $[0, 1]$ ,  $F = S\mu$ . Тогда

- 1)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \mu(\{0\})$ ;
- 2)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} xF(x) = -\int_0^1 t^{-1} d\mu(t)$  (случай  $\int_0^1 t^{-1} d\mu(t) = \infty$  не исключается);
- 3)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 F'(x) = \int_0^1 t^{-1} d\mu(t)$  (случай  $\int_0^1 t^{-1} d\mu(t) = \infty$  не исключается);
- 4)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} xF'(x)/F(x) = -1$ , если  $\int_0^1 t^{-1} d\mu(t) \neq \infty$ .

Рассмотрим функцию  $G(x) := \int_0^1 t(1-tx)^{-2} d\mu(t)$ ,  $x \in R$ , со значениями в  $[0, +\infty]$ .

**Теорема 8.** Пусть  $\mu$  – положительная мера на  $[0, 1]$ ,  $F = S\mu$ .

- 1)  $G(1/y) = \infty$  для  $\mu$ -п.в.  $y \in (0, 1]$ .

Если  $G(x) < \infty$  при некотором  $x \in [1, +\infty)$ , то

- 2)  $\int_0^1 \frac{d\mu(t)}{(1-tx)^2} < \infty$ ,  $\int_0^1 \frac{d\mu(t)}{|1-tx|} < \infty$  (в частности, интеграл (1) существует в смысле Лебега);
- 3)  $\lim_{y \rightarrow 0} F(x + iy) = F(x)$ ;
- 4)  $\lim_{y \rightarrow 0} y^{-1} \operatorname{Im} F(x + iy) = G(x)$ ;
- 5)  $\lim_{y \rightarrow 0} (iy)^{-1} (F(x + iy) - F(x)) = G(x)$ .

**Доказательство.** 1) Пусть  $y \neq 0$ . Тогда  $G(1/y) = y^2 \int_{-\infty}^{\infty} (y-t)^{-2} d\mu_1(t)$ , где

$$\mu_1(t) = \begin{cases} \mu(0), & t \in (-\infty, 0), \\ \mu(t), & t \in [0, 1], \\ \mu(1), & t \in (1, +\infty). \end{cases}$$

Но известно (см., напр., [6, лемма 3.3]), что последний интеграл равен  $\infty$  для  $\mu_1$ -п.в.  $y \in R$ .

2) Сходимость первого интеграла следует из тождества

$$\frac{1}{(1-xt)^2} = 1 - x^2 t \frac{t}{(1-xt)^2} + 2x \frac{t}{(1-xt)^2}.$$

Теперь сходимость второго интеграла следует из неравенства  $1/|1-xt| \leq x/(1-xt)^2$ , справедливого при  $t \in [0, 1]$ ,  $x \in [1, +\infty)$ .

- 3) Заметим, что  $\operatorname{Im} F(x + iy) = \int_0^1 ty \left( (1-tx)^2 + t^2 y^2 \right)^{-1} d\mu(t)$ . Поскольку при  $y \neq 0$

$$\left| ty \left( (1-tx)^2 + t^2 y^2 \right)^{-1} \right| \leq \frac{1}{2} \frac{1}{|1-tx|},$$

то в силу 2) и теоремы Лебега о мажорированной сходимости  $\lim_{y \rightarrow 0} \operatorname{Im} F(x + iy) = 0$ . Далее,

$$\operatorname{Re} F(x + iy) = \int_0^{1/x} + \int_{1/x}^1 (1-tx) \left( (1-tx)^2 + t^2 y^2 \right)^{-1} d\mu(t).$$

Следовательно, по теореме Леви  $\lim_{y \rightarrow 0} \operatorname{Re} F(x + iy) = \int_0^1 (1-tx)^{-1} d\mu(t) = F(x)$ .

- 4) Это следует из формулы для  $\operatorname{Im} F(x + iy)$  (см. выше) и теоремы Леви.

5) В силу 1) при  $y \rightarrow 0$

$$(iy)^{-1} (F(x+iy) - F(x)) = \int_0^1 \frac{td\mu(t)}{(1-tx)(1-tx-ity)} \rightarrow G(x)$$

по теореме Лебега о мажорированной сходимости, так как

$$|t(1-tx)^{-1}(1-tx-ity)^{-1}| \leq t(1-tx)^{-2}.$$

Теорема доказана.

Введем обозначения  $S\mu(x \pm i0) := \lim_{y \rightarrow +0} S\mu(x \pm iy)$ . Следующая теорема устанавливает для преобразования Маркова – Стильеса меры аналоги формул Сохоцкого – Племелья.

**Теорема 9.** Пусть  $\mu \in M^b([0,1], R)$ . Если в некоторой точке  $x \in [1, +\infty)$  существует производная  $d\mu(x^{-1})/dx$ , то существуют пределы  $S\mu(x \pm i0)$ , причем

$$S\mu(x \pm i0) = S\mu(x) \pm \pi i \mu' \left( \frac{1}{x} \right) \frac{1}{x}.$$

**Доказательство.** Заметим, что для любого  $y \neq 0$

$$S\mu(x+iy) = \int_0^1 \frac{d\mu(t)}{(1-tx)-ity} = \int_0^1 \frac{1-tx}{(1-tx)^2+t^2y^2} d\mu(t) + i \int_0^1 \frac{ty}{(1-tx)^2+t^2y^2} d\mu(t). \quad (3)$$

Обозначим

$$U(z) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} S\mu(x+iy) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{1-tx}{(1-tx)^2+t^2y^2} d\mu(t), \quad V(z) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} S\mu(x+iy) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{ty}{(1-tx)^2+t^2y^2} d\mu(t).$$

Выполняя замену  $s = t^{-1}$ ,  $d\nu(s) = -t^{-1}d\mu(t)$ , имеем

$$U(z) = -\frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{x-t^{-1}}{(x-t^{-1})^2+y^2} t^{-1} d\mu(t) = -\frac{1}{\pi} \int_1^\infty \frac{x-s}{(x-s)^2+y^2} d\nu(s) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{x-s}{(x-s)^2+y^2} d\nu_1(s),$$

где

$$\nu_1(s) = \begin{cases} \nu(s), & s \in [1, +\infty), \\ \nu(1), & s \in (-\infty, 1). \end{cases}$$

Полагая  $y \rightarrow 0$  и применяя известное свойство преобразования Гильберта (см. [7, с. 223]), получим

$$\lim_{y \rightarrow 0} U(z) = -\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{x-s}{(x-s)^2+y^2} d\nu_1(s) = -H\nu_1(x),$$

где  $H\nu_1$  – преобразование Гильберта меры  $\nu_1$ . Выполняя обратную замену, имеем

$$-H\nu_1(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{d\nu_1(s)}{x-s} = -\frac{1}{\pi} \int_1^\infty \frac{d\nu(s)}{x-s} = -\frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{t^{-1}d\mu(t)}{x-t^{-1}} = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{d\mu(t)}{1-tx} = \frac{1}{\pi} S\mu(x).$$

Таким образом, для  $U(z)$  окончательно получаем  $\lim_{y \rightarrow 0} U(z) = (1/\pi) S\mu(x)$ .

Выполнив, как и выше, замену  $s = t^{-1}$ ,  $d\nu(s) = -t^{-1}d\mu(t)$ , для  $V(z)$  имеем

$$V(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{y}{(t^{-1}-x)^2+y^2} t^{-1} d\mu(t) = \frac{1}{\pi} \int_1^\infty \frac{y}{(s-x)^2+y^2} d\nu(s) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{y}{(s-x)^2+y^2} d\nu_1(s).$$

Так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|dv_1(s)|}{1+s^2} = \int_1^{\infty} \frac{|dv(s)|}{1+s^2} = \int_0^1 \frac{|t^{-1}d\mu(t)|}{1+t^{-2}} = \int_0^1 \frac{|td\mu(t)|}{1+t^2} < \infty,$$

то, применяя теорему Фату для верхней полуплоскости (см., напр., [8, с. 136]), получим

$\lim_{y \rightarrow 0} V(z) = v'_1(x) = v'(x)$ . Кроме того,  $\frac{dv(x)}{dx} = \frac{-t^{-1}d\mu(t)}{-t^{-2}dt} = t\mu'(t) = (1/x)\mu'(1/x)$ , откуда  $\lim_{y \rightarrow 0} V(z) = (1/x)\mu'(1/x)$ . Таким образом,  $S\mu(x+i0) = S\mu(x) + \pi i(1/x)\mu'(1/x)$ .

Для  $S\mu(x-i0)$  доказательство аналогично.

Следствие 3. При выполнении условий теоремы 9

$$S\mu(x) = \frac{S\mu(x+i0) + S\mu(x-i0)}{2}, \quad S\mu(x+i0) - S\mu(x-i0) = 2\pi i\mu'\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}.$$

Введем обозначение

$$d\tilde{\mu}(s) = \begin{cases} -sd\mu(s^{-1}), & s \in [1, +\infty), \\ 0, & s \in (-\infty, 1). \end{cases}$$

Лемма 1. Пусть  $\mu \in M^b([0, 1], C)$ . Тогда  $\operatorname{Im} F_{g\mu}(x+iy) = P_{g\tilde{\mu}}(x+iy)$ , где  $P_{g\tilde{\mu}}$  – интеграл Пуассона,  $dg\tilde{\mu}(s) = g(s^{-1})d\tilde{\mu}(s)$ .

Доказательство. Действительно, выполняя замену  $s = t^{-1}$ , имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} F_{g\mu}(x+iy) &= \int_{(0,1]} \frac{ty g(t) d\mu(t)}{(1-tx)^2 + t^2 y^2} = \int_{(0,1]} \frac{y t^{-1} g(t) d\mu(t)}{(x-t^{-1})^2 + y^2} = \int_{-\infty}^1 \frac{y}{(x-s)^2 + y^2} sg(s^{-1}) d\mu(s^{-1}) = \\ &= \int_1^{\infty} \frac{y}{(x-s)^2 + y^2} (-sg(s^{-1}) d\mu(s^{-1})) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(x-s)^2 + y^2} dg\tilde{\mu}(s) = P_{g\tilde{\mu}}(x+iy). \end{aligned}$$

Следствие 4. Для ограниченной комплексной меры  $\mu$  на  $[0, 1]$   $\operatorname{Im} F_{\mu}(x+iy) = P_{\tilde{\mu}}(x+iy)$ .

Лемма 2. Пусть  $\mu_1 \perp \mu_2$  для некоторых мер  $\mu_1, \mu_2 \in M^b([0, 1], C)$ . Тогда  $\tilde{\mu}_1 \perp \tilde{\mu}_2$ .

Доказательство. Пусть для непересекающихся множеств  $X_1, X_2 \subset [0, 1]$  имеем  $\mu_2(X_1) = 0$ ,  $\mu_1(X_2) = 0$ . Рассмотрим множества  $X_i := \{1/x : x \in X_i \setminus \{0\}\} \subset [1, +\infty)$ . Тогда  $\tilde{\mu}_1(\tilde{X}_2) = 0$ , так как

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_1(\tilde{X}_2) &= \int_1^{\infty} \chi_{\tilde{X}_2}(s) d\tilde{\mu}_1(s) = -\int_1^{\infty} \chi_{\tilde{X}_2}(s) s d\mu_1\left(\frac{1}{s}\right) = \int_{[0,1]} \frac{1}{x} \chi_{\tilde{X}_2}\left(\frac{1}{x}\right) d\mu_1(x) = \\ &= \int_{[0,1]} \frac{1}{x} \chi_{X_2 \setminus \{0\}}(x) d\mu_1(x) = \int_{X_2 \setminus \{0\}} \frac{1}{x} d\mu_1(x) = 0. \end{aligned}$$

Аналогично доказывается, что  $\tilde{\mu}_2(\tilde{X}_1) = 0$ .

Теорема 10. Пусть для некоторой комплексной меры  $\nu$  и положительной меры  $\mu$  справедливо разложение Радона – Никодима  $\nu = g\mu + \nu_s$ . Тогда

$$1) \quad \lim_{y \downarrow 0} \frac{\operatorname{Im} F_{\nu}(x+iy)}{\operatorname{Im} F_{\mu}(x+iy)} = g\left(\frac{1}{x}\right)$$

для  $\mu$ -п.в.  $x \geq 1$ .

2) При  $\nu \geq 0$ . Для  $\nu_s$ -п.в.  $x \in [0, 1]$  имеем

$$\lim_{y \downarrow 0} \frac{\operatorname{Im} F_{\nu}(x+iy)}{\operatorname{Im} F_{\mu}(x+iy)} = \infty.$$

Доказательство. 1) Заметим, что для  $x \in [1, +\infty]$

$$d\tilde{v}(x) = -xdv\left(\frac{1}{x}\right) = -xg\left(\frac{1}{x}\right)d\mu\left(\frac{1}{x}\right) - xdv_s\left(\frac{1}{x}\right),$$

откуда  $d\tilde{v}_a(x) = -xg(1/x)d\mu(1/x) = g(1/x)d\tilde{\mu} \ll d\tilde{\mu}(x)$ , а по лемме 2  $d\tilde{v}_s(x) \perp d\tilde{\mu}(x)$ .

Применяя теперь следствие 4 и [6, теорема 3.5], имеем

$$\lim_{y \downarrow 0} \frac{\operatorname{Im} F_v(x+iy)}{\operatorname{Im} F_\mu(x+iy)} = \lim_{y \downarrow 0} \frac{P_{\tilde{v}}(x+iy)}{P_{\tilde{\mu}}(x+iy)} = \frac{d\tilde{v}_a(x)}{d\tilde{\mu}(x)} = g\left(\frac{1}{x}\right).$$

2) Пусть  $v \geq 0$ . Применяя, как и ранее, следствие 4 и утверждение 2 теоремы 3.5 из [6], имеем

$$\lim_{y \downarrow 0} \frac{\operatorname{Im} F_v(x+iy)}{\operatorname{Im} F_\mu(x+iy)} = \lim_{y \downarrow 0} \frac{P_{\tilde{v}}(x+iy)}{P_{\tilde{\mu}}(x+iy)} = \infty$$

для  $\tilde{v}_s$ -п.в.  $x \in [1, +\infty]$ , а так как  $d\tilde{v}_s(x) = -xdv_s\left(\frac{1}{x}\right)$ , то это равенство верно для  $v_s$ -п.в.  $x \in [0, 1]$ .

Теорема 11. Пусть  $A \subset [1, +\infty)$  – ограниченное борелевское множество. Тогда при  $p \in (0, 1)$

$$\lim_{y \downarrow 0} \int_A \left| \frac{\operatorname{Im} F_v(x+iy)}{\operatorname{Im} F_\mu(x+iy)} \right|^p d\tilde{\mu}(x) = \int_{A^{-1}} |g(t)|^p \frac{d\mu(t)}{t}.$$

В частности,  $v \perp \mu$  тогда и только тогда, когда

$$\lim_{y \downarrow 0} \int_A \left| \frac{\operatorname{Im} F_v(x+iy)}{\operatorname{Im} F_\mu(x+iy)} \right|^p d\tilde{\mu}(x) = 0. \quad (4)$$

Доказательство. Из следствия 4 и [6, теорема 3.6] следует

$$\lim_{y \downarrow 0} \int_A \left| \frac{\operatorname{Im} F_v(x+iy)}{\operatorname{Im} F_\mu(x+iy)} \right|^p d\tilde{\mu}(x) = \lim_{y \downarrow 0} \int_A \left| \frac{P_{\tilde{v}}(x+iy)}{P_{\tilde{\mu}}(x+iy)} \right|^p d\tilde{\mu}(x) = \int_A \left| g\left(\frac{1}{x}\right) \right|^p d\tilde{\mu}(x) = \int_{A^{-1}} |g(t)|^p \frac{d\mu(t)}{t}.$$

Пусть теперь  $v \perp \mu$ . Тогда  $v = v_s$ , т. е.  $g(t) = 0$ , и потому выполнено (4). Обратно, пусть выполнено (4). Тогда  $g(t) = 0$  и  $v \perp \mu$ .

Теорема 12. Для любой непрерывной с компактным носителем функции  $f$  на  $R$  и положительной меры  $v$

$$\lim_{y \downarrow 0} \int_R \frac{f(x)}{\pi} \operatorname{Im} F_v(x+iy) dx = \int_0^1 \frac{1}{t} f\left(\frac{1}{t}\right) dv(t).$$

В частности, если  $\operatorname{Im} F_{v_1} = \operatorname{Im} F_{v_2}$ , то  $v_1 = v_2$ .

Доказательство. Пользуясь следствием 4 и [6, теорема 3.7], имеем

$$\lim_{y \downarrow 0} \int_R \frac{f(x)}{\pi} \operatorname{Im} F_v(x+iy) dx = \lim_{y \downarrow 0} \int_R \frac{f(x)}{\pi} P_{\tilde{v}}(x+iy) dx = \int_R f(x) d\tilde{v}(x) = -\int_1^\infty xf(x) dv\left(\frac{1}{x}\right) = \int_0^1 \frac{1}{t} f\left(\frac{1}{t}\right) dv(t).$$

Пусть  $\operatorname{Im} F_{v_1} = \operatorname{Im} F_{v_2}$ . Тогда по следствию 4  $P_{\tilde{v}_1} = P_{\tilde{v}_2}$  и согласно [6, теорема 3.7]  $\tilde{v}_1 = \tilde{v}_2$ . Отсюда  $v_1 = v_2$ , что и завершает доказательство.

Теорема 13. Пусть мера  $v \geq 0$  имеет разложение Радона – Никодима  $v = gm + v_{\text{sing}}$  ( $m$  – мера Лебега),  $A \subset R$  открыто,  $p > 1$ , и  $\sup_{0 < y < 1} \int_A |\operatorname{Im} F_v(x+iy)|^p dx < \infty$ . Тогда

- 1)  $v_{\text{sing}}|_{A^{-1}} = 0$ ;
- 2)  $\int_{A^{-1}} |g(t)|^p t^{p-2} dt < \infty$ ;
- 3)  $\lim_{y \downarrow 0} \frac{1}{\pi} \text{Im} F_v(x+iy) = \frac{1}{x} g\left(\frac{1}{x}\right)$  в  $L^p([a,b], dx)$  для всех  $[a,b] \subset A$ .

Доказательство. Поскольку

$$\sup_{0 < y < 1_A} \int |\text{Im} F_v(x+iy)|^p dx = \sup_{0 < y < 1_A} \int |P_{\tilde{v}}(x+iy)|^p dx < \infty,$$

то выполнены условия теоремы 3.8 из [6], откуда  $\tilde{v}_{\text{sing}}|_A = 0$ , а так как  $d\tilde{v}_{\text{sing}}(x) = -x dv_{\text{sing}}(x^{-1})$ , то  $v_{\text{sing}}|_{A^{-1}} = 0$  и первое утверждение теоремы доказано. Заметим, что

$$d\tilde{v}(x) = -x dv(x^{-1}) = -xg(x^{-1})d(x^{-1}) - x dv_{\text{sing}}(x^{-1}) = x^{-1}g(x^{-1})dx + d\tilde{v}_{\text{sing}}(x).$$

Отсюда и из утверждения 2 теоремы 3.8 из [6] следует, что

$$\int_A \left| \frac{1}{x} g\left(\frac{1}{x}\right) \right|^p dx = - \int_{A^{-1}} |g(t)|^p t^{p-2} dt < \infty,$$

откуда и вытекает утверждение 2.

Применяя следствие 4 и утверждение 3 из [6, теорема 3.8], для всех  $[a,b] \subset A$  имеем

$$\lim_{y \downarrow 0} \frac{1}{\pi} \text{Im} F_v(x+iy) = \lim_{y \downarrow 0} \frac{1}{\pi} P_{\tilde{v}}(x+iy) = \frac{1}{x} g\left(\frac{1}{x}\right)$$

в  $L^p([a,b], dx)$ . Это завершает доказательство теоремы.

**Теорема 14.** Мера  $v \in M^b([0,1], R)$  не имеет атомов на  $[\beta, \alpha] \subset (0,1]$ , если и только если

$$\lim_{y \downarrow 0} \int_{\beta^{-1}}^{\alpha^{-1}} (\text{Im} F_v(x+iy))^2 dx = 0.$$

Доказательство. Пусть  $a := \beta^{-1}, b := \alpha^{-1}$ . Согласно [6, следствие 3.10] знакопеременная мера  $\tilde{v}$  не имеет атомов на  $[a,b]$  тогда и только тогда, когда  $\lim_{y \downarrow 0} \int_a^b (P_{\tilde{v}}(x+iy))^2 dx = 0$ . По следствию 4 данное утверждение равносильно тому, что мера  $\tilde{v}$  не имеет атомов на  $[a,b]$ , если и только если  $\lim_{y \downarrow 0} \int_a^b (\text{Im} F_v(x+iy))^2 dx = 0$ , что эквивалентно условию  $\tilde{v}(x) = 0$  для всех  $x \in [a,b]$ , т. е.  $\int_{\{x\}} d\tilde{v}(t) = -\int_{\{x\}} t dv(t^{-1}) = 0$ . Отсюда  $v(\{x^{-1}\}) = 0$  для всех  $x \in [a,b]$ , и  $v(\{t\}) = 0$  на  $[\beta, \alpha]$ .

**5. Приложения к теории операторов.** Пусть  $A$  есть ограниченный самосопряженный оператор в комплексном гильбертовом пространстве  $H$ . Если его спектр  $\sigma(A)$  содержится в  $[m, M]$ , то спектр оператора  $(M-m)^{-1}(A-mI)$  содержится в  $[0,1]$ . Поэтому далее будем предполагать, что спектр самого оператора  $A$  содержится в  $[0,1]$ . В этом случае при  $z \in C \setminus [1, +\infty)$  существует резольвента (оператор Эйлера)  $(I - zA)^{-1}$ . Для фиксированного вектора  $\varphi \in H$  рассмотрим функцию

$$F_{\varphi}(z) := \langle (I - zA)^{-1} \varphi, \varphi \rangle \quad (z \in C \setminus [1, +\infty)),$$

где угловые скобки обозначают скалярное произведение в  $H$ .

**Лемма 3.** Существует такая мера  $\mu_{\varphi} \in M_+^b([0,1])$ , что  $F_{\varphi}(z) = S\mu_{\varphi}(z)$  при  $z \in C \setminus [1, +\infty)$ .

**Доказательство.** Отметим, что при  $z \neq 0$  оператор  $(I - zA)^{-1} = z^{-1}(z^{-1}I - A)^{-1}$  существует, если  $z \notin [1, +\infty)$  (тогда  $z^{-1} \notin [0, 1]$ ). Покажем, что функция  $F_\varphi$  удовлетворяет условиям теоремы 5.

1а) Поскольку резольвента  $R(\zeta, A) := (\zeta I - A)^{-1}$  голоморфна на  $\rho(A) \supset C \setminus [0, 1]$ , то для всех  $z \neq 0$  функция  $F_\varphi(z) = z^{-1}R(z^{-1}, A)$  голоморфна на  $C \setminus [1, +\infty)$ . Голоморфность в точке  $z = 0$  следует из разложения  $(I - zA)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n A^n$  ( $|z| < 1/\|A\|$ ).

1б) Поскольку оператор  $A$  – самосопряженный и  $\sigma(A) \subset [0, 1]$ , то  $0 \leq A \leq I$  и  $\alpha A < A$  для всех  $\alpha < A$ . Отсюда  $I - \alpha A > I - A \geq 0$ , и потому  $F_\varphi(\alpha) = \langle (I - \alpha A)^{-1} \varphi, \varphi \rangle > 0$ .

2) Функция  $\zeta F_\varphi(\zeta) = \langle (\zeta^{-1} - A)^{-1} \varphi, \varphi \rangle$  отображает открытую нижнюю полуплоскость в свое замыкание. Действительно, пусть  $\operatorname{Im} \zeta < 0$ . Тогда  $\operatorname{Im} z > 0$  для всех  $z = \zeta^{-1}$  и, выполняя замену  $\psi = (z - A)^{-1} \varphi$ , имеем

$$\zeta F_\varphi(\zeta) = \langle (z - A)^{-1} \varphi, \varphi \rangle = \langle \psi, (z - A)\psi \rangle = \langle \psi, z\psi \rangle - \langle \psi, A\psi \rangle = \bar{z} \langle \psi, \psi \rangle - \langle A\psi, \psi \rangle.$$

Значит,  $\operatorname{Im}(\zeta F_\varphi(\zeta)) = \|\psi\|^2 \operatorname{Im} \bar{z} \leq 0$ , что и завершает доказательство.

Как известно, поведение резольвенты в окрестности спектра является одной из важнейших характеристик оператора. Результаты раздела 4, примененные к функции  $F_\varphi$ , приводят к следующим утверждениям о граничном поведении оператора Эйлера без использования спектральной теоремы.

**Теорема 15.** Пусть для некоторых мер  $\nu, \mu \in M_+^b([0, 1])$  справедливо разложение Радона – Никодима  $\nu = g\mu + \nu_s$ . Тогда для  $\nu_s$ -н.в.  $x \in [0, 1]$

$$\lim_{y \downarrow 0} \frac{F_{\varphi, \nu}(x + iy)}{F_{\varphi, \mu}(x + iy)} = \infty.$$

**Теорема 16.** Пусть  $A \subset [1, +\infty)$  – ограниченное борелевское множество,  $p \in (0, 1)$ . Тогда  $\nu \perp \mu$ , если и только если

$$\lim_{y \downarrow 0} \int_A \left| \frac{F_{\varphi, \nu}(x + iy)}{F_{\varphi, \mu}(x + iy)} \right|^p d\tilde{\mu}(x) = 0.$$

**Теорема 17.** Пусть мера  $\nu \in M_+^b([0, 1])$  имеет разложение Радона – Никодима  $\nu = g\mu + \nu_{\text{sing}}$  ( $\mu$  – мера Лебега), и  $\sup_{0 < y < 1} \int_A |F_\varphi(x + iy)|^p dx < \infty$  для некоторого  $p > 1$ . Тогда  $\nu_{\varphi, \text{sing}}|_A^{-1} = 0$ .

**Теорема 18.** Мера  $\mu_\varphi$ , отвечающая оператору  $A$ , не имеет атомов на отрезке  $[\beta, \alpha] \subset (0, 1]$ , если и только если

$$\lim_{y \downarrow 0} y^{\alpha-1} \int_{\beta-1}^{\alpha-1} (F_\varphi(x + iy))^2 dx = 0.$$

**Благодарности.** Работа выполнена при поддержке гранта Министерства образования Республики Беларусь для студентов и аспирантов, номер госрегистрации 20180641.

**Acknowledgements.** The work was supported by the grant (State registration number 20180641) from the Ministry of Education of the Republic of Belarus for students and graduate students.

### Список использованных источников

1. Миротин, А. Р. Гармонический анализ на абелевых полугруппах / А. Р. Миротин. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2008. – 207 с.
2. King, F. W. Hilbert transforms: in 2 vol. / F. W. King. – Cambridge University Press, 2009. – Vol. 1. – 858 p. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511721458>
3. Прудников, А. П. Интегралы и ряды: в 3 т. / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. – 2-е изд., испр. – М.: Физматлит, 2002. – Т. 1: Элементарные функции. – 632 с.
4. Widder, D. V. The Laplace transform / D. V. Widder. – N. J.: Princeton Univ. Press, 1946. – 425 p. <https://doi.org/10.1515/9781400876457>
5. Крейн, М. Г. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи / М. Г. Крейн, А. А. Нудельман. – М.: Наука, 1973. – 552 с.
6. Jaksic, V. Topics in spectral theory / V. Jaksic // Lecture Notes in Mathematics. Open Quantum Systems I. The Hamiltonian Approach. – 2006. – Vol. 1880. – P. 235–312. [https://doi.org/10.1007/3-540-33922-1\\_6](https://doi.org/10.1007/3-540-33922-1_6)
7. Дынькин, Е. М. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики / Е. М. Дынькин, С. В. Кисляков, В. П. Хавин. – М.: ВИНТИ, 1987. – Т. 15: Коммутативный гармонический анализ-1. – 304 с.
8. Кусис, П. Введение в теорию пространства  $H^p$  / П. Кусис; под ред. В. П. Хавина. – М.: Мир, 1984. – 368 с.

### References

1. Mirotin A. R. *Harmonic Analysis on Abelian Semigroups*. Gomel, Gomel State University, 2008. 207 p. (in Russian).
2. King F. W. *Hilbert Transforms. Vol. 1*. Cambridge University Press, 2009. 858 p. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511721458>
3. Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. *Integrals and Series. Vol. 1: Elementary functions*. Moscow, Fizmatlit Publ., 2002. 632 p. (in Russian).
4. Widder D. V. *The Laplace transform*. N. J., Princeton Univ. Press, 1946. 425 p. <https://doi.org/10.1515/9781400876457>
5. Kreyn M. G., Nudel'man A. A. *Markov Moments Problem and Extremal Problems*. Moscow, Nauka Publ., 1973. 552 p. (in Russian).
6. Jaksic V. Topics in spectral theory. *Lecture Notes in Mathematics. Open Quantum Systems I. The Hamiltonian Approach*, 2006, vol. 1880, pp. 235–312. [https://doi.org/10.1007/3-540-33922-1\\_6](https://doi.org/10.1007/3-540-33922-1_6)
7. Dyn'kin Ye. M., Kislyakov S. V., Khavin V. P. *The Results of Science and Technology. Modern Problems of Mathematics. Vol. 15: Commutative harmonic analysis-1*. Moscow, All-Russian Institute of Scientific and Technical Information, 1987. 304 p. (in Russian).
8. Koosis P. *Introduction to the  $H_p$  Space*. Cambridge University Press, 1998. 290 p. <https://doi.org/10.1017/cbo9780511470950>.

### Информация об авторе

**Ковалёва Ирина Сергеевна** – аспирант, Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины (ул. Советская, 104, 246019, г. Гомель, Республика Беларусь). E-mail: isida89@list.ru

### Information about the author

**Irina S. Kovalyova** – Postgraduate Student, Francisk Scorina Gomel State University (104, Sovetskaya Str., 246019, Gomel, Republic of Belarus). E-mail: isida89@list.ru

ISSN 1561-2430 (Print)  
ISSN 2524-2415 (Online)

**ФИЗИКА**  
**PHYSICS**

УДК 669.018.6  
<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-480-487>

Поступила в редакцию 20.10.2017  
Received 20.10.2017

**В. В. Углов**

*Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь*

**УПРУГИЕ СВОЙСТВА НАНОСТРУКТУРИРОВАННЫХ МАТЕРИАЛОВ  
И ИХ РАДИАЦИОННАЯ СТОЙКОСТЬ**

**Аннотация.** Проведены расчеты модуля Юнга наноструктурированного материала в зависимости от размеров и объемной доли нанокристаллов на примере объемного nc-TiN/a-Si<sub>3</sub>N<sub>4</sub> нанокompозита. Показано, что определяющую роль здесь играют модули упругости a-Si<sub>3</sub>N<sub>4</sub> матрицы и самих nc-TiN нановключений и их соотношения. Исследована кинетика дефектной подсистемы с учетом рекомбинационных процессов и действия стоков, которыми являются нанокристаллы, при радиационном воздействии на нанокompозит.

**Ключевые слова:** наноструктурированные материалы, упругие модули, радиационное воздействие, напряжения, радиационные дефекты.

**Для цитирования.** Углов, В. В. Упругие свойства наноструктурированных материалов и их радиационная стойкость / В. В. Углов // Вест. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2018. – Т. 54, № 4. – С. 480–487. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-480-487>

**V. V. Uglov**

*Belarusian State University, Minsk, Belarus*

**ELASTIC PROPERTIES OF NANOSTRUCTURED MATERIALS  
AND THEIR RADIATION RESISTANCE**

**Abstract.** Young's modulus of the nc-TiN/a-Si<sub>3</sub>N<sub>4</sub> nanocomposite has been calculated depending on a size and a volume fraction of the nanocrystalline phase. The elastic moduli of a-Si<sub>3</sub>N<sub>4</sub> matrix and nc-TiN nanocrystals as well as their relation show that they play an important role in the total elastic modulus of the nanocomposite. The kinetics of the defect structure during nanocomposite irradiation was investigated taking into account the recombination processes and sinks on the nanocrystals.

**Keywords:** nanostructured materials, elastic moduli, irradiation, stress, radiation defects

**For citation.** Uglov V. V. Elastic properties of nanostructured materials and their radiation resistance. *Vestsi Natsyional'noi akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, vol. 54, no. 4, pp. 480–487 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-480-487>

**Введение.** Одним из путей повышения прочностных свойств, температурной и радиационной стойкости материалов является синтез нанокompозитных систем, представляющих собой в простейшем случае структурированную наноразмерными частицами матрицу [1–5]. Физические свойства матрицы, отдельных наночастиц, их размеры и концентрация в совокупности определяют характеристики полученного таким образом материала. При этом следует учитывать, что между макроскопическим и наноразмерным состояниями должна существовать определенная переходная зона (размерная «граница»  $R_0$ ), обусловленная изменением физических свойств материала при соответствующем изменении его размера. Изменение физико-механиче-

ских, магнитных, теплофизических и других свойств наночастиц может быть связано с деформацией материала, обусловленной поверхностным натяжением, уменьшением координационного числа в приповерхностном слое, изменением его группы симметрии, перестройкой архитектуры электронных оболочек, изменением энергии связи. Существенное влияние на физические свойства нанообъектов могут оказывать также различные дефекты структуры.

**Результаты и их обсуждение.** На примере объемного nc-TiN/a-Si<sub>3</sub>N<sub>4</sub> нанокompозита, состоящего из аморфной a-Si<sub>3</sub>N<sub>4</sub> матрицы и nc-TiN нанокристаллических включений, рассмотрим механизм формирования его упругих свойств и радиационной стойкости.

Поверхностное натяжение, характеризуемое коэффициентом  $\sigma_{\text{нат}}$ , приводит к деформации решетки  $\varepsilon(r)$ , значение которой в рамках теории упругости имеет следующий вид [6]:

$$\varepsilon(r) = -\frac{2\sigma_{\text{нат}} \langle R \rangle^2}{3K(\langle R \rangle^3 - r_0^3)} \left( 1 - \frac{r_0^3}{r^3} \right), \quad (1)$$

где  $K$  – модуль всестороннего сжатия объемного TiN;  $r_0 \sim a_0$ ;  $a_0$  – постоянная решетки TiN в равновесном состоянии,  $a_0 = 4,24 \text{ \AA}$ ;  $r$  – расстояние от поверхности нанокристалла до рассматриваемого слоя;  $\langle R \rangle$  – средний радиус полиэдрического nc-TiN нанокристалла.

Зависимость модуля Юнга нанокристалла от деформации в слое  $r$  можно определить следующей формулой [7]:

$$E(r) = B_0 [1 - 3\gamma\varepsilon(r)] U_b(r), \quad (2)$$

где  $\gamma$  – постоянная Грюнайзена;  $U_b(r)$  – энергия связи;  $n$  – концентрация атомов решетки;  $B_0 = 36n^{2/3} / (a_0 \langle Z(R) \rangle)$ ;  $\langle Z(R) \rangle$  – среднее значение координационного числа в нанокристалле.

Аппроксимация полученных в ряде компьютерных экспериментов зависимостей  $\langle Z(R) \rangle$  может быть выражена следующей формулой [6]:

$$\langle Z(R) \rangle = Z(1 - k_1 e^{-k_2 \langle R \rangle}), \quad (3)$$

где  $Z$  – координационное число объемного TiN;  $k_1$  и  $k_2$  – коэффициенты, которые определяются отдельно для каждого конкретного вещества.

С уменьшением размера nc-TiN нанокристалла наблюдается уменьшение значения энергии связи  $U_b$  [8]. Данная зависимость показана на рис. 1.

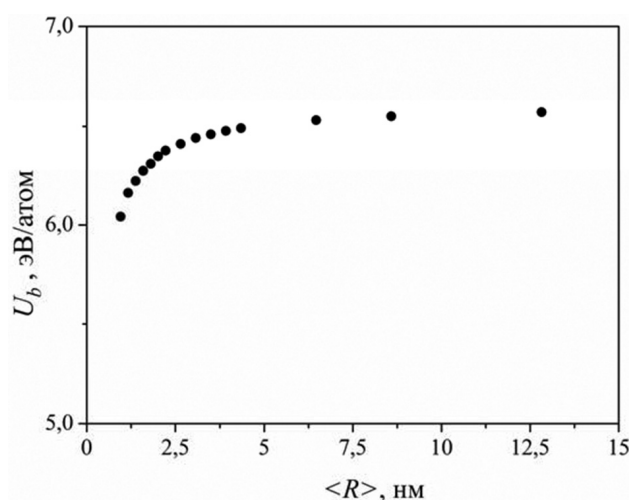


Рис. 1. Зависимость энергии связи свободных nc-TiN нанокристаллов от размера

Fig. 1. Dependence of binding energy on the size of free nc-TiN nanocrystals

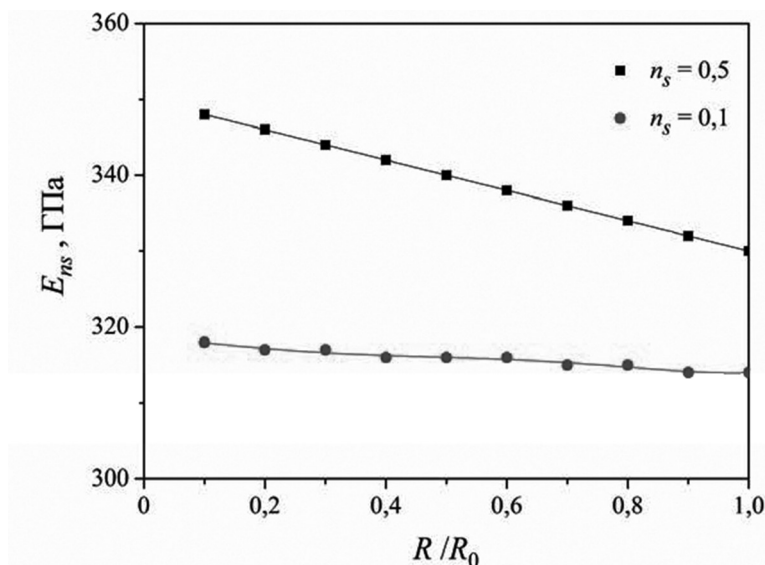


Рис. 2. Зависимость модуля Юнга nc-TiN/a-Si<sub>3</sub>N<sub>4</sub> нанокompозита от размера nc-TiN нанокристаллов и их объемной доли

Fig. 2. Dependence of Young's modulus of nc-TiN/a-Si<sub>3</sub>N<sub>4</sub> nanocomposite on the nanocrystals size and the volume fraction

Зависимость модуля упругости нанокристалла  $E_2(R)$  от его размера  $R$  определялась по [6] как

$$E_2(R) = \frac{1}{V_0} \int_V E(r) dV.$$

Тогда, согласно [9], эффективный модуль упругости Юнга наноструктурированного материала для случая малой объемной доли включений запишется как

$$E_{ns} = \frac{E_1(3E_2 + G_1) + (E_2 - E_1)(3E_1 + G_1)}{3E_2 + G_1} n_s, \quad (4)$$

где  $E_1$  – модуль Юнга матрицы [8],  $E_2 > E_1$ ;  $G_1$  – модуль сдвига матрицы [8],  $G_2 > G_1$ ;  $E_2 = E_2(R)$ ;  $n_s$  – объемная доля нанокристаллов.

На рис. 2 представлены соответствующие зависимости  $E_{ns}(R, n_s)$ . Согласно результатам расчетов, при увеличении объемной доли нанокристаллов и уменьшении их размеров наблюдается увеличение эффективного модуля Юнга nc-TiN/a-Si<sub>3</sub>N<sub>4</sub> нанокompозита. Следует отметить, что упругие модули nc-TiN нанокристаллов больше, чем у аморфной a-Si<sub>3</sub>N<sub>4</sub> матрицы. Поэтому при увеличении их объемной доли они будут оказывать существенное влияние на упругие свойства всего нанокompозита.

В ряде экспериментов показано, что наноструктурированные материалы обладают более высокой радиационной стойкостью [1–3]. Это связывается в первую очередь с геттерирующей способностью наноразмерных включений.

Пусть при облучении рассматриваемого нанокompозита, например нейтронами, скорость генерации радиационных дефектов в единичном объеме в единицу времени равна  $g_{\text{ген}}$ . Скорость генерации радиационных дефектов оценивалась по формуле  $g_{\text{ген}} = K_{\text{см}} \cdot \rho_{\text{яд}}$ , где  $K_{\text{см}}$  – скорость создания смещений (сна/с), сна – смещение на атом,  $\rho_{\text{яд}}$  – ядерная плотность ( $\sim 10^{29} \text{ м}^{-3}$ ). В качестве средней скорости набора дозы было взято значение  $10^{-10}$  сна/с. Температура облучения –  $T = 800^\circ \text{C}$ . Тогда скорость изменения концентрации для дефектов типа  $j$  в объеме можно описать следующим уравнением [10]:

$$\frac{\partial C_j}{\partial t} = g_{\text{ген}} + D_j \Delta C_j - \mu_{\text{рек}} C_i C_v - \frac{D_j}{k_B T} \nabla(C_j \mathbf{F}_j), \quad (5)$$

где  $C_j$  – концентрация радиационных дефектов типа  $j$  ( $i$  – междоузельные атомы,  $v$  – вакансии);  $D_j$  – коэффициент диффузии дефектов типа  $j$ ;  $\mu_{\text{рек}} = (24\pi^2 \Omega N)^{1/3}$  – коэффициент рекомбинации,  $\Omega$  – атомный объем,  $N$  – число атомов в зоне рекомбинации;  $\mathbf{F}_j = \frac{1}{3} \Omega \nabla \sigma$  – силовое поле стока, действующее на дефект типа  $j$ ;  $k_B$  – постоянная Больцмана;  $T$  – абсолютная температура.

Некогерентную границу между плоскими слоями кристаллической и аморфной фаз можно представить в виде дисклинационно-дислокационного ансамбля [11, 12]. Здесь мы упростим модель [11, 12] границы, представив ее в виде системы дислокаций, и выполним оценку упругих напряжений  $\sigma$  для одной грани нанокристалла:

$$\sigma = \frac{(1 + \nu_2) G_2 b \rho_l}{2\pi(1 - \nu_2)} \ln \left( 1 + \frac{L^2}{r^2} \right), \quad (6)$$

где  $b$  – модуль вектора Бюргерса;  $\nu_2$  – коэффициент Пуассона нанокристалла;  $G_2$  – модуль сдвига нанокристалла;  $\rho_l$  – линейная плотность дислокаций,  $L$  – линейный размер грани.

Кинетику радиационных дефектов рассмотрим в системе координат, связанной с аморфной  $\alpha\text{-Si}_3\text{N}_4$  матрицей, т. е. миграцию радиационных дефектов из аморфной фазы на границу раздела. Ограничимся также рассмотрением подсистемы квазивнедренных атомов ( $qi$ ) в аморфной матрице как радиационных дефектов. Это обусловлено спецификой структурных дефектов, связанных с наличием ближнего порядка, в аморфном веществе. Основными точечными дефектами в аморфном  $\alpha\text{-Si}_3\text{N}_4$  являются оборванные связи, неправильные связи (Si-Si и N-N вместо Si-N) и сверхкоординированные атомы [13–15]. При облучении также происходит образование квазивакансий (свободных объемов) и квазивнедренных атомов (оторванных от сетки связей). При взаимодействии между собой вышеперечисленные дефекты могут образовывать сложные дефекты – комплексы. В связи с чем, при полном рассмотрении кинетики процесса с учетом рекомбинации, образования комплексов дефектов и их диссоциации, необходимо знать соответствующие механизмы диффузии и взаимодействия специфических структурных дефектов в аморфном веществе. Из перечисленных каналов реакций при описании кинетики ограничимся рассмотрением действия стока. Тогда уравнение (5) переписывается следующим образом:

$$\frac{\partial C_{qi}}{\partial t} = g_{\text{ген}} + D_{qi} \Delta C_{qi} - \frac{D_{qi}}{k_B T} \nabla(C_{qi} \mathbf{F}_j). \quad (7)$$

В качестве граничных условий для уравнения (7) использовалось краевое условие Робина (3-я краевая задача), соответствующее случаю равновесия диффузионного и дрейфового потоков на границе  $\Gamma$ , для подсистемы квазивнедренных атомов

$$\left( -\nabla C_{qi}(r, t) + \frac{\Omega C_{qi}(r, t)}{3k_B T} \nabla \sigma(r) \right)_{\Gamma} = 0. \quad (8)$$

В качестве начальных условий взята нулевая концентрация рассматриваемых точечных дефектов (9)

$$C_{qi}(r, 0) = 0. \quad (9)$$

Решение системы уравнений (7)–(9) проводится сначала для одной грани нанокристалла, далее результат можно просуммировать по всем граням нанокристалла и обобщить для  $n_s$  количества нанокристаллов, находящихся в единичном объеме. Из проведенных расчетов согласно

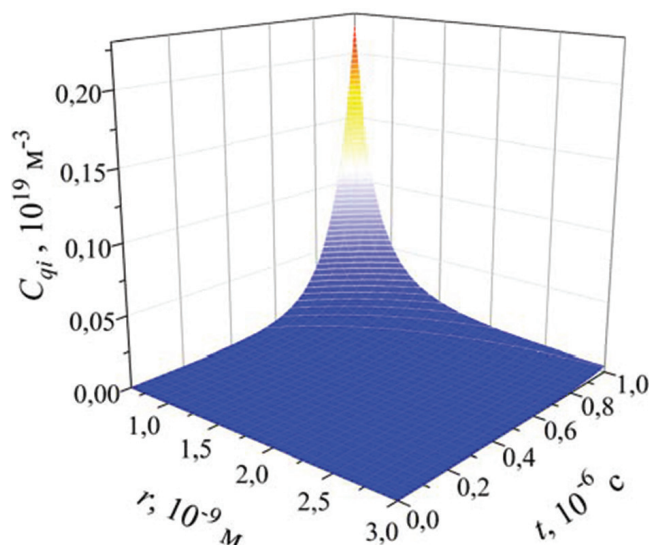


Рис. 3. Зависимость концентрации квазивнедренных атомов при скорости их генерации  $10^{19} \text{ м}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}$  от времени  $t$  и расстояния  $r$  от границы раздела в аморфной  $\text{a-Si}_3\text{N}_4$  фазе

Fig. 3. Dependence of the quasi-interstitials content on the time  $t$  and the distance  $r$  from the interface in the amorphous matrix  $\text{a-Si}_3\text{N}_4$  (quasi-interstitials generation rate  $10^{19} \text{ м}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}$ )

уравнению (7) следует, что количество радиационных дефектов начинает существенно уменьшаться при  $n_s \geq (R_d + 2 < R >)^{-3}$ . Величина  $R_d$  определяется из условия

$$\left| \frac{dU(r)}{dr} \right|_{r=R_d} = 2U_m / a_0,$$

где  $U(r) = -\frac{1}{3} \Delta\Omega\sigma$ ;  $U_m$  – энергия миграции дефекта,  $\Delta\Omega$  – дилатационный объем дефекта ( $\Delta\Omega \sim \Omega$ ).

На рис. 3 представлена зависимость концентрации квазивнедренных атомов при скорости их генерации  $10^{19} \text{ м}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}$  от времени  $t$  и расстояния  $r$  от границы раздела в аморфной  $\text{a-Si}_3\text{N}_4$  фазе. Из графика данного рисунка следует, что имеет место осаждение радиационных дефектов на границу. Поглощая дефекты, сток, таким образом, уменьшает их концентрацию в объеме фазы. Это, естественно, является положительным результатом наноструктурирования материала.

Однако при температурном разогреве, сопровождающем радиационное воздействие на такие материалы, будет иметь место формирование сложного напряженно-деформированного состояния системы. Термоупругие деформации  $\varepsilon_T(r)$  в отдельном нанокристалле могут быть получены из следующего уравнения:

$$\frac{3(1-\nu_2)}{(1+\nu_2)} \nabla(\nabla \mathbf{u}) - \frac{3(1-2\nu_2)}{(1+\nu_2)} \nabla \times \nabla \mathbf{u} = \alpha \nabla T(r, t), \quad (10)$$

где  $\mathbf{u}$  – вектор смещения (деформации);  $\alpha$  – коэффициент линейного температурного расширения;  $T(r, t)$  – температура в нанокристалле;  $\varepsilon_T(r) = du/dr$ .

Напряженное состояние материала вследствие разогрева нанокристалла определялось методом Эшелби путем введения соответствующей деформационной матрицы. Возникающее в результате давление  $P(r, t)$  в матрице будет иметь следующий вид [16]:

$$P(r, t) = \Phi_1(t) \Phi_2(r, t), \quad (11)$$

где

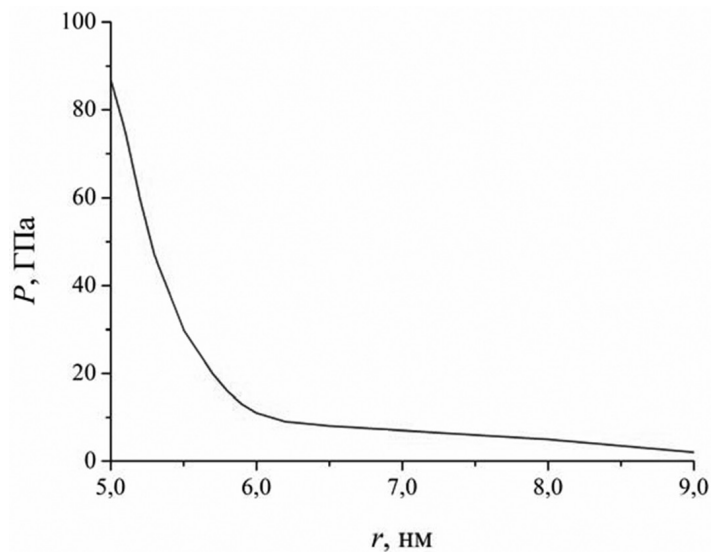


Рис. 4. Пространственный профиль упругих напряжений в окрестности нанокристалла с радиусом 5 нм

Fig. 4. Elastic stress distribution near a nanocrystal with a size of 5 nm

$$\Phi_1(t) = \frac{2}{9} \frac{\alpha E_1 (1 - 2\nu_2) (1 + \nu_2) K_2}{\xi(t) (1 + \nu_2^2) [3(1 - \nu_2) K_1 - (1 + \nu_2) (K_2 - K_1)]},$$

$K_2$  – модуль сжатия нанокристалла;

$$\Phi_2(r, t) = \frac{2}{r^2} + 2\xi(t)e^{-\xi(t)r^2} - \frac{2}{r^3} \int_0^r e^{-\xi(t)r'^2} dr' + \frac{2(1 - 2\nu_2)}{(1 + \nu_2) \langle R \rangle^3} \int_0^{\langle R \rangle} e^{-\xi(t)r'^2} dr' - \frac{2(1 - 2\nu_2)}{(1 + \nu_2) \langle R \rangle^2} e^{-\xi(t)r^2},$$

$$\xi(t) = \frac{1}{4Dt}.$$

На рис. 4 показан профиль давления в матрице в результате единичного акта взаимодействия ускоренного иона с материалом. Такой уровень давления очевидно будет приводить к локальному разрушению материала. Здесь возникает также проблема, связанная с размерными эффектами в нанокристаллах. В связи с уменьшением координационного числа и энергии связи при уменьшении размеров нанокристаллов будет также уменьшаться и температура его плавления

$$T_{\text{пл}}(\langle R \rangle) = T_{\text{пл}}^0 (1 - k_3 e^{-k_4 \langle R \rangle}), \quad (12)$$

где  $T_{\text{пл}}^0$  – температура плавления объемного TiN;  $k_3$  и  $k_4$  – коэффициенты, которые определяются отдельно для каждого конкретного вещества.

Из вышесказанного следует, что возможно ухудшение жаропрочных свойств наноструктурированных материалов.

**Заключение.** Наноструктурирование материалов позволяет управлять как их упругими свойствами, так и радиационной стойкостью. Различие упругих характеристик матрицы и нановключений может приводить при радиационном нагреве к разрушению наноструктурированного материала. Избежать негативных явлений, сохранив при этом положительный эффект от наноструктурирования, возможно на пути формирования многослойных систем с наноразмерной толщиной слоев.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Stability of Ti–Zr–N coatings under Xe-ion irradiation / V. V. Uglov [et al.] // *Surf. Coat. Technol.* – 2010. – Vol. 204, № 12/13. – P. 2095–2098. <https://doi.org/10.1016/j.surfcoat.2009.11.023>
2. Ion-induced phase transformations in nanostructural TiZrAlN films / V. V. Uglov [et al.] // *Surf. Coat. Technol.* – 2014. – Vol. 255. – P. 112–117. <https://doi.org/10.1016/j.surfcoat.2014.03.003>
3. Features of microstructure of ZrN, Si<sub>3</sub>N<sub>4</sub> and ZrN/SiN<sub>x</sub> nanoscale films irradiated by Xe ions / V. V. Uglov [et al.] // *Vacuum*. – 2017. – Vol. 143. – P. 491–494. <https://doi.org/10.1016/j.vacuum.2017.03.015>
4. Углов, В. В. Радиационные эффекты в твердых телах / В. В. Углов. – Минск: Белорус. гос. ун-т, 2011. – 207 с.
5. Углов, В. В. Радиационные процессы и явления в твердых телах / В. В. Углов. – Минск: Выш. шк., 2016. – 188 с.
6. On physical properties of nanoparticles: size effect and scale of nanoobjects / V. V. Uglov [et al.] // *Phys. Status Solidi C*. – 2016. – Vol. 13, № 10/12. – P. 903–907. <https://doi.org/10.1002/pssc.201600039>
7. Штремель, М. А. Прочность сплавов. Дефекты решетки / М. А. Штремель. – М.: Metallurgiya, 1982. – 280 с.
8. Modeling of microstructure and elastic properties of nc-TiN/a-Si<sub>3</sub>N<sub>4</sub> nanocomposite / I. V. Safronov [et al.] // *Comput. Mater. Sci.* – 2016. – Vol. 123. – P. 256–262. <https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2016.06.006>
9. Кристенсен, Р. Введение в механику композитов / Р. Кристенсен. – М.: Мир, 1982. – 334 с.
10. Зеленский, В. Ф. Радиационные дефекты и набухание металлов / В. Ф. Зеленский, И. М. Неклюдов, Т. П. Черняева. – Киев: Наук. думка, 1988. – 236 с.
11. Nanoscale defect structures at crystal–glass interfaces / S. V. Bobylev [et al.] // *J. Phys. Condens. Matter*. – 2005. – Vol. 17, № 4. – P. 619–634. <https://doi.org/10.1088/0953-8984/17/4/005>
12. Дефекты и отслаивание аморфных нанополюсов от кристаллических подложек / С. В. Бобылев [и др.] // *Физика твердого тела*. – 2006. – Т. 48, № 2. – С. 248–254.
13. Robertson, J. Electronic structure of defects in amorphous silicon nitride/ J. Robertson // *MRS Proceedings*. – 1992. – Vol. 284. – P. 65–76. <https://doi.org/10.1557/proc-284-65>
14. Vedula, R. P. Effect of topological disorder on structural, mechanical, and electronic properties of amorphous silicon nitride: An atomistic study / R. P. Vedula, N. L. Anderson, A. Strachan // *Phys. Rev. B*. – 2012. – Vol. 85, № 20. – P. 205209–11. <https://doi.org/10.1103/physrevb.85.205209>
15. Density functional theory study of the structural and electronic properties of amorphous silicon nitrides: Si<sub>3</sub>N<sub>4-x</sub>:H/L. E. Hintzsche [et al.] // *Phys. Rev. B*. – 2012. – Vol. 86, № 23. – P. 235204–13. <https://doi.org/10.1103/physrevb.86.235204>
16. Радиационно-динамические процессы в наноструктурированных кристаллах при облучении ионами / В. В. Углов [и др.] // *Изв. вузов. Физика*. – 2017. – Т. 60, № 10. – С. 125–130.

## References

1. Uglov V. V., Rusalski D. P., Zlotski S. V., Sevriuk A. V., Abadias G., Kislitsin S. B., Kadyrzhanov K. K., Gorlachev I. D., Dub S. N. Stability of Ti–Zr–N coatings under Xe-ion irradiation. *Surface and Coatings Technology*, 2010, vol. 204, no. 12–13, pp. 2095–2098. <https://doi.org/10.1016/j.surfcoat.2009.11.023>
2. Uglov V. V., Zlotski S. V., Saladukhin I. A., Rovbut A. Y., Gaiduk P. I., Abadias G., Tolmachova G. N., Dub S. N. Ion-induced phase transformations in nanostructural TiZrAlN films. *Surface and Coatings Technology*, 2014, vol. 255, pp. 112–117. <https://doi.org/10.1016/j.surfcoat.2014.03.003>
3. Uglov V. V., Abadias G., Zlotski S. V., Saladukhin I. A., Safronov I. V., Shymanski V. I., Janse van Vuuren A., O'Connell J., Skuratov V., Neethling J. H. Features of microstructure of ZrN, Si<sub>3</sub>N<sub>4</sub> and ZrN/SiN<sub>x</sub> nanoscale films irradiated by Xe ions. *Vacuum*, 2017, vol. 143, pp. 491–494. <https://doi.org/10.1016/j.vacuum.2017.03.015>
4. Uglov V. V. *Radiation effects in solids*. Minsk, Belarusian State University Publ., 2011. 207 p. (in Russian).
5. Uglov V. V. *Radiation processes and phenomena in solids*. Minsk, Vysheishaya shkola Publ., 2016. 188 p. (in Russian).
6. Uglov V. V., Doroshevich I. L., Kvasov N. T., Remnev G. E., Shymanski V. I. On physical properties of nanoparticles: size effect and scale of nanoobjects. *Physica Status Solidi (c)*, 2016, vol. 13, no. 10–12, pp. 903–907. <https://doi.org/10.1002/pssc.201600039>
7. Shtremel' M. A. *Alloy Strength. Lattice Defects*. Moscow, Metallurgiya Publ., 1982. 280 p. (in Russian).
8. Safronov I. V., Shymanski V. I., Uglov V. V., Kvasov N. T., Dorozhkin N. N. Modeling of microstructure and elastic properties of nc-TiN/a-Si<sub>3</sub>N<sub>4</sub> nanocomposite. *Computational Materials Science*, 2016, vol. 123, pp. 256–262. <https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2016.06.006>
9. Christensen R. M. *Mechanics of Composite Materials*. New York, Wiley, 1979. 334 p. <https://doi.org/10.1016/C2013-0-03667-5>
10. Zelenskii V. F., Neklyudov I. M., Chernyaeva T. P. *Radiation Defect and Metals Swelling*. Kiev, Navukova dumka Publ., 1988. 236 p. (in Russian).
11. Bobylev S. V., Ovidko I. A., Romanov A. E., Sheinerman A. G. Nanoscale defect structures at crystal–glass interfaces. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 2005, vol. 17, no. 4, pp. 619–634. <https://doi.org/10.1088/0953-8984/17/4/005>
12. Bobylev S. V., Ovidko I. A., Romanov A. E., Sheinerman A. G. Defects and separation of amorphous nanofilms from crystalline substrates. *Physics of the Solid State*, 2006, vol. 48, no. 2, pp. 264–271. <https://doi.org/10.1134/s1063783406020120>
13. Robertson J. Electronic structure of defects in amorphous silicon nitride. *MRS Proceedings*, 1992, vol. 284, pp. 65–76. <https://doi.org/10.1557/proc-284-65>

14. Vedula R. P., Anderson N. L., Strachan A. Effect of topological disorder on structural, mechanical, and electronic properties of amorphous silicon nitride: An atomistic study. *Physical Review B*, 2012, vol. 85, no. 20, pp. 205209-11. <https://doi.org/10.1103/physrevb.85.205209>
15. Hintzsche L. E., Fang C. M., Watts T., Marsman M., Jordan G., Lamers M. W. P. E., Weber A. W., Kresse G. Density functional theory study of the structural and electronic properties of amorphous silicon nitrides:  $\text{Si}_3\text{N}_{4-x}\text{H}$ . *Physical Review B*, 2012, vol. 86, no. 23, pp. 235204-13. <https://doi.org/10.1103/physrevb.86.235204>
16. Uglov V. V., Kvasov N. T., Shimanski V. I., Safronov I. V., Komarov N. D. Dynamic Processes in Nanostructured Crystals Under Ion Irradiation. *Russian Physics Journal*, 2017, vol. 60, no. 10, pp. 1787–1793. <https://doi.org/10.1007/s11182-018-1282-0>

### Информация об авторе

**Углов Владимир Васильевич** – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой физики твердого тела физического факультета, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: [Uglov@bsu.by](mailto:Uglov@bsu.by)

### Information about the author

**Vladimir V. Uglov** – D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Solid State Physics Department of the Physics Faculty, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: [Uglov@bsu.by](mailto:Uglov@bsu.by)

ISSN 1561-2430 (Print)

ISSN 2524-2415 (Online)

УДК 535.3+535.5

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-488-498>

Поступила в редакцию 03.04.2018

Received 03.04.2018

Н. С. Петров<sup>1</sup>, С. Н. Курилкина<sup>2</sup>, А. Б. Зимин<sup>3</sup>, В. Н. Белый<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт повышения квалификации по новым направлениям развития техники, технологий и экономики Белорусского национального технического университета, Минск, Беларусь

<sup>2</sup>Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

<sup>3</sup>Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь

## СВОЙСТВА И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОСОБЫХ НЕОДНОРОДНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ МЕТАМАТЕРИАЛАХ

**Аннотация.** Показано, что в условиях полного отражения плоских однородных электромагнитных волн на границе гиперболического метаматериала с обычной изотропной средой при определенных условиях вблизи поверхности метаматериала возбуждаются особые неоднородные электромагнитные волны. Их особенность заключается в том, что амплитуда таких волн изменяется при удалении от границы по неэкспоненциальному закону. Получены условия существования особых неоднородных волн и показано, что для этого оптическая ось метаматериала должна составлять определенный угол с плоскостью падения, зависящий от ее ориентации относительно главной плоскости метаматериала и оптических свойств граничащих сред. Найдены поток и плотность энергии особых неоднородных волн в гиперболическом метаматериале.

**Ключевые слова:** гиперболический метаматериал, неоднородная электромагнитная волна, плотность энергии, поток энергии

**Для цитирования.** Свойства и энергетические характеристики особых неоднородных электромагнитных волн в гиперболических метаматериалах / Н. С. Петров [и др.] // Вест. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2018. – Т. 54, № 4. – С. 488–498. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-488-498>

N. S. Petrov<sup>1</sup>, S. N. Kurilkina<sup>2</sup>, A. B. Zimin<sup>3</sup>, V. N. Belyi<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Institute for Advanced Training and Retraining of Personnel on New Directions for the Development of Technics, Technology and Economics of the Belarusian National Technical University, Minsk, Belarus

<sup>2</sup>B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

<sup>3</sup>Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Belarus

## FEATURES AND ENERGY CHARACTERISTICS OF SPECIAL INHOMOGENEOUS ELECTROMAGNETIC WAVES IN HYPERBOLIC METAMATERIALS

**Abstract.** In this paper, it is shown that under the conditions of total internal reflection of plane homogeneous electromagnetic waves at the interface of a hyperbolic metamaterial and an ordinary isotropic medium, special inhomogeneous electromagnetic waves are excited in certain circumstances near the surface of the metamaterial and their amplitude changes with distance according to the non-exponential law. The existence conditions for such waves are established for the case when the optical axis is located within the interface plane and forms an angle with the plane of incidence. The energy flux and the energy density of special inhomogeneous waves in a hyperbolic metamaterial are determined.

**Keywords:** hyperbolic metamaterial, inhomogeneous electromagnetic wave, energy density, energy flux

**For citation.** Petrov N. S., Kurilkina S. N., Zimin A. B., Belyi V. N. Features and energy characteristics of special inhomogeneous electromagnetic waves in hyperbolic metamaterials. *Vestsi Natsyional'nei akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk* = *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, vol. 54, no. 4, pp. 488–498 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-488-498>

**Введение.** В течение последнего десятилетия появилось большое число публикаций, посвященных исследованию метаматериалов, проявляющих электромагнитные свойства, не характерные для обычных сред [1, 2]. Это обусловлено перспективами их использования для управления световыми пучками, в литографии – для получения изображений с субволновым разрешением [3, 4]. Такие среды могут быть описаны усредненными (эффективными) проницаемостями (диэлектрической  $\epsilon$  и магнитной  $\mu$ ), отличающимися от таковых для образующих их материалов [5]. Эффективные проницаемости метаматериалов существенно зависят от геометрических размеров нановключений и их взаимного расположения. Таким образом, путем изменения данных

параметров можно получать электромагнитный отклик среды и, следовательно, достигать эффективных значений  $\epsilon$  и  $\mu$ , невозможных для естественных анизотропных материалов.

Одним из видов метаматериалов являются гиперболические метаматериалы (ГММ), для которых предполагается  $\mu \approx 1$ , а описывающий их диагональный тензор диэлектрической проницаемости  $\epsilon = \text{diag}\{\epsilon_t, \epsilon_t, \epsilon_l\}$  имеет главные значения (поперечную  $\epsilon_t$  и продольную  $\epsilon_l$  проницаемости), различающиеся знаком [6]. Это обуславливает появление гиперболической (а не эллиптической, наблюдаемой у обычных диэлектриков) дисперсии. Существуют два типа ГММ [7]: а) тип I ( $\epsilon_t < 0, \epsilon_l > 0$ ), характеризуемый дисперсионной поверхностью, которая представляет собой двухполостный гиперболоид; б) тип II ( $\epsilon_t > 0, \epsilon_l < 0$ ), дисперсионная поверхность для которого является однополостным гиперболоидом. Отметим, что с помощью слоистых металлodieлектрических структур можно реализовать гиперболические метаматериалы, относящиеся к типам I или II в различных спектральных диапазонах.

Ряд важных практических применений метаматериалов (в частности, в сенсорике, ближнепольной микроскопии, в системах получения изображений) обусловлен особенностями формируемых вблизи их поверхности электромагнитных волн. Среди них выделим локализованные поверхностные волны, экспоненциально затухающие при удалении от границы раздела, вдоль которой они распространяются [8]. Наиболее известный тип локализованных оптических поверхностных волн – поверхностные плазмон-поляритоны – ТМ-поляризованные волны, формируемые на границе металла и диэлектрика [8–10]. Недавно установлено, что если гиперболический метаматериал ориентирован нормально поверхностям образующих его слоев, на границе его раздела с диэлектриком оказывается возможным возникновение локализованных поверхностных волн особого типа – волн Дьяконова, которые распространяются практически без поглощения [11, 12].

В значительно меньшей степени изучено распространение нелокализованных волн. Среди них особое место занимают неоднородные волны, у которых плоскости равных фаз и равных амплитуд не параллельны между собой. Такие волны возникают, например, в прозрачных средах при полном отражении света, а также при наклонном падении излучения в поглощающих (усиливающих) материалах. В монографии [13] показана возможность существования неоднородных волн особого вида, удовлетворяющих уравнениям Максвелла, векторная амплитуда которых, наряду с экспоненциальной зависимостью от координат, содержит также линейную зависимость. Такие особые неоднородные волны возникают, в частности, при полном отражении в оптически одноосном прозрачном кристалле при отсутствии в нем явления двулучепреломления [14]. В данной работе анализируется возможность появления подобных неоднородных волн особого типа на границе гиперболического метаматериала.

**Аномальное полное отражение на границе раздела изотропного диэлектрика и гиперболического метаматериала.** Рассмотрим метаматериал, образованный слоисто-периодической металлodieлектрической наноструктурой. В приближении эффективной среды, когда толщина каждого слоя достаточно мала, т. е.  $|k_d d_d| \ll 1, |k_m d_m| \ll 1$ , где  $k_d, k_m$  – соответственно волновые числа диэлектрического и металлического слоев, многослойная структура может рассматриваться как анизотропная эффективная среда с тензором проницаемости, представимым в виде

$$\epsilon = \text{diag}\{\epsilon_t, \epsilon_t, \epsilon_l\} = \epsilon_t + \delta \mathbf{c} \cdot \mathbf{c}, \quad (1)$$

где  $\delta = \epsilon_l - \epsilon_t$ ,  $\mathbf{c}$  – единичный вектор вдоль оптической оси ГММ, точкой между векторами обозначено их диадное произведение ( $\mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = c_i c_k$ ). При этом

$$\epsilon_t = (1 - f)\epsilon_d + f\epsilon_m; \quad \epsilon_l = [(1 - f)/\epsilon_d + f/\epsilon_m]^{-1}. \quad (2)$$

Здесь  $f = d_m/(d_m + d_d)$  – фактор заполнения (объемная доля, занимаемая в структуре металлом). Диэлектрическая проницаемость металла  $\epsilon_m$  описывается формулой Друде

$$\epsilon_m(\omega) = \epsilon_\infty - \omega_p^2 / (\omega^2 + i\omega\Gamma) = \epsilon_\infty - \omega_p^2 / (\omega^2 + \Gamma^2) + i\omega_p^2 \Gamma / [\omega(\omega^2 + \Gamma^2)], \quad (3)$$

где  $\omega = 2\pi/\lambda$  – циклическая частота,  $\lambda$  – длина волны оптического излучения в вакууме,  $\omega_p$  – плазменная частота,  $\varepsilon_\infty$  – постоянная, описывающая вклад межзонных переходов,  $\Gamma = V_F/l$  – постоянная затухания,  $V_F$  – скорость Ферми,  $l$  – среднее значение свободного пути электрона в объемном металле. Для серебра, например,  $\varepsilon_\infty = 5$ ,  $\omega_p = 14 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$ ,  $\Gamma = 32 \cdot 10^{12} \text{ с}^{-1}$ ,  $V_F = 1,4 \cdot 10^6 \text{ мс}^{-1}$  [1].

Для упрощения рассмотрения мы будем предполагать, что в уравнении (2)  $\text{Im}(\varepsilon_\parallel) \approx 0$ ,  $\text{Im}(\varepsilon_\perp) \approx 0$ . Как показывает расчет [15], данное допущение справедливо вдали от спектральных областей, для которых эффективные диэлектрические проницаемости ГММ близки к нулю.

Пусть данный гиперболический метаматериал граничит с изотропной средой, диэлектрическая проницаемость которой равна  $\varepsilon_l$  (рис. 1).

В приближении эффективной среды распространяющиеся в метаматериале обыкновенная (o) и необыкновенная (e) волны удовлетворяют уравнениям [13]:

$$\mathbf{m}_o^2 = \varepsilon_l, \quad \mathbf{m}_e \varepsilon \mathbf{m}_e = \varepsilon_l \varepsilon_l. \quad (4)$$

Здесь  $\mathbf{m}$  – вектор рефракции волны, впервые введенный в кристаллооптике Ф. И. Федоровым [13]. Подставляя (1) в (4), можно показать, что при условии

$$[\mathbf{m}_{o,e} \mathbf{c}]^2 = 0 \quad (5)$$

векторы рефракции обыкновенной и необыкновенной волн в ГММ совпадают ( $\mathbf{m}^2 = \mathbf{m}_o^2 = \mathbf{m}_e^2$ ) и двулучепреломление отсутствует.

Рассмотрим случай полного отражения света на границе изотропного диэлектрика и ГММ, при котором выполняется условие (5). Вектор рефракции  $\mathbf{m}$  в этом случае является комплексным, и его можно представить с учетом закона преломления в виде

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}' + i\mathbf{m}'' = \xi \mathbf{b} + i\gamma \mathbf{q}. \quad (6)$$

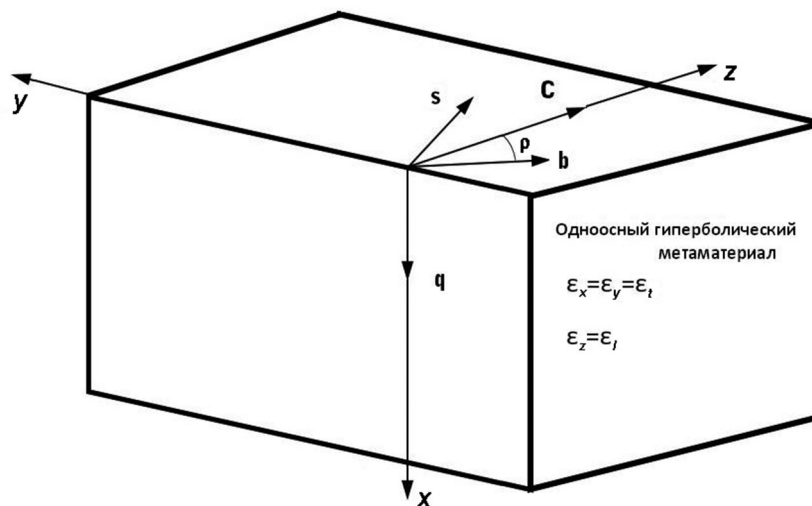


Рис. 1. Графическое представление рассматриваемой структуры в приближении эффективной среды:  $\mathbf{c}$  – единичный вектор вдоль оптической оси;  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{s}$  – тройка единичных векторов, где  $\mathbf{q}$  – вектор, ортогональный границе раздела;  $(\mathbf{c}, \mathbf{q})$  – главная плоскость ГММ;  $(\mathbf{b}, \mathbf{q})$  – плоскость падения световой волны на ГММ, повернутая относительно главной плоскости ГММ на угол  $\rho$

Fig. 1. The structure under investigation in the effective-medium approximation:  $\mathbf{c}$  is the unit vector along the optical axis;  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{s}$  are the unit vectors,  $\mathbf{q}$  is the vector orthogonal to the bordered plane;  $(\mathbf{c}, \mathbf{q})$  is the principal section of HMM;  $(\mathbf{b}, \mathbf{q})$  is the plane of light incidence turned relatively to the principal section of HMM by an angle  $\rho$

Здесь  $\xi = n_1 \sin \alpha$ ,  $n_1 = \sqrt{\varepsilon_1}$ ,  $\eta = i\gamma$ , где  $\gamma = \sqrt{\xi^2 - \varepsilon_t}$ ,  $\alpha$  – угол падения света,  $\mathbf{b} = [\mathbf{q}\mathbf{s}]$ ,  $\mathbf{s} = [\mathbf{b}\mathbf{q}]$ , причем векторы  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{s}$  образуют правую тройку взаимно ортогональных ортов (см. рис. 1). Используя (6), можно убедиться, что соотношение (5) справедливо при одновременном выполнении двух условий:

$$\mathbf{qc} = 0, \quad \xi^2(\mathbf{bc})^2 = \xi^2(\mathbf{s}[\mathbf{qc}])^2 = \xi^2 \cos^2 \rho = \varepsilon_t, \quad (7)$$

где  $\rho$  – угол между плоскостью падения  $(\mathbf{b}, \mathbf{q})$  и главной плоскостью  $(\mathbf{q}, \mathbf{c})$  гиперболического метаматериала. Отсюда следует, что условие (7) (и, следовательно, (5)) может быть реализовано лишь в ГММ типа I.

Найдем далее решение волнового уравнения в случае гармонически зависящего от времени вектора электрической напряженности  $\mathbf{E} \sim \exp(-i\omega t)$

$$\text{grad div} \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E} - k_0^2 \varepsilon \mathbf{E} = 0, \quad (8)$$

где  $k_0 = \omega/c$ . При совпадении показателей преломления обеих волн (обыкновенной и необыкновенной) решение (8) будем искать в виде

$$\mathbf{E} = (\mathbf{f}_1 + \zeta' \mathbf{f}_2) \exp(i\zeta). \quad (9)$$

Здесь  $\mathbf{f}_1$ ,  $\mathbf{f}_2$  – векторные амплитуды волн,  $\zeta = k_0 \mathbf{m} \mathbf{r}$ ,  $\zeta' = k_0 \mathbf{q} \mathbf{r}$  ( $\mathbf{r}$  – радиус-вектор). Следует отметить, что линейная функция в скобках в (9) зависит от другой переменной ( $\zeta'$ ), чем экспонента ( $\zeta$ ). Выбор решения в виде (9) обусловлен необходимостью удовлетворить граничным условиям, а также тем, что амплитуда волны в случае полубесконечной отражающей среды в одномерном случае будет зависеть лишь от глубины проникновения волны, пропорциональной параметру  $\zeta'$ .

Подставляя выражение (9) в (8), получаем следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \theta \mathbf{f}_1 - i\beta \mathbf{f}_2 + \zeta' \theta \mathbf{f}_2 &= 0, \\ \theta &= \mathbf{m} \cdot \mathbf{m} - m^2 + \varepsilon, \quad \beta = \mathbf{m} \cdot \mathbf{q} + \mathbf{q} \cdot \mathbf{m} - 2\mathbf{mq}. \end{aligned} \quad (10)$$

Поскольку уравнение (10) должно выполняться тождественно (т. е. при любых  $\zeta'$ ), отсюда следует

$$\theta \mathbf{f}_2 = 0, \quad \theta \mathbf{f}_1 - i\beta \mathbf{f}_2 = 0. \quad (11)$$

Ненулевые решения для  $\mathbf{f}_2$  существуют лишь при условии  $\det \theta = 0$ , что представляет собой записанное в ковариантной форме уравнение нормалей (см. [13]). С учетом (1) и (4) уравнение (11) для определения вектора  $\mathbf{f}_2$  принимает вид

$$(\mathbf{m} \cdot \mathbf{m} + \delta \mathbf{c} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{f}_2 = 0. \quad (12)$$

Отсюда следует, что  $\mathbf{f}_2 \parallel [\mathbf{mc}]$ , т. е.

$$\mathbf{f}_2 = t[\mathbf{mc}]. \quad (13)$$

Для нахождения искомого вектора  $\mathbf{f}_1$  представим его в виде разложения по трем взаимно ортогональным ортам  $(\mathbf{s}, \mathbf{b}, \mathbf{q})$

$$\mathbf{f}_1 = t_1 \mathbf{s} + t_2 \mathbf{b} + t_3 \mathbf{q}. \quad (14)$$

Из (11) с учетом (14) и (13) получаем

$$\mathbf{f}_1 = \frac{i}{\delta \sqrt{\varepsilon_t}} \left\{ \frac{\xi \delta}{\gamma} [\mathbf{mc}] t_1 + i \sqrt{\varepsilon_t} (2[\mathbf{ms}] - \delta \mathbf{q}) t \right\}. \quad (15)$$

Здесь  $\delta = \varepsilon_e - \varepsilon_t$ . Подставляя (13), (15) в (9), для вектора напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$  получаем следующее выражение:

$$\mathbf{E} = \{C_1[\mathbf{mc}] + C_2(\mathbf{d} + \delta\zeta'[\mathbf{mc}])\}\exp(i\zeta). \quad (16)$$

Для вектора напряженности магнитного поля  $\mathbf{H}$  волны имеем

$$\mathbf{H} = \frac{1}{ik_o} \text{rot} \mathbf{E} = \{C_1[\mathbf{m}[\mathbf{mc}]] + C_2(\mathbf{d}_1 + \delta\zeta'[\mathbf{m}[\mathbf{mc}]])\}\exp(i\zeta). \quad (17)$$

Здесь использованы обозначения:  $\mathbf{d} = \delta\mathbf{q} - 2\xi[\mathbf{ms}]$ ,  $\mathbf{d}_1 = [\mathbf{md}] - i\delta[\mathbf{q}[\mathbf{mc}]]$ ,  $C_1, C_2$  – скалярные амплитуды волн, определяемые из граничных условий.

Неоднородная волна, описываемая выражениями (16), (17), как видно, представляет собой суперпозицию двух плоских волн, распространяющихся с одинаковой скоростью  $V = \frac{c}{\xi}$ , но с различными поляризациями. Так как вектор при  $C_1$  является круговым ( $[\mathbf{mc}]^2 = 0$ ), то соответствующая часть вектора  $\mathbf{E}$  представляет собой волну круговой поляризации. Вторая же часть  $\mathbf{E}$  с множителем  $C_2$  является волной с переменной поляризацией, поскольку ее векторная амплитуда изменяется с глубиной проникновения волны ( $\sim \zeta'$ ) в отражающий гиперболический метаматериал.

Решая граничную задачу о полном отражении света на поверхности раздела изотропная среда – гиперболический метаматериал, можно определить амплитуды  $C_1, C_2$ . Используя разложение векторов напряженности падающей  $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$  и отраженной  $\mathbf{E}'_1, \mathbf{H}'_1$  волн на компоненты, параллельные и перпендикулярные плоскости падения

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= A_1\mathbf{s} + B_1[\mathbf{n}_1\mathbf{s}], & \mathbf{E}'_1 &= A'_1\mathbf{s} + B'_1[\mathbf{n}'_1\mathbf{s}], \\ \mathbf{H}_1 &= A_1[\mathbf{m}_1\mathbf{s}] - B_1n_1\mathbf{s}, & \mathbf{H}'_1 &= A'_1[\mathbf{m}'_1\mathbf{s}] - B'_1n_1\mathbf{s}, \end{aligned} \quad (18)$$

где  $\mathbf{m}_1 = n_1\mathbf{n}_1$ ,  $\mathbf{m}'_1 = n_1\mathbf{n}'_1$ ,  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}'_1$  – единичные векторы волновых нормалей падающей и отраженной волн,  $A_1(B_1), A'_1(B'_1)$  – амплитуды, а также стандартные граничные условия, можно получить систему двух векторных уравнений, сводимую к четырем скалярным уравнениям, для нахождения неизвестных амплитуд  $A'_1, B'_1, C_1, C_2$ . Ее решение имеет следующий вид:

$$A'_1 = \frac{1}{\xi^2\Delta_1} \left\{ \left[ 2\xi^2PU + \delta(\varepsilon_t\eta_1^2 - \varepsilon_l\gamma^2) \right] A_1 - 2\gamma\eta_1\delta\sqrt{\varepsilon_t\varepsilon_1} B_1 \right\}, \quad (19)$$

$$B'_1 = \frac{1}{\xi^2\Delta_1} \left\{ \left[ 2\xi^2P^*U^* + \delta(\varepsilon_t\eta_1^2 - \varepsilon_l\gamma^2) \right] B_1 + 2\gamma\eta_1\delta\sqrt{\varepsilon_t\varepsilon_1} A_1 \right\},$$

$$C_1 = \frac{2i\eta_1}{\xi\gamma\sqrt{\varepsilon_t}\Delta} \left[ (2\xi^2U + \varepsilon_t\eta_1\delta)A_1 - \gamma\delta\sqrt{\varepsilon_t\varepsilon_1}B_1 \right], \quad (20)$$

$$C_2 = \frac{2i\eta_1}{\xi\sqrt{\varepsilon_t}\Delta} \left[ UA_1 + i\sqrt{\varepsilon_t\varepsilon_1}P^*B_1 \right].$$

Здесь  $\eta_1 = \sqrt{\varepsilon_1} \cos \alpha$ ,  $\Delta_1 = 2P^*U^* + \delta(\varepsilon_1 - \varepsilon_t)$ ,  $P = \eta_1 - i\gamma$ ,  $U = \varepsilon_t\eta_1 + i\varepsilon_l\gamma$ .

**Поток энергии и плотность энергии в случае особых неоднородных волн.** Рассмотрим теперь энергетические характеристики особой неоднородной волны при  $C_1 = 0$ . Проанализируем закономерности поведения вектора Умова – Пойнтинга  $\mathbf{S} = \text{Re}[\mathbf{E}\mathbf{H}^*]/8\pi$  и плотности энергии  $W$  особых неоднородных волн в гиперболическом метаматериале типа I, для которого  $\varepsilon_l < 0$ ,  $\varepsilon_t > 0$ . Из (16), (17), (20) при этом получаем

$$\begin{aligned}
\mathbf{S} &= \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2, \\
\mathbf{S}_1 &= \frac{c\sqrt{\varepsilon_t}}{8\pi\xi} |C_2|^2 \left[ (a - 2\xi^2)^2 - 2\gamma a(a - 2\xi^2)\zeta' + 2(\gamma a)^2 \zeta'^2 \right] \exp(-2\gamma\zeta') \mathbf{b}, \\
\mathbf{S}_2 &= \frac{c\sqrt{\varepsilon_t}}{8\pi\xi} |C_2|^2 a\gamma \left[ a - 2\xi^2 - 2\gamma(a - 2\xi^2)\zeta' + 2\gamma^2 a \zeta'^2 \right] \exp(-2\gamma\zeta') \mathbf{s}, \\
a &= |\varepsilon_t| + \varepsilon_t > 0.
\end{aligned} \tag{21}$$

Отсюда видно, что нормальная составляющая среднего потока энергии  $\mathbf{S}$  отсутствует ( $\mathbf{S}_q = 0$ ). В тоже время, как следует из (21), имеется компонента потока энергии, перпендикулярная плоскости падения (вдоль вектора  $\mathbf{s}$ ), наличие которой приводит к тому, что в условиях полного отражения, наряду с продольным смещением отраженного луча вдоль границы раздела сред (вдоль вектора  $\mathbf{b}$ ), имеет место эффект бокового смещения луча. На рис. 2, 3 представлены зависимости  $\mathbf{S}_{1,2}(\zeta'/k_0)$  для особой неоднородной волны, формируемой на границе стекла BK7 ( $\varepsilon_1 = 2,36$ ) и гиперболического метаматериала, сформированного на основе слоисто-периодической наноструктуры «титанат оксид индия (ИТО)/серебро (Ag)». Здесь и ниже расчет выполнен для случая, когда толщина металлического слоя равна 20 нм, фактор заполнения  $f = 0,3$ , длина световой волны составляет 360 нм и, следовательно,  $\varepsilon_t = 1,44$ ;  $\varepsilon_l = -6,32$ .

Как видно из рис. 2, формируемая на поверхности раздела сред неоднородная волна характеризуется неэкспоненциальным уменьшением продольного энергетического потока при увеличении расстояния от границы раздела и, как следствие, появлением четко выраженного максимума  $\mathbf{S}_1$  на определенном расстоянии от входной поверхности метаматериала. При увеличении угла падения  $\alpha$  и угла  $\rho$  данный максимум возрастает и смещается к границе раздела ГММ и изотропной среды. Так, например, как видно из рис. 2, для рассматриваемого гиперболического

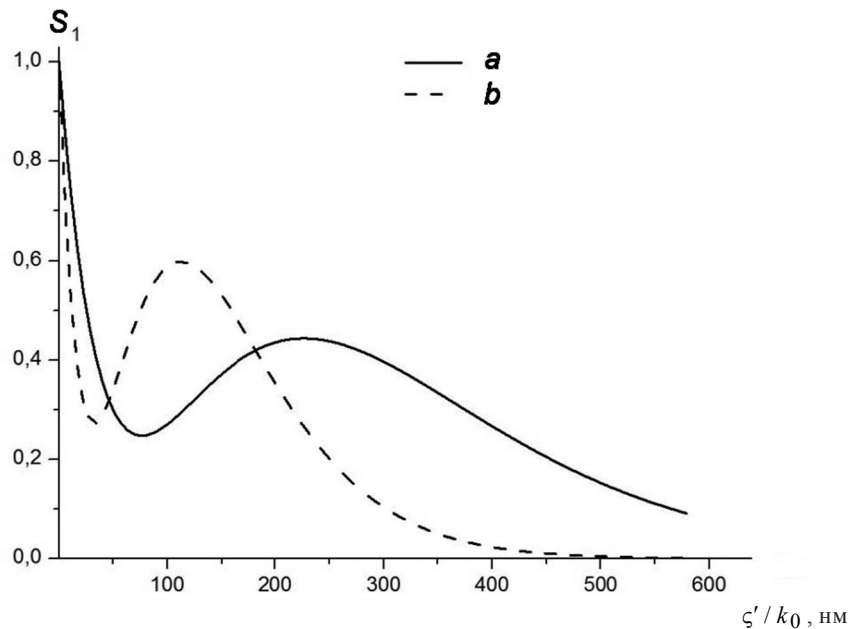


Рис. 2. Зависимость от глубины проникновения в метаматериал  $\zeta'/k_0$  нормированной на свое максимальное значение компоненты вектора Умова – Пойнтинга  $\mathbf{S}_1$ , лежащей в плоскости падения, для особой неоднородной волны, возбуждаемой на границе раздела стекла BK7 и гиперболического метаматериала на основе слоисто-периодической металлодиэлектрической наноструктуры ИТО/Ag. Угол падения света на структуру  $\alpha$  и угол между плоскостью падения и главной плоскостью ГММ  $\rho$  составляют соответственно:  $a - 53,6^\circ$  и  $14,2^\circ$ ;  $b - 61,1^\circ$  и  $26,9^\circ$

Fig. 2. Dependence of the  $\mathbf{S}_1$  component of the Poynting vector normalized to its maximal value, on the parameter  $\zeta'/k_0$  for a special inhomogeneous wave excited at the boundary of glass BK7 and hyperbolic metamaterial on the basis of the layered-periodic metal-dielectric nanostructure of ITO/Ag. For calculation we proposed that the angles  $\alpha$  and  $\rho$  are the following:  $a - 53.6^\circ$  and  $14.2^\circ$ ;  $b - 61.1^\circ$  and  $26.9^\circ$

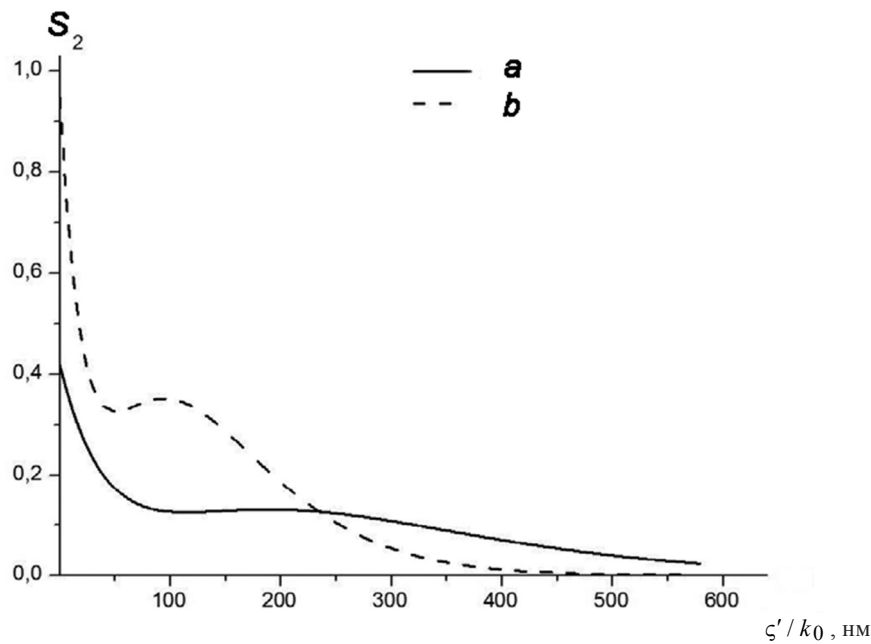


Рис. 3. Зависимость от параметра  $\zeta' / k_0$  нормированной на величину  $|S_1|$  компоненты  $S_2$  вектора Умова – Пойнтинга, лежащей в плоскости, перпендикулярной плоскости падения, для особой неоднородной волны, возбуждаемой на границе раздела стекла BK7 и гиперболического метаматериала на основе слоисто-периодической металлодиэлектрической наноструктуры ITO/Ag. Угол падения света на структуру  $\alpha$  и угол между плоскостью падения и главной плоскостью ГММ  $\rho$  составляют соответственно:  $a - 53,6^\circ$  и  $14,2^\circ$ ;  $b - 61,1^\circ$  и  $26,9^\circ$

Fig. 3. Dependence of the  $S_2$  component of the Poynting vector normalized to the value  $|S_1|$  on the parameter  $\zeta' / k_0$  for a special inhomogeneous wave excited at the boundary of glass BK7 and a hyperbolic metamaterial on the basis of layered-periodic metal-dielectric nanostructure of ITO/Ag. For calculation we proposed that the angles  $\alpha$  and  $\rho$  are the following:  $a - 53,6^\circ$  and  $14,2^\circ$ ;  $b - 61,1^\circ$  and  $26,9^\circ$

метаматериала при  $\alpha = 53,6^\circ$ ,  $\rho = 14,2^\circ$  указанный максимум имеет место на глубине 229 нм от поверхности, а при  $\alpha = 61,1^\circ$ ,  $\rho = 26,9^\circ$  – на глубине 115 нм.

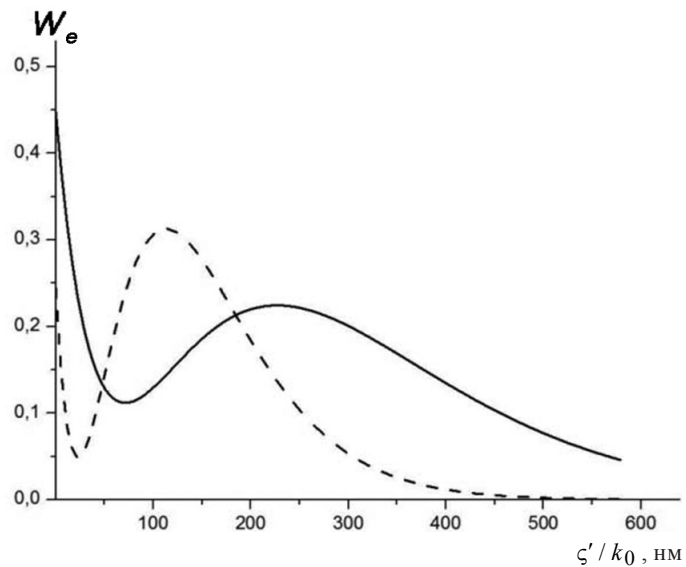
На рис. 3 представлена зависимость перпендикулярной плоскости падения компоненты вектора Умова – Пойнтинга  $S_2$ , нормированной на величину  $|S_1|$ , от параметра  $\zeta' / k_0$ , равного глубине проникновения излучения в гиперболический метаматериал (величины  $S_1$ ,  $S_2$  умножены на постоянный коэффициент, такой, что максимальное значение  $S_1$  равно 1). Из сравнения рис. 2 и 3 заключаем, что максимумы  $S_1$  и  $S_2$  достигаются приблизительно на одинаковых расстояниях от поверхности метаматериала.

Рассмотрим далее поведение плотности электрической  $W_e = \text{Re}(\mathbf{E}\varepsilon\mathbf{E}^*) / (16\pi)$  и магнитной  $W_m = |\mathbf{H}|^2 / (16\pi)$  энергии особых неоднородных волн в рассматриваемом гиперболическом метаматериале. Как следует из (16), (17), (20), для них имеем

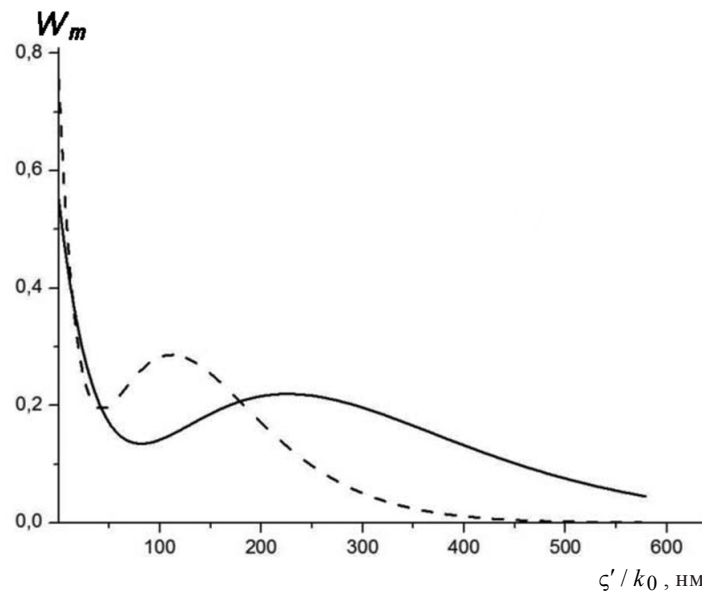
$$W_e = \frac{\varepsilon_t}{16\pi} |C_2|^2 [a^2 - 4(a - \xi^2)(\xi^2 + \gamma^2) - 2\gamma a(a - 2\xi^2 - 2\gamma^2)\zeta' + 2(\gamma a)^2 \zeta'^2] \exp(-2\gamma\zeta'),$$

$$W_m = \frac{\varepsilon_t}{16\pi} |C_2|^2 [a^2 - 4\varepsilon_t(a - \xi^2) + 2\gamma a(\varepsilon_t - |\varepsilon_t|)\zeta' + 2(\gamma a)^2 \zeta'^2] \exp(-2\gamma\zeta').$$
(22)

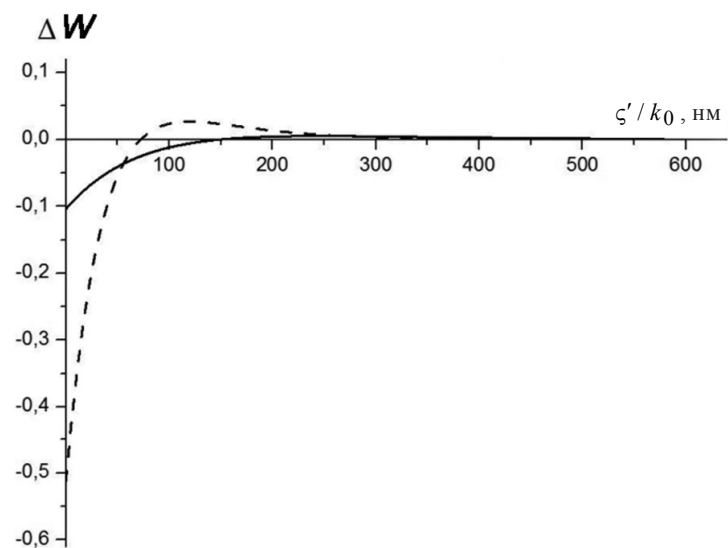
Из выражений (22) видно, что плотность энергии особых неоднородных волн для гиперболических метаматериалов изменяется (затухает) с глубиной проникновения волны в среду по более сложному закону, чем в случае обычных неоднородных волн, причем по разному для плотности электрической  $W_e$  и магнитной  $W_m$  энергии. Как следует из (22), величина  $\Delta W(\zeta') = W_e - W_m$  обращается в нуль при  $\zeta' = \zeta'_0 = (a - \xi^2) / a\gamma$ , а при



a



b



c

Рис. 4. Зависимость от параметра  $\zeta'/k_0$  нормированной на величину  $W$  плотности энергии электрического  $W_e$  (a), магнитного  $W_m$  (b) поля и разности  $\Delta W = W_e - W_m$ , нормированных на величину  $W$  плотностей электрической и магнитной энергии (c) особой неоднородной волны, возбуждаемой на границе раздела стекла BK7 и гиперболического метаматериала на основе слоисто-периодической металлодиэлектрической наноструктуры ITO/Ag. Угол падения света на структуру  $\alpha$  и угол между плоскостью падения и главной плоскостью ГММ  $\rho$  составляют соответственно  $53,6^\circ$  и  $14,2^\circ$  (сплошная линия),  $61,1^\circ$  и  $26,9^\circ$  (штриховая линия)

Fig. 4. Dependence of  $W_e$  (a),  $W_m$  (b) and  $\Delta W = W_e - W_m$  (c) normalized to the value  $W$  on the parameter  $\zeta'/k_0$  for a special inhomogeneous wave excited at the boundary of glass BK7 and a hyperbolic metamaterial formed from layered-periodic metal-dielectric nanostructure of ITO/Ag. For calculation we proposed that the angles  $\alpha$  and  $\rho$  are the following:  $53.6^\circ$  and  $14.2^\circ$  (solid line),  $61.1^\circ$  and  $26.9^\circ$  (dashed line)

$$\zeta' = \zeta'_{\max} = \frac{3a - 2\xi^2}{2a\gamma} \quad (23)$$

достигает своего максимума. На рис. 4 приведены зависимости величин  $W_e(\zeta'/k_0)$ ,  $W_m(\zeta'/k_0)$  и  $\Delta W(\zeta'/k_0)$  для особой неоднородной волны, которая возникает на границе стекла ВК7 и гиперболического метаматериала, сформированного на основе слоисто-периодической наноструктуры ИТО/Ag (величины  $W_e(\zeta'/k_0)$ ,  $W_m(\zeta'/k_0)$  и  $\Delta W(\zeta'/k_0)$  умножены на постоянный коэффициент, такой, что максимальное значение их суммы  $W$  равно 1).

Из рис. 4 видно, что с увеличением угла падения  $\alpha$  минимальное значение плотности электрической энергии  $W_e$  вблизи границы метаматериала уменьшается. В противоположность этому минимальное значение плотности магнитной энергии  $W_m$  возрастает. Для максимальных значений плотностей энергии имеется противоположная тенденция: с увеличением угла падения  $\alpha$  максимум  $W_e$  увеличивается, а максимум  $W_m$  соответственно уменьшается. При этом чем больше  $\alpha$ , тем ближе к поверхности метаматериала расположена плоскость, для которой  $\Delta W(\zeta'/k_0) = 0$  и, следовательно, плотности электрической и магнитной энергии особой неоднородной волны равны.

**Заключение.** Таким образом, в данной работе показано, что в условиях полного отражения света на границе изотропной среды и гиперболического метаматериала типа I может распространяться особая неоднородная волна, амплитуда которой убывает внутри метаматериала при удалении от его поверхности по сложному неэкспоненциальному закону. Найденны условия существования указанных волн. Установлено, что такие неоднородные волны представляют собой суперпозицию двух плоских волн, распространяющихся с одинаковой скоростью. Одна из них является волной с круговой поляризацией, а другая характеризуется состоянием поляризации, изменяющимся с глубиной проникновения.

Получены выражения для продольной и поперечной компонент вектора Умова – Пойнтинга и объемной плотности электрической и магнитной энергии. Установлено, что наличие компоненты потока энергии, перпендикулярной плоскости падения, приводит к тому, что в условиях полного отражения, наряду с продольным смещением отраженного луча вдоль границы раздела сред, имеет место эффект бокового смещения луча (так называемое смещение Федорова).

С использованием полученных выражений осуществлено численное моделирование характеристик особых неоднородных волн, формируемых на границе диэлектрика (стекло ВК7) и гиперболического метаматериала на основе слоисто-периодической металлodieлектрической наноструктуры ИТО/Ag. Установлено, что формируемая неоднородная волна характеризуется неэкспоненциальным уменьшением продольного энергетического потока в плоскости падения и, как следствие, появлением его четко выраженного максимума вблизи отражающей поверхности метаматериала. При увеличении угла падения этот максимум увеличивается и смещается к границе раздела ГММ и изотропной среды.

Показано, что плотность энергии особых неоднородных волн для гиперболических метаматериалов изменяется (затухает) с глубиной проникновения волны в среду по более сложному закону, чем в случае обычных неоднородных волн, причем различным образом для плотности электрической  $W_e$  и магнитной  $W_m$  энергии.

Полученные результаты имеют перспективы применения при создании высокочувствительных сенсоров, основанных на использовании особых световых неоднородных волн. Они могут быть использованы также при разработке новых методов зондирования приповерхностных дефектов различных материалов.

#### Список использованных источников

1. Cai, W. Optical Metamaterials – Fundamentals and Applications / W. Cai, V. Shalaev. – New York: Springer, 2010. – 198 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-1151-3>
2. Metamaterials Handbook 1: Theory and Phenomena of Metamaterials / F. Capolino [ed.]. – CRC Press, 2009. – 926 p. <https://doi.org/10.1201/9781420054262>

3. Pendry, J. B. Negative refraction makes a perfect lens / J. B. Pendry // *Phys. Rev. Lett.* – 2000. – Vol. 85, № 18. – P. 3966–3969. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.85.3966>
4. Sub-diffraction- limited optical imaging with a silver superlens / N. Fang [et al.] // *Science*. – 2005. – Vol. 308, № 5721. – P. 534–537. <https://doi.org/10.1126/science.1108759>
5. Kidwai, O. Effective-medium approach to planar multilayer hyperbolic metamaterials: strengths and limitations / O. Kidwai, S. V. Zhukovsky, J. E. Sipe // *Phys. Rev. A*. – 2012. – Vol. 85, № 5. – P. 053842. <https://doi.org/10.1103/physreva.85.053842>
6. Shekhar, P. Hyperbolic metamaterials: fundamentals and applications / P. Shekhar, J. Atkinson, Z. Jacob // *Nano Convergence*. – 2014. – Vol. 1, № 1. – P. 14. <https://doi.org/10.1186/s40580-014-0014-6>
7. Quantum nanophotonics using hyperbolic metamaterials / C. L. Cortes, W. Newman, S. Molesky, Z. Jacob // *J. Opt.* – 2012. – Vol. 14, № 6. – P. 063001. <https://doi.org/10.1088/2040-8978/14/6/063001>
8. Near-Field Optics and Surface Plasmon Polaritons / S. Kawata [ed.]. – Springer, 2001. – 214 p. <https://doi.org/10.1007/3-540-44552-8>
9. Gramotnev, D. K. Plasmonics beyond the diffraction limit / D. K. Gramotnev, S. I. Bozhevolnyi // *Nature Photon.* – 2010. – Vol. 4, № 2. – P. 83–91. <https://doi.org/10.1038/nphoton.2009.282>
10. Han, Z. Radiation guiding with surface plasmon-polaritons / Z. Han, S. I. Bozhevolnyi // *Rep. Prog. Phys.* – 2013. – Vol. 76, № 1. – P. 016402. <https://doi.org/10.1088/0034-4885/76/1/016402>
11. Dyakonovs in hyperbolic metamaterials / C. J. Zapata-Rodríguez [et al.] // *Phot. Lett. Poland*. – 2013. – Vol. 5, № 2. – P. 63–65. <https://doi.org/10.4302/plp.2013.2.10>
12. Дзяконов, М. И. Новый тип электромагнитных волн, распространяющихся на поверхности / М. И. Дзяконов // *ЖЭТФ*. – 1988. – Т. 67. – С. 714–716.
13. Федоров, Ф. И. Теория гиротропии / Ф. И. Федоров. – Минск: Наука и техника, 1976. – 456 с.
14. Федоров, Ф. И. Особый случай неоднородных электромагнитных волн в прозрачных кристаллах / Ф. И. Федоров, Н. С. Петров // *Оптика и спектроскопия*. – 1963. – Т. 14. – С. 256–260.
15. Features of hyperbolic metamaterials with extremal optical characteristics / S. N. Kurilkina [et al.] // *J. Opt.* – 2016. – Vol. 18, № 8. – P. 085102. <https://doi.org/10.1088/2040-8978/18/8/085102>

## References

1. Cai W., Shalaev V. M. *Optical Metamaterials – Fundamentals and Applications*. New York, Springer, 2010. 198 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-1151-3>
2. Capolino F. (ed.). *Metamaterials Handbook 1: Theory and Phenomena of Metamaterials*. CRC Press, 2009. 926 p. <https://doi.org/10.1201/9781420054262>
3. Pendry J. B. Negative refraction makes a perfect lens. *Physical Review Letters*, 2000, vol. 85, no. 18, pp. 3966–3969. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.85.3966>
4. Fang N., Lee H., Sun C., Zhang X. Sub-diffraction-limited optical imaging with a silver superlens. *Science*, 2005, vol. 308, no. 5721, pp. 534–537. <https://doi.org/10.1126/science.1108759>
5. Kidwai O., Zhukovsky S. V., Sipe J. E. Effective-medium approach to planar multilayer hyperbolic metamaterials: strengths and limitations. *Physical Review A*, 2012, vol. 85, no. 5, p. 053842. <https://doi.org/10.1103/physreva.85.053842>
6. Shekhar P., Atkinson J., Jacob Z. Hyperbolic metamaterials: fundamentals and applications. *Nano Convergence*, 2014, vol. 1, no. 1, p. 14. <https://doi.org/10.1186/s40580-014-0014-6>
7. Cortes C. L., Newman W., Molesky S. Jacob Z. Quantum nanophotonics using hyperbolic metamaterials. *Journal of Optics*, 2012, vol. 14, no. 6, p. 063001. <https://doi.org/10.1088/2040-8978/14/6/063001>
8. Kawata S. (ed.). *Near-Field Optics and Surface Plasmon Polaritons*. Springer, 2001. 214 p. <https://doi.org/10.1007/3-540-44552-8>
9. Gramotnev D. K., Bozhevolnyi S. I. Plasmonics beyond the diffraction limit. *Nature Photonics*, 2010, vol. 4, no. 2, pp. 83–91. <https://doi.org/10.1038/nphoton.2009.282>
10. Han Z., Bozhevolnyi S. I. Radiation guiding with surface plasmon-polaritons. *Reports on Progress in Physics*, 2013, vol. 76, no. 1, p. 016402. <https://doi.org/10.1088/0034-4885/76/1/016402>
11. Zapata-Rodríguez C. J., Miret J. J., Vuković S., Jakšić Z. Dyakonovs in hyperbolic metamaterials. *Photonics Letters of Poland*, 2013, vol. 5, no. 2, pp. 63–65. <https://doi.org/10.4302/plp.2013.2.10>
12. D'yakonov M. I. New type of electromagnetic waves propagating at an interface. *Zhurnal eksperimental'noi i teoreticheskoi fiziki = Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 1988, vol. 67, pp. 714–716 (in Russian).
13. Fedorov F. I. *Theory of Gyrotropy*. Minsk, Nauka i tehnika Publ., 1976. 456 p. (in Russian).
14. Fedorov F. I., Petrov N. S. Special case of inhomogeneous electromagnetic waves in transparent crystals. *Optika i spektroskopiya = Optics and Spectroscopy*, 1963, vol. 14, pp. 256–260 (in Russian).
15. Kurilkina S. N., Binhussein M. A., Belyi V. N., Kazak N. S. Features of hyperbolic metamaterials with extremal optical characteristics. *Journal of Optics*, 2016, vol. 18, no. 8, p. 085102. <https://doi.org/10.1088/2040-8978/18/8/085102>

## Информация об авторах

**Петров Николай Степанович** – доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт повышения квалификации по новым направлениям развития техники, технологий и экономики Белорусского национального технического университета (Партизанский пр., 70, 220107, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: rectorat@ipk.by

**Курилкина Светлана Николаевна** – доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси (пр. Независимости, 68-2, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: s.kurilkina@ifanbel.bas-net.by

**Зимин Анатолий Борисович** – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (ул. П. Бровки, 6, 220013, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: ab.zimin@mail.ru

**Белый Владимир Николаевич** – член-корреспондент, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси (пр. Независимости, 68-2, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: v.belyi@ifanbel.bas-net.by

## Information about the authors

**Nikolai S. Petrov** – D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Chief Researcher, Institute for Advanced Training and Retraining of Personnel on New Directions for the Development of Technics, Technology and Economics, Belarusian National Technical University (70, Partizanskii Ave., 220107, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: rectorat@ipk.by

**Svetlana N. Kurilkina** – D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Chief Researcher, B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (68-2, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: s.kurilkina@ifanbel.bas-net.by

**Anatolii B. Zimin** – Ph. D. (Physics and Mathematics), Leading Researcher, Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (6, P. Brovka Str., 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: ab.zimin@mail.ru

**Vladimir N. Belyi** – Corresponding Member, D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Chief Researcher, B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (68-2, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: v.belyi@ifanbel.bas-net.by

ISSN 1561-2430 (Print)  
 ISSN 2524-2415 (Online)  
 УДК 536.25

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-499-506>

Поступила в редакцию 19.11.2018  
 Received 19.11.2018

Г. С. Маршалова<sup>1</sup>, С. А. Сверчков<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Белорусский государственный технологический университет, Минск, Беларусь

<sup>2</sup>Институт тепло- и массообмена им. А. В. Лыкова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

## СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ И ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕПЛООТДАЧИ ОДНОРЯДНОГО ПУЧКА ОРЕБРЕННЫХ ТРУБ ПРИ СМЕШАННОЙ КОНВЕКЦИИ

**Аннотация.** Смешанно-конвективный теплоперенос имеет большое значение для широкого класса инженерных задач. Однако проведение экспериментов по изучению смешанной конвекции требует значительных расходов на реализацию, высокой мощности оборудования, а также больших временных затрат, поэтому предлагается расширять границы экспериментальных исследований с помощью численного моделирования. В настоящей работе проведено численное моделирование смешанно-конвективного теплообмена однорядного пучка из биметаллических ребристых труб и его сопоставление с экспериментальными данными.

Для численного моделирования была осуществлена трехмерная постановка задачи. Для моделирования теплопередачи от ребер труб к воздуху решалась сопряженная задача. При численном моделировании количества движения воздуха учитывалось, что число Рейнольдса, построенное по диаметру несущей трубы и скорости в межреберном канале, изменялось от 100 до 720. Для замыкания уравнения Рейнольдса была использована  $k-\omega$  модель переноса сдвиговых напряжений Ментера в стандартной постановке.

Полученная визуализация течения на поверхности трубы позволила выявить переходный характер течения воздуха. Визуализация распределения температур в пучке и вытяжной шахте дала возможность увидеть структуру охлаждения ребренного пучка при смешанной конвекции.

Результаты проведенного моделирования и экспериментальных исследований хорошо согласуются и могут быть использованы для расширения границ эксперимента.

**Ключевые слова:** смешанная конвекция, численное моделирование, воздухоохлаждаемый теплообменник, вытяжная шахта, расчетная сетка,  $k-\omega$  модель переноса сдвиговых напряжений Ментера, визуализация течения

**Для цитирования.** Маршалова, Г. С. Сравнительный анализ результатов экспериментального исследования и численного моделирования теплоотдачи однорядного пучка ребренных труб при смешанной конвекции / Г. С. Маршалова, С. А. Сверчков // Вест. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2018. – Т. 54, № 4. – С. 499–506. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-499-506>

G. S. Marshalova<sup>1</sup>, S. A. Sverchkov<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Belarusian State Technological University, Minsk, Belarus

<sup>2</sup>A. V. Luikov Heat and Mass Transfer Institute of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

## COMPARATIVE ANALYSIS OF EXPERIMENTAL INVESTIGATIONS AND NUMERICAL SIMULATION OF SINGLE-ROW FINNED TUBE BUNDLE AT MIXED CONVECTION

**Abstract.** Mixed convective heat transfer is very important for a wide class of engineering tasks. However, the experimental study of mixed convection requires significant implementation costs, high-power equipment, as well as large time costs, so it is proposed to expand the scope of experimental studies using numerical simulation. Numerical simulation of the single-row bundle consisting of bimetallic finned tubes at mixed air convection conditions was performed and experimental data were compared.

The formulation of the third-dimensional problem for numerical simulation was realized. The conjugated problem for heat exchange modeling from the tube fins to air was solved. In numerical simulation of air momentum it was taken into account that the Reynolds number based on tube diameter and velocity in the space between fins was varied from 100 to 720. Menter's  $k-\omega$  shear stress transport model in standard formulation was used to close the Reynolds equations.

Flow visualization on the tube surface revealed the transient nature of the air flow. The temperature distribution visualization in the bundle and the exhaust mine made it possible to see the nature of cooling the finned bundle at mixed convection.

Results of numerical simulation and experimental investigations are in good agreement and can be used for expansion of the scope of experiments.

The experimental data and the numerical simulation results for the single-row bundle consisting of bimetallic finned tubes at mixed air convection are compared in this paper. Flow near tube surfaces was visualized, and the temperature and velocity distributions in a bundle and in the exhaust mine were obtained.

**Keywords:** mixed convection, numerical simulation, air-cooled heat exchanger, exhaust mine, computational mesh, Menter's  $k-\omega$  shear stress transport model, flow visualization

**For citation.** Marshalova G. S., Sverchkov S. A. Comparative analysis of experimental investigations and numerical simulation of single-row finned tube bundle at mixed convection. *Vestsi Natsyianal'nei akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, vol. 54, no. 4, pp. 499–506 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-499-506>

**Введение.** В конвективном теплопереносе принято выделять вынужденную и свободную конвекцию, и поэтому процессы рассматривают в предположении, что один из этих режимов течения является преобладающим. Однако создаваемые при конвективном течении перепады температур в окружающей среде при наличии поля объемных сил, таких как сила тяжести, приводят к возникновению свободно-конвективных течений. Таким образом, даже в условиях действия вынужденной конвекции будут присутствовать проявления свободной. В практических расчетах большое значение имеют условия, при которых можно пренебречь влиянием одного механизма конвективного переноса на другой. В реальных устройствах возникают условия, когда оба вида конвекции играют существенную роль, в этом случае возникает явление смешанной конвекции. Такие условия, например, реализуются при проведении термоанемометрических измерений проволочными и пленочными датчиками в низкоскоростных потоках, при вынужденном течении в нагреваемом канале, при охлаждении электронных приборов вентиляторами и во многих других случаях, представляющих практический интерес [1].

Смешанно-конвективный теплоперенос имеет большое значение для широкого класса инженерных задач. К сожалению, этому вопросу уделялось недостаточно внимания. В прошлом большинство работ было посвящено определению границ различных режимов переноса, т. е. определению условий, когда при вынужденном течении можно пренебречь влиянием свободной конвекции или, наоборот, при свободно-конвективном течении пренебречь влиянием вынужденного. Большая часть исследований смешанно-конвективного теплообмена посвящена изучению ламинарных течений около поверхностей относительно несложной геометрической формы [1]. Смешанно-конвективный теплообмен около вертикальных поверхностей рассматривался в работах [2–4], для оребренных труб в модели воздушного конденсатора [5], а также для аппаратов воздушного охлаждения [6].

Проведение экспериментов по изучению смешанной конвекции требует значительных расходов на реализацию, высокой мощности оборудования, а также больших временных затрат. Вследствие этого чаще всего охватить весь желаемый диапазон вариантов экспериментов не представляется возможным. Для решения этой проблемы предлагается расширять границы эксперимента с помощью численного моделирования.

Цель работы – сопоставление экспериментальных данных и результатов численного моделирования для однорядного пучка, состоящего из биметаллических ребристых труб, в условиях смешанной конвекции.

Изучался однорядный шахматный пучок воздухоохлаждаемого теплообменника, состоящий из шести биметаллических ребристых труб, расположенных с поперечным шагом  $S_1 = 58$  мм, относительным поперечным шагом  $\sigma_1 = 1,036$ . Для организации смешанной конвекции над экспериментальным пучком устанавливалось два типа вытяжных шахт – с прямоугольным и круглым сечениями. Подробное описание установки, вытяжной шахты, трубы-калориметра и методики экспериментального исследования представлено в [7].

Для сравнения результатов экспериментальных исследований и численного моделирования были выбраны следующие виды вытяжных шахт:  $d_{\text{отв}} = 0,160$  м,  $H = 0,52$  м;  $d_{\text{отв}} = 0,205$  м,  $H = 0,52$  м;  $d_{\text{отв}} = 0,105$  м,  $H = 1,16$  м, где  $d_{\text{отв}}$  – диаметр выходного отверстия вытяжной шахты,  $H$  – высота вытяжной шахты.

**Методы.** Для подготовки расчетной сетки (рис. 1) был использован пакет Ansys Meshing, который позволяет подготовить сетку с необходимым качеством и достаточным количеством конечных элементов. Численное моделирование проводилось при помощи пакета Ansys Fluent 19.1.

Для расчета задачи в стационарной постановке был использован компьютер с 12-ядерным процессором Intel Xeon E5 и 64 Гб ОЗУ. Среднее время расчета на распараллеленной версии составляло порядка 6–8 ч.

Для численного моделирования была осуществлена трехмерная постановка задачи. Размеры расчетной области составляли  $10,348 \times 4,0868 \times 0,00972$  м. Расчет осуществлялся на представленной на рис. 1 неструктурированной пространственной сетке, состоящей из тетрагексагональных элементов, т. е. элементов, имеющих в своем основании треугольник. Для описания расчетной области потребовалось около 8,7 млн ячеек.

В начале расчета по всей расчетной области устанавливается статическое давление  $P = 101\,325$  Па, и температура воздуха  $T_{\text{вх}} = t_0$ . Для моделирования теплопередачи от ребер труб к воздуху решалась сопряженная задача.

Зависимость теплофизических характеристик теплоносителя – воздуха (плотности, теплопроводности и динамической вязкости) от температуры и давления задавалась в виде законов: для плотности – согласно закону идеального газа; для коэффициента теплопроводности – в виде полинома третьей степени; коэффициент динамической вязкости – согласно закону Сазерленда.

В процессе решения сходимость задачи контролировалась уровнем погрешности: для давления и скоростей (уравнения Навье – Стокса и неразрывности) минимальный уровень погрешности составлял  $10^{-3}$ , для температуры (уравнение энергии) –  $10^{-5}$ . Обычно расчеты прекращались по достижении погрешности для поправок давления  $10^{-4}$ , для температуры (уравнение энергии) –  $10^{-8}$ .

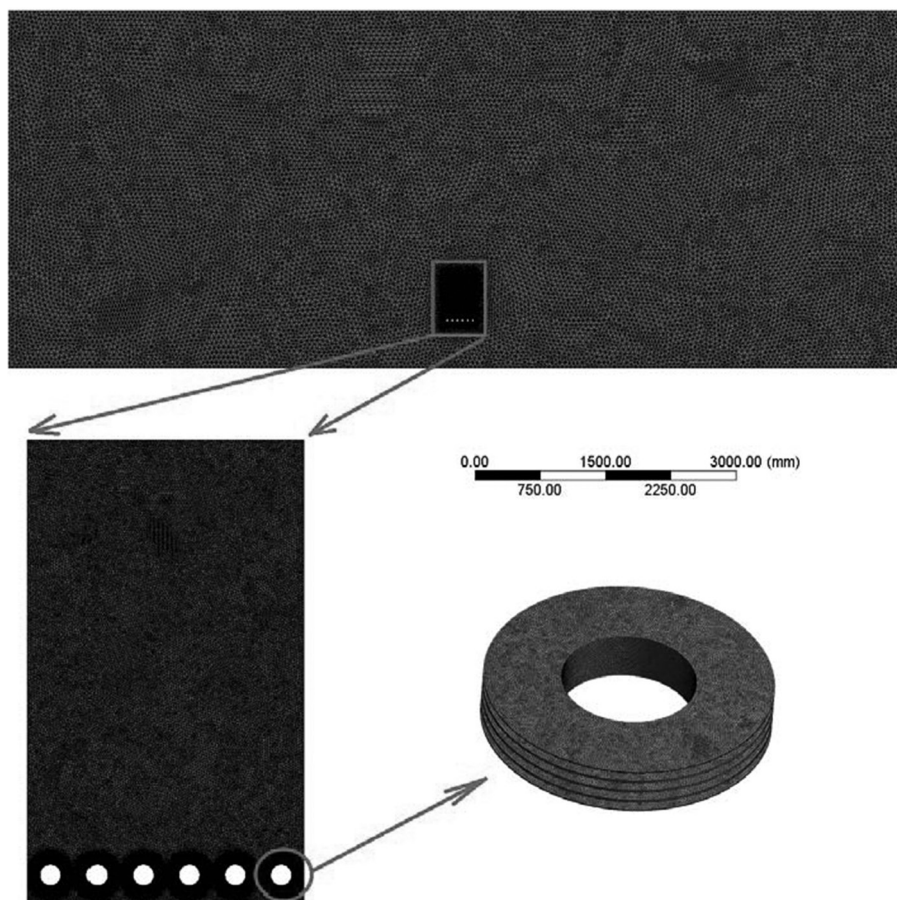


Рис. 1. Расчетная сетка

Fig. 1. Computational mesh

Одним из критериев, характеризующим процесс смешанно-конвективного теплообмена, является число Ричардсона  $Ri = Gr / Re^2$ , где число Грасгофа и число Рейнольдса выражают соответственно интенсивность свободной и вынужденной конвекции [1]. При  $Ri \ll 1$  режим течения считается преимущественно вынужденным, а при  $Ri \gg 1$  – преимущественно свободным. Для проведенного эксперимента число Ричардсона составляло 0,45–1,5, что свидетельствует о наличии смешанно-конвективного теплообмена, при этом с увеличением высоты и диаметра выходного сечения вытяжной шахты число Ричардсона уменьшалось.

При численном моделировании количества движения воздуха учитывалось, что число Рейнольдса, построенное по диаметру несущей трубы и скорости в межреберном канале, изменялось от 100 до 720, таким образом, течение – ламинарное. Однако расчеты проводятся для случая смешанной конвекции. В следе за трубами могут присутствовать как двумерные, так и трехмерные структуры. Для численной идентификации этих структур необходимо решение трехмерных уравнений Навье – Стокса, осредненных по Рейнольдсу, уравнения неразрывности и уравнения энергии.

Для замыкания уравнения Рейнольдса была использована  $k-\omega$  модель турбулентности Ментера в стандартной постановке [11].

Ввиду того, что  $k-\varepsilon$  модель имеет преимущество в зонах течения вдали от стенок, а стандартная  $k-\omega$  модель – вблизи стенок, то для численного моделирования была использована объединенная модель – модель переноса сдвиговых напряжений (*SST*), в которой применялся математический аппарат для автоматического переключения между моделями  $k-\varepsilon$  и  $k-\omega$ , разработанный Ментером.

**Обсуждение полученных результатов.** На рис. 2 представлено течение воздуха в пучке оребренных труб. Холодный воздух за счет разности температур и вытяжной шахты засасывается в пучок, огибая носовую часть труб. В межтрубном сечении пучка наблюдается значительное увеличение скорости воздушного потока, связанное с резким сужением проходного сечения в межтрубном пространстве. В межреберном пространстве скорость воздуха также увеличивается, однако при этом примерно в 2 раза меньше скорости в проходном сечении.

Также на рис. 2 показано, что узкие области с повышенной скоростью воздуха наблюдаются и в следе, вплоть до выхода из вытяжной шахты из-за затрудненного перемешивания слоев воздуха, поскольку скорость потока в продольном направлении выше, чем в поперечном.

Также в кормовой части оребренных труб видны отрывные зоны. При малых числах Рейнольдса течение можно считать безотрывным. Однако при увеличении мощности нагрева,

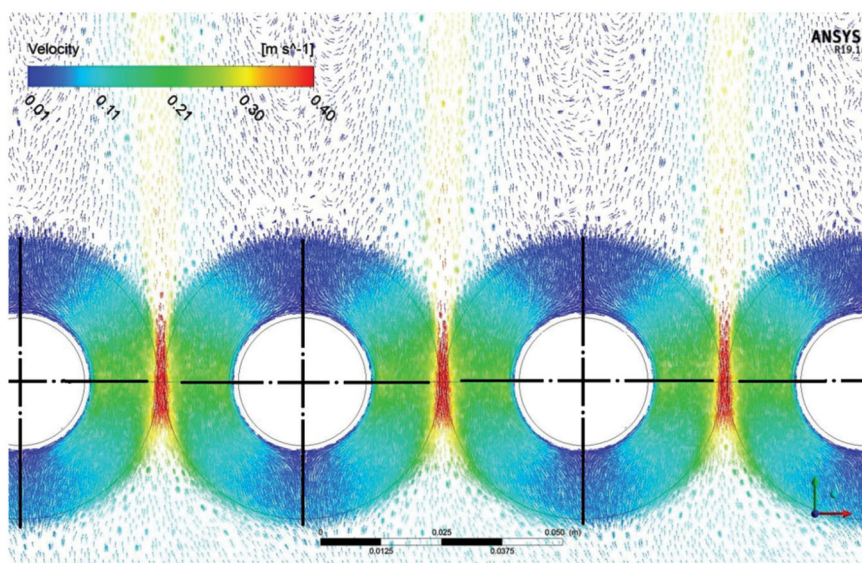


Рис. 2. Визуализация течения воздуха на ребре и несущей трубе

Fig. 2. Air flow visualization on the fin and on the carrying tube

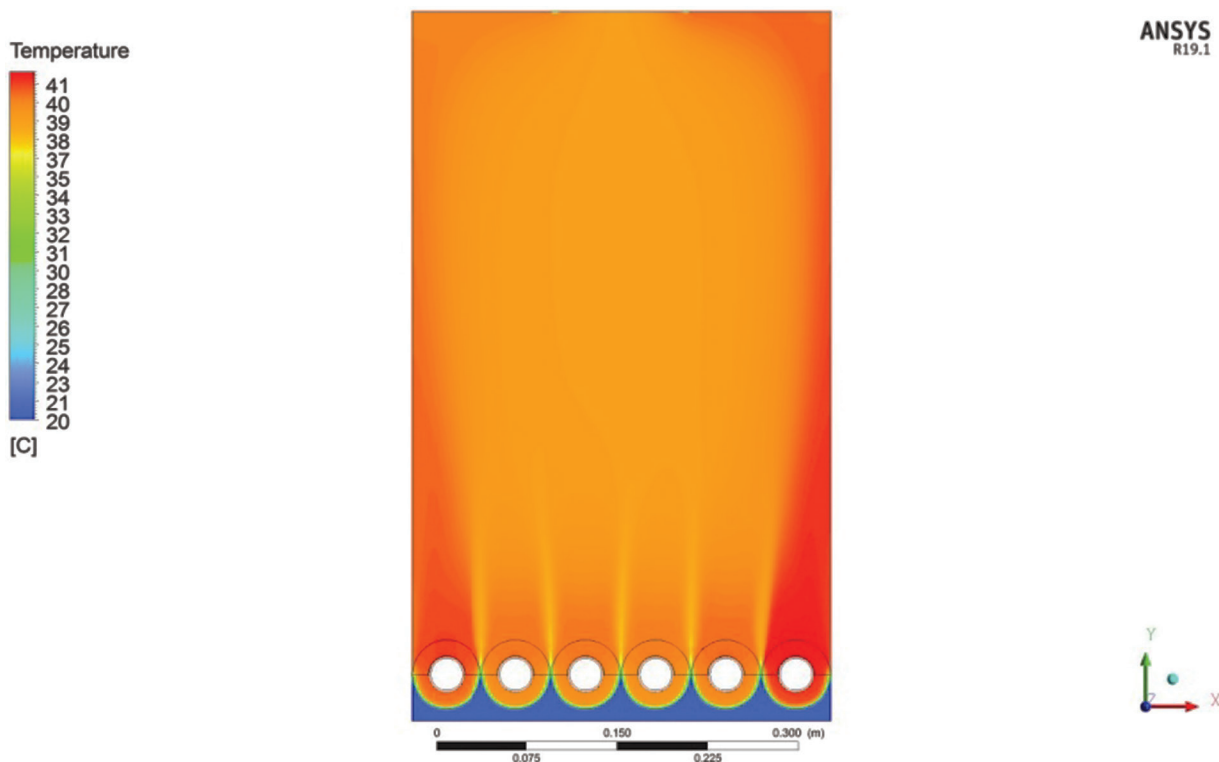


Рис. 3. Распределение температур в пучке и вытяжной шахте  
 Fig. 3. Temperature distribution in the bundle and in the exhaust mine

а следовательно, и при увеличении скорости в межреберных каналах и между трубами пучка, число Рейнольдса растет и отрывная зона в кормовой части труб также увеличивается, след за пучком становится более размытым, и слои воздуха перемешиваются интенсивнее.

Распределение температур в однорядном оребренном пучке с вытяжной шахтой представлено на рис. 3 при  $W = 30$  Вт,  $H = 520$  мм соответственно. Диаметр выходного отверстия шахты  $d_{\text{отв}} = 205$  мм.

На рис. 3 видно, что холодный воздух поднимается вверх и, охлаждая поверхность оребренных труб, поступает в вытяжную шахту. В межреберном пространстве температура воздуха снижается от основания трубы к вершине ребра. Сформировавшаяся между трубами зона повышенных скоростей (см. рис. 2) приводит к тому, что в этой же зоне наблюдаются участки с пониженной температурой. По мере продвижения воздуха вверх по вытяжной шахте слои начинают интенсивно перемешиваться, и через выходное отверстие воздушные массы поступают в окружающую среду.

В углах и по бокам шахты видны застойные зоны с воздухом более высокой температуры по сравнению со средней частью, что обуславливается геометрией шахты и центральным расположением выходного отверстия.

Ввиду близости крайних труб к теплоизолированным стенкам вытяжной шахты на них наблюдается более высокая температура по сравнению с центральными трубами.

Сравнение результатов эксперимента и численного моделирования производилось в виде зависимости скорости воздуха в пучке  $w_n$ , температуры стенки  $t_{\text{ст}}$  от мощности, подаваемой на калориметр (рис. 4). Как видно из графиков, расхождение между результатами эксперимента и численного моделирования не превышают 15 %.

**Выводы.** Характер течения воздуха, как показывают результаты численного моделирования, в следе за пучком оребренных труб при смешанной конвекции изменяется от безотрывного обтекания при малом нагреве труб до отрывного при максимальном. С увеличением числа Рейнольдса происходит увеличение отрывных зон и интенсификация смешения потоков в следе за пучком.

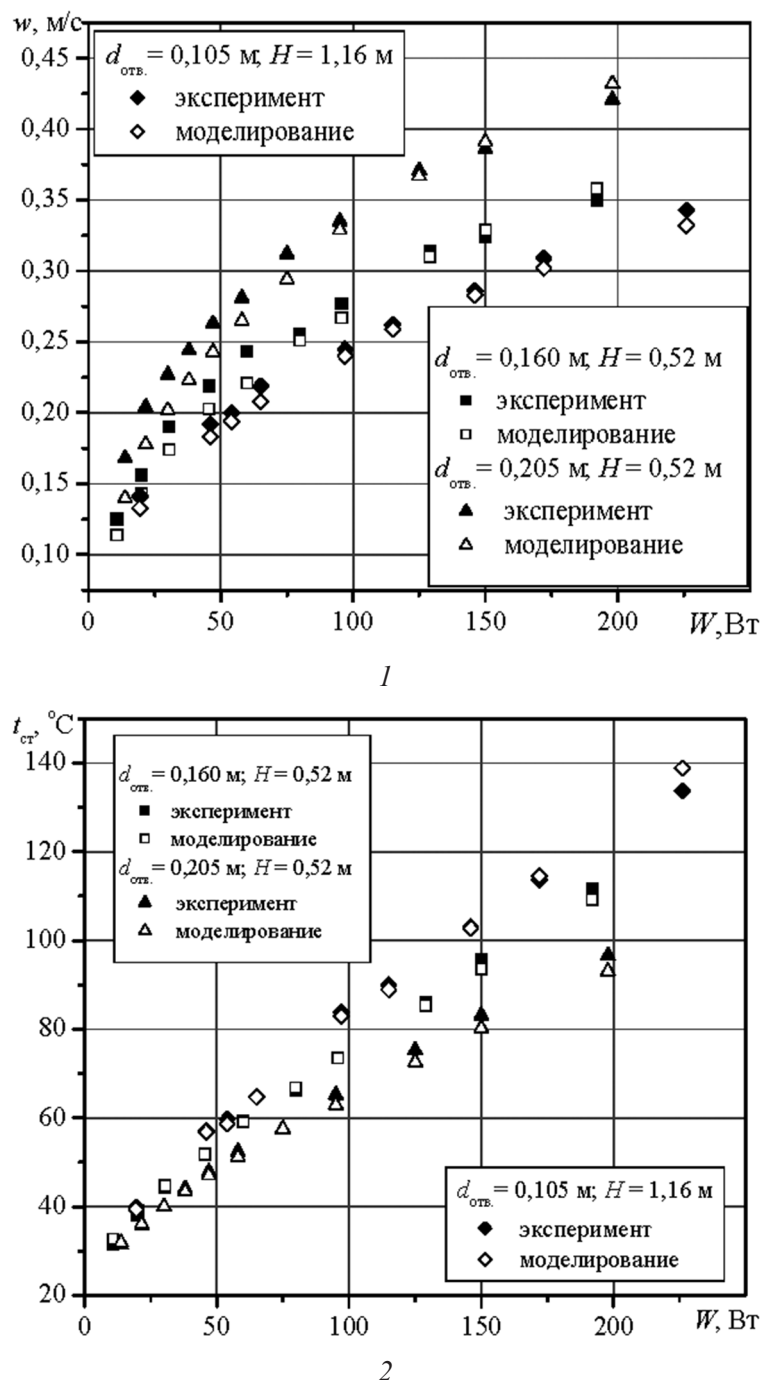


Рис. 4. Зависимости скорости воздуха в пучке  $w_n$  (1) и температуры стенки  $t_{ст}$  (2) от мощности, подаваемой на калориметр

Fig. 4. Dependence of the air velocity in the bundle  $w_b$  (1) and the wall temperature  $t_w$  (2) on the power supplied to the calorimeter

Визуализация структуры течения в пучке и вытяжной шахте, проведенная на основе результатов численного моделирования, позволила получить распределение температур при обтекании нагретого оребренного пучка в режиме смешанной конвекции и определить перегревы на крайних трубах пучка, связанные с близостью к теплоизолированным стенкам, а также зоны повышенной температуры в верхней части шахты.

Полученные результаты численного моделирования хорошо согласуются с экспериментальными данными, и в дальнейшем разработанная методика может быть использована для расширения границ эксперимента и визуализации структуры течения в многорядных пучках труб.

**Благодарности.** Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (номер проекта T17PM-081).

**Acknowledgements.** The work was supported by the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (project number T17PM-081).

### Список использованных источников

1. Свободноконвективные течения: тепло- и массообмен: в 2 кн.: пер. с англ. / Б. Гебхарт [и др.]; под ред. О. Г. Мартыненко. – М.: Мир, 1991. – Кн. 1. – 678 с.
2. Szewczyk, A. A. Combined Forced and Free-Convection Laminar Flow / A. A. Szewczyk // *J. Heat Transfer*. – 1964. – Vol. 86, № 4. – С. 501–507. <https://doi.org/10.1115/1.3688729>
3. Merkin, J. H. The effect of buoyancy forces on the boundary-layer flow over a semi-infinite vertical flat plate in a uniform free stream / J. H. Merkin // *J. Fluid Mechanics*. – 1969. – Vol. 35, № 3. – P. 439–450. <https://doi.org/10.1017/s0022112069001212>
4. Lloyd, J. R. Combined forced and free convection flow on vertical surface / J. R. Lloyd, E. M. Sparrow // *Int. J. Mass Transfer*. – 1970. – Vol. 13, № 2. – P. 434–438. [https://doi.org/10.1016/0017-9310\(70\)90119-5](https://doi.org/10.1016/0017-9310(70)90119-5)
5. Мильман, О. О. Экспериментальное исследование теплообмена при естественной циркуляции воздуха в модели воздушного конденсатора с вытяжной шахтой / О. О. Мильман // *Теплоэнергетика*. – 2005. – № 5. – С. 16–19.
6. Васильев, Ю. Н. Системы охлаждения компрессорных и нефтеперекачивающих станций / Ю. Н. Васильев, Г. А. Марголин. – СПб.: Недра, 1977. – 222 с.
7. Сидорик, Г. С. Экспериментальный стенд для исследования тепловых и аэродинамических процессов смешанно-конвективного теплообмена круглоребристых труб и пучков / Г. С. Сидорик // *Тр. БГТУ. Сер. 1, Лесное хоз-во, природопользование и перераб. возобновляемых ресурсов*. – 2018. – № 1 (204). – С. 85–93.
8. Самородов, А. В. Совершенствование методики теплового расчета и проектирования аппаратов воздушного охлаждения с шахматными оребренными пучками: автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.14.14 / А. В. Самородов. – СПб., 1999. – 22 с.
9. Сухоцкий, А. Б. Интенсификация свободной конвекции в однорядном оребренном пучке в аппаратах воздушного охлаждения / А. Б. Сухоцкий, Г. С. Сидорик // *Тр. БГТУ. Сер. 2, Хим. технологии, биотехнологии, геоэкология*. – 2017. – № 1 (193). – С. 68–74.
10. Примеры расчетов нестандартизованных эффективных теплообменников / В. Б. Кунтыш [и др.]; под ред. В. Б. Кунтыша, А. Н. Бессонного. – СПб.: Недра, 2000. – 300 с.
11. Численное моделирование вихревой интенсификации теплообмена в пакетах труб / Ю. А. Быстров [и др.]. – СПб.: Судостроение, 2005. – 392 с.

### References

1. Gebhart B., Jaluria Y., Mahajan Roop L., Sammakia B. *Buoyancy-Induced Flows and Transport*. Springer-Verlag, 1988.
2. Szewczyk A. A. Combined Forced and Free-Convection Laminar Flow. *Journal of Heat Transfer*, vol. 86, no. 4, pp. 501–507. <https://doi.org/10.1115/1.3688729>
3. Merkin J. H. The effect of buoyancy forces on the boundary-layer flow over a semi-infinite vertical flat plate in a uniform free stream. *Journal of Fluid Mechanics*, 1969, vol. 35, no. 3, pp. 439–450. <https://doi.org/10.1017/s0022112069001212>
4. Lloyd J. R., Sparrow E. M. Combined forced and free convection flow on vertical surface. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1970, vol. 13, no. 2, pp. 434–438. [https://doi.org/10.1016/0017-9310\(70\)90119-5](https://doi.org/10.1016/0017-9310(70)90119-5)
5. Mil'man O. O. Experimental study of heat transfer at natural air circulation in the model of an air condenser with an exhaust shaft. *Teploenergetika = Thermal Engineering*, 2005, no. 5, pp. 16–19 (in Russian).
6. Vasil'ev Ju. N. *Cooling Compressor and Pumping Stations*. Saint Petersburg, Nedra Publ., 1977. 222 p. (in Russian).
7. Sidorik G. S. The experimental stand for a research of thermal and aerodynamic processes of mixed convection heat exchange for round-finned pipes and bunches. *Trudy BGTU. Seriya 1, Lesnoe khozyaistvo, prirodnopol'zovanie i pererabotka vozobnovlyaemykh resursov = Proceedings of BSTU. Series 1, Forestry. Environmental management. Reprocessing of renewable resources*, 2018, no. 1, pp. 85–93 (in Russian).
8. Samorodov A. V. *Improvement of Methods of Thermal Calculation and Design of Air Cooling Devices with Staggered Finned Beams*. Saint Petersburg, 1999. 22 p. (in Russian).
9. Sukhotskii A. B., Sidorik G. S. Intensification of free convection in a single row finned bunch in air cooler heat exchangers *Trudy BGTU. Seriya 2, Khimicheskie tekhnologii, biotekhnologii, geoekologiya = Proceedings of BSTU. Series 2, Chemical technologies. Biotechnology. Geoecology*, 2017, no. 1, pp. 68–74 (in Russian).
10. Kuntyshev V. B., Bessonnyi A. N., Dreitser G. A., Egorov I. F. *Examples of calculations of non-standard efficient heat exchangers*. Saint Petersburg, Nedra Publ., 2000. 300 p. (in Russian).
11. Bystrov Yu. A., Isaev S. A., Kudryavtsev N. A., Leont'ev A. I. *Numerical simulation of vortex intensification of heat exchange in packages of tubes*. Saint Petersburg, Sudostroenie Publ., 2005. 392 p. (in Russian).

### Информация об авторах

**Маршалова Галина Сергеевна** – аспирант, Белорусский государственный технологический университет (ул. Свердлова, 13а, 220006, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: [galiana.sidorik@gmail.com](mailto:galiana.sidorik@gmail.com)

**Сверчков Сергей Александрович** – младший научный сотрудник, Институт тепло- и массообмена им. А. В. Лыкова Национальной академии наук Беларуси (ул. П. Бровки, 15, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: [serge0788@gmail.com](mailto:serge0788@gmail.com)

### Information about the authors

**Galina S. Marshalova** – Postgraduate Student, Belarusian State Technological University (13a, Sverdlov Str., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: [galiana.sidorik@gmail.com](mailto:galiana.sidorik@gmail.com)

**Sergey A. Sverchkov** – Junior Researcher, A. V. Luikov Heat and Mass Transfer Institute of the National Academy of Sciences of Belarus (15, Brovka Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: [serge0788@gmail.com](mailto:serge0788@gmail.com)

**ПЕРЕЧЕНЬ СТАТЕЙ, ОПУБЛИКОВАННЫХ В ЖУРНАЛЕ  
«ВЕСЦІ НАЦЫЯНАЛЬНАЙ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСІ.  
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК»  
В 2018 ГОДУ**

**МАТЕМАТИКА**

|                                                                                                                                                                                     |                        |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|
| <b>Айрян Э. А., Егоров А. Д., Кулябов Д. С., Малютин В. Б., Севастьянов Л. А.</b> Метод функциональных интегралов для систем стохастических дифференциальных уравнений .....        | T. 54. № 3. С. 279–289 |
| <b>Башун С. Ю.</b> О перестановочности силовой 2-подгруппы с некоторыми би-примарными подгруппами .....                                                                             | T. 54. № 4. С. 460–467 |
| <b>Бенедиктович В. И.</b> О разности между максимальной степенью и индексом графа .....                                                                                             | T. 54. № 4. С. 434–440 |
| <b>Волков В. М., Проконина Е. В.</b> Разностные схемы и итерационные методы для многомерных эллиптических уравнений со смешанными производными .....                                | T. 54. № 4. С. 454–459 |
| <b>Гайшун И. В., Горячкин В. В., Крахотко В. В.</b> Управление ансамблем линейных двухпараметрических дискретных систем .....                                                       | T. 54. № 1. С. 20–23   |
| <b>Дирвук Е. В.</b> О приближенном вычислении интегралов с особенностями на концах отрезка интегрирования .....                                                                     | T. 54. № 1. С. 29–37   |
| <b>Жук Е. Е.</b> Статистическое определение тренда ближайшего типа для реализации нестационарных временных рядов .....                                                              | T. 54. № 4. С. 427–433 |
| <b>Жур М. А.</b> Неулучшаемость теоремы Дирихле для многочленов .....                                                                                                               | T. 54. № 1. С. 30–37   |
| <b>Забрейко П. П., Кривко-Красько А. В.</b> Обобщение теорем Ролля и Дарбу для функций двух переменных .....                                                                        | T. 54. № 3. С. 290–299 |
| <b>Зверович Э. И., Шилин А. П.</b> Решение интегро-дифференциальных уравнений с сингулярными и гиперсингулярными интегралами специального вида .....                                | T. 54. № 4. С. 404–407 |
| <b>Игнатенко М. В., Янович Л. А.</b> Обобщенные интерполяционные многочлены Эрмита – Биркгофа для дифференциальных операторов произвольного порядка в частных производных .....     | T. 54. № 2. С. 149–163 |
| <b>Игнатенко М. В.</b> Операторные интерполяционные формулы эрмитова типа с узлами произвольной кратности, основанные на тождественных преобразованиях функций .....                | T. 54. № 3. С. 263–272 |
| <b>Качан И. В.</b> Непрерывная зависимость от начальных данных решений стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями .....                           | T. 54. № 2. С. 193–209 |
| <b>Кемеш О. Н.</b> Обобщение леммы Гельфонда на цилиндры в поле $p$ -адических чисел .....                                                                                          | T. 54. № 1. С. 24–29   |
| <b>Ковалёва И. С.</b> Преобразование Маркова – Стильеса мер и некоторые его приложения .....                                                                                        | T. 54. № 4. С. 468–479 |
| <b>Копать Д. Я., Маталыцкий М. А.</b> Анализ G-сети с ненадежными линиями обслуживания .....                                                                                        | T. 54. № 4. С. 441–453 |
| <b>Корзюк В. И., Нгуен Ван Винь.</b> Смешанная задача для одномерного гиперболического уравнения четвертого порядка с периодическими условиями .....                                | T. 54. № 2. С. 135–148 |
| <b>Корзюк В. И., Столярчук И. И.</b> Классическое решение смешанной задачи для уравнения типа Клейна – Гордона – Фока в полуполосе с косыми производными в граничных условиях ..... | T. 54. № 4. С. 391–403 |
| <b>Кулеш Е. Е., Мартынов И. П.</b> Об одном дифференциальном уравнении в частных производных шестого порядка .....                                                                  | T. 54. № 1. С. 7–19    |

|                                                                                                                                                                                         |                        |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|
| <b>Лиходед Н. А., Полешук М. А.</b> Построение двумерных зернистых параллельных вычислительных процессов .....                                                                          | T. 54. № 4. С. 417–426 |
| <b>Лиходед Н. А., Толстиков А. А.</b> Формализованное получение коммуникационных операций параллельных зернистых алгоритмов .....                                                       | T. 54. № 1. С. 50–61   |
| <b>Малютин В. Б.</b> О вычислении функциональных интегралов, порожденных некоторыми нерелятивистскими гамильтонианами .....                                                             | T. 54. № 1. С. 44–49   |
| <b>Матысик О. В., Савчук В. Ф.</b> Метод итерации решения некорректных уравнений с приближенным оператором в случае априорного выбора параметра регуляризации .....                     | T. 54. № 4. С. 408–416 |
| <b>Найденко В. Г.</b> Распознавание частичной выпуклости объединения нескольких многогранных множеств .....                                                                             | T. 54. № 1. С. 38–43   |
| <b>Харин А. Ю., Тон Тхат Ту.</b> Анализ и исследование робастности последовательного критерия отношения вероятностей для модели независимых неодинаково распределенных наблюдений ..... | T. 54. № 2. С. 179–192 |
| <b>Якуто К. Л.</b> О целом положительном решении матричного уравнения $X^n = A$ для матриц третьего порядка в случае натуральных $n$ .....                                              | T. 54. № 2. С. 164–178 |
| <b>Янчевский В. И.</b> Когомологии Тейта специальных норменных модулей, связанных с гензелевыми алгебрами с делением .....                                                              | T. 54. № 3. С. 273–278 |

## ФИЗИКА

|                                                                                                                                                                                                                                                       |                        |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|
| <b>Апанасевич П. А., Горелик В. С., Водниц А. И., Тимофеева Г. И.</b> Генерация инфракрасного излучения при вынужденном комбинационном рассеянии .....                                                                                                | T. 54. № 3. С. 326–331 |
| <b>Ефимова А. В.</b> Касп-сингулярность траектории блоховского вектора кубита во внешнем периодическом световом поле .....                                                                                                                            | T. 54. № 1. С. 62–68   |
| <b>Иванов А. П.</b> Распределение температуры в полубесконечной среде, обусловленное источниками разной формы .....                                                                                                                                   | T. 54. № 1. С. 69–76   |
| <b>Иванов А. П.</b> Распределение ИК-излучения от нелокального источника внутри биологической ткани .....                                                                                                                                             | T. 54. № 3. С. 316–325 |
| <b>Климович И. М., Комаров Ф. Ф., Шолух М. В., Зайков В. А., Баран Л. В.</b> Влияние элементного состава и температуры осаждения покрытий Ti-AL-C-N на их морфологию и жизнеспособность клеток на таких покрытиях .....                               | T. 54. № 3. С. 369–378 |
| <b>Коршунов Ф. П., Жданович Н. Е., Гуринович В. А.</b> Влияние радиационно-термических дефектов на характеристики $p$ - $n$ - $p$ -структур .....                                                                                                     | T. 54. № 3. С. 353–359 |
| <b>Крылова Н. Г., Грушевская Г. В.</b> Геометрическое моделирование динамики сжимаемости ленгмюровского монослоя .....                                                                                                                                | T. 54. № 1. С. 84–96   |
| <b>Лэ Тхи Зиеу Хьен, Хрущинский А. А., Кутень С. А.</b> Моделирование переноса зарядов в токовом режиме в активном объеме ионизационной камеры деления .....                                                                                          | T. 54. № 1. С. 97–109  |
| <b>Макаренко Л. Ф., Ластовский С. Б., Гаубас Э., Павлов Е., Молл М., Якушевич А. С., Мурын Л. И.</b> Инжекционный отжиг комплекса собственное димеждоузлие – кислород в кремнии $p$ -типа .....                                                       | T. 54. № 2. С. 220–228 |
| <b>Маршалова Г. С., Сверчков С. А.</b> Сравнительный анализ результатов экспериментального исследования и численного моделирования теплоотдачи однорядного пучка оребренных труб при смешанной конвекции .....                                        | T. 54. № 4. С. 499–506 |
| <b>Новиков А. Г., Наливайко О. Ю., Гайдук П. И.</b> Влияние режимов окисления на характеристики МОП-конденсаторов с нанокристаллами Ge .....                                                                                                          | T. 54. № 1. С. 119–126 |
| <b>Овсинок Е. М., Голуб А. А., Коральков А. Д.</b> Отражение от космологического барьера в осциллирующей Вселенной де Ситтера частиц Дирака, Майораны и Вейля ...                                                                                     | T. 54. № 3. С. 300–315 |
| <b>Петров Н. С., Курилкина С. Н., Зимин А. Б., Белый В. Н.</b> Свойства и энергетические характеристики особых неоднородных электромагнитных волн в гиперболических метаматериалах .....                                                              | T. 54. № 4. С. 488–498 |
| <b>Пилипович В. А., Залесский В. Б., Конойко А. И., Кравченко В. М., Решиков К. А.</b> Преобразователь ИК-излучения на базе микрорезонаторов Фабри – Перо ...                                                                                         | T. 54. № 2. С. 234–240 |
| <b>Романов И. А., Пархоменко И. Н., Власукова Л. А., Комаров Ф. Ф., Ковальчук Н. С., Мильчанин О. В., Моховиков М. А., Мудрый А. В., Живулько В. Д., Хонг-Ланг Лу.</b> Светоизлучающие структуры на основе нестехиометрического нитрида кремния ..... | T. 54. № 3. С. 360–368 |

- Русак А. А., Дашкевич В. И., Орлович В. А., Шкадаревич А. П.** Тепловые эффекты в безопасном для глаз кольцевом параметрическом генераторе света на кристаллах  $\text{KTiOPO}_4$  ..... Т. 54. № 2. С. 210–219
- Савчук Г. К., Летко А. К., Басов Н. А.** Условия получения и диэлектрические свойства СВЧ-керамики составов  $(1-x)((\text{Mg}_{0.2}\text{Zn}_{0.8})\text{TiO}_3)-x\text{CaTiO}_3$  ..... Т. 54. № 3. С. 332–340
- Углов В. В.** Эрозия поверхности многослойных пленок на основе нитридов циркония и кремния, облученных ионами гелия ..... Т. 54. № 1. С. 110–118
- Углов В. В.** Упругие свойства наноструктурированных материалов и их радиационная стойкость ..... Т. 54. № 4. С. 480–487
- Ходасевич М. А., Саскевич Н. А.** Методы построения обучающего набора для калибровки с помощью флуоресцентной спектроскопии небольших выборок образцов ..... Т. 54. № 1. С. 77–83
- Чумаков А. Н., Мухуров Н. И., Денисюк С. В., Шевченко А. А., Баран Л. В., Райченко Т. Ф., Босак Н. А.** Морфологические, оптические и фотолюминесцентные свойства тонких пленок  $\text{ZnO}$  на подложке  $\text{Al}_2\text{O}_3$  ..... Т. 54. № 3. С. 341–352
- Шелег А. У., Гременок В. Ф., Серeda А. С., Гуртовой В. Г., Чумак В. А., Цырельчук И. Н.** Получение и рентгенографические исследования твердых растворов  $\text{Cu}_2\text{CdSn}(\text{S}_x\text{Se}_{1-x})_4$  ..... Т. 54. № 2. С. 229–233

#### ИНФОРМАТИКА

- Кульбак Л. И., Золотой С. А., Мартинович Т. С.** Повышение информативности расчетных оценок надежности бортовой аппаратуры малогабаритных космических аппаратов ..... Т. 54. № 2. С. 241–252

#### УЧЕНЫЕ БЕЛАРУСИ

- Александр Федорович Чернявский** (К 80 летию со дня рождения) ..... Т. 54. № 3. С. 379–380
- Вячеслав Иванович Янчевский** (К 70-летию со дня рождения) ..... Т. 54. № 3. С. 381–382
- Памяти академика **Владимира Антоновича Пилиповича** ..... Т. 54. № 2. С. 253–254
- Памяти академика **Ивана Васильевича Гайшуна** ..... Т. 54. № 2. С. 254–256

**LIST OF PUBLICATIONS FOR 2018**  
**IN “PROCEEDINGS OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF BELARUS.**  
**PHYSICS AND MATHEMATICS SERIES”**

**MATHEMATICS**

- Ayryan E. A., Egorov A. D., Kulyabov D. S., Malyutin V. B., Sevastyanov L. A.** Functional integrals method for systems of stochastic differential equations ..... Vol. 54, no. 3, pp. 279–289
- Bashun S. Yu.** Permutability of the Sylow 2-subgroup with some biprimary subgroups ... Vol. 54, no. 4, pp. 460–467
- Benediktovich V. I.** Difference between the maximum degree and the index of a graph Vol. 54, no. 4, pp. 434–440
- Gaishun I. V., Goryachkin V. V., Krakhotko V. V.** Control of the ensemble of linear two-parameter discrete systems ..... Vol. 54, no. 1, pp. 20–23
- Ignatenko M. V., Yanovich L. A.** Generalized interpolation Hermite – Birkhoff polynomials for arbitrary-order partial differential operators ..... Vol. 54, no. 2, pp. 49–163
- Ignatenko M. V.** Operator interpolation formulas of Hermite type with arbitrary multiplicity nodes based on identity transformations of functions ..... Vol. 54, no. 3, pp. 263–272
- Kachan I. V.** Continuous dependence on the initial data of the solutions of stochastic differential equations with fractional Brownian motions ..... Vol. 54, no. 2, pp. 193–209
- Kemesh O. N.** Generalization of Gelfond’s lemma for  $p$ -adic cylinders ..... Vol. 54, no. 1, pp. 24–29
- Kharin A. Yu., Ton That Tu.** Performance analysis and robustness evaluation of a sequential probability ratio test for non-identically distributed observations ..... Vol. 54, no. 2, pp. 179–192
- Kopats D. J., Matalytski M. A.** Analysis of G-network with unreliable service systems Vol. 54, no. 4, pp. 441–453
- Korzyuk V. I., Nguyen Van Vinh.** A mixed problem for the four-order one-dimensional hyperbolic equation with periodic conditions ..... Vol. 54, no. 2, pp. 135–148
- Korzyuk V. I., Stolyarchuk I. I.** Classical solution of the mixed problem for the Klein – Gordon – Fock type equation in the half-strip with curve derivatives at boundary conditions ..... Vol. 54, no. 4, pp. 391–403
- Kovalyova I. S.** Markov – Stieltjes transformation of measures and some of its applications ..... Vol. 54, no. 4, pp. 468–479
- Kulesh E. E., Martynov I. P.** One sixth-order partial differential equation ..... Vol. 54, no. 1, pp. 7–19
- Likhoded N. A., Tolstyskau A. A.** Formalized obtaining of the communication operations of grained parallel algorithms ..... Vol. 54, no. 1, pp. 50–61
- Likhoded N. A., Paliashchuk M. A.** Tiled parallel 2D computational processes ..... Vol. 54, no. 4, pp. 417–426
- Malyutin V. B.** Evaluation of functional integrals generated by some nonrelativistic Hamiltonians ..... Vol. 54, no. 1, pp. 44–49
- Matysik O. V., Savchuk V. F.** Method of iteration of solving invariant equations with an approximate operator in the case of an arbitrary choice of the regularization parameter Vol. 54, no. 4, pp. 408–416
- Naidenko V. G.** Directional convexity recognition of the union of several polyhedra ... Vol. 54, no. 1, pp. 38–43
- Volkov V. M., Prakonina A. U.** Finite-difference schemes and iterative methods for multidimensional elliptic equations with mixed derivatives ..... Vol. 54, no. 4, pp. 454–459
- Yakuto K. L.** Positive integer solution of the matrix equation  $X^n = A$  for third-order matrices in the case of positive integers  $n$  ..... Vol. 54, no. 2, pp. 164–178
- Yanchevskii V. I.** Tate cohomology of special norm modules related to Henselian division algebras ..... Vol. 54, no. 3, pp. 273–278
- Zabreiko P. P., Krivko-Krasko A. V.** Extension of the Rolle and Darboux theorems to the functions of two variables ..... Vol. 54, no. 3, pp. 290–299

|                                                                                                                            |                             |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------|
| <b>Zhuk E. E.</b> Statistical determination of the nearest type trend for realizations of non-stationary time series ..... | Vol. 54, no. 4, pp. 427–433 |
| <b>Zhur M. A.</b> Unimprovability of Dirichlet's theorem for polynomials .....                                             | Vol. 54, no. 1, pp. 30–37   |
| <b>Zverovich E. I., Shilin A. P.</b> Integro-differential equations with singular and hyper-singular integrals .....       | Vol. 54, no. 4, pp. 404–407 |

## PHYSICS

|                                                                                                                                                                                                                                                                 |                             |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------|
| <b>Apanasevich P. A., Gorelik V. S., Vodchits A. I., Timofeeva G. I.</b> Infrared radiation generation at forced combination scattering .....                                                                                                                   | Vol. 54, no. 3, pp. 326–331 |
| <b>Chumakov A. N., Mukhurov N. I., Denisiuk S. V., Shevchenok A. A., Baran L. V., Raichenok T. F., Bosak N. A.</b> Morphological, optical and photoluminescent properties of a thin ZnO film on the Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> substrate .....              | Vol. 54, no. 3, pp. 341–352 |
| <b>Efimova A. V.</b> Cusp-singularity of the trajectory of the qubit's Bloch vector under an external periodic light field .....                                                                                                                                | Vol. 54, no. 1, pp. 62–68   |
| <b>Ivanov A. P.</b> Temperature distribution in a semi-infinite medium due to a heat source of different shape .....                                                                                                                                            | Vol. 54, no. 1, pp. 69–76   |
| <b>Ivanov A. P.</b> Distribution of IR radiation from a non-local source inside the biological tissue .....                                                                                                                                                     | Vol. 54, no. 3, pp. 316–325 |
| <b>Khodasevich M. A., Saskevich N. A.</b> Training subset selection methods for calibration with fluorescence spectroscopy in small data sets of samples .....                                                                                                  | Vol. 54, no. 1, pp. 77–83   |
| <b>Klimovich I. M., Komarov F. F., Sholukh M. V., Zaikov V. A., Baran L. V.</b> Effect of the elemental composition and the deposition temperature of Ti-Al-C-N coatings on the morphology and viability of cells on such coatings .....                        | Vol. 54, no. 3, pp. 369–378 |
| <b>Korshunov F. P., Zhdanovich N. E., Gurinovich V. A.</b> Influence of radiation-thermal defects on characteristics of <i>p-n-p-n</i> -structures .....                                                                                                        | Vol. 54, no. 3, pp. 353–359 |
| <b>Krylova N. G., Grushevskaya H. V.</b> Geometrical modeling of compressibility dynamics of the Langmuir monolayer .....                                                                                                                                       | Vol. 54, no. 1, pp. 84–96   |
| <b>Le Thi Dieu Hien, Khrutchinsky A. A., Kuten S. A.</b> Modeling of charge transport in the active volume of the ionization fission chamber in current mode .....                                                                                              | Vol. 54, no. 1, pp. 97–109  |
| <b>Makarenko L. F., Lastovskii S. B., Gaubas E., Pavlov J., Moll M., Yakushevich H. S., Murin L. I.</b> Injection annealing of the self di-interstitial – oxygen complex in <i>p</i> -type silicon .....                                                        | Vol. 54, no. 2, pp. 220–228 |
| <b>Marshalova G. S., Sverchkov S. A.</b> Comparative analysis of experimental investigations and numerical simulation of single-row finned tube bundle at mixed convection .....                                                                                | Vol. 54, no. 4, pp. 499–506 |
| <b>Novikau A. G., Nalivaiko O. Yu., Gaiduk P. I.</b> Thermal oxidation effect on electrical properties of MOS capacitors with embedded Ge nanocrystals .....                                                                                                    | Vol. 54, no. 1, pp. 119–126 |
| <b>Ovsiyuk E. M., Golub A. A., Koralkov A. D.</b> Dirac, Majorana and Weyl particles in the oscillating de Sitter universe, reflection from the cosmological barrier .....                                                                                      | Vol. 54, no. 3, pp. 300–315 |
| <b>Petrov N. S., Kurilkina S. N., Zimin A. B., Belyi V. N.</b> Features and energy characteristics of special inhomogeneous electromagnetic waves in hyperbolic metamaterials .....                                                                             | Vol. 54, no. 4, pp. 488–498 |
| <b>Pilipovich V. A., Zalesski V. B., Konojko A. I., Kravchenko V. M., Reshikov C. A.</b> Infrared radiation converter based on Fabry – Perot microresonators .....                                                                                              | Vol. 54, no. 2, pp. 234–240 |
| <b>Romanov I. A., Parkhomenko I. N., Vlasukova L. A., Komarov F. F., Kovalchuk N. S., Milchanin O. V., Makhavikou M. A., Mudryi A. V., Zhivulko V. D., Hong-Liang Lu.</b> Blue and red light-emitting non-stoichiometric silicon nitride-based structures ..... | Vol. 54, no. 3, pp. 360–368 |
| <b>Rusak A. A., Dashkevich U. I., Orlovich V. A., Shkadarevich A. P.</b> Thermal effects in the eye-safe ring optical parametric oscillator based on KTiOPO <sub>4</sub> crystals .....                                                                         | Vol. 54, no. 2, pp. 210–219 |
| <b>Sauchuk G. K., Letko A. K., Basau N. A.</b> Production conditions and dielectric properties of microwave ceramics based on (1- <i>x</i> )(Mg <sub>0.2</sub> Zn <sub>0.8</sub> )TiO <sub>3</sub> - <i>x</i> CaTiO <sub>3</sub> compositions .....             | Vol. 54, no. 3, pp. 332–340 |
| <b>Sheleg A. U., Gremenok V. F., Sereda A. S., Hurtavy V. G., Chumak V. A., Tsyrelchuk I. N.</b> Synthesis and X-ray investigation of Cu <sub>2</sub> CdSn(S <sub><i>x</i></sub> Se <sub><i>1-x</i></sub> ) <sub>4</sub> solid solutions .....                  | Vol. 54, no. 2, pp. 229–233 |
| <b>Uglov V. V.</b> Surface erosion of multilayer films based on zirconium and silicon nitrides irradiated with helium ions .....                                                                                                                                | Vol. 54, no. 1, pp. 110–118 |
| <b>Uglov V. V.</b> Elastic properties of nanostructured materials and their radiation resistance .....                                                                                                                                                          | Vol. 54, no. 4, pp. 480–487 |

## INFORMATICS

- Kulbak L. I., Zolotoy S. A., Martinovich T. S.** Increase in the informative content of calculated reliability estimates of the on-board equipment of small spacecraft ..... Vol. 54, no. 2, pp. 241–252

## SCIENTISTS OF BELARUS

- Aleksandr Fyodorovich Chernyavskii** (To the 80th Anniversary) ..... Vol. 54, no. 3, pp. 379–380  
**Vyacheslav Ivanovich Yanchevskii** (To the 70th Anniversary) ..... Vol. 54, no. 3, pp. 381–382  
In memory of Academician **Ivan Vasilyevich Gaishun** ..... Vol. 54, no. 2, pp. 253–254  
In memory of Academician **Vladimir Antonovich Pilipovich** ..... Vol. 54, no. 2, pp. 254–256