

# ВЕСЦІ НАЦЫЯНАЛЬнай АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСІ

СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК. 2020. Т. 56, № 1

# ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ

СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК. 2020. Т. 56, № 1

Журнал основан в 1965 г. как «Весці Акадэміі навук БССР. Серыя фізіка-матэматычных навук»,  
с 1992 г. – «Весці Акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук»,  
с 1998 г. – современное название

Выходит четыре раза в год

Учредитель – Национальная академия наук Беларуси

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь,  
свидетельство о регистрации № 392 от 18.05.2009

Издается при поддержке Белорусского физического общества

*Входит в Перечень научных изданий Республики Беларусь  
для опубликования результатов диссертационных исследований,  
включен в базу данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ)*

Главный редактор

**Сергей Яковлевич Килин** – Президиум Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

Редакционная коллегия

- Н. М. Олехнович** – Научно-практический центр Национальной академии наук Беларуси по материаловедению, Минск, Беларусь (*заместитель главного редактора*)  
**В. А. Орлович** – Отделение физики, математики и информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь (*заместитель главного редактора*)  
**Т. Е. Янчук** – (*ведущий редактор журнала*)  
**С. В. Абламейко** – Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь  
**С. М. Абрамов** – Институт программных систем Российской академии наук, Москва, Россия  
**В. М. Анищик** – Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь  
**А. И. Белоус** – Холдинг «ИНТЕГРАЛ», Минск, Беларусь  
**С. В. Гапоненко** – Белорусский республиканский фонд фундаментальных исследований, Минск, Беларусь  
**В. В. Гороховик** – Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь  
**Н. А. Изобов** – Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь  
**Н. С. Казак** – Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь  
**В. И. Корзюк** – Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

- Ф. П. Коршунов** – Научно-практический центр Национальной академии наук Беларуси по материаловедению, Минск, Беларусь
- Ю. А. Курочкин** – Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
- В. А. Лабунов** – Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь
- С. В. Лемешевский** – Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
- Д. С. Могилевцев** – Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
- Н. А. Поклонский** – Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
- С. А. Тихомиров** – Отделение физики, математики и информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
- Л. М. Томильчик** – Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
- А. В. Тузиков** – Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
- Ю. С. Харин** – Научно-исследовательский институт прикладных проблем математики и информатики Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь
- А. Ф. Чернявский** – Институт прикладных физических проблем имени А. Н. Севченко Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь
- Л. А. Янович** – Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
- В. И. Янчевский** – Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

#### Редакционный совет

- С. Я. Килин** – Президиум Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
- С. В. Абламейко** – Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
- А. Л. Асеев** – Президиум Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирск, Россия
- В. Г. Бондур** – Российская академия наук, Москва, Россия
- Й. Врахтруп** – Институт физики (3) Штутгартского университета, Штутгарт, Германия
- Ф. Б. Железко** – Институт квантовой оптики Университета Ульма, Ульм, Германия
- А. М. Желтников** – Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия
- В. В. Козлов** – Математический институт имени В. А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия
- Г. Лёйхс** – Институт физики света имени М. Планка, Эрланген, Германия
- Д. С. Могилевцев** – Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
- Нгуен Дай Хунг** – Институт физики Вьетнамской академии наук и технологий, Ханой, Вьетнам
- В. А. Орлович** – Отделение физики, математики и информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
- Стивен Чу** – Стэнфордский университет, Стэнфорд, Калифорния, США
- А. Цайлингер** – Институт квантовой оптики и квантовой информатики Австрийской академии наук, Вена, Австрия

#### Адрес редакции:

ул. Академическая, 1, к. 118, 220072, г. Минск, Республика Беларусь.

Тел.: + 375 17 284-02-45; e-mail: [fmvesti@mail.ru](mailto:fmvesti@mail.ru)

[vestifm.belnauka.by](http://vestifm.belnauka.by)

---

#### ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ.

Серия физико-математических наук. 2020. Т. 56, № 1.

Выходит на русском, белорусском и английском языках

---

Редактор *Т. Е. Янчук*    Компьютерная верстка *И. В. Счеснюк*

Подписано в печать 20.03.2020. Выход в свет 27.03.2020. Формат 60×84<sup>1/8</sup>. Бумага офсетная.

Печать цифровая. Усл. печ. л. 14,88. Уч.-изд. л. 16,4. Тираж 64 экз. Заказ 50.

Цена: индивидуальная подписка – 12,26 руб., ведомственная подписка – 29,23 руб.

Издатель и полиграфическое исполнение:

Республиканское унитарное предприятие «Издательский дом «Беларуская навука».

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/18 от 02.08.2013. ЛП № 02330/455 от 30.12.2013. Ул. Ф. Скорины, 40, 220141, г. Минск, Республика Беларусь

© РУП «Издательский дом «Беларуская навука»,  
Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук, 2020

# PROCEEDINGS OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF BELARUS

---

PHYSICS AND MATHEMATICS SERIES, 2020, vol. 56, no. 1

---

The Journal was founded in 1956 under the titles “Proceedings of the Academy of Sciences of BSSR. Physics and Mathematics Series”, since 1992 – “Proceedings of the Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series”, since 1998 – it comes under its actual title

Periodicity is 4 issues per annum

Founder is the National Academy of Sciences of Belarus

The journal is registered on May 18, 2009 by the Ministry of Information of the Republic of Belarus in the State Registry of Mass Media, reg. no. 392

It is published with support of the Belarusian Physical Society

*The Journal is included in The List of Journals for Publication of the Results of Dissertation Research in the Republic of Belarus and in the database of Russian Science Citation Index (RSCI)*

## Editor-in-Chief

**Sergei Ya. Kilin** – Presidium of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

## Editorial Board

**Nikolai M. Olekhovich** – The Scientific and Practical Materials Research Center of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus (*Associate Editor-in-Chief*)

**Valentin A. Orlovich** – Department of Physics, Mathematics and Informatics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus (*Associate Editor-in-Chief*)

**Tatiana E. Yanchuk** (*lead editor*)

**Sergey V. Ablameyko** – Belarusian State University, Minsk, Belarus

**Sergei M. Abramov** – Program Systems Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

**Viktor M. Anishchik** – Belarusian State University, Minsk, Belarus

**Anatoliy I. Belous** – “INTEGRAL” Holding, Minsk, Belarus

**Sergey V. Gaponenko** – Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research, Minsk, Belarus

**Valentin V. Gorokhovik** – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

**Nikolai A. Izobov** – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

**Nikolai S. Kazak** – B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

**Viktor I. Korzyuk** – Belarusian State University, Minsk, Belarus

**Fyodor P. Korshunov** – The Scientific and Practical Materials Research Center of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

**Yurii A. Kurochkin** – B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

**Vladimir A. Labunov** – Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Belarus

**Sergey V. Lemeshevsky** – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

**Dmitrii S. Mogilevcev** – B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

**Nikolai A. Poklonski** – Belarusian State University, Minsk, Belarus

**Sergei A. Tikhomirov** – Department of Physics, Mathematics and Informatics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus  
**Lev M. Tomil'chik** – B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus  
**Aleksandr V. Tuzikov** – United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus  
**Yurii S. Kharin** – Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics of the Belarusian State University, Minsk, Belarus  
**Aleksandr F. Chernyavskii** – A. N. Sevchenko Institute of Applied Physical Problems of Belarusian State University, Minsk, Belarus  
**Leonid A. Yanovich** – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus  
**Vyacheslav I. Yanchevskii** – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

#### Editorial Council

**Sergei Ya. Kilin** – Presidium of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus  
**Sergei V. Ablameyko** – Belarusian State University, Minsk, Belarus  
**Aleksandr L. Aseev** – Presidium of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia  
**Valery G. Bondur** – Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia  
**Jörg Wrachtrup** – Institute of Physics (3) of the University of Stuttgart, Stuttgart, Germany  
**Fedor B. Jelezko** – Institute for Quantum Optics of the Ulm University, Ulm, Germany  
**Aleksei M. Zheltikov** – Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia  
**Valery V. Kozlov** – Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia  
**Gerd Leuchs** – Max Planck Institute for the Science of Light, Erlangen, Germany  
**Dmitrii S. Mogilevcev** – B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus  
**Nguyen Dai Hung** – Institute of Physics of the Vietnam Academy of Science and Technology, Hanoi, Vietnam  
**Valentin A. Orlovich** – Department of Physics, Mathematics and Informatics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus  
**Steven Chu** – Stanford University, Stanford, California, USA  
**Anton Zeilinger** – Institute for Quantum Optics and Quantum Information of the Austrian Academy of Sciences, Vienna, Austria

*Address of the Editorial Office:*  
*1, Akademicheskaya Str., room 118, 220072, Minsk, Republic of Belarus.*  
*Tel.: +375 17 284-02-45; e-mail: fmvesti@mail.ru*  
**vestifm.belnauka.by**

---

PROCEEDING OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF BELARUS.

Physics and Mathematics series, 2020, vol. 56, no. 1.

*Printed in Russian, Belarusian and English languages*

---

Editor *T. E. Yanchuk*  
Computer imposition *I. V. Schasniuk*

It is sent of the press 20.03.2020. Appearance 27.03.2020. Format 60×84<sup>1</sup>/<sub>8</sub>. Offset paper.  
The press digital. Printed pages 14,88. Publisher's signatures 16,4. Circulation 64 copies. Order 50.  
Price: individual subscription – 12,26 byn., departmental subscription – 29,23 byn.

Publisher and printing execution:

Republican unitary enterprise "Publishing House "Belaruskaya Navuka".  
Certificate on the state registration of the publisher, manufacturer, distributor of printing editions  
No. 1/18 dated August 2, 2013. License for the press no. 02330/455 dated December 30, 2013.  
Address: F. Scorina Str., 40, 220141, Minsk, Republic of Belarus.

© RUE "Publishing House "Belaruskaya Navuka",  
Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series, 2020

ISSN 1561-2430 (Print)  
ISSN 2524-2415 (Online)

## СОДЕРЖАНИЕ

### МАТЕМАТИКА

<b>Басик А. И., Грицук Е. В., Грицук Т. А.</b> Задача Римана – Гильберта для эллиптических систем ортогонального типа в $\mathbf{R}^3$ .....	7
<b>Шилин А. П.</b> Гиперсингулярное интегро-дифференциальное уравнение эйлера типа .....	17
<b>Деменчук А. К.</b> О сильно нерегулярных периодических решениях линейного неоднородного дискретного уравнения первого порядка.....	30
<b>Васьковский М. М.</b> Стохастические дифференциальные уравнения смешанного типа со стандартными и дробными броуновскими движениями с индексами Херста, большими $1/3$ .....	36
<b>Игнатенко М. В., Янович Л. А.</b> О точном и приближенном решениях отдельных дифференциальных уравнений с вариационными производными первого и второго порядков.....	51
<b>Айрян Э. А., Гнатич М., Малютин В. Б.</b> Приближенное вычисление функциональных интегралов, порожденных релятивистским гамильтонианом.....	72

### ФИЗИКА

<b>Русак Ю. А., Бабичев Л. Ф.</b> Монте-Карло моделирование фазового перехода адроны-КГП в столкновениях тяжелых ионов с помощью партонной модели.....	84
<b>Поклонский Н. А., Дервяго А. Н., Вырко С. А.</b> Модель стационарной миграции свободных и прыгающих между акцепторами дырок в кристаллическом полупроводнике.....	92
<b>Адамчук Д. В., Ксенович В. К., Поклонский Н. А., Ковалев А. И.</b> Особенности адсорбции и десорбции водяных паров на поверхности пленок нестехиометрического диоксида олова.....	102

### ИНФОРМАТИКА

<b>Соболевский П. И., Баханович С. В.</b> Анализ глобальных зависимостей в гексагональном тайлинге.....	114
---	-----

### УЧЕНЫЕ БЕЛАРУСИ

<b>Изобов Николай Алексеевич</b> (К 80-летию со дня рождения).....	127
--	-----

ISSN 1561-2430 (Print)  
 ISSN 2524-2415 (Online)

## *CONTENTS*

### MATHEMATICS

<b>Basik A. I., Hrytsuk E. V., Hrytsuk T. A.</b> The Riemann – Hilbert boundary value problem for elliptic systems of the orthogonal type in $\mathbf{R}^3$ .....	7
<b>Shilin A. P.</b> A hypersingular integro-differential equation of the Euler type .....	17
<b>Demenchuk A. K.</b> On strongly irregular periodic solutions of the linear nonhomogeneous discrete equation of the first order.....	30
<b>Vas'kovskii M. M.</b> Mixed-type stochastic differential equations driven by standard and fractional Brownian motions with Hurst indices greater than $1/3$ .....	36
<b>Ignatenko M. V., Yanovich L. A.</b> On the exact and approximate solutions of several differential equations with variational derivatives of the first and second orders.....	51
<b>Ayryan E. A., Hnatic M., Malyutin V. B.</b> Approximate evaluation of functional integrals generated by the relativistic Hamiltonian.....	72

### PHYSICS

<b>Rusak Yu. A., Babichev L. F.</b> Monte-Carlo simulation of the 1 <sup>st</sup> order hadron-QGP phase transition in heavy ion collisions using a parton model.....	84
<b>Poklonski N. A., Dzeraviah A. N., Vyrko S. A.</b> Model of stationary migration of free and hopping via acceptors holes in a crystalline semiconductor.....	92
<b>Adamchuck D. V., Ksenevich V. K., Poklonski N. A., Kavaleu A. I.</b> Features of water vapor adsorption and desorption on the surface of non-stoichiometric tin dioxide films .....	102

### INFORMATICS

<b>Sobolevsky P. I., Bakhanovich S. V.</b> Global dependences in hexagonal tiling.....	114
--	-----

### SCIENTISTS OF BELARUS

<b>Izobov Nikolai Alekseevich</b> (To the 80 <sup>th</sup> Anniversary) .....	127
---	-----

ISSN 1561-2430 (Print)  
ISSN 2524-2415 (Online)

**МАТЕМАТИКА**  
**MATHEMATICS**

ISSN 1561-2430 (Print)  
ISSN 2524-2415 (Online)

УДК 517.954

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-1-7-16>

Поступила в редакцию 25.11.2019

Received 25.11.2019

**А. И. Басик, Е. В. Грицук, Т. А. Грицук**

*Брестский государственный университет им. А. С. Пушкина, Брест, Беларусь*

**ЗАДАЧА РИМАНА – ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ  
ОРТОГОНАЛЬНОГО ТИПА В  $\mathbf{R}^3$**

**Аннотация.** Рассматривается класс эллиптических систем четырех дифференциальных уравнений первого порядка ортогонального типа в  $\mathbf{R}^3$ . В произвольной ограниченной односвязной области с гладкой границей для систем этого класса изучается вопрос регуляризуемости краевой задачи Римана – Гильберта. По коэффициентам эллиптической системы и матрицы граничного оператора строится специальное векторное поле, невхождение которого в касательную плоскость в каждой точке границы области обеспечивает выполнимость условия Лопатинского регуляризуемости краевой задачи. Полученное условие позволяет доказать, что множество регуляризуемых краевых задач Римана – Гильберта для рассматриваемого класса систем имеет две компоненты гомотопической связности, а также что индекс произвольной регуляризуемой задачи равен минус единице.

**Ключевые слова:** эллиптическая система, регуляризуемая краевая задача, условие Лопатинского, гомотопическая классификация, индекс

**Для цитирования.** Басик, А. И. Задача Римана – Гильберта для эллиптических систем ортогонального типа в  $\mathbf{R}^3$  / А. И. Басик, Е. В. Грицук, Т. А. Грицук // Вест. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2020. – Т. 56, № 1. – С. 7–16. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-1-7-16>

**Alixandr I. Basik, Evgenij V. Hrytsuk, Tatsiana A. Hrytsuk**

*Brest State A. S. Pushkin University, Brest, Belarus*

**THE RIEMANN – HILBERT BOUNDARY VALUE PROBLEM  
FOR ELLIPTIC SYSTEMS OF THE ORTHOGONAL TYPE IN  $\mathbf{R}^3$**

**Abstract.** In this paper, a class of elliptic systems of four 1<sup>st</sup> order differential equations of the orthogonal type in  $\mathbf{R}^3$  is considered. For such systems we study the issue of regularizability of the Riemann – Hilbert boundary value problem in an arbitrary limited simply-connected region with a smooth boundary in  $\mathbf{R}^3$ . Using the coefficients of the elliptic system and the matrix of the boundary operator, a special vector field is constructed, and its not entering the tangent plane in any point of the boundary provides the Lopatinski condition of the regularizability of the boundary value problem. The obtained condition permits to prove that the set of regularizable Riemann – Hilbert boundary value problems for the considered class of systems has two components of homotopic connectedness, and the index of an arbitrary regularizable problem equals to minus one.

**Keywords:** elliptic system, regularizable boundary value problem, Lopatinski condition, homotopic classification, index

**For citation.** Basik A. I., Hrytsuk E. V., Hrytsuk T. A. The Riemann – Hilbert boundary value problem for elliptic systems of the orthogonal type in  $\mathbf{R}^3$ . *Vesti Natsyional'noi akademii nauk Belarusi. Seriya fizika-matematichnykh nauk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2020, vol. 56, no. 1, pp. 7–16 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-4-7-16>

**Введение.** Пусть в ограниченной односвязной области  $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ , границей которой является поверхность Ляпунова  $\partial\Omega$ , задана эллиптическая система четырех дифференциальных уравнений первого порядка с действительными коэффициентами

$$A_1 \frac{\partial U}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial U}{\partial x_2} + A_3 \frac{\partial U}{\partial x_3} = 0, \quad (1)$$

где  $U = (U_1, U_2, U_3, U_4)^T$  – неизвестная вектор-функция,  $A_1, A_2$  и  $A_3$  – заданные матрицы размера  $4 \times 4$  вида

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a_1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & a_2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} a_3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & a_3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix},$$

$a_1, a_2, a_3$  – заданные действительные числа.

Эллиптичность системы (1) означает, что для каждого вектора  $\xi \in \mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$  ее характеристическая матрица-форма

$$A(\xi) := A_1 \xi_1 + A_2 \xi_2 + A_3 \xi_3 = \begin{pmatrix} \langle a; \xi \rangle & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ -\xi_1 & \langle a; \xi \rangle & -\xi_3 & \xi_2 \\ -\xi_2 & \xi_3 & \langle a; \xi \rangle & -\xi_1 \\ -\xi_3 & -\xi_2 & \xi_1 & \langle a; \xi \rangle \end{pmatrix}$$

является невырожденной, где  $a = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $\langle x; y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$  – стандартное скалярное произведение в  $\mathbf{R}^3$ . Поскольку при всех  $\xi \in \mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$  выполняется неравенство

$$\det A(\xi) = \left( \langle a; \xi \rangle^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \right)^2 > 0,$$

то система (1) является эллиптической. Отметим, что для матрицы  $A(\xi)$  выполняется равенство

$$A(\xi) A^T(\xi) = \left( \langle a; \xi \rangle^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \right) E.$$

Здесь  $T$  означает транспонирование,  $E$  – единичная матрица четвертого порядка.

Эллиптические системы, характеристическая матрица  $A(\xi)$  которых имеет вид

$$A(\xi) = \begin{pmatrix} \langle a; \xi \rangle & \langle b; \xi \rangle & \langle c; \xi \rangle & \langle d; \xi \rangle \\ -\langle b; \xi \rangle & \langle a; \xi \rangle & -\langle d; \xi \rangle & \langle c; \xi \rangle \\ -\langle c; \xi \rangle & \langle d; \xi \rangle & \langle a; \xi \rangle & -\langle b; \xi \rangle \\ -\langle d; \xi \rangle & -\langle c; \xi \rangle & \langle b; \xi \rangle & \langle a; \xi \rangle \end{pmatrix},$$

где  $a, b, c, d \in \mathbf{R}^3$ , будем называть системами ортогонального типа в  $\mathbf{R}^3$ . Таким образом (1) является системой ортогонального типа.

Задача Римана – Гильберта для системы (1) состоит в отыскании решения этой системы, непрерывно дифференцируемого в области  $\Omega$  и непрерывного по Гельдеру в  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ , удовлетворяющего на  $\partial\Omega$  граничным условиям

$$B(y)U(y) = f(y) \quad (y \in \partial\Omega), \quad (2)$$

где  $B$  – заданная непрерывная по Гельдеру на поверхности  $\partial\Omega$  матрица-функция размера  $2 \times 4$  вида

$$B(y) = \begin{pmatrix} m_1(y) & m_2(y) & m_3(y) & m_4(y) \\ n_1(y) & n_2(y) & n_3(y) & n_4(y) \end{pmatrix},$$

$f$  – заданная непрерывная по Гельдеру на  $\partial\Omega$  двухкомпонентная вектор-функция.

В настоящей статье проводится гомотопическая классификация регуляризуемых краевых задач Римана – Гильберта для класса эллиптических систем ортогонального типа четырех дифференциальных уравнений первого порядка с тремя переменными. Проблема гомотопической классификации регуляризуемых краевых задач была сформулирована И. М. Гельфандом в 1960 г. и состоит в определении числа компонент связности, а также в указании представителей этих компонент и в установлении гомотопических инвариантов эллиптических псевдодифференциальных операторов, задаваемых регуляризуемыми краевыми задачами [1]. (Напомним, что краевая задача называется регуляризуемой, если для нее выполнено условие Я. Б. Лопатинского [2, 3].) Несмотря на давность постановки, эта проблема до сих пор не решена, и по ней имеются лишь отдельные результаты. Отметим некоторые из них. В. И. Шевченко провел классификацию регуляризуемых задач Римана – Гильберта для системы Моисила – Теодореску [4], А. Т. Усс – для трехмерных аналогов системы Коши – Римана [5]. В статье [6] проведена гомотопическая классификация регуляризуемых краевых задач Римана – Гильберта для класса эллиптических кососимметрических систем в  $\mathbf{R}^3$ . Заметим, что частным случаем систем вида (1) является система Моисила – Теодореску, и рассматриваемый нами класс систем имеет непустое пересечение, но не совпадает ни с классом трехмерных аналогов системы Коши – Римана, ни с классом систем кососимметрического типа в  $\mathbf{R}^3$ .

Исследования проводятся методом, предложенным В. И. Шевченко [4]. Изложим кратко его суть. Для систем рассматриваемого класса доказывается критерий, позволяющий в явном виде описать условие регуляризуемости Лопатинского произвольной краевой задачи Римана – Гильберта в терминах матрицы граничного оператора и нормального вектора к граничной поверхности. Это условие обеспечивает нетеровость задачи в широком классе гильбертовых пространств [3]. Подобный критерий, как указывалось выше, был ранее получен В. И. Шевченко для системы Моисила – Теодореску [4] (см. также [7]), А. Т. Уссом – для трехмерных аналогов системы Коши – Римана [5], а также для эллиптических кососимметрических систем [6]. Следует отметить, что для четырехмерных аналогов системы Коши – Римана [8] и псевдосимметрических эллиптических систем в  $\mathbf{R}^4$  [9, 10] такого критерия не существует – в произвольной односвязной ограниченной области и для любого граничного оператора краевая задача для указанных систем не является регуляризуемой.

Доказываемый ниже критерий регуляризуемости краевой задачи Римана – Гильберта позволяет провести гомотопию произвольной краевой задачи Римана – Гильберта для рассматриваемых систем в классе регуляризуемых краевых задач к простейшему виду и, тем самым, установить равенство индексов этих задач. Индекс регуляризуемой задачи Римана – Гильберта для системы Моисила – Теодореску [4], для трехмерных аналогов системы Коши – Римана [5], а также для эллиптических кососимметрических систем в  $\mathbf{R}^3$  [6] равен минус единице. В настоящей работе мы распространим этот результат на класс эллиптических систем (1) ортогонального типа в  $\mathbf{R}^3$ .

**Условие регуляризуемости.** Задача (1), (2) называется регуляризуемой, если для нее выполнено условие Лопатинского. Оно представляет собой дополнительное ограничение на матрицу граничного оператора и состоит в том, что ранг матрицы

$$B(y) \cdot \int_{\gamma} A^{-1}(\lambda v(y) + \tau(y)) d\lambda \quad (3)$$

является максимальным в каждой точке  $y \in \partial\Omega$  и при каждом ненулевом касательном к  $\partial\Omega$  в точке  $y$  векторе  $\tau = \tau(y) = (\tau_1(y), \tau_2(y), \tau_3(y))$ . Здесь через  $v = v(y) = (v_1(y), v_2(y), v_3(y))$  обозначен единичный вектор внутренней нормали к  $\partial\Omega$  в точке  $y$ , и интегрирование в (3) ведется по простому замкнутому контуру  $\gamma$ , лежащему в верхней комплексной  $\lambda$ -полуплоскости и охватывающему корень  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$  ( $\beta > 0$ ) уравнения  $\det A(\lambda v(y) + \tau(y)) = 0$ .

Отметим, что для максимальности ранга матрицы (3) необходимо, чтобы  $\text{rank } B(y) = 2$  в каждой точке  $y \in \partial\Omega$ , что и предполагаем выполненным в дальнейшем.

Рассмотрим векторное поле

$$P(y) = L + [L; a] + a \cdot \langle L; a \rangle, \quad (4)$$

где  $[x; y]$  – векторное произведение в  $\mathbf{R}^3$ ,  $L = (L_1, L_2, L_3)$  – вектор с компонентами

$$L_1 = \Lambda_{12} - \Lambda_{34}, \quad L_2 = \Lambda_{13} + \Lambda_{24}, \quad L_3 = \Lambda_{14} - \Lambda_{23},$$

$\Lambda_{jk}$  – минор матрицы  $B(y)$ , составленный из ее  $j$ -го и  $k$ -го столбцов ( $j, k = 1, 2, 3, 4$ ).

**Теорема 1.** *Задача (1), (2) регуляризуема тогда и только тогда, когда в каждой точке  $y \in \partial\Omega$  выполняется условие*

$$\langle \nu(y); P(y) \rangle \neq 0,$$

где  $\nu$  – единичное поле внутренних нормалей на поверхности  $\partial\Omega$ .

**Доказательство.** Пусть  $H_{jk}$  – минор матрицы Лопатинского (3), составленный из ее  $j$ -го и  $k$ -го столбцов ( $j, k = 1, 2, 3, 4$ ). Непосредственные вычисления показывают, что

$$H_{12} = -H_{34}, \quad H_{13} = H_{24}, \quad H_{14} = -H_{23},$$

и с точностью до ненулевого множителя

$$\begin{aligned} H_{12} &= L_1 \left( \langle a; \lambda_1 \nu + \tau \rangle^2 + (\lambda_1 \nu_1 + \tau_1)^2 \right) + L_2 \left( -\langle a; \lambda_1 \nu + \tau \rangle (\lambda_1 \nu_3 + \tau_3) + (\lambda_1 \nu_1 + \tau_1) (\lambda_1 \nu_2 + \tau_2) \right) + \\ &\quad + L_3 \left( \langle a; \lambda_1 \nu + \tau \rangle (\lambda_1 \nu_2 + \tau_2) + (\lambda_1 \nu_1 + \tau_1) (\lambda_1 \nu_3 + \tau_3) \right), \\ H_{13} &= L_1 \left( \langle a; \lambda_1 \nu + \tau \rangle (\lambda_1 \nu_3 + \tau_3) + (\lambda_1 \nu_1 + \tau_1) (\lambda_1 \nu_2 + \tau_2) \right) + L_2 \left( \langle a; \lambda_1 \nu + \tau \rangle^2 + (\lambda_1 \nu_2 + \tau_2)^2 \right) - \\ &\quad - L_3 \left( \langle a; \lambda_1 \nu + \tau \rangle (\lambda_1 \nu_1 + \tau_1) - (\lambda_1 \nu_2 + \tau_2) (\lambda_1 \nu_3 + \tau_3) \right), \\ H_{14} &= -L_1 \left( \langle a; \lambda_1 \nu + \tau \rangle (\lambda_1 \nu_2 + \tau_2) - (\lambda_1 \nu_1 + \tau_1) (\lambda_1 \nu_3 + \tau_3) \right) + \\ &\quad + L_2 \left( \langle a; \lambda_1 \nu + \tau \rangle (\lambda_1 \nu_1 + \tau_1) + (\lambda_1 \nu_2 + \tau_2) (\lambda_1 \nu_3 + \tau_3) \right) + L_3 \left( \langle a; \lambda_1 \nu + \tau \rangle^2 + (\lambda_1 \nu_3 + \tau_3)^2 \right). \end{aligned}$$

Заметим, что

$$(H_{12})^2 + (H_{13})^2 + (H_{14})^2 = 0.$$

Следовательно, сумма квадратов мнимых частей миноров  $H_{12}$ ,  $H_{13}$  и  $H_{14}$  равна сумме квадратов их действительных частей. Поэтому задача (1), (2) регуляризуема тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$(\text{Im } H_{12})^2 + (\text{Im } H_{13})^2 + (\text{Im } H_{14})^2 > 0.$$

Представим мнимые части миноров  $H_{12}$ ,  $H_{13}$  и  $H_{14}$  в виде

$$\text{Im } H_{12} = A_1 R_1 - B_1 R_0 + C_1 R_3 - D_1 R_2,$$

$$\text{Im } H_{13} = A_1 R_2 - B_1 R_3 - C_1 R_0 + D_1 R_1,$$

$$\text{Im } H_{14} = A_1 R_3 + B_1 R_2 - C_1 R_1 - D_1 R_0,$$

где

$$A_1 = \frac{\langle a; \tau \rangle}{1 + \langle a; \nu \rangle^2}, \quad A_2 = \beta \langle a; \nu \rangle, \quad (5)$$

$$B_1 = \frac{(1 + \langle a; v \rangle^2 - a_1 v_1 \langle a; v \rangle) \tau_1 - a_2 v_1 \langle a; v \rangle \tau_2 - a_3 v_1 \langle a; v \rangle \tau_3}{1 + \langle a; v \rangle^2}, \quad B_2 = \beta v_1, \quad (6)$$

$$C_1 = \frac{-a_1 v_2 \langle a; v \rangle \tau_1 + (1 + \langle a; v \rangle^2 - a_2 v_2 \langle a; v \rangle) \tau_2 - a_3 v_2 \langle a; v \rangle \tau_3}{1 + \langle a; v \rangle^2}, \quad C_2 = \beta v_2, \quad (7)$$

$$D_1 = \frac{-a_1 v_3 \langle a; v \rangle \tau_1 - a_2 v_3 \langle a; v \rangle \tau_2 + (1 + \langle a; v \rangle^2 - a_3 v_3 \langle a; v \rangle) \tau_3}{1 + \langle a; v \rangle^2}, \quad D_2 = \beta v_3, \quad (8)$$

$$R_0 = (-L_1 v_1 - L_2 v_2 - L_3 v_3) \beta, \quad R_1 = (L_1 \langle a; v \rangle - L_2 v_3 + L_3 v_2) \beta, \quad (9)$$

$$R_2 = (L_1 v_3 + L_2 \langle a; v \rangle - L_3 v_1) \beta, \quad R_3 = (-L_1 v_2 + L_2 v_1 + L_3 \langle a; v \rangle) \beta. \quad (10)$$

Имеем

$$\begin{aligned} & (\operatorname{Im} H_{12})^2 + (\operatorname{Im} H_{13})^2 + (\operatorname{Im} H_{14})^2 = \\ & = (R_0^2 + R_1^2 + R_2^2 + R_3^2) (A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 + D_1^2) - (A_1 R_0 + B_1 R_1 + C_1 R_2 + D_1 R_3)^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Случай  $A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 + D_1^2 = 0$  не возможен, так как из явного вида формул (5)–(8) получаем, что  $\tau = 0$ . Тогда, в силу неравенства Коши – Буняковского – Шварца, равенство нулю в неравенстве (11) имеет место тогда и только тогда, когда существует ненулевой вектор  $\tau \in T, \partial\Omega$ , являющийся решением системы линейных (по координатам вектора  $\tau$ ) уравнений

$$\begin{cases} \langle a; \tau \rangle = \mu (1 + \langle a; v \rangle^2) R_0, \\ (1 + \langle a; v \rangle^2 - a_1 v_1 \langle a; v \rangle) \tau_1 - a_2 v_1 \langle a; v \rangle \tau_2 - a_3 v_1 \langle a; v \rangle \tau_3 = \mu (1 + \langle a; v \rangle^2) R_1, \\ -a_1 v_2 \langle a; v \rangle \tau_1 + (1 + \langle a; v \rangle^2 - a_2 v_2 \langle a; v \rangle) \tau_2 - a_3 v_2 \langle a; v \rangle \tau_3 = \mu (1 + \langle a; v \rangle^2) R_2, \\ -a_1 v_3 \langle a; v \rangle \tau_1 - a_2 v_3 \langle a; v \rangle \tau_2 + (1 + \langle a; v \rangle^2 - a_3 v_3 \langle a; v \rangle) \tau_3 = \mu (1 + \langle a; v \rangle^2) R_3, \end{cases} \quad (12)$$

где  $\mu \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ . Единственным решением подсистемы, состоящей из второго, третьего и четвертого уравнений системы (12), является вектор  $\tau$  с координатами

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \mu (R_1 + v_1 \langle a; v \rangle (a_1 R_1 + a_2 R_2 + a_3 R_3)), \\ \tau_2 &= \mu (R_2 + v_2 \langle a; v \rangle (a_1 R_1 + a_2 R_2 + a_3 R_3)), \\ \tau_3 &= \mu (R_3 + v_3 \langle a; v \rangle (a_1 R_1 + a_2 R_2 + a_3 R_3)). \end{aligned} \quad (13)$$

Решение (13) удовлетворяет первому уравнению системы (12) при дополнительном условии

$$a_1 R_1 + a_2 R_2 + a_3 R_3 = R_0. \quad (14)$$

Покажем, что вектор  $\tau$  не может быть нулевым. Предположим противное, т. е. пусть в формуле (13)  $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0$ , с учетом условия (14) получаем равенство

$$\langle a; \tau \rangle = (1 + \langle a; v \rangle^2) R_0 = 0,$$

значит,  $R_0 = 0$ . Из формул (13) с учетом условия (14) получаем  $R_1 = R_2 = R_3 = 0$ . Из формул (12) получаем  $A_1 = B_1 = C_1 = D_1 = 0$ , что невозможно. Таким образом,  $\tau \neq 0$ , и с учетом формул (9) и (10) убеждаемся, что  $\tau \in T_y \partial\Omega$ .

Подставим в формулу (14) значения  $R_j, j = 0, 1, 2, 3$ , предварительно разделив обе части условия (14) на  $\beta > 0$ , и получим условие

$$\begin{aligned} & v_1 \left( L_1 (1 + a_1^2) + L_2 (a_1 a_2 + a_3) + L_3 (a_1 a_3 - a_2) \right) + \\ & + v_2 \left( L_1 (a_1 a_2 - a_3) + L_2 (1 + a_2^2) + L_3 (a_2 a_3 + a_1) \right) + \\ & + v_3 \left( L_1 (a_1 a_3 + a_2) + L_2 (a_2 a_3 - a_1) + L_3 (1 + a_3^2) \right) = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Учитывая обозначения (4), равенство (15) запишем в виде

$$\langle v(y); P(y) \rangle = 0. \tag{16}$$

Таким образом,  $(\text{Im } H_{12})^2 + (\text{Im } H_{13})^2 + (\text{Im } H_{14})^2 = 0$  тогда и только тогда, когда выполняется условие (16). Теорема 1 доказана.

**Гомотопическая классификация регуляризуемых краевых задач.** Напомним, что две регуляризуемые задачи Римана – Гильберта называются гомотопными, если существует непрерывная деформация одной задачи в другую, не нарушающая условия Лопатинского. При этом предполагается, что деформация сохраняет гладкость (непрерывность по Гельдеру) коэффициентов этих задач.

Через  $\mathfrak{I}$  обозначим множество всех регуляризуемых краевых задач Римана – Гильберта (1), (2);  $\mathfrak{I}_+$  – множество регуляризуемых задач Римана – Гильберта (1), (2), для которых выполняется неравенство  $\langle v(y); P(y) \rangle > 0$  всюду на  $\partial\Omega$ ;  $\mathfrak{I}_-$  – множество регуляризуемых задач, для которых  $\langle v(y); P(y) \rangle < 0$  всюду на  $\partial\Omega$ .

**Теорема 2.** *Множество  $\mathfrak{I}$  регуляризуемых краевых задач Римана – Гильберта для эллиптических систем ортогонального типа в  $\mathbf{R}^3$  имеет две компоненты гомотопической связности  $\mathfrak{I}_+, \mathfrak{I}_-$ . Гомотопическим инвариантом является знак скалярного произведения. Индекс произвольной задачи из  $\mathfrak{I}$  равен минус единице.*

**Доказательство.** В силу непрерывности векторного поля  $P(y)$  и связности поверхности  $\partial\Omega$  скалярное произведение  $\langle v(y); P(y) \rangle$  сохраняет знак на  $\partial\Omega$ , и, следовательно, задачи, для которых соответствующие скалярные произведения имеют разные знаки, не гомотопны. Таким образом, достаточно установить гомотопическую связность множеств  $\mathfrak{I}_+, \mathfrak{I}_-$ .

Рассмотрим множество  $\mathfrak{I}_+$ . Так как  $\text{rank } B(y) = 2$  в каждой точке  $y \in \partial\Omega$ , то на поверхности  $\partial\Omega$  первая строка

$$m(y) := (m_1(y), m_2(y), m_3(y), m_4(y))$$

матрицы  $B(y)$  не обращается в нуль. Поэтому существует [11] непрерывное отображение  $M : \partial\Omega \times [0; 1] \rightarrow \mathbf{R}^4 \setminus \{0\}$ , такое что при каждом  $y \in \partial\Omega$

$$M(y, 0) = m(y), \quad M(y, 1) = (1, 0, 0, 0),$$

и при каждом  $t \in [0; 1]$  вектор-функция  $M(\cdot, t)$  непрерывна по Гельдеру на  $\partial\Omega$ .

Проведем гомотопию матрицы граничного оператора задачи (1), (2). Для этого рассмотрим линейную систему уравнений относительно неизвестной строки  $N = (N_1(y, t), N_2(y, t), N_3(y, t), N_4(y, t))$ :

$$\Xi(y, t) N^T(y, t) = \tilde{P}(y, t) \tag{17}$$

где матрица  $\Xi(y, t)$  имеет вид (для упрощения записей точка  $(y, t) \in \partial\Omega \times [0; 1]$ , в которой вычисляются элементы матрицы, не указывается):

$$\Xi = \sum_{j=1}^4 M_j \Xi_j,$$

$$\Xi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+a_1^2 & a_1a_2+a_3 & a_1a_3-a_2 \\ 0 & a_1a_2-a_3 & 1+a_2^2 & a_2a_3+a_1 \\ 0 & a_1a_3+a_2 & a_2a_3-a_1 & 1+a_3^2 \end{pmatrix}, \quad \Xi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1-a_1^2 & 0 & -a_1a_3+a_2 & a_1a_2+a_3 \\ -a_1a_2+a_3 & 0 & -a_2a_3-a_1 & 1+a_2^2 \\ -a_1a_3-a_2 & 0 & -1-a_3^2 & a_2a_3-a_1 \end{pmatrix},$$

$$\Xi_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -a_1a_2-a_3 & a_1a_3-a_2 & 0 & -1-a_1^2 \\ -1-a_2^2 & a_2a_3+a_1 & 0 & -a_1a_2+a_3 \\ -a_2a_3+a_1 & 1+a_3^2 & 0 & -a_1a_3-a_2 \end{pmatrix}, \quad \Xi_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_1a_3+a_2 & -a_1a_2-a_3 & 1+a_1^2 & 0 \\ -a_2a_3-a_1 & -1-a_2^2 & a_1a_2-a_3 & 0 \\ -1-a_3^2 & -a_2a_3+a_1 & a_1a_3+a_2 & 0 \end{pmatrix},$$

а правая часть системы (17):

$$\tilde{P}(y, t) = \begin{pmatrix} t(m_1(y)n_1(y) + m_2(y)n_2(y) + m_3(y)n_3(y) + m_4(y)n_4(y)) \\ (1-t)P_1(y) + tv_1(y) \\ (1-t)P_2(y) + tv_2(y) \\ (1-t)P_3(y) + tv_3(y) \end{pmatrix}.$$

Так как в каждой точке  $y \in \partial\Omega$  и при каждом  $t \in [0; 1]$

$$\det \Xi(y, t) = (1 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^2 (M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 + M_4^2)^2 \neq 0,$$

то система (17) однозначно разрешима, при этом отображение  $N : \partial\Omega \times [0; 1] \rightarrow \mathbf{R}^4$  непрерывно и, как нетрудно видеть, при каждом фиксированном  $t \in [0; 1]$  непрерывно по Гельдеру на  $\partial\Omega$ . При  $t = 0$  решением системы (17) является вторая строка матрицы  $B(y)$ .

Рассмотрим гомотопию задачи (1), (2), при которой система (1) остается неизменной, а матрица соответствующего этой системе граничного условия

$$B(y, t)U(y) = f(y) \quad (y \in \partial\Omega) \tag{18}$$

имеет вид

$$B(y, t) = \begin{pmatrix} M_1(y, t) & M_2(y, t) & M_3(y, t) & M_4(y, t) \\ N_1(y, t) & N_2(y, t) & N_3(y, t) & N_4(y, t) \end{pmatrix}.$$

Так как векторное поле  $P(y, t)$ , отвечающее задаче (1), (18), имеет вид

$$P(y, t) = (1-t)P(y) + tv(y),$$

то

$$\langle v(y); P(y, t) \rangle = (1-t)\langle v(y); P(y) \rangle + t > 0$$

при всех  $y \in \partial\Omega$  и любом  $t \in [0; 1]$ . Следовательно, задача (1), (2) в классе регуляризуемых краевых задач гомотопна задаче для системы (1) с граничным условием ( $y \in \partial\Omega$ )

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{v_1 - a_3v_2 + a_2v_3}{1+|a|^2} & \frac{v_2 - a_1v_3 + a_3v_1}{1+|a|^2} & \frac{v_3 - a_2v_1 + a_1v_2}{1+|a|^2} \end{pmatrix} U(y) = f(y). \tag{19}$$

Отметим, что для любых действительных чисел  $a_1, a_2$  и  $a_3$  задача (1), (19) регуляризуема ( $|a|^2 = \langle a; a \rangle$ ). Поэтому, если указанные параметры заменить на значения непрерывных функций

$$a_1(t) = (1-t)a_1, \quad a_2(t) = (1-t)a_2, \quad a_3(t) = (1-t)a_3,$$

то мы получим гомотопию задачи (1), (19) задаче

$$\begin{cases} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_4}{\partial x_3} = 0, \\ -\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{\partial u_4}{\partial x_2} = 0, \\ -\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_4}{\partial x_1} = 0, \\ -\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = 0 \end{cases} \quad (x \in \Omega), \tag{20}$$

$$\begin{cases} u_1|_{\partial\Omega} = f_1(y), \\ (u_2v_1 + u_3v_2 + u_4v_3)|_{\partial\Omega} = f_2(y) \end{cases} \quad (y \in \partial\Omega). \tag{21}$$

Таким образом, произвольная задача из  $\mathfrak{S}_+$  гомотопна задаче (20), (21), и тем самым гомотопическая связность множества  $\mathfrak{S}_+$  доказана.

Поскольку индексы гомотопных регуляризуемых задач равны, то для вычисления индекса произвольной задачи из множества  $\mathfrak{S}_+$  достаточно вычислить индекс задачи (20), (21). Заменой  $V = (u_2, u_3, u_4)$  и  $W = u_1$  задача (20), (21) приводится к виду

$$\operatorname{div} V(x) = 0, \quad \operatorname{rot} V(x) = \operatorname{grad} W(x) \quad (x \in \Omega), \tag{22}$$

$$W|_{\partial\Omega} = f_1(y), \quad \langle V; v \rangle|_{\partial\Omega} = f_2(y) \quad (y \in \partial\Omega). \tag{23}$$

Индекс последней задачи вычислен в работе [11] и равен минус единице.

Аналогично доказывается, что каждая задача из множества  $\mathfrak{S}_-$  гомотопна задаче для системы (20) с граничным условием

$$\begin{cases} u_1|_{\partial\Omega} = f_1(y), \\ (-u_2v_1 - u_3v_2 - u_4v_3)|_{\partial\Omega} = f_2(y) \end{cases} \quad (y \in \partial\Omega). \tag{24}$$

Отметим основные отличия доказательства. При гомотопии матрицы граничного оператора задачи (1), (2) правая часть системы (17) имеет вид

$$\tilde{P}(y, t) = \begin{pmatrix} t(m_1(y)n_1(y) + m_2(y)n_2(y) + m_3(y)n_3(y) + m_4(y)n_4(y)) \\ (1-t)P_1(y) - tv_1(y) \\ (1-t)P_2(y) - tv_2(y) \\ (1-t)P_3(y) - tv_3(y) \end{pmatrix}.$$

Тогда неравенство

$$\langle v(y); P(y, t) \rangle = (1-t)\langle v(y); P(y) \rangle - t < 0$$

выполняется при всех  $y \in \partial\Omega$  и любом  $t \in [0; 1]$  и полученная задача гомотопна задаче для системы (1) с граничным условием:

$$\left( \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{v_1 - a_3 v_2 + a_2 v_3}{1 + |a|^2} & -\frac{v_2 - a_1 v_3 + a_3 v_1}{1 + |a|^2} & -\frac{v_3 - a_2 v_1 + a_1 v_2}{1 + |a|^2} \end{array} \right) U(y) = f(y).$$

Далее, заменой  $V = (u_2, u_3, u_4)$  и  $W = u_1$  задача (20), (24) приводится к виду (22) с граничными условиями

$$W|_{\partial\Omega} = f_1(y), \quad \langle V; v \rangle|_{\partial\Omega} = -f_2(y) \quad (y \in \partial\Omega), \quad (25)$$

индекс которой, как отмечалось выше, равен минус единице. Теорема 2 доказана.

**Заключение.** В статье в терминах матрицы граничного оператора и коэффициентов системы описано условие Лопатинского регуляризуемости краевой задачи Римана – Гильберта для класса эллиптических систем четырех дифференциальных уравнений первого порядка ортогонального типа в  $\mathbf{R}^3$ . Полученное условие состоит в том, что регуляризуемость задачи равносильна тому, что некоторое специальное векторное поле не касается границы области ни в одной точке. Выполнение этого условия обеспечивает нетеровость краевой задачи как в классической постановке, так и в широкой шкале гильбертовых пространств. Полученное условие регуляризуемости позволяет провести гомотопическую классификацию множества  $\mathfrak{Z}$  регуляризуемых краевых задач Римана – Гильберта для рассматриваемого класса систем:

- доказать, что  $\mathfrak{Z}$  имеет две компоненты гомотопической связности;
- для каждой компоненты указать представителя;
- вычислить индекс произвольной задачи из множества  $\mathfrak{Z}$ .

Отметим, что индекс задачи, являясь гомотопическим инвариантом, в рассматриваемом случае не различает компоненты гомотопической связности множества  $\mathfrak{Z}$ .

#### Список использованных источников

1. Гельфанд, И. М. Об эллиптических уравнениях / И. М. Гельфанд // Успехи мат. наук. – 1960. – Т. 15, вып. 3. – С. 121–132.
2. Лопатинский, Я. Б. Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям / Я. Б. Лопатинский // Укр. мат. журн. – 1953. – Т. 5. – С. 123–151.
3. Агранович, М. С. Эллиптические сингулярные интегро-дифференциальные операторы / М. С. Агранович // Успехи мат. наук. – 1965. – Т. 20, вып. 5. – С. 3–120.
4. Шевченко, В. И. Гомотопическая классификация задач Римана – Гильберта для голоморфного вектора / В. И. Шевченко // Математическая физика: Респ. межвед. сб. – Киев, 1975. – Вып. 17. – С. 184–186.
5. Усс, А. Т. Краевая задача Римана – Гильберта для трехмерных аналогов системы Коши – Римана / А. Т. Усс // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2003. – Т. 47, № 6. – С. 10–15.
6. Басик, А. И. Гомотопическая классификация регуляризуемых краевых задач Римана – Гильберта для одного класса эллиптических систем в  $\mathbf{R}^3$  / А. И. Басик, Е. В. Грицук // Математика. Інформаційні технології: зб. ст. – Луцьк, 2019. – № 6. – С. 12–18.
7. Полунин, В. А. Об условии Шапиро – Лопатинского в задаче Римана – Гильберта для эллиптической системы первого порядка / В. А. Полунин, А. П. Солдатов // Науч. ведомости Белгород. гос. ун-та. Сер. Математика. Физика. – 2010. – № 17 (88), вып. 20. – С. 91–99.
8. Усс, А. Т. Гомотопическая классификация четырехмерных аналогов системы Коши – Римана с действительными коэффициентами / А. Т. Усс // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2003. – Т. 47, № 4. – С. 5–9.
9. Виноградов, В. С. Граничная задача для псевдосимметрических систем / В. С. Виноградов // Дифференц. уравнения. – 1985. – Т. 21, № 1. – С. 161–163.
10. Басик, А. И. О краевых задачах для эллиптических псевдосимметрических систем первого порядка в  $\mathbf{R}^4$  / А. И. Басик, А. Т. Усс // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т. 38, № 3. – С. 410–412.
11. Шевченко, В. И. О некоторых краевых задачах для голоморфного вектора / В. И. Шевченко // Математическая физика: Респ. межвед. сб. – Киев, 1970. – Вып. 8. – С. 172–186.

#### References

1. Gel'fand I. M. About elliptic equation. *Uspekhi matematicheskikh nauk = Russian Mathematical Surveys*, 1960, vol. 15, no. 3, pp. 121–132 (in Russian).

2. Lopatinskii Ya. B. About one way of carrying out boundary problems for a system of differential equations of elliptic type to regular integral equations. *Ukrainskii matematicheskii zhurnal = Ukrainian Mathematical Journal*, 1953, vol. 5, pp. 123–151.
3. Agranovich M. S. Elliptic Singular Integro-Differential Operators. *Russian Mathematical Surveys*, 1965, vol. 20, no. 5, pp. 1–121. <https://doi.org/10.1070/rm1965v020n05abeh001190>
4. Shevchenko V. I. The Homotopy Classification of Riemann – Gilbert problem for Holomorphic Vector. *Matematicheskaya fizika: Respublikanskii mezhvedomstvennyi sbornik* [Mathematical Physics: Republican Interdepartmental Book of Articles]. Kiev, 1975, iss. 17, pp. 184–186 (in Russian).
5. Uss A. T. Riemann-Hilbert boundary value problems for Cauchy-Riemann’s analog in  $\mathbf{R}^3$ . *Doklady Natsionalnoi Akademii Nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2003, vol. 47, no. 6, pp. 10–15 (in Russian).
6. Basik A. I., Gricuk E. V. The homotopic classification of regularizable Riemann-Hilbert boundary value problems for one class of elliptic systems in  $\mathbf{R}^3$ . *Matematika. Informatsiini tekhnologii: Zbirnik statej = Mathematics. Information Technologies: Book of Articles*. Luc’k, 2019, no. 6, pp. 12–18 (in Russian).
7. Polunin V. A., Soldatov A. P. About the Shapiro – Lopatinskii condition in the Riemann – Gilbert problem of the first order elliptic system. *Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya Matematika. Fizika = Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics & Physics*, 2010, no. 17 (88), iss. 20, pp. 91–99 (in Russian).
8. Uss A. T. The Homotopy Classification of Four-Dimensional Analogs of the Cauchy – Riemann System with Real Coefficients. *Doklady Natsionalnoi Akademii Nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2003, vol. 47, no. 4, pp. 5–9 (in Russian).
9. Vinogradov V. S. Boundary Value Problem for Pseudosymmetric Systems. *Differentsial’nye uravneniya = Differential equations*, 1985, vol. 21, no. 1, pp. 161–163 (in Russian).
10. Basik A. I., Uss A. T. On Boundary Value Problems for First-Order Elliptic Pseudosymmetric Systems in  $\mathbf{R}^4$ . *Differentsial’nye uravneniya = Differential equations*. 2003, vol. 38, no. 3, pp. 410–412 (in Russian).
11. Shevchenko V. I. On some Boundary Value Problems for Holomorphic Vector. *Matematicheskaya fizika: Respublikanskii mezhvedomstvennyi sbornik* [Mathematical Physics: Republican Interdepartmental Book of Articles]. Kiev, 1970, iss. 8, pp. 172–186 (in Russian).

### Информация об авторах

**Басик Александр Иванович** – кандидат физико-математических наук, Брестский государственный университет им. А. С. Пушкина (бульвар Космонавтов, 21, 224016, г. Брест, Республика Беларусь). E-mail: alex-basik@yandex.ru

**Грицук Евгений Васильевич** – кандидат физико-математических наук, Брестский государственный университет им. А. С. Пушкина (бульвар Космонавтов, 21, 224016, г. Брест, Республика Беларусь). E-mail: gricuk\_e@tut.by

**Грицук Татьяна Алексеевна** – магистрант, Брестский государственный университет им. А. С. Пушкина (бульвар Космонавтов, 21, 224016, г. Брест, Республика Беларусь). E-mail: gritsuk\_tanya@mail.ru

### Information about the authors

**Aliaxandr I. Basik** – Ph. D. (Physics and Mathematics), Brest State A. S. Pushkin University (21, Kosmonavtov Boulevard, 224016, Brest, Republic of Belarus). E-mail: alex-basik@yandex.ru

**Evgenij V. Hrytsuk** – Ph. D. (Physics and Mathematics), Brest State A. S. Pushkin University (21, Kosmonavtov Boulevard, 224016, Brest, Republic of Belarus). E-mail: gricuk\_e@tut.by

**Tatsiana A. Hrytsuk** – Undergraduate Student, Brest State A. S. Pushkin University (21, Kosmonavtov Boulevard, 224016, Brest, Republic of Belarus). E-mail: gritsuk\_tanya@mail.ru

ISSN 1561-2430 (Print)  
ISSN 2524-2415 (Online)  
УДК 517.968.7  
<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-1-17-29>

Поступила в редакцию 26.12.2019  
Received 26.12.2019

А. П. Шилин

*Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь*

## ГИПЕРСИНГУЛЯРНОЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ЭЙЛЕРОВА ТИПА

**Аннотация.** Изучено линейное интегро-дифференциальное уравнение на замкнутой кривой, расположенной на комплексной плоскости. Интегралы в уравнении понимаются в смысле конечной части по Адамару. Коэффициенты уравнения имеют частную структуру. Применяется метод аналитического продолжения. Уравнение сводится к краевой задаче линейного сопряжения для аналитических функций и линейным дифференциальным уравнениям Эйлера в областях комплексной плоскости. Ищутся решения уравнений Эйлера, являющиеся однозначными аналитическими функциями. Приводятся в явном виде условия разрешимости исходного уравнения. Решение исходного уравнения, которое получается при выполнении этих условий, также приводится в явном виде. Рассмотрены примеры.

**Ключевые слова:** интегро-дифференциальное уравнение, гиперсингулярные интегралы, обобщенные формулы Сохоцкого, краевая задача Римана, дифференциальные уравнения Эйлера

**Для цитирования.** Шилин, А. П. Гиперсингулярное интегро-дифференциальное уравнение эйлера типа / А. П. Шилин // Вест. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2020. – Т. 56, № 1. – С. 17–29. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-1-17-29>

Andrey P. Shilin

*Belarusian State University, Minsk, Belarus*

## A HYPERSINGULAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION OF THE EULER TYPE

**Abstract.** In this paper, we study an integro-differential equation on a closed curve located on the complex plane. The integrals included in the equation are understood as a finite part by Hadamard. The coefficients of the equation have a particular structure. The analytical continuation method is applied. The equation is reduced to a boundary value linear conjugation problem for analytic functions and linear Euler differential equations in the domains of the complex plane. Solutions of the Euler equations, which are unambiguous analytical functions, are sought. The conditions of solvability of the initial equation are given explicitly. The solution of the initial equation obtained under these conditions is also given explicitly. Examples are considered.

**Keywords:** integro-differential equation, hypersingular integrals, generalized Sokhotsky formulas, Riemann boundary problem, Euler differential equations

**For citation.** Shilin A. P. A hypersingular integro-differential equation of the Euler type. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2020, vol. 56, no. 1, pp. 17–29 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-1-17-29>

**Введение.** В гиперсингулярных интегральных уравнениях интегралы понимаются в смысле конечной части по Адамару [1]. Теория таких уравнений не имеет завершенного вида, основные методы их решения – численные. Выделим работу [2], в которой отмечены приложения гиперсингулярных интегральных уравнений к аэродинамике, электродинамике, квантовой физике, геофизике и разработан метод аналитического решения одного класса таких уравнений.

В [3] на замкнутой кривой, расположенной на комплексной плоскости, указано и конструктивно решено более общее гиперсингулярное интегро-дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Подобные интегро-дифференциальные уравнения с разными случаями переменных коэффициентов изучались затем в [4–6] и продолжают изучаться в настоящей работе.

**Постановка задачи и общая схема решения.** Пусть  $L$  – простая замкнутая гладкая кривая на расширенной комплексной плоскости, и пусть  $D_{\pm}$  – области с границей  $L$ ,  $0 \in D_{+}$ ,  $\infty \in D_{-}$ . Выберем на кривой  $L$  ту ориентацию, которая оставляет область  $D_{+}$  слева.

Зададим  $H$ -непрерывные (т. е. удовлетворяющие условию Гельдера) функции  $a(t) \neq 0$ ,  $b(t) \neq 0$ ,  $f(t)$ ,  $t \in L$ . Зададим также целые числа  $a_k$ ,  $b_k$ ,  $k = \overline{0, n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n = b_n = 1$ . Будем искать на кривой  $L$   $n$  раз  $H$ -непрерывно дифференцируемую функцию  $\varphi(t)$ , удовлетворяющую уравнению

$$\sum_{k=0}^n t^k \left( (a(t)a_k + b(t)b_k) \varphi^{(k)}(t) + \frac{k!(a(t)a_k - b(t)b_k)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - t)^{k+1}} \right) = f(t), \quad t \in L, \quad (1)$$

с интегралами в смысле конечной части по Адамару.

Введем интеграл типа Коши

$$\Phi_{\pm}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - z}, \quad z \in D_{\pm}.$$

Используя для предельных значений аналитических функций  $\Phi_{\pm}(z)$  и их производных обобщенные формулы Сохоцкого [7]

$$\begin{cases} \Phi_+^{(k)}(t) - \Phi_-^{(k)}(t) = \varphi^{(k)}(t), \\ \Phi_+^{(k)}(t) + \Phi_-^{(k)}(t) = \frac{k!}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - t)^{k+1}}, \quad t \in L, \quad k = \overline{0, n}, \end{cases}$$

сведем уравнение (1) к краевой задаче линейного сопряжения

$$2a(t) \sum_{k=0}^n a_k t^k \Phi_+^{(k)}(t) = 2b(t) \sum_{k=0}^n b_k t^k \Phi_-^{(k)}(t) + f(t), \quad t \in L. \quad (2)$$

Введем аналитические функции

$$F_+(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k \Phi_+^{(k)}(z), \quad z \in D_+, \quad (3)$$

$$F_-(z) = \sum_{k=0}^n b_k z^k \Phi_-^{(k)}(z), \quad z \in D_-, \quad (4)$$

с  $H$ -непрерывными предельными значениями  $F_{\pm}(t)$ ,  $t \in L$ , и получим из (2) краевую задачу Римана

$$F_+(t) = \frac{b(t)}{a(t)} F_-(t) + \frac{f(t)}{2a(t)}, \quad t \in L. \quad (5)$$

Поскольку функция  $\Phi_-(z)$  представима интегралом типа Коши, то

$$\Phi_-(z) = O\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \rightarrow \infty.$$

Тогда, очевидно,

$$b_k z^k \Phi_-^{(k)}(z) = O\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \rightarrow \infty, \quad k = \overline{0, n}.$$

Теперь из равенства (4) усматриваем, что и

$$F_-(z) = O\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \rightarrow \infty,$$

т. е. задачу (5) следует решать в классе функций, исчезающих на бесконечности.

Если задача Римана (5) окажется разрешимой и функции  $F_{\pm}(z)$  будут найдены, то равенства (3), (4) станут линейными дифференциальными уравнениями Эйлера для нахождения функций  $\Phi_{\pm}(z)$ . Решив эти уравнения, по формуле

$$\varphi(t) = \Phi_+(t) - \Phi_-(t), \quad t \in L, \tag{6}$$

получим решение исходного уравнения (1).

Очевидно, что функции  $\Phi_{\pm}(z)$  были введены как однозначные в соответствующих областях  $D_{\pm}$ . Для уравнений же Эйлера (3), (4) типичной является ситуация, когда их решения являются многозначными функциями. Желая в последующем устранить эту многозначность, наложим дальнейшие ограничения на числа  $a_k, b_k, k = \overline{0, n-1}$ . Будем далее предполагать, что как корни  $k_1, k_2, \dots, k_n$  определяющего уравнения  $a_0 + a_1\lambda + \dots + a_{n-1}\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n+2) + \lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n+1) = 0$ , соответствующего уравнению (3), так и корни  $l_1, l_2, \dots, l_n$  определяющего уравнения  $b_0 + b_1\lambda + \dots + b_{n-1}\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n+2) + \lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n+1) = 0$ , соответствующего уравнению (4), являются целыми и однократными. Фундаментальную систему решений уравнений (3) и (4) составят степенные функции с целыми показателями соответственно  $z^{k_1}, z^{k_2}, \dots, z^{k_n}$  и  $z^{l_1}, z^{l_2}, \dots, z^{l_n}$ .

**Вспомогательные факты. 1.** Пусть  $\varkappa = \text{Ind}_L \frac{b(t)}{a(t)}$ . Согласно [8] при  $\varkappa \geq 0$  задача Римана (5) разрешима безусловно, а при  $\varkappa < 0$  для ее разрешимости необходимо и достаточно выполнение условий

$$\int_L \frac{f(\tau)\tau^k d\tau}{a(\tau)X_+(\tau)} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, -\varkappa - 1. \tag{7}$$

Решение задачи (5), если оно существует, записывается в виде

$$F_{\pm}(z) = X_{\pm}(z) \left( \alpha_0 + \alpha_1 z + \dots + \alpha_{\varkappa-1} z^{\varkappa-1} + \Psi_{\pm}(z) \right), \quad z \in D_{\pm}. \tag{8}$$

Здесь  $X_{\pm}(z)$  – канонические функции задачи,  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{\varkappa-1}$  – произвольные постоянные при  $\varkappa > 0$ ,  $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{\varkappa-1} = 0$  при  $\varkappa \leq 0$ ,

$$\Psi_{\pm}(z) = \frac{1}{4\pi i} \int_L \frac{f(\tau) d\tau}{a(\tau)X_+(\tau)(\tau-z)}.$$

**2. Лемма.** Вронскиан  $W^+(z)$  функций  $z^{k_1}, z^{k_2}, \dots, z^{k_n}$  равен  $Az^k$ , где  $k = \sum_{j=1}^n k_j - \frac{(n-1)n}{2}$ , а  $A$  – ненулевая постоянная, равная значению определителя Вандермонда чисел  $k_1, k_2, \dots, k_n$ .

**Доказательство.** Вынесем за знак определителя

$$W^+(z) = \begin{vmatrix} z^{k_1} & z^{k_2} & \dots & z^{k_n} \\ k_1 z^{k_1-1} & k_2 z^{k_2-1} & \dots & k_n z^{k_n-1} \\ k_1(k_1-1)z^{k_1-2} & k_2(k_2-1)z^{k_2-2} & \dots & k_n(k_n-1)z^{k_n-2} \\ k_1(k_1-1)(k_1-2)z^{k_1-3} & k_2(k_2-1)(k_2-2)z^{k_2-3} & \dots & k_n(k_n-1)(k_n-2)z^{k_n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_1(k_1-1)\dots(k_1-n+2)z^{k_1-n+1} & k_2(k_2-1)\dots(k_2-n+2)z^{k_2-n+1} & \dots & k_n(k_n-1)\dots(k_n-n+2)z^{k_n-n+1} \end{vmatrix}$$

вначале множители  $z^{k_j-n+1}$  из  $j$ -го столбца, а затем множители  $z^{n-j}$  из  $j$ -й строки,  $j = \overline{1, n}$ . Вынесенные множители дадут  $z$  в степени



Решая эту систему по правилу Крамера и используя лемму, получим

$$\tilde{C}'_j(z) = \frac{(-1)^{n+j} W_j^+(z) F_+(z)}{W^+(z) z^n} = \frac{(-1)^{n+j} A_j z^{k_j} F_+(z)}{A z^k z^n} = \frac{(-1)^{n+j} A_j F_+(z)}{A z^{n+k-k_j}}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Поскольку

$$n + k - k_j^+ = n + \sum_{m=1}^n k_m - \frac{n(n-1)}{2} - \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^n k_m + \frac{(n-2)(n-1)}{2} = k_j + 1,$$

то окончательно получаем

$$\tilde{C}'_j(z) = \frac{(-1)^{n+j} A_j F_+(z)}{A z^{k_j+1}}, \quad j = \overline{1, n}. \tag{10}$$

Формула (9), вообще говоря, не дает однозначную аналитическую в области  $D_+$  функцию из-за возможной особенности в точке  $z = 0$ , где может оказаться полюс либо точка ветвления. Для дальнейших рассуждений будем считать, что среди чисел  $k_j$  есть  $\beta$  неотрицательных и  $n - \beta$  отрицательных. Случаи  $\beta = 0$ ,  $\beta = n$  не исключаются и означают отсутствие соответствующей совокупности чисел. Для определенности будем считать, что  $k_1 \geq 0$ ,  $k_2 \geq 0, \dots, k_\beta \geq 0$ ,  $k_{\beta+1} < 0$ ,  $k_{\beta+2} < 0, \dots, k_n < 0$ .

Если  $j = \overline{\beta+1, n}$ , то функции  $\tilde{C}'_j(z)$ , найденные по формуле (10), будут аналитическими в области  $D_+$ , поэтому можно взять

$$\tilde{C}_j(z) = \frac{(-1)^{n+j} A_j}{A} \int_0^z \frac{F_+(\zeta) d\zeta}{\zeta^{k_j+1}}, \tag{11}$$

а соответствующие постоянные  $C_j$  следует положить равными нулю, чтобы формула (9) не приводила к полюсу в точке  $z = 0$ .

Для  $j = \overline{1, \beta}$  обозначим

$$H_j(z) = \frac{c_{-k_j-1, j}}{z^{k_j+1}} + \frac{c_{-k_j, j}}{z^{k_j}} + \dots + \frac{c_{-1, j}}{z}$$

главные части разложений функций  $\tilde{C}'_j(z)$  в ряды Лорана в окрестности точки  $z = 0$ . Необходимыми условиями существования первообразных у функций  $\tilde{C}'_j(z)$  являются условия

$$c_{-1, j} = 0, \quad j = \overline{1, \beta}. \tag{12}$$

Если эти условия выполнены, то в качестве таких первообразных можно взять функции

$$\begin{aligned} \tilde{C}_j(z) = & -\frac{c_{-k_j-1, j}}{k_j z^{k_j}} - \frac{c_{-k_j, j}}{(k_j - 1) z^{k_j-1}} - \dots - \frac{c_{-2, j}}{z} + \\ & + \int_0^z \left( \frac{(-1)^{n+j} A_j F_+(\zeta)}{A \zeta^{k_j+1}} - H_j(\zeta) \right) d\zeta, \quad j = \overline{1, \beta}. \end{aligned} \tag{13}$$

(В случае, когда  $k_j = 0$  для некоторого  $j$ , в правой части формулы (13) внеинтегральные слагаемые будут отсутствовать.)

Несмотря на наличие у функций  $\tilde{C}_j(z)$ , записанных по формуле (13), полюсов в точке  $z = 0$  (порядка не выше  $k_j$ ), формула (9) приведет к аналитической функции  $\Phi_+(z)$  за счет наличия в ней соответствующих множителей  $z^{k_j}$ ,  $j = \overline{1, \beta}$ .

Вернемся к равенствам (12). Из формул (11) легко усматривается, что эти равенства могут быть представлены в виде

$$F_+^{(k_j)}(0) = 0, \quad j = \overline{1, \beta}. \tag{14}$$

Если  $\alpha > 0$ , то согласно формулам (8) в решение

$$F_+(z) = X_+(z) \left( \alpha_0 + \alpha_1 z + \dots + \alpha_{\alpha-1} z^{\alpha-1} + \Psi_+(z) \right)$$

задачи Римана (5) входят произвольные постоянные  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{\alpha-1}$ . Разложим функции  $X_+(z)$  и  $X_+(z)\Psi_+(z)$  в ряды Маклорена:

$$X_+(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \chi_j z^j, \quad X_+(z)\Psi_+(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j z^j.$$

Не будем приводить известные формулы для коэффициентов  $\chi_j$  и  $\psi_j$  таких разложений. Важно только отметить, что эти коэффициенты будут выражаться в конечном счете через заданные в уравнении (1) функции. Тогда условия (14) в развернутом виде будут представлять собой требование совместности системы линейных алгебраических уравнений

$$\chi_{kj} \alpha_0 + \chi_{kj-1} \alpha_1 + \dots + \chi_{kj-n+1} \alpha_{\alpha-1} + \psi_{kj} = 0, \quad j = \overline{1, \beta}, \tag{15}$$

( $\chi_p = 0$  при  $p < 0$ ), из-за чего произвол постоянных  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{\alpha-1}$  станет, вообще говоря, ограничен.

Переходим к решению уравнения (4). Вполне аналогично уравнению (3), применяя метод вариации произвольных постоянных, получим формулу его решения

$$\Phi_-(z) = \sum_{j=1}^n \left( \tilde{D}_j(z) + D_j \right) z^{l_j}, \quad z \in D_-, \tag{16}$$

где  $D_j$  – произвольные постоянные, а в качестве функций  $\tilde{D}_j(z)$  можно взять любые первообразные функций

$$\tilde{D}_j'(z) = \frac{(-1)^{n+j} B_j F_-(z)}{B z^{l_j+1}},$$

в которых ненулевые постоянные  $B_j, B$  находятся вполне аналогично нахождению постоянных  $A_j, A, j = \overline{1, n}$ .

Теперь следует добиться отсутствия у функции  $\Phi_-(z)$  возможной особенности в точке  $z = \infty$ . Кроме того, следует обеспечить выполнение условия  $\Phi_-(\infty) = 0$ .

Пусть среди чисел  $l_j$  есть  $\gamma$  неотрицательных и  $n - \gamma$  отрицательных. Для определенности считаем  $l_1 \geq 0, l_2 \geq 0, \dots, l_\gamma \geq 0, l_{\gamma+1} < 0, l_{\gamma+2} < 0, \dots, l_n < 0$ . Возможно, что  $\gamma = 0$  либо  $\gamma = n$ , тогда соответствующая совокупность чисел отсутствует.

Для  $j = \overline{1, \gamma}$  функции  $\tilde{D}_j'(z)$  будут аналитическими в области  $D_-$  и имеющими в точке  $z = \infty$  нуль по меньшей мере второго порядка, поэтому можно взять

$$\tilde{D}_j(z) = \frac{(-1)^{n+j} B_j}{B} \int_{\infty}^z \frac{F_-(\zeta) d\zeta}{\zeta^{l_j+1}}; \tag{17}$$

соответствующие постоянные  $D_j$  следует положить равными нулю, иначе формула (16) даст полюс у функции  $\Phi_-(z)$  в точке  $z = \infty$ . (Если  $l_j = 0$  для некоторого  $j$ , то соответствующее слагаемое в формуле (16) к полюсу не приведет. Условие  $D_j = 0$  для этого слагаемого будет продиктовано требованием  $\Phi_-(\infty) = 0$ .)

Для  $j = \overline{\gamma + 1, n}$  обозначим

$$G_j(z) = \frac{d_{-l_j-2,j}}{z^{l_j+2}} + \frac{d_{-l_j-3,j}}{z^{l_j+3}} + \dots + \frac{d_{1,j}}{z^{-1}} + d_{0,j} + \frac{d_{-1,j}}{z}$$

главные части разложений функций  $\tilde{D}'_j(z)$  в окрестности точки  $z = \infty$  в ряд Лорана с добавленными слагаемыми, содержащими  $z^0$  и  $z^{-1}$  этих разложений. Необходимыми условиями существования первообразных у этих функций  $\tilde{D}'_j(z)$  будет выполнение равенств

$$d_{-1,j} = 0, \quad j = \overline{\gamma + 1, n}. \tag{18}$$

Если эти условия выполнены, то можно взять

$$\begin{aligned} \tilde{D}_j(z) = & -\frac{d_{-l_j-2,j}}{(l_j+1)z^{l_j+1}} - \frac{d_{-l_j-3,j}}{(l_j+2)z^{l_j+2}} - \dots - \frac{d_{1,j}}{(-2)z^{-2}} + d_{0,j}z + \\ & + \int_{\infty}^z \left( \frac{(-1)^{n+j} B_j F_-(\zeta)}{B \zeta^{l_j+1}} - G_j(\zeta) \right) d\zeta, \quad j = \overline{\gamma + 1, n}. \end{aligned} \tag{19}$$

В формулах (19)

$$\frac{(-1)^{n+j} B_j F_-(\zeta)}{B \zeta^{l_j+1}} - G_j(\zeta) = O\left(\frac{1}{\zeta^2}\right)$$

при  $\zeta \rightarrow \infty$ , поэтому интегралы будут сходиться и давать исчезающие на бесконечности функции.

Полюсы в точке  $z = \infty$  порядка не выше  $-l_j - 1$  у функции (19) «погасятся» в формуле (16) соответствующими множителями  $z^{l_j}$ , так что формула (16) приведет к исчезающей на бесконечности аналитической функции  $\Phi_-(z)$ .

Условиям (18) можно придать вид

$$\int_L \frac{F_-(z) dz}{z^{l_j+1}} = 0, \quad j = \overline{\gamma + 1, n}. \tag{20}$$

Если  $\varkappa > 0$  и, следовательно, согласно формулам (8)

$$F_-(z) = X_-(z) \left( \alpha_0 + \alpha_1 z + \dots + \alpha_{\varkappa-1} z^{\varkappa-1} + \Psi_-(z) \right)$$

с произвольным постоянным  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{\varkappa-1}$ , то условия (20) станут условиями совместности системы линейных алгебраических уравнений

$$g_{0,j} \alpha_0 + g_{1,j} \alpha_1 + \dots + g_{\varkappa-1,j} \alpha_{\varkappa-1} + h_j = 0, \tag{21}$$

где

$$g_{s,j} = \int_L \frac{X_-(z) dz}{z^{l_j+1-s}}, \quad s = \overline{0, \varkappa-1}, \quad h_j = \int_L \frac{X_-(z) \Psi_-(z) dz}{z^{l_j+1}}, \quad j = \overline{\gamma + 1, n}.$$

Исследование уравнений (3), (4) закончено, и теперь можно сформулировать результат в отношении исходного уравнения (1).

**Основной результат.** Теорема 1. При  $\varkappa \geq 0, \beta = 0, \gamma = n$  уравнение (1) безусловно разрешимо. В остальных случаях для его разрешимости необходимо и достаточно:

1) выполнение условий (7), если  $\varkappa < 0, \beta = 0, \gamma = n$ ;

- 2) выполнение условий (12), если  $\alpha = 0, \beta > 0, \gamma = n$ ;
- 3) выполнение условий (18), если  $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma < n$ ;
- 4) выполнение условий (7), (12), если  $\alpha < 0, \beta > 0, \gamma = n$ ;
- 5) выполнение условий (7), (18), если  $\alpha < 0, \beta = 0, \gamma < n$ ;
- 6) выполнение условий (7), (12), (18), если  $\alpha < 0, \beta > 0, \gamma < n$ ;
- 7) совместность системы (15), если  $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma = n$ ;
- 8) совместность системы (21), если  $\alpha > 0, \beta = 0, \gamma < n$ ;
- 9) совместность объединенной системы (15), (21), если  $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma < n$ .

Обозначим  $r$  – ранг системы (15), если  $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma = n$ , ранг системы (21), если  $\alpha > 0, \beta = 0, \gamma < n$ , ранг объединенной системы (15), (21), если  $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma < n$ ; пусть  $r = 0$  в остальных случаях.

**Теорема 2.** Если уравнение (1) разрешимо, то его решение содержит  $\max(0, \alpha) + n + \beta - \gamma - r$  произвольных постоянных и записывается по формуле

$$\varphi(t) = \sum_{j=1}^{\beta} (\tilde{C}_j(t) + C_j) t^{kj} + \sum_{j=\beta+1}^n \tilde{C}_j(t) t^{kj} - \sum_{j=1}^{\gamma} \tilde{D}_j(t) t^{lj} - \sum_{j=\gamma+1}^n (\tilde{D}_j(t) + D_j) t^{lj}, \quad t \in L, \quad (22)$$

в которой выражения для  $\tilde{C}_j(t), \tilde{D}_j(t)$  берутся из формул (11), (13), (17), (19), а  $C_j, j = \overline{1, \beta}$ , и  $D_j, j = \overline{\gamma+1, n}$ , – произвольные постоянные. При этом постоянные  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{\alpha-1}$ , находящиеся при  $\alpha > 0$  в формулах для  $\tilde{C}_j(t), \tilde{D}_j(t)$ , являются: произвольными, если  $\beta = 0, \gamma = n$ ; общим решением системы (15), если  $\beta > 0, \gamma = n$ ; общим решением системы (21), если  $\beta = 0, \gamma < 0$ ; общим решением объединенной системы (15), (21), если  $\beta > 0, \gamma < 0$ .

**Пример 1.** Пусть в уравнении (1)  $n = 3, a(t) = t + i, b(t) = t - i, f(t) = 2(t + i)(\delta_0 + \delta_1 t + t^2) - 2(t - i)\left(\frac{\delta_{-1}}{t} + \frac{1}{t^2}\right)$  ( $\delta_0, \delta_1, \delta_{-1}$  – постоянные),  $a_0 = a_1 = 0, a_2 = 4, b_0 = 2, b_1 = -2, b_2 = 1$ . Тогда уравнение (1) приобретает вид

$$\begin{aligned} & 2t^5 \varphi'''(t) + t^2(5t + 3i)\varphi''(t) - 2t(t - i)\varphi'(t) + 2(t - i)\varphi(t) - \\ & - \frac{2(t - i)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - t} + \frac{2t}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - t)^2} + \frac{4t^2(t + 3i)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - t)^3} + \frac{12t^3}{\pi} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - t)^4} = \\ & = 2(t + i)(\delta_0 + \delta_1 t + t^2) - 2(t - i)\left(\frac{\delta_{-1}}{t} + \frac{1}{t^2}\right), \quad t \in L. \end{aligned} \quad (23)$$

Будем считать, кроме того, что для уравнения (23) либо  $\pm i \in D_+$ , либо  $\pm i \in D_-$ .

Задача Римана (5) приобретает вид

$$F_+(t) = \frac{t - i}{t + i} F_-(t) + (\delta_0 + \delta_1 t + t^2) - \frac{t - i}{t + i} \left( \frac{\delta_{-1}}{t} + \frac{1}{t^2} \right)$$

и имеет в классе исчезающих на бесконечности функций единственное решение

$$F_+(z) = \delta_0 + \delta_1 z + z^2, \quad F_-(z) = \frac{\delta_{-1}}{z} + \frac{1}{z^2}.$$

Далее надо решить соответствующие уравнения (3), (4):

$$z^3 \Phi_+'''(z) + 4z^2 \Phi_+''(z) = \delta_0 + \delta_1 z + z^2, \quad (24)$$

$$z^3 \Phi_-'''(z) + z^2 \Phi_-''(z) - 2z \Phi_-'(z) + 2\Phi_-(z) = \frac{\delta_{-1}}{z} + \frac{1}{z^2}. \quad (25)$$

Для уравнения (24) получим  $k_1 = 0, k_2 = 1, k_3 = -2$ . Условия разрешимости (12) дадут  $\delta_0 = \delta_1 = 0$ . Если эти условия выполняются, то решение получается равным

$$\Phi_+(z) = C_1 + C_2 z + \frac{z^2}{8}.$$

Для уравнения (25) получим  $l_1 = 1, l_2 = 2, l_3 = -1$ . Условия разрешимости (18) дадут  $\delta_{-1} = 0$ . Если это равенство выполняется, то решение получается равным

$$\Phi_-(z) = \frac{D_1}{z} - \frac{1}{12z^2}.$$

Итак, для разрешимости уравнения (23) необходимо и достаточно выполнения условий  $\delta_0 = \delta_1 = \delta_{-1} = 0$ . Если они выполняются, то решение этого уравнения согласно формуле (22) получается равным

$$\varphi(t) = C_1 + C_2 t - \frac{D_1}{t} + \frac{t^2}{8} + \frac{1}{12t^2}$$

( $C_1, C_2, D_1$  – произвольные постоянные).

Отметим еще, что при решении уравнений (24), (25) можно использовать метод неопределенных коэффициентов.

**Частные случаи. 1.** Уравнение Эйлера на кривой

$$\sum_{k=0}^n a_k t^k \varphi^{(k)}(t) = f(t), \quad t \in L, \tag{26}$$

получается как частный случай уравнения (1), когда  $a_k = b_k, k = \overline{0, n-1}, a(t) = b(t) = 1$ , а функция  $\frac{f(t)}{2}$  обозначена снова  $f(t)$ . При этом задача Римана (5) будет задачей о скачке, имеющей единственное решение

$$F_{\pm}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\tau) d\tau}{\tau - z}, \quad z \in D_{\pm},$$

а уравнения (3), (4) примут вид

$$\sum_{k=0}^n a_k z^k \Phi_{\pm}^{(k)}(z) = F_{\pm}(z), \quad z \in D_{\pm}, \tag{27}$$

так что станут верны равенства  $k_j = l_j, j = \overline{1, n}$ .

Условия разрешимости (12), (18), представляющие собой равенства нулю надлежащих коэффициентов в разложении функции  $F_+(z), F_-(z)$  в ряды Тейлора в окрестностях точек  $z = 0, z = \infty$  соответственно, легко выразятся через функцию  $f(t)$ . В результате получим следующее утверждение.

**Следствие теорем 1, 2.** Для разрешимости уравнения (26) необходимо и достаточно выполнение условий

$$\int_L \frac{f(t) dt}{t^{k_j+1}} = 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

Если эти условия выполняются, то решение уравнения (26) дается формулой

$$\varphi(t) = \sum_{j=1}^n (\tilde{C}_j(t) - \tilde{D}_j(t) + C_j) t^{k_j}, \quad t \in L, \tag{28}$$

где  $\tilde{C}_j(t)$ ,  $\tilde{D}_j(t)$  снова берутся по формулам (11), (13), (17), (19), а  $C_j$  – произвольные постоянные,  $j = \overline{1, n}$ .

Пример 2. Приведем решение следующего уравнения Эйлера:

$$t^2\varphi''(t) + 2t\varphi'(t) - 2\varphi(t) = \frac{\delta_{-2}}{t^2} + \frac{1}{t} + 1 + \delta_1 t + e^t, \quad t \in L, \quad (29)$$

где  $\delta_{-2}, \delta_1$  – постоянные.

Здесь  $k_1 = 1, k_2 = -2$ . Необходимые и достаточные условия разрешимости уравнения (29) выражаются равенствами  $\delta_{-2} = 0, \delta_1 = -1$ . Если эти равенства выполняются, то формула (28) приводит к решению

$$\varphi(t) = -\frac{2}{3} + \frac{t}{3} \int_0^t \frac{e^\zeta - 1 - \zeta}{\zeta^2} d\zeta - \frac{1}{2t} + C_1 t + \frac{C_2}{t^2}.$$

2. Пусть  $p$  и  $q$  – какие-либо два целых числа. Создадим по каждому из них совокупность  $n + 1$  чисел:  $p_k = (-1)^{n-k} p(p+1)\dots(p+n-1-k)$ ,  $q_k = (-1)^{n-k} q(q+1)\dots(q+n-1-k)$ ,  $k = \overline{0, n-1}$ ,  $p_n = q_n = 1$ . Рассмотрим следующий частный случай уравнения (1):

$$\sum_{k=0}^n C_n^k t^k \left( (a(t)p_k + b(t)q_k) \varphi^{(k)}(t) + \frac{k!(a(t)p_k - b(t)q_k)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-t)^{k+1}} \right) = f(t), \quad t \in L, \quad (30)$$

где  $C_n^k$  – биномиальные коэффициенты.

Возникающая при его решении задача Римана ничем не отличается от прежней задачи (5), а уравнения Эйлера (3), (4) приобретают соответственно вид

$$\sum_{k=0}^n C_n^k p_k z^k \Phi_+^{(k)}(z) = F_+(z), \quad z \in D_+, \quad (31)$$

$$\sum_{k=0}^n C_n^k q_k z^k \Phi_-^{(k)}(z) = F_-(z), \quad z \in D_-, \quad (32)$$

и могут быть решены существенно проще, чем в общем случае, поскольку не возникает вопроса о нахождении корней определяющих уравнений.

Разделим уравнение (31) на  $z^{n+p}$ , а уравнение (32) на  $z^{n+q}$ , тогда после применения формулы Лейбница для производных высших порядков получим уравнения соответственно

$$\left( \frac{\Phi_+(z)}{z^p} \right)^{(n)} = \frac{F_+(z)}{z^{n+p}}, \quad z \in D_+, \quad (33)$$

$$\left( \frac{\Phi_-(z)}{z^q} \right)^{(n)} = \frac{F_-(z)}{z^{n+q}}, \quad z \in D_-. \quad (34)$$

Дальнейшее решение распадается на несколько случаев в зависимости от значений  $p$  и  $q$ . Проанализируем, например, случай  $p \geq 0, q \geq 0$ .

Пусть

$$H(z) = \frac{\sigma_{-n-p}}{z^{n+p}} + \frac{\sigma_{-n-p+1}}{z^{n+p-1}} + \dots + \frac{\sigma_{-1}}{z}$$

есть главная часть разложения функции  $\frac{F_+(z)}{z^{n+p}}$  в ряд Лорана в окрестности точки  $z = 0$ . Чтобы однозначная функция  $\frac{\Phi_+(z)}{z^p}$  восстанавливалась по своей производной порядка  $n$ , должны, оче-

видно, выполняются равенства  $\sigma_{-n} = \sigma_{-n+1} = \dots = \sigma_{-1} = 0$ . Если они выполняются, получаем следующее решение уравнения (33):

$$\Phi_+(z) = \frac{\sigma_{-n-p}}{(-n-p+1)(-n-p+2)\dots(-p)} + \frac{\sigma_{-n-p+1}z}{(-n-p+2)(-n-p+3)\dots(-p+1)} + \dots +$$

$$+ \frac{\sigma_{-n-1}z^{p-1}}{(-n)(-n+1)\dots(-1)} + z^p Q(z) + \frac{z^p}{(n-1)!} \int_0^z (z-\zeta)^{n-1} \left( \frac{F_+(\zeta)}{\zeta^{n+p}} - H(\zeta) \right) d\zeta,$$

где  $Q(z)$  – многочлен степени  $n-1$  с произвольными коэффициентами (при  $p=0$  слагаемые в правой части последнего равенства, предшествующие слагаемому  $z^p Q(z)$ , отсутствуют). Здесь, сделав  $n$ -кратное интегрирование, мы использовали формулу вида

$$\int_0^z d\zeta_1 \int_0^{\zeta_1} d\zeta_2 \dots \int_0^{\zeta_{n-1}} T(\zeta_n) d\zeta_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^z (z-\zeta)^{n-1} T(\zeta) d\zeta.$$

Уравнение (34) проще: ничто не мешает сделать  $n$ -кратное интегрирование и выразить функцию  $\Phi_-(z)$ :

$$\Phi_-(z) = z^q R(z) + \frac{z^q}{(n-1)!} \int_\infty^z (z-\zeta)^{n-1} \frac{F_-(\zeta)}{\zeta^{n+q}} d\zeta,$$

где  $R(z)$  – многочлен степени  $n-1$  с произвольными коэффициентами. Далее следует взять  $R(z) \equiv 0$ , добиваясь для функции  $\Phi_-(z)$  аналитичности на бесконечности и выполнения условия  $\Phi_-(\infty) = 0$ .

Не станем здесь приводить формулу решения уравнения (30), которую теперь легко записать с помощью формулы (6). Не станем также делать вполне аналогичный анализ уравнения (30) при иных значениях  $p$  и  $q$ . Рассмотрим пример.

**Пример 3.** Пусть в уравнении (30)  $n=2$ ,  $p=3$ ,  $q=2$ ,  $a(t)=b(t)=1$ ,  $f(t) = 2\left(\sin t + \delta t^3 - \frac{1}{t}\right)$ ,  $\delta$  – постоянная, тогда уравнению можно придать вид

$$t^2 \varphi''(t) - 5t \varphi'(t) + 9\varphi(t) + \frac{3}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau-t} - \frac{t}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-t)^2} = \sin t + \delta t^3 - \frac{1}{t}, \quad t \in L. \tag{35}$$

Соответствующая задача Римана будет задачей о скачке

$$F_+(t) = F_-(t) + \sin t + \delta t^3 - \frac{1}{t}, \quad t \in L,$$

имеющей единственное решение

$$F_+(z) = \sin z + \delta z^3, \quad F_-(z) = \frac{1}{z}.$$

Далее следует решать уравнения (31), (32), которые примут вид

$$z^2 \Phi_+''(z) - 6z \Phi_+'(z) + 12\Phi_+(z) = \sin z + \delta z^3, \tag{36}$$

$$z^2 \Phi_-''(z) - 4z \Phi_-'(z) + 6\Phi_-(z) = \frac{1}{z}. \tag{37}$$

Разделим уравнение (36) на  $z^5$ , а уравнение (37) на  $z^4$ , получим соответственно

$$\left( \frac{\Phi_+(z)}{z^3} \right)'' = \frac{1}{z^4} + \frac{\delta - \frac{1}{6}}{z^2} + \frac{\sin z - z + \frac{z^3}{6}}{z^5}, \tag{38}$$

$$\left(\frac{\Phi_-(z)}{z^2}\right)'' = \frac{1}{z^5}; \quad (39)$$

при этом в правой части уравнения (38) мы выделили главную часть разложения в ряд Лорана в окрестности точки  $z = 0$ .

Очевидно, что должно выполняться  $\delta = \frac{1}{6}$ , иначе двукратное интегрирование в уравнении (38) приведет к точке ветвления  $z = 0$  у искомой функции  $\Phi_+(z)$ . Если  $\delta = \frac{1}{6}$ , то получаем

$$\Phi_+(z) = \frac{z}{6} + z^3 \int_0^z (z - \zeta) \frac{\sin \zeta - \zeta + \frac{\zeta^3}{6}}{\zeta^5} d\zeta + C_1 z^3 + C_2 z^4,$$

где  $C_1, C_2$  – произвольные постоянные.

Из уравнения (39) с учетом  $\Phi_-(\infty) = 0$  получим  $\Phi_-(z) = \frac{1}{12z}$ .

Итак, при  $\delta \neq \frac{1}{6}$  уравнение (35) не имеет решений. При  $\delta = \frac{1}{6}$  согласно формуле (6) его решение получается равным

$$\varphi(t) = \frac{t}{6} + t^3 \int_0^t (t - \zeta) \frac{\sin \zeta - \zeta + \frac{\zeta^3}{6}}{\zeta^5} d\zeta + C_1 t^3 + C_2 t^4 - \frac{1}{12t}.$$

**Заключение.** Изучено новое гиперсингулярное интегро-дифференциальное уравнение, исследование которого тесно связано с решением классических линейных дифференциальных уравнений Эйлера, а само оно может расцениваться как обобщение уравнения Эйлера на кривой. При сделанных в работе предположениях дан полный конструктивный анализ уравнения: записаны условия разрешимости, при их выполнении в явном виде дано решение. Указаны частные случаи, представляющие самостоятельный интерес, решены примеры.

#### Список использованных источников

1. Адамар, Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа / Ж. Адамар. – М.: Наука, 1978. – 351 с.
2. Бойков, И. В. Аналитические методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений / И. В. Бойков, А. И. Бойкова // Изв. высш. учеб. заведений. Поволж. регион. Физ.-мат. науки. – 2017. – № 2 (42). – С. 63–78. <https://doi.org/10.21685/2072-3040-2017-2-6>
3. Зверович, Э. И. Решение гиперсингулярного интегро-дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами / Э. И. Зверович // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2010. – Т. 54, № 6. – С. 5–8.
4. Зверович, Э. И. Решение интегро-дифференциальных уравнений с сингулярными и гиперсингулярными интегралами специального вида / Э. И. Зверович, А. П. Шилин // Вес. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2018. – Т. 54, № 4. – С. 404–407. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-404-407>
5. Шилин, А. П. Дифференциальная краевая задача Римана и ее приложение к интегро-дифференциальным уравнениям / А. П. Шилин // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2019. – Т. 63, № 4. – С. 391–397. <https://doi.org/10.29235/1561-8323-2019-63-4-391-397>
6. Шилин, А. П. Гиперсингулярные интегро-дифференциальные уравнения со степенными множителями в коэффициентах / А. П. Шилин // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. – 2019. – № 3 – С. 48–56. <https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-3-48-56>
7. Зверович, Э. И. Обобщение формул Сохоцкого / Э. И. Зверович // Вес. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2012. – № 2. – С. 24–28.
8. Гахов, Ф. Д. Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. – М.: Наука, 1977. – 640 с.

#### References

1. Adamar Zh. *The Cauchy Problem of Linear Equations with Partial Derivatives of Hyperbolic Type*. Moscow, Nauka Publ., 1978. 351 p. (in Russian).

2. Boykov I. V., Boykova A. I. Analytical methods of solving hypersingular integral equations. *Izvestiya vuzov. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskiye nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*, 2017, no. 2 (42), pp. 63–78. <https://doi.org/10.21685/2072-3040-2017-2-6>

3. Zverovich E. I. Solution of the hypersingular integro-differential equation with constant coefficients. *Doklady Nacionalnoi Akademii Nauk Belarusi = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2010, vol. 54, no. 6, pp. 5–8 (in Russian).

4. Zverovich E. I., Shilin A. P. Integro-differential equations with singular and hypersingular integrals. *Vesti Natsyional'noi akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, vol. 54, no. 4, pp. 404–407 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-404-407>

5. Shilin A. P. Riemann's differential boundary-value problem and its application to integro-differential equations. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2019, vol. 63, no. 4, pp. 391–397 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-8323-2019-63-4-391-397>

6. Shilin A. P. Hypersingular integro-differential equations with power factors in coefficients. *Zhurnal Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika. Informatika = Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*, 2019, no. 2, pp. 48–56 (in Russian). <https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-3-48-56>

7. Zverovich E. I. Generalization of Sohotsky formulas. *Vesti Natsyional'noi akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2012, no. 2, pp. 24–28 (in Russian).

8. Gakhov F. D. *Boundary Value Problems*. Moscow, Nauka Publ., 1977. 640 p. (in Russian).

### Информация об авторе

**Шилин Андрей Петрович** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики и математической физики, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: a.p.shilin@gmail.com

### Information about the author

**Andrey P. Shilin** – Ph. D. (Physics and Mathematics), Assistant Professor, Assistant Professor of the Department of Higher Mathematics and Mathematical Physics, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: a.p.shilin@gmail.com

ISSN 1561-2430 (Print)  
 ISSN 2524-2415 (Online)  
 УДК 517.925  
<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-1-30-35>

Поступила в редакцию 16.12.2019  
 Received 16.12.2019

**А. К. Деменчук**

*Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь*

## О СИЛЬНО НЕРЕГУЛЯРНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ЛИНЕЙНОГО НЕОДНОРОДНОГО ДИСКРЕТНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

**Аннотация.** Как уже было доказано ранее (теорема Массеры) скалярное периодическое обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка не имеет сильно нерегулярных периодических решений, т. е. таких, что период решения несоизмерим с периодом уравнения. Для разностных уравнений с дискретным временем сильная нерегулярность означает, что период уравнения является взаимно простым по отношению к периоду его решения. Известно, что в случае дискретных уравнений упомянутый результат полного аналога не имеет.

Цель настоящей работы – исследовать возможность реализации аналога теоремы Массеры для некоторых классов разностных уравнений. Для этого рассматривается класс линейных разностных уравнений. Доказано, что линейное неоднородное нестационарное периодическое дискретное уравнение первого порядка не имеет сильно нерегулярных периодических решений, отличных от постоянных.

**Ключевые слова:** периодические разностные линейные уравнения, периодические последовательности, сильно нерегулярные периодические решения

**Для цитирования.** Деменчук, А. К. О сильно нерегулярных периодических решениях линейного дискретного уравнения первого порядка / А. К. Деменчук // Вестн. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2020. – Т. 56, № 1. – С. 30–35. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-1-30-35>

**Aleksandr K. Demenchuk**

*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus*

## ON STRONGLY IRREGULAR PERIODIC SOLUTIONS OF THE LINEAR NONHOMOGENEOUS DISCRETE EQUATION OF THE FIRST ORDER

**Abstract.** As is proved earlier (the Massera theorem), the first-order scalar periodic ordinary differential equation does not have strongly irregular periodic solutions (solutions with a period incommensurable with the period of the equation). For difference equations with discrete time, strong irregularity means that the equation period and the period of its solution are relatively prime numbers. It is known that in the case of discrete equations, the mentioned result has no complete analog.

The purpose of this paper is to investigate the possibility of realizing an analog of the Massera theorem for certain classes of difference equations. To do this, we consider the class of linear difference equations. It is proved that a linear nonhomogeneous non-stationary periodic discrete equation of the first order does not have strongly irregular non-stationary periodic solutions.

**Keywords:** difference linear periodic equations, periodic sequences, strongly irregular periodic solutions

**For citation.** Demenchuk A. K. On strongly irregular periodic solutions of the linear nonhomogeneous discrete equation of the first order. *Vestsi Natsyional'noi akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2020, vol. 56, no. 1, pp. 30–35 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-1-30-35>

**Введение.** Пусть  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$  и  $\mathbb{R}$  – соответственно множества натуральных, целых и действительных чисел,  $y = (y_n) = (y(n))$ ,  $n \in \mathbb{N}$  – скалярная функция (последовательность), определенная на  $\mathbb{N}$  со значениями в  $\mathbb{R}$ , т. е.  $y: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ . Множество таких последовательностей обозначим через  $S^1$ . Далее будем считать, что пустые суммы и произведения членов последовательности  $(y(n))$  равны соответственно 0 и 1, т. е. для  $k \in \mathbb{N}$  и  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $k > m$ , имеем

$$\sum_{j=k}^m y_j = 0, \quad \prod_{j=k}^m y_j = 1.$$

**Определение 1.** Функция  $y \in S^1$  называется периодической с периодом  $\omega \in \mathbb{N}$  ( $\omega$ -периодической), если для любого  $n \in \mathbb{N}$  выполняется равенство  $y_{n+\omega} = y_n$ .

Естественно, что период функции определяется не однозначно. Так, если число  $\omega$  – период последовательности  $y$ , то по меньшей мере его кратные также будут периодами этой последовательности, т. е. для любых  $m, n \in \mathbb{N}$  имеем  $y(n + m\omega) = y(n)$ . Поэтому в дальнейшем под периодом последовательности, как правило, будем понимать ее так называемый основной (базисный) период [1, с. 1], т. е. наименьший из периодов этой последовательности. В частности, в таком случае всякая постоянная последовательность будет 1-периодической. Множество периодических последовательностей с наименьшим периодом  $\omega$  обозначим через  $PS_{\omega}^1$ .

Периодические последовательности при определенных условиях могут быть решениями дискретных (разностных) уравнений. Проблеме существования и построения периодических решений дискретных уравнений посвящено достаточно большое число работ [1–5] и др., где в основном изучались решения, период которых совпадает с периодом самого уравнения. Хотя полученные в этом направлении результаты во многом аналогичны соответствующим результатам для обыкновенных дифференциальных уравнений, тем не менее в некоторых случаях имеются значительные различия. Отметим одно из них.

Как известно [6–11], системы обыкновенных периодических дифференциальных уравнений могут допускать периодические решения, период которых несоизмерим по отношению к периоду системы. Такие периодические решения названы сильно нерегулярными, а описываемые ими колебания – асинхронными. Асинхронные колебания реализуются в достаточно сложных технических устройствах [12–14] и др.

Однако Х. Масера показал [6], что нелинейное скалярное периодическое обыкновенное дифференциальное уравнение не имеет отличных от постоянных сильно нерегулярных периодических решений. Более того, Н. П. Еругиным в работе [8] было доказано, что такого рода решения отсутствуют у линейной нестационарной периодической системы двух уравнений.

Представляется интересным исследовать подобные вопросы для дискретных уравнений. С этой целью рассмотрим уравнение

$$x_{n+1} = X(x_n, n), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

правая часть которого является  $\omega$ -периодической, т. е. существует такое наименьшее  $\omega \in \mathbb{N}$ , что для любого фиксированного  $\alpha \in \mathbb{R}$  выполняется равенство  $X(\alpha, n + \omega) = X(\alpha, n)$  при всех  $n \in \mathbb{N}$ . Далее под периодом уравнения вида (1) будем понимать период его правой части.

По аналогии с терминологией для обыкновенных дифференциальных уравнений [7] введем

**Определение 2.** Периодическое решение с периодом  $\Omega$  уравнения (1), такое что числа  $\omega$  и  $\Omega$  взаимно просты, будем называть сильно нерегулярным.

В работе [15] показано, что при определенных условиях скалярное дискретное уравнение может допускать сильно нерегулярное периодическое решение. Действительно, пусть  $\omega$  – произвольное нечетное число и  $(h_n) \in PS_{\omega}^1$ . Тогда дискретное скалярное  $\omega$ -периодическое уравнение  $x_{n+1} = -x_n - (1 - x_n^2)h_n$  будет иметь сильно нерегулярное периодическое решение  $x_n = (-1)^n$  с наименьшим периодом  $\Omega = 2$ , который взаимно прост с числом  $\omega$ .

Как видим, теорема Массеры [6] об отсутствии сильно нерегулярных периодических решений у скалярного обыкновенного уравнения для разностных уравнений, вообще говоря, полного аналога не имеет. В связи с этим возникает вопрос о возможности реализации аналога упомянутой теоремы для более узких классов уравнений вида (1). В этом направлении в работе [16] получен аналог теоремы Массеры для линейных однородных разностных уравнений первого порядка. Отметим, что отсутствие периодических решений у однородного линейного уравнения вовсе не исключает наличие таких решений у неоднородного уравнения.

**Постановка задачи.** Сформулируем вопрос: может ли линейное неоднородное нестационарное периодическое дискретное уравнение иметь сильно нерегулярные периодические решения, отличные от постоянных. Настоящее исследование посвящено выяснению этой проблемы.

**Основной результат.** Рассмотрим линейное неоднородное периодическое нестационарное дискретное уравнение первого порядка

$$x_{n+1} = a_n x_n + f_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a \in PS_\omega^1, \quad f \in PS_\omega^1, \quad (2)$$

где хотя бы одна из функций  $(a_n), (f_n)$  отлична от постоянной. Будем интересоваться сильно нерегулярными периодическими решениями уравнения (2). Приведем аналог теоремы Массеры для линейного неоднородного дискретного уравнения. Справедлива

**Теорема.** *Скалярное линейное неоднородное периодическое нестационарное дискретное уравнение (2) первого порядка не имеет нестационарных сильно нерегулярных периодических решений.*

**Доказательство.** Предварительно укажем для неоднородного уравнения (2) выражение решения  $(x_n)$  через коэффициенты. Если при любом  $j \in \mathbb{N}$  имеем  $a_j \neq 0$ , то решение уравнения (2) запишем в виде суммы его некоторого частного решения  $x^{(nh)}$  и общего решения  $x^{(h)}$  соответствующего однородного уравнения. Выпишем общее решение соответствующего уравнению (2) однородного уравнения

$$x_n^{(h)} = c \prod_{j=1}^{n-1} a_j, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3)$$

где  $x_1^{(h)} = c$  – произвольная вещественная постоянная. Частное решение  $x^{(nh)}$  неоднородного уравнения (2) на основе метода вариации произвольной постоянной будем искать в виде

$$x_n^{(nh)} = c(n) \prod_{j=1}^{n-1} a_j, \quad n = 1, 2, \dots$$

Тогда, подставляя частное решение в уравнение (2), получим равенства

$$c(n) - c(n-1) = \left( \prod_{j=1}^{n-1} a_j \right)^{-1} f_{n-1}, \quad c(n-1) - c(n-2) = \left( \prod_{j=1}^{n-2} a_j \right)^{-1} f_{n-2}, \dots, c(2) - c(1) = (a_1)^{-1} f_1, \quad (4)$$

из которых находим

$$c(n) = c(1) + \left( \prod_{j=1}^{n-1} a_j \right)^{-1} f_{n-1} + \left( \prod_{j=1}^{n-2} a_j \right)^{-1} f_{n-2} + \dots + (a_1)^{-1} f_1, \quad c(1) - \text{const.}$$

В итоге получим решение неоднородного уравнения (2)

$$x = x^{(nh)} + x^{(h)} = c \prod_{j=1}^{n-1} a_j + \left( c(1) + \left( \prod_{j=1}^{n-1} a_j \right)^{-1} f_{n-1} + \left( \prod_{j=1}^{n-2} a_j \right)^{-1} f_{n-2} + \dots + f_1 \right) \prod_{j=1}^{n-1} a_j,$$

которое запишем в виде

$$x_n = c' \prod_{j=1}^{n-1} a_j + \sum_{j=1}^{n-1} f_j \left( \prod_{s=j+1}^{n-1} a_s \right), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (5)$$

где  $c' = c + c(1)$  – произвольная вещественная постоянная.

В случае, когда среди коэффициентов  $a_j$  уравнения (2) имеются нулевые, можно также указать алгоритм непосредственного построения общего решения. Пусть  $n_1 \leq n_2 \leq \dots$  – неубывающая последовательность натуральных чисел такая, что  $a_{n_i} = 0$  и  $a_n \neq 0$  для  $n \neq n_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . Отметим, что в силу  $\omega$ -периодичности коэффициента  $a$  можно указать первые члены последовательности  $n_i$  из отрезка  $[1, \omega]$ . Тогда остальные ее члены получаются из указанных добавлением кратных периода  $\omega$ .

Сначала находим

$$x_1 = c, x_2 = a_1c + f_1, x_3 = a_2a_1c + a_2f_1 + f_2, \dots, x_{n_1} = c \prod_{j=1}^{n_1-1} a_j + \sum_{s=1}^{n_1-1} f_s \left( \prod_{j=s+1}^{n_1-1} a_j \right), \quad (6)$$

где  $c$  – произвольная вещественная постоянная. Заметим, что если  $n_1 = 1$ , то формула (6) принимает вид  $x_1 = c$ .

Далее, в предположении  $n_i \neq n_{i+1} - 1$ , находим  $x_{n_{i+1}}$  для  $n \in [n_i, n_{i+1} - 1]$ :

$$x_{n_i+1} = f_{n_i}, x_{n_i+2} = a_{n_i+1}f_{n_i} + f_{n_i+1}, x_{n_i+3} = a_{n_i+2}a_{n_i+1}f_{n_i} + a_{n_i+2}f_{n_i+1} + f_{n_i+2}, \dots, \\ x_{n_{i+1}} = \sum_{s=1}^{n_{i+1}-n_i-1} f_{n_i+s} \left( \prod_{j=s+1}^{n_{i+1}-n_i-1} a_{n_i+j} \right), \quad i = 1, 2, \dots \quad (7)$$

Если для некоторых  $l \in \mathbb{N}$  окажется, что  $n_{l+1} - n_l = 1$ , то полагаем

$$x_{n_{l+1}+1} = f_{n_{l+1}}. \quad (8)$$

В итоге формулы (6)–(8) будут давать решение неоднородного уравнения (2) в случае наличия среди коэффициентов  $a_n$  нулевых.

Допустим, что при некотором фиксированном значении  $c' = c^*$  соотношения (5) либо (6)–(8) определяют отличную от постоянной  $\Omega$ -периодическую функцию  $\varphi$ , т. е. уравнение (2) имеет  $\Omega$ -периодическое решение

$$x = \varphi, \quad \varphi \in PS_{\Omega}^1. \quad (9)$$

Исследуем далее поведение правой части уравнения (2) вдоль этого решения, используя подход [6, 9]. Для этого возьмем произвольное  $n_0 \in \mathbb{N}$ . Поскольку для любого натурального числа  $d$  найдутся такие целые числа  $k$  и  $m$ ,  $n_0 + m\Omega \geq 1$ , что  $d = k\omega + m\Omega$ , то выполняется равенство

$$A = a_{n_0+d}\varphi_{n_0} + f_{n_0+d} = a_{n_0+k\omega+m\Omega}\varphi_{n_0} + f_{n_0+k\omega+m\Omega},$$

откуда в силу  $\omega$ -периодичности функций  $a$  и  $f$  имеем

$$A = a_{n_0+m\Omega}\varphi_{n_0} + f_{n_0+m\Omega}.$$

Так как по предположению функция (6) является  $\Omega$ -периодической, то  $\varphi_{n_0} = \varphi_{n_0+m\Omega}$ . Поэтому

$$A = a_{n_0+m\Omega}\varphi_{n_0+m\Omega} + f_{n_0+m\Omega}.$$

Функция  $\varphi$  удовлетворяет уравнению (2), в частности при  $n = n_0 + m\Omega + 1$ , а также в силу  $\Omega$ -периодичности при  $n = n_0 + 1$ . Значит,

$$A = \varphi_{n_0+m\Omega+1} = \varphi_{n_0+1} = a_{n_0}\varphi_{n_0} + f_{n_0\Omega}.$$

Таким образом, при любом фиксированном  $n_0 \in \mathbb{N}$  для произвольного  $d \in \mathbb{N}$  верно равенство

$$a_{n_0+d}\varphi_{n_0} + f_{n_0+d} = a_{n_0}\varphi_{n_0} + f_{n_0},$$

откуда в силу произвольности  $d$  следует, что

$$a_n\varphi_{n_0} + f_n = a_{n_0}\varphi_{n_0} + f_{n_0} = \text{const}. \quad (10)$$

Равенство (10) означает, что при всяком фиксированном значении  $\varphi_0$  решения (9) правая часть уравнения (2) является постоянной, т. е.  $a_n\varphi_0 + f_n = \text{const}$ .

Согласно предположению последовательность (9) отлична от постоянной и имеет период  $\Omega$ . Поэтому  $\Omega \geq 2$ . В таком случае по меньшей мере для некоторого  $l \in \mathbb{N}$  найдутся натуральные

числа  $p_1, p_2 \in [l, l + \Omega - 1]$ , в которых функция (9) принимает различные значения, т. е.  $\varphi_{p_1} \neq \varphi_{p_2}$ . Это означает, что хотя бы одно из этих значений отлично от нуля. Пусть для определенности  $\varphi_{p_1} \neq 0$ .

Как вытекает из равенства (10), вдоль значений  $\varphi_{p_1}, \varphi_{p_2}$   $\Omega$ -периодического решения (9), т. е. при  $\varphi = \varphi_{p_1}$  и  $\varphi = \varphi_{p_2}$ , правая часть уравнения (2) будет постоянной

$$a_n \varphi_{p_1} + f_n = \alpha_1, \quad a_n \varphi_{p_2} + f_n = \alpha_2, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (11)$$

где  $\alpha_1, \alpha_2$  – некоторые вещественные постоянные. Из системы (11) находим

$$a_n (\varphi_{p_1} - \varphi_{p_2}) = \alpha_1 - \alpha_2, \quad n = 1, 2, \dots$$

Поскольку  $\varphi_{p_1} \neq \varphi_{p_2}$ , то

$$a_n = (\alpha_1 - \alpha_2) / (\varphi_{p_1} - \varphi_{p_2}), \quad n = 1, 2, \dots,$$

т. е. последовательность  $(a_n)$  является постоянной. Тогда из системы (11) получаем, что

$$f_n = (-\alpha_1 \varphi_{p_2} + \alpha_2 \varphi_{p_1}) / (\varphi_{p_1} - \varphi_{p_2}), \quad n = 1, 2, \dots,$$

т. е. последовательность  $(f_n)$  также является постоянной.

Последние два факта вступают в противоречие с предположением о непостоянстве одной из функций  $a$  либо  $\varphi$ . Значит, решение (9) системы (2) не может иметь период  $\Omega$ . Теорема доказана

**З а м е ч а н и е.** В формулировке теоремы требование нестационарности уравнения (2) существенно. Действительно, стационарное уравнение  $x_{n+1} = -x_n + 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$  имеет 2-периодическое решение  $x_1 = c, x_2 = -c + 1, x_3 = c, x_4 = -c + 1, \dots$

**Заключение.** Для линейного неоднородного нестационарного периодического дискретного уравнения первого порядка имеет место аналог теоремы Массеры об отсутствии у скалярного периодического обыкновенного дифференциального уравнения периодических решений таких, что период решения несоизмерим с периодом уравнения.

**Благодарности.** Работа выполнена в Институте математики Национальной академии наук Беларуси в рамках Отдельного проекта фундаментальных и прикладных научных исследований НАН Беларуси «Исследование свойств спектров дискретных систем при возмущениях их коэффициентов».

**Acknowledgements.** The work was carried out at the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus within the framework of the Special Project of Fundamental and Applied Scientific Research of the National Academy of Sciences of Belarus “Investigation of the properties of the spectra of discrete systems under perturbations of their coefficients”.

### Список использованных источников

1. Popena, J. The oscillation of solution of difference equations / J. Popena // *Comput. Math. Appl.* – 1994. – Vol. 28, № 1/3. – P. 271–279. [https://doi.org/10.1016/0898-1221\(94\)00115-4](https://doi.org/10.1016/0898-1221(94)00115-4)
2. Agarwal, R. P. Periodic Solutions of First Order Linear Difference Equations / R. F. Agarwal, J. Popena // *Math. Comput. Modelling.* – 1995. – Vol. 22, № 1. – P. 11–19. [https://doi.org/10.1016/0895-7177\(95\)00096-k](https://doi.org/10.1016/0895-7177(95)00096-k)
3. Agarwal, R. P. Advanced Topics in Difference Equations / R. P. Agarwal, P. J. Y. Wong. – Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publ., 1997. – 509 p. <https://doi.org/10.1007/978-94-015-8899-7>
4. Elaydi, S. An Introduction to Difference Equations / S. Elaydi. – New York: Springer, 1999. – 568 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3110-1>
5. Janglajew, K. R. Periodicity of solutions of nonhomogeneous linear difference equations / K. R. Janglajew, E. L. Schmeidel // *Adv. Differ. Equ. Advances in Difference Equations.* – 2012. – Vol. 2012, № 1. <https://doi.org/10.1186/1687-1847-2012-195>
6. Massera, J. L. Observaciones sobre les soluciones periodicas de ecuaciones diferenciales / J. L. Massera // *Bol. de la Facultad de Ingenieria.* – 1950. – Vol. 4, № 1. – P. 37–45.
7. Курцвейль, Я. О периодических и почти периодических решениях систем обыкновенных дифференциальных уравнений / Я. Курцвейль, О. Вейвода // *Чехосл. мат. журн.* – 1955. – Т. 5, № 3. – С. 362–370.
8. Еругин, Н. П. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами / Н. П. Еругин. – Минск: Изд-во АН БССР, 1963. – 272 с.

9. Грудо, Э. И. О периодических решениях с несоизмеримыми периодами линейных неоднородных периодических дифференциальных систем / Э. И. Грудо, А. К. Деменчук // Дифференц. уравнения. – 1987. – Т. 23, № 3. – С. 409–416.
10. Деменчук, А. К. Асинхронные колебания в дифференциальных системах. Условия существования и управления / А. К. Деменчук. – Saarbrücken: Lambert Academic Publ., 2012. – 186 с.
11. Борухов, В. Т. Сильно инвариантные подпространства неавтономных линейных периодических систем и их решений с периодом, несоизмеримым с периодом системы / В. Т. Борухов // Дифференц. уравнения. – 2018. – Т. 54, № 5. – С. 585–591.
12. Papaleksi N. D. On a particular case of parametrically coupled systems / N. D. Papaleksi // J. Phys. – 1939. – Vol. 1, № 5/6. – P. 373–379.
13. Пеннер, Д. И. Колебания с саморегулирующимся временем взаимодействия / Д. И. Пеннер, Я. Б. Дубошинский, Д. Б. Дубошинский // Докл. АН СССР. – 1972. – Т. 204, № 5. – С. 1065–1066.
14. Ланда, П. С. Автоколебательные системы с высокочастотными источниками энергии / П. С. Ланда, Я. Б. Дубошинский // Успехи физ. наук. – 1989. – Т. 158, вып. 4. – С. 729–742.
15. Ласунский, А. В. О периоде решений дискретного периодического логистического уравнения / А. В. Ласунский // Тр. Карел. науч. центра РАН. – 2012. – № 5. – С. 44–48.
16. Деменчук, А. К. О сильно нерегулярных периодических решениях линейного однородного дискретного уравнения первого порядка / А. К. Деменчук // Докл. Нац. акад. наук Беларусі. – 2018. – Т. 62, № 3. – С. 263–267. <https://doi.org/10.29235/1561-8323-2018-62-3-263-267>

### References

1. Popena J. The oscillation of solution of difference equations. *Computers & Mathematics with Applications*, 1994, vol. 28, no. 1–3, pp. 271–279. [https://doi.org/10.1016/0898-1221\(94\)00115-4](https://doi.org/10.1016/0898-1221(94)00115-4)
2. Agarwal R. P., Popena J. Periodic Solutions of First Order Linear Difference Equations. *Mathematical and Computer Modelling*, 1995, vol. 22, no. 1, pp. 11–19. [https://doi.org/10.1016/0895-7177\(95\)00096-k](https://doi.org/10.1016/0895-7177(95)00096-k)
3. Agarwal R. P., Wong P. J. Y. *Advanced Topics in Difference Equations*. Dordrecht, Boston, London, Kluwer Academic Publ., 1997. 509 p. <https://doi.org/10.1007/978-94-015-8899-7>
4. Elaydi S. *An Introduction to Difference Equations*. New York, Springer, 1999. 568 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3110-1>
5. Janglajew K., Schmeidel E. L. R Periodicity of solutions of nonhomogeneous linear difference equations. *Advances in Difference Equations*, 2012, vol. 2012, no. 1. <https://doi.org/10.1186/1687-1847-2012-195>
6. Massera J. L. Observaciones sobre las soluciones periodicas de ecuaciones diferenciales. *Boletin de la Facultad de Ingenieria*, 1950, vol. 4, no. 1, pp. 37–45.
7. Kurzweil J., Veivoda O. On periodic and almost periodic solutions of the ordinary differential systems. *Czechoslovatskii matematicheskii zhurnal = Czechoslovak Mathematical Journal*, 1955, vol. 5, no. 3, pp. 362–370 (in Russian).
8. Erugin N. P. *Linear Systems of Ordinary Differential Equations with Periodic and Quasiperiodic Coefficients*. Minsk, Publishing House of the Academy of Sciences of the BSSR, 1963. 272 p. (in Russian).
9. Grudo E. I., Demenchuk A. K. On periodic solutions with incommensurable periods of linear inhomogeneous periodic differential systems. *Differentsial'nye uravneniya = Differential Equations*, 1987, vol. 23, no. 3, pp. 409–416 (in Russian).
10. Demenchuk A. K. *Asynchronous oscillations in differential systems. Conditions of existence and control*. Saarbrücken, LAP Lambert Academic Publ., 2012. 186 p. (in Russian).
11. Borukhov V. T. Strongly invariant subspaces of nonautonomous linear periodic systems and their solutions with a period incommensurate with the period of the system. *Differential Equations*, 2018, vol. 54, no. 5, pp. 578–585. <https://doi.org/10.1134/s0012266118050026>
12. Papaleksi N. D. On a particular case of parametrically coupled systems. *Journal of Physics*, 1939, vol. 1, no. 5–6, pp. 373–379.
13. Penner D. I. Oscillations with a self-regulating interaction time. *Doklady Akademii nauk SSSR* [Proceedings of the Academy of Sciences of the USSR], 1972, vol. 204, no. 5, pp. 1065–1066 (in Russian).
14. Landa P. S., Duboshinskiĭ Ya. B. Self-oscillating systems with high-frequency power sources. *Soviet Physics Uspekhi*, 1989, vol. 32, no. 8, pp. 723–731. <https://doi.org/10.1070/pu1989v032n08abeh002750>
15. Lasunskii A. V. On the period of solutions of the discrete periodic logistic equation. *Trudy Karelskogo nauchnogo centra RAN = Transactions of Karelian research centre of Russian Academy of Science*, 2012, no. 5, pp. 44–48 (in Russian).
16. Demenchuk A. K. Strongly irregular periodic solutions the first-order linear homogeneous discrete equation. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2018, vol. 62, no. 3, pp. 263–267 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-8323-2018-62-3-263-267>

### Информация об авторе

**Деменчук Александр Константинович** – доктор физико-математических наук, доцент, главный научный сотрудник отдела дифференциальных уравнений, Институт математики Национальной академии наук Беларусі (ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Республика Беларусі). E-mail: demenchuk@im.bas-net.by

### Information about the author

**Aleksandr K. Demenchuk** – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Assistant Professor, Chief Researcher of the Department of Differential Equations, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Sarganova Str., Minsk, 220072, Republic of Belarus). E-mail: demenchuk@im.bas-net.by

ISSN 1561-2430 (Print)  
 ISSN 2524-2415 (Online)  
 УДК 519.216.73  
<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-1-36-50>

Поступила в редакцию 22.10.2019  
 Received 22.10.2019

**М. М. Васьковский**

*Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь*

## СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА СО СТАНДАРТНЫМИ И ДРОБНЫМИ БРОУНОВСКИМИ ДВИЖЕНИЯМИ С ИНДЕКСАМИ ХЕРСТА, БОЛЬШИМИ $1/3$

**Аннотация.** Для стохастических дифференциальных уравнений смешанного типа, управляемых стандартными и дробными броуновскими движениями с индексами Херста, большими  $1/3$ , доказаны теоремы о существовании, единственности и непрерывной зависимости решений от начальных данных. Для таких уравнений получен аналог формулы Ито замены переменных. Найдены асимптотические разложения функционалов от решений стохастических дифференциальных уравнений смешанного типа при малых значениях времени. В коммутативном случае получены аналоги дифференциальных уравнений Колмогорова для математических ожиданий и плотностей распределений решений. Рассматривается приложение стохастических дифференциальных уравнений смешанного типа к решению проблемы экстраполяции макроэкономических факторов при моделировании кредитных рисков.

**Ключевые слова:** дробное броуновское движение, формула Ито, стохастическое дифференциальное уравнение, интеграл Ито, интеграл Губинелли

**Для цитирования.** Васьковский, М. М. Стохастические дифференциальные уравнения смешанного типа со стандартными и дробными броуновскими движениями с индексами Херста, большими  $1/3$  / М. М. Васьковский // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2020. – Т. 56, № 1. – С. 36–50. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-1-36-50>

**Maksim M. Vas'kovskii**

*Belarusian State University, Minsk, Belarus*

## MIXED-TYPE STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS DRIVEN BY STANDARD AND FRACTIONAL BROWNIAN MOTIONS WITH HURST INDICES GREATER THAN $1/3$

**Abstract.** In this paper we consider mixed-type stochastic differential equations driven by standard and fractional Brownian motions with Hurst indices greater than  $1/3$ . There are proved theorems on the existence, uniqueness, and continuous dependence of solutions on the initial data. We provide an analog of the Ito formula to change variables. Asymptotic expansions of functionals on the solutions of mixed-type stochastic differential equations for small times are obtained. We receive analogs of the Kolmogorov equations for mathematical expectations and probability densities in the commutative case. Finally, we consider an application of mixed-type stochastic differential equations to solving the problem of macroeconomic variables extrapolation in credit risks models.

**Keywords:** fractional Brownian motion, Ito formula, stochastic differential equation, Ito integral, Gubinelli integral

**For citation.** Vas'kovskii M. M. Mixed-type stochastic differential equations driven by standard and fractional Brownian motions with Hurst indices greater than  $1/3$ . *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2020, vol. 56, no. 1, pp. 36–50 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-1-36-50>

Стохастические дифференциальные уравнения, управляемые стандартными и дробными броуновскими движениями, используются в финансовой математике и задачах фильтрации [1–5]. В статье [6] рассматривались стохастические дифференциальные уравнения Стратоновича, управляемые дробными броуновскими движениями с различными индексами Херста, большими  $1/3$ . Но для многих приложений важную роль играют так называемые уравнения смешанного типа [4], в которых интегралы по стандартному броуновскому движению понимаются как интегралы Ито, а интегралы по дробным броуновским движениям – как потраекторные интегралы. Смешанные уравнения, содержащие дробные броуновские движения с индексами Херста, большими  $1/2$ , изучались в работах [7–18]. В настоящей статье исследуются стохастические

ские дифференциальные уравнения смешанного типа, управляемые стандартными и дробными броуновскими движениями с индексами Херста, большими  $1/3$ . Для таких уравнений интегралы по дробным броуновским движениям не могут быть определены как потраекторные интегралы Янга. Следуя теории грубых траекторий [19, 20], мы определяем интегралы по дробным броуновским движениям как потраекторные интегралы Губинелли. Развивая идеи работы [6], в настоящей статье для упомянутого класса стохастических дифференциальных уравнений доказываются теоремы о существовании, единственности и непрерывной зависимости решений от начальных данных. Выводится формула замены переменных, с помощью которой исследуются асимптотические свойства функционалов от решений при малых значениях времени. В статье получены аналоги уравнений Колмогорова для математических ожиданий и плотностей распределений решений. В заключение рассматривается приложение стохастических дифференциальных уравнений смешанного типа к решению проблемы экстраполяции макроэкономических факторов при моделировании кредитных рисков.

Пусть на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  заданы независимые  $d_1$ -мерное дробное броуновское движение  $B_t = (B_t^{(1)}, \dots, B_t^{(d_1)})$  с показателями Херста  $H_1, \dots, H_{d_1} \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1)$  и  $d_2$ -мерное стандартное броуновское движение  $W_t = (W_t^{(1)}, \dots, W_t^{(d_2)})$ .

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t + h(X_t)dW(t), \quad t \in [0, T], \tag{1}$$

где  $b: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\sigma: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times d_1}$ ,  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times d_2}$  – детерминированные функции.

Определим функцию  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times (d+1)}$ ,  $f = (f_0, f_1, \dots, f_d)$ , где  $f_1, \dots, f_d$  – компоненты функций  $\sigma$  и  $h$  соответственно,  $f_0 = b$ ,  $d = d_1 = d_2$ . Случайный процесс  $B_t^H = (t, B_t, W_t)$  также будем называть дробным броуновским движением с многомерным индексом Херста  $H = (H_0, \dots, H_d)$ , где  $H_0 = 1$ ,  $H_i = 1/2$  при  $d_1 < i < d$ . Уравнение (1) может быть записано следующим образом:

$$dX_t = f(X_t)dB_t^H, \quad t \in [0, T]. \tag{2}$$

В дальнейшем будем опускать индекс  $H$  у процесса  $B_t^H$ , а через  $H$  будем обозначать некоторое фиксированное действительное число из интервала  $H \in (1/3, H_{\min})$ , где  $H_{\min}$  – минимальное из значений  $H_i$ ,  $i = 0, \dots, d$ .

Пусть  $V$  – некоторое конечномерное евклидово пространство,  $\alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$ . Множество функций  $z: [0, T] \rightarrow V$ , непрерывных по Гельдеру с показателем  $\alpha$ , для которых

$$|z|_\alpha := \sup_{s, t \in [0, T], s \neq t} \frac{\|z(t) - z(s)\|_V}{|t - s|^\alpha} < \infty,$$

обозначим через  $C^\alpha([0, T], V)$ .

Пусть  $W$  – конечномерное евклидово пространство,  $\mathcal{L}(W, V)$  – пространство ограниченных линейных операторов, действующих из  $W$  в  $V$ . Множество функций  $y: [0, T] \times [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(W, V)$ , для которых

$$|y|_{2\alpha} := \sup_{s, t \in [0, T], s \neq t} \frac{\|y(t, s)\|_{\mathcal{L}(W, V)}}{|t - s|^{2\alpha}} < \infty,$$

обозначим через  $C_{2\alpha}^{2\alpha}([0, T]^2, \mathcal{L}(W, V))$ .

Говорят, что отображение  $\mathbb{Y}: [0, T]^2 \rightarrow V \otimes V$  является процессом второго порядка над функцией  $Y: [0, T] \rightarrow V$ , если оно удовлетворяет следующему тождеству Чена:

$$\mathbb{Y}(s,t) - \mathbb{Y}(s,u) - \mathbb{Y}(u,t) = (Y(u) - Y(s)) \otimes (Y(t) - Y(u))$$

для любой тройки  $(s,u,t) \in [0,T]^3$ .

Через  $C^\alpha([0,T],V)$  обозначим множество  $\alpha$ -непрерывных по Гельдеру грубых траекторий над  $V$ , т. е. множество всех пар  $(Y, \mathbb{Y})$  таких, что функция  $Y$  принадлежит  $C^\alpha([0,T],V)$ , а  $\mathbb{Y} \in C_2^{2\alpha}([0,T]^2, V \otimes V)$  является процессом второго порядка над  $Y$ .

Под множеством  $\alpha$ -непрерывных по Гельдеру геометрических грубых траекторий над  $V$  понимают множество всех пар  $(Y, \mathbb{Y}) \in C^\alpha([0,T],V)$ , для которых имеет место следующее соотношение:

$$\text{Sym}(\mathbb{Y}(s,t)) := \frac{1}{2}(\mathbb{Y}(s,t) + \mathbb{Y}^\top(s,t)) = \frac{1}{2}Y(s,t) \otimes Y(s,t)$$

для любой пары  $(s,t) \in [0,T]^2$ .

Говорят, что функция  $Y \in C^\alpha([0,T], \mathcal{L}(W,V))$  управляется функцией  $Z \in C^\alpha([0,T],W)$ , если существует элемент  $Y' \in C^\alpha([0,T], \mathcal{L}(W, \mathcal{L}(W,V)))$  (называемый производной Губинелли  $Y$ ), такой что выражение  $R^Y(s,t) = Y(s,t) - Y'_s Z(s,t)$  удовлетворяет неравенству  $|R^Y|_{2\alpha} < +\infty$ . Множество всех  $(Y, Y')$  таких, что  $Y$  управляется функцией  $Z$ , будем обозначать  $\mathcal{D}_Z^{2\alpha}([0,T], \mathcal{L}(W,V))$ . Множество  $\mathcal{D}_Z^{2\alpha}([0,T], \mathcal{L}(W,V))$  является банаховым пространством с нормой

$$\|(Y, Y')\| = \|Y(0)\| + \|Y'(0)\| + |Y'|_\alpha + |R^Y|_{2\alpha}.$$

Пусть  $(Z, \mathbb{Z}) \in C^\alpha([0,T],W)$ , а также  $(Y, Y') \in \mathcal{D}_Z^{2\alpha}([0,T], \mathcal{L}(W,V))$ . Потраекторным интегралом Губинелли от  $Y$  по отображению  $Z$  называют предел интегральных сумм

$$\int_0^T Y dZ = \lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \sum_{t_i, t_{i+1} \in \mathcal{P}} (Y(t_i)Z(t_i, t_{i+1}) + Y'(t_i)\mathbb{Z}(t_i, t_{i+1})),$$

где  $|\mathcal{P}| = \max |t_{i+1} - t_i|$  – диаметр разбиения  $\mathcal{P} = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_l = T\}$ , а предел понимается не зависящим от последовательности разбиений  $\mathcal{P}$ . Если  $Z \in C^\beta([0,T],W)$ ,  $Y \in C^\gamma([0,T], \mathcal{L}(W,V))$ ,  $\beta + \gamma > 1$ , то потраекторный интеграл Губинелли совпадает с потраекторным интегралом Янга, который может быть определен как предел интегральных сумм

$$\int_0^T Y dZ = \lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \sum_{t_i, t_{i+1} \in \mathcal{P}} Y(t_i)Z(t_i, t_{i+1}).$$

Определим процесс второго порядка  $\mathbb{B}: [0,T]^2 \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{(d+1) \times (d+1)}$  над дробным броуновским движением  $B$  следующим образом:

$$\mathbb{B}_{s,t} = \left( \mathbb{B}_{s,t}^{(i,j)} \right)_{i,j=0}^d,$$

$$\mathbb{B}_{s,t}^{(i,j)} \stackrel{L^2}{=} \lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \int_{\mathcal{P}} B_{s,r}^{(i)} dB_r^{(j)}, \int_{\mathcal{P}} B_{s,r}^{(i)} dB_r^{(j)} = \sum_{t_k, t_{k+1} \in \mathcal{P}} B_{s,t_k}^{(i)} B_{t_k, t_{k+1}}^{(j)}, \quad 1 \leq i < j \leq d,$$

$$\mathbb{B}_{s,t}^{(0,j)} = \int_s^t B_{s,r}^{(j)} dr \stackrel{\text{п.н.}}{=} \lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \sum_{t_k, t_{k+1} \in \mathcal{P}} B_{s,t_k}^{(j)} (t_{k+1} - t_k), \quad 1 \leq j \leq d,$$

$$\mathbb{B}_{s,t}^{(i,i)} = \frac{1}{2} \left( B_{s,t}^{(i)} \right)^2 - \frac{1}{2} (t-s) 1_{\{H_i=1/2\}}, \quad 0 \leq i \leq d,$$

$$\mathbb{B}_{s,t}^{(i,j)} = -\mathbb{B}_{s,t}^{(j,i)} + B_{s,t}^{(i)} B_{s,t}^{(j)}, \quad 0 \leq j < i \leq d,$$

для любой пары  $(s,t) \in [0,T]^2$ , где  $1_{\{H_i=1/2\}} = 1$ , если  $H_i = 1/2$ ,  $1_{\{H_i=1/2\}} = 0$ , если  $H_i \neq 1/2$ ,  $\mathcal{P} = \{s = t_0 < t_1 < \dots < t_l = t\}$  – произвольное разбиение отрезка  $[s,t]$ ,  $|\mathcal{P}| = \max |t_{k+1} - t_k|$ , а все пределы понимаются не зависящими от последовательности разбиений  $\mathcal{P}$ . Здесь обозначения

$L^2$  п.н. =, = применяются для того, чтобы показать, что соответствующие пределы понимаются в смысле  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$  и  $P = 1$  соответственно.

**З а м е ч а н и е 1.** При  $1 \leq i < j \leq d$  процессы  $\mathbb{B}_{s,t}^{(i,j)}$  являются интегралами Ито, которые совпадают с интегралами Стратоновича в силу независимости процессов  $B^{(i)}$  и  $B^{(j)}$  (см. [21, разд. 5.2]). В свою очередь процесс  $\mathbb{B}^{(i,i)}$  соответствует интегралу Стратоновича  $\int_s^t B_{s,r}^{(i)} dB_r^{(i)}$  при  $H_i \neq 1/2$  и интегралу Ито при  $H_i = 1/2$ . Наконец формула  $\mathbb{B}_{s,t}^{(i,j)} = -\mathbb{B}_{s,t}^{(j,i)} + B_{s,t}^{(i)} B_{s,t}^{(j)}$  является формулой интегрирования по частям для интегралов Стратоновича.

**З а м е ч а н и е 2.** Нетрудно видеть, что

$$\text{Sym}\left(\mathbb{B}_{s,t} + \frac{1}{2}(t-s)I_{\overline{H}}\right) = \frac{1}{2}B_{s,t} \otimes B_{s,t},$$

где

$$I_{\overline{H}} = I_{(H_0, \dots, H_d)} = \text{diag}(1_{\{H_0=1/2\}}, \dots, 1_{\{H_d=1/2\}}).$$

**Предложение 1** [6]. Для любого фиксированного  $H \in (1/3, 1/2]$  такого, что  $H < H_{\min} = \min_{i=0, \dots, d} H_i$  имеет место включение  $(B, \mathbb{B}) \in C^H([0, T], \mathbb{R}^{d+1})$  п. н., и, более того,  $\mathbb{E} \|\mathbb{B}\|_{2H}^q < \infty$  для любого  $q \geq 1$ .

**Определение 1.** Случайный процесс  $X_t$  такой, что  $(X, X') \in \mathcal{D}_B^{2H}([0, T], \mathbb{R}^n)$  п. н., будем называть решением уравнения (2), если он п. н. удовлетворяет равенству

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(X_s) dB_s, \quad t \in [0, T], \tag{3}$$

где интеграл понимается как потраекторный интеграл Губинелли. Пусть  $x \in \mathbb{R}^n$ . Решение уравнения (2) с начальным условием  $X_0 = x$  будем называть п. н. единственным, если для любого решения  $Y_t$  уравнения (2) с начальным условием  $Y_0 = x$  выполняется равенство  $P(X_t = Y_t \quad \forall t \in [0, T]) = 1$ .

**Теорема 1.** Если  $f \in C_b^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n \times (d+1)})$ , то для любого  $x \in \mathbb{R}^n$  уравнение (2) имеет единственное решение с начальным условием  $X_0 = x$ , причем  $X' = f(X), (f(X), (f(X))') \in \mathcal{D}_B^{2H}([0, T], \mathbb{R}^{n \times (d+1)})$  п. н.

Доказательство существования и единственности функции  $X(t, \omega)$ , удовлетворяющей почти наверное интегральному уравнению (3), вытекает из теоремы 3.13 в [22]. Измеримость процесса  $X(t, \omega)$  следует из непрерывности отображения Ито – Лайонса, установленной в утверждении 2 теоремы 3.13 в [22], и сходимости диадных аппроксимаций  $B_t(m)$  к дробному броуновскому движению  $B_t$ , доказанной в теореме 2 в [23].

Наряду с уравнением (2) рассмотрим аналогичное уравнение с возмущенной правой частью

$$d\tilde{X}_t = \tilde{f}(\tilde{X}_t) dB_t, \quad t \in [0, T], \tag{4}$$

где  $\tilde{f} - (n \times (d+1))$ -матрица, столбцами которой являются векторы  $\tilde{f}_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, i = 0, \dots, d$ .

Из предложения 1 и доказательства теорем 7.3 и 7.4 [18] вытекает теорема о непрерывной зависимости решений уравнения (2) от начальных условий и правых частей.

**Теорема 2.** Пусть  $f, \tilde{f} \in C_b^4(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n \times (d+1)})$ , причем функция  $\tilde{f}$  такова, что  $\|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} \leq 1$ .

Обозначим через  $X_t, \tilde{X}_t$  решения уравнений (2), (4) с начальными условиями  $X_0 = \xi, \tilde{X}_0 = \tilde{\xi}$  соответственно. Тогда:

1) почти наверное справедлива следующая оценка:

$$\|X - \tilde{X}\|_H \leq C \left( |\xi - \tilde{\xi}| + \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} \right)$$

для некоторой случайной величины

$$C = C\left(H, T, \|f\|_{C_b^4}, \|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H}\right);$$

2) имеет место следующее неравенство:

$$\mathbb{E}\left(\ln \|X - \tilde{X}\|_H\right) \leq C + \ln\left(\mathbb{E}|\xi - \tilde{\xi}| + \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2}\right),$$

где  $C = C\left(H, H_1, \dots, H_d, T, \|f\|_{C_b^4}\right)$  – некоторая постоянная.

Следующая теорема является обобщением известной формулы Ито о замене переменных в дифференциальных выражениях на класс уравнений (2).

**Теорема 3.** Пусть  $f \in C_b^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n \times (d+1)})$ ,  $g \in C_b^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ . Тогда для любых  $s, t \in [0, T]$  п. н. справедлива следующая формула:

$$g(X_t) = g(X_s) + \int_s^t Dg(X_r) f(X_r) dB_r + \int_s^t \frac{1}{2} \operatorname{tr}\left(\left(f(X_r) I_{\overline{H}}\right)^T D^2 g(X_r) \left(f(X_r) I_{\overline{H}}\right)\right) dr, \quad s, t \in [0, T],$$

где  $X_t$  – решение уравнения (2).

**Доказательство.** Зафиксируем произвольные  $s, t \in [0, T]$ ,  $s \leq t$ , и рассмотрим разбиение отрезка  $[s, t]$  точками

$$\mathcal{P}^{(N)} = \{s = t_0 < t_1 < \dots < t_N = t\}, \quad |\mathcal{P}^{(N)}| = \max_{i=0, \dots, N-1} |t_{i+1} - t_i|.$$

Будем обозначать  $X^{\otimes m} = \underbrace{X \otimes \dots \otimes X}_m$ . Все равенства и неравенства ниже для случайных величин будем понимать выполненными почти наверное. Из формулы Тейлора вытекает справедливость соотношения

$$\begin{aligned} g(X_t) - g(X_s) &= \sum_{i=0}^{N-1} \left(g(X_{t_{i+1}}) - g(X_{t_i})\right) = \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} \left(Dg(X_{t_i}) X_{t_i, t_{i+1}} + \frac{1}{2} D^2 g(X_{t_i}) X_{t_i, t_{i+1}}^{\otimes 2} + \frac{1}{6} D^3 g(X_{t_i} + \theta_i X_{t_i, t_{i+1}}) X_{t_i, t_{i+1}}^{\otimes 3}\right), \end{aligned} \quad (5)$$

для некоторых  $\theta_i \in (0, 1)$ .

Оценим последнее слагаемое в сумме (5). Поскольку  $X \in C^H([0, T], \mathbb{R}^n)$  и  $3H > 1$ , то имеем

$$\begin{aligned} \left|\sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{6} D^3 g(X_{t_i} + \theta_i X_{t_i, t_{i+1}}) X_{t_i, t_{i+1}}^{\otimes 3}\right| &\leq \frac{1}{6} \|D^3 g\|_{\infty} \|X\|_H^3 \sum_{i=0}^{N-1} |t_{i+1} - t_i|^{3H} = \\ &= \frac{1}{6} \|D^3 g\|_{\infty} \|X\|_H^3 (t-s) |\mathcal{P}^{(N)}|^{3H-1} = O\left(|\mathcal{P}^{(N)}|^{3H-1}\right). \end{aligned} \quad (6)$$

Из теоремы 4.10 [1] следует, что

$$X_{t_i, t_{i+1}} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(X_r) dB_r = f(X_{t_i}) B_{t_i, t_{i+1}} + Df(X_{t_i}) f(X_{t_i}) \mathbb{B}_{t_i, t_{i+1}} + O\left(|t_{i+1} - t_i|^{3H}\right), \quad (7)$$

причем константа в  $O\left(|t_{i+1} - t_i|^{3H}\right)$  зависит только от  $f, B$  и  $X$  и не зависит от разбиения  $\mathcal{P}^{(N)}$ . Учитывая неравенства

$$|f(X_{t_i}) B_{t_i, t_{i+1}}| \leq \|f\|_{\infty} \|B\|_H |t_{i+1} - t_i|^H,$$

$$|Df(X_{t_i})f(X_{t_i})\mathbb{B}_{t_i,t_{i+1}}| \leq \|f\|_{C_b^2}^2 \|\mathbb{B}\|_{2H} |t_{i+1} - t_i|^{2H},$$

и умножая соотношение (7) тензорно на себя, получим соотношения

$$\begin{aligned} X_{t_i,t_{i+1}}^{\otimes 2} &= (f(X_{t_i})B_{t_i,t_{i+1}})^{\otimes 2} + (Df(X_{t_i})f(X_{t_i})\mathbb{B}_{t_i,t_{i+1}})^{\otimes 2} + \\ &+ f(X_{t_i})B_{t_i,t_{i+1}} \otimes Df(X_{t_i})f(X_{t_i})\mathbb{B}_{t_i,t_{i+1}} + \\ &+ Df(X_{t_i})f(X_{t_i})\mathbb{B}_{t_i,t_{i+1}} \otimes f(X_{t_i})B_{t_i,t_{i+1}} + O(|t_{i+1} - t_i|^{4H}) = \\ &= (f(X_{t_i})B_{t_i,t_{i+1}})^{\otimes 2} + O(|t_{i+1} - t_i|^{3H}). \end{aligned} \quad (8)$$

Подставляя (6)–(8) в (5) и замечая, что

$$\begin{aligned} D^2g(X_{t_i})(f(X_{t_i})B_{t_i,t_{i+1}})^{\otimes 2} &= (f(X_{t_i})B_{t_i,t_{i+1}})^T D^2g(X_{t_i})(f(X_{t_i})B_{t_i,t_{i+1}}) = \\ &= (B_{t_i,t_{i+1}})^T (f(X_{t_i})^T D^2g(X_{t_i})f(X_{t_i})) B_{t_i,t_{i+1}} = \\ &= (f(X_{t_i})^T D^2g(X_{t_i})f(X_{t_i})) (B_{t_i,t_{i+1}})^{\otimes 2}, \end{aligned}$$

получим соотношения

$$\begin{aligned} g(X_t) - g(X_s) &= \sum_{i=0}^{N-1} Dg(X_{t_i})f(X_{t_i})B_{t_i,t_{i+1}} + \\ &+ \sum_{i=0}^{N-1} \left( Dg(X_{t_i})Df(X_{t_i})f(X_{t_i})\mathbb{B}_{t_i,t_{i+1}} + \frac{1}{2}D^2g(X_{t_i})(f(X_{t_i})B_{t_i,t_{i+1}})^{\otimes 2} \right) + \\ &+ O\left(|\mathcal{P}^{(N)}|^{3H-1}\right) = \sum_{i=0}^{N-1} Dg(X_{t_i})f(X_{t_i})B_{t_i,t_{i+1}} + \\ &+ \sum_{i=0}^{N-1} \left( Dg(X_{t_i})Df(X_{t_i})f(X_{t_i})\mathbb{B}_{t_i,t_{i+1}} + f(X_{t_i})^T D^2g(X_{t_i})f(X_{t_i})\mathbb{B}_{t_i,t_{i+1}} \right) + \\ &+ \sum_{i=0}^{N-1} f(X_{t_i})^T D^2g(X_{t_i})f(X_{t_i}) \left( \frac{1}{2}(B_{t_i,t_{i+1}})^{\otimes 2} - \mathbb{B}_{t_i,t_{i+1}} \right) + O\left(|\mathcal{P}^{(N)}|^{3H-1}\right). \end{aligned} \quad (9)$$

Обозначим  $\tilde{\mathbb{B}}_{s,t} = \mathbb{B}_{s,t} + \frac{1}{2}(t-s)I_{\bar{H}}$ . Так как пара  $(B, \tilde{\mathbb{B}})$  принадлежит пространству геометрических грубых траекторий, то  $\text{Sym}(\tilde{\mathbb{B}}_{t_i,t_{i+1}}) = \frac{1}{2}(B_{t_i,t_{i+1}})^{\otimes 2}$  и  $\frac{1}{2}(B_{t_i,t_{i+1}})^{\otimes 2} - \mathbb{B}_{t_i,t_{i+1}} = -\text{Anti}(\tilde{\mathbb{B}}_{t_i,t_{i+1}}) + \frac{1}{2}(t_{i+1} - t_i)I_{\bar{H}}$ , где  $\text{Anti}(\tilde{\mathbb{B}}) = \frac{1}{2}(\tilde{\mathbb{B}} - \tilde{\mathbb{B}}^T)$  – антисимметричная часть  $\tilde{\mathbb{B}}$ . Заметим, что  $f(X_{t_i})^T D^2g(X_{t_i})f(X_{t_i})$  симметрично, в то время как  $\text{Anti}(\tilde{\mathbb{B}})$  антисимметрично, поэтому  $f(X_{t_i})^T D^2g(X_{t_i})f(X_{t_i})\text{Anti}(\tilde{\mathbb{B}}_{t_i,t_{i+1}})$  зануляется для каждого  $i = 0, \dots, N-1$ . Учитывая этот факт и соотношения

$$\begin{aligned} (Dg(X_{t_i}) \cdot f(X_{t_i}))' &= D(Dg \cdot f)(X_{t_i}) \cdot X_{t_i}' = \\ &= f(X_{t_i})^T D^2g(X_{t_i})f(X_{t_i}) + Dg(X_{t_i})Df(X_{t_i})f(X_{t_i}), \\ f(X_{t_i})^T D^2g(X_{t_i})f(X_{t_i})I_{\bar{H}} &= \text{tr}\left(\left(f(X_{t_i})I_{\bar{H}}\right)^T D^2g(X_{t_i})(f(X_{t_i})I_{\bar{H}})\right), \end{aligned}$$

из равенства (9) получим

$$g(X_t) - g(X_s) = \sum_{i=0}^{N-1} \left( Dg(X_{t_i})f(X_{t_i})B_{t_i,t_{i+1}} + (Dg(X_{\cdot})f(X_{\cdot}))'_{t_i} \mathbb{B}_{t_i,t_{i+1}} \right) + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{2} \text{tr} \left( (f(X_{t_i})I_{\overline{H}})^T D^2 g(X_{t_i})(f(X_{t_i})I_{\overline{H}}) \right) (t_{i+1} - t_i) + O(|\mathcal{P}^{(N)}|^{3H-1}). \tag{10}$$

Переходя к пределу в равенстве (10) при  $|\mathcal{P}^{(N)}| \rightarrow 0$ , получим требуемую формулу замены переменных. Теорема доказана.

Положим  $B_t^{(d+1)} = t$  и будем считать, что интегралы по  $B_t^{(d+1)}$  понимаются как интегралы Лебега.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \Delta^k[0,t] &= \{(t_1, \dots, t_k) \in [0,1]^k : 0 \leq t_1 < \dots < t_k \leq t\}, \\ \int_{\Delta^k[0,t]} dB^{(I_k)} &= \int_0^t \int_0^{t_k} \dots \int_0^{t_2} dB_{t_1}^{(i_1)} \dots dB_{t_{k-1}}^{(i_{k-1})} dB_{t_k}^{(i_k)}, \\ I_k &= (i_1, \dots, i_k) \in \mathbb{N}_{d+1}^k := \{0, \dots, d+1\}^k, \\ D_f^{(i)} &= \sum_{j=1}^n f_{ji}(x) \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad i \in \{0, \dots, d\}, \\ D_f^{(d+1)} &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^d 1_{\{H_k=1/2\}} \sum_{i,j=1}^n f_{ik}(\cdot) f_{jk}(\cdot) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \\ D_f^{(I_k)} &= D_f^{(i_1)} \dots D_f^{(i_k)}, \\ P_t g(x) &= \mathbb{E}g(X_t^x), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

В дальнейшем для краткости будем опускать верхний индекс  $x$  в обозначении решения  $X_t^x$  уравнения (2) с начальным условием  $X_0 = x$ .

**Теорема 4.** Пусть  $f \in C_b^{2N+2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n \times (d+1)})$ ,  $g \in C_b^{2N+3}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ,  $N \in \mathbb{N}$ . Тогда для любого фиксированного  $H \in (1/3, 1/2]$  такого, что  $H < H_{\min} = \min_{i=0, \dots, d} H_i$  справедливо следующее асимптотическое разложение:

$$P_t g(x) = g(x) + \sum_{k=1}^N \sum_{I_k \in \mathbb{N}_{d+1}^k} t^{|H_{I_k}|} \cdot (D_f^{(I_k)} g)(x) \mathbb{E} \left( \int_{\Delta^k[0,t]} dB^{(I_k)} \right) + O(t^{(N+1)H}), \tag{11}$$

при  $t \rightarrow 0$ , где  $|H_{I_k}| = H_{i_1} + H_{i_2} + \dots + H_{i_k}$  – сумма индексов Херста дробных броуновских движений  $B^{(i_1)}, B^{(i_2)}, \dots, B^{(i_k)}$ .

**Доказательство.** С учетом введенных обозначений формулу замены переменных можно записать в следующей форме:

$$g(X_t^x) = g(x) + \sum_{i=0}^{d+1} \int_0^t (D_f^{(i)} g)(X_r^x) dB_r^{(i)}. \tag{12}$$

Применяя формулу (12)  $(N+1)$  раз, получим

$$\begin{aligned} g(X_t) &= g(x) + \sum_{k=1}^N \sum_{I_k \in \mathbb{N}_{d+1}^k} (D_f^{(I_k)} g)(x) \int_{\Delta^k[0,t]} dB^{(I_k)} + \\ &+ \sum_{I_{N+1} \in \mathbb{N}_{d+1}^{N+1}} \int_0^t \int_0^{t_{N+1}} \dots \int_0^{t_2} (D_f^{(I_{N+1})} g)(X_{t_1}) dB_{t_1}^{(i_1)} \dots dB_{t_N}^{(i_N)} dB_{t_{N+1}}^{(i_{N+1})}. \end{aligned} \tag{13}$$

Обозначим  $\phi_{I_{N+1}}(x) = (D_f^{(I_{N+1})} g)(x)$  и преобразуем последнее слагаемое в (13). Определим процесс

$$\widehat{B}_u^{(c)} = \left( \widehat{B}_u^{(0;c)}, \widehat{B}_u^{(1;c)}, \dots, \widehat{B}_u^{(d+1;c)} \right)^T,$$

зависящий от параметра  $c > 0$ ,  $i$ -я компонента которого определяется равенством  $\widehat{B}_u^{(i;c)} = c^{H_i} B_{u/c}^{(i)}$ ,  $u \in [0, T]$ . По свойству самоподобия дробного броуновского движения процесс  $\widehat{B}_u^{(i;c)}$  также является дробным броуновским движением с индексом Херста  $H_i$  для любого  $c > 0$ ,  $i = \overline{1, d}$ . Следовательно, при фиксированном  $t \in [0, T]$  имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_0^{t^{N+1}} \dots \int_0^{t^2} \varphi_{I_{N+1}}(X_{t_1}) dB_{t_1}^{(i_1)} \dots dB_{t_N}^{(i_N)} dB_{t_{N+1}}^{(i_{N+1})} = \\ & = \int_0^1 dB_{t^{N+1}}^{(i_{N+1})} \int_0^{t^{N+1}} dB_{t^{N+1}}^{(i_N)} \dots \int_0^{t^2} \varphi_{I_{N+1}}(X_{t_1}) dB_{t_1}^{(i_1)} = \\ & \stackrel{\mathcal{L}}{=} \int_0^1 d\widehat{B}_{t^{N+1}}^{(i_{N+1};t)} \int_0^{t^{N+1}} d\widehat{B}_{t^{N+1}}^{(i_N;t)} \dots \int_0^{t^2} \varphi_{I_{N+1}}\left(\widehat{X}_{t_1}^{(t)}\right) d\widehat{B}_{t_1}^{(i_1;t)} = \\ & = t^{H_{i_1} + \dots + H_{i_{N+1}}} \int_0^1 dB_{t^{N+1}}^{(i_{N+1})} \int_0^{t^{N+1}} dB_{t^{N+1}}^{(i_N)} \dots \int_0^{t^2} \varphi_{I_{N+1}}\left(\widehat{X}_{t_1}^{(t)}\right) dB_{t_1}^{(i_1)}, \end{aligned} \tag{14}$$

где знак  $\stackrel{\mathcal{L}}{=}$  означает совпадение распределений, а  $\widehat{X}_\tau^{(t)}$  – решение уравнения

$$d\widehat{X}_\tau^{(t)} = f\left(\widehat{X}_\tau^{(t)}\right) d\widehat{B}_\tau^{(t)}, \quad \tau \in [0, T], \tag{15}$$

с начальным условием  $\widehat{X}_0^{(t)} = x$ . Аналогично

$$\int_{\Delta^k_{[0,t]}} dB^{(I_k)} \stackrel{\mathcal{L}}{=} t^{|H_{I_k}|} \int_{\Delta^k_{[0,1]}} dB^{(I_k)}, \tag{16}$$

а следовательно, из (13)–(16) получим

$$P_t g(x) = g(x) + \sum_{k=1}^N \sum_{I_k \in \mathbb{N}_{d+1}^k} t^{|H_{I_k}|} \left( D_f^{(I_k)} g \right)(x) \mathbb{E} \left( \int_{\Delta^k_{[0,1]}} dB^{(I_k)} \right) + \mathcal{R}_{N+1}(t), \tag{17}$$

где

$$\begin{aligned} & \mathcal{R}_{N+1}(t) = \\ & = \sum_{I_{N+1} \in \mathbb{N}_{d+1}^{N+1}} \left( t^{|H_{I_{N+1}}|} \mathbb{E} \int_0^1 \int_0^{t^{N+1}} \dots \int_0^{t^2} \left( D_f^{(I_{N+1})} g \right) \left( \widehat{X}_{t_1}^{(t)} \right) dB_{t_1}^{(i_1)} \dots dB_{t_N}^{(i_N)} dB_{t_{N+1}}^{(i_{N+1})} \right). \end{aligned} \tag{18}$$

Поскольку  $|H_{I_{N+1}}| \geq (N+1)H$  для любого  $I_{N+1}$ , то при  $t < 1$  имеем

$$\begin{aligned} & |\mathcal{R}_{N+1}(t)| \leq (d+1)^{N+1} t^{(N+1)H} \times \\ & \times \max_{I_{N+1} \in \mathbb{N}_{d+1}^{N+1}} \mathbb{E} \left| \int_0^1 \int_0^{t^{N+1}} \dots \int_0^{t^2} \left( D_f^{(I_{N+1})} g \right) \left( \widehat{X}_{t_1}^{(t)} \right) dB_{t_1}^{(i_1)} \dots dB_{t_N}^{(i_N)} dB_{t_{N+1}}^{(i_{N+1})} \right|. \end{aligned} \tag{19}$$

Поэтому, учитывая (17)–(19), для завершения доказательства формулы (11) осталось показать, что

$$\mathbb{E} \left| \int_0^1 \int_0^{t^{N+1}} \dots \int_0^{t^2} \left( D_f^{(I_{N+1})} g \right) \left( \widehat{X}_{t_1}^{(t)} \right) dB_{t_1}^{(i_1)} \dots dB_{t_N}^{(i_N)} dB_{t_{N+1}}^{(i_{N+1})} \right| < +\infty \tag{20}$$

для любых  $I_{N+1} = (i_1, \dots, i_{N+1}) \in \mathbb{N}_{d+1}^{N+1}$ .

Соотношение (20) вытекает из предложения 1 и леммы 7.5 из [18]. Теорема доказана.  
Далее рассматриваем уравнение (1)

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t + h(X_t)dW_t, \quad t \in [0, T].$$

Не нарушая общности, будем считать, что процессы  $X_t$ ,  $W_t$ ,  $B_t$  принимают значения в  $d$ -мерном евклидовом пространстве. Будем предполагать, что функции  $b$ ,  $h$ ,  $\sigma$  имеют непрерывные и ограниченные частные производные до второго порядка включительно. Положим  $\tilde{b} = b - \frac{1}{2}h'_x h$ .

Рассмотрим автономное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$dz_t = G(z_t)dt, \quad t \in \mathbb{R},$$

где  $G = \text{col}(G^1, \dots, G^d) \in C_b^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ , и обозначим через  $z_t^y$  единственное решение данного уравнения с начальным условием  $z_0 = 0$ .

Нетрудно видеть, что  $z_t^y = T_G(t)y$ , где  $T_G(t) := e^{tMG}$  –  $C_0$ -полугруппа на  $C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ , порожденная дифференциальным оператором  $M_G : C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \rightarrow C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ , действующим по правилу

$$(M_G w)(y) = \text{col} \left( \sum_{i=1}^d G^i(y) \frac{\partial w^1}{\partial y_i}, \dots, \sum_{i=1}^d G^i(y) \frac{\partial w^d}{\partial y_i} \right),$$

где  $w = \text{col}(w^1, \dots, w^d) \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ ,  $y \in \mathbb{R}^d$ .

**О п р е д е л е н и е 2.** Будем говорить, что семейство отображений  $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A} \subseteq C_b^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$  порождает коммутирующие потоки, если для любых  $\alpha, \beta \in A$  операторы  $T_{G_\alpha}(t_1)$ ,  $T_{G_\beta}(t_2)$  перестановочные для любых  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ .

Обозначим  $\Gamma = \{\tilde{b}\} \cup \{h_j \mid j=1, \dots, d\} \cup \{\sigma_j \mid j=1, \dots, d\}$ . Через  $X_t^y$  будем обозначать решение уравнения (1) с начальным условием  $X_0 = y \in \mathbb{R}^d$ .

Определим функцию  $F : \mathbb{R}^{3d+1} \rightarrow \mathbb{R}^d$  следующим образом:

$$F(y, t, s_1, \dots, s_d, \tau_1, \dots, \tau_d) = (T_{\tilde{b}}(t)T_{h_1}(s_1) \dots T_{h_d}(s_d)T_{\sigma_1}(\tau_1) \dots T_{\sigma_d}(\tau_d))(y),$$

где  $y \in \mathbb{R}^d$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $s_j, \tau_j \in \mathbb{R}$  ( $j=1, \dots, d$ ).

**П р е д л о ж е н и е 2.** Если семейство  $\Gamma$  порождает коммутирующие потоки, то

$$X_t^y = F(y, t, W_t^{(1)}, \dots, W_t^{(d)}, B_t^{(1)}, \dots, B_t^{(d)})$$

*n. n.* для любого  $t \in [0, T]$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Выберем произвольные  $y \in \mathbb{R}$ ,  $t \in [0, T]$  и зафиксируем их. Применяя формулу Ито к процессу  $x^y(t)$ , при этом используя условие коммутирования операторов  $T_\alpha(t_1)$ ,  $T_\beta(t_2)$ ,  $\alpha, \beta \in \Gamma$ ,  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ , получим соотношения

$$\begin{aligned} & F(y, t, W_t^{(1)}, \dots, W_t^{(d)}, B_t^{(1)}, \dots, B_t^{(d)}) = \\ & = F(y, 0, \dots, 0) + \int_0^t \left( \frac{\partial F(y, u, W_u, B_u)}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2 F(y, u, W_u, B_u)}{\partial s_j^2} \right) du + \\ & + \sum_{j=1}^d \int_0^t \frac{\partial F(y, u, W_u, B_u)}{\partial s_j} dW_u^j + \sum_{j=1}^d \int_0^t \frac{\partial F(y, u, W_u, B_u)}{\partial \tau_j} dB_u^j = \\ & = y + \int_0^t b(F(y, u, W_u, B_u)) du + \sum_{j=1}^d \int_0^t h_j(F(y, u, W_u, B_u)) dW_u^j + \sum_{j=1}^d \int_0^t \sigma_j(F(y, u, W_u, B_u)) dB_u^j. \end{aligned}$$

Непрерывность по Гельдеру траекторий процесса  $X_t^y$  вытекает из непрерывной дифференцируемости функции  $F$  и непрерывности по Гельдеру с любым показателем  $\alpha < \min_j H_j$  траекторий процесса  $B_t$ , а также непрерывности по Гельдеру с любым показателем  $\alpha < 1/2$  траекторий процесса  $W_t$ . Предложение доказано.

**Теорема 5.** Пусть семейство  $\Gamma$  порождает коммутирующие потоки, функция  $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  вместе со своими частными производными до второго порядка включительно непрерывна и ограничена. Тогда функция  $u_g(y, t) = \mathbb{E}(g(X_t^y))$  удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_g(y, t)}{\partial t} &= \sum_{j=1}^d b_j(y) \frac{\partial u_g(y, t)}{\partial y_j} + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^d h_{ik}(y) h_{jk}(y) \frac{\partial^2 u_g(y, t)}{\partial y_i \partial y_j} + \\ &+ \sum_{i,j,k=1}^d H_j t^{2H_j-1} \sigma_{ik}(y) \left( \sigma_{jk}(y) \frac{\partial^2 u_g(y, t)}{\partial y_i \partial y_j} + \frac{\partial \sigma_{jk}(y)}{\partial y_i} \frac{\partial u_g(y, t)}{\partial y_j} \right), \quad t > 0, \quad y \in \mathbb{R}^d, \end{aligned}$$

и начальному условию  $u_g(y, 0) = g(y)$ ,  $y \in \mathbb{R}^d$ .

**Доказательство.** Определим функцию  $G_d : \mathbb{R}^{d+1} \rightarrow \mathbb{R}$  следующим образом:

$$G_d(y, \tau_d) = g(T_{\sigma_d}(\tau_d)(y)), \quad y \in \mathbb{R}^d, \quad \tau_d \in \mathbb{R}.$$

Применяя формулу Ито к процессу  $G_d(y, B_t^{(d)})$ , получим соотношение

$$G_d(y, B_t^{(d)}) = G_d(y, 0) + \int_0^t \frac{\partial G_d(y, B_s^{(d)})}{\partial \tau_d} \diamond dB_s^{(d)} + \int_0^t H_d s^{2H_d-1} \frac{\partial^2 G_d(y, B_s^{(d)})}{\partial \tau_d^2} ds, \quad (21)$$

где стохастический интеграл в правой части соотношения (21) – интеграл Вика – Ито – Скорохода.

Как показано в [17], справедливо равенство

$$\frac{\partial^2 G_d(y, \tau_d)}{\partial \tau_d^2} = (M_{\sigma_d}^2 G_d(\cdot, \tau_d))(y). \quad (22)$$

Обозначим  $\psi_d(y, t) = \mathbb{E}G_d(y, B_t^{(d)})$ . Тогда из соотношений (21), (22), теоремы Фубини и правила Лейбница вытекает равенство

$$\psi_d(y, t) = \psi_d(y, 0) + \int_0^t H_d s^{2H_d-1} (M_{\sigma_d}^2 \psi_d(\cdot, s))(y) ds. \quad (23)$$

Из соотношения (23) вытекает справедливость соотношения

$$\frac{\partial \psi_d(\cdot, t)}{\partial t} = H_d t^{2H_d-1} M_{\sigma_d}^2 \psi_d(\cdot, t). \quad (24)$$

Определим функцию  $G_{d-1} : \mathbb{R}^{d+1} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  равенством

$$G_{d-1}(y, \tau_{d-1}, t) = \psi_d(T_{\sigma_{d-1}}(\tau_{d-1})(y), t), \quad y \in \mathbb{R}^d, \quad \tau_{d-1} \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, T].$$

Применяя формулу Ито к процессу  $G_{d-1}(y, B_t^{(d-1)}, t)$ , получим соотношение

$$\begin{aligned} G_{d-1}(y, B_t^{(d-1)}, t) &= G_{d-1}(y, 0, 0) + \int_0^t \frac{\partial G_{d-1}(y, B_s^{(d-1)}, s)}{\partial \tau_{d-1}} \diamond dB_s^{(d-1)} + \\ &+ \int_0^t \left( \frac{\partial G_{d-1}(y, B_s^{(d-1)}, s)}{\partial \tau_d} + H_{d-1} s^{2H_{d-1}-1} \frac{\partial^2 G_{d-1}(y, B_s^{(d-1)}, s)}{\partial \tau_{d-1}^2} \right) ds. \end{aligned} \quad (25)$$

Отметим, что для каждых  $y \in \mathbb{R}^d$ ,  $\tau_{d-1} \in \mathbb{R}$ ,  $s \in [0, T]$  справедливо равенство

$$\frac{\partial^2 G_{d-1}(y, \tau_{d-1}, s)}{\partial \tau_{d-1}^2} = \left( M_{\sigma_{d-1}}^2 G_{d-1}(\cdot, \tau_{d-1}, s) \right)(y). \quad (26)$$

Обозначим  $\psi_{d-1}(y, t) = \mathbb{E}G_{d-1}(y, B_t^{(d-1)}, t)$ , тогда с помощью соотношений (24), (25), (26), теоремы Фубини и правила Лейбница, получаем равенство

$$\psi_{d-1}(y, t) = \psi_{d-1}(y, 0) + \int_0^t \left( H_d s^{2H_d-1} M_{\sigma_d}^2 + H_{d-1} s^{2H_{d-1}-1} M_{\sigma_{d-1}}^2 \right) \psi_{d-1}(\cdot, s)(y) ds. \quad (27)$$

Из соотношения (27) получаем, что

$$\frac{\partial \psi_{d-1}(\cdot, t)}{\partial t} = \left( H_d t^{2H_d-1} M_{\sigma_d}^2 + H_{d-1} t^{2H_{d-1}-1} M_{\sigma_{d-1}}^2 \right) \psi_{d-1}(\cdot, t). \quad (28)$$

Далее рассматриваем функцию  $G_{d-2}(y, \tau_{d-2}, t) = \psi_{d-1}(T_{b_{d-2}}(\tau_{d-2})(y), t)$ , применяем формулу Ито к процессу  $G_{d-2}(y, B_t^{(d-2)}, t)$ , получим уравнение, аналогичное уравнению (28) для функции  $\psi_{d-2}(y, t) = \mathbb{E}G_{d-2}(y, \tau_{d-2}, t)$ , и т. д. Тем самым придем к следующему уравнению для функции  $u_g(y, t) = \mathbb{E}g\left(F(y, t, W_t^{(1)}, \dots, W_t^{(d)}, B_t^{(1)}, \dots, B_t^{(d)})\right)$ :

$$\frac{\partial u_g(\cdot, t)}{\partial t} = \left( M_{\tilde{b}} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d M_{h_j}^2 + \sum_{j=1}^d H_j t^{2H_j-1} M_{\sigma_j}^2 \right) u_g(\cdot, t).$$

Теорема доказана.

Из теоремы 5 настоящей работы и доказательства теоремы 4 из [17] вытекает следующее утверждение.

**Следствие 1.** Пусть семейство  $\Gamma$  порождает коммутирующие потоки, решение  $x_t(y)$  автономного уравнения (1) с начальным условием  $x(0) = y$  имеет плотность распределения  $p(t, y, z)$ , функции  $f(z)$ ,  $g(z)$ ,  $\sigma(z)$ ,  $p(t, y, z)$  являются достаточно гладкими и ограниченными. Тогда функция  $p(t, y, z)$  удовлетворяет равенству

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(t, y, z)}{\partial t} = & - \sum_{j=1}^d \frac{\partial (b_j(z) p(t, y, z))}{\partial z_j} + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^d \frac{\partial^2 (h_{ik}(z) h_{jk}(z) p(t, y, z))}{\partial z_i \partial z_j} + \\ & + \sum_{i,j,k=1}^d H_j t^{2H_j-1} \left( \frac{\partial^2 (\sigma_{ik}(z) \sigma_{jk}(z) p(t, y, z))}{\partial z_i \partial z_j} - \frac{\partial \left( \sigma_{ik}(z) \frac{\partial \sigma_{jk}(z)}{\partial z_i} p(t, y, z) \right)}{\partial z_j} \right), \quad t > 0, \quad y, z \in \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

Рассмотрим модель DTSM для прогнозирования ожидаемых кредитных потерь на примере ипотечных кредитов США, описанную в [24, 18]. Через  $a$ ,  $t$ ,  $v$  будем обозначать соответственно возраст кредита (в месяцах), текущую дату наблюдения и дату открытия кредита. Будем рассматривать вероятности дефолта  $PD$  и закрытия кредита  $PA$  как функции от  $a$ ,  $t$ , а именно:

$$PD(a, t) = \frac{N_{\text{def}}(a, t)}{N_{\text{act}}(a, t-1)}, \quad PA(a, t) = \frac{N_{\text{attr}}(a, t)}{N_{\text{act}}(a, t-1)},$$

где  $N_{\text{act}}$ ,  $N_{\text{def}}$ ,  $N_{\text{attr}}$  – числа активных, дефолтных и закрытых аккаунтов соответственно.

Определим среднюю величину дефолтного баланса:

$$EAD(a, t) = \frac{B_{\text{def}}(a, t)}{N_{\text{def}}(a, t)},$$

где  $B_{\text{def}}$  – суммарный дефолтный баланс.

На первом этапе анализа для каждой из переменных  $PD$ ,  $PA$ ,  $EAD$  вычисляются следующие APC-декомпозиции (Age-Period-Cohort):

$$\text{logit}(PD(a, t)) = F_{PD}(a) + H_{PD}(t) + G_{PD}(v),$$

$$\text{logit}(PA(a, t)) = F_{PA}(a) + H_{PA}(t) + G_{PA}(v),$$

$$\log(EAD(a, t)) = F_{EAD}(a) + H_{EAD}(t) + G_{EAD}(v),$$

где  $\text{logit}(p) = \log\left(\frac{p}{1-p}\right)$  – обратная к логистической функции  $g(z) = \frac{1}{1+e^{-z}}$ ,  $z \in \mathbb{R}$ . В декомпозициях переменных  $PD$ ,  $PA$ ,  $EAD$  функции  $F(a)$  являются жизненными циклами, функции  $H(t)$  выражают влияние макроэкономических факторов, функции  $G(v)$  включают в себя влияние внутренних факторов неэкономического характера.

Второй этап анализа заключается в построении экономических моделей для функций  $H(t)$ . Экономические модели строятся на основе данных по основному макроэкономическим переменным:

$$H(t) = \beta_0 + \sum_{i=1}^N \beta_i f_i(t) + \varepsilon(t),$$

где  $f_i(t)$  ( $i = 1, \dots, N$ ) – некоторый набор макроэкономических факторов;  $\beta_i$  – искомые коэффициенты;  $\varepsilon(t)$  – погрешность.

При моделировании соответствующих переменных функция  $H(t)$  заменяется ее экономическим приближением

$$\hat{H}(t) = \beta_0 + \sum_{i=1}^N \beta_i f_i(t),$$

а функция кредитного риска  $G(v)$  заменяется индивидуальными характеристиками кредитных аккаунтов – скоринговыми факторами (персональный кредитный рейтинг – FICO Score, процентная ставка по кредиту, наличие текущей задолженности и др.).

Модель DTSM позволяет строить оценку текущих ожидаемых кредитных потерь в предположении, что известна экстраполяция функций  $\hat{H}_{PD}(t)$ ,  $\hat{H}_{PA}(t)$ ,  $\hat{H}_{EAD}(t)$  на весь период существования аккаунтов, активных на текущую дату  $t_0$ .

Для нахождения экстраполяций функций  $\hat{H}(t)$  общепринятым является следующий метод [24]. Используя ежегодный краткосрочный прогноз по макроэкономическим показателям, выпускаемый Федеральной резервной системой, осуществляется экстраполяция функции  $\hat{H}(t)$  на двухлетний период начиная с момента начала прогнозирования  $t_0$ . Для получения дальнейшей экстраполяции на период существования аккаунтов, активных на момент  $t_0$ , используется идея возврата к среднему на основе модели Васичека: искомая экстраполяция функции  $\hat{H}(t)$  задается с помощью решения системы уравнений Орнштейна – Уленбека

$$dx(t) = (\theta(\mu - x(t)) + v(t))dt,$$

$$dv(t) = -\theta_1 v(t)dt + \sigma dW(t) + \sigma_1 dB^H(t),$$

где  $\mu$  – долгосрочное среднее;  $\sigma, \sigma_1 > 0$  – коэффициенты волатильности;  $\theta, \theta_1$  – некоторые положительные постоянные,  $\theta \neq \theta_1$ , а  $W(t)$  и  $B^H(t)$  – независимые одномерные стандартное броуновское движение и дробное броуновское движение с индексом Херста  $H > 1/3$ .

Нетрудно видеть, что процесс  $x(t)$ , удовлетворяющий данной системе, задается равенством

$$x(t) = \mu + C_1 e^{-\theta t} + C_2 e^{-\theta_1 t} + \frac{1}{\theta - \theta_1} \int_0^t (e^{-\theta_1(t-s)} - e^{-\theta(t-s)}) dM(s),$$

где  $M(t) = \sigma W(t) + \sigma_1 B^H(t)$ , а интеграл в правой части понимается как потраекторный интеграл Янга. Вычислив математическое ожидание  $x(t)$ , имеем

$$\mathbb{E}(x(t)) = \mu + C_1 e^{-\theta t} + C_2 e^{-\theta_1 t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \mu.$$

Наилучшей оценкой процесса  $x(t)$  является его математическое ожидание  $\hat{x}(t) = \mathbb{E}(x(t))$ . Отметим, что использование уравнений Орнштейна – Уленбека второго порядка позволяет строить гладкие долгосрочные экстраполяции за счет выбора параметров  $C_1, C_2$  (см. [24, 18]). А использование слагаемых, содержащих дробные броуновские движения, приводит к более точным моделям по сравнению с моделями на основе уравнений Орнштейна – Уленбека, содержащих лишь стандартные броуновские движения.

### Список использованных источников

1. Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Applications / F. Biagini [et al.]. – London: Springer-Verlag, 2008. – 330 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-84628-797-8>
2. Cheridito, P. Regularizing fractional Brownian motion with a view towards stock price modeling: a dissertation ... doctor of mathematics / P. Cheridito. – Zurich, 2001. – 121 p.
3. Zahle, M. Integration with respect to fractal functions and stochastic calculus. I / M. Zahle // Probability Theory and Related Fields. – 1998. – Vol. 111, № 3. – P. 333–374. <https://doi.org/10.1007/s004400050171>
4. Mishura, Y. S. Stochastic calculus for fractional Brownian motion and related processes / Y. S. Mishura. – Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. – 398 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-75873-0>
5. Kleptsyna, M. L. General approach to filtering with fractional Brownian noises application to linear systems / M. L. Kleptsyna, A. Le Breton, M.-C. Roubaud // Stochastics and Stochastic Reports. – 2000. – Vol. 71, № 1/2. – P. 119–140. <https://doi.org/10.1080/17442500008834261>
6. Vaskouski, M. Asymptotic expansions of solutions of stochastic differential equations driven by multivariate fractional Brownian motions having Hurst indices greater than 1/3 / M. Vaskouski, I. Kachan // Stochastic Anal. Appl. – 2018. – Vol. 36, № 6. – P. 909–931. <https://doi.org/10.1080/07362994.2018.1483247>
7. Kubilius, K. The existence and uniqueness of the solution of an integral equation driven by a p-semimartingale of special type / K. Kubilius // Stochastic Processes and their Appl. – 2002. – Vol. 98, № 2. – P. 289–315. [https://doi.org/10.1016/s0304-4149\(01\)00145-4](https://doi.org/10.1016/s0304-4149(01)00145-4)
8. Guerra, J. Stochastic differential equations driven by fractional Brownian motion and standard Brownian motion / J. Guerra, D. Nualart // Stochastic Anal. Appl. – 2008. – Vol. 26, № 5. – P. 1053–1075. <https://doi.org/10.1080/07362990802286483>
9. Mishura, Y. S. Existence and uniqueness of the solution of stochastic differential equation involving Wiener process and fractional Brownian motion with Hurst index  $H > 1/2$  / Y. S. Mishura, G. M. Shevchenko // Communications in Statistics – Theory and Methods. – 2011. – Vol. 40, № 19/20. – P. 3492–3508. <https://doi.org/10.1080/03610926.2011.581174>
10. Shevchenko, G. M. Mixed stochastic delay differential equations / G. M. Shevchenko // Theory of Probability and Mathematical Statistics. – 2014. – Vol. 89. – P. 181–195. <https://doi.org/10.1090/s0094-9000-2015-00944-3>
11. Леваков, А. А. Существование слабых решений стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновскими движениями и с разрывными коэффициентами / А. А. Леваков, М. М. Васьковский // Дифференц. уравнения. – 2014. – Т. 50, № 2. – С. 187–200.
12. Леваков, А. А. Существование слабых решений стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновскими движениями, с разрывными коэффициентами и с частично вырожденным оператором диффузии / А. А. Леваков, М. М. Васьковский // Дифференц. уравнения. – 2014. – Т. 50, № 8. – С. 1060–1076.
13. Васьковский, М. М. Существование слабых решений стохастических дифференциальных уравнений с запаздыванием со стандартным и дробным броуновскими движениями / М. М. Васьковский // Вес. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2015. – № 1. – С. 22–34.
14. Леваков, А. А. Существование решений стохастических дифференциальных включений со стандартным и дробным броуновскими движениями / А. А. Леваков, М. М. Васьковский // Дифференц. уравнения. – 2015. – Т. 51, № 8. – С. 997–1003.
15. Леваков, А. А. Свойства решений стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновскими движениями / А. А. Леваков, М. М. Васьковский // Дифференц. уравнения. – 2016. – Т. 52, № 8. – С. 1011–1019.
16. Васьковский, М. М. Устойчивость и притяжение решений нелинейных стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновскими движениями / М. М. Васьковский // Дифференц. уравнения. – 2017. – Т. 53, № 2. – С. 160–173.
17. Васьковский, М. М. Методы интегрирования стохастических дифференциальных уравнений смешанного типа, управляемых дробными броуновскими движениями / М. М. Васьковский, И. В. Качан // Вес. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2019. – Т. 55, № 2. – С. 135–151. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-2-135-151>

18. Леваков, А. А. Стохастические дифференциальные уравнения и включения / А. А. Леваков, М. М. Васильковский. – Минск: БГУ, 2019. – 495 с.
19. Lyons, T. Differential equations driven by rough signals / T. Lyons // *Revista Matematica Iberoamericana*. – 1998. – Vol. 14, № 2. – P. 215–310. <https://doi.org/10.4171/rmi/240>
20. Gubinelli, M. Controlling rough paths / M. Gubinelli // *J. Functional Anal.* – 2004. – Vol. 216, № 1. – P. 86–140. <https://doi.org/10.1016/j.jfa.2004.01.002>
21. Friz, P. A Course on Rough Paths with an Introduction to Regularity Structures / P. Friz, M. Hairer. – Cham: Springer Int. Publ. AG, 2014. – 262 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-08332-2>
22. Trees and asymptotic expansions for fractional stochastic differential equations / A. Neuenkirch [et al.] // *Annales de l'Institut Henri Poincaré (B) Probability and Statistics*. – 2009. – Vol. 45, № 1. – P. 157–174. <https://doi.org/10.1214/07-aihp159>
23. Coutin, L. Stochastic analysis, rough path analysis and fractional Brownian motions / L. Coutin, Z. Qian // *Probability Theory Related Fields*. – 2002. – Vol. 122, № 1. – P. 108–140. <https://doi.org/10.1007/s004400100158>
24. Breeden, J. L. Living with CECL: Mortgage modeling alternatives / J. L. Breeden. – Middletown, 2018. – 203 p.

## References

1. Biagini F., Hu Y., Oksendal B., Zhang T. *Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Applications*. London, Springer-Verlag, 2008. 330 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-84628-797-8>
2. Cheridito P. *Regularizing Fractional Brownian Motion with a View Towards Stock Price Modeling*. Zurich, ETH, 2001. 121 p.
3. Zähle M. Integration with respect to fractal functions and stochastic calculus. I. *Probability Theory and Related Fields*, 1998, vol. 111, no. 3, pp. 333–374. <https://doi.org/10.1007/s004400050171>
4. Mishura Y. S. *Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Related Processes*. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 2008. 411 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-75873-0>
5. Kleptsyna M. L., Le Breton A., Roubaud M.-C. General approach to filtering with fractional Brownian noises application to linear systems. *Stochastics and Stochastic Reports*, 2000, vol. 71, no. 1–2, pp. 119–140. <https://doi.org/10.1080/17442500008834261>
6. Vaskouski M., Kachan I. Asymptotic expansions of solutions of stochastic differential equations driven by multivariate fractional Brownian motions having Hurst indices greater than 1/3. *Stochastic Analysis and Applications*, 2018, vol. 36, no. 6, pp. 909–931. <https://doi.org/10.1080/07362994.2018.1483247>
7. Kubilius K. The existence and uniqueness of the solution of an integral equation driven by a p-semimartingale of special type. *Stochastic Processes and their Applications*, 2002, vol. 98, no. 2, pp. 289–315. [https://doi.org/10.1016/s0304-4149\(01\)00145-4](https://doi.org/10.1016/s0304-4149(01)00145-4)
8. Guerra J., Nualart D. Stochastic differential equations driven by fractional Brownian motion and standard Brownian motion. *Stochastic Analysis and Applications*, 2008, vol. 26, no. 5, pp. 1053–1075. <https://doi.org/10.1080/07362990802286483>
9. Mishura Y. S., Shevchenko G. M. Existence and uniqueness of the solution of stochastic differential equation involving Wiener process and fractional Brownian motion with Hurst index  $H > 1/2$ . *Communications in Statistics – Theory and Methods*, 2011, vol. 40, no. 19–20, pp. 3492–3508. <https://doi.org/10.1080/03610926.2011.581174>
10. Shevchenko G. M. Mixed stochastic delay differential equations. *Theory of Probability and Mathematical Statistics*, 2014, vol. 89, pp. 181–195. <https://doi.org/10.1090/s0094-9000-2015-00944-3>
11. Levakov A. A., Vas'kovskii M. M. Existence of weak solutions of stochastic differential equations with standard and fractional Brownian motions and with discontinuous coefficients. *Differential Equations*, 2014, vol. 50, no. 2, pp. 189–202. <https://doi.org/10.1134/s0012266114020062>
12. Levakov A. A., Vas'kovskii M. M. Existence of weak solutions of stochastic differential equations with standard and fractional Brownian motion, discontinuous coefficients, and a partly degenerate diffusion operator. *Differential Equations*, 2014, vol. 50, no. 8, pp. 1053–1069. <https://doi.org/10.1134/s0012266114080059>
13. Vas'kovskii M. M. Existence of weak solutions of stochastic delay differential equations driven by standard and fractional Brownian motions. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2015, no. 1, pp. 22–34 (in Russian).
14. Levakov A. A., Vas'kovskii M. M. Existence of solutions of stochastic differential inclusions with standard and fractional Brownian motions. *Differential Equations*, 2015, vol. 51, no. 8, pp. 991–997. <https://doi.org/10.1134/s0012266115080030>
15. Levakov A. A., Vas'kovskii M. M. Properties of solutions of stochastic differential equations with standard and fractional Brownian motions. *Differential Equations*, 2016, vol. 52, no. 8, pp. 972–980. <https://doi.org/10.1134/s0012266116080024>
16. Vas'kovskii M. M. Stability and attraction of solutions of nonlinear stochastic differential equations with standard and fractional Brownian motions. *Differential Equations*, 2017, vol. 53, no. 2, pp. 157–170. <https://doi.org/10.1134/s0012266117020021>
17. Vas'kovskii M. M., Kachan I. V. Integration methods of mixed-type stochastic differential equations with fractional Brownian motions. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2019, vol. 55, no. 2, pp. 135–151 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-2-135-151>

18. Levakov A. A., Vas'kovskii M. M. *Stochastic Differential Equations and Inclusions*. Minsk, BSU, 2019. 495 p. (in Russian).
19. Lyons T. Differential equations driven by rough signals. *Revista Matemática Iberoamericana*, 1998, vol. 14, no. 2, pp. 215–310. <https://doi.org/10.4171/rmi/240>
20. Gubinelli M. Controlling rough paths. *Journal of Functional Analysis*, 2004, vol. 216, no. 1, pp. 86–140. <https://doi.org/10.1016/j.jfa.2004.01.002>
21. Friz P., Hairer M. *A Course on Rough Paths with an Introduction to Regularity Structures*. Cham: Springer International Publishing AG, 2014. 262 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-08332-2>
22. Neuenkirch A., Nourdin I., Robler A., Tindel S. Trees and asymptotic expansions for fractional stochastic differential equations. *Annales de l'Institut Henri Poincaré (B) Probability and Statistics*, 2009, vol. 45, no. 1, pp. 157–174. <https://doi.org/10.1214/07-aihp159>
23. Coutin L., Qian Z. Stochastic analysis, rough path analysis and fractional Brownian motions. *Probability Theory Related Fields*, 2002, vol. 122, no. 1, pp. 108–140. <https://doi.org/10.1007/s004400100158>
24. Breeden J. L. *Living with CECL: Mortgage modeling alternatives*. Middletown, 2018. 203 p.

### Информация об авторе

**Васьковский Максим Михайлович** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: [vaskovskii@bsu.by](mailto:vaskovskii@bsu.by). <https://orcid.org/0000-0001-5769-3678>

### Information about the author

**Maksim M. Vas'kovskii** – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: [vaskovskii@bsu.by](mailto:vaskovskii@bsu.by). <https://orcid.org/0000-0001-5769-3678>

ISSN 1561-2430 (Print)

ISSN 2524-2415 (Online)

УДК 517.988,519.63,519.65

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-1-51-71>

Поступила в редакцию 10.01.2020

Received 10.01.2020

**М. В. Игнатенко<sup>1</sup>, Л. А. Янович<sup>2</sup>**<sup>1</sup>*Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь*<sup>2</sup>*Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь*

## О ТОЧНОМ И ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИЯХ ОТДЕЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ВАРИАЦИОННЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКОВ

**Аннотация.** Рассматривается проблема точного и приближенного решений отдельных дифференциальных уравнений с вариационными производными первого и второго порядков. Приведены некоторые сведения о вариационных производных и явные формулы точных решений простейших уравнений с первыми вариационными производными. Демонстрируется интерполяционный метод для решения обыкновенных дифференциальных уравнений с вариационными производными. Представлена общая схема приближенного решения задачи Коши для нелинейных дифференциальных уравнений с вариационными производными первого порядка, основанная на использовании аппарата операторного интерполирования. Получено точное решение дифференциального уравнения гиперболического типа с вариационными производными, аналогичное классическому решению Даламбера. Рассмотрена эрмитова интерполяционная задача для функционалов, определенных на множествах дифференцируемых функций, с условиями совпадения в узлах интерполируемого и интерполяционного функционалов, а также их вариационных производных первого и второго порядков. Найденное явное представление решения данной интерполяционной задачи основано на произвольной чебышевской системе функций. Оно обобщено на случай интерполирования функционалов по одной из двух переменных и применено для построения приближенного решения задачи Коши для дифференциального уравнения гиперболического типа с вариационными производными. Изложение материала иллюстрируется многочисленными примерами.

**Ключевые слова:** вариационная производная, дифференциал Гато, задача Коши, формула Даламбера, операторное интерполирование эрмитова типа

**Для цитирования.** Игнатенко, М. В. О точном и приближенном решениях отдельных дифференциальных уравнений с вариационными производными первого и второго порядков / М. В. Игнатенко, Л. А. Янович // Вест. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2020. – Т. 56, № 1. – С. 51–71. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-1-51-71>

**Marina V. Ignatenko<sup>1</sup>, Leonid A. Yanovich<sup>2</sup>**<sup>1</sup>*Belarusian State University, Minsk, Belarus*<sup>2</sup>*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus*

## ON THE EXACT AND APPROXIMATE SOLUTIONS OF SEVERAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH VARIATIONAL DERIVATIVES OF THE FIRST AND SECOND ORDERS

**Abstract.** In this paper, we consider the problem of the exact and approximate solutions of certain differential equations with variational derivatives of the first and second orders. Some information about the variational derivatives and explicit formulas for the exact solutions of the simplest equations with the first variational derivatives are given. An interpolation method for solving ordinary differential equations with variational derivatives is demonstrated. The general scheme of an approximate solution of the Cauchy problem for nonlinear differential equations with variational derivatives of the first order, based on the use of the operator interpolation apparatus, is presented. The exact solution of the differential equation of the hyperbolic type with variational derivatives, similar to the classical D'Alembert solution, is obtained. The Hermite interpolation problem with the conditions of coincidence in the nodes of the interpolated and interpolation functionals, as well as their variational derivatives of the first and second orders, is considered for functionals defined on the sets of differentiable functions. The found explicit representation of the solution of the given interpolation problem is based on an arbitrary Chebyshev system of functions. This solution is generalized for the case of interpolation of functionals on one out of two variables and applied to construct an approximate solution of the Cauchy problem for the differential equation of the hyperbolic type with variational derivatives. The description of the material is illustrated by numerous examples.

**Keywords:** variational derivative, Gateaux differential, Cauchy problem, D'Alembert formula, operator interpolation of Hermite type

**For citation.** Ignatenko M. V., Yanovich L. A. On the exact and approximate solutions of several differential equations with variational derivatives of the first and second orders. *Vestsi Natsyional'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2020, vol. 56, no. 1, pp. 51–71 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-1-51-71>

**Введение.** Теория уравнений с вариационными (функциональными) производными – достаточно обширная область математики. Данный класс уравнений имеет многочисленные приложения в статистической физике, квантовой теории поля, гидромеханике и других областях.

Теория вариационных производных, дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений с вариационными производными достаточно полно изложена, например, в монографиях [1–3] и работах [4–10].

В теории дифференциальных уравнений с вариационными производными формулируются и исследуются задачи, аналогичные рассматриваемым проблемам в случае обыкновенных и дифференциальных уравнений с частными производными. Явные формулы решений уравнений с вариационными производными известны лишь в немногих случаях. Это относится, главным образом, к множеству линейных уравнений [5–8], поэтому основными методами их решения являются приближенные.

Проблема приближенного решения уравнений с вариационными производными недостаточно исследована. При решении такого класса задач может оказаться полезным применение методов, которые учитывали бы заданные начальные и граничные значения. В частности, в задаче Коши для уравнения  $n$ -го порядка искомый функционал  $F(x)$  может быть приближенно найден по известным в точке  $x_0(t)$  значениям функционала  $F(x_0)$  и его вариационных производных до  $(n - 1)$ -го порядка. Для этого естественно использовать аппарат операторного интерполирования [11, 12]. Далее будет предложен один из методов приближенного решения уравнений с вариационными производными, основанный на интерполяции входящего в уравнение функционала.

**Некоторые сведения о вариационных производных.** Приведем определение [9] вариационной производной от функционалов, заданных на множествах функций.

Пусть  $X$  – линейное пространство вещественных функций, определенных на отрезке  $[a, b]$  действительной оси  $\mathbb{R}$ , а  $F$  – заданный на  $X$  оператор или функционал.

Дифференциал Гато  $\delta F[x; h]$  отображения  $F$  в точке  $x \in X$  по направлению  $h \in X$  определяется равенством

$$\delta F[x; h] = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{F(x + \lambda h) - F(x)}{\lambda} = \left. \frac{dF(x + \lambda h)}{d\lambda} \right|_{\lambda=0}.$$

Если дифференциал  $\delta F[x; h]$  допускает представление в виде

$$\delta F[x; h] = \int_a^b a(x; t) h(t) dt,$$

где  $a(x; t)$  – некоторая функция, зависящая от  $x = x(s)$  и переменной  $t$ , то ее называют вариационной производной первого порядка функционала  $F(x)$  по  $x$  в точке  $t$  и обозначают символом  $\frac{\delta F(x)}{\delta x(t)}$ .

Отметим, что имеется некоторая аналогия процесса вычисления вариационной производной с операцией дифференцирования скалярных функций. Например, если  $F(x) \equiv \text{const}$ , то  $\frac{\delta F(x)}{\delta x(t)} \equiv 0$ ;

далее

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta x(t)} \{F_1(x) + F_2(x)\} &= \frac{\delta F_1(x)}{\delta x(t)} + \frac{\delta F_2(x)}{\delta x(t)}; & \frac{\delta}{\delta x(t)} \{F_1(x)F_2(x)\} &= \frac{\delta F_1(x)}{\delta x(t)} F_2(x) + \frac{\delta F_2(x)}{\delta x(t)} F_1(x); \\ \frac{\delta}{\delta x(t)} \left( \frac{1}{F(x)} \right) &= -\frac{1}{F^2(x)} \frac{\delta F(x)}{\delta x(t)}, & F(x) &\neq 0. \end{aligned}$$

Дифференциал Гато  $k$ -го порядка ( $k \in \mathbb{N}$ )  $\delta^k F[x; h_1, h_2, \dots, h_k]$  отображения  $F$  в точке  $x \in X$  по направлениям  $h_1, h_2, \dots, h_k \in X$  определяется равенством

$$\delta^k F[x; h_1, h_2, \dots, h_k] = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\delta^{k-1} F[x + \lambda h_k; h_1, h_2, \dots, h_{k-1}] - \delta^{k-1} F[x; h_1, h_2, \dots, h_{k-1}]}{\lambda} =$$

$$= \left. \frac{\partial^k F(x + \lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2 + \dots + \lambda_k h_k)}{\partial \lambda_k \cdots \partial \lambda_1} \right|_{\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0}, \quad \delta^0 F[x] \equiv F(x).$$

При  $h_1 = h_2 = \dots = h_k \equiv h \in X$  дифференциал Гато  $k$ -го порядка

$$\delta^k F \left[ x; \underbrace{h, h, \dots, h}_{k \text{ раз}} \right] \equiv \delta^k F[x; h] = \left. \frac{d^k F(x + \lambda h)}{d\lambda^k} \right|_{\lambda=0}.$$

Если существует дифференциал Гато  $k$ -го порядка  $\delta^k F[x; h_1, h_2, \dots, h_k]$  ( $x, h_i \in X; i = 1, 2, \dots, k$ ) функционала  $F(x)$  в точке  $x \in X$  по направлениям  $h_1, h_2, \dots, h_k \in X$ , который можно представить в виде

$$\delta^k F[x; h_1, h_2, \dots, h_k] = \int_{[a,b]^k} a(x; t_1, \dots, t_k) h_1(t_1) \dots h_k(t_k) dt_1 \dots dt_k, \tag{1}$$

где  $a(x; t_1, \dots, t_k)$  – некоторая функция, зависящая от  $x = x(s)$  и переменных  $t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}$ , то  $a(x; t_1, \dots, t_k)$  называют вариационной производной  $k$ -го порядка функционала  $F(x)$  по  $x$  в точке  $t = (t_1, t_2, \dots, t_k)$  и обозначают символом  $\frac{\delta^k F(x)}{\delta x(t_1) \cdots \delta x(t_k)}$ .

В качестве  $X$  можно выбрать пространство  $C[a, b]$  непрерывных функций с равномерной нормой, гильбертово пространство  $L_2[a, b]$  или любое другое пространство, такое, чтобы интеграл в правой части (1) имел смысл. Вычислим вариационные производные от некоторых простейших функционалов.

**Пример 1.** Если  $F(x) = \int_a^b p(t) f[x(t)] dt$ , то  $\frac{\delta F(x)}{\delta x(t)} = p(t) f'[x(t)]$ . Действительно, для дифференциала Гато рассматриваемого функционала имеем

$$\delta F[x; h] = \left. \frac{d}{d\lambda} \int_a^b p(t) f[x(t) + \lambda h(t)] dt \right|_{\lambda=0} = \int_a^b p(t) f'[x(t) + \lambda h(t)] h(t) dt \Big|_{\lambda=0} = \int_a^b p(t) f'[x(t)] h(t) dt,$$

следовательно, вариационная производная  $\frac{\delta F(x)}{\delta x(t)} = p(t) f'[x(t)]$ .

Используя определение первой вариационной производной, несложно заполнить следующую таблицу.

Таблица

№	Функционал	Вариационная производная
1	$F(x) = \int_a^b x(t) dt$	$\frac{\delta F(x)}{\delta x(t)} \equiv 1$
2	$F(x) = \int_a^b p(t) x(t) dt$	$\frac{\delta F(x)}{\delta x(t)} = p(t)$
3	$F(x) = \int_a^b p(t) [\alpha x(t) + \beta] dt$	$\frac{\delta F(x)}{\delta x(t)} = \alpha p(t)$
4	$F(x) = \int_a^b p(t) x^2(t) dt$	$\frac{\delta F(x)}{\delta x(t)} = 2p(t)x(t)$
5	$F(x) = \int_a^b p(t) e^{x(t)} dt$	$\frac{\delta F(x)}{\delta x(t)} = p(t) e^{x(t)}$

Окончание табл.

№	Функционал	Вариационная производная
6	$F(x) = \int_a^b p(t) \sin x(t) dt$	$\frac{\delta F(x)}{\delta x(t)} = p(t) \cos x(t)$
7	$F(x) = \int_a^b p(t) \cos x(t) dt$	$\frac{\delta F(x)}{\delta x(t)} = -p(t) \sin x(t)$
8	$F(x) = \int_a^b p(t) \alpha^{x(t)} dt$	$\frac{\delta F(x)}{\delta x(t)} = p(t) \alpha^{x(t)} \ln \alpha$
9	$F(x) = \int_a^b p(t) f[x(t)] dt$	$\frac{\delta F(x)}{\delta x(t)} = p(t) f'[x(t)]$
10	$F(x) = \sum_{k=0}^n \int_a^b p_k(t) x^k(t) dt$	$\frac{\delta F(x)}{\delta x(t)} = \sum_{k=1}^n k p_k(t) x^{k-1}(t)$
11	$F(x) = \sum_{k=0}^n \left[ \int_a^b p_k(t) x(t) dt \right]^k$	$\frac{\delta F(x)}{\delta x(t)} = \sum_{k=1}^n k p_k(t) \left[ \int_a^b p_k(t) x(t) dt \right]^{k-1}$

Пример 2. Если  $F(x) = \int_a^b \int_a^b K(s_1, s_2) x(s_1) x(s_2) ds_1 ds_2$ , где, например,  $x \in L_2[a, b]$ ,  $K: [a, b]^2 \rightarrow \mathbb{R}$  – непрерывная функция своих аргументов, то

$$\begin{aligned} \left. \frac{dF(x + \lambda h_1)}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} &= \left. \frac{d}{d\lambda} \int_a^b \int_a^b K(s_1, s_2) (x(s_1) + \lambda h_1(s_1)) (x(s_2) + \lambda h_1(s_2)) ds_1 ds_2 \right|_{\lambda=0} = \\ &= \int_a^b \int_a^b K(s_1, s_2) [h_1(s_1)(x(s_2) + \lambda h_1(s_2)) + h_1(s_2)(x(s_1) + \lambda h_1(s_1))] ds_1 ds_2 \Big|_{\lambda=0} = \\ &= \int_a^b \int_a^b K(s_1, s_2) [h_1(s_1)x(s_2) + h_1(s_2)x(s_1)] ds_1 ds_2 = \int_a^b \int_a^b K(s_1, s_2) x(s_1) h_1(s_2) ds_1 ds_2 + \\ &\quad + \int_a^b \int_a^b K(s_1, s_2) x(s_2) h_1(s_1) ds_1 ds_2. \end{aligned}$$

Итак, первая функциональная производная

$$\frac{\delta F(x)}{\delta x(t)} = \int_a^b K(s_1, t) x(s_1) ds_1 + \int_a^b K(t, s_2) x(s_2) ds_2.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\lambda} \left\{ \int_a^b \int_a^b K(s_1, s_2) ([x(s_1) + \lambda h_2(s_1)] h_1(s_2) + [x(s_2) + \lambda h_2(s_2)] h_1(s_1)) ds_1 ds_2 \right\} \right|_{\lambda=0} = \\ = \int_a^b \int_a^b K(s_1, s_2) (h_2(s_1) h_1(s_2) + h_2(s_2) h_1(s_1)) ds_1 ds_2 \end{aligned}$$

и, следовательно,  $\frac{\delta^2 F(x)}{\delta x(t_1) \delta x(t_2)} = K(t_1, t_2) + K(t_2, t_1)$  или же  $\frac{\delta^2 F(x)}{\delta x(t_1) \delta x(t_2)} = 2K(t_1, t_2)$  при условии, что  $K(s_1, s_2)$  – симметричная функция своих аргументов.

Отметим, что имеются и другие определения производных этого вида для функционалов  $F(x)$ , определенных на пространствах функций (см., напр., [9, 10]).

**Явные формулы точных решений отдельных дифференциальных уравнений с вариационными производными.** Приведем примеры точного решения некоторых простейших уравнений с первыми вариационными производными.

Пример 3. Очевидно, что решение уравнения  $\frac{\delta F(x)}{\delta x(t)} = p(t) \cos x(t)$  имеет вид  $F(x) = \int_0^1 p(t) \sin x(t) dt$ . Этот же функционал является решением уравнения  $\frac{\delta F^2(x)}{\delta x(t)} = 2F(x)p(t) \cos x(t)$ . Действительно, так как

$$\begin{aligned} \delta F^2[x; h] &= \frac{d}{d\lambda} \left[ \int_0^1 p(t) \sin(x(t) + \lambda h(t)) dt \right]_{\lambda=0}^2 = \\ &= 2 \int_0^1 p(t) \sin(x(t) + \lambda h(t)) dt \int_0^1 p(t) \cos(x(t) + \lambda h(t)) h(t) dt \Big|_{\lambda=0} = \\ &= 2 \int_0^1 p(t) \sin x(t) dt \int_0^1 p(t) \cos x(t) h(t) dt, \end{aligned}$$

то  $\frac{\delta F^2(x)}{\delta x(t)} = 2 \int_0^1 p(t) \sin x(t) dt p(t) \cos x(t) = 2F(x)p(t) \cos x(t)$ . Заметим, что  $\frac{\delta F^2(x)}{\delta x(t)} = 2F(x) \frac{\delta F(x)}{\delta x(t)}$ .

Пример 4. Если функционал  $F(x) = \int_0^1 p(t) \cos x(t) dt$ , то он является решением уравнения  $\frac{\delta F^2(x)}{\delta x(t)} = -2F(x)p(t) \sin x(t)$ . Доказательство этого факта аналогично рассуждению, приведенному в примере 3.

Пример 5. Функционал  $F(x) = \int_0^{2\pi} p(t) \sin x(t) dt$  является решением уравнения

$$\frac{\delta F(x)}{\delta x(t)} = \frac{\delta F^3(x)}{\delta x(t)} - (3F^2(x) - 1)p(t) \cos x(t).$$

Для доказательства этого факта покажем, что значение  $\frac{\delta F^3(x)}{\delta x(t)} = 3F^2(x)p(t) \cos x(t)$ . Поскольку дифференциал Гаго

$$\begin{aligned} \delta F^3[x; h] &= \frac{d}{d\lambda} \left[ \int_0^{2\pi} p(t) \sin(x(t) + \lambda h(t)) dt \right]_{\lambda=0}^3 = \\ &= 3 \left[ \int_0^{2\pi} p(t) \sin(x(t) + \lambda h(t)) dt \right]_{\lambda=0}^2 \int_0^{2\pi} p(t) \cos(x(t) + \lambda h(t)) h(t) dt \Big|_{\lambda=0} = \\ &= 3 \left[ \int_0^{2\pi} p(t) \sin x(t) dt \right]^2 \int_0^{2\pi} p(t) \cos x(t) h(t) dt, \end{aligned}$$

то вариационная производная  $\frac{\delta F^3(x)}{\delta x(t)} = 3F^2(x)p(t) \cos x(t)$  и верно равенство  $\frac{\delta F^3(x)}{\delta x(t)} = 3F^2(x) \frac{\delta F(x)}{\delta x(t)}$ .

Пример 6. Функционал  $F(x) = \int_0^{2\pi} p(t) \sin x(t) dt$  является решением уравнения

$$\frac{\delta F^n(x)}{\delta x(t)} = nF^{n-1}(x)p(t) \cos x(t).$$

Действительно, так как дифференциал Гато

$$\begin{aligned}\delta F^n[x; h] &= \frac{d}{d\lambda} \left[ \int_0^1 p(t) \sin(x(t) + \lambda h(t)) dt \right] \Bigg|_{\lambda=0}^n = \\ &= n \left[ \int_0^1 p(t) \sin(x(t) + \lambda h(t)) dt \right]^{n-1} \int_0^1 p(t) \cos(x(t) + \lambda h(t)) h(t) dt \Bigg|_{\lambda=0} = \\ &= n \left[ \int_0^1 p(t) \sin x(t) dt \right]^{n-1} \int_0^1 p(t) \cos x(t) h(t) dt = n F^{n-1}(x) \int_0^1 p(t) \cos x(t) h(t) dt,\end{aligned}$$

то вариационная производная  $\frac{\delta F^n(x)}{\delta x(t)} = n F^{n-1}(x) p(t) \cos x(t)$ , при этом справедливо равенство

$$\frac{\delta F^n(x)}{\delta x(t)} = n F^{n-1}(x) \frac{\delta F(x)}{\delta x(t)}.$$

Пример 7. Непосредственными вычислениями несложно убедиться, что функционал

$$F(x) = \int_a^b \left[ p_0(t) e^{x(t)} + p_1(t) \sin x(t) - p_2(t) \cos(t) + \frac{1}{2} p_3(t) x^2(t) \right] dt + \frac{1}{2} \left( \int_a^b p_4(\tau) x(\tau) d\tau \right)^2$$

является решением уравнения

$$\frac{\delta F(x)}{\delta x(t)} = p_0(t) e^{x(t)} + p_1(t) \cos x(t) + p_2(t) \sin(t) + p_3(t) x(t) + p_4(t) \int_a^b p_4(\tau) x(\tau) d\tau.$$

Пример 8. Функционал  $F(x) = \sum_{k=0}^n \int_a^b p_k(t) x^k(t) dt$  является решением уравнения

$$\frac{\delta F(x)}{\delta x(t)} = \sum_{k=1}^n k p_k(t) x^{k-1}(t), \text{ так как дифференциал Гато}$$

$$\begin{aligned}\delta F[x; h] &= \frac{d}{d\lambda} \sum_{k=0}^n \int_a^b p_k(t) [x(t) + \lambda h(t)]^k dt \Bigg|_{\lambda=0} = \\ &= \sum_{k=1}^n k \int_a^b p_k(t) [x(t) + \lambda h(t)]^{k-1} h(t) dt \Bigg|_{\lambda=0} = \sum_{k=1}^n k \int_a^b p_k(t) x^{k-1}(t) h(t) dt\end{aligned}$$

и вариационная производная  $\frac{\delta F(x)}{\delta x(t)} = \sum_{k=1}^n k p_k(t) x^{k-1}(t)$ .

Пример 9. Функционал  $F(x) = \sum_{k=0}^n J^k(k; x)$ , где  $J(k; x) = \int_a^b p_k(t) x(t) dt$ , является решением уравнения  $\frac{\delta F(x)}{\delta x(t)} = \sum_{k=1}^n k p_k(t) J^{k-1}(k; x)$ .

Поскольку

$$\delta F[x; h] = \frac{d}{d\lambda} \sum_{k=0}^n \left( \int_a^b p_k(t) [x(t) + \lambda h(t)] dt \right)^k \Bigg|_{\lambda=0} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=1}^n k \left( \int_a^b p_k(t) [x(t) + \lambda h(t)] dt \right)^{k-1} \int_a^b p_k(t) h(t) dt \Big|_{\lambda=0} = \\
 &= \sum_{k=1}^n k \left( \int_a^b p_k(t) x(t) dt \right)^{k-1} \int_a^b p_k(t) h(t) dt = \sum_{k=1}^n k J^{k-1}(k; x) \int_a^b p_k(t) h(t) dt,
 \end{aligned}$$

то  $\frac{\delta F(x)}{\delta x(t)} = \sum_{k=1}^n k p_k(t) J^{k-1}(k; x)$ .

**Интерполяционные формулы с двукратными узлами, содержащие первые вариационные производные.** Приведем некоторые интерполяционные формулы типа Эрмита и Эрмита – Биркгофа для аппроксимации функционалов, входящих в уравнения с вариационными производными первого порядка, с целью нахождения приближенного решения таких уравнений.

Пусть на  $[a, b]$  заданы узлы интерполирования  $x_0 = x_0(t)$  и  $x_1 = x_1(t)$  – функции из некоторого множества  $X$ , такие, что  $x_0(t) - x_1(t) \neq 0$  для  $t \in [a, b]$ . Введем обозначения

$$\begin{aligned}
 h_{1,0}(x) &= \frac{(x-x_1)^2}{(x_0-x_1)^3} [x_0-x_1+2(x_0-x)], & h_{1,1}(x) &= \frac{(x-x_0)^2}{(x_1-x_0)^3} [x_1-x_0+2(x_1-x)], \\
 q_{1,0}(x) &= \frac{(x-x_1)^2}{(x_0-x_1)^2} (x-x_0), & q_{1,1}(x) &= \frac{(x-x_0)^2}{(x_1-x_0)^2} (x-x_1).
 \end{aligned} \tag{2}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться [13], что для оператора

$$\begin{aligned}
 H_3(F; x) &= \frac{1}{b-a} \left\{ F(x_0) \int_a^b h_{1,0}(x(t)) dt + F(x_1) \int_a^b h_{1,1}(x(t)) dt \right\} + \\
 &+ \int_a^b \frac{\delta F(x_0)}{\delta x(t)} q_{1,0}(x(t)) dt + \int_a^b \frac{\delta F(x_1)}{\delta x(t)} q_{1,1}(x(t)) dt
 \end{aligned} \tag{3}$$

выполняются следующие интерполяционные условия Эрмита для двух двукратных узлов:

$$H_3(F; x_v) = F(x_v), \quad \frac{\delta H_3(F; x_v)}{\delta x(t)} = \frac{\delta F(x_v)}{\delta x(t)} \quad (v = 0, 1). \tag{4}$$

Ниже приведем формулу, аналогичную (3), для случая трех двукратных узлов  $x_0 = x_0(t)$ ,  $x_1 = x_1(t)$  и  $x_2 = x_2(t)$  из некоторого функционального пространства  $X$ , таких, что разность  $x_i(t) - x_j(t) \neq 0$  при  $i \neq j$  и  $t \in [a, b]$ . Для этого введем следующие алгебраические функционалы:

$$\begin{aligned}
 q_{2,0}(x) &= \left[ \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \right]^2 (x-x_0), & q_{2,1}(x) &= \left[ \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \right]^2 (x-x_1), \\
 q_{2,2}(x) &= \left[ \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \right]^2 (x-x_2).
 \end{aligned} \tag{5}$$

Заметим, что значение  $q_{2,i}(x_j) = 0$  ( $i, j = 0, 1, 2$ ) для многочленов (5), а для дифференциалов Гато функционалов  $q_{2,i}(x)$  в узле  $x_i$  справедливы равенства  $\delta q_{2,i}[x_i; h] = h$ , при этом в узлах  $x_j$ , отличных от  $x_i$ , они обращаются в нуль, т. е.  $\delta q_{2,i}[x_j; h] = \delta_{ij} h$ , где  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера,  $h \in X$ .

Далее нам понадобятся кубические алгебраические многочлены

$$h_{2,0}(x) = \left[ \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \right]^2 - 2 \left( \frac{1}{x_0-x_1} + \frac{1}{x_0-x_2} \right) q_{2,0},$$

$$h_{2,1}(x) = \left[ \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \right]^2 - 2 \left( \frac{1}{x_1-x_0} + \frac{1}{x_1-x_2} \right) q_{2,1},$$

$$h_{2,2}(x) = \left[ \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \right]^2 - 2 \left( \frac{1}{x_2-x_0} + \frac{1}{x_2-x_1} \right) q_{2,2}. \quad (6)$$

Несложно убедиться, что многочлены (6) удовлетворяют равенствам  $h_{2,i}(x_j) = \delta_{ij}$ , а дифференциалы Гато  $\delta h_{2,i}[x_j; h] = 0$  ( $i, j = 0, 1, 2$ ).

Из вышеизложенного следует, что для алгебраического функционала

$$H_5(F; x) = \frac{1}{b-a} \sum_{k=0}^2 F(x_k) \int_a^b h_{2,k}(x(t)) dt + \sum_{k=0}^2 \int_a^b \frac{\delta F(x_k)}{\delta x(t)} q_{2,k}(x(t)) dt$$

в узлах  $x_i = x_i(t)$  ( $i = 0, 1, 2$ ) справедливы интерполяционные условия

$$H_5(F; x_i) = F(x_i), \quad \frac{\delta H_5(F; x_i)}{\delta x(t)} = \frac{\delta F(x_i)}{\delta x(t)} \quad (i = 0, 1, 2).$$

**Пример 10.** Рассмотрим [13] частный случай формулы (3). Пусть  $F(x)$  – дифференциальный оператор вида

$$F(x) = \int_a^b f[t, x(t), x'(t)] dt, \quad (7)$$

где  $f: [a, b] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x(t) \in X$ , а  $X$  – пространство  $C^{(1)}[a, b]$  непрерывно дифференцируемых на  $[a, b]$  функций.

Дифференциал Гато первого порядка в точке  $x$  по направлению  $h \in X$  от функционала (7) имеет вид

$$\delta F[x; h] = \int_a^b \left[ f'_x(t, x, x') - \frac{d}{dt} f'_{x'}(t, x, x') \right] h(t) dt.$$

Отсюда следует, что вариационная производная  $\frac{\delta F(x)}{\delta x(t)}$  равна  $\frac{\delta F(x)}{\delta x(t)} = \frac{\partial f(t, x, x')}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f(t, x, x')}{\partial x'}$  и совпадает с левой частью уравнения Эйлера.

Интерполяционная формула (3) для рассматриваемого функционала примет вид

$$H_3(F; x) = \frac{1}{b-a} \left[ F(x_0) \int_a^b h_{1,0}(x(t)) dt + F(x_1) \int_a^b h_{1,1}(x(t)) dt \right] +$$

$$+ \int_a^b \left[ \frac{\partial f(t, x_0, x'_0)}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f(t, x_0, x'_0)}{\partial x'} \right] q_{1,0}(x(t)) dt + \int_a^b \left[ \frac{\partial f(t, x_1, x'_1)}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f(t, x_1, x'_1)}{\partial x'} \right] q_{1,1}(x(t)) dt,$$

где функции  $h_{1,0}(x)$ ,  $h_{1,1}(x)$ ,  $q_{1,0}(x)$  и  $q_{1,1}(x)$  задаются правилами (2). Для многочлена  $H_3(F; x)$  и оператора (7) интерполяционные условия (4) также выполняются.

Далее введем обозначения

$$g_{1,0}(x) = \frac{(x-x_0)(x+x_0-2x_1)}{2(x_0-x_1)}, \quad g_{1,1}(x) = \frac{(x-x_0)^2}{2(x_1-x_0)},$$

где  $x$  и  $x_i$  ( $i = 0, 1$ ) – элементы некоторого функционального пространства  $X$ , например,  $C[a, b]$ . Заметим, что  $g_{1,0}(x_0) = g_{1,1}(x_0) = 0$ , а для дифференциалов Гато функционалов  $g_{1,0}(x)$  и  $g_{1,1}(x)$

в узлах  $x_0$  и  $x_1$  справедливы равенства  $\delta g_{1,i}[x_j; h] = \delta_{ij} h$  ( $i, j = 0, 1$ ), где  $\delta_{ij}$ , как и ранее, – символ Кронекера,  $h \in X$ .

Непосредственными вычислениями несложно убедиться, что для оператора

$$H_2(F; x) = F(x_0) + \int_a^b \frac{\delta F(x_0)}{\delta x(t)} g_{1,0}(x(t)) dt + \int_a^b \frac{\delta F(x_1)}{\delta x(t)} g_{1,1}(x(t)) dt, \quad (8)$$

где  $F(x)$  – заданный на  $X$  функционал, выполняются следующие интерполяционные условия Эрмита – Биркгофа:

$$H_2(F; x_0) = F(x_0), \quad \frac{\delta H_2(F; x_v)}{\delta x(t)} = \frac{\delta F(x_v)}{\delta x(t)} \quad (v = 0, 1).$$

**О задаче Коши для уравнений с вариационными производными первого порядка.** Применим некоторые из приведенных интерполяционных формул для приближенного решения задачи Коши отдельных дифференциальных уравнений с первыми вариационными производными.

Сначала рассмотрим следующую простейшую задачу Коши:

$$\frac{\delta F(x)}{\delta x(t)} = f(x; t), \quad F(x_0) = F_0. \quad (9)$$

Заметим, что  $F(x)$  для заданного функционала  $f(x; t)$  является его первообразной. Точным решением этой задачи будет функционал

$$F(x) = F_0 + \int_0^1 ds \int_a^b f(s(x - x_0) + x_0; t) (x(t) - x_0(t)) dt,$$

так как для него дифференциал Гато задается формулой  $\delta F[x; h] = \int_a^b f(x; t) h(t) dt$ .

Поскольку

$$F(x_0) = F_0, \quad \frac{\delta F(x_k)}{\delta x(t)} = f(x_k; t) \quad (k = 0, 1),$$

то, используя формулу (8), получим приближенное решение задачи Коши (9) в виде

$$F(x) \approx H_2(F; x) = F_0 + \int_a^b f(x_0; t) g_{1,0}(x(t)) dt + \int_a^b f(x_1; t) g_{1,1}(x(t)) dt,$$

для которого выполняются равенства

$$H_2(F; x_0) = F_0, \quad \frac{\delta H_2(F; x_0)}{\delta x(t)} = f(x_0; t), \quad \frac{\delta H_2(F; x_1)}{\delta x(t)} = f(x_1; t).$$

Далее, в случае решения линейного уравнения с функциональными производными первого порядка вида

$$\frac{\delta F(x)}{\delta x(t)} = P(x; t)F(x) + Q(x; t)$$

с условием  $F(x_0) = F_0$  на основе правила (8) получим

$$F(x) \approx H_2(F; x) = F_0 + \int_a^b [P(x_0; t)F_0 + Q(x_0; t)] g_{1,0}(x(t)) dt + \int_a^b [P(x_1; t)F(x_1) + Q(x_1; t)] g_{1,1}(x(t)) dt = F_0 a_0(x) + F(x_1) a_1(x) + c(x), \quad (10)$$

где функционалы  $a_0(x)$ ,  $a_1(x)$  и  $c(x)$  определяются равенствами

$$a_0(x) = 1 + \int_a^b P(x_0; t) g_{1,0}(x(t)) dt, \quad a_1(x) = \int_a^b P(x_1; t) g_{1,1}(x(t)) dt,$$

$$c(x) = \int_a^b [Q(x_0; t) g_{1,0}(x(t)) + Q(x_1; t) g_{1,1}(x(t))] dt.$$

В формуле (10) значение  $F(x_1)$  неизвестно. Подставляя в эту формулу  $x_1$  вместо  $x$ , получим, что  $F_1 = F_0 a_0(x_1) + F_1 a_1(x_1) + c(x_1)$ , где  $F_1 \approx F(x_1)$ . Отсюда, в предположении, что значение  $1 - a_1(x_1) \neq 0$ , имеем

$$F_1 = \frac{F_0 a_0(x_1) + c(x_1)}{1 - a_1(x_1)}. \quad (11)$$

Далее, подставив в формулу (10) значение  $F_1$  вместо  $F(x_1)$ , для  $F(x)$  получим приближение

$$F(x) \approx \tilde{F}(x) = F_0 a_0(x) + \frac{F_0 a_0(x_1) + c(x_1)}{1 - a_1(x_1)} a_1(x) + c(x),$$

при этом  $\tilde{F}(x_0) = F(x_0)$ ,  $\tilde{F}(x_1) \approx F(x_1)$ .

Отметим, что интегралы в равенствах (8) и (9) могут быть вычислены приближенно с помощью каких-либо квадратурных формул.

Пример 11. Рассмотрим линейное уравнение

$$\frac{\delta F(x)}{\delta x(t)} = \frac{e^{x(t)} \sin x(t)}{\int_0^1 e^{x(t)} \sin x(t) dt} F(x) + e^{x(t)} \cos x(t), \quad x \in C[0,1], \quad (12)$$

с начальным условием

$$F_0 = F(1) = e \sin 1. \quad (13)$$

Точное решение этого уравнения задается правилом  $F(x) = \int_0^1 e^{x(t)} \sin x(t) dt$ . Действительно, так как дифференциал  $\delta F[x; h] = \int_0^1 e^{x(t)} [\sin x(t) + \cos x(t)] h(t) dt$ , то  $\frac{\delta F(x)}{\delta x(t)} = e^{x(t)} [\sin x(t) + \cos x(t)]$ .

Подставляя выражение для функционала  $F(x)$  и его вариационной производной  $\frac{\delta F(x)}{\delta x(t)}$  в формулу (12), получим тождество. Кроме того, очевидно, что функционал  $F(x)$  удовлетворяет указанному выше начальному условию (13).

Найдем приближенное решение задачи Коши (12)–(13), используя формулу (10). В качестве узлов интерполяции выберем функции  $x_0(t) = 1$  и  $x_1(t) = t$ . Так как  $P(x; t) = \frac{e^{x(t)} \sin x(t)}{\int_0^1 e^{x(t)} \sin x(t) dt}$ ,

а  $Q(x; t) = e^{x(t)} \cos x(t)$ , то

$$P(x_0; t) = 1, \quad P(x_1; t) = \frac{2e^t \sin t}{1 - e(\cos 1 - \sin 1)}, \quad Q(x_0; t) = e \cos 1, \quad Q(x_1; t) = e^t \cos t,$$

и, следовательно,

$$a_0(x) = 1 + \int_0^1 g_{1,0}(x(t)) dt, \quad a_1(x) = \int_0^1 \frac{2e^t \sin t}{1 - e(\cos 1 - \sin 1)} g_{1,1}(x(t)) dt,$$

$$c(x) = \int_0^1 [e \cos 1 g_{1,0}(x(t)) + e^t \cos t g_{1,1}(x(t))] dt,$$

где операторы  $g_{1,0}(x(t))$  и  $g_{1,1}(x(t))$  для заданных узлов  $x_0(t)$  и  $x_1(t)$  определяются формулами

$$g_{1,0}(x) = \frac{(x(t) - 1)(x(t) - 2t + 1)}{2(1 - t)}, \quad g_{1,1}(x) = \frac{(x(t) - 1)^2}{2(t - 1)}.$$

Сначала вычислим значения функционалов  $a_0(x)$ ,  $a_1(x)$  и  $c(x)$  в узле  $x_1 = x_1(t) = t$ . Поскольку  $g_{1,0}(x_1(t)) = g_{1,1}(x_1(t)) = \frac{t - 1}{2}$ , имеем

$$a_0(x_1) = 1 + \int_0^1 \frac{t - 1}{2} dt = \frac{3}{4}, \quad a_1(x_1) = \int_0^1 \frac{e^t \sin t (t - 1)}{1 - e(\cos 1 - \sin 1)} dt = \frac{0,5e \cos 1 - 1}{1 - e(\cos 1 - \sin 1)},$$

$$c(x_1) = \frac{1}{2} \int_0^1 (e \cos 1 + e^t \cos t)(t - 1) dt = \frac{1 - e(\cos 1 + \sin 1)}{4}.$$

Далее найдем приближенное значение  $F(x_1)$  согласно правилу (11):

$$F(x_1) \approx F_1 = \frac{F_0 a_0(x_1) + c(x_1)}{1 - a_1(x_1)} = \frac{(e(2 \sin 1 - \cos 1) + 1)}{2(4 - e(3 \cos 1 - 2 \sin 1))} (1 - e(\cos 1 - \sin 1)).$$

Следовательно, для искомого приближенного решения задачи Коши (12)–(13) справедливо представление в виде

$$F(x) \approx \tilde{F}(x) = e \sin 1 + e(\sin 1 + \cos 1) \int_0^1 g_{1,0}(x(t)) dt + \int_0^1 \left[ \frac{e(2 \sin 1 - \cos 1) + 1}{4 - e(3 \cos 1 - 2 \sin 1)} \sin t + \cos t \right] e^t g_{1,1}(x(t)) dt. \quad (14)$$

Используя формулу (14), вычислим приближенное значение функционала  $F(x)$  в точке  $x(t) = t^{3/5}$ . Первый интеграл в равенстве (14) вычисляется точно, но имеет достаточно громоздкое аналитическое выражение. Второй интеграл в равенстве (14) возможно вычислить приближенно на основе некоторой квадратурной формулы. Приближенные значения рассматриваемых интегралов с точностью до последнего приведенного разряда равны

$$I_1 = \int_0^1 g_{1,0}(x(t)) dt \approx -0,232491;$$

$$I_2 = \int_0^1 \left[ \frac{e(2 \sin 1 - \cos 1) + 1}{4 - e(3 \cos 1 - 2 \sin 1)} \sin t + \cos t \right] e^t g_{1,1}(x(t)) dt \approx -0,239137.$$

Следовательно, приближенное значение  $F(x)$  при  $x(t) = t^{3/5}$  равно

$$F(t^{3/5}) \approx \tilde{F}(t^{3/5}) = e \sin 1 + e(\sin 1 + \cos 1) I_1 + I_2 \approx 1,17497.$$

Учитывая, что точное значение этого функционала в заданной точке (с точностью до последнего приведенного разряда) вычисляется по формуле

$$F(t^{3/5}) = \int_0^1 e^{t^{3/5}} \sin t^{3/5} dt \approx 1,18755,$$

для абсолютной погрешности приближения получим следующую оценку:

$$\left| F(t^{3/5}) - \tilde{F}(t^{3/5}) \right| \leq 0,01258.$$

Далее заметим, что более общей проблемой по сравнению с задачей Коши (9) является совокупность дифференциального уравнения

$$\frac{\delta F(x)}{\delta x(t)} = f(F, x; t) \quad (15)$$

с заданным начальным условием  $F(x_0) = F_0$ , где  $f(y_1, y_2; t)$  – функция трех переменных:  $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ ,  $t \in [a, b]$ . В частности, функциональным аналогом уравнения Риккати называют равенство

$$\frac{\delta F(x)}{\delta x(t)} = P(x; t)F^2(x) + Q(x; t)F(x) + R(x; t).$$

В заключение этого раздела приведем описание общей схемы приближенного решения нелинейного уравнения (15), основанной на использовании аппарата операторного интерполирования.

Предположим, что для функций  $f(y_1, y_2; t)$  известны решения  $F_\nu(x)$  уравнения (15) в точках  $x_\nu(t)$  ( $\nu = 0, 1, \dots, n$ ). Из этого уравнения определяем значение вариационной производной  $\frac{\delta F(x_\nu)}{\delta x(t)}$  в точках  $x_\nu(t)$  ( $\nu = 0, 1, \dots, n$ ).

По найденным значениям строим интерполяционный операторный многочлен  $H_n(F; x)$ , для которого выполняются условия

$$H_n(F; x_k) = F(x_k), \quad \frac{\delta H_n(F; x_k)}{\delta x(t)} = \frac{\delta F(x_k)}{\delta x(t)} \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

Полученный по данной схеме оператор  $H_n(F; x)$  является эрмитовым интерполяционным приближением для решения  $F(x)$  уравнения (15).

Отметим, что приведенные здесь интерполяционные формулы применимы и в случае, когда функция  $x(t)$  и узлы интерполирования  $x_k(t)$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) являются случайными процессами. Например, в формуле (8) в качестве  $x_0(t)$  и  $x_1(t)$  могут быть выбраны случайные процессы  $x_0(t) = \alpha_0(t) + \beta(t)W(t)$ ,  $x_1(t) = \alpha_1(t) + \beta(t)W(t)$ , где  $\alpha_0(t)$ ,  $\alpha_1(t)$ ,  $\beta(t)$  – детерминированные функции и  $\alpha_0(t) \neq \alpha_1(t)$ ,  $W(t)$  – стандартный винеровский процесс.

**Аналог классической формулы Даламбера для уравнения с вариационными производными.** В математической физике простейшим уравнением гиперболического типа является уравнение свободных колебаний однородной струны (волновое уравнение) с частными производными второго порядка относительно функции двух независимых переменных:

$$\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} = 0 \quad (a \neq 0, t \in \mathbb{R}_+, x \in \mathbb{R}). \quad (16)$$

К его исследованию приводит рассмотрение процессов поперечных колебаний струны, продольных колебаний стержня, электрических колебаний в проводе, крутильных колебаний вала, колебаний газа и т. д. Предварительно приведем некоторые сведения об этом уравнении.

Общим решением (общим интегралом) уравнения (16) является функция

$$u(t, x) = f_1(x + at) + f_2(x - at), \tag{17}$$

каковы бы ни были дважды дифференцируемые на  $\mathbb{R}$  функции  $f_1(s)$  и  $f_2(s)$ . Формулу (17) называют формулой Даламбера, или решением Даламбера.

Совокупность уравнения (16) и начальных условий

$$u(0, x) = \varphi_0(x), \quad \left. \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_1(x) \quad (x \in \mathbb{R}), \tag{18}$$

где  $\varphi_0(x)$  и  $\varphi_1(x)$  – некоторые заданные на  $\mathbb{R}$  функции, приводит к задаче Коши для неограниченной струны. Если  $x \in [0, l]$ , то рассматривается аналогичная задача Коши для конечной струны. Формула

$$u(t, x) = \frac{1}{2}[\varphi_0(x - at) + \varphi_0(x + at)] + t \int_0^1 \varphi_1(2ats + x - at) ds$$

дает классическое решение корректно поставленной задачи Коши (16), (18) в предположении, что функция  $\varphi_1(x)$  имеет непрерывно дифференцируемую производную первого порядка, а  $\varphi_0(x)$  – непрерывно дифференцируемая функция до второго порядка включительно.

Аналогом с вариационными производными для уравнения колебания однородной струны (16) является уравнение

$$\frac{\delta^2 F(x, y)}{\delta x(t) \delta x(s)} - a(t)a(s) \frac{\delta^2 F(x, y)}{\delta y(t) \delta y(s)} = 0 \quad (x = x(u) \geq 0, y = y(u), a(u) \neq 0; u \in [a, b] \subseteq \mathbb{R}). \tag{19}$$

Получим решение дифференциального уравнения с вариационными производными (19), аналогичное классическому решению Даламбера (17).

**Теорема 1.** *Общее решение уравнения (19) представимо в виде*

$$F(x, y) = f_1 \left[ \int_a^b (y(u) + a(u)x(u)) du \right] + f_2 \left[ \int_a^b (y(u) - a(u)x(u)) du \right], \tag{20}$$

где  $f_1(u)$  и  $f_2(u)$  – любые дважды дифференцируемые на  $\mathbb{R}$  функции.

**Доказательство.** Для доказательства теоремы 1 сначала вычислим  $\delta_x \tilde{F}[(x, y); h]$  – частный дифференциал Гато первого порядка по переменной  $x$  от функционала  $\tilde{F}(x, y) = f \left[ \int_a^b (y(u) \pm a(u)x(u)) du \right]$  двух переменных  $x$  и  $y$ . По определению

$$\begin{aligned} \delta_x \tilde{F}[(x, y); h] &= \left. \frac{\partial \tilde{F}(x + \lambda h, y)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} = \left. \frac{\partial}{\partial \lambda} f \left[ \int_a^b (y(u) \pm a(u)(x(u) + \lambda h(u))) du \right] \right|_{\lambda=0} = \\ &= \pm f' \left[ \int_a^b (y(u) \pm a(u)(x(u) + \lambda h(u))) du \right] \Big|_{\lambda=0} \int_a^b a(t)h(t) dt = \\ &= \pm f' \left[ \int_a^b (y(u) \pm a(u)x(u)) du \right] \int_a^b a(t)h(t) dt = \int_a^b \pm a(t) f' \left[ \int_a^b (y(u) \pm a(u)x(u)) du \right] h(t) dt. \end{aligned}$$

Отметим, что первая вариационная производная  $\frac{\delta \tilde{F}(x, y)}{\delta x(t)}$  в этом случае имеет вид

$$\frac{\delta \tilde{F}(x, y)}{\delta x(t)} = \pm a(t) f' \left[ \int_a^b (y(u) \pm a(u)x(u)) du \right].$$

Далее вычислим частный дифференциал Гато второго порядка  $\delta_{x,x}^2 \tilde{F}[(x, y); h, h_1]$ . Снова согласно определению получим

$$\begin{aligned} \delta_{x,x}^2 \tilde{F}[(x, y); h, h_1] &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \delta_x \tilde{F}[(x + \lambda h_1, y); h] \Big|_{\lambda=0} = \\ &= \pm \frac{\partial}{\partial \lambda} f' \left[ \int_a^b (y(u) \pm a(u)(x(u) + \lambda h_1(u))) du \right] \int_a^b a(t)h(t)dt \Big|_{\lambda=0} = \\ &= f'' \left[ \int_a^b (y(u) \pm a(u)(x(u) + \lambda h_1(u))) du \right] \int_a^b a(t)h(t)dt \int_a^b a(s)h_1(s)ds \Big|_{\lambda=0} = \\ &= f'' \left[ \int_a^b (y(u) \pm a(u)x(u)) du \right] \int_a^b a(t)h(t)dt \int_a^b a(s)h_1(s)ds = \\ &= \int_a^b \int_a^b f'' \left[ \int_a^b (y(u) \pm a(u)x(u)) du \right] a(t)a(s)h(t)h_1(s)dt ds. \end{aligned}$$

Следовательно, вторая вариационная производная  $\frac{\delta^2 \tilde{F}(x, y)}{\delta x(t)\delta x(s)}$  задается формулой

$$\frac{\delta^2 \tilde{F}(x, y)}{\delta x(t)\delta x(s)} = f'' \left[ \int_a^b (y(u) \pm a(u)x(u)) du \right] a(t)a(s).$$

Аналогично вычислим частный дифференциал Гато первого порядка  $\delta_y \tilde{F}[(x, y); h]$  по переменной  $y$  от функционала  $\tilde{F}(x, y)$ . Имеем

$$\begin{aligned} \delta_y \tilde{F}[(x, y); h] &= \frac{\partial \tilde{F}(x, y + \lambda h)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0} = \frac{\partial}{\partial \lambda} f \left[ \int_a^b (y(u) + \lambda h(u) \pm a(u)x(u)) du \right] \Big|_{\lambda=0} = \\ &= f' \left[ \int_a^b (y(u) + \lambda h(u) \pm a(u)x(u)) du \right] \int_a^b h(t)dt \Big|_{\lambda=0} = \int_a^b f' \left[ \int_a^b (y(u) \pm a(u)x(u)) du \right] h(t)dt. \end{aligned}$$

Значит, первая вариационная производная  $\frac{\delta \tilde{F}(x, y)}{\delta y(t)}$  определяется по правилу

$$\frac{\delta \tilde{F}(x, y)}{\delta y(t)} = f' \left[ \int_a^b (y(u) \pm a(u)x(u)) du \right].$$

Для частного дифференциала Гато второго порядка  $\delta_{y,y}^2 \tilde{F}[(x, y); h, h_1]$  получим

$$\begin{aligned} \delta_{y,y}^2 \tilde{F}[(x, y); h, h_1] &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \delta_y \tilde{F}[(x, y + \lambda h_1); h] \Big|_{\lambda=0} = \\ &= \frac{\partial}{\partial \lambda} f' \left[ \int_a^b (y(u) + \lambda h_1(u) \pm a(u)x(u)) du \right] \int_a^b h(t)dt \Big|_{\lambda=0} = \\ &= f'' \left[ \int_a^b (y(u) + \lambda h_1(u) \pm a(u)x(u)) du \right] \int_a^b h(t)dt \int_a^b h_1(s)ds \Big|_{\lambda=0} = \\ &= \int_a^b \int_a^b f'' \left[ \int_a^b (y(u) \pm a(u)x(u)) du \right] a(t)a(s)h(t)h_1(s)dt ds. \end{aligned}$$

Следовательно, вторая вариационная производная

$$\frac{\delta^2 \tilde{F}(x, y)}{\delta y(t) \delta y(s)} = f'' \left[ \int_a^b (y(u) \pm a(u)x(u)) du \right],$$

откуда

$$\frac{\delta^2 \tilde{F}(x, y)}{\delta x(t) \delta x(s)} = a(t)a(s) \frac{\delta^2 \tilde{F}(x, y)}{\delta y(t) \delta y(s)}.$$

Вычисления, приведенные выше, позволяют утверждать, что функционал (20) представляет собой решение дифференциального уравнения с вариационными производными (19) и является аналогом классической формулы Даламбера (17). Теорема 1 доказана.

В каждом конкретном случае функции  $f_1(s)$  и  $f_2(s)$  в равенстве (20) выбираются так, чтобы выполнялись начальные (и граничные) условия для решения  $F(x, y)$  дифференциального уравнения (19).

**Интерполяционные формулы с трехкратными узлами, содержащие вариационные производные.** Рассмотрим интерполяционную задачу Эрмита с трехкратными узлами для функционалов, определенных на множествах дифференцируемых функций. При этом в постановке интерполяционной задачи потребуем совпадения в узлах интерполируемого и интерполяционного функционалов, а также их вариационных производных первого и второго порядков. Решение аналогичной задачи Эрмита в случае двукратных узлов было получено авторами в работе [13].

Пусть на множестве функций  $X = C[a, b]$  или  $X = L_2[a, b]$  определен функционал  $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ , для которого известны значения  $F(x_v)$ , значения первых  $\frac{\delta F(x_v)}{\delta x(t)}$ , а также значения вторых вариационных производных  $\frac{\delta^2 F(x_v)}{\delta x(t) \delta x(s)}$  в узлах  $\{x_v(u)\}_{v=0}^n \in X$  ( $u \in [a, b]$ ). Требуется построить интерполяционный многочлен  $H_{3n+2}(F; x) : X \rightarrow \mathbb{R}$ , удовлетворяющий условиям

$$H_{3n+2}(F; x_v) = F(x_v), \tag{21}$$

$$\frac{\delta H_{3n+2}(F; x_v)}{\delta x(t)} = \frac{\delta F(x_v)}{\delta x(t)}, \tag{22}$$

$$\frac{\delta^2 H_{3n+2}(F; x_v)}{\delta x(t) \delta x(s)} = \frac{\delta^2 F(x_v)}{\delta x(t) \delta x(s)}, \tag{23}$$

где  $v = 0, 1, \dots, n$ .

Через  $H_{0k}(x)$ ,  $H_{1k}(x)$  и  $H_{2k}(x)$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) обозначим фундаментальные многочлены относительно произвольной чебышевской системы функций  $\{\varphi_j(u)\}_{j=0}^{3n+2} \in X$  в интерполяционной формуле Эрмита с трехкратными узлами  $x_v \in X$  ( $v = 0, 1, \dots, n$ ). Эти многочлены удовлетворяют условиям  $H_{0k}(x_v) = H'_{1k}(x_v) = H''_{2k}(x_v) = \delta_{kv}$ ,  $H'_{0k}(x_v) = H''_{0k}(x_v) = 0$ ,  $H_{1k}(x_v) = H''_{1k}(x_v) = 0$ ,  $H_{2k}(x_v) = H'_{2k}(x_v) = 0$  ( $k, v = 0, 1, \dots, n$ ), где  $\delta_{kv}$  – символ Кронекера, а соответствующая формула Эрмита для скалярных функций, удовлетворяющая интерполяционным условиям

$$H_{3n+2}(F; x_k) = F(x_k), \quad H'_{3n+2}(F; x_k) = F'(x_k), \quad H''_{3n+2}(F; x_k) = F''(x_k) \quad (k = 0, 1, \dots, n),$$

имеет вид

$$H_{3n+2}(F; x) = \sum_{k=0}^n \{F(x_k)H_{0k}(x) + F'(x_k)H_{1k}(x) + F''(x_k)H_{2k}(x)\}.$$

Получим аналог этой формулы для случая функционалов.

Теорема 2. Если для  $F(x)$  выполнены условия

$$\frac{\delta^2 F(x_\nu)}{\delta x(t)\delta x(s)} = \frac{\delta^2 F(x_\nu)}{\delta x(s)\delta x(t)} \quad (\nu = 0, 1, \dots, n), \quad (24)$$

то функционал

$$\begin{aligned} H_{3n+2}(F; x) = & \frac{1}{b-a} \sum_{k=0}^n F(x_k) \int_a^b H_{0k}(x(t)) dt + \sum_{k=0}^n \int_a^b \frac{\delta F(x_k)}{\delta x(t)} H_{1k}(x(t)) dt + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \int_a^b \int_a^b \frac{\delta^2 F(x_k)}{\delta x(t)\delta x(s)} H'_{2k}(x(t)) H_{1k}(x(s)) dt ds \end{aligned} \quad (25)$$

является для  $F(x)$  эрмитовым интерполяционным многочленом относительно узлов третьей кратности  $\{x_k(t)\}_{k=0}^n$  на  $X$ , удовлетворяющим требованиям (21)–(23).

Доказательство. Так как  $H_{0k}(x_\nu) = \delta_{k\nu}$ , а  $H_{1k}(x_\nu) = H_{2k}(x_\nu) = 0$  для  $k, \nu = 0, 1, \dots, n$ , то

$$H_{3n+2}(F; x_\nu) = \sum_{k=0}^n F(x_k) \delta_{k\nu} = F(x_\nu) \quad (\nu = 0, 1, \dots, n),$$

т. е. справедливы равенства (21).

Для доказательства соотношений (22) вычислим значения в узлах первых вариационных производных для выражений, стоящих в правой части (25).

Отметим, что дифференциал Гато первого порядка в точке  $x$  по направлению  $h \in X$  функционала

$$g_{n,k}(x) = \frac{1}{b-a} \int_a^b H_{0k}(x(t)) dt$$

вычисляется по правилу

$$\delta g_{n,k}[x; h] = \frac{1}{b-a} \int_a^b \frac{d}{dx} [H_{0k}(x(t))] h(t) dt.$$

Следовательно, первая вариационная производная от этого функционала задается равенством

$$\frac{\delta g_{n,k}(x)}{\delta x(t)} = \frac{H'_{0k}(x)}{b-a}.$$

Поскольку  $H'_{0k}(x_\nu) = 0$  для  $k, \nu = 0, 1, \dots, n$ , то при  $x = x_\nu$  производная  $\frac{\delta}{\delta x(t)}$  от первой группы слагаемых в правой части (25) равна нулю.

Далее, производная

$$\frac{\delta}{\delta x(t)} \int_a^b \frac{\delta F(x_k)}{\delta x(t)} H_{1k}(x(t)) dt = \frac{\delta F(x_k)}{\delta x(t)} H'_{1k}(x),$$

причем  $H'_{1k}(x_\nu) = \delta_{k\nu}$  для  $k, \nu = 0, 1, \dots, n$ . Следовательно, при  $x = x_\nu$  вариационная производная  $\frac{\delta}{\delta x(t)}$  от второй группы слагаемых равна

$$\sum_{k=0}^n \frac{\delta F(x_k)}{\delta x(t)} \delta_{k\nu} = \frac{\delta F(x_\nu)}{\delta x(t)}.$$

Производная  $\frac{\delta}{\delta x(t)}$  от третьей группы слагаемых вычисляется по формуле

$$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \frac{\delta}{\delta x(t)} \int_a^b \int_a^b \frac{\delta^2 F(x_k)}{\delta x(t) \delta x(s)} \{H_{2k}''(x(t))H_{1k}(x(s)) + H_{2k}'(x(t))H_{1k}'(x(s))\} dt ds.$$

С учетом равенств  $H_{1k}(x_v) = H_{2k}'(x_v) = 0$ , справедливых для значений  $k, v = 0, 1, \dots, n$ , получим, что при  $x = x_v$  рассматриваемая производная равна нулю. Таким образом, приходим к соотношениям (22).

Для проверки условий (23) вычислим дифференциал Гато второго порядка  $\delta^2 H_{3n+2}[x; h_1, h_2]$ . Имеем

$$\begin{aligned} \delta^2 H_{3n+2}[x; h_1, h_2] = & \frac{1}{b-a} \sum_{k=0}^n F(x_k) \int_a^b H_{0k}''(x(t)) h_1(t) h_2(t) dt + \\ & + \sum_{k=0}^n \int_a^b \frac{\delta F(x_k)}{\delta x(t)} H_{1k}''(x(t)) h_1(t) h_2(t) dt + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \int_a^b \int_a^b \frac{\delta^2 F(x_k)}{\delta x(t) \delta x(s)} \times \\ & \times \{H_{2k}''(x(t))H_{1k}(x(s))h_1(t)h_2(s) + H_{2k}''(x(t))H_{1k}'(x(s))h_1(t)h_2(s) + \\ & + H_{2k}'(x(t))H_{1k}(x(s))h_1(s)h_2(t) + H_{2k}'(x(t))H_{1k}'(x(s))h_1(s)h_2(s)\} dt ds. \end{aligned}$$

Если  $x = x_v$ , то  $H_{0k}''(x_v) = H_{1k}''(x_v) = H_{1k}(x_v) = 0$ ,  $H_{2k}''(x_v) = H_{1k}'(x_v) = \delta_{kv}$  и

$$\delta^2 H_{3n+2}[x_v; h_1, h_2] = \frac{1}{2} \int_a^b \int_a^b \frac{\delta^2 F(x_v)}{\delta x(t) \delta x(s)} h_1(t) h_2(s) dt ds + \frac{1}{2} \int_a^b \int_a^b \frac{\delta^2 F(x_k)}{\delta x(t) \delta x(s)} h_1(s) h_2(t) dt ds.$$

Отсюда, учитывая свойство (24), приходим к равенствам (23). Теорема 2 доказана.

В частности, фундаментальные многочлены Эрмита относительно узлов  $\{x_v(u)\}_{v=0}^n \in X$  третьей кратности в случае алгебраической системы функций  $\{\varphi_j(u) = x^j(u)\}_{j=0}^{3n+2} \in X$  имеют вид

$$\begin{aligned} H_{0k}(x) = l_k^3(x) \left[ 1 - \frac{3\omega_n''(x_k)}{2\omega_n'(x_k)}(x-x_k) + \left\{ \frac{3[\omega_n''(x_k)]^2}{2[\omega_n'(x_k)]^2} - \frac{\omega_n'''(x_k)}{2\omega_n'(x_k)} \right\} (x-x_k)^2 \right], \\ H_{1k}(x) = l_k^3(x) \left[ 1 - \frac{3\omega_n''(x_k)}{2\omega_n'(x_k)}(x-x_k) \right] (x-x_k), \quad H_{2k}(x) = \frac{1}{2} l_k^3(x) (x-x_k)^2, \end{aligned}$$

где

$$l_k(x) = \frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_k)(x-x_k)}, \quad \omega_n(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n);$$

$$x = x(u), \quad x_k = x_k(u) \quad (k = 0, 1, \dots, n); \quad x_i(u) \neq x_j(u), \quad i \neq j; \quad u \in [a, b].$$

Отсюда, в случае единственного узла интерполирования  $x_0(u) \in X$ , получим

$$n = 0, \quad \omega_0(x) = x - x_0, \quad l_0(x) = H_{00}(x) \equiv 1, \quad H_{10}(x) = x - x_0, \quad H_{20}(x) = \frac{1}{2}(x - x_0)^2,$$

и, следовательно, функционал (25) и условия (21)–(23) примут соответственно вид

$$H_2(F; x) = F(x_0) + \int_a^b \frac{\delta F(x_0)}{\delta x(t)} (x(t) - x_0(t)) dt + \frac{1}{2} \int_a^b \int_a^b \frac{\delta^2 F(x_0)}{\delta x(t) \delta x(s)} (x(t) - x_0(t))(x(s) - x_0(s)) dt ds, \quad (26)$$

$$H_2(F; x_0) = F(x_0), \quad \frac{\delta H_2(F; x_0)}{\delta x(t)} = \frac{\delta F(x_0)}{\delta x(t)}, \quad \frac{\delta^2 H_2(F; x_0)}{\delta x(t)\delta x(s)} = \frac{\delta^2 F(x_0)}{\delta x(t)\delta x(s)}. \quad (27)$$

Пусть на множестве функций  $X, Y = C[a, b]$  или  $X, Y = L_2[a, b]$  определен функционал  $F: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ , для которого в точках  $\{x_v(u), y(v)\}_{v=0}^n \in X \times Y$  ( $u, v \in [a, b]$ ) известны значения  $F(x_v, y)$ , а также значения первых  $\frac{\delta F(x_v, y)}{\delta x(t)}$  и вторых вариационных производных  $\frac{\delta^2 F(x_v, y)}{\delta x(t)\delta x(s)}$  по переменной  $x \in X$ .

Воспользуемся формулой Эрмита (26), построенной для функционалов одной переменной и удовлетворяющей равенствам (27), чтобы сформулировать следующий аналогичный результат в случае интерполирования функционалов  $F(x, y)$  по одной из двух переменных.

**С л е д с т в и е.** Если для  $F(x, y)$  выполнены условия

$$\frac{\delta^2 F(x_v, y)}{\delta x(t)\delta x(s)} = \frac{\delta^2 F(x_v, y)}{\delta x(s)\delta x(t)} \quad (v = 0, 1, \dots, n), \quad (28)$$

то функционал

$$H_2(F; x, y) = F(x_0, y) + \int_a^b \frac{\delta F(x_0, y)}{\delta x(t)} (x(t) - x_0(t)) dt + \frac{1}{2} \int_a^b \int_a^b \frac{\delta^2 F(x_0, y)}{\delta x(t)\delta x(s)} (x(t) - x_0(t))(x(s) - x_0(s)) dt ds \quad (29)$$

является для  $F(x, y)$  эрмитовым интерполяционным многочленом по переменной  $x$  относительно узла  $x_0(t)$  третьей кратности на  $X$ , удовлетворяющим требованиям

$$H_2(F; x_0, y) = F(x_0, y), \quad \frac{\delta H_2(F; x_0, y)}{\delta x(t)} = \frac{\delta F(x_0, y)}{\delta x(t)}, \quad \frac{\delta^2 H_2(F; x_0, y)}{\delta x(t)\delta x(s)} = \frac{\delta^2 F(x_0, y)}{\delta x(t)\delta x(s)}.$$

**Решение задачи Коши с вариационными производными для уравнений гиперболического типа.** Задача Коши с вариационными производными для уравнения колебания однородной струны представляет собой совокупность уравнения (19) и начальных условий

$$F(x_0, y) = F_0(y), \quad \frac{\delta F(x_0, y)}{\delta x} = F_1(y), \quad (30)$$

где  $F_0(y)$  и  $F_1(y)$  – некоторые функционалы, заданные на множестве  $Y$ .

Используя интерполяционную формулу (29), построим приближенное решение задачи Коши (19), (30).

**Теорема 3.** В случае выполнения условия (28) решение  $F(x, y)$  задачи (19), (30) может быть представлено в виде

$$F(x, y) \approx F_0(y) + F_1(y) \int_a^b (x(t) - x_0(t)) dt + \frac{a(\tau_1)a(\tau_2)}{2} F_0''(y) (x(\tau_1) - x_0(\tau_1))(x(\tau_2) - x_0(\tau_2)). \quad (31)$$

**Доказательство.** В силу равенства (29) имеем

$$H_2(F; x, y) = F_0(y) + \int_a^b F_1(y) (x(t) - x_0(t)) dt + \frac{1}{2} \int_a^b \int_a^b \frac{\delta^2 F(x_0, y)}{\delta x(t)\delta x(s)} (x(t) - x_0(t))(x(s) - x_0(s)) dt ds. \quad (32)$$

При этом в формуле (32) значение  $\frac{\delta^2 F(x_0, y)}{\delta x(t)\delta x(s)}$  неизвестно, однако согласно уравнению (19) для него справедливо равенство

$$\frac{\delta^2 F(x_0, y)}{\delta x(t)\delta x(s)} = a(t)a(s) \frac{\delta^2 F(x_0, y)}{\delta y(t)\delta y(s)}.$$

Следовательно, функционал (32) можно представить в эквивалентном виде

$$H_2(F; x, y) = F_0(y) + \int_a^b F_1(y)(x(t) - x_0(t))dt + \frac{1}{2} \int_a^b \int_a^b a(t)a(s) \frac{\delta^2 F(x_0, y)}{\delta y(t)\delta y(s)} (x(t) - x_0(t))(x(s) - x_0(s)) dt ds. \quad (33)$$

Найдем приближенное значение  $\frac{\delta^2 F(x_0, y)}{\delta y(t)\delta y(s)}$ . Для этого вычислим дифференциал второго порядка по переменной  $y$  от функционала (33) в точке  $(x_0, y)$ . Имеем  $\delta_{y,y}^2 H_2[(x_0, y); h_1, h_2] = F_0''(y)h_1(\tau_1)h_2(\tau_2)$ .

Используя фильтрующее свойство дельта-функции

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0; \\ +\infty, & t = 0, \end{cases}$$

представим  $h_1(\tau_1)$  и  $h_2(\tau_2)$  в виде следующих интегралов:

$$h_1(\tau_1) = \int_a^b \delta(t - \tau_1)h_1(t)dt, \quad h_2(\tau_2) = \int_a^b \delta(s - \tau_2)h_2(s)ds.$$

В результате получим, что

$$\delta_{y,y}^2 H_2[(x_0, y); h_1, h_2] = \int_a^b \int_a^b F_0''(y)\delta(t - \tau_1)\delta(s - \tau_2)h_1(t)h_2(s) dt ds,$$

а функциональная производная (по подпространству)

$$\frac{\delta^2 F(x_0, y)}{\delta y(t)\delta y(s)} \approx \frac{\delta^2 H_2(F; x_0, y)}{\delta y(t)\delta y(s)} = F_0''(y)\delta(t - \tau_1)\delta(s - \tau_2).$$

Следовательно, равенство (33) примет вид

$$H_2(F; x, y) = F_0(y) + \int_a^b F_1(y)(x(t) - x_0(t))dt + \frac{1}{2} \int_a^b \int_a^b a(t)a(s)F_0''(y)\delta(t - \tau_1)\delta(s - \tau_2)(x(t) - x_0(t))(x(s) - x_0(s)) dt ds.$$

Далее, учитывая, что

$$\int_a^b a(t)(x(t) - x_0(t))\delta(t - \tau_1)dt = a(\tau_1)(x(\tau_1) - x_0(\tau_1)),$$

$$\int_a^b a(s)(x(s) - x_0(s))\delta(s - \tau_2)ds = a(\tau_2)(x(\tau_2) - x_0(\tau_2)),$$

приходим к приближенной формуле (31). Теорема 3 доказана.

В заключение отметим, что в [14–17] построены интерполяционные многочлены для обыкновенных дифференциальных операторов, заданных в пространстве непрерывно дифференцируемых функций, а также для дифференциальных операторов в частных производных, определенных в пространстве непрерывно дифференцируемых функций многих переменных. Полученные интерполяционные формулы имеют различную структуру и содержат интегралы Стильтьеса и дифференциалы Гато интерполируемого оператора.

Результаты, представленные в данной работе, могут служить основой дальнейших исследований недостаточно разработанной теории дифференциальных уравнений с вариационными производными, а также могут быть использованы для построения приближенных методов решения некоторых линейных и нелинейных дифференциальных уравнений с вариационными производными первого и второго порядков, встречающихся в различных прикладных областях и математической физике.

### Список использованных источников

1. Леви, П. Конкретные проблемы функционального анализа / П. Леви. – М.: Наука, 1967. – 510 с.
2. Вайнберг, М. М. Вариационные методы исследования нелинейных операторов / М. М. Вайнберг. – М.: Гостехиздат, 1956. – 345 с.
3. Вольтерра, В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений / В. Вольтера. – М.: Наука, 1982. – 304 с.
4. Далецкий, Ю. Л. Дифференциальные уравнения с функциональными производными и стохастические уравнения для обобщенных случайных процессов / Ю. Л. Далецкий // Докл. АН СССР. – 1966. – Т. 166, № 5. – С. 1035–1038.
5. Задорожний, В. Г. О дифференциальных уравнениях второго порядка в вариационных производных / В. Г. Задорожний // Дифференц. уравнения. – 1989. – Т. 25, № 10. – С. 1679–1683.
6. Данилович, В. П. Формула Коши для линейных уравнений с функциональными производными / В. П. Данилович, И. М. Ковальчик // Дифференц. уравнения. – 1977. – Т. 13, № 8. – С. 1509–1511.
7. Ковальчик, И. М. Представление решений некоторых уравнений с функциональными производными с помощью интегралов Винера / И. М. Ковальчик // Докл. АН УССР. Сер. А, Физ.-мат. и техн. науки. – 1978. – Т. 12. – С. 1079–1083.
8. Ковальчик, И. М. Линейные уравнения с функциональными производными / И. М. Ковальчик // Докл. АН СССР. – 1970. – Т. 194, № 4. – С. 763–766.
9. Далецкий, Ю. Л. Бесконечномерные эллиптические операторы и связанные с ними параболические уравнения / Ю. Л. Далецкий // Успехи мат. наук. – 1967. – Т. 22, вып. 4 (136). – С. 3–54.
10. Авербух, В. И. Теория дифференцирования в линейных топологических пространствах / В. И. Авербух, О. Г. Смолянов // Успехи мат. наук. – 1967. – Т. 22, вып. 6 (138). – С. 201–260.
11. Makarov, V. L. Methods of Operator Interpolation / V. L. Makarov, V. V. Khlobystov, L. A. Yanovich. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2010. – 516 с. – (Праці Ін-ту математики НАН України. – Vol. 83: Математика та її застосування).
12. Янович, Л. А. Основы теории интерполирования функций матричных переменных / Л. А. Янович, М. В. Игнатенко. – Минск: Беларус. навука, 2016. – 281 с.
13. Янович, Л. А. Интерполяционные функциональные многочлены ньютонова типа с двукратными узлами / Л. А. Янович, М. В. Игнатенко // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений: сб. науч. тр. – Минск: Изд. центр БГУ, 2012. – С. 229–240.
14. Янович, Л. А. Об одном классе интерполяционных многочленов для нелинейных обыкновенных дифференциальных операторов / Л. А. Янович, М. В. Игнатенко // Мат. моделирование. – 2014. – Т. 26, № 11. – С. 90–96.
15. Янович, Л. А. К теории интерполирования Эрмита – Биркгофа нелинейных обыкновенных дифференциальных операторов / Л. А. Янович, М. В. Игнатенко // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2017. – № 2. – С. 7–23.
16. Игнатенко, М. В. К теории интерполирования дифференциальных операторов произвольного порядка в частных производных / М. В. Игнатенко // Тр. Ин-та математики Нац. акад. наук Беларуси. – 2017. – Т. 25, № 2. – С. 11–20.
17. Игнатенко, М. В. Обобщенные интерполяционные многочлены Эрмита – Биркгофа для дифференциальных операторов произвольного порядка в частных производных / М. В. Игнатенко, Л. А. Янович // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2018. – Т. 54, № 2. – С. 149–163. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-2-149-163>

### References

1. Lévy P. *Concrete Problems of Functional Analysis*. Moscow, Nauka Publ., 1967. 510 p. (in Russian).
2. Vainberg M. M. *Variational Methods for Investigation of Non-linear Operators*. Moscow, Gostekhizdat Publ., 1956. 345 p. (in Russian).

3. Volterra V. *Theory of Functionals and of Integral and Integro-Differential Equations*. New York, Dover Publ., 2005. 288 p.
4. Daletsky Yu. L. *Differential Equations with Functional Derivatives and Stochastic Equations for Generalized Random Processes*. *Doklady akademii nauk SSSR = Doklady of the Academy of Sciences of USSR*, 1966, vol. 166, no. 5, pp. 1035–1038 (in Russian).
5. Zadorozhnyy V. G. *Second-order Differential Equations with Variational Derivatives*. *Differentsial'nyye uravneniya = Differential equations*, 1989, vol. 25, no. 10, pp. 1679–1683 (in Russian).
6. Danilovich V. P. Kovalchik I. M. *Cauchy Formula for Linear Equations with Functional Derivatives*. *Differentsial'nyye uravneniya = Differential equations*, 1977, vol. 13, no. 8, pp. 1509–1511 (in Russian).
7. Kovalchik I. M. *Representation of Solutions of Certain Equations with Functional Derivatives Using Wiener Integrals*. *Doklady akademii nauk Ukraini. Seriya A. Fiziko-matematicheskiye i tekhnicheskkiye nauki = Doklady of the Academy of Sciences of Ukraine. Series A. Physical, Mathematical, and Technical Sciences*, 1978, vol. 12, pp. 1079–1083 (in Russian).
8. Kovalchik I. M. *Linear Equations with Functional Derivatives*. *Doklady akademii nauk SSSR = Doklady of the Academy of Sciences of USSR*, 1970, vol. 194, no. 4, pp. 763–766 (in Russian).
9. Daletskii Yu. L. *Infinite-dimensional Elliptic Operators and Parabolic Equations Connected with them*. *Russian Mathematical Surveys*, 1967, vol. 22, no. 4, pp. 1–53. <https://doi.org/10.1070/rm1967v022n04abeh003769>
10. Averbukh V. I., Smolyanov O. G. *The Theory of Differentiation in Linear Topological Spaces*. *Russian Mathematical Surveys*, 1967, vol. 22, no. 6, pp. 201–258. <https://doi.org/10.1070/rm1967v022n06abeh003761>
11. Makarov V. L., Khlobystov V. V., Yanovich L. A. *Methods of Operator Interpolation*. *Proceedings of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine. Vol. 83: Mathematics and its Applications*. Kiev, 2010. 516 p.
12. Yanovich L. A., Ignatenko M. V. *Bases of the Theory of Interpolation of Functions of Matrix variables*. Minsk, Belaruskaya Navuka Publ., 2016. 281 p. (in Russian).
13. Yanovich, L. A., Ignatenko M. V. *Newton-Type Interpolation Functional Polynomials with nodes of the second multiplicity*. *Analiticheskiye metody analiza i differentsial'nykh uravneniy. Sbornik nauchnykh trudov = Analytical methods of analysis and differential equations. Collection of Scientific Papers*. Minsk, Belarussian State University, 2012, pp. 229–240 (in Russian).
14. Yanovich L. A., Ignatenko M. V. *On a class of interpolation polynomials for nonlinear ordinary differential operators*. *Matematicheskoe Modelirovanie = Mathematical Models and Computer Simulations*, 2014, vol. 26, no. 11, pp. 90–96 (in Russian).
15. Yanovich L. A., Ignatenko M. V. *To the theory of Hermite – Birkhoff interpolation of nonlinear ordinary differential operators*. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2017, no. 2, pp. 7–23 (in Russian).
16. Ignatenko M. V. *To the interpolation theory of differential operators of arbitrary order in partial derivatives*. *Trudy Instituta matematiki Natsional'noy akademii nauk Belarusi = Proceedings of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2017, vol. 25, no. 2, pp. 11–20 (in Russian).
17. Ignatenko M. V., Yanovich L. A. *Generalized interpolation Hermite – Birkhoff polynomials for arbitrary-order partial differential operators*. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, vol. 54, no. 2, pp. 149–163 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-2-149-163>

### Информация об авторах

**Игнатенко Марина Викторовна** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: [ignatenkomv@bsu.by](mailto:ignatenkomv@bsu.by). <https://orcid.org/0000-0002-8029-1842>

**Янович Леонид Александрович** – член-корреспондент, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: [yanovich@im.bas-net.by](mailto:yanovich@im.bas-net.by)

### Information about the authors

**Marina V. Ignatenko** – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Associate Professor of Web-Technologies and Computer Simulation Department, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: [ignatenkomv@bsu.by](mailto:ignatenkomv@bsu.by). <https://orcid.org/0000-0002-8029-1842>

**Leonid A. Yanovich** – Corresponding Member, Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Chief Researcher, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: [yanovich@im.bas-net.by](mailto:yanovich@im.bas-net.by)

ISSN 1561-2430 (Print)  
 ISSN 2524-2415 (Online)  
 УДК 519.6  
<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-1-72-83>

Поступила в редакцию 22.11.2019  
 Received 22.11.2019

Э. А. Айрян<sup>1,2</sup>, М. Гнатич<sup>1,3,4</sup>, В. Б. Малютин<sup>5</sup>

<sup>1</sup>Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Россия

<sup>2</sup>Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

<sup>3</sup>Институт экспериментальной физики Словацкой академии наук, Кошице, Словакия

<sup>4</sup>Университет Павла Йозефа Шафарика, Кошице, Словакия

<sup>5</sup>Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

## ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛОВ, ПОРОЖДЕННЫХ РЕЛЯТИВИСТСКИМ ГАМИЛЬТОНИАНОМ

**Аннотация.** Рассматривается приближенное вычисление матричнозначных функциональных интегралов специального вида, порожденных релятивистским гамильтонианом. Метод вычисления функциональных интегралов основан на разложении по собственным функциям гамильтониана, порождающего функциональный интеграл. Для нахождения собственных функций и собственных значений исходный гамильтониан рассматривается в виде суммы невозмущенного оператора и малой поправки к нему и используется теория возмущений. Собственные значения и собственные функции невозмущенного оператора вычисляются с помощью метода последовательностей Штурма и метода обратной итерации. Такой подход позволяет значительно уменьшить счетное время и объем используемой памяти компьютера по сравнению с другими известными методами.

**Ключевые слова:** функциональные интегралы, релятивистский гамильтониан, теория возмущений, собственные функции гамильтониана, последовательность Штурма

**Для цитирования.** Айрян, Э. А. Приближенное вычисление функциональных интегралов, порожденных релятивистским гамильтонианом / Э. А. Айрян, М. Гнатич, В. Б. Малютин // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2020. – Т. 56, № 1. – С. 72–83. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-1-72-83>

Edik A. Ayryan<sup>1,2</sup>, Michal Hnatic<sup>1,3,4</sup>, Victor B. Malyutin<sup>5</sup>

<sup>1</sup>Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russia

<sup>2</sup>RUDN University, Moscow, Russia

<sup>3</sup>Slovak Academy of Sciences, Košice, Slovakia

<sup>4</sup>P. J. Šafárik University, Košice, Slovakia

<sup>5</sup>Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

## APPROXIMATE EVALUATION OF FUNCTIONAL INTEGRALS GENERATED BY THE RELATIVISTIC HAMILTONIAN

**Abstract.** An approximate evaluation of matrix-valued functional integrals generated by the relativistic Hamiltonian is considered. The method of evaluation of functional integrals is based on the expansion in the eigenfunctions of Hamiltonian generating the functional integral. To find the eigenfunctions and the eigenvalues the initial Hamiltonian is considered as a sum of the unperturbed operator and a small correction to it, and the perturbation theory is used. The eigenvalues and the eigenfunctions of the unperturbed operator are found using the Sturm sequence method and the reverse iteration method. This approach allows one to significantly reduce the computation time and the used computer memory compared to the other known methods.

**Keywords:** functional integrals, relativistic Hamiltonian, perturbation theory, eigenfunctions of Hamiltonian, Sturm sequences

**For citation.** Ayryan E. A., Hnatic M., Malyutin V. B. Approximate evaluation of functional integrals generated by the relativistic Hamiltonian. *Vestsi Natsyional'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2020, vol. 56, no. 1, pp. 72–83 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-1-72-83>

**Введение.** Существуют разнообразные методы приближенного вычисления функциональных интегралов. Один из часто используемых – это вычисление интегралов методом Монте-Карло [1–3], который основан на том, что вычисляемый интеграл представляется как математическое ожидание некоторой случайной величины, среднее арифметическое независимых реализаций

которой дает приближенное значение данному интегралу. Существуют методы приближенного вычисления функциональных интегралов, базирующиеся на дискретизации пространства и времени. Часто применяются подходы, не требующие дискретизации и основанные на использовании приближенных формул, являющихся точными на классе функциональных многочленов заданной степени (см. [1, 4–6]). Такие формулы называются формулами заданной степени точности и широко применяются для приближенного вычисления функциональных интегралов. Можно также отметить метод вычисления функциональных интегралов, использующий разложение действия относительно классической траектории [7–10]. В [11–13] был предложен метод вычисления функциональных интегралов, основанный на разложении по собственным функциям нерелятивистского гамильтониана, порождающего функциональный интеграл.

В данной статье рассматривается применение метода, предложенного в [11–13], для приближенного вычисления функциональных интегралов, порожденных релятивистским гамильтонианом. В отличие от [11–13], в настоящей работе дополнительно используется теория возмущений. Для нахождения собственных функций и собственных значений исходный гамильтониан рассматривается в виде суммы невозмущенного оператора и малой поправки к нему. Собственные значения и собственные функции невозмущенного оператора находятся с помощью метода последовательностей Штурма и метода обратной итерации. В разделе 1 вводится функциональный интеграл, порожденный релятивистским гамильтонианом, и предлагается метод для его вычисления. В разделе 2 приводятся результаты численного эксперимента.

**1. Аналитические результаты.** В данном разделе рассматриваются матричнозначные функциональные интегралы, которые, следуя работам [14, 15], определяются на пространстве функций  $x(\tau)$ ,  $s \leq \tau \leq t$ , удовлетворяющих условию  $x(s) = 0$  и условию Липшица с порядком, равным единице, т. е. для любых  $s \leq r_1 < r_2 \leq t$ ,  $|x(r_2) - x(r_1)| \leq M |r_2 - r_1|$ . Интегралы определяются равенством

$$\int \exp \left\{ - \int_s^t V(x(\tau)) d\tau \right\} d\mu(x) = \lim_j \int (n) \int \exp \left\{ - \int_s^t V \left( \sum_{j=1}^n x_j \chi_{[t_{j-1}, t_j]}(\cdot) \right) d\tau \right\} \prod_{j=n}^1 S(t_j - t_{j-1}, x_j - x_{j-1}) dx_1 \dots dx_n, \quad (1)$$

если этот предел существует для любого разбиения отрезка  $[s, t]$  точками  $s = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$ .

Здесь  $x_j = x(t_j)$ ,  $\chi_{[t_{j-1}, t_j]}(\tau)$  – характеристическая функция интервала  $[t_{j-1}, t_j]$ ;  $S(t_j - t_{j-1}, x_j - x_{j-1})$  – переходная функция, являющаяся фундаментальным решением уравнения

$$\frac{\partial S(t, x)}{\partial t} = a\alpha \frac{\partial S(t, x)}{\partial x} + b\beta S(t, x), \quad (2)$$

где  $a, b$  – вещественные параметры,  $\alpha, \beta$  – антикоммутирующие матрицы, т. е.  $\alpha\beta + \beta\alpha = 0$ .

Этот интеграл связан с ядром оператора эволюции [14, 15], а именно:

$$\int \exp \left\{ - \int_s^t V(x(\tau)) d\tau \right\} d\mu(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(0, x_t) dx_t,$$

где  $K(x_s, x_t)$  – ядро оператора  $\exp(tH)$ ,  $H = a\alpha \frac{\partial}{\partial x} + b\beta - V(x)$ .

Наша цель – использовать для вычисления функционального интеграла разложение функции  $K(x_s, x_t)$  по собственным функциям гамильтониана  $H$ .

Для релятивистского гамильтониана  $H$  параметры  $a, b$  имеют вид  $a = -c, b = -mc^2$ , где  $m$  – масса частицы,  $c$  – скорость света [16]. Поэтому мы рассмотрим вычисление собственных значений и собственных векторов оператора  $H$  при больших значениях  $|b|$ . Будем также считать, что

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

При сделанных предположениях уравнения для собственных значений  $E$  и собственных функций  $(\phi(x), \psi(x))^T$  ( $T$  – знак транспонирования) оператора  $H$  имеют вид

$$a\partial_x\psi(x) + b\phi(x) - V(x)\phi(x) = E\phi(x),$$

$$a\partial_x\phi(x) - b\psi(x) - V(x)\psi(x) = E\psi(x),$$

где  $\partial_x$  – производная по переменной  $x$ .

Обозначим  $E' = E + b$ . Тогда

$$(E' - 2b + V(x))\phi(x) = a\partial_x\psi(x), \quad (3)$$

$$(E' + V(x))\psi(x) = a\partial_x\phi(x).$$

Из этих равенств получаем уравнение для  $\psi(x)$

$$(E' + V(x))\psi(x) = a\partial_x(E' - 2b + V(x))^{-1} a\partial_x\psi(x). \quad (4)$$

При больших  $|b|$  верно приближенное равенство [16]

$$(E' - 2b + V(x))^{-1} \approx (-2b)^{-1} \left( 1 - \frac{E' + V(x)}{-2b} \right),$$

с помощью которого уравнение (4) преобразуется к виду

$$(E' + V(x))\psi(x) = \frac{a^2}{-2b} \left( \left( 1 - \frac{E' + V(x)}{-2b} \right) \partial_x^2 + \frac{V'(x)}{2b} \partial_x \right) \psi(x).$$

Умножая обе части этого равенства на

$$\left( 1 - \frac{E' + V(x)}{-2b} \right)^{-1} \approx 1 + \frac{E' + V(x)}{-2b},$$

получим

$$\begin{aligned} & \left( \frac{a^2}{-2b} \partial_x^2 - \left( 1 + \frac{E' + V(x)}{-2b} \right) (E' + V(x)) + \frac{a^2}{-2b} \left( 1 + \frac{E' + V(x)}{-2b} \right) \frac{V'(x)}{2b} \partial_x \right) \psi(x) \approx \\ & \approx \left( \frac{a^2}{-2b} \partial_x^2 - (E' + V(x)) - \frac{(E' + V(x))^2}{-2b} + \frac{a^2}{-2b} \frac{V'(x)}{2b} \partial_x \right) \psi(x) \approx 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Для нахождения собственных значений  $E'_{0n}$  и собственных функций  $\psi(x)$  рассмотрим невозмущенный оператор

$$\frac{a^2}{-2b} \partial_x^2 - V(x)$$

и предположим, что для него известны собственные значения  $E'_{0n}$  и собственные функции  $\psi_{0n}(x)$ , т. е. известны точные решения уравнения

$$\left( \frac{a^2}{-2b} \partial_x^2 - V(x) \right) \psi_{0n}(x) = E'_{0n} \psi_{0n}(x).$$

Собственные значения  $E'_{0n}$  мы будем вычислять приближенно методом последовательностей Штурма [17]. Собственные функции  $\psi_{0n}(x)$  будем вычислять приближенно методом обратной итерации [17]. Тогда собственные значения  $E'$  и собственные функции  $\psi_n(x)$  возмущенного оператора с  $\varepsilon = \frac{1}{-2b}$  мы ищем в виде [18]

$$E'_n = E'_{0n} + \varepsilon E'_{1n} + \varepsilon^2 E'_{2n} + \dots,$$

$$\psi_n(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \psi_{0j}(x), \tag{6}$$

$$c_j = c_{0j} + \varepsilon c_{1j} + \varepsilon^2 c_{2j} + \dots.$$

Для собственного вектора с номером  $n$   $c_{0j} = 1$  при  $j = n$ ,  $c_{0j} = 0$  при  $j \neq n$ .

Для нахождения поправок первого порядка к собственным значениям и собственным векторам подставим (6) в (5). Получим

$$\sum_{j=0} (E'_{0j} - E'_{0n} - \varepsilon E'_{1n})(c_{0j} + \varepsilon c_{1j}) \psi_{0j}(x) - \varepsilon (E'_{0n} + V(x))^2 \sum_{j=0} c_{0j} \psi_{0j}(x) - \varepsilon \frac{a^2}{-2b} V'(x) \partial_x \sum_{j=0} c_{0j} \psi_{0j}(x) = 0.$$

Учитывая, что  $\sum_{j=0} (E'_{0j} - E'_{0n}) c_{0j} \psi_{0j}(x) = 0$ , последнее равенство запишется в виде

$$\sum_{j=0} (E'_{0j} - E'_{0n}) c_{1j} \psi_{0j}(x) - E'_{1n} \psi_{0n}(x) - (E'_{0n} + V(x))^2 \psi_{0n}(x) - \frac{a^2}{-2b} V'(x) \partial_x \psi_{0n}(x) = 0. \tag{7}$$

Введем обозначение

$$V_{jn} = - \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{0j}(x) (E'_{0n} + V(x))^2 \psi_{0n}(x) dx - \frac{a^2}{-2b} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{0j}(x) V'(x) \partial_x \psi_{0n}(x) dx.$$

Скалярное произведение векторов  $\psi_{ij}(x)$ ,  $\psi_{kl}(x)$  определяется через интеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{ij}(x) \psi_{kl}(x) dx$ .

Умножая скалярно обе части равенства (7) на вектор  $\psi_{0n}(x)$ , получим выражение для  $E'_{1n}$ :

$$E'_{1n} = V_{nn}.$$

Умножая скалярно обе части равенства (7) на вектор  $\psi_{0j}(x)$ , получим выражение для  $c_{1j}$ ,  $j \neq n$ :

$$c_{1j} = \frac{V_{jn}}{E'_{0n} - E'_{0j}}.$$

При этом  $c_{1n}$  должно быть выбрано так, чтобы функция  $\psi_{0n}(x) + \varepsilon \sum_{j=0} c_{1j} \psi_{0j}(x)$  была нормирована с точностью до членов первого порядка включительно. Для этого надо положить [18]  $c_{1n} = 0$ .

Таким образом, с поправкой первого порядка собственный вектор дается выражением

$$\Psi_{1n}(x) = \Psi_{0n}(x) + \varepsilon \sum_{j \neq n} \frac{V_{jn}}{E'_{0n} - E'_{0j}} \Psi_{0j}(x). \quad (8)$$

Из (3) следует, что функции  $\phi_{ij}(x)$ ,  $i = 0, 1$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$ , выражаются через  $\psi_{ij}(x)$  по формуле

$$\phi_{ij}(x) = \frac{a}{-2b} \left( 1 - \frac{E'_{ij} + V(x)}{-2b} \right) \partial_x \psi_{ij}(x).$$

Таким образом, функции  $(\phi_{ij}(x), \psi_{ij}(x))^T$  являются собственными функциями оператора  $H$  с собственными значениями  $E'_{ij} - b$ , где  $i = 0, 1$  – порядок малости,  $j = 0, 1, 2, \dots$  – номера собственных значений.

При фиксированном  $i$  векторы  $(\phi_{ij}(x), \psi_{ij}(x))^T$ , вообще говоря, не ортогональны при различных значениях  $j$ . Для их ортогонализации можно использовать процесс Грама – Шмидта. При этом ортогональные векторы строятся по правилу

$$\begin{aligned} \eta_{i0} &= (\phi_{i0}(x), \psi_{i0}(x))^T, \\ \eta_{ij} &= (\phi_{ij}(x), \psi_{ij}(x))^T - \sum_{k=0}^{j-1} \frac{\langle (\phi_{ij}(x), \psi_{ij}(x))^T, \eta_{ik} \rangle}{\langle \eta_{ik}, \eta_{ik} \rangle} \eta_{ik}, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\langle (\eta_1(x), \eta_2(x))^T, (\xi_1(x), \xi_2(x))^T \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \eta_1(x) \xi_1(x) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \eta_2(x) \xi_2(x) dx.$$

Для разложения ядра оператора  $\exp(tH)$  по вектору  $\eta_{ij}$  можно использовать формулу

$$K(x_s, x_t) = \sum_{j=0} \langle \eta_{ij}, \eta_{ij} \rangle^{-1} \exp(tH) \eta_{ij}(x_t) \eta_{ij}^T(x_s).$$

Так как согласно (9)  $\eta_{ij}$  можно записать в виде

$$\eta_{ij} = \sum_{k=0}^j c_k (\phi_{ik}(x), \psi_{ik}(x))^T,$$

где  $c_k$  – некоторые константы, то  $\exp(tH) \eta_{ij}(x_t)$  можно записать в виде

$$\exp(tH) \eta_{ij}(x_t) = \sum_{k=0}^j c_k \exp(t(E'_{ik} - b)) (\phi_{ik}(x_t), \psi_{ik}(x_t))^T.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \int \exp \left\{ -\int_s^t V(x(\tau)) d\tau \right\} d\mu(x) = \\ & = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=0} \langle \eta_{ij}, \eta_{ij} \rangle^{-1} \sum_{k=0}^j c_k \exp(t(E'_{ik} - b)) (\phi_{ik}(x_t), \psi_{ik}(x_t))^T \eta_{ij}^T(0) dx_t. \end{aligned} \quad (10)$$

Таким образом, мы получили формулу для вычисления функционального интеграла с помощью собственных значений  $E'_{ij} - b$ , где  $i = 0, 1$  – порядок малости,  $j = 0, 1, 2, \dots$  – номера собственных значений и собственных функций  $(\phi_{ij}(x), \psi_{ij}(x))^T$  гамильтониана  $H$ .

**2. Численные результаты.** В качестве примера рассмотрим вычисление функционального интеграла (1) в случае, когда переходная функция  $S$  определяется уравнением (2),

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad V(x) = \frac{x^2}{8}.$$

Для нулевого порядка малости ( $i = 0$ ) и нулевого собственного значения ( $j = 0$ ) формула (10) имеет вид

$$\begin{aligned} & \int \exp \left\{ - \int_s^t V(x(\tau)) d\tau \right\} d\mu(x) \approx \\ & \approx \int_{-\infty}^{+\infty} \langle (\phi_{00}, \psi_{00}), (\phi_{00}, \psi_{00}) \rangle^{-1} \exp(t(E'_{00} - b)) (\phi_{00}(x_t), \psi_{00}(x_t))^T (\phi_{00}(0), \psi_{00}(0)) dx_t = \\ & = \langle (\phi_{00}, \psi_{00}), (\phi_{00}, \psi_{00}) \rangle^{-1} \exp(t(E'_{00} - b)) \begin{pmatrix} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{00}(x_t) dx_t \phi_{00}(0) & \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{00}(x_t) dx_t \psi_{00}(0) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{00}(x_t) dx_t \phi_{00}(0) & \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{00}(x_t) dx_t \psi_{00}(0) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

При  $s = 0, t = 2, a = -4, b = -16, m = 1, A = 5$  ( $[-A, A]$  – интервал, на котором рассматриваются приближенные собственные функции),  $N = 100$  ( $N$  – количество интервалов, на которое делится интервал  $[-A, A]$  для приближенного вычисления собственных значений и собственных функций)

$$E'_{00} \approx -0,2499, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{00}(x_t) dx_t \approx 2,2366, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{00}(x_t) dx_t \approx 0,00048,$$

$$\psi_{00}(0) \approx 0,6318, \quad \phi_{00}(0) \approx 0,002, \quad \langle (\phi_{00}, \psi_{00}), (\phi_{00}, \psi_{00}) \rangle^{-1} \approx 0,9923.$$

Таким образом, для нулевого порядка малости ( $i = 0$ ) и нулевого собственного значения ( $j = 0$ )

$$\exp(tb) \int \exp \left\{ - \int_s^t V(x(\tau)) d\tau \right\} d\mu(x) \approx \begin{pmatrix} 10^{-6} & 2 \cdot 10^{-4} \\ 2 \cdot 10^{-3} & 0,8507 \end{pmatrix}.$$

Для нулевого порядка малости ( $i = 0$ ) и первого собственного значения ( $j = 0$ ) слагаемое с  $j = 1$  в формуле (10) имеет вид

$$\langle (\phi_{01}, \psi_{01}), (\phi_{01}, \psi_{01}) \rangle^{-1} \exp(t(E'_{01} - b)) \begin{pmatrix} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{01}(x_t) dx_t \phi_{01}(0) & \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{01}(x_t) dx_t \psi_{01}(0) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{01}(x_t) dx_t \phi_{01}(0) & \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{01}(x_t) dx_t \psi_{01}(0) \end{pmatrix}.$$

При  $s = 0, t = 2, a = -4, b = -16, m = 1, N = 100, A = 5$

$$E'_{01} \approx -0,7498, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{01}(x_t) dx_t \approx 10^{-6}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{01}(x_t) dx_t \approx 0,01747,$$

$$\psi_{01}(0) \approx 8 \cdot 10^{-7}, \quad \phi_{01}(0) \approx 0,08, \quad \langle (\phi_{01}, \psi_{01}), (\phi_{01}, \psi_{01}) \rangle^{-1} \approx 0,9804.$$

Таким образом, для нулевого порядка малости ( $i = 0$ ) слагаемое с  $j = 1$  в формуле (10) для

$\exp(tb) \int \exp \left\{ - \int_s^t V(x(\tau)) d\tau \right\} d\mu(x)$  дает вклад

$$\begin{pmatrix} 2 \cdot 10^{-4} & 2 \cdot 10^{-9} \\ 2 \cdot 10^{-8} & 2 \cdot 10^{-13} \end{pmatrix}.$$

Для нулевого порядка малости ( $i = 0$ ) и второго собственного значения ( $j = 2$ ) при  $s = 0$ ,  $t = 2$ ,  $a = -4$ ,  $b = -16$ ,  $m = 1$ ,  $N = 100$ ,  $A = 5$

$$\eta_{02} = (\eta_{02,1}, \eta_{02,2}) \approx (\phi_{02}(x), \psi_{02}(x))^T + 0,0109(\phi_{00}(x), \psi_{00}(x))^T, \quad \langle \eta_{02}, \eta_{02} \rangle^{-1} \approx 0,9626.$$

Слагаемое с  $j = 2$  в формуле (10) имеет вид

$$\begin{aligned} & \langle \eta_{02}, \eta_{02} \rangle^{-1} \exp(t(E'_{02} - b)) \begin{pmatrix} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{02}(x_t) dx_t \eta_{02,1}(0) & \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{02}(x_t) dx_t \eta_{02,2}(0) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{02}(x_t) dx_t \eta_{02,1}(0) & \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{02}(x_t) dx_t \eta_{02,2}(0) \end{pmatrix} + \\ & + 0,0109 \langle \eta_{02}, \eta_{02} \rangle^{-1} \exp(t(E'_{00} - b)) \begin{pmatrix} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{00}(x_t) dx_t \eta_{02,1}(0) & \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{00}(x_t) dx_t \eta_{02,2}(0) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{00}(x_t) dx_t \eta_{02,1}(0) & \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{00}(x_t) dx_t \eta_{02,2}(0) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

При указанных параметрах

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{02}(x_t) dx_t & \approx 1,5408, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{02}(x_t) dx_t \approx 9 \cdot 10^{-4}, \quad \psi_{02}(0) \approx -0,4484, \quad \phi_{02}(0) \approx 7 \cdot 10^{-3}, \\ \eta_{02,1}(0) & \approx 7 \cdot 10^{-3}, \quad \eta_{02,2}(0) \approx -0,4421, \quad \langle (\phi_{02}, \psi_{02}), (\phi_{02}, \psi_{02}) \rangle^{-1} \approx 0,9626. \end{aligned}$$

Таким образом, для нулевого порядка малости ( $i = 0$ ) слагаемое с  $j = 2$  в формуле (10) для

$\exp(tb) \int \exp \left\{ -\int_s^t V(x(\tau)) d\tau \right\} d\mu(x)$  дает вклад

$$\begin{pmatrix} 5 \cdot 10^{-7} & -3 \cdot 10^{-5} \\ 9 \cdot 10^{-4} & -0,0596 \end{pmatrix}.$$

Для нулевого порядка малости ( $i = 0$ ) и для тех же значений параметров с учетом вклада трех слагаемых получаем

$$\exp(tb) \int \exp \left\{ -\int_s^t V(x(\tau)) d\tau \right\} d\mu(x) \approx \begin{pmatrix} 2 \cdot 10^{-4} & 2 \cdot 10^{-4} \\ 2 \cdot 10^{-3} & 0,7911 \end{pmatrix}.$$

Для первого порядка малости ( $i = 1$ ) и нулевого собственного значения ( $j = 0$ ) формула (10) имеет вид

$$\begin{aligned} & \int \exp \left\{ -\int_s^t V(x(\tau)) d\tau \right\} d\mu(x) \approx \\ & \approx \langle (\phi_{10}, \psi_{10}), (\phi_{10}, \psi_{10}) \rangle^{-1} \exp(t(E'_{10} - b)) \begin{pmatrix} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{10}(x_t) dx_t \phi_{10}(0) & \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{10}(x_t) dx_t \psi_{10}(0) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{10}(x_t) dx_t \phi_{10}(0) & \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{10}(x_t) dx_t \psi_{10}(0) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Из формулы (8) следует, что при  $s = 0, t = 2, a = -4, b = -16, m = 1, N = 100, A = 5$

$$\psi_{10}(x) \approx \psi_{00}(x) + 10^{-4}\psi_{01}(x) + 0,0014\psi_{02}(x),$$

$$\phi_{10}(x) \approx \phi_{00}(x) + 10^{-4}\phi_{01}(x) + 0,0014\phi_{02}(x).$$

При указанных параметрах

$$E'_{10} \approx -0,2494, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{10}(x_t) dx_t \approx 2,2388, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{10}(x_t) dx_t \approx 0,00048,$$

$$\psi_{10}(0) \approx 0,6312, \quad \phi_{10}(0) \approx 0,002, \quad \langle (\phi_{10}, \psi_{10}), (\phi_{10}, \psi_{10}) \rangle^{-1} \approx 0,9923.$$

Таким образом, для первого порядка малости ( $i = 1$ ) и нулевого собственного значения ( $j = 0$ )

$$\exp(tb) \int \exp \left\{ - \int_s^t V(x(\tau)) d\tau \right\} d\mu(x) \approx \begin{pmatrix} 6 \cdot 10^{-7} & 2 \cdot 10^{-4} \\ 2 \cdot 10^{-3} & 0,8516 \end{pmatrix}.$$

Для первого порядка малости ( $i = 1$ ) и первого собственного значения ( $j = 1$ ) при указанных параметрах из формулы (8), выражающей  $\psi_{11}(x)$  через  $\psi_{0j}(x), j = 0, 1, 2$ , получаем

$$\psi_{11}(x) \approx \psi_{01}(x) + 3 \cdot 10^{-4}\psi_{00}(x) - 7 \cdot 10^{-6}\psi_{02}(x),$$

$$\phi_{11}(x) \approx \phi_{01}(x) + 3 \cdot 10^{-4}\phi_{00}(x) - 7 \cdot 10^{-6}\phi_{02}(x).$$

После ортогонализации получим

$$\eta_{11} = (\eta_{11,1}, \eta_{11,2}) \approx (\phi_{11}(x), \psi_{11}(x))^T - 4 \cdot 10^{-4} (\phi_{10}(x), \psi_{10}(x))^T, \quad \langle \eta_{11}, \eta_{11} \rangle^{-1} \approx 0,9804.$$

Слагаемое с  $j = 1$  в формуле (10) имеет вид

$$\langle \eta_{11}, \eta_{11} \rangle^{-1} \exp(t(E'_{11} - b)) \begin{pmatrix} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{11}(x_t) dx_t \eta_{11,1}(0) & \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{11}(x_t) dx_t \eta_{11,2}(0) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{11}(x_t) dx_t \eta_{11,1}(0) & \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{11}(x_t) dx_t \eta_{11,2}(0) \end{pmatrix} -$$

$$-4 \cdot 10^{-4} \langle \eta_{11}, \eta_{11} \rangle^{-1} \exp(t(E'_{10} - b)) \begin{pmatrix} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{10}(x_t) dx_t \eta_{11,1}(0) & \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{10}(x_t) dx_t \eta_{11,2}(0) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{10}(x_t) dx_t \eta_{11,1}(0) & \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{10}(x_t) dx_t \eta_{11,2}(0) \end{pmatrix}.$$

При указанных параметрах

$$E'_{11} \approx -0,7552, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{11}(x_t) dx_t \approx 6 \cdot 10^{-4}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{11}(x_t) dx_t \approx 0,01747,$$

$$\psi_{11}(0) \approx 2 \cdot 10^{-4}, \quad \phi_{11}(0) \approx 8 \cdot 10^{-2}, \quad \eta_{11,1}(0) \approx 8 \cdot 10^{-2}, \quad \eta_{11,2}(0) \approx -5 \cdot 10^{-5}.$$

Таким образом, для первого порядка малости ( $i = 1$ ) слагаемое с  $j = 1$  в формуле (10) для

$\exp(tb) \int \exp \left\{ - \int_s^t V(x(\tau)) d\tau \right\} d\mu(x)$  дает вклад

$$\begin{pmatrix} 3 \cdot 10^{-4} & -2 \cdot 10^{-7} \\ -3 \cdot 10^{-5} & -3 \cdot 10^{-8} \end{pmatrix}.$$

Для первого порядка малости ( $i = 1$ ) и второго собственного значения ( $j = 2$ ) при указанных параметрах из формулы (8), выражающей  $\psi_{12}(x)$  через  $\psi_{0j}(x)$ ,  $j = 0, 1, 2$ , получаем

$$\psi_{12}(x) \approx \psi_{02}(x) - 0,0069\psi_{00}(x) + 0,0179\psi_{01}(x),$$

$$\phi_{12}(x) \approx \phi_{02}(x) - 0,0069\phi_{00}(x) + 0,0179\phi_{01}(x).$$

После ортогонализации получим

$$\eta_{12} = (\eta_{12,1}, \eta_{12,2}) \approx (\phi_{12}(x), \psi_{12}(x))^T + 0,016(\phi_{10}(x), \psi_{10}(x))^T - 0,018(\phi_{11}(x), \psi_{11}(x))^T, \\ \langle \eta_{12}, \eta_{12} \rangle^{-1} \approx 0,9626.$$

Слагаемое с  $j = 2$  в формуле (10) имеет вид

$$\langle \eta_{12}, \eta_{12} \rangle^{-1} \exp(t(E'_{12} - b)) \begin{pmatrix} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{12}(x_t) dx_t \eta_{12,1}(0) & \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{12}(x_t) dx_t \eta_{12,2}(0) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{12}(x_t) dx_t \eta_{12,1}(0) & \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{12}(x_t) dx_t \eta_{12,2}(0) \end{pmatrix} + \\ + 0,016 \langle \eta_{12}, \eta_{12} \rangle^{-1} \exp(t(E'_{10} - b)) \begin{pmatrix} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{10}(x_t) dx_t \eta_{12,1}(0) & \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{10}(x_t) dx_t \eta_{12,2}(0) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{10}(x_t) dx_t \eta_{12,1}(0) & \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{10}(x_t) dx_t \eta_{12,2}(0) \end{pmatrix} - \\ - 0,018 \langle \eta_{12}, \eta_{12} \rangle^{-1} \exp(t(E'_{11} - b)) \begin{pmatrix} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{11}(x_t) dx_t \eta_{12,1}(0) & \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{11}(x_t) dx_t \eta_{12,2}(0) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{11}(x_t) dx_t \eta_{12,1}(0) & \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{11}(x_t) dx_t \eta_{12,2}(0) \end{pmatrix}.$$

При указанных параметрах

$$E'_{12} \approx -1,2677, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{12}(x_t) dx_t \approx 1,5254, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{12}(x_t) dx_t \approx 10^{-3}, \quad \psi_{12}(0) \approx -0,4528,$$

$$\phi_{12}(0) \approx 8 \cdot 10^{-3}, \quad \eta_{12,1}(0) \approx 7 \cdot 10^{-3}, \quad \eta_{12,2}(0) \approx -0,4427.$$

Таким образом, для первого порядка малости ( $i = 1$ ) слагаемое с  $j = 2$  в формуле (10) для

$\exp(tb) \int \exp \left\{ -\int_s^t V(x(\tau)) d\tau \right\} d\mu(x)$  дает вклад

$$\begin{pmatrix} -2 \cdot 10^{-7} & -2 \cdot 10^{-6} \\ 10^{-3} & -0,0607 \end{pmatrix}.$$

Для первого порядка малости ( $i = 1$ ) и для тех же значений параметров с учетом вклада трех слагаемых получаем

$$\exp(tb) \int \exp \left\{ -\int_s^t V(x(\tau)) d\tau \right\} d\mu(x) \approx \begin{pmatrix} 2 \cdot 10^{-4} & 2 \cdot 10^{-4} \\ 3 \cdot 10^{-3} & 0,7909 \end{pmatrix}.$$

Для элементов матрицы  $\exp(tb) \int_s^t \exp\left\{-\int_s^\tau V(x(\tau)) d\tau\right\} d\mu(x)$  с индексами (1,2) и (2,1) при  $V(x) = \frac{x^2}{8}$  известны точные значения, и они равны нулю [19]. Для сравнения на рис. 1, 2 приведены приближенные значения элементов матричнозначного интеграла для различных значений  $N$ .

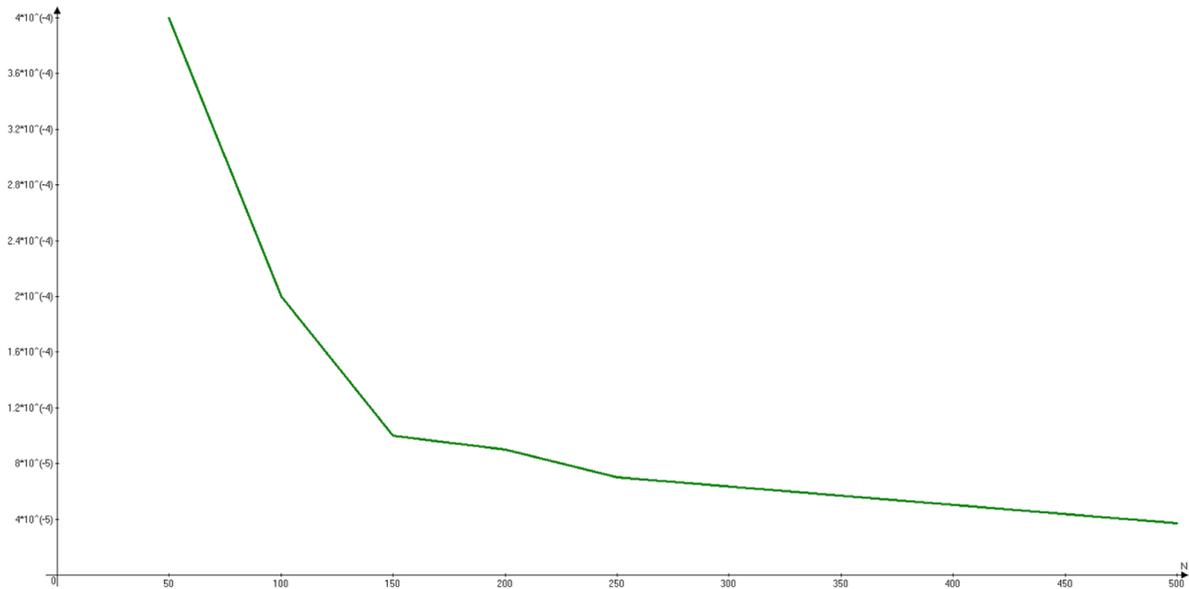


Рис. 1. Приближенные значения элемента матричнозначного интеграла с индексом (1,2):  
 $s = 0, t = 2, a = -4, b = -16, m = 1, A = 5, i = 0, j = 0$

Fig. 1. Approximate values of the element of the matrix-valued integral with index (1,2):  
 $s = 0, t = 2, a = -4, b = -16, m = 1, A = 5, i = 0, j = 0$



Рис. 2. Приближенные значения элемента матричнозначного интеграла с индексом (2,1):  
 $s = 0, t = 2, a = -4, b = -16, m = 1, A = 5, i = 0, j = 0$

Fig. 2. Approximate values of the element of the matrix-valued integral with index (2,1):  
 $s = 0, t = 2, a = -4, b = -16, m = 1, A = 5, i = 0, j = 0$

Из рис. 1, 2 видно, что приближенные значения элементов матричнозначного интеграла стремятся к точному значению при увеличении количества интервалов  $N$ , на которое делится интервал  $[-A, A]$  для приближенного вычисления собственных значений и собственных функций.

Таким образом, предложен метод вычисления матричнозначных функциональных интегралов, порожденных релятивистским гамильтонианом, приведены результаты численной апробации метода, основанного на разложении по собственным функциям гамильтониана, порождающего функциональный интеграл. Для нахождения собственных функций и собственных значений исходный гамильтониан рассматривается в виде суммы невозмущенного оператора и малой поправки к нему. Собственные значения и собственные функции невозмущенного оператора находятся с помощью метода последовательностей Штурма и метода обратной итерации.

### Список использованных источников

1. Янович, Л. А. Приближенное вычисление континуальных интегралов по гауссовым мерам / Л. А. Янович. – Минск: Наука и техника, 1976. – 382 с.
2. Решение краевых задач методом Монте-Карло / Б. С. Елепов [и др.]. – Новосибирск: Наука, 1980.
3. Сабельфельд, К. К. О приближенном вычислении винеровских континуальных интегралов методом Монте-Карло / К. К. Сабельфельд // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1979. – Т. 19, № 1. – С. 29–43.
4. Егоров, А. Д. Приближенные методы вычисления континуальных интегралов / А. Д. Егоров, П. И. Соболевский, Л. А. Янович. – Минск: Наука и техника, 1985. – 309 с.
5. Egorov, A. D. Functional Integrals: Approximate Evaluation and Applications / A. D. Egorov, P. I. Sobolevsky, L. A. Yanovich. – Dordrecht: Kluwer Academic Publ., 1993. – 400 p. <https://doi.org/10.1007/978-94-011-1761-6>
6. Егоров, А. Д. Введение в теорию и приложения функционального интегрирования / А. Д. Егоров, Е. П. Жидков, Ю. Ю. Лобанов. – М.: Физматлит, 2006. – 400 с.
7. Feynman, R. P. Quantum mechanics and path integrals / R. P. Feynman, A. R. Hibbs. – New York: McGraw-Hill, 1965. – 382 p.
8. Horacio, S. W. Path Integrals for Stochastic Processes: an introduction / S. Wio Horacio. – World Scientific Publ. Company, 2013. – 176 p. <https://doi.org/10.1142/8695>
9. Применение функциональных интегралов к стохастическим уравнениям / Э. А. Айрян [и др.] // Мат. моделирование. – 2016. – Т. 28, № 11. – С. 113–125.
10. Метод функциональных интегралов для систем стохастических дифференциальных уравнений / Э. А. Айрян [и др.] // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2018. – Т. 54, № 3. – С. 279–289. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-3-279-289>
11. Малютин, В. Б. Вычисление функциональных интегралов с помощью последовательностей Штурма / В. Б. Малютин // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2016. – № 4. – С. 32–37.
12. Малютин, В. Б. О вычислении функциональных интегралов, порожденных некоторыми нерелятивистскими гамильтонианами / В. Б. Малютин // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2018. – Т. 54, № 1. – С. 44–49.
13. Малютин, В. Б. Приближенное вычисление функциональных интегралов, содержащих центробежный потенциал / В. Б. Малютин // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2019. – Т. 55, № 2. – С. 152–157. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-2-152-157>
14. Ichinose, T. Propagation of a Dirac particle. A path integral approach / T. Ichinose, H. Tamura // J. Math. Phys. – 1984. – Vol. 25, № 6. – P. 1810–1819. <https://doi.org/10.1063/1.526360>
15. Ichinose, T. The zitterbewegung of a Dirac particle in two-dimensional space-time / T. Ichinose, H. Tamura // J. Math. Phys. – 1988. – Vol. 29, № 1. – P. 103–109. <https://doi.org/10.1063/1.528162>
16. Шифф, Л. Квантовая механика / Л. Шифф. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1959. – 473 с.
17. Wilkinson, J. H. The Algebraic Eigenvalue Problem / J. H. Wilkinson. – Oxford, 1965. – 662 p.
18. Ландау, Л. Д. Курс теоретической физики / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М.: Наука, 1989. – Т. 3. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. – 768 с.
19. Auryan, E. A. Application of functional polynomials to approximation of matrix-valued functional integrals / E. A. Auryan, V. B. Malutin // Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Series Mathematics Informatics Physics. – 2014. – № 1. – P. 55–58.

### References

1. Yanovich L. A. *Approximate Evaluation of Continual Integrals with Respect to Gaussian Measures*. Minsk, Nauka i tekhnika Publ., 1976. 382 p. (in Russian).
2. Elepov B. S., Kronberg A. A., Mikhailov G. A., Sabelfeld K. K. *Solution of Boundary Value Problems by Monte-Carlo Method*. Novosibirsk, Science Publ., 1980. 174 p. (in Russian).
3. Sabelfeld K. K. Approximate evaluation of Wiener continual integrals by Monte-Carlo method. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki = Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1979, vol. 19, no. 1, pp. 29–43 (in Russian).

4. Egorov A. D., Sobolevsky P. I., Yanovich L. A. *Approximate Methods of Evaluation of Continual Integrals*. Minsk, Nauka i tekhnika Publ., 1985. 309 p. (in Russian).
5. Egorov A. D., Sobolevsky P. I., Yanovich L. A. *Functional Integrals: Approximate Evaluation and Applications*. Dordrecht, Kluwer Academic Publ., 1993. 400 p. <https://doi.org/10.1007/978-94-011-1761-6>
6. Egorov A. D., Zhidkov E. P., Lobanov Yu. Yu. *Introduction to Theory and Applications of Functional Integration*. Moscow, Fizmatlit Publ., 2006. 400 p. (in Russian).
7. Feynman R. P., Hibbs A. R. *Quantum Mechanics and Path Integrals*. New York, McGraw-Hill, 1965. 382 p.
8. Horacio S. Wio. *Path Integrals for Stochastic Processes: an introduction*. World Scientific Publ. Company, 2013. 176 p. <https://doi.org/10.1142/8695>
9. Ayryan E. A., Egorov A. D., Kulyabov D. S., Malyutin V. B., Sevastyanov L. A. Application of functional integrals to stochastic equations. *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2017, vol. 9, no. 3, pp. 339–348. <https://doi.org/10.1134/s2070048217030024>
10. Ayryan E. A., Egorov A. D., Kulyabov D. S., Malyutin V. B., Sevastyanov L. A. Functional integrals method for systems of stochastic differential equations. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, vol. 54, no. 3, pp. 279–289 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-3-279-289>
11. Malyutin V. B. Evaluation of functional integrals using Sturm sequences. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2016, no. 4, pp. 32–37 (in Russian).
12. Malyutin V. B. Evaluation of functional integrals generated by some nonrelativistic Hamiltonians. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, vol. 54, no. 1, pp. 44–49 (in Russian).
13. Malyutin V. B. Approximate evaluation of functional integrals with centrifugal potential. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2019, vol. 55, no. 2, pp. 152–157 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-2-152-157>
14. Ichinose T., Tamura H. Propagation of a Dirac particle. A path integral approach. *Journal of Mathematics and Physics*, 1984, vol. 25, no. 6, pp. 1810–1819. <https://doi.org/10.1063/1.526360>
15. Ichinose T., Tamura H. The zitterbewegung of a Dirac particle in two-dimensional space-time. *Journal of Mathematics and Physics*, 1988, vol. 29, no. 1, pp. 103–109. <https://doi.org/10.1063/1.528162>
16. Schiff L. *Quantum Mechanics*. New York, McGraw-Hill Book Company, 1955. 417 p.
17. Wilkinson J. H. *The Algebraic Eigenvalue Problem*. Oxford, 1965. 662 p.
18. Landau L. D., Lifshits E. M. *Course of Theoretical Physics. Volume 3. Quantum Mechanics. Nonrelativistic Theory*. Moscow, Nauka Publ., 1989. 768 p. (in Russian).
19. Ayryan E. A., Malyutin V. B. Application of functional polynomials to approximation of matrix-valued functional integrals. *Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Series Mathematics Informatics Physics*, 2014, no. 1, pp. 55–58.

### Информация об авторах

**Айрян Эдик Арташевич** – кандидат физико-математических наук, заведующий сектором, Лаборатория информационных технологий, Объединенный институт ядерных исследований (ул. Жолио-Кюри, 6, 141980, г. Дубна, Российская Федерация); Российский университет дружбы народов (РУДН) (ул. Миклухо-Маклая, 6, 117198, г. Москва, Российская Федерация). E-mail: ayrgan@jinr.ru

**Михал Гнатич** – доктор физико-математических наук, заместитель директора, Лаборатория теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова, Объединенный институт ядерных исследований (ул. Жолио-Кюри, 6, 141980, г. Дубна, Российская Федерация); Институт экспериментальной физики Словацкой академии наук (ул. Ватсонова, 47, 04001, г. Кошице, Словацкая Республика); Факультет естествознания, Университет Павла Йозефа Шафарика (Парк Ангелинум, 9, 04001, г. Кошице, Словацкая Республика). E-mail: hnatic@saske.sk

**Малютин Виктор Борисович** – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: malyutin@im.bas-net.by

### Information about the authors

**Edik A. Ayryan** – Ph. D. (Physics and Mathematics), Head of Sector, Laboratory of Information Technologies, Joint Institute for Nuclear Research (6, Joliot-Curie Str., 141980, Dubna, Russian Federation); RUDN University (6, Miklukho-Maklay Str., 117198, Moscow, Russian Federation). E-mail: ayrgan@jinr.ru

**Michal Hnatic** – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Deputy Director, Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, Joint Institute for Nuclear Research (6, Joliot-Curie Str., 141980, Dubna, Russian Federation); Institute of Experimental Physics of the Slovak Academy of Sciences (IEP SAS) (47, Watsonova Str., 04001, Košice, Slovak Republic); Faculty of Science P. J. Safarik University (9, Park Angelinum, 04001, Košice, Slovak Republic). E-mail: hnatic@saske.sk

**Victor B. Malyutin** – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Principal Researcher, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Sarganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: malyutin@im.bas-net.by

**ФИЗИКА**  
**PHYSICS**UDC 539.12;537.8;539.12–17;001.891.57:53  
<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-1-84-91>Received 25.10.2019  
Поступила в редакцию 25.10.2019**Yury A. Rusak, Leonid F. Babichev***Joint Institute for Power and Nuclear Research – Sosny,  
of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus***MONTE-CARLO SIMULATION OF THE 1<sup>ST</sup> ORDER HADRON-QGP PHASE  
TRANSITION IN HEAVY ION COLLISIONS USING A PARTON MODEL**

**Abstract.** Quark gluon plasma (QGP) is a special state of nuclear matter where quarks and gluons behave like free particles. Recently, a number of investigations of this state with high temperature and/or density have been conducted using collisions of relativistic and ultra-relativistic heavy nuclei. It is accepted that depending on the temperature and density, 1<sup>st</sup> or the 2<sup>nd</sup> order phase transitions take place in hadron matter during the formation of QGP. Herein, we have modeled heavy ion collisions using a HIJING Monte-Carlo generator, taking into account the description of the 1<sup>st</sup> order phase transition as a probabilistic process. We analyzed the behavior of the fluctuations of the total ( $N = N_+ - N_-$ ) and resultant ( $Q = N_+ - N_-$ ) electric charges of the system. Different phases were introduced using the BDMPS (Baier – Dokshitzer – Mueller – Piegne – Schiff) model of parton energy loss during crossing through a dense nuclear medium.

**Keywords:** high energy physics, Monte-Carlo simulation, heavy ion collisions, fluctuations, quark-gluon plasma, HIJING, phase transitions

**For citation.** Rusak Yu. A., Babichev L. F. Monte-Carlo simulation of the 1<sup>st</sup> order hadron-QGP phase transition in heavy ion collisions using parton model. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2020, vol. 56, no. 1, pp. 84–91. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-1-84-91>

**Ю. А. Русак, Л. Ф. Бабичев***Объединенный институт энергетических и ядерных исследований – Сосны  
Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь***МОНТЕ-КАРЛО МОДЕЛИРОВАНИЕ ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА АДРОНЫ-КГП  
В СТОЛКНОВЕНИЯХ ТЯЖЕЛЫХ ИОНОВ С ПОМОЩЬЮ ПАРТОННОЙ МОДЕЛИ**

**Аннотация.** Кварк-глюонная плазма (КГП) является особым состоянием ядерной материи, при котором кварки и глюоны ведут себя как свободные частицы. В настоящее время проводятся исследования этого состояния вещества с высокими температурой и/или плотностью с помощью столкновений релятивистских и ультрарелятивистских тяжелых ядер. Считается, что адронная материя испытывает (в зависимости от температуры и плотности) фазовый переход первого или второго рода при образовании КГП. В данной статье были промоделированы столкновения тяжелых ионов с помощью Монте-Карло генератора HIJING с учетом описания фазового перехода первого рода как вероятностного процесса и проанализировано поведение флуктуаций полного ( $N = N_+ - N_-$ ) и результирующего ( $Q = N_+ - N_-$ ) электрических зарядов системы. Разные фазы были заданы с помощью BDMPS (Baier – Dokshitzer – Mueller – Piegne – Schiff) модели потери партонной энергии при прохождении через плотное ядерное вещество.

**Ключевые слова:** физика высоких энергий, Монте-Карло моделирование, тяжелые ионы, столкновения, флуктуации, кварк-глюонная плазма, HIJING, фазовые переходы

**Для цитирования.** Русак, Ю. А. Монте-Карло моделирование фазового перехода адроны-КГП в столкновениях тяжелых ионов с помощью партонной модели / Ю. А. Русак, Л. Ф. Бабичев // Вест. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2020. – Т. 56, № 1. – С. 84–91. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-1-84-91>

**Introduction.** The search for quark gluon plasma (QGP) has been one of the key targets of high energy experiments for the last decade. Its existence comes from the asymptotic freedom – the fundamental property of QCD. However, since it is hard to theoretically calculate the properties of QCD matter for finite resultant baryon densities, the burden of finding and determining the order of the QGP phase transition falls on the experiment. Also, we need observables that are sensitive to the phase transition (namely, to its order) and can be experimentally measured. In 2005 four international collaborations announced the results of their measurements and the discovery of QGP (for example, [1]). Still, there are dozens of yet open questions (strangeness production, order of the phase transition, location of the critical point etc.). Some of the observables behavior can be explained without implementing QGP or appear in pp or pA collisions (where the formation of QGP is still an open question) [2–5]. So, to explore this produced state of QCD matter, different experiments are being conducted (NA61, BES) or planned (NICA, FAIR). The last two are especially interesting since they are scanning the part of the phase diagram, in which both 1<sup>st</sup> and 2<sup>nd</sup> order phase transitions are possible.

One of the experimental observables for the phase transition is fluctuations (for example, critical opalescence in liquids – the result of the density fluctuations – is a signal for the critical point of the liquid/gas phase transition). In this paper we will focus on the fluctuations of the electric charge (both full and resultant). For simulations, we will use the HIJING v.1.411 [6] model, since it operates with microscopic parameters, and we can implement different phases by, for example, using a parton energy loss formula from Baier et.al. [7]. Moreover, it is freely accessible (unlike hijing 2.0 and hijing ++).

We will also simulate the first order phase transition as a probabilistic process that depends on the collision c. m. energy, where fluctuations show nonlinearities or other non-typical behavior in the 50% probability point. The goal of this paper is to analyze the behavior of the total and resultant electric charge cumulants in terms of the applied models with respect to kinematic cuts.

The results of this work can be used for describing the experimental data of heavy ion collisions.

**1. QCD Phase Diagram.** Quantum chromodynamics (QCD) is the theory that describes strong interaction. According to it, hadrons consist of quarks (3 for baryons, quark-antiquark for mesons). But unlike Quantum electrodynamics, in which the potential between charged particles decreases with increasing the distance between them, QCD has a very important feature – asymptotic freedom. It means that hot/dense matter must be weakly coupled [8]. This feature provides the idea of the new form of nuclear matter – quark gluon plasma. This is only a high temperature feature ( $T \geq 105\text{--}200$  MeV). At low temperatures, quarks are locked inside hadrons via a basic property of the QCD vacuum – confinement [9]. So, in the experiment we can observe only hadronic matter.

Figure 1 shows the QCD phase diagram. Each point of the diagram presents a stable thermodynamic state. The thermodynamic parameters are the temperature and the baryon-chemical potential, which expresses the net-baryon density of the system. The basic theory, which is used to build such diagrams, is lattice QCD. It is worth saying that lattice QCD works only in the  $\mu_B \approx 0$  area. As it can be seen, with vanishing baryo-chemical potentials lattice QCD predicts a smooth crossover between hadronic matter and QGP. However, with increasing  $\mu_B$  the sign problem appears, which makes the usage of lattice QCD impossible. This area of the phase diagram is very important: it contains the 1<sup>st</sup> order phase transitions and critical points. To map the phase diagram, various  $\mu_B \approx 0$  extrapolation and approximation techniques are used. So, the precise boundaries of phases are not known experimentally [10].

Therefore, its exploration and clarification falls on experiments, and to be more specific – on nucleon-nucleon, nucleon-ion, and ion-ion collisions. QGP, for example, is expected to be not produced in nucleon-nucleon collisions (and nucleon-ion, too). The general evolution of heavy ion collisions is as follows. Two nuclei in the center-of-mass system look like two Lorentz-contracted ‘pancakes’ with a longitudinal extent smaller by a factor  $\gamma \sim \sqrt{S_{NN}} / 2$  for high energy collisions. After the collision, at a proper time  $\tau = \sqrt{t^2 - z^2} = 0$  fm/c two nuclei hit. The first processes that occur at this time are hard ones, involving a large momentum transfer,  $Q \geq 10$  GeV/c. Hard particles (the transverse momenta are of the order of  $Q$ ) are born during this stage. After that, the bulk of the partonic constituents begin to interact. They form a dense medium, which is not in a thermodynamic equilibrium. After that, there are 2 scenarios: the produced partons interact or not (or the interaction is negligible). The second one implies

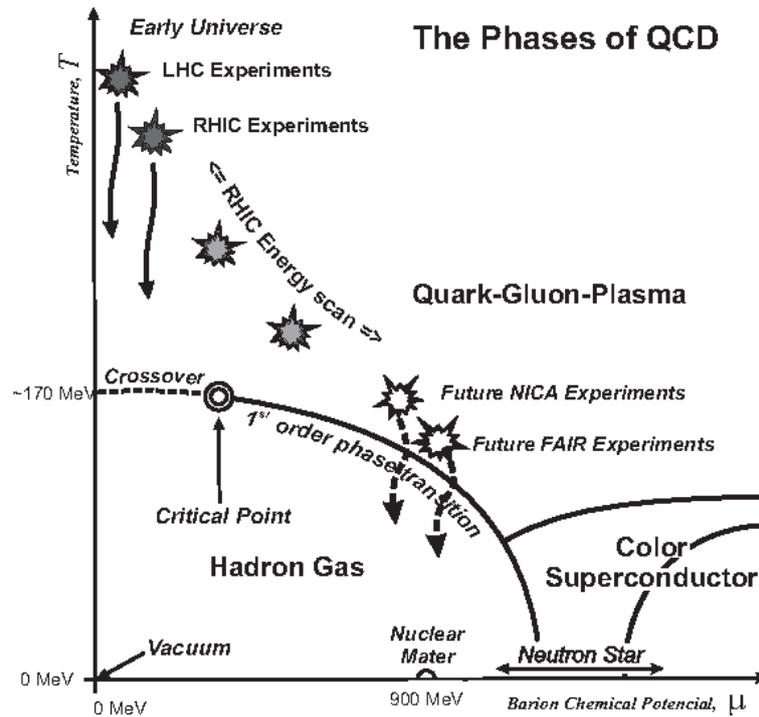


Fig. 1. The QCD Phase Diagram

Рис. 1. Фазовая диаграмма КХД

rapid separation from each other and hadronization (this would be in nucleon-nucleon or nucleon-ion collisions). The first one implies that there is thermalization and, as a result, quark-gluon plasma, having a local equilibrium, is produced. As will be seen below, it means that if we know how this stage of collision goes, we can tell whether QGP is produced or not. After that, the matter becomes less and less dense, cools to the phase transition temperature, and eventually hadronizes and freezes out [11].

We need to point out, in such experiments we can control 2 parameters: the beam energy (which is connected to the collision energy in the c.m.s. system,  $\sqrt{S_{NN}}$ ) and the number of participating nuclei ( $A$ ). Currently, the connection between the experimental parameters and the ones used in the phase diagram is given by freeze-out parametrization [12].

To find out whether QGP is produced or not, there are lots of observables to look at: elliptic flow, jet quenching, ratios of particle abundances, strangeness enhancement, etc. Among them, fluctuations are the experimental observables that are sensitive to the existence of the phase transition and its type and can provide information about the effective degrees of freedom in a system.

**2. Fluctuations and phase transitions.** As is pointed out, the phase transition from QGP to hadrons can be crossover, 1<sup>st</sup> order or 2<sup>nd</sup> order, depending on the control parameters of the QCD phase diagram.

During the 1<sup>st</sup> order phase transitions, the new phase can be formed by a spontaneous emergence of these phase (hadron) nuclei inside the old state (QGP). This emergence arises from the fluctuations of density, energy, and associated quantities. Depending on the thermodynamic properties and evolution of the system, the nuclei of the new phase can grow into the new phase or just disappear. In certain cases, it is possible to have nonperturbative large-amplitude fluctuations before the critical temperature is reached, which promotes phase mixing [13]. System dynamics will be sensitive to the amount of the phase mixing at the critical temperature. For the large phase mixing scenario, the transition takes place through the percolation of the hadronic phase, for the lower – as is shown above. During the 1<sup>st</sup> order phase transitions the phases can coexist along the 1<sup>st</sup> order transition curve, which ends with the critical point.

Summarizing the above statements, we can assume that:

1. The closer the system is to the critical point, the smoother the distribution of the fluctuations of observables is.

2. If the phases have the same probability for existence during the 1<sup>st</sup> order phase transition, the fluctuations of observables show it.

One of such observables is the fluctuations of conserved quantities (electric charge ( $Q$ ), baryon number ( $B$ ), and strangeness ( $S$ )). According to [14] and the cited literature there, to construct the fluctuation measures, we need to construct the cumulants of quantities distributions with respect to the linear response relation:

$$\begin{aligned} M_q &= \langle N_q \rangle = VT^3 \chi_1^q, & C_2^q &= \langle (\delta N_q)^2 \rangle = VT^3 \chi_2^q, \\ C_3^q &= \langle (\delta N_q)^3 \rangle = VT^3 \chi_3^q, & C_4^q &= \langle (\delta N_q)^4 \rangle - 3(C_2^q)^2 = VT^3 \chi_4^q, \end{aligned} \quad (1)$$

$$S_q = \frac{C_3^q}{(C_2^q)^{3/2}}, \quad \kappa_q = \frac{C_4^q}{(C_2^q)^2},$$

where  $q = B, Q, C, N_q$  are the number of particles carrying the corresponding charge,  $\chi^q$  is the susceptibility of the corresponding charge,  $\delta N_q = N_q - \langle N_q \rangle$ ,  $\kappa_q$  is the kurtosis,  $S_q$  is the skewness,  $V$  is the system (fireball) volume, and  $T$  is the system temperature. During the phase transition,  $C_2^q$  has the peak, and  $C_3^q$  changes the sign.

After that, we construct the following ratios of the cumulants:

$$\begin{aligned} \frac{C_2^q}{C_1^q} &= \frac{\chi_2^q}{\chi_1^q}, & \frac{C_3^q}{C_2^q} &= \frac{\chi_3^q}{\chi_2^q}, \\ \frac{C_4^q}{C_2^q} &= \frac{\chi_4^q}{\chi_2^q}, & \frac{C_4^q}{C_3^q} &= \frac{\chi_4^q}{\chi_3^q}. \end{aligned} \quad (2)$$

Constructing the ratios of the cumulants cancels the volume fluctuations. In this paper, we focus only on the electric charge cumulants and susceptibilities ( $q = Q$ ).

Now we assume that centrality, required for the 1<sup>st</sup> order phase transition, is achieved, the phase equilibrium c.m.s. energy is 120 GeV, and the probability of the transition ( $\omega$ ) versus  $\sqrt{S_{NN}}$  has the following distribution:

$$\begin{aligned} \omega_i(x_i) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \langle x^2 \rangle} \exp\left(-\frac{x_i^2}{2 \langle x^2 \rangle}\right), \\ x_i &= \left(\sqrt{S_{NN}}\right)_i - \langle \sqrt{S_{NN}} \rangle, \\ \langle x^2 \rangle &= \frac{\sum_{i=1}^N \left[ \left(\sqrt{S_{NN}}\right)_i - \langle \sqrt{S_{NN}} \rangle \right]^2}{N}, \end{aligned} \quad (3)$$

where  $\left(\sqrt{S_{NN}}\right)_i$  is the c.m.s. energy in the  $i$ -th event,  $N$  is the number of events,  $\langle \sqrt{S_{NN}} \rangle$  is the binodal c.m.s. energy among all  $N$  events, and  $\langle x^2 \rangle$  characterizes the intensity of the fluctuations that arise in the system (density, temperature e.t.c) (Fig. 2).

**3. Simulation and results.** As been said before, the production of QGP depends on the properties of the medium emerging during heavy ion collisions. If the medium is cold, then there is no QGP production at the later stages. In [15] the properties of a QCD medium, such as  $\lambda$ ,  $\frac{dE}{dz}$ , are calculated and used in this analysis. The results, obtained in [14], are taken by us with the following simplifications: we ignore the dependence of the parton energy loss  $\frac{dE}{dz}(\alpha_s)$ , and assume that  $\alpha_s = 1/3$  for the hot QCD matter and  $\alpha_s = 1/2$  for the cold QCD matter, the plasma temperature  $T = 250$  MeV, and the length of the QCD medium  $L = 10$  fm. In further works these simplifications will be removed. Simulations are made in

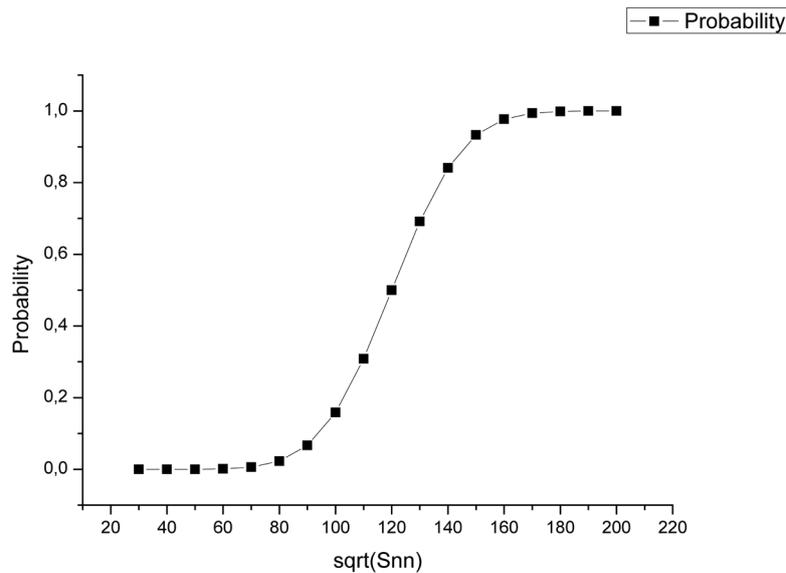


Fig. 2. The probability distribution of the 1st order phase transition in event-by-event collisions versus  $\sqrt{S_{NN}}$

Рис. 2. Распределение вероятностей фазового перехода первого рода по  $\sqrt{S_{NN}}$  при пособытийных столкновениях

HIJING since this generator allowed us to specify the necessary quantities as free parameters, able to be calculated with the implied simplified model.

Thus, for the hot QCD matter we have the following parameters: the gluon energy loss  $\frac{dE}{dz}$  is 6 (the energy loss of a quark is half of that in a gluon), and the mean free path  $\lambda$  is 1.

For the cold QCD matter the gluon energy loss is 0.4, and the mean free path is 6.

The general simulation features:  $a$  and  $b$  are the parameters of the symmetric Lund fragmentation function  $a = 2.2$ ,  $b = 0.5$  [16], the K factor is taken default (2), the jet quenching is turned on, the initial and final state radiation is turned on for both cases. Moreover, for the total charge the rapidity cut is  $-1 \leq y \leq 1$  and  $p_T$  cut is  $0 \leq p_T \leq 2$  GeV/c and only  $K^\pm$ ,  $p^\pm$ ,  $\pi^\pm$  are used for the analysis

Firstly, we will explore the total charge  $N = N_+ - N_-$  where  $N_+$  is the number of positive and negative charged particles, respectively. Although it is not a conserved quantity, it is still worth to study its cumulant behavior since it is related to the system entropy and, moreover, its “conservation” is described in [17].

The results of the simulations are given in the Figs., where the following designations are used: Hadron is the simulation with the cold hadron matter parameters, QGP is the simulation with the hot matter parameters, Gauss is the simulation with respect to the probability distribution (3)). Figure 3 shows the dependence of the mean number of charged particles vs. the collision energy in the c.m.s with respect to the probability of the phase transition during the collision. In this and the following ones the hadron probability is 0, the QGP probability is 1 and the Gauss is according to the distribution (4). As can be seen, there is a linear dependence consistent with the theoretical predictions.

Figure 4 shows the dependence of the cumulant (susceptibilities) ratios vs. the collision energy. Although the ratios are different for hadron and QGP matter (but linear in both cases), they show non-linear behavior in the phase equality region. And yet, these results are consistent with the predictions for the 1<sup>st</sup> order phase transitions made above.

The fluctuations of the resultant electric charge ( $Q = N_+ - N_-$ ) are analyzed, but without any kinematic cuts and for all charged particles. Figure 5 shows the dependence of the resultant charge cumulant relations of the c.m.s. collision energy. As can be seen, HIJING with the parameters described above doesn’t show any changes in the cumulant behavior (since droplets do not produce any additional resultant charge [17]).

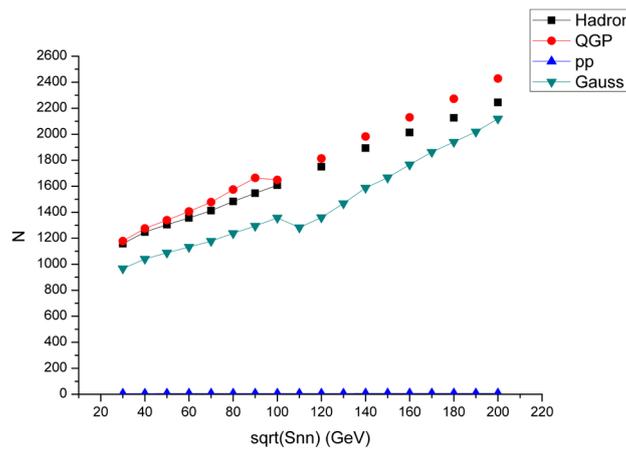


Fig. 3. The mean multiplicity of the charged particles produced in heavy ion collisions vs. the collision energy

Рис. 3. Зависимость средней множественности заряженных частиц, образованных в столкновениях тяжелых ионов, от энергии столкновения

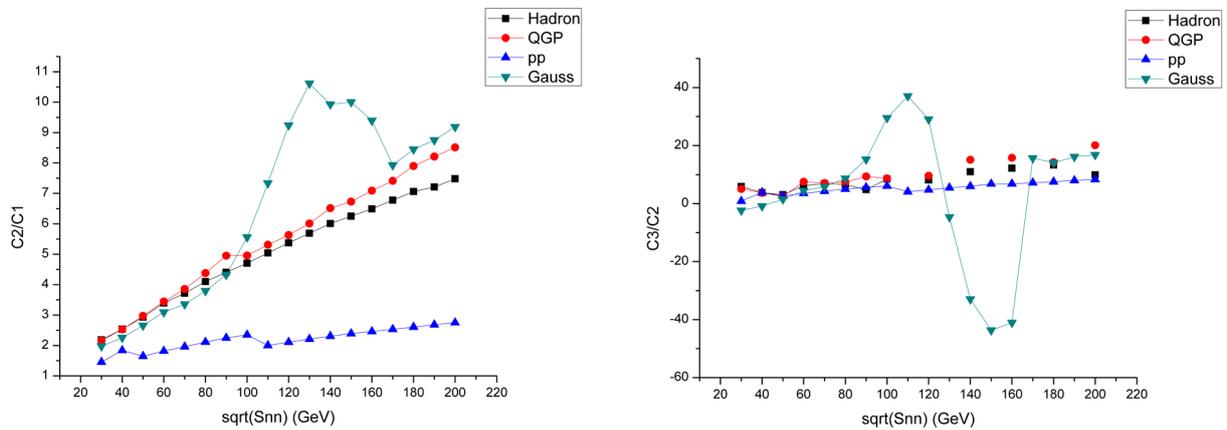


Fig. 4. The dependence of the ratios of the total charge cumulants of the system on the collision energy if we do and don't take into account the phase transient in the kinematic region described above

Рис. 4. Зависимость соотношений кумулянтов полного заряда системы с учетом и без учета фазового перехода от энергии столкновений в описанной выше кинематической области

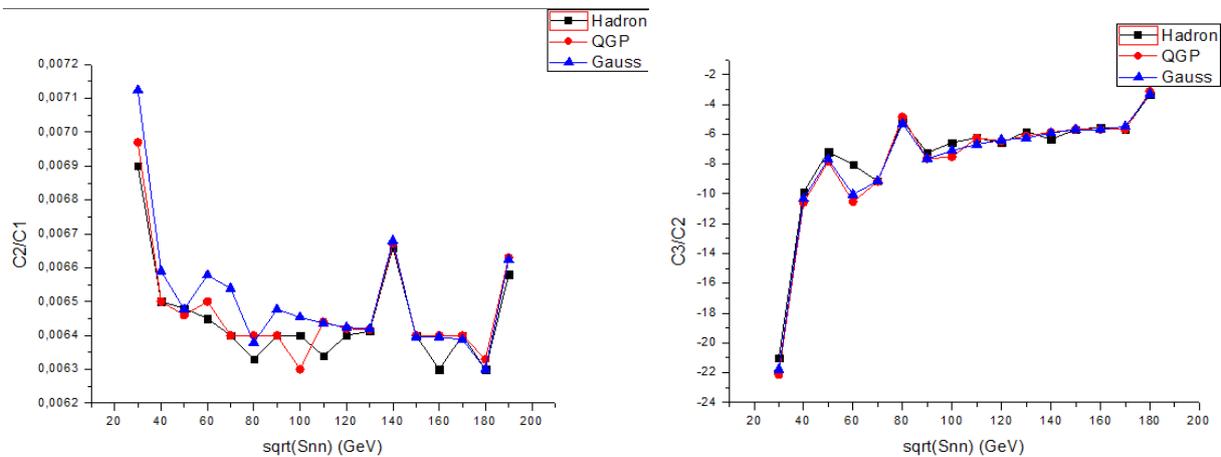


Fig. 5. The dependence of the ratios of the resultant charge cumulants of the system on the collision energy if we take into account and don't take into account the phase transitions.

Рис. 5. Зависимость соотношений кумулянтов результирующего заряда системы с учетом и без учета фазовых переходов от энергии столкновений

**Conclusions.** In this paper, we implemented extra fluctuations due to the 1<sup>st</sup> order phase transition to QGP using HIJING. To imply different phases, we used partonic jet energy loss and mean path calculations by Baier et. al. We used a simplified model, as the full model will be implemented later. After the implementation, we analyzed the fluctuations of the resultant and total electric charge for different probabilities of the phase transition. Simulations for the total charge were made with the following kinematic cuts:  $-1 \leq y \leq 1$ ,  $0.2 \leq p_T \leq 2$  GeV.

The results are the following:

1. The total charge cumulants behave according to the theoretical expectations.
2. HIJING with the mentioned parameters and the used approach doesn't reproduce any changes in the resultant charge cumulants behavior, independently of the type of the produced matter during the collision.

Thus, this study will proceed in the following directions:

1. Increasing statistics for using further cumulants.
2. Implying the full model for parton energy loss in the medium.
3. Analyzing the cumulants of other conserved quantities (resultant strangeness, net baryon charge) and the cumulants of total quantities.
4. Comparison with the experimental data with respect to efficiency corrections [14].

## References

1. Adams J. Experimental and theoretical challenges in the search for the quark gluon plasma: The STAR Collaboration's critical assessment of the evidence from RHIC collisions. *Nuclear Physics A*, 2005, vol. 757, pp. 102–183.
2. Blume C. Open questions in the understanding of strangeness production in HIC – Experiment perspective. *Proceedings for the Strange Quark Matter 2017 conference*. Utrecht, Netherlands, 2017. <https://doi.org/10.1051/epjconf/201817103001>
3. Biswarup P. Charmonium production in p-Pb collisions with ALICE at the LHC. *European Physical Society Conference on High Energy Physics, Italy, 5–12 July 2017*. Venice, 2017. <https://doi.org/10.22323/1.314.0182>
4. Shuryak E. Strongly coupled quark-gluon plasma in heavy ion collisions. *Reviews of Modern Physics*, 2017, vol. 89, no. 3, pp. 61. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.89.035001>
5. Koch, P., Muller. B., Rafelski J. From strangeness enhancement to quark gluon plasma discovery. *International Journal of Modern Physics A*, 2017, vol. 32, no. 31, pp. 1730024. <https://doi.org/10.1142/S0217751X17300241>
6. Xian Nian Wang, Gyulassy M. HIJING 1.0: A Monte-Carlo Program for Parton Parton and Particle Production in High Energy Hadronic and Nuclear Collisions. *Computer Physics Communications*, 1994, vol. 83, no. 2–3, pp. 307–331. [https://doi.org/10.1016/0010-4655\(94\)90057-4](https://doi.org/10.1016/0010-4655(94)90057-4)
7. Baier R., Dokshitzer Yu. L., Mueller A. H., Piegne S., Schiff D. Radiative energy loss of high energy quarks and gluons in a finite volume quark-gluon plasma. *Nuclear Physics B*, 1997, vol. 483, no. 1–2, pp. 291–320, [https://doi.org/10.1016/S0550-3213\(96\)00553-6](https://doi.org/10.1016/S0550-3213(96)00553-6)
8. Shuryak E. V. Theory of Hadronic Plasma. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 1978, vol. 74, pp. 408–420.
9. Bass S. A., Gyulassy M., Stoecker H., Greiner W. Signatures of Quark-Gluon-Plasma formation in high energy heavy-ion collisions: A critical review. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 1999, vol. 25, no. 3, pp. R1–R57. <https://doi.org/10.1088/0954-3899/25/3/013>.
10. Fukushima K., Hatsuda T. The Phase Diagram of dense QCD. *Reports on Progress in Physics*, 2010, vol. 74, no. 1, pp. 014001. <https://doi.org/10.1088/0034-4885/74/1/014001>
11. Lancu E. *QCD in heavy ion collisions*. 2012. Available at: <https://arxiv.org/abs/1205.0579v1>
12. Cleymans J., Oeschler H., Redlich K., Wheaton S. Comprasion of Chemical Freeze-out Criteria in Heavy Ion Collisions. *Physical Review C*, 2006, vol. 73 no. 3, 15 p. <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.73.034905>
13. Mohanty A. K., Shukla P., Gleiser M. Pre-transitional effects in rapidly expanding quark gluon plasmas. *Physical Review C*, 2002, vol. 65, no. 3, 7 p. <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.65.034908>
14. Luo X., Xu N. Search for the QCD Critical Point with Fluctuations of Conserved Quantities in Relativistic Heavy-Ion Collisions at RHIC: An Overview. *Nuclear Science and Techniques*, 2017, vol. 28, no. 8, 42 p. <https://doi.org/10.1007/s41365-017-0257-0>
15. Baier R., Schiff D., Zakharov B. G. Energy loss in perturbative QCD. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, 2000, vol. 50, no. 1, pp. 37–69. <https://doi.org/10.1146/annurev.nucl.50.1.37>
16. Zi-Wei Lin, Che Ming Ko, Bao-An Li, Bin Zhang, Subrata Pal. A Multi-Phase Transport Model for Relativistic Heavy Ion Collisions. *Physical Review C*, 2005, vol. 72, no. 6, 33 p. <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.72.064901>
17. Heiselberg H. Event-by-event physics in relativistic heavy ion collisions. *Physics Reports*, 2001, vol. 351, no. 3, pp. 161–194. [https://doi.org/10.1016/S0370-1573\(00\)00140-X](https://doi.org/10.1016/S0370-1573(00)00140-X)

**Information about the authors**

**Yury A. Rusak** – Junior Researcher, Joint Institute for Power and Nuclear Research – Sosny of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus (99, Akademika Krasina Str., 220109, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: wevelyura@gmail.com

**Leonid F. Babichev** – Ph. D. (Physics and Mathematics), Head of Laboratory, Joint Institute for Power and Nuclear Research – Sosny of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus (99, Akademika Krasina Str., 220109, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: babichev@sosny.bas-net.by

**Информация об авторах**

**Русак Юрий Александрович** – младший научный сотрудник, Объединенный институт энергетических и ядерных исследований – Сосны Национальной академии наук Беларуси (ул. Академика Красина, 99, 220109, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: wevelyura@gmail.com

**Бабичев Леонид Филиппович** – кандидат физико-математических наук, заведующий лабораторией, Объединенный институт энергетических и ядерных исследований – Сосны Национальной академии наук Беларуси (ул. Академика Красина, 99, 220109, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: babichev@sosny.bas-net.by

ISSN 1561-2430 (Print)

ISSN 2524-2415 (Online)

УДК 517.958:537.311.1;621.315.592

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-1-92-101>

Поступила в редакцию 15.01.2020

Received 15.01.2020

**Н. А. Поклонский, А. Н. Деревяго, С. А. Вырко***Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь***МОДЕЛЬ СТАЦИОНАРНОЙ МИГРАЦИИ СВОБОДНЫХ И ПРЫГАЮЩИХ МЕЖДУ АКЦЕПТОРАМИ ДЫРОК В КРИСТАЛЛИЧЕСКОМ ПОЛУПРОВОДНИКЕ**

**Аннотация.** В диффузионно-дрейфовом приближении построена феноменологическая теория сосуществующих миграции дырок  $v$ -зоны и миграции дырок посредством прыжков с водородоподобных акцепторов в зарядовом состоянии (0) на акцепторы в зарядовом состоянии (-1). Рассматривается кристаллический полупроводник  $p$ -типа при постоянной температуре, к которому приложено внешнее стационарное электрическое поле. В линейном приближении впервые получены аналитические выражения для длины экранирования статического электрического поля и длины диффузии дырок  $v$ -зоны и дырок, квазилокализованных на акцепторах. Представленные соотношения как частные случаи содержат известные выражения. Показано, что прыжковая миграция дырок по акцепторам приводит к уменьшению и длины экранирования, и длины диффузии.

**Ключевые слова:** полупроводник  $p$ -типа, водородоподобные примеси, прыжки дырок, длина экранирования, длина диффузии

**Для цитирования.** Модель стационарной миграции свободных и прыгающих между акцепторами дырок в кристаллическом полупроводнике / Н. А. Поклонский [и др.] // Вест. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2020. – Т. 56, № 1. – С. 92–101. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-1-92-101>

**Nikolai A. Poklonski, Aliaksandr N. Dzeraviah, Sergey A. Vyrko***Belarusian State University, Minsk, Belarus***MODEL OF STATIONARY MIGRATION OF FREE AND HOPPING VIA ACCEPTORS HOLES IN A CRYSTALLINE SEMICONDUCTOR**

**Abstract.** In the diffusion-drift approximation, we have constructed a phenomenological theory of the coexisting migration of  $v$ -band holes and holes by means of hopping from hydrogen-like acceptors in the charge state (0) to acceptors in the charge state (-1). A  $p$ -type crystalline semiconductor is considered at a constant temperature, to which an external stationary electric field is applied. In the linear approximation, analytical expressions for the screening length of the static electric field and the length of the diffusion of  $v$ -band holes and the holes quasilocated on acceptors are obtained for the first time. The presented relations, as special cases, contain well-known expressions. It is shown that the hopping migration of holes via acceptors leads to a decrease in the screening length and in the diffusion length.

**Keywords:**  $p$ -type semiconductor, hydrogen-like impurities, hopping of holes, screening length, diffusion length

**For citation.** Poklonski N. A., Dzeraviah A. N., Vyrko S. A. Model of stationary migration of free and hopping via acceptors holes in a crystalline semiconductor. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2020, vol. 56, no. 1, pp. 92–101 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-1-92-101>

**Введение.** Полупроводники с дырочным механизмом электрической проводимости наряду с микроэлектроникой находят применение в биомедицине и термометрии. Так, легированные атомами бора алмазы  $p$ -типа используются в качестве внедряемых в мозговую ткань человека электродов для детектирования активности нейронов [1]. Алмазы с дырочной электропроводностью применяются также в электрохимии при решении проблем очистки воды [2]. Трансмутационно легированные атомами галлия кристаллы германия  $p$ -типа используются в качестве прецизионных терморезисторов в области температуры жидкого гелия [3]. При этом для оптимального сопряжения полупроводниковых материалов с электрической цепью важна температура, при которой проявляется прыжковая электропроводность (см., напр., [4]).

При исследовании температурной зависимости электропроводности ковалентных полупроводниковых кристаллов  $p$ -типа на постоянном токе в работе [5] введена температура  $T_j$ , при которой в отсутствие внешнего фотовозбуждения удельная электропроводность  $\sigma_p$ , обусловленная дырками в валентной зоне ( $v$ -зоне), приблизительно равна удельной прыжковой электропроводности  $\sigma_h$  за счет миграции дырок напрямую между акцепторами.

Конкретно в работах [5, 6], исходя из теоремы вириала (см., напр., [7]), установлено, что для кристаллического полупроводника  $p$ -типа с водородоподобными примесями

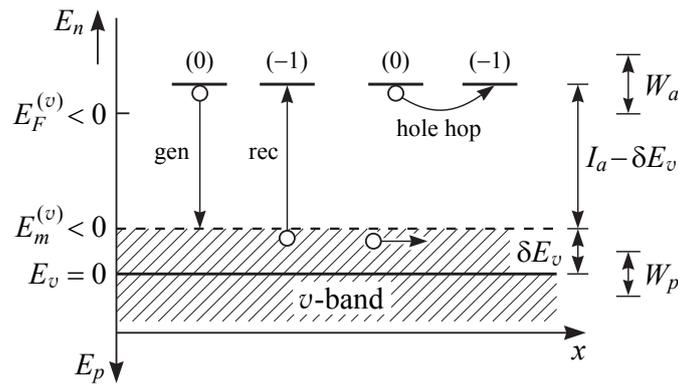
$$T_j = \frac{0,728}{k_B} \frac{e^2}{4\pi\epsilon} (KN)^{1/3}, \quad (1)$$

где  $k_B$  – постоянная Больцмана,  $e$  – элементарный заряд,  $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$  – низкочастотная абсолютная диэлектрическая проницаемость кристаллической матрицы ( $\epsilon_r = 5,7$  для алмаза,  $\epsilon_r = 15,4$  для германия),  $\epsilon_0$  – электрическая постоянная,  $N = N_0 + N_{-1}$  – концентрация акцепторов в зарядовых состояниях (0) и (-1) в единицах элементарного заряда,  $KN$  – концентрация доноров, полностью находящихся в зарядовом состоянии (+1). Степень компенсации  $0 < K < 1$  определяется как отношение концентрации неосновных (компенсирующих) примесей к концентрации основных (легирующих) примесей. При температуре  $T > T_j$  прыжковый механизм переноса дырок не реализуется. Но при низких температурах, когда температура  $T < T_j$ , концентрация дырок в  $v$ -зоне пренебрежимо мала, электрическая проводимость определяется только прыжками дырок по акцепторам. Типичные значения температуры  $T_j$  для кристаллических ковалентных полупроводников варьируются в широком диапазоне. Так, для умеренно ( $0,1 < K < 0,5$ ) компенсированного атомами азота (как водородоподобными донорами) алмаза  $p$ -типа, легированного атомами бора (как водородоподобными акцепторами)  $T_j \approx 300$  К при  $K \approx 0,25$  и  $N \approx 1 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$  [6, 8]; концентрация бора, соответствующая низкотемпературному переходу алмаза из изоляторного состояния в металлическое (переходу Мотта),  $N_M \approx 4 \cdot 10^{20} \text{ см}^{-3}$  [9]. Для сравнения в кристаллах  $p$ -Ge:Ga при степени компенсации  $K \approx 0,35$  атомами галлия (как акцепторы) атомами мышьяка (как донорами) температура  $T_j \approx 6$  К при концентрации атомов галлия  $N \approx 10^{15} \text{ см}^{-3}$  [5]; концентрация галлия, соответствующая переходу Мотта,  $N_M \approx 1,85 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$  [10].

Цель работы – расчет длины экранирования внешнего стационарного электрического поля и длины диффузии как дырок  $v$ -зоны, так и дырок, прыгающих по неподвижным водородоподобным акцепторам, в ковалентных кристаллических полупроводниках  $p$ -типа в условиях сосуществования зонной и прыжковой электропроводностей, т. е. при температуре  $T \approx T_j$ .

**Постановка задачи.** Рассмотрим однородный полупроводник  $p$ -типа с водородоподобными атомами примесей в состоянии термодинамического равновесия, когда выполняется условие электрической нейтральности  $p + KN = N_{-1}$ , где  $p$  – концентрация дырок  $v$ -зоны (каждая с зарядом  $e > 0$ ),  $KN$  – концентрация компенсирующих акцепторы положительно заряженных доноров,  $N_{-1}$  – концентрации отрицательно заряженных акцепторов. В соответствии с рисунком полагаем, что обмен дырками между акцепторами в зарядовых состояниях (0) и (-1) осуществляется как через  $v$ -зону (переход дырки от электрически нейтрального акцептора в  $v$ -зону с последующим переходом на акцептор в зарядовом состоянии (-1)), так и посредством термически активированного туннелирования дырки между акцепторами (прыжковый переход (0)  $\rightarrow$  (-1)). В результате этих переходов дырок зарядовые состояния (0) и (-1) неподвижных акцепторов мигрируют по кристаллу. Согласно [11–13], в термодинамическом равновесии концентрация прыгающих по водородоподобным акцепторам дырок есть  $N_h = N_0 N_{-1} / (N_0 + N_{-1})$ .

Уточним используемые термины. При дрейфе и диффузии дырок валентной зоны (т. е. делокализованных электронных вакансий в ковалентных химических связях атомов кристалла) мигрирует положительный заряд. При переходе дырок, квазилокализованных на акцепторах в зарядовом состоянии (0), на акцепторы в зарядовом состоянии (-1) в кристаллической матрице как бы мигрирует отрицательный заряд ионов.



Энергия электрона  $E_n$  и энергия дырки  $E_p$  в зависимости от координаты  $x$  на одноэлектронной зонной диаграмме кристаллического полупроводника  $p$ -типа;  $E_v = 0$  – потолок валентной зоны нелегированного кристалла: «gen» – тепловой выброс дырки из акцептора в зарядовом состоянии (0) в  $v$ -зону; «rec» – захват дырки  $v$ -зоны на акцептор в зарядовом состоянии (-1), показана миграция дырки  $v$ -зоны (зонная электропроводность); «hole hop» – термически активированный прыжок дырки между акцепторами (0)  $\rightarrow$  (-1) (прыжковая электропроводность);  $I_a > 0$  – энергия термической ионизации одиночного (уединенного) акцептора;  $E_F^{(v)} < 0$  – уровень Ферми, отсчитанный от потолка  $v$ -зоны ( $E_v = 0$ );  $E_m^{(v)} < 0$  – порог подвижности для дырок  $v$ -зоны (относительно  $E_v = 0$ );  $\delta E_v = -E_m^{(v)} > 0$  – сдвиг потолка  $v$ -зоны в глубь запрещенной зоны полупроводника из-за наличия примесей;  $W_a$  и  $W_p$  – среднеквадратичные флуктуации уровней энергии акцепторов и потенциальной энергии дырок  $v$ -зоны

The electron energy  $E_n$  and the hole energy  $E_p$  as a function of the  $x$  coordinate in the  $p$ -type crystalline semiconductor single-electron band diagram;  $E_v = 0$  is the top of the valence band of an undoped crystal: “gen” is a thermal emission of the hole from the acceptor in the charge state (0) into the  $v$ -band; “rec” is a capture of the  $v$ -band hole on the acceptor in the charge state (-1), the migration of the  $v$ -band hole (band-like electrical conductivity) is shown; “hole hop” is a thermally activated hole hop between acceptors (0)  $\rightarrow$  (-1) (hopping conductivity);  $I_a > 0$  is the energy of the thermal ionization of a single acceptor;  $E_F^{(v)} < 0$  is the Fermi level counted from the top of the  $v$ -band ( $E_v = 0$ );  $E_m^{(v)} < 0$  is the mobility edge for the  $v$ -band holes (relative to  $E_v = 0$ );  $\delta E_v = -E_m^{(v)} > 0$  is the shift of the top of the  $v$ -band into the semiconductor band gap due to the presence of impurities;  $W_a$  and  $W_p$  are the mean-square fluctuations of the energy levels of acceptors and the potential energy of the  $v$ -band holes

**Система нелинейных дифференциальных уравнений.** Рассмотрим миграцию дырок в полупроводниковом образце  $p$ -типа при приложении к нему стационарного электрического поля напряженностью  $E$ . Выберем декартову систему координат  $(x, y, z)$ , в которой вектор напряженности внешнего электрического поля направлен вдоль оси  $x$ . Считаем, что длина образца вдоль оси  $x$  много больше и средней длины свободного пробега дырки  $v$ -зоны, и средней длины прыжка дырки между акцепторами. Пренебрегаем краевыми эффектами и считаем, что все рассматриваемые величины не зависят от пространственных координат  $y$  и  $z$  (однородный случай). В диффузионно-дрейфовом приближении зонный [14, 15] и прыжковый [13, 16] перенос дырок, а также их тепловой выброс в  $v$ -зону с акцепторов в зарядовом состоянии (0) и захват из  $v$ -зоны на ионизированные акцепторы описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
 J_p(x) &= ep(x)\mu_p E(x) - eD_p \frac{dp(x)}{dx}, \\
 J_h(x) &= eN_h(x) \left[ M_h E(x) - D_h \frac{d}{dx} \ln \left( \frac{N_0(x)}{N_{-1}(x)} \right) \right], \\
 \frac{dE(x)}{dx} &= \frac{e}{\varepsilon} [p(x) - N_{-1}(x) + KN], \\
 \frac{dJ_p(x)}{dx} &= e[\beta N_0(x) - \alpha p(x)N_{-1}(x)], \\
 \frac{dJ_p(x)}{dx} + \frac{dJ_h(x)}{dx} &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

где  $p(x) = p + \delta p(x)$  – концентрация дырок в  $\nu$ -зоне;  $p$  – концентрация дырок  $\nu$ -зоны в равновесии (в отсутствие внешнего электрического поля и токов);  $\delta p(x)$  – изменение концентрации дырок  $\nu$ -зоны при отклонении системы от равновесия;  $N_h(x) = N_0(x)N_{-1}(x)/N$  – концентрация прыгающих между акцепторами дырок;  $N_{-1}(x) = N_{-1} + \delta N_{-1}(x)$ ,  $N_0(x) = N_0 + \delta N_0(x)$  – неравновесные концентрации акцепторов в зарядовых состояниях  $(-1)$ ,  $(0)$ ;  $N_0$  и  $N_{-1}$  – концентрации акцепторов в зарядовых состояниях  $(0)$  и  $(-1)$  в равновесии;  $\delta N_0(x)$  и  $\delta N_{-1}(x) = -\delta N_0(x)$  – изменения концентраций акцепторов в зарядовых состояниях  $(0)$  и  $(-1)$  в неравновесных условиях;  $dN_0(x)/dx = -dN_{-1}(x)/dx$ ;  $E(x)$  – напряженность внешнего электрического поля в кристалле;  $x$  – координата, вдоль оси которой направлен вектор напряженности внешнего электрического поля;  $J_p(x)$  – плотность тока дырок  $\nu$ -зоны с дрейфовой подвижностью  $\mu_p$  и коэффициентом диффузии  $D_p$ ;  $J_h(x)$  – плотность прыжкового тока дырок по акцепторам с дрейфовой подвижностью  $M_h$  и коэффициентом диффузии  $D_h$ ;  $\alpha$  – коэффициент захвата дырки  $\nu$ -зоны на акцептор в зарядовом состоянии  $(-1)$ ;  $\beta = \alpha p N_{-1}/N_0$  – коэффициент выброса дырки с электрически нейтрального акцептора в  $\nu$ -зону под действием тепловых колебаний атомов и равновесного электромагнитного излучения.

В работах [12, 13, 16] показано, что отношения коэффициентов диффузии дырок  $\nu$ -зоны  $D_p$  и дырок, прыгающих по акцепторам,  $D_h$  к их дрейфовым подвижностям суть соотношения Нернста – Таунсенда – Эйнштейна – Смолуховского:

$$D_p/\mu_p = \xi_p k_B T/e; \quad D_h/M_h = \xi_h k_B T/e, \quad (3)$$

где  $k_B T$  – тепловая энергия. Безразмерные параметры  $\xi_p \geq 1$  и  $\xi_h \geq 1$  характеризуют влияние флуктуаций электростатического потенциала в кристалле на состояния дырок [6]. (Здесь отметим, что  $\xi_p = \xi_h = 1$  при  $(W_p + W_a) \ll k_B T$ , т. е. когда сумма среднеквадратичных флуктуаций уровней энергии акцепторов  $W_a$  и потенциальной энергии дырок  $\nu$ -зоны  $W_p$  много меньше тепловой энергии; см. рисунок.)

Отклонение системы от состояния термодинамического равновесия определяется величинами  $\delta N_{-1}(x) \ll N_{-1}$ ,  $\delta N_0(x) \ll N_0$ ,  $\delta p(x) \ll p$ ;  $E(x)$ ,  $J_p(x)$  и  $J_h(x)$ .

**Решение линеаризованной системы уравнений.** Линеаризуем систему (2) вблизи равновесного состояния. При этом все члены выше первого порядка, например  $\delta p(x)\delta N_{-1}(x)$ ,  $\delta N_0(x)E(x)$ ,  $\delta N_{-1}(x)E(x)$ ,  $\delta p(x)E(x)$ , отбрасываются. В итоге получаем:

$$\begin{aligned} J_p(x) &= e p \mu_p E(x) - e D_p \frac{d[\delta p(x)]}{dx}, \\ J_h(x) &= e N_h M_h E(x) + e D_h \frac{d[\delta N_{-1}(x)]}{dx}, \\ \frac{dE(x)}{dx} &= \frac{e}{\varepsilon} [\delta p(x) - \delta N_{-1}(x)], \\ \frac{dJ_p(x)}{dx} &= -e \alpha N_{-1} \delta p(x) - e \alpha p \frac{N_{-1}}{N_h} \delta N_{-1}(x), \\ \frac{dJ_h(x)}{dx} &= -\frac{dJ_p(x)}{dx}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\sigma_p = e p \mu_p$  – удельная электрическая проводимость дырок  $\nu$ -зоны;  $\sigma_h = e N_h M_h = e N_0 N_{-1} M_h / N$  – удельная электрическая проводимость мигрирующих по акцепторам дырок;  $\delta N_{-1}(x) = -\delta N_0(x)$ , так как  $N_0(x) + N_{-1}(x) = N = \text{const}$ .

В первых двух уравнениях системы (4) перенесем градиенты концентраций в левую часть и выразим отношения коэффициентов диффузии к подвижностям через соотношения (3). Получаем систему уравнений в виде

$$\begin{aligned} \frac{d[\delta p(x)]}{dx} &= \frac{e}{\xi_p k_B T} p E(x) - \frac{J_p(x)}{e D_p}, \\ \frac{d[\delta N_{-1}(x)]}{dx} &= -\frac{e}{\xi_h k_B T} N_h E(x) + \frac{J_h(x)}{e D_h}, \\ \frac{dE(x)}{dx} &= \frac{e}{\varepsilon} [\delta p(x) - \delta N_{-1}(x)], \\ \frac{dJ_p(x)}{dx} &= -e \alpha N_{-1} \delta p(x) - e \alpha p \frac{N_{-1}}{N_h} \delta N_{-1}(x), \\ \frac{dJ_h(x)}{dx} &= e \alpha N_{-1} \delta p(x) + e \alpha p \frac{N_{-1}}{N_h} \delta N_{-1}(x). \end{aligned} \quad (5)$$

В линеаризованной системе уравнений (5) сделаем замену переменных:

$$y_1 = \xi_p \delta p(x)/p, \quad y_2 = \xi_h \delta N_{-1}(x)/N_h, \quad y_3 = e E(x)/k_B T, \quad y_4 = \xi_p J_p(x)/e D_p p, \quad y_5 = \xi_h J_h(x)/e D_h N_h. \quad (6)$$

В обозначениях (6) система (5) из пяти уравнений принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= y_3 - y_4, & \frac{dy_2}{dx} &= -y_3 + y_5, \\ \frac{dy_3}{dx} &= \frac{e^2 p}{\xi_p \varepsilon k_B T} y_1 - \frac{e^2 N_h}{\xi_h \varepsilon k_B T} y_2, \\ \frac{dy_4}{dx} &= -\frac{\alpha N_{-1}}{D_p} y_1 - \frac{\xi_p \alpha N_{-1}}{\xi_h D_p} y_2, \\ \frac{dy_5}{dx} &= \frac{\xi_h \alpha p N_{-1}}{\xi_p D_h N_h} y_1 + \frac{\alpha p N_{-1}}{D_h N_h} y_2. \end{aligned} \quad (7)$$

Запишем линейную систему (7) в матричном виде:

$$\frac{dy}{dx} = Ay, \quad (8)$$

где элементы вектора  $y$  и матрицы  $A$  обозначены так:

$$y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \\ y_4(x) \\ y_5(x) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} a_{31} &= e^2 p / \xi_p \varepsilon k_B T, & a_{32} &= -e^2 N_h / \xi_h \varepsilon k_B T, & a_{41} &= -\alpha N_{-1} / D_p, \\ a_{42} &= -\xi_p \alpha N_{-1} / \xi_h D_p, & a_{51} &= \xi_h \alpha p N_{-1} / \xi_p D_h N_h, & a_{52} &= \alpha p N_{-1} / D_h N_h. \end{aligned} \quad (9)$$

Согласно [17], решение системы (8) определяется решением характеристического уравнения на собственные значения  $\det[A - \lambda \mathbf{1}] = 0$ , которое для матрицы  $A$  из (9) имеет вид

$$\lambda^5 - b\lambda^3 + (d/4)\lambda = 0, \quad (10)$$

где  $b = a_{31} - a_{32} - a_{41} + a_{52}$ ,  $d = 4[a_{32}(a_{41} - a_{51}) - a_{42}(a_{31} - a_{51}) + a_{52}(a_{31} - a_{41})]$ .

Уравнение (10) имеет следующие корни (собственные значения):

$$\lambda_1 = 0, \quad -\lambda_2 = \lambda_3 = \frac{\sqrt{b + \sqrt{b^2 - d}}}{\sqrt{2}}, \quad -\lambda_4 = \lambda_5 = \frac{\sqrt{b - \sqrt{b^2 - d}}}{\sqrt{2}}. \quad (11)$$

Рассмотрим порознь два случая: 1) все собственные значения матрицы  $A$  различны; 2) среди собственных значений матрицы  $A$  имеются кратные (т. е. равные между собой).

1) Найдем решение линеаризованной системы уравнений (7), когда нет кратных собственных значений, т. е. все собственные значения попарно различны. Это эквивалентно выполнению условий:  $b^2 \neq d$ ,  $b \neq 0$  и  $d \neq 0$ . Тогда общее решение системы (7) имеет вид [17]

$$\mathbf{y} = C_1 \mathbf{e}_1 + C_2 \mathbf{e}_2 \exp(-\lambda_3 x) + C_3 \mathbf{e}_3 \exp(\lambda_3 x) + C_4 \mathbf{e}_4 \exp(-\lambda_5 x) + C_5 \mathbf{e}_5 \exp(\lambda_5 x), \quad (12)$$

где  $\lambda_3 = \{[b + (b^2 - d)^{1/2}]/2\}^{1/2} > 0$ ,  $\lambda_5 = \{[b - (b^2 - d)^{1/2}]/2\}^{1/2} > 0$  определены по (11),  $\mathbf{e}_i$  – собственный вектор (для собственного значения  $\lambda_i$ );

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} -B_2 \lambda_3 \\ -(\lambda_3^2 - B_1) \lambda_3 \\ a_{32} \lambda_3^2 - B_3 \\ a_{42} \lambda_3^2 - B_3 \\ a_{52} \lambda_3^2 + a_{51} B_2 - a_{52} B_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} B_2 \lambda_3 \\ (\lambda_3^2 - B_1) \lambda_3 \\ a_{32} \lambda_3^2 - B_3 \\ a_{42} \lambda_3^2 - B_3 \\ a_{52} \lambda_3^2 + a_{51} B_2 - a_{52} B_1 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

$$\mathbf{e}_4 = \begin{pmatrix} -B_2 \lambda_5 \\ -(\lambda_5^2 - B_1) \lambda_5 \\ a_{32} \lambda_5^2 - B_3 \\ a_{42} \lambda_5^2 - B_3 \\ a_{52} \lambda_5^2 + a_{51} B_2 - a_{52} B_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_5 = \begin{pmatrix} B_2 \lambda_5 \\ (\lambda_5^2 - B_1) \lambda_5 \\ a_{32} \lambda_5^2 - B_3 \\ a_{42} \lambda_5^2 - B_3 \\ a_{52} \lambda_5^2 + a_{51} B_2 - a_{52} B_1 \end{pmatrix}.$$

Здесь использованы обозначения:

$$B_1 = a_{31} - a_{41}, \quad B_2 = a_{32} - a_{42}, \quad B_3 = a_{31} a_{42} - a_{32} a_{41}, \quad B_4 = a_{32} - a_{52}.$$

Граничные условия определяют коэффициенты  $C_1, \dots, C_5$  общего решения (12) системы дифференциальных уравнений (7). Например, пусть на границах полупроводникового образца по оси  $x$  расположены два плоских металлических электрода (контакта). Электроды могут служить как обкладками заряженного плоского электрического конденсатора, между которыми размещен образец без возбуждения в нем тока, так и омическими контактами к образцу для возбуждения в нем стационарного электрического тока.

Следуя работе [18], выразим собственные значения  $\lambda_i$  по (11) через длину экранирования  $\Lambda_s$  электрического поля и длину диффузии  $\Lambda_d$  дырок (как свободных, так и прыгающих от акцептора к акцептору) в виде

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_i = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \Lambda_s^{-2} + \Lambda_d^{-2} \pm [(\Lambda_s^{-2} + \Lambda_d^{-2})^2 - 4 \Lambda_s^{-2} \Lambda_d^{-2} Y_s Y_d]^{1/2} \}^{1/2}, \quad i = 2, \dots, 5, \quad (14)$$

где введены обозначения:  $Y_s = (p + N_h)/(\tilde{p} + \tilde{N}_h)$ ;  $Y_d = (\tilde{p} D_p + \tilde{N}_h D_h)/(p D_p + N_h D_h)$ ;  $\tilde{p} = p/\xi_p$ ;  $\tilde{N}_h = N_h/\xi_h$ ;  $Y_s \geq 1$ ;  $0 < Y_d \leq 1$ ;  $Y_s Y_d > 0$ ;  $\xi_p \geq 1$ ,  $\xi_h \geq 1$ . Отметим, что при  $\xi_p = \xi_h = \xi$  произведение  $Y_s Y_d = 1$ , и тогда собственные значения  $-\lambda_2 = \lambda_3 = \Lambda_s^{-1}$ ,  $-\lambda_4 = \lambda_5 = \Lambda_d^{-1}$ , что согласуется с результатами работы [11].

Сравнивая (11) и (14), устанавливаем, что

$$b = \Lambda_s^{-2} + \Lambda_d^{-2}; \quad d = 4 \Lambda_s^{-2} \Lambda_d^{-2} Y_s Y_d. \quad (15)$$

Длина экранирования  $\Lambda_s$  и длина диффузии  $\Lambda_d$  определяются по (15) с учетом (9) и (11) так:

$$\Lambda_s = (a_{31} - a_{32})^{-1/2} = \sqrt{\frac{\varepsilon k_B T}{e^2(\tilde{p} + \tilde{N}_h)}} = \sqrt{\frac{\varepsilon k_B T}{e^2[(p/\xi_p) + (N_h/\xi_h)]}}, \quad (16)$$

$$\Lambda_d = (a_{52} - a_{41})^{-1/2} = \sqrt{\frac{N_0 D_p D_h}{\alpha N(p D_p + N_h D_h)}}. \quad (17)$$

Здесь отметим, что формула (16) была получена в работе [12], исходя только из уравнения Пуассона [см. третье уравнение в системе уравнений (2)]. Там же отмечено, что коэффициент  $\xi_p = e D_p / \mu_p k_B T \geq 1$  показывает, насколько отношение коэффициента диффузии к дрейфовой подвижности для свободных дырок превышает классическое значение  $k_B T / e$ . Физический смысл величины  $\xi_h = e D_h / M_h k_B T \geq 1$  при реализации только прыжковой электропроводности (для температуры  $T < T_j$ ) впервые определен в работе [13]. Величину  $(p/\xi_p) + (N_h/\xi_h) = \tilde{p} + \tilde{N}_h$  в рамках теории Дебая – Хюккеля [19] можно трактовать как полную концентрацию подвижных дырок, участвующих в экранировании внешнего электростатического поля.

Сосуществование в полупроводнике токов  $J_p$  и  $J_h$  приводит к общему коэффициенту биполярной диффузии свободных дырок по состояниям  $\nu$ -зоны и прыгающих по акцепторам дырок (ср. с биполярной диффузией электронно-дырочных пар, генерируемых светом на поверхности, в глубь полупроводника [20, 21]). Определим коэффициент биполярной диффузии так:

$$D_j = \frac{D_p D_h (p + N_h)}{p D_p + N_h D_h}. \quad (18)$$

Исходя из (17) и (18), определяем среднее время биполярной диффузионной рекомбинации дырок  $\nu$ -зоны с отрицательно заряженными акцепторами:

$$\tau_d = \frac{\Lambda_d^2}{D_j} = \frac{N_h}{\alpha N_{-1}(p + N_h)}, \quad (19)$$

где  $p + KN = N_{-1}$ ;  $N_h = N_0 N_{-1} / N$ ;  $N = N_0 + N_{-1}$ .

Из формулы (19) при  $p \ll N_h$  следует известное выражение для времени жизни дырки  $\nu$ -зоны по отношению к захвату ее на отрицательно заряженный акцептор:  $\tau_d \rightarrow 1/\alpha N_{-1}$  (см., напр., [22, 23]). При  $p \gg N_h$  из (19) следует:  $\tau_d \rightarrow N_h / \alpha p N_{-1}$ . Для  $N_h \approx N_0$  (при  $N_{-1} \approx N$  и  $N_0 \ll N_{-1}$ ) имеем  $\tau_d \rightarrow 1/\beta$ , что можно трактовать как время жизни акцептора в зарядовом состоянии (0) по отношению к выбросу с него дырки в  $\nu$ -зону [24]. При максимально возможном значении концентрации прыгающих дырок  $N_h = N/4$  (когда  $N_{-1} = N_0 = N/2$ ) время жизни  $\tau_d \rightarrow 1/2\alpha p$ . Отметим, что из формулы (17) видно, что прыжки дырок по акцепторам уменьшают длину диффузии дырок  $\Lambda_d$ .

Среднее время биполярной дрейфовой релаксации есть  $\tau_s = \Lambda_s^2 / D_j$ , где  $\Lambda_s$  и  $D_j$  определяются по (16) и (18) соответственно. Отношение  $\tau_d / \tau_s$  определяет реакцию полупроводника  $p$ -типа на внешнее постоянное электрическое поле [25]: релаксационного (при  $\tau_s > \tau_d$ ) или рекомбинационного (при  $\tau_d > \tau_s$ ) типа.

2) Найдем решение линеаризованной системы уравнений (7), когда есть кратные собственные значения, т. е. когда некоторые (или все) собственные значения равны между собой.

Из (11) при  $b^2 = d \neq 0$  следует, что имеются один однократный корень  $\lambda_1 = 0$  и два корня кратности два:  $\lambda_2 = \lambda_4 = -\sqrt{b/2}$ ;  $\lambda_3 = \lambda_5 = \sqrt{b/2}$ .

Собственный вектор  $\mathbf{e}_1$  для  $\lambda_1 = 0$  есть решение системы  $(A - \lambda_1 \mathbf{1})\mathbf{e}_1 = A\mathbf{e}_1 = 0$  (для компактности здесь и далее матрицы-столбцы  $\mathbf{e}_i$  вида  $(5 \times 1)$  представлены как матрицы-строки  $\mathbf{e}_i^T$  вида  $(1 \times 5)$ ):

$$\mathbf{e}_1^T = (0, 0, 1, 1, 1).$$

Собственный вектор  $\mathbf{e}_2$  для  $\lambda_2 = -\sqrt{b/2}$  определяется системой уравнений  $(A - \lambda_2 \mathbf{1})\mathbf{e}_2 = 0$  и имеет вид

$$\mathbf{e}_2^T = (-B_2\lambda_2, -\lambda_2(\lambda_2^2 - B_1), -(a_{32}\lambda_2^2 - B_3), -(a_{42}\lambda_2^2 - B_3), \lambda_2^4 - a_{52}\lambda_2^2 + B_3).$$

Присоединенный вектор  $\mathbf{e}_4$  для  $\lambda_2$  находим из системы  $(A - \lambda_2 \mathbf{1})\mathbf{e}_4 = \mathbf{e}_2$ :

$$\mathbf{e}_4^T = (0, -2\lambda_2^2, -(a_{32}\lambda_2^2 + B_3)/\lambda_2, -(a_{42}\lambda_2^2 + B_3)/\lambda_2, -(\lambda_2^4 + a_{52}\lambda_2^2 + B_3)/\lambda_2).$$

Решая систему уравнений  $(A - \lambda_3 \mathbf{1})\mathbf{e}_3 = 0$  для собственного значения  $\lambda_3 = \sqrt{b/2}$ , находим его собственный вектор:

$$\mathbf{e}_3^T = (B_2\lambda_3, \lambda_3(\lambda_3^2 - B_1), a_{32}\lambda_3^2 - B_3, a_{42}\lambda_3^2 - B_3, -\lambda_3^4 + a_{52}\lambda_3^2 - B_3).$$

Аналогично из системы  $(A - \lambda_3 \mathbf{1})\mathbf{e}_5 = \mathbf{e}_3$  вычисляем один из присоединенных векторов для собственного значения  $\lambda_3$ :

$$\mathbf{e}_5^T = (0, 2\lambda_3^2, (a_{32}\lambda_3^2 + B_3)/\lambda_3, (a_{42}\lambda_3^2 + B_3)/\lambda_3, (\lambda_3^4 + a_{52}\lambda_3^2 + B_3)/\lambda_3).$$

Итак, при  $b^2 = d \neq 0$  общее решение системы (8) имеет вид

$$y = C_1 \mathbf{e}_1 + (C_2 \mathbf{e}_2 + C_4 x \mathbf{e}_4) \exp(-\lambda_2 x) + (C_3 \mathbf{e}_3 + C_5 x \mathbf{e}_5) \exp(\lambda_3 x).$$

Отметим, что выполнение условия  $b^2 = d \neq 0$  дает, согласно (15), связь между длиной экранирования и длиной диффузии:  $(\Lambda_s^{-2} + \Lambda_d^{-2})^2 = 4\Lambda_s^{-2}\Lambda_d^{-2}Y_s Y_d$ . Откуда находим соотношение:

$$(\Lambda_s/\Lambda_d)^2 = (\Lambda_d/\Lambda_s)^2 = 2Y_s Y_d - 1 \pm 2\sqrt{Y_s^2 Y_d^2 - Y_s Y_d},$$

где  $Y_s Y_d = D_j(\tilde{p}D_p + \tilde{N}_h D_h) / [D_p D_h(\tilde{p} + \tilde{N}_h)]$ ; имеют место равенства  $\Lambda_s = \Lambda_d$ ;  $\tau_s = \tau_d$ ;  $Y_s Y_d = 1$ .

Наконец заметим, что кратные корни (собственные значения)  $\lambda$  математически возможны еще в двух случаях ( $b^2 \neq 0, d = 0$  и  $b^2 = d = 0$ ). Но поскольку длины экранирования  $\Lambda_s$  и диффузии  $\Lambda_d$  по физическому смыслу задачи не могут быть бесконечно большими, то из (15) следует, что  $b \neq 0$  и  $d \neq 0$ .

**Заключение.** Рассмотрена стационарная диффузионно-дрейфовая модель зонной миграции свободных дырок (дырок  $v$ -зоны) и прыжковой миграции зарядовых состояний водородоподобных акцепторов (посредством перехода дырки от акцептора в зарядовом состоянии (0) на акцептор в зарядовом состоянии (-1)) в полупроводнике  $p$ -типа. Записана система дифференциальных уравнений для тока дырок  $v$ -зоны и тока прыжковой миграции дырок по акцепторам, уравнения Пуассона и уравнений непрерывности для этих токов. В линейном приближении впервые получены явные решения этой системы и найдены аналитические выражения для длины экранирования электростатического поля и длины диффузии дырок при сосуществовании зонной (по состояниям  $v$ -зоны) и прыжковой их миграции при постоянной температуре в отсутствие внешнего фотовозбуждения полупроводникового кристалла. Получены формулы для стационарного времени жизни дырки  $v$ -зоны относительно ее захвата на акцептор в зарядовом состоянии (-1) и времени жизни электрически нейтрального акцептора относительно выброса с него дырки в  $v$ -зону. В предельных случаях эти формулы переходят в известные.

**Благодарности.** Работа поддержана программой «Физматтех» Республики Беларусь, Белорусским республиканским фондом фундаментальных исследований (грант № Ф19РМ-054), а также Рамочной программой Европейского союза по развитию научных исследований и технологий Horizon 2020 (грант № H2020-MSCA-RISE-2019-871284 SSHARE).

**Acknowledgements.** The work was supported by the Belarusian National Research Programme “Fizmattekh”, the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (Grant No. Ф19РМ-054), and by the European Union Framework Programme for Research and Innovation Horizon 2020 (Grant No. H2020-MSCA-RISE-2019-871284 SSHARE).

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. A diamond-based electrode for detection of neurochemicals in the human brain / K. E. Bennet [et al.] // *Front. Hum. Neurosci.* – 2016. – Vol. 10. – P. 102 (12 pp.). <https://doi.org/10.3389/fnhum.2016.00102>
2. Recent developments and advances in boron-doped diamond electrodes for electrochemical oxidation of organic pollutants / Y. He [et al.] // *Sep. Purif. Technol.* – 2019. – Vol. 212. – P. 802–821. <https://doi.org/10.1016/j.seppur.2018.11.056>
3. Шлимак, И. С. Нейтронное трансмутационное легирование полупроводников: наука и приложения / И. С. Шлимак // *Физика твердого тела.* – 1999. – Т. 41, № 5. – С. 794–798.
4. Ng, K. K. Complete guide to semiconductor devices / K. K. Ng. – New York: Wiley, 2002. – xxiv+740 p. <https://doi.org/10.1002/9781118014769>
5. Transition temperature from band to hopping direct current conduction in crystalline semiconductors with hydrogen-like impurities: Heat versus Coulomb attraction / N. A. Poklonski [et al.] // *J. Appl. Phys.* – 2011. – Vol. 110, № 12. – P. 123702 (7 p.). <https://doi.org/10.1063/1.3667287>
6. Ionization equilibrium at the transition from valence-band to acceptor-band migration of holes in boron-doped diamond / N. A. Poklonski [et al.] // *J. Appl. Phys.* – 2016. – Vol. 119, № 24. – P. 245701 (10 p.). <https://doi.org/10.1063/1.4954281>
7. Васильев, Б. В. Теорема вириала и некоторые свойства электронного газа в металлах / Б. В. Васильев, В. Л. Любошиц // *Успехи физ. наук.* – 1994. – Т. 164, № 4. – С. 367–374. <https://doi.org/10.3367/UFNr.0164.199404f.0367>
8. Borst, T. H. Boron-doped homoepitaxial diamond layers: Fabrication, characterization, and electronic applications / T. H. Borst, O. Weis // *Phys. Status Solidi A.* – 1996. – Vol. 154, № 1. – P. 423–444. <https://doi.org/10.1002/pssa.2211540130>
9. Metal-insulator transition and superconductivity in boron-doped diamond / T. Klein [et al.] // *Phys. Rev. B.* – 2007. – Vol. 75, № 16. – P. 165313 (7 p.). <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.75.165313>
10. Zabrodskii, A. G. Coulomb gap and the metal–insulator transition / A. G. Zabrodskii, A. G. Andreev, S. V. Egorov // *Phys. Status Solidi B.* – 1998. – Vol. 205, № 1. – P. 61–68. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1521-3951\(199801\)205:1<61::AID-PSSB61>3.0.CO;2-S](https://doi.org/10.1002/(SICI)1521-3951(199801)205:1<61::AID-PSSB61>3.0.CO;2-S)
11. Поклонский, Н. А. Модель прыжковой и зонной фотопроводимости на постоянном токе в легированных кристаллах / Н. А. Поклонский, С. Ю. Лопатин // *Физика твердого тела.* – 2000. – Т. 42, № 2. – С. 218–223.
12. Поклонский, Н. А. Экранирование электростатического поля в ковалентных кристаллах с точечными дефектами / Н. А. Поклонский // *Изв. вузов. Физика.* – 1984. – Т. 27, № 11. – С. 41–43.
13. Poklonski, N. A. Screening of electrostatic fields in crystalline semiconductors by electrons hopping over defects / N. A. Poklonski, V. F. Stelmakh // *Phys. Status Solidi B.* – 1983. – Vol. 117, № 1. – P. 93–99. <https://doi.org/10.1002/pssb.2221170109>
14. Seeger, K. Semiconductor physics. An introduction / K. Seeger. – Berlin: Springer, 2004. – x+537 p.
15. Ансельм, А. И. Введение в теорию полупроводников / А. И. Ансельм. – М.: Наука, 1978. – 616 с.
16. Drift-diffusion model of hole migration in diamond crystals via states of valence and acceptor bands / N. A. Poklonski [et al.] // *J. Phys. Commun.* – 2018. – Vol. 2, № 1. – P. 015013 (14 p.). <https://doi.org/10.1088/2399-6528/aa8e26>
17. Корн, Г. Справочник по математике (для научных работников и инженеров) / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1977. – 832 с.
18. Поклонский, Н. А. Дрейф и диффузия электронов по двухуровневым (трехзарядным) точечным дефектам в кристаллических полупроводниках / Н. А. Поклонский, А. И. Ковалев, С. А. Вырко // *Докл. Нац. акад. наук Беларуси.* – 2014. – Т. 58, № 3. – С. 37–43.
19. Дебай, П. К теории электролитов / П. Дебай, Э. Хюккель // *Избр. тр. / П. Дебай.* – Л.: Наука, 1987. – С. 163–202.
20. Грундман, М. Основы физики полупроводников. Нанопизика и технические приложения / М. Грундман. – М.: Физматлит, 2012. – 778 с.
21. Киреев, П. С. Физика полупроводников / П. С. Киреев. – М.: Высш. шк., 1975. – 584 с.
22. Смит, Р. Полупроводники / Р. Смит. – М.: Мир, 1982. – 560 с.
23. Hamaguchi, C. Basic semiconductor physics / C. Hamaguchi. – Berlin: Springer, 2017. – xxii+710 p.
24. Абакумов, В. Н. Безызлучательная рекомбинация в полупроводниках / В. Н. Абакумов, В. И. Перель, И. Н. Ясиевич. – СПб.: Петерб. ин-т ядерной физики им. Б. П. Константинова РАН, 1997. – 376 с.
25. Manificier, J. C. The concept of screening length in lifetime and relaxation semiconductors / J. C. Manificier, H. K. Henisch // *J. Phys. Chem. Solids.* – 1980. – Vol. 41, № 11. – P. 1285–1288. [https://doi.org/10.1016/0022-3697\(80\)90166-3](https://doi.org/10.1016/0022-3697(80)90166-3)

## References

1. Bennet K. E., Tomshine J. R., Min H.-K., Manciu F. S., Marsh M. P., Paek S. B., Settell M. L., Nicolai E. N., Blaha C. D., Kouzani A. Z., Chang S.-Y., Lee K. H. A diamond-based electrode for detection of neurochemicals in the human brain. *Frontiers in Human Neuroscience*, 2016, vol. 10, pp. 102 (1–12). <https://doi.org/10.3389/fnhum.2016.00102>
2. He Y., Lin H., Guo Z., Zhang W., Li H., Huang W. Recent developments and advances in boron-doped diamond electrodes for electrochemical oxidation of organic pollutants. *Separation and Purification Technology*, 2019, vol. 212, pp. 802–821. <https://doi.org/10.1016/j.seppur.2018.11.056>
3. Shlimak I. S. Neutron transmutation doping in semiconductors: Science and applications. *Physics of the Solid State*, 1999, vol. 41, no. 5, pp. 716–719. <https://doi.org/10.1134/1.1130856>
4. Ng K. K. *Complete Guide to Semiconductor Devices*. New York, Wiley, 2002. xxiv+740 p. <https://doi.org/10.1002/9781118014769>

5. Poklonski N. A., Vyrko S. A., Poklonskaya O. N., Zabrodskii A. G. Transition temperature from band to hopping direct current conduction in crystalline semiconductors with hydrogen-like impurities: Heat versus Coulomb attraction. *Journal of Applied Physics*, 2011, vol. 110, no. 12, pp. 123702 (1–7). <https://doi.org/10.1063/1.3667287>
6. Poklonski N. A., Vyrko S. A., Poklonskaya O. N., Kovalev A. I., Zabrodskii A. G. Ionization equilibrium at the transition from valence-band to acceptor-band migration of holes in boron-doped diamond. *Journal of Applied Physics*, 2016, vol. 119, no. 24, pp. 245701 (1–10). <https://doi.org/10.1063/1.4954281>
7. Vasil'ev B. V., Lyuboshits V. L. Virial theorem and some properties of the electron gas in metals. *Physics Uspekhi*, 1994, vol. 37, no. 4, pp. 345–351. <https://doi.org/10.1070/PU1994v037n04ABEH000018>
8. Borst T. H., Weis O. Boron-doped homoepitaxial diamond layers: Fabrication, characterization, and electronic applications. *Physica Status Solidi A*, 1996, vol. 154, no. 1, pp. 423–444. <https://doi.org/10.1002/pssa.2211540130>
9. Klein T., Achatz P., Kacmarcik J., Marcenat C., Gustafsson F., Marcus J., Bustarret E., Pernot J., Omnes F., Serneilius B. E., Persson C., Ferreira da Silva A., Cytermann C. Metal-insulator transition and superconductivity in boron-doped diamond. *Physical Review B*, 2007, vol. 75, no. 16, pp. 165313 (1–7). <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.75.165313>
10. Zabrodskii A. G., Andreev A. G., Egorov S. V. Coulomb gap and the metal–insulator transition. *Physica Status Solidi B*, 1998, vol. 205, no. 1, pp. 61–68. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1521-3951\(199801\)205:1<61::AID-PSSB61>3.0.CO;2-S](https://doi.org/10.1002/(SICI)1521-3951(199801)205:1<61::AID-PSSB61>3.0.CO;2-S)
11. Poklonskii N. A., Lopatin S. Yu. A model of hopping and band DC photoconduction in doped crystals. *Physics of the Solid State*, 2000, vol. 42, no. 2, pp. 224–229. <https://doi.org/10.1134/1.1131150>
12. Poklonski N. A. Screening of the electric field in covalent crystals containing point defects. *Soviet Physics Journal*, 1984, vol. 27, no. 11, pp. 945–947. <https://doi.org/10.1007/BF00902146>
13. Poklonski N. A., Stelmakh V. F. Screening of electrostatic fields in crystalline semiconductors by electrons hopping over defects. *Physica Status Solidi B*, 1983, vol. 117, no. 1, pp. 93–99. <https://doi.org/10.1002/pssb.2221170109>
14. Seeger K. *Semiconductor Physics. An Introduction*. Berlin, Springer, 2004. x+537 p.
15. Anselm A. *Introduction to Semiconductor Theory*. Moscow, Mir Publ., 1981. x+646 p.
16. Poklonski N. A., Vyrko S. A., Kovalev A. I., Dzeraviah A. N. Drift-diffusion model of hole migration in diamond crystals via states of valence and acceptor bands. *Journal of Physics Communications*, 2018, vol. 2, no. 1, pp. 015013 (1–14). <https://doi.org/10.1088/2399-6528/aa8e26>
17. Korn G. A., Korn T. M. *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems, and Formulas for Reference and Review*. New York, Dover, 2000. xx+1130 p.
18. Poklonski N. A., Kovalev A. I., Vyrko S. A. Drift and diffusion of electrons via two-level (triple-charged) point defects in crystalline semiconductors. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2014, vol. 58, no. 3, pp. 37–43 (in Russian).
19. Debye P., Hückel E. Zur theorie der elektrolyte. *Physikalische Zeitschrift*, 1923, vol. 24, no. 9, pp. 185–206 (in German).
20. Grundmann M. *The Physics of Semiconductors. An Introduction Including Nanophysics and Applications*. Berlin, Springer, 2016. xxxix+989 p.
21. Kireev P. S. *Semiconductor Physics*. Moscow, Mir Publ., 1978. 693 p.
22. Smith R. A. *Semiconductors*. Cambridge, Cambridge University Press, 1978. xvii+523 p.
23. Hamaguchi C. *Basic Semiconductor Physics*. Berlin, Springer, 2017. xxii+710 p.
24. Abakumov V. N., Perel V. I., Yassievich I. N. *Nonradiative Recombination in Semiconductors*. North Holland, Amsterdam, 1991. xvi+320 p.
25. Manificier J. C., Henisch H. K. The concept of screening length in lifetime and relaxation semiconductors. *Journal of Physics and Chemistry of Solids*, 1980, vol. 41, no. 11, pp. 1285–1288. [https://doi.org/10.1016/0022-3697\(80\)90166-3](https://doi.org/10.1016/0022-3697(80)90166-3)

### Информация об авторах

**Поклонский Николай Александрович** – доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: poklonski@bsu.by. <http://orcid.org/0000-0002-0799-6950>

**Деревяго Александр Николаевич** – аспирант, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: deralex@list.ru

**Вырко Сергей Александрович** – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: vyrko@bsu.by

### Information about the authors

**Nikolai A. Poklonski** – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: poklonski@bsu.by. <http://orcid.org/0000-0002-0799-6950>

**Aliaksandr N. Dzeraviah A** – Postgraduate Student, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: deralex@list.ru

**Sergey A. Vyrko** – Ph. D. (Physics and Mathematics), Senior Researcher, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: vyrko@bsu.by

ISSN 1561-2430 (Print)

ISSN 2524-2415 (Online)

УДК 539.23; 537.315; 53.093

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-1-102-113>

Поступила в редакцию 04.12.2019

Received 04.12.2019

Д. В. Адамчук, В. К. Ксеневиц, Н. А. Поклонский, А. И. Ковалев

*Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь***ОСОБЕННОСТИ АДсорбЦИИ И ДЕСорбЦИИ ВОДЯНЫХ ПАРОВ  
НА ПОВЕРХНОСТИ ПЛЕНОК НЕСТЕХИОМЕТРИЧЕСКОГО ДИОКСИДА ОЛОВА**

**Аннотация.** Исследовано влияние процессов адсорбции и десорбции водяных паров на поверхности нанокристаллических пленок  $\text{SnO}_{2-\delta}$  с различной концентрацией кислородных вакансий на их электропроводность при комнатной температуре. Пленки  $\text{SnO}_{2-\delta}$  были синтезированы методом реактивного магнетронного напыления олова в аргон-кислородной плазме с последующим двухстадийным окислительным отжигом на воздухе. Концентрация кислородных вакансий в пленках варьировалась посредством изменения температуры отжига на второй стадии в диапазоне 350–400 °С. Установлено, что в пленках с наибольшей концентрацией кислородных вакансий ( $\sim 10^{20} \text{ см}^{-3}$ ) в области малых значений относительной влажности (менее  $\sim 30\%$ ) наблюдается увеличение электропроводности в силу диссоциативной адсорбции молекул воды с образованием гидроксильных групп. Обнаружено, что адсорбция водяных паров на поверхности пленок  $\text{SnO}_{2-\delta}$  при комнатной температуре при значениях относительной влажности более  $\sim 30\%$  приводит к уменьшению электропроводности образцов. Обнаружена генерация положительного или отрицательного импульса ЭДС между открытой и закрытой водонепроницаемым материалом поверхностями нанокристаллических пленок  $\text{SnO}_{2-\delta}$  при адсорбции или десорбции на них паров воды соответственно. Установлено, что с увеличением концентрации кислородных вакансий в пленках изменение сопротивления и величина генерируемой ЭДС при адсорбции-десорбции паров воды возрастают.

**Ключевые слова:** пленки диоксида олова, кислородные вакансии, водяной пар, адсорбция, десорбция

**Для цитирования.** Особенности адсорбции и десорбции водяных паров на поверхности пленок нестехиометрического диоксида олова / Д. В. Адамчук [и др.] // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2020. – Т. 56, № 1. – С. 102–113. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-1-102-113>

Dzmitry V. Adamchuck, Vitaly K. Ksenevich, Nikolai A. Poklonski, Aliaksandr I. Kavaleu

*Belarusian State University, Minsk, Belarus***FEATURES OF WATER VAPOR ADSORPTION AND DESORPTION  
ON THE SURFACE OF NON-STOICHIOMETRIC TIN DIOXIDE FILMS**

**Abstract.** Herein, the influence of water vapor adsorption and desorption processes on the surface of  $\text{SnO}_{2-\delta}$  nanocrystalline films with different concentrations of oxygen vacancies on their electrical conductivity at room temperature was studied.  $\text{SnO}_{2-\delta}$  films were synthesized by means of reactive magnetron sputtering of tin in an argon-oxygen plasma followed by 2-stage oxidative annealing. The concentration of oxygen vacancies in the films was varied by changing the 2nd stage annealing temperature within the range 350–400 °C. It was found that in the films with the highest concentration of oxygen vacancies ( $\sim 10^{20} \text{ cm}^{-3}$ ) in the region of low relative humidity (less than  $\sim 30\%$ ), an increase in electrical conductivity was observed due to the dissociative adsorption of water molecules with the formation of hydroxyl groups. The adsorption of water vapor on the surface of  $\text{SnO}_{2-\delta}$  films at room temperature at relative humidity values higher than  $\sim 30\%$  was found to induce a decrease in the electrical conductivity of the samples. The generation of positive and negative EMF pulses between the open surface of  $\text{SnO}_{2-\delta}$  nanocrystalline films and the one covered by waterproof materials under the adsorption and desorption of water vapor, respectively, was detected. The change of resistance and the generated EMF value under the adsorption-desorption processes was found to increase with the concentration of free charge carriers in the films.

**Keywords:** tin oxide films, oxygen vacancies, water vapor, adsorption, desorption

**For citation.** Adamchuck D. V., Ksenevich V. K., Poklonski N. A., Kavaleu A. I. Features of water vapor adsorption and desorption on the surface of non-stoichiometric tin dioxide films. *Vestsi Natsyianal'най akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2020, vol. 56, no. 1, pp. 102–113 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-1-102-113>

**Введение.** Одной из наиболее развитых областей использования диоксида олова является газовая сенсорика. Полупроводниковые газовые сенсоры резистивного типа, использующие в качестве активного материала  $\text{SnO}_2$ , успешно применяются для детектирования различных газов [1–3]. Принцип действия таких датчиков основан на обратимом изменении электрического

сопротивления, которое обусловлено взаимодействием адсорбированного кислорода с активными газами при достаточно высоких температурах (300–400 °C) [1–4].

Использование диоксида олова в качестве газочувствительного материала объясняется его высокой поверхностной реакционной способностью к восстановительным и окислительным газам в силу легкой адсорбции кислорода поверхностью из-за естественной нестехиометричности  $\text{SnO}_2$  [1–3, 5]. Кроме влияния на адсорбционную способность поверхности, наличие кислородных вакансий, являющихся донорами электронов в диоксиде олова, обеспечивает его высокую электрическую проводимость [6].

Предлагаются различные методы повышения чувствительности газовых сенсоров на основе диоксида олова, один из которых – выдержка активного материала во влажной среде [7]. Изменение электрического сопротивления диоксида олова и других металлооксидных полупроводников при адсорбции паров воды может также использоваться для создания на их основе датчиков влажности. К тому же исследование влияния относительной влажности на чувствительность газовых сенсоров окислительных и восстановительных газов является важной задачей, так как естественная влажность атмосферы может существенно варьироваться в зависимости от климатических условий. В связи с этим механизмы адсорбции кислорода и паров воды на поверхности диоксида олова и других металлооксидных материалов активно изучаются и обсуждаются до настоящего времени [1, 8, 9].

Установлено, что процессы диссоциативной и недиссоциативной адсорбции молекул кислорода и воды на поверхности металлооксидных полупроводников являются основными факторами, определяющими их газочувствительность. Так, для структуры диоксида титана типа рутила (характерной также и для диоксида олова) в результате моделирования с использованием метода функционала плотности было показано, что наличие кислородных вакансий в поверхностном слое вызывает диссоциацию молекул воды путем переноса одного протона на соседний атом кислорода с образованием двух гидроксильных групп для каждой из вакансий [10]. Это приводит к тому, что количество диссоциированных молекул воды зависит от плотности имеющихся на свободной поверхности металлооксидного материала кислородных вакансий, которые играют важную роль в процессах поверхностной адсорбции. Исследование металлооксидных материалов с кислородными вакансиями и нанесенными на их поверхность наночастицами металлов-катализаторов также представляет интерес для изучения реакций гетерогенного катализа [11].

Следует отметить, что для создания и калибровки газовых датчиков важное значение имеет исследование газочувствительности металлооксидных материалов при различных значениях относительной влажности (от 0 до 100 %) [12], в зависимости от величины которой газочувствительность поверхности металлооксидов будет в основном определяться адсорбцией кислорода (в сухой атмосфере) либо воды (во влажной среде) [1]. Вследствие этого механизмы адсорбции воды на металлооксидах различного химического состава, в том числе на нестехиометрическом диоксиде олова, активно изучаются до настоящего времени не только экспериментально, но и с применением квантово-химических расчетов [9, 13–15], учитывающих процессы хемосорбции, образование водородных связей и смещения поверхностных атомов.

Несмотря на то что газо- и влажочувствительность диоксида олова исследуются достаточно давно, в литературе еще встречаются противоречивые результаты [16]. Одна из основных причин этого – естественная нестехиометричность поверхности  $\text{SnO}_2$  из-за наличия кислородных вакансий, что затрудняет сопоставление данных из опубликованных исследований различных авторов. Возможность управления стехиометрическим составом диоксида олова представляется очень важной для его использования в качестве активного материала датчиков влажности и газов. Ранее нами была предложена методика получения пленок оксидов олова, позволяющая варьировать их фазовый и стехиометрический состав (в том числе концентрацию кислородных вакансий в диоксиде олова) посредством изменения технологических параметров синтеза [17–19].

Цель настоящей работы – исследование влияния процессов адсорбции и десорбции водяных паров на поверхности нестехиометрических пленок диоксида олова с различной концентрацией кислородных вакансий на их электрические свойства.

**Методика измерений.** Для получения нестехиометрических пленок диоксида олова использовался метод реактивного магнетронного напыления с последующим двухступенчатым окислительным отжигом. Напыление производилось в среде аргона с добавлением кислорода, содержание которого не превышало 1 об.%. Как нами было установлено ранее [17–19], данный метод позволяет получать нестехиометрические тонкие пленки с варьируемой в широком диапазоне величин электропроводностью (из-за различной концентрации кислородных вакансий), а также изменять их фазовый состав. В настоящей работе электропроводность пленок варьировалась посредством изменения температуры отжига на 2-й стадии в диапазоне 350–400 °С. На 1-й стадии образцы отжигались при 200 °С (вблизи температуры плавления олова) в течение 2 ч, на второй – в течение 1 ч. Концентрация носителей заряда в пленках определялась посредством измерения эффекта Холла.

Рентгеноструктурный анализ пленок диоксида олова выполнялся с помощью рентгеновского дифрактометра Ultima IV RIGAKU в конфигурации параллельного пучка с применением монохроматизированного медного излучения  $\text{CuK}_\alpha$  (0,15406 нм) и высокоскоростного рентгеновского детектора D/teX.

Регистрация спектров комбинационного рассеяния света осуществлялась по схеме обратного рассеяния с помощью спектрально-аналитического комплекса Nanofinder High End (Lotis TII) при комнатной температуре. Подводимая к образцу мощность составляла 0,6 мВт, а диаметр возбуждающего пучка – около 1 мкм. Использовалось возбуждение лазерным излучением с длиной волны 532 нм.

Процессы адсорбции-десорбции насыщенного водяного пара на поверхности пленок исследовались при комнатной температуре ( $t = 22$  °С) в герметичной вакуумируемой камере с контролируемой атмосферой (давление остаточных газов составляло менее 0,1 мбар). Циклические процессы адсорбции и десорбции паров воды на поверхности образцов реализовывались посредством напуска в камеру насыщенного водяного пара и последующей откачки при помощи форвакуумного насоса. Относительная влажность в камере рассчитывалась по объему соединяемых емкостей, одна часть которых была откачана и имела влажность, близкую к 0 %, а другая содержала водяной пар при 100%-ной влажности. Были проведены два типа измерений с использованием мультиметра TEXTRONIC с внутренним сопротивлением 1 ГОм: кинетики изменения сопротивления и кинетики изменения напряжения при адсорбции и десорбции на них паров воды. Для исследований кинетики изменения напряжения половина поверхности каждого образца покрывалась водонепроницаемым материалом (парафином).

**Экспериментальные результаты и их обсуждение.** На рис. 1 приведены дифракционные спектры пленок, синтезированных при различных температурах отжига на 2-й стадии: 350, 375 и 400 °С.

На представленных рентгенограммах присутствуют пики, характерные для рассеяния на плоскостях (101), (110), (002) и (211) тетрагональной структуры  $\text{SnO}$  [19], которые наблюдаются для образцов, отожженных при 350 °С на 2-й стадии. Следует отметить, что в спектрах наблюдается некоторое угловое смещение дифракционных максимумов монооксида олова  $\text{SnO}$ , свидетельствующее об изменении параметров решетки, которое может быть обусловлено отклонением элементного состава от стехиометрического. С увеличением температуры отжига происходит более полное окисление, и интенсивности данных пиков снижаются.

Также на рентгеновских спектрах присутствуют пики, характерные для рассеяния на плоскостях (200), (211) и (112)  $\text{SnO}_2$  тетрагональной структуры типа рутила [20]. Средний размер кристаллитов  $\text{SnO}_2$  оценивался из соотношения Дебая – Шеррера [21]:

$$D = K\lambda/\beta\cos\theta, \quad (1)$$

где  $\lambda$  – длина волны рентгеновского излучения;  $\beta$  – полная ширина дифракционной линии на высоте половинной интенсивности (в радианах);  $\theta$  – угловое положение дифракционного максимума; коэффициент  $K = 0,9$ .

Оценка размеров кристаллитов диоксида олова по наиболее интенсивным пикам согласно выражению (1) дает значения в диапазоне  $\approx 20$ –30 нм. Следует отметить, что размер кристал-

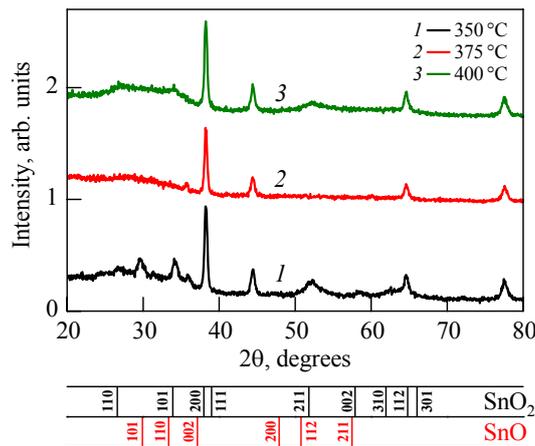


Рис. 1. Рентгеноструктурные спектры пленок, синтезированных при различных температурах отжига на 2-й стадии, °C: 1 – 350, 2 – 375, 3 – 400

Fig. 1. X-ray diffraction patterns for films synthesized at different second stage annealing temperatures, °C: 1 – 350, 2 – 375, 3 – 400

литов SnO<sub>2</sub> существенно не зависит от температуры отжига на 2-й стадии в рассматриваемом диапазоне температур.

Для дополнительной характеристики кристаллической структуры синтезированных пленочных образцов была использована спектроскопия комбинационного рассеяния света, которая является эффективным и чувствительным методом для исследования микроструктуры, химического и стехиометрического состава различных (в том числе полупроводниковых) материалов [22]. На рис. 2 приведены спектры комбинационного рассеяния света (КРС) для образцов, полученных при различной температуре на 2-й стадии отжига. В спектре комбинационного рассеяния света образца, полученного при 350 °C на 2-й стадии отжига, не обнаружено узких линий, для него характерны только две широкие полосы в диапазоне около 50–200 и 400–700 см<sup>-1</sup>. Необходимо подчеркнуть, что уширение линий в спектрах КРС может быть обусловлено небольшим размером кристаллитов [23]. Так, широкая полоса в низкочастотной области, наблюдаемая для порошков с размерами частиц менее 7 нм, может быть связана с акустическими модами, обусловленными колебаниями отдельных наночастиц как целого [23]. Образование широкой полосы в высокочастотном диапазоне может быть вызвано разупорядочением поверхности наноразмерных зерен [23]. Также на спектры КРС нестехиометрических образцов диоксида олова оказывают существенное влияние кислородные вакансии различного типа [24], наличие которых приводит к сдвигам и уширениям характерных для SnO<sub>2</sub> линий, появлению дополнительных пиков.

В спектре КРС для образцов, полученных при температурах 375 и 400 °C на 2-й стадии отжига, наблюдаются пики, соответствующие колебательным модам, присущим как кристаллической структуре SnO, так и SnO<sub>2</sub>. Например, для этих образцов регистрировались пики при 111 и 750 см<sup>-1</sup> в окрестности характерных для монокристалла SnO<sub>2</sub> мод колебаний B<sub>1g</sub> и B<sub>2g</sub>, а также пик при 692 см<sup>-1</sup>, который можно отнести к моде колебаний A<sub>2u</sub> продольных оптических фононов [25]. Пик при 86 см<sup>-1</sup> соответствует колебаниям Sn–O в фазе оксида олова [26]. С повышением температуры отжига фиксировалось увеличение интенсивности пиков, соответствующих модам колебаний структуры SnO<sub>2</sub> около 692 и 750 см<sup>-1</sup>. Данные процессы могут быть вызваны доокислением монооксида олова и образованием фазы диоксида олова. Ранее нами было также обнаружено влияние эффекта резонансного комбинационного рассеяния света на спектры КРС пленок, содержащих фазы SnO и SnO<sub>2</sub> [19]. Известно, что в случае, когда длина волны возбуждения совпадает с энергией электронного перехода или поглощения фотонов в материале, наблюдается увеличение интенсивности линий, характеризующих его колебательные моды [27]. Так как величины ширины запрещенной зоны монооксида олова и энергии возбуждающего лазера близки по значениям, то можно предположить, что наличие

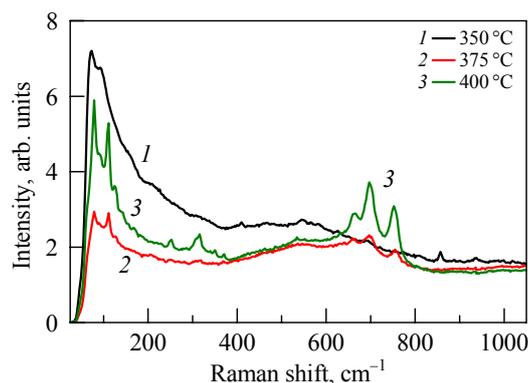


Рис. 2. Спектры комбинационного рассеяния света пленок, синтезированных при различных температурах отжига на 2-й стадии, °C: 1 – 350, 2 – 375, 3 – 400

Fig. 2. Raman spectra for films synthesized at different second stage annealing temperatures, °C: 1 – 350, 2 – 375, 3 – 400

фазы монооксида олова в пленках является важным для соблюдения условий резонансного комбинационного рассеяния света. Один из факторов, вызывающих увеличение в спектрах КРС интенсивности линий, характерных для диоксида олова, в образцах, содержащих обе устойчивые фазы оксидов олова ( $\text{SnO}$  и  $\text{SnO}_2$ ), связан с диссипативной передачей энергии электронных возбуждений от атомов монооксида олова к атомам диоксида олова. Для подтверждения влияния эффекта резонансного комбинационного рассеяния света на включениях монооксида олова в пленке, содержащей фазы  $\text{SnO}$  и  $\text{SnO}_2$ , необходим сравнительный анализ спектров КРС, зарегистрированных при различных энергиях возбуждающих лазеров [19].

По результатам структурных исследований можно сделать вывод о том, что при увеличении температуры на 2-й стадии отжига пленок происходит изменение их стехиометрического и фазового состава, вследствие чего при температуре 400 °C синтезируются пленки, наиболее близкие к стехиометрическому диоксиду олова. Напротив, отжиг на 2-й стадии при 350 °C приводит к формированию нестехиометрического диоксида олова  $\text{SnO}_{2-\delta}$  с включениями фазы  $\text{SnO}$  из-за неполного процесса окисления пленок, нанесенных методом реактивного магнетронного распыления. При этом самыми проводящими оказываются пленки с наибольшим отклонением от стехиометрического состава фазы  $\text{SnO}_2$  в силу того, что в нелегированных пленках донорами электронов являются кислородные вакансии. Эти выводы подтверждаются результатами измерений концентрации свободных носителей заряда в синтезированных при разных температурах отжига пленках, представленными в таблице. Как видно, повышение температуры отжига на 2-й стадии от 350 до 400 °C приводит к уменьшению концентрации свободных носителей заряда более чем в 10 раз.

#### Концентрация свободных носителей заряда в пленках диоксида олова в зависимости от температуры отжига на второй стадии

##### The concentration of free charge carriers in tin dioxide films depending on the second stage annealing temperature

Температура отжига на второй стадии, °C Second stage annealing temperature, °C	Условное обозначение образца Symbolic notation of the sample	Концентрация свободных носителей заряда, $\text{cm}^{-3}$ Concentration of free charge carriers, $\text{cm}^{-3}$
350	A1	$1,02 \cdot 10^{20}$
375	A2	$4,08 \cdot 10^{19}$
400	A3	$5,8 \cdot 10^{18}$

Следует отметить, что наиболее проводящие образцы характеризуются самой высокой чувствительностью к влажности атмосферы. На рис. 3 показаны кинетики изменения сопротивления пленок диоксида олова, полученных при различных температурах на 2-й стадии отжига. Изменения относительной влажности в камере (рассчитываемые по объему соединяемых емкостей с относительными влажностями, близкими к 0 и 100 %) проводились через каждые 150 с.

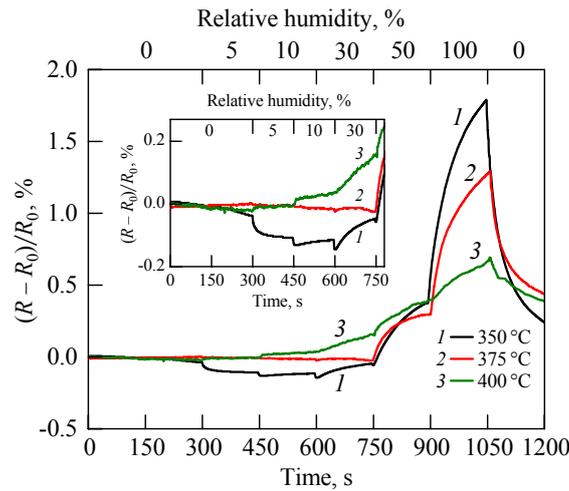


Рис. 3. Кинетики изменения сопротивления пленок диоксида олова, синтезированных при различных температурах отжига на 2-й стадии (1 – 350 °C; 2 – 375 °C; 3 – 400 °C), при изменении относительной влажности в рабочей камере; на врезке – кинетики изменения сопротивления пленок диоксида олова при невысоких значениях относительной влажности

Fig. 3. The kinetics of changes in the resistance of tin dioxide films synthesized at various annealing temperatures in the second stage of annealing (1 – 350 °C; 2 – 375 °C; 3 – 400 °C), with a change in the relative humidity in the working chamber; the inset shows the kinetics of changes in the resistance of tin dioxide films at low relative humidity

Значения относительной влажности в рабочей камере, при которых проводились измерения кинетики изменения сопротивления образцов, отмечены на верхней горизонтальной оси рис. 3.

Наиболее существенное влияние изменения относительной влажности в рабочей камере на сопротивление пленки было обнаружено для самого проводящего образца А1, полученного при температуре отжига 350 °C на 2-й стадии отжига. Для этого образца при увеличении относительной влажности от 0 до 30 % наблюдалось уменьшение сопротивления, а при дальнейшем изменении от 30 до 100 % сопротивление увеличивалось. Для образцов А2 и А3 в диапазоне значений относительной влажности от 0 до 30 % сопротивление оставалось практически неизменным, а в диапазоне значений от 30 до 100 % увеличивалось, как и для образца А1, но менее значительно.

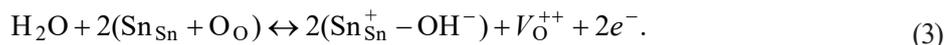
Уменьшение сопротивления наиболее проводящего образца А1 при изменении относительной влажности от 0 до 30 % объясняется протеканием процессов диссоциативной адсорбции воды, приводящих к образованию гидроксильных групп на поверхности диоксида олова и увеличению поверхностного заряда [1].

Как известно, вода при адсорбции на поверхности металлооксидных материалов проявляет восстановительные свойства, что приводит к увеличению их проводимости [15]. Влияние паров воды на электропроводность диоксида олова можно описать с помощью механизмов, предложенных в [28]. Ключевым этапом данных механизмов является то, что водяные пары подвергаются диссоциативной адсорбции на поверхности металлооксидов:

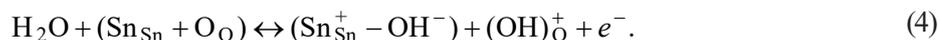


Эффективность процесса диссоциации зависит от наличия дефектов (в том числе кислородных вакансий) на поверхности металлооксида и температуры [29]. Предполагается, что при  $t = 270$  °C вода полностью распадается на протоны и гидроксильные группы [16].

Образовавшиеся в результате диссоциации молекул воды ионы будут адсорбироваться на поверхности оксида металла. В случае взаимодействия одной молекулы воды с двумя расположенными на поверхности атомами олова происходит реакция молекул воды с атомами кислорода решетки с образованием двух концевых гидроксильных групп ( $\text{Sn}_{\text{Sn}}^+ - \text{OH}$ ) и одной кислородной вакансии  $V_{\text{O}}^{++}$ , формирование которой приводит к возникновению двух электронов в зоне проводимости. Реакция может быть описана следующим уравнением:



В случае, когда каждая молекула воды взаимодействует с одним расположенным на поверхности атомом олова, в результате диссоциации молекулы  $\text{H}_2\text{O}$  и ее реакции с одним атомом кислорода решетки,  $\text{O}_{\text{O}}$ , происходит образование одной концевой гидроксильной группы  $(\text{Sn}_{\text{Sn}}^+ - \text{OH}^-)$  над атомом олова  $\text{Sn}_{\text{Sn}}$  и одной корневой гидроксильной группы  $(\text{OH}_{\text{O}}^+)$ . Реакция может быть описана следующим уравнением:



Тенденция к диссоциации паров воды при их адсорбции на поверхности металлооксидных материалов подтверждается квантово-химическими расчетами [10, 15]. При этом показано, что количество диссоциировавших молекул воды ограничено плотностью присутствующих на свободной поверхности кислородных вакансий.

Отметим, что данные механизмы предполагают взаимодействие образующихся в результате диссоциации молекул воды с атомом кислорода решетки, что может происходить при достаточно высоких температурах (300–600 °С). При комнатной температуре более вероятным является процесс взаимодействия паров воды с адсорбированными на поверхности металлооксидов атомами кислорода. При этом их адсорбция будет происходить преимущественно в местах поверхностных кислородных вакансий. Как известно, процессы адсорбции воды на поверхности металлооксидов протекают с участием комплексов, включающих в свой состав мостиковый кислород [8]. При этом комплексы адсорбируются преимущественно путем вытеснения адсорбированного на поверхности кислорода.

Важную роль в диссоциации на поверхности  $\text{SnO}_2$  играет локальная дефектная среда [29]. При низких температурах (до 150–200 °С) на поверхности диоксида олова атмосферный кислород адсорбируется по механизму физической адсорбции [30]. С помощью квантово-химических расчетов показано, что основные дефекты (в первую очередь кислородные вакансии) на поверхности будут заняты адсорбированным кислородом, а концентрация свободных дефектов будет низкой [13, 14]. В результате установлено, что адсорбированный кислород слабее связан с поверхностными кислородными вакансиями, чем водяные пары. Значит, водяной пар должен вытеснять на поверхности адсорбированный кислород.

Необходимо подчеркнуть, что для образцов с меньшим содержанием кислородных вакансий практически не наблюдалось влияния на их сопротивление изменения относительной влажности в области малых ее значений. Следовательно, кислородные вакансии играют существенную роль в процессе диссоциативной адсорбции водяных паров. Наблюдаемые более резкие изменения сопротивления при изменении относительной влажности в рабочей камере, которые отчетливо видны на врезке рис. 3, связаны с повышением температуры в моменты напуска водяных паров. На расположенном рядом с образцом датчике температуры в моменты изменения давления водяных паров в рабочей камере фиксировались изменения в диапазоне  $\Delta T \sim 0,5\text{--}1$  К. Этот эффект более отчетливо проявляется для самого низкоомного образца.

Увеличение сопротивления нестехиометрических пленок диоксида олова при высоких значениях относительной влажности может быть вызвано недиссоциативной адсорбцией паров воды. В этом случае образцы покрываются сплошным слоем адсорбированных молекул воды, ориентированных главным образом атомами кислорода к поверхности пленок. При комнатной температуре наблюдается преимущественно физическая адсорбция воды без образования химических связей. В связи с этим даже в случае адсорбции входящих в состав молекул воды атомов кислорода на месте имеющихся в пленке кислородных вакансий не должно происходить уменьшения концентрации свободных носителей заряда в зоне проводимости диоксида олова. Однако физически адсорбированный на кислородных вакансиях слой полярных молекул воды может приводить к смещению электронной плотности от поверхности пленок, а также к уменьшению подвижности находящихся вблизи поверхности электронов. В результате имеет место уменьшение проводимости нестехиометрических пленок диоксида олова. Эффект проявляется сильнее

для образцов с большей концентрацией кислородных вакансий, для которых формируется более плотный слой адсорбированных на вакансиях полярных молекул воды.

В процессе откачки водяных паров из рабочей камеры (уменьшении относительной влажности) для всех образцов наблюдается уменьшение сопротивления в результате процессов десорбции. При этом для восстановления сопротивления образцов до исходных значений было необходимо выдерживать пленки в потоке сухого воздуха при температуре 100 °С в течение 10 мин для полной десорбции адсорбированных на их поверхности комплексов и освобождения кислородных вакансий до начальных состояний.

Влияние концентрации кислородных вакансий в пленках диоксида олова на электрический отклик в результате процессов адсорбции и десорбции паров воды на их поверхности было обнаружено и при измерениях кинетики напряжения между открытой и закрытой водонепроницаемым материалом поверхностями образцов. На рис. 4 представлены кинетики напряжения на исследуемых структурах для наиболее проводящих образцов А1 и А2 при циклических процессах напуска паров воды (обеспечивающих 100%-ную относительную влажность в рабочей камере) и их последующей откачке.

Из рис. 4 видно, что в момент напуска паров воды и адсорбции их на поверхности образца наблюдается генерация положительного импульса ЭДС, а при десорбции паров воды с поверхности пленок в результате их откачки генерируется отрицательный импульс ЭДС между открытой и закрытой водонепроницаемым материалом поверхностями нанокристаллических пленок SnO<sub>2-δ</sub>. Величина импульсов ЭДС для образца А1 (с наибольшей концентрацией кислородных вакансий) существенно выше (приблизительно в 5 раз), чем для образца А2. Для образца А3, имеющего наименьшую концентрацию кислородных вакансий, не было обнаружено измеримого электрического отклика на изменение влажности при напуске и откачке паров воды. Таким образом, максимальная величина генерируемой ЭДС при адсорбции-десорбции водяных паров имела место для образца с наибольшей концентрацией кислородных вакансий. Время релаксации генерируемого напряжения в образцах составляло порядка 1 мин. Как уже отмечалось,

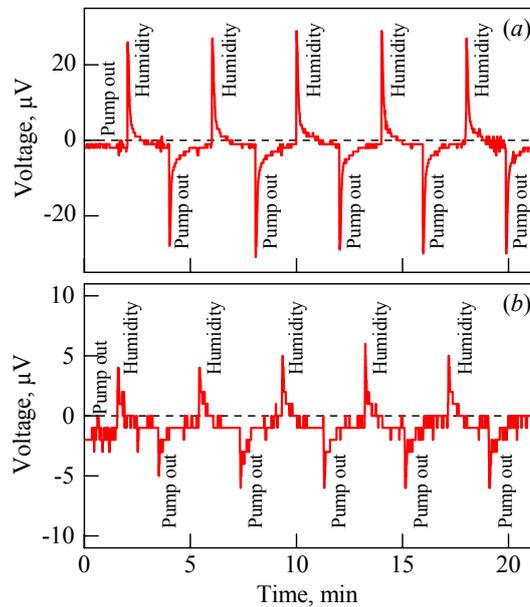


Рис. 4. Кинетики генерируемой ЭДС на пленках диоксида олова при циклических процессах адсорбции-десорбции паров воды на их поверхности для образцов, синтезированных при различных температурах отжига на 2-й стадии, °С: а – 350; б – 375

Fig. 4. The kinetics of the generated EMF in tin dioxide films under the cyclic processes of adsorption and desorption of water vapor on their surfaces for films synthesized at different second stage annealing temperatures, °C: a – 350; b – 375

в моменты изменения давления паров в рабочей камере фиксировалось изменение температуры в диапазоне  $\Delta T \sim 0,5\text{--}1$  К. Это может приводить к генерации термоЭДС из-за неравномерного нагрева открытой и закрытой водонепроницаемым материалом части образцов. Знак генерируемой в наших образцах ЭДС совпадает со знаком термоЭДС для материалов *n*-типа. Для разделения вкладов в генерируемое напряжение от термоЭДС и процессов адсорбции-десорбции паров воды на поверхности пленок необходимо провести дополнительные исследования, в том числе измерения теплопроводности образцов с различной концентрацией кислородных вакансий.

**Заключение.** Исследовано влияние адсорбции и десорбции паров воды при различных значениях относительной влажности (от 0 до 100 %) на электрические свойства пленок диоксида олова различного стехиометрического состава при комнатной температуре. Пленки  $\text{SnO}_{2-\delta}$  были синтезированы методом реактивного магнетронного напыления олова в аргон-кислородной плазме (содержание кислорода составляло  $\sim 1$  об.%) с последующим двухстадийным окислительным отжигом на воздухе. Концентрация кислородных вакансий в пленках и их электропроводность варьировалась посредством изменения температуры отжига на 2-й стадии в диапазоне 350–400 °С. Установлено, что величина изменения электропроводности при адсорбции-десорбции паров воды на поверхности пленок зависит от концентрации кислородных вакансий в них. Уменьшение сопротивления в области малых значений относительной влажности (менее  $\sim 30$  %) наблюдается только для пленок диоксида олова с высокой концентрацией кислородных вакансий ( $\sim 10^{20}$  см<sup>-3</sup>) и объясняется в рамках механизма диссоциативной адсорбции паров воды, включающей формирование гидроксильных групп и их взаимодействие с адсорбированным на кислородных вакансиях кислородом. При высокой относительной влажности (в диапазоне  $\sim 30\text{--}100$  %) имеет место уменьшение проводимости для всех исследованных нестехиометрических пленок диоксида олова в результате формирования плотного слоя физически адсорбированных на кислородных вакансиях полярных молекул воды, приводящего к смещению электронной плотности от поверхности пленок и уменьшению подвижности находящихся вблизи поверхности электронов. Обнаружена генерация ЭДС в результате установления термодинамического равновесия в ходе процесса адсорбции и десорбции паров воды на поверхности пленок диоксида олова. Полученные результаты могут использоваться для разработки датчиков влажности и газов на основе нестехиометрических пленок диоксида олова.

**Благодарности.** Работа выполнена в рамках задания 3.3.1 ГПНИ «Конвергенция-2020» (подпрограмма «Объединение»); белорусско-литовского проекта (№ Ф19ЛИТГ-001 и № S-LB-19-5), финансируемого ГКНТ Республики Беларусь и Научным советом Литвы и проектов № 691010 HUNTER и № 871284 SSHARE программы ЕС H2020-MSCA-RISE-2015.

Авторы выражают благодарность В. И. Шиманскому за проведение рентгеноструктурных исследований, а также О. В. Королик и А. В. Мазанику за проведение измерений спектров комбинационного рассеяния света нестехиометрических пленок диоксида олова.

**Acknowledgments.** This work was supported by the Belarusian National Research Programme “Convergence-2020” (subprogram “Integration”, task No. 3.3.1), the State Committee on Science and Technology of the Republic of Belarus (grant No. Ф19ЛИТГ-001), the Research Council of Lithuania (grant No. S-LB-19-5), and by the EU Programme H2020-MSCA-RISE-2015 (grants No. 691010 HUNTER and No. 871284 SSHARE).

The authors are grateful to V. I. Shymanski for the implementation of X-ray diffraction studies as well as to O. V. Korolik and A. V. Mazanik for the measurements of the Raman spectra of nonstoichiometric tin dioxide films.

### Список использованных источников

1. Shankar, P. Gas sensing mechanism of metal oxides: The role of ambient atmosphere, type of semiconductor and gases -A review // P. Shankar, J. B. B. Rayappan // *Sci. Lett.* – 2015. – Vol. 4. – P. 126.
2. Yuliarto, B.  $\text{SnO}_2$  Nanostructure as Pollutant Gas Sensors: Synthesis, Sensing Performances, and Mechanism / B. Yuliarto, G. Gumilar, N. L. W. Septiani // *Adv. Mater. Sci. Eng.* – 2015. – Vol. 2015. – ArticleID 694823. – P. 1–14. <https://doi.org/10.1155/2015/694823>
3. Das, S.  $\text{SnO}_2$ : A comprehensive review on structures and gas sensors / S. Das, V. Jayaraman // *Prog. Mater. Sci.* – 2014. – Vol. 66. – P. 112–255. <https://doi.org/10.1016/j.pmatsci.2014.06.003>
4. Ippommatsu, M. Sensing mechanism of  $\text{SnO}_2$  gas sensors / M. Ippommatsu, H. Sasaki, H. Yanagida // *J. Mater. Sci.* – 1990. – Vol. 25, № 1. – P. 259–262. <https://doi.org/10.1007/BF00544217>
5. Davydov, S. Adsorption of Oxygen Molecules and Carbon Monoxide Molecules on Tin Dioxide / S. Davydov, V. Moshnikov, A. Fedotov // *Tech. Phys.* – 2006. – Vol. 51. – P. 139–141. <https://doi.org/10.1134/S1063784206010221>
6. Kılıç, C. Origins of coexistence of conductivity and transparency in  $\text{SnO}_2$  / C. Kılıç, A. Zunger // *Phys. Rev. Lett.* – 2002. – Vol. 88, № 9. – P. 095501. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.88.095501>

7. Effect of Humid Aging on the Oxygen Adsorption in SnO<sub>2</sub> Gas Sensors / K. Suematsu [et al.] // *Sensors*. – 2018. – Vol. 18, № 1. – P. 254. <https://doi.org/10.3390/s18010254>
8. Structural motifs of water on metal oxide surfaces / R. Mu [et al.] // *Chem. Soc. Rev.* – 2017. – Vol. 46, № 7. – P. 1785–1806. <https://doi.org/10.1039/c6cs00864j>
9. First-principles study of the water adsorption on anatase(101) as a function of the coverage / R. Martinez-Casado [et al.] // *J. Phys. Chem. C*. – 2018. – Vol. 122, № 36. – P. 20736–20744. <https://doi.org/10.1021/acs.jpcc.8b05081>
10. Oxygen Vacancies as Active Sites for Water Dissociation on Rutile TiO<sub>2</sub> (110) / R. Schaub [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* – 2001. – Vol. 87, № 26. – P. 266104. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.87.266104>
11. Wang, J. G. Oxidation state of oxide supported nanometric gold / J. G. Wang, B. Hammer // *Top. Catal.* – 2007. – Vol. 44, № 1/2. – P. 49–56. <https://doi.org/10.1007/s11244-007-0277-9>
12. Role of water vapour in the interaction of SnO<sub>2</sub> gas sensors with CO and CH<sub>4</sub> / R. Ionescu [et al.] // *Sensors and Actuators B: Chemical*. – 1999. – Vol. 61, № 1. – P. 39–42. [https://doi.org/10.1016/S0925-4005\(99\)00277-4](https://doi.org/10.1016/S0925-4005(99)00277-4)
13. Competitive Adsorption of O<sub>2</sub> and H<sub>2</sub>O at the Neutral and Defective SnO<sub>2</sub> (110) Surface / B. Slater [et al.] // *MRS Online Proceedings Library Archive*. – 2000. – Vol. 658. <https://doi.org/10.1557/proc-658-gg9.33>
14. A computational chemist approach to gas sensors: Modeling the response of SnO<sub>2</sub> to CO, O<sub>2</sub>, and H<sub>2</sub>O Gases / J.-M. Ducéré [et al.] // *J. Comput. Chem.* – 2012. – Vol. 33, № 3. – P. 247–258. <https://doi.org/10.1002/jcc.21959>
15. Zakaryan, H. Adsorption of the H and H<sub>2</sub>O on SnO<sub>2</sub> Surfaces in an O<sub>2</sub> Environment: Density Functional Theory Study / H. Zakaryan // *Armenian J. Phys.* – 2016. – Vol. 9, № 4. – P. 283–293.
16. Malyshev, V. V. Response of semiconducting metal oxides to water vapor as a result of water molecules chemical transformations on catalytically active surfaces / V. V. Malyshev // *Russ. J. Phys. Chem. A*. – 2008. – Vol. 82, № 13. – P. 2329–2339. <https://doi.org/10.1134/s0036024408130293>
17. Адамчук, Д. В. Управление электрическими и оптическими параметрами активных элементов датчиков влажности на основе пленок оксидов олова переменного состава / Д. В. Адамчук, В. К. Ксеневиц // *Приборы и методы измерений*. – 2019. – Т. 10, № 2. – P. 138–150. <https://doi.org/10.21122/2220-9506-2019-10-2-138-150>
18. Fabrication and characterization of transparent tin dioxide films with variable stoichiometric composition. / V. K. Ksenevich [et al.] // *Acta Phys. Pol. A*. – 2015. – Vol. 128, № 5. – P. 861–863. <https://doi.org/10.12693/aphyspol.128.861>
19. Nonstoichiometric tin oxide films: study by x-ray diffraction, raman scattering and electron paramagnetic resonance / V. K. Ksenevich [et al.] // *Lithuanian J. Phys.* – 2019. – Vol. 59, № 4. – P. 179–185.
20. Импедансная спектроскопия поликристаллических пленок диоксида олова / Д. В. Адамчук [и др.] // *Приборы и методы измерений*. – 2016. – Т. 7, № 3. – С. 312–321. <https://doi.org/10.21122/2220-9506-2016-7-3-312-321>
21. Borojerdian, P. Structural and Optical Study of SnO Nanoparticles Synthesized Using Microwave – Assisted Hydrothermal Route / P. Borojerdian // *Int. J. Nanosci. Nanotechnol.* – 2013. – Vol. 9, № 2. – P. 95–100.
22. Gardiner, D. J. Practical Raman Spectroscopy / D. J. Gardiner, P. R. Graves. – Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag. – 1989. – 157 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-74040-4>
23. The complete Raman spectrum of nanometric SnO<sub>2</sub> particles / A. Diéguez [et al.] // *J. Appl. Phys.* – 2001. – Vol. 90, № 3. – P. 1550–1557. <https://doi.org/10.1063/1.1385573>
24. Identification of oxygen vacancy types from Raman spectra of SnO<sub>2</sub> nanocrystals / L. Z. Liu [et al.] // *J. Raman Spectroscopy*. – 2012. – Vol. 43, № 10. – P. 1423–1426. <https://doi.org/10.1002/jrs.4078>
25. Batzill, M. The surface and materials science of tin oxide / M. Batzill, U. Diebold // *Prog. Surf. Sci.* – 2005. – Vol. 79, № 2. – P. 47–154. <https://doi.org/10.1016/j.progsurf.2005.09.002>
26. Calculated static and dynamic properties of -Sn and Sn-O compounds / E. L. Peltzer y Blancá [et al.] // *Phys. Rev. B*. – 1993. – Vol. 48, № 21. – P. 15712–15718. <https://doi.org/10.1002/jrs.4078>
27. Exploring Resonance Raman Spectroscopy / D. Tuschel [et al.] // *Spectroscopy*. – 2018. – Vol. 33, № 12. – P. 12–19.
28. Heiland, G. Physical and Chemical Aspects of Oxidic Semiconductor Gas Sensors / G. Heiland, D. Kohl // *Chemical Sensor Technology*. – Elsevier, 1988. – Vol. 1. – P. 15–38. <https://doi.org/10.1016/B978-0-444-98901-7.50007-5>
29. Gercher, V. A. Water adsorption on stoichiometric and defective SnO<sub>2</sub>(110) surfaces / V. A. Gercher, D. F. Cox // *Surf. Sci.* – 1995. – Vol. 322, № 1/3. – P. 177–184. [https://doi.org/10.1016/0039-6028\(95\)90028-4](https://doi.org/10.1016/0039-6028(95)90028-4)
30. Site-selectively grown SnO<sub>2</sub> NWs networks on micromembranes for efficient ammonia sensing in humid conditions / J. Samà [et al.] // *Sensors and Actuators B: Chemical*. – 2016. – Vol. 232. – P. 402–409. <https://doi.org/10.1016/j.snb.2016.03.091>

## References

1. Shankar P., Rayappan J. B. B. Gas Sensing Mechanism of Metal Oxides: The Role of Ambient Atmosphere, Type of Semiconductor and Gases -A Review. *Science Letters*, 2015, vol. 4, pp. 126.
2. Yulianto B., Gumilar G., Septiani N. L. W. SnO<sub>2</sub> Nanostructure as Pollutant Gas Sensors: Synthesis, Sensing Performances, and Mechanism. *Advances in Materials Science and Engineering*, 2015, vol. 2015, pp. 1–14. <https://doi.org/10.1155/2015/694823>
3. Das S., Jayaraman V. SnO<sub>2</sub>: A comprehensive review on structures and gas sensors. *Progress in Materials Science*, 2014, vol. 66, pp. 112–255. <https://doi.org/10.1016/j.pmatsci.2014.06.003>
4. Ippommatsu M., Sasaki H., Yanagida H. Sensing mechanism of SnO<sub>2</sub> gas sensors. *Journal of Materials Science*, 1990, vol. 25, no. 1, pp. 259–262. <https://doi.org/10.1007/BF00544217>

5. Davydov S., Moshnikov V., Fedotov A. Adsorption of Oxygen Molecules and Carbon Monoxide Molecules on Tin Dioxide. *Technical Physics*, 2006, vol. 51, pp. 139–141. <https://doi.org/10.1134/S1063784206010221>
6. Kılıç C., Zunger A. Origins of Coexistence of Conductivity and Transparency in SnO<sub>2</sub>. *Physical Review Letters*, 2002, vol. 88, no. 9, pp. 095501. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.88.095501>
7. Suematsu K., Ma N., Watanabe K., Yuasa M., Tetsuya K., Shimano K. Effect of Humid Aging on the Oxygen Adsorption in SnO<sub>2</sub> Gas Sensors. *Sensors*, 2018, vol. 18, p. 254. <https://doi.org/10.3390/s18010254>
8. Mu R., Zhao Z., Dohnálek Z., Long, J. Structural Motifs of Water on Metal Oxide Surfaces. *Chemical Society Reviews*, 2017, vol. 46, no. 7, pp. 1785–1806. <https://doi.org/10.1039/c6cs00864j>
9. Martinez-Casado R., Mallia G., Harrison N. M., Pérez R. First-Principles Study of the Water Adsorption on Anatase(101) as a Function of the Coverage. *Journal of Physical Chemistry C*, 2018, vol. 122, no. 36, pp. 20736–20744. <https://doi.org/10.1021/acs.jpcc.8b05081>
10. Schaub R., Thostrup P., Lopez N., Lægsgaard E., Stensgaard I., Nørskov J. K., Besenbacher F. Oxygen Vacancies as Active Sites for Water Dissociation on Rutile TiO<sub>2</sub> (110). *Physical Review Letters*, 2001, vol. 87, no. 26, p. 266104. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.87.266104>
11. Wang J. G., Hammer B. Oxidation State of Oxide Supported Nanometric Gold. *Topics in Catalysis*, 2007, vol. 44, no. 1–2, pp. 49–56. <https://doi.org/10.1007/s11244-007-0277-9>
12. Ionescu R., Vancu A., Moise C., Tomescu A. Role of Water Vapour in the Interaction of SnO<sub>2</sub> Gas Sensors with CO and CH<sub>4</sub>. *Sensors and Actuators B: Chemical*, 1999, vol. 61, no. 1, pp. 39–42. [https://doi.org/10.1016/S0925-4005\(99\)00277-4](https://doi.org/10.1016/S0925-4005(99)00277-4)
13. Slater B., Catlow C. R. A., Williams D. E., Stoneham A. M. Competitive Adsorption of O<sub>2</sub> and H<sub>2</sub>O at the Neutral and Defective SnO<sub>2</sub> (110) Surface. *MRS Online Proceedings Library*, 2000, vol. 658. <https://doi.org/10.1557/proc-658-gg9.33>
14. Ducéré J.-M., Hemeryck A., Estève A., Rouhani M. D., Landa G., Ménini P., Tropis C., Maisonnat A., Fau P., Chaudret B. A Computational Chemist Approach to Gas Sensors: Modeling the Response of SnO<sub>2</sub> to CO, O<sub>2</sub>, and H<sub>2</sub>O Gases. *Journal of Computational Chemistry*, 2012, vol. 33, no. 3, pp. 247–258. <https://doi.org/10.1002/jcc.21959>
15. Zakaryan H. Adsorption of the H and H<sub>2</sub>O on SnO<sub>2</sub> Surfaces in an O<sub>2</sub> Environment: Density Functional Theory Study. *Armenian Journal of Physics*, 2016, vol. 9, no. 4, pp. 283–293.
16. Malyshev V. V. Response of semiconducting metal oxides to water vapor as a result of water molecules chemical transformations on catalytically active surfaces. *Russian Journal of Physical Chemistry A*, 2008, vol. 82, no. 13, pp. 2329–2339. <https://doi.org/10.1134/s0036024408130293>
17. Adamchuk D. V., Ksenevich V. K. Control of Electrical and Optical Parameters of Humidity Sensors Active Elements Based on Tin Oxides Films with Variable Composition. *Devices and Methods of Measurements*, 2019, vol. 10, no. 2, pp. 138–150 (in Russian). <https://doi.org/10.21122/2220-9506-2019-10-2-138-150>
18. Ksenevich V. K., Adamchuk D. V., Odzhaev V., Żukowski P. V. Fabrication and Characterization of Transparent Tin Dioxide Films with Variable Stoichiometric Composition. *Acta Physica Polonica A*, 2015, vol. 128, no. 5, pp. 861–863. <https://doi.org/10.12693/aphyspola.128.861>
19. Ksenevich V. K., Adamchuk D. V., Poklonski N. A., Navickas M., Banys J. Nonstoichiometric tin oxide films: study by x-ray diffraction, raman scattering and electron paramagnetic resonance. *Lithuanian Journal of Physics*, 2019, vol. 59, no. 4, pp. 179–185.
20. Adamchuk D. V., Ksenevich V. K., Gorbachuk N. I., Shimanskij V. I. Impedance spectroscopy of polycrystalline tin dioxide films. *Devices and Methods of Measurements*, 2016, vol. 7, no. 3 pp. 312–321 (in Russian). <https://doi.org/10.21122/2220-9506-2016-7-3-312-321>
21. Borojerdian P. Structural and Optical Study of SnO Nanoparticles Synthesized Using Microwave – Assisted Hydrothermal Route. *International Journal of Nanoscience and Nanotechnology*, 2013, vol. 9, no. 2, pp. 95–100.
22. Gardiner D. J., Graves P. R. *Practical Raman Spectroscopy*. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 1989. 157 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-74040-4>
23. Diéguez A., Romano-Rodríguez A., Vilà A., Morante J. R. The Complete Raman Spectrum of Nanometric SnO<sub>2</sub> Particles. *Journal of Applied Physics*, 2001, vol. 90, no. 3, pp. 1550–1557. <https://doi.org/10.1063/1.1385573>
24. Liu L. Z., Li T. H., Wu X., Shen J. C., Chu P. K. Identification of Oxygen Vacancy Types from Raman Spectra of SnO<sub>2</sub>. *Nanocrystals*, 2012, vol. 43, no. 10, pp. 1423–1426. <https://doi.org/10.1002/jrs.4078>
25. Batzill M., Diebold U. The Surface and Materials Science of Tin Oxide. *Progress in Surface Science*, 2005, vol. 79, no. 2, pp. 47–154. <https://doi.org/10.1016/j.progsurf.2005.09.002>
26. Peltzer y Blanca E. L., Svane A., Christensen N. E., Rodríguez C. O., Cappannini O. M., Moreno M. S. Calculated Static and Dynamic Properties of -Sn and Sn-O Compounds. *Physical Review B*, 1993, vol. 48, no. 21, pp. 15712–15718. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.48.15712>
27. Tuschel D. Exploring Resonance Raman Spectroscopy. *Spectroscopy*, 2018, vol. 33, no. 12, pp. 12–19.
28. Heiland G., Kohl D. Physical and Chemical Aspects of Oxidic Semiconductor Gas Sensors. *Chemical Sensor Technology. Vol. 1*. Elsevier, 1988, pp. 15–38. <https://doi.org/10.1016/B978-0-444-98901-7.50007-5>
29. Gercher V. A., Cox D. F. Water Adsorption on Stoichiometric and Defective SnO<sub>2</sub> (110) Surfaces. *Surface Science*, 1995, vol. 322, no. 1–3, pp. 177–184. [https://doi.org/10.1016/0039-6028\(95\)90028-4](https://doi.org/10.1016/0039-6028(95)90028-4)
30. Samà J., Barth S., Domènech-Gil G., Prades J.-D., López N., Casals O., Gràcia I., Cané C., Romano-Rodríguez A. Site-Selectively Grown SnO<sub>2</sub> NWs Networks on Micromembranes for Efficient Ammonia Sensing in Humid Conditions. *Sensors and Actuators B: Chemical*, 2016, vol. 232, pp. 402–409. <https://doi.org/10.1016/j.snb.2016.03.091>

### Информация об авторах

**Адамчук Дмитрий Вячеславович** – научный сотрудник НИЛ физики электронных материалов кафедры физики полупроводников и нанoeлектроники физического факультета, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: AdamchukDV@bsu.by

**Ксеневиц Виталий Казимирович** – кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий НИЛ физики электронных материалов кафедры физики полупроводников и нанoeлектроники физического факультета, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: Ksenevich@bsu.by

**Поклонский Николай Александрович** – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры физики полупроводников и нанoeлектроники физического факультета, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: Poklonski@bsu.by

**Ковалев Александр Игоревич** – кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры физики полупроводников и нанoeлектроники физического факультета, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: KovalevAI@bsu.by

### Information about the authors

**Dzmitry V. Adamchuk** – Reseacher, Laboratory of Physics of Electronic Materials, Department of Semiconductor Physics and Nanoelectronics, Faculty of Physics, Belarusian State University (4, Nezavisimosty Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: AdamchukDV@bsu.by

**Vitaly K. Ksenevich** – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Head of the Laboratory of Physics of Electronic Materials, Department of Semiconductor Physics and Nanoelectronics, Faculty of Physics, Belarusian State University (4, Nezavisimosty Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: Ksenevich@bsu.by

**Nikolai A. Poklonski** – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Professor of the Department of Semiconductor Physics and Nanoelectronics, Faculty of Physics, Belarusian State University (4, Nezavisimosty Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: Poklonski@bsu.by

**Aliaksandr I. Kavaleu** – Ph. D. (Physics and Mathematics), Senior Lecturer of the Department of Semiconductor Physics and Nanoelectronics, Faculty of Physics, Belarusian State University (4, Nezavisimosty Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: KovalevAI@bsu.by

**ИНФОРМАТИКА**  
**INFORMATICS**

УДК 519.6  
<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-1-114-126>

Поступила в редакцию 19.12.2019  
Received 19.12.2019

**П. И. Соболевский, С. В. Баханович**

*Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь*

**АНАЛИЗ ГЛОБАЛЬНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ  
В ГЕКСАГОНАЛЬНОМ ТАЙЛИНГЕ**

**Аннотация.** Техника тайлинга широко применяется на практике для решения задач эффективного использования многоуровневой памяти и оптимизации обменов данными при разработке как последовательных, так и параллельных программ. В работе исследуется задача получения глобальных, уровня тайлов, зависимостей. Задача решается в контексте применения параметризованного гексагонального тайлинга к алгоритмам с двумерной областью вычислений. Приведено формализованное определение гексагонального тайла, а также представлены критерии плотного покрытия области вычислений гексагональными тайлами. Сформулировано и доказано утверждение, позволяющее получить все глобальные зависимости между тайлами. Построены формулы, дающие возможность определить множества итераций гексагональных тайлов, порождающих эти зависимости. Множества итераций, порождающих глобальные зависимости, получены в виде многогранников с явным выражением их границ.

**Ключевые слова:** тайлинг, гексагональный тайлинг, тайл, оптимизация программ, суперкомпьютер

**Для цитирования.** Соболевский, П. И. Анализ глобальных зависимостей в гексагональном тайлинге / П. И. Соболевский, С. В. Баханович // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2020. – Т. 56, № 1. – С. 114–126. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-1-114-126>

**Pavel I. Sobolevsky, Sergey V. Bakhanovich**

*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus*

**GLOBAL DEPENDENCES IN HEXAGONAL TILING**

**Abstract.** Tiling is a widely used technique to solve the problems of the efficient use of multilevel memory and optimize data exchanges when developing both sequential and parallel programs. This paper investigates the problem of obtaining global dependencies, i.e. informational dependencies between tiles. The problem is solved in the context of parametrized hexagonal tiling in application to algorithms with a two-dimensional computational domain. The paper includes a formalized definition of the hexagonal tile and the criteria for dense coverage of the computational domain with hexagonal tiles. Herein, we have formulated a statement that permits to obtain all global dependencies between tiles. Formulas are constructed for the determination of sets of iterations of hexagonal tiles generating these dependencies. The sets of iterations that generate global dependencies are obtained in the form of polyhedra with an explicit expression of their boundaries.

**Keywords:** tiling, hexagonal tiling, tile, code optimization, supercomputer

**For citation.** Sobolevsky P. I., Bakhanovich S. V. Global dependences in hexagonal tiling. *Vestsi Natsyional'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2020, vol. 56, no. 1, pp. 114–126 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-1-114-126>

**Введение.** Для решения задач эффективного использования многоуровневой памяти и оптимизации обменов данными при разработке программных продуктов на практике широко применяется техника тайлинга [1–5]. Суть тайлинга состоит в увеличении зернистости алгоритма: множество операций алгоритма разбивается на группы-тайлы, каждый тайл рассматривается как зерно вычислений или макрооперация.

Традыцыйна техника тайлінга аснована на выкарыстанні тайлоў у форме  $n$ -мерных паралелепіпедоў. Техніка пастаянна развіваецца, і адным з яе перспектывных напраўленняў з’яўляецца ідэя выкарыстання тайлоў гексаганальнай формы [6]. Выкарыстанне гексаганальных тайлоў для шэрагу паралельных алгарытмаў дае магчымасць оптымізаваць камунікацыі больш эфектывна, чым гэта дазваляе зрабіць класіфікацыйны тайлінг. Перспектывнасць гексаганальнага тайлінга зрабае актуальнай задачу разробкі данай тэхнікі. Асабае значэнне прыобрабае рашэнне указанай задачы ў рамках фармалізаванага падхода – на базе строгага матэматычнага апарата. Паскольку тайлінг – гэта преобразованне алгарытма, то матэматычны падход аўтаматычна гарантуе яго карэктнасць. Кромэ таго, фармалізацыя забяспечывае большую варыятыўнасць тайлінга і, што не менш важна, дае магчымасць яго інтэграцыі ў кампілятары паслядоўных і паралельных праграм.

Тэхніка тайлінга прадпалагае паслядоўнае рашэнне наступных задач: вызначэнне канфігурацыі тайлоў, плотнае пакрыццё імі абласці вылішчэнняў алгарытма, вызначэнне глабальных, узрвня макраоперацыяў-тайлоў, залежнасцей і, наконца, преобразованне алгарытма – устанавленне парядка вылішчэнняў макраоперацыяў алгарытма і парядка вылішчэнняў операцыяў унутры тайлоў. У [7] прадпалажана фармалізаваны падход да разробкі тэхнікі гексаганальнага тайлінга: прадпалажана фармальнае вызначэнне параметрызаванага гексаганальнага тайлінга, а такжэ палучаны неабходныя і дастаточныя ўмовы плотнага пакрыцця абласці вылішчэнняў гексаганальнымі тайламі. Настоящая статья является продолжением работы [7] и посвящена решению задачи определения глобальных зависимостей между гексаганальными тайлами. Основным результатом являются формулы для определения зависимостей между тайлами. Кроме того, получены формальные представления множеств итераций, порождающих эти зависимости, в виде многогранников с явным выражением их границ.

**Гексаганальны тайлінг.** Будем прадпалагаць, што абласць вылішчэнняў алгарытма (індекснае мноства)  $V$  – выпуклы многуюгольнік, складаючыся з пунктаў  $J(J_1, J_2) \in Z^2$  з цэлачысленнымі каардынатамі. Абласцю вылішчэнняў такога віда, напрыклад, часта характэрызуюцца алгарытмы (праграмы), заданыя ў віде тэснаўложаных гнездаў цыклоў. Кожнай операцыі алгарытма ставіцца ў саотваствіе пункт многумернага цэлачысленнага прастранства. Размэрнасць прастранства вызначаецца глыбінчай ўложаных цыклоў праграмы. Каардынаты пункта, як правіла, – гэта упарадкаваны набор значэнняў счэткаў цыклоў, пры котрых вылішчаецца операцыя алгарытма. Мноства ўсех такіх пунктаў абрабае абласць вылішчэнняў алгарытма.

Аснову тэорыі гексаганальнага тайлінга складае пакрыццё прастранства  $Z^2$ , ў том лісле абласці вылішчэнняў  $V$ , гексаганальнымі тайламі – выпуклымі шэсціугольнікамі з трма паралельнымі і равнымі старонамі. У [7] прадпалажана фармальнае вызначэнне гексаганальнага тайла як мноства пунктаў цэлачысленнага прастранства  $Z^2$  ў віде

$$\begin{aligned}
 T_6 = \{ & J \in Z^2 \mid \bar{0} \leq H^{(1)}(J - J^{(1)}) \leq H^{(1)}(J^{(4)} - J^{(1)}) = \bar{R}^{(1)} - \bar{1}, \\
 & \bar{0} \leq H^{(2)}(J - J^{(2)}) \leq H^{(2)}(J^{(5)} - J^{(2)}) = \bar{R}^{(2)} - \bar{1}, \\
 H^{(k)} = & \begin{pmatrix} h_{11}^{(k)} & 0 \\ h_{21}^{(k)} & h_{22}^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{h}_1^{(k)} \\ \bar{h}_2^{(k)} \end{pmatrix} \in Z^{2 \times 2}, \quad h_{11}^{(1)} = h_{22}^{(2)} = 1, \quad h_{22}^{(1)} = -1, \quad J^{(2)} = J^{(1)} + (0, \omega_0), \\
 \omega_0 = & 0,5 \left( r_2^{(1)} - 1 + r_2^{(2)} - 1 - (h_{21}^{(1)} + h_{21}^{(2)}) (r_1^{(1)} - 1) \right), \quad 0 < \omega_0 < \min \{ r_2^{(1)}, r_2^{(2)} \} - 1,
 \end{aligned} \tag{1}$$

дзе пункты  $J^{(i)} \in Z^2$ ,  $1 \leq i \leq 6$ , з’яўляюцца вершынамі шэсціугольніка (нумэрацыя па часовай стрэлке), а унімодулярныя матрыцы  $H^{(k)}$  і вектары  $\bar{R}^{(k)}$ ,  $k = 1, 2$ , – параметрамі, вызначаючымі фарму і размеры гексаганальнага тайла. Фактычна тайл абрабае перасечэннем двух паралэлаграмоў, заданых двума ніжнімі трэугольнымі матрыцамі  $H^{(k)}$ ,  $k = 1, 2$ , і двума вектарамі

$$\bar{R}^{(k)} = (r_1^{(k)}, r_2^{(k)}) \in Z^2, \quad 1 \leq r_i^{(k)} \leq \max_{J \in V} \bar{h}_i^{(k)} J - \min_{J \in V} \bar{h}_i^{(k)} J + 1, \quad k = 1, 2.$$

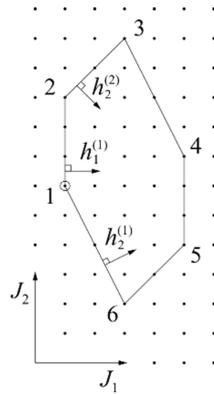


Рис. 1. Гексагональный тайл  $T_6$

Fig. 1. Hexagonal tile  $T_6$

Отметим, что в определении (1) явно присутствуют не все вершины тайла. Вершины  $J^{(3)}$  и  $J^{(6)}$  присутствуют в нем неявно, как точки пересечения сторон параллелограммов. Вариант гексагонального тайла, определяемого таким образом, изображен на рис. 1.

Матрицы  $H^{(1)}$  и  $H^{(2)}$  составлены построчно из координат нормальных векторов  $\vec{h}_i^{(k)}$ ,  $1 \leq i, k \leq 2$ , прямых, на которых расположены стороны параллелограммов. Векторы  $\vec{R}^{(1)}$  и  $\vec{R}^{(2)}$  определяют размеры параллелограммов, в то время как матрицы  $H^{(1)}$  и  $H^{(2)}$  задают их форму и ориентацию на плоскости. Точки  $J^{(1)}$  и  $J^{(2)}$  являются точками привязки параллелограммов к плоскости и связаны равенством  $J^{(2)} = J^{(1)} + (0, \omega_0)$ , где  $\omega_0$  – положительный целочисленный параметр, определяющий смещение параллелограмма с матрицей  $H^{(2)}$  относительно параллелограмма с матрицей  $H^{(1)}$  вдоль прямой с нормальным вектором  $\vec{h}_1^{(1)}$ . Значение параметра  $\omega_0$  влияет на соотношение между длинами параллельных сторон получаемого шестиугольника-тайла. Значение смещения  $(0, \omega_0)$ , при котором достигается необходимое по определению гексагонального тайла равенство его параллельных сторон, определяется через параметры  $H^{(k)}$  и  $\vec{R}^{(k)}$ ,  $k = 1, 2$ :

$$\begin{aligned} (0, \omega_0) &= 0,5 \left( \left( H^{(1)} \right)^{-1} \left( \vec{R}^{(1)} - \vec{1} \right) - \left( H^{(2)} \right)^{-1} \left( \vec{R}^{(2)} - \vec{1} \right) \right) = \\ &= 0,5 \left( 0, r_2^{(1)} - 1 + r_2^{(2)} - 1 - \left( h_{21}^{(1)} + h_{21}^{(2)} \right) \left( r_1^{(1)} - 1 \right) \right). \end{aligned}$$

После определения конфигурации тайлов далее необходимо осуществить покрытие ими пространства  $Z^2$  и, тем самым, области вычислений  $V$ . Покрытие тайлами осуществляется с полным сохранением их конфигурации, при этом каждый тайл получает свой уникальный идентификатор (индекс)  $J^{gl} \in Z^2$ . Данный идентификатор необходим для определения глобальных зависимостей между тайлами, установления отношения соседства между ними и, в целом, порядка выполнения тайлов как макроопераций при конечном преобразовании алгоритма. О том, каким образом задаются  $J^{gl}$ , будет сказано ниже.

По аналогии с традиционным тайлингом вводится понятие начальной вершины тайла. В данном случае начальной вершиной гексагонального тайла будем называть точку  $J^{(1)}$ . Начальная вершина фактически является точкой привязки тайла к плоскости (в пространстве  $Z^2$ ). Тогда, с формальной точки зрения, покрытие пространства  $Z^2$  тайлами вида (1) можно задать аффинной функцией вида

$$J^{(1)}(J^{gl}) = J^{\bar{0}} + PJ^{gl}, \quad J^{gl} \in Z^2. \tag{2}$$

Функция вида (2) устанавливает соответствие между идентификаторами тайлов и их начальными вершинами. Другими словами, данная функция для каждого тайла определяет точку его

привязки в пространстве  $Z^2$ . Функция, задающая покрытие, характеризуется двумя параметрами  $J^{\bar{0}} \in Z^2$  и  $P \in Z^{2 \times 2}$ . Точка  $J^{\bar{0}}$  по существу есть начальная вершина «нулевого» тайла ( $J^{gl} = \bar{0}$ ). Невырожденная матрица  $P$  является ключевым параметром, поскольку определяет положение тайлов относительно друг друга. Именно от выбора этой матрицы зависит плотность укладки. Таким образом, гексагональные тайлы вида (1) вместе с аффинной функцией (2), при выбранных параметрах  $H^{(k)}$ ,  $\bar{R}^{(k)}$ ,  $J^{\bar{0}}$  и  $P$ , определяют гексагональный тайлинг в пространстве  $Z^2$ .

В соответствии с определением гексагонального тайла в виде (1) каждая вершина  $J^{(i)}(J^{gl})$  шестиугольника  $T_6(J^{gl})$  может быть получена из начальной вершины путем ее сдвига на вектор  $\bar{\lambda}^{(i)} = \lambda_1^{(i)}(0,1) + \lambda_2^{(i)}(1,-h_{21}^{(1)})$ :

$$J^{(i)}(J^{gl}) = J^{(1)}(J^{gl}) + \lambda_1^{(i)}(0,1) + \lambda_2^{(i)}(1,-h_{21}^{(1)}) = J^{(1)}(J^{gl}) + (H^{(1)})^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_2^{(i)} \\ \lambda_1^{(i)} \end{pmatrix}, \quad 2 \leq i \leq 6,$$

где

$$\lambda_1^{(2)} = \omega_0, \quad \lambda_2^{(2)} = 0; \quad \lambda_1^{(3)} = r_2^{(1)} - 1, \quad \lambda_2^{(3)} = (r_2^{(1)} - \omega_0 - 1) / (h_{21}^{(1)} + h_{21}^{(2)});$$

$$\lambda_1^{(4)} = r_2^{(1)} - 1, \quad \lambda_2^{(4)} = r_1^{(1)} - 1; \quad \lambda_1^{(5)} = r_2^{(1)} - \omega_0 - 1, \quad \lambda_2^{(5)} = r_1^{(1)} - 1;$$

$$\lambda_1^{(6)} = 0, \quad \lambda_2^{(6)} = (r_2^{(2)} - \omega_0 - 1) / (h_{21}^{(1)} + h_{21}^{(2)}).$$

Из данного представления следует, что если выполняется условие

$$\frac{r_2^{(2)} - \omega_0 - 1}{h_{21}^{(1)} + h_{21}^{(2)}} \in Z, \quad \frac{r_2^{(1)} - \omega_0 - 1}{h_{21}^{(1)} + h_{21}^{(2)}} \in Z, \quad (3)$$

то координаты всех вершин гексагональных тайлов в покрытии будут иметь целочисленные координаты. Множество всех целочисленных точек гексагонального тайла (1) с учетом определенных выше параметров тайлинга теперь может быть представлено в виде

$$T_6(J^{gl}) = \left\{ J \in Z^2 \mid \bar{0} \leq H^{(1)}(J - J^{(1)}(J^{gl})) \leq (\bar{R}^{(1)} - \bar{1}), \right. \\ \left. - (0, \omega_0) \leq H^{(2)}(J - J^{(1)}(J^{gl})) \leq (\bar{R}^{(2)} - \bar{1}) - (0, \omega_0) \right\} \quad (4)$$

или в развернутом виде с явным определением границ

$$T_6(J^{gl}) = \left\{ J \in Z^2 \mid J_1^{(1)}(J^{gl}) \leq J_1 \leq J_1^{(1)}(J^{gl}) + r_1^{(1)} - 1, \right. \\ \left. J_2^{(1)}(J^{gl}) + \max\left(h_{21}^{(1)}(J_1^{(1)}(J^{gl}) - J_1), \omega_0 - r_2^{(2)} + 1 - h_{21}^{(2)}(J_1^{(1)}(J^{gl}) - J_1)\right) \leq J_2 \leq \right. \\ \left. \leq J_2^{(1)}(J^{gl}) + \min\left(r_2^{(1)} - 1 + h_{21}^{(1)}(J_1^{(1)}(J^{gl}) - J_1), \omega_0 - h_{21}^{(2)}(J_1^{(1)}(J^{gl}) - J_1)\right) \right\},$$

**Плотные покрытия.** Для преобразования алгоритма посредством техники тайлинга необходимо получить плотное покрытие тайлами области вычислений. Пусть конфигурация гексагональных тайлов задана в соответствии с определением (1), причем параметры тайлинга дополнительно удовлетворяют условию (3). В работе [7] для такого вида тайлов представлено решение задачи плотного покрытия, которое заключается в нахождении матрицы  $P$ , обеспечивающей посредством отображения вида (2) плотную укладку тайлов на плоскости.

**Определение 1.** *Покрытие пространства  $Z^2$ , а следовательно, и области вычислений  $V \subset Z^2$ , непересекающимися тайлами, будем называть плотным, если для любой точки  $J \in Z^2$  существует единственный тайл в покрытии, которому эта точка принадлежит.*

Формализованное решение задачи плотной укладки непосредственно зависит от выбора направлений идентификации тайлов индексами  $J^{gl}$ . Направления идентификации тайлов, в свою очередь, определяют порядок выполнения операций конечного алгоритма на уровне макроопераций. Выбор направлений осуществляется с использованием понятия соседства на множестве тайлов.

Зафиксируем векторы  $\bar{\xi}_1^{(1)}$ ,  $\bar{\xi}_2^{(1)}$  и  $\bar{\xi}_2^{(2)}$  с координатами, по модулю не превосходящими единицы, и такие, что  $\bar{\xi}_2^{(2)} = \bar{\xi}_1^{(1)} - \bar{\xi}_2^{(1)}$ .

**Определение 2.** *Соседними к заданному тайлу  $T_6(J^{gl})$  будем называть тайлы  $T_6(J^{gl} + \bar{\xi}_1^{(1)})$ ,  $T_6(J^{gl} + \bar{\xi}_2^{(1)})$  и  $T_6(J^{gl} + \bar{\xi}_2^{(2)})$  начальные вершины которых удовлетворяют условиям*

$$\begin{aligned} \bar{h}_1^{(1)} \left( J^{(1)} \left( J^{gl} + \bar{\xi}_1^{(1)} \right) - J^{(1)} \left( J^{gl} \right) \right) &= r_1^{(1)}, \\ \bar{h}_2^{(1)} \left( J^{(1)} \left( J^{gl} + \bar{\xi}_2^{(1)} \right) - J^{(1)} \left( J^{gl} \right) \right) &= r_2^{(1)}, \\ \bar{h}_2^{(2)} \left( J^{(1)} \left( J^{gl} + \bar{\xi}_2^{(2)} \right) - J^{(1)} \left( J^{gl} \right) \right) &= r_2^{(2)}. \end{aligned} \tag{5}$$

Данное определение фактически устанавливает, что соседними к текущему тайлу  $T_6(J^{gl})$  являются ближайшие тайлы по направлениям  $\bar{\xi}_1^{(1)}$ ,  $\bar{\xi}_2^{(1)}$  и  $\bar{\xi}_2^{(2)}$  на множестве индексов тайлов. При этом направления, определяющие соседние тайлы, связаны с нормальными векторами прямых, на которых лежат стороны тайла. В плотных покрытиях соседние тайлы являются граничными к текущему в направлениях  $\bar{h}_1^{(1)}$ ,  $\bar{h}_2^{(1)}$  и  $\bar{h}_2^{(2)}$ .

Существует множество вариантов идентификации тайлов, обусловленных разнообразием связей направлений  $\bar{\xi}_j^{(i)}$  с нормальными  $\bar{h}_j^{(i)}$ . В свою очередь решение задачи плотной укладки зависит от конкретного ее выбора. Далее выберем и зафиксируем один из вариантов идентификации:  $\bar{\xi}_1^{(1)} = e_1 + e_2$ ,  $\bar{\xi}_2^{(1)} = e_2$  и  $\bar{\xi}_2^{(2)} = e_1$ , где  $e_1$  и  $e_2$  – единичные векторы в пространстве  $Z^2$ . Таким образом, соседними тайлами, лежащими в покрытии в направлениях  $\bar{h}_1^{(1)}$ ,  $\bar{h}_2^{(1)}$  и  $\bar{h}_2^{(2)}$ , будем полагать ближайшие тайлы, находящиеся в направлениях  $e_1 + e_2$ ,  $e_2$  и  $e_1$  на множестве индексов  $J^{gl}$ . С учетом вида функции покрытия (2), условия (5) при таком выборе векторов  $\bar{\xi}_j^{(i)}$  приводят в совокупности к системе уравнений, решением которой является матрица  $P$  в параметризованном виде

$$P = \begin{pmatrix} p & r_1^{(1)} - p \\ h_{21}^{(2)} p - r_2^{(2)} & r_2^{(1)} - h_{21}^{(1)} (r_1^{(1)} - p) \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Параметризованность матрицы  $P$  вида (6) приводит к наличию множества вариантов укладки гексагональных тайлов. Варианты упаковок приведены на рис. 2. В работе [7] показано, что множество вариантов упаковок для тайлов с целочисленными координатами вершин включает в себя только два варианта плотной укладки (рис. 2, *b, c*). Значения параметра  $p$ , соответствующие этим укладкам, обозначены как  $p_0$  и  $p_1$ .

**Утверждение 1** [7]. *Пусть параметры гексагонального тайла удовлетворяют условиям (3), направления идентификации тайлов определяются векторами  $\bar{\xi}_1^{(1)} = e_1 + e_2$ ,  $\bar{\xi}_2^{(1)} = e_2$  и  $\bar{\xi}_2^{(2)} = e_1$ , а покрытие тайлами пространства  $Z^2$  определяется функцией вида (2). Тогда, при сделанных предположениях, укладка тайлов определяется матрицей  $P$  вида (6), причем для того, чтобы укладка была плотной, необходимо и достаточно, чтобы параметр  $p$  принимал значение  $p_0 = (r_2^{(2)} - \omega_0 - 1) / (h_{21}^{(1)} + h_{21}^{(2)})$  либо  $p_1 = (r_2^{(2)} - \omega_0 - 1) / (h_{21}^{(1)} + h_{21}^{(2)}) + 1$ .*

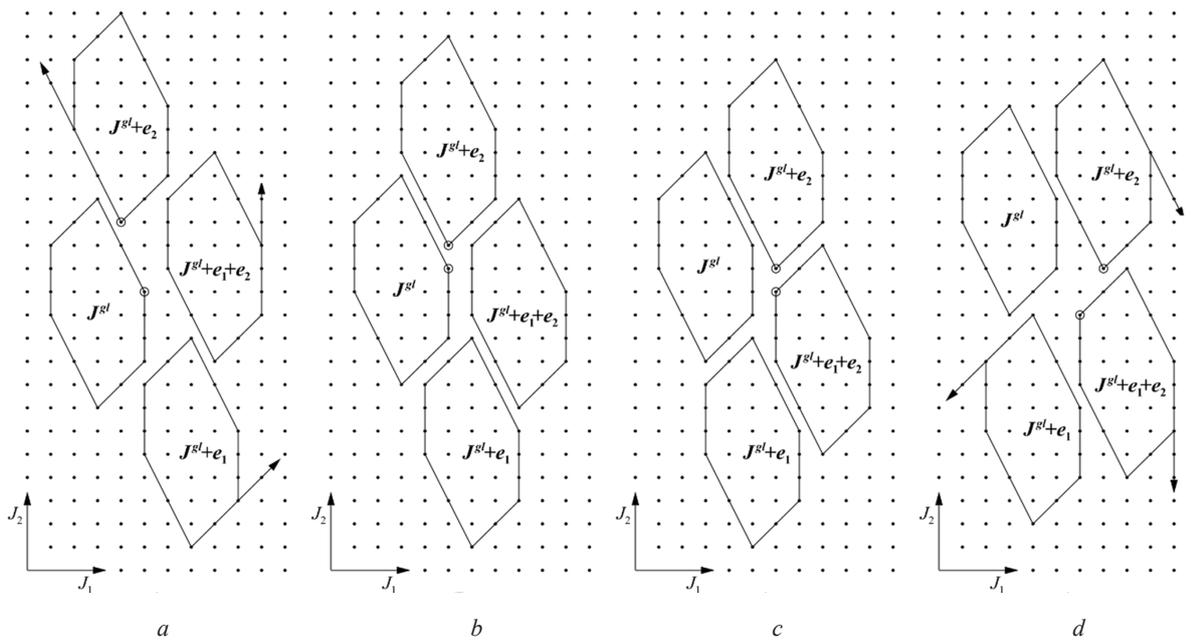


Рис. 2. Варианты покрытий гексагональными тайлами: *a* – неплотная укладка ( $p > p_1$ ); *b* – плотная укладка ( $p = p_1$ ); *c* – плотная укладка ( $p = p_0$ ); *d* – неплотная укладка ( $p < p_0$ )

Fig. 2. Ways of coverage by hexagonal tiles: *a* – nondense coverage ( $p > p_1$ ); *b* – dense coverage ( $p = p_1$ ); *c* – dense coverage ( $p = p_0$ ); *d* – nondense coverage ( $p < p_0$ )

Таким образом, в соответствии с утверждением, для тайлов с целочисленными координатами вершин существует ровно два варианта плотного покрытия пространства  $Z^2$ . Необходимо отметить, что полученный критерий плотности укладки характерен только для указанного в утверждении варианта идентификации тайлов. Вид матрицы  $P$  и значения параметра  $p$ , задающие плотное покрытие, индивидуальны для каждого выбора направлений идентификации тайлов.

**Векторы глобальных зависимостей.** Согласно технике тайлинга, после установления конфигурации тайлов и плотного покрытия ими области вычислений алгоритма необходимо решить следующую задачу – определить векторы глобальных зависимостей между тайлами. Нахождение этих зависимостей требуется для установления порядка выполнения операций алгоритма на уровне макроопераций-тайлов, а также для установления и организации обменов данными между процессорами в случае параллельной реализации алгоритма.

Для случая тайлов формы параллелепипеда задача получения глобальных зависимостей между тайлами и определения множеств итераций тайлов, порождающих эти зависимости, решена в [4, 5]. Подход к получению глобальных зависимостей, предложенный в этих работах, используется с обобщением на случай гексагональных тайлов и в настоящей статье.

Каждый вектор зависимостей  $\varphi \in \Phi$  исходного алгоритма может породить несколько векторов глобальных зависимостей  $\varphi^{g^l}$  между тайлами. Множество всех таких векторов для фиксированного  $\varphi \in \Phi$  будем обозначать  $\Phi_\varphi^{g^l}$ . Формально оно определяется следующим образом:

$$\Phi_\varphi^{g^l} = \left\{ \varphi^{g^l} \in Z^2 \mid J \in T_6(J^{g^l}) \subseteq V, J + \varphi \in T_6(J^{g^l} + \varphi^{g^l}) \subseteq V, \varphi^{g^l} \neq 0 \right\}. \quad (7)$$

Таким образом, задача определения глобальных зависимостей между тайлами сводится к получению множеств  $\Phi_\varphi^{g^l}$  для каждого из векторов  $\varphi \in \Phi$ . Построение множеств  $\Phi_\varphi^{g^l}$  будем осуществлять, оперируя системами неравенств, которые порождаются определением (7) и связывают координаты глобальных векторов зависимостей с координатами векторов зависимостей  $\varphi \in \Phi$ , параметрами тайлинга, индексами тайлов и точками области вычислений.

Используя определение (4) гексагонального тайла и функцию покрытия тайлами пространства  $Z^2$  вида (2), множество  $\Phi_\phi^{gl}$  можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Phi_\phi^{gl} &= \left\{ \varphi^{gl} \in Z^2 \mid \bar{0} \leq H^{(1)}(J - J^{(1)}(J^{gl})) \leq \bar{R}^{(1)} - \bar{1}, \right. \\ &H^{(1)}(P\varphi^{gl} - \varphi) \leq H^{(1)}(J - J^{(1)}(J^{gl})) \leq \bar{R}^{(1)} - \bar{1} + H^{(1)}(P\varphi^{gl} - \varphi), \\ &H^{(2)}(0, \omega_0) \leq H^{(2)}(J - J^{(1)}(J^{gl})) \leq \bar{R}^{(2)} - \bar{1} + H^{(2)}(0, \omega_0), \\ &\left. H^{(2)}(0, \omega_0) + H^{(2)}(P\varphi^{gl} - \varphi) \leq H^{(2)}(J - J^{(1)}(J^{gl})) \leq \bar{R}^{(2)} - \bar{1} + H^{(2)}(P\varphi^{gl} - \varphi) + H^{(2)}(0, \omega_0), \varphi^{gl} \neq 0 \right\}. \end{aligned}$$

Обозначим через  $\bar{A}_+$  ( $\bar{A}_-$ ) вектор, полученный из вектора  $\bar{A}$ , обнулением всех его отрицательных (соответственно положительных) координат. Тогда каждая пара двойных неравенств в приведенном выше представлении множества  $\Phi_\phi^{gl}$  может быть заменена одним соответствующим неравенством:

$$\begin{aligned} \Phi_\phi^{gl} &= \left\{ \varphi^{gl} \in Z^2 \mid \left( H^{(1)}(P\varphi^{gl} - \varphi) \right)_+ \leq H^{(1)}(J - J^{(1)}(J^{gl})) \leq \bar{R}^{(1)} - \bar{1} + \left( H^{(1)}(P\varphi^{gl} - \varphi) \right)_-, \right. \\ &H^{(2)}(0, \omega_0) + \left( H^{(2)}(P\varphi^{gl} - \varphi) \right)_+ \leq H^{(2)}(J - J^{(1)}(J^{gl})) \leq \\ &\left. \leq \bar{R}^{(2)} - \bar{1} + H^{(2)}(0, \omega_0) + \left( H^{(2)}(P\varphi^{gl} - \varphi) \right)_-, \varphi^{gl} \neq 0 \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

С целью обобщения дальнейших выкладок по построению множеств  $\Phi_\phi^{gl}$  сразу для двух видов плотной укладки тайлов обозначим через  $P_i$  матрицу  $P$  при значениях параметра  $p = p_i, i = 0, 1$  (в соответствии с утверждением 1,  $p_i = p_0 + i, i = 0, 1$ ).

Исходя из представления (8), для того чтобы множество  $\Phi_\phi^{gl}$  не было пустым, необходимо выполнение условий

$$-\bar{R}^{(k)} + \bar{1} \leq H^{(k)}(P\varphi^{gl} - \varphi) \leq \bar{R}^{(k)} - \bar{1}, \quad k = 1, 2. \quad (9)$$

Переходя в формулировке условия (9) к координатной записи, с учетом соотношений

$$\begin{aligned} r_2^{(2)} - (h_{21}^{(1)} + h_{21}^{(2)})p_i &= \omega_0 + 1 - i(h_{21}^{(1)} + h_{21}^{(2)}), \\ r_2^{(1)} - (h_{21}^{(1)} + h_{21}^{(2)})(r_1^{(1)} - p_i) &= \omega_0 + 1 - (1 - i)(h_{21}^{(1)} + h_{21}^{(2)}), \end{aligned} \quad (10)$$

которые следуют из определения параметров  $p_i, i = 0, 1$ , в утверждении 1 и определения параметра  $\omega_0$ , получим эквивалентную систему из трех неравенств

$$\begin{aligned} -(r_1^{(1)} - 1) &\leq p_i \varphi_1^{gl} + (r_1^{(1)} - p_i) \varphi_2^{gl} - \bar{h}_1^{(1)} \varphi \leq r_1^{(1)} - 1, \\ -(r_2^{(1)} - 1) &\leq -(\omega_0 + 1 - i(h_{21}^{(1)} + h_{21}^{(2)})) \varphi_1^{gl} + r_2^{(1)} \varphi_2^{gl} - \bar{h}_2^{(1)} \varphi \leq r_2^{(1)} - 1, \\ -(r_2^{(2)} - 1) &\leq r_2^{(2)} \varphi_1^{gl} - (\omega_0 + 1 - (1 - i)(h_{21}^{(1)} + h_{21}^{(2)})) \varphi_2^{gl} - \bar{h}_2^{(2)} \varphi \leq r_2^{(2)} - 1. \end{aligned}$$

Выражая в неравенствах первую координату  $\varphi_1^{gl}$  вектора глобальной зависимости  $\varphi^{gl}$ , получим

$$A_\phi^{1-}(\varphi_2^{gl}) = \frac{\bar{h}_1^{(1)} \varphi - (r_1^{(1)} - p_i) \varphi_2^{gl} - (r_1^{(1)} - 1)}{p_i} \leq \varphi_1^{gl} \leq \frac{\bar{h}_1^{(1)} \varphi - (r_1^{(1)} - p_i) \varphi_2^{gl} + (r_1^{(1)} - 1)}{p_i} = A_\phi^{1+}(\varphi_2^{gl}),$$

$$A_{\varphi}^{2-}(\varphi_2^{gl}) = \frac{-\bar{h}_2^{(1)}\varphi + r_2^{(1)}\varphi_2^{gl} - (r_2^{(1)} - 1)}{\omega_0 + 1 - i(h_{21}^{(1)} + h_{21}^{(2)})} \leq \varphi_1^{gl} \leq \frac{-\bar{h}_2^{(1)}\varphi + r_2^{(1)}\varphi_2^{gl} + (r_2^{(1)} - 1)}{\omega_0 + 1 - i(h_{21}^{(1)} + h_{21}^{(2)})} = A_{\varphi}^{2+}(\varphi_2^{gl}),$$

$$A_{\varphi}^{3-}(\varphi_2^{gl}) = \frac{\bar{h}_2^{(2)}\varphi + (\omega_0 + 1 - (1-i)(h_{21}^{(1)} + h_{21}^{(2)}))\varphi_2^{gl} - (r_2^{(2)} - 1)}{r_2^{(2)}} \leq \varphi_1^{gl} \leq$$

$$\leq \frac{\bar{h}_2^{(2)}\varphi + (\omega_0 + 1 - (1-i)(h_{21}^{(1)} + h_{21}^{(2)}))\varphi_2^{gl} + (r_2^{(2)} - 1)}{r_2^{(2)}} = A_{\varphi}^{3+}(\varphi_2^{gl}).$$

Из этих неравенств следует ограничение для первой координаты  $\varphi_1^{gl}$  глобальных векторов зависимостей, порождаемых вектором  $\varphi \in \Phi$ ,

$$\max\left(\left[A_{\varphi}^{1-}(\varphi_2^{gl})\right], \left[A_{\varphi}^{2-}(\varphi_2^{gl})\right], \left[A_{\varphi}^{3-}(\varphi_2^{gl})\right]\right) \leq \varphi_1^{gl} \leq \min\left(\left[A_{\varphi}^{1+}(\varphi_2^{gl})\right], \left[A_{\varphi}^{2+}(\varphi_2^{gl})\right], \left[A_{\varphi}^{3+}(\varphi_2^{gl})\right]\right). \quad (11)$$

Необходимое требование для существования целочисленных решений  $\varphi_1^{gl} \in Z$ , определяемых неравенством (11), задается условиями

$$A_{\varphi}^{i-}(\varphi_2^{gl}) \leq A_{\varphi}^{j+}(\varphi_2^{gl}), \quad 1 \leq i, \quad j \leq 3, \quad i \neq j,$$

из которых следуют ограничения для второй координаты  $\varphi_2^{gl}$  глобальных векторов зависимостей, порождаемых вектором  $\varphi \in \Phi$ . Так из условий  $A_{\varphi}^{1-}(\varphi_2^{gl}) \leq A_{\varphi}^{2+}(\varphi_2^{gl})$  и  $A_{\varphi}^{2-}(\varphi_2^{gl}) \leq A_{\varphi}^{1+}(\varphi_2^{gl})$  следует ограничение  $A_{\varphi}^{1,2-} \leq \varphi_2^{gl} \leq A_{\varphi}^{1,2+}$ , из условий  $A_{\varphi}^{1-}(\varphi_2^{gl}) \leq A_{\varphi}^{3+}(\varphi_2^{gl})$  и  $A_{\varphi}^{3-}(\varphi_2^{gl}) \leq A_{\varphi}^{1+}(\varphi_2^{gl})$  следует ограничение  $A_{\varphi}^{1,3-} \leq \varphi_2^{gl} \leq A_{\varphi}^{1,3+}$ , а из условий  $A_{\varphi}^{2-}(\varphi_2^{gl}) \leq A_{\varphi}^{3+}(\varphi_2^{gl})$  и  $A_{\varphi}^{3-}(\varphi_2^{gl}) \leq A_{\varphi}^{2+}(\varphi_2^{gl})$  следует ограничение  $A_{\varphi}^{2,3-} \leq \varphi_2^{gl} \leq A_{\varphi}^{2,3+}$ , где

$$A_{\varphi}^{1,2\pm} = \frac{\left(\left(\omega_0 + 1 - i(h_{21}^{(1)} + h_{21}^{(2)})\right)\bar{h}_1^{(1)} + p_i\bar{h}_2^{(1)}\right)\varphi \pm \left(\left(\omega_0 + 1 - i(h_{21}^{(1)} + h_{21}^{(2)})\right)(r_1^{(1)} - 1) + p_i(r_2^{(1)} - 1)\right)}{p_i r_2^{(1)} + (r_1^{(1)} - p_i)\left(\omega_0 + 1 - i(h_{21}^{(1)} + h_{21}^{(2)})\right)},$$

$$A_{\varphi}^{1,3\pm} = \frac{\left(r_2^{(2)}\bar{h}_1^{(1)} - p_i\bar{h}_2^{(2)}\right)\varphi \pm \left(r_2^{(2)}(r_1^{(1)} - 1) + p_i(r_2^{(2)} - 1)\right)}{p_i\left(\omega_0 + 1 - (1-i)(h_{21}^{(1)} + h_{21}^{(2)})\right) + r_2^{(2)}(r_1^{(1)} - p_i)},$$

$$A_{\varphi}^{2,3\pm} = \frac{\left(\left(\omega_0 + 1 - i(h_{21}^{(1)} + h_{21}^{(2)})\right)\bar{h}_2^{(2)} + r_2^{(2)}\bar{h}_2^{(1)}\right)\varphi \pm \left(\left(\omega_0 + 1 - i(h_{21}^{(1)} + h_{21}^{(2)})\right)(r_2^{(2)} - 1) + r_2^{(2)}(r_2^{(1)} - 1)\right)}{r_2^{(1)}r_2^{(2)} - (\omega_0 + 1)\left(\omega_0 + 1 - (h_{21}^{(1)} + h_{21}^{(2)})\right)}.$$

С учетом соотношений (10) и равенства  $\bar{h}_2^{(1)} + \bar{h}_2^{(2)} = \bar{h}_1^{(1)}(h_{21}^{(1)} + h_{21}^{(2)})$  (как следствия из определения параметров тайлинга), имеет место соотношение, связывающее знаменатели дробей  $A_{\varphi}^{1,2\pm}$ ,  $A_{\varphi}^{1,3\pm}$  и  $A_{\varphi}^{2,3\pm}$ :

$$\begin{aligned} & \left(r_2^{(1)}r_2^{(2)} - (\omega_0 + 1)\left(\omega_0 + 1 - (h_{21}^{(1)} + h_{21}^{(2)})\right)\right) / (h_{21}^{(1)} + h_{21}^{(2)}) = \\ & = p_i\left(\omega_0 + 1 - (1-i)(h_{21}^{(1)} + h_{21}^{(2)})\right) + r_2^{(2)}(r_1^{(1)} - p_i) = p_i r_2^{(1)} + (r_1^{(1)} - p_i)\left(\omega_0 + 1 - i(h_{21}^{(1)} + h_{21}^{(2)})\right); \end{aligned}$$

соотношение, связывающее коэффициенты при векторе зависимостей  $\varphi$

$$\begin{aligned} & \left( (\omega_0 + 1 - i(h_{21}^{(1)} + h_{21}^{(2)})) \bar{h}_2^{(2)} + r_2^{(2)} \bar{h}_2^{(1)} \right) / (h_{21}^{(1)} + h_{21}^{(2)}) = r_2^{(2)} \bar{h}_1^{(1)} - p_i \bar{h}_2^{(2)} = \\ & = (\omega_0 + 1 - i(h_{21}^{(1)} + h_{21}^{(2)})) \bar{h}_1^{(1)} + p_i \bar{h}_2^{(1)}; \end{aligned}$$

а также равенство

$$\begin{aligned} & \min \left( \left( (\omega_0 + 1 - i(h_{21}^{(1)} + h_{21}^{(2)})) (r_2^{(2)} - 1) + r_2^{(2)} (r_2^{(1)} - 1) \right) / (h_{21}^{(1)} + h_{21}^{(2)}), r_2^{(2)} (r_1^{(1)} - 1) + p_i (r_2^{(2)} - 1), \right. \\ & \left. (\omega_0 + 1 - i(h_{21}^{(1)} + h_{21}^{(2)})) (r_1^{(1)} - 1) + p_i (r_2^{(1)} - 1) \right) = (\omega_0 + 1 - i(h_{21}^{(1)} + h_{21}^{(2)})) (r_1^{(1)} - 1) + p_i (r_2^{(1)} - 1). \end{aligned}$$

Из этих соотношений следуют равенства

$$\max \left( \lceil A_\phi^{1,2-} \rceil, \lceil A_\phi^{1,3-} \rceil, \lceil A_\phi^{2,3-} \rceil \right) = \lceil A_\phi^{1,2-} \rceil, \quad \min \left( \lfloor A_\phi^{1,2+} \rfloor, \lfloor A_\phi^{1,3+} \rfloor, \lfloor A_\phi^{2,3+} \rfloor \right) = \lfloor A_\phi^{1,2+} \rfloor.$$

Таким образом, неравенство

$$\max \left( \lceil A_\phi^{1,2-} \rceil, \lceil A_\phi^{1,3-} \rceil, \lceil A_\phi^{2,3-} \rceil \right) \leq \varphi_2^{gl} \leq \min \left( \lfloor A_\phi^{1,2+} \rfloor, \lfloor A_\phi^{1,3+} \rfloor, \lfloor A_\phi^{2,3+} \rfloor \right)$$

для определения целочисленных значений второй координаты  $\varphi_2^{gl} \in Z$  принимает вид

$$\begin{aligned} & \left\lceil \frac{(r_2^{(2)} \bar{h}_1^{(1)} - p_i \bar{h}_2^{(2)}) \varphi - \left( (\omega_0 + 1 - i(h_{21}^{(1)} + h_{21}^{(2)})) (r_1^{(1)} - 1) + p_i (r_2^{(1)} - 1) \right)}{p_i r_2^{(1)} + (r_1^{(1)} - p_i) (\omega_0 + 1 - i(h_{21}^{(1)} + h_{21}^{(2)}))} \right\rceil = \lceil A_\phi^{1,2-} \rceil \leq \varphi_2^{gl} \leq \\ & \leq \lfloor A_\phi^{1,2+} \rfloor = \left\lfloor \frac{(r_2^{(2)} \bar{h}_1^{(1)} - p_i \bar{h}_2^{(2)}) \varphi + \left( (\omega_0 + 1 - i(h_{21}^{(1)} + h_{21}^{(2)})) (r_1^{(1)} - 1) + p_i (r_2^{(1)} - 1) \right)}{p_i r_2^{(1)} + (r_1^{(1)} - p_i) (\omega_0 + 1 - i(h_{21}^{(1)} + h_{21}^{(2)}))} \right\rfloor, \end{aligned} \tag{12}$$

а в целом справедливо

*Утверждение 2. Пусть параметры гексагонального тайлинга заданы в соответствии с определением (1) и удовлетворяют условию (3), направления идентификации тайлов определяются векторами  $\bar{\xi}_1^{(1)} = e_1 + e_2$ ,  $\bar{\xi}_2^{(1)} = e_2$  и  $\bar{\xi}_2^{(2)} = e_1$ , а покрытие тайлами области вычислений алгоритма, заданное функцией вида (2), является плотным. Тогда координаты глобальных векторов зависимостей  $\varphi^{gl} = (\varphi_1^{gl}, \varphi_2^{gl}) \in Z^2$ , порождаемых вектором зависимостей  $\varphi \in \Phi$ , удовлетворяют условиям (11) и (12).*

Векторы зависимостей  $\varphi \in \Phi$  связывают информационно зависимые операции (итерации) алгоритма. В случае, когда информационно зависимые операции принадлежат разным тайлам, порождаются глобальные зависимости между тайлами. В следующем разделе приведено описание множеств операций алгоритма, которые обуславливают появление глобальных зависимостей.

**Множество итераций алгоритма, порождающих зависимости между гексагональными тайлами.** При разработке параллельных приложений для систем с распределенной памятью существование зависимостей между тайлами означает необходимость выполнения соответствующих коммуникаций при выполнении параллельной программы. Из этого следует необходимость определения множества точек тайла, операции которых информационно связаны с операциями, приписанными точкам других тайлов.

Пусть область вычислений алгоритма представлена в виде

$$V = \{J \in Z^2 \mid LJ \geq I\} = \{J \in Z^2 \mid F^+(L, I, J) \leq J \leq F^-(L, I, J)\}, \tag{13}$$

где целочисленная матрица  $L \in Z^{m \times 2}$  и целочисленный вектор  $I \in Z^m$  являются параметрами, определяющими область вычислений; функции  $F^+(L, I, J)$  и  $F^-(L, I, J)$  задают границы изменения циклов (в представлении алгоритма в виде гнезд циклов) и явно или неявно зависят от параметров  $L, I$  области вычислений и координат точки  $J \in V$  с меньшими номерами.

Для каждого гексагонального тайла  $T_6(J^{gl})$  в плотном покрытии области вычислений  $V$ , вектора зависимости  $\varphi \in \Phi$  и порождаемого им глобального вектора зависимости  $\varphi^{gl} \in \Phi_\varphi^{gl}$  определим следующие два множества точек:

$$V_6^{loc}(J^{gl})_{\varphi, \varphi^{gl}}^{in} = \left\{ J \in Z^2 \mid J \in T_6(J^{gl}) \cap V, J - \varphi \in T_6(J^{gl} - \varphi^{gl}) \cap V \right\}$$

– множество точек гексагонального тайла  $T_6(J^{gl})$ , принадлежащих области вычислений алгоритма и информационно зависимых от точек области вычислений, принадлежащих тайлу  $T_6(J^{gl} - \varphi^{gl})$ ;

$$V_6^{loc}(J^{gl})_{\varphi, \varphi^{gl}}^{out} = \left\{ J \in Z^2 \mid J \in T_6(J^{gl}) \cap V, J + \varphi \in T_6(J^{gl} + \varphi^{gl}) \cap V \right\}$$

– множество точек гексагонального тайла  $T_6(J^{gl})$ , операции которых непосредственно влияют на результат выполнения операций, соответствующих точкам  $J + \varphi$  тайла  $T_6(J^{gl} + \varphi^{gl})$ .

Из представления области вычислений  $V$  в виде (13) следует, что требование  $J \in V, J + \varphi \in V$  равносильно условию  $J \in V^{+\varphi}$ , где

$$\begin{aligned} V^{+\varphi} &= \left\{ J \in Z^2 \mid LJ \geq I, LJ \geq I - L\varphi \right\} = \left\{ J \in Z^2 \mid LJ \geq I - (L\varphi)_- \right\} = \\ &= \left\{ J \in Z^2 \mid F^+(L, I - (L\varphi)_-, J) \leq J \leq F^-(L, I - (L\varphi)_-, J) \right\}. \end{aligned}$$

В соответствии с приведенными определениями имеет место равенство

$$V_6^{loc}(J^{gl})_{\varphi, \varphi^{gl}}^{in} = V_6^{loc}(J^{gl})_{-\varphi, -\varphi^{gl}}^{out}, \tag{14}$$

поэтому достаточно иметь формальное представление только одного из этих множеств.

Множество  $V_6^{loc}(J^{gl})_{\varphi, \varphi^{gl}}^{out}$  состоит из точек  $J \in Z^2$ , удовлетворяющих одновременно условиям  $J \in V^{+\varphi}$ ,  $J \in T_6(J^{gl})$  и  $J + \varphi \in T_6(J^{gl} + \varphi^{gl})$ . Принадлежность точек  $J, J + \varphi \in V$  соответственно гексагональным тайлам  $T_6(J^{gl})$  и  $T_6(J^{gl} + \varphi^{gl})$  при плотном покрытии определяется неравенствами в представлении (8) множества глобальных зависимостей  $\Phi_\varphi^{gl}$ . Переходя в этих неравенствах к покоординатной записи и выражая координаты точки  $J$ , получим

$$\begin{aligned} \left( \bar{h}_1^{(1)}(P\varphi^{gl} - \varphi) \right)_+ + J_1^{(1)}(J^{gl}) \leq J_1 \leq r_1^{(1)} - 1 + \left( \bar{h}_1^{(1)}(P\varphi^{gl} - \varphi) \right)_- + J_1^{(1)}(J^{gl}), \\ \left( \bar{h}_2^{(1)}(P\varphi^{gl} - \varphi) \right)_+ + \bar{h}_2^{(1)}J^{(1)}(J^{gl}) - h_{21}^{(1)}J_1 \leq J_2 \leq -h_{21}^{(1)}J_1 + r_2^{(1)} - 1 + \bar{h}_2^{(1)}J^{(1)}(J^{gl}) + \left( \bar{h}_2^{(1)}(P\varphi^{gl} - \varphi) \right)_-, \\ h_{21}^{(2)}J_1 + \omega_0 - r_2^{(2)} + 1 - \bar{h}_2^{(2)}J^{(1)}(J^{gl}) - \left( \bar{h}_2^{(2)}(P\varphi^{gl} - \varphi) \right)_- \leq J_2 \leq \\ \leq h_{21}^{(2)}J_1 + \omega_0 - \bar{h}_2^{(2)}J^{(1)}(J^{gl}) - \left( \bar{h}_2^{(2)}(P\varphi^{gl} - \varphi) \right)_+. \end{aligned}$$

Для того чтобы вторая координата  $J_2$  удовлетворяла обоим неравенствам и определялась как

$$\begin{aligned} \max \left( \left( \bar{h}_2^{(1)}(P\varphi^{gl} - \varphi) \right)_+ + \bar{h}_2^{(1)}J^{(1)}(J^{gl}) - h_{21}^{(1)}J_1, h_{21}^{(2)}J_1 + \omega_0 - r_2^{(2)} + 1 - \right. \\ \left. - \bar{h}_2^{(2)}J^{(1)}(J^{gl}) - \left( \bar{h}_2^{(2)}(P\varphi^{gl} - \varphi) \right)_- \right) \leq J_2 \leq \end{aligned}$$

$$\leq \min \left( -h_{21}^{(1)} J_1 + r_2^{(1)} - 1 + \bar{h}_2^{(1)} J^{(1)}(J^{gl}) + \left( \bar{h}_2^{(1)}(P\varphi^{gl} - \varphi) \right)_-, h_{21}^{(2)} J_1 + \omega_0 - \right. \\ \left. - \bar{h}_2^{(2)} J^{(1)}(J^{gl}) - \left( \bar{h}_2^{(2)}(P\varphi^{gl} - \varphi) \right)_+ \right),$$

необходимо, чтобы выполнялись условия

$$\left( \bar{h}_2^{(1)}(P\varphi^{gl} - \varphi) \right)_+ + \bar{h}_2^{(1)} J^{(1)}(J^{gl}) - h_{21}^{(1)} J_1 \leq h_{21}^{(2)} J_1 + \omega_0 - \bar{h}_2^{(2)} J^{(1)}(J^{gl}) - \left( \bar{h}_2^{(2)}(P\varphi^{gl} - \varphi) \right)_+, \\ h_{21}^{(2)} J_1 + \omega_0 - r_2^{(2)} + 1 - \bar{h}_2^{(2)} J^{(1)}(J^{gl}) - \left( \bar{h}_2^{(2)}(P\varphi^{gl} - \varphi) \right)_- \leq \\ \leq -h_{21}^{(1)} J_1 + r_2^{(1)} - 1 + \bar{h}_2^{(1)} J^{(1)}(J^{gl}) + \left( \bar{h}_2^{(1)}(P\varphi^{gl} - \varphi) \right)_-,$$

которые, в свою очередь, порождают дополнительное ограничение на первую координату  $J_1$

$$J_1^{(1)}(J^{gl}) + \frac{\left( \bar{h}_2^{(1)}(P\varphi^{gl} - \varphi) \right)_+ + \left( \bar{h}_2^{(2)}(P\varphi^{gl} - \varphi) \right)_+ - \omega_0}{h_{21}^{(1)} + h_{21}^{(2)}} \leq J_1 \leq J_1^{(1)}(J^{gl}) + r_1^{(1)} - 1 + \\ + \frac{\left( \bar{h}_2^{(1)}(P\varphi^{gl} - \varphi) \right)_- + \left( \bar{h}_2^{(2)}(P\varphi^{gl} - \varphi) \right)_- + \omega_0}{h_{21}^{(1)} + h_{21}^{(2)}}.$$

Из полученных неравенств, фактически определяющих границы изменения координат точек множества  $V_6^{loc}(J^{gl})_{\varphi, \varphi^{gl}}^{out}$ , следует представление этого множества в виде

$$V_6^{loc}(J^{gl})_{\varphi, \varphi^{gl}}^{out} = \left\{ J \in V^{+\varphi} \mid B_1^l \leq J_1 \leq B_1^r, B_2^l \leq J_2 \leq B_2^r \right\},$$

где

$$B_1^l = J_1^{(1)}(J^{gl}) + \\ + \max \left( \left( \bar{h}_2^{(1)}(P\varphi^{gl} - \varphi) \right)_+ + \left( \bar{h}_2^{(2)}(P\varphi^{gl} - \varphi) \right)_+ - \omega_0, \left( \left( \bar{h}_2^{(1)} + \bar{h}_2^{(2)} \right) (P\varphi^{gl} - \varphi) \right)_+ \right) / (h_{21}^{(1)} + h_{21}^{(2)}), \\ B_1^r = r_1^{(1)} - 1 + J_1^{(1)}(J^{gl}) + \\ + \min \left( \left( \bar{h}_2^{(1)}(P\varphi^{gl} - \varphi) \right)_- + \left( \bar{h}_2^{(2)}(P\varphi^{gl} - \varphi) \right)_- + \omega_0, \left( \left( \bar{h}_2^{(1)} + \bar{h}_2^{(2)} \right) (P\varphi^{gl} - \varphi) \right)_- \right) / (h_{21}^{(1)} + h_{21}^{(2)}), \\ B_2^l = \max \left( \left( \bar{h}_2^{(1)}(P\varphi^{gl} - \varphi) \right)_+ + \right. \\ \left. + \bar{h}_2^{(1)} J^{(1)}(J^{gl}) - h_{21}^{(1)} J_1, h_{21}^{(1)} J_1 + \omega_0 - r_2^{(2)} + 1 - \bar{h}_2^{(2)} J^{(1)}(J^{gl}) - \left( \bar{h}_2^{(2)}(P\varphi^{gl} - \varphi) \right)_- \right), \\ B_2^r = \min \left( -h_{21}^{(1)} J_1 + r_2^{(1)} - 1 + \bar{h}_2^{(1)} J^{(1)}(J^{gl}) + \right. \\ \left. + \left( \bar{h}_2^{(1)}(P\varphi^{gl} - \varphi) \right)_-, h_{21}^{(2)} J_1 + \omega_0 - \bar{h}_2^{(2)} J^{(1)}(J^{gl}) - \left( \bar{h}_2^{(2)}(P\varphi^{gl} - \varphi) \right)_+ \right).$$

Множество  $V_6^{loc}(J^{gl} + \varphi^{gl})_{\varphi, \varphi^{gl}}^{in}$  может быть получено из соотношения (14):

$$V_6^{loc}(J^{gl} + \varphi^{gl})_{\varphi, \varphi^{gl}}^{in} = \left\{ J \in V^{-\varphi} \mid C_1^l \leq J_1 \leq C_1^r, C_2^l \leq J_2 \leq C_2^r \right\},$$

где

$$\begin{aligned}
 C_1^l &= J_1^{(1)}(J^{gl}) + P\varphi^{gl} - \\
 &- \min\left(\left(\bar{h}_2^{(1)}(P\varphi^{gl} - \varphi)\right)_- + \left(\bar{h}_2^{(2)}(P\varphi^{gl} - \varphi)\right)_- + \omega_0, \left(\left(\bar{h}_2^{(1)} + \bar{h}_2^{(2)}\right)(P\varphi^{gl} - \varphi)\right)_- / \left(h_{21}^{(1)} + h_{21}^{(2)}\right), \right. \\
 C_1^r &= r_1^{(1)} - 1 + J_1^{(1)}(J^{gl}) + P\varphi^{gl} - \\
 &- \max\left(\left(\bar{h}_2^{(1)}(P\varphi^{gl} - \varphi)\right)_+ + \left(\bar{h}_2^{(2)}(P\varphi^{gl} - \varphi)\right)_+ - \omega_0, \left(\left(\bar{h}_2^{(1)} + \bar{h}_2^{(2)}\right)(P\varphi^{gl} - \varphi)\right)_+ / \left(h_{21}^{(1)} + h_{21}^{(2)}\right), \right. \\
 C_2^l &= \max\left(-\left(\bar{h}_2^{(1)}(P\varphi^{gl} - \varphi)\right)_- + \bar{h}_2^{(1)}\left(J^{(1)}(J^{gl}) + P\varphi^{gl}\right) - h_{21}^{(1)}J_1, \right. \\
 &\left. h_{21}^{(2)}J_1 + \omega_0 - r_2^{(2)} + 1 - \bar{h}_2^{(2)}\left(J^{(1)}(J^{gl}) + P\varphi^{gl}\right) + \left(\bar{h}_2^{(2)}(P\varphi^{gl} - \varphi)\right)_+, \right) \\
 C_2^r &= \min\left(-h_{21}^{(1)}J_1 + r_2^{(1)} - 1 + \bar{h}_2^{(1)}\left(J^{(1)}(J^{gl}) + P\varphi^{gl}\right) - \left(\bar{h}_2^{(1)}(P\varphi^{gl} - \varphi)\right)_+, \right. \\
 &\left. h_{21}^{(2)}J_1 + \omega_0 - \bar{h}_2^{(2)}\left(J^{(1)}(J^{gl}) + P\varphi^{gl}\right) + \left(\bar{h}_2^{(2)}(P\varphi^{gl} - \varphi)\right)_-, \right)
 \end{aligned}$$

Полученные в данной работе результаты могут быть использованы для оптимизации как последовательных, так и параллельных алгоритмов, ориентированных на реализацию на вычислительных системах с распределенной памятью.

**Благодарности.** Работа выполнена в рамках программы «Математические методы» Государственной программы научных исследований «Конвергенция 2020».

**Acknowledgments.** This paper was supported by the State Scientific Research Program “Convergence 2020”.

### Список использованных источников

1. Xue, J. *Loop Tiling for Parallelism* / J. Xue. – Norwell: Kluwer Academic Publ., 2000. <https://doi.org/10.1007/978-1-4615-4337-4>
2. Parameterized tiled loops for free / L. Renganarayanan [et al.] // *ACM SIGPLAN Notices*. – 2007. – Vol. 42, № 6. – P. 405–414. <https://doi.org/10.1145/1273442.1250780>
3. DynTile: Parametric Tiled Loop Generation for Parallel Execution on Multicore Processors / A. Hartono [et al.] // *IEEE Int.l Symp. on Parallel & Distributed Processing (IPDPS)*. – Atlanta, 2010. <https://doi.org/10.1109/ipdps.2010.5470459>
4. Соболевский, П. И. Параметризованный тайлинг: точные аппроксимации и анализ глобальных зависимостей / П. И. Соболевский, С. В. Баханович // *Журн. вычисл. математики и мат. физики*. – 2014. – Т. 54, № 11. – С. 1817–1828.
5. Лиходед, Н. А. Информационная структура зернистых алгоритмов с однородными зависимостями / Н. А. Лиходед, П. И. Соболевский // *Докл. Нац. акад. наук Беларуси*. – 2011. – Т. 55, № 2. – С. 22–26.
6. The Relation Between Diamond Tiling and Hexagonal Tiling / T. Grosser [et al.] // *Parallel Processing Letters*. – Vol. 24, № 3. – P. 1441002. <https://doi.org/10.1142/s0129626414410023>
7. Соболевский, П. И. Плотные покрытия области вычислений гексагональными тайлами / П. И. Соболевский, С. В. Баханович // *Докл. Нац. акад. наук Беларуси*. – 2018. – Т. 62, № 5. – С. 525–530. <https://doi.org/10.29235/1561-8323-2018-62-5-525-530>

### References

1. Xue J. *Loop Tiling for Parallelism*. Norwell, MA, USA, Kluwer Academic Publ., 2000. 256 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4615-4337-4>
2. Renganarayanan L., Kim D., Rajopadhye S., Strout M. Parameterized tiled loops for free. *ACM SIGPLAN Notices*, 2007, vol. 42, no. 6, pp. 405–414. <https://doi.org/10.1145/1273442.1250780>
3. Hartono A., Baskaran M., Ramanujam J., Sadayappan P. DynTile: Parametric Tiled Loop Generation for Parallel Execution on Multicore Processors. *IEEE International Symposium on Parallel & Distributed Processing (IPDPS)*. Atlanta, 2010. <https://doi.org/10.1109/ipdps.2010.5470459>
4. Bakhanovich S. V., Sobolevsky P. I. Parametrized Tiling: Accurate Approximations and Analysis of Global Dependences. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2014, vol. 54, no. 11, pp. 1748–1758. <https://doi.org/10.1134/S0965542514110037>
5. Likhoded N. A., Sobolevsky P. I. *Information structure of grained algorithms with homogeneous dependencies. Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2011, vol. 55, no 2. pp. 22–26 (in Russian).

6. Grosser T., Verdoolaege S., Cohen A., Sadayappan P. The Relation Between Diamond Tiling and Hexagonal Tiling. *Parallel Processing Letters*, vol. 24, no. 3, pp. 1441002. <https://doi.org/10.1142/s0129626414410023>

7. Sobolevsky P. I., Bakhanovich S. V. Dense coverage of the computational domain by hexagonal tiles. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2018, vol. 62, no 5, pp. 525–530 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-8323-2018-62-5-525-530>

### **Информация об авторах**

**Соболевский Павел Иосифович** – доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: [sobolevsky@im.bas-net.by](mailto:sobolevsky@im.bas-net.by)

**Баханович Сергей Викторович** – кандидат физико-математических наук, заместитель директора по научной и инновационной работе, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: [bsv@im.bas-net.by](mailto:bsv@im.bas-net.by)

### **Information about the authors**

**Pavel I. Sobolevsky** – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Chief Researcher, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (Surganov Str., 11, 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: [sobolevsky@im.bas-net.by](mailto:sobolevsky@im.bas-net.by)

**Sergey V. Bakhanovich** – Ph. D. (Physics and Mathematics), Deputy Director for Sciences and Innovation, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (Surganov Str., 11, 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: [bsv@im.bas-net.by](mailto:bsv@im.bas-net.by)

ISSN 1561-2430 (Print)  
ISSN 2524-2415 (Online)

**УЧЕНЫЕ БЕЛАРУСИ**  
**SCIENTISTS OF BELARUS**

**НИКОЛАЙ АЛЕКСЕЕВИЧ ИЗОБОВ**

**(К 80-летию со дня рождения)**

23 января 2020 г. исполнилось 80 лет академику Национальной академии наук Беларуси, доктору физико-математических наук, профессору, лауреату Государственной премии Республики Беларусь Николаю Алексеевичу Изобову.

Николай Алексеевич родился в деревне Красыни Лиозненского района Витебской области. В 1958 г. с золотой медалью окончил Яновичскую среднюю школу, а в декабре 1965 г. – математический факультет Белорусского государственного университета со специализацией по дифференциальным уравнениям. В студенческие годы за полученные результаты по исследованию строения множеств нижних показателей Перрона линейных дифференциальных систем на Всесоюзном конкурсе студенческих работ ему была присуждена медаль «За лучшую научную студенческую работу».

В 1966 г. молодой ученый поступил в аспирантуру к профессору Ю. С. Богданову и в 1967 г. защитил кандидатскую диссертацию. С 1969 г. – в течение 22 лет – Н. А. Изобов являлся заместителем главного редактора Всесоюзного журнала «Дифференциальные уравнения», из которых первые 12 лет – штатным заместителем, оставаясь членом редколлегии и все последующие годы. После защиты в 1979 г. в Ленинградском университете докторской диссертации и избрания в 1980 г. членом-корреспондентом АН БССР он работает в Институте математики НАН Беларуси: с 1980 г. – старший научный сотрудник, с 1986 г. – заведующий лабораторией теории устойчивости, с 1993 г. – заведующий отделом дифференциальных уравнений, с 2010 г. – главный научный сотрудник. Кроме того, в 1996–1999 гг. по совместительству он возглавлял кафедру высшей математики факультета прикладной математики БГУ. В 1994 г. Н. А. Изобов избран действительным членом НАН Беларуси.

Николай Алексеевич – известный математик, выдающийся специалист по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Основными направлениями его научных исследований являются теория характеристических показателей Ляпунова и теория устойчивости по линейному приближению, асимптотическая теория систем Коппеля – Конти и систем Пфаффа. Среди важнейших достижений ученого – критерий устойчивости показателей Ляпунова линейных систем, решение частной и в некритическом случае общей задачи Ляпунова об экспоненциальной устойчивости по линейному приближению, полное исследование экспоненциальной устойчивости, условной экспоненциальной устойчивости и неустойчивости нелинейных дифференциальных систем с линейными приближениями Коппеля – Конти (совместно с Р. А. Прохоровой). Им введены понятия, изучены свойства и предложены алгоритмы вычисления экспоненциальных, центральных высшего порядка, минимальных и сигма-показателей линейных дифференциальных систем, принадлежащих к основным объектам исследования современной теории показателей Ляпунова.

Истекшее десятилетие было для Николая Алексеевича очень плодотворным. За эти годы им получены крупные результаты по трем важным направлениям: в теории эффекта Перрона, в исследовании множеств приводимости и вопросе о свойствах младшего сигма-показателя.



В частности, доказано существование линейных дифференциальных систем с младшим сигма-показателем, представимым произвольными функциями с ограниченными производными Дини. В цикле работ (совместно с С. А. Мазаником) установлена строгая сужаемость предельных множеств неприводимости линейных дифференциальных систем при убывании характеристического показателя линейных возмущений и доказано отсутствие непрерывности слева и справа множеств неприводимости линейных дифференциальных систем при убывании показателя Ляпунова экспоненциально убывающих возмущений.

Наиболее успешным оказалось исследование по реализации различных вариантов эффекта Перрона, состоящего в смене значений и знака характеристических показателей дифференциальной системы – с отрицательного на положительный (что означает дестабилизацию системы) – под действием возмущений высшего порядка малости. Оно было проведено Н. А. Изобовым в большом цикле работ совместно с российскими учеными: академиком РАН С. К. Коровиным и член-корреспондентом РАН А. В. Ильиным. В частности, здесь следует отметить их реализацию наиболее общего континуального варианта эффекта Перрона смены значений характеристических показателей.

Итогом этих исследований явилось, с одной стороны, доказательство того, что в эффекте Перрона положительный показатель Ляпунова всех нетривиальных решений нелинейной системы как функция их начальных значений есть функция второго класса Бэра, а с другой – реализация произвольного ограниченного суслинского множества положительных чисел совокупностью характеристических показателей этих решений. Тем самым в эффекте Перрона получено полное описание суслинскими множествами ограниченных совокупностей характеристических показателей Ляпунова нелинейных систем с возмущениями высшего порядка малости.

Николаем Алексеевичем опубликовано более 235 научных статей, в том числе 3 монографии, одна из которых издана в Кембридже, и подготовлено более 20 кандидатов и докторов наук.

С 1994 г. в течение 10 лет Н. А. Изобов возглавлял Экспертный совет по математике ВАК Республики Беларусь. В настоящее время является членом редколлегий журналов «Дифференциальные уравнения», «Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics», «Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук», «Труды Института математики», а до недавнего времени входил и в состав редколлегии журнала «Доклады Национальной академии наук Беларуси».

Н. А. Изобов награжден орденом Франциска Скорины и удостоен Государственной премии Республики Беларусь за цикл работ «Исследование асимптотических свойств дифференциальных и дискретных систем» (2000 г.), а также Премии НАН Беларуси за цикл работ «Современное развитие первого метода Ляпунова: теория и приложения» (2013 г.).

Есть у ученого и еще одна награда, особо им ценимая, – диплом лауреата Премии за 2009 г. Международной академической издательской компании «Наука/Интерпериодика» за лучшую публикацию в издаваемых ею журналах, подписанный и Ю. С. Осиповым, на тот момент – Президентом Российской академии наук.

В связи с 80-летием со дня рождения за большой личный вклад в развитие белорусской науки Н. А. Изобов награжден Нагрудным знаком отличия имени В. М. Игнатовского Национальной академии наук Беларуси.

Сердечно поздравляем Николая Алексеевича со славным юбилеем и от всей души желаем доброго здоровья, бодрости и долгих лет активной творческой жизни.

*Отделение физики, математики и информатики НАН Беларуси,  
Институт математики НАН Беларуси,  
Белорусское математическое общество*