

ВЕСЦІ НАЦЫЯНАЛЬнай АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСІ

СЕРИЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК. 2020. Т. 56, № 2

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ

СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК. 2020. Т. 56, № 2

Журнал основан в 1965 г. как «Весці Акадэміі навук БССР. Серыя фізіка-матэматычных навук»,
с 1992 г. – «Весці Акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук»,
с 1998 г. – современное название

Выходит четыре раза в год

Учредитель – Национальная академия наук Беларуси

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь,
свидетельство о регистрации № 392 от 18.05.2009

Издается при поддержке Белорусского физического общества

*Входит в Перечень научных изданий Республики Беларусь
для опубликования результатов диссертационных исследований,
включен в базу данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ)*

Главный редактор

Сергей Яковлевич Килин – Президиум Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

Редакционная коллегия

- Н. М. Олехнович** – Научно-практический центр Национальной академии наук Беларуси по материаловедению, Минск, Беларусь (*заместитель главного редактора*)
В. А. Орлович – Отделение физики, математики и информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь (*заместитель главного редактора*)
Т. Е. Янчук – (*ведущий редактор журнала*)
С. В. Абламейко – Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
С. М. Абрамов – Институт программных систем Российской академии наук, Москва, Россия
В. М. Анищик – Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
А. И. Белоус – Холдинг «ИНТЕГРАЛ», Минск, Беларусь
С. В. Гапоненко – Белорусский республиканский фонд фундаментальных исследований, Минск, Беларусь
В. В. Гороховик – Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
Н. А. Изобов – Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
Н. С. Казак – Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
В. И. Корзюк – Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

- Ф. П. Коршунов** – Научно-практический центр Национальной академии наук Беларуси по материаловедению, Минск, Беларусь
- Ю. А. Курочкин** – Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
- В. А. Лабунов** – Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь
- С. В. Лемешевский** – Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
- Д. С. Могилевцев** – Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
- Н. А. Поклонский** – Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
- С. А. Тихомиров** – Отделение физики, математики и информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
- Л. М. Томильчик** – Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
- А. В. Тузиков** – Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
- Ю. С. Харин** – Научно-исследовательский институт прикладных проблем математики и информатики Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь
- А. Ф. Чернявский** – Институт прикладных физических проблем имени А. Н. Севченко Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь
- Л. А. Янович** – Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
- В. И. Янчевский** – Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

Редакционный совет

- С. Я. Килин** – Президиум Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
- С. В. Абламейко** – Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
- А. Л. Асеев** – Президиум Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирск, Россия
- В. Г. Бондур** – Российская академия наук, Москва, Россия
- Й. Врахтруп** – Институт физики (3) Штутгартского университета, Штутгарт, Германия
- Ф. Б. Железко** – Институт квантовой оптики Университета Ульма, Ульм, Германия
- А. М. Желтиков** – Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия
- В. В. Козлов** – Математический институт имени В. А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия
- Г. Лёйхс** – Институт физики света имени М. Планка, Эрланген, Германия
- Д. С. Могилевцев** – Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
- Нгуен Дай Хунг** – Институт физики Вьетнамской академии наук и технологий, Ханой, Вьетнам
- В. А. Орлович** – Отделение физики, математики и информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
- Стивен Чу** – Стэнфордский университет, Стэнфорд, Калифорния, США
- А. Цайлингер** – Институт квантовой оптики и квантовой информатики Австрийской академии наук, Вена, Австрия

Адрес редакции:

ул. Академическая, 1, к. 118, 220072, г. Минск, Республика Беларусь.

Тел.: + 375 17 284-02-45; e-mail: fmvesti@mail.ru

vestifm.belnauka.by

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ.

Серия физико-математических наук. 2020. Т. 56, № 2.

Выходит на русском, белорусском и английском языках

Редактор *Т. Е. Янчук* Компьютерная верстка *И. В. Счеснюк*

Подписано в печать 18.06.2020. Выход в свет 26.06.2020. Формат 60×84^{1/8}. Бумага офсетная.

Печать цифровая. Усл. печ. л. 14,88. Уч.-изд. л. 16,4. Тираж 66 экз. Заказ 107.

Цена: индивидуальная подписка – 12,26 руб., ведомственная подписка – 29,23 руб.

Издатель и полиграфическое исполнение:

Республиканское унитарное предприятие «Издательский дом «Беларуская навука».

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/18 от 02.08.2013. ЛП № 02330/455 от 30.12.2013. Ул. Ф. Скорины, 40, 220141, г. Минск, Республика Беларусь

© РУП «Издательский дом «Беларуская навука»,
Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук, 2020

PROCEEDINGS OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF BELARUS

PHYSICS AND MATHEMATICS SERIES, 2020, vol. 56, no. 2

The Journal was founded in 1956 under the titles “Proceedings of the Academy of Sciences of BSSR. Physics and Mathematics Series”, since 1992 – “Proceedings of the Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series”, since 1998 – it comes under its actual title

Periodicity is 4 issues per annum

Founder is the National Academy of Sciences of Belarus

The journal is registered on May 18, 2009 by the Ministry of Information of the Republic of Belarus in the State Registry of Mass Media, reg. no. 392

It is published with support of the Belarusian Physical Society

*The Journal is included in The List of Journals for Publication
of the Results of Dissertation Research in the Republic of Belarus
and in the database of Russian Science Citation Index (RSCI)*

Editor-in-Chief

Sergei Ya. Kilin – Presidium of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

Editorial Board

Nikolai M. Olekhovich – The Scientific and Practical Materials Research Center of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus (*Associate Editor-in-Chief*)

Valentin A. Orlovich – Department of Physics, Mathematics and Informatics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus (*Associate Editor-in-Chief*)

Tatiana E. Yanchuk (*lead editor*)

Sergey V. Ablameyko – Belarusian State University, Minsk, Belarus

Sergei M. Abramov – Program Systems Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Viktor M. Anishchik – Belarusian State University, Minsk, Belarus

Anatoliy I. Belous – “INTEGRAL” Holding, Minsk, Belarus

Sergey V. Gaponenko – Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research, Minsk, Belarus

Valentin V. Gorokhovik – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

Nikolai A. Izobov – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

Nikolai S. Kazak – B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

Viktor I. Korzyuk – Belarusian State University, Minsk, Belarus

Fyodor P. Korshunov – The Scientific and Practical Materials Research Center of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

Yurii A. Kurochkin – B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

Vladimir A. Labunov – Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Belarus

Sergey V. Lemeshevsky – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

Dmitrii S. Mogilevcev – B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

Nikolai A. Poklonski – Belarusian State University, Minsk, Belarus

Sergei A. Tikhomirov – Department of Physics, Mathematics and Informatics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
Lev M. Tomil'chik – B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
Aleksandr V. Tuzikov – United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
Yurii S. Kharin – Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics of the Belarusian State University, Minsk, Belarus
Aleksandr F. Chernyavskii – A. N. Sevchenko Institute of Applied Physical Problems of Belarusian State University, Minsk, Belarus
Leonid A. Yanovich – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
Vyacheslav I. Yanchevskii – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

Editorial Council

Sergei Ya. Kilin – Presidium of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
Sergei V. Ablameyko – Belarusian State University, Minsk, Belarus
Aleksandr L. Aseev – Presidium of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia
Valery G. Bondur – Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
Jörg Wrachtrup – Institute of Physics (3) of the University of Stuttgart, Stuttgart, Germany
Fedor B. Jelezko – Institute for Quantum Optics of the Ulm University, Ulm, Germany
Aleksei M. Zheltikov – Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
Valery V. Kozlov – Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
Gerd Leuchs – Max Planck Institute for the Science of Light, Erlangen, Germany
Dmitrii S. Mogilevcev – B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
Nguyen Dai Hung – Institute of Physics of the Vietnam Academy of Science and Technology, Hanoi, Vietnam
Valentin A. Orlovich – Department of Physics, Mathematics and Informatics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
Steven Chu – Stanford University, Stanford, California, USA
Anton Zeilinger – Institute for Quantum Optics and Quantum Information of the Austrian Academy of Sciences, Vienna, Austria

Address of the Editorial Office:
 1, Akademicheskaya Str., room 118, 220072, Minsk, Republic of Belarus.
 Tel.: +375 17 284-02-45; e-mail: fmvesti@mail.ru
vestifm.belnauka.by

PROCEEDING OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF BELARUS.

Physics and Mathematics series, 2020, vol. 56, no. 2.

Printed in Russian, Belarusian and English languages

Editor *T. E. Yanchuk*
 Computer imposition *I. V. Schasniuk*

It is sent of the press 18.06.2020. Appearance 26.06.2020. Format 60×84¹/₈. Offset paper.
 The press digital. Printed pages 14,88. Publisher's signatures 16,4. Circulation 66 copies. Order 107.
 Price: individual subscription – 12,26 byn., departmental subscription – 29,23 byn.

Publisher and printing execution:

Republican unitary enterprise "Publishing House "Belaruskaya Navuka".
 Certificate on the state registration of the publisher, manufacturer, distributor of printing editions
 No. 1/18 dated August 2, 2013. License for the press no. 02330/455 dated December 30, 2013.
 Address: F. Scorina Str., 40, 220141, Minsk, Republic of Belarus.

© RUE "Publishing House "Belaruskaya Navuka",
 Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series, 2020

ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Говорушко И. О., Янчевский В. И. О классификации конечномерных гензелевых простых центральных алгебр с унитарными инволюциями	135
Прохоров Н. П. Вероятностный и детерминированный аналоги алгоритма Миллера – Рабина для идеалов колец целых алгебраических элементов конечных расширений поля $\mathbb{Q}$	144
Кушнеров А. В., Липницкий В. А., Королева М. Н. Свойства и параметры обобщенных кодов Боуза – Чоудхури – Хоквингема	157
Малютин В. Б., Нуржанов Б. О. Квазиклассическая аппроксимация функциональных интегралов.....	166
Штукарь В. Л. Классификация 5-мерных подалгебр 6-мерных нильпотентных алгебр Ли.....	175
Зверович Э. И., Павловский В. А. Нахождение областей сходимости и вычисление сумм степенных рядов от h -комплексного переменного	189

ФИЗИКА

Рябушко А. П., Неманова И. Т., Жур Т. А. Движение системы двух тел и их центра масс в неоднородной среде	194
Лаврёнов А. Н., Лаврёнов И. А. Скрытая симметрия 16D осциллятора и его 9D кулоновского аналога	206
Залесский В. Б., Конойко А. И., Кравченко В. М., Кузьмицкая А. С. Амплитудная электрооптическая модуляция излучения последовательностями резонаторов Фабри-Перо.....	217
Бушинский М. В., Терешко Н. В., Чобот А. Н., Мантыцкая О. С., Федотова В. В., Чобот Г. М., Пастушок С. Н. Упругие, магнитные и электрические свойства кобальтитов $\text{Sr}_{1-y}\text{CoO}_{3-x}$ в области составов $0,2 \leq y \leq 0,3$	224
Гончаров В. С., Труханов С. В. Треугольная магнитная структура соединения Mn_3Sb	232
Поклонский Н. А., Деряго А. Н., Вырко С. А. Локализация внешним магнитным полем электронов на ионах водородоподобных доноров в невырожденных полупроводниках	239

УЧЕНЫЕ БЕЛАРУСИ

Корзюк Виктор Иванович (К 75-летию со дня рождения)	253
Олехнович Николай Михайлович (К 85-летию со дня рождения).....	255

ISSN 1561-2430 (Print)

ISSN 2524-2415 (Online)

CONTENTS

MATHEMATICS

Govorushko I. O., Yanchevskii V. I. On the classification of finite-dimensional Henselian simple central algebras with unitary involutions	135
Prochorov N. P. Probabilistic and deterministic analogues of the Miller – Rabin algorithm for ideals of rings of integer algebraic elements of finite extensions of the field $\mathbb{Q}$	144
Kushnerov A. V., Lipinski V. A., Koroliova M. N. The properties and parameters of generic Bose – Chaudhuri – Hocquenghem codes.....	157
Malyutin V. B., Nurjanov B. O. Semiclassical approximation of functional integrals	166
Shtukar U. L. Classification of 5-dimensional subalgebras for 6-dimensional nilpotent Lie algebras	175
Zverovich E. I., Pavlovsky V. A. Finding the areas of convergence and calculating the sums of power series of an h -complex variable	189

PHYSICS

Ryabushko A. P., Nemanova I. T., Zhur T. A. The motion of the system of two bodies and their center of mass in an inhomogeneous environment	194
Lavrenov A. N., Lavrenov I. A. Hidden symmetry of the 16D oscillator and its 9D coulomb analogue	206
Zaleski V. B., Konoiko A. I., Kravchenko V. M., Kuzmitskaya H. S. Amplitude electro-optical modulation of radiation by sequences of Fabry-Perot resonators	217
Bushinsky M. V., Tereshko N. V., Chobot A. N., Mantyskaya O. S., Fedotova V. V., Chobot G. M., Pastushonok S. N. The elastic, magnetic, and electrical properties of $\text{Sr}_{1-y}\text{Y}_y\text{CoO}_{3-x}$ cobaltites in the composition range $0.2 \leq y \leq 0.3$	224
Goncharov V. S., Trukhanov S. V. Triangular magnetic structure of the Mn_3Sb compound.....	232
Poklonski N. A., Dzeraviah A. N., Vyrko S. A. Localization by an external magnetic field of electrons on the ions of hydrogen-like donors in non-degenerate semiconductors.....	239

SCIENTISTS OF BELARUS

Korzyuk Viktor Ivanovich (To the 75 th Anniversary).....	253
Olekhovich Nikolai Mikhailovich (To the 85 th Anniversary).....	255

ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)

МАТЕМАТИКА **MATHEMATICS**

ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)

УДК 512.552

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-2-135-143>

Поступила в редакцию 15.05.2020

Received 15.05.2020

И. О. Говорушко, В. И. Янчевский

Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

О КЛАССИФИКАЦИИ КОНЕЧНОМЕРНЫХ ГЕНЗЕЛЕВЫХ ПРОСТЫХ ЦЕНТРАЛЬНЫХ АЛГЕБР С УНИТАРНЫМИ ИНВОЛЮЦИЯМИ

Аннотация. Цель настоящей работы – исследовать проблему классификации конечномерных простых центральных K -алгебр, снабженных унитарными инволюциями. Для слабо разветвленных конечномерных центральных K -алгебр с делением, снабженных унитарными K/k -инволюциями (где поле инвариантов k гензелево), доказан критерий K -изоморфизма.

Ранее в работах Ж.-П. Тиньоля, В. В. Курсова и В. И. Янчевского были определены обобщенные абелевы скрещенные произведения и доказан критерий K -изоморфизма обобщенных абелевых скрещенных произведений $(D_1, G, (\omega, f))$ и $(D_2, G, (\tilde{\omega}, g))$, когда алгебры D_1 и D_2 совпадают. В данной статье этот критерий доказан для случая различных алгебр D_1 и D_2 , при помощи которого получен основной результат работы.

Ключевые слова: ассоциативные алгебры, гензелевы алгебры, конечномерные простые центральные алгебры, унитарные инволюции, обобщенные абелевы скрещенные произведения

Для цитирования. Говорушко, И. О. О классификации конечномерных гензелевых простых центральных алгебр с унитарными инволюциями / И. О. Говорушко, В. И. Янчевский // Вест. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2020. – Т. 56, № 2. – С. 135–143. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-2-135-143>

Igor O. Govorushko, Vyacheslav I. Yanchevskii

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

ON THE CLASSIFICATION OF FINITE-DIMENSIONAL HENSELIAN SIMPLE CENTRAL ALGEBRAS WITH UNITARY INVOLUTIONS

Abstract. The purpose of this paper is to investigate the problem of the classification of finite-dimensional simple central K -algebras with unitary involutions. In this paper, K -isomorphism is proven for weakly ramified finite-dimensional central K -algebras with division and unitary K/k -involutions (where the invariant field k is Henselian).

Earlier, in papers by J.-P. Tignol, V. V. Kursov and V. I. Yanchevskii, generalized Abelian crossed products were defined and the K -isomorphism of generalized Abelian crossed products $(D_1, G, (\omega, f))$ and $(D_2, G, (\tilde{\omega}, g))$, was proven for the case $D_1 = D_2$. In this paper, this criterion is proven when D_1 and D_2 are different. With the help of this criterion, the main result of this article is obtained.

Keywords: associative algebras, Henselian algebras, finite-dimensional simple central algebras, unitary involutions, generalized Abelian crossed products

For citation. Govorushko I. O., Yanchevskii V. I. On the classification of finite-dimensional Henselian simple central algebras with unitary involutions. *Vesti Natsyional'nai akademii nauk Belarusi. Seriya fizika-matematichnykh nauk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2020, vol. 56, no. 2, pp. 135–143 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-2-135-143>

Введение. Одной из ключевых задач в структурной теории алгебр с инволюциями является задача классификации конечномерных простых центральных K -алгебр с унитарными инволю-

циями с точностью до K -изоморфизма. Решение этой задачи для произвольных полей K в настоящее время представляется мало реальным. Тем не менее для разных важных специальных классов полей эта проблема не является такой уж неразрешимой, и ее решение позволяет получить различные интересные приложения, например в теории линейных алгебраических групп. Одним из таких классов является класс гензелевых полей, для которого эта классификация получена в настоящей работе.

Для гензелевых полей вышеупомянутая задача решается в терминах подгрупп мультипликативных групп алгебр вычетов и одного свойства относительных групп значений. Кроме того, мы рассматриваем необходимый для получения классификации вопрос об изоморфизме обобщенных абелевых скрещенных произведений для когомологических обобщенных 2-коциклов.

Приведем вначале необходимые в дальнейшем обозначения и определения.

Пусть K – поле с нормированием v ; D – конечномерная центральная K -алгебра с делением. Продолжение нормирования v на D будем обозначать также через v . Через O_D , O_K будем обозначать кольца нормирования D и K соответственно, через M_D , M_K – идеалы нормирования D и K , через Γ_D и Γ_K – группы значений нормирования v на D и K . Алгебра $\bar{D} = O_D/M_D$ и поле $\bar{K} = O_K/M_K$ называются алгеброй вычетов алгебры D и полем вычетов поля K соответственно.

Основным в данной работе является класс гензелевых полей.

Для многочлена

$$f = a_n x^n + \dots + a_0 \in O_K[x]$$

будем обозначать через $\bar{f}$ многочлен

$$\bar{a}_n x^n + \dots + \bar{a}_0 \in \bar{K}[x],$$

где $\bar{a}_i = a_i + M_K$ для всех $i \in \{0, \dots, n\}$.

Определение 1. Поле K с нормированием v называется гензелевым относительно нормирования v , если для любого многочлена $f \in O_K[x]$ и любого разложения $\bar{f} = \bar{g}\bar{h}$, где многочлены $\bar{g}$ и $\bar{h}$ взаимно просты, существуют многочлены $g, h \in O_K[x]$ такие, что $f = gh$ и $\bar{g} = \bar{g}$, $\bar{h} = \bar{h}$.

Пусть $d \in D^*$. Рассмотрим отображение $c_d : D \rightarrow D$, определенное по правилу $a \mapsto dad^{-1}$. Так как $c_d(O_D) \subset O_D$, $c_d(M_D) \subset M_D$, отображение c_d индуцирует $\bar{K}$ -автоморфизм алгебры $\bar{D}$, ограничение которого на $Z(\bar{D})$ (центр алгебры $\bar{D}$) является $\bar{K}$ -автоморфизмом $Z(\bar{D})$. Обозначим этот $\bar{K}$ -автоморфизм через $\bar{c}_d$. Таким образом, существует групповой гомоморфизм

$$\theta_D : \Gamma_D / \Gamma_K \rightarrow \text{Gal}(Z(\bar{D}), \bar{K}),$$

определенный по правилу $v(d) + \Gamma_K \mapsto \bar{c}_d$.

Определение 2. Пусть K – поле, гензелево относительно нормирования v , а D – конечномерная центральная K -алгебра с делением. Алгебра D называется слабо разветвленной, если либо $\text{char } \bar{K} = 0$, либо $\text{char } \bar{K} = q \neq 0$ и выполняются три условия:

- 1) D бездефектна над K , т. е. $[D : K] = [\bar{D} : \bar{K}][\Gamma_D : \Gamma_K]$;
- 2) расширение $Z(\bar{D}) / \bar{K}$ сепарабельно;
- 3) q не делит $|\text{Ker } \theta_D|$ (где $\text{Ker } \theta_D$ – ядро гомоморфизма θ_D).

Определение 3. Пусть F – поле; (A_1, τ_1) , (A_2, τ_2) – конечномерные центральные F -алгебры с делением, обладающие инволюциями (антиавтоморфизмами второго порядка) τ_1 и τ_2 . Такие алгебры называются F -изоморфными, если существует F -изоморфизм $\sigma : A_1 \rightarrow A_2$ алгебр A_1 и A_2 такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{\sigma} & A_2 \\ \tau_1 \downarrow & & \downarrow \tau_2 \\ A_1 & \xrightarrow{\sigma} & A_2 \end{array}$$

коммутативна.

Определение 4. Пусть ε_n – примитивный корень из единицы степени n в поле K . Для любых $a, b \in K^*$ обозначим через $(a, b; K, \varepsilon_n)$ простую центральную K -алгебру с образующими i, j и соотношениями $i^n = a$, $j^n = b$, $ij = \varepsilon_n ji$. Такие алгебры называются символ-алгебрами.

Для доказательства основного результата нам потребуется понятие обобщенного абелева скрещенного произведения (см., напр., [1–3]).

Пусть K – поле, гензелево относительно нормирования v , Z/K – конечное расширение Галуа. Обозначим группу $\text{Gal}(Z/K)$ через G . Пусть $\tilde{G}$ – подгруппа в $\text{Aut } D_0$ (группе автоморфизмов D_0 – конечномерной центральной Z -алгебры с делением) такая, что ограничение $\tilde{G}$ на Z совпадает с G . Существует такой автоморфизм $\omega(\xi) \in \tilde{G}$, что $\omega(\xi)|_Z = \xi$ для любого $\xi \in G$.

Определение 5. Пара (ω, f) , где f – отображение из $G \times G$ в D_0^* , называется обобщенным 2-коциклом со значениями в D_0 , если для любых $\xi, \eta, \zeta \in G$ и любого $d \in D_0$ имеют место равенства

$$f(\eta, \zeta)^{\omega(\xi)} f(\xi, \eta \zeta) = f(\xi, \eta) f(\xi \eta, \zeta), \quad d^{\omega(\zeta)\omega(\eta)} = f(\eta, \zeta) d^{\omega(\eta \zeta)} f(\eta, \zeta)^{-1}.$$

Множество всех обобщенных 2-коциклов со значениями в D_0 будем обозначать через $F(G, D_0^*)$.

Определение 6. Пусть

$$(\omega, f) \in F(G, D_0^*).$$

Обобщенным абелевым скрещенным произведением D_0 и G относительно (ω, f) называется прямая сумма

$$(D_0, G, (\omega, f)) = \bigoplus_{\xi \in G} D_0 x_\xi,$$

где элементы x_ξ удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{aligned} x_\xi d &= d^{\omega(\xi)} x_\xi \text{ для всех } \xi \in G \text{ и } d \in D_0; \\ x_\xi x_\eta &= f(\xi, \eta) x_{\xi \eta} \text{ для всех } \xi, \eta \in G. \end{aligned}$$

Обобщенное абелево скрещенное произведение $(D_0, G, (\omega, f))$ является ассоциативной простой центральной K -алгеброй с единицей $f(e, e)^{-1} x_e$ (e – единица группы G). Алгебру D_0 можно отождествлять с подалгеброй $(D_0, G, (\omega, f))$, так как существует вложение $d \mapsto df(e, e)^{-1} x_e$.

Определение 7. Пусть D_1, D_2 – алгебры с делением, конечномерные над своим центром Z . Пусть

$$G = \text{Gal}(Z/K), \quad (\omega, f) \in F(G, D_1), \quad (\tilde{\omega}, g) \in F(G, D_2).$$

Эти 2-коциклы называются когомологичными, если существуют K -изоморфизм $\chi: D_2 \rightarrow D_1$ и функция $t: G \rightarrow D_1^*$ такие, что

1) $\tilde{\omega}(\xi) \cdot \chi = \chi \cdot \omega(\xi) \cdot i_{t(\xi)}$ для всех $\xi \in G$, где $i_{t(\xi)}$ – внутренний автоморфизм D_1 , индуцированный элементом $t(\xi)$, т. е. автоморфизм, определенный по правилу $d \mapsto t(\xi)^{-1} dt(\xi)$;

$$2) (g(\xi, \eta))^t = t(\xi) t(\eta)^{\omega(\xi)} f(\xi, \eta) t(\xi \eta)^{-1} \text{ для всех } \xi, \eta \in G.$$

Цели и задачи. Получить классификацию конечномерных центральных K -алгебр с делением, снабженных унитарными K/k -инволюциями (где поле инвариантов k гензелево), с точностью до K -изоморфизма.

Результаты. Основным результатом об обобщенных абелевых скрещенных произведениях является

Теорема 1. *Обобщенные абелевы скрещенные произведения*

$$(D_1, G, (\omega, f)) = \bigoplus_{\xi \in G} D_1 x_\xi, \quad (D_2, G, (\tilde{\omega}, g)) = \bigoplus_{\xi \in G} D_2 \tilde{x}_\xi$$

изоморфны над K тогда и только тогда, когда их обобщенные 2-коциклы (ω, f) и $(\tilde{\omega}, g)$ когомологичны.

Доказательство. Пусть обобщенные 2-коциклы (ω, f) и $(\tilde{\omega}, g)$ когомологичны. Известно [1, теорема 1.3], что обобщенные абелевы скрещенные произведения $(D_1, G, (\omega, f))$ и $(D_1, G, (\tilde{\omega}', g')) = \bigoplus_{\xi \in G} D_1 \tilde{x}_\xi$ (где $\tilde{\omega}'(\xi) = \chi^{-1} \cdot \tilde{\omega}(\xi) \cdot \chi$ для всех $\xi \in G$ и $g'(\xi, \eta) = g(\xi, \eta)^\chi$ для всех $\xi, \eta \in G$) K -изоморфны. Построим отображение

$$\Psi : (D_1, G, (\tilde{\omega}', g')) \rightarrow (D_2, G, (\tilde{\omega}, g)),$$

определенное по правилу

$$\sum_{\xi \in G} d_\xi \tilde{x}_\xi \mapsto \sum_{\xi \in G} d_\xi^{\chi^{-1}} \tilde{x}_\xi,$$

и докажем, что оно является K -изоморфизмом. Действительно, для любых

$$\sum_{\xi \in G} d_\xi \tilde{x}_\xi, \sum_{\xi \in G} d'_\xi \tilde{x}_\xi \in (D_1, G, (\tilde{\omega}', g'))$$

имеет место цепочка равенств

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{\xi \in G} d_\xi \tilde{x}_\xi + \sum_{\xi \in G} d'_\xi \tilde{x}_\xi \right)^\Psi = \left(\sum_{\xi \in G} (d_\xi + d'_\xi) \tilde{x}_\xi \right)^\Psi = \\ & = \sum_{\xi \in G} (d_\xi + d'_\xi)^{\chi^{-1}} \tilde{x}_\xi = \sum_{\xi \in G} d_\xi^{\chi^{-1}} \tilde{x}_\xi + \sum_{\xi \in G} (d'_\xi)^{\chi^{-1}} \tilde{x}_\xi = \left(\sum_{\xi \in G} d_\xi \tilde{x}_\xi \right)^\Psi + \left(\sum_{\xi \in G} d'_\xi \tilde{x}_\xi \right)^\Psi, \end{aligned}$$

откуда следует, что Ψ является гомоморфизмом $(D_1, G, (\tilde{\omega}', g'))$ и $(D_2, G, (\tilde{\omega}, g))$ как аддитивных групп, тождественно действующим на элементах K (так как χ является K -изоморфизмом). Кроме того, для любых $d\tilde{x}_\xi, d'\tilde{x}_\eta \in (D_1, G, (\tilde{\omega}', g'))$ имеет место цепочка равенств

$$\begin{aligned} & ((d\tilde{x}_\xi)(d'\tilde{x}_\eta))^\Psi = (d(d')^{\tilde{\omega}(\xi)} \tilde{x}_\xi \tilde{x}_\eta)^\Psi = (d(d')^{\tilde{\omega}'(\xi)} g'(\xi, \eta) \tilde{x}_{\xi\eta})^\Psi = \\ & = d^{\chi^{-1}} (d')^{\tilde{\omega}'(\xi)\chi^{-1}} g'(\xi, \eta)^{\chi^{-1}} \tilde{x}_{\xi\eta} = d^{\chi^{-1}} (d')^{\chi^{-1}\tilde{\omega}(\xi)} g(\xi, \eta) \tilde{x}_{\xi\eta} = d^{\chi^{-1}} \tilde{x}_\xi (d')^{\chi^{-1}} \tilde{x}_\eta = (d\tilde{x}_\xi)^\Psi (d'\tilde{x}_\eta)^\Psi, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\left(\left(\sum_{\xi \in G} d_\xi \tilde{x}_\xi \right) \left(\sum_{\xi \in G} d'_\xi \tilde{x}_\xi \right) \right)^\Psi = \left(\sum_{\xi \in G} d_\xi \tilde{x}_\xi \right)^\Psi \left(\sum_{\xi \in G} d'_\xi \tilde{x}_\xi \right)^\Psi$$

для всех

$$\sum_{\xi \in G} d_\xi \tilde{x}_\xi, \sum_{\xi \in G} d'_\xi \tilde{x}_\xi \in (D_1, G, (\tilde{\omega}', g')).$$

Осталось установить инъективность и сюръективность Ψ . Пусть

$$\left(\sum_{\xi \in G} d_{\xi} \tilde{x}_{\xi} \right)^{\Psi} = 0.$$

Тогда из линейной независимости элементов $\tilde{x}_{\xi}$ над D_2 следует, что все $d_{\xi}^{\chi^{-1}}$ равны 0, откуда вытекает, что все d_{ξ} равны 0, а значит, $\sum_{\xi \in G} d_{\xi} \tilde{x}_{\xi} = 0$. Сюръективность Ψ следует из того факта, что любой элемент

$$\sum_{\xi \in G} \tilde{d}_{\xi} \tilde{x}_{\xi} \in (D_2, G, (\tilde{\omega}, g))$$

равен

$$\left(\sum_{\xi \in G} \tilde{d}_{\xi}^{\chi} \tilde{x}_{\xi} \right)^{\Psi}.$$

Таким образом, поскольку обобщенные абелевы скрещенные произведения $(D_1, G, (\omega, f))$ и $(D_1, G, (\tilde{\omega}', g'))$ K -изоморфны и существует K -изоморфизм $(D_1, G, (\tilde{\omega}', g'))$ и $(D_2, G, (\tilde{\omega}, g))$, получаем, что $(D_1, G, (\omega, f))$ и $(D_2, G, (\tilde{\omega}, g))$ K -изоморфны.

Пусть теперь $(D_1, G, (\omega, f))$ и $(D_2, G, (\tilde{\omega}, g))$ K -изоморфны. Тогда, поскольку алгебры $(D_1, G, (\tilde{\omega}', g'))$ и $(D_2, G, (\tilde{\omega}, g))$ K -изоморфны, K -изоморфными являются алгебры $(D_1, G, (\omega, f))$ и $(D_1, G, (\tilde{\omega}', g'))$, откуда следует [1, теорема 1.3], что обобщенные 2-коциклы (ω, f) и $(\tilde{\omega}, g)$ когомологичны. Теорема доказана.

Основным результатом данной работы является следующий критерий изоморфизма двух алгебр с унитарными инволюциями.

Теорема 2. Пусть K – поле с нормированием v ($\text{char } \bar{K} \neq 2$); (D, τ) , (A, μ) – слабо разветвленные конечномерные центральные K -алгебры с делением, снабженные унитарными инволюциями (антиавтоморфизмами второго порядка, нетривиально действующими на K) τ и μ , обладающими общим полем инвариантов k , которое является гензелевым. Тогда алгебры (D, τ) и (A, μ) K -изоморфны тогда и только тогда, когда $(\bar{D}, \bar{\tau})$ и $(\bar{A}, \bar{\mu})$ (инволюции $\bar{\tau}$ и $\bar{\mu}$ определяются на $\bar{D}$ и $\bar{A}$ по правилам $d + M_D \mapsto d^{\tau} + M_D$ и $a + M_A \mapsto a^{\mu} + M_A$ соответственно) $\bar{K}$ -изоморфны и существует изоморфизм $\phi: \Gamma_D / \Gamma_K \rightarrow \Gamma_A / \Gamma_K$ такой, что $\phi(\text{Ker } \theta_D) = \text{Ker } \theta_A$.

Доказательство. Необходимость. Пусть существует K -изоморфизм $\sigma: D \rightarrow A$ алгебр (D, τ) и (A, μ) . Покажем, что существует изоморфизм $\phi: \Gamma_D / \Gamma_K \rightarrow \Gamma_A / \Gamma_K$ такой, что $\phi(\text{Ker } \theta_D) = \text{Ker } \theta_A$.

Так как поле k гензелево, поле K также гензелево. Известно, что из гензелевости K следует, что нормирование v продлевается на алгебры D и A единственным образом. Поскольку D и A изоморфны, продолжения нормирования v на D и A совпадают, т. е. $v(d^{\sigma}) = v(d)$ для всякого $d \in D$. Следовательно, можно считать, что $\Gamma_D = \Gamma_A$, откуда следует, что Γ_D / Γ_K и Γ_A / Γ_K изоморфны и в качестве ϕ можно взять тождественное отображение. Но тогда $\phi(\text{Ker } \theta_D) = \text{Ker } \theta_A$, что следует из определения гомоморфизмов θ_D и θ_A .

Покажем теперь, что отображение $\bar{\sigma}$, определенное по правилу $(d + M_D)^{\bar{\sigma}} \mapsto d^{\sigma} + M_A$, является $\bar{K}$ -изоморфизмом алгебр $(\bar{D}, \bar{\tau})$ и $(\bar{A}, \bar{\mu})$.

Так как $\sigma: D \rightarrow A$ – K -изоморфизм, для любых $d_1, d_2 \in D$ верны цепочки равенств

$$\begin{aligned} ((d_1 + M_D) + (d_2 + M_D))^{\bar{\sigma}} &= ((d_1 + d_2) + M_D)^{\bar{\sigma}} = (d_1 + d_2)^{\sigma} + M_D = \\ &= (d_1^{\sigma} + M_D) + (d_2^{\sigma} + M_D) = (d_1 + M_D)^{\bar{\sigma}} + (d_2 + M_D)^{\bar{\sigma}} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} ((d_1 + M_D)(d_2 + M_D))^{\bar{\sigma}} &= (d_1 d_2 + M_D)^{\bar{\sigma}} = (d_1 d_2)^{\bar{\sigma}} + M_D = \\ &= (d_1^{\bar{\sigma}} + M_D)(d_2^{\bar{\sigma}} + M_D) = (d_1 + M_D)^{\bar{\sigma}}(d_2 + M_D)^{\bar{\sigma}}, \end{aligned}$$

а также $(d + M_D)^{\bar{\sigma}} = d + M_A$ для всякого $d \in K$.

Докажем инъективность $\bar{\sigma}$. Пусть $(d + M_D)^{\bar{\sigma}} = 0$. Это значит, что $d^{\bar{\sigma}} \in M_A$, т. е. $v(d^{\bar{\sigma}}) > 0$. Но, поскольку $v(d^{\bar{\sigma}}) = v(d)$, получаем, что $d \in M_D$, т. е. $d + M_D = 0$.

Сюръективность $\bar{\sigma}$ следует из того факта, что для любого $a + M_A$ существует прообраз $a^{\sigma^{-1}} + M_D$.

Наконец, для всякого $d + M_D$ верна цепочка равенств

$$(d + M_D)^{\bar{\tau}\bar{\sigma}} = d^{\tau\sigma} + M_A = d^{\sigma\mu} + M_A = (d + M_D)^{\bar{\sigma}\bar{\mu}},$$

откуда следует, что $\bar{\sigma}$ является $\bar{K}$ -изоморфизмом алгебр $(\bar{D}, \bar{\tau})$ и $(\bar{A}, \bar{\mu})$.

Достаточность. Пусть теперь факторгруппы групп значений Γ_D/Γ_K и Γ_A/Γ_K изоморфны и существует $\bar{K}$ -изоморфизм $\tilde{\sigma}: \bar{D} \rightarrow \bar{A}$ алгебр $(\bar{D}, \bar{\tau})$ и $(\bar{A}, \bar{\mu})$. Идея доказательства состоит в подъеме изоморфизма $\tilde{\sigma}$ до подходящего изоморфизма соответствующих алгебр инерции алгебр D и A с последующим распространением его до изоморфизма алгебр D и A .

Хорошо известно, что в D существует τ -инвариантная алгебра инерции I_D (т. е. неразветвленная над K и такая, что $\overline{I_D} = \bar{D}$). Аналогично в A существует μ -инвариантная алгебра инерции I_A (неразветвленная над K и такая, что $\overline{I_A} = \bar{A}$). Покажем, что существует K -изоморфизм алгебр (I_D, τ) и (I_A, μ) .

Поскольку $\overline{I_D} = \bar{D}$, $\overline{I_A} = \bar{A}$, то алгебры $(\overline{I_D}, \bar{\tau})$ и $(\overline{I_A}, \bar{\mu})$ $\bar{K}$ -изоморфны. Построим K -изоморфизм $\sigma: I_D \rightarrow I_A$ такой, что $\sigma\mu\sigma^{-1} = \tau$. Так как алгебры инерции неразветвлены над K , то, согласно [4], существует K -изоморфизм $\sigma_0: I_D \rightarrow I_A$ такой, что $\sigma_0\mu\sigma_0^{-1} = \tau i_{1+m}$, где i_{1+m} – внутренний автоморфизм алгебры I_D для такого $1+m \in 1+M_D$, что $(1+m)^{\tau} = 1+m$. Поскольку расширение $K(m)/k(m)$ слабо разветвлено, из предложения 2 из [5] следует, что $N_{K(m)/k(m)}(1+M_{K(m)}) = 1+M_{k(m)}$. С другой стороны, $N_{K(m)/k(m)}(a) = a^{\tau}a$ для любого $a \in K(m)$. Таким образом, $1+m = x^{\tau}x$ для некоторого $x \in 1+M_D$, откуда следует, что

$$(i_x\sigma_0)\mu(\sigma_0^{-1}i_{x^{-1}}) = i_x\tau i_{1+m}i_{x^{-1}} = \tau i_{x^{-\tau}i_{1+m}i_{x^{-1}}} = \tau.$$

Следовательно, поскольку $\overline{i_x\sigma_0} = \tilde{\sigma}$, в качестве σ можно взять изоморфизм $i_x\sigma_0$.

Пусть $Z_D = Z(I_D)$, $Z_A = Z(I_A)$. Для краткости будем обозначать Z_D и Z_A через Z (так как они изоморфны). Известно [2, следствие 2.11], что $C_D(Z) = I_D \otimes_Z T_D$, где $\overline{I_D} = \overline{C_D(Z)}$, а $\overline{T_D} = \bar{Z}$, $\Gamma_{T_D}/\Gamma_K \cong \text{Ker } \theta_D$ и T_D слабо вполне разветвлена над Z . Известно, что T_D является тензорным произведением над полем Z слабо вполне разветвленных символ-алгебр $T_D^{(1)}, \dots, T_D^{(s)}$ с τ -инвариантными образующими. Пусть $T_D^{(1)} = (a^n, b^n; Z, \varepsilon_n)$. Построим K -изоморфную ей символ-алгебру $T_A^{(1)} = (c^n, d^n; Z, \varepsilon_n^{\sigma}) \subset T_A$. Возьмем элемент $c \in T_A$ такой, что $c^{\mu} = c$, $c^n \in Z$. Такой c существует, так как мы можем взять его равным $x + x^{\mu}$, где $|v(x) + \Gamma_Z| = n$. Кроме того [6, лемма 2], $c^n = \pi(1+m)^n$, где $\pi \in Z$, $m \in M_{Z(c^n)}$. Заменив c на $\frac{c}{1+m}$, получим требуемый элемент $c \in T_A$. Хорошо известно, что в рассматриваемом случае существует $d \in T_A$, такой, что $d^{\mu} = d$, $d^n \in Z$, $dcd^{-1}c^{-1} = \varepsilon_n^{\sigma}$. Продлив отображение σ на $T_D^{(1)}$ по правилам $a \mapsto c$, $b \mapsto d$, получим K -изоморфизм алгебр $T_D^{(1)}$ и $T_A^{(1)} = (c^n, d^n; Z, \varepsilon_n^{\sigma})$. Поскольку

$T_D = T_D^{(1)} \otimes_Z R$, $T_A = T_A^{(1)} \otimes_Z \tilde{R}$, где алгебры R и $\tilde{R}$ слабо вполне разветвлены, мы можем провести аналогичные рассуждения для алгебр R и $\tilde{R}$ (индекс которых меньше). Таким образом, за конечное число шагов мы получим продолжение σ на T_D , такое, что $T_D^\sigma = T_A$. Так как $I_D^\sigma = I_A$, имеем $C_D(Z)^\sigma = C_A(Z)$.

Построенный изоморфизм σ является K -изоморфизмом алгебр $(C_D(Z), \tau)$ и $(C_A(Z), \mu)$. Действительно, ограничение σ на I_D удовлетворяет условию $\sigma\mu\sigma^{-1} = \tau$ по построению. Докажем, что равенство $\sigma\mu\sigma^{-1} = \tau$ верно и для ограничения σ на T_D . Так как образующие a и b алгебры $T_D^{(1)} = (a^n, b^n; Z, \varepsilon_n)$ τ -инвариантны, а образующие c и d алгебры $T_A^{(1)} = (c^n, d^n; Z, \varepsilon_n^\sigma)$ μ -инвариантны, то $a^{\tau\sigma} = a^\sigma = c = c^\mu = a^{\sigma\mu}$ и $b^{\tau\sigma} = b^\sigma = d = d^\mu = b^{\sigma\mu}$, откуда (и из того факта, что $z^{\tau\sigma} = z^{\sigma\mu}$ для любого $z \in Z$) следует, что $x^{\tau\sigma} = x^{\sigma\mu}$ для любого $x \in T_D^{(1)}$. Поскольку $T_D = T_D^{(1)} \otimes_Z \dots \otimes_Z T_D^{(s)}$ и $C_D(Z) = I_D \otimes_Z T_D$, для любого $c' \in C_D(Z)$ верно равенство $(c')^{\tau\sigma} = (c')^{\sigma\mu}$, т. е. σ является K -изоморфизмом алгебр $(C_D(Z), \tau)$ и $(C_A(Z), \mu)$.

Заключительная часть доказательства теоремы связана с обобщенными абелевыми скрещенными произведениями.

Известно, что $D = \langle \Gamma_1, \dots, \Gamma_r, C_D(Z) \rangle$, где элементы $\Gamma_1, \dots, \Gamma_r$ τ -инвариантны, $I_D^{i_{\Gamma_j}} = I_D$ для всех $j \in \{1, \dots, r\}$, а также для любого $j \in \{1, \dots, r\}$ внутренний автоморфизм $i_{\Gamma_j}|_{Z_j}$ порождает группу $\text{Gal}(Z_j/K)$, где поля $Z_1, \dots, Z_r$ таковы, что их прямой композит над K равен Z . Автоморфизм $\zeta = i_{\Gamma_{j_1}}^{\alpha_1} \dots i_{\Gamma_{j_s}}^{\alpha_s}$ из группы $G = \text{Gal}(Z/K)$ переводит любой элемент $z \in Z$ в элемент $(\Gamma_{j_1}^{\alpha_1} \dots \Gamma_{j_s}^{\alpha_s})^{-1} z \Gamma_{j_1}^{\alpha_1} \dots \Gamma_{j_s}^{\alpha_s}$. Обозначим $\Gamma_{j_1}^{\alpha_1} \dots \Gamma_{j_s}^{\alpha_s}$ через x_ζ и определим автоморфизм $\omega(\zeta)$ алгебры $C_D(Z)$ следующим образом: $c^{\omega(\zeta)} = x_\zeta c x_\zeta^{-1}$. Пара (ω, f) , где функция $f: G \times G \rightarrow C_D(Z)^*$ такая, что $f(\zeta, \eta) = x_\zeta x_\eta (x_{\zeta\eta})^{-1}$ для всех $\zeta, \eta \in G$, является обобщенным 2-коциклом. В самом деле,

$$\begin{aligned} f(\eta, \zeta)^{\omega(\xi)} f(\xi, \eta\zeta) &= x_\xi x_\eta x_\zeta (x_{\eta\zeta})^{-1} x_\xi^{-1} x_\xi x_\eta x_\zeta (x_{\xi\eta\zeta})^{-1} = \\ &= x_\xi x_\eta x_\zeta (x_{\xi\eta\zeta})^{-1} = x_\xi x_\eta (x_{\xi\eta})^{-1} x_{\xi\eta} x_\zeta (x_{\xi\eta\zeta})^{-1} = f(\xi, \eta) f(\xi\eta, \zeta) \end{aligned}$$

и

$$c^{\omega(\zeta)\omega(\eta)} = x_\eta x_\zeta c x_\zeta^{-1} x_\eta^{-1} = x_\eta x_\zeta (x_{\eta\zeta})^{-1} x_{\eta\zeta} c (x_{\eta\zeta})^{-1} x_\eta x_\zeta^{-1} x_\eta^{-1} = f(\eta, \zeta) c^{\omega(\eta\zeta)} f(\eta, \zeta)^{-1}.$$

Таким образом, алгебра D совпадает со скрещенным произведением $(C_D(Z), G, (\omega, f))$. Аналогично доказывается, что $A = (C_A(Z), G, (\tilde{\omega}, g))$, где $\tilde{\omega}(\zeta)$ – автоморфизм из $\text{Aut } A$, такой, что $\tilde{\omega}(\zeta)|_Z = \zeta$, и $g(\zeta, \eta) = \tilde{x}_\zeta \tilde{x}_\eta (\tilde{x}_{\zeta\eta})^{-1}$ для всех $\zeta, \eta \in G$ (для всякого $\zeta = i_{\tilde{\Gamma}_{j_1}}^{\alpha_1} \dots i_{\tilde{\Gamma}_{j_s}}^{\alpha_s}$ элемент $\tilde{x}_\zeta$ определяется как $\tilde{\Gamma}_{j_1}^{\alpha_1} \dots \tilde{\Gamma}_{j_s}^{\alpha_s}$, где $\tilde{\Gamma}_1, \dots, \tilde{\Gamma}_r$ – такие фиксированные μ -инвариантные элементы, что $A = \langle \tilde{\Gamma}_1, \dots, \tilde{\Gamma}_r, C_A(Z) \rangle$).

Докажем, что обобщенные 2-коциклы (ω, f) и $(\tilde{\omega}, g)$ когомологичны. Введем гомоморфизм $\hat{\sigma}: D \rightarrow A$ такой, что $\hat{\sigma}|_{C_D(Z)} = \sigma|_{C_D(Z)}$ и $\hat{\sigma}(\Gamma_j) = \tilde{\Gamma}_j$ для всех $j \in \{1, \dots, r\}$. Тогда $\omega(\zeta) \cdot \sigma = \sigma \cdot \tilde{\omega}(\zeta)$, поскольку

$$(c^{\omega(\zeta)})^\sigma = (c^{\omega(\zeta)})^{\hat{\sigma}} = (x_\zeta^{-1})^{\hat{\sigma}} c^{\hat{\sigma}} x_\zeta^{\hat{\sigma}} = \tilde{x}_\zeta^{-1} c^\sigma \tilde{x}_\zeta = (c^\sigma)^{\tilde{\omega}(\zeta)}$$

для любого $c \in C_D(Z)$. Кроме того, для всех $\zeta, \eta \in G$ верна цепочка равенств

$$(f(\zeta, \eta))^\sigma = (f(\zeta, \eta))^{\hat{\sigma}} = (x_{\zeta\eta}^{\hat{\sigma}})^{-1} x_{\zeta\eta}^{\hat{\sigma}} x_{\eta\zeta}^{\hat{\sigma}} = (\tilde{x}_{\zeta\eta})^{-1} \tilde{x}_\zeta \tilde{x}_\eta = g(\zeta, \eta).$$

Таким образом, приняв $t(\zeta)$ равным 1 для всех $\zeta \in G$, получаем, что обобщенные 2-коциклы (ω, f) и $(\tilde{\omega}, g)$ когомологичны. Таким образом, $\hat{\sigma}$ является K -изоморфизмом скрещенных произведений $D = (C_D(Z), G, (\omega, f))$ и $A = (C_A(Z), G, (\tilde{\omega}, g))$, продолжающим σ . В дальнейшем будем обозначать $\hat{\sigma}$ через σ .

Осталось показать, что σ является K -изоморфизмом (D, τ) и (A, μ) . Рассмотрим элемент $c\Gamma_{j_1} \cdots \Gamma_{j_s} \in D$, где $c \in C_D(Z)$. Так как элементы $\Gamma_{j_1}, \dots, \Gamma_{j_s}$ τ -инвариантны, то $(c\Gamma_{j_1} \cdots \Gamma_{j_s})^\tau = \Gamma_{j_s} \cdots \Gamma_{j_1} c^\tau$. Заметим, что для любых $c' \in C_D(Z)$ и $j \in \{1, \dots, r\}$ элемент $\Gamma_j^{-1} c' \Gamma_j$ лежит в $C_D(Z)$. Действительно, так как $z_1 = \Gamma_j z \Gamma_j^{-1}$ лежит в Z для любого $z \in Z$, то верна цепочка равенств

$$\Gamma_j^{-1} c' \Gamma_j z = \Gamma_j^{-1} c' z_1 \Gamma_j = \Gamma_j^{-1} z_1 c' \Gamma_j = z \Gamma_j^{-1} c' \Gamma_j,$$

откуда следует, что $\Gamma_j^{-1} c' \Gamma_j \in C_D(Z)$. Таким образом,

$$\Gamma_{j_s} \cdots \Gamma_{j_1} c^\tau = \tilde{c} \Gamma_{j_s} \cdots \Gamma_{j_1},$$

где $\tilde{c} = \Gamma_{j_s} \cdots \Gamma_{j_1} c^\tau (\Gamma_{j_s} \cdots \Gamma_{j_1})^{-1} \in C_D(Z)$. Тогда

$$(c\Gamma_{j_1} \cdots \Gamma_{j_s})^{\tau\sigma} = \tilde{c}^\sigma \tilde{\Gamma}_{j_s} \cdots \tilde{\Gamma}_{j_1}.$$

В то же время

$$(c\Gamma_{j_1} \cdots \Gamma_{j_s})^{\sigma\mu} = \tilde{\Gamma}_{j_s} \cdots \tilde{\Gamma}_{j_1} c^{\sigma\mu} = \tilde{\Gamma}_{j_s} \cdots \tilde{\Gamma}_{j_1} c^{\tau\sigma} = (\Gamma_{j_s} \cdots \Gamma_{j_1} c^\tau)^\sigma = (\tilde{c} \Gamma_{j_s} \cdots \Gamma_{j_1})^\sigma = \tilde{c}^\sigma \tilde{\Gamma}_{j_s} \cdots \tilde{\Gamma}_{j_1}.$$

Следовательно, σ является K -изоморфизмом алгебр (D, τ) и (A, μ) . Теорема доказана.

Заключение. Доказан критерий K -изоморфизма слабо разветвленных конечномерных центральных K -алгебр с делением, обладающих унитарными K/k -инволюциями, в случае гензелева поля инвариантов k . Вопрос классификации конечномерных простых центральных K -алгебр с унитарными инволюциями для произвольного поля K остается открытым.

Список использованных источников

1. Tignol, J.-P. Generalized crossed products [Electronic Resource] / J.-P. Tignol. – Universite Catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve, Belgium, 1987. Mode of access: <https://perso.uclouvain.be/jean-pierre.tignol/Rapport106.pdf>
2. Jacob, B. Division algebras over Henselian fields / B. Jacob, A. Wadsworth // J. of Algebra. – 1990. – Vol. 128, № 1. – P. 126–179. [https://doi.org/10.1016/0021-8693\(90\)90047-r](https://doi.org/10.1016/0021-8693(90)90047-r)
3. Курсов, В. В. Скрещенные произведения простых алгебр и их групп автоморфизмов / В. В. Курсов, В. И. Янчевский // Докл. Акад. наук БССР. – 1988. – Т. 32, № 9. – С. 777–780.
4. Тихонов, С. В. Гомоморфизмы и инволюции неразветвленных гензелевых алгебр с делением / С. В. Тихонов, В. И. Янчевский // Зап. науч. семинара ПОМИ. – 2014. – Т. 423. – С. 264–275.
5. Ершов, Ю. Л. Гензелевы нормирования тел и группа SK_1 / Ю. Л. Ершов // Мат. сб. – 1982. – Т. 117 (159). – С. 60–68.
6. Draxl, P. K. Ostrowski's theorem for Henselian valued skew fields / P. K. Draxl // J. Reine Angew. Math. – 1984. – Vol. 1948, № 354. – P. 213–218. <https://doi.org/10.1515/crll.1984.354.213>

References

1. Tignol J.-P. *Generalized crossed products*. Universite Catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve, Belgium, 1987. Available at: <https://perso.uclouvain.be/jean-pierre.tignol/Rapport106.pdf>
2. Jacob B., Wadsworth A. Division algebras over Henselian fields. *Journal of Algebra*, 1990, vol. 128:1, pp. 126–179. [https://doi.org/10.1016/0021-8693\(90\)90047-r](https://doi.org/10.1016/0021-8693(90)90047-r)
3. Kursov V. V., Yanchevskii V. I. Crossed products over simple algebras and their automorphism groups. *Doklady Akademii nauk BSSR* [Doklady of the Academy of Sciences of BSSR], 1988, vol. 32, no. 9, pp. 777–780 (in Russian).
4. Tikhonov S. V., Yanchevskii V. I. Homomorphisms and involutions of unramified Henselian division algebras. *Journal of Mathematical Sciences*, 2015, vol. 209, no. 4, pp. 657–664. <https://doi.org/10.1007/s10958-015-2519-x>

5. Ershov Yu. L. Henselian valuations of division rings and the group SK_1 . *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1983, vol. 45, no. 1, pp. 63–71. <https://doi.org/10.1070/sm1983v045n01abeh000992>

6. Draxl P. K. Ostrowski's theorem for Henselian valued skew fields. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 1984, vol. 1984, no. 354, pp. 213–218. <https://doi.org/10.1515/crll.1984.354.213>

Информация об авторах

Говорушко Игорь Олегович – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник отдела алгебры, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: govorushko88@gmail.com

Янчевский Вячеслав Иванович – академик НАН Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий отделом алгебры, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: yanch@im.bas-net.by

Information about the authors

Igor O. Govorushko – Ph. D. (Physics and Mathematics), Researcher of the Department of Algebra, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: govorushko88@gmail.com

Vyacheslav I. Yanchevskii – Academician of the National Academy of Sciences of Belarus, Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Department of Algebra, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: yanch@im.bas-n

ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 511.622

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-2-144-156>

Поступила в редакцию 22.10.2019

Received 22.10.2019

Н. П. Прохоров

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ И ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ АНАЛОГИ АЛГОРИТМА МИЛЛЕРА – РАБИНА ДЛЯ ИДЕАЛОВ КОЛЕЦ ЦЕЛЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНЕЧНЫХ РАСШИРЕНИЙ ПОЛЯ $\mathbb{Q}$

Аннотация. Получены критерии простоты для идеалов колец целых алгебраических элементов конечных расширений поля $\mathbb{Q}$, которые являются аналогами критериев Миллера и Эйлера простоты для кольца целых чисел. Также получены их усиленные аналоги в предположении расширенной гипотезы Римана. Разработаны арифметические и модулярные операции для идеалов колец целых алгебраических элементов расширений поля $\mathbb{Q}$. С помощью указанных критериев предложены полиномиальные вероятностные и детерминированные алгоритмы решения задачи тестирования на простоту в кольцах целых алгебраических элементов конечных расширений поля $\mathbb{Q}$.

Ключевые слова: конечное расширение, кольцо целых алгебраических элементов, идеал, простота идеала, тестирование на простоту, критерий Миллера, критерий Эйлера, тест Миллера – Рабина

Для цитирования. Прохоров, Н. П. Вероятностный и детерминированный аналоги алгоритма Миллера – Рабина для идеалов колец целых алгебраических элементов конечных расширений поля $\mathbb{Q}$ / Н. П. Прохоров // Вест. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2020. – Т. 56, № 2. – С. 144–156. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-2-144-156>

Nikolai P. Prochorov

Belarusian State University, Minsk, Belarus

PROBABILISTIC AND DETERMINISTIC ANALOGUES OF THE MILLER – RABIN ALGORITHM FOR IDEALS OF RINGS OF INTEGER ALGEBRAIC ELEMENTS OF FINITE EXTENSIONS OF THE FIELD $\mathbb{Q}$

Abstract. In this paper, we obtained the primality criteria for ideals of rings of integer algebraic elements of finite extensions of the field $\mathbb{Q}$, which are analogues of Miller and Euler's primality criteria for rings of integers. Also advanced analogues of these criteria were obtained, assuming the extended Riemann hypothesis. Arithmetic and modular operations for ideals of rings of integer algebraic elements of finite extensions of the field $\mathbb{Q}$ were elaborated. Using these criteria, the polynomial probabilistic and deterministic algorithms for the primality testing in rings of integer algebraic elements of finite extensions of the field $\mathbb{Q}$ were offered.

Keywords: finite extension, ring of integer algebraic elements, ideal, primality of ideal, primality testing, Miller criterion, Euler criterion, Miller – Rabin test

For citation. Prochorov N. P. Probabilistic and deterministic analogues of the Miller – Rabin algorithm for ideals of rings of integer algebraic elements of finite extensions of the field $\mathbb{Q}$. *Vesti Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2020, vol. 56, no. 2, pp. 144–156 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-2-144-156>

Введение. Алгоритмическая теория чисел начала активно развиваться со второй половины XX в., что, в частности, связано с развитием информатики и криптографии, а также применениями теории чисел в указанных сферах. В частности, был получен ряд существенных результатов, связанных со свойствами целых простых чисел и способами проверки их на простоту.

В 1976 г. Г. Миллером [1] был предложен критерий и построен первый полиномиальный алгоритм тестирования чисел на простоту в предположении верности расширенной гипотезы Римана. Несколько позже алгоритм был модифицирован Э. Бахом [2]. Наконец в 1980 г. М. Рабин [3] на основе критерия Миллера предложил полиномиальный вероятностный алгоритм тестирования чисел на простоту, который в настоящее время является самым эффективным вероятностным безусловным алгоритмом тестирования на простоту, позволяющим определять с вероятностью

близкой к 1 при достаточном числе итераций является ли число простым. Также существует ряд других алгоритмов проверки на простоту, например тест Соловея – Штрассена [4], тест Адлемана – Померанса – Румели [5], являющийся одним из наиболее эффективных детерминированных алгоритмов проверки на простоту. В 2002 г. было конструктивно доказано [6], что задача проверки на простоту принадлежит классу $\mathcal{P}$. Данные результаты представляют большой интерес как с теоретической, так и практической точки зрения, так как при генерации ключей ряда крипто-систем (например, RSA, Рабина, Блюма – Гольдвассера) требуется уметь быстро решать задачи проверки числа на простоту.

В настоящей работе рассматриваются вопросы о построении критериев простоты и алгоритмов проверки на простоту в более общих алгебраических структурах, а именно: исследуется задача тестирования на простоту идеалов колец целых алгебраических элементов конечных расширений $\mathbb{Q}$.

Вопросы о простых идеалах колец целых алгебраических элементов ранее рассматривались в ряде работ. Например, в [7] приводится необходимое и достаточное условие простоты, в [8] – построены критерии простоты в квадратичных кольцах, в [9] – алгоритмы проверки на простоту в квадратичных факториальных кольцах. В статьях [10, 11] исследованы свойства аналогов чисел Кармайкла в кольцах целых алгебраических элементов. Наконец в 2016 г. в [12] было доказано, что задача тестирования идеалов в произвольных кольцах целых алгебраических элементов конечных расширений поля $\mathbb{Q}$ полиномиально разрешима.

Тем не менее полученный алгоритм носит скорее теоретический характер, так как основан на AKS-алгоритме для целых чисел. Более того, в настоящее время не существует эффективных и универсальных алгоритмов тестирования идеалов на простоту в соответствующих кольцах. Исходя из этого, целью данной работы является построение новых критериев простоты идеалов, а также основанных на них алгоритмов.

В первом разделе работы вводятся необходимые понятия об идеалах колец целых алгебраических элементов конечных расширений $\mathbb{Q}$, а также исследуются арифметика и способы представления элементов соответствующих колец. Во втором – исследуются алгоритмические примитивы для идеалов колец целых алгебраических элементов конечных расширений $\mathbb{Q}$, а также приводятся необходимые и достаточные условия их простоты. В третьем – выводятся аналоги критериев Миллера и Эйлера для идеалов, а также их усиленные версии в классе факториальных колец в предположении расширенной гипотезы Римана, в качестве следствий из критериев получаются вероятностные и детерминированные алгоритмы тестирования идеалов на простоту.

1. Постановка задачи. Будем считать, что $K \subset \mathbb{C}$ – конечное расширение $\mathbb{Q}$, $\mathcal{O}_K$ – кольцо целых алгебраических элементов K , под базисом K будем понимать базис K как векторного пространства над $\mathbb{Q}$, под нормой элемента α расширения K будем понимать абсолютное значение его нормы и обозначать ее $Nm(\alpha)$.

Под идеалом $\mathfrak{n}$ кольца $\mathcal{O}_K$ будем понимать подкольцо $\mathcal{O}_K$ такое, что для любого $n \in \mathfrak{n}$ и $m \in \mathcal{O}_K$ выполнено $nm \in \mathfrak{n}$. Для идеалов можно ввести понятия умножения, делимости, НОДа, простоты по аналогии с целыми числами. Известно, что любой идеал можно представить в виде произведения простых идеалов с точностью до перестановки слагаемых, т. е. выполнен аналог основной теоремы арифметики.

Будем говорить, что $a \equiv b \pmod{\mathfrak{n}}$ если $a - b \in \mathfrak{n}$ или, другими словами, $\mathfrak{n}$ делит $a - b$. Введем $\mathcal{O}_{K,\mathfrak{n}} = \mathcal{O}_K / \mathfrak{n}$ и $\mathcal{O}_{K,\mathfrak{n}}^\times = (\mathcal{O}_K / \mathfrak{n})^\times$. Пусть $Nm(\mathfrak{n}) = |\mathcal{O}_{K,\mathfrak{n}}|$ и $\varphi_K(\mathfrak{n}) = |\mathcal{O}_{K,\mathfrak{n}}^\times|$.

Главным идеалом будем называть идеал $\mathfrak{n} = (n) = n\mathcal{O}_K$. Отметим, что в случае факториального $\mathcal{O}_K$ любой идеал является главным, а значит, может быть задан с помощью одного элемента $\mathcal{O}_K$.

Для любого простого идеала $\mathfrak{p}$ нечетной нормы и $a \in \mathcal{O}_{K,\mathfrak{p}}^\times$ введем символ Лежандра $\left[\frac{a}{\mathfrak{p}} \right]$, равный 1, если a – квадратичный вычет по модулю $\mathfrak{p}$, и равный -1 , если a – квадратичный невычет по модулю $\mathfrak{p}$. Для любого нетривиального идеала $\mathfrak{n}$ нечетной нормы кольца $\mathcal{O}_K$ и $a \in \mathcal{O}_{K,\mathfrak{n}}^\times$ может быть введен символ Якоби $\left[\frac{a}{\mathfrak{n}} \right]$, равный произведению символов Лежандра

$$\left[\frac{a}{\mathfrak{n}} \right] = \prod_{i=1}^k \left[\frac{a}{\mathfrak{p}_i} \right], \quad (1)$$

где $\mathfrak{n} = \mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_k$, $\mathfrak{p}_i$ – простые идеалы $\mathcal{O}_K$.

Все необходимые понятия могут быть найдены в [7].

Под задачей тестирования идеала на простоту будем понимать следующую. Пусть зафиксировано некоторое кольцо $\mathcal{O}_K$, на вход подается идеал $\mathfrak{n}$, требуется определить, является ли он простым.

Далее исследуем некоторые арифметические и модулярные операции над элементами колец целых алгебраических элементов и сложности их выполнения.

Пусть $f(L)$, $g(L)$ – две различные функции натурального аргумента L . Будем писать $f(L) = \tilde{O}(g(L))$, если существует положительная функция $h(L)$, такая что $f(L) \leq h(L)g(L)$ для любых $L \in \mathbb{N}$, и $h(L) = O(\log g(L) \log \log g(L))$. Данное обозначение вводится в связи с известной оценкой сложности перемножения двух натуральных чисел по алгоритму Шёнхаге – Штрассена. Любое положительное действительное число C будет называться эффективно вычислимой константой (или просто константой), если оно зависит только от инвариантов поля K (например, степени, дискриминанта Δ_K , интегрального базиса, системы фундаментальных единиц) и существует алгоритм нахождения данного числа.

Определение 1. Целым базисом в $\mathcal{O}_K$ будем называть такой базис $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ поля, что любой элемент $\mathcal{O}_K$ представим в виде линейной комбинации с целыми рациональными коэффициентами.

Утверждение 1 [7]. Целый базис существует в любом конечном расширении $\mathbb{Q}$.

Во всех алгоритмах элементы кольца будут кодироваться как коэффициенты в разложении по фиксированному целому базису. Инварианты поля K будем считать константами.

Определение 2. Пусть $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ – фиксированный целый базис в K и $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \in \mathcal{O}_K$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}$. Абсолютным значением α будем называть

$$|\alpha|_\infty = \max_{i=1, n} |\alpha_i|. \quad (2)$$

Таким образом, логарифм абсолютного значения характеризует длину записи элемента $\mathcal{O}_K$.

Далее под множеством $\mathcal{O}_K^*$ будем понимать множество $\mathcal{O}_K \setminus \{0\}$.

Определение 3. Для любого $a \in \mathcal{O}_K^*$ обозначим через $\bar{a} \in \mathcal{O}_K^*$ сопряженный элемент, определяемый как $\bar{a} = \text{Nm}(a) / a$.

Далее предполагаем, что элементы заданы с помощью коэффициентов своего разложения в целый базис $\mathcal{O}_K$.

Утверждение 2. Пусть $a, b \in \mathcal{O}_K^*$ и $|a|_\infty \leq L, |b|_\infty \leq L$, тогда $a + b$, ab , b/a (включая проверку условия $a|b$), $\text{Nm}(a)$, $\bar{a}$ могут быть вычислены за $\tilde{O}(\log L)$ бинарных операций.

Доказательство. Рассмотрим произвольные элементы $a = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$, $b = \sum_{i=1}^n \beta_i e_i \in \mathcal{O}_K$, такие что $|a|_\infty \leq L, |b|_\infty \leq L$. Утверждение для суммы $a + b$ очевидно. Используя алгоритм Шёнхаге – Штрассена быстрого перемножения чисел, нетрудно получить необходимое утверждение для произведения ab . Известно, что $\text{Nm}(a) = |\det A|$, где $A = (a_{ij}) \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ – матрица, такая что $a e_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j$ ($i = 1, \dots, n$). Определитель $\det A$ может быть найден с помощью операций сложения и умножения за $\tilde{O}(\log L)$ бинарных операций. Пусть $\bar{a} = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, где x_i – неизвестные целые коэффициенты. Пусть

$$\text{Nm}(a) = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i x_j e_i e_j = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i x_j \alpha_k^{i,j} \right) e_k, \quad (3)$$

где $e_i e_j = \sum_{k=1}^n \alpha_k^{i,j} e_k$, тогда выполнено соотношение

$$H(x_1, x_2, \dots, x_n)^T = (\text{Nm}(a), 0, \dots, 0)^T, \quad (4)$$

где H – матрица элементов $h_{ij} \in \mathbb{Z}$ ($i, j = 1, \dots, n$), такая что $h_{ij} = O(L)$ ($i, j = 1, \dots, n$). Тогда существует константа D , такая что $\text{Nm}(a) \leq D|a|_\infty^n$. Следовательно, решение $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ может быть найдено за $\tilde{O}(\log L)$ бинарных операций. Пусть $\bar{b}a = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, $y_i \in \mathbb{Z}$. Тогда $b/a = \frac{\bar{b}a}{\text{Nm}(a)}$, условие $a|b$ эквивалентно условию $\text{Nm}(a)|y_i$ для любых $i = 1, \dots, n$. Элемент b/a может быть определен за $\tilde{O}(\log L)$ с помощью произведения в $\mathcal{O}_K$ и деления целых рациональных чисел.

З а м е ч а н и е 1. В доказательстве утверждения было показано, что существует константа D , такая что $\text{Nm}(a) \leq D|a|_\infty^n$ для любого $a \in \mathcal{O}_K$. Из предыдущего утверждения и правила Крамера следует, что существуют константы R и q , такие что $|\bar{a}|_\infty \leq RL^q$ для любого $a \in \mathcal{O}_K$, если $|a|_\infty \leq L$.

У т в е р ж д е н и е 3. Существует константа M , такая что для любых $a, m \in \mathcal{O}_K^*$ может быть найдено $z \in \mathcal{O}_K$, удовлетворяющее условию $a \equiv z \pmod{m}$ и $|z|_\infty \leq M|m|_\infty$. Если $|a|_\infty \leq L, |m|_\infty \leq L$, то такой элемент z может быть определен за $\tilde{O}(\log L)$ бинарных операций.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $a = \sum_{i=1}^n a_i e_i$, $m = \sum_{i=1}^n m_i e_i \in \mathcal{O}_K^*$. Тогда получаем

$$\frac{a}{m} = \frac{\bar{a}m}{\text{Nm}(m)} = \frac{1}{\text{Nm}(m)} \sum_{i=1}^n b_i e_i = \sum_{i=1}^n \left[\frac{b_i}{\text{Nm}(m)} \right] e_i + \sum_{i=1}^n \frac{b'_i}{\text{Nm}(m)} e_i, \quad (5)$$

где $b'_i \in \mathbb{Z}$, $|b'_i| < \text{Nm}(m)$, $i = 1, \dots, n$. Так как $\bar{a}m \equiv \sum_{i=1}^n b'_i e_i \pmod{\text{Nm}(m)}$, имеем $\bar{m} | \sum_{i=1}^n b'_i e_i$. Тогда $a \equiv z \pmod{m}$, где $z = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n b'_i e_i$. Так как

$$z = \frac{1}{\text{Nm}(m)} \sum_{k=1}^n e_k \left(\sum_{i,j=1}^n b'_i m_j \alpha_k^{i,j} \right), \quad (6)$$

получаем

$$\begin{aligned} |z|_\infty &= \max_{k=1, n} \left| \frac{1}{\text{Nm}(m)} \sum_{i,j=1}^n b'_i m_j \alpha_k^{i,j} \right| < \max_{k=1, n, i, j=1} \sum_{i,j=1}^n |m_j \alpha_k^{i,j}| \leq \\ &\leq |m|_\infty \max_{k=1, n, i, j=1} \sum_{i,j=1}^n |\alpha_k^{i,j}| = M|m|_\infty. \end{aligned} \quad (7)$$

Предположим, что $|a|_\infty \leq L, |m|_\infty \leq L$. Тогда $|\bar{m}|_\infty \leq RL^q$, где q и R – эффективно вычислимые константы. Так как существует константа D , такая что $\text{Nm}(m) \leq D|m|_\infty^n$, числа b_i , b'_i могут быть найдены за $\tilde{O}(\log L)$ бинарных операций. Поэтому элемент z может быть определен в K по формуле (6) с использованием не более $\tilde{O}(\log L)$ бинарных операций.

С л е д с т в и е 1. Пусть $k \in \mathbb{N}$, и для $a, b, m \in \mathcal{O}_K^*$ выполнено $|a|_\infty \leq L$, $|b|_\infty \leq L$, $|m|_\infty \leq L$. Элементы $z_1, z_2 \in \mathcal{O}_K$ такие, что $a + b \equiv z_1 \pmod{m}$, $a^k \equiv z_2 \pmod{m}$, $|z_1|_\infty \leq M|m|_\infty$, $|z_2|_\infty \leq M|m|_\infty$ могут быть определены за $\tilde{O}(\log L)$, $\tilde{O}(\log k \log L)$ бинарных операций соответственно.

2. Операции над идеалами в кольцах целых алгебраических элементов. Далее будем считать, что $[K : \mathbb{Q}] = n$.

О п р е д е л е н и е 4. Представление

$$\mathfrak{a} = (e_1, \dots, e_n)_{\mathbb{Z}} = \{e_1 x_1 + \dots + e_n x_n \mid x_i \in \mathbb{Z}, i = \overline{1, n}\}, \quad (8)$$

где $E = \{e_1, \dots, e_n\} \subset \mathcal{O}_K$ – базис $\mathfrak{a}$ как $\mathbb{Z}$ -модуля, будем называть $\mathbb{Z}$ – представлением идеала $\mathfrak{a}$.

Далее для удобства будем полагать, что $m = n$.

Далее под $\mathbb{Z}$ -представлением будем понимать матрицу $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$, такую что ее столбец под номером i – это коэффициенты разложения e_i в фиксированный целый базис $\mathcal{O}_K$.

В [13, 14] доказывается, что любой идеал имеет $\mathbb{Z}$ -представление.

Определение 5. Представление

$$\mathfrak{a} = (a, \alpha)_2 = \{a\xi_1 + \alpha\xi_2 \mid \xi_1, \xi_2 \in \mathcal{O}_K\}, \quad (9)$$

где $a \in \mathbb{N}_0$, $\alpha \in \mathcal{O}_K$, будем называть 2-представлением идеала $\mathfrak{a}$.

В [13, 14] доказывается, что любой идеал имеет 2-представление.

Далее под 2-представлением будем понимать вектор $\mathbb{Z}^n$ – коэффициенты разложения α в целый базис и целое неотрицательное число a .

В [14] приведены полиномиальные алгоритмы перехода от 2-представления к $\mathbb{Z}$ -представлению и обратно. К сожалению, несмотря на полиномиальность алгоритма, он может оказаться достаточно трудоемким.

Рассмотрим один важный частный случай $\mathbb{Z}$ -представления.

Определение 6. Будем говорить, что матрица $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ записана в нормальной эрмитовой форме, если выполнены следующие условия:

- 1) $m_{i,j} = 0$, если $i > j$;
- 2) $m_{i,j} > 0$ для любого i ;
- 3) для любого $i < j$ выполнено $0 \leq m_{i,j} < m_{i,i}$.

Определение 7. Представлением идеала $\mathfrak{a}$ в нормальной эрмитовой форме будем называть такое его $\mathbb{Z}$ -представление

$$\mathfrak{a} = (e_1, \dots, e_n)_{\mathbb{Z}}, \quad (10)$$

что соответствующая матрица является матрицей в эрмитовой нормальной форме.

В [13, 14] показывается, что каждый идеал может быть записан в нормальной эрмитовой форме, более того, такое представление единственно.

В статье [15] был получен полиномиальный алгоритм построения нормальной эрмитовой формы по $\mathbb{Z}$ -представлению идеала.

Следствие 2. Таким образом, за полиномиальное время можно переходить от $\mathbb{Z}$ -представления, 2-представления или представления в нормальной эрмитовой форме к любому из них.

Определение 8. Пусть дан идеал $\mathfrak{a}$, зафиксирован целый базис E кольца $\mathcal{O}_K$ и $\mathbb{Z}$ -представление идеала $\mathfrak{a} = (e_1, \dots, e_n)_{\mathbb{Z}}$. Тогда введем абсолютное значение идеала $\mathfrak{a}$ как

$$|\mathfrak{a}|_{\infty} = \max_{i=1, \dots, n, j=1, \dots, n} |a_{ij}|, \quad (11)$$

где $A = (a_{ij}) \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ – матрица, соответствующая указанному $\mathbb{Z}$ -представлению.

Нетрудно видеть, что логарифм абсолютного значения идеала характеризует количество памяти, необходимое для того, чтобы закодировать его $\mathbb{Z}$ -представление.

В случае, когда кольцо $\mathcal{O}_K$ факториально, любой идеал является главным, а значит, любой идеал может быть задан с помощью порождающего его элемента. Поэтому в таких кольцах идеал, как и любой элемент, будет кодироваться в виде вектора $\mathbb{Z}^n$ коэффициентов разложения в целый базис кольца $\mathcal{O}_K$.

Утверждение 4. Пусть идеалы $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ заданы в виде нормальной эрмитовой формы и $|\mathfrak{a}|_{\infty}, |\mathfrak{b}|_{\infty} \leq L$, тогда проверка указанных идеалов на равенство может быть выполнена за $O(\log L)$ бинарных операций.

Доказательство. Как было указано ранее, любой идеал однозначно задается своей нормальной эрмитовой формой. Таким образом, достаточно проверить на поэлементное равенство две целочисленные матрицы $n \times n$ с коэффициентами размера $O(L)$.

Утверждение 5. Пусть идеал $\mathfrak{a}$ задан в виде $\mathbb{Z}$ -представления и $|\mathfrak{a}|_\infty \leq L$, тогда $\text{Nm}(\mathfrak{a})$ может быть вычислено за $\tilde{O}(\log L)$ бинарных операций.

Доказательство. Исходя из утверждения, описанного в [14], выполнено равенство $\text{Nm}(\mathfrak{a}) = |\det(A)|$, где A – матрица, соответствующая $\mathbb{Z}$ -представлению. Нетрудно видеть, что определитель целочисленной матрицы $n \times n$ с коэффициентами размера $O(L)$ может быть вычислен за указанное число операций.

Утверждение 6. Пусть идеал $\mathfrak{a}$ задан в виде $\mathbb{Z}$ -представления и $|\mathfrak{a}|_\infty, |\mathfrak{a}|_\infty, |\mathfrak{b}|_\infty \leq L$, тогда проверка сравнения $a \equiv b \pmod{\mathfrak{a}}$ может быть выполнена за $\tilde{O}(\log L)$ бинарных операций.

Доказательство. Пусть изначально $\mathfrak{a}$ задан в виде $\mathbb{Z}$ -представления и $|\mathfrak{a}|_\infty, |\mathfrak{a}|_\infty, |\mathfrak{b}|_\infty \leq L$. Требуется проверить делимость главного идеала $(a - b)$ на идеал $\mathfrak{a}$, что эквивалентно проверке включения главного идеала $(a - b)$ в идеал $\mathfrak{a}$. А это, в свою очередь, равносильно тому, что $a - b \in \mathfrak{a}$. То есть проверка сравнения сводится к проверке разложимости $a - b$ по базису идеала $\mathfrak{a}$, т. е. проверке разрешимости системы линейных уравнений $n \times n$ с коэффициентами размера $O(L)$. Нетрудно видеть, что это может быть сделано за $\tilde{O}(\log L)$ бинарных операций.

Утверждение 7. Существует константа N , такая что для любого нетривиального идеала $\mathfrak{n}$ и $a \in \mathcal{O}_K$ найдется $z \in \mathcal{O}_K$, такое что $z \equiv a \pmod{\mathfrak{n}}$ и $|z|_\infty \leq N |\mathfrak{n}|_\infty^n$. Если $\mathfrak{n}$ задан с помощью $\mathbb{Z}$ -представления, причем $|\mathfrak{n}|_\infty, |\mathfrak{a}|_\infty \leq L$, то такой элемент z может быть вычислен за $\tilde{O}(\log L)$ бинарных операций.

Доказательство. Пусть $E = (e_1, \dots, e_n)$ – целый базис в $\mathcal{O}_K$, $\mathfrak{n} = (\omega_1, \dots, \omega_n)_{\mathbb{Z}}$ – $\mathbb{Z}$ -представление идеала $\mathfrak{n}$. Пусть далее

$$a = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i, \quad \theta = \text{НОК}(\text{Nm}(\omega_1), \dots, \text{Nm}(\omega_n)).$$

Нетрудно видеть, что $\theta \in \mathfrak{n}$, вследствие чего $\theta \equiv 0 \pmod{\mathfrak{n}}$. Отсюда следует, что $a \equiv a - \beta\theta \pmod{\mathfrak{n}}$ для любого $\beta \in \mathcal{O}_K$.

Положим $\beta = \sum_{i=1}^n \beta_i e_i$, где $\alpha_i = \theta \beta_i + r_i$, $r_i < \theta, i = \overline{1, n}$, а также $z = a - \beta\theta$. Тогда

$$|z|_\infty = \max_{i=1, n} |r_i| \leq |\theta| \leq \prod_{i=1}^n \text{Nm}(\omega_i) \leq D^n \prod_{i=1}^n |\omega_i|_\infty \leq D^n |\mathfrak{n}|_\infty^n = N |\mathfrak{n}|_\infty^n. \quad (12)$$

Нетрудно видеть, что рассмотренные операции могут быть выполнены за $\tilde{O}(\log L)$ бинарных операций.

Следствие 3. Пусть $k \in \mathbb{N}$ и $a, b \in \mathcal{O}_K^*$, $\mathfrak{n}$ – нетривиальный идеал, заданный с помощью $\mathbb{Z}$ -представления. Пусть выполнено $|\mathfrak{a}|_\infty \leq L$, $|\mathfrak{b}|_\infty \leq L$, $|\mathfrak{n}|_\infty \leq L$. Элементы $z_1, z_2 \in \mathcal{O}_K$ такие, что $a + b \equiv z_1 \pmod{\mathfrak{n}}$, $a^k \equiv z_2 \pmod{\mathfrak{n}}$, $|z_1|_\infty \leq N |\mathfrak{n}|_\infty^n$, $|z_2|_\infty \leq N |\mathfrak{n}|_\infty^n$ могут быть определены за $\tilde{O}(\log L)$, $\tilde{O}(\log k \log L)$ бинарных операций соответственно.

Замечание 2. Отметим, что все указанные операции могут быть выполнены за полиномиальное время в случае, когда идеалы заданы с помощью одного из представлений: $\mathbb{Z}$ -представление, 2-представление, нормальная эрмитова форма; в силу того, что из одного представления может быть получено другое за полиномиальное время.

Далее рассмотрим некоторые необходимые и достаточные условия простых идеалов в $\mathcal{O}_K$. Для удобства обозначим через $\mathcal{P}_K$ множество простых идеалов $\mathcal{O}_K$, $\mathcal{P}_{1,K}$ – множество простых идеалов нечетной нормы, $\mathcal{P}_{2,K}$ – множество простых идеалов четной нормы. Пусть также $\mathcal{T}_K = \{ \mathfrak{e}x \mid x \in \mathbb{Z}, \mathfrak{e} \in \mathcal{O}_K^\times \}$, $\mathcal{Q}_K = \mathcal{O}_K \setminus \mathcal{T}_K$.

Приведем следующее достаточное условие простоты.

Утверждение 8. Пусть $\mathfrak{p}$ – идеал и $\text{Nm}(\mathfrak{p})$ – простое в $\mathbb{Z}$, тогда $\mathfrak{p}$ – простой идеал.

Доказательство. Предположим, что $\mathfrak{p}$ – не простой, тогда $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}\mathfrak{n}$, где $\mathfrak{m}, \mathfrak{n} \neq (1)$. Значит, $\text{Nm}(\mathfrak{p}) = \text{Nm}(\mathfrak{n})\text{Nm}(\mathfrak{m})$. Противоречие.

Отметим, что данное утверждение во многих кольцах не является необходимым. В [7] приводится следующее необходимое условие простоты.

Утверждение 9. Пусть $\mathfrak{p}$ – простой идеал, тогда существует q – простое в $\mathbb{Z}$, что $\text{Nm}(\mathfrak{p}) = q^f$, где $f \in \mathbb{N}$.

Отметим, что данное необходимое условие ни в каком $\mathcal{O}_K$ не является достаточным.

Замечание 3. Также известен следующий критерий для случая квадратичных колец [12].

Пусть $d \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$ – целое число, свободное от квадратов, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ и $\mathcal{O}_K$ – факториально. Тогда верны следующие утверждения:

- 1) $p \in \mathcal{Q}_K$ простое тогда и только тогда, когда $\text{Nm}(p)$ простое в $\mathbb{Z}$;
- 2) $p \in \mathcal{T}_K \setminus \{2\varepsilon \mid \varepsilon \in \mathcal{O}_K^\times\}$ и $(p) = (p^*)$, где $p^* \in \mathbb{Z}$, значит, p простое тогда и только тогда, когда $\left(\frac{\Delta_K}{p^*}\right) = -1$;
- 3) $p \in \{2\varepsilon \mid \varepsilon \in \mathcal{O}_K^\times\}$ простое тогда и только тогда, когда $d \equiv 5 \pmod{8}$.

Замечание 4. Отметим, что число идеалов с фиксированной нормой конечно. Действительно, пусть $\mathfrak{n}$ – идеал $\mathcal{O}_K$, такой что $\text{Nm}(\mathfrak{n}) = N$, тогда получаем, что $\mathfrak{n}$ делит (N) . В свою очередь (N) имеет конечное число делителей-идеалов.

Из данного замечания и утверждения 9 следует, что множество $\mathcal{P}_{2,K}$ конечно, и норма любого идеала из $\mathcal{P}_{2,K}$ является степенью двойки.

3. Критерии простоты идеалов. Докажем аналог критерия Эйлера [4] для идеалов колец целых алгебраических элементов конечных расширений $\mathbb{Q}$.

Теорема 1. Пусть $\mathfrak{n}$ – нетривиальный идеал нечетной нормы. Тогда $\mathfrak{n}$ является простым в $\mathcal{O}_K$ тогда и только тогда, когда для любого $a \in \mathcal{O}_{K,\mathfrak{n}}^\times$ выполнено сравнение

$$a^{(\text{Nm}(\mathfrak{n})-1)/2} \equiv \left[\frac{a}{\mathfrak{n}}\right] \pmod{\mathfrak{n}}.$$

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть $\mathfrak{n}$ является нетривиальным простым идеалом нечетной нормы. Рассмотрим произвольный элемент $a \in \mathcal{O}_{K,\mathfrak{n}}^\times$. Таким образом, требуется доказать, что a – квадратичный вычет по модулю $\mathfrak{n}$ тогда и только тогда, когда выполнено равенство

$$a^{(\text{Nm}(\mathfrak{n})-1)/2} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{n}}. \quad (13)$$

Так как идеал $\mathfrak{n}$ простой, то $\mathcal{O}_{K,\mathfrak{n}}$ является полем, соответственно группа $\mathcal{O}_{K,\mathfrak{n}}^\times$ циклична, и в ней существует первообразный корень g . Так как $\text{Nm}(\mathfrak{n})$ нечетно, то a является квадратичным вычетом по модулю $\mathfrak{n}$ тогда и только тогда, когда существует четное число $t \in \{0, 1, \dots, \text{Nm}(\mathfrak{n})-1\}$, такое что $a \equiv g^t \pmod{\mathfrak{n}}$. Последнее равносильно соотношению (13).

Докажем достаточность. Пусть $\mathfrak{n}$ – нетривиальный идеал нечетной нормы, такой что для любого элемента $a \in \mathcal{O}_{K,\mathfrak{n}}^\times$ выполнено

$$a^{(\text{Nm}(\mathfrak{n})-1)/2} \equiv \left[\frac{a}{\mathfrak{n}}\right] \pmod{\mathfrak{n}}. \quad (13')$$

Рассмотрим разложение идеала $\mathfrak{n}$ на простые сомножители – $\mathfrak{n} = \prod_{i=1}^r \mathfrak{p}_i^{\alpha_i}$, где $\mathfrak{p}_i$ – простые идеалы нечетной нормы и $\alpha_i \in \mathbb{N}$. Пусть $\text{Nm}(\mathfrak{p}_j) = q_j^{f_j}$, где q_j – простое в $\mathbb{Z}$. Возможны 2 следующих случая.

Случай 1. Существует $j \in \{1, \dots, r\}$, такое что $\alpha_j > 1$. Пусть $a \in \mathcal{O}_{K,\mathfrak{n}}^\times$ – элемент порядка q_j^l (такой элемент существует, исходя из аналога китайской теоремы об остатках для идеалов и теоремы Коши для абелевых групп [7]). Согласно соотношению (13'), имеем $q_j^l \mid \text{Nm}(\mathfrak{n})-1$, что невозможно.

С л у ч а й 2. Пусть $\alpha_i = 1$ для любого $i \in \{1, \dots, r\}$, $r \geq 2$. Пусть $b \in \mathcal{O}_{K, p_1}^\times$ – произвольный квадратичный невычет (такой существует, так как можно считать, что $\text{Nm}(p_1) \geq 3$). Тогда существует элемент $a \in \mathcal{O}_{K, n}^\times$ такой, что выполнено $a \equiv b \pmod{p_1}$, $a \equiv 1 \pmod{p_2 \dots p_r}$. Значит, $\left[\frac{a}{n}\right] = -1$, поэтому $a^{(\text{Nm}(n)-1)/2} \equiv -1 \pmod{n}$. Но последнее утверждение противоречит тому, что $a \equiv 1 \pmod{p_2}$.

Таким образом, мы показали, что идеал $\mathfrak{n}$ является простым в $\mathcal{O}_K$.

С л е д с т в и е 4. Исходя из результата [16] символ Якоби может быть вычислен за полиномиальное время. Соответственно на основе данного критерия и результатов разделов 2, 3 можно построить вероятностный полиномиальный тест, основанный на выборе случайного $a \in \mathcal{O}_K^*$ и проверки сравнения

$$a^{(\text{Nm}(n)-1)/2} \equiv \left[\frac{a}{n}\right] \pmod{n}.$$

Из теоремы Лагранжа очевидным образом следует, что вероятность успеха для составного идеала $\mathfrak{n}$ на одной итерации такого теста не меньше $1/2$, так как множество элементов $a^{(\text{Nm}(n)-1)/2} \equiv \left[\frac{a}{n}\right] \pmod{n}$ образует подгруппу $\mathcal{O}_{K, n}^\times$.

Проводя l итераций теста, можно определить простоту N с вероятностью не менее $1 - 2^{-l}$. Данный алгоритм обобщает результат статьи [4].

Далее докажем аналог критерия Миллера [1].

Т е о р е м а 2. Пусть $\mathfrak{n}$ – нетривиальный идеал нечетной нормы. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) $\mathfrak{n}$ простой идеал;

2) $\forall a, (a, n) = 1$, $a^u \not\equiv 1 \pmod{n} : \exists k \in \{0, \dots, t-1\}$, такое что $a^{2^k u} \equiv -1 \pmod{n}$, где $\text{Nm}(n) - 1 = 2^t u$, $(u, 2) = 1$.

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть $\mathfrak{n}$ является нетривиальным простым идеалом $\mathcal{O}_K$ нечетной нормы. Нетрудно видеть, что тогда $\phi_K(\mathfrak{n}) = \text{Nm}(n) - 1 = 2^t u$, $(u, 2) = 1$. Возьмем произвольный элемент $a \in \mathcal{O}_K$, такой что $(a, n) = 1$ и $a^u \not\equiv 1 \pmod{n}$. Исходя из аналога теоремы Эйлера, получаем, что верно сравнение $a^{\phi_K(n)} \equiv a^{\text{Nm}(n)-1} \equiv a^{2^t u} \equiv 1 \pmod{n}$. Таким образом,

$$(a^u - 1)(a^u + 1)(a^{2u} + 1) \dots (a^{2^{t-1}u} + 1) \equiv 0 \pmod{n}. \quad (14)$$

Так как $a^u - 1 \not\equiv 0 \pmod{n}$, то из соотношения (14) следует существование такого числа $k \in \{0, \dots, t-1\}$, что $a^{2^k u} \equiv -1 \pmod{n}$.

Докажем достаточность. Предположим, что $\mathfrak{n}$ не является простым идеалом. Рассмотрим разложение идеала $\mathfrak{n}$ в произведение простых сомножителей: $\mathfrak{n} = \prod_{i=1}^r \mathfrak{p}_i^{\alpha_i}$, где $\mathfrak{p}_i$ – различные простые идеалы нечетной нормы, $\alpha_i \in \mathbb{N}$. Пусть также $\text{Nm}(\mathfrak{p}_j) = q_j^{f_j}$, где q_j – простое в $\mathbb{Z}$.

Возможны 2 случая.

С л у ч а й 3. Существует $j \in \{1, \dots, r\}$, такое что $\alpha_j > 1$. Существует $a \in \mathcal{O}_{K, n}^\times$ порядка q_j^l . Так как $u \not\equiv 0 \pmod{q_j}$, то $a^u \not\equiv 1 \pmod{n}$. Следовательно, существует число $k \in \{1, \dots, t-1\}$, такое что выполнено сравнение $a^{2^{k+1}u} \equiv 1 \pmod{n}$. Значит, $2^{k+1}u \equiv 0 \pmod{q_j}$. Из последнего сравнения следует, что $\text{Nm}(n) - 1 \equiv 0 \pmod{q_j}$, что невозможно.

С л у ч а й 4. Предположим $\alpha_j = 1$ для любого $j \in \{1, \dots, r\}$, $r \geq 2$. Так как $\mathcal{O}_{K,n}^\times \cong \mathcal{O}_{K,p_1}^\times \times \dots \times \mathcal{O}_{K,p_r}^\times$ и элемент -1 имеет порядок 2 в каждой группе $\mathcal{O}_{K,p_j}^\times$, то существует по крайней мере $2^r - 1 \geq 3$ элементов $\mathcal{O}_{K,n}^\times$ порядка 2. Пусть $a \not\equiv \pm 1 \pmod{n}$ является произвольным элементом порядка 2 в группе $\mathcal{O}_{K,n}^\times$. Так как число u нечетно, то $a^u = a \not\equiv \pm 1 \pmod{n}$. Таким образом, существует $k \in \{0, \dots, t-1\}$ такое, что верно $a^{2^k u} \equiv -1 \pmod{n}$. Последнее сравнение невозможно, так как $a^u \not\equiv \pm 1 \pmod{n}$ и a имеет порядок 2 в $\mathcal{O}_{K,n}^\times$. Во всех случаях было получено противоречие, следовательно, идеал $\mathfrak{n}$ является простым.

З а м е ч а н и е 5. На основе данного критерия и результатов разделов 2, 3 можно построить вероятностный полиномиальный тест, основанный на выборе случайного $a \in \mathcal{O}_K^*$ и проверки условия теоремы. Аналогично результатам, полученным в [3] и [9], можно показать, что вероятность успеха на одной итерации такого алгоритма не меньше $1/2$, а значит, проводя l итераций теста, можно определить простоту N с вероятностью не менее $1 - 2^{-l}$. Отметим, что данный алгоритм обобщает результат статьи [3].

Далее будем считать, что $\mathcal{O}_K$ факториально, в частности, любой идеал $\mathcal{O}_K$ является главным.

Далее рассмотрим приложения расширенной гипотезы Римана к рассматриваемым вопросам.

О п р е д е л е н и е 9. *Характером Дирихле абелевой группы G будем называть гомоморфизм $\chi: G \rightarrow \mathbb{C}^*$.*

Рассмотрим характер ξ группы $\mathcal{O}_{K,n}^\times$. Его можно продолжить на всю группу $\mathcal{O}_K^*$ по правилу $\psi(x) = 0$, если $(x, n) \neq 1$; $\psi(x) = \xi(x \bmod n)$, если $(x, n) = 1$. Нетрудно видеть, что ψ – характер $\mathcal{O}_K^*$. Характер будем называть нетривиальным, если его образ не является тривиальной группой.

О п р е д е л е н и е 10. *L -функция Гекке, ассоциированная с характером $\chi: \mathcal{O}_K \rightarrow \mathbb{C}^*$, определяется как непрерывное продолжение на $\mathbb{C}$ функции*

$$L(s, \chi) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\chi(\mathfrak{a})}{(\text{Nm}(\mathfrak{a}))^s}, \quad s \in \mathbb{C}, \quad (15)$$

где сумма справа берется по всем ненулевым идеалам $\mathfrak{a}$.

Следующая версия расширенной гипотезы Римана (ERH) предполагается верной для доказательства аналога теоремы Анкени.

Г и п о т е з а [2]. *Все L -функции Гекке не имеют нулей в полуплоскости $\text{Re}(z) > 1/2$ (ERH).*

Классическая теорема Анкени [2, 17] гласит, что в предположении выполнимости ERH для любого нетривиального характера χ группы $\mathbb{Z}_N^*$ найдется $m \in \mathbb{N}$, $(m, N) = 1$, что $m \leq 2 \log^2 N$ и $\chi(m) \neq 1$. В статье [2] аналог данной теоремы в предположении ERH был доказан для группы $\mathcal{O}_{K,N}^\times$.

У т в е р ж д е н и е 10. *Предположим, что ERH выполнена; χ – нетривиальный характер Дирихле группы $\mathcal{O}_{K,N}^\times$. Тогда существует простой элемент $p \in \mathcal{O}_K$, $(p, N) = 1$, такой что $\text{Nm}(p) \leq 12 \log^2(\Delta_K^2 \text{Nm}(N))$ и $\chi(N) \neq 1$.*

Из него можно получить следующее следствие.

У т в е р ж д е н и е 11. *Предположим, что ERH выполнена. Пусть G является конечной абелевой группой и $\chi: \mathcal{O}_{K,N}^\times \rightarrow G$ – нетривиальный гомоморфизм. Тогда существует простое $p \in \mathcal{O}_K$, $(p, N) = 1$, такое что $\text{Nm}(p) \leq 12 \log^2(\Delta_K^2 \text{Nm}(N))$ и $\chi(p) \neq 1_G$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как образ $\text{Im} \chi$ отображения χ является нетривиальной подгруппой группы G , то можно определить нетривиальный гомоморфизм $\xi: \text{Im} \chi \rightarrow \mathbb{C}^*$. Заметим, что $\xi \circ \chi: \mathcal{O}_{K,N}^\times \rightarrow \mathbb{C}^*$ является нетривиальным характером Дирихле. Понятно, что $\xi \circ \chi$ может быть расширен на все идеалы $\mathcal{O}_K$. Так как $\xi \circ \chi$ может быть рассмотрен в смысле определения 9, мы можем сделать вывод, что из утверждения 10 следует существование элемента $p \in \mathcal{O}_K$, $(p, N) = 1$, такого что

$$\text{Nm}(p) \leq 12 \log^2(\Delta_K^2 \text{Nm}(N)) \quad (16)$$

и $(\xi \circ \chi)(p) \neq 1$.

Далее будем предполагать, что ERH выполнена.

Утверждение 12. Пусть $\mathfrak{p}$ является нетривиальным простым идеалом нечетной нормы. Тогда сравнение

$$x^{\text{Nm}(\mathfrak{p})-1} \equiv 1 \pmod{p^2} \quad (17)$$

имеет не более $\text{Nm}(\mathfrak{p})-1$ решений относительно $x \in \mathcal{O}_{K,p^2}^\times$.

Доказательство. Так как $\mathcal{O}_K$ факториально, то $\mathfrak{p}$ – главный идеал, пусть $\mathfrak{p} = (p)$. Рассмотрим сравнение $x^{\text{Nm}(p)-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Из аналога теоремы Эйлера для идеалов следует, что оно выполнено для любого элемента $x \in \mathcal{O}_{K,p}^\times$, другими словами, данное сравнение имеет ровно $\text{Nm}(p)-1$ решений относительно x .

Очевидно, что каждое решение сравнения $x^{\text{Nm}(p)-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$ может быть записано в виде $a + pt$, $a \in \mathcal{O}_{K,p}^\times$, $t \in \mathcal{O}_{K,p}$, где a – это решение $x^{\text{Nm}(p)-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Применяя формулу бинома Ньютона к многочлену $P(t) = (a + pt)^{\text{Nm}(p)-1} - 1$, получаем, что

$$\frac{a^{\text{Nm}(p)-1} - 1}{p} + t(\text{Nm}(p) - 1)a^{\text{Nm}(p)-2} \equiv 0 \pmod{p}. \quad (18)$$

Заметим, что данное сравнение является линейным относительно t , а значит, имеет единственное решение при фиксированном a , так как $((\text{Nm}(p) - 1)a^{\text{Nm}(p)-2}, p) = 1$.

Таким образом, сравнение $x^{\text{Nm}(p)-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$ имеет не более $\text{Nm}(p)-1$ решений относительно $x \in \mathcal{O}_{K,p^2}^\times$.

Теорема 3. Предположим, что ERH выполняется. Пусть $\mathfrak{n}$ – нетривиальный идеал нечетной нормы. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) $\mathfrak{n}$ является простым идеалом;
- 2) $\forall a, (a, \mathfrak{n}) = 1, \text{Nm}(a) \leq 12 \log^2(\Delta_K^2 \text{Nm}(\mathfrak{n}))$, $a^u \not\equiv 1 \pmod{\mathfrak{n}} : \exists k \in \{0, \dots, t-1\}$, такое что $a^{2^k u} \equiv -1 \pmod{\mathfrak{n}}$, где $\text{Nm}(\mathfrak{n}) - 1 = 2^t u$, $(u, 2) = 1$.

Доказательство. Так как $\mathcal{O}_K$ факториально, то $\mathfrak{n}$ – главный идеал, пусть $\mathfrak{n} = (N)$. Необходимость следует из теоремы 2.

Докажем достаточность. Предположим, что $N \in \mathcal{O}_K \setminus \mathcal{O}_K^\times$ – это составной элемент нечетной нормы, для которого утверждение (2) выполнено.

Предположим, что N не является свободным от квадратов, т. е. существует делитель $p \in \mathcal{P}_{2,K}$ элемента N , такой что N делится на p^2 . Рассмотрим отображение $\chi: \mathcal{O}_{K,p^2}^\times \rightarrow \mathcal{O}_{K,p^2}^\times$, такое что для любого $a \in \mathcal{O}_{K,N}^\times$ выполнено $\chi(a) = a^{\text{Nm}(p)-1}$. Нетрудно видеть, что χ является эндоморфизмом группы $\mathcal{O}_{K,p^2}^\times$. Согласно утверждению 12, χ является нетривиальным. Применяя утверждение 11, получаем существование $\alpha \in \mathcal{O}_{K,N}^\times$, такого что $\text{Nm}(\alpha) \leq 12 \log^2(\Delta_K^2 \text{Nm}(N))$ и $\alpha^{\text{Nm}(p)-1} \not\equiv 1 \pmod{p^2}$.

Предположим, что $\alpha^{\text{Nm}(N)-1} \equiv 1 \pmod{N}$. Отсюда получаем сравнение $\alpha^{\text{Nm}(N)-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$. Значит, выполнено

$$\text{ord}_{\mathcal{O}_{K,p^2}}(\alpha) \mid \text{Nm}(N) - 1, \quad (19)$$

$$\text{ord}_{\mathcal{O}_{K,p^2}}(\alpha) \mid \varphi_K(p^2) = \text{Nm}(p)(\text{Nm}(p) - 1). \quad (20)$$

Из этого следует соотношение $\text{ord}_{\mathcal{O}_{K,p^2}}(\alpha) \mid \text{Nm}(p) - 1$, которое противоречит сравнению $\alpha^{\text{Nm}(p)-1} \not\equiv 1 \pmod{N}$.

Таким образом, $\alpha^{\text{Nm}(N)-1} \not\equiv 1 \pmod{N}$ верно, и оно противоречит предположению. Следовательно, N является свободным от квадратов. Пусть $p, q \in \mathcal{P}_{2,K}$ – различные простые делители N . Обозначим через $v_2(n)$ максимальную степень двойки, делящую n . Без потери общности будем считать, что $v_2(\text{Nm}(p)-1) \geq v_2(\text{Nm}(q)-1)$. Введем следующий элемент $d \in \mathcal{O}_K$:

$$d = \begin{cases} pq, & \text{если } v_2(\text{Nm}(p)-1) = v_2(\text{Nm}(q)-1), \\ p, & \text{если } v_2(\text{Nm}(p)-1) > v_2(\text{Nm}(q)-1). \end{cases} \quad (21)$$

Рассмотрим отображение $\xi: \mathcal{O}_{K,N}^\times \rightarrow \mathcal{O}_{K,N}^\times$, такое что для любого $a \in \mathcal{O}_{K,N}^\times$ выполнено $\xi(a) = \left[\frac{a}{d} \right]$. Заметим, что ξ является нетривиальным эндоморфизмом группы $\mathcal{O}_{K,N}^\times$. Применяя утверждение 11, получаем существование $\alpha \in \mathcal{O}_{K,N}^\times$, такое что $\text{Nm}(\alpha) \leq 12 \log^2(\Delta_K^2 \text{Nm}(N))$ и $\left[\frac{\alpha}{d} \right] \equiv -1 \pmod{N}$. Пусть $\beta = \alpha^u$. Исходя из нечетности u , получаем $\left[\frac{\beta}{d} \right] = -1$, значит, $\beta \not\equiv 1 \pmod{d}$. Пусть j – минимальное число, такое что $\alpha^{2^j u} \equiv -1 \pmod{N}$. Тогда $\text{ord}_{\mathcal{O}_{K,p}^\times}(\beta) = \text{ord}_{\mathcal{O}_{K,q}^\times}(\beta) = 2^{j+1}$.

Далее рассмотрим следующие два случая.

С л у ч а й 5: $v_2(\text{Nm}(p)-1) > v_2(\text{Nm}(q)-1)$.

В этом случае $\text{ord}_{\mathcal{O}_{K,q}^\times}(\beta) = 2^{j+1} \mid \varphi_K(q) = \text{Nm}(q)-1$, значит,

$$\text{ord}_{\mathcal{O}_{K,p}^\times}(\beta) = 2^{j+1} \mid (\text{Nm}(p)-1)/2. \quad (22)$$

Получаем, что, с одной стороны, $\left[\frac{\beta}{d} \right] = \left[\frac{\beta}{p} \right] = -1$, а с другой – $b^{(\text{Nm}(p)-1)/2} \equiv 1 \pmod{p}$, что противоречит теореме 1.

С л у ч а й 6: $v_2(\text{Nm}(p)-1) = v_2(\text{Nm}(q)-1)$.

В данном случае $\left[\frac{\beta}{d} \right] = \left[\frac{\beta}{q} \right] \left[\frac{\beta}{p} \right] = -1$. Без потери общности, будем считать, что $\left[\frac{\beta}{p} \right] = -1$ и $\left[\frac{\beta}{q} \right] = 1$. Согласно теореме 1 получаем, что

$$\beta^{(\text{Nm}(q)-1)/2} \equiv 1 \pmod{q}, \quad \text{ord}_{\mathcal{O}_{K,p}^\times}(\beta) = \text{ord}_{\mathcal{O}_{K,q}^\times}(\beta) \mid (\text{Nm}(q)-1)/2.$$

Так как $v_2(\text{Nm}(p)-1) = v_2(\text{Nm}(q)-1)$, то имеем $\text{ord}_{\mathcal{O}_{K,p}^\times}(\beta) \mid (\text{Nm}(p)-1)/2$, а значит, $\beta^{\frac{\text{Nm}(p)-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$, что противоречит равенству $\left[\frac{\beta}{p} \right] = -1$.

Таким образом, в обоих случаях было получено противоречие, и N является простым элементом.

З а м е ч а н и е 6. По аналогии с [1] с помощью результатов разделов 2, 3 и статьи [18] можно показать, что на основе данного критерия можно предложить полиномиальный алгоритм проверки на простоту идеалов факториальных колец $\mathcal{O}_K$.

Докажем усиленный аналог критерия Эйлера.

Т е о р е м а 4. Предположим, что ERH верна. Пусть $\mathfrak{n}$ – нетривиальный идеал нечетной нормы. Тогда $\mathfrak{n}$ является простым в $\mathcal{O}_K$ тогда и только тогда, когда для любого $a \in \mathcal{O}_{K,\mathfrak{n}}^\times$, $\text{Nm}(a) \leq 12 \log^2(\Delta_K^2 \text{Nm}(\mathfrak{n}))$, выполнено сравнение

$$a^{(\text{Nm}(n)-1)/2} \equiv \left[\frac{a}{n} \right] (\text{mod } n). \quad (23)$$

Доказательство. Так как $\mathcal{O}_K$ факториально, то $\mathfrak{n}$ – главный идеал, пусть $\mathfrak{n} = (N)$. Необходимость следует из теоремы 1.

Докажем достаточность. Предположим, что $N \in \mathcal{O}_K \setminus \mathcal{O}_K^\times$ не является простым элементом нечетной нормы и для любого $a \in \mathcal{O}_{K,N}^\times$, такого что $\text{Nm}(a) \leq 12 \log^2(\Delta_K^2 \text{Nm}(N))$, выполнено

$$a^{(\text{Nm}(N)-1)/2} \equiv \left[\frac{a}{N} \right] (\text{mod } N).$$

Введем отображение $\chi: \mathcal{O}_{K,N}^\times \rightarrow \mathcal{O}_{K,N}^\times$, такое что для любого $a \in \mathcal{O}_{K,N}^\times$ выполняется

$$\chi(a) = a^{(\text{Nm}(N)-1)/2} \left[\frac{a}{N} \right].$$

Отметим, что χ является эндоморфизмом группы $\mathcal{O}_{K,N}^\times$. Из теоремы 1 следует, что χ нетривиален. Применяя утверждение 11, получаем, что существует $\alpha \in \mathcal{O}_{K,N}^\times$, такое что

$$\text{Nm}(\alpha) \leq 12 \log^2(\Delta_K^2 \text{Nm}(N)), \quad \alpha^{(\text{Nm}(N)-1)/2} \left[\frac{\alpha}{N} \right] \not\equiv 1 (\text{mod } N).$$

Получаем противоречие с предположением. Следовательно, N является простым элементом кольца $\mathcal{O}_K$.

З а м е ч а н и е 7. С помощью результатов, полученных в разделах 2, 3 и статьях [16, 18], можно показать, что на основе данного критерия можно предложить полиномиальный алгоритм проверки на простоту идеалов факториальных колец $\mathcal{O}_K$.

Благодарности. Автор выражает благодарность доценту кафедры высшей математики Белорусского государственного университета М. М. Васьковскому за ценные советы и внимание, проявленное к работе.

Acknowledgments. The author is grateful to M. M. Vaskovski, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics of Belarusian State University, for valuable advice and attention to the paper.

Список использованных источников

1. Miller, G. Riemann's Hypothesis and Tests for Primality / G. Miller // J. Comput. System Sci. – 1976. – Vol. 13, № 3. – P. 300–317. [https://doi.org/10.1016/s0022-0000\(76\)80043-8](https://doi.org/10.1016/s0022-0000(76)80043-8)
2. Bach, E. Explicit bounds for primality testing and related problems / E. Bach // Math. Comput. – 1990. – Vol. 55, № 191. – P. 355–380. <https://doi.org/10.1090/s0025-5718-1990-1023756-8>
3. Rabin, M. O. Probabilistic Algorithm for Testing Primality / M. O. Rabin // J. Number Theory. – 1980. – Vol. 12, № 1. – P. 128–138. [https://doi.org/10.1016/0022-314X\(80\)90084-0](https://doi.org/10.1016/0022-314X(80)90084-0)
4. Solovay, R. A fast Monte-Carlo test for primality / R. Solovay, S. Folker // SIAM J. Comput. – 1977. – Vol. 6, № 1. – P. 84–85. <https://doi.org/10.1137/0206006>
5. Adleman, M. L. On distinguishing prime numbers from composite numbers / L. M. Adleman, C. Pomerance, R. S. Rumely // Ann. Math. – 1983. – Vol. 117, № 1. – P. 173–206. <https://doi.org/10.2307/2006975>
6. Agrawal, M. Primes is in P. / M. Agrawal, N. Kayal, N. Saxena // Ann. Math. – 2004. – Vol. 160, № 2. – P. 781–793. <https://doi.org/10.4007/annals.2004.160.781>
7. Гекке, Э. Лекции по теории алгебраических чисел / Э. Гекке. – М.: Гостехтеоретиздат, 1940. – 260 с.
8. Dekker, T. J. Primes in quadratic fields / T. J. Dekker // CWI Quartetly – 1994. – Vol. 7. – P. 367–394.
9. Vaskouski, M. Primes in quadratic unique factorization domains / M. Vaskouski, N. Kondratyionok, N. Prochorov // J. Number Theory. – 2016. – Vol. 168. – P. 101–116. <https://doi.org/10.1016/j.jnt.2016.04.022>
10. Howe, E. W. Higher order Carmichael Numbers / E. W. Howe // Math. Comp. – 2000. – Vol. 69, № 232. – P. 1711–1719. <https://doi.org/10.1090/s0025-5718-00-01225-4>
11. Steel, G. A. Carmichael numbers in number rings / G. A. Steel // J. Number Theory. – 2008. – Vol. 128, № 4. – P. 910–917. <https://doi.org/10.1016/j.jnt.2007.08.009>
12. Dandan, H. An algorithm for computing the factor ring of an ideal in Dedekind domain with finite rank / H. Dandan, D. Yingpu // Science China Mathematics. – 2017. – Vol. 61, № 5. – P. 783–796. <https://doi.org/10.1007/s11425-016-9060-2>

13. Cohen, H. A Course in Computational Algebraic Number Theory / H. Cohen. – Springer, 1996. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-02945-9>
14. Post, E. M. Computational Algebraic Number Theory / M. E. Post. – Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1993. – 536 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8589-8>
15. Kannan, R. Polynomial Algorithms for Computing the Smith and Hermite Normal Forms of an Integer Matrix / R. Kannan, A. Bachem // SIAM J. Comput. – 1979. – Vol. 8, № 4. – P. 499–507. <https://doi.org/10.1137/0208040>
16. Lenstra, H. W. Computing Jacoby Symbols in Algebraic Number Fields / H. W. Lenstra // Nieuw Archief voor Wiskunde. – 1995. – P. 421–426.
17. Ankeny, N. C. The Least Quadratic Non Residue / N. C. Ankeny // Ann. Math. – 1952. – Vol. 55, № 1. – P. 65–72. <https://doi.org/10.2307/1969420>
18. Wikstrom, D. On the l-Ary GCD-Algorithm in Ring of Integers / D. Wikstrom. – Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. – P. 1189–1201. https://doi.org/10.1007/11523468_96

References

1. Miller G. Riemann's Hypothesis and Tests for Primality. *Journal of Computer and System Sciences*, 1976, vol. 13, no. 3, pp. 300–317. [https://doi.org/10.1016/s0022-0000\(76\)80043-8](https://doi.org/10.1016/s0022-0000(76)80043-8)
2. Bach E. Explicit bounds for primality testing and related problems. *Mathematics of Computation*, 1990, vol. 55, no. 191, pp. 355–380. <https://doi.org/10.1090/s0025-5718-1990-1023756-8>
3. Rabin M. O. Probabilistic Algorithm for Testing Primality. *Journal of Number Theory*, 1980, vol. 12, no. 1, pp. 128–138. [https://doi.org/10.1016/0022-314X\(80\)90084-0](https://doi.org/10.1016/0022-314X(80)90084-0)
4. Solovay R., Folger S. A fast Monte-Carlo test for primality. *SIAM Journal on Computing*, 1977, vol. 6, no. 1, pp. 84–85. <https://doi.org/10.1137/0206006>
5. Adleman M. L., Pomerance C., Rumely R. S. On distinguishing prime numbers from composite numbers. *Annals of Mathematics*, 1983, vol. 117, no. 1, pp. 173–206. <https://doi.org/10.2307/2006975>
6. Agrawal M., Kayal N., Saxena N. Primes in P. *Annals of Mathematics*, 2004, vol. 160, no. 2, pp. 781–793. <https://doi.org/10.4007/annals.2004.160.781>
7. Dedekind E. *Lection on theory of algebraic numbers*. Moscow, Gostekhteorizdat Publ., 1940. 260 p. (in Russian).
9. Vaskouski M., Kondratyuk N., Prochorov N. Primes in quadratic unique factorization domains. *Journal of Number Theory*, 2016, vol. 168, pp. 101–116. <https://doi.org/10.1016/j.jnt.2016.04.022>
10. Howe E. W. Higher order Carmichael Numbers. *Mathematics of Computation*, 2000, vol. 69, no. 232, pp. 1711–1719. <https://doi.org/10.1090/s0025-5718-00-01225-4>
11. Steel G. A. Carmichael numbers in number rings. *Journal of Number Theory*, 2008, vol. 128, no. 4, pp. 910–917. <https://doi.org/10.1016/j.jnt.2007.08.009>
12. Dandan Huang, Deng Yingpu. An algorithm for computing the factor ring of an ideal in Dedekind domain with finite rank. *Science China Mathematics*, 2017, vol. 61, no. 5, pp. 783–796. <https://doi.org/10.1007/s11425-016-9060-2>
13. Cohen H. A Course in Computational Algebraic Number Theory. Springer, 1996. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-02945-9>
14. Post E. M. Computational Algebraic Number Theory. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 1993. 536 pp. <https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8589-8>
15. Kannan R., Bachem A. Polynomial Algorithms for Computing the Smith and Hermite Normal Forms of an Integer Matrix. *SIAM Journal on Computing*, 1979, vol. 8, no. 4, pp. 499–507. <https://doi.org/10.1137/0208040>
16. Lenstra H. W. Computing Jacoby Symbols in Algebraic Number Fields. *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 1995, pp. 421–426.
17. Ankeny N. C. The Least Quadratic Non Residue. *Annals of Mathematics*, 1952, vol. 55, no. 1, pp. 65–72. <https://doi.org/10.2307/1969420>
18. Wikstrom D. *On the l-Ary GCD-Algorithm in Ring of Integers*. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 2005, pp. 1189–1201. https://doi.org/10.1007/11523468_96

Информация об авторе

Прохоров Николай Петрович – ассистент кафедры высшей математики, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: nprohorovmink@mail.ru

Information about the author

Nikolai P. Prochorov – Assistant of the Department of Higher Mathematics, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: nprohorovmink@mail.ru

ISSN 1561-2430 (Print)
 ISSN 2524-2415 (Online)
 УДК 004.6

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-2-157-165>

Поступила в редакцию 19.07.2019

Received 19.07.2019

А. В. Кушнеров¹, В. А. Липницкий², М. Н. Королева³

¹*Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь*

²*Военная академия Республики Беларусь, Минск, Беларусь*

³*Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь*

СВОЙСТВА И ПАРАМЕТРЫ ОБОБЩЕННЫХ КОДОВ БОУЗА – ЧОУДХУРИ – ХОКВИНГЕМА

Аннотация. Семейство линейных циклических кодов Боуза – Чоудхури – Хоквингема (БЧХ-кодов) относится к классу наиболее популярных в теории и наиболее массовых в практическом применении помехоустойчивых кодов. Их тесная связь с теорией полей Галуа позволила создать для БЧХ-кодов теорию норм синдромов – синдромных инвариантов Г-орбит ошибок, развить теорию полиномиальных инвариантов Г-орбит ошибок. Данная теория в целом послужила основой разработки эффективных перестановочных полиномиально-норменных методов и алгоритмов коррекции ошибок, на порядок снижающих влияние проблемы селектора. На сегодняшний день эти методы представляют единственный подход к коррекции ошибок непримитивными БЧХ-кодами, кратность которых выходит за пределы конструктивных границ.

Настоящая работа посвящена определению и исследованию помехоустойчивых обобщенных двоичных кодов Боуза – Чоудхури – Хоквингема (ОБЧХ-кодов). Произведена достаточно точная оценка количества этих кодов каждой конкретной длины. Установлен ряд свойств и взаимосвязей ОБЧХ-кодов. Наиболее подробно рассмотрены ОБЧХ-коды с конструктивным расстоянием три и пять, так как подобные коды чаще всего и используются на практике. Дано их практически полное описание в диапазоне длин от 7 до 107. Работа содержит достаточно четкую теоретическую классификацию ОБЧХ-кодов. Особое внимание уделено корректирующим возможностям кодов данного класса – расчету минимальных расстояний этих кодов с различными параметрами. Найдены коды, корректирующие возможности которых существенно превосходят таковые у известных БЧХ-кодов с теми же конструктивными параметрами.

Ключевые слова: помехоустойчивые коды, минимальное расстояние кода, циклотомические классы, коды Хемминга, БЧХ-коды, обобщенные БЧХ-коды

Для цитирования. Кушнеров, А. В. Свойства и параметры обобщенных кодов Боуза – Чоудхури – Хоквингема / А. В. Кушнеров, В. А. Липницкий, М. Н. Королева // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2020. – Т. 56, № 2. – С. 157–165. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-2-157-165>

Alexander V. Kushnerov¹, Valery A. Lipniski², Maria N. Korolova³

¹*Belarusian State University, Minsk, Belarus*

²*Military Academy of the Republic of Belarus Minsk, Belarus*

³*Belarusian National Technical University, Minsk, Belarus*

THE PROPERTIES AND PARAMETERS OF GENERIC BOSE – CHAUDHURI – HOCQUENGHEM CODES

Abstract. The Bose – Chaudhuri – Hocquenghem type of linear cyclic codes (BCH codes) is one of the most popular and widespread error-correcting codes. Their close connection with the theory of Galois fields gave an opportunity to create a theory of the norms of syndromes for BCH codes, namely, syndrome invariants of the G-orbits of errors, and to develop a theory of polynomial invariants of the G-orbits of errors. This theory as a whole served as the basis for the development of effective permutation polynomial-norm methods and error correction algorithms that significantly reduce the influence of the selector problem. To date, these methods represent the only approach to error correction with non-primitive BCH codes, the multiplicity of which goes beyond design boundaries.

This work is dedicated to a special error-correcting code class – generic Bose – Chaudhuri – Hocquenghem codes or simply GBCH-codes. Sufficiently accurate evaluation of the quantity of such codes in each length was produced during our work. We have investigated some properties and connections between different GBCH-codes. Special attention was devoted to codes with constructive distances of 3 and 5, as those codes are usual for practical use. Their almost complete description is given in the range of lengths from 7 to 107. The paper contains a fairly clear theoretical classification of GBCH-codes. Special attention is paid to the corrective capabilities of the codes of this class, namely, to the calculation of the minimal distances of these codes with various parameters. The codes are found whose corrective capabilities significantly exceed those of the well-known GBCH-codes with the same design parameters.

Keywords: error correcting codes, code minimal distance, reverse codes, bch codes, Hamming codes

For citation. Kushnerov A. V., Lipinski V. A., Koroliova M. N. The properties and parameters of generic Bose – Chaudhuri – Hocquenghem codes. *Vestsi Natsyional'nei akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2020, vol. 56, no. 2, pp. 157–165 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-2-157-165>

Введение. Семейство кодов Боуза – Чоудхури – Хоквингема (БЧХ-кодов) – классическое в теории помехоустойчивого кодирования – является наиболее популярным в приложениях, особенно в высокоскоростных системах передачи информации [1]. Свойства цикличности этих кодов и четкой конструктивности, возможность представления компонент синдромов ошибок как элементов поля Галуа – все это позволило развить и расширить алгебраические методы обработки названных кодов [1, 2]. Среди них – коррекция ошибок в БЧХ-кодах решением алгебраических уравнений в конечных полях. Теория норм синдромов (ТНС), последовательно применяя свойства автоморфизмов кодов, позволила предложить высокоскоростные перестановочные алгоритмы обработки БЧХ-кодов [3]. Эти алгоритмы оказались особенно эффективными для непримитивных кодов Хемминга и БЧХ, единственно возможными для коррекции в них многократных ошибок, кратность которых выходит далеко за конструктивные возможности самих кодов [4]. Логика исследования непримитивных БЧХ-кодов привела к естественному расширению класса этих кодов с сохранением их базовых свойств – к рассмотрению обобщенных БЧХ-кодов [5]. Данная работа посвящена развитию теории предложенного расширенного класса БЧХ-кодов.

Обобщенные коды Хемминга и их основные свойства. Пусть n – фиксированное нечетное число, большее 1. Пусть m – наименьшее натуральное число с условием: $2^m - 1$ делится на n : $2^m - 1 = n \cdot v$ для некоторого натурального $v \geq 1$. Пусть $GF(2^m)$ – поле Галуа из 2^m элементов с примитивным элементом α . Тогда $\beta = \alpha^v$ – элемент поля $GF(2^m)$ порядка n . Более точно, по своему построению – это корень некоторого неприводимого и непримитивного полинома $f_\beta(x)$ m -й степени и показателя n . Как известно, остальные $m - 1$ корней полинома $f_\beta(x)$ принадлежат полю $GF(2^m)$, строятся с помощью степеней автоморфизма Фробениуса $f: x \rightarrow x^2$, следовательно, они имеют вид: $\beta^2, \beta^4, \dots, \beta^{2^{m-1}}$ [6, 7]. Их принято называть сопряженными с элементом β . Зафиксируем натуральное k в диапазоне $1 \leq k \leq n - 1$. Очевидно, $\gamma = \beta^k \neq 1$. Следовательно, γ не принадлежит минимальному подполю $GF(2)$ поля $GF(2^m)$, как и сопряженный с ним элемент $\gamma^2 \neq \gamma$.

Определение 1. Обобщенным двоичным кодом Хемминга $\tilde{N}_{\chi, n}^k$ длины n называется линейный код с проверочной матрицей

$$H_{\chi, n}^k = [\beta^{ki}] = (\beta^k, \beta^{2k}, \beta^{3k}, \dots, \beta^{k(n-1)}). \quad (1)$$

Таким образом, формально, имеется $n - 1$ различных обобщенных кодов Хемминга длиной n . Покажем, что в реальности их имеется существенно меньше.

Предложение 1. В принятых выше обозначениях для сопряженных элементов γ и γ^2 обобщенные коды Хемминга длины n с проверочными матрицами $H_1 = [\gamma^i]$ и $H_2 = [\gamma^{2i}]$ совпадают.

Доказательство сводится к установлению того факта, что ядра матриц H_1 и H_2 совпадают. Введем следующее обозначение: пусть $(i_1, i_2, \dots, i_l)$ – вектор с координатами 0 и 1, у которого координаты 1 стоят на местах с номерами $i_1, i_2, \dots, i_l$. Пусть $\bar{c} = (i_1, i_2, \dots, i_l)$ – кодовое слово первого кода, т. е. вектор из ядра матрицы H_1 . Это означает, что произведение

$$H_1 \cdot \bar{c}^T = \gamma^{i_1-1} + \gamma^{i_2-1} + \dots + \gamma^{i_l-1} = 0.$$

Умножим матрицу H_2 на этот же вектор. Получим

$$H_2 \cdot \bar{c}^T = \gamma^{2(i_1-1)} + \gamma^{2(i_2-1)} + \dots + \gamma^{2(i_l-1)} = (\gamma^{i_1-1} + \gamma^{i_2-1} + \dots + \gamma^{i_l-1})^2 = 0^2 = 0,$$

что и требовалось доказать.

Следствие 1. Проверочные матрицы $H_{\chi,n}^k = [\beta^{ki}]$ и $H_{\chi,n}^l = [\beta^{li}]$ с сопряженными в поле Галуа $GF(2^m)$ элементами β^k и β^l задают один и тот же обобщенный код Хемминга.

Множество $T_\beta = \{\beta, \beta^2, \dots, \beta^{n-1}\}$ замкнуто относительно действия автоморфизма Фробениуса, а потому разбивается на непересекающиеся классы сопряженных друг с другом элементов, составляющих совокупность всех корней того или иного неприводимого над полем $GF(2)$ полинома μ -й степени, где, как правило, $\mu = n$ или же является делителем n . Отсюда вытекает

Следствие 2. Количество различных обобщенных кодов Хемминга длины n меньше, либо равно количеству N_β всех неприводимых над полем $GF(2)$ полиномов с корнями $\beta^k, 1 \leq k \leq (n-1)$.

Показатели степеней элементов из множества T_β образуют множество $T_n = \{1, 2, \dots, n-1\}$. Разбиению T_β на подмножества корней неприводимых полиномов взаимно-однозначно соответствует разбиение множества T на непересекающиеся циклотомические классы по модулю n [1], обращение с которыми проще и удобнее, чем с полиномами. Следствие 2 можно переформулировать следующим образом.

Следствие 3. Количество различных обобщенных кодов Хемминга длины n меньше, либо равно количеству N_n всех циклотомических классов по модулю n , на которые разбивается множество T_n .

Пример 1. Исследуем все возможные коды Хемминга длины 15. Эти коды определены над полем $GF(2^4)$. Зафиксируем примитивный элемент α как корень полинома $x^4 + x + 1$. Очевидно, остальными корнями этого полинома являются $\alpha^2, \alpha^4, \alpha^8$. Им соответствует циклотомический класс $C_1 = \{1, 2, 4, 8\}$. Рассмотрим обратные по умножению элементы к корням полинома $x^4 + x + 1$: $\alpha^{14}, \alpha^{13}, \alpha^{11}, \alpha^7$. Эти элементы будут корнями полинома $x^4 + x^3 + 1$. Показатели этих корней образуют циклотомический класс по модулю 15 $C_7 = \{7, 14, 13, 11\}$. Элементы α^5, α^{10} принадлежат полю $GF(2^2)$, так как они являются корнями полинома $x^2 + x + 1$. Их показатели образуют отдельный циклотомический класс $C_5 = \{5, 10\}$. Оставшиеся, пока не рассмотренные элементы поля $GF(2^4)$, — $\alpha^3, \alpha^6, \alpha^{12}, \alpha^9$ являются корнями неприводимого и непримитивного полинома 4-й степени $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. Их показатели образуют циклотомический класс $\tilde{N}_3 = \{3, 6, 12, 9\}$. Классический код Хемминга $\tilde{N}_{\chi,15}^1$ с проверочной матрицей $H_{\chi,15}^1 = [\alpha^i] = (1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{14})$ имеет минимальное расстояние 3.

Матрица

$$H_{\chi,15}^7 = [\alpha^{7i}] = (1, \alpha^7, \alpha^{14}, \alpha^6, \alpha^{13}, \alpha^5, \alpha^{12}, \alpha^4, \alpha^{11}, \alpha^3, \alpha^{10}, \alpha^2, \alpha^9, \alpha, \alpha^8)$$

получается перестановкой столбцов матрицы $H_{\chi,15}^1$, а потому задает код, эквивалентный коду $\tilde{N}_{\chi,15}^1$. Код $\tilde{N}_{\chi,15}^3$ имеет минимальное расстояние $d = 2$, так как задается проверочной матрицей

$$H_{\chi,15}^3 = [\alpha^{3i}] = (1, \alpha^3, \alpha^6, \alpha^9, \alpha^{12}, 1, \alpha^3, \alpha^6, \alpha^9, \alpha^{12}, 1, \alpha^3, \alpha^6, \alpha^9, \alpha^{12})$$

с одинаковыми столбцами. Наконец проверочная матрица кода $\tilde{N}_{\chi,15}^5$ состоит из 5 последовательных блоков по 3 столбца в каждом — $(1, \alpha^5, \alpha^{10})$, и также имеет $d = 2$. Итак, имеется 4 различных обобщенных кода Хемминга длины 15 в полном соответствии со следствиями из предложения 1.

Предложение 2. Пусть для нечетного числа $n > 1$ и целого числа k $\text{НОД}(k, n) = 1$, а циклотомический класс C_k по модулю n не совпадает с классом C_1 , но имеет ту же мощность t . Тогда обобщенный код Хемминга $\tilde{N}_{\chi,n}^k$ длины n эквивалентен коду $\tilde{N}_{\chi,n}^1$.

Доказательство. Столбцы матрицы $H_{\chi,n}^1 = [\beta^i] = (1, \beta, \beta^2, \beta^3, \dots, \beta^{n-1})$ можно рассматривать как элементы поля Галуа $GF(2^m)$. В этом качестве они образуют циклическую подгруппу $\langle \beta \rangle$ порядка n в мультипликативной группе $GF(2^m)^*$, порожденную элементом β . В таком случае столбцы матрицы (1) для каждого целого k образуют подгруппу в группе $\langle \beta \rangle$, совпадающую иногда с самой группой $\langle \beta \rangle$. Последнее происходит в случае, когда $\text{НОД}(k, n) = 1$, поскольку

здесь β^k имеет порядок n в группе $\langle \beta \rangle$. Действительно, пусть порядок β^k равен l . Согласно теореме Лагранжа о подгруппах конечных групп величина l должна быть делителем n . С другой стороны, поскольку $\beta^{kl} = 1$, то произведение kl должно делиться на n . Но, поскольку $\text{НОД}(k, n) = 1$, то l должно делиться на n (см. [7, лемма 1.4.1] или [8, гл. 1, п. 2]). Таким образом, $l = n$, что и требовалось доказать. Следовательно, матрица (1) получается перестановкой столбцов матрицы $H_{\chi,n}^1 = (1, \beta, \beta^2, \beta^3, \dots, \beta^{n-1})$, что подтверждает эквивалентность кодов $\tilde{N}_{\chi,n}^k$ и $\tilde{N}_{\chi,n}^1$.

Непримитивные коды Хемминга $\tilde{N}_{\chi,n}^1$ систематически исследованы в работе [9].

Обобщенные БЧХ-коды, основные определения и свойства. Пусть в принятых выше обозначениях целое t таково, что произведение $mt < n$. Пусть $k = n - mt$.

О п р е д е л е н и е 2. Обобщенным двоичным (n, k) -кодом БЧХ над полем Галуа $GF(2^m)$ называется линейный циклический код $C = C_n = C_n^{k_1, k_2, \dots, k_t} = C_n(k_1, k_2, \dots, k_t)$ с проверочной матрицей

$$H = H_n(k_1, k_2, \dots, k_t) = \begin{pmatrix} 1 & \beta^{k_1} & \beta^{2k_1} & \dots & \beta^{(n-1)k_1} \\ 1 & \beta^{k_2} & \beta^{2k_2} & \dots & \beta^{(n-1)k_2} \\ 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \beta^{k_t} & \beta^{2k_t} & \dots & \beta^{(n-1)k_t} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_t \leq n-1$, $\beta = \alpha^b$ для $b = (2^m - 1)/n$, предполагается, что среди степеней $\beta^{k_1}, \beta^{k_2}, \dots, \beta^{k_t}$ не имеется ни одной пары сопряженных в поле Галуа. Говорим, что данный код имеет конструктивное расстояние $\delta = 2t + 1$.

Требование отсутствия сопряженных элементов в матрице (1) связано с тем, что ранг этой матрицы должен быть максимальным – равным mt . А наличие хотя бы одной пары сопряженных в матрице (2) уменьшает этот ранг на m согласно следствию 1 из предложения 1.

Возрастающий порядок чисел $k_1, k_2, \dots, k_t$ в матрице (2) объясняется лишь вкусами авторов, их тягой к некоторой систематичности. Любое иное расположение названных чисел в матрице (2), равно как и замена какого-нибудь из них иным из того же циклотомического класса, не изменяют кода как решения однородной системы линейных уравнений $H \cdot \bar{x}^T = \bar{0}^T$. Такой порядок иногда в дальнейшем будет нарушаться, например при составлении значений в табл. 1.

В классическом, наиболее общем определении БЧХ-кода (см. [1, гл. 7, п. 7.2]) проверочная матрица состоит из кортежа строк, которые начинаются элементами $\beta^b, \beta^{b+1}, \dots$, где b – целое, $b \geq 1$. При этом говорится, что при $b = 1$ мы имеем БЧХ-код в узком смысле. Эту же терминологию сохраним и здесь: если в матрице (2) $k_1 = 1$, то говорим, что задан обобщенный БЧХ-код в узком смысле с проверочной матрицей

$$H = H_n(1, k_2, \dots, k_t) = [\beta^i, \beta^{k_2 i}, \dots, \beta^{k_t i}]^T. \quad (2')$$

Длина кортежа в определении БЧХ-кода в [1] определяется другим параметром – конструктивным расстоянием кода δ . Реально же имеются скрытые ограничения на длину кортежа – это размерность кода, наличие сопряженных среди элементов $\beta^{b+i}, 1 \leq i \leq \delta - 2$. Наличие сопряженных элементов уменьшает конструктивные размеры матрицы и увеличивает минимальное расстояние. С возникновением ТНС появились реальные возможности декодирования возрастающего количества ошибок, выходящих за конструктивные рамки. Эти обстоятельства и способствовали введению и исследованию обобщенных БЧХ-кодов (ОБЧХ-кодов). Обобщенные БЧХ-коды в узком смысле (с $k_1 = 1$) более удобны для обработки. Ниже рассмотрим условия, позволяющие привести ОБЧХ-код к обобщенному БЧХ-коду в узком смысле.

Формально при выполнении условия $mt < n$ и при разложении множества $T_n = \{1, 2, \dots, n-1\}$ в μ циклотомических классов существует C_μ^t различных обобщенных БЧХ-кодов длины n и с конструктивным расстоянием $\delta = 2t + 1$. О качестве и свойствах этих кодов мы можем судить из дальнейших, более детальных исследований.

Обобщением предложения 1 является

Предложение 3. При условии $\text{НОД}(k_1, k_2, \dots, k_t, n) > 1$ обобщенные БЧХ-коды с проверочной матрицей (2) имеют минимальное расстояние 2.

Доказательство. Пусть $\text{НОД}(k_1, k_2, \dots, k_t, n) = d > 1$ и $n = d \cdot \mu$ для некоторого целого $\mu, 1 < \mu < n$. Тогда в матрице (2) $(\mu + 1)$ -й столбец состоит из компонент $\beta^{k_1\mu} = 1, \beta^{k_2\mu} = 1, \dots, \beta^{k_t\mu} = 1$, т. е. совпадает с первым столбцом этой же матрицы. Поскольку нулевых столбцов в матрице (2) не имеется, то отсюда следует, что минимальное расстояние рассматриваемого кода с проверочной матрицей (2) равно 2, что и требовалось доказать.

Пример 2. Обобщенные БЧХ-коды длины $n = 21$ определены, как легко видеть, над полем $GF(2^6)$. Здесь множество $T_{21} = \{1, 2, \dots, 20\}$ разбивается на 5 следующих циклотомических классов:

$$C_1 = \{1, 2, 4, 8, 16, 11\}, \quad C_3 = \{3, 6, 12\}, \quad C_5 = \{5, 10, 20, 19, 17, 13\}, \quad C_7 = \{7, 14\}, \quad C_9 = \{9, 18, 15\}.$$

Следовательно, имеется $C_5^2 = 10$ различных обобщенных БЧХ-кодов длины 21 и с конструктивным расстоянием 5. Условием предложения 3 удовлетворяет обобщенный БЧХ-код $C_{21}^{3,9}$. Его проверочная матрица $H_{21}(3, 9)$ состоит из трех последовательных одинаковых блоков длины 7 следующего вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & \beta^3 & \beta^6 & \beta^9 & \beta^{12} & \beta^{15} & \beta^{18} \\ 1 & \beta^9 & \beta^{18} & \beta^6 & \beta^{15} & \beta^3 & \beta^{12} \end{pmatrix}.$$

Здесь $\beta = \alpha^3$ для примитивного элемента α поля $GF(2^6)$. Следовательно, минимальное расстояние кода $C_{21}^{3,9}$ равно 2 в полном соответствии с предложением 3.

Следующее утверждение обеспечивает условия, при которых обобщенный БЧХ-код эквивалентен обобщенному БЧХ-коду в узком смысле.

Предложение 4. Пусть в матрице (2) хотя бы для одного целого $j, 1 \leq j \leq t, \text{НОД}(k_j, n) = 1$. Тогда обобщенный БЧХ-код с проверочной матрицей (2) эквивалентен обобщенному БЧХ-коду в узком смысле.

Доказательство. Пусть для определенности $\text{НОД}(k_1, n) = 1$. Тогда для целых чисел k_1 и n выполняется соотношение Безу, т. е. существуют целые $\tilde{u}_1$ и v_1 , удовлетворяющие равенству $k_1 \cdot \tilde{u}_1 + n \cdot v_1 = 1$. Пусть u_1 – остаток от деления $\tilde{u}_1$ на натуральное число n . Тогда в силу соотношения Безу $\beta^{k_1 u_1} = \beta$. Пусть r_j – остаток от деления $k_j u_1$ на n для всех целых $j, 2 \leq j \leq t$. Тогда $(u_1 + 2)$ -й столбец матрицы (2) имеет вид $(\beta, \beta^{r_2}, \beta^{r_3}, \dots, \beta^{r_t})^T$, а $(2u_1 + 2)$ -й ее столбец будет иметь вид $(\beta^2, \beta^{2r_2}, \beta^{2r_3}, \dots, \beta^{2r_t})^T$ и т. д. Осуществим перестановку столбцов в матрице (2): $(u_1 + 2)$ -й столбец поставим на второе место, $(2u_1 + 2)$ -й ее столбец – на третье и т. д. Завершив перестановку столбцов, переставим 2-ю, 3-ю и т. д. t -ю строки полученной матрицы в порядке возрастания чисел $r_2, r_3, \dots, r_t$. В результате получим проверочную матрицу

$$H = H_n(1, r'_2, \dots, r'_t) = [\beta^i, \beta^{r'_2 i}, \dots, \beta^{r'_t i}]^T$$

обобщенного БЧХ-кода в узком смысле. Предложение 4 полностью доказано.

Следствие 4. Пусть $C(1, k) = C_n(1, k)$ – ОБЧХ-код в узком смысле длины n , с конструктивным расстоянием 5 и с условием: $\text{НОД}(k, n) = 1$. Пусть $u = k^{-1}$ в кольце Z/nZ . Тогда код $C(1, k)$ эквивалентен коду $C_n(1, u) = C_n(1, s)$, где s – наименьшее целое из циклотомического класса множества T_n , которому принадлежит u .

Пример 3. Множество $T_{31} = \{1, 2, \dots, 30\}$ разбивается на 6 следующих циклотомических классов:

$$C_1 = \{1, 2, 4, 8, 16\}, \quad C_3 = \{3, 6, 12, 24, 17\}, \quad C_5 = \{5, 10, 20, 9, 18\}, \quad C_7 = \{7, 14, 28, 25, 19\}, \\ C_{11} = \{11, 22, 13, 26, 21\}, \quad C_{15} = \{15, 30, 29, 27, 23\}.$$

Следовательно, существует $C_6^2 = 15$ различных обобщенных БЧХ-кодов длины 31 с конструктивным расстоянием 5. Из них 5 являются обобщенными БЧХ-кодами в узком смысле, 10 задаются

проверочными матрицами $H_{31}(k_1, k_2)$, где $1 < k_1 < k_2$. Согласно предложению 4 все эти 10 БЧХ-кодов должны быть эквивалентны БЧХ-кодам из первой пятерки, т. е. обобщенным БЧХ-кодам в узком смысле. Чтобы убедиться в этом, мы должны скрупулезно повторить вычисления из доказательства предложения 4. Результаты этих вычислений, а именно значения остатков r_{ij} от деления $k_2^j u_i$ для $u_i = (k_1^i)^{-1}$ в $Z/31Z$ для пар (k_1^i, k_2^j) минимальных образующих циклотомических классов $C_3, C_5, C_7, C_{11}, C_{15}$ множества $T_{31} = \{1, 2, \dots, 30\}$, сведены в табл. 1.

Таблица 1

Table 1

k_1^i	k_2^j				
	$k_2^1 = 3$	$k_2^2 = 5$	$k_2^3 = 7$	$k_2^4 = 11$	$k_2^5 = 15$
$k_1^1 = 3$	$u_1 = 21$	12	23	14	5
$k_1^2 = 5$	13	$u_2 = 25$	20	27	12
$k_1^3 = 7$	27	14	$u_3 = 9$	6	11
$k_1^4 = 11$	20	23	26	$u_4 = 17$	7
$k_1^5 = 15$	25	21	17	9	$u_5 = 29$

Из первой строки табл. 1 следует, что обобщенный БЧХ-код $C_{31}^{3,5} = C(3, 5)$ эквивалентен коду $C_{31}^{1,12} = C(1, 12)$. Поскольку число 12 принадлежит циклотомическому классу C_3 , то код $C(3, 5)$ эквивалентен коду $C(1, 3)$. Из второй строки табл. 1 следует, что код $C(3, 5)$ эквивалентен коду $C(13, 1)$. Из принадлежности числа 13 циклотомическому классу C_{11} следует эквивалентность $C(3, 5)$ и $C(1, 11)$. Из транзитивности отношения эквивалентности следует, что коды в узком смысле $C(1, 11)$ и $C(1, 3)$ также эквивалентны.

Внимательный анализ данных табл. 1 показывает, что коду $C(1, 3)$ эквивалентны также коды $C(5, 15)$, $C(7, 15)$, $C(7, 11)$, коду $C(1, 5)$ – коды $C(1, 7)$, $C(3, 11)$, $C(5, 7)$, $C(3, 15)$, $C(11, 15)$, а реверсивному коду $C(1, 15) = C(1, 30)$ эквивалентны коды $C(3, 7)$, $C(5, 11)$.

Для наглядности покажем, что коды $C(1, 5)$ и $C(1, 7)$ действительно эквивалентны. Рассмотрим проверочную матрицу кода $C(1, 5)$:

$$H_{(1,5)} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 & \alpha^4 & \alpha^5 & \alpha^6 & \alpha^7 & \alpha^8 & \alpha^9 & \alpha^{10} & \alpha^{11} & \alpha^{12} & \alpha^{13} & \alpha^{14} & \alpha^{15} \\ 1 & \alpha^5 & \alpha^{10} & \alpha^{15} & \alpha^{20} & \alpha^{25} & \alpha^{30} & \alpha^4 & \alpha^9 & \alpha^{14} & \alpha^{19} & \alpha^{24} & \alpha^{29} & \alpha^3 & \alpha^8 & \alpha^{13} \\ \alpha^{16} & \alpha^{17} & \alpha^{18} & \alpha^{19} & \alpha^{20} & \alpha^{21} & \alpha^{22} & \alpha^{23} & \alpha^{24} & \alpha^{25} & \alpha^{26} & \alpha^{27} & \alpha^{28} & \alpha^{29} & \alpha^{30} \\ \alpha^{18} & \alpha^{23} & \alpha^{28} & \alpha^2 & \alpha^7 & \alpha^{12} & \alpha^{17} & \alpha^{22} & \alpha^{27} & \alpha^6 & \alpha^{11} & \alpha^{16} & \alpha^{21} & \alpha^{26} \end{pmatrix}.$$

Мы вполне можем выполнить перестановку столбцов полученной матрицы, упорядочив их в порядке следования степеней α во второй строке. Получим следующую матрицу:

$$H'_{(1,5)} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha^{25} & \alpha^{19} & \alpha^{13} & \alpha^7 & \alpha & \alpha^{26} & \alpha^{20} & \alpha^{14} & \alpha^8 & \alpha^2 & \alpha^{27} & \alpha^{21} & \alpha^{15} & \alpha^9 & \alpha^3 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 & \alpha^4 & \alpha^5 & \alpha^6 & \alpha^7 & \alpha^8 & \alpha^9 & \alpha^{10} & \alpha^{11} & \alpha^{12} & \alpha^{13} & \alpha^{14} & \alpha^{15} \\ \alpha^{28} & \alpha^{22} & \alpha^{16} & \alpha^{10} & \alpha^4 & \alpha^{29} & \alpha^{23} & \alpha^{17} & \alpha^{11} & \alpha^5 & \alpha^{30} & \alpha^{24} & \alpha^{18} & \alpha^{12} & \alpha^6 \\ \alpha^{16} & \alpha^{17} & \alpha^{18} & \alpha^{19} & \alpha^{20} & \alpha^{21} & \alpha^{22} & \alpha^{23} & \alpha^{24} & \alpha^{25} & \alpha^{26} & \alpha^{27} & \alpha^{28} & \alpha^{29} & \alpha^{30} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, полученная матрица есть проверочная матрица кода $C(1, 25)$, который в силу принадлежности числа 25 классу C_7 немедленно отправляет нас к коду $C(1, 7)$, что и требовалось показать.

Таким образом, на длине 31 существуют лишь три различных, не эквивалентных друг другу кода с конструктивным расстоянием 5: классический БЧХ-код $C(1, 3)$, классический реверсивный

код $C(1, 30)$, а такжэ код $C(1, 5)$, который можно назвать кодом квадратично-вычетного типа, поскольку порождающие его циклотомические классы C_1, C_5 , как легко видеть, состоят из квадратичных вычетов по модулю 31.

ОБЧХ-коды с конструктивным расстоянием 5 в диапазоне длин от 9 до 107. В силу проведенных выше исследований ОБЧХ-коды $C_n(k_1, k_2)$ длины n и с конструктивным расстоянием 5 либо относятся к кодам в узком смысле (коды первого типа), либо имеют общий вид, но при условии, что $\text{НОД}(k_1, n) = d_1 > 1$, $\text{НОД}(k_2, n) = d_2 > 1$, $\text{НОД}(d_1, d_2) = 1$ (коды второго типа). Конечно, возможен случай $\text{НОД}(k_1, k_2, n) = d > 1$ (коды третьего типа), но он абсолютно не интересен с практической точки зрения, так как соответствующий ОБЧХ-код $C_n(k_1, k_2)$ имеет минимальное расстояние, равное 2, согласно предложению 3.

Все рассматриваемые в данной статье коды имеют нечетные длины. В диапазоне от 9 до 107 имеется 51 нечетная длина. Для каждой из них имеется свое поле определения – поле Галуа $GF(2^m)$ с наименьшим m таким, что $2^m - 1$ делится на m . Для 12 простых длин рассматриваемого диапазона $m = n - 1$. Это длины 11, 13, 19, 29, 37, 53, 59, 61, 67, 83, 101, 107. На этих длинах имеются только коды Хемминга размерностью $k = 1$ – самые не интересные коды. На еще четырех длинах также имеются только коды Хемминга, хотя и большей размерности. Это следующие длины: 9 ($m = 6$); 25 ($m = 20$); 27 ($m = 18$); 81 ($m = 54$). Еще для 8 длин рассматриваемого диапазона имеются БЧХ-коды с конструктивным расстоянием 5, но с размерностью $k = 1$ – также не представляющие практического интереса. Это длины 17, 23, 41, 47, 71, 79, 97, 103. Осталось 27 длин (более половины длин) с приемлемым значением m , допускающим БЧХ-коды с конструктивным расстоянием 5 и с размерностью $k > 1$. Это длины 15, 21, 31, 33, 35, 39, 43, 45, 49, 51, 55, 57, 63, 65, 69, 73, 75, 77, 85, 87, 89, 91, 93, 95, 99, 105. Для каждой из перечисленных 26 длин проведено исследование, аналогично примеру 3, всех ОБЧХ-кодов $C_n(k_1, k_2)$ и их свойств. Проведено вычисление минимальных расстояний каждого из полученных кодов с помощью комбинаторной теоремы, связанной с рангами систем столбцов проверочной матрицы (см., напр., [10, теорема 1.8]). Основные результаты вычислений приведены в табл. 2.

Таблица 2

Table 2

#	n	m	Всего кодов	Классов	$d_{C(1,3)}$	$d_{\min}$ (среди остальных)	$d_{\max}$ (среди остальных)
1	15	4	6	4	5	3	4
2	21	6	10	6	5	2	3
3	31	5	15	3	5	5	5
4	33	10	6	4	10	3	4
5	35	12	10	6	5	2	6
6	39	12	6	4	10	3	4
7	43	14	3	1	13	13	13
8	45	12	21	15	5	2	5
9	49	21	6	4	7	2	4
10	51	8	21	7	5	2	5
11	55	20	6	4	5	4	11
12	57	18	6	4	14	3	4
13	63	6	66	22	5	2	4
14	65	12	15	5	5	4	8
15	69	22	10	6	7	2	11
16	73	9	28	4	6	6	6
17	75	20	21	15	5	2	4
18	77	30	10	6	7	2	6
19	85	8	55	9	5	2	5
20	87	28	6	4	22	3	4
21	89	11	28	4	7	7	7
22	91	12	36	8	7	2	6

Окончание табл. 2

#	n	m	Всего кодов	Классов	$d C(1,3)$	$d \min$ (среди остальных)	$d \max$ (среди остальных)
23	93	10	78	26	5	2	5
24	95	36	6	4	–	4	14
25	99	30	21	15	9	2	6
26	105	12	91	45	5	2	4

Из табл. 2 следует, что на семи длинах имеются ОБЧХ-коды первого типа с наибольшим минимальным расстоянием, превосходящим минимальное расстояние классических реверсивных и БЧХ-кодов.

Заключение. Дано независимое определение двоичных обобщенных БЧХ-кодов. Изучены их свойства. Показано существование ОБЧХ-кодов практически на всех длинах, на которых существуют и классические БЧХ-коды. Найдены условия, при которых ОБЧХ-коды эквивалентны ОБЧХ-кодам в узком смысле. ОБЧХ-коды, имеющие конструктивное расстояние 5, разделены на три типа. Все они систематически исследованы в диапазоне длин от 9 до 107. Вычислены их минимальные расстояния. Показано, что примерно на трети длин существуют ОБЧХ-коды в узком смысле (первого типа), корректирующие возможности которых превосходят таковые у классических кодов. Таким образом, вводимый класс ОБЧХ-кодов предоставляет новые примеры кодов, перспективные для приложений.

Список использованных источников

1. Мак-Вильямс, Ф. Дж. Теория кодов, исправляющих ошибки: пер. с англ. / Ф. Дж. Мак-Вильямс, Н. Дж. А. Слоэн. – М.: Связь, 1979. – 744 с.
2. Блейхут, Р. Теория и практика кодов, контролируемых ошибки / Р. Блейхут. – М.: Мир, 1986. – 576 с.
3. Липницкий, В. А. Норменное декодирование помехоустойчивых кодов и алгебраические уравнения / В. А. Липницкий, В. К. Конопелько. – Минск: Изд. центр БГУ, 2007. – 216 с.
4. Липницкий, В. А. Теория норм синдромов и плюс-декодирование / В. А. Липницкий, А. О. Олексюк // Докл. БГУИР. – 2014. – № 8. – С. 71–78.
5. Кушнеров, А. В. Обобщенные коды Боуза – Чоудхури – Хоквингема / А. В. Кушнеров, В. А. Липницкий, М. Н. Королева // Вестн. Полоцк. гос. ун-та. Сер. С, Фундамент. науки. – 2018. – № 4. – С. 28–33.
6. Лидл, Р. Конечные поля: в 2 т.: пер. с англ. / Р. Лидл, Г. Нидеррайтер. – М.: Мир, 1988. – 822 с.
7. Липницкий, В. А. Современная прикладная алгебра. Математические основы защиты информации от помех и несанкционированного доступа / В. А. Липницкий. – 2-е изд. – Минск: БГУИР, 2006. – 88 с.
8. Виноградов, И. М. Основы теории чисел / И. М. Виноградов. – М.: Наука, 1972. – 168 с.
9. Липницкий, В. А. Оценка минимальных расстояний непримитивных кодов Хемминга / В. А. Липницкий, А. О. Олексюк // Вестн. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-техн. наук. – 2015. – № 2. – С. 103–110.
10. Липницкий, В. А. Теория норм синдромов / В. А. Липницкий. – Минск: БГУИР, 2011. – 96 с.

References

1. MacWilliams F. J., Sloane N. J. A. *The Theory of Error-Correcting Codes*. Elsevier Science, 1977. 744 p.
2. Blackhut R. *Theory and Practice of Error Control Codes*. Reading, MA, Addison-Wesley, 1983. 500 p.
3. Konopel'ko V. A., Lipnitskii V. A. *Norm Decoding of Error-correcting Codes and Algebraic Equations*. Minsk, BSU Publ., 2007. 216 p. (in Russian).
4. Lipnitskii V. A., Oleksiuk A. O. The theory of norms syndromes and plus-decoding. *Doklady Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta informatiki i radioelektroniki = Doklady BGUIR*, 2014, no. 8, pp 71–78 (in Russian).
5. Kushnerov A. V., Lipnitskii V. A., Korolova M. N. Generic Bose – Chaudhuri – Hocquenghem codes. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya C, Fundamental'nye nauki = Bulletin of Polotsk State University, part C, Fundamental science*, 2018, no 4, pp 28–33 (in Russian).
6. Liddle R., Niederraiter G. *Finite Fields*. Cambridge University Press, 1997. 755 p.
7. Lipnitskii V. A. *Modern Applied Algebra. Mathematical foundations of information protection from interference and unauthorized access*. Minsk, BSUIR Publ., 2005. 88 p. (in Russian).
8. Vinogradov I. M. *Fundamentals of Number Theory*. Moscow, Nauka Publ., 1972. 168 p. (in Russian).
9. Lipnitskii V. A., Oleksiuk A. O. Estimation of the minimum distances of non-primitive Hamming codes. *Vestsi Natsyonal'noi akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-technichnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physical-technical series*, 2012, no. 2, pp 103–110 (in Russian).
10. Lipnitskii V. A. *Theory of Syndrome Norms*. Minsk, BSUIR Publ., 2011. 96 p. (in Russian).

Информация об авторах

Кушнеров Александр Викторович – старший преподаватель кафедры дифференциальных уравнений и системного анализа, механико-математический факультет, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: al.v.kushnerov@gmail.com

Липницкий Валерий Антонович – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики, Военная академия Республики Беларусь (пр. Независимости, 220, 220057, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: valipnitski@yandex.by

Королева Мария Николаевна – старший преподаватель кафедры высшей математики, Белорусский национальный технический университет (пр. Независимости, 65, 220013, г. Минск, Республика Беларусь).

Information about the authors

Alexander V. Kushnerov – Senior Lecturer of the Department of Differential Equations and System Analysis, Mechanic & Mathematics Faculty, Belarussian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: al.v.kushnerov@gmail.com

Valery A. Lipinski – Dr. Sc. (Engineering), Professor, Head of the Mathematics Department, Military Academy of the Republic of Belarus (220, Nezavisimosti Ave., 220057, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: valipnitski@yandex.by

Maria N. Koroleva – Senior Lecturer of the Mathematics Department, Belarussian National Technical University (65, Nezavisimosti Ave., 220013, Minsk, Republic of Belarus).

ISSN 1561-2430 (Print)

ISSN 2524-2415 (Online)

УДК 519.6

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-2-166-174>

Поступила в редакцию 22.11.2019

Received 22.11.2019

В. Б. Малютин¹, Б. О. Нуржанов²¹*Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь*²*Каракалпакский государственный университет имени Бердаха, Нукус, Узбекистан*

КВАЗИКЛАССИЧЕСКАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Аннотация. Рассматривается квазиклассическая аппроксимация для вычисления функциональных интегралов специального вида по условной мере Винера. В этой аппроксимации используется разложение действия относительно классической траектории. При этом учитываются три первых члена разложения. Квазиклассическая аппроксимация может интерпретироваться как разложение по степеням постоянной Планка. Новизна данной работы заключается в численном анализе точности квазиклассической аппроксимации функциональных интегралов. Для численного анализа используется сравнение результатов. Одни результаты получаются с помощью квазиклассической аппроксимации, другие – с помощью метода вычисления функциональных интегралов, основанного на разложении по собственным функциям гамильтониана, порождающего функциональный интеграл.

Ключевые слова: функциональные интегралы, квазиклассическая аппроксимация, действие, классическая траектория, собственные функции гамильтониана

Для цитирования. Малютин, В. Б. Квазиклассическая аппроксимация функциональных интегралов / В. Б. Малютин, Б. О. Нуржанов // Вес. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2020. – Т. 56, № 2. – С. 166–174. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-2-166-174>

Victor B. Malyutin¹, Berdakh O. Nurjanov²¹*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus*²*Karakalpak State University named after Berdakh, Nukus, Uzbekistan*

SEMICLASSICAL APPROXIMATION OF FUNCTIONAL INTEGRALS

Abstract. In this paper, we consider a semiclassical approximation of special functional integrals with respect to the conditional Wiener measure. In this approximation we use the expansion of the action with respect to the classical trajectory. In so doing, the first three terms of expansion are taken into account. Semiclassical approximation may be interpreted as an expansion in powers of the Planck constant. The novelty of this work is the numerical analysis of the accuracy of the semiclassical approximation of functional integrals. A comparison of the results is used for numerical analysis. Some results are obtained by means of semiclassical approximation, while the other by means of the functional integrals calculation method based on the expansion in eigenfunctions of the Hamiltonian generating a functional integral.

Keywords: functional integrals, semiclassical approximation, action, classical trajectory, eigenfunctions of Hamiltonian

For citation. Malyutin V. B., Nurjanov B. O. Semiclassical approximation of functional integrals. *Vestsi Natsyional'nei akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2020, vol. 56, no. 2, pp. 166–174 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-2-166-174>

Введение. В настоящее время математическая теория функциональных интегралов является одним из важных разделов бесконечномерного анализа и применяется при построении математических моделей, которые используются в квантовой теории поля, статистической механике и стохастическом анализе. Существуют различные типы функциональных интегралов в зависимости от способа определения и области, на которой определяется функциональный интеграл. В данной работе рассматривается функциональный интеграл по условной мере Винера на пространстве функций, заданных на отрезке $[s, t]$ и удовлетворяющих условиям $x(s) = x_s$, $x(t) = x_t$. Интеграл по условной мере Винера μ_{x_s, x_t} определяется равенством

$$\int \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} \int_s^t V(x(\tau)) d\tau \right\} d\mu_{x_s, x_t}(x) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_R (n-1) \int_R \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} \sum_{j=1}^n (t_j - t_{j-1}) V(x_j) \right\} \prod_{j=1}^n K_{t_j - t_{j-1}}^0(x_{j-1}, x_j) dx_1 \dots dx_{n-1},$$

где

$$s = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t, \quad x_j = x(t_j), \quad K_{t_j - t_{j-1}}^0(x_{j-1}, x_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar(t_j - t_{j-1})}} \exp \left(-\frac{(x_j - x_{j-1})^2}{2\hbar(t_j - t_{j-1})} \right)$$

– ядро оператора $\exp \left(\frac{t}{\hbar} H_0 \right)$, $H_0 = \frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $\hbar$ – параметр, принимающий положительные вещественные значения.

Через данный функциональный интеграл с помощью формулы Фейнмана – Каца [1] представляется ядро $K_{t-s}(x_s, x_t)$ оператора эволюции $\exp \left\{ \frac{tH}{\hbar} \right\}$, $H = \frac{1}{2} \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - V(x)$, а именно:

$$K_{t-s}(x_s, x_t) = \int \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} \int_s^t V(x(\tau)) d\tau \right\} d\mu_{x_s, x_t}(x). \quad (1)$$

Зная ядро $K_{t-s}(x_s, x_t)$, мы можем вычислять средние значения физических наблюдаемых квантово-механической системы, описываемой гамильтонианом H .

Существуют различные методы для вычисления функциональных интегралов вида (1). Среди них отметим метод Монте-Карло для приближенного вычисления функциональных интегралов [2–4] и метод приближенного вычисления функциональных интегралов, основанный на использовании формул заданной степени точности [2, 5–7]. В данной работе рассматривается квазиклассическая аппроксимация для вычисления функциональных интегралов [8]. В квазиклассической аппроксимации используется разложение действия [9] относительно классической траектории, которое может интерпретироваться как разложение по степеням постоянной Планка. Новизна данной работы заключается в численном анализе точности квазиклассической аппроксимации функциональных интегралов. Для численного анализа используется сравнение результатов, полученных с помощью квазиклассической аппроксимации, а также метода вычисления функциональных интегралов, базирующегося на разложении по собственным функциям гамильтониана, порождающего функциональный интеграл. При аппроксимации функциональных интегралов, основанной на разложении по собственным функциям гамильтониана, можно оценить точность получаемых приближенных значений. Квазиклассическая аппроксимация может быть использована для достаточно широкого круга задач. Например, квазиклассическая аппроксимация применяется при вычислении функциональных интегралов, используемых в теории поля, в частности в теории гравитации. Но для оценки точности квазиклассической аппроксимации необходимо сравнение с результатами, полученными другими методами.

В разделе 1 приводится описание метода квазиклассической аппроксимации; в разделе 2 – описание метода, основанного на разложении по собственным функциям гамильтониана; в разделе 3 – результаты численного эксперимента для случая ангармонического осциллятора.

1. Квазиклассическая аппроксимация функциональных интегралов. Для вычисления функционального интеграла (1) его можно переписать в виде

$$K_{t-s}(x_s, x_t) = \int D[x] \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} \int_s^t \left[\frac{1}{2} (\dot{x}(\tau))^2 + V(x(\tau)) \right] d\tau \right\}, \quad (2)$$

где

$$D[x] = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{dx_i}{\sqrt{2\pi\hbar(t_i - t_{i-1})}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar(t_n - t_{n-1})}}.$$

Величину

$$\frac{1}{2}(\dot{x}(\tau))^2 + V(x(\tau))$$

можно рассматривать как лагранжиан системы $L(\dot{x}, x, \tau)$, а величину

$$S = \int_s^t L(\dot{x}, x, \tau) d\tau$$

– как действие. Применяя принцип наименьшего действия [9], можно из всех возможных траекторий выделить классическую траекторию $x_{\text{кл}}$, для которой действие S принимает экстремальное значение. Классическая траектория находится как решение уравнения Эйлера – Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0.$$

Далее для вычисления интеграла можно использовать разложение действия S относительно классической траектории $x_{\text{кл}}$:

$$S[x(\tau)] \approx S[x_{\text{кл}}(\tau)] + \frac{1}{2} \delta^2 S[x_{\text{кл}}(\tau)].$$

Вариацию второго порядка $\delta^2 S[x_{\text{кл}}(\tau)]$ можно записать в виде

$$\delta^2 S[x_{\text{кл}}(\tau)] = \int_{t_0}^t \delta x \Lambda \delta x d\tau,$$

где $x = x_{\text{кл}} + \delta x$,

$$\Lambda = \left(\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} \right)_{x_{\text{кл}}} + \left(\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \dot{x}} \right)_{x_{\text{кл}}} \frac{d}{dt} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x} \partial x} \right)_{x_{\text{кл}}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^2} \right)_{x_{\text{кл}}} \frac{d}{dt}.$$

Таким образом, интеграл (2) запишется в виде

$$K_{t-s}(x_s, x_t) = \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} S[x_{\text{кл}}(\tau)] \right\} \int D[y] \exp \left\{ -\frac{1}{2\hbar} \int_s^t y \Lambda y d\tau \right\}, \quad (3)$$

где интегрирование выполняется по траекториям $y = \delta x$, удовлетворяющим условиям $y(s) = 0$, $y(t) = 0$,

$$D[y] = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{dy_i}{\sqrt{2\pi\hbar(t_i - t_{i-1})}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar(t_n - t_{n-1})}}.$$

Для вычисления интеграла в (3) используем разложение

$$y = \sum_{j=1}^{\infty} a_j u_j,$$

где функции u_j являются собственными функциями оператора Λ с собственными значениями λ_j .

Тогда интеграл в (3) запишется в виде

$$K = \int D[y] \exp \left\{ -\frac{1}{2\hbar} \int_s^t y \Lambda y d\tau \right\} = J \int D[a] \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j^2 \right\}, \quad (4)$$

где J – якобиан перехода от переменной y к переменной a ,

$$D[a] = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^{n-1} da_i.$$

Так как якобиан J инвариантен относительно операторов Λ [9], то

$$K \prod_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{\frac{1}{2}} = K_{\text{free}} \prod_{j=1}^{\infty} \lambda_{\text{free},j}^{\frac{1}{2}},$$

где

$$K_{\text{free}} = J \int D[a] \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{\text{free},j} a_j^2 \right\},$$

$\lambda_{\text{free},j}$ – собственные значения оператора $\Lambda_{\text{free}} = -\frac{d^2}{dt^2}$.

Аналогично формуле (4)

$$\begin{aligned} K_{\text{free}} &= \int D[x] \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_s^t x \Lambda_{\text{free}} x d\tau \right\} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \cdots \int \prod_{i=1}^{n-1} \frac{dx_i}{\sqrt{2\pi\hbar(t_i - t_{i-1})}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar(t_n - t_{n-1})}} \exp \left\{ -\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2\hbar(t_i - t_{i-1})} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar(t-s)}}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$K = K_{\text{free}} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_{\text{free},j}^{\frac{1}{2}}}{\lambda_j^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar(t-s)}} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_{\text{free},j}^{\frac{1}{2}}}{\lambda_j^{\frac{1}{2}}}. \quad (5)$$

Таким образом, из (4), (5) следует, что интеграл (3) записывается в виде

$$K_{t-s}(x_s, x_t) = \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} S[x_{\text{кл}}(\tau)] \right\} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar(t-s)}} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_{\text{free},j}^{\frac{1}{2}}}{\lambda_j^{\frac{1}{2}}}. \quad (6)$$

В нашем случае $L(\dot{x}, x, \tau) = \frac{1}{2}(\dot{x}(\tau))^2 + V(x(\tau))$. Значит, траектория $x_{\text{кл}}$ удовлетворяет уравнению

$$\ddot{x}_{\text{кл}}(\tau) - V'(x_{\text{кл}}(\tau)) = 0. \quad (7)$$

Следовательно,

$$\int_s^t \dot{x}_{\text{кл}}^2(\tau) d\tau = \dot{x}_{\text{кл}}(t)x_{\text{кл}}(t) - \dot{x}_{\text{кл}}(s)x_{\text{кл}}(s) - \int_s^t V'(x_{\text{кл}}(\tau))x_{\text{кл}}(\tau) d\tau,$$

$$S[x_{\text{кл}}(\tau)] = \int_s^t \left(V(x_{\text{кл}}(\tau)) - \frac{1}{2} V'(x_{\text{кл}}(\tau)) x_{\text{кл}}(\tau) \right) d\tau + \frac{1}{2} (\dot{x}_{\text{кл}}(t) x_{\text{кл}}(t) - \dot{x}_{\text{кл}}(s) x_{\text{кл}}(s)). \quad (8)$$

Приближенные значения функции $x_{\text{кл}}(\tau)$, $s \leq \tau \leq t$, находим, решая уравнение (7) с помощью метода сеток для решения нелинейных граничных задач [10].

Оператор Λ в нашем случае имеет вид

$$\Lambda = V''(x_{\text{кл}}(\tau)) - \frac{d^2}{dt^2}. \quad (9)$$

Оператор $\Lambda = -\frac{d^2}{dt^2} + V''$ аппроксимируем конечно-разностным оператором с матрицей $\bar{\Lambda}$ размерности $(N-1) \times (N-1)$, получающейся в результате аппроксимации второй производной в узле t_j выражением $\Delta t^{-2}(t_{j+1} - 2t_j + t_{j-1})$,

$$\bar{\Lambda} = \frac{1}{\Delta t^2} \begin{pmatrix} 2 + \Delta t^2 V_1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 + \Delta t^2 V_2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 + \Delta t^2 V_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 + \Delta t^2 V_{N-1} \end{pmatrix},$$

где

$$V_j = V''(x_{\text{кл}}(j\Delta t)), \quad 1 \leq j \leq N-1, \quad \Delta t = \frac{t-s}{N}.$$

Оператор $\Lambda_{\text{free}} = -\frac{d^2}{dt^2}$ заменим матрицей размерности $(N-1) \times (N-1)$:

$$\bar{\Lambda}_{\text{free}} = \frac{1}{\Delta t^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\prod_{j=1}^{N-1} \lambda_j = \det \bar{\Lambda}, \quad \prod_{j=1}^{N-1} \lambda_{\text{free},j} = \det \bar{\Lambda}_{\text{free}}.$$

Таким образом, подставляя приближенные значения для $S[x_{\text{кл}}(\tau)]$ и $\prod_{j=1}^{N-1} \frac{\lambda_{\text{free},j}^{\frac{1}{2}}}{\lambda_j^{\frac{1}{2}}}$ в (6), получаем

квазиклассическую аппроксимацию функционального интеграла (1).

2. Вычисление функционального интеграла с помощью разложения по собственным функциям гамильтониана, порождающего функциональный интеграл. Чтобы оценить погрешность квазиклассической аппроксимации интеграла (1), вычислим этот интеграл с помощью другого приближенного метода.

Для вычисления интеграла используем приближенное равенство [11]

$$K_{t-s}(x_s, x_t) = \int \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} \int_s^t V(x(\tau)) d\tau \right\} d\mu_{x_s, x_t}(x) \approx \sum_{n=0}^m \psi_n(x_s) \psi_n(x_t) \exp \{ \lambda_n(t-s) \}, \quad (10)$$

где λ_n , $\psi_n(x)$ – собственные значения и собственные функции оператора $\frac{1}{\hbar} H = \frac{1}{2} \hbar \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{\hbar} V$, m – число слагаемых, которое мы выбираем в зависимости от желаемой точности вычислений.

Для вычисления λ_n , $\psi_n(x)$ рассматриваем функции $\psi_n(x)$ на интервале $-A \leq x \leq A$, A – некоторое положительное число, и оператор $\frac{1}{\hbar} H = \frac{1}{2} \hbar \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{\hbar} V$ аппроксимируем конечно-разностным оператором с матрицей $\bar{H}$ размерности $(N-1) \times (N-1)$, получающейся в результате аппроксимации второй производной в узле x_j выражением $\hbar^{-2}(x_{j+1} - 2x_j + x_{j-1})$:

$$\bar{H} = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{N-2} & c_{N-2} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{N-2} & b_{N-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\hbar^2} \begin{pmatrix} -\hbar & -\frac{1}{\hbar} \hbar^2 V_1 & \frac{\hbar}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\hbar}{2} & -\hbar & -\frac{1}{\hbar} \hbar^2 V_2 & \frac{\hbar}{2} & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\hbar}{2} & -\hbar & -\frac{1}{\hbar} \hbar^2 V_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\hbar & -\frac{1}{\hbar} \hbar^2 V_{N-1} \end{pmatrix}, \quad (11)$$

где

$$V_j = V(x_j) = V(-A + jh), \quad 1 \leq j \leq N-1, \quad h = \frac{2A}{N}.$$

Далее методом последовательностей Штурма [12] вычисляются собственные значения $\bar{\lambda}_j$ матрицы $\bar{H}$ и методом обратной итерации [12] – собственные векторы $\bar{\psi}_j$ матрицы $\bar{H}$.

3. Численные результаты. В данном разделе рассматривается численный анализ точности квазиклассической аппроксимации функциональных интегралов на примере ангармонического осциллятора, т. е. для гамильтониана $H = \frac{1}{2} \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - V(x)$ и потенциала $V(x) = \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} x^4$. Функциональный интеграл имеет вид

$$K_{t-s}(x_s, x_t) = \int \exp \left\{ -\frac{1}{2\hbar} \int_s^t (x^2(\tau) + x^4(\tau)) d\tau \right\} d\mu_{x_s, x_t}(x). \quad (12)$$

В данном случае $K_{t-s}(x_s, x_t)$ вычисляется по формуле (6), где траектория $x_{\text{кл}}$ удовлетворяет уравнению

$$\ddot{x}_{\text{кл}}(\tau) - x_{\text{кл}}(\tau) - 2x_{\text{кл}}^3(\tau) = 0,$$

$$S[x_{\text{кл}}(\tau)] = -\frac{1}{2} \int_s^t x_{\text{кл}}^4(\tau) d\tau + \frac{1}{2} (\dot{x}_{\text{кл}}(t)x_{\text{кл}}(t) - \dot{x}_{\text{кл}}(s)x_{\text{кл}}(s)).$$

Выражение

$$\prod_{j=1}^{N-1} \frac{\lambda_{\text{free},j}^{\frac{1}{2}}}{\lambda_j^{\frac{1}{2}}}$$

вычисляется при $V_j = 1 + 6x_{\text{кл}}(j\Delta t)^2$, $1 \leq j \leq N-1$, $\Delta t = \frac{t-s}{N}$.

В методе, основанном на разложении по собственным функциям гамильтониана, $K_{t-s}(x_s, x_t)$ вычисляется по формуле (10), где $\bar{\lambda}_j$ и $\bar{\Psi}_j$ – собственные значения и собственные векторы матрицы (11), $V_j = \frac{1}{2}(-A + j\hbar)^2 + \frac{1}{2}(-A + j\hbar)^4$, $1 \leq j \leq N-1$.

На рис. 1 для сравнения приведены значения интеграла (12) при $s = 0$, $t = 1$, $\hbar = 1$, $x_s = 0$, $-3 \leq x_t \leq 3$, полученные с помощью квазиклассической аппроксимации и разложения по собственным функциям гамильтониана.

На рис. 2 для сравнения приведены значения интеграла (12) при $s = 0$, $t = 1$, $\hbar = 0,1$, $x_s = 0$, $-1,5 \leq x_t \leq 1,5$, полученные с помощью квазиклассической аппроксимации и разложения по собственным функциям гамильтониана.

Из рис. 1, 2 видно, что квазиклассическая аппроксимация хорошо приближает функциональный интеграл, и не только при малых значениях $\hbar$.

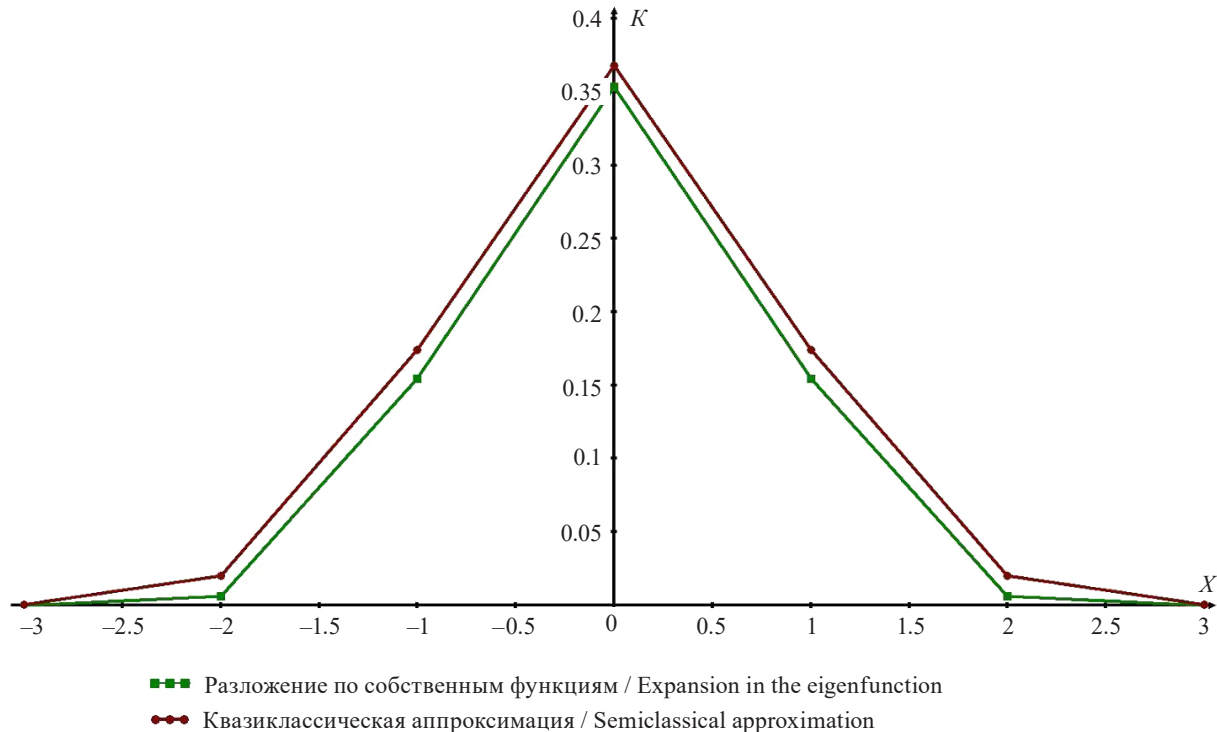


Рис. 1. Квазиклассическая аппроксимация интеграла $K_{t-s}(x_s, x_t)$ и значения интеграла, полученные разложением по собственным функциям гамильтониана: $s = 0$; $t = 1$; $\hbar = 1$; $x_s = 0$

Fig. 1. Semiclassical approximation of the integral $K_{t-s}(x_s, x_t)$ and the values of the integral, obtained by expansion in the eigenfunctions of the Hamiltonian: $s = 0$; $t = 1$; $\hbar = 1$; $x_s = 0$

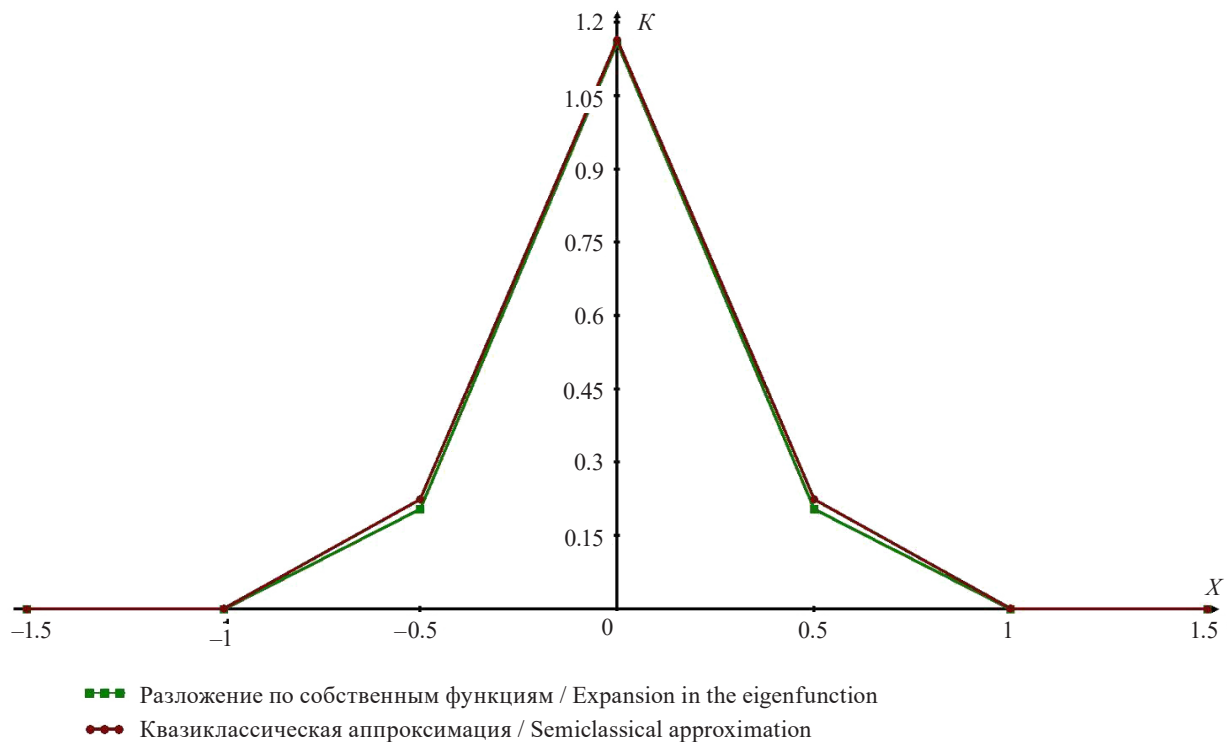


Рис. 2. Квазиклассическая аппроксимация интеграла $K_{t-s}(x_s, x_t)$ и значения интеграла, полученные разложением по собственным функциям гамильтониана: $s = 0$; $t = 1$; $\hbar = 0.1$; $x_s = 0$

Fig. 2. Semiclassical approximation of the integral $K_{t-s}(x_s, x_t)$ and the values of the integral, obtained by expansion in the eigenfunctions of the Hamiltonian: $s = 0$; $t = 1$; $\hbar = 0.1$; $x_s = 0$

Таким образом, в работе проведен численный анализ точности квазиклассической аппроксимации функциональных интегралов. Для численного анализа использовано сравнение результатов, полученных с помощью квазиклассической аппроксимации и метода вычисления функциональных интегралов, основанного на разложении по собственным функциям гамильтониана, порождающего функциональный интеграл.

Список использованных источников

1. Glimm, J. Quantum Physics. A functional integral point of view / J. Glimm, A. Jaffe. – Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1981. – 417 p.
2. Янович, Л. А. Приближенное вычисление континуальных интегралов по гауссовым мерам / Л. А. Янович. – Минск: Наука и техника, 1976. – 382 с.
3. Решение краевых задач методом Монте-Карло / Б. С. Елепов [и др.]. – Новосибирск: Наука, 1980.
4. Сабельфельд, К. К. О приближенном вычислении винеровских континуальных интегралов методом Монте-Карло / К. К. Сабельфельд // ЖВМ и МФ. – 1979. – Т. 19, № 1. – С. 29–43.
5. Егоров, А. Д. Приближенные методы вычисления континуальных интегралов / А. Д. Егоров, П. И. Соболевский, Л. А. Янович. – Минск: Наука и техника, 1985. – 309 с.
6. Egorov, A. D. Functional Integrals: Approximate Evaluation and Applications / A. D. Egorov, P. I. Sobolevsky, L. A. Yanovich. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993. – 400 p.
7. Егоров, А. Д. Введение в теорию и приложения функционального интегрирования / А. Д. Егоров, Е. П. Жидков, Ю. Ю. Лобанов. – М.: Физматлит, 2006. – 400 с.
8. Kleinert, H. Path integrals in quantum mechanics, statistics polymer physics, and financial markets / H. Kleinert. – Singapore: World Scientific Publishing, 2004. – 1504 p. <https://doi.org/10.1142/5057>
9. Feynman, R. P. Quantum mechanics and path integrals / R. P. Feynman, A. R. Hibbs. – New York: McGraw-Hill, 1965. – 365 p.
10. Крылов, В. И. Вычислительные методы высшей математики / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырский. – Минск: Выш. шк., 1975. – Т. 2. – 671 с.
11. Risken, H. The Fokker-Plank equation: methods of solution and applications / H. Risken. – Springer-Verlag, 1984. – 454 p.
12. Wilkinson, J. H. The algebraic eigenvalue problem / J. H. Wilkinson. – Oxford, 1965. – 662 p.

References

1. Glimm J., Jaffe A. *Quantum Physics. A Functional Integral Point of View*. Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1981. 417 p.
2. Yanovich L. A. *Approximate Evaluation of Continual Integrals with respect to Gaussian Measures*. Minsk, Nauka i tekhnika Publ., 1976. (in Russian).
3. Elepov B. S., Kronberg A. A., Mikhailov G. A., Sabelfeld K. K. *Solution of Boundary Value Problems by Monte-Carlo Method*. Novosibirsk, Nauka Publ., 1980. 174 p. (in Russian).
4. Sabelfeld K. K. *Approximate evaluation of Wiener continual integrals by Monte-Carlo method*. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1979, vol. 19, no. 1, pp. 29–43. [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(79\)90064-8](https://doi.org/10.1016/0041-5553(79)90064-8)
5. Egorov A. D., Sobolevsky P. I., Yanovich L. A. *Approximate Methods of Evaluation of Continual Integrals*. Minsk, Nauka i tekhnika Publ., 1985. 309 p. (in Russian).
6. Egorov A. D., Sobolevsky P. I., Yanovich L. A. *Functional integrals: Approximate evaluation and Applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. 1993. 400 p.
7. Egorov A. D., Zhidkov E. P., Lobanov Yu. Yu. *Introduction to theory and applications of functional integration*. Moscow, Fizmatlit Publ., 2006. 400 p. (in Russian).
8. Kleinert H. *Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics Polymer Physics, and Financial Markets*. Singapore, World Scientific Publishing, 2004. 1504 p. <https://doi.org/10.1142/5057>
9. Feynman R. P., Hibbs A. R. *Quantum Mechanics and Path Integrals*. New York, McGraw-Hill, 1965. 365 p.
10. Krylov V. I., Bobkov V. V., Monastyrnyi P. I. *Computational methods of higher mathematics*. Minsk, Vysheishaya shkola Publ., 1975, vol. 2. 671 p. (in Russian).
11. Risken H. *The Fokker-Plank Equation: Methods of Solution and Applications*. Springer-Verlag, 1984. 454 p.
12. Wilkinson J. H. *The Algebraic Eigenvalue Problem*. Oxford, 1965. 662 p.

Информация об авторах

Малютин Виктор Борисович – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: malyutin@im.bas-net.by

Нуржанов Бердах Орынбаевич – кандидат физико-математических наук, доцент, Каракалпакский государственный университет им. Бердаха (ул. Ч. Абдилова, 1, 230112, г. Нукус, Республика Узбекистан). E-mail: nurjanov@list.ru

Information about the authors

Victor B. Malyutin – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Principal Researcher, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: malyutin@im.bas-net.by

Berdakh O. Nurjanov – Ph. D. (Physics and Mathematics), Assistant Professor, Karakalpak State University named after Berdakh (1, Ch. Abdirov Str., 230112, Nukus, Republic of Uzbekistan). E-mail: nurjanov@list.ru

ISSN 1561-2430 (Print)

ISSN 2524-2415 (Online)

УДК 512.813.52

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-2-175-188>

Поступила в редакцию 16.11.2018

Received 16.11.2018

В. Л. Штукаръ*Могилев, Беларусь***КЛАССИФИКАЦИЯ 5-МЕРНЫХ ПОДАЛГЕБР
6-МЕРНЫХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ АЛГЕБР ЛИ**

Аннотация. Рассматривается классическая проблема классификации подалгебр алгебр Ли малой размерности. Найдены все 5-мерные подалгебры 6-мерных нильпотентных алгебр Ли над полем характеристики нуль. Как известно, с точностью до изоморфизма, все 6-мерные нильпотентные алгебры Ли были получены ранее В. В. Морозовым, их число равно 32. Однако стандартный метод, основанный на формуле Кэмпбелла – Хаусдорфа, оказался неэффективным для нахождения подалгебр алгебр Ли размерности 5 и выше. Вместо этого для нахождения 5-мерных подалгебр перечисленных 6-мерных нильпотентных алгебр Ли использован новый метод – канонические базисы.

Ключевые слова: нильпотентные алгебры Ли, подалгебры, канонические базисы

Для цитирования. Штукаръ, В. Л. Классификация 5-мерных подалгебр 6-мерных нильпотентных алгебр Ли / В. Л. Штукаръ // Вест. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2020. – Т. 56, № 2. – С. 175–188. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-2-175-188>

Uladzimir L. Shtukar*Mogilev, Belarus***CLASSIFICATION OF 5-DIMENSIONAL SUBALGEBRAS
FOR 6-DIMENSIONAL NILPOTENT LIE ALGEBRAS**

Abstract. In this paper, we consider the classical problem of the classification of subalgebras of small dimensional Lie algebras. We found all 5-dimensional subalgebras of 6-dimensional nilpotent Lie algebras under the field with the zero characteristic. As is known, up to isomorphism all 6-dimensional nilpotent Lie algebras (their number is 32) were received by V. V. Morosov. However, the standard method based on the Campbell – Hausdorff formula is not effective for the determination of subalgebras of Lie 5- or higher dimensional algebras. In our research, we use a new approach to the solution of the problem of the determination of 5-dimensional subalgebras of indicated 6-dimensional nilpotent Lie algebras, namely, the application of canonical bases for subspaces of vector spaces.

Keywords: nilpotent Lie algebras; subalgebras; canonical bases

For citation. Shtukar U. L. Classification of 5-dimensional subalgebras for 6-dimensional nilpotent Lie algebras. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2020, vol. 56, no. 2, pp. 175–188 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-2-175-188>

Классическая проблема классификации подалгебр алгебр Ли малой размерности является по-прежнему актуальной. Подалгебры 3- и 4-мерных алгебр Ли были найдены с точностью до внутренних автоморфов Дж. Патерой и П. Уинтернитцем [1]. Подалгебры алгебр Ли размерности 5 и выше ранее не рассматривались ввиду отсутствия подходящего инструмента. В настоящее время появился аппарат – канонические базисы, который позволяет найти все подалгебры в 5- и 6-мерных алгебрах Ли. Как известно, нильпотентные алгебры Ли размерности 6 были классифицированы В. В. Морозовым в [2]. Для нахождения 5-мерных подалгебр в 6-мерных нильпотентных алгебрах Ли мы воспользуемся имеющейся классификацией канонических базисов для 5-мерных подпространств 6-мерного векторного пространства из [3]. Подалгебры меньших размерностей 4, 3, и 2 для 6-мерных нильпотентных алгебр Ли будут рассмотрены отдельно из-за громоздкости вычислений. Для удобства используются в основном обозначения и терминология из статьи [2]. Дополнительно для описания подпространств и подалгебр произвольной алгебры Ли будет применяться обозначение $h = \text{Span}\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, которое означает линейную оболочку векторов $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$, а через $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$ обозначается стандартный базис лю-

бой 6-мерной алгебры Ли. Как обычно, при задании алгебр Ли выписываются только ненулевые произведения базисных векторов, а нулевые произведения опускаются.

Перечислим все 6-мерные нильпотентные алгебры Ли из работы [2]. Это 10 разложимых алгебр:

$6L_1$ (абелева), $L_3 + 3L_1$ с произведением $e_1e_2 = e_3$;

$2L_3$ с произведениями $e_1e_2 = e_3$, $e_4e_5 = e_6$;

$L_4 + 2L_1$ с произведениями $e_1e_2 = e_3$, $e_1e_3 = e_4$;

$L_5^1 + L_1$ с произведениями $e_1e_2 = e_3$, $e_1e_4 = e_5$;

$L_5^2 + L_1$ с произведениями $e_1e_2 = e_3$, $e_1e_3 = e_4$, $e_1e_4 = e_5$;

$L_5^3 + L_1$ с произведениями $e_1e_2 = e_3$, $e_1e_3 = e_4$, $e_2e_3 = e_5$;

$L_5^4 + L_1$ произведениями $e_1e_3 = e_5$, $e_2e_4 = e_5$;

$L_5^5 + L_1$ с произведениями $e_1e_3 = e_4$, $e_1e_4 = e_5$, $e_2e_3 = e_5$;

$L_5^6 + L_1$ с произведениями $e_1e_2 = e_3$, $e_1e_3 = e_4$, $e_1e_4 = e_5$, $e_2e_3 = e_5$;

и 22 неразложимые алгебры:

L_6^1 с произведениями $e_1e_2 = e_3$, $e_1e_3 = e_4$;

L_6^2 с произведениями $e_1e_2 = e_3$, $e_1e_3 = e_4$, $e_1e_4 = e_5$, $e_1e_5 = e_6$;

L_6^3 с произведениями $e_1e_2 = e_6$, $e_1e_3 = e_4$, $e_2e_3 = e_5$;

L_6^4 с произведениями $e_1e_2 = e_5$, $e_1e_3 = e_6$, $e_2e_4 = e_6$;

L_6^5 с произведениями $e_1e_3 = e_5$, $e_1e_4 = e_6$, $e_2e_4 = e_5$, $e_2e_3 = \gamma e_6$ ($\gamma \neq 0$);

L_6^6 с произведениями $e_1e_2 = e_6$, $e_1e_3 = e_4$, $e_1e_4 = e_5$, $e_2e_3 = e_5$;

L_6^7 с произведениями $e_1e_2 = e_4$, $e_1e_4 = e_5$, $e_2e_3 = e_6$;

L_6^8 с произведениями $e_1e_2 = e_3 + e_5$, $e_1e_3 = e_4$, $e_2e_5 = e_6$;

L_6^9 с произведениями $e_1e_2 = e_3$, $e_1e_3 = e_4$, $e_1e_5 = e_6$, $e_2e_3 = e_6$;

L_6^{10} с произведениями $e_1e_2 = e_3$, $e_1e_3 = e_5$, $e_1e_4 = e_6$, $e_2e_4 = e_5$, $e_2e_3 = \gamma e_6$ ($\gamma \neq 0$);

L_6^{11} с произведениями $e_1e_2 = e_3$, $e_1e_3 = e_4$, $e_1e_4 = e_5$, $e_2e_3 = e_6$;

L_6^{12} с произведениями $e_1e_3 = e_4$, $e_1e_4 = e_6$, $e_2e_5 = e_6$;

L_6^{13} с произведениями $e_1e_2 = e_5$, $e_1e_3 = e_4$, $e_1e_4 = e_6$, $e_2e_3 = e_6$;

L_6^{14} с произведениями $e_1e_3 = e_4$, $e_1e_4 = e_6$, $e_2e_3 = e_5$, $e_2e_5 = \gamma e_6$ ($\gamma \neq 0$);

L_6^{15} с произведениями $e_1e_2 = e_3 + e_5$, $e_1e_3 = e_4$, $e_1e_4 = e_6$, $e_2e_5 = e_6$;

L_6^{16} с произведениями $e_1e_2 = e_4$, $e_1e_4 = e_5$, $e_1e_5 = e_6$, $e_2e_3 = e_5$, $e_2e_4 = e_6$;

L_6^{17} с произведениями $e_1e_2 = e_3$, $e_1e_3 = e_4$, $e_1e_4 = e_6$, $e_2e_5 = e_6$;

L_6^{18} с произведениями $e_1e_2 = e_3$, $e_1e_3 = e_4$, $e_1e_4 = e_6$, $e_2e_3 = e_5$, $e_1e_5 = \gamma e_6$ ($\gamma \neq 0$);

L_6^{19} с произведениями $e_1e_2 = e_3$, $e_1e_3 = e_4$, $e_1e_4 = e_5$, $e_1e_5 = e_6$, $e_2e_3 = e_6$;

L_6^{20} с произведениями $e_1e_2 = e_3$, $e_1e_3 = e_4$, $e_1e_4 = e_5$, $e_1e_5 = e_6$, $e_2e_3 = e_5$, $e_2e_4 = e_6$;

L_6^{21} с произведениями $e_1e_2 = e_3$, $e_1e_5 = e_6$, $e_2e_3 = e_4$, $e_2e_4 = e_5$, $e_3e_4 = e_6$;

L_6^{22} с произведениями $e_1e_2 = e_3$, $e_1e_3 = e_5$, $e_1e_5 = e_6$, $e_2e_3 = e_4$, $e_2e_4 = e_5$, $e_3e_4 = e_6$.

Как видим, здесь имеются семейства алгебр Ли L_6^5 , L_6^{10} , L_6^{14} , L_6^{18} , зависящие от параметра γ , однако далее слово «семейство» будет опускаться.

Как было отмечено выше, для нахождения всех 5-мерных подалгебр 6-мерных нильпотентных алгебр Ли воспользуемся каноническими базисами. Выпишем все канонические базисы для 5-мерных подпространств 6-мерного векторного пространства, основываясь на работе [3]:

(1) $a_1 = e_1 + a_{16}e_6$, $a_2 = e_2 + a_{26}e_6$, $a_3 = e_3 + a_{36}e_6$, $a_4 = e_4 + a_{46}e_6$, $a_5 = e_5 + a_{56}e_6$;

$$(2) a_1 = e_1 + a_{15}e_5, a_2 = e_2 + a_{25}e_5, a_3 = e_3 + a_{35}e_5, a_4 = e_4 + a_{45}e_5, a_5 = e_6;$$

$$(3) a_1 = e_1 + a_{14}e_4, a_2 = e_2 + a_{24}e_4, a_3 = e_3 + a_{34}e_4, a_4 = e_5, a_5 = e_6;$$

$$(4) a_1 = e_1 + a_{13}e_3, a_2 = e_2 + a_{23}e_3, a_3 = e_4, a_4 = e_5, a_5 = e_6;$$

$$(5) a_1 = e_1 + a_{12}e_2, a_2 = e_3, a_3 = e_4, a_4 = e_5, a_5 = e_6;$$

$$(6) a_1 = e_2, a_2 = e_3, a_3 = e_4, a_4 = e_5, a_5 = e_6.$$

На самом деле, здесь записаны семейства базисов (1)–(5) и один изолированный базис (6), однако для удобства мы будем говорить просто базисы (1)–(6). Заметим, что данные базисы позволяют записать любое 5-мерное подпространство 6-мерного векторного пространства, благодаря наличию свободных компонент a_{ij} , которые могут быть выбраны подходящим образом, как это доказано в [3]. Для нахождения подалгебр заданных алгебр Ли будет использовано очевидное правило: произведение любых двух базисных векторов базиса подпространства должно принадлежать данному подпространству. Применение этого правила приводит к появлению условий для компонент a_{ij} или порождает противоречие. Отметим, что все подпространства в абелевой алгебре $6L_1$ являются ее подалгебрами, поэтому этот случай не требует отдельного рассмотрения. В описаниях подалгебр ниже будут возникать свободные переменные, поэтому это семейства подалгебр, но слово «семейство», как отмечено выше, будет опускаться.

Л е м м а 1. *Канонические базисы (5) и (6) порождают следующие 5-мерные подалгебры:*

$$h_5 = \text{Span}\{e_1 + a_{12}e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}, \quad h_6 = \text{Span}\{e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\},$$

во всех 6-мерных нильпотентных алгебрах Ли, разложимых $6L_1, L_3 + 3L_1, 2L_3, L_4 + 2L_1, L_5^i + L_1$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$), так и во всех неразложимых нильпотентных алгебрах Ли $L_6^1 - L_6^{22}$.

До к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что произведения $e_i e_j$ базисных векторов e_i и e_j выражаются в терминах векторов e_3, e_4, e_5, e_6 для всех 32 нильпотентных алгебр Ли. Отсюда следует, что произведения векторов a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 из базисов (5) и (6) лежат в подпространствах, порождаемых этими векторами. Это гарантирует, что соответствующие подпространства являются подалгебрами во всех заданных алгебрах Ли. При этом никакие ограничения на компоненты векторов a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 не возникают. Лемма 1 доказана.

Таким образом, далее достаточно рассматривать данные нильпотентные алгебры Ли по отношению к базисам (1)–(4).

Л е м м а 2. *Канонический базис (4) порождает 5-мерную подалгебру*

$$h_4 = \text{Span}\{e_1 + a_{13}e_3, e_2 + a_{23}e_3, e_4, e_5, e_6\}$$

в 6-мерных разложимых нильпотентных алгебрах Ли $6L_1, L_5^4 + L_1, L_5^5 + L_1$. Этот базис не порождает никакие 5-мерные подалгебры в остальных разложимых 6-мерных нильпотентных алгебрах Ли.

До к а з а т е л ь с т в о. Утверждение очевидно для абелевой алгебры $6L_1$. Для алгебр $L_5^4 + L_1$ и $L_5^5 + L_1$ произведения базисных векторов выражаются в терминах векторов e_4, e_5, e_6 , и поэтому принадлежат соответствующим подпространствам, которые образуют подалгебры этих алгебр. В качестве примера для остальных случаев рассмотрим алгебру $L_5^6 + L_1$. Для произведения $a_1 a_2$ имеем

$$a_1 a_2 = (e_1 + a_{13}e_3)(e_2 + a_{23}e_3) = e_3 - a_{13}e_4 = x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + x_4 a_4 + x_5 a_5.$$

Отсюда следует: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = a_{13}, x_5 = 0$, поэтому $e_3 = 0$, что невозможно. Это означает, что не существует подалгебр в алгебре $L_5^6 + L_1$, порождаемых базисом (4). Аналогичная ситуация возникает для алгебр $L_3 + 3L_1, 2L_3, L_4 + 2L_1, L_5^1 + L_1, L_5^2 + L_1, L_5^3 + L_1$. Лемма 2 доказана.

Л е м м а 3. *Канонический базис (3) порождает 5-мерную подалгебру*

$$h_3 = \text{Span}\{e_1 + a_{14}e_4, e_2 + a_{24}e_4, e_3 + a_{34}e_4, e_5, e_6\}$$

в алгебрах $6L_1, L_5^4 + L_1$ и подалгебру

$$h_3^1 = \text{Span}\{e_1 + a_{14}e_4, e_2 + a_{24}e_4, e_3, e_5, e_6\}$$

в алгебрах $L_3 + 3L_1$, $2L_3$, $L_5^1 + L_1$. Этот базис не порождает никакие подалгебры в остальных разложимых 6-мерных нильпотентных алгебрах Ли.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение очевидно для абелевой алгебры $6L_1$. Для алгебры произведения базисных векторов выражаются в терминах векторов e_5 , e_6 или являются нулевыми, поэтому они принадлежат соответствующему подпространству h_3 , которое образует подалгебру в ней. В качестве примера для случаев $L_3 + 3L_1$, $2L_3$, $L_5^1 + L_1$ рассмотрим только алгебру $L_5^1 + L_1$. Имеем

$$a_1a_2 = (e_1 + a_{14}e_4)(e_2 + a_{24}e_4) = e_3 + a_{24}e_5 = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4 + x_5a_5.$$

Отсюда следует: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = a_{24}$, $x_5 = 0$, поэтому $a_{34} = 0$. Остальные произведения базисных векторов принадлежат данному подпространству, без ограничений на компоненты базисных векторов. Это означает, что получена подалгебра h_3^1 .

Среди остальных алгебр рассмотрим в качестве примера алгебру $L_5^2 + L_1$. Критически важным здесь является произведение a_1a_3 . Имеем

$$a_1a_3 = (e_1 + a_{14}e_4)(e_3 + a_{34}e_4) = e_4 + a_{34}e_5 = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4 + x_5a_5.$$

Отсюда следует: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = a_{34}$, $x_5 = 0$, поэтому $e_4 = 0$, что невозможно. Это означает, что не существует подалгебр в алгебре $L_5^2 + L_1$, порождаемых базисом (3). Аналогичная ситуация возникает для алгебр $L_4 + 2L_1$, $L_5^3 + L_1$, $L_5^5 + L_1$, $L_5^6 + L_1$. Лемма 3 доказана.

Леммы 1–3 позволяют ограничиться далее базисами (1) и (2) для анализа разложимых нильпотентных 6-мерных алгебр Ли.

Алгебра $L_3 + 3L_1$ с произведением $e_1e_2 = e_3$.

Базис (1). Имеем

$$a_1a_2 = (e_1 + a_{16}e_6)(e_2 + a_{26}e_6) = e_3 = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4 + x_5a_5.$$

Это равенство отражает требование принадлежности произведения векторов a_1a_2 данному подпространству. Отсюда следует: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$. Значит, $a_{36} = 0$. Все остальные произведения векторов a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , a_5 являются нулевыми, т. е. принадлежат данному подпространству. Следовательно, это подпространство является подалгеброй в $L_3 + 3L_1$. Итак, получена подалгебра

$$h_1^1 = \text{Span}\{e_1 + a_{16}e_6, e_2 + a_{26}e_6, e_3, e_4 + a_{46}e_6, e_5 + a_{56}e_6\}.$$

Базис (2). Имеем

$$a_1a_2 = (e_1 + a_{15}e_5)(e_2 + a_{25}e_5) = e_3 = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4 + x_5a_5.$$

Отсюда следует: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, поэтому $a_{35} = 0$. Все остальные произведения векторов a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , a_5 являются нулевыми, т. е. принадлежат этому подпространству. Итак, получена следующая подалгебра:

$$h_2^1 = \text{Span}\{e_1 + a_{15}e_5, e_2 + a_{25}e_5, e_3, e_4 + a_{45}e_5, e_6\}.$$

Алгебра $2L_3$ с произведениями $e_1e_2 = e_3$, $e_4e_5 = e_6$.

Базис (1). Критически важным здесь является произведение a_4a_5 . Имеем

$$a_4a_5 = (e_4 + a_{46}e_6)(e_5 + a_{56}e_6) = e_6 = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4 + x_5a_5.$$

Отсюда: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, поэтому $e_6 = 0$, что невозможно. Значит, подалгебры, порождаемые базисом (1), не существуют.

Базис (2). Имеем

$$a_1a_2 = (e_1 + a_{15}e_5)(e_2 + a_{25}e_5) = e_3 = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4 + x_5a_5.$$

Отсюда следует: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, поэтому $a_{35} = 0$. Все остальные произведения векторов a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , a_5 принадлежат этому подпространству: $a_1a_3 = 0$, $a_1a_4 = -a_{15}e_6$, $a_2a_4 = -a_{25}e_6$, $a_3a_4 = -a_{35}$ и т. д. Итак, получена следующая подалгебра:

$$h_2^1 = \text{Span}\{e_1 + a_{15}e_5, e_2 + a_{25}e_5, e_3, e_4 + a_{45}e_5, e_6\}.$$

Алгебра $L_4 + 2L_1$ с произведениями $e_1e_2 = e_3$, $e_1e_3 = e_4$.

Базис (1). Имеем

$$a_1a_2 = (e_1 + a_{16}e_6)(e_2 + a_{26}e_6) = e_3 = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4 + x_5a_5.$$

Отсюда следует: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$. Значит, $a_{36} = 0$. Далее,

$$a_1a_3 = (e_1 + a_{16}e_6)(e_3 + a_{36}e_6) = e_4 = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4 + x_5a_5.$$

Отсюда следует: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 0$, поэтому $a_{46} = 0$. Остальные произведения векторов a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , a_5 принадлежат подпространству, и они не накладывают никаких ограничений на компоненты этих векторов. Итак, получена подалгебра

$$h_1^2 = \text{Span}\{e_1 + a_{16}e_6, e_2 + a_{26}e_6, e_3, e_4, e_5 + a_{56}e_6\}.$$

Базис (2). Имеем

$$a_1a_2 = (e_1 + a_{15}e_5)(e_2 + a_{25}e_5) = e_3 = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4 + x_5a_5.$$

Отсюда следует: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, поэтому $a_{35} = 0$. Далее,

$$a_1a_3 = (e_1 + a_{15}e_5)(e_3 + a_{35}e_5) = e_4 = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4 + x_5a_5.$$

Отсюда следует: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 0$, поэтому $a_{45} = 0$. Остальные произведения векторов a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , a_5 принадлежат этому подпространству, и они не накладывают никаких ограничений на компоненты этих векторов. Итак, получена подалгебра

$$h_2^2 = \text{Span}\{e_1 + a_{15}e_5, e_2 + a_{25}e_5, e_3, e_4, e_6\}.$$

Алгебра $L_5^1 + L_1$ с произведениями $e_1e_2 = e_3$, $e_1e_4 = e_5$.

Базис (1). Имеем

$$a_1a_2 = (e_1 + a_{16}e_6)(e_2 + a_{26}e_6) = e_3 = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4 + x_5a_5.$$

Отсюда следует: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$. Значит, $a_{36} = 0$. Далее,

$$a_1a_4 = (e_1 + a_{16}e_6)(e_4 + a_{46}e_6) = e_5 = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4 + x_5a_5.$$

Отсюда следует: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 1$, поэтому $a_{56} = 0$. Остальные произведения базисных векторов являются нулевыми, они не накладывают никаких ограничений на компоненты векторов базиса. Итак, получена подалгебра

$$h_1^3 = \text{Span}\{e_1 + a_{16}e_6, e_2 + a_{26}e_6, e_3, e_4 + a_{46}e_6, e_5\}.$$

Базис (2). Критически важным здесь является произведение a_1a_4 . Имеем

$$a_1a_4 = (e_1 + a_{15}e_1)(e_4 + a_{45}e_5) = e_5 = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4 + x_5a_5.$$

Отсюда следует: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, поэтому $e_5 = 0$, что невозможно. Это означает, что не существует подалгебр в алгебре $L_5^1 + L_1$, порождаемых базисом (2).**Алгебра $L_5^2 + L_1$ с произведениями $e_1e_2 = e_3$, $e_1e_3 = e_4$, $e_1e_4 = e_5$.**

Базис (1). Имеем

$$a_1a_2 = (e_1 + a_{16}e_6)(e_2 + a_{26}e_6) = e_3 = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4 + x_5a_5.$$

Отсюда следует: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$. Значит, $a_{36} = 0$. Далее,

$$a_1a_3 = (e_1 + a_{16}e_6)(e_3 + a_{36}e_6) = e_4 = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4 + x_5a_5.$$

Отсюда следует: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 0$, поэтому $a_{46} = 0$. Далее,

$$a_1a_4 = (e_1 + a_{16}e_6)(e_4 + a_{46}e_6) = e_5 = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4 + x_5a_5.$$

Отсюда следует: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 1$, поэтому $a_{56} = 0$. Остальные произведения векторов a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , a_5 являются нулевыми, они не накладывают никаких ограничений на компоненты этих векторов. Итак, получена подалгебра

$$h_1^4 = \text{Span}\{e_1 + a_{16}e_6, e_2 + a_{26}e_6, e_3, e_4, e_5\}.$$

Базис (2). Критически важным здесь является произведение a_1a_4 . Имеем

$$a_1a_4 = (e_1 + a_{15}e_5)(e_4 + a_{45}e_5) = e_5 = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4 + x_5a_5.$$

Отсюда следует: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0$, поэтому $e_5 = 0$, что невозможно. Это означает, что не существует подалгебр в алгебре $L_5^2 + L_1$, порождаемых базисом (2).

Алгебра $L_5^3 + L_1$ с произведениями $e_1e_2 = e_3, e_1e_3 = e_4, e_2e_3 = e_5$.

Базис (1). Имеем

$$a_1a_2 = (e_1 + a_{16}e_6)(e_2 + a_{26}e_6) = e_3 = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4 + x_5a_5.$$

Отсюда следует: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 0$. Значит, $a_{36} = 0$. Далее,

$$a_1a_3 = (e_1 + a_{16}e_6)(e_3 + a_{36}e_6) = e_4 = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4 + x_5a_5.$$

Отсюда следует: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0$, поэтому $a_{46} = 0$. Далее важно проверить произведение a_2a_3 . Имеем

$$(e_2 + a_{26}e_6)(e_3 + a_{36}e_6) = e_5 = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4 + x_5a_5.$$

Отсюда следует: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1$, поэтому $a_{56} = 0$. Остальные произведения векторов a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 являются нулевыми, они не накладывают никаких ограничений на компоненты этих векторов. Итак, получена подалгебра

$$h_1^4 = \text{Span}\{e_1 + a_{16}e_6, e_2 + a_{26}e_6, e_3, e_4, e_5\}.$$

Базис (2). Критически важным здесь является произведение a_2a_3 . Имеем

$$a_2a_3 = (e_2 + a_{25}e_5)(e_3 + a_{35}e_5) = e_5 = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4 + x_5a_5.$$

Отсюда следует: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0$, поэтому $e_5 = 0$, что невозможно. Это означает, что не существует подалгебр в алгебре $L_5^3 + L_1$, порождаемых базисом (2).

Алгебра $L_5^4 + L_1$ с произведениями $e_1e_3 = e_5, e_2e_4 = e_5$.

Базис (1). Имеем

$$a_1a_3 = (e_1 + a_{16}e_6)(e_3 + a_{36}e_6) = e_5 = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4 + x_5a_5.$$

Отсюда следует: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1$, поэтому $a_{56} = 0$. Далее, важно проверить произведение a_2a_4 . Имеем

$$a_2a_4 = (e_2 + a_{26}e_6)(e_4 + a_{46}e_6) = e_5 = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4 + x_5a_5.$$

Отсюда следует: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1$, поэтому вновь $a_{56} = 0$. Остальные произведения векторов a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 являются нулевыми, они не накладывают никаких ограничений на компоненты этих векторов. Итак, получена подалгебра

$$h_1^5 = \text{Span}\{e_1 + a_{16}e_6, e_2 + a_{26}e_6, e_3 + a_{36}e_6, e_4 + a_{46}e_6, e_5\}.$$

Базис (2). Имеем

$$a_1a_3 = (e_1 + a_{15}e_5)(e_3 + a_{35}e_5) = e_5 = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4 + x_5a_5.$$

Отсюда следует: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0$, поэтому $e_5 = 0$, что невозможно. Это означает, что не существует подалгебр в алгебре $L_5^4 + L_1$, порождаемых базисом (2).

Алгебра $L_5^5 + L_1$ с произведениями $e_1e_3 = e_4, e_1e_4 = e_5, e_2e_3 = e_5$.

Базис (1). Имеем

$$a_1a_3 = (e_1 + a_{16}e_6)(e_3 + a_{36}e_6) = e_4 = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4 + x_5a_5.$$

Отсюда следует: $x_1 = 0, x_2 = 0$, поэтому $a_{46} = 0$. Далее проверяем произведение a_1a_4 . Имеем

$$a_1a_4 = (e_1 + a_{16}e_6)(e_4 + a_{46}e_6) = e_5 = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4 + x_5a_5.$$

Отсюда следует: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1$, поэтому $a_{56} = 0$. Проверим также произведение a_2a_3 . Имеем

$$a_2a_3 = (e_2 + a_{26}e_6)(e_3 + a_{36}e_6) = e_5 = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4 + x_5a_5.$$

Отсюда следует: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1$, поэтому $a_{56} = 0$. Остальные произведения векторов a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 являются нулевыми, они не накладывают никаких ограничений на компоненты этих векторов. Итак, получена подалгебра

$$h_1^6 = \text{Span}\{e_1 + a_{16}e_6, e_2 + a_{26}e_6, e_3 + a_{36}e_6, e_4, e_5\}.$$

Базис (2). Имеем

$$a_1a_4 = (e_1 + a_{15}e_5)(e_4 + a_{45}e_5) = e_5 = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4 + x_5a_5.$$

Отсюда следует: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0$, поэтому $e_5 = 0$, что невозможно. Это означает, что не существует подалгебр в алгебре $L_5^5 + L_1$, порождаемых базисом (2).

Алгебра $L_5^6 + L_1$ с произведениями $e_1e_2 = e_3, e_1e_3 = e_4, e_1e_4 = e_5, e_2e_3 = e_5$.

Базис (1). Имеем

$$a_1a_2 = (e_1 + a_{16}e_6)(e_2 + a_{26}e_6) = e_3 = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4 + x_5a_5.$$

Отсюда следует: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 0$. Значит, $a_{36} = 0$. Далее, имеем

$$a_1a_3 = (e_1 + a_{16}e_6)(e_3 + a_{36}e_6) = e_4 = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4 + x_5a_5.$$

Отсюда следует: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0$, поэтому $a_{46} = 0$. Далее проверяем произведение a_1a_4 . Имеем

$$a_1a_4 = (e_1 + a_{16}e_6)(e_4 + a_{46}e_6) = e_5 = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4e_4 + x_5a_5.$$

Отсюда имеем: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1$, поэтому $a_{56} = 0$. Проверим также произведение a_2a_3 . Имеем

$$a_2a_3 = (e_2 + a_{26}e_6)(e_3 + a_{36}e_6) = e_5 = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4 + x_5a_5.$$

Отсюда имеем: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1$, поэтому $a_{56} = 0$. Остальные произведения векторов a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 являются нулевыми, они не накладывают никаких ограничений на компоненты этих векторов. Итак, следующее подпространство является подалгеброй в алгебрах $L_5^6 + L_1$ и $L_5^3 + L_1$:

$$h_1^4 = \text{Span}\{e_1 + a_{16}e_6, e_2 + a_{26}e_6, e_3, e_4, e_5\}.$$

Базис (2). Имеем

$$a_1a_4 = (e_1 + a_{15}e_5)(e_4 + a_{45}e_5) = e_5 = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4 + x_5a_5.$$

Отсюда следует: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0$, поэтому $e_5 = 0$, что невозможно. Это означает, что не существует подалгебр в алгебре $L_5^6 + L_1$, порождаемых базисом (2).

1. Неразложимые 6-мерные нильпотентные алгебры Ли.

Лемма 4. Базис (1) не порождает никакие 5-мерные подалгебры во всех алгебрах $L_6^1 - L_6^{22}$.

Доказательство. Каждая алгебра Ли $L_6^1 - L_6^{22}$ имеет произведение базисных векторов, равное e_6 , например, $e_1e_5 = e_6$ в L_6^1 и L_6^2 , $e_1e_2 = e_6$ в L_6^3 , $e_1e_3 = e_6$ в L_6^4 и т. д. Однако вектор e_6 не может быть записан как линейная комбинация векторов a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 из базиса (1). Предположим, напротив, что вектор e_6 есть линейная комбинация a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 :

$$e_6 = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4 + x_5a_5.$$

Тогда

$$x_1e_1 + x_2a_2 + x_3e_3 + x_4e_4 + x_5e_5 + (x_1a_{16} + x_2a_{26} + x_3a_{36} + x_4a_{46} + x_5a_{56} - 1)e_6 = 0.$$

Отсюда имеем: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0$, поэтому $e_6 = 0$, что невозможно, так как e_6 является вектором стандартного базиса. Лемма 4 доказана.

Л е м м а 5. Базис (4) порождает подалгебру

$$h_4 = \text{Span}\{e_1 + a_{13}e_3, e_2 + a_{23}e_3, e_4, e_5, e_6\}$$

в неразложимых алгебрах $L_6^3, L_6^4, L_6^5, L_6^6, L_6^7, L_6^{12}, L_6^{13}, L_6^{14}, L_6^{16}$. Данный базис (4) не порождает никакие подалгебры в остальных неразложимых 6-мерных нильпотентных алгебрах Ли.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим алгебру L_6^3 . Имеем

$$a_1a_2 = (e_1 + a_{13}e_3)(e_2 + a_{23}e_3) = e_6 + a_{23}e_4 - a_{13}e_5,$$

поэтому произведение a_1a_2 принадлежит подпространству, порожденному базисом (4). Аналогично остальные произведения базисных векторов a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 принадлежат этому подпространству. Следовательно, получена подалгебра h_4 в L_6^3 . Для остальных перечисленных неразложимых алгебр Ли ситуация аналогична алгебре L_6^3 .

В качестве примера алгебр, не имеющих подалгебр, порожденных базисом (4), рассмотрим алгебру L_6^1 . Для произведения a_1a_2 имеем

$$a_1a_2 = (e_1 + a_{13}e_3)(e_2 + a_{23}e_3) = e_3 + a_{23}e_4 = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4 + x_5a_5.$$

Отсюда следует: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = a_{23}, x_4 = 0, x_5 = 0$, поэтому $e_3 = 0$, что невозможно. Это означает, что не существует подалгебр в алгебре L_6^1 , порождаемых базисом (4).

Рассмотрим также алгебру L_6^{10} как дополнительный пример. Имеем

$$a_1a_2 = (e_1 + a_{13}e_3)(e_2 + a_{23}e_3) = e_3 + a_{23}e_5 - a_{13}e_6 = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4 + x_5a_5.$$

Отсюда следует: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = a_{23}, x_5 = -a_{13}$, поэтому $e_3 = 0$, что невозможно. Это означает, что не существует подалгебр в L_6^{10} , порожденных базисом (4). Лемма 5 доказана.

Согласно леммам 1, 4 и 5 далее достаточно проверить только базисы (2) и (3) для алгебр $L_6^1 - L_6^{22}$.

Алгебра L_6^1 с произведениями $e_1e_2 = e_3, e_1e_3 = e_4, e_1e_5 = e_6$.

Базис (2). Имеем

$$a_1a_2 = (e_1 + a_{15}e_5)(e_2 + a_{25}e_5) = e_3 + a_{25}e_6 = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4 + x_5a_5.$$

Отсюда следует: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = a_{25}$, поэтому $a_{35} = 0$. Далее,

$$a_1a_3 = (e_1 + a_{15}e_5)(e_3 + a_{35}e_5) = e_4 + a_{35}e_6 = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4 + x_5a_5.$$

Отсюда следует: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = a_{35}$, поэтому $a_{45} = 0$. Остальные произведения векторов a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 принадлежат подпространству и не накладывают никаких ограничений на компоненты этих векторов. Итак, получена подалгебра

$$h_2^1 = \text{Span}\{e_1 + a_{15}e_5, e_2 + a_{25}e_5, e_3, e_4, e_6\}.$$

Базис (3). Имеем

$$a_1a_3 = (e_1 + a_{14}e_4)(e_3 + a_{34}e_4) = e_4 = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4 + x_5a_5.$$

Отсюда следует: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0$, поэтому $e_4 = 0$, что невозможно. Это означает, что не существует подалгебр в алгебре L_6^1 , порождаемых базисом (3).

Алгебра L_6^2 с произведениями $e_1e_2 = e_3, e_1e_3 = e_4, e_1e_4 = e_5, e_1e_5 = e_6$.

Базис (2). Имеем $a_{35} = 0$ из произведения $a_1a_2, a_{45} = 0$ из произведения a_1a_3 . Проверим произведение a_1a_4 . Имеем

$$a_1a_4 = (e_1 + a_{15}e_5)(e_4 + a_{45}e_5) = e_5 + a_{45}e_6 = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4 + x_5a_5.$$

Отсюда: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = a_{45}$, поэтому $e_5 = 0$, что невозможно. Это означает, что не существует подалгебр в алгебре L_6^2 , порождаемых базисом (2).

Базис (3) не порождает никаких подалгебр в алгебре L_6^2 . Этот случай аналогичен предыдущему случаю для базиса (2).

Алгебра L_6^3 с произведениями $e_1e_2 = e_6, e_1e_3 = e_4, e_2e_3 = e_5$.

Базис (2). Имеем

$$a_1a_2 = (e_1 + a_{15}e_5)(e_2 + a_{25}e_5) = e_6 = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3e_3 + x_4a_4 + x_5a_5.$$

Отсюда следует: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 1$, поэтому произведение $a_1 a_2$ принадлежит подпространству. Далее,

$$a_2 a_3 = (e_2 + a_{25} e_5)(e_3 + a_{35} e_5) = e_5 = x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 e_3 + x_4 a_4 + x_5 a_5.$$

Отсюда следует: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0$, поэтому $e_5 = 0$, что невозможно. Это означает, что не существует подалгебры в L_6^3 , порожденной базисом (2).

Базис (3). Имеем

$$a_1 a_2 = (e_1 + a_{14} e_4)(e_3 + a_{34} e_4) = e_4 = x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + x_4 a_4 + x_5 a_5.$$

Отсюда следует: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0$, поэтому $e_4 = 0$, что невозможно. Это означает, что не существует подалгебры в L_6^3 , порожденной базисом (3).

Алгебра L_6^4 с произведениями $e_1 e_2 = e_5, e_1 e_3 = e_6, e_2 e_4 = e_6$.

Базис (2). Имеем

$$a_1 a_2 = (e_1 + a_{15} e_5)(e_2 + a_{25} e_5) = e_5 = x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + x_4 a_4 + x_5 a_5.$$

Отсюда следует: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0$, поэтому $e_5 = 0$, что невозможно. Это означает, что не существует подалгебры в L_6^4 , порожденной базисом (2).

Базис (3). Имеем

$$a_1 a_2 = (e_1 + a_{14} e_4)(e_2 + a_{24} e_4) = e_5.$$

Значит, произведение $a_1 a_2$ принадлежит подпространству, порожденному базисом (3). Аналогично остальные произведения векторов a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 также принадлежат этому подпространству (без ограничений на их компоненты). Следовательно, получена подалгебра

$$h_3 = \text{Span}\{e_1, a_{14} e_4, e_2 + a_{24} e_4, e_3 + a_{34} e_4, e_5, e_6\}.$$

Алгебра L_6^5 с произведениями $e_1 e_3 = e_5, e_1 e_4 = e_6, e_2 e_4 = e_5, e_2 e_3 = \gamma e_6$.

Базис (2). Имеем

$$a_1 a_2 = (e_1 + a_{15} e_5)(e_3 + a_{35} e_5) = e_5 = x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + x_4 a_4 + x_5 a_5.$$

Отсюда следует: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0$, поэтому $e_5 = 0$, что невозможно. Это означает, что не существует подалгебры в L_6^5 , порожденной базисом (2).

Базис (3). Все произведения векторов a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 в данном случае принадлежат подпространству, порожденному этим базисом. Следовательно, получена подалгебра

$$h_3 = \text{Span}\{e_1 + a_{14} e_4, e_2 + a_{24} e_4, e_3 + a_{34} e_4, e_5, e_6\}.$$

Алгебра L_6^6 с произведениями $e_1 e_2 = e_6, e_1 e_3 = e_4, e_1 e_4 = e_5, e_2 e_3 = e_5$.

Базис (2). Имеем

$$a_1 a_4 = (e_1 + a_{15} e_5)(e_4 + a_{45} e_5) = e_5 = x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + x_4 a_4 + x_5 a_5.$$

Отсюда следует: $x_1, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0$, поэтому $e_5 = 0$, что невозможно. Это означает, что не существует подалгебр в L_6^6 , порожденных базисом (2).

Базис (3). Имеем

$$a_1 a_3 = (e_1 + a_{14} e_4)(e_3 + a_{34} e_4) = e_4 = x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + x_4 a_4 + x_5 a_5.$$

Отсюда следует: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0$, поэтому $e_4 = 0$, что невозможно. Это означает, что не существует подалгебры в L_6^6 , порожденной базисом (3).

Алгебра L_6^7 с произведениями $e_1 e_3 = e_4, e_1 e_4 = e_5, e_2 e_3 = e_6$.

Базис (2). Имеем

$$a_1 a_4 = (e_1 + a_{15} e_5)(e_4 + a_{45} e_5) = e_5 = x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + x_4 a_4 + x_5 a_5.$$

Отсюда следует: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0$, поэтому $e_5 = 0$, что невозможно. Это означает, что не существует подалгебр в L_6^7 , порожденных базисом (2).

Базис (3). Имеем

$$a_1a_3 = (e_1 + a_{14}e_4)(e_3 + a_{34}e_4) = e_4 + a_{34}e_5 = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4 + x_5a_5.$$

Отсюда следует: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = a_{34}, x_5 = 0$, поэтому $e_4 = 0$, что невозможно. Это означает, что не существует подалгебры в L_6^7 , порожденной базисом (3).

Алгебра L_6^8 с произведениями $e_1e_2 = e_3 + e_5, e_1e_3 = e_4, e_2e_5 = e_6$.

Базис (2). Имеем

$$a_1a_2 = (e_1 + a_{15}e_5)(e_2 + a_{25}e_5) = e_3 + e_5 - a_{15}e_6 = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4 + x_5a_5.$$

Отсюда следует: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = -a_{15}$, поэтому $a_{35} = 1$. Далее,

$$a_1a_3 = (e_1 + a_{15}e_5)(e_3 + a_{35}e_5) = e_4 = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4 + x_5a_5.$$

Отсюда следует: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0$, поэтому $a_{45} = 0$. Далее,

$$a_2a_3 = (e_2 + a_{25}e_5)(e_3 + a_{35}e_5) = a_{35}e_6,$$

т. е. принадлежит данному подпространству. Это означает, что получена следующая подалгебра в L_6^8 :

$$h_2^3 = \text{Span}\{e_1 + a_{15}e_5, e_2 + a_{25}e_5, e_3 + e_5, e_4, e_6\}.$$

Базис (3). Имеем

$$a_1a_3 = (e_1 + a_{14}e_4)(e_3 + a_{34}e_4) = e_4 = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4 + x_5a_5.$$

Отсюда следует: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0$, поэтому $e_4 = 0$, что невозможно. Это означает, что не существует подалгебры в L_6^8 , порожденной базисом (3).

Алгебра L_6^9 с произведениями $e_1e_2 = e_3, e_1e_3 = e_4, e_1e_5 = e_6, e_2e_3 = e_6$.

Базис (2). Имеем

$$a_1a_2 = (e_1 + a_{15}e_5)(e_2 + a_{25}e_5) = e_3 + a_{25}e_6 = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4 + x_5a_5.$$

Отсюда следует: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = a_{25}$, поэтому $a_{35} = 0$. Далее,

$$a_1a_3 = (e_1 + a_{15}e_5)(e_3 + a_{35}e_5) = e_4 + a_{35}e_6 = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4 + x_5a_5.$$

Отсюда следует: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = a_{35}$, поэтому $a_{45} = 0$. Остальные произведения векторов a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 не накладывают никаких ограничений на их компоненты. Это означает, что получена следующая подалгебра в L_6^9 :

$$h_2^2 = \text{Span}\{e_1 + a_{15}e_5, e_2 + a_{25}e_5, e_3, e_4, e_6\}.$$

Базис (3). Имеем

$$a_1a_3 = (e_1 + a_{14}e_4)(e_3 + a_{34}e_4) = e_4 = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4 + x_5a_5.$$

Отсюда следует: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0$, поэтому $e_4 = 0$, что невозможно. Это означает, что не существует подалгебры в L_6^9 , порожденной базисом (3).

Алгебра L_6^{10} с произведениями $e_1e_2 = e_3, e_1e_3 = e_5, e_1e_4 = e_6, e_2e_4 = e_5, e_2e_3 = \gamma e_6$.

Базис (2). Имеем

$$a_2a_4 = (e_2 + a_{25}e_5)(e_4 + a_{45}e_5) = e_5 = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4 + x_5a_5.$$

Отсюда следует: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0$, поэтому $e_5 = 0$, что невозможно. Это означает, что не существует подалгебр в L_6^{10} , порожденных базисом (2).

Базис (3). Имеем

$$a_1a_2 = (e_1 + a_{14}e_4)(e_2 + a_{24}e_4) = e_3 + a_{26}e_6 - a_{14}e_5 = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4 + x_5a_5.$$

Отсюда следует: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = -a_{14}, x_5 = a_{24}$, поэтому $a_{34} = 0$. Далее,

$$a_1a_3 = (e_1 + a_{14}e_4)(e_3 + a_{34}e_4) = e_5 + a_{34}e_6 = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4 + x_5a_5.$$

Отсюда следует: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = a_{34}$, поэтому произведение a_1a_3 принадлежит соответствующему подпространству. Далее имеем

$$a_2a_3 = (e_2 + a_{24}e_4)(e_3 + a_{34}e_4) = \gamma e_6 + a_{34}e_5.$$

Отсюда: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = a_{34}, x_5 = \gamma$, поэтому произведение a_2a_3 принадлежит данному подпространству. Остальные произведения векторов a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 не накладывают никаких ограничений на их компоненты. Это означает, что получена следующая подалгебра в L_6^{10} :

$$h_3^1 = \text{Span}\{e_1 + a_{14}e_4, e_2 + a_{24}e_4, e_3, e_5, e_6\}.$$

Лемма 6. *Базис (3) не порождает никакие 5-мерные подалгебры во всех алгебрах $L_6^{11}-L_6^{22}$.*

Доказательство. Для алгебры L_6^{11} имеем

$$a_1a_3 = (e_1 + a_{14}e_4)(e_3 + a_{34}e_4) = e_4 + a_{34}e_5 = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4 + x_5a_5.$$

Отсюда следует: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = a_{34}, x_5 = 0$, поэтому $e_4 = 0$, что невозможно. Это означает, что не существует подалгебр в L_6^{11} , порожденных базисом (3). Аналогичное рассуждение в отношении произведения a_1a_3 справедливо для алгебр $L_6^{12}-L_6^{22}$. Лемма 6 доказана.

В соответствии с леммами 1–6 достаточно проверить базис (2) для алгебр $L_6^{11}-L_6^{22}$.

Алгебра L_6^{11} с произведениями $e_1e_2 = e_3, e_1e_3 = e_4, e_1e_4 = e_5, e_2e_3 = e_6$.

Базис (2). Имеем

$$a_1a_4 = (e_1 + a_{15}e_5)(e_4 + a_{45}e_5) = e_5 = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4 + x_5a_5.$$

Отсюда следует: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0$, поэтому $e_5 = 0$, что невозможно. Это означает, что не существует подалгебр в L_6^{11} , порожденных базисом (2).

Алгебра L_6^{12} с произведениями $e_1e_3 = e_4, e_1e_4 = e_5, e_2e_5 = e_6$.

Базис (2). Имеем

$$a_1a_3 = (e_1 + a_{15}e_5)(e_3 + a_{35}e_5) = e_4 = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4 + x_5a_5.$$

Отсюда следует: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0$, поэтому $a_{45} = 0$. Далее,

$$a_1a_4 = (e_1 + a_{15}e_5)(e_4 + a_{45}e_5) = e_6 = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4 + x_5a_5.$$

Отсюда следует: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1$, т. е. произведение a_1a_4 принадлежит подпространству, порожденному базисом (2). Остальные произведения a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 не накладывают никаких ограничений на их компоненты. Это означает, что получена следующая подалгебра в L_6^{12} :

$$h_2^4 = \text{Span}\{e_1 + a_{15}e_5, e_2 + a_{25}e_5, e_3 + a_{35}e_5, e_4, e_6\}.$$

Алгебра L_6^{13} с произведениями $e_1e_2 = e_5, e_1e_3 = e_4, e_1e_4 = e_6, e_2e_5 = e_6$.

Базис (2). Имеем

$$a_1a_2 = (e_1 + a_{15}e_5)(e_2 + a_{25}e_5) = e_5 - a_{15}e_6 = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4 + x_5a_5.$$

Отсюда следует: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = -a_{15}$, поэтому $e_5 = 0$, что невозможно. Это означает, что не существует подалгебр в L_6^{13} , порожденных базисом (2).

Алгебра L_6^{14} с произведениями $e_1e_3 = e_4, e_1e_4 = e_6, e_2e_3 = e_5, e_2e_5 = \gamma e_6$.

Базис (2). Имеем

$$a_2a_3 = (e_2 + a_{25}e_5)(e_3 + a_{35}e_5) = e_5 + \gamma_{35}e_6 = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4 + x_5a_5.$$

Отсюда следует: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = \gamma_{35}$, поэтому $e_5 = 0$, что невозможно. Это означает, что не существует подалгебр в L_6^{14} , порожденных базисом (2).

Алгебра L_6^{15} с произведениями $e_1e_2 = e_3 + e_5, e_1e_3 = e_4, e_1e_4 = e_6, e_2e_5 = e_6$.

Базис (2). Имеем

$$a_1a_2 = (e_1 + a_{15}e_5)(e_2 + a_{25}e_5) = e_3 + e_5 - a_{15}e_6 = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4 + x_5a_5.$$

Отсюда следует: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = -a_{15}$, поэтому $a_{35} = 1$. Далее, имеем

$$a_1 a_3 = (e_1 + a_{15} e_5)(e_3 + a_{35} e_5) = e_4 = x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + x_4 a_4 + x_5 a_5.$$

Отсюда: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0$, поэтому $a_{45} = 0$. Остальные произведения векторов a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 принадлежат соответствующему подпространству без дополнительных ограничений на компоненты этих векторов. Это означает, что получена следующая подалгебра в L_6^{15} , порожденная базисом (2):

$$h_2^3 = \text{Span}\{e_1 + a_{15} e_5, e_2 + a_{25} e_5, e_3 + e_5, e_4, e_6\}.$$

Алгебра L_6^{16} с произведениями $e_1 e_3 = e_4, e_1 e_4 = e_5, e_1 e_5 = e_6, e_2 e_3 = e_5, e_2 e_4 = e_6$.
Базис (2). Имеем

$$a_2 a_3 = (e_2 + a_{25} e_5)(e_3 + a_{35} e_5) = e_5 = x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + x_4 a_4 + x_5 a_5.$$

Отсюда следует: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0$, поэтому $e_5 = 0$, что невозможно. Это означает, что не существует подалгебр в L_6^{16} , порожденных базисом (2).

Алгебра L_6^{17} с произведениями $e_1 e_2 = e_3, e_1 e_3 = e_4, e_1 e_4 = e_6, e_2 e_5 = e_6$.
Базис (2). Имеем

$$a_1 a_2 = (e_1 + a_{15} e_5)(e_2 + a_{25} e_5) = e_3 - a_{15} e_6 = x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + x_4 a_4 + x_5 a_5.$$

Отсюда следует: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = -a_{15}$, поэтому $a_{35} = 0$. Далее имеем

$$a_1 a_3 = (e_1 + a_{15} e_5)(e_3 + a_{35} e_5) = e_4 = x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + x_4 a_4 + x_5 a_5.$$

Отсюда: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0$, поэтому $a_{45} = 0$. Все остальные произведения векторов a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 принадлежат соответствующему подпространству. Следовательно, получена подалгебра

$$h_2^2 = \text{Span}\{e_1 + a_{15} e_5, e_2 + a_{25} e_5, e_3, e_4, e_6\}.$$

Алгебра L_6^{18} с произведениями $e_1 e_2 = e_3, e_1 e_3 = e_4, e_1 e_4 = e_6, e_2 e_3 = e_5, e_1 e_5 = e_6$.
Базис (2). Имеем

$$a_2 a_3 = (e_2 + a_{25} e_5)(e_3 + a_{35} e_5) = e_5 = x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + x_4 a_4 + x_5 a_5.$$

Отсюда следует: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0$, поэтому $e_5 = 0$, что невозможно. Это означает, что не существует подалгебр в L_6^{18} , порожденных базисом (2).

Алгебра L_6^{19} с произведениями $e_1 e_2 = e_3, e_1 e_3 = e_4, e_1 e_4 = e_5, e_1 e_5 = e_6, e_2 e_3 = e_6$.
Базис (2). Имеем

$$a_1 a_4 = (e_1 + a_{15} e_5)(e_4 + a_{45} e_5) = e_5 + a_{45} e_6 = x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + x_4 a_4 + x_5 a_5.$$

Отсюда следует: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = a_{45}$, поэтому $e_5 = 0$, что невозможно. Это означает, что не существует подалгебр в L_6^{19} , порожденных базисом (2).

Алгебра L_6^{20} с произведениями $e_1 e_2 = e_3, e_1 e_3 = e_4, e_1 e_4 = e_5, e_1 e_5 = e_6, e_2 e_3 = e_5, e_2 e_4 = e_6$.

Данная алгебра Ли близка по своей структуре к алгебре L_6^{19} , поэтому проверяется таким же образом, как и базисы (2)–(3) не порождают никаких подалгебр в этой алгебре L_6^{20} . Проверим только один базис.

Базис (2). Имеем

$$a_1 a_4 = (e_1 + a_{15} e_5)(e_4 + a_{45} e_5) = e_5 + a_{45} e_6 = x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + x_4 a_4 + x_5 a_5.$$

Отсюда следует: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = a_{45}$, поэтому $e_5 = 0$, что невозможно. Это означает, что не существует подалгебр в L_6^{20} , порожденных базисом (2).

Алгебра L_6^{21} с произведениями $e_1 e_2 = e_3, e_1 e_5 = e_6, e_2 e_3 = e_4, e_2 e_4 = e_5, e_3 e_4 = e_6$.
Базис (2). Имеем

$$a_2a_4 = (e_2 + a_{25}e_5)(e_4 + a_{45}e_5) = e_5 = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4 + x_5a_5.$$

Отсюда следует: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0$, поэтому $e_5 = 0$, что невозможно. Это означает, что не существует подалгебр в L_6^{21} , порожденных базисом (2).

Алгебра L_6^{22} с произведениями $e_1e_2 = e_3, e_1e_3 = e_5, e_1e_5 = e_6, e_2e_3 = e_4, e_2e_4 = e_5, e_3e_4 = e_6$.

Алгебра L_6^{22} имеет почти такую же таблицу произведений, как и алгебра L_6^{21} , отличие состоит лишь в том, что произведение e_1e_3 является нулевым в L_6^{21} , но ненулевым в L_6^{22} . Значит, рассматривая базис (2) по той же схеме, как в случае алгебры L_6^{21} , мы получим тот же результат, а именно, базис (2) не порождает никакие подалгебры в алгебре L_6^{22} .

Суммируем результаты изучения подалгебр 6-мерных нильпотентных алгебр Ли в табл. 1.

Таблица 1

Table 1

Все возможные 5-мерные подалгебры 6-мерных нильпотентных алгебр Ли	Соответствующие 6-мерные нильпотентные алгебры Ли
$h_1^1 = \text{Span}\{e_1 + a_{16}e_6, e_2 + a_{26}e_6, e_3, e_4 + a_{46}e_6, e_5 + a_{56}e_6\}, a_{46} \neq 0, a_{56} \neq 0$	$L_3 + 3L_1$
$h_1^2 = \text{Span}\{e_1 + a_{16}e_6, e_2 + a_{26}e_6, e_3, e_4, e_5 + a_{56}e_6\}, a_{56} \neq 0$	$L_3 + 3L_1, L_4 + 2L_1$
$h_1^3 = \text{Span}\{e_1 + a_{16}e_6, e_2 + a_{26}e_6, e_3, e_4 + a_{46}e_6, e_5\}, a_{46} \neq 0$	$L_3 + 3L_1, L_5^1 + L_1, L_5^4 + L_1$
$h_1^4 = \text{Span}\{e_1 + a_{16}e_6, e_2 + a_{26}e_6, e_3, e_4, e_5\}$	$L_3 + 3L_1, L_4 + 2L_1, L_5^1 + L_1, L_5^2 + L_1, L_5^3 + L_1, L_5^4 + L_1, L_5^5 + L_1, L_5^6 + L_1$
$h_1^5 = \text{Span}\{e_1 + a_{16}e_6, e_2 + a_{26}e_6, e_3 + a_{36}e_6, e_4 + a_{46}e_6, e_5\}, a_{36} \neq 0, a_{46} \neq 0$	$L_5^4 + L_1$
$h_1^6 = \text{Span}\{e_1 + a_{16}e_6, e_2 + a_{26}e_6, e_3 + a_{36}e_6, e_4, e_5\}, a_{36} \neq 0$	$L_5^4 + L_1, L_5^5 + L_1$
$h_2^1 = \text{Span}\{e_1 + a_{15}e_5, e_2 + a_{25}e_5, e_4 + a_{45}e_5, e_6\}, a_{45} \neq 0$	$L_3 + 3L_1, 2L_3$
$h_2^2 = \text{Span}\{e_1 + a_{15}e_5, e_2 + a_{25}e_5, e_3, e_4, e_6\}$	$L_3 + 3L_1, 2L_3, L_4 + 2L_1, L_6^1, L_6^9, L_6^{12}$
$h_2^3 = \text{Span}\{e_1 + a_{15}e_5, e_2 + a_{25}e_5, e_3 + e_5, e_4, e_6\}$	$L_6^8, L_6^{12}, L_6^{15}, L_6^{17}$
$h_2^4 = \text{Span}\{e_1 + a_{15}e_5, e_2 + a_{25}e_5, e_3 + a_{35}e_5, e_4, e_6\}, a_{35} \neq 1, a_{35} \neq 0$	L_6^{12}
$h_3^1 = \text{Span}\{e_1 + a_{14}e_4, e_2 + a_{24}e_4, e_3, e_5, e_6\}$	$L_3 + 3L_1, 2L_3, L_5^1 + L_1, L_5^4 + L_1, L_5^4 + L_1, L_6^4, L_6^5, L_6^{10}$
$h_3 = \text{Span}\{e_1 + a_{14}e_4, e_2 + a_{24}e_4, e_3 + a_{34}e_4, e_5, e_6\}, a_{34} \neq 1$	$L_5^4 + L_1, L_6^4, L_6^5$
$h_4 = \text{Span}\{e_1 + a_{13}e_3, e_2 + a_{23}e_3, e_4, e_5, e_6\}$	$L_5^4 + L_1, L_5^5 + L_1, L_6^3, L_6^3, L_6^4, L_6^5, L_6^6, L_6^7, L_6^{12}, L_6^{13}, L_6^{14}, L_6^{16}$
$h_5 = \text{Span}\{e_1 + a_{12}e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$	Все 32 разложимые и неразложимые 6-мерные нильпотентные алгебры Ли
$h_6 = \text{Span}\{e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$	Все 32 разложимые и неразложимые 6-мерные нильпотентные алгебры Ли

З а м е ч а н и е. Абелева алгебра $6L_1$ не включена в табл. 1, так как все ее подпространства являются ее подалгебрами.

В дополнение к табл. 1 приведена табл. 2, в которой для каждой нильпотентной 6-мерной алгебры Ли (левый столбец) выписаны все 5-мерные подалгебры, содержащиеся в них (правый столбец). Кроме того, для каждой подалгебры указана изоморфная этой подалгебре 5-мерная нильпотентная алгебра из списка в работе [2]. Изоморфная алгебра для группы подалгебр или для отдельных подалгебр следует после двоеточия.

Таблица 2

Table 2

$L_3 + 3L_1$	$h_1^1, h_1^2, h_1^3, h_1^4, h_2^1, h_2^2, h_3^1; (L_3 + 2L_1); h_5, h_6; (5L_1)$
$2L_3$	$h_2^1, h_2^2, h_3^1, h_5, h_6; (L_3 + 2L_1)$
$L_4 + 2L_1$	$h_1^2, h_1^4, h_2^2; (L_4 + L_1); h_5; (L_3 + 2L_1); h_6; (5L_1)$
$L_5^1 + L_1$	$h_1^3, h_1^4; (L_5^1); h_3^1, h_5; (L_3 + 2L_1); h_6; (5L_1)$
$L_5^2 + L_1$	$h_1^4; (L_5^2); h_5; (L_4 + L_1); h_6; (5L_1)$

Окончание табл. 2

$L_3^3 + L_1$	$h_1^4: (L_5^3); h_5, h_6: (L_3 + 2L_1)$
$L_5^4 + L_1$	$h_1^3, h_1^4, h_1^5, h_1^6, h_3^1, h_3, h_4, h_5: (L_5^4); h_6: (L_3 + 2L_1)$
$L_5^5 + L_1$	$h_1^4, h_1^6: (L_5^5); h_4, h_5: (L_4 + L_1); h_6: (L_3 + 2L_1)$
$L_5^6 + L_1$	$h_1^4: (L_5^6); h_5: (L_4 + L_1); h_6: (L_3 + 2L_1)$
L_6^1	$h_2^2: (L_4 + L_1); h_5: (L_5^1); h_6: (5L_1)$
L_6^2	$h_5: (L_5^2); h_6: (5L_1)$
L_6^3	$h_4, h_5, h_6: (L_3 + L_1)$
L_6^4	$h_3^1, h_3, h_4: (L_5^1); h_5: (L_5^4); h_6: (L_3 + L_1)$
L_6^5	$h_3^1, h_3, h_4: (L_5^3); h_5, h_6: (L_5^1)$
L_6^6	$h_4: (L_5^3); h_5: (L_5^1); h_6: (L_3 + 2L_1)$
L_6^7	$h_4: (L_4 + L_1); h_5: (L_5^1); h_6: (L_3 + 2L_1)$
L_6^8	$h_2^3: (L_5^2); h_5: (L_5^1); h_6: (L_3 + 2L_1)$
L_6^9	$h_2^2: (L_5^2); h_5: (L_5^1); h_6: (L_3 + 2L_1)$
L_6^{10}	$h_3^1: (L_5^2); h_5: (L_5^1); h_6: (L_5^1)$
L_6^{11}	$h_5: (L_4 + L_1); h_6: (L_3 + 2L_1)$
L_6^{12}	$h_2^2, h_2^3, h_2^4, h_4: (L_5^5); h_5: (L_4 + L_1); h_6: (L_3 + 2L_1)$
L_6^{13}	$h_4, h_5: (L_4 + L_1); h_6: (L_3 + L_1)$
L_6^{14}	$h_4: (L_4 + L_1); h_5, h_6: (L_5^1)$
L_6^{15}	$h_2^3, h_4, h_5: (L_5^6); h_6: (L_3 + 2L_1)$
L_6^{16}	$h_4: (L_5^6); h_5: (L_5^2); h_6: (L_4 + L_1)$
L_6^{17}	$h_2^3: (L_5^6); h_5: (L_5^1); h_6: (L_3 + 2L_1)$
L_6^{18}	$h_5: (L_5^1); h_6: (L_3 + 2L_1)$
L_6^{19}	$h_5: (L_5^2); h_6: (L_3 + 2L_1)$
L_6^{20}	$h_5: (L_5^2); h_6: (L_5^1)$
L_6^{21}	$h_5: (L_5^6); h_6: (L_5^3)$
L_6^{22}	$h_5: (L_5^6); h_6: (L_5^3)$

Список использованных источников

1. Patera, J. Subalgebras of real three- and four-dimensional Lie algebras / J. Patera, P. Winternitz // J. Math. Phys. – 1977. – Vol. 18, № 7. – P. 1449–1455. <https://doi.org/10.1063/1.523441>
2. Морозов, В. В. Классификация нильпотентных алгебр Ли шестого порядка / В. В. Морозов // Изв. высш. учеб. заведений. Математика. – 1958. – № 4 (5). – С. 161–171.
3. Shtukar, U. Classification of Canonical Bases for (n–2)-Dimensional Subspaces of n-Dimensional Vector Space / U. Shtukar // J. Generalized Lie Theory and Applications. – 2016. – Vol. 10, iss. 1. – P. 1–8. <https://doi.org/10.4172/1736-4337.1000245>

References

1. Patera J., Winternitz P. Subalgebras of real three- and four-dimensional Lie algebras. *Journal of Mathematical Physics*, 1977, vol. 18, no. 7, pp. 1449–1455. <https://doi.org/10.1063/1.523441>
2. Morozov V. V. Classification of nilpotent Lie algebras of the sixth order. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Matematika = Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 1958, no. 4 (5), pp. 161–171 (in Russian).
3. Shtukar, U. Classification of Canonical Bases for (n–2)-Dimensional Subspaces of n-Dimensional Vector Space. *Journal of Generalized Lie Theory and Applications*, 2016, vol. 10, no. 1, pp. 1–8. <https://doi.org/10.4172/1736-4337.1000245>

Информация об авторе

Штукар Владимир Леонидович – кандидат физико-математических наук (ул. Первомайская, 8, 212030, г. Могилев, Республика Беларусь). E-mail: shtukarv1@gmail.com

Information about the author

Uladzimir L. Shtukar – Ph. D. (Physics and Mathematics) (8, Pervomaiskaya Str., 212030, Mogilev, Republic of Belarus). E-mail: shtukarv1@gmail.com

ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)

УДК 517.537.38

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-2-189-193>

Поступила в редакцию 12.12.2019

Received 12.12.2019

Э. И. Зверович, В. А. Павловский

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

НАХОЖДЕНИЕ ОБЛАСТЕЙ СХОДИМОСТИ И ВЫЧИСЛЕНИЕ СУММ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ ОТ h -КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Аннотация. Взяв степенные ряды от вещественного переменного, сходящиеся на некотором интервале к известным суммам, авторы рассматривают степенные ряды с теми же коэффициентами от h -комплексного переменного. Для таких рядов найдены внутренности областей сходимости, а их суммы явно выражены через суммы исходных рядов. Попутно решен вопрос об условиях изолированности нулей сумм таких рядов.

Ключевые слова: степенной ряд, сумма ряда, область сходимости, кольцо h -комплексных чисел, изолированность нулей функции

Для цитирования. Зверович, Э. И. Нахождение областей сходимости и вычисление сумм степенных рядов от h -комплексного переменного / Э. И. Зверович, В. А. Павловский // Вест. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2020. – Т. 56, № 2. – С. 189–193. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-2-189-193>

Edmund I. Zverovich, Vladislav A. Pavlovsky

Belarusian State University, Minsk, Belarus

FINDING THE AREAS OF CONVERGENCE AND CALCULATING THE SUMS OF POWER SERIES FROM AN h -COMPLEX VARIABLE

Abstract. Herein, taking power series from a real variable that converge on a certain interval to known sums, the authors consider the power series with the same coefficients from an h -complex variable. For such series, the interiors of the regions of convergence are found, and their sums are explicitly expressed in terms of the sums of the original series. Along the way, the problem of isolation conditions for the zeros of the sums of such series is solved.

Keywords: power series, sum of series, area of convergence, ring of h -complex numbers, isolation of zeros of a function

For citation. Zverovich E. I., Pavlovsky V. A. Finding the areas of convergence and calculating the sums of power series of an h -complex variable. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk* = *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2020, vol. 56, no. 2, pp. 189–193 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-2-189-193>

Пусть $\mathbb{D}$ – кольцо всех h -комплексных (двойных) чисел [1–3], т. е. чисел вида $a + bj$, где $a, b \in \mathbb{R}$, $j^2 = 1$, $j \neq \pm 1$. В кольце $\mathbb{D}$ имеются делители нуля, каковыми являются числа вида

$a + aj$. Делители нуля [3, 4] при $a = \frac{1}{2}$ представляют особый интерес для дальнейшего, и мы перечислим их свойства в следующей теореме.

Теорема 1. *Справедливы следующие утверждения:*

(a) $\frac{1+j}{2} \cdot \frac{1-j}{2} = 0$;

(b) $\forall n \in \mathbb{N}: \left(\frac{1 \pm j}{2} \right)^n = \frac{1 \pm j}{2}$;

(c) числа $\frac{1 \pm j}{2}$ образуют базис в $\mathbb{D}$, т. е. любое h -комплексное число $a + bj$ можно однозначно представить в виде

$$a + bj = (a + b) \frac{1+j}{2} + (a - b) \frac{1-j}{2}.$$

Доказательство. Действительно, свойство (a) очевидно и выражает основное свойство делителей нуля. Свойство (b) легко установить методом полной индукции. При $n = 1$ оно очевидно. Предположив, что оно имеет место при некотором $n > 1$, и умножив его на $\frac{1 \pm j}{2}$, получим

$$\left(\frac{1 \pm j}{2}\right)^{n+1} = \left(\frac{1 \pm j}{2}\right)^2 = \frac{1 \pm 2j + 1}{4} = \frac{1 \pm j}{2},$$

что и требовалось. Равенство (c) очевидно.

Теорема 1 может быть эффективно использована для нахождения областей сходимости степенных рядов от h -комплексного переменного. Пусть задан степенной ряд

$$f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u^n \quad (1)$$

с вещественными коэффициентами от вещественного переменного u , имеющий радиус сходимости $r > 0$. Производя в ряде (1) подстановку $u = x + jy \in \mathbb{D}$, получим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x + jy)^n, \quad (2)$$

и надо найти область его сходимости и сумму. С этой целью преобразуем сначала h -комплексную переменную

$$x + jy = (x + y) \frac{1+j}{2} + (x - y) \frac{1-j}{2}.$$

Для преобразования ее степеней используем теорему 1:

$$(x + jy)^n = \left[(x + y) \frac{1+j}{2} + (x - y) \frac{1-j}{2} \right]^n = (x + y)^n \frac{1+j}{2} + (x - y)^n \frac{1-j}{2}. \quad (3)$$

Подставив это в ряд (2), преобразуем его к виду

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x + jy)^n = \frac{1+j}{2} f(x+y) + \frac{1-j}{2} f(x-y) = \frac{1+j}{2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x+y)^n + \frac{1-j}{2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-y)^n. \quad (4)$$

Естественно считать, что ряд (2) сходится, если и только если сходятся оба ряда в правой части равенства (4). Значит, внутренностью области сходимости ряда (2) является пересечение полос сходимости рядов, стоящих в правой части равенства (4), т. е. квадрат

$$\begin{cases} -r < x + y < r, \\ -r < x - y < r. \end{cases}$$

Например, при $f(u) = e^u$ имеем равенство

$$e^{x+jy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+jy)^n}{n!} = \frac{1+j}{2} e^{x+y} + \frac{1-j}{2} e^{x-y},$$

справедливое во всей плоскости $\mathbb{D}$. Если же $f(u) = \ln(1+u)$, то получим

$$\ln(1+x+jy) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x+jy)^n}{n} = \frac{1+j}{2} \ln(1+x+y) + \frac{1-j}{2} \ln(1+x-y).$$

Положив $f(u) = \ln(1+u)^\mu$, найдем

$$(1+x+jy)^\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\mu}{n} (x+jy)^n = \frac{1+j}{2} (1+x+y)^\mu + \frac{1-j}{2} (1+x-y)^\mu.$$

Последние два равенства выполняются в квадрате

$$\begin{cases} -1 < x+y < 1, \\ -1 < x-y < 1. \end{cases}$$

Пусть теперь даны два степенных ряда

$$f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n, \quad g(u) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n u^n \quad (5)$$

от вещественного переменного u с вещественными коэффициентами a_n, b_n и радиусами сходимости $r > 0$ и $p > 0$ соответственно. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \frac{1+j}{2} + b_n \frac{1-j}{2} \right) (x+jy)^n. \quad (6)$$

Требуется найти его область абсолютной сходимости и выразить его сумму через суммы рядов (5). С этой целью преобразуем общий член ряда (6):

$$\begin{aligned} \left(a_n \frac{1+j}{2} + b_n \frac{1-j}{2} \right) (x+jy)^n &= \left(a_n \frac{1+j}{2} + b_n \frac{1-j}{2} \right) \left[(x+y) \frac{1+j}{2} + (x-y) \frac{1-j}{2} \right]^n = \\ &= \left(a_n \frac{1+j}{2} + b_n \frac{1-j}{2} \right) \left[(x+y)^n \frac{1+j}{2} + (x-y)^n \frac{1-j}{2} \right] = a_n (x+y)^n \frac{1+j}{2} + b_n (x-y)^n \frac{1-j}{2}. \end{aligned}$$

Подставляя это в (6), найдем

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \frac{1+j}{2} + b_n \frac{1-j}{2} \right) (x+jy)^n &= \frac{1+j}{2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+y)^n + \frac{1-j}{2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-y)^n = \\ &= \frac{1+j}{2} f(x+y) + \frac{1-j}{2} g(x-y). \end{aligned} \quad (7)$$

Тем самым мы выразили сумму ряда (6) через суммы рядов (5). Отсюда заключаем, что ряд (6) сходится абсолютно в прямоугольнике

$$\begin{cases} -r < x+y < r, \\ -p < x-y < p \end{cases} \quad (8)$$

к сумме, указанной в правой части последнего равенства.

Теперь легко может быть решен вопрос об условиях изолированности нулей суммы ряда (6).

Теорема 2. Если суммы обоих рядов (5) отличны от тождественного нуля, то все нули суммы ряда (6) – изолированные. В противном случае все они – не изолированные.

Доказательство. Известно, что нули сумм степенных рядов от вещественного переменного – изолированные. Значит, нули функций $f(x+y)$ и $g(x-y)$ представляют собой изолированные прямые $x+y = \text{const}$ и $x-y = \text{const}$. Так как эти прямые ортогональны одна другой, то их пересечение есть изолированная точка.

Предположим теперь, что обе функции $f(u)$ и $g(u)$ из (5) тождественно равны нулю. Тогда, как видно из (7), и сумма ряда (6) тождественно равна нулю, т. е. нули функции (6) заполняют всю плоскость $\mathbb{D}$. Пусть теперь только одна из функций $f(u)$ и $g(u)$ тождественно равна нулю. Для определенности предположим, что $g(u) \equiv 0$. Тогда (8) сводится к неравенству $-r < x+y < r$, т. е.

областью сходимости ряда (6) является полоса. Если $f(u_0) = 0$, то все точки прямой $x + y = u_0$ будут нулями суммы ряда (6). Значит, они – не изолированные. Теорема доказана.

Вместо рядов (5) возьмем теперь ряды от вещественного переменного u , бесконечные в обе стороны

$$f(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n u^n, \quad g(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n u^n, \quad (9)$$

где $a_n, b_n \in \mathbb{R}$. Предположим, что первый ряд сходится при $r < |u| < R$, а второй – при $p < |u| < P$. Вместо ряда (6) рассмотрим теперь ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(a_n \frac{1+j}{2} + b_n \frac{1-j}{2} \right) (x+jy)^n, \quad (10)$$

и найдем область его сходимости и сумму.

С этой целью сначала сделаем такое преобразование:

$$(x+jy)^{-1} = \frac{1}{x+jy} = \frac{x-jy}{x^2-y^2} = \frac{(x-y)\frac{1+j}{2} + (x+y)\frac{1-j}{2}}{(x+y)(x-y)} = (x+y)^{-1} \frac{1+j}{2} + (x-y)^{-1} \frac{1-j}{2}.$$

Возведя это в степень $n \in \mathbb{N}$, получим

$$(x+jy)^{-n} = (x+y)^{-n} \frac{1+j}{2} + (x-y)^{-n} \frac{1-j}{2},$$

т. е. равенство (3) оказывается верным не только для всех $n \in \mathbb{N}$, но и для всех $n \in \mathbb{Z}$. Поэтому

$$\begin{aligned} & \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(a_n \frac{1+j}{2} + b_n \frac{1-j}{2} \right) (x+jy)^n = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(a_n \frac{1+j}{2} + b_n \frac{1-j}{2} \right) \left((x+y) \frac{1+j}{2} + (x-y) \frac{1-j}{2} \right)^n = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(a_n \frac{1+j}{2} + b_n \frac{1-j}{2} \right) \left((x+y)^n \frac{1+j}{2} + (x-y)^n \frac{1-j}{2} \right) = \\ &= \frac{1+j}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (x+y)^n + \frac{1-j}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (x-y)^n = \frac{1+j}{2} f(x+y) + \frac{1-j}{2} g(x-y). \end{aligned}$$

Таким образом, ряд (8) сходится абсолютно на множестве

$$\begin{cases} r < |x+y| < R, \\ p < |x-y| < P, \end{cases}$$

а его сумма равна

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(a_n \frac{1+j}{2} + b_n \frac{1-j}{2} \right) (x+jy)^n = \frac{1+j}{2} f(x+y) + \frac{1-j}{2} g(x-y).$$

Список использованных источников

1. Antonuccio, F. Semi-Complex Analysis and Mathematical Physics [Electronic Resource] / F. Antonuccio. – 2008. – Mode of access: <https://arxiv.org/pdf/gr-qc/9311032.pdf>
2. Field, M. Several Complex Variables and Complex Manifolds II / M. Field. – Cambridge University Press, 1982. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511629327>

3. Розенфельд, Б. А. Неевклидовы геометрии / Б. А. Розенфельд. – М.: Наука, 1969. – 548 с.
4. Ивлев, Д. Д. О двойных числах и их функциях / Д. Д. Ивлев // Мат. просвещение. – 1961. – Вып. 6. – С. 197–203.

References

1. Antonuccio F. *Semi-Complex Analysis and Mathematical Physics*. 2008. Available at: <https://arxiv.org/pdf/gr-qc/9311032.pdf>
2. Field M. *Several Complex Variables and Complex Manifolds II*. Cambridge University Press, 1982. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511629327>
3. Rosenfeld B. A. *Non-Euclidean geometries*. Moscow, Nauka Publ., 1969. 548 p. (in Russian).
4. Ivlev D. D. On double numbers and their functions. *Matematicheskoe prosveshchenie* [Math Education], 1961, iss. 6, pp. 197–203 (in Russian).

Информация об авторах

Зверович Эдмунд Иванович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры теории функций, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: zverovich@bsu.by

Павловский Владислав Андреевич – аспирант, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: pavl_vl@mail.ru

Information about the authors

Edmund I. Zverovich – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Professor of the Department of Function Theory, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: zverovich@bsu.by

Vladislav A. Pavlovsky – Postgraduate Student, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: pavl_vl@mail.ru

ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)

ФИЗИКА PHYSICS

УДК 530.12
<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-2-194-205>

Поступила в редакцию 29.11.2019
Received 29.11.2019

А. П. Рябушко¹, И. Т. Неманова², Т. А. Жур²

¹Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь

²Белорусский государственный аграрный технический университет, Минск, Беларусь

ДВИЖЕНИЕ СИСТЕМЫ ДВУХ ТЕЛ И ИХ ЦЕНТРА МАСС В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Аннотация. Рассмотрена материальная система, состоящая из двух сферически симметричных тел сравнимых масс, расположенных внутри газопылевого шара со сферически симметричным распределением плотности среды в нем. После выбора соответствующего тензора энергии-импульса из полевых уравнений Эйнштейна с помощью аппроксимационной процедуры Эйнштейна – Инфельда найдены метрика соответствующего пространства-времени и гравитационное поле, создаваемое системой «два тела – среда», а затем получены уравнения движения тел и их центра масс в ньютоновском и постньютоновском приближениях общей теории относительности. Доказано, что в случае указанной плотности среды уже в ньютоновском приближении должен существовать эффект: центр масс двух тел смещается с переменной скоростью, хотя в пустоте он покоился. Данная ситуация является следствием того, что система «два тела – среда» не является замкнутой. Впервые выведены формулы для вычисления величины смещения, которое пропорционально плотности среды в центре газопылевого шара и 5-й степени расстояния между телами. Поэтому при больших расстояниях между телами их центр масс имеет большие смещения (может достигать нескольких миллионов километров за один оборот тел вокруг их центра масс). В случае равенства масс тел их центр масс покоится, если он покоился в пустоте.

Указывается, что полученные результаты и предсказываемые эффекты следует учитывать при обработке наблюдательных данных в астрономии и астрофизике, в вопросах космогонии и космологии.

Ключевые слова: общая теория относительности, два тела, неоднородная среда, уравнения движения тел, центр масс, ньютоновское и постньютоновское приближения

Для цитирования. Рябушко, А. П. Движение системы двух тел и их центра масс в неоднородной среде / А. П. Рябушко, И. Т. Неманова, Т. А. Жур // Вес. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2020. – Т. 56, № 2. – С. 194–205. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-2-194-205>

Anton P. Ryabushko¹, Inna T. Nemanova², Tatyana A. Zhur²

¹Belarusian National Technical University, Minsk, Belarus

²Belarusian State Agrarian Technical University, Minsk, Belarus

THE MOTION OF THE SYSTEM OF TWO BODIES AND THEIR CENTER OF MASS IN AN INHOMOGENEOUS ENVIRONMENT

Abstract. In this paper, a material system consisting of two spherically symmetric bodies of comparable masses located inside a gas-dust ball with a spherically symmetric distribution of the density of the medium in it is considered. After choosing the corresponding energy-momentum tensor from the Einstein field equations using the Einstein-Infeld approximation procedure, the metric of the corresponding space-time, the gravitational field created by the «two-body – medium» system are found, and then the equations of motion of the bodies and their center of mass are obtained in Newton's and post-Newtonian approximations of the general theory of relativity. It is proved that in the case of the indicated density of the medium, the following effect should exist already in the Newtonian approximation. The center of mass of two bodies shifts at a variable speed, although it was at rest in the void. This situation is a consequence of the fact that the two-body-medium system is not closed. For the first time, formulas for calculating the displacement value, which is proportional to the density of the medium in the center of the gas-dust ball and the 5th degree of the distance between the bodies, are derived. Therefore, at large distances

between bodies, their center of mass has large displacements (it can reach several million kilometers per revolution of bodies around their center of mass). If the masses of the bodies are equal, their center of mass is at rest if it is at rest in the void.

Keywords: general theory of relativity, two bodies, inhomogeneous medium, equations of motion of bodies, center of mass, Newtonian and post-Newtonian approximations.

For citation. Ryabushko A. P., Nemanova I. T., Zhur T. A. The motion of the system of two bodies and their center of mass in an inhomogeneous environment. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk* = *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2020, vol. 56, no. 2, pp. 194–205 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-2-194-205>

Введение. В [1] авторами настоящей статьи рассмотрена задача о релятивистском движении центра масс (ЦМ) двух тяжелых тел A и B ньютоновскими сравнимыми массами m_a , m_b , движущихся в *однородной* среде плотностью $\rho = \text{const}$. В ньютоновском приближении (НП) общей теории относительности (ОТО) центр масс покоился (система координат барицентрическая), но в постньютоновском приближении (ПНП) общей теории относительности ЦМ тех же сферически симметричных тел должен смещаться за один ньютоновский оборот тел вокруг их центра масс на значительное расстояние (для стандартной пары звезд смещение порядка 5–10 млн км). В случае круговых орбит тел в НП ОТО движение ЦМ в ПНП ОТО должно происходить по циклоиде, уравнение которой получено.

С целью приближения к реальности в данной работе предлагается решение следующей более общей задачи.

Наблюдения показывают (см., напр., [2–6]), что пары звезд, как правило, окружает газопылевое облако из неоднородной среды, плотность которой распределена зачастую примерно по сферически симметричному закону. Кроме того, предположение о круговых движениях тел в реальности практически не осуществляется. Следует рассматривать эллиптические движения тел в ньютоновском приближении общей теории относительности, а затем релятивистские поправки к движению в постньютоновском приближении общей теории относительности.

В соответствии со сказанным естественна постановка следующей задачи: найти законы движения системы двух сферически симметричных тел в неоднородной среде в постньютоновском приближении общей теории относительности и их центра масс, если в НП ОТО без учета гравитационного поля среды тела движутся по эллипсам и их ЦМ находится в начале координат барицентрической декартовой системы координат $Ox^1x^2x^3$. Плотность среды ρ распределена по сферически симметричному закону

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right), \quad 0 \leq r \leq R; \quad \rho = 0, \quad R \leq r < +\infty. \quad (1)$$

Кроме этого предполагаем, что в НП ОТО орбитами движения тел являются эллипсы, а не окружности (как в работе [1]), лежащие в координатной плоскости x^1Ox^2 , т. е. $x^3 = 0$.

Сформулированная задача в математическом смысле существенно сложнее круговой задачи при $\rho = \text{const}$, решенной в [1].

Нахождение метрического тензора $g_{\alpha\beta}$. Будем придерживаться схемы вывода, подробно изложенной в статье [7] и монографии [8], а также обозначений в работах [1] и [7].

С помощью разработанной Эйнштейном и Инфельдом аппроксимационной процедуры, изложенной, напр., в [8, 9], прежде всего метрический тензор $g_{\alpha\beta}(\alpha, \beta = \overline{0,3})$, массы m_a , m_b , плотность ρ , давление в среде p разлагаются в ряды по малому параметру $\lambda = c^{-1}$, где c – скорость света в вакууме:

$$g_{00} = 1 + \lambda^2 h_{200} + \lambda^4 h_{400} + \dots, \quad g_{ij} = -\delta_{ij} + \lambda^2 h_{2ij} + \dots, \quad g_{0i} = \lambda^3 h_{30i} + \dots, \quad i, j = 1, 2, 3; \quad (2)$$

$$m_a = \lambda^2 m_{2a} + \lambda^4 m_{4a} + \dots, \quad m_b = \lambda^2 m_{2b} + \lambda^4 m_{4b} + \dots, \quad \rho = \lambda^2 \rho_2 + \dots, \quad p = \lambda^4 p_4 + \dots, \quad (3)$$

где $\delta_{ij} = 1$, если $i = j$; $\delta_{ij} = 0$, если $i \neq j$. Величины $m_a, m_b, \rho_2 = \rho$ из (1) заданы в пространстве-времени, метрику которого (или гравитационное поле) следует найти, как и m_a, m_b, p_4 , с помощью полевых уравнений Эйнштейна, которые можно записать в виде

$$\bar{R}_{\alpha\beta} = -\frac{8\pi\gamma}{c^4} \left(\bar{T}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \bar{T} \right), \quad (4)$$

где

$$\bar{R}_{\alpha\beta} = \sqrt{-g} R_{\alpha\beta}, \quad \bar{T}_{\alpha\beta} = \sqrt{-g} T_{\alpha\beta}, \quad \bar{T} = \sqrt{-g} T, \quad T = \sum_{\alpha=0}^3 T_{\alpha}^{\alpha},$$

$R_{\alpha\beta}$ – тензор Риччи, $T_{\alpha\beta}$ – тензор энергии-импульса; T – его свертка, γ – ньютоновская гравитационная постоянная, $g = \det|g_{\alpha\beta}|$. Так как $R_{\alpha\beta}$ выражается через тензор $g_{\alpha\beta}$ и его производные, то $\bar{R}_{\alpha\beta}$ также разлагается в ряды по λ . Теперь следует задать структуру тензора энергии-импульса, отражающую физическую сущность поставленной задачи. В покомпонентной контравариантной записи разложенная в ряды по λ плотность тензора $\bar{T}^{\alpha\beta}$ имеет вид (см. [7; 8; 11, § 106]) $\delta(\vec{r} - \vec{a})$, $\delta(\vec{r} - \vec{b})$ – обобщенные функции Дирака:

$$\begin{aligned} \bar{T}^{00} &= \lambda^2 \left[\rho_2 + m_a \delta(\vec{r} - \vec{a}) + m_b \delta(\vec{r} - \vec{b}) \right] + \\ &+ \lambda^4 \left[-\frac{1}{2} \rho_2 \sum_{\alpha=0}^3 h_{\alpha\alpha} + m_a \delta(\vec{r} - \vec{a}) + m_b \delta(\vec{r} - \vec{b}) \right] + \dots, \\ \bar{T}^{0i} &= \lambda^3 \left[m_a \frac{da^i}{dt} \delta(\vec{r} - \vec{a}) + m_b \frac{db^i}{dt} \delta(\vec{r} - \vec{b}) \right] + \dots, \\ \bar{T}^{ij} &= \lambda^4 \left[m_a \frac{da^i}{dt} \frac{da^j}{dt} \delta(\vec{r} - \vec{a}) + m_b \frac{db^i}{dt} \frac{db^j}{dt} \delta(\vec{r} - \vec{b}) + p_4 \delta_{ij} + t_4^{ij} \right] + \dots, \end{aligned} \quad (5)$$

где a^i, b^i – декартовы координаты тел A и B ; t – время; $\vec{r}, \vec{a}, \vec{b}$ – радиусы-векторы любой точки M , точечных тел A, B соответственно.

Величины t_4^{ij} появляются в (5) по той причине, что закон Паскаля для давления среды при наличии в газопылевом шаре двух движущихся тел нарушается (ср. [11, § 35] с [12]).

Опустив по известному правилу индексов в $\bar{T}^{\alpha\beta}$ из (5), т. е. получив плотность $\bar{T}_{\alpha\beta}$, разложенной в ряд по λ , разложив в ряд по λ $\bar{R}_{\alpha\beta}$, получаем разложение уравнений Эйнштейна (4) в ряды по λ (в (5) заменяем ρ_2 на ρ , где ρ из (1)). В итоге в низших приближениях имеем систему уравнений:

$$\bar{R}_{200} \equiv -\frac{1}{2} h_{200,ss} = -4\pi\gamma \left[\rho_0 \left(1 - \frac{r}{R} \right) + m_a \delta(\vec{r} - \vec{a}) + m_b \delta(\vec{r} - \vec{b}) \right], \quad (6)$$

$$\bar{R}_{30i} \equiv \frac{1}{2} (h_{30s,si} - h_{30i,ss} + h_{2is,s0} - h_{2ss,i0}) = 8\pi\gamma \left[m_a \frac{da^i}{dt} \delta(\vec{r} - \vec{a}) + m_b \frac{db^i}{dt} \delta(\vec{r} - \vec{b}) \right], \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \bar{R}_{2ij} &\equiv \frac{1}{2} (h_{200,ij} - h_{2ij,ss} - h_{2ss,ij} + h_{2is,js} + h_{2js,is}) = \\ &= -4\pi\gamma \delta_{ij} \left[\rho_0 \left(1 - \frac{r}{R} \right) + m_a \delta(\vec{r} - \vec{a}) + m_b \delta(\vec{r} - \vec{b}) \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Индексы i, j, s принимают значения 1, 2, 3; по повторяющемуся индексу s подразумевается суммирование; запятая означает частную производную. Например,

$$h_{2^{00},ss} = \frac{\partial^2 h_{2^{00}}}{\partial x^{1^2}} + \frac{\partial^2 h_{2^{00}}}{\partial x^{2^2}} + \frac{\partial^2 h_{2^{00}}}{\partial x^{3^2}}, \quad h_{2^{is},s0} = \frac{\partial^2 h_{2^{i1}}}{\partial x^1 \partial x^0} + \frac{\partial^2 h_{2^{i2}}}{\partial x^2 \partial x^0} + \frac{\partial^2 h_{2^{i3}}}{\partial x^3 \partial x^0}.$$

Уравнение (6) является уравнением Пуассона, решение которого находим стандартным методом в области $0 \leq r \leq R$, т. е. в шаре радиусом R с центром в начале координат O ; в шаре плотность среды распределена по закону (1):

$$h_{2^{00}} = -\frac{2\gamma m_a}{|\vec{r}-\vec{a}|} - \frac{2\gamma m_b}{|\vec{r}-\vec{b}|} + \frac{4}{3}\pi\gamma\rho_0\left(r^2 - \frac{r^3}{2R} - R^2\right). \quad (9)$$

При интегрировании уравнения (6) также принимается, что тела A и B находятся внутри шара, т. е. $|\vec{a}| < R$, $|\vec{b}| < R$. Указанные ограничения на r , $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ также относятся к уравнениям (7) и (8).

Решением уравнения (8) являются функции

$$h_{ij} = \delta_{ij} h_{2^{00}}. \quad (10)$$

Подставив функции $h_{2^{00}}$, $h_{2^{ij}}$ из (9) и (10) в (7), получаем уравнение, решением которого являются функции

$$h_{3^{0i}} = 4\left(\frac{\gamma m_a}{|\vec{r}-\vec{a}|} \frac{da^i}{dt} + \frac{\gamma m_b}{|\vec{r}-\vec{b}|} \frac{db^i}{dt}\right), \quad (11)$$

что можно проверить подстановкой $h_{3^{0i}}$ из (11) в указанное выше уравнение.

Для получения уравнений движения тел в постньютоновском приближении общей теории относительности еще необходимо найти $h_{4^{00}}$, m_a , m_b , p , t_4^{ij} .

С этой целью сначала рассмотрим уравнение Эйнштейна (4) при $\alpha = 0$, $\beta = 0$ в четвертом порядке по λ . Имеем

$$\bar{R}_{4^{00}} = -\frac{1}{2}\left[\left(h_{4^{00}} - \frac{1}{2}h_{2^{00}}^2\right)_{,ss} - h_{2^{00},00} + h_{2^{00}}h_{2^{00},ss}\right]. \quad (12)$$

С другой стороны,

$$\bar{R}_{4^{00}} = -8\pi\gamma\left[\bar{T}_{4^{00}} - \frac{1}{2}\left(\bar{T}_4 + h_{2^{00}}\bar{T}_2\right)\right], \quad (13)$$

где $\bar{T}_{4^{00}}$ находим согласно правилу опускания индексов у компоненты плотности тензора T^{00} из (5).

Приравняв правые части в равенствах (12) и (13), получаем уравнение для нахождения $h_{4^{00}}$:

$$h_{4^{00},ss} = \frac{1}{2}h_{2^{00},ss}^2 + h_{2^{00},00} - h_{2^{00}}h_{2^{00},ss} + 16\pi\gamma\left[\bar{T}_{4^{00}} - \frac{1}{2}\left(\bar{T}_4 + h_{2^{00}}\bar{T}_2\right)\right]. \quad (14)$$

Но в (14) входят через $\bar{T}_{4^{00}}$ и $\bar{T}_4$ пока еще неизвестные функции m_a , m_b , p , t_4^{ij} . Как известно (см. [7; 8, § 6]), функции m_a , m_b можно найти из уравнений пятого порядка по λ :

$$\int_{V_a} \sqrt{-g} T^{\alpha\beta}_{;\beta} dV = 0, \quad \int_{V_b} \sqrt{-g} T^{\alpha\beta}_{;\beta} dV = 0, \quad (15)$$

где интегрирование ведется по трехмерным объемам V_a и V_b (V_a содержит в себе только одно тело A , а V_b – только тело B). В (15) точка с запятой (;) означает ковариантную производную (по координате x^β), которая определяется формулой

$$\sqrt{-g} T^{\alpha\beta}_{;\beta} \equiv \left(\bar{T}^{\alpha\beta} \right)_{;\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu} \bar{T}^{\beta\nu}, \quad \alpha, \beta, \nu = 0, 1, 2, 3, \quad (16)$$

где $\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}$ – символы Кристофеля 2-го рода, выражающиеся через метрический тензор

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} (g_{\beta\sigma,\nu} + g_{\nu\sigma,\beta} - g_{\beta\nu,\sigma}), \quad \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\nu\beta}, \quad g^{\alpha\sigma} g_{\sigma\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta}. \quad (17)$$

Символ Кронекера $\delta^{\alpha}_{\beta} = 0$, если $\alpha \neq \beta$, и $\delta^{\alpha}_{\beta} = 1$, если $\alpha = \beta$.

Разложив в ряды по λ подынтегральные функции в (15), пользуясь формулами (2), (5), (16), (17) и ограничиваясь членами 5-го порядка по λ , после интегрирования из (15) находим (точка над буквой означает производную по t):

$$m_a = \frac{1}{2} m_a \left(\dot{a}^s \dot{a}^s - h_{00}(\vec{a}) \right), \quad m_b = \frac{1}{2} m_b \left(\dot{b}^s \dot{b}^s - h_{00}(\vec{b}) \right). \quad (18)$$

В (5) к паскалеву давлению p_4 в среде (1) добавляется величина t^{ij}_4 ($t^{ij}_4 = 0$ при $i \neq j$ и $t^{ij}_4 \neq 0$ при $i = j$). Для вычисления p_4 , t^{11}_4 , t^{22}_4 , t^{33}_4 используем закон сохранения $T^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0$, являющийся следствием уравнений Эйнштейна (4), из которого находим (в дальнейшем для упрощения записей всюду заменяем m_a , m_b на m_a , m_b ; вводим также обозначения $r_a = |\vec{r} - \vec{a}|$, $r_b = |\vec{r} - \vec{b}|$, $a = |\vec{a}|$, $b = |\vec{b}|$):

$$\begin{aligned} 3p_4 + t^{11}_4 + t^{22}_4 + t^{33}_4 = \rho_0 \left[\frac{\gamma m_a}{r_a} + \frac{\gamma m_b}{r_b} + \frac{\gamma m_a}{R} \left(-\frac{r}{r_a} + \ln \left| \frac{r - \frac{a^2}{R} + \frac{r_a^2}{R} + 2r_a}{R - \frac{a^2}{R} + \frac{|\vec{R} - \vec{a}|^2}{R} + 2|\vec{R} - \vec{a}|} \right| \right) + \right. \\ \left. + \frac{\gamma m_b}{R} \left(-\frac{r}{r_b} + \ln \left| \frac{r - \frac{b^2}{R} + \frac{r_b^2}{R} + 2r_b}{R - \frac{b^2}{R} + \frac{|\vec{R} - \vec{b}|^2}{R} + 2|\vec{R} - \vec{b}|} \right| \right) \right], \quad (19) \end{aligned}$$

где $\vec{R} = \frac{\vec{r}}{r} R$ – радиус-вектор произвольной точки M на поверхности шара. Подставив в (14) найденные выражения для m_a , m_b согласно (18), а также выражение для $3p_4 + t^{11}_4 + t^{22}_4 + t^{33}_4$ из (19), находим уравнение Пуассона для h_{00} (его не выписываем из-за чрезвычайной громоздкости), решение которого получаем после продолжительных вычислений в виде

$$h_{00} = -\gamma m_a r_{a,00} - \gamma m_b r_{b,00} + \frac{2\gamma^2 m_a m_b}{a+b} \left(\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} \right) - \frac{4\pi\gamma^2}{3r_a} \rho_0 m_a \left(a^2 - \frac{a^3}{2R} - R^2 \right) -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{4\pi\gamma^2}{3r_b}\rho_0 m_b \left(b^2 - \frac{b^3}{2R} - R^2 \right) + \frac{2\gamma^2}{r_a^2} m_a^2 + \frac{2\gamma^2}{r_b^2} m_b^2 + \frac{4\gamma^2}{r_a r_b} m_a m_b - \\
& -\frac{8}{3}\pi\gamma^2\rho_0 \left(r^2 - \frac{r^3}{2R} - R^2 \right) \left(\frac{m_a}{r_a} + \frac{m_b}{r_b} \right) - \\
& -\frac{3\gamma m_a}{r_a} \dot{a}^s \dot{a}^s - \frac{3\gamma m_b}{r_b} \dot{b}^s \dot{b}^s - 6\gamma^2\rho_0 \left(m_a \int_{V_R} \frac{dV'}{\left| \vec{r}' - \vec{a} \right| \left| \vec{r}' - \vec{r} \right|} + m_b \int_{V_R} \frac{dV'}{\left| \vec{r}' - \vec{b} \right| \left| \vec{r}' - \vec{r} \right|} \right) + \\
& + \frac{6\gamma^2\rho_0}{R} \left(m_a \int_{V_R} \frac{r' dV'}{\left| \vec{r}' - \vec{a} \right| \left| \vec{r}' - \vec{r} \right|} + m_b \int_{V_R} \frac{r' dV'}{\left| \vec{r}' - \vec{b} \right| \left| \vec{r}' - \vec{r} \right|} \right) + \\
& + \frac{2\gamma^2\rho_0}{R} \left(m_a \int_{V_R} \ln \frac{\left| R - \frac{a^2}{R} + \frac{\left| \vec{R}' - \vec{a} \right|^2}{R} + 2 \left| \vec{R}' - \vec{a} \right|}{\left| r' - \frac{a^2}{r'} + \frac{\left| \vec{r}' - \vec{a} \right|^2}{r'} + 2 \left| \vec{r}' - \vec{a} \right|} \right| \frac{dV'}{\left| \vec{r}' - \vec{r} \right|} + \right. \\
& \left. + m_b \int_{V_R} \ln \frac{\left| R - \frac{b^2}{R} + \frac{\left| \vec{R}' - \vec{b} \right|^2}{R} + 2 \left| \vec{R}' - \vec{b} \right|}{\left| r' - \frac{b^2}{r'} + \frac{\left| \vec{r}' - \vec{b} \right|^2}{r'} + 2 \left| \vec{r}' - \vec{b} \right|} \right| \frac{dV'}{\left| \vec{r}' - \vec{r} \right|} \right), \tag{20}
\end{aligned}$$

где

$$x^0 = ct, \quad r_{a,00} = \frac{\partial^2 r_a}{(\partial x^0)^2}, \quad r_{b,00} = \frac{\partial^2 r_b}{(\partial x^0)^2}, \quad \dot{a}^s = \frac{da^s}{dt}, \quad \dot{b}^s = \frac{db^s}{dt},$$

интегрирование ведется по объему шара V_R .

Вывод уравнений движения тел A и B и их центра масс C_p в среде (1) в ньютоновском приближении общей теории относительности. Известно [8–10], что уравнения движения (УД) тел A и B в общей теории относительности можно записать в интегральной форме, проинтегрировав по V_a и V_b плотность дивергенции тензора энергии-импульса (16) и приравняв нулю полученные выражения:

$$\int_{V_a} \sqrt{-g} T^{\alpha\beta}_{;\beta} dV = 0, \quad \int_{V_b} \sqrt{-g} T^{\alpha\beta}_{;\beta} dV = 0. \tag{21}$$

При $\alpha = 0$ из (21) получаем в третьем порядке по λ $m_a = \text{const}$, $m_b = \text{const}$, а в пятом — m_a , m_b из (18). При $\alpha = i$ в НП ОТО из (21), используя метрику (2), (9), выводим после достаточно длинных и утомительных вычислений УД тел A и B (напоминаем, что движение плоское, и поэтому здесь и далее i принимает только значения 1 и 2):

$$m_a \ddot{a}_p^i = m_a \frac{d^2 a_p^i}{dt^2} = -\frac{\gamma m_a m_b}{|\vec{a}_p - \vec{b}_p|^3} (a_p^i - b_p^i) - 2\pi\gamma\rho_0 m_a \left(\frac{2}{3} - \frac{a}{2R} \right) a^i, \quad (22)$$

$$m_b \ddot{b}_p^i = m_b \frac{d^2 b_p^i}{dt^2} = -\frac{\gamma m_a m_b}{|\vec{a}_p - \vec{b}_p|^3} (b_p^i - a_p^i) - 2\pi\gamma\rho_0 m_b \left(\frac{2}{3} - \frac{b}{2R} \right) b^i, \quad (23)$$

где a_p^i, b_p^i – координаты тел A, B , учитывающие влияние на движение тел гравитационного поля среды; координатами векторов $\vec{a}_p, \vec{b}_p$ являются a_p^i, b_p^i . Так как последние члены справа в (22), (23) пропорциональны ρ_0 , которое учитываем только в первой степени, то величины a, b, a^i, b^i значком p не снабжаются, т. е. они вычисляются без учета гравитационного поля среды.

В ньютоновском приближении общей теории относительности в пустоте выбрана барицентрическая система координат, т. е. центр масс $C(c^i)$, определяемый известной формулой

$$c^i = \frac{m_a a^i + m_b b^i}{m_a + m_b}, \quad (24)$$

покоится в начале координат O и, следовательно, выполняется равенство

$$m_a a^i + m_b b^i = 0. \quad (25)$$

Центр масс материальной системы «тела A, B – шар» $C_p(c_p^i)$ следует в НП ОТО определить формулой

$$c_p^i = \frac{m_a a_p^i + m_b b_p^i}{m_a + m_b}. \quad (26)$$

Дважды продифференцировав (26) по t , заменив $m_a \ddot{a}_p^i$ и $m_b \ddot{b}_p^i$ их выражениями из (22), (23) и воспользовавшись (25), получаем УД центра масс C_p в среде (1) в НП ОТО:

$$\ddot{c}_p^i = \frac{\pi\gamma\rho_0}{(m_a + m_b)R} (m_a a a^i + m_b b b^i). \quad (27)$$

Так как вычисления ведутся с точностью до первой степени ρ_0 , то в (27) величины a, b, a^i, b^i относятся к движению тел A и B в *пустоте* и имеют значения

$$a = \frac{m_b}{m_a + m_b} r, \quad b = \frac{m_a}{m_a + m_b} r, \quad a^i = \frac{m_b}{m_a + m_b} x^i, \quad b^i = -\frac{m_a}{m_a + m_b} x^i, \quad \begin{cases} x^1 = r \cos \varphi, \\ x^2 = r \sin \varphi, \end{cases} \quad (28)$$

где

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi} \quad (29)$$

и (29) является уравнением относительной орбиты тел A и B в полярной системе координат. Используя соотношения (28), (29), преобразуем уравнение (27):

$$\ddot{c}_p^i = \frac{\pi\gamma\rho_0 m_a m_b (m_b - m_a) p x^i}{R (m_a + m_b)^3 (1 + e \cos \varphi)}, \quad (30)$$

интегрирование которого с точностью до e^2 и вековых членов приводит к параметрическим уравнениям траектории движения центра масс тел A и B в среде (1) в НП ОТО:

$$c_p^1 = K(1 - \cos \varphi - e\varphi^2 + 4e^2\varphi \sin \varphi), \quad c_p^2 = K\left(\varphi - \sin \varphi + \frac{3}{2}e^2\varphi\right), \quad (31)$$

где

$$K = \frac{\pi \rho_0 m_a m_b (m_b - m_a) p^5}{R(m_a + m_b)^4}. \quad (32)$$

Пользуясь связью (26) и соотношениями (28), находим координаты тел A и B , дающие уравнения траекторий тел A и B в среде (1) в НП ОТО:

$$a_p^i = \frac{m_b}{m_a + m_b} x^i + c_p^i, \quad b_p^i = -\frac{m_a}{m_a + m_b} x^i + c_p^i, \quad (33)$$

где x^i определяется согласно (28), (29), а c_p^i – согласно (31), (32).

Подчеркнем, что φ в уравнениях (31), (33) играет роль параметра, а не координаты полярной системы координат, т. е. (31), (33) – параметрические уравнения некоторых линий.

Вывод уравнений движения тел A , B и их центра масс в среде (1) в постньютоновском приближении общей теории относительности. Рассмотрим уравнения (21). При $\alpha = 0$ в пятом порядке из них уже найдены m_a , m_b (см. (18)). При $\alpha = i$ и использовании (18) и (19) после продолжительных и достаточно сложных вычислений (занимающих примерно 30 страниц текста) из (21) в шестом порядке по λ получаем УД тел A , B в ПНП ОТО, которые после сокращения на λ^4 и замены оставшегося λ^2 на c^{-2} (см. формулу (6.20) в [8]) можно записать в виде

$$\tilde{m}_a \frac{d^2 \tilde{a}_p^i}{dt^2} + \frac{\gamma \tilde{m}_a \tilde{m}_b}{|\tilde{a}_p - \tilde{b}_p|^3} (\tilde{a}_p^i - \tilde{b}_p^i) + 2\pi \gamma \rho_0 \tilde{m}_a \left(\frac{2}{3} - \frac{\tilde{a}}{2R} \right) \tilde{a}^i = F_{ap}^i, \quad (34)$$

где

$$\begin{aligned} F_{ap}^i = & \frac{\gamma m_a}{c^2} \left\{ \frac{3m_b}{r_{ab}^3} (a^s - b^s) \dot{a}^s \dot{a}^i - \frac{m_b}{r_{ab}^3} (a^i - b^i) \dot{a}^s \dot{a}^s + \frac{4\gamma m_b^2}{r_{ab}^4} (a^i - b^i) - \right. \\ & - \frac{3m_b}{r_{ab}^3} (a^s - b^s) \dot{b}^s \dot{a}^i - \frac{2m_b}{r_{ab}^3} (a^i - b^i) \dot{b}^s \dot{b}^s + \frac{5m_a m_b}{r_{ab}^4} (a^i - b^i) + \frac{3m_b}{r_{ab}^3} (a^s - b^s) \dot{b}^s \dot{b}^i + \\ & + \frac{3m_b}{2r_{ab}^5} [(a^s - b^s) \dot{b}^s]^2 (a^i - b^i) + \frac{4m_b}{r_{ab}^3} \dot{a}^s \dot{b}^s (a^i - b^i) - \frac{4m_b}{r_{ab}^3} (a^s - b^s) \dot{a}^s \dot{b}^i + \\ & + \pi \rho_0 \left[6 \left(\frac{2}{3} - \frac{a}{2R} \right) a^s \dot{a}^s \dot{a}^i - 2 \left(\frac{2}{3} - \frac{a}{2R} \right) \dot{a}^s \dot{a}^s a^i + 8 \frac{\gamma m_b}{r_{ab}} \left(\frac{2}{3} - \frac{a}{2R} \right) a^i - \right. \\ & - 8 \frac{\gamma m_b}{r_{ab}^3} \left(\frac{a^2}{3} - \frac{a^3}{6R} - \frac{R^2}{3} \right) (a^i - b^i) - 7 \frac{\gamma m_b}{r_{ab}} \left(\frac{2}{3} - \frac{b}{2R} \right) b^i - \frac{\gamma m_b}{r_{ab}^3} \left(\frac{2}{3} - \frac{b}{2R} \right) \times \\ & \times (a^s - b^s) b^s (a^i - b^i) - 2 \frac{\gamma m_b}{r_{ab}^3} \left(\frac{b^2}{3} - \frac{b^3}{6R} - \frac{R^2}{3} \right) (a^i - b^i) \left. \right] \Bigg\} + \\ & + \frac{\gamma^2 m_a \rho_0}{c^2} \left\{ 3 \left[m_a \int_{V_R} \frac{x^{i'} - a^i}{|\vec{r}' - \vec{a}|^4} dV' - m_b \int_{V_R} \frac{(x^{i'} - a^i) dV'}{|\vec{r}' - \vec{b}| |\vec{r}' - \vec{a}|^3} \right] - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{3}{R} \left[m_a \int_{V_R} \frac{r' (x^{i'} - a^i)}{|\vec{r}' - \vec{r}|^4} dV' + m_b \int_{V_R} \frac{r' (x^{i'} - a^i)}{|\vec{r}' - \vec{b}| |\vec{r}' - \vec{a}|^3} dV' \right] - \\
 & -\frac{1}{R} \left[m_a \int_{V_R} \ln \frac{R - \frac{a^2}{r'} + \frac{|\vec{R} - \vec{a}|^2}{R} + 2 |\vec{R} - \vec{a}|}{r' - \frac{a^2}{r'} + \frac{|\vec{r}' - \vec{a}|^2}{r'} + 2 |\vec{r}' - \vec{a}|} \left| \frac{x^{i'} - a^i}{|\vec{r}' - \vec{a}|^3} dV' + \right. \right. \\
 & \left. \left. + m_b \int_{V_R} \ln \frac{R - \frac{b^2}{r'} + \frac{|\vec{R} - \vec{b}|^2}{R} + 2 |\vec{R} - \vec{b}|}{r' - \frac{b^2}{r'} + \frac{|\vec{r}' - \vec{b}|^2}{r'} + 2 |\vec{r}' - \vec{b}|} \left| \frac{x^{i'} - b^i}{|\vec{r}' - \vec{b}|^3} dV' \right. \right] \Bigg\}; \quad (35)
 \end{aligned}$$

тильда «~» над буквой указывает, что величина вычисляется с учетом релятивистских поправок, пропорциональных множителю $\lambda^2 = c^{-2}$, $\tilde{m}_a = m_a + m_{a_4}$, $\tilde{m}_b = m_b + m_{b_4}$, m_{a_4} , m_{b_4} (см. в (18));

$r_{ab} = |\vec{a} - \vec{b}|$ – ньютоновское расстояние между телами A и B .

Для тела B имеем следующие УД в среде (1) в ПНП ОТО:

$$\tilde{m}_b \frac{d^2 \tilde{b}_\rho^i}{dt^2} + \frac{\gamma \tilde{m}_a \tilde{m}_b}{\tilde{r}_{ab\rho}^3} (\tilde{b}_\rho^i - \tilde{a}_\rho^i) + 2\pi\gamma\rho_0 \tilde{m}_b \left(\frac{2}{3} - \frac{\tilde{b}}{2R} \right) \tilde{b}^i = F_{b\rho}^i, \quad (36)$$

где $\tilde{r}_{ab\rho} = |\tilde{\vec{a}}_\rho - \tilde{\vec{b}}_\rho|$ – расстояние между телами A и B при учете влияния гравитационного поля среды (1) и релятивистских поправок к движению тел A и B ; $F_{b\rho}^i$ получаем из $F_{a\rho}^i$ заменой букв $a \leftrightarrow b$.

Центр масс $\tilde{C}_\rho(\tilde{c}_\rho^i)$ тел A и B в среде (1) в ПНП ОТО определяем формулой

$$\tilde{c}_\rho^i = \frac{\tilde{m}_a \tilde{a}_\rho^i + \tilde{m}_b \tilde{b}_\rho^i}{\tilde{m}_a + \tilde{m}_b}, \quad (37)$$

где $\tilde{a}_\rho^i$, $\tilde{b}_\rho^i$ являются решениями уравнений (34), (36). Если релятивистские силы $F_{a\rho}^i$, $F_{b\rho}^i$ в (34), (36) заменить нулями, получаем уравнения (22), (23), решениями которых являются a_ρ^i , b_ρ^i , указанные формулами (33).

Проинтегрировав систему (34), (36), находим $\tilde{a}_\rho^i$, $\tilde{b}_\rho^i$ (выражающие их формулы занимают чрезвычайно много места, и поэтому здесь не приводятся), подставив которые в (37), находим

$$\tilde{c}_\rho^i = c_\rho^i + \Delta c_\rho^i, \quad (38)$$

где функции c_ρ^i определяются формулами (31), (32), а функции Δc_ρ^i появились, благодаря учету в (34), (36) релятивистских сил $F_{a\rho}^i$, $F_{b\rho}^i$.

Таким образом, получили параметрические уравнения траектории движения центра масс тел A и B (38), состоящие из суммы: ньютоновское движение c_p^i плюс поправочное релятивистское движение Δc_p^i .

Обсуждение результатов, численные оценки эффектов в ньютоновском приближении общей теории относительности. Рассмотрим сначала предсказываемые закономерности движения центра масс C_p и тел A, B в среде (1) в НП ОТО, пользуясь достаточно простыми и *впервые* выведенными уравнениями (31)–(33).

1. Рассматриваемая система «два тела – материальный шар» не является замкнутой, что приводит при учете гравитационного поля неоднородной среды к неравномерному криволинейному движению центра масс (26), (37) этой системы, т. е. к отсутствию барицентрической системы отсчета в НП и ПНП ОТО. (О понятиях «замкнутая система», «центр тяжести», «центр инерции», «центр масс» см. в [8, §17, 23; 11, §9, 14; 13, § 23; 14, §5, 8].)

2. Прежде всего отметим, что эффект смещения центра масс в неоднородной среде (1) существует уже в *ньютоновской* теории движения тел, в то время как в среде с *постоянной* плотностью $\rho = \text{const}$ эффект появляется только в ПНП ОТО (см. [1, формулы (15)–(17)]; в (17) следует заменить 10^{10} на 10^{-10} , что означает чрезвычайную малость релятивистского эффекта, указанного в [1]). Если в [1], формула (15), взять, в частности,

$$m_a = 10^{33} \text{ г}, \quad m_b = 2 \cdot 10^{33} \text{ г}, \quad \rho = 10^{-21} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}, \quad R = 10^{18} \text{ см}, \quad |\vec{a}| = 2|\vec{b}| = (1 - 10^{-v})R,$$

где $v = 3,36 \cdot 10^5$, то получим в [1] циклоиду (17), но период обращения тел будет порядка 250 лет.

3. Ньютоновский эффект смещения центра масс C_p существует только при $m_a \neq m_b$. Если $m_a = m_b$, то согласно (32) $K = 0$, и тогда $c_p^i = 0$, т. е. центр масс C_p покоится в начале координат O , $a = b$ согласно (28) и тела A и B движутся по одному и тому же эллипсу, диаметр которого r из (29), находясь в диаметрально противоположных положениях.

4. Если движение тел A и B эллиптическое, то $m_a \neq m_b$ и движение центра масс подчиняется уравнениям (31), (32), из которых при *малом* эксцентриситете $0 < e \ll 1$ следует, что центр масс практически передвигается по циклоиде (за небольшой промежуток времени)

$$c_p^1 = K(1 - \cos \varphi), \quad c_p^2 = K(\varphi - \sin \varphi), \quad (39)$$

в положительном направлении координатной оси Ox^2 с увеличением φ , если $K > 0$ ($m_b > m_a$ согласно (32)), и в отрицательном – при $K < 0$ ($m_b < m_a$). За один оборот тел A и B вокруг своего центра масс получаем смещение на расстояние $\Delta = 2\pi K$. При нормальных эксцентриситетах e траектория (31) значительно отличается от циклоиды (39).

5. Оценим порядок величины K для системы двух тел, близких по своим характеристикам к системе Солнце – Юпитер плюс плотность межпланетной среды. Принимаем:

$$m_a = 2 \cdot 10^{33} \text{ г}, \quad m_b = 2 \cdot 10^{30} \text{ г}, \quad e = 0,048, \quad R = 10^{18} \text{ см}, \quad p = 7,62 \cdot 10^{13} \text{ см}, \quad \rho_0 = 10^{-21} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}.$$

Тогда согласно (32) имеем $K \approx -4 \cdot 10^{-6} \text{ см}$ и смещение за один оборот $\Delta = 2\pi K \approx -1,26 \cdot 10^{-5} \text{ см}$, т. е. смещение для планетарной системы чрезвычайно малое.

6. С помощью современной наблюдательной техники в Галактике обнаружены газопылевые облака, внутри которых находятся плотные образования (планетарные, диффузные туманности, шаровые скопления и т. п.). Принимаем в соответствии с данными наблюдений (см. [2–6]) один из реальных вариантов:

$$m_a = 10^{33} \text{ г}, \quad m_b = 2 \cdot 10^{33} \text{ г}, \quad p = 10^{16} \text{ см}, \quad R = 10^{18} \text{ см}, \quad \rho_0 = 10^{-18} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}.$$

Подставив эти данные в формулу (32), находим $K \approx 0,78 \cdot 10^{10} \text{ см}$. Тогда за один оборот тел A и B вокруг их центра масс получаем его смещение на $\Delta = 2\pi K \approx 5 \cdot 10^{10} \text{ см} = 500\,000 \text{ км}$.

7. При нормальном эксцентриситете $0 < e < 1$ членами с « e » в (31) при рассмотрении движения за *большие* промежутки времени пренебрегать нельзя, так как при больших φ (31) дает траекторию, существенно отличающуюся от циклоиды (39). Действительно, при прежнем K и $e = 0,5$ смещение по оси Ox^1 центра масс после n оборотов дает величину $c_p^1 = (2\pi n)^2 eK$, а по оси Ox^2 смещение $c_p^2 = 2,75\pi nK$. С увеличением числа оборотов n c_p^1 , c_p^2 неограниченно увеличиваются (по модулю). За миллионы – миллиарды лет своего существования центр масс двух тел (например, двойной звезды, рассмотренной в пункте 6) благодаря неоднородной среде должен согласно уравнениям (31) «путешествовать» в космосе на значительные расстояния, порядка нескольких миллиардов километров.

Обсуждение результатов и численные оценки эффектов в постньютоновском приближении общей теории относительности. Отношение релятивистских сил F_{ap}^i , F_{bp}^i , присутствующих в уравнениях движения (34) и (36), к ньютоновским силам в этих уравнениях слева (пропорциональных плотности ρ_0) дает величину порядка v^2/c^2 , где v – скорость движения тел A и B , которая в стандартных ситуациях имеет порядок десятков километров в час. Тогда $v^2/c^2 \sim 10^{-8}$. Это означает, что *качественная* картина поведения тел A и B не изменится при воздействии на систему тел сил F_{ap}^i , F_{bp}^i , а только изменятся численные оценки эффектов на величины порядка 10^{-8} . Формулы, представляющие эти величины, выписать в статье невозможно из-за их большого объема, в чем нет сожаления в силу малых поправок при их учете. Таким образом, $\tilde{a}_p^i$, $\tilde{b}_p^i$, $\tilde{c}_p^i$ соответственно из уравнений (34), (36), (38) должны отличаться от a_p^i , b_p^i , c_p^i из (31)–(33) на величины порядка 10^{-8} , которыми можно пренебречь.

Заключение. Подводя итоги проведенным обсуждениям и оценкам полученных результатов, отметим, что структура коэффициента K из (32) определяет те ситуации в системе «два тела – среда», при которых смещения центра масс тел будут значительными и траектории тел существенно будут отличаться от их траекторий в пустоте: смещения увеличиваются при увеличении ρ_0 и особенно при увеличении расстояния между телами, т. е. при увеличении p (оно в 5-й степени!) и постоянном эксцентриситете e эллиптической относительной орбиты тел (в силу связи $p = a(1 - e^2)$ при увеличении p также увеличивается a – большая полуось орбиты).

Полученные в данной работе результаты можно использовать в космологии и космогонии (движения пар планетарных систем, пар шаровых скоплений в Галактике, пар галактик в космической среде и других систем).

Список использованных источников

1. Рябушко, А. П. Движение релятивистского центра масс системы двух тел в среде / А. П. Рябушко, И. Т. Неманова, Т. А. Жур // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2019. – Т. 55, № 1. – С. 77–82. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-1-77-82>
2. Мартынов, Д. Я. Курс общей астрофизики / Д. Я. Мартынов. – М.: Наука, 1988. – 640 с.
3. Ипатов, С. И. Миграция небесных тел в Солнечной системе / С. И. Ипатов. – М.: Эдиториал УРСС, 2000. – 320 с.
4. Кононович, Э. В. Общий курс астрономии / Э. В. Кононович, В. И. Мороз. – М.: Эдиториал УРСС, 2004. – 544 с.
5. Клищенко, А. П. Астрономия / А. П. Клищенко, В. И. Шупляк. – М.: Новое знание, 2004. – 224 с.
6. Засов, А. В. Общая астрофизика / А. В. Засов, К. А. Постнов. – Фрязино: Век-2, 2011. – 576 с.
7. Рябушко, А. П. Гравитационное поле газопылевого шара с двумя притягивающими центрами в общей теории относительности / А. П. Рябушко, И. Т. Неманова // Докл. Акад. наук БССР. – 1987. – Т. 31, № 8. – С. 519–522.
8. Рябушко, А. П. Движение тел в общей теории относительности / А. П. Рябушко. – Минск: Выш. шк., 1979. – 240 с.
9. Einstein, A. On the Motion of Particles in General Relativity Theory / A. Einstein., L. Infeld // Canad. J. Math. – 1949. – Vol. 1, № 3. – P. 209–241. <https://doi.org/10.4153/CJM-1949-020-8>.
10. Инфельд, Л. Движение и релятивизм / Л. Инфельд, Е. Плебаньский. – М.: Иностран. лит., 1962. – 204 с.
11. Ландау, Л. Д. Теория поля / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М.: Наука, 1988. – 512 с.
12. Рябушко, А. П. Гравитационное поле притягивающего центра, окруженного пылевидным облаком, в постньютоновском приближении общей теории относительности / А. П. Рябушко, И. Т. Неманова // Докл. Акад. наук БССР. – 1983. – Т. 27, № 10. – С. 889–892.
13. Матвеев, А. Н. Механика и теория относительности / А. Н. Матвеев. – М.: Мир и Образование, 2003. – 432 с.
14. Ландау, Л. Д. Механика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М.: Наука, 1965. – 204 с.

References

1. Ryabushko A. P., Nemanova I. T., Zhur T. A. Motion of the relativistic center of mass of the two-body system in the environment. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnyykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2019, vol. 55, no. 1, pp. 77–82 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-1-77-82>
2. Martinov D. Y. *General Astrophysics Course*. Moscow, Nauka Publ., 1988. 640 p. (in Russian).
3. Ipatov S. I. *Migration of Celestial Bodies in the Solar System*. Moscow, Editorial URSS Publ., 2000. 320 p. (in Russian).
4. Kononovich E. V., Moroz V. I. *General Course of Astronomy*. Moscow, Editorial URSS Publ., 2004. 544 p. (in Russian).
5. Klischenko A. P., Shuplyak V. I. *Astronomy*. Moscow, Novoe Znanie Publ., 2004. 224 p. (in Russian).
6. Zasov A. V., Postnov K. A. *General Astrophysics*. Fryazino, Vek-2 Publ., 2011. 576 p. (in Russian).
7. Ryabushko A. P., Nemanova I. T. The gravitational field of a gas-dust ball with two attractive centers in the general theory of relativity. *Doklady Akademii nauk BSSR = Doklady of the Academy of Sciences of BSSR*, 1987, vol. 31, no. 6, pp. 519–522 (in Russian).
8. Ryabushko A. P. *Motion of Bodies in the General Theory of Relativity*. Minsk, Vysheishaya shkola Publ., 1979. 240 p. (in Russian).
9. Einstein A., Infeld L. On the Motion of Particles in General Relativity Theory. *Canadian Journal of Mathematics*, 1949, vol. 1, no. 3, pp. 209–241. <https://doi.org/10.4153/CJM-1949-020-8>.
10. Infeld L., Plebanski J. *Motion and Relativity*. Elsevier, 1960. 230 p. <https://doi.org/10.1016/C2013-0-10013-X>
11. Landau L. D., Lifshitz E. M. *The Field Theory*. Moscow, Nauka Publ., 1988. 512 p.
12. Ryabushko A. P., Nemanova I. T. The Gravitational Field of an Attractive Center Surrounded by a Dusty Cloud in the Post-Newtonian Approximation of the General Theory of Relativity. *Doklady Akademii nauk BSSR = Doklady of the Academy of Sciences of BSSR*, 1983, vol. 27, no. 10, pp. 889–892. (in Russian).
13. Matveev A. N. *Mechanics and Theory of Relativity*. Moscow, Mir i Obrazovanie Publ., 2003. 432 p. (in Russian).
14. Landau L. D., Lifshitz E. M. *Mechanics*. Moscow, Nauka Publ., 1965. 204 p. (in Russian).

Information about the authors

Рябушко Антон Петрович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики, Белорусский национальный технический университет (пр. Независимости, 65, 220141, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: tatyana-zhur@mail.ru

Неманова Инна Тимофеевна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры физики, Белорусский государственный аграрный технический университет (пр. Независимости, 99, 220023, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: tatyana-zhur@mail.ru

Жур Татьяна Антоновна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики факультета предпринимательства и управления, Белорусский государственный аграрный технический университет (пр. Независимости, 99, 220023, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: tatyana-zhur@mail.ru

Информация об авторах

Anton P. Ryabushko – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor of the Department of Higher Mathematics, Belarusian National Technical University (65, Nezavisimosti Ave., 220141, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: tatyana-zhur@mail.ru

Inna T. Nemanova – Ph. D. (Physics and Mathematics), Assistant Professor of the Department of Higher Mathematics, Belarusian State Agrarian Technical University (99, Nezavisimosti Ave., 220023, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: tatyana-zhur@mail.ru

Tatyana A. Zhur – Ph. D. (Physics and Mathematics), Assistant Professor of the Department of Higher Mathematics of the Faculty of Entrepreneurship and Management, Belarusian State Agrarian Technical University (99, Nezavisimosti Ave., 220023, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: tatyana-zhur@mail.ru

ISSN 1561-2430 (Print)
 ISSN 2524-2415 (Online)
 УДК 539.12

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-2-206-216>

Поступила в редакцию 21.02.2020

Received 21.02.2020

А. Н. Лаврёнов¹, И. А. Лаврёнов²

¹Белорусский государственный педагогический университет, Минск, Беларусь

²ООО «Октоний технолоджи», Минск, Беларусь

СКРЫТАЯ СИММЕТРИЯ 16D ОСЦИЛЛЯТОРА И ЕГО 9D КУЛОНОВСКОГО АНАЛОГА

Аннотация. Представлена квадратичная алгебра Хана $QH(3)$ как алгебра скрытой симметрии для определенного класса точно решаемых потенциалов, обобщающих соответственно 16D осциллятор и его по отношению к преобразованию Гурвица 9D кулоновский аналог на основе $SU(1,1) \oplus SU(1,1)$. Обсуждается разрешимость уравнения Шредингера для этих задач методом разделения переменных в сферических и параболических (цилиндрических) координатах. Показано, что коэффициенты перекрытия между волновыми функциями в этих координатах совпадают с коэффициентами Клебша – Гордана для $SU(1,1)$ алгебры.

Ключевые слова: квадратичная алгебра Хана $QH(3)$, 9D кулоновская система, 16D гармонический осциллятор, преобразование Гурвица, скрытая симметрия, $SU(1,1) \oplus SU(1,1)$

Для цитирования. Лаврёнов, А. Н. Скрытая симметрия 16D осциллятора и его 9D кулоновского аналога / А. Н. Лаврёнов, И. А. Лаврёнов // Вест. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2020. – Т. 56, № 2. – С. 206–216. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-2-206-216>

Alexandre N. Lavrenov¹, Ivan A. Lavrenov²

¹Belarusian State Pedagogical University named after Maxim Tank, Minsk, Belarus

²Octonion Technology Ltd., Minsk, Belarus

HIDDEN SYMMETRY OF THE 16D OSCILLATOR AND ITS 9D COULOMB ANALOGUE

Abstract. We present the quadratic Hahn algebra $QH(3)$ as an algebra of the hidden symmetry for a certain class of exactly solvable potentials, generalizing the 16D oscillator and its 9D coulomb analogue to the generalized version of the Hurwitz transformation based on $SU(1,1) \oplus SU(1,1)$. The solvability of the Schrodinger equation of these problems by the variables separation method are discussed in spherical and parabolic (cylindrical) coordinates. The overlap coefficients between wave functions in these coordinates are shown to coincide with the Clebsch – Gordan coefficients for the $SU(1,1)$ algebra.

Keywords: quadratic Hahn algebra $QH(3)$, 9D coulomb system, 16D harmonic oscillator, Hurwitz transformation, hidden symmetry, $SU(1,1) \oplus SU(1,1)$

For citation. Lavrenov A. N., Lavrenov I. A. Hidden symmetry of the 16D oscillator and its 9D coulomb analogue. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2020, vol. 56, no. 2, pp. 206–216 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-2-206-216>

Введение. Осциллятор и кулоновская система являются первыми яркими представителями точно решаемых моделей, которые позволяют строить на их основе различные приближенные методы или уточнять границы применимости новых. Оказалось, что в определенных размерностях своих пространств данные модели являются дуальными через преобразование Гурвица [1–2]. В нормированных алгебрах с делением обсуждаемые в настоящей работе 16-мерный гармонический осциллятор и 9-мерная кулоновская система отражают последний возможный вариант реализации преобразовании Гурвица $R^{16} \rightarrow R^9$ (расслоение Хопфа $S^{15} \rightarrow S^8$). В цикле работ [3–8] тщательно проработаны многие вопросы последнего случая расслоения Хопфа, но только для изотропного осциллятора.

С другой стороны, осциллятор и кулоновская система имеют решение в различных системах координат, что отражает наличие определенных операторов симметрии. Часто данные операторы формируют свою алгебру так называемой скрытой симметрии. Для систематического поиска

ка таких операторов были использованы различные подходы [9–21]. В частности, новый общий подход к системам, обладающим $SU(1,1) \oplus SU(1,1)$ динамической симметрией, был предложен в [22]. Автор указанной работы А. С. Жеданов также рассмотрел конкретную реализацию предложенной абстрактной схемы для следующих трехмерных кольцеобразных потенциалов: обобщенного кулона

$$H_1 = H_0 - \frac{\alpha}{r} + \frac{d_1}{r^2(1 + \cos \theta)} + \frac{d_2}{r^2(1 - \cos \theta)} \quad (1)$$

и осциллятора

$$H_2 = H_0 + \frac{\omega^2 r^2}{2} + \frac{g_1}{x^2 + y^2} + \frac{g_2}{z^2}, \quad (2)$$

где $H_0 = \frac{p^2}{2}$ есть гамильтониан свободного движения.

Целью настоящей работы является обобщение результатов А. С. Жеданова [22] на случай пространств размерности 16 и 9 для гармонического осциллятора и кулоновской системы соответственно.

Также отметим, что есть трансформация вышеуказанного подхода на многомерный случай в рамках тензорного произведения $SU(1,1)$ или ставшего модным в последнее время коммутантного подхода в смысле двойственности Хоу [23–27].

Статья организована следующим образом. В разделе 1 напомним правило сложения алгебр $SU(1,1)$ и проблема скрытой симметрии для систем, обладающих такой динамической симметрией в соответствии с [22]. В разделах 2 и 3 дается конкретная реализация вышеупомянутой абстрактной схемы однотипной скрытой симметрии в рамках алгебры Хана, приводящая к определенному классу точно решаемых потенциалов соответственно для 16-мерного осциллятора и 9-мерной кулоновской системы. В заключении приведено краткое изложение результатов и возможных перспектив.

1. Абстрактная динамическая система, связанная с $SU(1,1) \oplus SU(1,1)$. В начале этого раздела кратко напомним основные особенности алгебры Ли $SU(1,1)$. Она имеет операторы J_0, J_+, J_- , которые подчиняются следующим коммутационным соотношениям:

$$[J_0, J_{\pm}] = \pm J_{\pm}; \quad [J_-, J_+] = 2J_0, \quad (3)$$

а ее оператор Казимира определяется так:

$$Q = J_0^2 - J_+ J_- - J_- J_+ = \lambda(\lambda - 1). \quad (4)$$

Для представления положительной дискретной серии D^+ этой алгебры имеем

$$\begin{aligned} J_0 |n, \lambda\rangle &= (n + \lambda) |n, \lambda\rangle; \\ J_- |n, \lambda\rangle &= \sqrt{n(n + 2\lambda - 1)} |n - 1, \lambda\rangle; \\ J_+ |n, \lambda\rangle &= \sqrt{(n + 1)(n + 2\lambda)} |n + 1, \lambda\rangle, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\lambda > 0$ – параметр представления; $n = 0, 1, 2, \dots$.

Теперь рассмотрим сложение двух неприводимых представлений $SU(1,1)$, для которых начальные операторы Казимира принимают значения $Q^{(\beta)} = \lambda_{\beta}(\lambda_{\beta} - 1)$, $\beta = 1, 2$, и запишем

$$J_0^{(12)} = J_0^{(1)} + J_0^{(2)}, \quad J_{\pm}^{(12)} = J_{\pm}^{(1)} + J_{\pm}^{(2)} \quad (6)$$

с супериндексом, обозначающим, на какой из двух факторов в $SU(1,1)^{\otimes 2}$ оператор действует.

Нетрудно убедиться, что новые операторы (6) также удовлетворяют коммутационным соотношениям (3). Связный базис $|n_{12}, \lambda_{12}\rangle$ определяется так:

$$\begin{aligned} J_0^{(12)} |n_{12}, \lambda_{12}\rangle &= (n_{12} + \lambda_{12}) |n_{12}, \lambda_{12}\rangle; \\ Q^{(12)} |n_{12}, \lambda_{12}\rangle &= \lambda_{12} (\lambda_{12} - 1) |n_{12}, \lambda_{12}\rangle. \end{aligned} \quad (7)$$

При разложении коэффициенты Клебша – Гордана (ККГ) C_{mm}^l , записываются в виде

$$|j, \lambda_{12}\rangle = \sum_{n=0}^{n=N} C_{n, \lambda_1; N-n, \lambda_2}^{j, \lambda_{12}} |n, \lambda_1\rangle \otimes |N-n, \lambda_2\rangle, \quad (8)$$

где $\lambda_{12} = \lambda_1 + \lambda_2 + p$; $N = j + p$; $p = 0, 1, 2, \dots$. Явное выражение для ККГ в терминах полиномов Хана можно найти в работе [22]:

$$C_{n, \lambda_1; N-n, \lambda_2}^{j, \lambda_{12}} = h_n w_p {}_3F_2 \left(\begin{matrix} -n & -p & 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + p - 1 \\ & -N & 2\lambda_1 \end{matrix} ; 1 \right). \quad (9)$$

Очевидно, что гамильтониан $H = J_0^{(12)}$ обладает динамической симметрией $SU(1,1) \oplus SU(1,1)$, и его спектр $\varepsilon = n_1 + n_2 + \lambda_1 + \lambda_2$ вырожден. Это означает, что существуют интегралы движения, коммутирующие с H . Тривиальный пример таких интегралов для возможных комбинаций из начальных операторов $(J_0^{(1)}, J_0^{(2)}, J_{\pm}^{(1)}, J_{\pm}^{(2)})$ можно предложить следующий:

$$K_1 = J_0^{(1)} - J_0^{(2)}; \quad (10)$$

$$K_2 = Q^{(12)} = Q^{(1)} + Q^{(2)} + 2J_0^{(1)} J_0^{(2)} - J_+^{(1)} J_-^{(2)} - J_-^{(1)} J_+^{(2)}. \quad (11)$$

Скрытая симметрия нашего гамильтониана $H = J_0^{(12)}$ означает существование некоторой алгебры, составленной из интегралов K_1, K_2 . Согласно работе [22] такая алгебра является квадратичной алгеброй Хана $QH(3)$ при коммутационных соотношениях

$$[K_2, [K_1, K_2]] = 2K_2 K_1 K_2 - K_2^2 K_1 - K_1 K_2^2 = -2(K_1 K_2 + K_2 K_1) + 4\varepsilon(Q^{(1)} - Q^{(2)}); \quad (12)$$

$$[[K_1, K_2], K_1] = 2K_1 K_2 K_1 - K_1^2 K_2 - K_2 K_1^2 = -2K_1^2 - 4K_2 + 2\varepsilon^2 + 4(Q^{(1)} + Q^{(2)}). \quad (13)$$

Таким образом, диагонализация оператора K_1 соответствует, с одной стороны, выбору несвязанного базиса $|n_1, \lambda_1\rangle \otimes |n_2, \lambda_2\rangle$ в пространстве прямой суммы $SU(1,1) \oplus SU(1,1)$, а с другой – к разделению переменных в цилиндрических координатах. Аналогично диагонализация оператора K_2 соответствует, с одной стороны, выбору связанного базиса $|n_{12}, \lambda_{12}\rangle$ в пространстве прямой суммы $SU(1,1) \oplus SU(1,1)$, а с другой – для разделения переменных в сферических координатах. Перекрытия между собственными состояниями операторов K_1 и K_2 (или волновыми функциями в этих системах координат) могут быть записаны в терминах ККГ для $SU(1,1)$ или полиномов Хана (7).

2. 16-Мерный осциллятор. В начале этого раздела будем рассматривать модель сингулярного осциллятора для любого значения размерности N пространства R^N :

$$\hat{H}_0 \Phi(\vec{x}) \equiv \left[-\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{\omega^2}{2} x_k x_k + \frac{c}{x_k x_k} \right] \Phi = E^{co} \Phi \equiv 4Z \Phi$$

или

$$\hat{H}_0 \Phi(\vec{x}) = \left[\hat{H}_0^{co} + \frac{c}{x_k x_k} \right] \Phi \equiv \left[\hat{H}_0^{co} + V^c(x_k x_k) \right] \Phi = 4Z \Phi, \quad (14)$$

где по паре повторяющихся индексов k ведется суммирование от 1 до N .

Введем вместо декартовых координат $(x_{k=1,N}) = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ в пространстве R^N гиперсферические координаты – $(\phi_{l=1,N-1}) = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{N-1})$ – гиперсферические углы, r -гиперрадиус:

$$\begin{aligned} x_{N-1} &= r \cos(\phi_{N-1}); \\ x_{N-2} &= r \sin(\phi_{N-1}) \cos(\phi_{N-2}); \\ &\dots \\ &\dots \\ x_2 &= r \sin(\phi_{N-1}) \sin(\phi_{N-2}) \dots \sin(\phi_2) \cos(\phi_1); \\ x_1 &= r \sin(\phi_{N-1}) \sin(\phi_{N-2}) \dots \sin(\phi_2) \sin(\phi_1). \end{aligned} \quad (15)$$

Используя анзац $\Phi(\vec{x}) = \Phi(r, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{N-1}) = R(r)\Omega(\phi)$, уравнение Шредингера для нашей модели N -мерного сингулярного осциллятора (14) можно переписать в терминах его отдельных уравнений для гиперрадиуса r и угловых переменных ϕ следующим образом:

$$\left[\frac{1}{r^{N-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{N-1} \frac{\partial}{\partial r} \right) + (2E^{co} - \omega^2 r^2) - \frac{P+2c}{r^2} \right] R(r) = 0; \quad (16)$$

$$[\hat{L}^2 - P] \Omega(\phi) = 0, \quad (17)$$

где $P \equiv L(L+N-2)$ – константа разделения и также собственное значение оператора квадрата оператора орбитального углового момента количества движения или вращения $\hat{L}^2$ (17).

Фиксация квантового числа L позволяет свести задачу к одномерной. Это, в свою очередь, означает, что фактически симметрия задачи полностью определяется радиальной частью или уравнением (16). Таким образом, его решение или волновая функция для нашей модели N -мерного сингулярного осциллятора будет иметь следующий вид:

$$\Phi(\vec{x}) = R_{nL}(r) \Omega(\phi) = C_{nL} r^{L'} e^{-\frac{\omega r^2}{2}} {}_1F_1 \left(-n; L' + \frac{N}{2}; \omega r^2 \right) \Omega(\phi), \quad (18)$$

где $L'(L'+N-2) = L(L+N-2) + 2c$, а энергетический спектр определится выражением

$$E_m^{co} = 2\omega \left(n + \frac{L'}{2} + \frac{N}{4} \right). \quad (19)$$

Теперь переведем все на язык операторов $SU(1,1)$ и дадим следующую их реализацию для любого значения размерности N пространства R^N :

$$\begin{aligned} J_0 &= \left[-\frac{1}{4\omega} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{\omega^2}{4} x_k x_k + \frac{c}{2\omega x_k x_k} \right]; \quad J_1 = \frac{\omega}{2} x_k x_k - J_0; \\ J_2 &= \frac{i}{2} \left[x_k \frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{N}{2} \right]; \quad J_{\pm} = J_1 \pm iJ_2; \quad Q = \frac{N(N-4)}{16} + \frac{c - \hat{L}^2}{2}. \end{aligned} \quad (20)$$

Нетрудно заметить, что, выбирая в качестве гамильтониана $\hat{H}_0$ оператор $2\omega J_0$, мы получаем вышерассмотренную модель сингулярного осциллятора, которая обобщает модель изотропного осциллятора [3]. Отметим, что при $N=1$ и $N=2$ воспроизводим результат, представленный в [22].

Однако при использовании определенного значения оператора Казимира Q фактически происходит фиксация квантового числа L для угловой части, что позволяет свести задачу к одномерной. Поэтому для радиальной части после выполнения калибровочного преобразования

$$J \rightarrow \tilde{J} = r^{\frac{(N-1)}{2}} J r^{\frac{(N-1)}{2}}$$

(для устранения члена с производной по радиальной переменной r) операторы $SU(1,1)$ преобразуются к следующему виду:

$$\begin{aligned} \tilde{J}_0 &= \left[-\frac{1}{4\omega} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\omega}{4} r^2 + \frac{g}{2\omega r^2} \right]; \quad \tilde{J}_{\pm} = \tilde{J}_1 \pm i\tilde{J}_2; \\ \tilde{J}_1 &= \frac{\omega r^2}{2} - \tilde{J}_0; \quad \tilde{J}_2 = \frac{i}{2} \left[r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2} \right], \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$g = \frac{4L(L+N-2) + 8c + (N-1)(N-3)}{8}.$$

Согласно предыдущему разделу, для того чтобы квадратичная алгебра Хана $QH(3)$ была скрытой алгеброй симметрии, должны быть выполнены два условия. Во-первых, результирующий гамильтониан должен быть суммой двух исходных. Во-вторых, каждый из исходных гамильтонианов должен иметь симметрию $SU(1,1)$.

Таким образом, вышеописанная реализация операторов $SU(1,1)$ для любого значения размерности N пространства R^N позволяет представить результирующий гамильтониан $\hat{H}_0$ в пространстве $R^{N=16}$ размерности $N = 16$ в виде суммы двух исходных $\hat{H}_{\beta}$, $\beta = 1, 2$, каждый из которых имеет искомую алгебру симметрии $SU(1,1)$ в радиальной переменной r для своего значения размерности N_{β} пространства $R^{N_{\beta}}$. Так как возможные неэквивалентные значения разбиения числа $N = 16$ на положительные числа N_1, N_2 (т. е. $N = 16 \equiv N_1 + N_2$) известны – всего 8 пар:

$$(N_1 = 1, N_2 = 15), (N_1 = 2, N_2 = 14), (N_1 = 3, N_2 = 13), (N_1 = 4, N_2 = 12),$$

$$(N_1 = 5, N_2 = 11), (N_1 = 6, N_2 = 10), (N_1 = 7, N_2 = 9), (N_1 = 8, N_2 = 8)$$

или $(N_1 = s, N_2 = 16 - s)$, где $s = 1, 8$, то получаем однотипную скрытую симметрию в рамках квадратичной алгебры Хана для 16-мерного пространства в рамках определенного класса (8 вариантов) точно решаемых потенциалов сингулярного осциллятора своего пространства соответственно размерности N_1 и N_2 :

$$\begin{aligned} \hat{H}_0 \Phi &\equiv (\hat{H}_1 + \hat{H}_2) \Phi \equiv 2\omega \left[J_0^{(1)} + J_0^{(2)} \right] \Phi \equiv \\ &\equiv 2\omega \left[-\frac{1}{4\omega} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} + \frac{\omega^2}{4} x_i x_i + \frac{c_1}{2\omega x_i x_i} \right] \Phi + \\ &+ 2\omega \left[-\frac{1}{4\omega} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\omega^2}{4} x_j x_j + \frac{c_2}{2\omega x_j x_j} \right] \Phi, \end{aligned} \quad (22)$$

где еще раз обратим внимание, что по паре повторяющихся индексов i по декартовым координатам $(x_{i=1, N_1}) = (x_1, \dots, x_{N_1})$ в первом гамильтониане ведется суммирование от 1 до N_1 в пространстве R^{N_1} и по паре повторяющихся индексов j по декартовым координатам $(x_{j=N_1+1, 16}) = (x_{N_1+1}, \dots, x_{16})$ во втором гамильтониане ведется суммирование от $N_1 + 1$ до $N = 16$ в пространстве R^{N_2} . Напомним, что $(x_{\sigma=1, 16}) = (x_1, x_2, \dots, x_{16})$ – декартовы координаты в пространстве R^{16} .

Если все переписать только для радиальной части, то мы фактически получаем гамильтониан сингулярного осциллятора в двух измерениях:

$$\begin{aligned}\tilde{H}_0 &\equiv 2\omega[\tilde{J}_0^{(1)} + \tilde{J}_0^{(2)}] \equiv \\ &\equiv \frac{1}{2} \left[- \left(\frac{\partial^2}{\partial r_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial r_2^2} \right) + \omega^2(r_1^2 + r_2^2) + \frac{2g_1}{r_1^2} + \frac{2g_2}{r_2^2} \right],\end{aligned}\quad (23)$$

где

$$2g_\beta = L'_\beta(L'_\beta + N_\beta - 2) + \frac{(N_\beta - 1)(N_\beta - 3)}{4}, \quad \beta = 1, 2,$$

и не забываем, что каждому измерению β соответствует его N_β -мерный гиперрадиус r_β .

В заключение уточним, что параметры соответствующей квадратичной алгебры Хана как алгебры скрытой симметрии ((12)–(13)) нетрудно в каждом конкретном варианте найти по формулам (19)–(20). Также подчеркнем, что ограничение в размерности пространства числом 16 накладывает только цель данной работы, хотя обобщение для любого значения N имеет место.

3. 9D кулоновский аналог по отношению к преобразованию Гурвица для 16D осциллятора. Согласно [3] преобразование Гурвица $R^{16} \rightarrow R^9$, которое связывает определенным образом 9D пространство R^9 декартовых координат $((y_{\mu=1,9}) \equiv (y_1, y_2, \dots, y_9))$ с 16D пространством R^{16} декартовых координат $(x_{\sigma=1,16}) \equiv (\eta_{s=1,8}, \xi_{t=1,8}) = (\eta_1, \dots, \eta_8, \xi_1, \dots, \xi_8)$ можно записать следующим образом:

$$y_\mu \rightarrow 2(\Gamma_\mu)_{st} \eta_s \xi_t, \quad y_9 \rightarrow (\eta_t \eta_t - \xi_t \xi_t), \quad (24)$$

где явный вид матриц Γ_μ дан в [3].

После применения преобразования Гурвица (24) к уравнению 16-мерного изотропного гармонического осциллятора (формула (14) при $N = 16$ и $c = 0$ или в [3]) получаем уравнение Шредингера для 9-мерной кулоновской задачи в $SO(8)$ монополярном поле (так называемая MICZ-Кеплера проблема) в атомных единицах ($m = e = h = 1$) [6–8]:

$$\hat{H}_0 \Phi = \left[-\frac{\Delta}{2} + \frac{J^2 - L^2}{4r(r + y_9)} - \frac{Z}{r} \right] \Phi = E \Phi, \quad (25)$$

где $J = L + Q$ – операторы полного, орбитального и изоспинового углового момента количества движения; Δ – оператор Лапласа – Бельтрами в девятимерном пространстве R^9 .

Отметим, что в уравнениях (14) и (25) роли $E = -\frac{\omega^2}{8}$ и Z поменялись. Переменные E и Z становятся отрицательным числом, которое обозначает соответственно энергию связанных состояний, и параметром, определяющим значение «заряда» в кулоновском потенциале. Именно поэтому 9D кулоновская система рассматривается как аналог 16D осциллятора по отношению к преобразованию Гурвица.

Введем параболические координаты на сфере S_7 в соответствии с работами [7–8]:

$$\begin{aligned}y_9 &= \frac{u - v}{2}; \\ y_8 &= \sqrt{uv} \cos(\phi_6); \\ &\dots \\ &\dots \\ y_2 &= \sqrt{uv} \sin(\phi_6) \dots \sin(\phi_1) \cos(\phi_0); \\ y_1 &= \sqrt{uv} \sin(\phi_6) \dots \sin(\phi_1) \sin(\phi_0); \\ r &= \frac{u + v}{2},\end{aligned}\quad (26)$$

где девять y_μ – декартовы координаты в гиперпараболических координатах: $(\phi_{v=0,6}) = (\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_6)$ – гиперпараболические углы и параболические координаты u, v с областью значений от 0 до ∞ .

Учитывая эти определения, мы получаем полезные отношения:

$$r = \sqrt{y_\lambda y_\lambda} = \eta_s \eta_s + \xi_s \xi_s; \quad y_9 \rightarrow (\eta_t \eta_t - \xi_t \xi_t);$$

$$2\eta_s \eta_s = r + y_9 \equiv u; \quad 2\xi_s \xi_s = r - y_9 \equiv v. \quad (27)$$

Сейчас становится уместным напомнить, что ранее модель с потенциалом гармонического осциллятора $V^{zo}(x_k x_k)$ нами была обобщена до модели с потенциалом сингулярного осциллятора $V^{co}(x_k x_k) \equiv V^{zo}(x_k x_k) + V^c(x_k x_k)$ или, другими словами, при аддитивной добавке $\Lambda = V_{N_1}^c(x_i x_i) + V_{N_2}^c(x_j x_j)$ к гамильтониану осциллятора (14) получим аддитивный член Λ/r в гамильтониане кулоновской системы после преобразования Гурвица (25). Наиболее просто это увидеть, выполнив замену $Z \rightarrow Z - \Lambda$ в формулах (14), (25). Из всех вариантов расщепления 16D пространства $R^{N=16}$ на подпространства R^{N_1} и R^{N_2} ($N=16 \equiv N_1 + N_2$), которое определяет явный вид сингулярных членов $V_{N_1}^c(x_i x_i)$, $V_{N_2}^c(x_j x_j)$ в гиперпараболических координатах, наиболее идеальным здесь выглядит симметричный вариант $N_1 = N_2 = 8$. В нем согласно последним двум соотношениям в (27), а также ранее полученным результатам в малоразмерных расслоениях Хопфа [28–32] аддитивный член Λ/r функционально подобен второму члену в (25) и имеет следующий вид:

$$\frac{\Lambda}{r} = \frac{1}{r} [V_{N_1=8}^c(x_i x_i) + V_{N_2=8}^c(x_j x_j)] \equiv \frac{1}{r} \left[\frac{c_1}{\eta_s \eta_s} + \frac{c_2}{\xi_s \xi_s} \right] = \frac{1}{r} \left[\frac{2c_1}{r + y_9} + \frac{2c_2}{r - y_9} \right] \equiv \frac{4}{u + v} \left[\frac{c_1}{u} + \frac{c_2}{v} \right].$$

Оператор Лапласа – Бельтрами Δ в гиперпараболических координатах имеет вид

$$\Delta = \frac{4}{u + v} \left\{ \frac{1}{u^3} \frac{\partial}{\partial u} \left(u^4 \frac{\partial}{\partial u} \right) + \frac{1}{v^3} \frac{\partial}{\partial v} \left(v^4 \frac{\partial}{\partial v} \right) \right\} - \frac{L^2}{uv}.$$

Чтобы разделить переменные, волновая функция теперь выбирается следующим образом:

$$\Phi(\vec{u}, \vec{v}) = \Phi(u, v, \phi_0, \dots, \phi_6, \phi'_0, \dots, \phi'_6) = U(u)V(v)\Omega(\phi, \phi').$$

Таким образом, уравнение Шредингера нашей уже обобщенной MICZ-кеплеровской системы в гиперпараболических координатах можно переписать в терминах разделенных уравнений переменных u, v и угловых переменных (ϕ, ϕ') :

$$\left[\frac{1}{u^3} \frac{\partial}{\partial u} \left(u^4 \frac{\partial}{\partial u} \right) - \frac{J(J+6) + 4c_1}{u} + \frac{Z + Eu}{2} - T \right] U(u) = 0; \quad (28)$$

$$\left[\frac{1}{v^3} \frac{\partial}{\partial v} \left(v^4 \frac{\partial}{\partial v} \right) - \frac{L(L+6) + 4c_2}{v} + \frac{Z + Ev}{2} + T \right] V(v) = 0; \quad (29)$$

$$[\hat{J}^2 - J(J+6)] \Omega(\phi, \phi') = 0; \quad (30)$$

$$[\hat{L}^2 - L(L+6)] \Omega(\phi, \phi') = 0, \quad (31)$$

где T – постоянная разделения; c_β , $\beta = 1, 2$ – константы в наших аддитивных добавках $V_{N_1}^c(x_i x_i)$ и $V_{N_2}^c(x_j x_j)$, т. е. параметры потенциала сингулярного осциллятора (22).

Решения (28) и (29) задаются гипергеометрическими полиномами:

$$U_{n_1 J}(u) = C_{n_1 J} u^{J'/2} e^{\frac{\sqrt{-2Eu}}{2}} {}_1F_1\left(-n_1; 4 + J'; \sqrt{-2Eu}\right);$$

$$V_{n_2 L}(v) = C_{n_2 L} v^{L'/2} e^{\frac{\sqrt{-2Ev}}{2}} {}_1F_1\left(-n_2; 4 + L'; \sqrt{-2Ev}\right),$$

где $J'(J'+6) = J(J+6) + 4c_1$; $L'(L'+6) = L(L+6) + 4c_2$.

Другими словами, мы имеем аналогичную ситуацию по скрытой симметрии как при рассмотрении модели сингулярного осциллятора в предыдущем разделе: при фиксации квантовых чисел J, L угловой части (уравнения (30)–(31)), задача становится одномерной. Исходный гамильтониан можно представить в виде суммы двух почти идентичных с точностью до переобозначений гамильтонианов в параболических координатах u, v соответственно (уравнения (28)–(29)) и им будет определяться скрытая симметрия задачи.

Для данного обоснования представим следующую реализацию операторов $SU(1,1)$:

$$J_0 = \frac{1}{2\gamma} \left[\frac{1}{z_\beta^3} \frac{\partial}{\partial z_\beta} \left(z_\beta^4 \frac{\partial}{\partial z_\beta} \right) - \frac{g_\alpha}{z_\beta} + \frac{E}{2} z_\beta \right]; \quad J_1 = \gamma z_\beta - J_0;$$

$$J_2 = i \left[z_\beta \frac{\partial}{\partial z_\beta} + 2 \right]; \quad J_\pm = J_1 \pm iJ_2, \quad (32)$$

где $g_1 = J(J+6) + 4c_1$; $g_2 = L(L+6) + 4c_2$; $E = -2\gamma^2$; $z_1 = u$; $z_2 = v$; $\beta = 1, 2$.

Таким образом, вышеприведенные формулы (32) позволяют представить исходный гамильтониан 9-мерной обобщенной MICZ-кеплеровой системы в виде суммы двух гамильтонианов в параболических координатах u, v , каждый из которых выражается через оператор J_0 и соответственно имеет искомую алгебру симметрии $SU(1,1)$. Угловая часть фиксируется своими хорошо известными квантовыми числами.

Заключение. Представлена квадратичная алгебра Хана $QH(3)$ как алгебра скрытой симметрии для определенного класса точно решаемых потенциалов, обобщающих соответственно 16D осциллятор и его 9D кулоновский аналог по отношению к преобразованию Гурвица на основе $SU(1,1) \oplus SU(1,1)$. Обсуждается разрешимость уравнения Шредингера для этих задач методом разделения переменных в сферических и параболических (цилиндрических) координатах. Показано, что коэффициенты перекрытия между волновыми функциями в этих координатах совпадают с коэффициентами Клебша – Гордана для $SU(1,1)$ алгебры.

Список использованных источников

1. Kustaanheimo, P. Perturbation theory of Kepler motion based on spinor regularization / P. Kustaanheimo, E. Stiefel // J. für die Reine und Angewandte Mathematik. – 1965. – Vol. 218. – P. 204–219. <https://doi.org/10.1515/crll.1965.218.204>
2. Polubarinov, I. V. On Application of Hopf Fiber Bundles in Quantum Theory / I. V. Polubarinov. – Dubna: JINR, 1984. – 24 p. – (Preprint / Joint Institute for Nuclear Research; E2-84-607).
3. Le, V.-H. A hidden non-Abelian monopole in a 16-dimensional isotropic harmonic oscillator / V.-H. Le, T.-S. Nguyen, N.-H. Phan // J. Phys. A. – 2009. – Vol. 42, № 17. – P. 175204. <https://doi.org/10.1088/1751-8113/42/17/175204>
4. Le, V.-H. A non-Abelian SO(8) monopole as generalization of Dirac-Yang monopoles for a 9-dimensional space / V.-H. Le, T.-S. Nguyen // J. Math. Phys. – 2011. – Vol. 52, № 3. – P. 032105. <https://doi.org/10.1063/1.3567422>
5. Le, V.-H. On the SO(10, 2) dynamical symmetry group of the MICZ-Kepler problem in a nine-dimensional space / V.-H. Le, C.-T. Truong, T.-T. Phan // J. Math. Phys. – 2011. – Vol. 52, № 7. – P. 072101. <https://doi.org/10.1063/1.3606515>
6. Phan, N.-H. Generalized Runge-Lenz vector and a hidden symmetry of the nine-dimensional MICZ-Kepler problem / N.-H. Phan, V.-H. Le // J. Math. Phys. – 2012. – Vol. 53, № 8, P. 082103. <https://doi.org/10.1063/1.4740514>

7. Exact analytical solutions of the Schrödinger equation for the nine-dimensional MICZ-Kepler problem / T.-S. Nguyen [et al.] // J. Math. Phys. – 2015. – Vol. 56, № 5. – P. 052103. <https://doi.org/10.1063/1.4921171>
8. Variables separation and superintegrability of the nine-dimensional MICZ-Kepler problem / N.-H. Phan [et al.] // J. Math. Phys. – 2018. – Vol. 59, № 3. – P. 032102. <https://doi.org/10.1063/1.4997693>
9. Eisenhart, L. P. Separable systems of Stackel / L. P. Eisenhart // Ann. Math. – 1934. – Vol. 35, № 2. – P. 284–305. <https://doi.org/10.2307/1968433>
10. Eisenhart, L. P. Enumeration of potentials for which one-particle Schrodinger equations are separable / L. P. Eisenhart // Phys. Rev. – 1948. – Vol. 74, № 1. – P. 87–89. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.74.87>
11. A systematic search for nonrelativistic systems with dynamical symmetries / A. A. Makarov [et al.] // Nuovo Cimento A. – 1967. – Vol. 52, № 4. – P. 1061–1084. <https://doi.org/10.1007/BF02755212>
12. Evans, N. W. Superintegrability in classical mechanics / N. W. Evans // Phys. Rev. A. – 1990. – Vol. 41, № 10. – P. 5666–5676. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.41.5666>
13. Superintegrability in three-dimensional Euclidean space / E. G. Kalnins [et al.] // J. Math. Phys. – 1999. – Vol. 40, № 2. – P. 708–725. <https://doi.org/10.1063/1.532699>
14. Kalnins, E. G. Fine structure for 3D second-order superintegrable systems: three-parameter potentials / E. G. Kalnins, J. M. Kress, W. Jr. Miller // J. Phys. A. – 2007. – Vol. 40, № 22. – P. 5875–5892. <https://doi.org/10.1088/1751-8113/40/22/008>
15. Kalnins, E. G. Second order superintegrable systems in conformally flat spaces. III. Three-dimensional classical structure theory / E. G. Kalnins, J. M. Kress, W. Jr. Miller // J. Math. Phys. – 2005. – Vol. 46, № 10. – P. 103507. <https://doi.org/10.1063/1.2037567>
16. Kalnins, E. G. Nondegenerate three-dimensional complex Euclidean superintegrable systems and algebraic varieties / E. G. Kalnins, J. M. Kress, W. Jr. Miller // J. Math. Phys. – 2007. – Vol. 48, № 11. – P. 113518. <https://doi.org/10.1063/1.2817821>
17. Verrier, P. E. A new superintegrable Hamiltonian / P. E. Verrier, N. W. Evans // J. Math. Phys. – 2008. – Vol. 49, № 2. – P. 022902. <https://doi.org/10.1063/1.2840465>
18. McSween, E. Integrable and superintegrable Hamiltonian systems in magnetic fields / E. McSween, P. Winternitz // J. Math. Phys. – 2000. – Vol. 41, № 5. – P. 2957–2967. <https://doi.org/10.1063/1.533283>
19. Boschi-Filhot, H. General potentials described by $SO(2,1)$ dynamical algebra in parabolic coordinate systems / H. Boschi-Filhot, M. de Souza, A. N. Vaidya // J. Phys. A. – 1991. – Vol. 24, № 21. – P. 4981–4988. <https://doi.org/10.1088/0305-4470/24/21/012>
20. Gritsev, V. V. The Higgs algebra and the Kepler problem in R^3 / V. V. Gritsev, Y. A. Kurochkin // J. Phys. A. – 2000. – Vol. 33, № 22. – P. 4073–4080. <https://doi.org/10.1088/0305-4470/33/22/310>
21. Gritsev, V. V. Nonlinear symmetry algebra of the MIC-Kepler problem on the sphere S^3 / V. V. Gritsev, Y. A. Kurochkin, V. S. Otchik // J. Phys. A. – 2000. – Vol. 33, № 27. – P. 4903–4910. <https://doi.org/10.1088/0305-4470/33/27/307>
22. Zhedanov, A. S. Hidden symmetry algebra and overlap coefficients for two ring-shaped potentials / A. S. Zhedanov // J. Phys. A. – 1993. – Vol. 26, № 18. – P. 4633–4642. <https://doi.org/10.1088/0305-4470/26/18/027>
23. The Higgs and Hahn algebras from a Howe duality perspective / L. Frappat [et al.] // Phys. Lett. A. – 2019. – Vol. 383, № 14. – P. 15–31–15–35. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2019.02.024>
24. The generalized Racah algebra as a commutant / J. Gaboriaud [et al.] // J. Phys.: Conf. Series. – 2019. – Vol. 1194. – P. 012034. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1194/1/012034>
25. The Racah algebra as a commutant and Howe duality / J. Gaboriaud [et al.] // J. Phys. A: Math. Theor. – 2018. – Vol. 51, № 50. – P. 50LT01. <https://doi.org/10.1088/1751-8121/aacela>
26. Howe, R. Remarks on Classical Invariant Theory / R. Howe // Transactions of the American Mathematical Society. – 1989. – Vol. 313, № 2. – P. 539–570. <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1989-0986027-X>
27. Rowe, D. J. Dual pairing of symmetry and dynamical groups in physics / D. J. Rowe, M. J. Carvalho, J. Repka // Rev. Mod. Phys. – 2012. – Vol. 84, № 2. – P. 711–757. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.84.711>
28. Mardoyan, L. G. 4D singular oscillator and generalized MIC-Kepler system / L. G. Mardoyan, M. G. Petrosyan // Phys. Atomic Nuclei. – 2007. – Vol. 70, № 3. – P. 572–575. <https://doi.org/10.1134/S1063778807030180>
29. Прись, И. Е. Атом диогена как четырехмерный изотропный сингулярный осциллятор со связью / И. Е. Прись, Е. А. Толкачев // Ядер. физика. – 1991. – Т. 54, № 1. – С. 962–966.
30. Pletyukhov, M. V. $SO(6,2)$ dynamical symmetry of the $SU(2)$ MIC-Kepler problem / M. V. Pletyukhov, E. A. Tolkahev // J. Phys. A. – 1999. – Vol. 32, № 23. – P. L249–L253. <https://doi.org/10.1088/0305-4470/32/23/101>
31. Pletyukhov, M. V. 8D oscillator and 5D Kepler problem: The case of nontrivial constraints / M. V. Pletyukhov, E. A. Tolkahev // J. Math. Phys. – 1999. – Vol. 40, № 1. – P. 93–100. <https://doi.org/10.1063/1.532761>
32. Pletyukhov, M. V. Hurwitz transformation and oscillator representation of a 5D “isospin” particle / M. V. Pletyukhov, E. A. Tolkahev // Rep. Math. Phys. – 1999. – Vol. 43, № 1/2. – P. 303–311. [https://doi.org/10.1016/S0034-4877\(99\)80039-1](https://doi.org/10.1016/S0034-4877(99)80039-1)

References

1. Kustaanheimo P., Stiefel E. Perturbation theory of Kepler motion based on spinor regularization. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 1965, vol. 218, pp. 204–219. <https://doi.org/10.1515/crll.1965.218.204>
2. Polubarinov I. V. *On Application of Hopf Fiber Bundles in Quantum Theory*. Dubna, JINR, 1984. 24 p. (Preprint / Joint Institute for Nuclear Research; E2-84-607).

3. Le V.-H., Nguyen T.-S., Phan N.-H. A hidden non-Abelian monopole in a 16-dimensional isotropic harmonic oscillator. *Journal of Physics A*, 2009, vol. 42, no. 17, pp. 175204. <https://doi.org/10.1088/1751-8113/42/17/175204>
4. Le V.-H., Nguyen T.-S. A non-Abelian $SO(8)$ monopole as generalization of Dirac-Yang monopoles for a 9-dimensional space. *Journal of Mathematical Physics*, 2011, vol. 52, no. 3, pp. 032105. <https://doi.org/10.1063/1.3567422>
5. Le V.-H., Truong C.-T., Phan T.-T. On the $SO(10, 2)$ dynamical symmetry group of the MICZ-Kepler problem in a nine-dimensional space. *Journal of Mathematical Physics*, 2011, vol. 52, no. 7, pp. 072101. <https://doi.org/10.1063/1.3606515>
6. Phan N.-H., Le V.-H. Generalized Runge-Lenz vector and a hidden symmetry of the nine-dimensional MICZ-Kepler problem. *Journal of Mathematical Physics*, 2012, vol. 53, no. 8, pp. 082103. <https://doi.org/10.1063/1.4740514>
7. Nguyen T.-S., Le D.-N., Thoi T.-Q. N., Le V.-H. Exact analytical solutions of the Schrödinger equation for the nine-dimensional MICZ-Kepler problem. *Journal of Mathematical Physics*, 2015, vol. 56, no. 5, pp. 052103. <https://doi.org/10.1063/1.4921171>
8. Phan N.-H., Le D.-N., Thoi T.-Q. N., Le V.-H. Variables separation and superintegrability of the nine-dimensional MICZ-Kepler problem. *Journal of Mathematical Physics*, 2018, vol. 59, no. 3, pp. 032102. <https://doi.org/10.1063/1.4997693>
9. Eisenhart L. P. Separable systems of Stackel. *Annals of Mathematics*, 1934, vol. 35, no. 2, pp. 284–305. <https://doi.org/10.2307/1968433>
10. Eisenhart L. P. Enumeration of potentials for which one-particle Schrodinger equations are separable. *Physical Review*, 1948, vol. 74, no. 1, pp. 87–89. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.74.87>
11. Makarov A. A., Smorodinsky J. A., Valiev K., Winternitz P. A systematic search for nonrelativistic systems with dynamical symmetries. *Nuovo Cimento A*, 1967, vol. 52, no. 4, pp. 1061–1084. <https://doi.org/10.1007/BF02755212>
12. Evans N. W. Superintegrability in classical mechanics. *Physical Review A*, 1990, vol. 41, no. 10, pp. 5666–5676. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.41.5666>
13. Kalnins E. G., Williams G. C., Miller W. Jr., Pogosyan G. S. Superintegrability in three-dimensional Euclidean space. *Journal of Mathematical Physics*, 1999, vol. 40, no. 2, pp. 708–725. <https://doi.org/10.1063/1.532699>
14. Kalnins E. G., Kress J. M., Miller W. Jr. Fine structure for 3D second-order superintegrable systems: three-parameter potentials. *Journal of Physics A*, 2007, vol. 40, no. 22, pp. 5875–5892. <https://doi.org/10.1088/1751-8113/40/22/008>
15. Kalnins E. G., Kress J. M., Miller W. Jr. Second order superintegrable systems in conformally flat spaces. III. Three-dimensional classical structure theory. *Journal of Mathematical Physics*, 2005, vol. 46, no. 10, pp. 103507. <https://doi.org/10.1063/1.2037567>
16. Kalnins E. G., Kress J. M., Miller W. Jr. Nondegenerate three-dimensional complex Euclidean superintegrable systems and algebraic varieties. *Journal of Mathematical Physics*, 2007, vol. 48, no. 11, pp. 113518. <https://doi.org/10.1063/1.281782>
17. Verrier P. E., Evans N. W. A new superintegrable Hamiltonian. *Journal of Mathematical Physics*, 2008, vol. 49, no. 2, pp. 022902. <https://doi.org/10.1063/1.2840465>
18. McSween E., Winternitz P. Integrable and superintegrable Hamiltonian systems in magnetic fields. *Journal of Mathematical Physics*, 2000, vol. 41, no. 5, pp. 2957–2967. <https://doi.org/10.1063/1.533283>
19. Boschi-Filhot H., M de Souza, Vaidya A. N. General potentials described by $SO(2,1)$ dynamical algebra in parabolic coordinate systems. *Journal of Physics A*, 1991, vol. 24, no. 21, pp. 4981–4988. <https://doi.org/10.1088/0305-4470/24/21/012>
20. Gritsev V. V., Kurochkin Y. A. The Higgs algebra and the Kepler problem in R^3 . *Journal of Physics A*, 2000, vol. 33, no. 22, pp. 4073–4080. <https://doi.org/10.1088/0305-4470/33/22/310>
21. Gritsev V. V., Kurochkin Y. A., Otchik V. S. Nonlinear symmetry algebra of the MIC-Kepler problem on the sphere S^3 . *Journal of Physics A*, 2000, vol. 33, no. 27, pp. 4903–4910. <https://doi.org/10.1088/0305-4470/33/27/307>
22. Zhedanov A. S. Hidden symmetry algebra and overlap coefficients for two ring-shaped potentials. *Journal of Physics A*, 1993, vol. 26, no. 18, pp. 4633–4642. <https://doi.org/10.1088/0305-4470/26/18/027>
23. Frappat L., Gaboriaud J., Vinet L., Vinet S., Zhedanov A. S. The Higgs and Hahn algebras from a Howe duality perspective. *Physics Letters A*, 2019, vol. 383, no. 14, pp. 15-31–15-35. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2019.02.024>
24. Gaboriaud J., Vinet L., Vinet S., Zhedanov A. S. The generalized Racah algebra as a commutant. *Journal of Physics: Conference Series*, 2019, vol. 1194, pp. 012034. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1194/1/012034>
25. Gaboriaud J., Vinet L., Vinet S., Zhedanov A. S. The Racah algebra as a commutant and Howe duality. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2018, vol. 51, no. 50, pp. 50LT01. <https://doi.org/10.1088/1751-8121/aaeela>
26. Howe R. Remarks on Classical Invariant Theory. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1989, vol. 313, no. 2, pp. 539–570. <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1989-0986027-X>
27. Rowe D. J., Carvalho M. J., Repka J. Dual pairing of symmetry and dynamical groups in physics. *Reviews of Modern Physics*, 2012, vol. 84, no. 2, pp. 711–757. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.84.711>
28. Mardoyan L. G., Petrosyan M. G. 4D singular oscillator and generalized MIC-Kepler system. *Physics of Atomic Nuclei*, 2007, vol. 70, no. 3, pp. 572–575. <https://doi.org/10.1134/S1063778807030180>
29. Pris I. E., Tolkachev E. A. Diogen atom as a four-dimensional isotropic singular oscillator with a bond. *Yadernaya fizika = Physics of Atomic Nuclei*, 1991, vol. 54, no. 1, pp. 962–966 (in Russian).
30. Pletyukhov M. V., Tolkachev E. A. $SO(6,2)$ dynamical symmetry of the $SU(2)$ MIC-Kepler problem. *Journal of Physics A*, 1999, vol. 32, no. 23, pp. L249–L253. <https://doi.org/10.1088/0305-4470/32/23/101>
31. Pletyukhov M. V., Tolkachev E. A. 8D oscillator and 5D Kepler problem: The case of nontrivial constraints. *Journal of Mathematical Physics*, 1999, vol. 40, no. 1, pp. 93–100. <https://doi.org/10.1063/1.532761>
32. Pletyukhov M. V., Tolkachev E. A. Hurwitz transformation and oscillator representation of a 5D “isospin” particle. *Reports on Mathematical Physics*, 1999, vol. 43, no. 1–2, pp. 303–311. [https://doi.org/10.1016/S0034-4877\(99\)80039-1](https://doi.org/10.1016/S0034-4877(99)80039-1)

Информация об авторах

Лаврёнов Александр Николаевич – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры информационных технологий в образовании, Белорусский государственный педагогический университет им. М. Танка (ул. Советская, 18, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). Email: lanin0777@mail.ru. <https://orcid.org/0000-0001-7384-3621>

Лаврёнов Иван Александрович – ведущий специалист, ООО «Октонион технолоджи» (ул. Я. Купалы, 25, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). Email: lanin99@mail.ru. <https://orcid.org/0000-0002-3650-8987>

Information about the authors

Alexandre N. Lavrenov – Ph. D. (Physics and Mathematics), Assistant Professor, Assistant Professor of the Department of the Chair of Information Technologies in Education, Belarusian State Pedagogical University named after Maxim Tank (18, Sovetskaya Str., 220050, Minsk, Republic of Belarus). Email: lanin0777@mail.ru. <https://orcid.org/0000-0001-7384-3621>

Ivan A. Lavrenov – Leading Specialist, Octonion Technology, Ltd. (25, Ya. Kupala Str., 220030, Minsk, Republic of Belarus). Email: lanin099@mail.ru. <https://orcid.org/0000-0002-3650-8987>

ISSN 1561-2430 (Print)

ISSN 2524-2415 (Online)

УДК 621.391.63: 681.7.068

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-2-217-223>

Поступила в редакцию 04.03.2020.

Received 04.03.2020.

В. Б. Залесский, А. И. Конойко, В. М. Кравченко, А. С. Кузьмицкая*ГНПО «Оптика, оптоэлектроника и лазерная техника», Минск, Беларусь***АМПЛИТУДНАЯ ЭЛЕКТРООПТИЧЕСКАЯ МОДУЛЯЦИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯМИ РЕЗОНАТОРОВ ФАБРИ-ПЕРО**

Аннотация. Рассматривается метод амплитудной электрооптической модуляции излучения на базе последовательностей резонаторов Фабри-Перо с поперечным электрооптическим эффектом на примере ниобата лития LiNbO_3 . Этот подход позволяет существенно уменьшить значение управляющего напряжения электрооптического амплитудного модулятора, работающего в режиме пропускания светового пучка при сохранении его высокой эффективности. Уменьшение управляющего напряжения достигается за счет как увеличения количества установленных последовательно резонаторов Фабри-Перо, так и фазового сдвига относительно экстремума функции коэффициента пропускания. Указанный метод дает возможность существенно уменьшить длительность получаемых световых сигналов, а следовательно, увеличить тактовую частоту при сохранении высокой эффективности модуляции излучения. Уменьшение длительности световых сигналов достигается за счет использования в отдельном канале модуляции двух последовательностей электрооптических резонаторов Фабри-Перо, одна из которых работает на пропускание, а другая – на отражение. Увеличение тактовой частоты на выходе модулятора обеспечивается суммированием сигналов, идущих от нескольких каналов модуляции. Показано, что величина управляющего напряжения для амплитудного электрооптического модулятора на базе последовательности резонаторов Фабри-Перо, выполненных из ниобата лития LiNbO_3 , при рабочей длине волны излучения, равной 1,307 мкм, может составлять величину 4 В – в случае, когда его начальная рабочая точка соответствует максимальному пропусканию, и 2 В – в случае, если начальная рабочая точка сдвинута по фазе относительно экстремума функции коэффициента пропускания.

Ключевые слова: многолучевая интерференция, резонатор Фабри-Перо, эффективность модулятора, поперечный электрооптический эффект

Для цитирования. Амплитудная электрооптическая модуляция излучения последовательностями резонаторов Фабри-Перо / В. Б. Залесский [и др.] // Вест. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2020. – Т. 56, № 2. – С. 217–223. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-2-217-223>

Valery B. Zalesski, Alexey I. Konoyko, Vladimir M. Kravchenko, Hanna S. Kuzmitskaya*SSPA "Optics, Optoelectronics and Laser Technology", Minsk, Belarus***AMPLITUDE ELECTRO-OPTICAL MODULATION OF RADIATION BY SEQUENCES OF FABRY-PEROT RESONATORS**

Abstract. In this paper, we considered the method of amplitude electro-optical modulation of radiation using sequences of Fabry-Perot resonators based on the transverse electro-optical effect on the example of lithium niobate LiNbO_3 . With this method, it is possible to significantly reduce the voltage of the control electromagnetic field of the electro-optical amplitude modulator operating in the transmission mode of the light beam while maintaining its high efficiency. The reduction of the control voltage is achieved by increasing the number of Fabry-Perot resonators installed in series and the phase shift relative to the extremum of the transmittance function. This method allows to diminish the duration of the received light signals which leads to an increase in the clock frequency while maintaining a high efficiency of the radiation modulation. Diminishing the duration of light signals is achieved by using separate modulation channels of two sequences of electro-optical Fabry-Perot resonators, the first of which works on the transmission and the second one on the reflection. Increasing the clock frequency at the output of the modulator is achieved by summing the signals coming from several modulation channels. It is shown that the value of the control voltage for an amplitude electro-optical modulator based on a sequence of Fabry-Perot resonators made of lithium niobate LiNbO_3 , with an operating wavelength of 1.307 microns, can be 4 V in the case when its initial operating point corresponds to the maximum transmittance. The control voltage is 2 V if the initial operating point is shifted in phase relative to the extremum of the transmittance function.

Keywords: multiple beam interference, Fabry-Perot, the efficiency of the modulator, the transverse electro-optic effect

For citation. Zalesski V. B., Konoiko A. I., Kravchenko V. M., Kuzmitskaya H. S. Amplitude electro-optical modulation of radiation by sequences of Fabry-Perot resonators. *Vesti Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematichnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2020, vol. 56, no. 2, pp. 217–223 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-2-217-223>

Введение. Электрооптический резонансный модулятор на базе интерферометра Фабри-Перо представляет собой слоистую структуру, которая состоит из двух зеркал и промежуточного слоя из электрооптического материала [1]. С точки зрения уменьшения величины управляющего напряжения в одномодовых электрооптических модуляторах следует использовать поперечный электрооптический эффект, так как в этом случае величина управляющего напряжения пропорциональна d/l_0 , где d – расстояние между электродами, а l_0 – размер электрооптической среды в направлении распространения излучения (геометрическая база резонатора). А это означает, что управляющее электрическое поле должно быть ориентировано перпендикулярно направлению распространения проходящего света. Оптическая толщина электрооптического материала (оптическая база резонатора) кратна целому числу полуволн модулируемого излучения. Электрооптический резонатор может работать как на пропускание, так и на отражение падающего излучения. В таких модуляторах быстродействие, а соответственно, и минимальная длительность выходных оптических сигналов определяется в основном временем формирования в резонаторе интерферирующих волн, которое зависит от величины оптической базы и коэффициента отражения зеркал резонатора, что ограничивает возможности применения резонансных модуляторов Фабри-Перо в быстродействующих системах оптической связи. Поэтому представляет интерес рассмотреть возможность уменьшения как величины управляющего напряжения, так и длительности промодулированных световых сигналов последовательностями электрооптических резонаторов Фабри-Перо, работающими как на пропускание, так и на отражение.

Описание метода. Модуляция излучения последовательностью резонаторов Фабри-Перо имеет свою особенность, а именно: необходимо устранение влияния излучения отраженного одним резонатором на светомодуляционные характеристики предыдущего за счет фильтрации. Для этого при применении объемных резонаторов может быть использована поляризационная развязка [2, 3]. В случае применения волоконно-оптических или полосковых резонаторов для этой цели могут быть использованы один и более Y-образных разветвителей, как это показано на рисунке 1, а, где 1 – зеркала резонатора; 2 – электрооптическая среда; 3 – управляющие электроды; 4 – Y-образный разветвитель. Так, при применении двух, расположенных последовательно, Y-образных разветвителей величина отраженного от резонатора светового потока, идущего по входному волноводу в обратном направлении, может составлять десятые доли процента.

При поступлении на входное зеркало резонатора монохроматического светового потока с длиной волны λ , обладающего плоским волновым фронтом и амплитудой E_0 , он частично проходит в резонатор и испытывает переотражения между зеркалами. Переотраженные световые волны интерферируют между собой. Если оптическая разность хода между интерферирующими волнами кратна длине волны λ , то между зеркалами формируется максимальная амплитуда результирующей волны, если $\lambda/2$, то – минимальная. Время образования очередной переотраженной интерферирующей световой волны t_0 определяется оптической базой резонатора и равно $t_0 = 2l_0 n_p / c$, где n_p – показатель преломления электрооптического материала; c – скорость света в вакууме. В случае отсутствия поглощения излучения в зеркалах резонатора суммарная амплитуда, прошедшей через резонатор E_t и отраженной E_r световых волн, могут быть определены из следующих соотношений [4]:

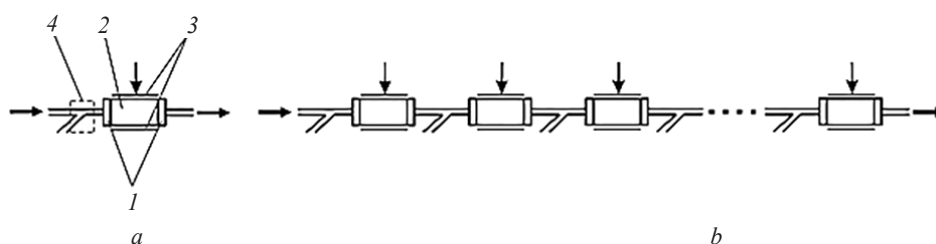


Рис. 1. Электрооптический амплитудный модулятор с одним (а) и N (b) резонаторами Фабри-Перо: 1 – зеркала резонатора; 2 – электрооптическая среда; 3 – управляющие электроды; 4 – Y-образный разветвитель

Fig. 1. The electro-optical amplitude modulator with one (a) and N (b) Fabry-Perot resonators: 1 – mirrors of the resonator; 2 – electro-optical medium; 3 – control electrodes; 4 – Y-shaped splitter

$$E_t = E_0 T_i \sqrt{T} \left\{ \frac{1 - T^n R_i^n \exp[in(\phi + \delta\phi)]}{1 - t^2 R_i \exp[i(\phi + \delta\phi)]} \right\}, \quad (1)$$

$$E_r = E_0 \left\{ \left[\frac{1 - T_i^{(n-1)} R_i^{(n-1)} \exp[i(n-1)(\phi + \delta\phi)]}{1 - T R_i \exp[i(\phi + \delta\phi)]} \right] T_i T \sqrt{R_i} \exp[i(\phi + \delta\phi)] - \sqrt{R_i} \right\}, \quad (2)$$

где $\phi + \delta\phi = 2 \frac{2\pi\Delta}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda} [2l_0(n_p + \delta n)]$ – разность фаз между интерферирующими световыми волнами, наводимая в резонаторе; δn – изменение показателя преломления под действием управляющего электрического напряжения; R_i – коэффициенты амплитудного отражения первого и второго зеркал; T_i – коэффициенты амплитудного пропускания первого и второго зеркал; T – коэффициент пропускания электрооптической среды, расположенной между зеркалами; $n = t/t_0$ – количество интерферирующих волн; t – время распространения световой волны в резонаторе; t_0 – время, за которое световая волна проходит между зеркалами резонатора в прямом и обратном направлении.

Выражения (1), (2) показывают, что для формирования результирующей (как прошедшей, так и отраженной) световой волны требуется n переотражений светового потока, прошедшего в одном резонаторе, т. е. для формирования результирующей волны требуется время, определяемое количеством переотражений n и оптической базой резонатора ($n_p l_0$).

Известно, что величину эффективного числа интерферирующих пучков $N_{\text{эфф}}$ в интерферометре Фабри-Перо можно найти из соотношения [5]:

$$N_{\text{эфф}} = \frac{\pi \sqrt{R_i}}{1 - R_i}. \quad (3)$$

Здесь $N_{\text{эфф}}$ – это такое число интерферирующих пучков одинаковой интенсивности, которое дает такую же ширину интерференционного максимума $\delta\lambda$, как и бесконечно большое число пучков убывающей интенсивности. Как показывают расчеты, число интерферирующих пучков с убывающей интенсивностью n , равное $N_{\text{эфф}}$, позволяет получить на выходе резонатора Фабри-Перо интенсивность светового пучка, равную порядка 90 % от падающего светового потока.

При использовании для амплитудной модуляции N резонаторов (рис. 1, б) выражение для суммарной интенсивности света, прошедшего через модулятор, будет иметь следующий вид:

$$I_{\Sigma t} = (E_t E_t^*)^N. \quad (4)$$

Такой модулятор работает следующим образом: в исходном состоянии в случае отсутствия управляющего напряжения излучение от источника света последовательно проходит все резонаторы Фабри-Перо, так как их светопропускание максимально вследствие того, что оптическая база резонаторов кратна длине волны. При подаче управляющего напряжения излучение модулятора гаснет, а отраженное каждым резонатором выводится из основного оптического тракта соответствующими Y-образными разветвителями, стоящими перед каждым резонатором.

На рис. 2 представлены зависимости интенсивности света на выходе электрооптических модуляторов, образованных одним (кривая 1) и девятью резонаторами (кривые 2, 3) от времени при подаче прямоугольных управляющих электрических сигналов. Графики соответствуют случаю, когда в начальный момент времени $t = 0$ электрическое напряжение на управляющих электродах резонаторов отсутствует, а подача управляющего напряжения осуществляется при достижении амплитуды светового сигнала, равной порядка 90 %.

Из приведенных зависимостей видно, что при отсутствии управляющего напряжения время формирования переднего фронта светового сигнала в случае модулятора с девятью резонаторами в 1,76 раза больше, чем однорезонаторного. При подаче на электроды резонаторов управля-

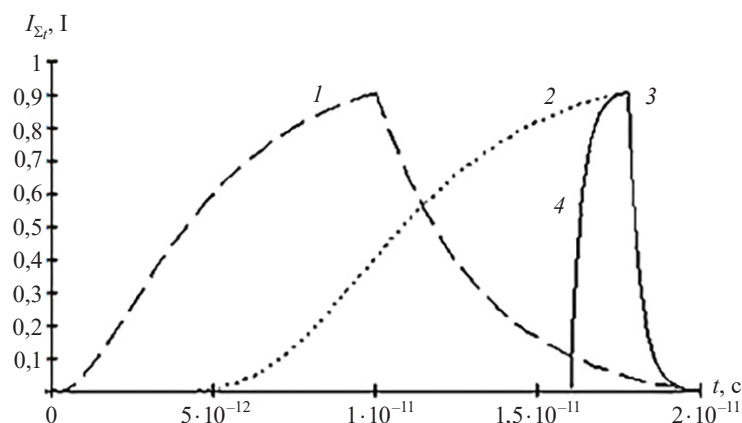


Рис. 2. Зависимость интенсивности света на выходе электрооптического модулятора на базе резонаторов Фабри-Перо от времени: 1 – один резонатор; 2, 3 – последовательность из 9 резонаторов; 3, 4 – электрооптический амплитудный модулятор коротких оптических сигналов (рис. 4, а)

Fig. 2. The time dependence of the light intensity at the output of an electro-optical modulator based on Fabry-Perot resonators: 1 – one resonator; 2, 3 – a sequence of 9 resonators; 3, 4 – electro-optical amplitude modulator for short optical signals (Fig. 4, a)

ющего электрического напряжения в момент времени, когда амплитуда оптического сигнала на выходе достигнет 90 % от падающего излучения, на выходе модуляторов происходит резкое падение интенсивности света. Причем время затухания оптического сигнала до уровня примерно 2 % в случае модулятора с девятью резонаторами на порядок меньше, чем у однорезонаторного. В результате этого длительность оптического сигнала на выходе модулятора с девятью резонаторами $t_0 = 0,76 t_1$, где t_1 – длительность сигнала на выходе модулятора, содержащего один резонатор. А это означает, что существует возможность поднять частоту световых сигналов на 30 %.

Выражение для определения величины управляющего напряжения резонатора U_t , требуемого для обеспечения заданной эффективности модуляции излучения при работе резонатора в режиме пропускания, при условии, что его начальная рабочая точка соответствует минимальному отражению, имеет вид

$$U_t = \frac{\lambda}{2\pi} \frac{1}{n_e^3 r_{33}} \frac{d}{l_0} \arccos \left(1 - \frac{(1 - TR_i)^2}{2TR_i} \left\{ \sqrt[N]{\frac{1}{1 - \eta_t \left[(1 - TR_i)^2 / T_i^2 T \right]^N}} - 1 \right\} \right), \quad (5)$$

где r_{33} – электрооптический коэффициент ниобата лития; η – эффективность модулятора.

На рис. 3 показаны графики расчетных зависимостей управляющих напряжений от требуемой эффективности модуляции η при использовании одного (кривые 1, 2) и девяти (кривые 3, 4) резонаторов, работающих на пропускание. Кривые 1, 3 соответствуют режиму модуляции излучения, когда начальная рабочая точка резонаторов соответствует минимальному отражению, а кривые 2, 4 – когда его начальная рабочая точка сдвинута по фазе относительно экстремума функции коэффициента отражения, т. е. его минимума, на величину, равную $(2\pi/\lambda) \cdot (\delta n l_0)$, где δn – изменение показателя преломления (δn) в случае поперечного электрооптического эффекта при использовании в качестве электрооптической среды ниобата лития LiNbO_3 , которое можно найти из выражения [6]:

$$\delta n = \frac{1}{2} n_e^3 r_{33} \frac{U}{d}. \quad (6)$$

На рис. 3, б показаны графики расчетной зависимости величины управляющего напряжения модулятора излучения с эффективностью $\eta_t = 0,8$, работающего на пропускание, от количества

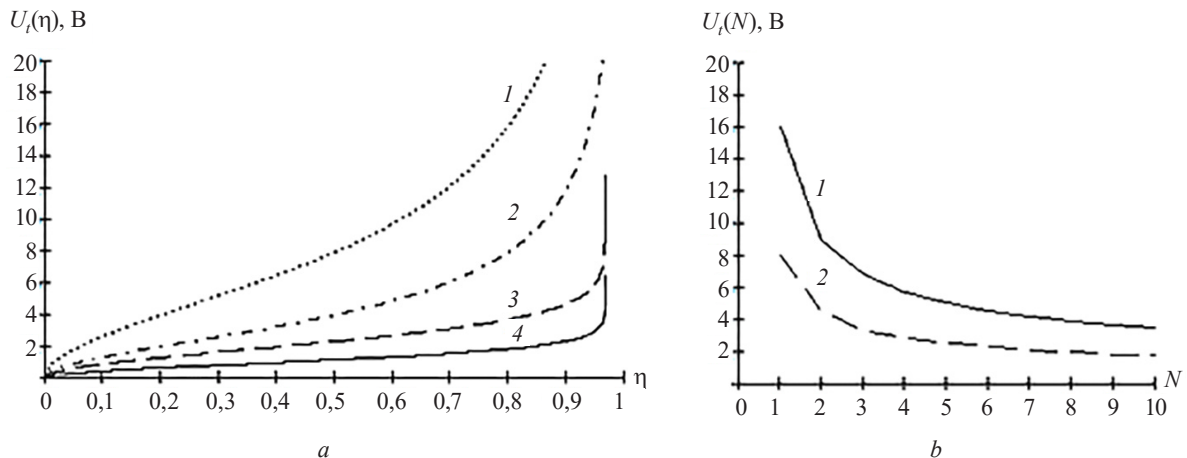


Рис. 3. Зависимости управляющего напряжения модулятора на базе резонаторов Фабри-Перо: *a* – от требуемой эффективности модуляции излучения (1 – 1 резонатор, начальная рабочая точка резонаторов соответствует минимальному отражению; 2 – 1 резонатор, начальная рабочая точка сдвинута по фазе относительно экстремума функции коэффициента отражения на величину, равную $(2\pi/\lambda) \cdot (\delta n l_0)$; 3 – 9 резонаторов, начальная рабочая точка резонаторов соответствует минимальному отражению; 4 – 9 резонаторов, начальная рабочая точка сдвинута по фазе относительно экстремума функции коэффициента отражения на величину, равную $(2\pi/\lambda) \cdot (\delta n l_0)$); *b* – от количества установленных последовательно резонаторов (1 – начальная рабочая точка резонаторов соответствует минимальному отражению; 2 – начальная рабочая точка сдвинута по фазе относительно экстремума функции коэффициента отражения на величину, равную $(2\pi/\lambda) \cdot (\delta n l_0)$)

Fig. 3. Dependences of the modulator control voltage based on Fabry-Perot resonators on the following parameters: *a* – required efficiency of the radiation modulation (1 – 1 resonator, the initial operating point of the resonator corresponds to the minimum reflection; 2 – 1 resonator, the initial operating point is shifted in phase relative to the extremum of the reflection coefficient function by an amount equal to $(2\pi/\lambda) \cdot (\delta n l_0)$; 3 – 9 resonators, the initial operating point of the resonators corresponds to the minimum reflection; 4 – 9 resonators, the initial working point is phase-shifted relative to the extremum of the reflection coefficient function by an amount equal to $(2\pi/\lambda) \cdot (\delta n l_0)$); *b* – the number of resonators installed in series (1 – the initial operating point of the resonators corresponds to the minimum reflection; 2 – the initial operating point is shifted in phase relative to the extremum of the reflection coefficient function by an amount equal to $(2\pi/\lambda) \cdot (\delta n l_0)$)

установленных последовательно электрооптических резонаторов Фабри-Перо. Кривая 1 соответствует режиму модуляции излучения, когда начальная рабочая точка резонаторов соответствует минимальному отражению, а кривая 2 – когда его начальная рабочая точка сдвинута по фазе относительно экстремума функции коэффициента отражения, т. е. его минимума, на величину, равную $(2\pi/\lambda) \cdot (\delta n l_0)$. Из приведенных зависимостей видно, что использование для амплитудной модуляции излучения последовательности электрооптических резонаторов Фабри-Перо позволяет существенно снизить величину управляющего напряжения, а следовательно, электрическую мощность, подводимую к резонаторам.

В случае, если к рассмотренной последовательности электрооптических резонаторов Фабри-Перо, которые работают на пропускание, присоединить еще одну последовательность, работающую на отражение (рис. 4, *a*), то можно получить световые сигналы с длительностью в 5 раз меньшей, чем сигналы, получаемые при помощи одного электрооптического резонатора. В качестве выходного сигнала такой светомодуляционной системы будет сумма световых волн, отраженных резонаторами 2-й последовательности. Причем в таком модуляторе управляющее электрическое поле, прикладываемое к 2-й последовательности резонаторов, должно опережать поле, прикладываемое к 1-й, на время, равное промежутку гашения светового сигнала на выходе первой последовательности.

На рис. 2 кривыми под номерами 3, 4 представлена зависимость интенсивности света на выходе такого электрооптического модулятора от времени для некогерентного излучения, т. е. для случая суммирования мощностей отраженного резонаторами излучения. В случае, если имеет место когерентное излучение, то амплитуда выходного сигнала для $N = 9$ каждой последовательности может увеличиться, как показывают расчеты, в 6 раз по сравнению с входным излучением.

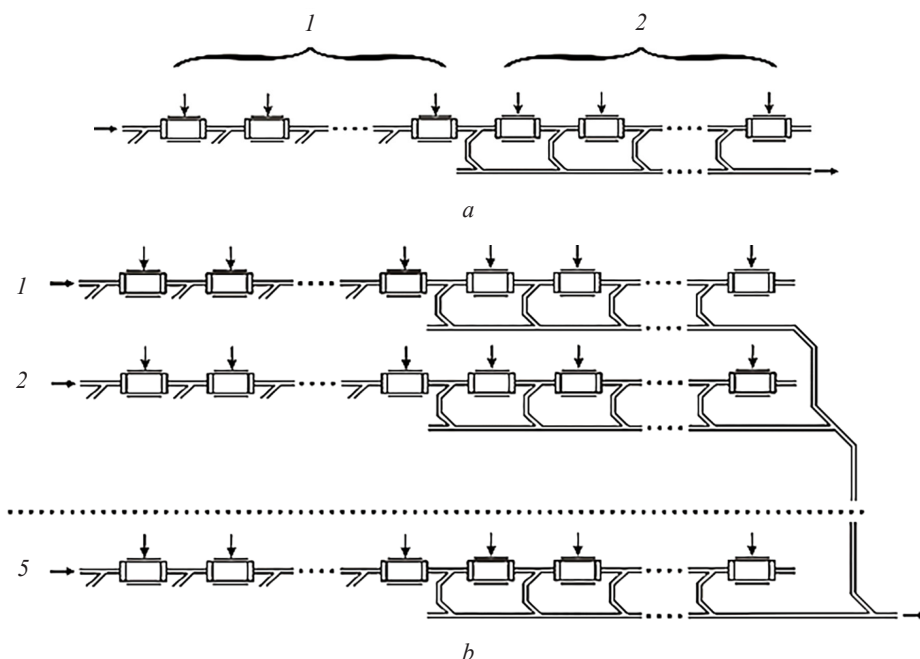


Рис. 4. Резонансный электрооптический амплитудный модулятор : *a* – коротких оптических сигналов;
b – последовательности коротких оптических сигналов

Fig. 4. Resonant electro-optical amplitude modulator of short optical signals (*a*), and sequences of short optical signals (*b*)

Если взять 5 таких модуляторов и объединить их выходы (как это показано на рис. 4, *b*), то на выходе такой светомодуляционной системы будет иметь место последовательность световых сигналов с тактовой частотой, в 5 раз превышающей частоту световых сигналов, которые можно получить при помощи одного резонатора. Причем и на каждый последующий модулятор управляющее напряжение необходимо подавать с дополнительным временным сдвигом, равным $1/5$ длительности светового сигнала, получаемого от одного резонатора.

Заключение. Показана возможность уменьшения в 5 раз длительности получаемых при помощи электрооптических резонаторов световых сигналов, а следовательно, соответствующего увеличения тактовой частоты при сохранении высокой эффективности модуляции излучения. Уменьшение длительности световых сигналов достигается за счет использования в отдельном канале модуляции двух последовательностей электрооптических резонаторов Фабри-Перо, одна из которых работает на пропускание, а другая – на отражение. Увеличение тактовой частоты на выходе модулятора может быть достигнуто суммированием сигналов, идущих от пяти каналов модуляции. Показано, что величина управляющего напряжения для амплитудного электрооптического модулятора на базе последовательности резонаторов Фабри-Перо, выполненных из ниобата лития LiNbO_3 , при рабочей длине волны излучения, равной 1,307 мкм, может составлять величину 4 В в случае, когда его начальная рабочая точка соответствует максимальному пропусканию, и 2 В в случае, если начальная рабочая точка сдвинута по фазе относительно экстремума функции коэффициента пропускания на величину, равную $(2\pi/\lambda) \cdot (\delta n l_0/2)$.

Список использованных источников

1. Мустель, Е. П. Методы модуляции и сканирования света / Е. П. Мустель, В. Н. Парыгин. – М.: Наука, 1970. – 296 с.
2. Амплитудная модуляция света за счет управления многолучевой интерференцией в интерферометре Фабри-Перо / В. А. Пилипович [и др.] // Радиолокация, навигация, связь: материалы междунар. конф. – Воронеж, 2000. – Т. 1. – С. 2094–2100.
3. Амплитудная модуляция света путем электрооптического управления многолучевой интерференцией в интерферометре Фабри-Перо / В. А. Пилипович [и др.] // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2015. – Т. 59, № 4. – С. 41–46.

4. Борн, М. Основы оптики / М. Борн, Э. Вольф; пер. с англ. С. Н. Бреус, А. И. Головашкин, А. А. Шубин, [под ред. Г. П. Мотулевич]. – М.: Наука, 1973. – 719 с.
5. Прикладная физическая оптика / В. А. Москалев [и др.]; под ред. В. А. Москалева. – СПб.: Политехника, 1995. – 527 с.
6. Ярив, А. Оптические волны в кристаллах / А. Ярив, П. Юх; пер. с англ. С. Г. Кривошлыкова, Н. И. Петрова; [под ред. И. Н. Сисакяна]. – М.: Мир, 1987. – 616 с.

References

1. Mustel E. P., Parygin V. N. *The Methods of Light Modulation and Scanning*. Moscow, Nauka Publ., 1970. 296 p. (in Russian).
2. Pilipovich V. A., Konoiko A. I., Demchenko A. I., Yarmolitskii V. F. Amplitude modulation of light due to control of multipath interference in a Fabry-Perot interferometer. *Materialy mezhdunarodnoj konferencii "Radiolokaciya, navigaciya, svyaz"* [Materials of the International conference "Radar, Navigation, Communication"], 2000, vol. 1, pp 2094–2100 (in Russian).
3. Pilipovich V. A., Zaleskii V. B., Konoiko A. I., Kravchenko V. M. light amplitude modulation by electrooptical control of multibeam interference in the Fabry-Perot interferometer. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2015, vol. 59, no. 4, pp. 41–46 (in Russian).
4. Born M., Vol'f E. *Principles of Optics*. Elsevier, 1980. 863 p.
5. Moskalev V. A., Nagibina I. M., Polushkina N. A., Rudin V. L. *Applied Physical Optics*. SPb., Politekhnik Publ., 1995. 527 p. (in Russian).
6. Yariv A., Yuh P. *Optical Waves in Crystals*. John Wiley & Sons, 1984. 616 p.

Информация об авторах

Залесский Валерий Борисович – кандидат физико-математических наук, заведующий лабораторией фотополупроводников, ГНПО «Оптика, оптоэлектроника и лазерная техника» (пр. Независимости, 68, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: zaleski@oelt.basnet.by

Коновко Алексей Иванович – кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник, ГНПО «Оптика, оптоэлектроника и лазерная техника» (пр. Независимости, 68, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: kon54@yandex.by

Кравченко Владимир Михайлович – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, ГНПО «Оптика, оптоэлектроника и лазерная техника» (пр. Независимости, 68, 220072, г. Минск, Республика Беларусь).

Кузьмицкая Анна Сергеевна – младший научный сотрудник, ГНПО «Оптика, оптоэлектроника и лазерная техника» (пр. Независимости, 68, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: mickevichhanna@gmail.com. <https://orcid.org/0000-0002-7074-0034>

Information about the authors

Valery B. Zaleski – Ph. D. (Physics and Mathematics), Head of the Laboratory of Photoelectronic, SSPA "Optics, Optoelectronics, and Laser Technology" (68, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: zaleski@oelt.basnet.by

Alexey I. Konoyko – Ph. D. (Physics and Mathematics), Assistant Professor, Senior Researcher, SSPA "Optics, Optoelectronics, and Laser Technology" (68, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: kon54@yandex.by

Vladimir M. Kravchenko – Ph. D. (Physics and Mathematics), Leading Researcher, SSPA "Optics, Optoelectronics and Laser Technology" (68, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus)

Hanna S. Kuzmitskaya – Junior Researcher, SSPA "Optics, Optoelectronics, and Laser Technology" (68, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: mickevichhanna@gmail.com. <https://orcid.org/0000-0002-7074-0034>

ISSN 1561-2430 (Print)
 ISSN 2524-2415 (Online)
 УДК 536.424

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-2-224-231>

Поступила в редакцию 04.03.2020

Received 04.03.2020

**М. В. Бушинский¹, Н. В. Терешко¹, А. Н. Чобот¹, О. С. Мантыцкая¹, В. В. Федотова¹,
 Г. М. Чобот², С. Н. Пастушок³**

¹Научно-практический центр Национальной академии наук Беларуси по материаловедению,
 Минск, Беларусь

²Белорусский государственный аграрный технический университет, Минск, Беларусь

³Военная академия Республики Беларусь, Минск, Беларусь

УПРУГИЕ, МАГНИТНЫЕ И ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КОБАЛЬТИТОВ $\text{Sr}_{1-y}\text{Y}_y\text{CoO}_{3-x}$ В ОБЛАСТИ СОСТАВОВ $0,2 \leq y \leq 0,3$

Аннотация. Особое внимание ученых, занимающихся изучением природы фазовых превращений в перовскитоподобных кобальтитах, направлено на исследование аниондефицитных слоистых кобальтитов $\text{Sr}_{0,75}\text{Ln}_{0,25}\text{CoO}_{3-x}$ (Ln – лантаноид). Это связано с тем, что до сих пор причины аномального температурного поведения намагниченности этих материалов являются предметом научной дискуссии. Цель настоящей работы – изучение закономерностей изменения упругих, магнитных и электрических свойств слоистых кобальтитов $\text{Sr}_{1-y}\text{Y}_y\text{CoO}_{3-x}$ в области составов $0,2 \leq y \leq 0,3$ в широком интервале температур. Исследуемые поликристаллические образцы получены на воздухе по известной керамической технологии. Электронно-микроскопические исследования проведены на сканирующем электронном микроскопе LEO 1455 PV. Температурная зависимость модуля Юнга изучалась методом резонансных колебаний в области частот 1000–6000 Гц в интервале температур 100–450 К. Рентгенофазовый анализ выполнен на дифрактометре ДРОН-3М в CuK_α -излучении. Магнитные измерения проведены на универсальной установке Cryogenic Ltd в интервале температур 5–325 К.

В результате установлено, что в интервале температур 25–300 К твердые растворы $\text{Sr}_{1-y}\text{Y}_y\text{CoO}_{3-x}$ ($0,2 \leq y \leq 0,3$) имеют полупроводниковый характер проводимости. Существенного магниторезистивного эффекта в этом интервале температур для исследуемых составов не наблюдалось. Показано, что твердый раствор $\text{Sr}_{1-y}\text{Y}_y\text{CoO}_{3-x}$ ($y = 0,25$) проявляет два магнитных фазовых превращения: низкотемпературное вблизи 220 К и высокотемпературное при 350 К. Близлежащие составы концентрационного интервала $0,2 \leq y \leq 0,3$ проявляют магнитные фазовые превращения при температурах выше комнатной. Низкотемпературные фазовые переходы в них не обнаружены. Установлено, что магнитные фазовые превращения сопровождаются структурными переходами при соответствующих температурах.

Ключевые слова: фазовые превращения, магнитные материалы, слоистые кобальтиты, намагниченность, удельное сопротивление, микроструктура

Для цитирования. Упругие, магнитные и электрические свойства кобальтитов $\text{Sr}_{1-y}\text{Y}_y\text{CoO}_{3-x}$ в области составов $0,2 \leq y \leq 0,3$ / М. В. Бушинский [и др.] // Вест. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2020. – Т. 56, № 2. – С. 224–231. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-2-224-231>

**Maxim V. Bushinsky¹, Nina V. Tereshko¹, Alexandra N. Chobot¹, Olga S. Mantyskaya¹, Vera V. Fedotova¹,
 Gennadii M. Chobot², Sofija N. Pastushonok³**

¹Scientific-Practical Materials Research Centre of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

²Belarusian State Agrarian Technical University, Minsk, Belarus

³Military Academy of the Republic of Belarus, Minsk, Belarus

THE ELASTIC, MAGNETIC, AND ELECTRICAL PROPERTIES OF $\text{Sr}_{1-y}\text{Y}_y\text{CoO}_{3-x}$ COBALTITES IN THE COMPOSITION RANGE $0.2 \leq y \leq 0.3$

Abstract. Anion-deficient layered cobaltites $\text{Sr}_{0,75}\text{Ln}_{0,25}\text{CoO}_{3-x}$ (Ln is a lanthanide) have attracted the special attention of the scientists who study the nature of phase transformations in perovskite-like cobaltites, the anomalous behavior of the temperature magnetization of which is still the subject of scientific discussion. The purpose of this work is to investigate the regularity of changes in the elastic, magnetic, and electrical properties of layered cobaltites $\text{Sr}_{1-y}\text{Y}_y\text{CoO}_{3-x}$ in the composition range $0.2 \leq y \leq 0.3$ over a wide temperature range. The studied polycrystalline samples were obtained by the known ceramic technology in the air. Electron microscopic studies were performed on a LEO 1455 PV scanning electron microscope. The temperature dependence of the Young's modulus was studied by the method of resonance vibrations in the frequency range 1000–6000 Hz and in the temperature range 100–450 K. X-ray phase analysis was performed on a DRON-3M diffractometer under CuK_α radiation. Magnetic measurements were performed using a physical property measurement system (Cryogenic Ltd.) in the temperature range 5–325 K.

As a result of the studies, it was found that in the temperature range 25–300 K, $\text{Sr}_{1-y}\text{Y}_y\text{CoO}_{3-x}$ solid solutions ($0.2 \leq y \leq 0.3$) are characterized by the semiconductor-like conductivity. No significant magnetoresistive effect was observed in this temperature range for the studied compositions. It was shown that the $\text{Sr}_{1-y}\text{Y}_y\text{CoO}_{3-x}$ solid solution ($y = 0.25$) exhibits two magnetic phase transformations: low-temperature near 220 K and high-temperature at 350 K. The nearby compositions of the concentration range $0.2 \leq y \leq 0.3$ exhibit magnetic phase transformations at temperatures above room temperature. No low-temperature phase transitions were detected in them. It has been established that magnetic phase transformations are accompanied by structural transitions at corresponding temperatures.

Keywords: phase transitions, magnetic materials, layered cobaltites, magnetization, resistivity, microstructure

For citation: Bushinsky M. V., Tereshko N. V., Chobot A. N., Mantyskaya O. S., Fedotova V. V., Chobot G. M., Pastushonok S. N. The elastic, magnetic, and electrical properties of $\text{Sr}_{1-y}\text{Y}_y\text{CoO}_{3-x}$ cobaltites in the composition range $0.2 \leq y \leq 0.3$. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2020, vol. 56, no. 2, pp. 224–231 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-2-224-231>

Введение. Интерес к перовскитоподобным кобальтитами связан не только с широким применением этих материалов в технике, но и с возможностью изучения фазовых превращений различной природы, по количеству которых кобальтиты являются уникальными модельными объектами. Природа процессов, происходящих в кобальтитах при фазовых превращениях, является предметом самого широкого обсуждения благодаря реализации в них различных спиновых состояний иона кобальта, а также наличию связи между кристаллической структурой, магнитными и электрическими свойствами.

В настоящее время особое внимание материаловедов направлено на исследование аниондефицитных слоистых кобальтитов $\text{Sr}_x\text{LnCo}_4\text{O}_{10,5+x}$ (приведенная формула на один ион кобальта – $\text{Sr}_{0,75}\text{Ln}_{0,25}\text{CoO}_{3-x}$, Ln – лантаноид) [1–3]. Кристаллическая структура этого класса соединений состоит из слоев октаэдров CoO_6 , соприкасающихся вершинами, и аниондефицитных слоев CoO_{4+x} . Исследование магнитных свойств этих материалов позволило обнаружить аномальное температурное поведение намагниченности. Ниже температуры Нееля в соединениях этого класса появляется спонтанная намагниченность, достигающая максимума вблизи комнатной температуры, а затем плавно уменьшающаяся вплоть до гелиевых температур [3, 4]. В работе [4] было высказано предположение, что при понижении температуры часть ионов Co^{3+} переходит из высокоспинового состояния ($t_{2g}^4 e_g^2$, $S = 2$) в низкоспиновое (t_{2g}^6 , $S = 0$). Однако в работах [5, 6] авторы пришли к выводу, что такое аномальное поведение намагниченности обусловлено фазовым переходом из магнитного состояния со спонтанной намагниченностью в чисто антиферромагнитное (АФ) состояние. Такое заключение было сделано на основании того, что нейтронографические исследования этих материалов не выявили аномального уменьшения магнитного момента при понижении температуры. Иная интерпретация перехода предложена в [7]. В ней аномальное поведение намагниченности связывается с наличием слабой магнитной подрешетки в магнитной структуре коллинеарного ферримагнетика. В данном случае спонтанная намагниченность обусловлена упорядочением ионов кобальта в слое CoO_{4+x} , в то время как слой CoO_6 является чисто антиферромагнитным.

Причины появления аномального температурного поведения намагниченности слоистых кобальтитов до сих пор являются предметом дискуссии [4–7]. Цель настоящей работы – исследование закономерностей изменения упругих, магнитных и электрических свойств слоистых кобальтитов $\text{Sr}_{1-y}\text{Y}_y\text{CoO}_{3-x}$ в области составов $0,2 \leq x \leq 0,3$ в широком интервале температур.

Материалы и методы эксперимента. Исследуемые поликристаллические образцы $\text{Sr}_{0,75}\text{Y}_{0,25}\text{CoO}_{3-x}$, $\text{Sr}_{0,8}\text{Y}_{0,2}\text{CoO}_{3-x}$ и $\text{Sr}_{0,7}\text{Y}_{0,3}\text{CoO}_{3-x}$ получены на воздухе по известной керамической технологии. Исходные реактивы Y_2O_3 , Co_3O_4 и SrCO_3 чистоты не менее 99,9 %, взятые в стехиометрическом соотношении, смешивались в течение 30 мин в шаровой мельнице со скоростью 250 об/мин с добавлением небольшого количества этилового спирта. С целью удаления влаги оксид Y_2O_3 перед взвешиванием отжигался при температуре 1273 К.

Предварительный синтез проводился при температуре 1273 К в течение 2 ч, окончательный – при температуре 1473 К в течение 8 ч. Охлаждение образцов до температуры 573 К происходило вместе с печкой со скоростью 120 К/ч, а затем они доставались и охлаждались на воздухе.

Контроль температуры в печи осуществлялся с использованием программного прецизионного терморегулятора термопарой платина-платина-родий.

Для исследования магнитных свойств были изготовлены образцы в виде таблеток диаметром 10 мм и высотой 4–6 мм, для исследования упругих модулей – образцы цилиндрической формы диаметром 8 мм и длиной 100 мм.

Электронно-микроскопические исследования проводились на сканирующем электронном микроскопе LEO 1455 PV, предназначенном для исследования топографии поверхности и элементного состава. Увеличение – до 300 тыс. раз. Разрешающая способность в вакуумном режиме – 3,5 нм, низковакуумном – 5 нм.

Температурная зависимость модуля Юнга исследовалась методом резонансных колебаний в области частот 1000–6000 Гц в интервале температур 100–450 К. Для возбуждения и регистрации изгибных колебаний образец с помощью тонких никелиновых нитей диаметром 0,1 мм свободно подвешивался вблизи узлов колебаний к двум пьезокристаллам, один из которых служил возбудителем, а другой – приемником колебаний. Момент резонанса фиксировался по максимальной амплитуде колебаний на экране осциллографа. Температура образца измерялась с помощью хромель-копелевой термопары, расположенной вблизи середины образца. Градиент температур по длине образца не превышал 1–2 К. Скорость нагрева не превышала 1 К/мин. Кроме основной резонансной частоты наблюдались и более высокие моды колебаний. Для правильной расшифровки мод изгибных колебаний использовались теоретически выведенные соотношения между соответствующими резонансными частотами: $\nu_2/\nu_1 = 2,76$; $\nu_3/\nu_1 = 5,41$.

Магнитные измерения проведены на универсальной установке Cryogenic Ltd в интервале температур 5–320 К.

Результаты и их обсуждение. Исследование морфологии поверхности синтезированных поликристаллических образцов твердых растворов $\text{Sr}_{1-y}\text{Y}_y\text{CoO}_{3-x}$ ($0,2 \leq y \leq 0,3$) свидетельствует о том, что их микроструктура является однородной и состоит из хорошо сформировавшихся зерен с размерами 3–5 мкм (рис. 1).

Рентгенофазовый анализ, выполненный на дифрактометре ДРОН-3М в CuK_α -излучении при комнатной температуре, не выявил посторонних фаз. Установлено, что все синтезированные твердые растворы являются однофазными перовскитами. На рис. 2 приведен пример уточнения

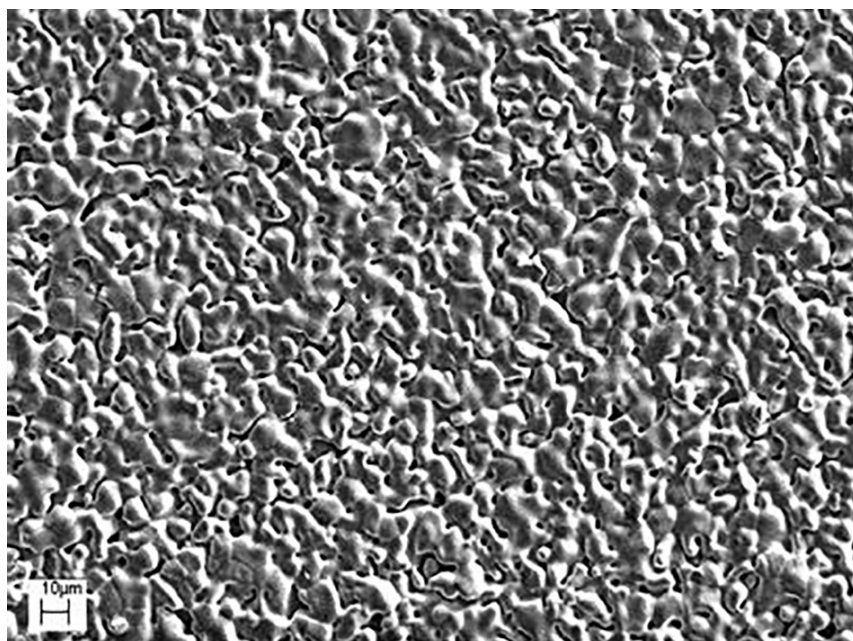
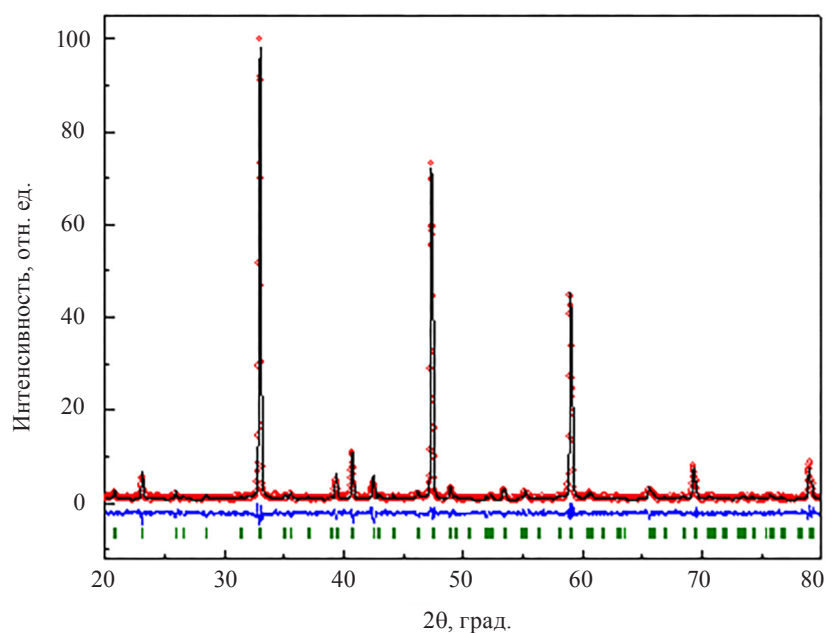


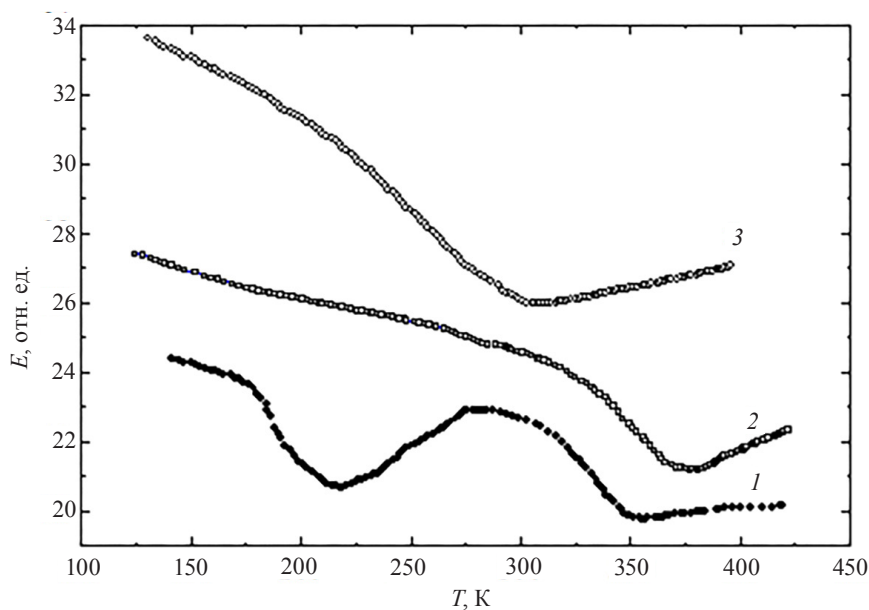
Рис. 1. Морфология поверхности слоистого кобальтита $\text{Sr}_{0,75}\text{Y}_{0,25}\text{CoO}_{3-x}$

Fig. 1. Surface morphology of the layered cobaltite $\text{Sr}_{0,75}\text{Y}_{0,25}\text{CoO}_{3-x}$

Рис. 2. Рентгенограмма образца $\text{Sr}_{0.75}\text{Y}_{0.25}\text{CoO}_{3-x}$ Fig. 2. X-ray diffraction pattern of sample $\text{Sr}_{0.75}\text{Y}_{0.25}\text{CoO}_{3-x}$

структуры однофазного образца $\text{Sr}_{0.75}\text{Y}_{0.25}\text{CoO}_{3-x}$ методом Ритвельда в тетрагональной пространственной группе $I4/mmm$. Хорошее согласие между экспериментальным и расчетным спектрами свидетельствует об однофазности образца.

Исследование температурных зависимостей модуля Юнга слоистых кобальтитов $\text{Sr}_{1-y}\text{Y}_y\text{CoO}_{3-x}$ ($0,2 \leq y \leq 0,3$) в интервале температур 100–450 К позволило обнаружить для состава $y = 0,25$ два достаточно четко выраженных минимума: при температуре выше комнатной ($T = 350$ К), а также при температуре ниже комнатной (вблизи 220 К) (рис. 3). Как известно, аномальное поведение

Рис. 3. Температурные зависимости модуля Юнга слоистых кобальтитов $\text{Sr}_{0.75}\text{Y}_{0.25}\text{CoO}_{3-x}$ (1), $\text{Sr}_{0.8}\text{Y}_{0.2}\text{CoO}_{3-x}$ (2) и $\text{Sr}_{0.7}\text{Y}_{0.3}\text{CoO}_{3-x}$ (3)Fig. 3. Temperature dependences of the Young's modulus of the layered cobaltites $\text{Sr}_{0.75}\text{Y}_{0.25}\text{CoO}_{3-x}$ (1), $\text{Sr}_{0.8}\text{Y}_{0.2}\text{CoO}_{3-x}$ (2), and $\text{Sr}_{0.7}\text{Y}_{0.3}\text{CoO}_{3-x}$ (3)

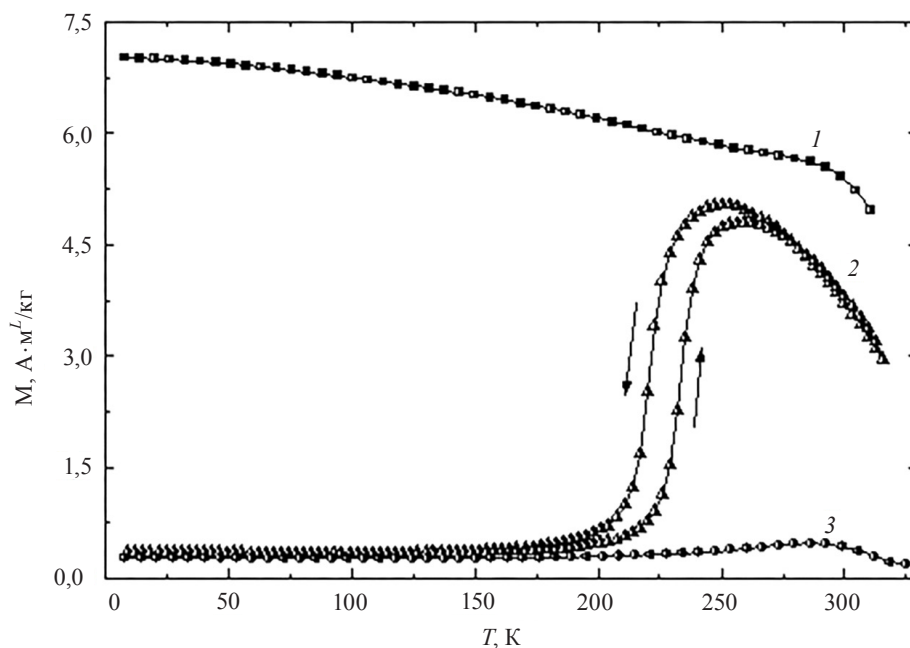


Рис. 4. Температурные зависимости намагниченности составов $\text{Sr}_{0.8}\text{Y}_{0.2}\text{CoO}_{3-x}$ (1), $\text{Sr}_{0.75}\text{Y}_{0.25}\text{CoO}_{3-x}$ (2) и $\text{Sr}_{0.7}\text{Y}_{0.3}\text{CoO}_{3-x}$ (3) в поле $H = 1$ Тл

Fig. 4. Temperature dependences of the magnetization for the compositions $\text{Sr}_{0.8}\text{Y}_{0.2}\text{CoO}_{3-x}$ (1), $\text{Sr}_{0.75}\text{Y}_{0.25}\text{CoO}_{3-x}$ (2), and $\text{Sr}_{0.7}\text{Y}_{0.3}\text{CoO}_{3-x}$ (3) in the field $H = 1$ T

упругих модулей, проявляющееся в виде четко выраженного минимума на температурной зависимости, свидетельствует о наличии в исследуемом образце при соответствующей температуре структурного фазового перехода [8–10]. О наличии структурных переходов при указанных температурах свидетельствует также максимальное поглощение упругой энергии, которое проявлялось в уменьшении амплитуды резонансных колебаний вблизи этих температур. Минимум, наблюдаемый при 350 К, соответствует температуре магнитного разупорядочения. Это фазовое превращение достаточно хорошо согласуется с подобными высокотемпературными переходами в образцах данной системы [6, 7, 11]. В то же время, как видно из рис. 3, для составов данной системы, ближайших к $\text{Sr}_{0.75}\text{Y}_{0.25}\text{CoO}_{3-x}$ ($\text{Sr}_{0.7}\text{Y}_{0.3}\text{CoO}_{3-x}$ и $\text{Sr}_{0.8}\text{Y}_{0.2}\text{CoO}_{3-x}$), аномальное поведение модуля Юнга проявляется лишь при высоких температурах. При температурах ниже комнатной в этих твердых растворах наблюдается классическое уменьшение модуля Юнга с повышением температуры, что указывает на отсутствие в данном температурном интервале структурных фазовых превращений.

Исследование температурной зависимости намагниченности образца $\text{Sr}_{0.75}\text{Y}_{0.25}\text{CoO}_{3-x}$ в поле 1 Тл при нагреве и охлаждении позволило обнаружить вблизи температуры 220 К хорошо выраженную аномалию в виде резкого увеличения (уменьшения) намагниченности с температурным гистерезисом 12 К (рис. 4). Такое температурное поведение намагниченности характерно для магнитного фазового перехода I рода типа порядок – другой порядок.

Исследование температурных зависимостей намагниченности в поле 1 Тл составов $\text{Sr}_{0.8}\text{Y}_{0.2}\text{CoO}_{3-x}$ и $\text{Sr}_{0.7}\text{Y}_{0.3}\text{CoO}_{3-x}$ (рис. 4) показало, что для образца с большим содержанием иттрия ($\text{Sr}_{0.7}\text{Y}_{0.3}\text{CoO}_{3-x}$) характерно чисто антиферромагнитное поведение, в то время как образец с меньшим содержанием иттрия ($\text{Sr}_{0.8}\text{Y}_{0.2}\text{CoO}_{3-x}$) ведет себя подобно ферромагнетику. Известно, что основная магнитная структура слоистого кобальтита $\text{Sr}_{0.8}\text{Y}_{0.2}\text{CoO}_{3-x}$ является антиферромагнитной структурой G-типа с ферромагнитной компонентой [11]. Таким образом, можно предположить, что по мере увеличения содержания иттрия ферромагнитная компонента уменьшается, и составы данной системы переходят в чисто антиферромагнитное состояние через промежуточный состав $\text{Sr}_{0.75}\text{Y}_{0.25}\text{CoO}_{3-x}$.

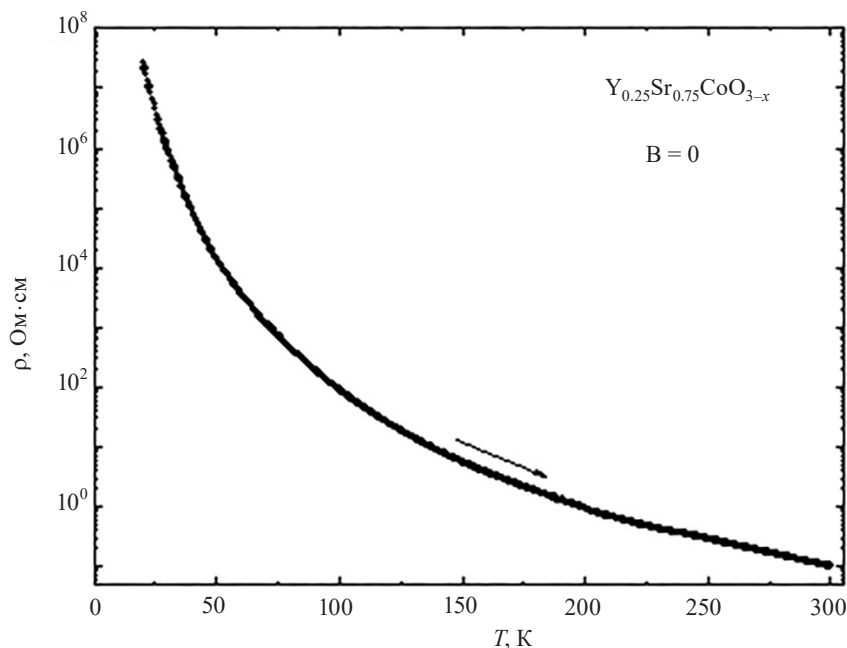


Рис. 5. Температурная зависимость удельного сопротивления состава $\text{Sr}_{0.75}\text{Y}_{0.25}\text{CoO}_{3-x}$

Fig. 5. Temperature dependence of the electrical resistivity for the composition $\text{Sr}_{0.75}\text{Y}_{0.25}\text{CoO}_{3-x}$

При этом магнитное фазовое превращение I рода порядок – второй порядок сопровождается структурным переходом, на что указывает четко выраженный минимум на температурной зависимости модуля Юнга (см. рис. 3).

Исследование температурной зависимости удельного сопротивления твердых растворов $\text{Sr}_{1-y}\text{Y}_y\text{CoO}_{3-x}$ ($0,2 \leq y \leq 0,3$) показало, что в интервале температур 25–300 К эта зависимость носит полупроводниковый характер (рис. 5). Существенного магниторезистивного эффекта для исследуемых составов в данном интервале температур не наблюдалось.

На основе анализа полученных результатов можно сделать вывод, что обнаруженная нами низкотемпературная аномалия модуля Юнга в составе $\text{Sr}_{0.75}\text{Y}_{0.25}\text{CoO}_{3-x}$ связана с магнитным фазовым переходом, который сопровождается кристаллоструктурным превращением, совпадающим с ним по температуре. Высокотемпературные аномалии всех исследованных нами твердых растворов, обусловленные магнитным разупорядочением, также сопровождаются кристаллоструктурными фазовыми превращениями, что свидетельствует о сильной связи между магнитной и решеточной подсистемами.

Заключение. В результате исследования упругих, магнитных и транспортных свойств слоистых кобальтитов $\text{Sr}_{1-y}\text{Y}_y\text{CoO}_{3-x}$ со структурой типа перовскита в концентрационном интервале $0,2 \leq y \leq 0,3$ показано, что в твердом растворе $y = 0,25$ происходят два магнитных фазовых превращения: низкотемпературное вблизи $T = 220$ К и высокотемпературное при $T = 350$ К. Оба перехода сопровождаются структурными фазовыми превращениями при тех же температурах. Близлежащие к нему составы ($y = 0,2$ и $y = 0,3$) проявляют магнитные и структурные фазовые превращения, совпадающие по температуре, при температурах выше комнатной. Низкотемпературные фазовые переходы в этих составах не обнаружены.

Показано, что в интервале температур 25–300 К исследуемые составы характеризуются полупроводниковым характером проводимости. Существенного магниторезистивного эффекта в данном интервале температур для них не наблюдалось.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант № Ф18Р-159).

Acknowledgements. The work is supported by the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (Grant No. Ф18Р-159).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Withers, R. L. Atomic ordering in the doped rare earth cobaltites $\text{Ln}_{0.33}\text{Sr}_{0.67}\text{CoO}_{3-\delta}$ ($\text{Ln} = \text{Y}^{3+}$, Ho^{3+} and Dy^{3+}) / R. L. Withers, M. James, D. J. Goossens // *J. Solid State Chem.* – 2003. – Vol. 174, № 1. – P. 198–208. [https://doi.org/10.1016/s0022-4596\(03\)00227-5](https://doi.org/10.1016/s0022-4596(03)00227-5)
2. Structural and magnetic properties of $\text{Y}_{0.33}\text{Sr}_{0.67}\text{CoO}_{2.79}$ / D. J. Goossens [et al.] // *Phys. Rev. B.* – 2004. – Vol. 69, № 13. – P. 134411-1–134411-6. <https://doi.org/10.1103/physrevb.69.134411>
3. Structure-property relationship in the ordered-perovskite-related oxide $\text{Sr}_{3.12}\text{Er}_{0.88}\text{Co}_4\text{O}_{10.5}$ / S. Ishiwata [et al.] // *Phys. Rev. B.* – 2007. – Vol. 75, № 22. – P. 220406-1–220406-4. <https://doi.org/10.1103/physrevb.75.220406>
4. Field-induced spin-state transition in the perovskite cobalt oxide $\text{Sr}_{1-x}\text{Y}_x\text{CoO}_{3-\delta}$ / S. Kimura [et al.] // *Phys. Rev. B.* – 2008. – Vol. 78, № 18. – P. 180403-1–180403-4. <https://doi.org/10.1103/physrevb.78.180403>
5. Correlation of chemical coordination and magnetic ordering in $\text{Sr}_3\text{YCo}_4\text{O}_{10.5+\delta}$ ($\delta=0.02$ and 0.26) / D. V. Sheptyakov [et al.] // *Phys. Rev. B.* – 2009. – Vol. 80, № 9. – P. 024409-1–024409-8. <https://doi.org/10.1103/physrevb.80.099902>
6. Troyanchuk, I. O. Effect of iron doping on magnetic properties of $\text{Sr}_{0.78}\text{Y}_{0.22}\text{O}_{2.65+\delta}$ -layered perovskite / I. O. Troyanchuk, D. V. Karpinsky, A. P. Sazonov // *J. Mater. Sci.* – 2009. – Vol. 44, № 21. – P. 5900–5908. <https://doi.org/10.1007/s10853-009-3835-7>
7. Complex room-temperature ferrimagnetism induced by zigzag stripes of oxygen vacancies in $\text{Sr}_3\text{YCo}_4\text{O}_{10+\delta}$ / D. D. Khalyavin [et al.] // *Phys. Rev. B.* – 2011. – Vol. 83, № 14. – P. 140403-1–140403-4. <https://doi.org/10.1103/physrevb.83.140403>
8. Троянчук, И. О. Фазовый переход в $\text{CaMn}_3(\text{Mn}^{3+}\text{Mn}^{4+})\text{O}_{12}$ со структурой перовскита / И. О. Троянчук, А. Н. Чобот // *Кристаллография.* – 1997. – Т. 42, № 6. – С. 1058–1065.
9. Magnetic and structural phase transitions in some orthocobaltites doped by Ba or Sr ions / I. O. Troyanchuk [et al.] // *J. Phys.: Condens. Matter.* – 1998. – Vol. 10, № 28. – P. 6381–6389. <https://doi.org/10.1088/0953-8984/10/28/017>
10. Фазовые превращения в перовскитах $\text{TbBaCo}_{2-x}\text{Fe}_x\text{O}_{5+\gamma}$ / И. О. Троянчук [и др.] // *ЖЭТФ.* – 2002. – Т. 122, вып. 4 (10). – С. 863–868.
11. Кристаллическая структура, магнитные и упругие свойства $\text{Sr}_{0.8}\text{Yr}_{0.2}\text{CoO}_{2.65}$ / М. В. Бушинский [и др.] // *Докл. Нац. акад. наук Беларуси.* – 2019. – Т. 63, № 5. – С. 542–547. <https://doi.org/10.29235/1561-8323-2019-63-5-542-547>

References

1. Withers R. L., James M., Goossens D. J. Atomic ordering in the doped rare earth cobaltites $\text{Ln}_{0.33}\text{Sr}_{0.67}\text{CoO}_{3-\delta}$ ($\text{Ln} = \text{Y}^{3+}$, Ho^{3+} and Dy^{3+}). *Journal of Solid State Chemistry*, 2003, vol. 174, no. 1, pp. 198–208. [https://doi.org/10.1016/s0022-4596\(03\)00227-5](https://doi.org/10.1016/s0022-4596(03)00227-5)
2. Goossens D. J., Wilson K. F., James M., Studer A. J., Wang X. L. Structural and magnetic properties of $\text{Y}_{0.33}\text{Sr}_{0.67}\text{CoO}_{2.79}$. *Physical Review B*, 2004, vol. 69, no. 13, pp. 134411-1–134411-6. <https://doi.org/10.1103/physrevb.69.134411>
3. Ishiwata S., Kobayashi W., Terasaki I., Kato K., Takata M. Structure-property relationship in the ordered-perovskite-related oxide $\text{Sr}_{3.12}\text{Er}_{0.88}\text{Co}_4\text{O}_{10.5}$. *Physical Review B*, 2007, vol. 75, no. 22, pp. 220406-1–220406-4. <https://doi.org/10.1103/physrevb.75.220406>
4. Kimura S., Maeda Y., Kashiwagi T., Yamaguchi H., Hagiwara M., Yoshida S., Terasaki I., Kindo K. Field-induced spin-state transition in the perovskite cobalt oxide $\text{Sr}_{1-x}\text{Y}_x\text{CoO}_{3-\delta}$. *Physical Review B*, 2008, vol. 78, no. 18, pp. 180403-1–180403-4. <https://doi.org/10.1103/physrevb.78.180403>
5. Sheptyakov D. V., Pomjakushin Yu. V., Drozhzhin O. A., Istomin S. Ya., Antipov E. V., Bobrikov I. A., Balagurov A. M. Correlation of chemical coordination and magnetic ordering in $\text{Sr}_3\text{YCo}_4\text{O}_{10.5+\delta}$ ($\delta=0.02$ and 0.26). *Physical Review B*, 2009, vol. 80, no. 9, pp. 024409-1–024409-8. <https://doi.org/10.1103/physrevb.80.099902>
6. Troyanchuk I. O., Karpinsky D. V., Sazonov A. P. Effect of iron doping on magnetic properties of $\text{Sr}_{0.78}\text{Y}_{0.22}\text{O}_{2.65+\delta}$ -layered perovskite. *Journal of Materials Science*, 2009, vol. 44, no. 21, pp. 5900–5908. <https://doi.org/10.1007/s10853-009-3835-7>
7. Khalyavin D. D., Chapon L. C., Suard E., Parker J. E., Thompson S. P., Yaremchenko A. A., Kharton V. V. Complex room-temperature ferrimagnetism induced by zigzag stripes of oxygen vacancies in $\text{Sr}_3\text{YCo}_4\text{O}_{10+\delta}$. *Physical Review B*, 2011, vol. 83, no. 14, pp. 140403-1–140403-4. <https://doi.org/10.1103/physrevb.83.140403>
8. Troyanchuk I. O., Chobot A. N. Phase transition in $\text{CaMn}_3(\text{Mn}^{3+}\text{Mn}^{4+})\text{O}_{12}$ with perovskite structure. *Kristallografiya = Crystallography*, 1997, vol. 42, no. 6, pp. 105–1065 (in Russian).
9. Troyanchuk I. O., Kasper N. V., Khalyavin D. D., Chobot A. N., Chobot G. M., Szymczak H. Magnetic and structural phase transitions in some orthocobaltites doped by Ba or Sr ions. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 1998, vol. 10, no. 28, pp. 6381–6389. <https://doi.org/10.1088/0953-8984/10/28/017>
10. Troyanchuk I. O., Chobot A. N., Khalyavin D. D., Szymczak R., Szymczak H. Fazovyye prevrashcheniya v perovskitakh $\text{TbBaCo}_{2-x}\text{Fe}_x\text{O}_{5+\gamma}$. Phase transformations in perovskites $\text{TbBaCo}_{2-x}\text{Fe}_x\text{O}_{5+\gamma}$. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 2002, vol. 95, no. 4, pp. 748–752. <https://doi.org/10.1134/1.1520607>
11. Bushinsky M. V., Tereshko N. V., Chobot A. N., Mantyskaya O. S., Chobot G. M., Dobryansky V. M., Pastushonok S. N. Crystal structure, magnetic and elastic properties of $\text{Sr}_{0.8}\text{Yr}_{0.2}\text{CoO}_{2.65}$. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2019, vol. 63, no. 5, pp. 542–547 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-8323-2019-63-5-542-547>

Информация об авторах

Бушинский Максим Владиславович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Научно-практический центр Национальной академии наук Беларуси по материаловедению (ул. П. Бровки, 19, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: bushinsky@physics.by

Терешко Нина Викторовна – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Научно-практический центр Национальной академии наук Беларуси по материаловедению (ул. П. Бровки, 19, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: tereshko@physics.by

Чобот Александра Николаевна – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Научно-практический центр Национальной академии наук Беларуси по материаловедению (ул. П. Бровки, 19, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: a.n.chobot@tut.by

Мантыцкая Ольга Станиславовна – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Научно-практический центр Национальной академии наук Беларуси по материаловедению (ул. П. Бровки, 19, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: mantytskaja@physics.by

Федотова Вера Васильевна – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Научно-практический центр Национальной академии наук Беларуси по материаловедению (ул. П. Бровки, 19, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: fedotova@physics.by

Чобот Геннадий Михайлович – кандидат физико-математических наук, доцент, Белорусский государственный аграрный технический университет (пр. Независимости, 99, 220023, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: g.m.chobot@tut.by

Пастушонок Софья Николаевна – кандидат физико-математических наук, доцент, Военная академия Республики Беларусь (пр. Независимости, 220, 220057, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: sn195333@gmail.com

Information about the authors

Maxim V. Bushinsky – Ph. D. (Physics and Mathematics), Senior Researcher, Scientific and Practical Materials Research Centre of the National Academy of Sciences of Belarus (19, P. Brovka Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus) E-mail: bushinsky@physics.by

Nina V. Tereshko – Ph. D. (Physics and Mathematics), Senior Researcher, Scientific and Practical Materials Research Centre of the National Academy of Sciences of Belarus (19, P. Brovka Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus) E-mail: tereshko@physics.by

Aleksandra N. Chobot – Ph. D. (Physics and Mathematics), Senior Researcher, Scientific and Practical Materials Research Centre of the National Academy of Sciences of Belarus (19, P. Brovka Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus) E-mail: a.n.chobot@tut.by

Mantytskaya Olga Stanislavovna – Ph. D. (Physics and Mathematics), Senior Researcher, Scientific and Practical Materials Research Centre of the National Academy of Sciences of Belarus (19, P. Brovka Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus) E-mail: mantytskaja@physics.by

Vera V. Fedotova – Ph. D. (Physics and Mathematics), Senior Researcher, Scientific and Practical Materials Research Centre of the National Academy of Sciences of Belarus (19, P. Brovka Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus) E-mail: fedotova@physics.by

Gennadii M. Chobot – Ph. D. (Physics and Mathematics), Assistant Professor, Belarusian State Agrarian Technical University (99, Nezavisimosti Ave., 220023, Minsk, Republic of Belarus) E-mail: g.m.chobot@tut.by

Sofija N. Pastushonok – Ph. D. (Physics and Mathematics), Assistant Professor, Military Academy of the Republic of Belarus (220, Nezavisimosti Ave., 220057, Minsk, Republic of Belarus) E-mail: sn195333@gmail.com

ISSN 1561-2430 (Print)

ISSN 2524-2415 (Online)

УДК 538.911:537.622.6:53.092

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-2-232-238>

Поступила в редакцию 27.11.2019

Received 27.11.2019

В. С. Гончаров, С. В. Труханов*Научно-практический центр Национальной академии наук Беларуси
по материаловедению, Минск, Беларусь***ТРЕУГОЛЬНАЯ МАГНИТНАЯ СТРУКТУРА СОЕДИНЕНИЯ Mn_3Sb**

Аннотация. Метастабильное соединение Mn_3Sb образуется при высоком давлении и температуре и распадается при нагревании выше 420 К на Mn_2Sb и Mn . Имеет кубическую кристаллическую структуру, описываемую пространственной группой $Pm-3m$ (№ 221) с параметром решетки $a = 0,400$ нм. В настоящей работе по результатам нейтронографических исследований и с учетом данных магнитометрии показано, что Mn_3Sb является антиферромагнетиком, и предложена модель магнитной структуры с треугольной конфигурацией равных по величине магнитных моментов. Магнитные моменты атомов марганца, составляющие базис элементарной магнитной ячейки, лежат в плоскости (111) и образуют равносторонний треугольник. По нейтронографическим данным определены магнитные моменты атомов марганца при разных температурах.

Ключевые слова: соединение Mn_3Sb , магнитная структура, антиферромагнетик, нейтронная дифракция

Для цитирования. Гончаров, В. С. Треугольная магнитная структура соединения Mn_3Sb / В. С. Гончаров, С. В. Труханов // Вестн. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2020. – Т. 56, № 2. – С. 232–238. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-2-232-238>

Vladimir S. Goncharov, Sergei V. Trukhanov*Scientific-Practical Materials Research Centre of the National Academy
of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus***TRIANGULAR MAGNETIC STRUCTURE OF THE Mn_3Sb COMPOUND**

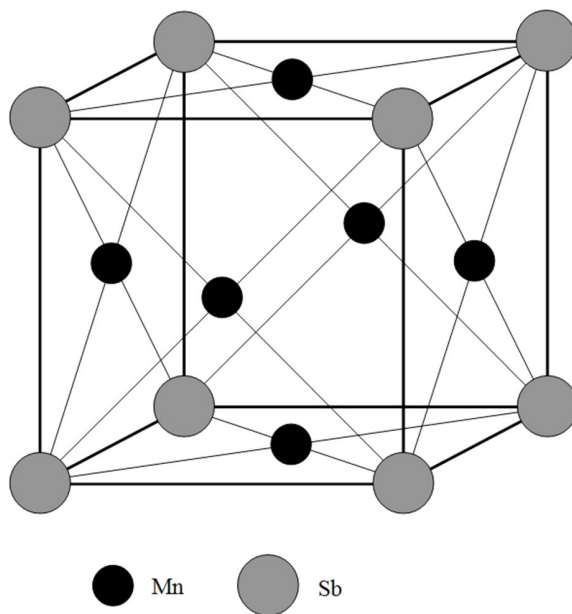
Abstract. The Mn_3Sb metastable compound is formed at high pressure and temperature and it decomposes upon heating above 420 K into Mn_2Sb and Mn . It has a cubic crystalline structure describing the $Pm-3m$ (№ 221) space group with a lattice parameter of $a = 0.400$ nm. In the present work, according to the results of neutron diffraction investigations and taking into account magnetometry data, it is shown that Mn_3Sb is an antiferromagnet, and a model of the magnetic structure with a triangular configuration of equal magnetic moments in magnitude is proposed. The magnetic moments of manganese atoms, constituting the basis of a unit magnetic cell, lie in the (111) plane and form an equilateral triangle. According to neutron diffraction data, the magnetic moments of manganese atoms were determined at different temperatures.

Keywords: Mn_3Sb compound, magnetic structure, antiferromagnet, neutron diffraction

For citation. Goncharov V. S., Trukhanov S. V. Triangular magnetic structure of the Mn_3Sb compound. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2020, vol. 56, no. 2, pp. 232–238 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-2-232-238>

Введение. Соединение Mn_3Sb образуется в условиях высокого давления и температуры и имеет кубическую структуру с параметром кристаллической решетки $a = 0,400$ нм. Атомы марганца занимают положение $3c$ (0, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$), сурьмы – положение $1a$ (0, 0, 0) пространственной группы $Pm-3m$ (221) (рис. 1) [1, 2].

Это соединение при комнатной температуре и атмосферном давлении находится в термодинамически неравновесном состоянии и разрушается при нагревании выше температуры 420 К с образованием двух фаз: Mn_2Sb и Mn . Из магнитных измерений известно, что удельная намагниченность образца соединения Mn_3Sb очень мала и составляет в поле 0,86 Тл ~ 1 А·м²/кг во всем температурном интервале вплоть до температуры разрушения [1, 3]. Такой характер температурной зависимости удельной намагниченности допускает несколько основных вариантов магнитного состояния данного соединения.

Рис. 1. Кристаллическая структура соединения Mn_3Sb Fig. 1. The crystal structure of the Mn_3Sb compound

Если в образце присутствует небольшое количество ферромагнитной или ферримагнитной примесной фазы (в данном случае это может быть либо фаза протяженного состава Mn_{1+x}Sb , либо соединение Mn_2Sb), то в диапазоне измерений соединение Mn_3Sb может находиться в антиферромагнитном либо в парамагнитном состоянии. Если же образец является однофазным, то соединение Mn_3Sb может быть ферримагнетиком или слабым ферромагнетиком, если это допускает симметрия его пространственной группы.

Ранее в работе [3] на основании нейтронографических данных, принимая во внимание отсутствие на нейтронограммах рефлексов примесных фаз (за исключением фазы MnO , количество которой составляет около 3 %) и учитывая схожесть ближайшего окружения атомов марганца в соединениях Mn_2Sb и Mn_3Sb , была предложена модель магнитной структуры соединения Mn_3Sb с ферримагнитным (антипараллельным) упорядочением различных по величине атомных магнитных моментов атомов марганца. Однако эта модель предполагает существование разных по величине магнитных моментов атомов Mn в одной кристаллографической позиции, что не является бесспорным.

Целью настоящей статьи является определение магнитного состояния соединения Mn_3Sb и установление его магнитной структуры по результатам магнитометрического и нейтронографического исследований.

Эксперимент. Образцы соединения Mn_3Sb , исследованные в настоящей работе, были синтезированы по технологии, описанной в [2].

Полевые зависимости магнитных характеристик исследуемых образцов в статических полях до 14 Т измерялись по индукционной методике на вибрационном магнитометре Vibrating Sample Magnetometer (VSM) фирмы Cryogenic Limited.

Данные нейтронной дифракции были получены на Мюнхенском исследовательском реакторе FRM-II (Гархинг, Германия) с помощью нейтронного порошкового дифрактометра SPODI с длиной волны нейтронов $\lambda = 0,1548$ нм при температурах 100, 200 и 300 К.

Обработка дифракционных спектров проводилась с помощью программы FullProf [4] методом Ритвельда [5]. Точность определения параметров элементарных ячеек была не ниже 0,005 Å.

Результаты и их анализ. Для определения магнитного состояния применялся метод дифракции нейтронов – практически единственный прямой и эффективный метод исследования магнитной структуры. Сложность заключалась в том, что в данном случае невозможно полу-

чить нейтронограмму образца при температуре выше точки перехода в парамагнитное состояние. Поэтому с помощью программного комплекса FullProf и модели кристаллической структуры, описанной во «Введении», была рассчитана нейтронограмма соединения Mn_3Sb .

Обработка нейтронографических данных для уточнения кристаллической структуры с применением вышеуказанной модели приводит к достаточно хорошему описанию экспериментальной нейтронограммы, за исключением интенсивности нескольких рефлексов, для которых рассчитанная интенсивность оказалась меньше полученной экспериментально. Попытки улучшить соответствие, используя предположение о тетрагональном или ромбоэдрическом искажении структуры, а также поправки на текстурированность образца, к положительному результату не привели, что дает основание предполагать наличие магнитного вклада в интенсивность этих рефлексов. В таком случае элементарная ячейка магнитной структуры должна совпадать с элементарной ячейкой кристаллической структуры и соединение Mn_3Sb должно быть слабым ферромагнетиком. Но в соединении, кристаллическая структура которого описывается кубической пространственной группой, не может быть слабого ферромагнетизма.

С другой стороны, сравнение нейтронограммы, рассчитанной для кристаллической структуры, и нейтронограмм, полученных экспериментально, показало отсутствие как сверхструктурных рефлексов, характерных для антиферромагнитного состояния с магнитной ячейкой, кратной кристаллической, так и рефлексов возможных примесей Mn_{1+x}Sb и Mn_2Sb .

Однако, принимая во внимание особенности синтеза соединения Mn_3Sb из двухфазного сплава ($\text{Mn}_2\text{Sb} + \text{Mn}$) и учитывая возможность того, что процесс не завершился полностью, можно допустить, что примесная магнитная фаза Mn_2Sb находится в мелкодисперсном состоянии и, соответственно, не обнаруживается дифракционными методами. Для проверки правильности этого предположения были проведены магнитометрические измерения.

На рис. 2 представлены зависимости удельной намагниченности образца Mn_3Sb от магнитной индукции приложенного магнитного поля.

Из анализа формы полевой зависимости удельной намагниченности можно сделать вывод, что она не насыщается в доступных полях вплоть до 14 Тл как при комнатной температуре, так и при температуре 10 К. Такое поведение характерно для магнитного фазового состояния, подобного состоянию спинового стекла. Это так называемое однородное магнитное фазовое состояние, при котором наблюдается наличие ближнего магнитного порядка в упорядочении спинов. Как правило, оно представляет собой внедрение наномасштабных упорядоченных кластеров в парамагнитной или антиферромагнитной матрице. В нашем случае, вероятно, небольшое количество ферромагнитного соединения Mn_2Sb распределено в виде нанокластеров по объему антиферромагнитной фазы Mn_3Sb .

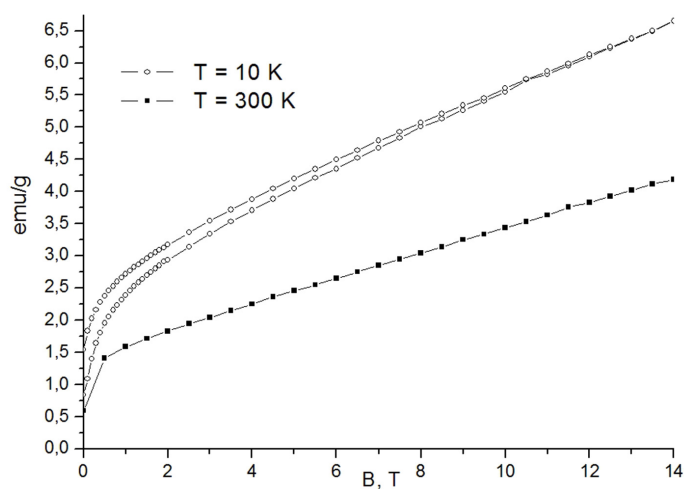
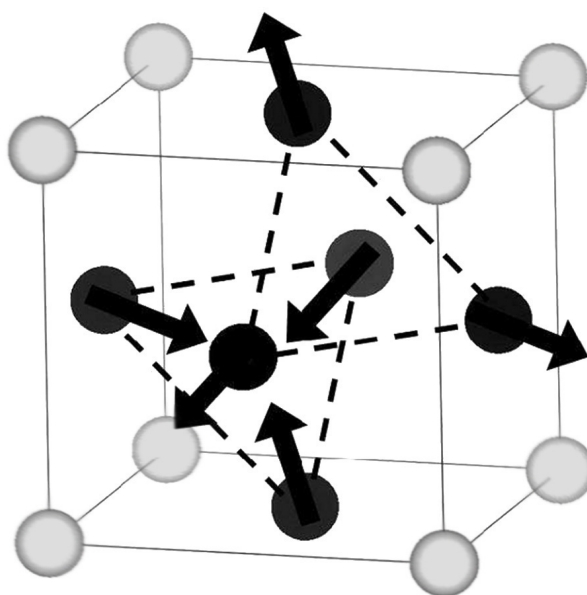


Рис. 2. Полевые зависимости удельной намагниченности образца Mn_3Sb

Fig. 2. Field dependences of the magnetization of the Mn_3Sb sample

Рис. 3. Модель магнитной структуры соединения Mn_3Sb .Fig. 3. The model of the magnetic structure of the Mn_3Sb compound

Учитывая, что в элементарной ячейке данного соединения находятся три магнитоактивных атома, то антиферромагнитная структура, вероятнее всего, должна быть неколлинеарной (треугольной).

В работах [6, 7] рассмотрены теоретически возможные варианты магнитной структуры изоструктурного соединения Mn_3Pt , среди которых есть и треугольные конфигурации равных по величине магнитных моментов атомов марганца. Методом проб и ошибок была выбрана совпадающая с ядерной элементарная ячейка магнитной структуры, в которой магнитные моменты атомов марганца (базис элементарной ячейки) лежат в плоскости (111) и образуют равносторонний треугольник.

На рис. 3 представлена элементарная ячейка кристаллической структуры соединения Mn_3Sb , в которой атомы марганца расположены в центрах граней. Атомы сурьмы находятся в узлах кристаллической решетки. Стрелками показаны магнитные моменты атомов марганца.

При обработке дифракционных данных по методу Ритвельда в рамках предложенной модели магнитной структуры установлено хорошее соответствие экспериментальных и рассчитанных нейтронограмм. При расчетах уточнялись параметры кристаллической решетки и величины магнитных моментов, а также учитывался вклад от примесной фазы MnO , количество которой, согласно расчетам, не превышало 3 %.

На рис. 4–6 приведены результаты обработки нейтронограмм соединения Mn_3Sb , полученных при разных температурах. Представлены точки экспериментальной нейтронограммы, вычисленный профиль, разностная кривая, положения и индексы дифракционных максимумов.

Результаты обработки нейтронографических данных представлены в таблице, где a – параметр элементарной ячейки, m – магнитный момент на атом марганца, R_p – профильный фактор соответствия, R_m – магнитный фактор соответствия.

Значения структурных и магнитных параметров и факторов соответствия, полученные при уточнении магнитной структуры соединения Mn_3Sb при разных температурах

T , К	a , нм	m , μ_B	R_p , %	R_m , %
100	0,3986	3,24	7,88	3,63
200	0,3991	3,15	8,81	3,51
300	0,3999	3,08	8,73	3,47

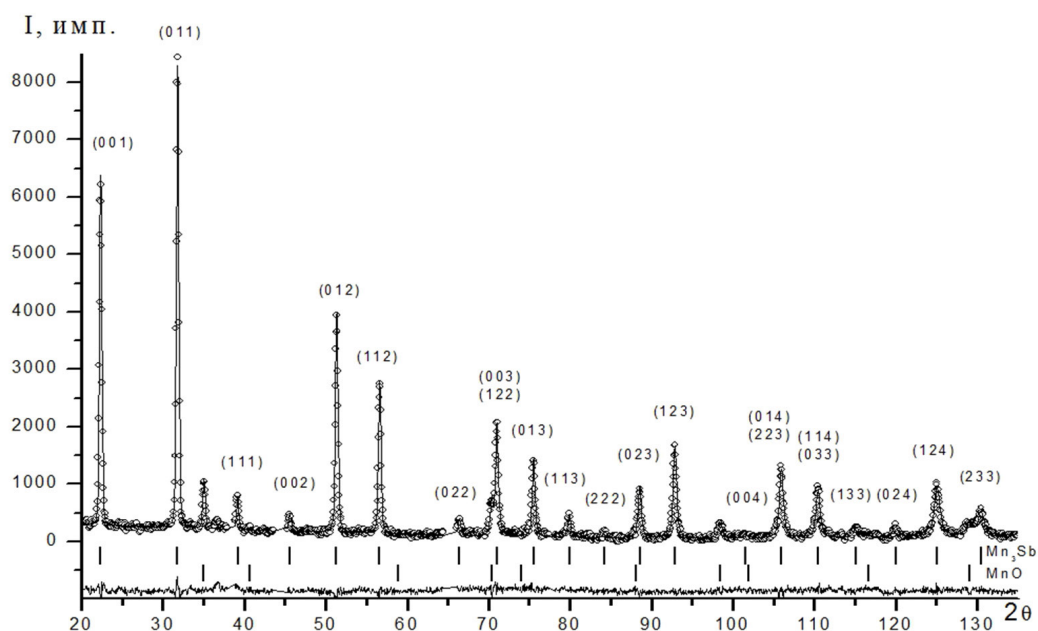


Рис. 4. Наблюдаемый и рассчитанный спектры нейтронной дифракции соединения Mn_3Sb при температуре 300 K

Fig. 4. Observed and calculated neutron diffraction spectra of the Mn_3Sb compound at a temperature of 300 K

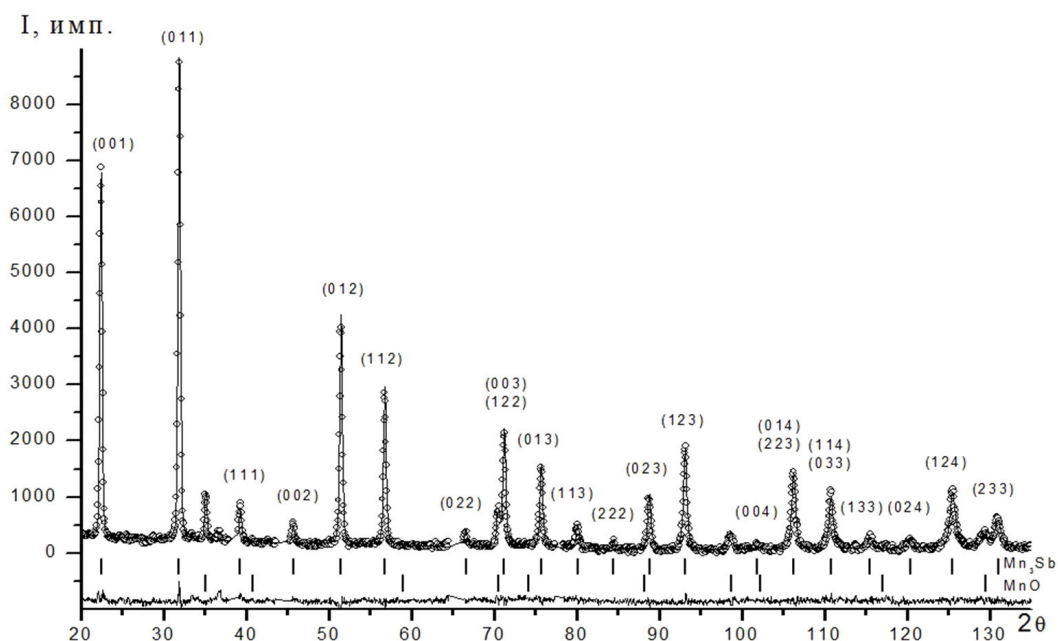


Рис. 5. Наблюдаемый и рассчитанный спектры нейтронной дифракции соединения Mn_3Sb при температуре 200 K

Fig. 5. Observed and calculated neutron diffraction spectra of the Mn_3Sb compound at a temperature of 200 K

Хорошее соответствие рассчитанного дифракционного спектра с экспериментальным и низкие значения факторов соответствия свидетельствует о высокой достоверности предложенной модели магнитной структуры. Тем не менее для уточнения магнитного фазового состояния необходимо провести исследование температурных зависимостей удельной намагниченности в зависимости от магнитной предыстории, т. е. в так называемых режимах измерения после охлаждения образца без поля и после охлаждения в поле. Эту задачу планируется решить в ближайшее время.

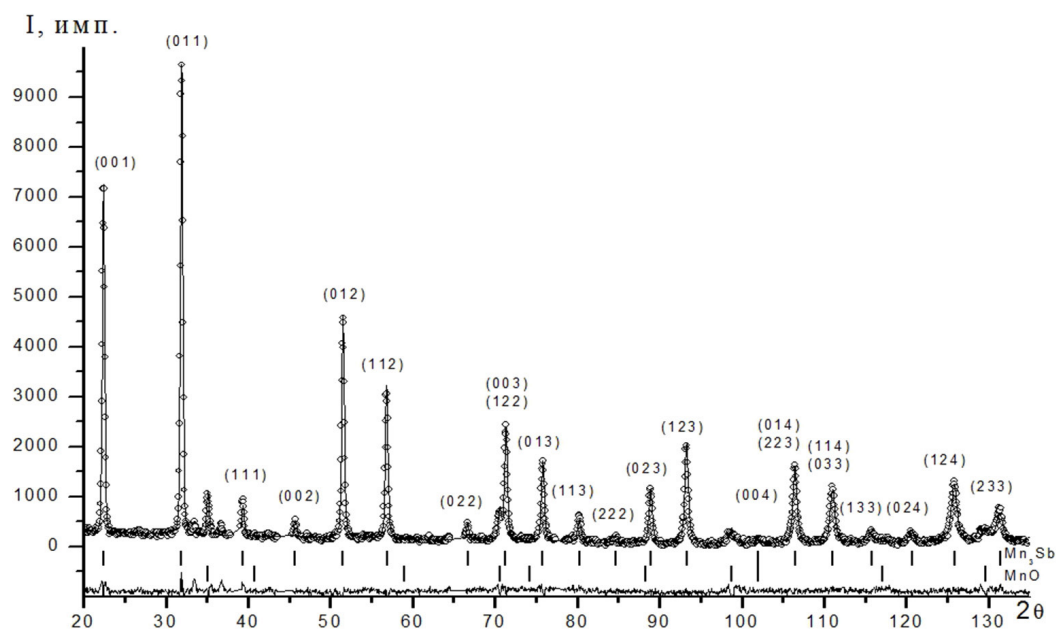


Рис. 6. Наблюдаемый и рассчитанный спектры нейтронной дифракции соединения Mn_3Sb при температуре 100 K

Fig. 6. Observed and calculated neutron diffraction spectra of the Mn_3Sb compound at a temperature of 100 K

Заклучение. Таким образом, в настоящей работе по результатам обработки спектров нейтронной дифракции и с учетом данных магнитометрии сделан вывод о том, что Mn_3Sb является антиферромагнетиком с неколлинеарной (треугольной) конфигурацией магнитных моментов, и предложена модель его магнитной структуры. По результатам обработки нейтронографических данных определены магнитные моменты атомов марганца при разных температурах.

Благодарности. Авторы выражают благодарность А. П. Сазонову и А. Т. Сенишину за помощь в организации и проведении нейтронографических измерений.

Acknowledgments. Authors are grateful to A. P. Sazonov and A. T. Senishin for help in organization and realization of the neutron diffraction measurements.

Список использованных источников

1. Mn_3Sb : a new L12-type intermetallic compound synthesized under high-pressure / T. Yamashita [et al.] // *J. Alloys Comp.* – 2003. – Vol. 348, № 1/2. – P. 220–223. [https://doi.org/10.1016/s0925-8388\(02\)00834-4](https://doi.org/10.1016/s0925-8388(02)00834-4)
2. Гончаров, В. С. Синтез и кристаллическая структура нового соединения Mn_3Sb / В. С. Гончаров, В. М. Рыжковский // *Неорган. материалы.* – 2005. – Т. 41, № 6. – С. 647–649.
3. Магнитное упорядочение в соединении Mn_3Sb по данным нейтронной дифракции / В. М. Рыжковский [и др.] // *Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования.* – 2011. – № 2. – С. 9–13.
4. Rodriguez-Craval, J. Recent advances in magnetic structure determination by neutron powder diffraction / J. Rodriguez-Craval // *Physica B: Cond. Matter.* – 1993. – Vol. 192, № 1/2. – P. 55–69. [https://doi.org/10.1016/0921-4526\(93\)90108-i](https://doi.org/10.1016/0921-4526(93)90108-i)
5. Rietveld, H. M. A Profile Refinement Method for Nuclear and Magnetic Structures / H. M. Rietveld // *J. Appl. Crystallogr.* – 1969. – Vol. 2, № 2. – P. 65–71. <https://doi.org/10.1107/s0021889869006558>
6. Yohei Kota. Ab-initio Study on the Magnetic Structures in the Ordered Mn_3Pt Alloy / Yohei Kota, Hiroki Tsuchiura and Akimasa Sakuma // *IEEE Trans. Magnetics.* – 2008. – Vol. 44, № 11. – P. 3131–3133. <https://doi.org/10.1109/TMAG.2008.2001678>.
7. Magnetic Structures and Exchange Interactions in the Mn – Pt System / E. Kren [et al.] // *Phys. Rev.* – 1968. – Vol. 171, № 2. – P. 574–586. <https://doi.org/10.1103/physrev.171.574>

References

1. Yamashita T., Takizawa H., Sasaki T., Uheda K., Endo T. Mn_3Sb : a new L12-type intermetallic compound synthesized under high-pressure. *Journal of Alloys and Compounds*, 2003, vol. 348, no. 1–2, pp. 220–223. [https://doi.org/10.1016/s0925-8388\(02\)00834-4](https://doi.org/10.1016/s0925-8388(02)00834-4)
2. Goncharov V. S., Ryzhkovskii V. M. High-Pressure Synthesis and Crystal Structure of the New Compound Mn_3Sb . *Neorganicheskie materialy = Inorganic Materials*, 2005, vol. 41, no. 6, pp. 557–559. <https://doi.org/10.1007/s10789-005-0168-z>

3. Ryzhkovskii V. M., Goncharov V. S., Agafonov S. S., Glazkov V. P., Somenkov V. A., Sazonov A. P., Senyshyn A. T. Magnetic ordering in Mn₃Sb determined by neutron diffraction data. *Journal of Surface Investigation. X-Ray, Synchrotron and Neutron Techniques*, 2011, vol. 5, no. 1, pp. 9–13. <https://doi.org/10.1134/s1027451011020170>
4. Rodriguez-Craval J. Recent advances in magnetic structure determination by neutron powder diffraction. *Physica B: Condensed Matter*, 1993, vol. 192, no. 1–2, pp. 55–69. [https://doi.org/10.1016/0921-4526\(93\)90108-i](https://doi.org/10.1016/0921-4526(93)90108-i)
5. Rietveld H. M. A Profile Refinement Method for Nuclear and Magnetic Structures. *Journal of Applied Crystallography*, 1969, vol. 2, no. 2, pp. 65–71. <https://doi.org/10.1107/s0021889869006558>
6. Kota Yohei, Tsuchiura Hiroki, Sakuma Akimasa. Ab-initio Study on the Magnetic Structures in the Ordered Mn₃Pt Alloy. *IEEE Transactions on Magnetics*, 2008, vol. 44, no. 11, pp. 3131–3133. <https://doi.org/10.1109/TMAG.2008.2001678>
7. Kren E., Kadar G., Pal L., Solyom J., Szabo P., Tarnoczi T. Magnetic Structures and Exchange Interactions in the Mn – Pt System. *Physical Review*, 1968, vol. 171, no. 2, pp. 574–586. <https://doi.org/10.1103/physrev.171.574>

Информация об авторах

Гончаров Владимир Сергеевич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории физики магнитных материалов, Научно-практический центр Национальной академии наук Беларуси по материаловедению (ул. П. Бровки, 19, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: goncharov@physics.by

Труханов Сергей Валентинович – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории технологии и физики роста кристаллов, Научно-практический центр Национальной академии наук Беларуси по материаловедению (ул. П. Бровки, 19, 220072, г. Минск, Республика Беларусь).

Information about the authors

Vladimir S. Goncharov – Ph. D. (Physics and Mathematics), Senior Researcher of the Laboratory of Physics of Magnetic, Scientific-Practical Materials Research Centre of the National Academy of Sciences of Belarus (19, P. Brovka Str., 220072, Minsk, Republik of Belarus). E-mail: goncharov@physics.by

Sergei V. Trukhanov – Ph. D. (Physics and Mathematics), Leading Researcher of the Laboratory of the Technology and Physics, Scientific-Practical Materials Research Centre of the National Academy of Sciences of Belarus (19, P. Brovka Str., 220072, Minsk, Republik of Belarus).

ISSN 1561-2430 (Print)

ISSN 2524-2415 (Online)

УДК 517.958:537.311.1; 621.315.592

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-2-239-252>

Поступила в редакцию 28.03.2020

Received 28.03.2020

Н. А. Поклонский, А. Н. Дервяго, С. А. Вырко*Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь***ЛОКАЛИЗАЦИЯ ВНЕШНИМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ ЭЛЕКТРОНОВ
НА ИОНАХ ВОДОРОДОПОДОБНЫХ ДОНОРОВ
В НЕВЫРОЖДЕННЫХ ПОЛУПРОВОДНИКАХ**

Аннотация. В квазиклассическом приближении квантовой механики развита модель локализации электронов проводимости на ионах водородоподобных доноров во внешнем магнитном поле. Проведен расчет термической энергии ионизации доноров в слабо легированных и умеренно компенсированных кристаллах арсенида галлия и антимонида индия n -типа в зависимости от индукции внешнего магнитного поля. В отличие от известных теоретических работ (с использованием вариационных методов решения уравнения Шредингера) предложено простое аналитическое выражение для энергии ионизации донора в магнитном поле, которое количественно согласуется с известными экспериментальными данными. Показано, что величина магнитного поля, индуцированного орбитальным движением электрона вокруг ионного остова донора, пренебрежимо мала по сравнению с внешним полем и не вносит вклада в энергию ионизации доноров.

Ключевые слова: полупроводник n -типа, водородоподобные примеси, локализация электронов, магнитное поле

Для цитирования. Локализация внешним магнитным полем электронов на ионах водородоподобных доноров в невырожденных полупроводниках / Н. А. Поклонский [и др.] // Вест. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2020. – Т. 56, № 2. – С. 239–252. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-2-239-252>

Nikolai A. Poklonski, Aliaksandr N. Dzeraviha, Sergey A. Vyrko*Belarusian State University, Minsk, Belarus***LOCALIZATION BY AN EXTERNAL MAGNETIC FIELD OF ELECTRONS ON THE IONS
OF HYDROGEN-LIKE DONORS IN NON-DEGENERATE SEMICONDUCTORS**

Abstract. In the quasi-classical approximation of quantum mechanics a model for the localization of conduction electrons on the ions of hydrogen-like donors in an external magnetic field was developed. The thermal ionization energy of donors in lightly doped and moderately compensated crystals of gallium arsenide and indium antimonide of n -type was calculated depending on the induction of the external magnetic field. In contrast to the known theoretical works (which use variational methods for solving the Schrödinger equation), a simple analytical expression is proposed for the ionization energy of the donor in the magnetic field, which quantitatively agrees with the known experimental data. It is shown that the magnitude of the magnetic field induced by the orbital motion of the electron around the ion core of the donor is negligible compared to the external field and does not contribute to the ionization energy of donors.

Keywords: n -type semiconductor, hydrogen-like impurities, localization of electrons, magnetic field

For citation. Poklonski N. A., Dzeraviha A. N., Vyrko S. A. Localization by an external magnetic field of electrons on the ions of hydrogen-like donors in non-degenerate semiconductors. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2020, vol. 56, no. 2, pp. 239–252 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-2-239-252>

Введение. В работе [1] введено понятие о «вымораживании» свободных электронов магнитным полем на водородоподобные доноры в полупроводниках (исходя из анализа гальваномагнитных измерений на кристаллах n -InSb при температуре жидкого гелия). Особенностью этого полупроводника является большое значение эффективного боровского радиуса и, как следствие, перекрытие электронных оболочек соседних атомов примесей при малых их концентрациях. При приложении к полупроводнику магнитного поля размер орбиты донорного электрона в плоскости, перпендикулярной направлению магнитного поля, уменьшается, и существует такое значение магнитной индукции, при котором перекрытие электронных оболочек не наблюдается, что и называют магнитной локализацией электронов. В работе [2] энергия ионизации донора в магнитном поле находилась как разность энергий дна s -зоны и уровня энергии донора в запре-

щенной зоне полупроводника; для расчета положения дна c -зоны учтено квантование состояний электрона проводимости (т. е. уровни Ландау) без учета спинового расщепления уровней Ландау. Положение уровня энергии донора находилось путем решения уравнения Шредингера вариационным принципом. В работах [3, 4] вариационным методом найдены уровни энергии донора в n -InSb в основном и первом возбужденном состояниях, учитывая непараболичность зависимости энергии электрона c -зоны от его волнового вектора. Экспериментально определены термические энергии ионизации доноров в кристаллах антимонида индия [5] и арсенида галлия [6] в магнитном поле из измерений температурных зависимостей концентрации электронов c -зоны. В работе [7] была высказана идея о возможности локализации электронов проводимости металла на положительно заряженных ионах примеси под действием внешнего постоянного магнитного поля (см. также [8]), однако не обозначены условия, при которых такая локализация электрона возможна.

Цель работы – описать в квазиклассическом приближении схему локализации электронов из c -зоны внешним магнитным полем на термически ионизованных донорах в слабо легированных немагнитных кристаллических полупроводниках n -типа при криогенных температурах. Работа построена по принципу «просто о сложном» [9, 10] в рамках полуклассической квантовой механики (см., напр., [11]). Конкретно решается задача: рассчитать изменение термической энергии ионизации водородоподобных доноров в кристаллах арсенида галлия и антимонида индия n -типа при помещении их в магнитное поле.

Основные соотношения. Рассмотрим полупроводник с концентрацией водородоподобных доноров $N = N_0 + N_{+1}$ в зарядовых состояниях (0) и (+1) и концентрацией акцепторов KN , полностью находящихся в зарядовом состоянии (–1), где $0 < K < 1$ – степень компенсации доноров акцепторами. Зарядовые состояния примесей указаны в единицах элементарного заряда e . Условие электрической нейтральности в кристалле для случайного распределения примесей имеет вид $n + KN = N_{+1}$, где n – концентрация электронов в c -зоне. Считается, что уровни энергии доноров расположены в запрещенной зоне (энергетической щели полупроводника) достаточно близко к дну c -зоны, так что эффективная масса электрона на доноре фактически равна эффективной массе электрона на дне c -зоны.

Пусть электрон из c -зоны кристалла движется в плоскости, перпендикулярной направлению магнитной индукции, по круговой орбите, в центре которой расположен донор в зарядовом состоянии (+1). На электрон действуют три силы: центробежная $\mathbf{F}_t$, лоренцева $\mathbf{F}_L$ и кулоновская $\mathbf{F}_C$ (рис. 1). Поскольку радиус-вектор электрона $\mathbf{r}_t$, вектор его скорости $\mathbf{v}_t$ и вектор магнитной индукции $\mathbf{B}$ ортогональны друг другу, то даламберово условие баланса сил имеет вид

$$\frac{m_t v_t^2}{R_t} = e v_t B + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_r \epsilon_0 R_t^2}; \quad (1)$$

$$\frac{m_t v_t^2}{R_t} + e v_t B = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_r \epsilon_0 R_t^2}, \quad (2)$$

где $m_t = m$ – эффективная масса локализованного на доноре электрона, $v_t = |\mathbf{v}_t|$, $R_t = |\mathbf{r}_t|$, $B = |\mathbf{B}|$, ϵ_r – относительная диэлектрическая проницаемость кристаллической матрицы, $\epsilon_0 = 8,85$ пФ/м – электрическая постоянная.

Здесь отметим, что соотношение (1) соответствует движению электрона, показанному на рис. 1, *a*, соотношение (2) – движению на рис. 1, *b*. Если электрон движется в плоскости, не перпендикулярной направлению магнитной индукции $\mathbf{B}$, то v_t – проекция вектора скорости электрона на плоскость xy .

Вектор магнитного поля $\mathbf{B}_t$, индуцируемого на электроны при его движении вокруг иона донора, определяется выражением [12, 13]:

$$\mathbf{B}_t = \epsilon_r \epsilon_0 \mu_r \mu_0 [\mathbf{E} \times \mathbf{v}_t] = \frac{e \mu_r \mu_0}{4\pi R_t^3} [\mathbf{r}_t \times \mathbf{v}_t], \quad (3)$$

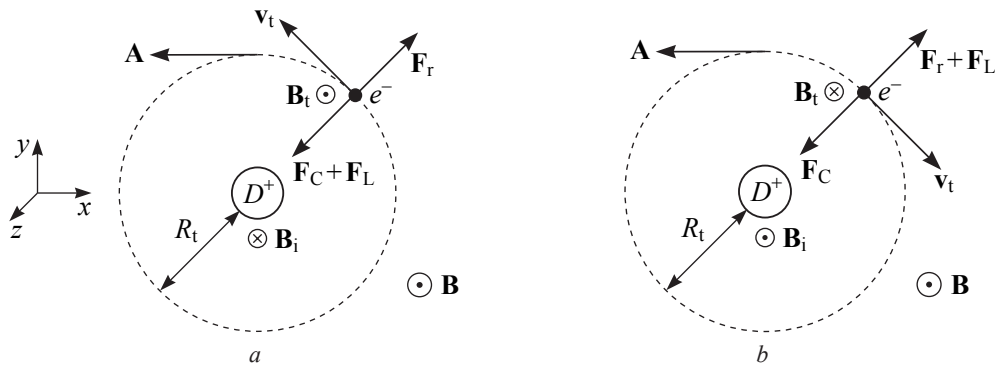


Рис. 1. Схема орбиты электрона (e^- ; заряд $-e < 0$) вокруг иона донора (D^+ ; заряд $+e > 0$) в плоскости xy во внешнем магнитном поле с направленным по оси z вектором индукции $\mathbf{B}$; векторный потенциал $\mathbf{A}$ расположен в плоскости xy ; a – вектор скорости электрона направлен против хода часовой стрелки, вектор $\mathbf{B}_t$ сонаправлен $\mathbf{B}$ и оси z ; b – вектор скорости электрона направлен по ходу часовой стрелки, вектор $\mathbf{B}_t$ направлен противоположно $\mathbf{B}$ и оси z ; $B_i = B_t$

Fig. 1. Scheme of electron orbit (e^- ; charge $-e < 0$) around the donor ion (D^+ ; charge $+e > 0$) in the xy plane in an external magnetic field with the induction vector $\mathbf{B}$ directed along the z axis; the vector potential $\mathbf{A}$ is located in the xy plane; (a) the electron velocity vector is directed counterclockwise, the vector $\mathbf{B}_t$ is co-directed to $\mathbf{B}$ and the z axis; (b) the electron velocity vector is clockwise, the vector $\mathbf{B}_t$ is opposite to $\mathbf{B}$ and the z axis; $B_i = B_t$

где $\mu_r = 1$ – относительная магнитная проницаемость полупроводника, $\mu_0 = 1,257$ мкГн/м – магнитная постоянная, $\mathbf{E} = e\mathbf{r}_t/4\pi\epsilon_r\epsilon_0 R_t^3$ – вектор напряженности электрического поля, создаваемого ионным остовом (условно ядром) донора с зарядом $+e$ на орбите электрона, $\mathbf{r}_t$ – радиус-вектор положения электрона относительно ядра донора, радиус орбиты $R_t = |\mathbf{r}_t|$. Поскольку считается, что движение электрона происходит по круговой орбите, то $|\mathbf{r}_t \times \mathbf{v}_t| = R_t v_t$. Тогда из (3) получаем

$$B_t = |\mathbf{B}_t| = \frac{1}{2} \frac{e\mu_0 v_t}{4\pi R_t^2}. \quad (4)$$

Коэффициент $1/2$ в формуле (4) появляется за счет прецессии Томаса – релятивистского эффекта, заключающегося в прецессии спина (собственного магнитного момента) электрона относительно направления угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_t$ его движения по круговой орбите [14, 15]; $[\boldsymbol{\omega}_t \times \mathbf{r}_t] = \mathbf{v}_t$. Если электрон движется против хода часовой стрелки (как показано на рис. 1, a), то вектор $\mathbf{B}_t$ сонаправлен индукции $\mathbf{B}$ внешнего поля, а при противоположном направлении движения электрона (см. рис. 1, b) вектор $\mathbf{B}_t$ направлен против индукции $\mathbf{B}$.

Движущийся по круговой орбите электрон создает магнитное поле с индукцией B_i на ядре иона донора (см. рис. 1). Известно, что магнитная индукция B_i в центре кругового плоского проводника радиуса R_t с силой тока I есть (см., напр., [13]): $B_i = \mu_0 I / 2R_t$. Электрон, движущийся со скоростью v_t по орбите вокруг иона, можно уподобить круговому току. Сила этого кругового тока I равна произведению элементарного заряда e на частоту $\omega_t / 2\pi$ вращения электрона по орбите: $I = e\omega_t / 2\pi$. Если радиус орбиты равен R_t , а скорость электрона – v_t , то $\omega_t = v_t / R_t$ и, следовательно, $I = ev_t / 2\pi R_t$. Тогда магнитная индукция B_i , индуцируемая электроном при движении по круговой орбите радиусом R_t , в центре этой орбиты (т. е. на ядре донора) при $\mu_r = 1$ есть $B_i = e\mu_0 v_t / 4\pi R_t^2$. Если теперь учесть спин электрона и схему ввода множителя $1/2$ в формуле (4), то получаем $B_i = B_t$. Отметим, что векторы магнитной индукции $\mathbf{B}_t$ (на электроне) и $\mathbf{B}_i$ (на ядре), обусловленные локализацией электрона под действием кулоновского притяжения и внешнего магнитного поля на орбите вокруг ионного остова донора, противоположно направлены.

Неизвестными величинами в (1) являются v_t и R_t . Связь между ними находится из условия квантования Бора – Зоммерфельда [16, 17]:

$$\oint_{(\gamma)} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi\hbar\gamma, \quad (5)$$

где $\mathbf{p}$ – обобщенный импульс электрона в магнитном поле, $d\mathbf{l}$ – элемент траектории электрона, $\hbar = h/2\pi$ – постоянная Планка, $\gamma = 1, 2, \dots$ – номер траектории (число раз, которое длина волны де Бройля электрона укладывается на длине его круговой орбиты $2\pi R_t$ вокруг иона донора), главное квантовое число в теории атома водорода.

Известно [13, 18], что обобщенный импульс электрона в магнитном поле $\mathbf{p} = \mathbf{p}_k + \mathbf{p}_m$, где $\mathbf{p}_k = m\mathbf{v}_t$ – кинетический импульс, $\mathbf{p}_m = -e\mathbf{A}$ – «полевой» импульс, связанный с однородным постоянным внешним магнитным полем с индукцией $\mathbf{B} = [\nabla \times \mathbf{A}]$, в котором находится электрон с зарядом $-e < 0$. Подставляя выражение для $\mathbf{p}$ в (5), находим:

$$\oint_{(\gamma)} \mathbf{p}_k \cdot d\mathbf{l} - e \oint_{(\gamma)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi\hbar\gamma. \quad (6)$$

Первый интеграл в (6) по замкнутому контуру с учетом круговых орбит есть

$$\oint_{(\gamma)} \mathbf{p}_k \cdot d\mathbf{l} = 2\pi p R_t,$$

где $p = |\mathbf{p}_k| = mv_t$ – величина кинетического импульса электрона.

Второй интеграл в (6) по замкнутому контуру есть поток магнитного поля Φ_γ через площадь, ограниченную контуром γ -й круговой траектории электрона:

$$\oint_{(\gamma)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \Phi_\gamma,$$

где $\mathbf{A} = [\mathbf{B} \times \mathbf{r}]/2$ – векторный потенциал, $d\mathbf{l}$ – вектор бесконечно малого перемещения электрона по круговой орбите; $A = BR_t/2$. Если электрон движется против хода часовой стрелки (см. рис. 1, *a*), то векторы $\mathbf{A}$ и $d\mathbf{l}$ сонаправлены и $\Phi_\gamma = \pi R_t^2 B$. Если электрон движется по ходу часовой стрелки (если смотреть против направления вектора индукции внешнего поля; см. рис. 1, *b*), то векторы $\mathbf{A}$ и $d\mathbf{l}$ имеют противоположное направление и $\Phi_\gamma = -\pi R_t^2 B$.

Для случая движения электрона, показанного на рис. 1, *a*, когда $\Phi_\gamma = \pi R_t^2 B$, условие квантования орбитального момента импульса (6) имеет вид

$$p R_t - e \Phi_\gamma / 2\pi = mv_t R_t - e B R_t^2 / 2 = \hbar\gamma, \quad (7)$$

откуда находим скорость электрона на орбите:

$$v_t = v_t^+ = \frac{\hbar\gamma}{m R_t} + \frac{eB}{m} \frac{R_t}{2} = \frac{\hbar\gamma}{m R_t} + \frac{\omega_c R_t}{2} > 0, \quad (8)$$

где $\omega_c = eB/m$ – циклотронная частота электрона *c*-зоны.

Для случая движения электрона, показанного на рис. 1, *b*, когда $\Phi_\gamma = -\pi R_t^2 B$, имеем

$$v_t = v_t^- = \frac{\hbar\gamma}{m R_t} - \frac{eB}{m} \frac{R_t}{2} = \frac{\hbar\gamma}{m R_t} - \frac{\omega_c R_t}{2} > 0. \quad (9)$$

Радиус орбиты $R_t > 0$ электрона находим путем подстановки выражения для скорости электрона (8) в уравнение для баланса сил (1) или выражения (9) – в уравнение (2). В итоге обе подстановки приводят к одному и тому же уравнению для нахождения R_t (при движении электрона как против хода часовой стрелки, так и по ходу часовой стрелки):

$$\frac{\gamma^2 \hbar^2}{2m R_t^2} - \frac{e^2 B^2 R_t^2}{8m} - \frac{e^2}{8\pi\epsilon_r \epsilon_0 R_t} = 0. \quad (10)$$

В отсутствие магнитного поля ($B = 0$) при $\gamma = 1$ из (10) получаем боровский радиус $R_t = a_d = 4\pi\epsilon_r \epsilon_0 \hbar^2 / me^2$; энергия ионизации одиночного водородоподобного донора (см., напр., [19]) равна

$I_d = e^2/8\pi\epsilon_r\epsilon_0 a_d = me^4/[2(4\pi\epsilon_r\epsilon_0\hbar)^2]$. Далее рассматривается электрон на доноре в основном состоянии, т. е. при $\gamma = 1$.

Из сравнения соотношений (8) и (9) видно, что угловая частота ω_t/R_t вращения электрона вокруг иона донора, показанного на рис. 1, *a*, увеличивается на ларморовскую частоту $\omega_L = \omega_c/2$, а угловая частота электрона, движущегося в обратную сторону (см. рис. 1, *b*), уменьшается на ту же величину (см., напр., [17, 20]).

Энергию связанного состояния электрона на доноре во внешнем магнитном поле определим по теореме вириала [21, 22]. Энергия взаимодействия эффективного спинового магнитного момента электрона $|g_t|\mu_B$ с магнитным полем $B \pm B_t$ учитывается отдельным слагаемым. В итоге для уровней энергии водородоподобного донора [23] при наложении на кристалл внешнего магнитного поля получаем

$$\begin{aligned} E_t(\uparrow) &= E_t(B) - \frac{1}{2}|g_t|\mu_B(B \pm B_t); \\ E_t(\downarrow) &= E_t(B) + \frac{1}{2}|g_t|\mu_B(B \pm B_t), \end{aligned} \quad (11)$$

где (см. приложение, формула (38))

$$E_t(B) = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_r\epsilon_0 R_t} \left(1 - \frac{R_t}{R_{im}} \right) - \frac{1}{4}m(\omega_c R_t)^2. \quad (12)$$

Комментарий к формуле (11): фактор спектроскопического расщепления для электрона на доноре обозначен g_t ; знак « $\rightarrow$ » соответствует ориентации спина электрона по направлению индукции $\mathbf{B}$ внешнего магнитного поля ($\uparrow$), знак « $\leftarrow$ » – против направления индукции ($\downarrow$); знак « $\pm$ » перед B_t означает случаи движения электрона против хода часовой стрелки (+) и по ходу часовой стрелки (–); индукция B_t магнитного поля, индуцируемого на электроны его круговым движением вокруг иона донора, вычисляется по (4) с учетом (8)–(10).

Комментарий к формуле (12): радиус орбиты $R_t(B)$ электрона на доноре определяется из уравнения (10); средний радиус сферической области кристаллической матрицы, приходящейся на каждый донор и акцептор, равен $R_{im} = [4\pi N(1 + K)/3]^{-1/3}$; множитель $(1 - R_t/R_{im})$ отражает опускание дна c -зоны в глубь запрещенной энергетической зоны кристалла при увеличении концентрации примесей; величина $m(\omega_c R_t)^2/4$ отражает сдвиг уровня энергии электрона на уединенном доноре к дну c -зоны из-за увеличения кинетической энергии локализации электрона в магнитном поле; уровень энергии электрона $E_t(B)$ отсчитывается от положения дна c -зоны в нелегированном полупроводнике при $B = 0$ (рис. 2).

Рассмотрим для примера кристалл арсенида галлия n -типа с относительной статической диэлектрической проницаемостью $\epsilon_r = 12,4$ в области криогенных температур и изотропной эффективной массой электрона c -зоны $m = 0,067m_0$, где m_0 – масса электрона в вакууме. Фактор спектроскопического расщепления для электрона, локализованного на водородоподобном доноре, примем, следуя измерениям [24], равным $g_t \approx 2$; g -фактор электрона c -зоны $g_n < 0$.

Пусть кристалл легирован водородоподобными донорами (Te, S или Se). Экспериментальные значения энергии ионизации этих примесей таковы: Te – $I_d = 5,76$ мэВ [25], S – $I_d = 5,87$ мэВ [26], Se – $I_d = 5,71$ мэВ [25]. Расчетное значение энергии ионизации одиночного донора в отсутствие магнитного поля $I_d = e^2/8\pi\epsilon_r\epsilon_0 a_d = me^4/[2(4\pi\epsilon_r\epsilon_0\hbar)^2]$, где $a_d = 4\pi\epsilon_r\epsilon_0\hbar^2/me^2 = 9,8$ нм – боровский радиус, составляет 5,93 мэВ, что близко к экспериментальным значениям.

Полагаем, что концентрация доноров $N = N_0 + N_{+1} = 3 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$, степень их компенсации акцепторами $K = 0,03$ и выполняется условие электронейтральности: $n + KN = N_{+1}$, где n – концентрация электронов c -зоны, KN – концентрация акцепторов. При этом радиус сферической области в кристаллической матрице арсенида галлия, приходящейся на один атом примеси, составляет $R_{im} = 91,8$ нм. На рис. 2 показан расчет уровней энергии водородоподобного донора $E_t(\uparrow)$ и $E_t(\downarrow)$ по формуле (11) с учетом (12) в зависимости от индукции B внешнего магнитного поля для

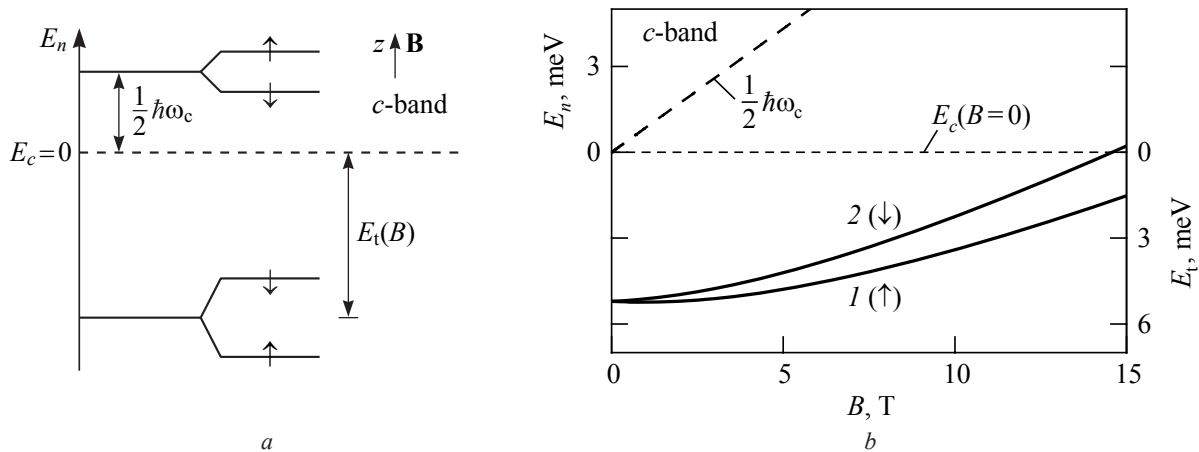


Рис. 2. Схема расщепления уровней энергии электрона c -зоны и электрона на доноре под действием магнитного поля (а); зависимости энергии электрона c -зоны E_n (левая шкала) и локализованного состояния электрона на доноре E_t (правая шкала) от магнитной индукции B для кристалла n -GaAs с концентрацией доноров $N = N_0 + N_{+1} = 3 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$ и степенью их компенсации $K = 0,03$: кривые 1 и 2 соответствуют ориентации спина по ($\uparrow$) и против ($\downarrow$) направления индукции внешнего поля (б)

Fig. 2. Scheme for splitting energy levels of the c -band electron and the electron on the donor under the influence of a magnetic field (a); dependences of the c -band electron energy E_n (left scale) and the energy of the localized state of the electron on the donor E_t (right scale) on the magnetic induction B for an n -GaAs crystal with a donor concentration of $N = N_0 + N_{+1} = 3 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$ and a compensation ratio $K = 0.03$: curves 1 and 2 correspond to the spin orientation along ($\uparrow$) and against ($\downarrow$) the direction of the external field induction (b)

кристалла n -GaAs (кривая 1 – спин электрона направлен по вектору индукции $\mathbf{B}$, кривая 2 – спин направлен противоположно $\mathbf{B}$).

В отсутствие магнитного поля температура T_j , ниже которой темп захвата электронов из c -зоны на водородоподобные доноры превалирует над темпом теплового выброса электронов с доноров в c -зону, для кристаллического полупроводника n -типа при $n \ll K(1 - K)N$ имеет следующий вид [27]:

$$T_j = \frac{0,728}{k_B} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0} (KN)^{1/3}. \quad (13)$$

При концентрации доноров $N = 3 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$ и степени компенсации $K = 0,03$ температура T_j по формуле (13) в арсениде галлия n -типа составляет $\approx 2 \text{ К}$.

Оценим значение индукции магнитного поля B_t , обусловленного движением электрона вокруг иона донора. Даже при $B = 30 \text{ Тл}$ расчет по формуле (4) при учете (8) и (10) дает $B_t = 0,14 \text{ мТл}$, а при учете (9) и (10) получаем $B_t = 0,03 \text{ мТл}$. Индукция магнитного поля B_i на ядре донора, обусловленная движением электрона по орбите радиуса R_t , равна B_t . Таким образом, величины B_t и B_i , индуцируемые на электроны и ядре донора, малы по сравнению с индукцией внешнего магнитного поля B .

В магнитном поле концентрация электронов c -зоны $n(B) = n(B, \uparrow) + n(B, \downarrow)$ с двумя ориентациями спина дается формулой [28, 29]:

$$n(B) = \frac{n_c}{2} \frac{\hbar\omega_c}{k_B T} \sum_{\alpha=0}^{\infty} \left\{ F_{-1/2} \left[\frac{1}{k_B T} \left(E_F(B) - \left(\alpha + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega_c - \frac{g_n \mu_B B}{2} \right) \right] + \right. \\ \left. + F_{-1/2} \left[\frac{1}{k_B T} \left(E_F(B) - \left(\alpha + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega_c + \frac{g_n \mu_B B}{2} \right) \right] \right\}, \quad (14)$$

где $n_c = 2(2\pi m k_B T / (2\pi \hbar)^2)^{3/2}$; α – номер уровня Ландау, $g_n = -0,44$ – g -фактор электрона c -зоны [30, 31], $E_F(B)$ – уровень Ферми, отсчитанный от дна c -зоны ($E_c = 0$) нелегированного кристалла, находящегося в нулевом магнитном поле ($E_F(B) < 0$, если уровень Ферми находится в запрещенной зоне), $F_{-1/2}(y)$ – интеграл Ферми – Дирака;

$$F_{-1/2}(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{t^{-1/2} dt}{1 + \exp(t - y)}. \quad (15)$$

Концентрация положительно заряженных доноров (без учета возбужденных состояний электрически нейтральных доноров и ионов доноров) равна [19, 32]:

$$N_{+1}(B) = \frac{N}{\Xi(B; \uparrow, \downarrow)}, \quad (16)$$

где статистическая сумма

$$\Xi(B; \uparrow, \downarrow) = 1 + \exp\left(\frac{E_F(B) + E_t(\uparrow)}{k_B T}\right) + \exp\left(\frac{E_F(B) + E_t(\downarrow)}{k_B T}\right);$$

$E_t(\uparrow)$ и $E_t(\downarrow)$ определяются из (11).

Из условия электрической нейтральности $n(B) + KN = N_{+1}(B)$ определяется зависимость уровня Ферми $E_F(B)$ от индукции внешнего магнитного поля, показанная на рис. 3, а для температуры 5 и 78 К.

С учетом (16) суммарная концентрация электрически нейтральных доноров $N_0(B) = N_0(B, \uparrow) + N_0(B, \downarrow) = N - N_{+1}(B)$, где концентрации этих доноров с двумя ориентациями спина электрона

$$\begin{aligned} N_0(B, \uparrow) &= \frac{N}{\Xi(B; \uparrow, \downarrow)} \exp\left(\frac{E_F(B) + E_t(\uparrow)}{k_B T}\right), \\ N_0(B, \downarrow) &= \frac{N}{\Xi(B; \uparrow, \downarrow)} \exp\left(\frac{E_F(B) + E_t(\downarrow)}{k_B T}\right). \end{aligned} \quad (17)$$

Расчет концентраций $N_0(B, \uparrow)$ и $N_0(B, \downarrow)$ нейтральных доноров по формуле (17) в зависимости от магнитной индукции B показан на рис. 3, б. Видно, что при температуре $T = 5$ К в сильном магнитном поле ($B = 15$ Тл) все некомпенсированные акцепторами доноры находятся в зарядовом состоянии (0) с направленным по полю спином; при $T = 78$ К все доноры ионизованы.

Отметим, что в отсутствие внешнего магнитного поля выражение (14) для концентрации электронов c -зоны принимает стандартный вид [19, 32]:

$$n = n_c F_{1/2}\left(\frac{E_F}{k_B T}\right) = n_c \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{t^{1/2} dt}{1 + \exp[t - (E_F/k_B T)]}; \quad (18)$$

для невырожденного полупроводника ($E_F < 0$, $|E_F| > k_B T$) из (18) имеем

$$n \approx n_c \exp\left(\frac{E_F}{k_B T}\right).$$

Для невырожденных полупроводников в магнитном поле (т. е. при выполнении условия: $(\hbar\omega_c - |g_n|\mu_B B)/2 > E_F + 3k_B T/2$) из (14) и (16) получаем выражения для концентраций электронов c -зоны $n(B)$ и ионизованных доноров $N_{+1}(B)$ в виде

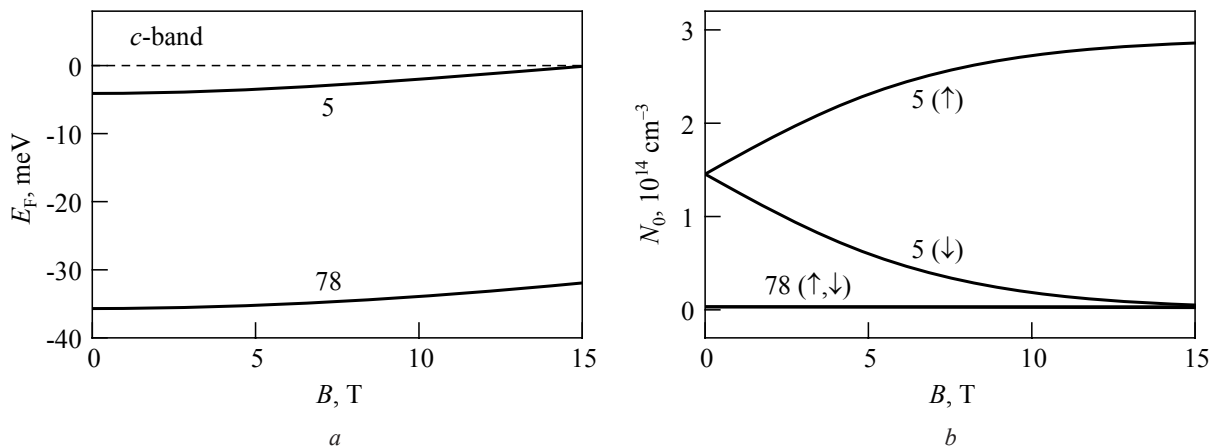


Рис. 3. Зависимости положения уровня Ферми E_F , отсчитанного от дна c -зоны (а) и концентрации N_0 электрически нейтральных доноров (б) от магнитной индукции B в кристалле n -GaAs при $N_0 + N_{+1} = 3 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$ и $K = 0,03$ для температуры $T = 5$ и 78 K ; стрелки соответствуют ориентации спина электрона донора по полю ($\uparrow$) и против поля ($\downarrow$)

Fig. 3. Dependences of the Fermi level E_F position counted from the bottom of the c -band (a) and the concentration N_0 of electrically neutral donors (b) on the magnetic induction B in an n -GaAs crystal at $N_0 + N_{+1} = 3 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ and $K = 0.03$ for temperatures $T = 5$ and 78 K ; the arrows correspond to the orientation of the electron spin of the donor along the field ($\uparrow$) and against the field ($\downarrow$)

$$n(B) = n(B, \uparrow) + n(B, \downarrow) = \frac{n_c}{2} \frac{\hbar \omega_c}{k_B T} \frac{\text{ch}\left(\frac{g_n \mu_B B}{2k_B T}\right)}{\text{sh}\left(\frac{\hbar \omega_c}{2k_B T}\right)} \exp\left(\frac{E_F}{k_B T}\right), \quad (19)$$

$$N_{+1}(B) = \frac{N}{1 + 2 \text{ch}\left(\frac{g_t \mu_B B}{2k_B T}\right) \exp\left(\frac{E_t(B) + E_F}{k_B T}\right)}, \quad (20)$$

где величина $E_t(B)$ определяется по (12) и не зависит от температуры.

Отметим, что входящие в формулы (16), (17) и (20) величины $E_t(\uparrow)$, $E_t(\downarrow)$, $E_t(B)$ и $\Xi(B; \uparrow, \downarrow)$ в отсутствие внешнего магнитного поля (при $B \rightarrow 0$) принимают вид $E_t(\uparrow) = E_t(\downarrow) = E_t(B \rightarrow 0) = I_d(1 - a_d/R_{im})$; $\Xi(B \rightarrow 0; \uparrow, \downarrow) = 1 + 2 \exp\{[E_F + I_d(1 - a_d/R_{im})]/k_B T\}$.

Концентрации электронов n , положительно заряженных ионов доноров N_{+1} и отрицательно заряженных компенсирующих акцепторов KN связаны между собой условием электронейтральности:

$$n(B) + KN = N_{+1}(B) = N - N_0(B, \uparrow) - N_0(B, \downarrow).$$

Исключая из формул (19) и (20) уровень Ферми $E_F(B)$, получаем выражение для концентрации электронов в c -зоне невырожденного полупроводника:

$$n(B) = n(B, \uparrow) + n(B, \downarrow) = n = \frac{1-K}{2K} \frac{n_c}{2} \frac{\hbar \omega_c}{k_B T} \frac{\text{ch}\left(\frac{g_n \mu_B B}{2k_B T}\right) \exp\left(-\frac{E_t(B)}{k_B T}\right)}{\text{sh}\left(\frac{\hbar \omega_c}{2k_B T}\right) \text{ch}\left(\frac{g_t \mu_B B}{2k_B T}\right)}. \quad (21)$$

Дифференциальная термическая энергия ионизации доноров определяется так (см., напр., [23] и цитируемую там литературу):

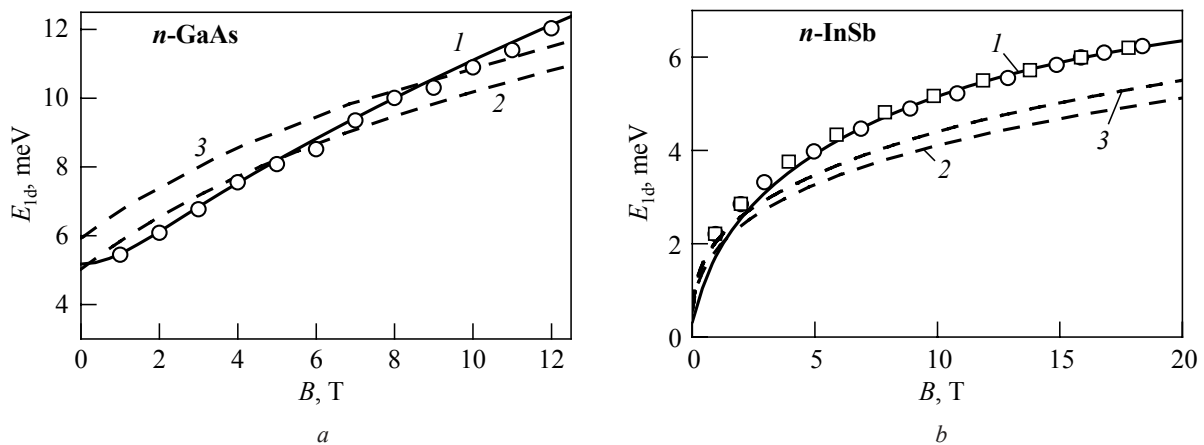


Рис. 4. Зависимость энергии ионизации атома донора E_{id} в кристаллах n -GaAs (а) и n -InSb (б) от магнитной индукции B внешнего поля. Точки – эксперимент: [6] (а), [5] (б). Сплошные линии (1) – расчет E_{id} по формуле (23) для $N = 3,5 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$ и $K = 0,48$ (а) и $N = 7,82 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$ и $K = 0,3$ (б); штриховые (2, 3) – расчет по моделям [2] и [4] соответственно

Fig. 4. Dependence of the ionization energy E_{id} of the donor atom in n -GaAs (a) and in n -InSb (b) crystals on the magnetic induction B of an external field. The points are experiment: [6] (a), [5] (b); the solid lines (1) are the calculation of E_{id} by formula (23) for $N = 3,5 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ and $K = 0.48$ (a) and $N = 7,82 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$ and $K = 0.3$ (b); the dashed lines (2 and 3) are the calculation by models [2] and [4], respectively

$$E_{id} = -k_B \frac{d}{d(1/T)} \ln(nT^{-3/2}) = -\frac{3}{2} k_B T - \frac{k_B}{n} \frac{dn}{d(1/T)}. \quad (22)$$

При подстановке (21) в (22) получаем

$$E_{id} = E_i(B) + \frac{\hbar\omega_c}{2} \text{cth}\left(\frac{\hbar\omega_c}{2k_B T}\right) + \frac{g_i \mu_B B}{2} \text{th}\left(\frac{g_i \mu_B B}{2k_B T}\right) - \frac{g_n \mu_B B}{2} \text{th}\left(\frac{g_n \mu_B B}{2k_B T}\right) - k_B T; \quad (23)$$

в пределе $B \rightarrow 0$ из (23) следует: $E_{id} = I_d(1 - a_d/R_{im})$.

Проведем расчет энергии ионизации E_{id} по формуле (23) для кристаллов n -GaAs и n -InSb. Параметры кристаллов n -GaAs указаны при расчетах, представленных на рис. 2, б и рис. 3. Для кристаллов n -InSb в области криогенных температур использовались следующие параметры: относительная диэлектрическая проницаемость $\epsilon_r = 16,8$ и изотропная эффективная масса электрона s -зоны $m = 0,0136m_0$. Фактор спектроскопического расщепления для электрона s -зоны $g_n = -51,55$ [33]. Для локализованного на водородоподобном доноре электрона, находящегося в возбужденном состоянии, значение g -фактора g_i приближается к значению g -фактора g_n электрона s -зоны [34] (см. также [35]), что для антимонида индия составляет $g_i \approx -45$. Результаты расчетов для температуры $T_l = 3T_j/2$, где T_j вычислялась по (13), показаны на рис. 4. Для сравнения с экспериментальными данными по кристаллам n -GaAs использовались температурные зависимости концентрации электронов [6] в различных магнитных полях. Строились зависимости $\ln(nT^{-3/2})$ от $1/T$, по тангенсу наклона линейного участка которых в соответствии с формулой (22) определялись экспериментальные значения дифференциальной энергии активации E_{id} , показанные точками на рис. 4, а. Экспериментальные данные для кристалла n -InSb на рис. 4, б взяты из [5].

Заключение. В квазиклассическом приближении представлена модель локализации электронов s -зоны на ионах водородоподобных доноров во внешнем магнитном поле. Рассмотрены полупроводники с малой эффективной массой электронов и большой диэлектрической проницаемостью (кристаллы арсенида галлия и антимонида индия n -типа). В модели учтены:

- 1) даламберово условие баланса центробежной, кулоновской и лоренцевой сил;
- 2) квантование орбитального момента электрона на доноре по Бору – Зоммерфельду;

- 3) уровни Ландау электронов в c -зоне;
 4) зеемановское расщепление уровней энергии доноров и уровней Ландау.

Применена теорема вириала для электронейтральной системы (электрон + ион донора) в магнитном поле. Получено простое выражение для термической энергии ионизации доноров в магнитном поле по сравнению с имеющимися в известных теоретических работах, в которых эта величина находилась путем решения вариационным методом уравнения Шредингера. Расчеты по предложенной в работе модели количественно согласуются с известными экспериментальными данными.

Приложение. Водородоподобный донор во внешнем магнитном поле. Согласно теореме вириала [21], кинетическая энергия электрона E_k в кулоновском поле неподвижного положительно заряженного иона донора равна половине потенциальной энергии U_C , взятой с обратным знаком:

$$E_k = -U_C/2, \quad (24)$$

где $U_C = -e^2/4\pi\epsilon_r\epsilon_0 R_t$ – энергия кулоновского взаимодействия электрона и ионизованного атома водородоподобной донорной примеси.

При помещении системы (электрон + ион донора) во внешнее магнитное поле с индукцией $\mathbf{B}$ формула (24) преобразуется, согласно [22], к виду

$$E_k + (\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}) = -U_C/2, \quad (25)$$

где $\mathbf{M}$ – магнитный момент электрона, связанный с его орбитальным движением относительно иона донора.

Тогда полная энергия E системы с учетом (25) есть

$$E = E_k + U_C = -E_k - 2(\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}). \quad (26)$$

По определению магнитный момент $\mathbf{M}$, создаваемый круговым движением электрона вокруг ионного остова донора, равен [13, 18]

$$\mathbf{M} = -\frac{1}{2}e[\mathbf{r}_t \times \mathbf{v}_t], \quad (27)$$

где $\mathbf{r}_t$ – радиус-вектор локализованного на доноре электрона; $|\mathbf{r}_t| = R_t$ – радиус орбиты; $\mathbf{v}_t$ – линейная скорость движения электрона. В зависимости от направления силы Лоренца (к иону донора или от него; см. рис. 1) скорость электрона может принимать два значения (см. формулы (8) и (9)):

$$v_t^+ = \frac{\hbar\gamma}{mR_t} + \frac{\omega_c R_t}{2}, \quad v_t^- = \frac{\hbar\gamma}{mR_t} - \frac{\omega_c R_t}{2}. \quad (28)$$

Подстановка v_t^+ и v_t^- из (28) в (27) дает две проекции магнитных моментов:

$$\begin{aligned} M_+ &= -\frac{1}{2}eR_t \left[\frac{\hbar\gamma}{mR_t} + \frac{\omega_c R_t}{2} \right] \text{ при } \mathbf{M}_+ \downarrow \uparrow \mathbf{B}; \\ M_- &= +\frac{1}{2}eR_t \left[\frac{\hbar\gamma}{mR_t} - \frac{\omega_c R_t}{2} \right] \text{ при } \mathbf{M}_- \uparrow \uparrow \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (29)$$

Исходя из (29), получаем скалярные произведения:

$$(\mathbf{M}_+ \cdot \mathbf{B}) = -\frac{1}{2}eR_t \left[\frac{\hbar\gamma}{mR_t} + \frac{\omega_c R_t}{2} \right] B; \quad (\mathbf{M}_- \cdot \mathbf{B}) = \frac{1}{2}eR_t \left[\frac{\hbar\gamma}{mR_t} - \frac{\omega_c R_t}{2} \right] B. \quad (30)$$

Среднее значение потенциальной энергии взаимодействия магнитного момента электрона с внешним магнитным полем, входящей в выражение для полной энергии электрически ней-

трального донора (электрон + ион), определим исходя из (30) через алгебраическую сумму произведений $(\mathbf{M}_+ \cdot \mathbf{B})$ и $(\mathbf{M}_- \cdot \mathbf{B})$ так:

$$(\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}) = [(\mathbf{M}_+ \cdot \mathbf{B}) + (\mathbf{M}_- \cdot \mathbf{B})]/2 = -m(\omega_c R_t)^2/4. \quad (31)$$

Теперь рассчитаем среднее значение кинетической энергии:

$$E_k = \frac{1}{2}(E_k^+ + E_k^-), \quad (32)$$

где $E_k^+ = m(v_t^+)^2/2$, $E_k^- = m(v_t^-)^2/2$.

Подставляя скорости электрона v_t^+ и v_t^- из (28) в (32), получим

$$E_k = \frac{m}{2} \left[\left(\frac{\hbar \gamma}{m R_t} \right)^2 + \left(\frac{\omega_c R_t}{2} \right)^2 \right]. \quad (33)$$

Отсюда видно, что кинетическая энергия E_k электрона на доноре во внешнем магнитном поле увеличивается, так как по (10) радиус орбиты электрона R_t слабее уменьшается при увеличении индукции B поля, нежели увеличивается циклотронная частота электрона $\omega_c = eB/m$.

Полная энергия системы (электрон + ион донора) E с учетом (31) и (33) равна

$$E = -\frac{m}{2} \left[\left(\frac{\hbar \gamma}{m R_t} \right)^2 + \left(\frac{\omega_c R_t}{2} \right)^2 \right] + 2 \frac{m(\omega_c R_t)^2}{4} = -\frac{(\hbar \gamma)^2}{2m R_t^2} + \frac{3}{8} m(\omega_c R_t)^2. \quad (34)$$

Из (34) получаем энергию связи электрона и ионного остова донора:

$$I_t(B) = -E = \frac{(\hbar \gamma)^2}{2m R_t^2} - \frac{3}{8} m(\omega_c R_t)^2. \quad (35)$$

Далее, если кинетическую энергию E_k из (25) подставить в выражение (26) для полной энергии E и учесть (31), то получим

$$E = E_k + U_C = -U_C/2 - (\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}) + U_C = \frac{U_C}{2} - (\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}) = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_r\epsilon_0 R_t} + \frac{1}{4} m(\omega_c R_t)^2. \quad (36)$$

Тогда из (35) и (36) энергия связи электрона на уединенном (одиночном) доноре в магнитном поле имеет вид

$$I_t(B) = -E = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_r\epsilon_0 R_t} - \frac{1}{4} m(\omega_c R_t)^2. \quad (37)$$

В отсутствие внешнего магнитного поля (при $B \rightarrow 0$) из (37) получаем энергию ионизации одиночного (уединенного) донора $I_t(B) \rightarrow I_d = e^2/8\pi\epsilon_r\epsilon_0 a_d = me^4/[2(4\pi\epsilon_r\epsilon_0 \hbar)^2]$ для боровского радиуса локализации на нем электрона $R_t(B) \rightarrow a_d = 4\pi\epsilon_r\epsilon_0 \hbar^2/me^2$.

Приравнявая выражения (35) и (37) для $I_t(B)$, получим уравнение для нахождения радиуса орбиты R_t , локализованного на атоме донора электрона в магнитном поле (совпадающее с уравнением (10)):

$$\frac{(\hbar \gamma)^2}{2m R_t^2} - \frac{1}{8} m(\omega_c R_t)^2 - \frac{e^2}{8\pi\epsilon_r\epsilon_0 R_t} = 0.$$

Формула (37) дает энергию ионизации одиночного донора в магнитном поле. Если учесть взаимный «конфайнмент» примесей, т. е. ограничение на максимальный радиус орбиты R_t электрона на одном доноре по [23], то (37) принимает вид

$$E_t(B) = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_r\epsilon_0 R_t} \left(1 - \frac{R_t}{R_{im}}\right) - \frac{1}{4} m(\omega_c R_t)^2, \quad (38)$$

где $R_{im} = 0,62[N(1 + K)]^{-1/3}$ – средний радиус сферической области, приходящейся на каждый атом донорной и акцепторной примесей в кристаллическом полупроводнике.

Здесь отметим, что в нулевом магнитном поле радиус орбиты электрона $R_t = a_d$, и формула (38) принимает вид $E_t = I_d(1 - a_d/R_{im})$. Это соотношение между E_t/I_d и a_d/R_{im} согласуется с экспериментальными данными по зависимости термической энергии ионизации водородоподобных доноров и акцепторов от их концентрации в различных полупроводниковых материалах [23].

Благодарности. Работа поддержана Государственной программой научных исследований «Физматтех» Республики Беларусь, Белорусским республиканским фондом фундаментальных исследований (грант № Ф19РМ-054), а также Рамочной программой Европейского союза по развитию научных исследований и технологий Horizon2020 (грант № H2020-MSCA-RISE-2019-871284 SSHARE).

Acknowledgements. The work was supported by the Belarusian National Research Program “Fizmattekh”, the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (Grant No. Ф19РМ-054), and the European Union Framework Program for Research and Innovation Horizon 2020 (Grant No. H2020-MSCA-RISE-2019-871284 SSHARE).

Список использованных источников

1. Durkan, J. Localization of electrons in impure semiconductors by a magnetic field / J. Durkan, R. J. Elliot, N. H. March // *Rev. Mod. Phys.* – 1968. – Vol. 40, № 4. – P. 812–815. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.40.812>
2. Yafet, Y. Hydrogen atom in a strong magnetic field / Y. Yafet, R. W. Keyes, E. N. Adams // *J. Phys. Chem. Solids.* – 1956. – Vol. 1, № 3. – P. 137–142. [https://doi.org/10.1016/0022-3697\(56\)90020-8](https://doi.org/10.1016/0022-3697(56)90020-8)
3. Larsen, D. M. Shallow donor levels of InSb in a magnetic field / D. M. Larsen // *J. Phys. Chem. Solids.* – 1968. – Vol. 29, № 2. – P. 271–280. [https://doi.org/10.1016/0022-3697\(68\)90071-1](https://doi.org/10.1016/0022-3697(68)90071-1)
4. Experimental and theoretical study of magnetodonors in GaAs and InP at megagauss fields / W. Zawadzki [et al.] // *Phys. Rev. B.* – 1994. – Vol. 49, № 3. – P. 1705–1710. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.49.1705>
5. Ionization energy of magnetodonors in InSb / A. Raymond [et al.] // *J. Phys. C: Solid State Phys.* – 1984. – Vol. 17, № 13. – P. 2381–2389. <https://doi.org/10.1088/0022-3719/17/13/019>
6. Jouault, B. Ionization energy of magnetodonors in pure bulk GaAs / B. Jouault, A. Raymond, W. Zawadzki // *Phys. Rev. B.* – 2002. – Vol. 65, № 24. – P. 245210 (7 p.). <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.65.245210>
7. Бычков, Ю. А. Квантовая теория электропроводности металлов в сильных магнитных полях // Ю. А. Бычков // *Журн. эксперим. и теор. физики.* – 1960. – Т. 39, № 3. – С. 689–702.
8. Архинчеев, В. Е. О влиянии магнитного поля на вероятность захвата диффундирующих частиц поглощающими ловушками / В. Е. Архинчеев // *Журн. эксперим. и теор. физики.* – 2019. – Т. 155, № 3. – С. 562–566. <https://doi.org/10.1134/s0044451019030180>
9. Пайерлс, Р. Построение физических моделей / Р. Пайерлс // *Успехи физ. наук.* – 1983. – Т. 140, № 2. – С. 315–332. <https://doi.org/10.3367/UfNr.0140.198306d.0315>
10. Weisskopf, V. F. Search for simplicity: quantum mechanics of the hydrogen atom / V. F. Weisskopf // *Am. J. Phys.* – 1985. – Vol. 53, № 3. – P. 206–207. <https://doi.org/10.1119/1.14122>
11. Оглуздин, В. Е. Роль боровских частот в процессах рассеяния, люминесценции, генерации излучения в различных средах / В. Е. Оглуздин // *Успехи физ. наук.* – 2006. – Т. 176, № 4. – С. 415–420. <https://doi.org/10.3367/UfNr.0176.200604e.0415>
12. Ферми, Э. Квантовая механика (конспект лекций) / Э. Ферми. – М.: Мир, 1965. – 368 с.
13. Poole, C. P. The physics handbook: fundamentals and key equations / C. P. Poole. – Weinheim: Wiley, 2007. – xxii+514 p.
14. Малыкин, Г. Б. Прецессия Томаса: корректные и некорректные решения / Г. Б. Малыкин // *Успехи физ. наук.* – 2006. – Т. 176, № 8. – С. 865–882. <https://doi.org/10.3367/UfNr.0176.200608f.0865>
15. Kholmetskii, A. L. On the classical analysis of spin-orbit coupling in hydrogenlike atoms / A. L. Kholmetskii, O. V. Mishevitch, T. Yarman // *Am. J. Phys.* – 2010. – Vol. 78, № 4. – P. 428–432. <https://doi.org/10.1119/1.3277052>
16. Краснопевцев, Е. А. Квантовая механика в приложениях к физике твердого тела / Е. А. Краснопевцев. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2017. – 355 с.
17. Шпольский, Э. В. Атомная физика: в 2 т. / Э. В. Шпольский. – СПб.: Лань, 2010. – Т. 1. – 560 с.; Т. 2. – 448 с.
18. Jackson, J. D. Classical electrodynamics / J. D. Jackson. – New York: Wiley, 1999. – xxii+808 p.
19. Поклонский Н. А., Вырко С. А., Поденок С. Л. Статистическая физика полупроводников. – М.: КомКнига, 2005. – 264 с.
20. Беллюстин, С. В. Классическая электронная теория / С. В. Беллюстин. – М.: Высш. шк., 1971. – 350 с.
21. Васильев, Б. В. Теорема вириала и некоторые свойства электронного газа в металлах / Б. В. Васильев, В. Л. Любошиц // *Успехи физ. наук.* – 1994. – Т. 164, № 4. – С. 367–374. <https://doi.org/10.3367/UfNr.0164.199404f.0367>

22. Любошиц, В. Л. Теорема вириала и условия равновесия системы заряженных частиц в магнитном поле / В. Л. Любошиц. – Дубна: ОИЯИ, 1996. – 18 с. – (Сообщения Объединенного института ядерных исследований; Р4-96-221).
23. Поклонский, Н. А. Термическая энергия ионизации водородоподобных примесей в полупроводниковых материалах / Н. А. Поклонский, С. А. Вырко, А. Н. Деревяго // Журн. БГУ. Физика. – 2020. – № 2. – С. 28–41. <https://doi.org/10.33581/2520-2243-2020-2-28-41>
24. Haraldson, S. ESR-resonances in doped GaAs and GaP / S. Haraldson, C.-G. Ribbing // J. Phys. Chem. Solids. – 1969. – Vol. 30, № 10. – P. 2419–2425. [https://doi.org/10.1016/0022-3697\(69\)90066-3](https://doi.org/10.1016/0022-3697(69)90066-3)
25. GaAs:Se and GaAs:Te photoconductive detectors in 300 μm region for astronomical observations / K. Watanabe [et al.] // Jpn. J. Appl. Phys. – 2008. – Vol. 47, № 11. – P. 8261–8264. <https://doi.org/10.1143/JJAP.47.8261>
26. Madelung, O. Semiconductors: data handbook / O. Madelung. – Berlin: Springer, 2004. – xiv+692 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-18865-7>
27. Transition temperature from band to hopping direct current conduction in crystalline semiconductors with hydrogen-like impurities: Heat versus Coulomb attraction / N. A. Poklonski [et al.] // J. Appl. Phys. – 2011. – Vol. 110, № 12. – P. 123702 (7 p.). <https://doi.org/10.1063/1.3667287>
28. Аронзон, Б. А. Статистика электронов в полупроводниках в квантующем магнитном поле / Б. А. Аронзон, Е. З. Мейлихов // Журн. эксперим. и теор. физики. – 1971. – Т. 61, № 5 (11). – С. 1906–1912.
29. Мейлихов, Е. З. Влияние квантующего магнитного поля на концентрацию электронов в полупроводниках / Е. З. Мейлихов, Б. А. Аронзон // Докл. Акад. наук СССР. – 1972. – Т. 206, № 6. – С. 1329–1332.
30. Temperature dependence of the electron Landé g factor in InSb and GaAs / K. L. Litvinenko [et al.] // Phys. Rev. B. – 2008. – Vol. 77, № 3. – P. 033204 (4 p.). <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.77.033204>
31. Oestreich, M. Temperature dependence of the electron Landé g factor in GaAs / M. Oestreich, W. W. Rühle // Phys. Rev. Lett. – 1995. – Vol. 74, № 12. – P. 2315–2318. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.74.2315>
32. Askerov, B. M. Thermodynamics, Gibbs method and statistical physics of electron gases / B. M. Askerov, S. R. Figarova. – Berlin: Springer, 2010. – xii+374 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-03171-7>
33. Vdovin, A. V. Precise measurement of the free electron g -factor in InSb / A. V. Vdovin, E. M. Skok // Phys. Status Solidi B. – 1986. – Vol. 136, № 2. – P. 603–613. <https://doi.org/10.1002/pssb.2221360225>
34. Fourier-transform magnetophotoluminescence spectroscopy of donor-bound excitons in GaAs / V. A. Karasyuk [et al.] // Phys. Rev. B. – 1994. – Vol. 49, № 23. – P. 16381–16397. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.49.16381>
35. Окулов, В. И. Ферми-жидкостная аномалия концентрационной зависимости g -фактора электронов проводимости в полупроводнике с гибридизированными примесными состояниями / В. И. Окулов, Е. А. Памятных, Г. А. Алышанский // Физика низких температур. – 2009. – Т. 35, № 2. – С. 194–196.

References

1. Durkan J., Elliot R. J., March N. H. Localization of electrons in impure semiconductors by a magnetic field. *Review of Modern Physics*, 1968, vol. 40, no. 4, pp. 812–815. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.40.812>
2. Yafet Y., Keyes R. W., Adams E. N. Hydrogen atom in a strong magnetic field. *Journal of Physics and Chemistry of Solids*, 1956, vol. 1, no. 3, pp. 137–142. [https://doi.org/10.1016/0022-3697\(56\)90020-8](https://doi.org/10.1016/0022-3697(56)90020-8)
3. Larsen D. M. Shallow donor levels of InSb in a magnetic field. *Journal of Physics and Chemistry of Solids*, 1968, vol. 29, no. 2, pp. 271–280. [https://doi.org/10.1016/0022-3697\(68\)90071-1](https://doi.org/10.1016/0022-3697(68)90071-1)
4. Zawadzki W., Pfeiffer P., Najda S. P., Yokoi H., Takeyama S., Miura N. Experimental and theoretical study of magnetodonors in GaAs and InP at megagauss fields. *Physical Review B*, 1994, vol. 49, no. 3, pp. 1705–1710. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.49.1705>
5. Raymond A., Robert J. L., Zawadzki W., Wlasak J. Ionization energy of magnetodonors in InSb. *Journal of Physics C: Solid State Physics*, 1984, vol. 17, no. 13, pp. 2381–2389. <https://doi.org/10.1088/0022-3719/17/13/019>
6. Jouault B., Raymond A., Zawadzki W. Ionization energy of magnetodonors in pure bulk GaAs. *Physical Review B*, 2002, vol. 65, no. 24, pp. 245210 (1–7). <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.65.245210>
7. Bychkov Yu. A. The quantum theory of the electrical conductivity of metals in strong magnetic fields. *Soviet Physics Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 1961, vol. 12, no. 3, pp. 483–491.
8. Arkhincheev V. E. On the influence of magnetic field on the probability of diffusing particle capture by absorbing traps. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 2019, vol. 128, no. 3, pp. 485–488. <https://doi.org/10.1134/S1063776119020018>
9. Peierls R. Model-making in physics. *Contemporary Physics*, 1980, vol. 21, no. 1, pp. 3–17. <https://doi.org/10.1080/00107518008210938>
10. Weisskopf V. F. Search for simplicity: quantum mechanics of the hydrogen atom. *American Journal of Physics*, 1985, vol. 53, no. 3, pp. 206–207. <https://doi.org/10.1119/1.14122>
11. Ogluzdin V. E. The role of Bohr frequencies in the scattering, luminescence, and generation of radiation in different media. *Physics Uspekhi*, 2006, vol. 49, no. 4, pp. 401–405. <https://doi.org/10.1070/PU2006v049n04ABEH005803>
12. Fermi E. *Notes on Quantum Mechanics: A Course Given by Enrico Fermi at the University of Chicago*. Chicago, The University of Chicago Press, 1995. vii+188 p.
13. Poole C. P. *The Physics Handbook: Fundamentals and Key Equations*. Weinheim, Wiley, 2007. xxii+514 p.
14. Malykin G. B. Thomas precession: correct and incorrect solutions. *Physics Uspekhi*, 2006, vol. 49, no. 8, pp. 837–853. <https://doi.org/10.1070/PU2006v049n08ABEH005870>

15. Kholmetskii A. L., Missevitch O. V., Yarman T. On the classical analysis of spin-orbit coupling in hydrogenlike atoms. *American Journal of Physics*, 2010, vol. 78, no. 4, pp. 428–432. <https://doi.org/10.1119/1.3277052>
16. Krasnopevtsev E. A. *Quantum Mechanics in Applications to Solid State Physics*. Novosibirsk, NGTU Publ., 2017. 355 p. (in Russian).
17. Shpol'skii E. V. *Atomic Physics. 2 vols.* Saint-Petersburg, Lan' Publ., 2010. 560+448 p. (in Russian).
18. Jackson J. D. *Classical Electrodynamics*. New York, Wiley, 1999. xxii+808 p.
19. Poklonski N. A., Vyrko S. A., Podenok S. L. *Statistical Physics of Semiconductors*. Moscow, KomKniga Publ., 2005. 264 p. (in Russian).
20. Bellyustin S. V. *Classical Electronic Theory*. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1971. 350 p. (in Russian).
21. Vasil'ev B. V., Lyuboshits V. L. Virial theorem and some properties of the electron gas in metals. *Physics Uspekhi*, 1994, vol. 37, no. 4, pp. 345–351. <https://doi.org/10.1070/PU1994v037n04ABEH000018>
22. Lyuboshits V. L. *The Virial theorem and the conditions of equilibrium of a system of charged particles in the magnetic field*. Dubna, Joint Institute for Nuclear Research (JINR), 1996. 18 p. (in Russian).
23. Poklonski N. A., Vyrko S. A., Dzeraviah A. N. Thermal ionization energy of hydrogen-like impurities in semiconductor materials. *Journal of the Belarusian State University. Physics*, 2020, no. 2, pp. 28–41. <https://doi.org/10.33581/2520-2243-2020-2-28-41> (in Russian).
24. Haraldson S., Ribbing C.-G. ESR-resonances in doped GaAs and GaP. *Journal of Physics and Chemistry of Solids*, 1969, vol. 30, no. 10, pp. 2419–2425. [https://doi.org/10.1016/0022-3697\(69\)90066-3](https://doi.org/10.1016/0022-3697(69)90066-3)
25. Watanabe K., Ueno M., Wakaki M., Abe O., Murakami H. GaAs:Se and GaAs:Te photoconductive detectors in 300 μm region for astronomical observations. *Japanese Journal of Applied Physics*, 2008, vol. 47, no. 11, pp. 8261–8264. <https://doi.org/10.1143/JJAP.47.8261>
26. Madelung O. *Semiconductors: Data Handbook*. Berlin, Springer, 2004. xiv+692 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-18865-7>
27. Poklonski N. A., Vyrko S. A., Poklonskaya O. N., Zabrodskii A. G. Transition temperature from band to hopping direct current conduction in crystalline semiconductors with hydrogen-like impurities: Heat versus Coulomb attraction. *Journal of Applied Physics*, 2011, vol. 110, no. 12, pp. 123702 (1–7). <https://doi.org/10.1063/1.3667287>
28. Aronzon B. A., Meilikhov E. Z. Statistics of electrons in semiconductors in a quantizing magnetic field. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 1972, vol. 34, no. 5, pp. 1014–1017.
29. Meilikhov E. Z., Aronzon B. A. The influence of a quantizing magnetic field on the electron concentration in semiconductors. *Doklady Akademii nauk SSSR* [Proceedings of the Academy of Sciences of the USSR], 1972, vol. 206, no. 6, pp. 1329–1332. (in Russian).
30. Litvinenko K. L., Nikzad L., Pidgeon C. R., Allam J., Cohen L. F., Ashley T., Emeny M., Zawadzki W., Mordin B. N. Temperature dependence of the electron Landé g factor in InSb and GaAs. *Physical Review B*, 2008, vol. 77, no. 3, pp. 033204 (1–4). <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.77.033204>
31. Oestreich M., Rühle W. W. Temperature dependence of the electron Landé g factor in GaAs. *Physical Review Letters*, 1995, vol. 74, no. 12, pp. 2315–2318. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.74.2315>
32. Askerov B. M., Figarova S. R. *Thermodynamics, Gibbs Method and Statistical Physics of Electron Gases*. Berlin, Springer, 2010. xii+374 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-03171-7>
33. Vdovin A. V., Skok E. M. Precise measurement of the free electron g-factor in InSb. *Physica Status Solidi B*, 1986, vol. 136, no. 2, pp. 603–613. <https://doi.org/10.1002/pssb.2221360225>
34. Karasyuk V. A., Beckett D. G. S., Nissen M. K., Villemaire A., Steiner T. W., Thewalt M. L. W. Fourier-transform magnetophotoluminescence spectroscopy of donor-bound excitons in GaAs. *Physical Review B*, 1994, vol. 49, no. 23, pp. 16381–16397. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.49.16381>
35. Okulov V. I., Pamyatnykh E. A., Al'shanskii G. A. Fermi-liquid anomaly of the concentration dependence of the g-factor of the conduction electrons in a semiconductor with hybridized impurity states. *Low Temperature Physics*, 2009, vol. 35, no. 2, pp. 146–148. <https://doi.org/10.1063/1.3075946>

Информация об авторах

Поклонский Николай Александрович – доктор физико-математических наук, профессор, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: poklonski@bsu.by. <http://orcid.org/0000-0002-0799-6950>

Деревяго Александр Николаевич – аспирант, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: deralex@list.ru

Вырко Сергей Александрович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: vyrko@bsu.by

Information about the authors

Nikolai A. Poklonski – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: poklonski@bsu.by. <http://orcid.org/0000-0002-0799-6950>

Aliaksandr N. Dzeraviah – Postgraduate Student, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: deralex@list.ru

Sergey A. Vyrko – Ph. D. (Physics and Mathematics), Senior Researcher, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: vyrko@bsu.by

ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)

УЧЕНЫЕ БЕЛАРУСИ
SCIENTISTS OF BELARUS

ВИКТОР ИВАНОВИЧ КОРЗЮК

(К 75-летию со дня рождения)

4 апреля 2015 г. исполнилось 75 лет известному ученому, талантливому организатору, прекрасному педагогу, академику Национальной академии наук Беларуси, заведующему отделом прикладной математики Института математики НАН Беларуси, профессору кафедры математической кибернетики механико-математического факультета Белорусского государственного университета Виктору Ивановичу Корзюку.

Виктор Иванович родился в деревне Петрашунцы Воложинского района Минской области. В 1961 г. поступил на математический факультет Белорусского государственного университета. Уже в студенческие годы он приступил к научным исследованиям в области общей теории уравнений с частными производными под руководством Николая Ивановича Бриша – одного из основателей научной школы в Беларуси по дифференциальным уравнениям с частными производными.

В 1971 г. В. И. Корзюк защитил кандидатскую диссертацию, а в 1994 г. – докторскую диссертацию на тему «Метод энергетических неравенств и операторов осреднения в теории линейных граничных задач для дифференциальных уравнений с частными производными». В 1996 г. Виктор Иванович был избран членом-корреспондентом, в 2015 г. – действительным членом НАН Беларуси.

Виктор Иванович – известный специалист в области дифференциальных уравнений с частными производными и математической физики. Тематика его научных интересов связана с актуальным в теории краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными направлением – отысканием корректно поставленных задач и доказательствами их разрешимости, основанными на использовании методов функционального анализа, нахождением классических решений поставленных задач. По результатам исследований ученым опубликовано свыше 300 научных работ.

На основе предложенного им метода энергетических неравенств и операторов осреднения переменного шага исследованы на разрешимость новые задачи и классы дифференциальных уравнений, возникающих при изучении конкретных физических явлений, что стало крупным вкладом в развитие теории постановок корректных по Адамару краевых задач и их разрешимости. Это позволило изучить многие новые смешанные задачи для нестационарных уравнений, заданных в нецилиндрических областях. В. И. Корзюк предложил новую методику вывода энергетических неравенств для некоторых классов уравнений при доказательстве теорем существования и единственности решений рассматриваемых задач. Наряду со многими классическими методами им предложен новый метод характеристик отыскания классических решений смешанных и других задач для одномерных гиперболических уравнений.

Виктор Иванович Корзюк обладает незаурядными организаторскими способностями и большой целеустремленностью. Он внес неоценимый вклад в развитие и процветание факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета, пло-



дотворно работая здесь со дня его основания в 1970 г. сначала в должности ассистента, затем старшего преподавателя, доцента и профессора кафедры математической физики, в 1982–1996 гг. был деканом факультета прикладной математики и информатики БГУ. С 1996 по 2001 г. занимал должность проректора по учебной работе, с 1984 по 2014 г. возглавлял кафедру математической физики. На протяжении 20 лет Виктор Иванович вел большую работу по становлению факультета и организации научных исследований всего коллектива факультета, по подготовке специалистов и организации новых специальностей. Им также был организован специальный факультет бизнеса и информационных технологий БГУ, где в настоящее время ведется переподготовка кадров по дефицитным специальностям и современным технологиям. В. И. Корзюк неоднократно приглашался для чтения лекций и обмена опытом работы в учебные заведения таких государств, как Югославия, Куба, Вьетнам, Алжир, Польша, США, ФРГ и Франция.

В. И. Корзюк провел большую работу по созданию и открытию первого учреждения образования в составе Национальной академии наук Беларуси – Института подготовки научных кадров, начавшего свою работу с декабря 2001 г. В 2001–2005 гг. был его ректором.

Виктор Иванович прекрасно сочетает свою научную деятельность с педагогической. Он читает курсы лекций «Уравнения математической физики», «Математическое моделирование», используя при этом новейшие информационные технологии, является автором учебника «Уравнения математической физики», вышедшего в свет в 2010 г., и соавтором курсов лекций «Основы математического моделирования» (ч. 1, 2014 г.; ч. 2, 2015 г.) и «Классические решения задач для гиперболических уравнений» (ч. 1, 2, 2017 г.). Его лекции проводятся на высоком научном и педагогическом уровне, с применением различного вспомогательного технического обеспечения, что позволяет молодым людям усваивать информацию в более доступной, понятной форме. Виктор Иванович помогает одаренным студентам раскрыть их талант, стать действительно высококвалифицированными специалистами, выбрать правильное направление в науке, при этом сохраняя и приумножая научные традиции. Он сочетает в себе такие качества, как требовательность, рассудительность, добродушие, отзывчивость и понимание. Под его руководством подготовлено 11 кандидатов и 2 доктора физико-математических наук.

В. И. Корзюк сочетает многогранную научную и организаторскую деятельность с общественной работой. Он является членом редколлегии журналов «Весці Нацыянальнай Акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук», «Труды Института математики НАН Беларуси», «Mathematical Modelling and Analysis».

За успешную работу Виктор Иванович неоднократно удостоивался высоких государственных наград и почетных званий. Он награжден Почетной Грамотой Верховного Совета БССР (1982), медалью «За трудовую доблесть» (1986), имеет почетное звание «Заслуженный работник образования Республики Беларусь» (1996), является лауреатом Государственной премии Республики Беларусь за цикл работ «Операторные методы в дифференциальных уравнениях» (1996).

Желаем Виктору Ивановичу крепкого здоровья, творческих успехов, талантливых учеников и новых достижений в научных исследованиях.

*Отделение физики, математики и информатики НАН Беларуси,
Институт математики НАН Беларуси,
Белорусское математическое общество*

ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)

НИКОЛАЙ МИХАЙЛОВИЧ ОЛЕХНОВИЧ

(К 85-летию со дня рождения)

2 мая 2020 г. исполнилось 85 лет со дня рождения крупного ученого в области физики твердого тела, талантливого организатора науки, академика Национальной академии наук Беларуси, доктора физико-математических наук, профессора, заслуженного деятеля науки Республики Беларусь Николая Михайловича Олехновича.

Николай Михайлович родился в деревне Вороничи Слонимского района Гродненской области. В 1957 г. окончил физико-математический факультет Белорусского государственного университета. Еще будучи студентом, в 1956 г. начал научную деятельность в Физико-техническом институте Академии наук БССР. С 1959 г. вся трудовая деятельность Н. М. Олехновича связана с Институтом физики твердого тела и полупроводников (с 2007 г. – Научно-практический центр по материаловедению Национальной академии наук Беларуси). Здесь он прошел путь от младшего научного сотрудника до директора института и в настоящее время продолжает трудиться в должности главного научного сотрудника.

На каком бы посту не работал Николай Михайлович, для него всегда характерен широкий спектр научных интересов. Большую известность приобрели его работы по проблемам химической связи в кристаллах, дифракции рентгеновских лучей в кристаллических структурах, фазовым переходам в твердых телах при высоких давлениях и температурах, получению и исследованию новых материалов.

Первыми важными результатами, полученными Н. М. Олехновичем и его коллегами, стало определение пространственного распределения электронных зарядов для различных кристаллических материалов. Проводившиеся в дальнейшем исследования поляризации рентгеновских лучей при дифракции в реальных кристаллах стали основой для формирования нового понимания механизма рассеяния рентгеновских лучей при этих условиях. Результаты экспериментов привели к пересмотру ранее сформированных взглядов на процессы дифракционного рассеяния в исследованных кристаллах и создали основу для новых подходов при построении для них теории дифракции рентгеновских лучей. Был развит рентгеновский дифракционно-поляризационный анализ кристаллов. На основе обнаруженного и исследованного явления двулучепреломления и деполяризации рентгеновского излучения при дифракции в дислокационных кристаллах развита поляриметрия рентгеновского диапазона частот.

Не остались вне поля зрения Николая Михайловича и вопросы материаловедения. Группа, руководимая ученым, имеет 40-летний опыт успешного применения технологии высокого давления для получения новых сегнетоактивных фаз со структурой перовскита, перспективных для создания пьезоэлектрических излучателей и конденсаторов. Так, в 1981–1982 гг. под его руководством впервые синтезирован сегнетоактивный алюмоиобат свинца со структурой перовскита. Далее на протяжении двух десятков лет, с использованием методики высокого давления, было синтезировано и исследовано множество рядов сегнетоактивных свинецсодержащих твердых растворов. В последующем применение методики высокого давления позволило также существенно расширить класс бессвинцовых сегнетоактивных перовскитов.

В последние годы важным направлением исследований А. М. Олехновича является поиск и оптимизация новых типов мультиферроиков – материалов, в которых одновременно наблюдаются, как минимум, два из трех видов упорядочения: сегнетоэлектрическое, сегнетоэластическое и ферромагнитное. Мультиферроики представляют интерес для применения в компо-



нентах микроэлектроники, таких как магнитные сенсоры, емкостные электромагниты, магнитная память и др. Для синтеза новых перспективных мультиферроиков, как правило, требуются нестандартные препаративные методы, например технология синтеза под высоким давлением, которую успешно применяет группа, руководимая Николаем Михайловичем. В 2015–2018 гг. Н. М. Олехнович являлся координатором с белорусской стороны проекта «Tuneable multiferroics based on oxygen octahedral structures», выполнявшегося в рамках программы Европейского союза «Горизонт 2020». Этот проект, связанный с мультиферроиками, объединил усилия исследователей из шести стран: Португалии, Великобритании, Германии, Литвы, Беларуси и Украины.

Николай Михайлович является автором более 300 научных публикаций, в том числе 19 изобретений.

В 1989 г. Н. М. Олехнович был избран членом-корреспондентом, а в 1996 г. – действительным членом НАН Беларуси. В 1997–2002 гг. он являлся академиком-секретарем Отделения физики, математики и информатики НАН Беларуси. В 1991 г. ему присвоено звание профессора, а в 1999 г. – заслуженного деятеля науки Республики Беларусь.

Являясь председателем специализированного совета по защите докторских диссертаций при НПЦ НАН Беларуси по материаловедению, Николай Михайлович ведет большую работу по подготовке кадров высшей квалификации.

Глубокие творческие идеи, чувство нового, высокий профессионализм и организаторские способности, культура общения, принципиальность и такт обеспечили Н. М. Олехновичу авторитет талантливого ученого, мудрого руководителя, чуткого и доброжелательного человека. Сердечно поздравляем Николая Михайловича с юбилеем, желаем ему крепкого здоровья и дальнейших творческих успехов.

*Отделение физики, математики и информатики НАН Беларуси,
Научно-практический центр НАН Беларуси по материаловедению,
Белорусское физическое общество*