

# ВЕСЦІ

## НАЦЫЯНАЛЬНАЯ АКАДЭМІЯ НАВУК БЕЛАРУСІ

СЕРИЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК 2014 № 4

# ИЗВЕСТИЯ

## НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ

СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК 2014 № 4

ЗАСНАВАЛЬНІК – НАЦЫЯНАЛЬНАЯ АКАДЭМІЯ НАВУК БЕЛАРУСІ

Часопіс выдаецца са студзеня 1965 г.

Выходзіць чатыры разы ў год

### ЗМЕСТ

#### МАТЭМАТЫКА

<b>Тараканов А. Н.</b> О дискретных подгруппах группы Лоренца, генерирующих решетки в пространстве Минковского .....	5
<b>Ламчановская М. В.</b> Комплексные алгебраические числа большой высоты в кругах малого радиуса .....	10
<b>Карпук М. В.</b> О старшем показателе Ляпунова линейной дифференциальной системы с параметром-множителем как функции параметра .....	15
<b>Амелькин В. В., Василевич М. Н.</b> Построение уравнения Фукса с четырьмя конечными особыми точками и заданной приводимой группой монодромии .....	25
<b>Малютин В. Б.</b> Вычисление интегралов по спиновым переменным от функционалов, содержащих взаимодействие удаленных узлов .....	32
<b>Иржавский П. А.</b> Гамильтоновость локально связанных графов: сложностные аспекты .....	37
<b>Андрушкевич И. Е., Шиёнок Ю. В.</b> Сведение системы уравнений Максвелла к системе обыкновенных дифференциальных уравнений .....	44
<b>Муха В. С.</b> Проверка гипотез в параллельном факторном анализе .....	53
<b>Прокопчук А. В., Янчевский В. И.</b> О линейных оболочках коммутантов унитарных групп некоммутативных конечномерных алгебр с делением .....	61

## ФІЗІКА

Толкачев Е. А. Расслоение Хопфа $S^3 \rightarrow S^2$ : проективные координаты и вектор-параметры Ф. И. Федорова	65
<b>Чумаков А. Н., Никончук И. С., Поклонский Н. А., Горбачук Н. И., Поклонская О. Н., Обухов В. Е.</b> Электропроводящие структуры в лазерно-модифицированных пленках алмазоподобного углерода .....	72
Альхуссан Х., Сидорович Т. В., Чорный А. Д. Сверхзвуковой невязкий поток около тел вращения: эмпирический и численный расчет (на английском языке) .....	76
Ткаченко Т. М., Гончаров В. С. Магнитные характеристики сплавов $MnNi_{1-x}Fe_xGe$ ( $0,10 \leq x \leq 0,25$ ) .....	83
Гуртовой В. Г., Шелег А. У. Диэлектрические характеристики монокристаллов полупроводниковых соединений $Cu_2ZnSnS_4$ и $Cu_2ZnSnSe_4$ .....	87
Летко А. К., Шилин А. Д., Савчук Г. К. Влияние ультразвукового воздействия на кристаллическую структуру керамики на основе цирконата-титаната свинца .....	92
Бринкевич Д. И., Вабищевич С. А., Просолович В. С., Янковский Ю. Н. Модификация приповерхностных слоев монокристаллов кремния, имплантированных высокоэнергетическими ионами фосфора и бора .....	98
Аплеснин С. С., Демиденко О. Ф., Маковецкий Г. И., Романова О. Б., Рябинкина Л. И., Янушкевич К. И. Магнитосопротивление и эффект Холла в твердом растворе $Mn_{0,55}V_{0,45}S$ .....	103

## КАРОТКІЯ ПАВЕДАМЛЕННІ

Ламчановская М. В. Алгебраические числа третьей степени на комплексной плоскости .....	108
Кудин А. С. Об оценке снизу количества целочисленных многочленов заданной степени с малой производной в корне .....	112
Маджиднежад В., Хейдоров И. Э. Обнаружение патологии речевого тракта на основе генетического алгоритма и ансамбля дерева решений .....	116
<b>Паказальнік артыкулаў, змешчаных у часопісе «Весці НАН Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук» у 2014 годзе .....</b>	<b>122</b>

---

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ 2014 № 4

Серия физико-математических наук

*На русском, белорусском и английском языках*

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь,  
свидетельство о регистрации № 392 от 18.05.2009

---

Комп'ютарная вёрстка *В. Л. Смольскай*

Здадзена ў набор 26.11.2014. Падпісана да друку 17.12.2014. Выхад у свет 29.12.2014. Фармат 60×84<sup>1/8</sup>. Папера афсетная.

Друк лічбавы. Ум. друк. арк. 14,88. Ул.-выд. арк. 16,4. Тыраж 68 экз. Заказ 230.

Кошт нумару: індывідуальная падпіска – 58 650 руб.; ведамасная падпіска – 141 919 руб.

Выдавец і паліграфічнае выкананне:

Рэспубліканскае ўнітарнае прадпрыемства «Выдавецкі дом «Беларуская навука». Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца, вытворцы, распаўсюджвальніка друкаваных выданняў № 1/18 ад 02.08.2013.

ЛП 02330/455 ад 30.12.2013. Вул. Ф. Скарыны, 40, 220141, г. Мінск.

© Выдавецкі дом «Беларуская навука».

Весці НАН Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук, 2014

# PROCEEDINGS

## OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF BELARUS

---

PHYSIC AND MATHEMATICS SERIES 2014 N 4

---

FOUNDED IS THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF BELARUS

The Journal has been published since January 1965

Issued four times a year

### CONTENTS

#### MATHEMATICS

<b>Tarakanov A. N.</b> Discrete subgroups of the Lorentz group generating lattices in the Minkowski space .....	5
<b>Lamchanovskaya M. V.</b> Complex algebraic numbers of large height in the circles of small radius .....	10
<b>Karpuk M. V.</b> Largest Lyapunov exponent of the linear differential system with a parameter-multiplier as a function of parameter .....	15
<b>Amel'kin V. V., Vasilevich M. N.</b> Construction of the Fuchs equation with four finite critical points and a given reducible group of monodromy .....	25
<b>Malyutin V. B.</b> Evaluation of integrals with respect to the spin variables of the functionals containing interaction of remote nodes .....	32
<b>Irzhavski P. A.</b> Hamiltonicity of locally connected graphs: complexity results .....	37
<b>Andrushkevich I. E., Shienok Yu. V.</b> Reduction of the system of Maxwell equations to the system of ordinary differential equations .....	44
<b>Mukha V. S.</b> Checking the hypotheses in the parallel factor analysis .....	53
<b>Prokopchuk A.V., Yanchevskii V. I.</b> On linear spans of the commutator subgroups of unitary groups of non-commutative finite dimensional division algebras .....	61

#### PHYSICS

<b>Tolkachev E. A.</b> Hopf bundle $S^3 \rightarrow S^2$ : projective coordinates and F. I. Fedorov's vector-parameters .....	65
<b>Chumakov A. N., Nikonchuk I. S., Poklonski N. A., Gorbachuk N. I., Poklonskaya O. N., Obukhov V. E.</b> Electrically conducting structures in laser-modified diamond-like carbon films .....	72
<b>Alhussan K., Sidorovich T. V., Chorny A. D.</b> Supersonic inviscid flow around bodies of revolution: empirical vs. numerical computation .....	76
<b>Tkachenka T. M., Goncharov V. S.</b> Magnetic characteristics of $MnNi_{1-x}Fe_xGe$ ( $0.10 \leq x \leq 0.25$ ) alloys .....	83
<b>Hurtavy V. G., Sheleg A. U.</b> Dielectric properties of single crystals of $Cu_2ZnSnS_4$ and $Cu_2ZnSnSe_4$ semiconductors .....	87
<b>Letko A. K., Shilin A. D., Sauchuk G. K.</b> Influence ultrasonic treatment on the crystal structure of ceramics based on lead zirconate-titanate .....	92

<b>Brinkevich D. I., Vabishchevich S. A., Prosolovich V. S., Yankovski Y. N.</b> Modification of the surface layers of silicon single crystals implanted with high energy phosphorus and boron ions .....	98
<b>Aplesnin S. S., Demidenko O. F., Makovetskii G. I., Romanova O. B., Ryabinkina L. I., Yanushkevich K. I.</b> Magnetoresistance and Hall effect in $Mn_{0.55}V_{0.45}S$ solid solution .....	103

#### SHORT COMMUNICATIONS

<b>Lamchanovskaya M. V.</b> Algebraic numbers of third degree in the complex plane .....	108
<b>Kudin A. S.</b> Lower bound of the number of integral polynomials of a given degree with a small derivative at the root .....	112
<b>Majidnezhad V., Kheidorov I. E.</b> Vocal fold pathology diagnosis on the basis of genetic algorithm and decision tree ensemble method .....	116
<b>List of Publications for 2014 in “Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series”</b> .....	125

**МАТЭМАТЫКА**

УДК 512.817

А. Н. ТАРАКАНОВ

**О ДИСКРЕТНЫХ ПОДГРУППАХ ГРУППЫ ЛОРЕНЦА,  
ГЕНЕРИРУЮЩИХ РЕШЕТКИ В ПРОСТРАНСТВЕ МИНКОВСКОГО***Институт информационных технологий Белорусского государственного университета  
информатики и радиоэлектроники**(Поступила в редакцию 17.10.2014)*

С физической точки зрения дискретные подгруппы группы Лоренца возникают при попытке построить теорию квантованного пространства-времени, которое обладало бы некоторой дискретной симметрией, переходящей в лоренцеву симметрию в континуальном пределе (см., напр., [1]). При таком дискретном преобразовании пространство-время, представляемое 1+3-мерной решеткой, должно переходить само в себя. Задача, таким образом, заключается в том, чтобы найти эти дискретные преобразования, которые, очевидно, должны принадлежать дискретным подгруппам группы Лоренца. Несмотря на многочисленные подходы к построению 1+3-мерных решеток, эта проблема до сих пор остается до конца нерешенной, хотя существует некоторое продвижение в этом направлении (см., напр., [2–6]). Отметим также работы [7, 8], в которых строятся некоторые дискретные подгруппы группы Лоренца исходя из гомоморфизма между  $SO(1,3)$  и  $SL(2, \mathbb{C})$ . В частности, идея Дирака заключалась в том, чтобы скомбинировать дискретные подгруппы группы Лоренца с дискретными трансляциями таким образом, чтобы снова получалась исходная решетка. Дирак получил целые преобразования и, по-видимому, не заметил, что его методом можно получить также рациональные преобразования Лоренца, удовлетворяющие указанному условию. Кроме того, трехмерные вращения, порождаемые дискретными преобразованиями Лоренца, не ограничиваются трехмерными поворотами на  $120$  или  $180^\circ$ , порождаемыми целыми преобразованиями. В качестве физических приложений, неизвестных Дираку, можно указать работу [9], в которой применяется принцип инвариантности относительно таких подгрупп, действующих независимо на состоянии частиц с различными импульсами, что позволяет определить все элементы  $S$ -матрицы.

Цель данной работы состоит в том, чтобы дать пример построения дискретных подгрупп группы Лоренца, порождающих решетки в пространстве Минковского, на основе выбранной параметризации, в качестве которой используется параметризация Ф. И. Федорова группы Лоренца с помощью комплексного вектор-параметра  $\mathbf{q} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$  [10]. Приведем основные сведения.

Как известно, группа Лоренца является группой движений пространства Минковского  $\mathbb{E}_{1,3}^R$ . Дискретная точечная группа симметрии должна удовлетворять двум условиям:

а) существует хотя бы одна точка, называемая особенной, которая инвариантна относительно всех преобразований группы;

б) орбита любой неособенной точки дискретна [6, с. 94].

Если  $\mathbf{L} \in SO(1,3)$ ,  $x \in \mathbb{E}_{1,3}^R$ , то первое условие дискретности подгруппы группы Лоренца означает  $\mathbf{L}x = x$ , которое для  $x \neq 0$  выполняется, только если  $\mathbf{L}$  принадлежит малой группе Лоренца. В случае всех преобразований группы это условие выполняется для единственной точки  $x = 0$ , которая, таким образом, является особенной. Второе условие задает решетку в пространстве Минковского, узлы которой определяются из уравнения  $x' = \mathbf{L}x$ .

В параметризации Федорова матрица группы Лоренца задается посредством

$$\mathbf{L}(\mathbf{q}) = \frac{1+\alpha}{1-\alpha} = \frac{1 + \frac{1}{2}(\mathbf{q}^2 + \mathbf{q}^{*2}) + 2(\beta + \beta^2)}{|1 + \mathbf{q}^2|} = \frac{1}{|1 + \mathbf{q}^2|} \begin{pmatrix} 1 + |\mathbf{q}|^2 & i(\mathbf{q} - \mathbf{q}^* + [\mathbf{q}\mathbf{q}^*]) \\ i(\mathbf{q} - \mathbf{q}^* - [\mathbf{q}\mathbf{q}^*]) & 1 - |\mathbf{q}|^2 + (\mathbf{q} + \mathbf{q}^*)^\times + \mathbf{q} \circ \mathbf{q}^* + \mathbf{q}^* \circ \mathbf{q} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

с законом композиции вектор-параметров

$$\mathbf{q}'' = \langle \mathbf{q}, \mathbf{q}' \rangle \equiv \frac{\mathbf{q} + \mathbf{q}' + [\mathbf{q}\mathbf{q}']}{1 - \mathbf{q}\mathbf{q}'}, \quad (2)$$

где  $3 \times 3$ -матрица  $\mathbf{q}^\times$  имеет компоненты  $(\mathbf{q}^\times)_{ij} = \varepsilon_{ijk} q_k$ , знак « $\circ$ » означает диадное произведение:  $(\mathbf{q} \circ \mathbf{q}^*)_{ij} = q_i q_j^*$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  – антиэрмитовы матрицы

$$\alpha = \xi\beta + \zeta\beta^3 = -\alpha^\dagger, \quad \beta = \frac{1}{2}(\mathbf{q} + \mathbf{q}^*) = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{b} \\ -\mathbf{b} & \mathbf{a}^\times \end{pmatrix} = -\beta^\dagger, \\ \xi = 1 - \Delta_\beta \frac{\sqrt{(1 - \Delta_\beta)^2 - 4|\beta|} - (1 - \Delta_\beta)}{2|\beta|}, \quad \zeta = \frac{\sqrt{(1 - \Delta_\beta)^2 - 4|\beta|}}{2|\beta|}, \\ \Delta_\beta = \frac{1}{2} \text{Sp} \beta^2 = -\frac{1}{2}(\mathbf{q}^2 + \mathbf{q}^{*2}), \quad |\beta| \doteq \det \beta = \frac{1}{16}(\mathbf{q}^2 - \mathbf{q}^{*2})^2.$$

Развернутое действие  $\mathbf{L}(\mathbf{q})$  на вектор  $x = (x^0, \mathbf{x})$  имеет вид

$$\begin{cases} x'^0 = \frac{1}{|1 + \mathbf{q}^2|} \left\{ (1 + |\mathbf{q}|^2)x^0 + i(\mathbf{q} - \mathbf{q}^* + [\mathbf{q}\mathbf{q}^*])\mathbf{x} \right\}, \\ \mathbf{x}' = \frac{1}{|1 + \mathbf{q}^2|} \left\{ i(\mathbf{q} - \mathbf{q}^* - [\mathbf{q}\mathbf{q}^*])x^0 + (1 - |\mathbf{q}|^2)\mathbf{x} + [\mathbf{q} + \mathbf{q}^*, \mathbf{x}] + \mathbf{q}(\mathbf{q}^*\mathbf{x}) + \mathbf{q}^*(\mathbf{q}\mathbf{x}) \right\}. \end{cases} \quad (3)$$

Рассмотрим дискретные преобразования Лоренца. Пусть компоненты вектор-параметра  $\mathbf{q} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$  являются рациональными комплексными числами, т. е. такими, у которых вещественные и мнимые части являются числами вида  $m/n$ , где  $m$  и  $n$  целые. Тогда закон композиции (2) двух рациональных вектор-параметров приводит также к рациональному вектор-параметру. Единичному и обратному элементам соответствуют  $\mathbf{q} = \mathbf{0}$  и  $\mathbf{q}' = -\mathbf{q}$ , которые, очевидно, также рациональны. Матрица  $\mathbf{L}(\mathbf{q})$ , задаваемая (1), вообще говоря, не является рациональной, так как  $|1 + \mathbf{q}^2| = \sqrt{(1 + \mathbf{q}^2)(1 + \mathbf{q}^{*2})}$  в общем случае иррационально. Однако ее компоненты принимают дискретный ряд значений, определяемый дискретностью рациональных значений вектор-параметра  $\mathbf{q}$ , которые определяют, таким образом, дискретные подгруппы группы Лоренца. Действие преобразований Лоренца на некоторые начальные координаты  $x = (x^0, \mathbf{x})$ , не обязательно обладающие свойством рациональности, дает новые координаты  $x' = \mathbf{L}(\mathbf{q})x$ , а перебор всех возможных рациональных значений  $\mathbf{q}$  приводит к дискретной совокупности точек, определяющих узлы решетки. Естественно, мы не получим такой совокупности, если  $\mathbf{L}(\mathbf{q})$  принадлежит малой группе Лоренца, оставляющей неподвижными точки  $x$ . Таким образом, для того, чтобы дискретная подгруппа группы Лоренца не содержала элементов, оставляющих векторы неподвижными, она не должна содержать дискретных подгрупп малой группы Лоренца.

В случае времениподобных векторов малой группой Лоренца является группа  $SO(3)$ , для пространственноподобных векторов – группа  $SO(1,2)$ , а для изотропных – группа, изоморфная группе движений плоскости  $E(2)$ , так как вектор-параметр можно представить в виде

$$\mathbf{q} = a_1 \mathbf{e}_1 + 2a^* \mathbf{e}^* = \langle a_1 \mathbf{e}_1, \frac{2a^*}{1+ia_1} \mathbf{e}^* \rangle, \quad (4)$$

где

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}, \quad \mathbf{e} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_2 + i\mathbf{e}_3), \quad \mathbf{e}^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_2 - i\mathbf{e}_3) \quad (5)$$

– векторы базиса, удовлетворяющие соотношениям

$$[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}] = -i\mathbf{e}, \quad [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}^*] = i\mathbf{e}^*, \quad [\mathbf{e}, \mathbf{e}^*] = -i\mathbf{e}_1; \quad (6)$$

$$\mathbf{e}_1^2 = 1, \quad \mathbf{e}^2 = (\mathbf{e}^*)^2 = 0, \quad \mathbf{e}\mathbf{e}^* = 1, \quad \mathbf{e}_1\mathbf{e} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}^* = 0, \quad (7)$$

так что

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a\mathbf{e} + a^* \mathbf{e}^*, \quad a_1 = a_1^*, \quad (8)$$

$$\mathbf{b} = b_1 \mathbf{e}_1 + b\mathbf{e} + b^* \mathbf{e}^*, \quad b_1 = 0, \quad b = ia. \quad (9)$$

Вектор-параметр  $a_1 \mathbf{e}_1$  соответствует вращению на угол  $\varphi = 2\arctg a_1$  вокруг направления  $\mathbf{x}$ , а вектор-параметр  $\frac{2a^*}{1+ia_1} \mathbf{e}^*$  соответствует трансляции в плоскости, ортогональной  $\mathbf{x}$ .

Таким образом, подгруппы группы Лоренца, не имеющие неподвижных точек, содержатся в бустах вдоль направления вектора  $\mathbf{x}$  для времениподобных и пространственноподобных векторов, образующих группы  $SO(1,1)$ . В случае изотропных векторов такие подгруппы содержатся в группе, порождаемой вектор-параметром

$$\mathbf{q} = ib\mathbf{e}_1 + c\mathbf{e} = \langle ib\mathbf{e}_1, \frac{c}{1+b} \mathbf{e} \rangle. \quad (10)$$

Вектор-параметр  $ib\mathbf{e}_1$  соответствует бустам в направлении  $\mathbf{x}$  (гиперповоротам на угол  $\psi = 2\arctg b$ ), образующим группу  $SO(1,1)$ , а вектор  $\frac{c}{1+b} \mathbf{e}$  приводит одновременно к дилатациям (различным) временной координаты и вектора  $\mathbf{x}$  и трансляциям в плоскости, ортогональной направлению оси  $\mathbf{x}$ . Обозначая эту группу через  $E(1,1)$ , можно сказать, что дискретные подгруппы изотропного вектора являются подгруппами группы  $SO(1,1) \times E(1,1)$ , где знак « $\times$ » означает полупрямое произведение.

Рассмотрим бусты  $SO(1,1)$  в направлении  $\mathbf{x}$ , которые применяются ко всем типам векторов, задаваемым вектор-параметром

$$\mathbf{q} = ib\mathbf{e}_1. \quad (11)$$

Закон композиции (2) сводится к композиции параметра  $b$ :

$$b'' = \frac{b+b'}{1+bb'}. \quad (12)$$

Здесь можно сразу увидеть по крайней мере два типа дискретных подгрупп.

1.  $b$  представляются рациональными числами  $b = m/n$ . Орбита определяется из соотношений (3)

$${}'x^0 = \frac{(n^2 + m^2)x^0 - 2mnx}{|n^2 - m^2|}, \quad {}'x = \frac{-2mnx^0 + (n^2 + m^2)x}{|n^2 - m^2|}. \quad (13)$$

2.  $b = \text{th}(\psi/2) = \text{th}\mu r$ , где  $r = m/n$  – целое или рациональное число, закон композиции для которого тривиален:  $r'' = r + r'$ ;  $0 < \mu \leq 1$  – фиксированное вещественное число, которое задает континуум дискретных подгрупп этого типа. Здесь выделяется подгруппа, когда  $r$  – целое число. Орбита задается соотношениями

$${}'x^0 = x^0 \text{ch} 2\mu r - x \text{sh} 2\mu r, \quad {}'x = -x^0 \text{sh} 2\mu r + x \text{ch} 2\mu r. \quad (14)$$

Для группы  $E(1,1)$ , задаваемой вектор-параметром

$$\mathbf{q} = d\mathbf{e} = \frac{c}{1+b}\mathbf{e}, \quad (15)$$

закон композиции (2) сводится к

$$d'' = \frac{d+d'}{1-dd'}, \text{ или } \frac{c''}{1+b''} = \frac{c(1+b') + c'(1+b)}{(1+b)(1+b') - cc'}. \quad (16)$$

Здесь также получаем два типа дискретных подгрупп.

1.  $d$  представляются рациональными числами  $d = m/n$ .

2.  $d = \operatorname{th}\mu r$ , где  $r = m/n$  – целое или рациональное число, закон композиции для которого тривиален:  $r'' = r + r'$ ;  $0 < \mu \leq 1$  – фиксированное вещественное число, задающее континуум дискретных подгрупп этого типа. Здесь выделяется подгруппа, когда  $r$  – целое число.

Для группы  $SO(1,1) \times E(1,1)$ , учитывая в (16) закон (12), получаем закон композиции для  $c$ :

$$c'' = \frac{c(1+b') + c'(1+b)}{\left[1 - \frac{cc'}{(1+b)(1+b')}\right](1+bb')}. \quad (17)$$

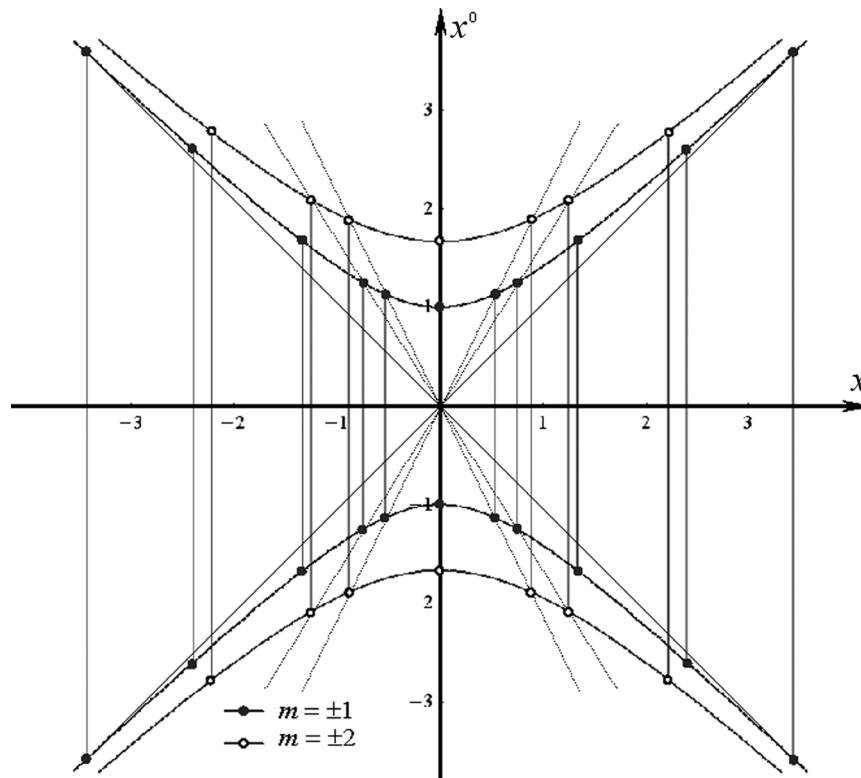
Отсюда следует, что,

1) если  $b = m/n$ , то  $c$  также рационально:  $c = p/q$ , причем  $d = \frac{k}{l} = \frac{pn}{q(m+n)}$  и

$$\frac{p''}{q''} = \frac{[pq'(n'+m') + p'q(n+m)](n+m)(n'+m')}{[qq'(n+m)(n'+m') - nn'pp'](nn' + mm')}, \quad (18)$$

2) если  $b = \operatorname{th}(\mu m/n)$ ,  $d = \operatorname{th}(vk/l)$ , то  $c = \operatorname{th}(vk/l)[1 + \operatorname{th}(\mu m/n)]$ .

Ниже на диаграмме Минковского построены узлы «времениподобной» решетки, задаваемые формулами (13), для значений  $m = \pm 1, \pm 2$  и  $-5 \leq n \leq 5$  (рисунок). Положительный знак  $m$  соответ-





ствует верхней поле двухполостного гиперboloида, отрицательный – нижней поле. «Пространственноподобная» решётка выглядит аналогичным образом, если график повернуть на  $90^\circ$ . Тогда гиперболы будут представлять сечение однополостного гиперboloида. Решетки, задаваемые формулами (14), выглядят аналогично, но координаты узлов имеют другие значения, определяемые из (14).

В заключение отметим, что хотя параметризация Ф. И. Федорова оказалась удобным инструментом для определения дискретных подгрупп, остается открытым вопрос о том, исчерпываются ли дискретные подгруппы, порождающие 1+3-мерные решетки, найденными случаями. Кроме того, возникает проблема классификации таких решеток.

Автор признателен профессору Е. А. Толкачеву за замечания и полезное обсуждение работы, что позволило улучшить ее содержание.

### Литература

1. *Potter F.* // *Progr. in Phys.* 2006. Vol. 1. P. 3–9.
2. *Макаров В. С.* Геометрические методы построения дискретных групп движений пространства Лобачевского // *Проблемы геометрии. Итоги науки и техники.* 1983. Т. 15. С. 3–59.
3. *Апанасов Б. Н.* Дискретные группы преобразований и структуры многообразий. Новосибирск, 1983.
4. *Апанасов Б. Н.* Геометрия дискретных групп и многообразий. М., 1991.
5. *Бердон А.* Геометрия дискретных групп. М., 1986.
6. *Балтаг И. А.* Методы построения дискретных групп преобразований симметрии пространства Минковского. Кишинев, 1987.
7. *Dirac P. A. M.* Discrete subgroups of the Poincaré group // *Проблемы теоретической физики. Памяти И. Е. Тамма.* М., 1972. С. 45–51.
8. *Schwarz F.* // *Lett. Nuovo Cim.* 1976. Vol. 15. P. 7–14.
9. *Белавин А. А.* // *Функцион. анализ и его прил.* 1980. Т. 14, вып. 4. С. 18–26.
10. *Федоров Ф. И.* Группа Лоренца. М., 1979.

*A. N. TARAKANOV*

### DISCRETE SUBGROUPS OF THE LORENTZ GROUP GENERATING LATTICES IN THE MINKOWSKI SPACE

### Summary

Some discrete subgroups of the Lorentz group are found using Fedorov's parametrization by means of complex vector-parameter. It is shown that the discrete subgroups of the Lorentz group, which have no fixed points, are contained in boosts along a spatial direction for time-like and space-like vectors and represent discrete subgroups of group  $SO(1,1)$ , whereas discrete subgroups of an isotropic vector are subgroups of  $SO(1,1) \times E(1,1)$ . An example of construction of nodes of 'time-like' lattice is given.

УДК 511.42

М. В. ЛАМЧАНОВСКАЯ

КОМПЛЕКСНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ЧИСЛА БОЛЬШОЙ ВЫСОТЫ  
В КРУГАХ МАЛОГО РАДИУСА*Институт информационных технологий Белорусского государственного университета  
информатики и радиоэлектроники**(Поступила в редакцию 24.10.2014)*

Алгебраические числа – корни многочленов с целыми коэффициентами – имеют сложную зависимость от коэффициентов. Задача распределения алгебраических чисел нетривиальна даже для многочленов малых степеней. В данной статье нас будет интересовать распределение действительных алгебраических чисел заданной степени и высоты. Такие задачи возникают в теории трансцендентных чисел [1] и в теории диофантовых приближений [2]. В работе [1] доказано существование алгебраических чисел произвольной степени в интервалах, длины которых уменьшаются с ростом высоты многочленов. В настоящей работе доказано несколько фактов об алгебраических числах на комплексной плоскости в кругах малого радиуса. Мы впервые получаем оценки сверху и снизу для длин интервалов, в которых существуют алгебраические числа.

Пусть  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  – неприводимый многочлен степени  $n$ . Коэффициенты многочлена – взаимно простые числа  $(a_n, a_{n-1}, \dots, a_0) = 1$ ,  $a_n > 0$ . Пусть  $\alpha$  – алгебраическое число степени  $n$ , являющееся корнем этого многочлена. Высотой алгебраического числа  $\alpha$  назовем число  $H(\alpha) = \max_{0 \leq i \leq n} |a_i|$ , равное модулю максимального коэффициента этого многочлена.

Покажем, что существуют такие интервалы,  $I, |I| = 0,5Q^{-1}$ , где  $Q \in \mathbb{N}$ ,  $Q > 1$ , в которых нет алгебраических чисел  $\alpha$ ,  $\deg \alpha = n \geq 1$  и  $H(\alpha) \leq Q$  для любого  $n$ . С другой стороны, если  $|I| > Q^{-\mu}$ ,  $\mu < \frac{1}{n}$ , то, как мы покажем в теореме 2, в любом таком интервале, при  $Q > Q_0(n)$  всегда существуют алгебраические числа произвольной степени.

Вначале рассмотрим задачу о распределении действительных алгебраических чисел.

**Т е о р е м а 1.** *В интервале  $I = (0; 0,5Q^{-1})$ ,  $|I| = 0,5Q^{-1}$  нет алгебраических чисел  $\alpha$  степени  $\deg \alpha = n \geq 1$  и  $H(\alpha) \leq Q$  для любого  $Q > 1$ .*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть действительное алгебраическое  $\alpha$  – корень неприводимого многочлена  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  с целыми коэффициентами. Если  $a_0 = 0$ , то из  $P(\alpha) = 0$  получаем  $a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + a_1 \alpha = 0$ ,  $\alpha(a_n \alpha^{n-1} + a_{n-1} \alpha^{n-2} + \dots + a_1) = 0$ .

Следовательно,  $\alpha$  – корень многочлена  $P_1(x) = a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1$  степени, не превосходящей  $n-1$ . Это противоречит условию. Поэтому коэффициент  $a_0 \neq 0$ . Значит,  $|a_0| \geq 1$ . Из равенства  $P(\alpha) = 0$  следует:

$$-a_0 = \alpha(a_n \alpha^{n-1} + a_{n-1} \alpha^{n-2} + \dots + a_1),$$

$$1 \leq |-a_0| \leq 0,5Q^{-1} \cdot Q(\alpha^{n-1} + \dots + \alpha + 1) < 0,5Q^{-1} Q \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \right) < 1.$$

Получили противоречие. Следовательно, в интервале  $I$  нет алгебраических точек никакой степени.

**Т е о р е м а 2.** Пусть задано натуральное число  $Q > 1$  и интервал  $I \subset \mathbb{R}, |I| > Q^{-\mu}$ . Тогда в интервале  $I$  существует действительное алгебраическое число  $\alpha$ ,  $\deg \alpha = n \geq 1$ ,  $H(\alpha) \leq Q$ , если  $\mu < \frac{1}{n}$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Рассмотрим число  $\alpha = \sqrt[n]{2}$ . Это число – алгебраическое,  $\deg \alpha = n$ , так как оно является корнем многочлена  $P(x) = x^n - 2$ , который неприводим по критерию Эйзенштейна [3].

Пусть  $q \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{Z}$ . Покажем, что число  $\alpha_1 = \alpha + \frac{p}{q}$  является алгебраическим и при  $q > Q^\mu$  принадлежит  $I$ . Рассмотрим многочлен  $P_1(x) = P\left(x - \frac{p}{q}\right) = \left(x - \frac{p}{q}\right)^n - 2$ . Умножим его на  $q^n$  и получим многочлен  $P_2(x) = q^n P_1(x) = q^n \left(x - \frac{p}{q}\right)^n - 2$  с целыми коэффициентами. Число  $\alpha_1 = \alpha + \frac{p}{q}$  является корнем многочлена

$$\begin{aligned} P_2(x) &= q^n P_1(x) = q^n \left( \left(x - \frac{p}{q}\right)^n - 2 \right) = q^n \left( x^n - nx^{n-1} \frac{p}{q} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} \left(\frac{p}{q}\right)^2 + \dots + \left(-\frac{p}{q}\right)^n - 2 \right) = \\ &= q^n \left( \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_n^k x^{n-k} \left(\frac{p}{q}\right)^k + \left(-\frac{p}{q}\right)^n - 2 \right). \end{aligned}$$

Оценим высоту этого многочлена:  $H(P_2) = \max_{1 \leq k \leq n} |a_k| = \max_{1 \leq k \leq n} \left| C_n^k p^k q^{n-k} \right|$ .

Рассмотрим промежуток  $I = [0, 1]$ . Пусть число  $\alpha_1 = \alpha + \frac{p}{q}$  принадлежит этому промежутку, тогда

$$0 \leq \sqrt[n]{2} + \frac{p}{q} \leq 1, \quad 0 \leq \sqrt[n]{2}q + p \leq q, \quad -\sqrt[n]{2}q \leq p \leq q - \sqrt[n]{2}q, \quad -\frac{3}{2}q < p < 0, \quad |p| < \frac{3}{2}q.$$

При такой зависимости между  $p$  и  $q$  оценка для высоты многочлена имеет вид

$$H(P_2) = \max_k |a_k| = \max_k C_n^k q^k p^{n-k} \leq 2^n q^k \left(\frac{3}{2}\right)^{n-k} q^{n-k} = q^n \cdot 2^{2n}.$$

По условию теоремы  $H(\alpha) \leq Q$ . Поэтому  $2^{2n} q^n < Q$ ,  $q < \frac{1}{4} Q^{\frac{1}{n}}$  и  $\mu < \frac{1}{n}$ .

Подобным образом можно показать, что интервалу  $I$  принадлежит и число  $\alpha_2 = \sqrt[n]{2} \cdot \frac{p}{q}$ . Оно алгебраическое, так как является корнем многочлена  $P_3(x) = q^n x^n - 2p^n$ .

Сейчас рассмотрим задачу о распределении комплексных алгебраических чисел, т. е. алгебраических чисел  $\beta$  с условием  $\text{Im} \beta \neq 0$ . Далее через  $c_1(n), c_2(n), \dots$  будем обозначать величины, зависящие только от  $n$  и не зависящие от высоты многочлена.

**Л е м м а [4].** Пусть  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  – корни многочлена  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ,  $\deg P = n$ . Тогда для любого набора различных корней  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}$ ,  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ ,  $k \leq n$ , справедливо неравенство  $|\alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_k}| < c_1(n) \frac{H(P)}{|a_n|}$ .

Заметим, что лемма точная, так как в работе [4] доказано, что всегда существует набор корней  $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_l}$ ,  $l \leq n$ , таких, что  $|\alpha_{i_1} \cdot \dots \cdot \alpha_{i_l}| > c_2(n) \frac{H}{|a_n|}$ .

**Т е о р е м а 3.** Для любого  $Q > 1$  существуют круги  $K(z_0, r)$  радиуса  $r < c_3(n)^{\frac{1}{2}} Q^{-1}$ , в которых при достаточно малой величине  $c_3(n)$  нет алгебраических  $\alpha$  степени  $\deg \alpha = n$  и высоты  $H(\alpha) < Q$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Рассмотрим многочлен  $P_1(x) = x^2 + x + 1$ , корнями которого являются числа  $\beta_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ , и многочлен  $P_2(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ,  $n \geq 3$ , с корнями  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  степени  $H(\alpha_i) < Q$ . Пусть многочлены  $P_1(x)$  и  $P_2(x)$  не имеют общих корней. Это будет всегда, если  $P_2(x)$  – неприводим и  $n \geq 3$ . Предположим, что в круге радиуса  $r = c_3(n)^{\frac{1}{2}} Q^{-1}$  существуют корни  $P_2(x)$ . Рассмотрим результат многочленов  $P_1(x)$  и  $P_2(x)$ . По определению [3]

$$R(P_1, P_2) = a_n^2 \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq 2}} |\alpha_i - \beta_j|. \quad (1)$$

Из (1) и леммы имеем

$$1 \leq |R(P_1, P_2)| = 1^n a_n^2 \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq 2}} |\alpha_i - \beta_j| \leq 1^n a_n^2 r^2 c(n) \frac{H^2}{a_n^2} < c(n) Q^2 r^2. \quad (2)$$

Если  $r < c_3(n)^{\frac{1}{2}} Q^{-1}$ , то неравенство (2) противоречиво. Следовательно, в круге  $K(z_0, r)$  нет алгебраических чисел.

**Т е о р е м а 4.** Пусть задано натуральное число  $Q > 1$  и круг  $K(z_0, r)$  радиуса  $r = Q^{-\mu}$ . В круге  $K(z_0, r)$  существует комплексное алгебраическое число  $\alpha$ ,  $\text{Im } \alpha \neq 0$ ,  $\deg \alpha = n \geq 2$ ,  $H(\alpha) \leq Q$ , если  $\mu < \frac{1}{2n}$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Рассмотрим неприводимый многочлен  $P_1(z) = z^n - 2$ . Его корни  $z_k = \sqrt[n]{2} \left( \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n} \right)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ , – алгебраические числа. Выберем  $k$  с условием  $\sin \frac{2\pi k}{n} > 0$ .

Рассмотрим множество комплексных чисел

$$S(x, y) = \left\{ z \in \mathbb{C} : I_1 = |x - \text{Re } z_0| < \frac{\sqrt{2}}{2} Q^{-\mu}, I_2 = |y - \text{Im } z_0| < \frac{\sqrt{2}}{2} Q^{-\mu} \right\}.$$

Покажем, что существует число вида  $\frac{p_1 \sqrt{2} \sin \frac{2\pi k}{n}}{q_1}$ , принадлежащее промежутку  $I_2$ . Зафиксируем  $k$  так, чтобы число  $\frac{2\pi k}{n}$  незначительно отличалось от  $\frac{\pi}{4}$ . Если  $n \geq 9$ , то возьмем  $k = \left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor$ .

Если  $n = 5, 6, 7, 8$ , то  $k = 1$ . Если  $n = 4$ , то из корней многочлена  $P_1(z) = z^4 - 2$  выберем корень

$z_1 = \sqrt[n]{2} \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$ . Если  $n = 3$ , то из корней многочлена  $P_1(z) = z^3 - 2$  выберем корень

$z_1 = \sqrt[n]{2} \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$ .

Будем для определенности считать, что все координаты точек круга  $K(z_0, r)$  находятся правее фиксированной точки  $z_k$ . Совершим переход от числа  $S_0 = \frac{p_1}{q_1} \sqrt[n]{2} \sin \frac{2\pi k}{n}$  к числу  $S_1 = \frac{p_1+1}{q_1} \sqrt[n]{2} \sin \frac{2\pi k}{n}$ . Шаг перехода от числа  $S_0$  к числу  $S_1$  равен  $St(q_1) = \frac{1}{q_1} \sqrt[n]{2} \sin \frac{2\pi k}{n} \leq \frac{3}{2q_1}$ . От числа  $S_1$  перейдем к числу  $S_2 = \frac{p_1+2}{q_1} \sqrt[n]{2} \sin \frac{2\pi k}{n}$  и т. д. до тех пор, пока мнимая часть числа  $z_k$  не станет принадлежать промежутку  $I_2$ . Таким образом, мы продвигаемся к  $\text{Im } z_0$  с шагом, не большим  $\frac{3}{2q_1}$ . Если  $\frac{3}{2q_1} < \sqrt{2}Q^{-\mu}$ , то  $q_1 > \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} Q^\mu = \frac{\sqrt{2}}{3} Q^\mu$ . Ясно, что найдется такое число  $l$ , что  $S_l = \frac{p_1+l}{q_1} \sqrt[n]{2} \sin \frac{2\pi k}{n} \in I_2$ .

Рассмотрим многочлен  $P_2(z) = \left(\frac{q_1}{p_1} z\right)^n - 2$ . Обозначим  $u = \frac{q_1}{p_1} z$ . Корни многочлена  $P_2(z)$  равны

$$u_k = \sqrt[n]{2} \left( \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

$$z_k = \frac{p_1}{q_1} u_k = \sqrt[n]{2} \frac{p_1}{q_1} \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sqrt[n]{2} \frac{p_1}{q_1} \sin \frac{2\pi k}{n},$$

где  $\text{Im } z_k \in I_2$ .

Перейдем к многочлену  $P_3(z) = \left(\frac{q_1}{p_1} \left(z - \frac{p_2}{q_2}\right)\right)^n - 2$ . Найдем корни этого многочлена:

$$\left(\frac{q_1}{p_1} \left(z - \frac{p_2}{q_2}\right)\right)^n - 2 = 0, \quad \left(z - \frac{p_2}{q_2}\right)^n = 2 \frac{p_1^n}{q_1^n}, \quad z - \frac{p_2}{q_2} = \sqrt[n]{2} \frac{p_1}{q_1} \left( \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n} \right).$$

Получим, что  $z_k = \sqrt[n]{2} \frac{p_1}{q_1} \cos \frac{2\pi k}{n} + \frac{p_2}{q_2} + i \sqrt[n]{2} \frac{p_1}{q_1} \sin \frac{2\pi k}{n}$ .

Выберем число  $\frac{p_2}{q_2}$  так, чтобы действительная часть числа  $z_k$  принадлежала промежутку  $I_1$ , т. е.

$\sqrt[n]{2} \frac{p_1}{q_1} \cos \frac{2\pi k}{n} + \frac{p_2}{q_2} \in I_1$ . Для этого будем переходить от числа  $\frac{p_2}{q_2}$  к числу  $\frac{p_2+1}{q_2}$  с шагом  $\frac{1}{q_2} < \sqrt{2}Q^{-\mu}$ .

Тогда  $q_2 > \sqrt{2}Q^\mu$ ,  $q_2 > \frac{3}{2}Q^\mu$ .

Умножим многочлен  $P_3(z)$  на  $p_1^n q_2^n$  и получим многочлен  $P_4(z) = p_1^n q_2^n P_3(z)$  с целыми коэффициентами.

Оценим высоту этого многочлена.

$$H(P_4) = c_4(n) p_1^n q_2^n,$$

где  $q_1 > \frac{3}{2}Q^\mu$ ,  $q_2 > \frac{3}{2}Q^\mu$ .

Поэтому  $H(P_4) = c_4(n) p_1^n q_2^n \geq Q^{2\mu n}$ . С другой стороны, по условию теоремы  $H(\alpha) < Q$ , т. е.

$Q^{2\mu n} \leq H(P_4) \leq Q$ . Откуда и следует утверждение теоремы:  $\mu < \frac{1}{2n}$ .

## Литература

1. *Schmidt W. M.* T-numbers do exist // Symposia Math. IV. Inst. Naz. di Alta Math. Rome, 1968. London, 1970. P. 3–26.
2. *Спринджук В. Г.* Проблема Малера в метрической теории чисел. Минск, 1967.
3. *Варден Б. Л. ван дер.* Алгебра. М., 1979.
4. *Фельдман Н. И.* // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1951. Т. 15 (1). С. 53–74.

*M. V. LAMCHANOVSKAYA*

### COMPLEX ALGEBRAIC NUMBERS OF LARGE HEIGHT IN THE CIRCLES OF SMALL RADIUS

#### Summary

It is shown that on the real line and in the complex plane there are intervals  $I$  of short length and circles  $K$  of small radius within which there are no algebraic numbers of small height. If the length of the intervals and the radius of the circles increase, then it is already possible to obtain nontrivial estimates for the number of algebraic numbers in  $I$  and in  $K$ .

УДК 517.926.4+517.928.2

М. В. КАРПУК

## О СТАРШЕМ ПОКАЗАТЕЛЕ ЛЯПУНОВА ЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С ПАРАМЕТРОМ-МНОЖИТЕЛЕМ КАК ФУНКЦИИ ПАРАМЕТРА

Институт математики НАН Беларуси

(Поступила в редакцию 19.11.2014)

**Введение.** Рассмотрим  $n$ -мерную ( $n \geq 2$ ) линейную систему дифференциальных уравнений

$$dx/dt = A(t)x, \quad x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

матрица коэффициентов  $A(\cdot): [0, +\infty) \rightarrow \text{End } \mathbb{R}^n$  которой кусочно-непрерывна на временной полуоси  $t \geq 0$ . Класс всех таких систем обозначим через  $M_n^*$ . Мы будем отождествлять систему (1) и ее матрицу коэффициентов и, вследствие этого, например, писать  $A \in M_n^*$ . Наряду с системой (1) рассмотрим порожденное ею однопараметрическое семейство

$$dx/dt = \mu A(t)x, \quad x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

линейных дифференциальных систем со скалярным параметром-множителем  $\mu \in \mathbb{R}$ . Класс семейств (2), порождаемых системами  $A \in M_n^*$ , обозначим через  $K_n^*$ . Фиксируя в семействе (2) значение параметра  $\mu$ , получаем линейную дифференциальную систему, которую ниже обозначаем через  $\langle \mu \rangle_A$ . Через  $\lambda_1(\mu A) \leq \dots \leq \lambda_n(\mu A)$  обозначим показатели Ляпунова [1, с. 34; 2, с. 63] системы  $\langle \mu \rangle_A$ .

В. И. Зубов в монографии [3, с. 408; проблема 1] поставил задачу выяснить, как изменяются показатели Ляпунова системы (1) после умножения на постоянную величину  $\mu$  всех ее коэффициентов, т. е. как связаны показатели Ляпунова систем (1) и (2). Подчеркнем, что в [3] в постановке задачи ограниченность матрицы коэффициентов системы (1) не предполагается. Поэтому, вообще говоря, показатель  $\lambda_i(\mu A)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , может принимать несобственные значения:  $-\infty$  или  $+\infty$ ; следовательно, функция  $\lambda_i(\mu A)$  переменной  $\mu \in \mathbb{R}$ , которую назовем  $i$ -м показателем Ляпунова семейства (2), — это функция  $\mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , где  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ .

Другими словами, задача Зубова может быть равносильным образом сформулирована так: для каждого  $i = 1, \dots, n$  дать полное описание множества  $\mathcal{L}_i^n \stackrel{\text{def}}{=} \{\lambda_i(\mu A) : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \mid A \in M_n^*\}$  функций, представляющих собой  $i$ -е показатели Ляпунова семейств из  $K_n^*$ .

В настоящей работе получено решение задачи Зубова для старшего показателя Ляпунова  $\lambda_n(\mu A)$  в предположении, что он не равен тождественно  $+\infty$  ни на одной из числовых полуосей.

Отметим, что аналогичная задача для семейств линейных дифференциальных систем

$$dx/dt = A(t, \mu)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \quad (3)$$

матрица  $A(t, \mu): [0; +\infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathbb{R}^n$  которых при каждом фиксированном  $\mu \in \mathbb{R}$  ограничена на временной полуоси  $t \geq 0$  и непрерывна по совокупности переменных, решена в [4]: для каждого фиксированного  $i = 1, \dots, n$  функция  $\lambda(\cdot): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  представляет собой  $i$ -й показатель Ляпунова некоторого семейства (3), рассматриваемый как функция переменной  $\mu \in \mathbb{R}$ , если и только если она является функцией класса  $(*, G_\delta)$ , имеющей полунепрерывную сверху миноранту. В работе [4]

доказано, что это утверждение имеет место в существенно более общей ситуации – для показателей Ляпунова семейств морфизмов расслоений Миллионщикова.

Эта общая теорема о показателях Ляпунова семейств (3) к семействам (2) неприменима, если даже ограничиться случаем ограниченных на временной полуоси матриц коэффициентов систем (1) – в этом случае она дает только необходимое условие принадлежности функции классу  $\mathcal{L}_j^n$ . Тем более она неприменима в ситуации неограниченных коэффициентов систем (1), поскольку в этом случае области значений показателей Ляпунова различны. На первый взгляд представляется правдоподобным, что столь сложная зависимость показателей Ляпунова семейств (3) от параметра, которая представлена в приведенном выше утверждении, является следствием нелинейной зависимости матрицы коэффициентов семейства от параметра и что для семейств (2), зависимость которых от параметра предельно проста, их показатели Ляпунова не должны иметь сложную дескриптивную природу. Тем не менее в настоящей работе показывается, что по меньшей мере для старшего показателя Ляпунова семейств из  $K_n^*$  это не так.

**1. Предварительные результаты.** Чтобы точнее представить содержание работы, докажем вначале две леммы.

**Л е м м а 1.** *Если при некотором  $\mu_0 \neq 0$  система  $\langle \mu_0 \rangle_A$  семейства (2) имеет неположительный старший показатель Ляпунова (возможно, равный  $-\infty$ ), то при любом  $\mu$ , принадлежащем той полуоси, которая не содержит точки  $\mu_0$ , старший показатель Ляпунова системы  $\langle \mu \rangle_A$  неотрицателен.*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Согласно неравенству Ляпунова [1, с. 37; 2, с. 72], имеем

$$S(\mu_0) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \text{Sp}(\mu_0 A(\tau)) d\tau \leq \lambda_1(\mu_0 A) + \dots + \lambda_n(\mu_0 A) \leq n\lambda_n(\mu_0 A).$$

Легко видеть, что неравенство  $S(\mu_0) \leq n\lambda_n(\mu_0 A)$  верно и в случае несобственных значений показателей. По предположению леммы  $\lambda_n(\mu_0 A) \leq 0$ , следовательно, и  $S(\mu_0) \leq 0$ . Поэтому для любого  $\mu$  такого, что  $\mu_0 < 0$ , получаем

$$S(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \text{Sp}(\mu A(\tau)) d\tau = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\mu}{\mu_0} \frac{1}{t} \int_0^t \text{Sp}(\mu_0 A(\tau)) d\tau = \frac{\mu}{\mu_0} \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \text{Sp}(\mu_0 A(\tau)) d\tau \geq 0.$$

Поэтому для таких  $\mu$  верно неравенство  $n\lambda_n(\mu A) \geq S(\mu) \geq 0$ , откуда  $\lambda_n(\mu A) \geq 0$ . Лемма 1 доказана.

**Л е м м а 2.** *Если при некотором  $\mu_0 \neq 0$  старший показатель Ляпунова системы  $\langle \mu_0 \rangle_A$  семейства (2) конечен и равен  $\lambda \in \mathbb{R}$ , то при любом  $\mu \in \mathbb{R}$ , принадлежащем той полуоси, которая не содержит точки  $\mu_0$ , для старшего показателя Ляпунова системы  $\langle \mu \rangle_A$  верно неравенство  $\lambda_n(\mu A) \geq \lambda\mu / \mu_0$ .*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Обозначим матрицу  $\tilde{A}(t) = A(t) - \lambda\mu_0^{-1}E_n$ ,  $t \geq 0$ , где  $E_n$  – единичная матрица размера  $n \times n$ . Фундаментальные матрицы  $X(t)$  системы  $\langle \mu \rangle_A$  и  $Y(t)$  системы  $\langle \mu \rangle_{\tilde{A}}$  связаны формулой  $Y(t) = X(t)\exp(-\lambda\mu / \mu_0)$ . Следовательно, при всех  $\mu \in \mathbb{R}$  справедливо равенство  $\lambda_n(\mu\tilde{A}) = \lambda_n(\mu A) - \lambda\mu / \mu_0$ . Учитывая, что  $\lambda_n(\mu_0 A) = \lambda$ , получаем равенство  $\lambda_n(\mu_0\tilde{A}) = 0$ . Следовательно, к  $\mu_0$  и семейству систем  $\langle \mu \rangle_{\tilde{A}}$  применима лемма 1, из которой вытекает, что при любом  $\mu$ , принадлежащем той полуоси, которая не содержит точки  $\mu_0$ , верно неравенство

$$\lambda_n(\mu A) = \lambda_n(\mu\tilde{A}) + \lambda\mu / \mu_0 \geq \lambda\mu / \mu_0.$$

Лемма 2 доказана.

**2. Бэровская характеристика показателей Ляпунова.** Теорема, доказанная в этом разделе, дает необходимое условие, которому удовлетворяют показатели Ляпунова  $\lambda_n(\mu A)$ ,  $A \in M_n^*$ .

Следуя [5, с. 221], лебеговские множества  $f^{-1}([r, +\infty))$ ,  $f^{-1}((r, +\infty))$  и  $f^{-1}((-\infty, r))$  вещественнозначной функции  $f$ , т. е. прообразы при отображении  $f$  промежутков  $[r, +\infty)$ ,  $(r, +\infty)$  и  $(-\infty, r)$ , будем



обозначать через  $[f \geq r]$ ,  $[f > r]$  и  $[f < r]$  соответственно. Напомним, что вещественнозначная функция  $f$  называется [5, с. 223–224] функцией класса  $(*, G_\delta)$ , если для каждого  $r \in \mathbb{R}$  ее лебеговское множество  $[f \geq r]$  является  $G_\delta$ -множеством. Множество в топологическом пространстве называется  $G_\delta$ -множеством, если оно представимо в виде счетного пересечения открытых в этом пространстве множеств. Функция  $f$  называется [5, с. 223–224] функцией класса  $(G, *)$ , если для каждого  $r \in \mathbb{R}$  ее лебеговское множество  $[f > r]$  является открытым множеством. Считаем также, что в  $\overline{\mathbb{R}}$  задана естественная (порядковая) топология, так что  $\overline{\mathbb{R}}$  гомеоморфно отрезку  $[-1, 1]$ . Введем ограничивающее преобразование  $\ell: \overline{\mathbb{R}} \rightarrow [-1, 1]$  стандартным образом:

$$\ell(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|+1} & \text{при } x \in \mathbb{R}, \\ \text{sgn}(x) & \text{при } x = \pm\infty. \end{cases}$$

Поскольку отображение  $\ell$  осуществляет сохраняющий порядок гомеоморфизм между  $\overline{\mathbb{R}}$  и отрезком  $[-1, 1]$ , то будем говорить, что функция  $f: \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  принадлежит бэровскому классу  $K$ , если этому же классу принадлежит и композиция  $\ell \circ f$ .

**Т е о р е м а 1.** *Для любой системы  $A \in M_n^*$  функция  $\lambda_n(\mu A): \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  аргумента  $\mu$  принадлежит классу  $(*, G_\delta)$ .*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Отображение  $\ell$  непрерывно, следовательно, оно перестановочно с операциями предельного перехода, а значит, отображение  $\ell \circ \lambda_n$  можно преобразовать следующим образом:

$$\ell \circ \lambda_n(\mu A) = \ell\left(\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} \ln \|X_{\mu A}(t)\|\right) = \ell\left(\lim_{s \rightarrow +\infty} \sup_{t \geq s} t^{-1} \ln \|X_{\mu A}(t)\|\right) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \sup_{t \geq s} \ell(t^{-1} \ln \|X_{\mu A}(t)\|). \quad (4)$$

По теореме о непрерывной зависимости решения от параметра функция  $t^{-1} \ln \|X_{\mu A}(t)\|$  аргумента  $\mu$  непрерывна (при любом фиксированном  $t$ ). Следовательно, функция  $\varphi_s(\mu) = \sup_{t \geq s} \ell(t^{-1} \ln \|X_{\mu A}(t)\|)$  – супремум континуального параметризованного числом  $t \geq 0$  семейства непрерывных функций, а значит, согласно [5, с. 237], является функцией класса  $(G, *)$ . Получаем семейство  $\{\varphi_s(\mu)\}_{s \in \mathbb{R}}$  функций аргумента  $\mu$ , параметризованное вещественным параметром  $s \in \mathbb{R}$ , по которому совершается предельный переход в последнем выражении равенства (4). Заметим, что при любом фиксированном значении  $\mu$  последовательность значений этих функций является невозрастающей функцией от  $s$ . Следовательно, формулу (4) можно переписать в виде

$$\ell \circ \lambda_n(\mu A) = \lim_{s \rightarrow +\infty, s \in \mathbb{Q}} \varphi_s(\mu),$$

откуда, согласно [5, с. 227], следует, что отображение  $\ell \circ \lambda_n(\mu A)$  является функцией класса  $(*, G_\delta)$ . Теорема 1 доказана.

**3. Описание показателей на полуоси.** Из утверждений теоремы 1 и леммы 1 следует, что каждая функция из  $\mathcal{L}_n^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , принадлежит классу  $(*, G_\delta)$  и хотя бы на одной из полуосей неотрицательна. Теорема этого пункта устанавливает, что любая функция  $\mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  класса  $(*, G_\delta)$ , неотрицательная на какой-либо полуоси, может быть реализована как сужение на эту полуось некоторого показателя Ляпунова из  $\mathcal{L}_n^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

**Т е о р е м а 2.** *Для любой функции  $f(\cdot): \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  класса  $(*, G_\delta)$ , принимающей только неотрицательные значения на некоторой полуоси, существует такая система  $A \in M_n^*$ , что старший показатель Ляпунова системы  $\langle \mu \rangle_A$  как функция вещественного аргумента  $\mu$  совпадает с  $f(\cdot)$  на этой полуоси.*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Не ограничивая общности, будем считать, что  $f(\cdot)$  неотрицательна на интервале  $[0, +\infty)$  (случай  $(-\infty; 0]$  аналогичен). Нам потребуются некоторые дополнительные построения, которые мы будем выписывать как отдельные пункты.

**3.1.** Для построения нужного семейства (2) воспользуемся конструкцией работ [6, 7]. Эту конструкцию, поскольку она существенно используется в дальнейших построениях, мы сейчас опишем, дополнив необходимыми нам вычислениями. Зафиксируем какие-либо кусочно-непрерывные  $2 \times 2$ -матрицу  $B(\cdot)$  и функцию  $\omega(\cdot)$  и возьмем матрицу  $A(\cdot)$  системы (1), где  $n = 2$ , в виде:

$$A(t) = U^{-1}(t)B(t)U(t) - U^{-1}(t)dU(t)/dt, \quad t \geq 0, \quad (5)$$

здесь  $U(t)$  – матрица поворота на угол  $\varphi(t) = \int_0^t \omega(\tau) d\tau$  по ходу часовой стрелки (не нарушая общности, считаем ортонормальную систему координат  $Ox_1x_2$  правой). Сделав в семействе (2) с матрицей  $A(\cdot)$ , задаваемой равенством (5), линейную замену переменных  $y = U(t)x$ , придем, как легко убедиться, к следующему семейству:

$$dy/dt = \mu B(t)y + (1 - \mu)\omega(t) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} y \equiv C_{B,\omega}(t, \mu)y, \quad y \in \mathbb{R}^2, \quad t \geq 0. \quad (6)$$

Так как матрица  $U(t)$  является при каждом  $t \geq 0$  ортогональной, то замена переменных  $y = U(t)x$  не изменяет нормы решений, а значит, показатели Ляпунова системы  $\langle \mu \rangle_A$  семейства (2) с матрицей (5) и системы  $\langle \mu \rangle_C$  семейства (6) равны. Таким образом, построение нужной двумерной системы (1) сводится к построению соответствующих матрицы  $B(\cdot)$  и функции  $\omega(\cdot)$ , что значительно проще.

Матрицу  $C_{B,\omega}(\cdot; \mu)$  семейства (6) (т. е. матрицу  $B(\cdot)$  и функцию  $\omega(\cdot)$ ) будем строить на временной полуоси  $t \geq 0$  как кусочно-постоянную, составленную из специально подобранных матриц определяемого ниже трехпараметрического семейства матриц.

Рассмотрим следующее трехпараметрическое семейство  $2 \times 2$ -матриц:

$$D(\mu; p) = \begin{pmatrix} \mu a & \mu(b - c) + c \\ -\mu(b - c) - c & -\mu a \end{pmatrix}, \quad (7)$$

зависящее от трех вещественных параметров  $a, b, c$  (составленный из них вектор  $(a, b, c)^T$  обозначим через  $p$ ) и переменной  $\mu \in \mathbb{R}$ . Характеристический многочлен  $P(\cdot; \mu, p)$  матрицы  $D(\mu; p)$ , как легко убедиться, равен  $P(v; \mu, p) = v^2 + ((b - c)^2 - a^2)\mu^2 + 2c(b - c)\mu + c^2$ . Поэтому его корни  $v_{1,2}$  отличаются только знаком и оба в зависимости от  $\mu \in \mathbb{R}$  либо чисто мнимые, либо вещественные. Очевидно, что корни  $v_{1,2}$  будут вещественными, если и только если

$$R(\mu; p) \stackrel{\text{def}}{=} (a^2 - (b - c)^2)\mu^2 - 2c(b - c)\mu - c^2 \geq 0. \quad (8)$$

Для тех  $\mu$  и  $p$ , при которых выполнено неравенство (8), через  $v_2(\mu; p)$  обозначим не меньший корень характеристического многочлена  $P(\cdot; \mu, p)$ , т. е.  $v_2(\mu; p) = R^{1/2}(\mu; p)$ .

Каковы бы ни были вещественные числа  $r$  и  $s$  ( $r < s$ ) одного знака (в частности, ненулевые), в качестве параметров  $a, b$  и  $c$ , при которых множество вещественных решений  $\mu$  неравенства (8) совпадает с отрезком  $[r, s]$ , можно взять следующий набор параметров:

$$a = \eta(s - r), \quad b = \eta(2rs - s - r), \quad c = 2\eta rs, \quad (9)$$

где  $\eta \in \mathbb{R}$  – любая ненулевая постоянная (в этом легко убедиться непосредственно, подставляя (9) в (8), раскладывая левую часть на множители и учитывая, что  $-4\eta^2 rs < 0$ ). Ниже всегда при выборе тех параметров  $a, b, c$ , при которых множество  $\mu \in \mathbb{R}$  решений неравенства (8) – отрезок  $[r, s]$ , считаем, что эти параметры задаются равенствами (9), выбор постоянной  $\eta$  в которых опишем ниже. Вектор  $p = (a, b, c)^T$ , в котором параметры  $a, b, c$  заданы равенствами (9), обозначим через  $p(r, s; \eta)$ .

Нам понадобятся дополнительные, отличные от [7] оценки корня многочлена  $P(\cdot; \mu, p)$ . Не меньший его действительный корень  $v_2$  равен

$$v_2(\mu; p) = \eta \sqrt{-4rs\mu^2 + 4(r+s)rs\mu - 4r^2s^2}.$$

Максимум этой функции (переменной  $\mu$ ) достигается в середине интервала  $(r, s)$  – точке  $(r+s)/2$  – и равен  $\eta(s-r)\sqrt{rs}$ .

Пусть теперь заданы положительные числа  $q$  и  $\varepsilon$ . Выберем  $\eta$  таким, чтобы  $q + \varepsilon = \eta(s-r)\sqrt{rs}$ , и найдем значение  $\delta > 0$ , при котором  $v_2(\cdot; p)$ , где  $p = p(r, s; \eta)$ , принимает значения из промежутка  $[q, q + \varepsilon]$  в точности на отрезке  $[2^{-1}(r+s) - \delta, 2^{-1}(r+s) + \delta]$ . После несложных преобразований получаем

$$\delta = \sqrt{\frac{\varepsilon(2(s-r)\sqrt{rs} - \varepsilon/\eta)}{4rs\eta}} = \frac{(s-r)}{2} \frac{\sqrt{\varepsilon(2q + \varepsilon)}}{q + \varepsilon}.$$

Обозначим множитель  $\sqrt{\varepsilon(2q + \varepsilon)} / (q + \varepsilon)$  через  $\alpha(q, \varepsilon)$ . Легко видеть, что  $0 \leq \alpha(q, \varepsilon) \leq 1$ .

**3.2.** Воспользуемся полученным в работе [4] специальным представлением множеств Лебега функций. Функция  $f$ , как и любая вещественнозначная функция, однозначно определяется [5, с. 221] своими лебеговскими множествами  $[f \geq q_w]$ , где  $(q_w)_{w \in \mathbb{N}}$  – множество рациональных чисел, занумерованных каким-либо фиксированным образом. Так как  $f$  – функция класса  $(*, G_\delta)$ , то ее лебеговское множество  $[f \geq q]$  для любого  $q \in \mathbb{R}$  является  $G_\delta$ -множеством, а значит, представимо в виде счетного пересечения открытых множеств. Пусть для  $q = q_w$  это представление имеет вид

$$[f \geq q_w] = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \tilde{\Gamma}_w^i, \text{ где } \tilde{\Gamma}_w^1 \supset \tilde{\Gamma}_w^2 \supset \dots \supset \tilde{\Gamma}_w^i \supset \dots \quad (10)$$

(цепочку включений в (10) считаем выполненной без нарушения общности).

Представления (10) ввиду большого произвола в выборе открытых множеств  $\tilde{\Gamma}_w^i$  неудобны для дальнейшего. Поэтому от этого представления, несколько изменив множества  $\tilde{\Gamma}_w^i$ , перейдем к новому представлению, обладающему важным дополнительным свойством, которое описывает формулируемая ниже лемма 3 из работы [4].

Для каждого  $w \in \mathbb{N}$  через  $\Theta(w)$  обозначим конечное множество, состоящее из тех натуральных чисел  $j < w$ , для которых  $q_j < q_w$ , и определим множество

$$\Gamma_w^i = \left( \bigcap_{m \in \Theta(w)} \tilde{\Gamma}_m^{i+w} \right) \cap \tilde{\Gamma}_w^i, \quad i \in \mathbb{N}, \quad w \in \mathbb{N}. \quad (11)$$

Определенные равенством (11) множества  $\Gamma_w^i$ , очевидно, открыты и, как показывает следующая лемма, обладают как свойством, аналогичным (10), так и еще одним важным дополнительным свойством.

**Л е м м а 3** [4]. *При всех  $w \in \mathbb{N}$  верно представление*

$$[f \geq q_w] = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \Gamma_w^i, \text{ где } \Gamma_w^1 \supset \Gamma_w^2 \supset \dots \supset \Gamma_w^i \supset \dots$$

*Кроме того, каждая точка  $b \in B$ , не принадлежащая множеству  $[f \geq q_w]$ , принадлежит не более чем конечному количеству множеств  $\Gamma_j^i$ , где  $i \in \mathbb{N}$  и  $j \in \mathbb{N}$ , такое, что  $q_j \geq q_w$ .*

Поскольку нам важны значения на положительной полуоси, то пересечем все множества в равенстве леммы 3 с открытым множеством  $(0, +\infty)$ , при этом получим равенство

$$[f \geq q_w] \cap (0, +\infty) = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} (\Gamma_w^i \cap (0, +\infty)), \text{ где } \Gamma_w^1 \supset \Gamma_w^2 \supset \dots \supset \Gamma_w^i \supset \dots \quad (12)$$

Обозначим для удобства множества  $G_w^i = \Gamma_w^i \cap (0, +\infty)$ .

Построим теперь представление самих открытых множеств  $G_w^i$  в виде, которым будем пользоваться в дальнейшем. Каждое открытое множество  $G_w^i$  вещественной оси является объединением непересекающихся интервалов  $G_w^i = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_w^i(k)$ .

Определим функцию  $\varepsilon(w, i)$  равенством  $\varepsilon(w, i) = (w^2 + i^2)^{-2}$  (на самом деле нам достаточно, чтобы она стремилась к нулю при стремлении  $w$  и  $i$  к  $+\infty$ ).

По заданному значению  $\varepsilon(w, i)$  интервал  $I_w^i(k)$  представим в виде объединения специально подобранных конечных интервалов  $I_w^i(k) = \bigcup_{l \in \mathbb{Z}} \Delta_w^i(k, l)$ , причем случаи конечных и бесконечных интервалов  $I_w^i(k)$  рассмотрим отдельно, для краткости обозначив  $\alpha(q_w, \varepsilon(w, i)) = \alpha$ .

*Случай 1.* Интервал  $I_w^i(k)$  конечен и равен  $(r, s)$ . Тогда пусть  $\Delta_w^i(k, 0) = (r, s)$ . При  $l \in \mathbb{N}$  будем строить интервалы последовательно так, что левый конец интервала  $\Delta_w^i(k, l)$  совпадает с точкой  $r$ , а длина  $|\Delta_w^i(k, l)|$  равна  $|\Delta_w^i(k, l-1)| \cdot (1-\alpha) / (1+\alpha)$ . При  $-l \in \mathbb{N}$  будем строить интервалы последовательно так, что правый конец интервала  $\Delta_w^i(k, l)$  совпадает с точкой  $s$ , а длина  $|\Delta_w^i(k, l)|$  равна  $|\Delta_w^i(k, l+1)| \cdot (1-\alpha) / (1+\alpha)$ .

*Случай 2.* Интервал  $I_w^i(k)$  бесконечен и равен  $(r, +\infty)$ . Тогда пусть  $\Delta_w^i(k, 0) = (r, r+1)$ . При  $l \in \mathbb{N}$ , как и в случае 1, будем строить интервалы последовательно так, чтобы левый конец  $\Delta_w^i(k, l)$  совпадал с  $r$ , а длина  $|\Delta_w^i(k, l)|$  равнялась  $|\Delta_w^i(k, l-1)| \cdot (1-\alpha) / (1+\alpha)$ . При  $-l \in \mathbb{N}$  положим  $\Delta_w^i(k, l) = (r-l\alpha, r+1-l\alpha)$ .

Присоединяя к интервалу  $\Delta_w^i(k, l)$  его концы, получаем отрезок, который будем обозначать  $\overline{\Delta_w^i(k, l)}$ .

Зафиксируем какую-нибудь биекцию  $o: \mathbb{N} \rightarrow U$ , где множество  $U \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$  — множество всевозможных четверок  $(w, i, k, l)$  индексов, при которых определены интервалы  $\Delta_w^i(k, l)$ . Каждое натуральное число  $m$  однозначно задает четверку индексов  $(w, i, k, l) = o(m)$ , для упрощения записи будем писать  $q(m)$ ,  $\varepsilon(m)$ ,  $\Delta(m)$  вместо  $q_w$ ,  $\varepsilon(w, i)$ ,  $\Delta_w^i(k, l)$ . По заданным  $q(m), \varepsilon(m)$  и отрезку  $[r, s] = \overline{\Delta(m)}$ , согласно п. 3.1, однозначно определяется значение  $\eta$ , которое задает вектор  $p(m) = p(r, s; \eta)$ . Пусть  $v_2(\mu; m)$  обозначает функцию аргумента  $\mu$ , равную  $v_2(\mu; p(m))$  на отрезке  $\overline{\Delta(m)}$ , которую доопределим как тождественно нулевую на  $\mathbb{R} \setminus \overline{\Delta(m)}$ , причем коэффициенты  $a$ ,  $b$ ,  $c$  вектора  $p(m)$  в этом случае тоже для удобства будем обозначать  $a(m)$ ,  $b(m)$ ,  $c(m)$ .

Основное для нас свойство построенных интервалов  $\Delta_w^i(k, l)$  состоит в том, что при фиксированных  $w, i, k$  каждая точка множества  $I_w^i(k)$  принадлежит конечному числу из них, и, кроме того, при подстановке в функции  $v_2(\cdot, p)$ , соответствующие интервалам  $\Delta_w^i(k, l)$  при всевозможных целых  $l$ , принимает значения из отрезка  $[q_w, q_w + \varepsilon(w, i)]$  не более двух раз.

**3.3. Построение требуемой системы.** Построим вначале двумерную систему  $A \in M_2^*$ , такую, что старший коэффициент Ляпунова системы  $\langle \mu \rangle_A$ , как функция вещественного аргумента  $\mu$ , совпадает с  $f(\cdot)$  при всех  $\mu \in [0, +\infty)$ . Чтобы не загромождать построения, эту систему строим вначале кусочно-непрерывной, затем подправим ее до бесконечно дифференцируемой системы с тем же старшим показателем. Построение системы  $A$ , согласно разд. 1 работы, сводим к построению соответствующих  $2 \times 2$ -матрицы  $B(\cdot)$  и функции  $\omega(\cdot)$  семейства (5), т. е. матрицы  $C_{B, \omega}(\cdot, \mu)$ . Построение пары  $(B(\cdot), \omega(\cdot))$  будем вести индукцией по шагам. На  $k$ -м шаге ( $k \in \mathbb{N}$ ) эта пара будет строиться на некотором полуинтервале  $(T_k, T_{k+1}]$ , и на следующих шагах их значения на этом полуинтервале уже изменяться не будут. Сама последовательность  $(T_k)_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$  будет выбрана в следующем пункте, пока же предполагаем только, что  $(T_k)_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \nearrow +\infty$ . Чтобы иметь базу индукции, сделаем нулевой шаг, на котором положим  $T_0 = 0$ ,  $T_1 = 1$ , а  $B(t) \equiv O_2$  и  $\omega(t) \equiv 0$  при  $t \in [0, 1]$ . Пусть сделано  $k-1$  шагов, т. е. матрица  $B(t)$  и функция  $\omega(t)$  определены при всех  $t \in [0, T_k]$ . Сделаем  $k$ -й шаг.

Введем обозначение  $T_k' = (T_k + T_{k+1}) / 2$  для всех  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Пару  $(B(\cdot), \omega(\cdot))$  зададим на полуинтервале  $(T_k, T_{k+1}]$  равенствами:

$$B(t) = \begin{pmatrix} a(k) & b(k) \\ -b(k) & -a(k) \end{pmatrix} \text{ при } t < T_k' \text{ и } B(t) = \begin{pmatrix} -a(k) & -b(k) \\ b(k) & a(k) \end{pmatrix} \text{ при } t \geq T_k',$$

$$\omega(t) = c(k) \text{ при } t < T_k' \text{ и } \omega(t) = -c(k) \text{ при } t \geq T_k'. \quad (13)$$

Эти построения задают матрицу  $B(\cdot)$  и функцию  $\omega(\cdot)$  при всех  $t \geq 0$ . Матрицу  $C_{B, \omega}(t, \mu)$  семейства (6) с построенными матрицей  $B(t)$  и функцией  $\omega(t)$  обозначим через  $C(t, \mu)$ , через  $\langle \mu \rangle_C$  – систему  $\langle \mu \rangle$  этого семейства, а через  $X_\mu(\cdot, \cdot)$  – матрицу Коши системы  $\langle \mu \rangle_C$ . Согласно равенствам (6), (7) и (13), матрица  $C(\cdot, \cdot)$  кусочно-постоянна на временной полуоси и при всех  $k \in \mathbb{N}$  справедливы равенства

$$C(t, \mu) = D(\mu; p(k)), \text{ если } t \in [T_k, T_k'),$$

$$C(t, \mu) = -D(\mu; p(k)), \text{ если } t \in [T_k', T_{k+1}). \quad (14)$$

До конца доказательства  $A(\cdot)$  обозначает матрицу, связанную с построенными матрицей  $B(\cdot)$  и функцией  $\omega(\cdot)$  равенством (5).

**3.4. Вычисление старшего показателя.** Покажем, что можно так задать последовательность  $(T_k)_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ , чтобы старший показатель Ляпунова построенного семейства совпадал с функцией  $f(\cdot)$  на всей положительной полуоси.

Докажем, что для всех  $\mu \in (0, +\infty)$  справедливо равенство

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} v_2(\mu, k) = f(\mu). \quad (15)$$

Выберем возрастающую последовательность рациональных чисел  $(q_{w_i})_{i \in \mathbb{N}} \nearrow f(\mu)$ . Тогда, по определению функций  $v_2$ , найдется последовательность натуральных чисел  $(m_i)_{i \in \mathbb{N}}$ , для которой  $v_2(\mu, m_i) \in [q_{w_i}, q_{w_i} + \varepsilon(w_i)]$  хотя бы один раз при каждом  $i \in \mathbb{N}$ . Это означает, что справедливо неравенство  $\overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} v_2(\mu, k) \geq f(\mu)$ .

Для завершения доказательства осталось показать, что для любого  $\varepsilon > 0$  существует не более, чем конечное количество индексов  $m$  таких, что

$$v_2(\mu, m) \geq f(\mu) + \varepsilon. \quad (16)$$

Оценим сверху количество таких  $m$ . Выберем номер  $w \in \mathbb{N}$ , для которого выполнено двойное неравенство  $f(\mu) \leq q_w < f(\mu) + \varepsilon$ . Тогда  $\mu \notin [f \geq q_w]$ , а значит, по лемме 3 точка  $\mu$  может принадлежать лишь конечному количеству множеств  $G_i^m$ , где  $m \in \mathbb{N}$ , а  $q_i > q_w$ . Но каждая точка множества  $G_i^m$  принадлежит не более, чем конечному количеству интервалов  $\Delta_i^m(k, l)$  по построению этих интервалов. Следовательно, при всех  $i \in \mathbb{N}$ , при которых  $q_i > q_w$  неравенство (16) выполняется не более, чем конечное количество раз.

Остались еще номера  $i \in \mathbb{N}$ , для которых  $q_i \leq q_w$ . Начиная с некоторого номера  $J$ , все члены последовательности  $(\varepsilon(j))_{j \in \mathbb{N}}$  будут меньше, чем положительное число  $f(\mu) + \varepsilon - q_w$ , а значит, и максимум функции  $v_2(\mu; m)$  будет не больше, чем  $q_w$  при всех  $m \in \mathbb{N}$ , таких, что  $o(m) = (i, \dots)$ ,  $m \geq J$ ,  $q_i \leq q_w$ . И в этом случае получили, что неравенство (16) выполняется не более, чем конечное количество раз. Равенство (15) доказано.

По построению системы показатель  $\lambda_2(\mu A)$  будет вычисляться как верхний предел величин  $v_2(\mu; k)(t - T_k) / t$ , где  $t \in [T_k, T_k']$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Понятно, что максимум этих величин достигается в середине отрезков  $[T_k, T_{k+1}]$ , откуда получается формула  $\lambda_2(\mu A) = \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} v_2(\mu; k) T_k' / (T_k + T_k')$ . Потребуем теперь, чтобы  $T_k' / T_k \rightarrow +\infty$  при  $k \rightarrow +\infty$ , тогда  $\lim_{k \rightarrow +\infty} T_k' / (T_k + T_k') = 1$ , и, следовательно, верно равенство

$$f(\mu) = \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} v_2(\mu; k) = \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} v_2(\mu; k) T_k' / (T_k + T_k') = \lambda_2(\mu A). \quad (17)$$

**3.5. Построение бесконечно дифференцируемой системы.** Для завершения доказательства подправим систему, построенную в п. 3.1–3.4, до бесконечно дифференцируемой с тем же показателем  $\lambda_2(\mu A)$ . Для этого подправим кусочно-постоянные функции  $a(t)$ ,  $b(t)$ ,  $c(t)$  до бесконечно дифференцируемых так, чтобы при всех вещественных  $\mu$  старший показатель Ляпунова системы  $\langle \mu \rangle_C$  не изменился.

Докажем вначале одно вспомогательное утверждение. Пусть имеется некоторая система  $C \in M_n^*$ . Покажем, что если существует такая  $n \times n$ -матрица  $Q(t)$ ,  $t \geq 0$ , что  $\sup_{0 \leq \tau \leq t} \|C(\tau)\| = h(t)$ ,

$\sup_{0 \leq \tau \leq t} \|C(\tau) + Q(\tau)\| = h(t)$  и сходится несобственный интеграл  $\int_0^{+\infty} \|Q(\tau)\| \exp\left(2 \int_0^\tau h(s) ds\right) d\tau$  (обозначим его  $L$ ), то для любых фундаментальных матриц  $Y(\cdot)$  системы  $\langle \mu \rangle_C$  и  $Z(\cdot)$  системы

$$\dot{z} = (C(t) + Q(t))z, \quad z \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0 \quad (18)$$

найдутся положительные постоянные  $c_0$  и  $c_1$ , для которых  $c_0 \|Y(t)\| \leq \|Z(t)\| \leq c_1 \|Y(t)\|$  при всех  $t \geq 0$ .

Действительно, так как  $Z(t) = Y(t)(Y^{-1}(0)Z(0) + \int_0^t Y^{-1}(\tau)Q(\tau)Z(\tau)d\tau)$ ,  $t \geq 0$ , а  $\|Y^{-1}(t)\| \leq c \exp(h(t))$  и  $\|Z(t)\| \leq c \exp(h(t))$  при всех  $t \geq 0$ , где  $c$  – некоторая постоянная, то  $\|Z(t)\| \leq \|Y(t)\| (\|Y^{-1}(0)Z(0)\| + c^2 L)$ , что и доказывает правое из нужных неравенств. Поменяв в этих рассуждениях системы  $\langle \mu \rangle_C$  и (18) местами, получим левое неравенство. Следовательно, у систем  $C$  и  $C + Q$  совпадают старшие показатели Ляпунова.

Пусть  $\langle \mu \rangle_C$  – система, построенная в п. 3.1–3.4 доказательства. По построению матрица  $C(t, \mu)$  системы является кусочно-постоянной, значит, она ограничена на каждом числовом промежутке  $[0, t]$  и корректно определена функция  $h(t, \mu) = \sup_{0 \leq \tau \leq t} \|C(\tau, \mu)\|$ . При фиксированном  $t > 0$  множество коэффициентов  $a, b, c$  матрицы  $C(\tau, \mu)$ ,  $0 \leq \tau \leq t$ , – конечный набор троек, для которых обозначим  $g(t) = \max(|a|, |b - c|, |c|)$ , где максимум берется по всем этим тройкам. По определению  $h(t, \mu)$  получаем неравенство  $h(t, \mu) \leq g(t)(|\mu| + 1)$ .

Рассмотрим последовательность точек  $(\tau_k)_{k \in \mathbb{N}}$  такую, что  $\tau_{2k-1} = T_k$ ,  $\tau_{2k} = T_k'$  при всех натуральных  $k$  (подчеркнем, что эта последовательность не зависит от  $\mu$ ). Тогда матрица  $B(\cdot)$  и функция  $\omega(\cdot)$  могут иметь точки разрыва только среди  $(\tau_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , следовательно, и множество точек разрыва матрицы  $C(t, \mu)$  содержится среди  $(\tau_k)_{k \in \mathbb{N}}$ . Для каждой точки  $\tau_k$  возьмем на временной полуоси отрезок  $d_k = [\tau_k, \tau_k']$  с началом в этой точке и длины  $\|d_k\| = \tau_k' - \tau_k = k^{-2} g(\tau_{k+1})^{-1} \exp(-k \tau_k g(\tau_{k+1}))$ ,  $k \in \mathbb{N}$  (если найдутся пересекающиеся отрезки или отрезки длиннее 1, то их длину просто уменьшим произвольным образом так, чтобы новые отрезки не пересекались). Для кусочно-постоянной функции  $a(t)$  определим измененную функцию стандартным образом:

$$\tilde{a}(t) = \begin{cases} a(t), & \text{если } t \in [0, +\infty) \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{N}} d_k, \\ \psi((t - \tau_k) / \|d_k\|) a(\tau_k) + \psi((\tau_k' - t) / \|d_k\|) a(\tau_k'), & \text{если } t \in d_k, \quad k \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (19)$$

где  $k \in \mathbb{N}$ , а  $\psi(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  – какая-либо бесконечно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям  $\psi(0) = 1$ ,  $\psi(1) = 0$  и  $\psi^{(m)}(0) = \psi^{(m)}(1) = 0$  при всех  $m \in \mathbb{N}$ . Очевидно, что у функции  $\tilde{a}(\cdot)$  существуют все частные производные любого порядка. Определим аналогичным образом функции  $\tilde{b}(t)$  и  $\tilde{c}(t)$ .

Заменим теперь в системе  $\langle \mu \rangle_A$  коэффициенты  $a(t)$ ,  $b(t)$ ,  $c(t)$  коэффициентами  $\tilde{a}(t)$ ,  $\tilde{b}(t)$ ,  $\tilde{c}(t)$  и полученную систему обозначим через  $\langle \mu \rangle_{\tilde{A}}$ . Покажем, что утверждение, сформулированное в начале этого пункта, можно применить к соответствующим системам  $C(t, \mu)$  и  $\tilde{C}(t, \mu)$ . Заметим, что

при всех  $\mu \in \mathbb{R}$  по определению  $\tilde{C}(t, \mu)$  верно равенство  $\sup_{0 \leq \tau \leq t} \|C(\tau, \mu)\| = \sup_{0 \leq \tau \leq t} \|\tilde{C}(\tau, \mu)\| = h(t, \mu)$ . Остается доказать сходимость интеграла  $\int_0^{+\infty} \|Q(\tau, \mu)\| \exp\left(2 \int_0^\tau a(s, \mu) ds\right) d\tau$ , где  $Q(\tau, \mu) = \tilde{C}(\tau, \mu) - C(\tau, \mu)$ . Из определения функций  $\tilde{a}(t)$ ,  $\tilde{b}(t)$ ,  $\tilde{c}(t)$  и линейности коэффициентов матрицы  $Q(\tau, \mu)$  по  $\mu$  следует неравенство  $\|Q(\tau, \mu)\| \leq 2h(\tau, \mu) \leq 2g(\tau)(|\mu| + 1)$ .

Теперь сходимость интеграла  $\int_0^{+\infty} \|Q(\tau, \mu)\| \exp\left(2 \int_0^\tau h(s, \mu) ds\right) d\tau$  следует из сходимости ряда

$$2 \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{\tau_k}^{\tau_k'} g(\tau_k') (|\mu| + 1) \exp\left(2 \int_0^\tau h(s, \mu) ds\right) d\tau. \quad (20)$$

Оценим каждое слагаемое сверху:

$$\int_{\tau_k}^{\tau_k'} \exp\left(2 \int_0^\tau h(s, \mu) ds\right) d\tau \leq k^{-2} g(\tau_{k+1})^{-1} \exp(2(\tau_k' g(\tau_k') (|\mu| + 1) - \tau_k g(\tau_{k+1}) k)),$$

учитывая, что из определения  $\tau_k'$  вытекает неравенство  $g(\tau_k') \leq g(\tau_{k+1})$ , получаем, что при всех  $k$ , начиная с некоторого номера, выполняется неравенство  $\tau_k' g(\tau_k') (|\mu| + 1) - \tau_k g(\tau_{k+1}) k \leq \tau_k' (|\mu| + 1) - \tau_k k < 0$ , т. е., начиная с некоторого номера, ряд (20) будет мажорироваться сходящимся рядом  $2(|\mu| + 1) \sum_{k=1}^{+\infty} k^{-2}$ . Следовательно, утверждение из начала пункта применимо к системам  $C(t, \mu)$  и  $\tilde{C}(t, \mu)$ , т. е. мы построили бесконечно дифференцируемую систему с той же зависимостью старшего показателя от параметра-множителя. Для построения  $n$ -мерной системы ( $n \geq 3$ ), удовлетворяющей условиям теоремы 2, достаточно дополнить построенную  $2 \times 2$ -матрицу  $A(\cdot)$  нулями. Теорема 2 доказана.

Отметим, что из конструкции следует, что старший показатель Ляпунова построенной системы на полуоси  $(-\infty, 0]$  всегда равен нулю.

**4. Описание показателя.** Теоремы этого раздела дают полное описание старшего показателя Ляпунова системы (2) как функции параметра-множителя при дополнительном предположении о конечности этого показателя в точке на полуоси.

**Теорема 3.** Для любой системы  $A \in M_n^*$  функция  $\lambda_n(\mu A) : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  аргумента  $\mu$  принадлежит классу  $(*, G_\delta)$ , обращается в нуль в нуль, принимает на одной из числовых полуосей только неотрицательные значения. Кроме того, если среди этих неотрицательных значений есть хотя бы одно конечное, то найдется такое вещественное число  $b \in \mathbb{R}$ , что при всех  $\mu \in \mathbb{R}$  верно неравенство  $\lambda_n(\mu A) \geq b\mu$ .

**Доказательство.** Утверждение о принадлежности старшего показателя классу  $(*, G_\delta)$  установлено в теореме 1. Утверждение о том, что  $\lambda_n(0 \cdot A) = 0$  очевидно, так как в этом случае матрица  $\langle \mu \rangle_A$  тождественно равна нулевой. Неотрицательность старшего показателя на одной из числовых полуосей (обозначим ее  $L$ ) доказана в лемме 1. Из предположения теоремы следует, что существует вещественное число  $b = \inf_{\mu \in L} \lambda_n(\mu A) / |\mu|$ . Если  $L = (-\infty, 0]$ , то возьмем число  $b$  с противоположным знаком. Теперь последнее утверждение теоремы следует из леммы 2 и выбора числа  $b$ . Теорема 3 доказана.

Утверждение теоремы 3 обратимо, как показывает следующая

**Теорема 4.** Для любой функции  $f(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  класса  $(*, G_\delta)$ , обращающейся в нуль в нуль, принимающей только неотрицательные значения на некоторой полуоси и при всех  $\mu \in \mathbb{R}$  удовлетворяющей неравенству  $f(\mu) \geq b\mu$  для некоторого числа  $b \in \mathbb{R}$ , существует такая система  $A \in M_n^*$ , что старший показатель Ляпунова системы  $\langle \mu \rangle_A$ , как функция вещественного аргумента  $\mu$  совпадает с  $f(\cdot)$ .

**Доказательство.** Рассмотрим функцию  $\tilde{f}(\mu) = f(\mu) - b\mu$ , так как вычитание непрерывной функции  $b\mu$  сохранит принадлежность классу  $(*, G_\delta)$ , то из неравенства  $f(\mu) \geq b\mu$  следует, что к функции  $\tilde{f}(\cdot)$  применима конструкция теоремы 2. Применим к  $\tilde{f}(\cdot)$  конструкцию теоремы 2, несколько изменив ее. А именно, в равенстве (12) будем пересекать множества не с открытым интервалом  $(0, +\infty)$ , а с открытым множеством  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  (в п. 3.2 существенно лишь то, что концы отрезков  $[r, s]$  одного знака, а случай 2 этого пункта для интервалов вида  $(-\infty, r)$  рассматривается аналогично). Таким образом, найдется система  $\tilde{A} \in M_n^*$ , что старший показатель Ляпунова системы  $\langle \mu \rangle_{\tilde{A}}$ , как функция вещественного аргумента  $\mu$  совпадает с  $\tilde{f}(\cdot)$ . Осталось заметить, что из доказательства леммы 2 следует, что, если обозначить  $A = \tilde{A} + bE_n$ , старший показатель Ляпунова системы  $\langle \mu \rangle_A$ , как функция вещественного аргумента  $\mu$  совпадает с  $f(\cdot)$ .

Автор выражает благодарность своему научному руководителю Е. А. Барабанову за постановку задачи и внимание, проявленное к работе.

## Литература

1. Ляпунов А. М. Собр. соч: в 6 т. М.; Л., 1956. Т. 2.
2. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М., 1966.
3. Зубов В. И. Колебания и волны. Л., 1989.
4. Карпук М. В. // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50, № 10. С. 1332–1338.
5. Хаусдорф Ф. Теория множеств. М.; Л., 1937.
6. Барабанов Е. А. // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45, № 8. С. 1067–1084.
7. Барабанов Е. А. // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46, № 5. С. 611–625.

*M. V. KARPUK*

### LARGEST LYAPUNOV EXPONENT OF THE LINEAR DIFFERENTIAL SYSTEM WITH A PARAMETER-MULTIPLIER AS A FUNCTION OF PARAMETER

#### Summary

The largest Lyapunov exponents of linear differential systems  $dx/dt = \mu A(t)x$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \geq 0$ , with a real parameter-multiplier as a function of the parameter are considered. It is proved that the largest Lyapunov exponent is a function of a Baire class  $(*, G_\delta)$ , which vanishes at zero and satisfies one of the two cases: 1) it exceeds the linear function; 2) it is equal to the plus infinity on some real semi-axis. In the first case, the sufficiency of the given necessary conditions is proved.



УДК 517.925

В. В. АМЕЛЬКИН, М. Н. ВАСИЛЕВИЧ

**ПОСТРОЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ФУКСА С ЧЕТЫРЬМЯ КОНЕЧНЫМИ ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ И ЗАДАННОЙ ПРИВОДИМОЙ ГРУППОЙ МОНОДРОМИИ**

*Белорусский государственный университет*

*(Поступила в редакцию 24.10.2014)*

Пусть  $X = \mathbb{C}\mathbb{P}^1$  – комплексная проективная прямая,  $\alpha_j, j = \overline{1, n}$ , – произвольные точки на прямой  $X$ ,  $\bar{M} = \bigcup_{j=1}^n \alpha_j$ . На открытом множестве  $M = X \setminus \bar{M}$  рассмотрим уравнение Фукса

$$dY = \left( \sum_{j=1}^n \frac{U_j}{x - \alpha_j} \right) Y dx, \quad (1)$$

где  $Y$  – квадратная матрица порядка  $m$ ;  $U_j$  –  $m \times m$ -матрицы-вычеты уравнения, удовлетворяющие условию

$$\sum_{j=1}^n U_j = 0. \quad (2)$$

Согласно теореме о сумме вычетов, условие (2) означает, что точки  $x = \infty$  нет среди особых точек матричного уравнения (1), чего всегда можно добиться конформным преобразованием  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ .

Пусть  $x_0$  – отмеченная точка открытого множества  $M$ . Обозначим через  $\Phi_{x_0}(x)$  фундаментальную матрицу решений уравнения (1), нормированную в точке  $x_0$ , через  $[\gamma_j]$  класс гомотопных замкнутых петель  $\gamma_j$ , выходящих из точки  $x_0$  и охватывающих точку  $\alpha_j, j = \overline{1, n}$ . Классы гомотопных петель порождают фундаментальную группу  $\pi_1(M, x_0)$  открытого множества (многообразия)  $M$ . Матрица  $\Phi_{x_0}^j(x)$ , полученная из матрицы  $\Phi_{x_0}(x)$  аналитическим продолжением вдоль петли  $\gamma_j$ , представляется в виде  $\Phi_{x_0}^j(x) = \Phi_{x_0}(x)V_j$ , где  $V_j$  – квадратная постоянная матрица порядка  $m$ . Постоянные матрицы  $V_j$ , называемые матрицами монодромии, будем задавать так, чтобы выполнялось соотношение

$$\prod_{j=1}^n V_j = E, \quad (3)$$

где  $E$  – единичная матрица.

При выполнении условия (3) невырожденные матрицы  $V_j$  порождают мультипликативную группу, которая является подгруппой общей линейной группы  $GL(m; \mathbb{C})$  и называется группой монодромии [1].

С матрицами монодромии  $V_j \in GL(m; \mathbb{C}), j = \overline{1, n}$ , связаны посредством соотношений  $V_j = e^{2\pi i W_j}$  квадратные матрицы  $W_j$ , которые называют показательными матрицами монодромии и которые играют определяющую роль в решаемой ниже задаче.

Пусть задан гомоморфизм

$$\chi : \pi_1(M, x_0) \rightarrow GL(m; \mathbb{C}) \quad (4)$$

фундаментальной группы многообразия  $M$  в мультипликативную группу  $GL(m; \mathbb{C})$  невырожденных комплекснозначных матриц порядка  $m$ .

Гомоморфизм (4) называют монодромией или представлением монодромии уравнения (1).

В работе [1] доказано, что для любого набора точек  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  при  $n > 3$  и любого  $m \geq 3$  найдется такая монодромия (4), для которой не существует реализующего ее уравнения Фукса. Доказано также, что для любых трех точек  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  и любой монодромии (4) размерности  $m = 3$  существует уравнение (1), (2), реализующее заданную монодромию.

Обратимся к случаю  $n = 4, m = 2$ , т. е. рассмотрим уравнение

$$dY = \left( \sum_{j=1}^4 \frac{U_j}{x - \alpha_j} \right) Y dx, \quad (5)$$

где  $Y$  – квадратная матрица порядка 2,  $U_j$  – постоянные (не зависящие от  $x$ )  $2 \times 2$ -матрицы, удовлетворяющие условию (2) при  $n = 4$ .

В этом случае, как отмечалось в статье [2], из результатов работы [3] вытекает существование уравнения (5), (2) с заданными особыми точками  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ , фундаментальная матрица решений которого реализует заданный гомоморфизм (4).

Обозначим

$$A = 2\alpha_2\alpha_3 - \alpha_1(\alpha_2 + \alpha_3), \quad B = \alpha_1(\alpha_3 - \alpha_2), \quad C = \alpha_2 + \alpha_3 - 2\alpha_1, \quad D = \alpha_3 - \alpha_2,$$

считая, что  $A - \alpha_j C \neq 0, j = \overline{1, 4}$ .

**Т е о р е м а 1.** Уравнение (5) с конечными особыми точками  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  приводится дробно-линейным преобразованием

$$x = \frac{Az + B}{Cz + D}, \quad AD - BC \neq 0, \quad (6)$$

к уравнению

$$dY = \left( \frac{U_1}{z} + \frac{U_2}{z-1} + \frac{U_3}{z+1} + \frac{U_4}{z-\alpha} \right) Y dz \quad (7)$$

с особыми точками  $\bar{\alpha}_1 = 0, \bar{\alpha}_2 = 1, \bar{\alpha}_3 = -1, \bar{\alpha}_4 = \alpha$ , где

$$\alpha = \frac{\alpha_4 D - B}{A - \alpha_4 C}.$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Если в уравнении (5) сделать замену (6), то

$$dY = \left( \sum_{j=1}^4 \frac{U_j}{z(A - \alpha_j C) + B - \alpha_j D} \right) \frac{AD - BC}{Cz + D} Y dz. \quad (8)$$

Замечая тогда, что

$$\frac{U_j(AD - BC)}{(z(A - \alpha_j C) + B - \alpha_j D)(Cz + D)} = \frac{(A - \alpha_j C)U_j}{z(A - \alpha_j C) + B - \alpha_j D} - \frac{CU_j}{Cz + D},$$

приходим к выводу, что поскольку должно выполняться равенство (2) ( $n = 4$ ), то уравнение (8) принимает вид

$$dY = \left( \sum_{j=1}^4 \frac{U_j}{z - \frac{\alpha_j D - B}{A - \alpha_j C}} \right) Y dz. \quad (9)$$

Полагая в (9)

$$\bar{\alpha}_j = \frac{\alpha_j D - B}{A - \alpha_j C},$$

получаем  $\bar{\alpha}_1 = 0, \bar{\alpha}_2 = 1, \bar{\alpha}_3 = -1, \bar{\alpha}_4 = \alpha$ , что и требовалось доказать.

Напомним далее, что набор матриц  $B_j, j = \overline{1, n}$ , называется приводимым, если все эти матрицы могут быть одновременно приведены к верхнетреугольному виду одним линейным невырожденным преобразованием.

**З а д а ч а** [4; 5, с. 59]. Заданы некоммутативные приводимые показательные матрицы монодромии второго порядка  $W_j, j = \overline{1, 4}$ , собственные значения которых всегда можно считать равными  $\xi_j, 0$ , такие, что  $-1 < \xi_j < 0, j = \overline{1, 3}, \xi_4 = 1$ . Требуется построить матричное дифференциальное уравнение (7), фундаментальная матрица решений которого в окрестности особых точек  $\bar{\alpha}_j, j = \overline{1, 3}, \alpha$  имеет соответственно вид

$$\Phi^j(z) = \Phi_j^*(z)(z - \bar{\alpha}_j)^{W_j}, \quad j = \overline{1, 3}, \quad \Phi^4(z) = \Phi_4^*(z)(z - \alpha)^{\Lambda_0} (z - \alpha)^N,$$

где  $\Phi_j^*(z), \Phi_4^*(z)$  – голоморфно обратимы в особых точках,  $\Lambda_0$  – диагональная матрица, а  $N$  – нильпотентная матрица. Здесь матрицы  $U_j$  надо найти как функции  $W_j, j = \overline{1, 4}$ , и выявить природу этих функций.

**З а м е ч а н и е 1.** В сформулированной задаче точка нормирования фундаментальной матрицы решений – это  $z_0 = \infty$ .

Считая теперь, что матрицы  $W_j, j = \overline{1, 3}$ , уже приведены к верхнетреугольному виду, их можно для определенности рассматривать в виде

$$W_j = \begin{pmatrix} \xi_j & \mu_j \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1, 3}. \quad (10)$$

А тогда

$$V_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & v_j \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1, 3}, \quad V_4 = \begin{pmatrix} 1 & v_4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

где

$$\lambda_j = e^{2\pi i \xi_j}, \quad v_j = \frac{\mu_j}{\xi_j} (\lambda_j - 1), \quad j = \overline{1, 3}, \quad v_4 = - \left( \frac{v_1}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} + \frac{v_2}{\lambda_2 \lambda_3} + \frac{v_3}{\lambda_3} \right).$$

Далее, поскольку собственные значения матриц  $W_j$  и матриц-вычетов уравнения (7) совпадают [6, с. 159], то матрицы  $U_j, j = \overline{1, 3}$ , в уравнении (7) представимы [4] в виде

$$U_j = \begin{pmatrix} \xi_j & \theta_j \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1, 3}. \quad (12)$$

Что же касается матрицы  $U_4$ , то ее всегда можно привести к виду

$$U_4 = \begin{pmatrix} \xi_4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

что мы и будем считать выполненным.

А в таком случае из условия (2) при  $n = 4$  следует, что

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + 1 = 0, \quad \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 0. \quad (14)$$

*Теорема 2. Если в матрицах (12) соответственно  $\theta_1 = 2c\alpha$ ,  $\theta_2 = -c(\alpha - 1)$ ,  $\theta_3 = -c(\alpha + 1)$ , где  $c$  – произвольная вещественная или комплексная постоянная, то уравнение (7) вполне интегрируемо.*

*Доказательство.* Уравнение (7) вполне интегрируемо тогда и только тогда, когда [7, с. 41] дифференциальная 1-форма

$$\omega = \left( \frac{U_1}{z} + \frac{U_2}{z-1} + \frac{U_3}{z+1} + \frac{U_4}{z-\alpha} \right) dz$$

удовлетворяет условию

$$d\omega = \omega \wedge \omega, \quad (15)$$

где  $\wedge$  – оператор внешнего дифференцирования.

Из соотношения (15) для матриц-вычетов уравнения (7) получаем тогда равенства

$$\begin{aligned} dU_1 &= [U_2, U_1] d \ln(0-1) + [U_3, U_1] d \ln(0+1) + [U_4, U_1] d \ln(0-\alpha), \\ dU_2 &= [U_1, U_2] d \ln(1-0) + [U_3, U_2] d \ln(1+1) + [U_4, U_2] d \ln(1-\alpha), \\ dU_3 &= [U_1, U_3] d \ln(-1-0) + [U_2, U_3] d \ln(-1-1) + [U_4, U_3] d \ln(-1-\alpha), \\ dU_4 &= [U_1, U_4] d \ln(\alpha-0) + [U_2, U_4] d \ln(\alpha-1) + [U_3, U_4] d \ln(\alpha+1), \end{aligned}$$

где  $[U_j, U_k]$  – матричный коммутатор, которые можно переписать в виде

$$\begin{aligned} dU_1 &= [U_4, U_1] \frac{d\alpha}{\alpha}, \quad dU_2 = [U_4, U_2] \frac{d\alpha}{\alpha-1}, \quad dU_3 = [U_4, U_3] \frac{d\alpha}{\alpha+1}, \\ dU_4 &= [U_1, U_4] \frac{d\alpha}{\alpha} + [U_2, U_4] \frac{d\alpha}{\alpha-1} + [U_3, U_4] \frac{d\alpha}{\alpha+1}. \end{aligned} \quad (16)$$

Учитывая представление матриц (12), (13), из матричных уравнений (16) получим скалярные уравнения

$$d\theta_1 = \theta_1 \frac{d\alpha}{\alpha}, \quad d\theta_2 = \theta_2 \frac{d\alpha}{\alpha-1}, \quad d\theta_3 = \theta_3 \frac{d\alpha}{\alpha+1}, \quad \frac{\theta_1}{\alpha} + \frac{\theta_2}{\alpha-1} + \frac{\theta_3}{\alpha+1} = 0. \quad (17)$$

Последнее соотношение в (17) и второе равенство в (14) означают, что

$$\theta_2 = -\frac{\alpha-1}{2\alpha} \theta_1, \quad \theta_3 = -\frac{\alpha+1}{2\alpha} \theta_1, \quad (18)$$

а интегрирование первых трех уравнений в (17) приводит к равенствам

$$\theta_1 = c_1 \alpha, \quad \theta_2 = c_2 (\alpha - 1), \quad \theta_3 = c_3 (\alpha + 1), \quad (19)$$

где  $c_1, c_2, c_3$  – произвольные постоянные.

Полагая  $c_1 = 2c$ , из (18) и (19) находим, что  $c_2 = c_3 = -c$ , а это и доказывает теорему 2.

Обозначим

$$U = \frac{U_1}{z} + \frac{U_2}{z-1} + \frac{U_3}{z+1} + \frac{U_4}{z-\alpha},$$

где матрицы  $U_j$ ,  $j = \overline{1, 4}$ , имеют соответственно вид (12), (13).

Очевидно, что матрицу  $U$  можно представить и так:

$$U = \begin{pmatrix} u_1(z) & u_2(z) \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$u_1(z) = \frac{\xi_1}{z} + \frac{\xi_2}{z-1} + \frac{\xi_3}{z+1} + \frac{1}{z-\alpha}, \quad u_2(z) = \frac{\theta_1}{z} + \frac{\theta_2}{z-1} + \frac{\theta_3}{z+1}.$$

Пусть

$$h(z) = z^{\xi_1} (z-1)^{\xi_2} (z+1)^{\xi_3} (z-\alpha).$$

Рассмотрим матрицу

$$Y(z) = \begin{pmatrix} y_1(z) & y_2(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (20)$$

где

$$y_1(z) = h(z), \quad y_2(z) = h(z) \int \frac{u_2(z)}{h(z)} dz.$$

*Лемма.* Матрица (20) является фундаментальной матрицей уравнения (7).

*Доказательство.* С учетом обозначений

$$y_1'(z) = u_1(z)y_1(z), \quad y_2'(z) = u_1(z)y_2(z) + u_2(z).$$

А в таком случае

$$\begin{aligned} Y'(z) &= \begin{pmatrix} y_1'(z) & y_2'(z) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1(z)y_1(z) & u_1(z)y_2(z) + u_2(z) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} u_1(z) & u_2(z) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(z) & y_2(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = UY, \end{aligned}$$

что и доказывает лемму.

*Теорема 3.* Если выполняется первое равенство в (14), то фундаментальная матрица (20) уравнения (7) имеет заданные матрицы монодромии в представлении (4) при  $t = 2$ .

*Доказательство.* Так как матрицы монодромии (11) задаются в виде  $V_j = e^{2\pi i W_j}$ ,  $j = \overline{1, 4}$ , то при найденной фундаментальной матрице (20) уравнения (7), которая в нерезонансном случае представляется в окрестности особых точек  $\bar{\alpha}_j$ ,  $j = \overline{1, 3}$ , в виде

$$\Phi^j(z) = \Phi_j^*(z)(z - \bar{\alpha}_j)^{W_j}, \quad j = \overline{1, 3},$$

где  $\Phi_j^*(z)$  – голоморфная в окрестности особой точки  $z = \bar{\alpha}_j$  матрица, матрицы  $W_j$  – это матрицы (10), а в резонансном случае – это матрица

$$\Phi^4(z) = \Phi_4^*(z)(z - \alpha)^{\Lambda_0} (z - \alpha)^N,$$

где  $\Phi_4^*(z)$  – голоморфная в окрестности особой точки  $z = \alpha$  матрица, матрицы  $\Lambda_0$  и  $N$  имеют соответственно вид

$$\Lambda_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\nu_4}{2\pi i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то в нерезонансном случае при обходе переменной  $z$  вокруг особых точек  $\bar{\alpha}_k$ ,  $k = \overline{1, 3}$ , фундаментальная матрица умножается [4] справа на матрицу  $V_k = e^{2\pi i W_k}$ . В резонансном случае при обходе переменной  $z$  вокруг особой точки  $\alpha$  получаем матрицу

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}^4(z) &= \Phi_4^*(z) (\rho e^{i\varphi + 2\pi i})^{\Lambda_0} (\rho e^{i\varphi + 2\pi i})^N = \Phi_4^*(z) (\rho e^{i\varphi})^{\Lambda_0} e^{2\pi i \Lambda_0} (\rho e^{i\varphi})^N e^{2\pi i N} = \\ &= \Phi_4^*(z) (z - \alpha)^{\Lambda_0} e^{2\pi i} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (z - \alpha)^N e^{2\pi i} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\nu_4}{2\pi i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \Phi_4^*(z) (z - \alpha)^{\Lambda_0} \begin{pmatrix} e^{2\pi i} & 0 \\ 0 & e^0 \end{pmatrix} (z - \alpha)^N \left( E + 2\pi i \begin{pmatrix} 0 & \frac{\nu_4}{2\pi i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \Phi_4^*(z) (z - \alpha)^{\Lambda_0} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (z - \alpha)^N \begin{pmatrix} 1 & \nu_4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \Phi_4^*(z) (z - \alpha)^{\Lambda_0} (z - \alpha)^N V_4. \end{aligned}$$

Заканчивает доказательство теоремы 3 ссылка на то, что матрицу  $V_4$  можно записать в виде

$$V_4 = e^{2\pi i W_4}, \quad \text{где } W_4 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\nu_4}{2\pi i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**З а м е ч а н и е 2.** Можно показать (на чем мы не будем останавливаться из-за ограниченного объема статьи), что голоморфные матрицы  $\Phi_j^*(z)$  представимы в виде

$$\Phi_j^*(z) = \begin{pmatrix} y_{1j}(z) & y_{2j}(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1, 3},$$

где

$$\begin{aligned} y_{11}(z) &= \xi_1(z-1)^{\xi_2}(z+1)^{\xi_3}(z-\alpha), & y_{12}(z) &= \xi_2 z^{\xi_1}(z+1)^{\xi_3}(z-\alpha), & y_{13}(z) &= \xi_3 z^{\xi_1}(z-1)^{\xi_2}(z-\alpha); \\ y_{21}(z) &= \frac{1}{\xi_1}(\varphi_{21} + \mu_1 y_{11}), & y_{22}(z) &= \frac{1}{\xi_2}(\varphi_{22} + \mu_2 y_{12}), & y_{23}(z) &= \frac{1}{\xi_3}(\varphi_{23} + \mu_3 y_{13}), \end{aligned}$$

а

$$\varphi_{2j} = \xi_j h(z) \int \frac{u_2(z)}{h(z)} dz,$$

и, в соответствии с теоремой 2,  $u_2 = \frac{2c(z-\alpha)}{z(z^2-1)}$ .

Что же касается голоморфной матрицы  $\Phi_4^*(z)$ , то

$$\Phi_4^*(z) = \Phi^4(z) (z - \alpha)^{-N} (z - \alpha)^{-\Lambda_0},$$

где матрица  $\Phi^4(z)$  – это матрица (20).

## Литература

1. *Болибрух А. А.* // Успехи мат. наук. 1990. Т. 45, вып. 2. С. 3–47.
2. *Болибрух А. А.* // Современные проблемы математики. 2003. № 1. С. 29–82.
3. *Dekkers W.* // Lecture Notes in Math. 1979. Vol. 712. P. 33–43.
4. *Еругин Н. П.* // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 5. С. 779–799.
5. *Итс А. Р., Капаев А. А., Новокишенов В. Ю., Фокас А. С.* Трансценденты Пенлеве. Метод задачи Римана. М.; Ижевск, 2005.
6. *Лаппо-Данилевский И. А.* Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1957.
7. *Амелькин В. В.* Автономные и линейные многомерные дифференциальные уравнения. М., 2010.

*V. V. AMEL'KIN, M. N. VASILEVICH*

### **CONSTRUCTION OF THE FUCHS EQUATION WITH FOUR FINITE CRITICAL POINTS AND A GIVEN REDUCIBLE GROUP OF MONODROMY**

#### **Summary**

One inverse problem of the analytic theory of linear differential equations is considered. Namely, the Fuchs equation with four critical points and a given reducible monodromy group of dimensionality 2 is constructed.

УДК 519.6

В. Б. МАЛЮТИН

**ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ПО СПИНОВЫМ ПЕРЕМЕННЫМ  
 ОТ ФУНКЦИОНАЛОВ, СОДЕРЖАЩИХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УДАЛЕННЫХ УЗЛОВ**

*Институт математики НАН Беларуси*

*(Поступила в редакцию 06.11.2014)*

**Введение.** Существуют разнообразные типы функциональных интегралов, обусловленные разнообразием пространств, мер и способом их задания [1–4]. В данной работе рассматриваются функциональные интегралы по спиновым переменным. Эти интегралы определяются на функциях, принимающих значения  $\pm 1$ , с помощью равенства

$$\int F(x(\bullet))d\nu(x) = \lim_j \sum_{\max \Delta t_j \rightarrow 0} \sum_{x_0 = \pm 1} \dots \sum_{x_n = \pm 1} F \left( \sum_{j=1}^n x_j \chi_{]t_{j-1}, t_j]}(\bullet) \right) \prod_{j=1}^n S(\Delta t_j, x_{j-1}, x_j), \quad (1)$$

если этот предел существует для любого разбиения отрезка  $[0, t]$  точками  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$ . Здесь  $x_j = x(t_j)$ ;  $\Delta t_j = t_j - t_{j-1}$ ;  $\chi_{]t_{j-1}, t_j]}(s)$  – характеристическая функция интервала  $]t_{j-1}, t_j]$ ;  $S(\Delta t_j, x_{j-1}, x_j)$  – переходная функция, имеющая вид

$$S(\Delta t_j, x_{j-1}, x_j) = \frac{1}{2} (\exp(A_1 \Delta t_j) + \exp(A_2 \Delta t_j) x_{j-1} x_j), \quad (2)$$

где  $A_1, A_2$  – вещественные параметры.

Функции от спиновых переменных широко используются в решеточных моделях статистической физики [5–8]. Если взять  $A_1 = \ln(2 \cosh(\beta))$ ,  $A_2 = \ln(2 \sinh(\beta))$ ,  $t = n$  и  $F(x(\bullet)) \equiv 1$ , то интеграл по спиновым переменным можно записать в виде статистической суммы решеточной модели с взаимодействием между ближайшими соседями

$$Z = \sum_{x_0 = \pm 1} \dots \sum_{x_n = \pm 1} \exp \left\{ \beta \sum_{j=1}^n x_{j-1} x_j \right\}.$$

В данной работе рассматривается приближенное вычисление функциональных интегралов по спиновым переменным от функционалов, содержащих взаимодействия удаленных узлов. Метод вычисления основан на разложении по большому и малому параметрам, содержащимся в функционале и мере. Также рассматриваются особые точки функционального интеграла по спиновым переменным как функции, зависящей от переменной  $t$ . Под особой точкой понимается точка, в которой функция не определена или имеет нерегулярное поведение (например, функция стремится к бесконечности, имеет разрыв или недифференцируема).

**1. Вычисление функциональных интегралов при малых  $b$ , больших  $A_1 - A_2$ .**

Рассматриваемый функциональный интеграл имеет вид

$$I(t) = \int \exp \left\{ b \int_0^{t-a} x(\tau) x(\tau + a) d\tau \right\} d\nu(x). \quad (3)$$



Здесь интегрируемый функционал содержит взаимодействие удаленных узлов  $x(\tau)$ ,  $x(\tau + a)$ . В переходной функции (2), определяющей меру функционального интеграла, содержится взаимодействие ближайших узлов  $x_{j-1}$ ,  $x_j$ .

В работе [9] представлено вычисление интеграла (3) при  $a \leq t \leq 2a$ . В данном разделе рассматривается вычисление интеграла (3) при малых  $b$ , больших  $A_1 - A_2$  и произвольных  $a$ ,  $t$ .

Для вычисления интеграла используем ряд

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{b^j}{j!} \int \left( \int_0^{t-a} x(\tau)x(\tau+a)d\tau \right)^j d\nu(x) \quad (4)$$

и формулы [10]

$$\int \prod_{m=1}^k x(\tau_m) d\nu(x) = 0$$

для всех нечетных  $k$ ,

$$\int \prod_{m=1}^k x(\tau_m) d\nu(x) = 2 \exp(tA_1) \exp \left( (A_1 - A_2) \sum_{m=1}^k (-1)^{m+1} \tau_m \right) \quad (5)$$

для всех четных  $k$ , где  $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots \leq \tau_k$ , мера  $\nu$  определяется переходной функцией (2), при  $k = 0$  предполагается, что  $\sum_{m=1}^k (-1)^{m+1} \tau_m = 0$ .

Отметим, что ряд (4) сходится и справедлива оценка

$$\left| \sum_{j=0}^{\infty} \frac{b^j}{j!} \int \left( \int_0^{t-a} x(\tau)x(\tau+a)d\tau \right)^j d\nu(x) \right| \leq 2 \exp(tA_1) \exp(b(t-a)).$$

Из формулы (5) следует, что нулевое слагаемое ряда (4) равно

$$I_0(t) = 2 \exp(tA_1).$$

С помощью равенства (5) получаем, что первое слагаемое ряда (4) при  $a \leq t$  равно

$$I_1(t) = b \int_0^{t-a} 2 \exp(tA_1) \exp(-(A_1 - A_2)a) d\tau = 2b \exp(tA_1) \exp(-(A_1 - A_2)a)(t-a).$$

Рассмотрим теперь вычисление слагаемого с номером  $j = 2$ ,  $a \leq t \leq 2a$ :

$$I_2(t) = \frac{b^2}{2} \int_0^{t-a} \int_0^{t-a} \int x(\tau_1)x(\tau_1+a)x(\tau_2)x(\tau_2+a) d\nu(x) d\tau_2 d\tau_1.$$

Так как функция под знаком определенного интеграла симметрична относительно переменных  $\tau_1, \tau_2$ , то это выражение можно записать в виде

$$I_2(t) = b^2 \int_0^{t-a} \int_0^{\tau_1} \int x(\tau_1)x(\tau_1+a)x(\tau_2)x(\tau_2+a) d\nu(x) d\tau_2 d\tau_1.$$

Вычисляя функциональный интеграл с помощью (5), получаем, что

$$I_2(t) = b^2 \int_0^{t-a} \int_0^{\tau_1} 2 \exp(tA_1) \exp(2(A_1 - A_2)(\tau_2 - \tau_1)) d\tau_2 d\tau_1.$$

После вычисления определенных интегралов получаем, что при  $a \leq t \leq 2a$

$$I_2(t) = b^2 \exp(tA_1) \left( \frac{t-a}{A_1-A_2} - \frac{1}{2(A_1-A_2)^2} + \frac{\exp(2(A_1-A_2)(a-t))}{2(A_1-A_2)^2} \right). \quad (6)$$

Рассмотрим вычисление  $I_2(t)$  при  $2a \leq t$ :

$$I_2(t) = b^2 \int_0^{t-a} \int_0^{\tau_1} x(\tau_1)x(\tau_1+a)x(\tau_2)x(\tau_2+a)dv(x)d\tau_2d\tau_1.$$

Отрезок интегрирования  $[0, t-a]$  разобьем на два отрезка  $[0, a]$  и  $[a, t-a]$ . Отрезок интегрирования  $[0, \tau_1]$  при  $a \leq \tau_1 \leq t-a$  разобьем на два отрезка  $[0, \tau_1-a]$  и  $[\tau_1-a, \tau_1]$ . Получим

$$\begin{aligned} I_2(t) &= b^2 \int_0^a \int_0^{\tau_1} x(\tau_1)x(\tau_1+a)x(\tau_2)x(\tau_2+a)dv(x)d\tau_2d\tau_1 + \\ &+ b^2 \int_a^{t-a} \int_0^{\tau_1-a} x(\tau_1)x(\tau_1+a)x(\tau_2)x(\tau_2+a)dv(x)d\tau_2d\tau_1 + \\ &+ b^2 \int_a^{t-a} \int_{\tau_1-a}^{\tau_1} x(\tau_1)x(\tau_1+a)x(\tau_2)x(\tau_2+a)dv(x)d\tau_2d\tau_1. \end{aligned}$$

Вычисляя функциональные интегралы с помощью (5), получаем, что

$$\begin{aligned} I_2(t) &= b^2 \int_0^a \int_0^{\tau_1} 2 \exp(tA_1) \exp(2(A_1-A_2)(\tau_2-\tau_1))d\tau_2d\tau_1 + \\ &+ b^2 \int_a^{t-a} \int_0^{\tau_1-a} 2 \exp(tA_1) \exp(2(A_1-A_2)(-a))d\tau_2d\tau_1 + b^2 \int_a^{t-a} \int_{\tau_1-a}^{\tau_1} 2 \exp(tA_1) \exp(2(A_1-A_2)(\tau_2-\tau_1))d\tau_2d\tau_1. \end{aligned}$$

После вычисления определенных интегралов получаем, что при  $2a \leq t$

$$\begin{aligned} I_2(t) &= b^2 \exp(tA_1) \left[ \frac{t-a}{A_1-A_2} - \frac{1}{2(A_1-A_2)^2} + \exp(-2(A_1-A_2)a) \times \right. \\ &\left. \times \left( \frac{1}{2(A_1-A_2)^2} - \frac{t-2a}{A_1-A_2} - 2a(t-2a) + (t-a)^2 - a^2 \right) \right]. \quad (7) \end{aligned}$$

Из (6), (7) видно, что функция  $\frac{d^3 I_2(t)}{dt^3}$  не является непрерывной в точке  $t = 2a$ . Следовательно, функции  $I_2(t)$  и  $I(t)$  имеют особую точку  $t = 2a$ . Вычисляя слагаемые более высокой степени, можно убедиться, что функция  $I(t)$  имеет особые точки  $t = ja$ ,  $j = 2, 3, \dots$

Отметим, что  $I_1(T)$  имеет коэффициент  $b$ ,  $I_2(T)$  имеет коэффициент  $\frac{b^2}{A_1-A_2}$ . То есть при малых  $b$  и больших  $A_1 - A_2$  с помощью начальных членов разложения (4) можно получить хорошее приближение функционального интеграла.

## 2. Вычисление функциональных интегралов при больших $b$ , малых $A_1 - A_2$ .

В данном разделе рассматривается приближенное вычисление функционального интеграла (3) в случае больших  $b$ , малых  $A_1 - A_2$ . Для вычисления функционального интеграла используем разложение [9]:

$$\begin{aligned} I(t) &= \sum_{x_{t_1, t_2, \dots, t_n}(0) = \pm 1} \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(\frac{1}{2}(A_1 + A_2)t\right) \left(\frac{1}{2}(A_1 - A_2)\right)^n \times \\ &\times \int_0^t \int_0^{t_2} \dots \int_0^{t_n} \exp\left(b \int_0^{t-a} x_{t_1, t_2, \dots, t_n}(\tau)x_{t_1, t_2, \dots, t_n}(\tau+a)d\tau\right) dt_1 \dots dt_n, \quad (8) \end{aligned}$$

где  $x_{t_1, t_2, \dots, t_n}(\tau)$  – траектория, имеющая разрывы в точках  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < t$ .  
Отметим, что ряд (8) сходится и справедлива оценка

$$|I(t)| \leq 2 \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(\frac{1}{2}(A_1 + A_2)t\right) \left(\frac{1}{2}(A_1 - A_2)\right)^n \int_0^t \int_0^{t_2} \dots \int_0^{t_n} \exp(b(t-a)) dt_1 \dots dt_n \leq \\ \leq 2 \exp(A_1 t) \exp(b(t-a)).$$

Нулевое слагаемое ряда (8) равно

$$I_0(t) = 2 \exp\left(\frac{t}{2}(A_1 + A_2)\right).$$

Рассмотрим теперь вычисление слагаемого с номером  $j=1$ ,  $a \leq t \leq 2a$ :

$$I_1(t) = \exp\left(\frac{t}{2}(A_1 + A_2)\right) \frac{1}{2}(A_1 - A_2) \sum_{x_{t_1(0)} = \pm 1} \int_0^t \exp\left(b \int_0^{t-a} x_{t_1}(\tau) x_{t_1}(\tau+a) d\tau\right) dt_1.$$

Разбивая отрезок интегрирования  $[0, t]$  на три отрезка  $[0, t-a]$ ,  $[t-a, a]$  и  $[a, t]$ , получим, что

$$\int_0^t \exp\left(b \int_0^{t-a} x_{t_1}(\tau) x_{t_1}(\tau+a) d\tau\right) dt_1 = \int_0^{t-a} \exp(bx_{t_1}(0)(-2t_1 + t - a)) dt_1 + \int_{t-a}^a \exp(-bx_{t_1}(0)(t-a)) dt_1 + \\ + \int_a^t \exp(bx_{t_1}(0)(2(t_1 - a) - (t-a))) dt_1 = \frac{4}{b} \sinh(b(t-a)) + 2(2a-t) \cosh(b(t-a)).$$

Таким образом, при  $a \leq t \leq 2a$

$$I_1(t) = \exp\left(\frac{t}{2}(A_1 + A_2)\right) \frac{1}{2}(A_1 - A_2) \left[ \frac{4}{b} \sinh(b(t-a)) + 2(2a-t) \cosh(b(t-a)) \right]. \quad (9)$$

При  $2a \leq t \leq 3a$ , разбивая отрезок интегрирования  $[0, t]$  на три отрезка  $[0, a]$ ,  $[a, t-a]$  и  $[t-a, t]$ , получим, что

$$\int_0^t \exp\left(b \int_0^{t-a} x_{t_1}(\tau) x_{t_1}(\tau+a) d\tau\right) dt_1 = \int_0^a \exp(bx_{t_1}(0)(-2t_1 + t - a)) dt_1 + \\ + \int_a^{t-a} \exp(bx_{t_1}(0)(2(t_1 - a) - 2t_1 + t - a)) dt_1 + \int_{t-a}^t \exp(bx_{t_1}(0)(2(t_1 - a) - (t-a))) dt_1 = \\ = \frac{4}{b} \cosh(b(t-2a)) \sinh(ba) + 2(t-2a) \cosh(b(t-3a)).$$

Таким образом, при  $2a \leq t \leq 3a$

$$I_1(t) = \exp\left(\frac{t}{2}(A_1 + A_2)\right) \frac{1}{2}(A_1 - A_2) \left[ \frac{4}{b} \cosh(b(t-2a)) \sinh(ba) + 2(t-2a) \cosh(b(t-3a)) \right]. \quad (10)$$

Из (9), (10) следует, что функция  $I_1(t)$  имеет особую точку  $t=2a$ , так как функция  $\frac{d^3 I_1(t)}{dt^3}$  не является непрерывной в точке  $t=2a$ .

Из (9), (10) видно, что  $I_1(T)$  содержит  $b$  в знаменателе и  $A_1 - A_2$  в числителе. То есть при малых  $A_1 - A_2$  и больших  $b$  с помощью начальных членов разложения (8) можно получить хорошее приближение функционального интеграла.

## Литература

1. Егоров А. Д., Соболевский П. И., Янович Л. А. Приближенные методы вычисления континуальных интегралов. Минск, 1985.
2. Егоров А. Д., Жидков Е. П., Лобанов Ю. Ю. Введение в теорию и приложения функционального интегрирования. М., 2006.
3. Egorov A. D., Sobolevsky P. I., Yanovich L. A. Functional integrals: Approximate evaluation and applications. Kluwer Acad. Publ., 1993.
4. Kleinert H. Path integrals in quantum mechanics, statistics, polymer physics and financial markets. World Scientific. Singapore, 2004.
5. Попов В. Н. Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике. М., 1976.
6. Джимбо М., Мива Т. Алгебраический анализ точно решаемых решеточных моделей. Ижевск, 2000.
7. Бэкстер Р. Точно решаемые модели в статистической механике. М., 1985.
8. Хуанг К. Статистическая механика. М., 1966.
9. Малютин В. Б. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2012. № 3. С. 18–25.
10. Малютин В. Б. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2009. № 4. С. 11–14.

V. B. MALYUTIN

### EVALUATION OF INTEGRALS WITH RESPECT TO THE SPIN VARIABLES OF THE FUNCTIONALS CONTAINING INTERACTION OF REMOTE NODES

#### Summary

The method of approximate evaluation of functional integrals with respect to the spin variables of the functionals containing interaction of remote nodes is proposed. This method is based on expansion in large and small parameters which are contained in the functional and the measure.

УДК 519.1

П. А. ИРЖАВСКИЙ

**ГАМИЛЬТОНОВОСТЬ ЛОКАЛЬНО СВЯЗНЫХ ГРАФОВ:  
СЛОЖНОСТНЫЕ АСПЕКТЫ**

*Белорусский государственный университет*

*(Поступила в редакцию 14.11.2014)*

**Введение.** Граф называется *гамильтоновым*, если в нем имеется *гамильтонов цикл*, т. е. простой цикл, содержащий все вершины этого графа. К проблеме гамильтоновости графов, а также к ее взвешенному аналогу – задаче о коммивояжере – проявляется устойчивый интерес в течение многих лет, а исследование этих задач представляет собой одно из магистральных направлений теории графов и комбинаторной оптимизации. *Задача о гамильтоновом цикле* заключается в ответе на вопрос, является ли граф гамильтоновым. Эта задача NP-полна в общем случае [1] и остается NP-полной во многих узких классах графов. С другой стороны, известен ряд достаточных условий, когда задача разрешима за полиномиальное время. Исследование «областей эффективности» задачи о гамильтоновом цикле – классов графов, для которых она может быть решена за полиномиальное время, – имеет не только теоретический, но и практический интерес. Целью настоящей работы является установление вычислительной сложности задачи о гамильтоновом цикле в ряде классов графов с предписанными локальными ограничениями.

Далее под *графом* понимается конечный неориентированный граф без петель и кратных ребер. Стандартные понятия теории графов, не определяемые в работе, можно найти в [2]. Пусть  $G$  – граф с множеством вершин  $V(G)$ . Число  $|V(G)|$  вершин графа  $G$  называется *порядком* графа  $G$  и обозначается через  $|G|$ . *Степень* вершины – число смежных с ней вершин. Наибольшая и наименьшая среди степеней вершин графа  $G$  обозначаются через  $\Delta(G)$  и  $\delta(G)$  соответственно.

Как обычно, через  $K_n$ ,  $K_{n,m}$  и  $K_{n,m,\ell}$  обозначаются полный граф порядка  $n$ , полный двудольный граф с долями размера  $n$  и  $m$  и полный трехдольный граф с долями размера  $n$ ,  $m$  и  $\ell$  соответственно, через  $P_n$  – простая цепь порядка  $n$ , а через  $C_n$  – простой цикл порядка  $n$ . Также граф  $K_3$  будем называть *треугольником*, всякий граф  $K_{1,p}$  при  $p \geq 3$  – *звездой*, а вершину звезды из доли размера 1 – *центром* этой звезды. Подграф графа  $G$ , порожденный множеством  $X \subseteq V(G)$  вершин, обозначается через  $G(X)$ .

Простой цикл  $C$  графа  $G$  называется *расширяемым* [3], если в графе  $G$  существует простой цикл  $C^+$ , для которого  $V(C) \subset V(C^+)$  и  $|V(C^+)| = |V(C)| + 1$ . Граф  $G$  называется *вполне циклически расширяемым* [3], если каждый простой негамильтонов цикл в  $G$  расширяемый и каждая вершина графа  $G$  принадлежит треугольнику. Легко видеть, что всякий вполне циклически расширяемый граф является гамильтоновым, но обратное, вообще говоря, неверно.

*Окружением* вершины  $v$  в графе  $G$  называется множество  $N(v)$  всех вершин, смежных с  $v$  в графе  $G$ . Множество  $N_2(v)$  всех ребер, каждое из которых инцидентно хотя бы одной вершине из  $N(v)$ , но не инцидентно  $v$ , называется  *$N_2$ -окружением* вершины  $v$  в графе  $G$ . Вершина  $v$  графа  $G$  называется *локально связной*, если подграф, порожденный ее окружением, связан. Вершина  $v$  графа  $G$  называется  *$N_2$ -локально связной*, если подграф, образованный ребрами из  $N_2(v)$  и инцидентными им вершинами, является связным. Граф  $G$  называется *локально связным* [4] ( *$N_2$ -локально связным* [5]), если каждая его вершина локально связна ( *$N_2$ -локально связна*). Несложно заметить, что локально связный граф является  *$N_2$ -локально связным*, но обратное, вообще говоря, неверно.

Граф, не содержащий порожденного подграфа, изоморфного звезде  $K_{1,p}$ , называется  $K_{1,p}$ -свободным. При  $p \geq 3$  граф  $G$  называется  $K_{1,p}$ -ограниченным [6], если для любого (не порожденного) подграфа  $H$  графа  $G$ , изоморфного  $K_{1,p}$ , граф  $G$  содержит не менее  $p + p - 2$  ребер, оба конца которых принадлежат  $V(H)$ . Граф  $G$  называется почти  $K_{1,3}$ -свободным [7], если в нем центры порожденных звезд  $K_{1,3}$  попарно не смежны, т. е. образуют независимое множество, и для каждого центра  $v$  верно  $\gamma(G(N(v))) \leq 2$ , где  $\gamma(H)$  – число доминирования графа  $H$ . Заметим, что всякий  $K_{1,3}$ -свободный граф является почти  $K_{1,3}$ -свободным, но обратное, вообще говоря, неверно.

**1. Локально связные графы с ограниченными степенями вершин.** Сначала рассмотрим задачу о гамильтоновом цикле для графов с ограниченными степенями вершин.

**Т е о р е м а 1** [8]. *Задача о гамильтоновом цикле NP-полна в классе планарных кубических 3-связных графов.*

Легко видеть, что граф  $G$  с  $\Delta(G) \leq 2$  гамильтонов тогда и только тогда, когда  $G$  изоморфен  $C_{|G|}$ . Значит, с учетом теоремы 1 получаем, что задача о гамильтоновом цикле NP-полна в классе графов со степенями вершин, не превосходящими 3, и разрешима за полиномиальное время в классе графов со степенями вершин, строго меньшими 3. Исследуем аналогичный вопрос для локально связных графов. Обозначим через  $\Delta^*$  число, при котором задача о гамильтоновом цикле NP-полна в классе локально связных графов со степенями вершин, не превосходящими  $\Delta^*$ , и разрешима за полиномиальное время в классе локально связных графов со степенями вершин, строго меньшими  $\Delta^*$  (см. также [9]). Отметим, что число  $\Delta^*$  корректно определено в предположении, что  $P \neq NP$ . Дальнейшее изложение также опирается на это допущение.

**Г и п о т е з а 1** [9].  $\Delta^* = 7$ .

Авторами [9] также установлена верхняя граница для числа  $\Delta^*$ .

**Т е о р е м а 2** [9]. *Задача о гамильтоновом цикле NP-полна в классе локально связных графов со степенями вершин, не превосходящими 7.*

Проследим, как улучшалась с течением времени нижняя граница для числа  $\Delta^*$ . Сначала сделаем следующее простое наблюдение.

**Н а б л ю д е н и е 1.** *Пусть  $G$  – связный локально связный граф порядка не меньше 3 с  $\Delta(G) \leq 3$ . Тогда  $G$  изоморфен  $K_3$ ,  $K_4$  или  $K_{1,1,2}$  и, следовательно,  $G$  гамильтонов.*

Значит,  $\Delta^* \geq 4$ . Следующая теорема усиливает эту оценку до 5.

**Т е о р е м а 3** [4]. *Пусть  $G$  – связный локально связный граф порядка не меньше 3 с  $\Delta(G) \leq 4$ . Тогда либо  $G$  гамильтонов, либо  $G$  изоморфен  $K_{1,1,3}$ .*

В ходе дальнейших исследований появилось ограничение на  $\delta(G)$ .

**Т е о р е м а 4** [3]. *Пусть  $G$  – связный локально связный граф порядка не меньше 3 с  $\Delta(G) \leq 5$  и  $\Delta(G) - \delta(G) \leq 1$ . Тогда  $G$  – вполне циклически расширяемый граф.*

Следующий результат позволяет ослабить ограничение на  $\delta(G)$  для графа  $G$  с  $\Delta(G) = 5$ .

**Т е о р е м а 5** [9]. *Пусть  $G$  – связный локально связный граф с  $\Delta(G) = 5$  и  $\delta(G) \geq 3$ . Тогда  $G$  – вполне циклически расширяемый граф.*

Тем не менее полностью отказаться от ограничения снизу на степени вершин графа невозможно, поскольку в таком классе графов задача о гамильтоновом цикле, как показывает основной результат настоящей работы, становится NP-полной.

**Т е о р е м а 6.** *Задача о гамильтоновом цикле NP-полна в классе планарных локально связных графов со степенями вершин, не превосходящими 5.*

Таким образом,  $\Delta^* = 5$ , что опровергает гипотезу 1. Доказательство теоремы 6 приводится в разделе 3. Следующий наш результат позволяет дать исчерпывающий ответ на вопрос о вычислительной сложности задачи о гамильтоновом цикле для произвольного локально связного графа  $G$  с заданными  $\delta(G)$  и  $\Delta(G)$ .

**Т е о р е м а 7.** *Для любых целых чисел  $D \geq 6$  и  $2 \leq d \leq D$  задача о гамильтоновом цикле NP-полна в классе локально связных графов, для каждого из которых минимальная степень вершин равна  $d$ , а максимальная – равна  $D$ .*

Заметим, что теорема 7 усиливает результат [10] о том, что при каждом фиксированном  $k \geq 6$  задача о гамильтоновом цикле NP-полна в классе  $k$ -регулярных графов.

**2. Графы с дополнительными локальными ограничениями.** В [11] получено следующее достаточное условие полной циклической расширяемости графа.

**Т е о р е м а 8** [11]. Пусть  $G$  – связный локально связный  $K_{1,4}$ -ограниченный граф порядка не меньше 3. Тогда либо  $G$  – вполне циклически расширяемый граф, либо  $G$  изоморфен одному из пяти негамильтоновых графов.

С одной стороны, эта теорема обобщает ряд полученных ранее результатов (см. [11]), в частности, классическую теорему о гамильтоновости связного локально связного  $K_{1,3}$ -свободного графа порядка не меньше 3 [12]. С другой стороны, можно показать, что ее условия являются «хрупкими», т. е. рассматриваемый в этой теореме класс графов не может быть естественным образом расширен без потери свойства полиномиальной разрешимости задачи о гамильтоновом цикле.

**Н а б л ю д е н и е 2.** При любом  $p \geq 3$  всякий  $K_{1,p}$ -ограниченный граф является  $K_{1,p+1}$ -ограниченным и  $K_{1,p}$ -свободным. При  $p = 3$  верно и обратное:  $K_{1,3}$ -свободный граф является  $K_{1,3}$ -ограниченным.

Естественным обобщением теоремы 8 представляется расширение класса локально связных  $K_{1,4}$ -ограниченных графов до локально связных  $K_{1,5}$ -ограниченных и/или  $K_{1,4}$ -свободных графов. С другой стороны, можно заметить следующее:

**Н а б л ю д е н и е 3.** Пусть  $G$  – связный локально связный граф с  $\Delta(G) \leq 5$ . Тогда  $G$  –  $K_{1,5}$ -ограниченный граф и либо  $G$  –  $K_{1,4}$ -свободный граф, либо  $G$  изоморфен  $K_{1,1,4}$ .

Таким образом, из теоремы 6 заключаем:

**С л е д с т в и е.** Задача о гамильтоновом цикле NP-полна в классе локально связных  $K_{1,4}$ -свободных  $K_{1,5}$ -ограниченных графов.

Значит, описанное выше расширение класса локально связных  $K_{1,4}$ -ограниченных графов невозможно без потери свойства полиномиальной разрешимости задачи о гамильтоновом цикле. Следующий наш результат с учетом наблюдения 2 демонстрирует невозможность ослабления другого условия теоремы 8, локальной связности, до  $N_2$ -локальной связности.

**Т е о р е м а 9.** Задача о гамильтоновом цикле NP-полна в классе  $N_2$ -локально связных  $K_{1,3}$ -свободных графов.

В заключение этого раздела рассмотрим еще одно достаточное условие полной циклической расширяемости графа.

**Т е о р е м а 10** [7]. Пусть  $G$  – связный локально связный  $K_{1,4}$ -свободный, почти  $K_{1,3}$ -свободный граф порядка не меньше 3. Тогда  $G$  – вполне циклически расширяемый граф.

Согласно теореме 9, условие локальной связности также не может быть ослаблено до условия  $N_2$ -локальной связности. Следующая теорема показывает, что условие принадлежности графа к классу  $K_{1,4}$ -свободных графов не может быть опущено.

**Т е о р е м а 11.** Задача о гамильтоновом цикле NP-полна в классе локально связных почти  $K_{1,3}$ -свободных графов.

**3. Доказательство теоремы 6.** Легко видеть, что задача о гамильтоновом цикле в рассматриваемом классе графов принадлежит к классу NP. Докажем NP-полноту этой задачи в классе планарных локально связных графов, степени вершин которых не превосходят 5, сведением к ней задачи о гамильтоновом цикле для планарных кубических графов, которая, как известно [8], NP-полна. Далее через  $\mathbb{Z}_m$  будем обозначать полную систему из наименьших неотрицательных вычетов по модулю  $m$ .

Покажем, как устроено преобразование  $\varphi$  плоского кубического графа  $G$  в плоский локально связный граф  $H = \varphi(G)$  с  $\Delta(H) = 5$ . Для графа  $G$  порядка  $n$  введем функцию  $f: V(G) \times \mathbb{Z}_3 \rightarrow V(G)$ , позволяющую для вершины  $v$  графа  $G$  перечислить вершины  $f(v,0)$ ,  $f(v,1)$  и  $f(v,2)$ , смежные с  $v$ , в порядке обхода против часовой стрелки относительно вершины  $v$ . Теперь зададим сюръективную функцию  $\psi: V(G) \times \mathbb{Z}_{12} \rightarrow V(H)$  следующим образом. Если для двух смежных вершин  $u$  и  $v$  графа  $G$  верно  $f(u,b) = v$  и  $f(v,a) = u$ , то  $\psi(v,4a+1) = \psi(u,4b+3)$ ,  $\psi(v,4a+2) = \psi(u,4b+2)$  и  $\psi(v,4a+3) = \psi(u,4b+1)$ . Все прочие пары значений функции  $\psi$  являются различными. Таким образом, граф  $H$  содержит

$$12|V(G)| - 3|E(G)| = 3|V(G)| + 3|E(G)| = 15n/2$$

вершин. Множество ребер графа  $H$  определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} E(H) = & \{ \{ \psi(v, k), \psi(v, k+1) \} \quad \forall v \in V(G), k \in \mathbb{Z}_{12} \} \cup \\ & \cup \{ \{ \psi(v, 4k), \psi(v, 4k+4) \} \quad \forall v \in V(G), k \in \mathbb{Z}_3 \} \cup \\ & \cup \{ \{ \psi(v, 4k), \psi(v, 4k+3) \} \quad \forall v \in V(G), k \in \mathbb{Z}_3 \} \cup \\ & \cup \{ \{ \psi(v, 4k+1), \psi(v, 4k+3) \} \quad \forall v \in V(G), k \in \mathbb{Z}_3 \}. \end{aligned}$$

Другими словами, при преобразовании  $\psi$  каждая вершина и каждое ребро графа  $G$  заменяются на треугольники, соединенные, как показано на рис. 1 (числом  $k$  обозначена вершина  $\psi(v, k)$  графа  $\varphi(G)$ ). Таким образом, граф  $H$  плоский. Каждую вершину графа  $H$  можно отнести к одному из трех типов. Так, для вершины вида  $\psi(v, 4k+2)$  подграф, порожденный ее окружением, изоморфен  $P_2$ , для вершины вида  $\psi(v, 4k)$  – изоморфен  $P_5$ , а для вершины вида  $\psi(v, 2k+1)$  – изоморфен графу, который получается из звезды  $K_{1,3}$  подразбиением одного из ее ребер. Отсюда следует локальная связность графа  $H$ , а также равенство  $\Delta(H) = 5$ .

Легко видеть, что граф  $H$  можно построить по графу  $G$  за полиномиальное время. Покажем теперь, что граф  $G$  гамильтонов тогда и только тогда, когда граф  $H$  гамильтонов.

Пусть в графе  $G$  существует гамильтонов цикл  $C = v_1 v_2 \dots v_n v_1$ , для которого  $f(v_i, \ell_i) = v_{i-1}$  и  $f(v_i, r_i) = v_{i+1}$  для всех  $1 \leq i \leq n$  (полагая  $v_0 = v_n$  и  $v_{n+1} = v_1$ ). Каждое ребро графа  $G$ , не входящее в цикл  $C$ , назначим одной из инцидентных ему вершин. Тогда, поскольку для каждой вершины два из трех инцидентных ей ребер входят в цикл  $C$ , каждой вершине будет назначено не более одного ребра. Гамильтонов цикл в графе  $H$  может быть получен следующим образом. Всякую вершину  $v_i$ , которой не назначено ребро, заменим на последовательность вершин

$$\psi(v_i, 4\ell_i + 2)\psi(v_i, 4\ell_i + 3)\psi(v_i, 4\ell_i)\psi(v_i, 12 - 4\ell_i - 4r_i)\psi(v_i, 4r_i)\psi(v_i, 4r_i + 3).$$

Каждую вершину  $v_i$ , которой назначено ребро и для которой  $r_i = \ell_i - 1$ , заменим на последовательность вершин

$$\begin{aligned} & \psi(v_i, 4\ell_i + 2)\psi(v_i, 4\ell_i + 3)\psi(v_i, 4\ell_i)\psi(v_i, 4\ell_i + 4)\psi(v_i, 4\ell_i + 5) \\ & \psi(v_i, 4\ell_i + 6)\psi(v_i, 4\ell_i + 7)\psi(v_i, 4\ell_i + 8)\psi(v_i, 4\ell_i + 11). \end{aligned}$$

Каждую вершину  $v_i$ , которой назначено ребро и для которой  $r_i = \ell_i + 1$ , заменим на последовательность вершин

$$\begin{aligned} & \psi(v_i, 4\ell_i + 2)\psi(v_i, 4\ell_i + 3)\psi(v_i, 4\ell_i)\psi(v_i, 4\ell_i - 1)\psi(v_i, 4\ell_i - 2) \\ & \psi(v_i, 4\ell_i - 3)\psi(v_i, 4\ell_i - 4)\psi(v_i, 4\ell_i + 4)\psi(v_i, 4\ell_i + 7). \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что эти последовательности вершин задают попарно не пересекающиеся по вершинам простые цепи в графе  $H$ . Также заметим следующее: все эти последовательности заканчиваются на вершину вида  $\psi(v_i, 4r_i + 3)$ , при этом  $\psi(v_i, 4r_i + 2) = \psi(v_{i+1}, 4\ell_{i+1} + 2)$  (где  $\ell_{n+1} = \ell_1$ ),

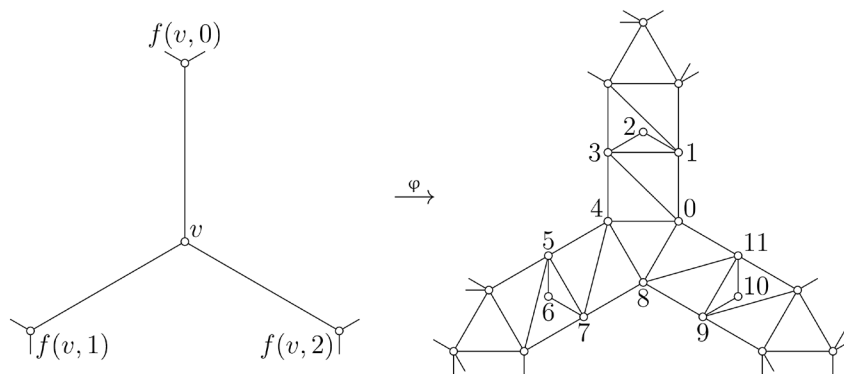


Рис. 1. Фрагмент преобразования  $\varphi$



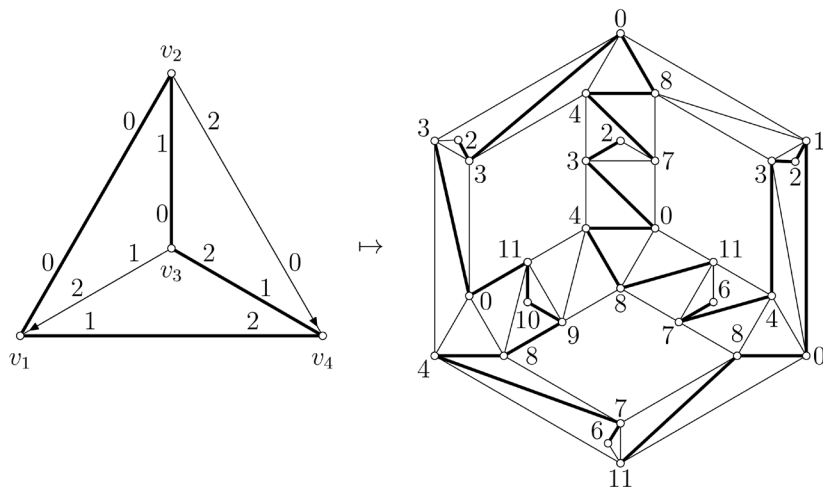


Рис. 2. Пример преобразования

поскольку  $v_i = f(v_{i+1}, \ell_{i+1})$  и  $v_{i+1} = f(v_i, r_i)$ . Кроме того,  $\{\psi(v_i, 4r_i + 3), \psi(v_i, 4r_i + 2)\} \in E(H)$ . Таким образом, в результате замены каждой вершины цикла  $C$  на соответствующую последовательность вершин графа  $H$  мы получим цикл в графе  $H$ . По построению этот цикл содержит все вершины графа  $H$  и является простым, а значит, он гамильтонов.

На рис. 2 изображена описанная выше замена вершин графа  $G$  (слева) на соответствующие последовательности вершин графа  $H$  (справа) на примере  $G = K_4$ . Жирными линиями выделены ребра гамильтонова цикла в графе  $G$  и ребра простых цепей в графе  $H$ , соответствующих последовательностям вершин графа  $H$ , на которые заменяются вершины графа  $G$ . С помощью стрелок показано, каким вершинам назначены ребра графа  $G$ , не вошедшие в гамильтонов цикл. В графе  $G$  число  $k$ , расположенное над ребром  $\{v, u\}$  ближе к вершине  $v$ , означает, что  $f(v, k) = u$ , а в графе  $H$  числом  $k$  обозначена вершина  $\psi(v, k)$ , входящая в последовательность, на которую заменяется вершина  $v$  графа  $G$ . Например, вершина  $\psi(v_1, 1) = \psi(v_2, 3)$  графа  $H$  обозначена числом 3, поскольку она содержится только в последовательности вершин, на которую заменяется вершина  $v_2$ .

Пусть теперь в графе  $H$  существует гамильтонов цикл  $C = u_1 u_2 \dots u_{15n/2} u_1$ . Поскольку вершины вида  $\psi(v, 4k + 2)$  и только они имеют степень 2, то при любых  $v \in V(G)$  и  $k \in \mathbb{Z}_3$  вершины  $\psi(v, 4k + 1)$  и  $\psi(v, 4k + 3)$  расположены в цикле  $C$  на позициях, соседних с вершиной  $\psi(v, 4k + 2)$ . В связи с этим нетрудно убедиться, что если в циклической последовательности  $u_1 u_2 \dots u_{15n/2} u_1$  вершин оставить все вершины вида  $\psi(v, 4k)$  и только их, то две вершины из тройки  $\psi(v, 0)$ ,  $\psi(v, 4)$  и  $\psi(v, 8)$  будут расположены на позициях, соседних с третьей вершиной этой же тройки. Заменяя теперь каждую такую тройку на соответствующую вершину  $v$  графа  $G$ , мы получим циклическую последовательность вершин, в которой любые две соседние смежны. Кроме того, эта последовательность содержит каждую вершину графа  $G$  ровно один раз, а значит, задает в графе  $G$  гамильтонов цикл.

Таким образом, NP-полная задача распознавания гамильтоновости графа в классе плоских кубических графов полиномиально сводится к задаче распознавания гамильтоновости графа в классе плоских локально связанных графов со степенями вершин, не превосходящими 5, откуда следует NP-полнота последней. Теорема 6 доказана.

**4. Схемы доказательств теорем 7, 9 и 11.** На рис. 3 изображены фрагменты преобразований  $\phi'$  и  $\phi''$ , позволяющих аналогичным образом доказать теоремы 9 и 11. Более точно, в доказательстве определяются преобразования  $\phi'$  и  $\phi''$  плоского кубического графа  $G$  в  $N_2$ -локально связный  $K_{1,3}$ -свободный граф  $\phi'(G)$  и локально связный почти  $K_{1,3}$ -свободный граф  $\phi''(G)$ , требующие полиномиального времени и обладающие следующим свойством: граф  $G$  гамильтонов тогда и только тогда, когда граф  $\phi'(G)$  гамильтонов, а также тогда и только тогда, когда граф  $\phi''(G)$  гамильтонов.

Теорема 7 в свою очередь доказывается небольшими модификациями преобразования  $\phi$  из доказательства теоремы 6. Так, если в графе  $H = \phi(G) = \phi_2^5(G)$  ровно одну вершину  $u$  степени 2 удалить и заменить двумя новыми вершинами, смежными друг другу, и вершинам, смежным  $u$  в  $H$ ,

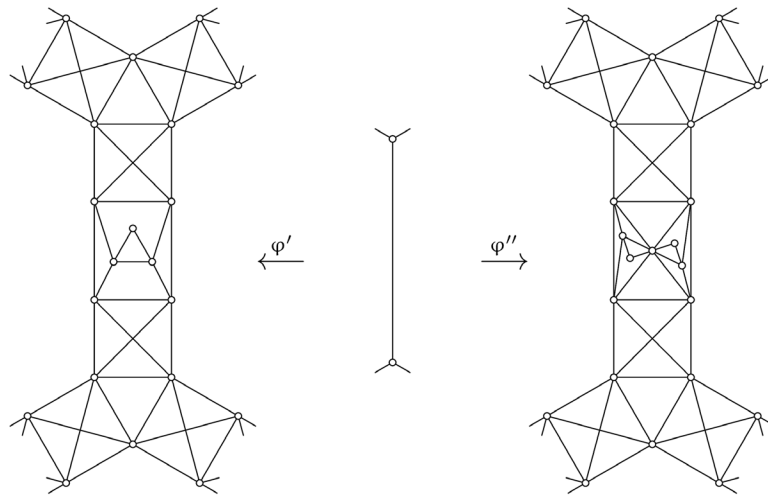


Рис. 3. Фрагменты преобразований  $\varphi'$  и  $\varphi''$

то новый граф  $H_2^6$ , как легко видеть, будет гамильтонов тогда и только тогда, когда граф  $H$  гамильтонов. При этом  $H_2^6$  локально связан,  $\Delta(H_2^6) = 6$  и  $\delta(H_2^6) = 2$ . Если же такую операцию произвести с каждой вершиной степени 2, получим локально связный граф  $H_3^6$  с  $\Delta(H_3^6) = 6$  и  $\delta(H_3^6) = 3$ , который также гамильтонов тогда и только тогда, когда граф  $H$  гамильтонов. Для дальнейшего повышения  $\delta$  до 4 можно заменить каждую вершину степени 2 графа  $H$  не двумя вершинами, а кликой из пяти вершин, две из которых также смежны вершинам, смежным  $u$  в  $H$ . В результате будет получен локально связный граф  $H_4^6$  с  $\Delta(H_4^6) = 6$  и  $\delta(H_4^6) = 4$ , который гамильтонов тогда и только тогда, когда граф  $H$  гамильтонов. Чтобы поднять  $\delta$  до 5, аналогично заменим вершину  $u$  степени 2 графа  $H$  кликой уже не из пяти вершин, а из семи, среди которых две вершины  $x$  и  $y$  также смежны вершинам, смежным  $u$  в  $H$ . Выберем теперь четыре вершины клики, отличные от  $x$  и  $y$ , разобьем их на две пары и удалим ребра, соединяющие вершины первой пары с вершиной  $x$ , а также ребра, соединяющие вершины второй пары с вершиной  $y$ . Несложно убедиться, что, проделав такую опе-

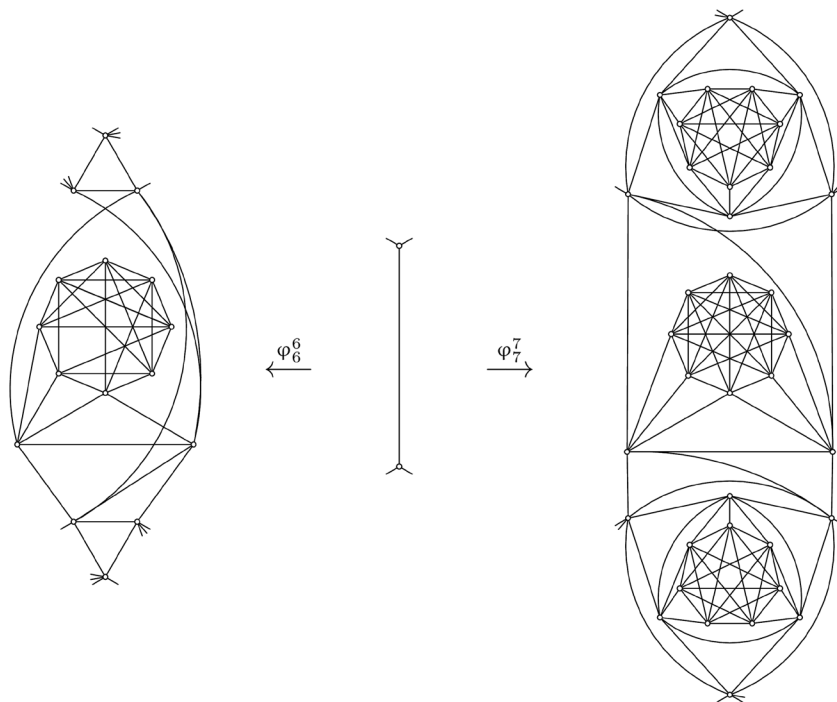


Рис. 4. Фрагменты преобразований  $\varphi_6^6$  и  $\varphi_7^7$

рацию с каждой вершиной степени 2 графа  $H$ , получим локально связный граф  $H_5^6$  с  $\Delta(H_5^6) = 6$  и  $\delta(H_5^6) = 5$ , который гамильтонов тогда и только тогда, когда граф  $H$  гамильтонов.

Случай  $r$ -регулярных локально связных графов ( $r \geq 6$ ) заслуживает отдельного внимания. На рис. 4 приведены фрагменты преобразований  $\phi_6^6$  и  $\phi_7^7$ , позволяющих доказать NP-полноту задачи о гамильтоновом цикле в классе локально связных 6-регулярных графов и в классе локально связных 7-регулярных графов соответственно. Увеличение  $r$  на 2 осуществляется так же, как переход от случая  $(D, d) = (5, 2)$  к случаю  $(D, d) = (7, 7)$ . При  $D \geq 7$  и  $2 \leq d < D$  доказательство NP-полноты задачи о гамильтоновом цикле в классе локально связных графов со степенями вершин от  $d$  до  $D$  включительно получается из доказательства NP-полноты этой же задачи в классе  $(D - 1)$ -регулярных локально связных графов и абсолютно аналогично переходу от случая  $(D, d) = (5, 2)$  к одному из случаев  $(D, d) = (6, 2)$ ,  $(D, d) = (6, 3)$ ,  $(D, d) = (6, 4)$  или  $(D, d) = (6, 5)$ .

Отметим, что в теореме 7, в отличие от теоремы 6, не оговаривается условие планарности графа. Для этого есть вполне объективные причины: не существует планарного графа  $G$  с  $\delta(G) \geq 6$ . Тем не менее легко видеть, что при доказательстве теоремы 7 для случаев  $(D, d) = (6, 2)$  и  $(D, d) = (6, 3)$  в результате соответствующих преобразований получаются планарные графы. Также можно показать, что для любых целых чисел  $D \geq 6$  и  $2 \leq d \leq 5$  задача о гамильтоновом цикле NP-полна в классе планарных локально связных графов, для каждого из которых минимальная степень вершин равна  $d$ , а максимальная – равна  $D$ .

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф13К-078).

## Литература

1. Karp R. M. // Proc. of a Symp. on the Complexity of Computer Computations. New York, 1972. P. 85–103.
2. Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И. Лекции по теории графов. М., 1990.
3. Hendry G. R. T. // J. Graph Theory. 1989. Vol. 13. P. 257–260.
4. Chartrand G., Pippert R. // Čas. Pěst. Mat. 1974. Vol. 99. P. 158–163.
5. Ryjáček Z. // J. Graph Theory. 1990. Vol. 14. P. 321–331.
6. Wang J., Teng Y. // Adv. Math. 2006. Vol. 35. P. 657–662 (in Chinese).
7. Ryjáček Z. // J. Graph Theory. 1994. Vol. 18. P. 469–477.
8. Garey M. R., Johnson D. S., Tarjan R. E. // SIAM J. Comput. 1976. Vol. 5. P. 704–714.
9. Gordon V. S., Orlovich Yu. L., Potts C. N., Strusevich V. A. // Discrete Appl. Math. 2011. Vol. 159. P. 1759–1774.
10. Picouleau C. // Theor. Comput. Sci. 1994. Vol. 131. P. 463–473.
11. Иржавский П. А., Орлович Ю. Л. // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2012. Т. 20, № 2. С. 36–50.
12. Oberly D. J., Sumner D. P. // J. Graph Theory. 1979. Vol. 3. P. 351–356.

P. A. IRZHAVSKI

## HAMILTONICITY OF LOCALLY CONNECTED GRAPHS: COMPLEXITY RESULTS

### Summary

In this article we consider the complexity of recognizing Hamiltonian graphs with a prescribed local structure: locally connected graphs with a bounded vertex degree,  $N_2$ -locally connected  $K_{1,3}$ -free graphs and locally connected almost  $K_{1,3}$ -free graphs. We establish the NP-completeness of the problem for each class of graphs under consideration. In particular, the conjecture stated in 2011 on polynomial solvability of the Hamiltonian cycle problem for locally connected graphs of maximum degree at most 6 was disproved. Also, for several known sufficient conditions of Hamiltonicity, it is shown that these conditions cannot be naturally weakened without loss of the polynomial solvability of the Hamiltonian cycle problem.

УДК 537.8

И. Е. АНДРУШКЕВИЧ<sup>1</sup>, Ю. В. ШИЁНОК<sup>2</sup>

**СВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА  
 К СИСТЕМЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

<sup>1</sup>Полоцкий государственный университет

<sup>2</sup>Витебский государственный университет им. П. М. Машерова

(Поступила в редакцию 31.10.2014)

Задача разработки методов построения аналитических решений системы уравнений Максвелла по-прежнему актуальна. В настоящей работе нам в определенной степени удалось улучшить алгебраический метод разделения переменных [1], разработанный ранее для релятивистского уравнения Дирака, и обобщить его на случай уравнений Максвелла. В этом смысле данная работа является прямым продолжением исследований, результаты которых представлены в [2].

**1. Система уравнений Максвелла и формы ее представления.** Наиболее распространенным представлением системы уравнений Максвелла является ее дифференциальная форма записи, предложенная Г. Герцем и О. Хевисайдом [3]:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}, \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (1)$$

В неоднородных нестационарных анизотропных средах материальные уравнения имеют вид

$$\mathbf{D} = \hat{\epsilon} \mathbf{E}, \mathbf{B} = \hat{\epsilon} \mathbf{H}, \mathbf{j} = \hat{\sigma} \mathbf{E}, \quad (2)$$

где

$$\hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{x,x} & \epsilon_{x,y} & \epsilon_{x,z} \\ \epsilon_{y,x} & \epsilon_{y,y} & \epsilon_{y,z} \\ \epsilon_{z,x} & \epsilon_{z,y} & \epsilon_{z,z} \end{pmatrix}, \hat{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_{x,x} & \mu_{x,y} & \mu_{x,z} \\ \mu_{y,x} & \mu_{y,y} & \mu_{y,z} \\ \mu_{z,x} & \mu_{z,y} & \mu_{z,z} \end{pmatrix}, \hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{x,x} & \sigma_{x,y} & \sigma_{x,z} \\ \sigma_{y,x} & \sigma_{y,y} & \sigma_{y,z} \\ \sigma_{z,x} & \sigma_{z,y} & \sigma_{z,z} \end{pmatrix}.$$

Запись уравнений Максвелла (1), (2) является компактной, однако при решении прикладных задач электродинамики, как правило, приходится отказываться от такой ее формы и переходить непосредственно к рассмотрению проекций векторов напряженности электрического и магнитного полей на оси выбранной системы координат, что сопряжено с рядом сложностей математического характера. В том числе и по этой причине вполне понятен интерес ряда исследователей к иным формам записи системы (1), в частности аналогичным уравнению Дирака (см., напр., [4–6]).

В работе [2] показано, что в изотропных средах система (1), (2) допускает эквивалентное представление, имеющее вид

$$\left\{ \xi^1 \partial_x + \xi^2 \partial_y + \xi^3 \partial_z + \xi^4 \mathbf{M} \partial_t + \Theta \right\} \Psi = \mathbf{P} \mathbf{J}, \quad (3)$$

где  $\partial_a = \frac{\partial}{\partial a}$ ,  $\Psi = (0, E_x, E_y, -E_z, -H_z, H_y, H_x, 0)^T$ ,  $\mathbf{J} = \|1\|_{8 \times 1}$ ,  $\mathbf{M} = \operatorname{diag}(\mu^{-1}, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \mu, \mu, \mu, \epsilon^{-1})$ ,  $\mathbf{P} = \operatorname{diag}(0, 0, 0, 0, 0, 0, \rho \epsilon^{-1}, 0)$ ,  $\Theta = \|\theta_{i,j}\|_{8 \times 8}$ , причем  $\theta_{i,j} = 0$  за исключением следующих двенадцати:

$$\theta_{1,2} = -\sigma - \partial_t \varepsilon, \theta_{2,5} = -\mu^{-1} \partial_z \mu, \theta_{2,6} = \mu^{-1} \partial_y \mu, \theta_{2,7} = \mu^{-1} \partial_x \mu, \theta_{3,4} = -\sigma - \partial_t \varepsilon, \theta_{4,3} = \sigma + \partial_t \varepsilon, \\ \theta_{5,6} = -\partial_t \mu, \theta_{6,5} = \partial_t \mu, \theta_{7,2} = \varepsilon^{-1} \partial_x \varepsilon, \theta_{7,3} = \varepsilon^{-1} \partial_y \varepsilon, \theta_{7,4} = -\varepsilon^{-1} \partial_z \varepsilon, \theta_{8,7} = \partial_t \mu;$$

$$\xi^1 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{\sigma}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\tilde{\sigma}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\tilde{\sigma}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \tilde{\sigma}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \xi^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\tilde{\sigma}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{\sigma}_3 \\ -\tilde{\sigma}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\sigma}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \\ \xi^3 = - \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{\sigma}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{\sigma}_1 \\ \tilde{\sigma}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\sigma}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \xi^4 = -i \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\sigma}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{\sigma}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{\sigma}_2 \end{pmatrix}; \quad (4)$$

$$\tilde{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tilde{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \tilde{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

В данных исследованиях нам удалось усовершенствовать и обобщить форму записи (3) на случай сред с материальными уравнениями вида (2). Действительно, введем в рассмотрение матрицы

$$\mathbf{R}_x = \left\| {}^x R_{i,j} \right\|_{8 \times 8}, \mathbf{R}_y = \left\| {}^y R_{i,j} \right\|_{8 \times 8}, \mathbf{R}_z = \left\| {}^z R_{i,j} \right\|_{8 \times 8}, \mathbf{R}_t = \left\| {}^t R_{i,j} \right\|_{8 \times 8}, \mathbf{R}_\sigma = \left\| {}^\sigma R_{i,j} \right\|_{8 \times 8}, \quad (6)$$

такие, что

$${}^x R_{1,1} = {}^x R_{3,3} = {}^x R_{4,4} = {}^x R_{5,5} = {}^x R_{6,6} = {}^x R_{8,8} = 1, {}^x R_{2,2} = \varepsilon_{x,x}, {}^x R_{2,3} = \varepsilon_{x,y}, {}^x R_{2,4} = -\varepsilon_{x,z}, \\ {}^x R_{7,5} = -\mu_{x,z}, {}^x R_{7,6} = \mu_{x,y}, {}^x R_{7,7} = \mu_{x,x}; {}^y R_{1,1} = {}^y R_{2,2} = {}^y R_{4,4} = {}^y R_{5,5} = {}^y R_{7,7} = {}^y R_{8,8} = 1, \\ {}^y R_{3,2} = \varepsilon_{y,x}, {}^y R_{3,3} = \varepsilon_{y,y}, {}^y R_{3,4} = -\varepsilon_{y,z}, {}^y R_{6,5} = -\mu_{y,z}, {}^y R_{6,6} = \mu_{y,y}, {}^y R_{6,7} = \mu_{y,x}; \\ {}^z R_{1,1} = {}^z R_{2,2} = {}^z R_{3,3} = {}^z R_{3,3} = {}^z R_{7,7} = {}^z R_{8,8} = 1, {}^z R_{4,2} = -\varepsilon_{z,x}, {}^z R_{4,3} = -\varepsilon_{z,y}, {}^z R_{4,4} = \varepsilon_{z,z}, {}^z R_{5,5} = \mu_{z,z}, \\ {}^z R_{5,6} = -\mu_{z,y}, {}^z R_{5,7} = -\mu_{z,x}; {}^t R_{1,1} = {}^t R_{8,8} = 1, {}^t R_{2,2} = \varepsilon_{x,x}, {}^t R_{2,3} = \varepsilon_{x,y}, {}^t R_{2,4} = -\varepsilon_{x,z}, \\ {}^t R_{7,5} = -\mu_{x,z}, {}^t R_{7,6} = \mu_{x,y}, {}^t R_{7,7} = \mu_{x,x}, {}^t R_{3,2} = \varepsilon_{y,x}, {}^t R_{3,3} = \varepsilon_{y,y}, {}^t R_{3,4} = -\varepsilon_{y,z}, {}^t R_{6,5} = -\mu_{y,z}, \\ {}^t R_{6,6} = \mu_{y,y}, {}^t R_{6,7} = \mu_{y,x}, {}^t R_{4,2} = -\varepsilon_{z,x}, {}^t R_{4,3} = -\varepsilon_{z,y}, {}^t R_{4,4} = \varepsilon_{z,z}, {}^t R_{5,5} = \mu_{z,z}, {}^t R_{5,6} = -\mu_{z,y}, \\ {}^t R_{5,7} = -\mu_{z,x}; {}^\sigma R_{2,2} = \sigma_{x,x}, {}^\sigma R_{2,3} = \sigma_{x,y}, {}^\sigma R_{2,4} = -\sigma_{x,z}, {}^\sigma R_{3,2} = \sigma_{y,x}, {}^\sigma R_{3,3} = \sigma_{y,y}, \\ {}^\sigma R_{3,4} = -\sigma_{y,z}, {}^\sigma R_{4,2} = -\sigma_{z,x}, {}^\sigma R_{4,3} = -\sigma_{z,y}, {}^\sigma R_{4,4} = \sigma_{z,z},$$

а остальные элементы матриц (6) тождественно равны нулю. Пусть далее

$$\mathbf{R}_0 = \text{diag}(0,1,1,1,1,1,1,0), \mathbf{P}_\rho = \text{diag}(0,0,0,0,0,0,\rho,0), \Psi = (-\varphi_E, E_x, E_y, -E_z, -H_z, H_y, H_x, -\varphi_H)^T, \quad (7)$$

где  $\varphi_E, \varphi_H$  – произвольные функции переменных  $(x, y, z, t)$ . Тогда простой проверкой можно убедиться, что система уравнений Максвелла (1), (2) приобретает вид

$$\left( \xi^1 \partial_x \mathbf{R}_x + \xi^2 \partial_y \mathbf{R}_y + \xi^3 \partial_z \mathbf{R}_z + \xi^4 \partial_t \mathbf{R}_t + \xi^4 \mathbf{R}_\sigma \right) \mathbf{R}_0 \Psi = \mathbf{P}_\rho \mathbf{J}. \quad (8)$$

**2. Билинейные функциональные, билинейные матрично-функциональные уравнения и система уравнений Максвелла.** Из всех возможных методов построения аналитических решений уравнений математической физики, на наш взгляд, наиболее предпочтительным и (по словам Р. Куранта) наиболее важным является метод разделения переменных. Под последним, наряду с классическим методом Фурье, мы понимаем любой метод, позволяющий уравнению (их системе) в частных производных сопоставить эквивалентную на определенном классе функций систему

обыкновенных дифференциальных уравнений. Следует отметить, что без исключения все существующие сегодня методы разделения переменных в той или иной мере являются обобщением и развитием классического. Мы считаем, что одним из наиболее перспективных подходов к обобщению классического метода является подход В. Я. Скоробогатько [7], суть которого заключается в сведении задачи разделения переменных в уравнении в частных производных с «разделяющимся» оператором к задаче поиска решений билинейных уравнений вида

$$\sum_{i=1}^N f_i(x)g_i(y) = 0. \quad (9)$$

Проблема «разделимости» [8] оператора дифференциального уравнения в частных производных решается известной теоремой Колмогорова «о представлении функций нескольких переменных в виде суперпозиции произведений функций одного переменного» [9], которая утверждает, что

для каждого  $n \in \mathbb{N}$  существует  $n(2n - 1)$  функций  $h_{i,j}(\zeta_i)$  ( $i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, 2n+1$ ), таких, что: а) все функции  $h_{i,j}(\zeta_i)$  непрерывны на  $[0, 1]$ ; б) для любой функции  $F(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$ , непрерывной на  $0 < \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n \leq 1$ , существуют  $2n + 1$  функций  $g_j(u), u = \zeta_l$ , ( $l = 1, \dots, n; j = 1, \dots, 2n + 1$ ), каждая из которых непрерывна на  $R$ , причем

$$F(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n) = \sum_{j=1}^{2n+1} \left( g_j(u) \sum_{i=1}^n (h_{i,j}(\zeta_i)) \right). \quad (10)$$

Заметим, что функции  $h_{i,j}(\zeta_i)$  являются универсальными и не зависят от  $F(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$ . Функции  $g_j(u)$ , напротив, однозначно определяются функцией  $F(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$ . К сожалению, нахождение явного вида функций  $h_{i,j}$  в общем случае и  $g_j$  конкретно для заданной функции  $F(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$  представляет собой математическую проблему.

Отметим, что представление (10) функции многих переменных, предложенное А. Н. Колмогоровым, является не единственным. В частности, Д. А. Шпрехер [10] показал, что внешние функции  $g_j(u)$  можно заменить одной единственной, а совокупность функций во внутренней сумме представима в виде сжатий и сдвигов одной единственной функции, т. е. (10) можно представить в виде

$$F(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n) = \sum_{j=1}^{2n+1} \left( g(u) \left( \sum_{i=1}^n (\lambda^i h(\zeta_i + v_j)) \right) + j \right), \quad (11)$$

где  $\lambda^i$  и  $v_j$  – положительные параметры.

Позднее Р. Досс [11], развивая идеи А. Н. Колмогорова, доказал, что наряду с (11) имеет место и следующее представление:

$$F(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n) = \sum_{j=1}^{2n+1} \left( g(u) \left( \prod_{i=1}^n h_{i,j}(\zeta_i) \right) \right). \quad (12)$$

Применяя соотношения (10)–(12) к матрицам-функциям, фигурирующим в системе уравнений Максвелла (8), можно доказать справедливость утверждений, являющихся прямыми следствиями теоремы Колмогорова:

**С л е д с т в и е 1.** Для любой матрицы-функции  $\Psi(x, y, z, t) = \|\psi_i(x, y, z, t)\|_{8 \times 1}$  с непрерывными на  $0 < x, y, z, t < 1$  функциями  $\psi_i(x, y, z, t)$ , справедливо представление

$$\Psi = (\mathbf{G}_x + \mathbf{G}_y + \mathbf{G}_z + \mathbf{G}_t) \cdot (\mathbf{h}_x + \mathbf{h}_y + \mathbf{h}_z + \mathbf{h}_t),$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_x(x) &= \|\mathbf{g}_{i,x}(x)\|_{8 \times 1}, \quad \mathbf{G}_y(y) = \|\mathbf{g}_{i,y}(y)\|_{8 \times 1}, \quad \mathbf{G}_z(z) = \|\mathbf{g}_{i,z}(z)\|_{8 \times 1}, \quad \mathbf{G}_t(t) = \|\mathbf{g}_{i,t}(t)\|_{8 \times 1}; \\ \mathbf{h}_x(x) &= \|\mathbf{h}_{x,i}(x)\|_{9 \times 1}, \quad \mathbf{h}_y(y) = \|\mathbf{h}_{y,i}(y)\|_{9 \times 1}, \quad \mathbf{h}_z(z) = \|\mathbf{h}_{z,i}(z)\|_{9 \times 1}, \quad \mathbf{h}_t(t) = \|\mathbf{h}_{t,i}(t)\|_{9 \times 1}; \end{aligned}$$

$$\mathbf{g}_{i,x}(x) = \|\alpha_{i,x,j} \cdot \mathbf{g}_{i,j}(x)\|_{1 \times 9}, \quad \mathbf{g}_{i,y}(y) = \|\alpha_{i,y,j} \cdot \mathbf{g}_{i,j}(y)\|_{1 \times 9}, \quad \mathbf{g}_{i,z}(z) = \|\alpha_{i,z,j} \cdot \mathbf{g}_{i,j}(z)\|_{1 \times 9},$$

$$\mathbf{g}_{i,t}(t) = \|\alpha_{i,t,j} \cdot \mathbf{g}_{i,j}(t)\|_{1 \times 9}, \quad \alpha_{i,x,j}, \alpha_{i,y,j}, \alpha_{i,z,j}, \alpha_{i,t,j} = \overline{0,1}; \quad \alpha_{i,x,j} + \alpha_{i,y,j} + \alpha_{i,z,j} + \alpha_{i,t,j} = 1.$$

С л е д с т в и е 2. Для любой матрицы-функции  $\Psi(x, y, z, t) = \|\psi_i(x, y, z, t)\|_{8 \times 1}$  с непрерывными на  $0 < x, y, z, t < 1$  функциями  $\psi_i(x, y, z, t)$ , справедливо представление

$$\Psi(x, y, z, t) = (\mathbf{G}_x \mathbf{A}_x + \mathbf{G}_y \mathbf{A}_y + \mathbf{G}_z \mathbf{A}_z + \mathbf{G}_t \mathbf{A}_t) \mathbf{h}_x \mathbf{h}_y \mathbf{h}_z \mathbf{h}_t \mathbf{J},$$

где

$$\mathbf{G}_x(x) = \|\mathbf{g}_i(x) \cdot \delta_{i,j}\|_{8 \times 8}, \quad \mathbf{G}_y(y) = \|\mathbf{g}_i(y) \cdot \delta_{i,j}\|_{8 \times 8}, \quad \mathbf{G}_z(z) = \|\mathbf{g}_i(z) \cdot \delta_{i,j}\|_{8 \times 8}, \quad \mathbf{G}_t(t) = \|\mathbf{g}_i(t) \cdot \delta_{i,j}\|_{8 \times 8};$$

$$\mathbf{h}_x(x) = \|h_{x,i}(x) \cdot \delta_{i,j}\|_{9 \times 9}, \quad \mathbf{h}_y(y) = \|h_{y,i}(y) \cdot \delta_{i,j}\|_{9 \times 9}, \quad \mathbf{h}_z(z) = \|h_{z,i}(z) \cdot \delta_{i,j}\|_{9 \times 9}, \quad \mathbf{h}_t(t) = \|h_{t,i}(t) \cdot \delta_{i,j}\|_{9 \times 9};$$

$$\mathbf{A}_x = \|^x \alpha_{i,j}\|_{8 \times 9}, \quad \mathbf{A}_y = \|^y \alpha_{i,j}\|_{8 \times 9}, \quad \mathbf{A}_z = \|^z \alpha_{i,j}\|_{8 \times 9}, \quad \mathbf{A}_t = \|^t \alpha_{i,j}\|_{8 \times 9}; \quad \delta_{i,j} = \begin{cases} 0, & i \neq j; \\ 1, & i = j; \end{cases}$$

$${}^x \alpha_{i,j}, {}^y \alpha_{i,j}, {}^z \alpha_{i,j}, {}^t \alpha_{i,j} = \overline{0,1}; \quad {}^x \alpha_{i,j} + {}^y \alpha_{i,j} + {}^z \alpha_{i,j} + {}^t \alpha_{i,j} = 1; \quad \mathbf{J} = \|1\|_{9 \times 1}.$$

С л е д с т в и е 3. Для любой матрицы-функции  $\Psi(x, y, z, t) = \|\psi_i(x, y, z, t)\|_{8 \times 1}$  с непрерывными на  $0 < x, y, z, t < 1$  функциями  $\psi_i(x, y, z, t)$ , справедливо представление

$$\Psi(x, y, z, t) = \sum_{l=1}^S \mathbf{X}_l(x) \mathbf{Y}_l(y) \mathbf{Z}_l(z) \mathbf{T}_l(t) \mathbf{J},$$

где

$$\mathbf{X}_l = \|^l f_i(x) \cdot \delta_{i,j}\|_{8 \times 8}, \quad \mathbf{Y}_l = \|^l g_i(y) \cdot \delta_{i,j}\|_{8 \times 8}, \quad \mathbf{Z}_l = \|^l \zeta_i(z) \cdot \delta_{i,j}\|_{8 \times 8}, \quad \mathbf{T}_l = \|^l \tau_i(t) \cdot \delta_{i,j}\|_{8 \times 8}, \quad \mathbf{J} = \|1\|_{8 \times 1}.$$

С л е д с т в и е 4.

$$\mathbf{R}_x = \sum_{i=1}^{S_1} \mathbf{X}_{1,i}(x) \mathbf{Y}_{1,i}(y) \mathbf{Z}_{1,i}(z) \mathbf{T}_{1,i}(t), \quad \mathbf{R}_y = \sum_{i=1}^{S_2} \mathbf{X}_{2,i}(x) \mathbf{Y}_{2,i}(y) \mathbf{Z}_{2,i}(z) \mathbf{T}_{2,i}(t),$$

$$\mathbf{R}_z = \sum_{i=1}^{S_3} \mathbf{X}_{3,i}(x) \mathbf{Y}_{3,i}(y) \mathbf{Z}_{3,i}(z) \mathbf{T}_{3,i}(t), \quad \mathbf{R}_\sigma = \sum_{i=1}^{S_5} \mathbf{X}_{5,i}(x) \mathbf{Y}_{5,i}(y) \mathbf{Z}_{5,i}(z) \mathbf{T}_{5,i}(t),$$

$$\mathbf{R}_\rho = \sum_{i=1}^{S_6} \mathbf{X}_{6,i}(x) \mathbf{Y}_{6,i}(y) \mathbf{Z}_{6,i}(z) \mathbf{T}_{6,i}(t), \quad \mathbf{R}_t = \sum_{i=1}^{S_4} \mathbf{X}_{4,i}(x) \mathbf{Y}_{4,i}(y) \mathbf{Z}_{4,i}(z) \mathbf{T}_{4,i}(t),$$

где  $S_i$  – натуральные числа, зависящие от электродинамических параметров среды.

Применяя следствия из теоремы Колмогорова к уравнению (8), в конечном итоге получаем, что проблема разделения переменных в нем может быть сведена к нахождению решений уравнения вида

$$\sum_{l=1}^N \tilde{\mathbf{X}}_l(x) \tilde{\mathbf{Y}}_l(y) \tilde{\mathbf{Z}}_l(z) \tilde{\mathbf{T}}_l(t) \mathbf{J} = 0, \quad (13)$$

где

$$\tilde{\mathbf{X}}_l(x) = \|^l X_{i,j}(x)\|_{8 \times 8}, \quad \tilde{\mathbf{Y}}_l(y) = \|^l Y_{i,j}(y)\|_{8 \times 8}, \quad \tilde{\mathbf{Z}}_l(z) = \|^l Z_{i,j}(z)\|_{8 \times 8}, \quad \tilde{\mathbf{T}}_l(t) = \|^l T_{i,j}(t)\|_{8 \times 8}, \quad \mathbf{J} = \|1\|_{8 \times 1}.$$

По внешнему виду уравнение (13) напоминает билинейное функциональное (9). Принципиальное его отличие от последнего состоит в том, что в нем вместо функций фигурируют матрицы-функции, поэтому по аналогии с билинейным функциональным, уравнение вида (13) будем называть билинейным матрично-функциональным уравнением.

**3. Разделение переменных в системе уравнений Максвелла.** Воспользуемся приведенными выше результатами и установим закономерности разделения переменных в системе уравнений Максвелла (8). В целях сокращения предстоящих вычислений конкретизируем вид материальных

уравнений, а именно, будем рассматривать электромагнитные поля в отсутствие зарядов и токов в материальных средах, компоненты тензоров которых имеют вид

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_z(z)\varepsilon_t(t) & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_z(z)\varepsilon_t(t) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z(z)\varepsilon_t(t) \end{pmatrix}, \quad \hat{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_z(z)\mu_t(t) & 0 & 0 \\ 0 & \mu_z(z)\mu_t(t) & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z(z)\mu_t(t) \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma} = \|0\|_{3 \times 3}. \quad (14)$$

В этом случае для матриц (6) и системы (8) соответственно получаем:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_x &= \mathbf{R}_{z,x}\mathbf{R}_{t,x}, \mathbf{R}_{z,x} = \text{diag}(1, \varepsilon_z, 1, 1, 1, \mu_z, 1), \mathbf{R}_{t,x} = \text{diag}(1, \varepsilon_t, 1, 1, 1, \mu_t, 1), \\ \mathbf{R}_y &= \mathbf{R}_{z,y}\mathbf{R}_{t,y}, \mathbf{R}_{z,y} = \text{diag}(1, 1, \varepsilon_z, 1, 1, \mu_z, 1, 1), \mathbf{R}_{t,y} = \text{diag}(1, 1, \varepsilon_t, 1, 1, \mu_t, 1, 1), \\ \mathbf{R}_z &= \mathbf{R}_{z,z}\mathbf{R}_{t,z}, \mathbf{R}_{z,z} = \text{diag}(1, 1, 1, \varepsilon_z, \mu_z, 1, 1, 1), \mathbf{R}_{t,z} = \text{diag}(1, 1, 1, \varepsilon_t, \mu_t, 1, 1, 1), \\ \mathbf{R}_t &= \mathbf{R}_{z,t}\mathbf{R}_{t,t}, \mathbf{R}_{z,t} = \text{diag}(1, \varepsilon_z, \varepsilon_z, \varepsilon_z, \mu_z, \mu_z, \mu_z, 1), \mathbf{R}_{t,t} = \text{diag}(1, \varepsilon_t, \varepsilon_t, \varepsilon_t, \mu_t, \mu_t, \mu_t, 1); \\ & \left( \xi^1 \partial_x \mathbf{R}_{z,x} \mathbf{R}_{t,x} + \xi^2 \partial_y \mathbf{R}_{z,y} \mathbf{R}_{t,y} + \xi^3 \partial_z \mathbf{R}_{z,z} \mathbf{R}_{t,z} + \xi^4 \partial_t \mathbf{R}_{z,t} \mathbf{R}_{t,t} \right) \mathbf{R}_0 \Psi = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Воспользовавшись следствиями из теоремы Колмогорова, решение уравнения (15) ищем в виде

$$\begin{aligned} \Psi &= \mathbf{X}(x)\mathbf{Y}(y)\mathbf{Z}(z)\mathbf{T}(t)\mathbf{J}, \mathbf{X} = \text{diag}(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8), f_i = f_i(x); \\ \mathbf{Y} &= \text{diag}(g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7, g_8), g_i = g_i(y); \mathbf{T}(t) = \text{diag}(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5, \tau_6, \tau_7, \tau_8), \tau_i = \tau_i(t); \\ \mathbf{Z} &= \text{diag}(\kappa_1 \varsigma_1, \kappa_2 \varsigma_2, \kappa_2 \varsigma_3, \kappa_2 \varsigma_4, \kappa_7 \varsigma_5, \kappa_7 \varsigma_6, \kappa_7 \varsigma_7, \kappa_8 \varsigma_8), \varsigma_i = \varsigma_i(z), \end{aligned} \quad (16)$$

где  $\kappa_i$  – коэффициенты физической размерности компонент векторов электромагнитного поля. Подставляя (16) в (15), получаем конкретный вид билинейного матрично-функционального уравнения (13).

В настоящее время, к сожалению, не существует общих методов построения решений такого рода уравнений. Однако в нашем случае нам удастся эту задачу решить, при этом мы в полной мере используем идеи, реализованные в алгебраическом и обобщенном методах разделения переменных, а также свойства матриц  $\xi^i, \mathbf{R}_x, \mathbf{R}_y, \mathbf{R}_z, \mathbf{R}_t$ .

**3.1. Отделение пространственной переменной  $x$  от переменных  $(y, z, t)$ .** Воспользовавшись свойствами матриц  $\xi^i, \mathbf{R}_l, l = 0, x, y, z, t$ , уравнение (15) преобразуем к виду

$$\left\{ \tilde{\mathbf{R}}_{z,x} \tilde{\mathbf{R}}_{t,x} \left( \xi^1 \partial_x \mathbf{X} \right) + \left( \mathbf{X}_y \xi^2 \partial_y \mathbf{R}_{z,y} \mathbf{R}_{t,y} + \mathbf{X}_z \xi^3 \partial_z \mathbf{R}_{z,z} \mathbf{R}_{t,z} + \mathbf{X}_t \xi^4 \partial_t \mathbf{R}_{z,t} \mathbf{R}_{t,t} \right) \right\} \mathbf{Z} \mathbf{Y} \mathbf{T} \mathbf{R}_0 \mathbf{J} = 0. \quad (17)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_y &= \text{diag}(f_5, f_6, f_7, f_8, f_1, f_2, f_3, f_4), \mathbf{X}_z = \text{diag}(f_6, f_5, f_8, f_7, f_2, f_1, f_4, f_3), \\ \mathbf{X}_t &= \text{diag}(f_2, f_1, f_4, f_3, f_6, f_5, f_8, f_7), \tilde{\mathbf{R}}_{z,x} = \text{diag}(1, \mu_z, 1, 1, 1, \varepsilon_z, 1), \tilde{\mathbf{R}}_{t,x} = \text{diag}(1, \mu_t, 1, 1, 1, \varepsilon_t, 1). \end{aligned} \quad (18)$$

Предположим, что существует матрица  $\mathbf{S}_x = \|s_{i,j}(x)\|_{8 \times 8}$ , такая, что выполняются тождества

$$\mathbf{X}_y = \mathbf{S}_x \Lambda_{x,y}, \mathbf{X}_z = \mathbf{S}_x \Lambda_{x,z}, \mathbf{X}_t = \mathbf{S}_x \Lambda_{x,t}, \quad (19)$$

где  $\Lambda_{x,y}, \Lambda_{x,z}, \Lambda_{x,t}$  – матрицы числовых коэффициентов.

Для выполнения соотношений (19) необходимо принять

$$\begin{aligned} f_8 &= f_7 = f_3 = f_4, f_1 = f_5 = f_6 = f_2; \mathbf{X} = \text{diag}(f_2, f_2, f_4, f_4, f_2, f_2, f_4, f_4), \\ \Lambda_{x,y} &= \Lambda_{x,z} = \Lambda_{x,t} = \|\delta_{i,j}\|_{8 \times 8}, \mathbf{S}_x = \text{diag}(f_2, f_2, f_4, f_4, f_2, f_2, f_4, f_4). \end{aligned} \quad (20)$$

В этом случае уравнение (17) преобразуется к виду:

$$\left( \mathbf{S}_x^{-1} \left( \xi^1 \partial_x \mathbf{X} \right) + \left( \tilde{\mathbf{R}}_{z,x} \tilde{\mathbf{R}}_{t,x} \right)^{-1} \left( \xi^2 \partial_y \mathbf{R}_{z,y} \mathbf{R}_{t,y} + \xi^3 \partial_z \mathbf{R}_{z,z} \mathbf{R}_{t,z} + \xi^4 \partial_t \mathbf{R}_{z,t} \mathbf{R}_{t,t} \right) \right) \mathbf{Z} \mathbf{Y} \mathbf{T} \mathbf{R}_0 \mathbf{J} = 0. \quad (21)$$



Замечая тот факт, что в (21) только одна матрица-функция  $(\mathbf{S}_x^{-1}\xi^1\partial_x\mathbf{X})$  зависит от переменной  $x$ , приходим к заключению, что уравнение (21) обращается в тождество тогда и только тогда, когда выполняется соотношение

$$\mathbf{S}_x^{-1}\xi^1\frac{d}{dx}\mathbf{X}=\xi^1\Lambda_x, \Lambda_x=\text{diag}(\lambda_{x,1},\lambda_{x,2},\lambda_{x,3},\lambda_{x,4},\lambda_{x,5},\lambda_{x,6},\lambda_{x,7},\lambda_{x,8}). \quad (22)$$

В (22)  $\lambda_{x,i}$  – произвольные постоянные с физической размерностью (постоянные разделения переменных).

Таким образом, в уравнении (21) переменная  $x$  отделена, и соответствующая зависимость решения системы уравнений Максвелла определяется системой обыкновенных дифференциальных уравнений (22); по переменным  $(y, z, t)$  после отделения  $x$  будет иметь место следующая система уравнений в частных производных:

$$\left(\xi^1\Lambda_x\mathbf{R}_{z,x}\mathbf{R}_{t,x}+\xi^2\partial_y\mathbf{R}_{z,y}\mathbf{R}_{t,y}+\xi^3\partial_z\mathbf{R}_{z,z}\mathbf{R}_{t,z}+\xi^4\partial_t\mathbf{R}_{z,t}\mathbf{R}_{t,t}\right)\mathbf{Z}\mathbf{Y}\mathbf{T}\mathbf{R}_0\mathbf{J}=0. \quad (23)$$

**3.2. Разделение  $y, z$ , и  $t$ .** Повторяя рассуждения п. 3.1 применительно к уравнению (23), для определения явного вида матриц-функций  $\mathbf{Y}, \mathbf{T}, \mathbf{Z}$  получаем следующие системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$g_1=g_7=g_5=g_3, g_8=g_4=g_6=g_2; \mathbf{Y}=\text{diag}(g_3, g_2, g_3, g_2, g_3, g_2, g_3, g_2),$$

$$\mathbf{S}_y=\text{diag}(g_2, g_3, g_2, g_3, g_2, g_3, g_2, g_3), \Lambda_y=\text{diag}(\lambda_{y,1}, \lambda_{y,2}, \lambda_{y,3}, \lambda_{y,4}, \lambda_{y,5}, \lambda_{y,6}, \lambda_{y,7}, \lambda_{y,8}), \quad (24)$$

$$\mathbf{S}_y^{-1}\xi^2\frac{d}{dy}\mathbf{Y}=\xi^2\Lambda_y;$$

$$\tau_8=\tau_7=\tau_6=\tau_5, \tau_1=\tau_3=\tau_4=\tau_2; \mathbf{T}=\text{diag}(\tau_2, \tau_2, \tau_2, \tau_2, \tau_5, \tau_5, \tau_5, \tau_5); \tilde{\mathbf{R}}_{t,r}=\text{diag}(1, \mu_t, 1, 1, 1, 1, \varepsilon_t, 1);$$

$$\mathbf{S}_t=\text{diag}(\tau_5, \tau_5, \tau_5, \tau_5, \tau_2, \tau_2, \tau_2, \tau_2), \Lambda_t=\text{diag}(\lambda_{t,1}, \lambda_{t,2}, \lambda_{t,3}, \lambda_{t,4}, \lambda_{t,5}, \lambda_{t,6}, \lambda_{t,7}, \lambda_{t,8}); \quad (25)$$

$$\left(\tilde{\mathbf{R}}_{t,r}\mathbf{S}_t\right)^{-1}\left(\xi^4\frac{d}{dt}\mathbf{R}_{t,t}\right)\mathbf{T}=-\xi^4\Lambda_t;$$

$$\left\{\xi^1\Lambda_x\mathbf{R}_{z,x}+\xi^2\Lambda_y\mathbf{R}_{z,y}+\xi^3\frac{d}{dz}\mathbf{R}_{z,x}-\xi^4\Lambda_t\mathbf{R}_{z,t}\right\}\mathbf{Z}\mathbf{R}_0\mathbf{J}=0, \quad (26)$$

где  $\lambda_{y,i}, \lambda_{t,i}$  – постоянные разделения переменных.

**4. Решение системы уравнений Максвелла.** В результате разделения переменных в системе уравнений Максвелла в материальных средах вида (14) мы получили четыре системы обыкновенных дифференциальных уравнений (22), (24)–(26). Займемся их исследованием на предмет получения решений.

Переходя к явному виду матриц, фигурирующих в (22), и требуя совместимости последней, приходим к необходимости выполнения соотношений  $\lambda_{x,6}=\lambda_{x,5}=\lambda_{x,1}=\lambda_{x,2}$ ;  $\lambda_{x,8}=\lambda_{x,7}=\lambda_{x,3}=\lambda_{x,4}$ . В итоге система (22) приобретает вид:

$$\frac{df_2(x)}{dx}=f_4(x)\lambda_{x,2}, \quad \frac{df_4(x)}{dx}=f_2(x)\lambda_{x,4}, \quad (27)$$

и для общего решения получаем

$$f_2(x)=c_1\exp(\sqrt{\delta_x}x)+c_2\exp(-\sqrt{\delta_x}x); f_4(x)=\sqrt{\lambda_{x,4}/\lambda_{x,2}}\left(c_1\exp(\sqrt{\delta_x}x)-c_2\exp(-\sqrt{\delta_x}x)\right); \quad (28)$$

$$c_1, c_2 = \text{const}; \delta_x = \lambda_{x,2}\lambda_{x,4}.$$

Аналогичным образом для системы (24) можно получить

$$\begin{aligned}
\lambda_{y,8} = \lambda_{y,6} = \lambda_{y,4} = \lambda_{y,2}, \quad \lambda_{y,7} = \lambda_{y,5} = \lambda_{y,1} = \lambda_{y,3}; \\
\frac{dg_2}{dy} = \lambda_{y,2}g_3, \quad \frac{dg_3}{dy} = \lambda_{y,3}g_2; \\
g_2(y) = c_3 \exp(\sqrt{\delta_y}y) + c_4 \exp(-\sqrt{\delta_y}y); \quad g_3(y) = \sqrt{\lambda_{y,3}/\lambda_{y,2}} \left( c_3 \exp(\sqrt{\delta_y}y) - c_4 \exp(-\sqrt{\delta_y}y) \right); \\
c_3, c_4 = \text{const}; \quad \delta_y = \lambda_{y,2}\lambda_{y,3}.
\end{aligned} \tag{29}$$

Требую разрешимости системы (25), приходим к необходимости выполнения тождеств  $\lambda_{t,8} = \lambda_{t,7} = \lambda_{t,6} = \lambda_{t,5}$ ,  $\lambda_{t,1} = \lambda_{t,3} = \lambda_{t,4} = \lambda_{t,2}$  и окончательно получаем

$$\begin{aligned}
\delta_t = \lambda_{t,2}\lambda_{t,5}; \quad \frac{d(\varepsilon_t(t)\tau_2(t))}{dt} = \tau_5(t)\lambda_{t,2}, \quad \frac{d(\mu_t(t)\tau_5(t))}{dt} = \tau_2(t)\lambda_{t,5} \Rightarrow \\
\Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_t\mu_t \frac{d^2\tau_5(t)}{dt^2} + \left\{ 2\varepsilon_t \frac{d\mu_t}{dt} + \frac{d\varepsilon_t}{dt}\mu_t \right\} \frac{d\tau_5(t)}{dt} + \left( \varepsilon_t \frac{d^2\mu_t}{dt^2} + \frac{d\varepsilon_t}{dt} \frac{d\mu_t}{dt} - \delta_t \right) \tau_5(t) = 0; \\ \varepsilon_t\mu_t \frac{d^2\tau_2(t)}{dt^2} + \left\{ 2\frac{d\varepsilon_t}{dt}\mu_t + \varepsilon_t \frac{d\mu_t}{dt} \right\} \frac{d\tau_2(t)}{dt} + \left( \frac{d^2\varepsilon_t}{dt^2}\mu_t + \frac{d\varepsilon_t}{dt} \frac{d\mu_t}{dt} - \delta_t \right) \tau_2(t) = 0. \end{cases} \tag{30}
\end{aligned}$$

Уравнения (30) относятся к классу линейных однородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, исследованию которых посвящена обширная библиография (см., напр., [12]). Тем не менее, к сожалению, в общем виде получить их решения не удастся, а характер функций  $\tau_2(t)$ ,  $\tau_5(t)$  будет определяться конкретным видом функций  $\varepsilon_t(t)$ ,  $\mu_t(t)$ .

Обратимся теперь к системе (26). Используя явный вид матриц, получаем:

$$\kappa_7\lambda_{y,3}\zeta_5(z) + \kappa_7 \frac{d\zeta_6(z)}{dz} + \kappa_2\lambda_{t,2}\varepsilon_z\zeta_2(z) = 0, \tag{31}$$

$$\kappa_7\lambda_{x,4}\mu_z\zeta_7(z) + \kappa_7\lambda_{y,2}\mu_z\zeta_6(z) - \kappa_7 \frac{d\mu_z\zeta_5(z)}{dz} = 0, \tag{32}$$

$$-\kappa_7\lambda_{x,2}\zeta_6(z) + \kappa_7\lambda_{y,3}\zeta_7(z) - \kappa_2\lambda_{t,2}\varepsilon_z\zeta_4(z) = 0, \tag{33}$$

$$-\kappa_7\lambda_{x,2}\zeta_5(z) - \kappa_7 \frac{d\zeta_7(z)}{dz} + \kappa_2\lambda_{t,2}\varepsilon_z\zeta_3(z) = 0, \tag{34}$$

$$\kappa_2\lambda_{x,4}\zeta_4(z) + \kappa_2 \frac{d\zeta_2(z)}{dz} + \kappa_7\lambda_{t,5}\mu_z\zeta_6(z) = 0, \tag{35}$$

$$-\kappa_2\lambda_{x,4}\zeta_3(z) + \kappa_2\lambda_{y,2}\zeta_2(z) + \kappa_7\lambda_{t,5}\mu_z\zeta_5(z) = 0, \tag{36}$$

$$\kappa_2\lambda_{x,2}\varepsilon_z\zeta_2 + \kappa_2\lambda_{y,3}\varepsilon_z\zeta_3(z) - \kappa_2 \frac{d\varepsilon_z\zeta_4(z)}{dz} = 0, \tag{37}$$

$$-\kappa_2\lambda_{y,2}\zeta_4(z) - \kappa_2 \frac{d\zeta_3(z)}{dz} + \kappa_7\lambda_{t,5}\mu_z\zeta_7(z) = 0. \tag{38}$$

Пусть далее  $\delta_r = \delta_x + \delta_y \neq 0$ . Тогда из (32), (33) следует:

$$\zeta_6(z) = \frac{-\kappa_2\lambda_{x,4}\lambda_{t,2}\varepsilon_z\mu_z\zeta_4(z) + \kappa_7\lambda_{y,3} \frac{d\mu_z\zeta_5(z)}{dz}}{\kappa_7\mu_z\delta_r}, \quad \zeta_7(z) = \frac{\kappa_2\lambda_{y,2}\lambda_{t,2}\varepsilon_z\mu_z\zeta_4(z) + \kappa_7\lambda_{x,2} \frac{d\mu_z\zeta_5(z)}{dz}}{\kappa_7\mu_z\delta_r}. \tag{39}$$

Аналогично из (36), (37) имеем

$$\zeta_2(z) = \frac{-\kappa_7\lambda_{y,3}\lambda_{t,5}\varepsilon_z\mu_z\zeta_5(z) + \kappa_2\lambda_{x,4} \frac{d\varepsilon_z\zeta_4(z)}{dz}}{\kappa_2\varepsilon_z\delta_r}, \quad \zeta_3(z) = \frac{\kappa_7\lambda_{x,2}\lambda_{t,5}\varepsilon_z\mu_z\zeta_5(z) + \kappa_2\lambda_{y,2} \frac{d\varepsilon_z\zeta_4(z)}{dz}}{\kappa_2\varepsilon_z\delta_r}. \tag{40}$$

Подставляя выражения (39), (40) в оставшиеся уравнения рассматриваемой системы, получаем обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$\varepsilon_z^2 \frac{d^2 \zeta_4(z)}{dz^2} + \varepsilon_z \frac{d\varepsilon_z}{dz} \frac{d\zeta_4(z)}{dz} + \left\{ \varepsilon_z \frac{d^2 \varepsilon_z}{dz^2} - \left( \frac{d\varepsilon_z}{dz} \right)^2 - \varepsilon_z^3 \mu_z \delta_t + \varepsilon_z^2 \delta_r \right\} \zeta_4(z) = 0, \quad (41)$$

$$\mu_z^2 \frac{d^2 \zeta_5(z)}{dz^2} + \mu_z \frac{d\mu_z}{dz} \frac{d\zeta_5(z)}{dz} + \left\{ \mu_z \frac{d^2 \mu_z}{dz^2} - \left( \frac{d\mu_z}{dz} \right)^2 - \varepsilon_z \mu_z^3 \delta_t + \mu_z^2 \delta_r \right\} \zeta_5(z) = 0. \quad (42)$$

Очевидно, что уравнения (41), (42) относятся к тому же виду, что и уравнения (30), т. е. являются линейными однородными обыкновенными дифференциальными уравнениями второго порядка, и характер функций  $\zeta_4(z)$ ,  $\zeta_5(z)$  будет определяться конкретным видом функций  $\varepsilon_z(z)$ ,  $\mu_z(z)$ .

Таким образом, в случае, когда  $\delta_r \neq 0$ , построив решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений (22), (24)–(26), находим все компоненты электромагнитного поля:

$$\begin{aligned} E_x &= \left( c_1 e^{\sqrt{\delta_x x} + c_2 e^{-\sqrt{\delta_x x}} \right) \left( c_3 e^{\sqrt{\delta_y y} + c_4 e^{-\sqrt{\delta_y y}} \right) \frac{-\kappa_7 \lambda_{y,3} \lambda_{t,5} \varepsilon_z \mu_z \zeta_5(z) + \kappa_2 \lambda_{x,4} \frac{d\varepsilon_z \zeta_4(z)}{dz}}{\varepsilon_z \delta_r} \tau_2(t), \\ E_y &= \sqrt{\lambda_{x,4}/\lambda_{x,2}} \sqrt{\lambda_{y,3}/\lambda_{y,2}} \left( c_1 e^{\sqrt{\delta_x x} - c_2 e^{-\sqrt{\delta_x x}} \right) \left( c_3 e^{\sqrt{\delta_y y} - c_4 e^{-\sqrt{\delta_y y}} \right) \times \\ &\quad \times \frac{\kappa_7 \lambda_{x,2} \lambda_{t,5} \varepsilon_z \mu_z \zeta_5(z) + \kappa_2 \lambda_{y,2} \frac{d\varepsilon_z \zeta_4(z)}{dz}}{\varepsilon_z \delta_r} \tau_2(t), \\ E_z &= -\kappa_2 \sqrt{\lambda_{x,4}/\lambda_{x,2}} \left( c_1 e^{\sqrt{\delta_x x} - c_2 e^{-\sqrt{\delta_x x}} \right) \left( c_3 e^{\sqrt{\delta_y y} + c_4 e^{-\sqrt{\delta_y y}} \right) \zeta_4(z) \tau_2(t), \\ H_z &= -\kappa_7 \sqrt{\lambda_{y,3}/\lambda_{y,2}} \left( c_1 e^{\sqrt{\delta_x x} + c_2 e^{-\sqrt{\delta_x x}} \right) \left( c_3 e^{\sqrt{\delta_y y} - c_4 e^{-\sqrt{\delta_y y}} \right) \zeta_5(z) \tau_5(t), \\ H_y &= \left( c_1 e^{\sqrt{\delta_x x} + c_2 e^{-\sqrt{\delta_x x}} \right) \left( c_3 e^{\sqrt{\delta_y y} + c_4 e^{-\sqrt{\delta_y y}} \right) \frac{-\kappa_2 \lambda_{x,4} \lambda_{t,2} \varepsilon_z \mu_z \zeta_4(z) + \kappa_7 \lambda_{y,3} \frac{d\mu_z \zeta_5(z)}{dz}}{\mu_z \delta_r} \tau_5(t), \\ H_x &= \sqrt{\lambda_{x,4}/\lambda_{x,2}} \sqrt{\lambda_{y,3}/\lambda_{y,2}} \left( c_1 e^{\sqrt{\delta_x x} - c_2 e^{-\sqrt{\delta_x x}} \right) \left( c_3 e^{\sqrt{\delta_y y} - c_4 e^{-\sqrt{\delta_y y}} \right) \times \\ &\quad \times \frac{\kappa_2 \lambda_{y,2} \lambda_{t,2} \varepsilon_z \mu_z \zeta_4(z) + \kappa_7 \lambda_{x,2} \frac{d\mu_z \zeta_5(z)}{dz}}{\mu_z \delta_r} \tau_5(t). \end{aligned}$$

Рассмотрим ситуацию, когда  $\delta_r = \delta_x + \delta_y = 0$ . В этом случае система обыкновенных дифференциальных уравнений (31)–(38) становится переопределенной.

Действительно, из (32), (33), (36), (37) соответственно следуют уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{d\mu_z \zeta_5(z)}{dz} &= \frac{\lambda_{x,4}}{\lambda_{y,3}} \frac{\kappa_2}{\kappa_7} \lambda_{t,2} \varepsilon_z \mu_z \zeta_4(z), \quad \frac{d\varepsilon_z \zeta_4(z)}{dz} = \frac{\lambda_{y,3}}{\lambda_{x,4}} \frac{\kappa_7}{\kappa_2} \lambda_{t,5} \varepsilon_z \mu_z \zeta_5(z) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{d^2 \zeta_4}{dz^2} + \frac{\varepsilon'_z}{\varepsilon_z} \frac{d\zeta_4}{dz} + \left( \frac{\varepsilon''_z}{\varepsilon_z} - \frac{(\varepsilon'_z)^2}{\varepsilon_z^2} - \varepsilon_z \mu_z \delta_t \right) \zeta_4 &= 0; \quad \frac{d^2 \zeta_5}{dz^2} + \frac{\mu'_z}{\mu_z} \frac{d\zeta_5}{dz} + \left( \frac{\mu''_z}{\mu_z} - \frac{(\mu'_z)^2}{\mu_z^2} - \varepsilon_z \mu_z \delta_t \right) \zeta_5 = 0. \end{aligned} \quad (43)$$

Из уравнений (31), (35), (38), (34) получаем неоднородные обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка:

$$\frac{d^2 \zeta_2}{dz^2} - \frac{\mu'_z}{\mu_z} \frac{d\zeta_2}{dz} - \delta_t \varepsilon_z \mu_z \zeta_2 = \frac{\kappa_7}{\kappa_2} \lambda_{y,3} \lambda_{t,5} \mu_z \zeta_5 + \lambda_{x,4} \left( \zeta'_4 - \frac{\mu'_z}{\mu_z} \zeta_4 \right), \quad (44)$$

$$\frac{d^2 \zeta_6}{dz^2} - \frac{\varepsilon'_z}{\varepsilon_z} \frac{d\zeta_6}{dz} - \delta_t \varepsilon_z \mu_z \zeta_6 = \frac{\kappa_2}{\kappa_7} \lambda_{x,4} \lambda_{t,2} \varepsilon_z \zeta_4 - \lambda_{y,3} \left( \zeta'_5 - \frac{\varepsilon'_z}{\varepsilon_z} \zeta_5 \right), \quad (45)$$

$$\frac{d^2 \zeta_3}{dz^2} - \frac{\mu'_z}{\mu_z} \frac{d\zeta_3}{dz} - \delta_t \varepsilon_z \mu_z \zeta_3 = -\frac{\kappa_7}{\kappa_2} \lambda_{x,2} \lambda_{t,5} \mu_z \zeta_5 - \lambda_{y,2} \left( \zeta_4 - \frac{\mu'_z}{\mu_z} \zeta_4 \right), \quad (46)$$

$$\frac{d^2 \zeta_7}{dz^2} - \frac{\varepsilon'_z}{\varepsilon_z} \frac{d\zeta_7}{dz} - \delta_t \varepsilon_z \mu_z \zeta_7 = -\frac{\kappa_2}{\kappa_7} \lambda_{y,2} \lambda_{t,2} \varepsilon_z \zeta_4 - \lambda_{x,2} \left( \zeta_5 - \frac{\varepsilon'_z}{\varepsilon_z} \zeta_5 \right). \quad (47)$$

Помимо уравнений (43)–(47), искомые функции  $\zeta_i(z)$  должны удовлетворять тождествам:

$$-\kappa_7 \lambda_{x,2} \zeta_6 + \kappa_7 \lambda_{y,3} \zeta_7 = \kappa_2 \lambda_{t,2} \varepsilon_z \zeta_4; \quad -\kappa_2 \lambda_{x,4} \zeta_3 + \kappa_2 \lambda_{y,2} \zeta_2 = -\kappa_7 \lambda_{t,5} \mu_z(z) \zeta_5. \quad (48)$$

Вопрос о том, в каких случаях переопределенная система (43)–(48) будет иметь решения, а также какова их физическая интерпретация, остается открытым и является предметом дальнейших исследований.

**Заключение.** В настоящей работе нам удалось показать, что задача разделения переменных в уравнениях Максвелла может быть сведена к задаче поиска решений билинейных матрично-функциональных уравнений. Данный факт позволил улучшить алгебраический метод разделения переменных и обобщить его на случай исследования уравнений Максвелла как системы дифференциальных уравнений в частных производных. В порядке иллюстрации возможностей предлагаемого метода осуществлено полное разделение переменных в уравнениях Максвелла для одного случая неоднородных нестационарных сред. Полученные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, следующие из уравнений Максвелла, позволяют осуществлять расчет электромагнитного поля как в пространственно-частотном, так и в пространственно-временном представлении.

## Литература

1. Андрушкевич И. Е., Шишкин Г. В. // Теорет. и мат. физика. 1987. № 2. С. 289–302.
2. Андрушкевич И. Е. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2008. № 1. С. 60–66.
3. Шапиро И. С. // Успехи физ. наук. 1972. Т. 108, № 2. С. 319–333.
4. Боргардт А. А. // Докл. АН СССР. 1951. Т. 78, № 6. С. 1113–1114.
5. Федоров Ф. И. // Докл. АН СССР. 1952. Т. 82, № 1. С. 37–40.
6. Фуцич В. И., Никитин А. Г. // Scientific Works. 2000. Vol. 2. P. 237–278.
7. Скоробогатько В. Я. Исследования по качественной теории дифференциальных уравнений с частными производными. Киев, 1980.
8. Андрушкевич И. Е. Методы разделения переменных в волновых уравнениях. Новополоцк, 2010.
9. Колмогоров А. Н. // Докл. АН СССР. 1957. Т. 114, № 5. С. 953–956.
10. Sprecher D. A. // J. Approxim. Theory. 1972. Vol. 6, N 2. P. 123–134.
11. Doss R. // Amer. J. Math. 1976. Vol. 98, N. P. 375–383.
12. Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 2001.

I. E. ANDRUSHKEVICH, Yu. V. SHIENOK

## REDUCTION OF THE SYSTEM OF MAXWELL EQUATIONS TO THE SYSTEM OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

### Summary

The algebraic variables separation method, developed prior to Dirack's relative equation, has been improved and generalized to the system of Maxwell equations in order to construct its accurate solutions.

УДК 543.4

В. С. МУХА

## ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ В ПАРАЛЛЕЛЬНОМ ФАКТОРНОМ АНАЛИЗЕ

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

(Поступила в редакцию 25.11.2014)

**Введение.** Параллельный факторный анализ (PARAFAC) достаточно активно развивается в хеометрике. Математическая модель измерений в PARAFAC имеет следующий вид [1, 2]:

$$g_{a,i,j,k} = \sum_{f=1}^{n_f} a_{i,f} b_{j,f} c_{k,f} + v_{i,j,k}, \quad i = \overline{1, n_a}, \quad j = \overline{1, n_b}, \quad k = \overline{1, n_c}. \quad (1)$$

Эта модель используется в задаче флуоресценции растворов веществ [1, 2]. Предполагается, что раствор (образец) содержит  $n_f$  веществ и анализируется с помощью спектрофлуорометра. Переменная  $b_{j,f}$  в (1) интерпретируется как относительная эмиссия света единицей  $f$ -го вещества на  $j$ -й длине волны излучения (emission wavelenght),  $c_{k,f}$  – как относительная эмиссия света единицей  $f$ -го вещества на  $k$ -й длине волны возбуждения (excitation wavelenght), и  $a_{i,f}$  означает концентрацию  $f$ -го вещества в  $i$ -м растворе. Переменная  $g_{a,i,j,k}$  означает интенсивность эмиссии света  $i$ -м раствором на  $j$ -й длине волны при его возбуждении на  $k$ -й длине волны, а переменная  $v_{i,j,k}$  – шум при измерениях. Переменные модели (1) можно считать элементами матриц:  $A = (a_{i,f})$ ,  $B = (b_{j,f})$ ,  $C = (c_{k,f})$ ,  $G_a = (g_{a,i,j,k})$ ,  $V = (v_{i,j,k})$ ,  $i = \overline{1, n_a}$ ,  $j = \overline{1, n_b}$ ,  $k = \overline{1, n_c}$ ,  $f = \overline{1, n_f}$ ,  $f$ -й столбец матрицы  $B$  как функция длины волны излучения называется спектром эмиссии вещества  $f$ , а  $f$ -й столбец матрицы  $C$  как функция длины волны возбуждения – спектром возбуждения вещества  $f$ .

Реалистичной и практически важной представляется задача получения оценки матрицы концентраций  $A$  по имеющимся матрицам  $G_a, B, C$ . Матрицы  $B, C$  могут быть известны, так как можно создать банк спектров различных веществ. В таком виде PARAFAC-задача является регрессионной с неизвестным матричным параметром  $A$ . Она сформулирована и решена в работах [3, 4]. Модель измерений (1) представляется в многомерно-матричной форме [5], для чего формируется трехмерная матрица  $M_a$ ,

$$M_a = (b_{j,f} c_{k,f}) = (m_{a,f,j,k}), \quad f = \overline{1, n_f}, \quad j = \overline{1, n_b}, \quad k = \overline{1, n_c},$$

и модель (1) записывается в виде

$$G_a = (g_{a,i,j,k}) = \left( \sum_{f=1}^{n_f} a_{i,f} m_{a,f,j,k} \right) + (v_{i,j,k}) = {}^{0,1}(AM_a) + V, \quad i = \overline{1, n_a}, \quad j = \overline{1, n_b}, \quad k = \overline{1, n_c}. \quad (2)$$

Оценка  $\hat{A}$  матрицы концентраций веществ  $A$  модели (2) отыскивается методом наименьших квадратов, т. е. из критерия

$$F = {}^{0,3}(G_a - {}^{0,1}(AM_a))^2 \rightarrow \min_A,$$

и определяется выражением

$$\hat{A} = {}^{0,1}({}^{0,2}(G_a M_a^{H_{3,1}}) {}^{0,1}({}^{0,2}(M_a M_a^{H_{3,1}}))^{-1}). \quad (3)$$

Здесь  $M_a^{H_{3,1}}$  означает матрицу  $M_a$ , транспонированную соответственно подстановке  $H_{3,1}$  [5], а  $a^{0,1} ({}^{0,2}(M_a M_a^{H_{3,1}}))^{-1}$  – матрицу, (0,1)-обратную к матрице  ${}^{0,2}(M_a M_a^{H_{3,1}})$  [5].

Дальнейший анализ модели измерений (2) может быть выполнен стандартными для регрессионного анализа приемами: проверка значимости параметров (концентраций) и отсеивание незначимых, проверка адекватности модели и ее замена в случае неадекватности путем включения в нее новых веществ [6, 7]. Указанные процедуры могут быть выполнены при известных законах распределения интересующих нас статистик. Этот вопрос также разработан в работе [3]. Ниже предлагается иной подход – рассмотрение задачи как частного случая задачи многомерно-матричного линейного регрессионного анализа [8]. При этом будут получены эквивалентные по содержанию, но иные по форме результаты.

**Распределения статистик и проверка гипотез в PARAFAC.** Модель измерений (2) допускает иное представление. Введем в рассмотрение одномерные матрицы  $g_a = (g_{a,i})$ ,  $v = (v_i)$ ,  $i = \overline{1, n_a}$ ,  $m_a = (m_{a,f})$ ,  $f = \overline{1, n_f}$ , зафиксировав мультииндекс  $\mu = (j, k)$  в матрицах  $G_a$ ,  $V$ ,  $M_a$ . Матрицы  $g_a$ ,  $v$  и  $m_a$  являются, таким образом, сечениями ориентации  $\mu = (j, k)$  матриц  $G_a$ ,  $V$ ,  $M_a$  соответственно, т. е.  $G_a = ((g_{a,i})_\mu) = (g_{a,\mu})$ ,  $V = ((v_i)_\mu) = (v_\mu)$ ,  $M_a = ((m_{a,f})_\mu) = (m_{a,\mu})$ . Здесь и далее  $\mu = (j, k)$  – мультииндекс, пробегающий значения от 1 до  $n = n_b n_c$ . В этих новых обозначениях модель измерений (2) приобретает вид

$$g_{a,\mu} = {}^{0,1}(A m_{a,\mu}) + v_\mu, \mu = (j, k), j = \overline{1, n_b}, k = \overline{1, n_c}. \quad (4)$$

При этом, конечно, предполагается наличие гипотетической модели данных вида

$$g = {}^{0,1}(A m_a) = (g_i), i = \overline{1, n_a}, \quad (5)$$

для заданных пар данных  $(m_{a,\mu}, g_\mu)$ , т. е.

$$g_\mu = {}^{0,1}(A m_{a,\mu}), \mu = (j, k), j = \overline{1, n_b}, k = \overline{1, n_c}.$$

Получение матрицы данных  $G_a = (g_{a,\mu})$  будем называть одним опытом, а фиксированное значение мультииндекса  $\mu = (j, k)$  – отдельной точкой опыта.

Модель вида (4) представляет собой частный случай модели измерений  $(p, q)$ -мерно-матричного линейного регрессионного анализа [8] с  $p$ -мерной выходной и  $q$ -мерной входной матрицами соответственно, а именно, модель (1,1)-мерно-матричного линейного регрессионного анализа.

В соответствии с работой [8], оценка  $\hat{A}$  матрицы  $A$  модели измерений (4) определяется выражением

$$\hat{A} = (\hat{a}_{i,f}) = {}^{0,1}(s_{gm} s_{m^2}^{-1}), i = \overline{1, n_a}, f = \overline{1, n_f}, \quad (6)$$

где

$$s_{gm} = \frac{1}{n_b n_c} \sum_{\mu=1}^{n_b n_c} {}^{0,0}(g_{a,\mu} m_{a,\mu}),$$

$$s_{m^2} = \frac{1}{n_b n_c} \sum_{\mu=1}^{n_b n_c} {}^{0,0}(m_{a,\mu} m_{a,\mu}),$$

и  $s_{m^2}^{-1}$  – матрица, (0,1)-обратная к матрице  $s_{m^2}$ . Легко убедиться в том, что  $n s_{gm} = {}^{0,2}(G_a M_a^{H_{3,1}})$  и  $n s_{m^2} = {}^{0,2}(M_a M_a^{H_{3,1}})$ , так что оценка (6) совпадает с оценкой (3). Оценка  $\hat{g}$  отклика  $g$  в (5) определяется выражением

$$\hat{g} = {}^{0,1}(\hat{A} m_a) = (\hat{g}_i), i = \overline{1, n_a}. \quad (7)$$

В связи со сказанным дальнейшие результаты являются частным случаем и интерпретацией результатов работы [8] и приводятся без доказательств.

**Теорема 1.** Если матрицы ошибок измерений  $v_\mu$  в PARAFAC-модели измерений (4) имеют математическое ожидание  $E(v_\mu) = 0$  и дисперсионную матрицу  $D(v_\mu) = \sigma^2 E(0,1)$ , где  $E(0,1)$  –  $(0,1)$ -единичная  $(n_a \times n_a)$ -матрица (обычная единичная матрица),  $\sigma^2$  – скалярный параметр, имеющий физический смысл дисперсии ошибок измерений, и независимы по  $\mu$ , то математическое ожидание оценки  $\hat{A}$  определяется выражением

$$E(\hat{A}) = A, \quad (8)$$

а дисперсионная матрица – выражением

$$D(\hat{A}) = E^{(0,0)}((\hat{A} - E(\hat{A}))(\hat{A} - E(\hat{A}))) = \frac{\sigma^2}{n_b n_c} D^{(a)}, \quad (9)$$

где

$$D^{(a)} = (d_{i,j,i',j'}^{(a)}) = D^{(H2,1,E2)}, \quad i, i' = \overline{1, n_a}, \quad j, j' = \overline{1, n_f},$$

$$D = (d_{j,i,i',j'}) = \begin{cases} s^{-1} & i = i'; \\ m^2 & i, i' = \overline{1, n_a}, \quad j, j' = \overline{1, n_f}; \\ 0 & i \neq i'; \end{cases}$$

и  $0$  – нулевая  $(n_f \times n_f)$ -матрица. Математическое ожидание оценки отклика (7) определяется выражением

$$E(\hat{g}) = {}^{0,1}(Am_a) = g, \quad (10)$$

а дисперсионная матрица – выражением

$$D(\hat{g}) = E^{(0,0)}((\hat{g} - E(\hat{g}))(\hat{g} - E(\hat{g}))) = \frac{\sigma^2}{n_b n_c} D^{(g)}, \quad (11)$$

где

$$D^{(g)} = {}^{0,1}(m_a \quad {}^{0,1}(Dm_a)) = (d_{i,i'}^{(g)}), \quad i, i' = \overline{1, n_a}.$$

Если, кроме того, ошибки измерений  $v_\mu$  нормально распределены с математическим ожиданием  $E(v_\mu) = 0$  и дисперсионной матрицей  $D(v_\mu) = \sigma^2 E(0,1)$ , то оценка  $\hat{A}$  имеет нормальное распределение с математическим ожиданием (8) и дисперсионной матрицей (9), и оценка  $\hat{g}_\mu$  имеет нормальное распределение с математическим ожиданием (10) и дисперсионной матрицей (11).

Дисперсия  $\sigma^2$  ошибок измерений  $v_\mu$  в модели измерений (4) чаще всего неизвестна, и по результатам измерений требуется получить ее оценку  $\hat{\sigma}^2$ . Такой оценкой может служить статистика

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n_a n_b n_c} \text{tr} \left( \sum_{\mu=1}^{n_b n_c} {}^{0,0} (g_{a,\mu} - \hat{g}_{a,\mu})^2 \right). \quad (12)$$

**Теорема 2.** В условиях теоремы 1 (кроме условия нормальности ошибок измерений) оценка  $\hat{\sigma}^2$  (12) параметра  $\sigma^2$  является асимптотически несмещенной, а оценка

$$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{n_a n_b n_c \hat{\sigma}^2}{n_a n_b n_c - n_a n_f} = \frac{1}{n_a n_b n_c - n_a n_f} \text{tr} \left( \sum_{\mu=1}^{n_b n_c} {}^{0,0} (g_{a,\mu} - \hat{g}_{a,\mu})^2 \right)$$

несмещенной. Если, кроме того, ошибки измерений  $v_\mu$  распределены по нормальному закону  $N(0, \sigma^2 E(0,1))$ , то статистика

$$v = \frac{n_a n_b n_c \hat{\sigma}^2}{\sigma^2} = \frac{(n_a n_b n_c - n_a n_f) \hat{\sigma}_1^2}{\sigma^2} \quad (13)$$

имеет распределение хи-квадрат с  $n_a n_b n_c - n_a n_f$  степенями свободы. Оценки  $\hat{\sigma}^2$  и  $\hat{A}$ , а также  $\hat{\sigma}_1^2$  и  $\hat{A}$  независимы.

З а м е ч а н и е 1. В правой части равенства (13) работы [8], на основе которого записано равенство (13) данной работы, множитель  $n$  должен отсутствовать.

Рассмотрим теперь некоторые статистики, связанные с полученными оценками. На основании теорем 1 и 2 можно сделать вывод, что статистики

$$u_{i,f}^{(a)} = \frac{\widehat{a}_{i,f} - a_{i,f}}{\sigma \sqrt{d_{i,j,i,j}^{(a)}}} \sqrt{n_b n_c}, \quad i = \overline{1, n_a}, \quad f = \overline{1, n_f},$$

$$u_i^{(g)} = \frac{\widehat{g}_i - g_i}{\sigma \sqrt{d_{i,i}^{(g)}}} \sqrt{n_b n_c}, \quad i = \overline{1, n_a},$$

распределены по нормальному закону  $N(0,1)$ , а статистики

$$t_{i,f}^{(a)} = \frac{\widehat{a}_{i,f} - a_{i,f}}{\widehat{\sigma}_1 \sqrt{d_{i,f,i,f}^{(a)}}} \sqrt{n_b n_c}, \quad i = \overline{1, n_a}, \quad f = \overline{1, n_f}, \quad (14)$$

$$t_i^{(g)} = \frac{\widehat{g}_i - g_i}{\widehat{\sigma}_1 \sqrt{d_{i,i}^{(g)}}} \sqrt{n_b n_c}, \quad i = \overline{1, n_a}, \quad (15)$$

имеют распределение Стьюдента с  $n_a n_b n_c - n_a n_f$  степенями свободы. Следует иметь в виду, что статистики  $u_{i,f}^{(a)}$  и  $t_{i,f}^{(g)}$  рассчитываются для любых заданных значений  $m_{a,\mu}$  вектора  $m_a$ ,  $\mu = (j, k)$ ,  $j = \overline{1, n_b}$ ,  $k = \overline{1, n_c}$ .

З а м е ч а н и е 2. Правая часть равенства (15) работы [8], на основе которого записано равенство (15) данной работы, должна быть умножена на  $\sqrt{n}$ .

Полученные выше статистики и их распределения позволяют строить доверительные интервалы и проверять гипотезы для PARAFAC-модели аналогично тому, как это делается в классическом регрессионном анализе [6, 7]. В частности, статистики  $t_{i,f}^{(a)}$  (14) позволяют проверять гипотезы вида

$$\{H_0 : a_{i,f} = 0; H_1 : a_{i,f} \neq 0\}, \quad (16)$$

которые называются гипотезами о значимости элементов  $a_{i,f}$  матрицы концентраций веществ  $A = (a_{i,f})$ . Если эмпирическое значение  $t_{i,f,\alpha}^{(a)}$  статистики  $t_{i,f}^{(a)}$  удовлетворяет условию

$$|t_{i,f,\alpha}^{(a)}| \leq t_{i,f,\alpha/2}^{(a)},$$

где  $t_{i,f,\alpha/2}^{(a)} - 100\alpha / 2$ -процентная точка распределения Стьюдента с  $n_a n_b n_c - n_a n_f$  степенями свободы, то гипотеза  $H_0 : a_{i,f} = 0$  принимается, т. е. считается, что вещество  $f$  в  $i$ -м растворе отсутствует.

Статистики  $t_{i,f}^{(a)}$  позволяют строить доверительные интервалы для элементов  $a_{i,f}$  матрицы концентраций веществ  $A = (a_{i,f})$ . Эти интервалы с доверительной вероятностью  $\gamma$  имеют следующий вид:

$$\widehat{a}_{i,f} - t_{i,f,(1-\gamma)/2}^{(a)} \frac{\widehat{\sigma}_1 \sqrt{d_{i,f,i,f}^{(a)}}}{\sqrt{n_b n_c}} \leq a_{i,f} \leq \widehat{a}_{i,f} + t_{i,f,(1-\gamma)/2}^{(a)} \frac{\widehat{\sigma}_1 \sqrt{d_{i,f,i,f}^{(a)}}}{\sqrt{n_b n_c}}, \quad i = \overline{1, n_a}, \quad f = \overline{1, n_f},$$

где  $t_{i,f,(1-\gamma)/2}^{(a)} - 100(1-\gamma) / 2$ -процентная точка распределения Стьюдента с  $n_a n_b n_c - n_a n_f$  степенями свободы.

Доверительный интервал для значений функции отклика  $g_i$  строится на основе статистики  $t_i^{(g)}$  и имеет вид

$$\widehat{g}_i - t_{i,(1-\gamma)/2}^{(g)} \frac{\widehat{\sigma}_1 \sqrt{d_{i,i}^{(g)}}}{\sqrt{n_b n_c}} \leq g_i \leq \widehat{g}_i + t_{i,(1-\gamma)/2}^{(g)} \frac{\widehat{\sigma}_1 \sqrt{d_{i,i}^{(g)}}}{\sqrt{n_b n_c}}, \quad i = \overline{1, n_a},$$



где  $t_{i,(1-\gamma)/2}^{(g)}$  – 100(1 –  $\gamma$ ) / 2-процентная точка распределения Стьюдента с  $n_a n_b n_c - n_a n_f$  степенями свободы,  $\gamma$  – доверительная вероятность.

Важным вопросом является проверка адекватности применяемой математической модели. Если модель не адекватна, то полученные выводы об оценках концентраций веществ будут ошибочными. Выполним  $n_\delta \geq 2$  независимых дополнительных опытов, т. е. получим еще  $n_\delta$  матриц данных  $G_a$ . По этим данным можно получить матрицу несмещенных оценок  $\hat{\sigma}_{1,\delta}^2 = (\hat{\sigma}_{1,i,\mu,\delta}^2)$  дисперсии  $\sigma_0^2$  ошибок объекта (прибора с растворами) по формуле

$$\hat{\sigma}_{1,i,\mu,\delta}^2 = \frac{1}{n_\delta - 1} \sum_{k=1}^{n_\delta} (g_{a,i,\mu} - \bar{g}_{a,i,\mu})^2, \quad i = \overline{1, n_a}, \mu = (j, k), j = \overline{1, n_b}, k = \overline{1, n_c},$$

где  $\bar{g}_{a,i,\mu} = \frac{1}{n_\delta} \sum_{k=1}^{n_\delta} g_{a,i,\mu,k}$ . Понятно, что статистика

$$w_{i,\mu} = \frac{(n_\delta - 1) \hat{\sigma}_{1,i,\mu,\delta}^2}{\sigma_0^2}, \quad i = \overline{1, n_a}, \mu = (j, k), j = \overline{1, n_b}, k = \overline{1, n_c},$$

имеет распределение хи-квадрат с  $n_\delta - 1$  степенями свободы. Статистики  $v$  и  $w_{i,\mu}$  независимы.

Гипотеза об адекватности модели (однородности дисперсии) имеет вид  $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$  (против альтернативы  $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$ ) [7]. Если  $H_0$  верна, то статистика

$$F_{i,\mu} = \frac{\hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma}_{1,i,\mu,\delta}^2}, \quad i = \overline{1, n_a}, \mu = (j, k), j = \overline{1, n_b}, k = \overline{1, n_c},$$

имеет распределение Фишера с  $n_a n_b n_c - n_a n_f, n_\delta - 1$  степенями свободы. Гипотезу  $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$  можно проверить следующим образом. Если эмпирическое значение  $F_{\varepsilon,i,\mu}$  статистики  $F_{i,\mu}$  удовлетворяет неравенству  $F_{\varepsilon,i,\mu} \geq F_\alpha$ , где  $F_\alpha$  – 100 $\alpha$ -процентная точка распределения Фишера с  $n_a n_b n_c - n_a n_f, n_\delta - 1$  степенями свободы, то гипотеза об адекватности модели отклоняется (модель признается не адекватной) на уровне  $\alpha$  для одного раствора  $i = \overline{1, n_a}$  и одной точки опыта  $\mu = (j, k), j = \overline{1, n_b}, k = \overline{1, n_c}$ . Модель признается не адекватной в целом, если она не адекватна хотя бы для одного раствора. Можно также посчитать число отклонений гипотезы согласно условию  $F_{\varepsilon,i,\mu} \geq F_\alpha$  для всех растворов  $i = \overline{1, n_a}$  и всех точек опыта  $\mu = (j, k), j = \overline{1, n_b}, k = \overline{1, n_c}$ . Если процент этих отклонений (от общего числа проверок) будет меньше некоторого малого числа (например, 5 %), то модель можно признать адекватной.

**Компьютерное моделирование.** Продолжим анализ примера из работы [4], где моделировались данные, подобные флуоресценции растворов аминокислот в [1, 2], полученной на спектрофлуорометре PE LS50B. Рассмотрим четыре вещества, спектры флуоресценции которых представлены на рис. 1.

В приборе анализируются четыре раствора (образца) ( $n_a = 4$ ), концентрации веществ в которых определяются матрицей концентраций

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Столбцы матрицы соответствуют первым трем веществам рис. 1, а строки – растворам. Мы видим, что в растворах 1 и 2 вещество 1 отсутствует, а в растворах 3 и 4 присутствуют все три вещества. Изображения флуоресценции четырех растворов при дисперсии ошибок прибора  $\sigma_0^2 = 1,0e - 08$  ( $\sigma_0 = 0,0001$ ) представлены на рис. 2.

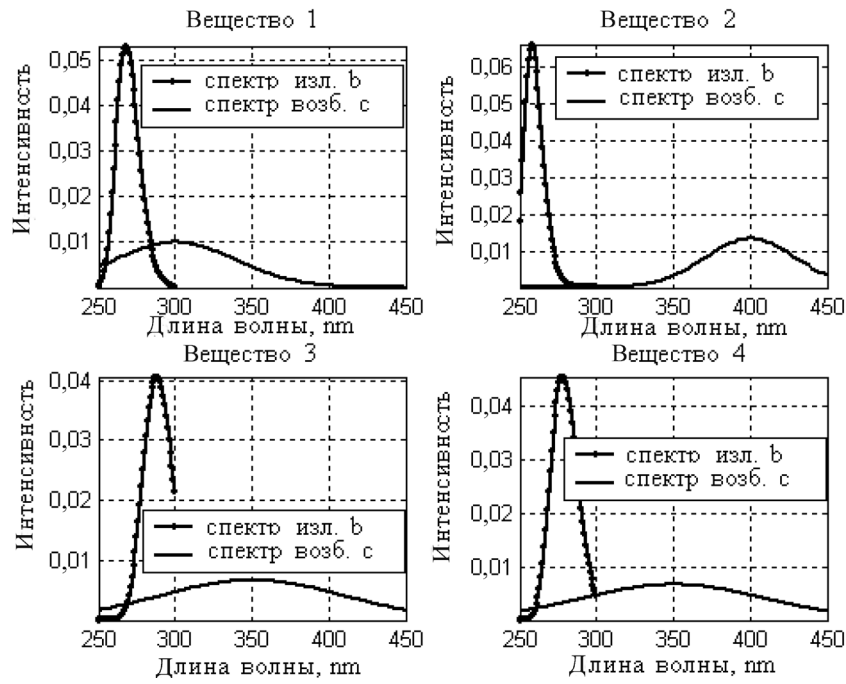


Рис. 1. Спектры флуоресценции четырех веществ

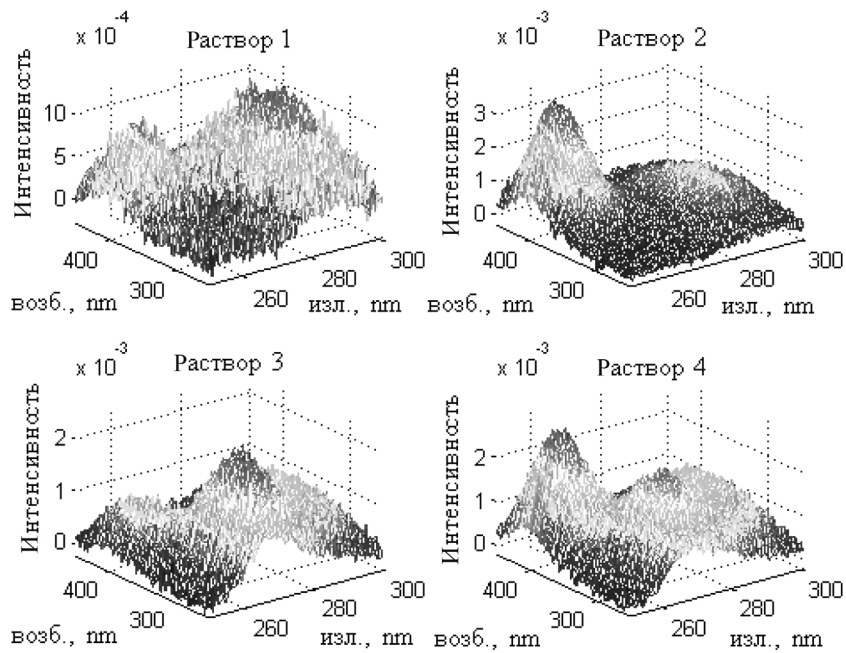


Рис. 2. Изображения флуоресценции четырех растворов

Данные, приведенные на рис. 2, содержатся в массиве  $G_a$  размером  $4 \times 51 \times 101$ . В математической модели (1) использовались спектры тех же веществ, что и в растворах. Один из опытов дает оценку  $\hat{A}$  (3) матрицы концентраций веществ в растворах:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0,1328 & 0,9785 & 3,9520 \\ -0,2058 & 4,0191 & 4,0789 \\ 3,9581 & 1,2736 & 4,1066 \\ 3,7225 & 3,2155 & 4,8616 \end{pmatrix}, \quad \hat{A}_1 = \begin{pmatrix} 0,0000 & 0,9785 & 3,9520 \\ 0,0000 & 4,0191 & 4,0789 \\ 3,9581 & 1,2736 & 4,1066 \\ 3,7225 & 3,2155 & 4,8616 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

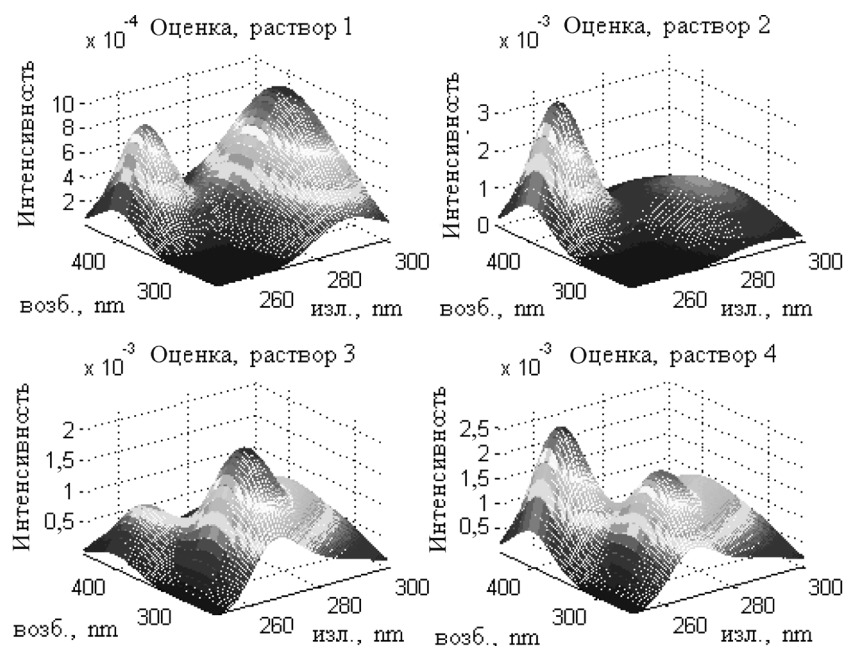


Рис. 3. Изображения оценок флуоресценции четырех растворов

Оценка  $\hat{A}$  свидетельствует, что каждое вещество в определенной концентрации присутствует в каждом из растворов, хотя понятно, что отрицательных концентраций быть не может. Однако проверка гипотез (16) о значимости концентраций на основе статистик  $t_{i,f}^{(a)}$  (14) на уровне значимости  $\alpha = 0,05$  показывает, что концентрации  $\hat{a}_{1,1} = 0,1328$  и  $\hat{a}_{2,1} = -0,2058$  не значимы, т. е. в растворах 1 и 2 вещество 1 отсутствует. Проверка гипотезы об адекватности математической модели на основе предложенной выше процедуры при двух дополнительных опытах ( $n_d = 2$ ) показывает, что модель адекватна. В результате мы можем считать, что концентрации веществ в растворах определяются матрицей  $\hat{A}_1$  (18), которая близка к матрице истинных концентраций  $A$  (17). На рис. 3 изображены оценки (7) флуоресценции, полученные с использованием оценки  $\hat{A}$  (18). По числу максимумов можно заключить, что растворы 1 и 2 содержат по два вещества, а растворы 3, 4 – по три.

Выполнялись также расчеты для измененной математической модели, в которой вместо спектров веществ 1, 2, 3 использовались спектры веществ 1, 2, 4 (см. рис. 1). В одном из опытов получена оценка  $\hat{A}$  матрицы концентраций  $A$ , представленная ниже:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} -0,7262 & 0,8700 & 3,3343 \\ -0,7212 & 3,8790 & 3,3153 \\ 3,2782 & 0,8786 & 3,3122 \\ 3,1060 & 2,8250 & 4,1602 \end{pmatrix}, \quad \hat{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0,8700 & 3,3343 \\ 0 & 3,8790 & 3,3153 \\ 3,2782 & 0,8786 & 3,3122 \\ 3,1060 & 2,8250 & 4,1602 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Проверка гипотез о значимости концентраций приводит к тому, что концентрации  $a_{1,1}$  и  $a_{2,1}$  признаются не значимыми, так что мы получаем оценку  $\hat{A}_2$  (19). Однако проверка гипотезы об адекватности данной математической модели показала, что она не адекватна. Это значит, что матрице оценок  $\hat{A}_2$  (19) доверять не следует. Действительно, сравнив матрицы  $A$  (17) и  $\hat{A}_2$  (19), мы обнаружим в них значительные отличия. В случае неадекватности в математическую модель можно включить новый набор веществ и выполнить расчеты и анализ повторно.

**Заключение.** Представленные в работе результаты (статистики, их распределения, критерии) могут быть использованы на практике либо непосредственно, либо в адаптированном под конкретные оптические приборы виде. Они являются также дополнительным подтверждением правильности и работоспособности результатов работы [8], а также примером использования многомерного регрессионного анализа в практических приложениях.

## Литература

1. Bro R. // Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems. 1997. Vol. 38. P. 149–171.
2. Ji Ji R. D., Andersson G. G., Booksh K. S. // J. of Chemometrics. 2000. Vol. 14. P. 171–185.
3. Муха В. С. // Проблемы управления и информатики. 2008. № 4. С. 100–114.
4. Муха В. С. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2007. № 3. С. 131–134.
5. Муха В. С. Анализ многомерных данных. Минск, 2004.
6. Вучков И. Н., Бояджиева Л., Солаков Е. Прикладной регрессионный анализ. М., 1987.
7. Муха В. С. Статистические методы обработки данных. Минск, 2009.
8. Муха В. С. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2014. № 2. С. 71–81.

*V. S. MUKHA*

### CHECKING THE HYPOTHESES IN THE PARALLEL FACTOR ANALYSIS

#### Summary

Statistics, their distributions and criteria for building confidence intervals and checking the hypotheses in parallel factor analysis are presented. Their use is illustrated by the example of computer simulation.

УДК 514.142

*А. В. ПРОКОПЧУК, В. И. ЯНЧЕВСКИЙ***О ЛИНЕЙНЫХ ОБОЛОЧКАХ КОММУТАНТОВ УНИТАРНЫХ ГРУПП НЕКОММУТАТИВНЫХ КОНЕЧНОМЕРНЫХ АЛГЕБР С ДЕЛЕНИЕМ***Институт математики НАН Беларуси**(Поступила в редакцию 03.12.2014)*

Исследованию унитарных групп изотропных эрмитовых форм над некоммутативными алгебрами с делением посвящен целый ряд работ. Основной вклад здесь принадлежит Ж. Дьёдонне и Дж. Уоллу (см., напр., [1, 2]). В теории линейных алгебраических групп важную роль играют унитарные группы эрмитовых форм над некоммутативными конечномерными алгебрами с делением. В то время как благодаря упомянутым результатам Ж. Дьёдонне и Дж. Уолла случай изотропных форм довольно хорошо изучен, анизотропный случай остается малопрístupным. В настоящее время намечаются лишь некоторые подходы к нахождению решения этой проблемы. Для реализации одного из таких подходов весьма важным является изучение линейных оболочек унитарных, специальных унитарных групп и их коммутантов. Начало изучению задач такого типа было положено одним нижеприведенным результатом Ж. Дьёдонне [1]. Для его формулировки и формулировки основных результатов статьи нам потребуются следующие определения и обозначения.

Пусть  $K$  – квадратичное сепарабельное расширение поля  $k$  характеристики, отличной от 2 ( $\text{char}K \neq 2$ ), скажем,  $K = k(\sqrt{\alpha})$ ,  $\alpha \in k$ ,  $A$  – некоммутативная конечномерная центральная  $K$ -алгебра с делением. Пусть также  $\tau$  – инволютивный  $K/k$ -антиавтоморфизм  $A$ . Пусть

$$\begin{aligned} S_\tau &= \{a \in A : a^\tau = a\}, \\ U(\tau, A) &= \{a \in A : a^\tau a = 1\}, \\ SU(\tau, A) &= \{a \in U(\tau, A) : \text{Nrd}_A(a) = 1\}, \end{aligned}$$

где отображение  $\text{Nrd}_A$  – отображение приведенной нормы алгебры  $A$ . В [1, с. 367] Ж. Дьёдонне установил следующие результаты.

**Предложение 1.** *Для некоммутативной алгебры  $A$  с делением подкольцо, порожденное элементами из  $S_\tau$ , совпадает с ней.*

В конечномерном случае (см. [3]) с предыдущим результатом связан следующий.

**Предложение 2.**  *$A$  совпадает с  $K$ -линейной оболочкой  $K[S_\tau]$  множества  $S_\tau$ .*

На последнем результате базируется ответ на вопрос об описании  $K$ -линейной оболочки  $K[U(\tau, A)]$  группы  $U(\tau, A)$ .

**Теорема 1.**  *$A$  совпадает с  $K[U(\tau, A)]$ .*

**Замечание 1.** Отметим, что доказательство этого утверждения содержится в [4] при некоторых дополнительных ограничениях. Однако, как отмечает автор работы, на самом деле при небольшой модификации оно сохраняется и в рассматриваемой ситуации. Этому доказательству будет посвящена другая его работа.

Поскольку  $SU(\tau, A) \subsetneq U(\tau, A)$ , то естественно возникает вопрос о совпадении  $K$ -линейных оболочек  $K[SU(\tau, A)]$  и  $K[U(\tau, A)]$ . Ответ содержится в следующей теореме.

**Теорема 2.**  *$K[SU(\tau, A)]$  совпадает с  $A$ .*

**З а м е ч а н и е 2.** При условии взаимной простоты индекса  $\text{char}K$  и индекса алгебры  $A$  или при условии  $\text{char}K = 0$  теорема 2 доказана в [4], следует лишь выбор элемента  $z$ , фигурировавшего в доказательстве, дополнить условием, что его минимальный многочлен (над  $K$ ) имеет ненулевой коэффициент при  $x^{d-2}$ . (Доказательство теоремы 2 в общей ситуации будет дано в следующей работе второго автора настоящей статьи.)

Пусть теперь  $[U(\tau, A), U(\tau, A)]$  – коммутант унитарной группы  $U(\tau, A)$  (т. е. группа, порожденная элементами вида  $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ ,  $a, b \in U(\tau, A)$ ).

Поскольку  $[U(\tau, A), U(\tau, A)] \subsetneq SU(\tau, A)$ , то естественно сравнить их  $K$ -линейные оболочки. В связи с этим следующая гипотеза кажется нам правдоподобной.

**Г и п о т е з а.** В предыдущих обозначениях

$$K[[U(\tau, A), U(\tau, A)]] = K[SU(\tau, A)] = K[U(\tau, A)] = K[S_\tau] = A.$$

Целью настоящей статьи является доказательство вышеприведенной гипотезы в случае простого индекса алгебры  $A$ . Для этого мы сначала доказываем следующее утверждение, представляющее и самостоятельный интерес.

**Т е о р е м а 3.** Пусть  $A$  – центральная некоммутативная  $K$ -алгебра с делением, где характеристика  $K$  – либо нуль, либо взаимно проста с индексом алгебры  $A$ . Тогда существует коммутатор  $[a, b] \notin K$  такой, что  $a, b \in U(A, \tau)$ .

**Случай простого индекса.** Для доказательства теоремы 3 установим справедливость следующей леммы.

**Л е м м а 1.** Пусть  $A$  – центральная  $K$ -алгебра с делением индекса  $d > 1$  и такого, что  $d$  взаимно просто с  $\text{char}K$ , если  $\text{char}K > 0$ . Тогда для любых элементов  $a, b \in A$  таких, что  $[a, b] = \varepsilon_d^n$ ,  $n < d$ , где  $\varepsilon_d$  – примитивный корень степени  $d$  из 1,  $\varepsilon_d^n \in K$ , и  $K \langle a, b \rangle = A$  (здесь  $K \langle a, b \rangle$  –  $K$ -алгебра с образующими  $a, b$ ) следует, что  $(n, d) = 1$  (т. е.  $\varepsilon_d \in K$ ). Более того,  $a^d, b^d \in K$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Предположим, что  $K \langle a, b \rangle = A$  и  $ab = \varepsilon_d^n \cdot ba$ , где  $\varepsilon_d^n \in K$  следует, что  $K(a)$  и  $K(b)$  порождают максимальные подполя в алгебре  $A$ , так как в противном случае  $K$ -линейная оболочка элементов вида  $\sum_{i,j} k_{ij} a^i b^j$  имела бы размерность меньшую, чем  $d^2$ .

Пусть  $q = (n, d)$  – наибольший общий делитель чисел  $n$  и  $d$ . Из равенства  $[a, b] = \varepsilon_d^n$  следует, что  $aba^{-1} = \varepsilon_d^n b$ . Возведя последнее равенство в степень  $d/q$ , получим  $ab^{d/q} a^{-1} = \varepsilon_d^{n \cdot d/q} b^{d/q}$ . Так как число  $n \cdot d/q$  кратно  $d$ , то получаем  $ab^{d/q} a^{-1} = b^{d/q}$ . Из последнего следует, что  $b^{d/q}$  принадлежит централизатору  $C_A(K(a))$  в  $A$  поля  $K(a)$ . Поскольку  $K(a)$  – максимальное подполе алгебры  $A$ , то  $b^{d/q} \in K(a)$ .

Если  $q > 1$ , мы приходим к противоречию с условием, что  $K$ -линейная оболочка элементов вида  $a^i b^j$  имеет размерность  $d^2$ . В самом деле, из условия  $b^{d/q} \in K(a)$  следует, что элементы вида  $b^t$ , где  $d/q \leq t < d$ , выражаются в виде  $K$ -линейной комбинации  $\sum_{i,j=0}^{i < d, j < d/q} k_{ij} a^i b^j$ , а потому размерность линейной оболочки элементов вида  $\sum_{i,j} k_{ij} a^i b^j$  не больше, чем  $d^2/q$ .

Как показано выше,  $b^{d/q} \in K(a)$ , а взаимная простота  $n$  и  $d$  влечет  $b^d \in K(a)$ . Элемент  $b^d$  коммутирует с элементами  $a$  и  $b$ , и так как  $A = K \langle a, b \rangle$ , то он централен, т. е.  $b^d \in K$ . Аналогичные рассуждения влекут  $a^d \in K$ . Лемма доказана.

**П р е д л о ж е н и е 3.** Пусть  $A$  – центральная  $K$ -алгебра с делением простого индекса  $p$  и либо характеристика  $K$  равна нулю, либо взаимно проста с  $p$ . Тогда существует коммутатор  $[a, b] \notin K$  такой, что  $a, b \in U(A, \tau)$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о** от противного. Пусть  $[a, b] \in K$  для всех  $a, b \in U(A, \tau)$ . В силу совпадения множеств  $K[U(A, \tau)]$  и  $A$  (теорема 2), в алгебре  $A$  существуют некоммутирующие элементы  $a, b$  из группы  $U(A, \tau)$ . Тогда для  $c = [a, b]$  имеем  $c \in K \setminus 1$ . Следовательно,

$$1 = \text{Nrd}_A([a, b]) = \text{Nrd}_A(c) = c^p,$$

что влечет  $c = \varepsilon_p$ , т. е.  $aba^{-1} = \varepsilon_p b$ . Возведя последнее равенство в степень  $p$ , получим  $ab^p a^{-1} = b^p$ . Так как элементы  $a$  и  $b$  не коммутируют, то  $K \langle a, b \rangle$  – алгебра размерности  $p^2$  и потому совпадает с  $A$ . Поскольку элемент  $b^p$  коммутирует с элементами  $a$  и  $b$ , то  $b^p \in K$ . Рассуждая аналогично для равенства  $b^{-1}ab = \varepsilon_p a$ , заключаем, что  $a^p \in K$ . Значит, ввиду  $K[U(A, \tau)] = A$ , получаем, что  $p$ -я степень любого нецентрального элемента из группы  $U(A, \tau)$  принадлежит полю  $K$ . Покажем, что это не так. Рассмотрим элемент

$$z = \frac{e+a}{e^\tau + a^{-1}},$$

где  $e \in K$ . Заметим, что  $z \in U(A, \tau)$ . В силу доказанного выше,  $z^p = t$ ,  $t \in K$ . Поскольку  $z$  лежит в поле  $K(a)$ , элемент  $(z/a)^p$  также принадлежит полю  $K$ , т. е.  $(z/a)^p = l$ ,  $l \in K$ . Имеем

$$(e+a)^p = l(e^\tau a + 1)^p. \quad (*)$$

Поскольку элемент  $a$  порождает поле  $K(a)$  степени  $p$ , то элементы  $1, a, \dots, a^{p-1}$  линейно независимы над  $K$ . Сравнение коэффициентов при  $a$  и  $a^{p-1}$  в левой и правой частях равенства (\*) приводят к соотношениям:  $e^p - 1 = l e^\tau$ ,  $e = l(e^\tau)^{p-1}$ . Деля левые и правые части двух последних равенств, заключаем, что

$$(e e^\tau)^{p-2} = 1.$$

Поскольку для  $e = x + y\sqrt{\alpha}$ ,  $x, y \in k$ ,  $e e^\tau = x^2 - \alpha y^2$ , таким образом, для получения противоречия достаточно показать, что последняя квадратичная форма от  $x, y$  не может принимать значений в конечном множестве при произвольных  $x, y \in k$ , что без труда устанавливается с помощью элементарных вычислений. Предложение доказано.

**Д о к а з а т е л ь с т в о** теоремы 3. Воспользуемся индукцией по индексу алгебры  $A$ . Базу индукции составляет предложение 3. Пусть теперь для всех алгебр индекса меньше, чем  $d$ , теорема справедлива. Покажем, что она верна и для любой алгебры  $A$  индекса  $d$ . Рассмотрим два некоммутирующих элемента  $a, b$  из группы  $U(A, \tau)$  и рассмотрим  $K$ -подалгебру  $D = K \langle a, b \rangle$  алгебры  $A$ , которая является алгеброй с делением. Если  $D \neq A$ , то алгебра  $D$  имеет индекс меньший, чем  $d$ , предположению индукции в  $D$  существует коммутатор  $[u, w]$ , не принадлежащий центру  $D$  такой, что  $u, w \in U(A, \tau)$ , а значит,  $[u, w] \notin K$ . Следовательно,  $K \langle a, b \rangle = A$ .

Обозначим через  $c \in K$  коммутатор  $[a, b]$ . Тогда

$$1 = \text{Nrd}_A([a, b]) = \text{Nrd}_A(c) = c^d.$$

Значит,  $c = \varepsilon_d^n$  для некоторого  $0 < n < d$ . Применяя лемму 1 к алгебре  $A = K \langle a, b \rangle$ , получаем, что  $(n, d) = 1$ . Значит, можно считать, что  $[a, b] = \varepsilon_d$  и  $a^d, b^d \in K$ . Рассмотрим подалгебру  $B = K \langle a, b^p \rangle$ , где  $p$  – некоторое простое число, делящее  $d$ . Так как  $ab^p = \varepsilon_d^p b^p a$ , где  $\varepsilon_d^p \neq 1$ , то элементы  $a, b^p$  не коммутируют друг с другом и потому алгебра  $B$  некоммутативна, при этом она имеет индекс меньший, чем индекс алгебры  $A$ . В самом деле,  $B$  состоит из  $K$ -линейных комбинаций элементов вида  $\{a^i b^{pj}\}_{i, j=0}^{i < d, j < d/p}$ , которых равно  $d^2/p$ . Значит, в алгебре  $B$  по предположению индукции имеется коммутатор  $[u, w]$ , не принадлежащий центру  $B$ , такой, что  $u, w \in U(A, \tau)$ , а значит,  $[u, w] \notin K$ . Теорема 3 доказана.

Докажем теперь вышеупомянутую гипотезу для алгебр простого индекса.

**Т е о р е м а 4.** Пусть индекс алгебры  $A$  – простое число  $p$  и либо  $\text{char} K = 0$ , либо  $(\text{char} K) = 1$ . Тогда

$$K[[U(A, \tau), U(A, \tau)]] = A.$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Ввиду теоремы 3 существует коммутатор  $[a, b] \notin K$ ,  $a, b \in U(A, \tau)$ . Положим  $L = k([a, b])$ . Ясно, что  $L \subset K[[U(A, \tau), U(A, \tau)]]$ .

Пусть  $u \in U(A, \tau)$ . Если  $uLu^{-1} \notin L$ , тогда  $u[a, b]u^{-1} \notin L$  и в силу равенства  $u[a, b]u^{-1} = [uau^{-1}, ubu^{-1}]$  получим, что  $[uau^{-1}, ubu^{-1}] \notin L$ , а потому  $K \langle [a, b], [uau^{-1}, ubu^{-1}] \rangle = A$ . Значит,  $K[[U(A, \tau), U(A, \tau)]] = A$ .

Предположим теперь, что для любого  $u \in U(A, \tau)$  имеем  $uLu^{-1} = L$ . Обозначим через  $\varphi_u$  ограничение на  $L$  внутреннего автоморфизма алгебры  $A$  с помощью  $u$ . Если  $\varphi_u$  – тождественный автоморфизм, то  $u$  коммутирует с любым элементов из  $L$ , а значит,  $u \in L$  ввиду максимальной  $L$  в алгебре  $A$ . Следовательно, для всех  $u$  автоморфизм  $\varphi_u$  не может быть тождественным и, следовательно, существует  $u$ , для которого  $\varphi_u$  нетривиально действует на  $L$  и является образующей группы Галуа  $L/K$  (поскольку  $[L : K] = p$ ).

Рассмотрим элемент

$$z = \frac{k_1 + k_2u}{k_1 + k_2u^{-1}},$$

где  $k_1k_2 \neq 0, k_1 \neq \pm k_2, k_1, k_2 \in k = K^\tau$ . Очевидно  $z \in U(A, \tau)$ . Далее,  $z \notin L$ , так как в противном случае  $k_1u + k_2u^2 = zk_1u + zk_2$  и потому ввиду линейно независимости  $1, u, \dots, u^{p-1}$  над  $L$  получим, что  $k_1 = zk_1$ . Значит,  $z = 1$ , и, стало быть,  $k_1 + k_2u = k_1 + k_2u^{-1}$ , откуда  $u = \pm 1$ , что противоречит  $u \notin L$ .

Покажем, что при наших предположениях произвольный элемент  $v \in U(A, \tau)$  имеет вид  $v = l_v u^t$  для некоторого  $t \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ . Действительно,  $\varphi_u^t = \varphi_v$  для подходящего  $t \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ , так как  $\varphi_u$  – образующая группы Галуа поля  $L/K$ . Значит,  $\varphi_u^t \varphi_v^{-1}$  – тождественный  $L$ -автоморфизм, что влечет  $v = l_v u^t$  для некоторого элемента  $l_v \in L$ . Обратно, для элемента  $v$  с условием  $v = l_v u^t$  будем иметь  $\varphi_u^t = \varphi_v$ . Следовательно, любой элемент  $v$  из группы  $U(A, \tau)$  имеет вид  $v = l_v u^t$ .

Из предыдущего рассуждения следует, что  $z = lu^t$ ,  $l \in L$ ,  $0 < t \leq p-1$ . Домножая на  $k_1 + k_2u^{-1}$  обе части последнего равенства, получим

$$k_1 + k_2u = k_1lu^t + k_2lt^{t-1}.$$

Если  $t > 1$ , то в последнем равенстве при любом  $0 < t \leq p-1$  коэффициент в линейной комбинации при  $u^0$  всегда равен  $k_1$ . Что немедленно влечет  $k_1 = 0$ , что противоречит условию  $k_1k_2 \neq 0$ . При  $t = 1$  получим  $k_1 + k_2u = k_1lu + k_2l$ . Тогда  $k_1 = k_2l$  и  $k_2 = k_1l$ , откуда следует  $l = \pm 1$ , что противоречит условию  $k_1 \neq \pm k_2$ . Следовательно, всегда существует  $u \in U(A, \tau)$  такой, что  $u_0Lu_0^{-1} \notin L$ . Таким образом,  $K[[U(A, \tau), U(A, \tau)]] = A$ . Теорема доказана.

## Литература

1. Дьёдонне Ж. Геометрия классических групп. М., 1974.
2. Hahn A. The classical groups and K-theory. Front Cover. Springer-Verlag, 1989.
3. Albert A. A. Structure of algebras, Colloquium publications 24, AMS, 2003.
4. Янчевский В. И. Приведенные группы Уайтхеда и проблема сопряженности для специальных унитарных групп анизотропных эрмитовых форм // Зап. науч. семинаров С.-Петербург. отд-ния мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 2012. Т. 400, № 23. С. 222–245.

A. V. PROKOPCHUK, V. I. YANCHEVSKII

## ON LINEAR SPANS OF THE COMMUTATOR SUBGROUPS OF UNITARY GROUPS OF NON-COMMUTATIVE FINITE DIMENSIONAL DIVISION ALGEBRAS

### Summary

Let  $K/k$  be a separable quadratic extension,  $\text{char}K \neq 2$ ,  $A$  a non-commutative finite dimensional central  $K$ -division algebra with unitary  $k$ -involution. For algebras  $A$  of prime index relatively prime to  $\text{char}K$  we prove the following conjecture:  $k$ -linear span of the commutator subgroup of a unitary group of  $A$  coincides with  $A$ .



ФІЗІКА

УДК 530.12,535.13

Е. А. ТОЛКАЧЕВ

РАССЛОЕНИЕ ХОПФА  $S^3 \rightarrow S^2$ : ПРОЕКТИВНЫЕ КООРДИНАТЫ  
И ВЕКТОР-ПАРАМЕТРЫ Ф. И. ФЕДОРОВА

Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси

(Поступила в редакцию 03.10.2014)

**Введение.** Как известно [1], расслоение Хопфа  $S^3 \rightarrow S^2$  [2] эффективно применяется в различных областях физики: от теории магнитного монополя и космологии до сугубо практических задач квантовой механики кубитов и классической электродинамики топологически нетривиальных полевых конфигураций. Поэтому не удивительно, что регулярно появляются работы, посвященные конкретной реализации данного расслоения как в чисто математическом аспекте [3], так и применительно к специфике физических задач [4]. При этом достаточно стандартным приемом является использование алгебры кватернионов для реализации сферы  $S^3$  и преобразований групп  $SU(2)$  и  $SO(3)$ . В то же время использование в качестве координат угловых переменных не позволяет в полной мере реализовать преимущества алгебраического подхода из-за отсутствия в них явного закона композиции конечных преобразований. Этот недостаток легко устраняется при использовании кватернионного варианта векторной параметризации Ф. И. Федорова [5]. Еще в работах [6, 7] в этом последовательно алгебраическом формализме было построено  $O(4)$ -ковариантное представление преобразования Кустанхеймо – Штифеля  $R^4 \rightarrow R^3$ , топологические свойства которого совпадают с характеристиками расслоения Хопфа. В частности, удалось впервые показать, что в векторной параметризации не только связность, но и сечение расслоения выражаются через монополярный потенциал. Было также продемонстрировано, что известные формулировки преобразования Кустанхеймо – Штифеля различаются лишь выбором кватернионного базиса и параметризаций компонент кватернионов. Оставался неисследованным вопрос о связи универсального кватернионного представления [6] с описанием расслоения Хопфа в проективных координатах  $R^3 \cup \infty \rightarrow R^2 \cup \infty$ , которое широко используется при построении и анализе зацепляющихся и заузленных решений свободных уравнений Максвелла — топологически нетривиальных 0-полей [8, 9].

В настоящей работе описана в кватернионах связь проективных координат с вектор-параметрами, в явном виде выписаны связности и сечения, что не только дает ковариантное представление потенциалов 0-полей, но и дополняет теорию векторной параметризации группы  $SU(2)$  [10].

**Теоретическая часть.** Напомним [5], что любой элемент алгебры кватернионов представим в виде  $q = q_m e_m \equiv q_0 + \underline{q}$ , где  $q_m$  принадлежат полю действительных чисел, а  $e_m$  подчиняются закону умножения  $e_k e_l = -\delta_{kl} e_0 + \delta_{0l} e_k + \delta_{k0} e_l + \varepsilon_{0klm} e_m$ ,  $j, k, l, m = 0, 1, 2, 3$ , который легко переписывается с использованием аналогов стандартных операций векторной алгебры

$$qp = q_0 p_0 - (\underline{q} \underline{p}) + q_0 \underline{p} + p_0 \underline{q} + [\underline{q} \underline{p}], \quad (1)$$

где  $(\underline{q} \underline{p}) = \delta_{abc} q_a p_b$ ,  $[\underline{q} \underline{p}] = \varepsilon_{abc} q_b p_c$ ,  $a, b, c = 1, 2, 3$ . Кватернионное сопряжение  $\bar{q} = q_0 - \underline{q}$  является антиавтоморфизмом алгебры кватернионов  $\overline{\underline{p}q} = \bar{q} \bar{p}$ . Соответственно  $q_0 = \frac{1}{2}(q + \bar{q})$ ,  $\underline{q} = \frac{1}{2}(q - \bar{q})$ .

Норма кватерниона –  $N(q) = \sqrt{q\bar{q}} = \sqrt{q_0q_0 + (\underline{q} \ \underline{q})} \equiv \sqrt{q_0^2 + \underline{q}^2}$ . Особое место в приложениях занимают кватернионы единичной нормы  $N(\hat{q}) = 1$ , реализующие представление группы  $SU(2)$ . Для них существует двузначное представление через вектор-параметр  $\underline{c} = \hat{q}\hat{q}_0^{-1}$ :

$$\hat{q} = \hat{q}_0 + \underline{\hat{q}} \rightarrow \hat{q}_{\pm}(\underline{c}) = \pm \frac{1 + \underline{c}}{\sqrt{1 + \underline{c}^2}}, \quad \underline{c} = \hat{q}\hat{q}_0^{-1}, \quad \pm \leftrightarrow \text{sign } \hat{q}_0, \quad (2)$$

сохраняющее свою структуру при умножении  $\hat{q}_3 = \hat{q}_1\hat{q}_2$ , в силу закона композиции Ф. И. Федорова [10]:

$$\underline{c}_3 = \frac{\underline{c}_1 + \underline{c}_2 + [\underline{c}_1 \underline{c}_2]}{1 - (\underline{c}_1 \underline{c}_2)}. \quad (3)$$

Двузначность представления (2) необходимо учитывать при его сопоставлении с традиционным экспоненциальным представлением группы  $SU(2)$  –  $\hat{q} = \exp(\underline{n}\vartheta)$ . Рассмотрим, например, произведение  $\hat{q}_1\hat{q}_2 = \exp(\underline{n}\vartheta_1)\exp(\underline{n}\vartheta_2) = \exp(\underline{n}(\vartheta_1 + \vartheta_2)) = \hat{q}_3$ . Если  $(\hat{q}_1)_0, (\hat{q}_2)_0 > 0$ , то каждый из  $\hat{q}_1, \hat{q}_2$  представляется в форме (2) со знаком плюс. Однако представление их произведения в виде (2) зависит от знака  $(\hat{q}_1)_0(\hat{q}_2)_0 - (\underline{\hat{q}}_1 \underline{\hat{q}}_2)$ . Таким образом, даже в случае подгруппы  $U(1)$  произведения  $\hat{q}_1\hat{q}_2$  и  $\hat{q}_{1\pm}\hat{q}_{2\pm}$ , вообще говоря, не совпадают.

Проблемы со знаками исчезают, если используются только билинейные комбинации кватернионов вида (2), как это имеет место при кватернионной формулировке [6] расслоения Хопфа  $S^3 \rightarrow S^2$ :

$$u\underline{n}_3\bar{u} = \hat{r}, \quad u\bar{u} = 1, \quad \underline{n}_3^2 = 1 \rightarrow \hat{r}^2 = 1. \quad (4)$$

Очевидное соотношение эквивалентности  $u \sim u \exp \underline{n}_3 \tau$  показывает, что это главное расслоение со структурной группой  $SO(2) \approx SU(1) \approx S^1$  – малой группой единичного векторного кватерниона  $\underline{n}_3$ , который, не теряя общности, можно отождествить с единицей базиса кватернионов. Параметр  $0 \leq \tau \leq 2\pi$  – координата в слое. В нетривиальности рассматриваемого расслоения –  $S^3 \neq S^2 \otimes S^1$  легко убедиться, если трактовать (4) как совокупность поворотов из группы  $SO(3) = SU(2)/\pm 1$ , связывающих  $\underline{n}_3$  с пробегающим единичную сферу  $S^2$  векторным кватернионом  $\hat{r} = \sin \vartheta (\cos \varphi \underline{n}_1 + \sin \varphi \underline{n}_2) + \cos \vartheta \underline{n}_3$ , которую невозможно задать одной формулой для всех  $\hat{r}$ . Действительно, кватернион, представляющий собой композицию плоских поворотов и преобразований в слое

$$\begin{aligned} u_N = (\cos \frac{\vartheta}{2} + \frac{[\underline{n}_3 \hat{r}]}{[\underline{n}_3 \hat{r}]} \sin \frac{\vartheta}{2}) e^{-\underline{n}_3 \tau} = \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \tau - \underline{n}_1 \sin \frac{\vartheta}{2} \sin(\tau + \varphi) + \\ + \underline{n}_2 \sin \frac{\vartheta}{2} \cos(\tau + \varphi) - \underline{n}_3 \cos \frac{\vartheta}{2} \sin \tau = \frac{1 + \frac{[\underline{n}_3 \hat{r}]}{1 + (\underline{n}_3 \hat{r})}}{\sqrt{1 + \left(\frac{[\underline{n}_3 \hat{r}]}{1 + (\underline{n}_3 \hat{r})}\right)^2}} \cdot \frac{1 - \underline{n}_3 \text{tg} \tau}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \tau}} = \frac{1 + \underline{c}_N}{\sqrt{1 + \underline{c}_N^2}}, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\underline{c}_N = \frac{[\underline{n}_3 \hat{r}] - (\underline{n}_3 + \hat{r}) \text{tg} \tau}{1 + (\underline{n}_3 \hat{r})}, \quad 1 + \underline{c}_N^2 = \frac{2}{[1 + (\underline{n}_3 \hat{r})] \cos^2 \tau}, \quad (5a)$$

определен всюду, кроме «южного полюса»  $S^2$  –  $\vartheta = \pi$ ,  $[1 + (\underline{n}_3 \hat{r})] = 0$ . Существует бесконечное множество осей, плоским поворотом вокруг которых можно изменить направление вектора  $\underline{n}_3$  на обратное. Поэтому локальная тривиализация расслоения достигается введением на базе  $S^2$  двух карт – «северной» –  $M_N$  и «южной» –  $M_S$ :

$$M_N : 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2} + \varepsilon \text{ и } M_S : \frac{\pi}{2} - \varepsilon \leq \vartheta \leq \pi,$$

где  $0 < 2\varepsilon < \pi$ . При этом расслоение Хопфа задается формулами

$$\begin{aligned} u_N \underline{n}_3 \bar{u}_N &= \hat{r} \in M_N, \\ u_S (-\underline{n}_3) \bar{u}_S &= \hat{r} \in M_S, \end{aligned} \quad (6)$$

где неопределенность кватерниона  $u_S = (\cos \frac{(\pi - \vartheta)}{2} - \underline{n}_2 e^{-n_3 \varphi} \sin \frac{(\pi - \vartheta)}{2}) e^{-n_3 \tau}$  при  $\vartheta = 0$  лежит вне области его задания. Если устранить знак минус в нижней из формул (6) –  $\hat{r} = u_S (-\underline{n}_3) \bar{u}_S = u_S \underline{n}_2 \underline{n}_3 \bar{u}_S \underline{n}_2 = u'_S \underline{n}_3 \bar{u}'_S$ , то нетрудно видеть, что в области перекрытия карт сечения связаны между собой сдвигом вдоль слоя  $u'_S(\tau = 0) \underline{n}_2 = u_N(\tau = 0) e^{n_3 \varphi}$ . Результирующий вектор-параметр в  $M_S$  есть  $\underline{c}_S = \frac{(\hat{r} - \underline{n}_3) \text{tg } \tau - [\underline{n}_3 \hat{r}]}{1 - (\underline{n}_3 \hat{r})}$ .

Над каждой из карт расслоение  $S^3 \rightarrow S^2$  имеет структуру прямого произведения, т. е. тривиализируется. При изменении параметра  $\tau$  от 0 до  $2\pi$  и фиксированных  $\vartheta, \varphi$  конец единичного радиус-вектора в  $R^4$  описывает окружность  $S^1$  на сфере  $S^3 \approx SU(2)$ . Метрика в каждой из карт определяется выражениями

$$du_N \overline{du}_N = (d\vartheta, d\varphi, d\tau) \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \sin^2 \frac{\vartheta}{2} & \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \\ 0 & \sin^2 \frac{\vartheta}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\vartheta \\ d\varphi \\ d\tau \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$du_S \overline{du}_S = (d\vartheta, d\varphi, d\tau) \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 \frac{\vartheta}{2} & -\cos^2 \frac{\vartheta}{2} \\ 0 & -\cos^2 \frac{\vartheta}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\vartheta \\ d\varphi \\ d\tau \end{pmatrix}, \quad (8)$$

которые можно использовать для построения связности. В сферических координатах произвольная линейная дифференциальная 1-форма имеет вид

$$\omega = \omega_\vartheta(\vartheta, \varphi, \tau) d\vartheta + \omega_\varphi(\vartheta, \varphi, \tau) d\varphi + \omega_\tau(\vartheta, \varphi, \tau) d\tau.$$

Принимая во внимание, что фундаментальное вертикальное векторное поле, генерирующее сдвиги вдоль слоя, есть  $V = \frac{\partial}{\partial \tau}$ , выбираем на нем значение 1-формы  $\omega(V) = \omega_\tau = 1$ , задавая тем самым нормировку формы связности. Для того чтобы горизонтальное векторное поле было инвариантным относительно преобразований структурной группы, потребуем, чтобы функции  $\omega_\vartheta$  и  $\omega_\varphi$  не зависели от координаты слоя, т. е.  $\omega = A_\vartheta(\vartheta, \varphi) d\vartheta + A_\varphi(\vartheta, \varphi) d\varphi + d\tau$ , где  $A_\vartheta(\vartheta, \varphi)$  и  $A_\varphi(\vartheta, \varphi)$  – произвольные функции координат базы. Поскольку в каждой из карт известна метрика, то для нахождения горизонтального векторного поля достаточно использовать его ортогональность фундаментальному полю. Поэтому выберем горизонтальные базисные векторы в виде  $e_{\vartheta, \varphi} = \partial_{\vartheta, \varphi} - A_{\vartheta, \varphi} \partial_\tau$  и потребуем  $(e_{\vartheta, \varphi} V) = 0$ . Используя найденные метрики (7, 8), получаем  $\sin^2 \frac{\vartheta}{2} - A_\varphi^N = 0$  в «северной» карте и  $\cos^2 \frac{\vartheta}{2} + A_\varphi^S = 0$  – в «южной». Нетрудно видеть, что коэффициентам связности соответствуют потенциалы монополя Ву – Янга на сфере единичного радиуса с магнитным зарядом  $g = \frac{1}{2}$ :

$$\underline{A}^N = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \hat{\phi}, \quad \underline{A}^S = -\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{2} \hat{\phi}. \quad (9)$$

Магнитное поле потенциала монополя Ву – Янга на единичной сфере  $S^2$  глобально и постоянно по модулю  $H = \left| [\nabla \underline{A}^{N,S}] \right| = \frac{1}{2}$ . С геометрической точки зрения оно определяет кривизну расслоения Хопфа, определяемую внешним дифференциалом формы связности

$$d\omega = \frac{([\nabla \underline{A}^N] d\underline{S})}{([\nabla \underline{A}^S] d\underline{S})} = \frac{1}{2} \sin \vartheta d\vartheta d\phi. \quad (10)$$

В ряде работ (см., напр., [11]) множитель  $\frac{1}{2}$  убирается путем «нормировки» на единичный магнитный заряд. На самом деле для этого надо перейти от расслоения Хопфа к линзовому расслоению  $S^3 / Z_{m=2g} \rightarrow S^2$  по циклической подгруппе структурной группы  $U(1) - Z_m = \left\{ \exp \left( \underline{n}_3 2\pi \frac{k}{m} \right) \right\}$ , где  $k, m \in \mathbf{Z}$ .

Часто вместо  $R^4$  единичную сферу  $S^3$  задают в двумерном комплексном пространстве с координатами  $z_1$  и  $z_2 - |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$ , а инвариантную относительно действия структурной группы  $U(1) - (z_1, z_2) \rightarrow (z_1 e^{i\alpha}, z_2 e^{i\alpha})$  проекцию на плоскость Аргана – Бесселя – Гаусса –  $CP^1 \sim C \cup \infty$  определяют с помощью отношения

$$\zeta = \frac{\hat{x} + i\hat{y}}{1 - \hat{z}} = e^{i\varphi} \operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{2} = \frac{\cos \frac{\vartheta}{2} e^{-i\tau}}{\sin \frac{\vartheta}{2} e^{-i(\varphi+\tau)}} = \frac{u_0 + iu_3}{u_2 + iu_1} \equiv \frac{z_1}{z_2}. \quad (11)$$

При этом 2-форма (10), которая, как правило, записывается в виде

$$d\omega = i \frac{d\zeta \wedge d\zeta^*}{(1 + |\zeta|^2)^2} = i \frac{(z_2 dz_1 - z_1 dz_2) \wedge (z_2 dz_1 - z_1 dz_2)^*}{(|z_1|^2 + |z_2|^2)^2} = i (z_2 dz_1 - z_1 dz_2) \wedge (z_2 dz_1 - z_1 dz_2)^*, \quad (12)$$

инвариантна относительно конформной инверсии  $\zeta \rightarrow \zeta^{-1}$ , что обеспечивает ее глобальность в отсутствие глобальной связности. Хотя при добавлении бесконечной точки замена координат (11) выглядит корректной на всей  $S^2$ , это не означает наличия единой формулы, устанавливающей связь между  $z_1, z_2$  и  $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ , либо  $\vartheta, \varphi$  во всей области задания последних. В кватернионном подходе удобно заменить в (11)  $i \rightarrow \underline{n}_3$ , поскольку  $u = (u_0 + \underline{n}_3 u_3) + \underline{n}_2 (u_2 + \underline{n}_3 u_1)$ . Такая замена восстанавливает ковариантность описания, поскольку кватернион  $\underline{n}_3$ , вообще говоря, произволен и имеет четкий геометрический смысл в пространствах  $R^3$  и  $R^4$ , где задаются сферы  $S^2$  и  $S^3$ . Подстановка

в (12)  $\zeta = \frac{u_0 + \underline{n}_3 u_3}{u_2 + \underline{n}_3 u_1}$  с учетом  $(\bar{u} du)_0 = 0$  дает

$$d\omega = 2(du_3 \wedge du_0 + du_1 \wedge du_2), \quad (13)$$

что, естественно, совпадает с дифференциалом формы связности в кватернионах [6]

$$\omega = (\underline{n}_3 \bar{u} du)_0 = u_3 du_0 - u_0 du_3 + u_1 du_2 - u_2 du_1. \quad (14)$$

При подстановке в (14) явных выражений  $u_N$  и  $u_S$  имеем

$$\omega = (\underline{n}_3 \bar{u} du)_0 = \begin{cases} \sin^2 \frac{\vartheta}{2} d\varphi + d\tau = (\underline{A}^N d\hat{r}) + d\tau & M_N \\ -\cos^2 \frac{\vartheta}{2} d\varphi + d\tau = (\underline{A}^S d\hat{r}) + d\tau & M_S \end{cases}. \quad (15)$$

Если теперь с помощью (11) выразить (13) и (14) через комплексные координаты, то получаются весьма простые формулы

$$d\omega = i(dz_1^* \wedge dz_1 + dz_2^* \wedge dz_2), \quad (16)$$

$$\omega = \text{Im}(z_1 dz_1^* + z_2 dz_2^*). \quad (17)$$

Выражение (16) для 2-формы кривизны, вернее ее поднятия (pullback) в пространство расслоения  $S^3$ , можно было получить и непосредственно из (12) с учетом  $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$ . Определенная на  $S^3$  1-форма (17) легко приводится к виду (15), с потенциалом монополя в координатах базы  $CP^1 - \zeta = |\zeta| \exp(i \text{Arg } \zeta) = |\zeta| \exp[i \text{Arg}(z_1 - z_2)]$ . Действительно,

$$\begin{aligned} \omega &= \text{Im}(z_1 dz_1^* + z_2 dz_2^*) = -|z_1|^2 d \text{Arg } z_1 - |z_2|^2 d \text{Arg } z_2 = \\ &= |z_2|^2 d(\text{Arg } z_1 - \text{Arg } z_2) - d \text{Arg } z_1 = (1 + |\zeta|^2)^{-1} d \text{Arg } \zeta - d \text{Arg } z_1. \end{aligned}$$

Последний член представляет собой точную 1-форму и поэтому может быть опущен, поскольку не сказывается на кривизне

$$d\omega = i \frac{d\zeta \wedge d\zeta^*}{(1 + |\zeta|^2)^2} = d(1 + |\zeta|^2)^{-1} \wedge d \text{Arg } \zeta = d \left\{ (1 + |\zeta|^2)^{-1} d \text{Arg } \zeta \right\}. \quad (18)$$

Именно с помощью этого выражения были построены первые статические решения уравнений Максвелла, реализующие зацепляющиеся фарадеевские силовые линии электрического и магнитного полей, ортогональных в каждой точке пространства  $R^3 \cup \infty$  и равных по величине [8]. При этом использовалось выражение  $\zeta$  через проективные координаты, возникающие при отображении сферы  $S^3$  на пространство  $R^3 \cup \infty - \underline{R} = \frac{u}{1 - u_0}$ . Обратное преобразование  $u = \frac{R^2 - 1 + 2R}{R^2 + 1}$  дает координаты базы

$$\zeta = \frac{z_1}{z_2} = \frac{R^2 - 1 + 2\underline{n}_3 Z}{2(Y + \underline{n}_3 X)} = \frac{[Y(R^2 - 1) + 2XZ] - \underline{n}_3[X(R^2 - 1) - 2YZ]}{2(X^2 + Y^2)}, \quad (19)$$

поднятую в расслоение 1-форму связности

$$\omega = (\underline{n}_3 \bar{u} du)_0 = 4(R^2 + 1)^{-2} \left( \left\{ (\underline{n}_3 \underline{R}) \underline{R} - \frac{1}{2}(R^2 - 1)\underline{n}_3 + [\underline{n}_3 \underline{R}] \right\} d\underline{R} \right), \quad (20)$$

и метрику, отличающуюся от евклидовой лишь стандартным конформным множителем

$$du(\underline{R}) d\bar{u}(\underline{R}) = 4(R^2 + 1)^{-2} (d\underline{R} d\underline{R}).$$

Связность (20) с точностью до существенного коэффициента  $4(R^2 + 1)^{-2}$  и замены  $\underline{n}_3 \leftrightarrow \underline{n}_1$  совпадает с результатом работы [3]. Кроме того, в ковариантном подходе становится очевидным разбиение (20) на несущественную точную 1-форму и собственно связность

$$\omega = (\underline{n}_3 \bar{u} du)_0 = 4(R^2 + 1)^{-2} \left( \left\{ \left[ (\underline{n}_3 \underline{R}) \underline{R} - \frac{1}{2}(R^2 + 1)\underline{n}_3 \right] + \{ \underline{n}_3 + [\underline{n}_3 \underline{R}] \} \right\} d\underline{R} \right) \equiv \tilde{\omega} + \omega',$$

где  $d\tilde{\omega} = 0$ , а

$$\begin{aligned} d \left[ \omega' = 4(R^2 + 1)^{-2} \left( \{ \underline{n}_3 + [\underline{n}_3 \underline{R}] \} d\underline{R} \right) \right] &= d\omega = \\ &= \frac{16}{(R^2 + 1)^3} \left[ \frac{1}{2} (Z^2 - X^2 - Y^2 + 1) dX \wedge dY + 2(XZ - Y) dY \wedge dZ + 2(YZ + X) dZ \wedge dX \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

Потенциал типа  $A^{W-Y}(n_3, \underline{R})$  впервые использовался в [8] без какого-либо упоминания о его связи с монопольной связностью.

Из (19) следует, что проекция на базу не определена при  $X = Y = 0$ , т. е. на всей оси  $OZ$  в  $R^3 \cup \infty$ , являющейся образом слоя над точкой сферы  $S^2$  с координатами  $1 - \hat{z} = 1 - (n_3 \hat{r}) = 0$ . Для того чтобы полностью определить проекцию, следует накрыть  $S^2$  двумя картами, в одной из которых  $\zeta^S$  задается формулой (11), в другой –  $\zeta^N = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{|z_2|^2} = \frac{\hat{x} + i\hat{y}}{1 + \hat{z}} = e^{i\varphi} \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}$ .

Покажем теперь, что замена четырех параметров Кэли – Клейна  $u$ , ограниченных условием  $u\bar{u} = 1$ , на три проективные координаты  $\underline{R}$  легко может быть связана с векторной параметризацией Ф. И. Федорова

$$u = \frac{R^2 - 1 + 2R}{R^2 + 1} = \frac{1 + \frac{2R}{R^2 - 1}}{\sqrt{1 - \left(\frac{2R}{R^2 - 1}\right)^2}} \equiv \frac{1 + \underline{c}}{\sqrt{1 + \underline{c}\bar{\underline{c}}}}, \quad (22)$$

где  $\underline{c} = 2R(R^2 - 1)^{-1}$  – векторный кватернион-параметр. Обратное преобразование, как и следовало ожидать, двузначно:

$$\underline{R}_{\pm} = c^{-2} (1 \pm \sqrt{1 + c^2}) \underline{c},$$

поскольку группа  $SU(2) \sim S^3$ , параметризуемая векторным кватернионом  $\underline{R}$ , является двулистной накрывающей группы  $SO(3)$  с вектор-параметром  $\underline{c}$ .

Удивительно, но связь между проективными координатами на  $S^3$  и вектор-параметрами до сих пор оставалась не отмеченной в публикациях, трактующих расслоение Хопфа  $S^3 \rightarrow S^2$ , и каким-то образом прошла мимо внимания самого Ф. И. Федорова (см. § 5 его фундаментальной монографии, где активно используются проективные координаты, но только для  $S^2$  [10]).

В векторной параметризации с учетом  $\bar{u}(\underline{c}) du(\underline{c}) = \frac{1 - \underline{c}}{\sqrt{1 + c^2}} d\left(\frac{1 + \underline{c}}{\sqrt{1 + c^2}}\right) = \frac{d\underline{c} - [\underline{c} d\underline{c}]}{1 + c^2}$  1-форма (20) записывается в ковариантном виде

$$\omega = \left( \frac{[n_3 \underline{c}] - n_3}{1 + c^2} d\underline{c} \right), \quad (23)$$

а метрика сферы  $S^3$  задается выражением

$$du(\underline{c}) d\bar{u}(\underline{c}) = 4(1 + c^2)^{-2} \left[ (1 + c^2)(d\underline{c} d\underline{c}) - (\underline{c} d\underline{c})^2 \right].$$

Подстановка в (23) вектор-параметров  $\underline{c}_{N,S}$  показывает, что связность не задается на базе одной формулой. Для полноты рассмотрения напомним общий вид вектор-параметра преобразования (2), отвечающего повороту от  $\underline{n}_3$  к  $\hat{r}$ :

$$\underline{c} = \xi(\underline{n}_3 + \hat{r}) + 2[n_3 \hat{r}](\underline{n}_3 + \hat{r})^{-2} = \xi(\underline{n}_3 + \hat{r}) + [n_3 \hat{r}][1 + (\underline{n}_3 \hat{r})]^{-1},$$

где  $\xi$  — произвольная вещественная функция  $(\underline{n}_3 \hat{r})$ , а не вещественное число, как утверждается в [10]. Очевидно, что последнее выражение не определено при  $\hat{r} = -\underline{n}_3$ . Поэтому, не добавляя новые сингулярности, можем выбрать параметризацию  $\xi$  в виде  $\xi = [1 + (\underline{n}_3 \hat{r})]^{-1} \operatorname{tg} \tau$ , что возвращает к формуле (5а).

**Заключение.** Возможность описывать расслоение Хопфа в терминах вектор-параметров открывает перспективы для исследования групповой структуры и факторизации нестационарных зацепляющихся и заузленных решений уравнений Максвелла [9] в  $R^3 \cup \infty \times R^1$ , где добавочный

$R^1$ -фактор соответствует оси времени. При этом зависящие от времени горизонтальные поля должны генерировать на базе потенциалы, которые соответствуют полю, порождаемому на сфере  $S^2$  вращающимся монополем, расположенным в ее центре.

### Литература

1. *Urbantke H. K.* // J. of Geom. and Phys. 2003. Vol. 46. P. 125–150.
2. *Hopf H.* // Math. Ann. 1931. Vol. 104. P. 637–665.
3. *Кузьмина И. А., Шапуков Б. Н.* // Тр. геометр. семинара. Казан. ун-т. 2003. Вып. 24. С. 81–98.
4. *Luons D. W.* // arxiv: math-ph. 2008. 0808.3089v2. P. 1–6.
5. *Березин А. В., Курочкин Ю. А., Толкачев Е. А.* Кватернионы в релятивистской физике. Минск, 1989.
6. *Прись И. Е., Сиваков И. В., Толкач в Е. А.* // Докл. АН Беларуси. 1993. Т. 37, № 2. С. 135–139.
7. *Прись И. Е., Толкачев Е. А.* // Докл. АН Беларуси. 1993. Т. 37, № 3. С. 30–34.
8. *Ranada A. F.* // Lett. Math. Phys. 1989. Vol. 18. P. 97–106; *Ranada A. F., Trueba I. J. L.* // Phys. Lett. 1995. Vol. A202. P. 337–342.
9. *Kedia H., Bialynicki-Birula I., Peralta-Salas D., Irvine W. T. M.* // Phys. Rev. Lett. 2013. Vol. 111. P. 150404.
10. *Федоров Ф. И.* Группа Лоренца. М., 1979.
11. *Kholodenko A. L.* // arxiv: math-ph. 2014. 1402.1793v2 P. 1–35.

*E. A. TOLKACHEV*

### HOPF BUNDLE $S^3 \rightarrow S^2$ : PROJECTIVE COORDINATES AND F. I. FEDOROV'S VECTOR-PARAMETERS

### Summary

Within the framework of the covariant description of the Hopf bundle  $S^3 \rightarrow S^2$  in quaternions the connection between corresponding projective coordinates and vector-parameters was established, which gives a covariant representation of the potentials of linked electromagnetic fields and elaborates the theory of vector parameterization of the  $SU(2)$  group.

УДК 533.9:621.373.826:539.2

А. Н. ЧУМАКОВ<sup>1</sup>, И. С. НИКОНЧУК<sup>1</sup>, Н. А. ПОКЛОНСКИЙ<sup>2</sup>,  
Н. И. ГОРБАЧУК<sup>2</sup>, О. Н. ПОКЛОНСКАЯ<sup>2</sup>, В. Е. ОБУХОВ<sup>3</sup>

## ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩИЕ СТРУКТУРЫ В ЛАЗЕРНО-МОДИФИЦИРОВАННЫХ ПЛЕНКАХ АЛМАЗОПОДОБНОГО УГЛЕРОДА

<sup>1</sup>Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси

<sup>2</sup>Белорусский государственный университет

<sup>3</sup>Физико-технический институт НАН Беларуси

(Поступила в редакцию 14.11.2014)

**Введение.** Покрытия из алмазоподобного углерода (АПУ), наносимые на различные твердые подложки, обычно содержат как  $sp^3$ -, так и  $sp^2$ -гибридизованные атомные орбитали. Интерес к использованию пленок АПУ в электротехнике вызван их однородностью, относительно низким значением температурного коэффициента электрического сопротивления, стойкостью к радиации, а также к высоким температурам и плотностям пропускаемого через них тока [1].

Для создания резисторных [2] и других приборных структур на базе пленок АПУ могут быть использованы лазерные технологии. В отличие от известных методов модификации пленок АПУ с помощью ионной имплантации [3, 4], посредством воздействия лазерного излучения можно сформировать электропроводящую структуру практически любой конфигурации и оперативно изменять ее геометрию в процессе оптимизации параметров разрабатываемых приборов. Для развития технологии модификации пленок АПУ под действием лазерного излучения и расширения сферы их использования в электронике необходима информация о связи лазерно-индуцированной проводимости с параметрами лазерного воздействия и структурных превращениях, происходящих в модифицированных пленках. Метод комбинационного рассеяния света (КРС) является традиционным [1] для оценки фазового состава углеродных материалов и может использоваться для исследования процессов, протекающих в пленках при их модификации.

Цель настоящей работы – получение лазерно-индуцированных электропроводящих структур в пленках АПУ и установление связи их проводимости со структурно-фазовыми превращениями, а также параметрами лазерного облучения.

**Методика эксперимента.** Пленки осаждались поверх адгезионного подслоя на ситалловые и алюминиевые подложки. Адгезионный слой и пленка АПУ формировались соответственно разложением паров гексаметилдисилазана и бензола в низкотемпературной плазме. Толщина адгезионного подслоя составляла  $0,1 \div 0,2$  мкм; толщина пленок алмазоподобного углерода –  $0,7 \div 1,2$  мкм. Для исследования влияния лазерной модификации на электропроводность АПУ использовались пленки, осажденные на ситалловые подложки. Для изучения методом КРС структурно-фазовых превращений, проходящих в пленках АПУ при воздействии лазерного излучения, применялись пленки, сформированные на подложках из полированного алюминия.

Модификация пленок АПУ осуществлялась лазерным излучением с длиной волны  $\lambda = 532$  нм. Диаметр пятна лазерного излучения – 0,3 мм, режим работы лазера – импульсный (длительность импульса  $\tau = 18$  нс, частота  $5 \leq f \leq 10$  Гц). Энергетическая экспозиция  $H_e$  за время импульса составляла  $0,4 \div 3,5$  Дж/см<sup>2</sup>. В процессе модификации пленки линейно перемещались со скоростью 0,2 см/с.

Измерение поверхностного сопротивления модифицированных пленок выполнялось стандартным четырехзондовым методом при линейном расположении зондов; расстояние между зон-



дами – 1 мм. Поверхностная структура исходных и облученных пленок АПУ исследовалась атомно-силовым микроскопом многофункционального комплекса «Nanoflex», а их спектры отражения измерялись спектрофотометром «CARY-500 SCAN». Регистрация спектров КРС проводилась с помощью спектрально-аналитического комплекса «Nanofinder» на основе сканирующего конфокального микроскопа производства ООО «ЛОТИС ТИИ», обеспечивавшего фокусировку лазерного излучения на поверхности пленки в пятно площадью 1 мкм<sup>2</sup>. Спектры комбинационного рассеяния регистрировались при возбуждении излучением твердотельного лазера, работающего в непрерывном режиме на длине волны  $\lambda = 532$  нм. Регистрация КРС выполнялась в режиме накопления сигнала (длительность времени накопления составляла не более 30 с). Энергетическая экспозиция за время регистрации каждого из спектров не превышала  $H_e = 7,2$  мДж/мкм<sup>2</sup>, спектральное разрешение было не хуже 4 см<sup>-1</sup>.

**Результаты эксперимента и их обсуждение.** Исходные пленки АПУ имели удельное сопротивление  $\geq 10^8$  Ом·см. После воздействия лазерным излучением сопротивление пленок уменьшалось. На рис. 1 приведена зависимость поверхностного сопротивления пленки АПУ от плотности энергии лазерного излучения. Рост проводимости пленок сопровождался появлением зернистой структуры на ее поверхности (рис. 2, а) и уменьшением отражательной способности  $R$  в широком спектральном интервале (рис. 2, б). Поверхностное сопротивление пленки нелинейно падает с ростом энергетической экспозиции. Максимальное снижение (почти в тысячу раз) наблюдается от 0,7 до 1,1 Дж/см<sup>2</sup>. Дальнейший рост облученности пленок до 3,5 Дж/см<sup>2</sup> вызывает уменьшение поверхностного сопротивления лишь в 3 раза. Это может быть связано как с пороговым характером перестройки межатомных связей при воздействии лазерного излучения, в результате которого пленка АПУ переходит в проводящее состояние, так и с перколяционным характером переноса заряда по образующимся кластерам электропроводящей фазы. На замедлении спада сопротивления пленки с ростом энергетической экспозиции также может сказываться уменьшение ее толщины вследствие частичного испарения.

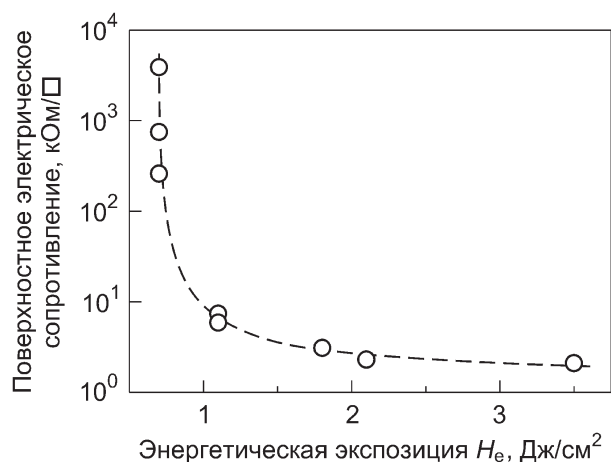


Рис. 1. Зависимость поверхностного электрического сопротивления пленки АПУ от энергетической экспозиции лазерного излучения с длиной волны 532 нм и частотой следования импульсов 5 Гц (штриховая линия проведена для удобства восприятия)

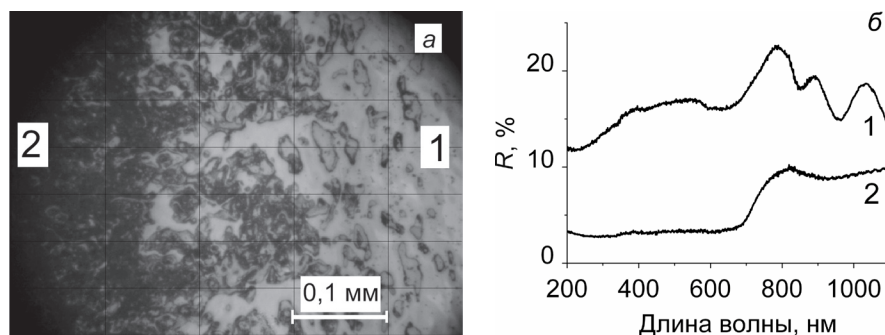


Рис. 2. АСМ-изображения поверхности пленки АПУ (а) (цифрами 1 и 2 обозначены исходные участки пленки и подвергнувшиеся воздействию лазерного излучения) и соответствующие им спектры отражения (б)

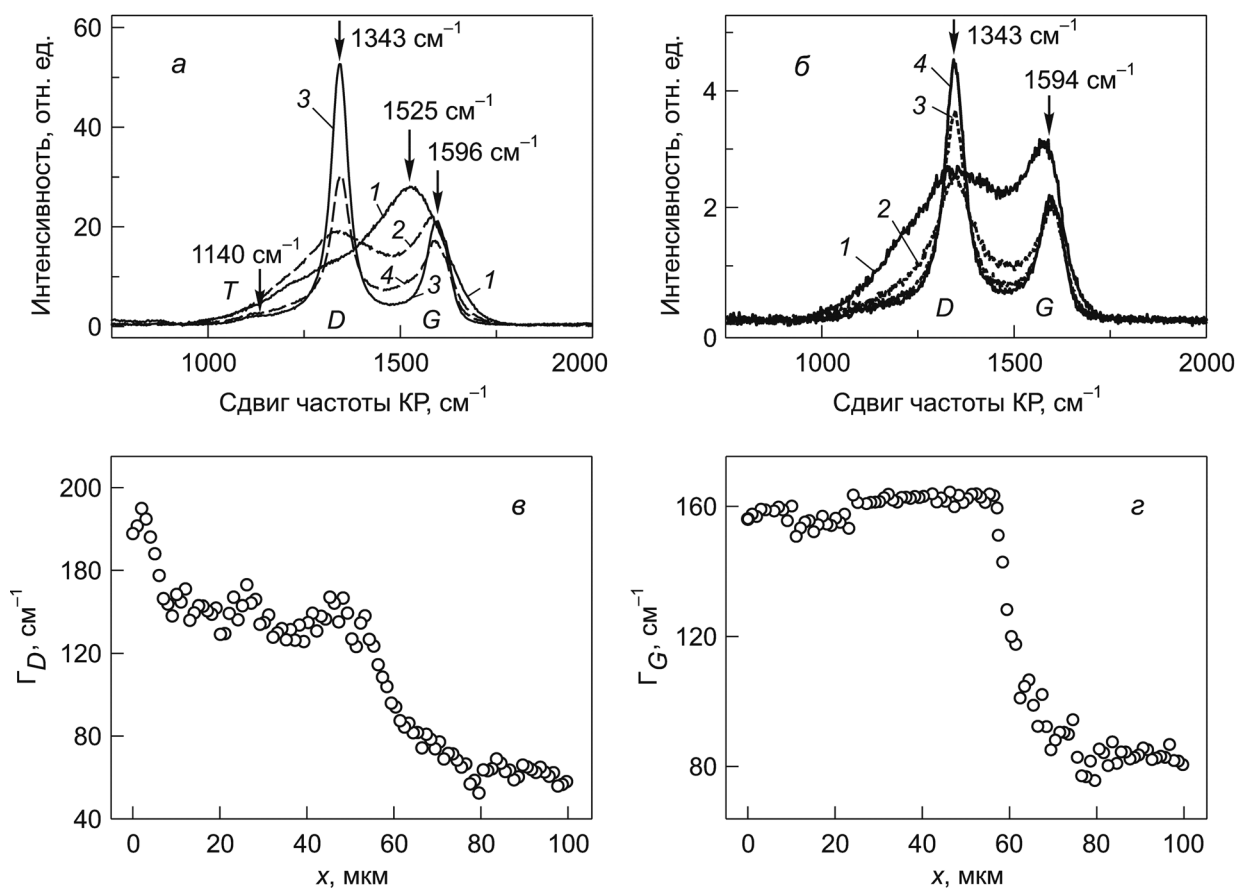


Рис. 3. Спектры КРС в центре (а) и на периферии (б) модифицированной области пленок АПУ и изменение спектральной ширины  $\Gamma_{0,5}$  полос  $D$  (в) и  $G$  (г) при перемещении от периферии ( $x = 0$ ) к центру ( $x = 100$  мкм): а – исходная пленка (1) и лазерно-облученные пленки при энергетической экспозиции 0,4 Дж/см<sup>2</sup> (2), 1,0 Дж/см<sup>2</sup> (3), 2,3 Дж/см<sup>2</sup> (4); б – спектр на краю модифицированной области (1), на расстоянии 10 мкм (2), 40 мкм (3) и 100 мкм (4) от края

Для определения состава электропроводящей фазы проводилось исследование исходных и модифицированных пленок методом КРС (рис. 3, а). На спектре исходной пленки наблюдается сигнал, являющийся суперпозицией  $D$ - и  $G$ -полос, при этом доминирует полоса  $G$  с максимумом при 1525 см<sup>-1</sup>. Подобный спектр КРС характерен для пленок аморфного тетраэдрического углерода с преобладанием  $sp^3$ -гибридизованных связей [5]. Лазерная модификация пленки АПУ приводит к уменьшению ширины как  $D$ -, так и  $G$ -полосы. При этом амплитуда сигнала  $D$ -полосы растет с увеличением энергетической экспозиции от 0,4 до 2,3 Дж/см<sup>2</sup>. С дальнейшим ростом энергетической экспозиции до 7,1 Дж/см<sup>2</sup> амплитуда сигнала КРС уменьшается, что связано с эрозией пленки. В спектрах КРС пленки, модифицированной при  $H_e = 1$  Дж/см<sup>2</sup>, отчетливо разрешается полоса  $D$  с максимумом при 1343 см<sup>-1</sup> и полоса  $G$  с максимумом при 1596 см<sup>-1</sup>. В интервале 1130–1150 см<sup>-1</sup> наблюдается особенность спектра, которая может быть интерпретирована как известная полоса  $T$ , происхождение которой связывают либо с изогнутыми графеновыми слоями [6], либо с  $sp^3$ -гибридизованным углеродом [5]. Спектры КРС с отношением интенсивностей  $D$ - и  $G$ -полос близкой к двум и максимумом  $G$ -полосы в окрестности 1600 см<sup>-1</sup> характерны для нанокристаллического графита [5]. Сопоставление полученных результатов и данных [5] позволяет предположить, что в результате воздействия лазерного излучения в пленках АПУ происходит формирование наноразмерных включений  $sp^2$ -гибридизованного углерода.

Увеличение энергетической экспозиции может приводить к росту доли  $sp^2$ -гибридизованного углерода и фактически к превращению алмазоподобного углерода в нанокристаллический графит.

Полученные данные подтверждаются спектрами КРС, зарегистрированными при сканировании периферийной части модифицированной области (рис. 3, б); энергетическая экспозиция модифицировавшего пленку лазерного излучения  $H_e = 1$  Дж/см<sup>2</sup>. Видно, что по мере продвижения

от края области к центру происходят изменения в спектрах КРС, аналогичные изменениям, которые вызваны увеличением энергетической экспозиции, т. е. чем дальше от края (либо больше  $H_e$ ), тем больше амплитуда  $G$ -полосы и меньше ширина  $D$ - и  $G$ -полос [7]. На рис. 3, в, г показаны зависимости ширины  $\Gamma_{0,5}$  полос  $D$  и  $G$  в спектрах КРС по мере продвижения от края в глубь области модификации АПУ. Достаточно резкое изменение в ширине полос  $D$  и  $G$ , происходящее в интервале расстояний 50–80 мкм, может служить косвенным подтверждением гипотезы о перколяционном характере образования электропроводящих кластеров нанокристаллического графита.

Для установления связи изменения проводимости пленки с ее нагревом лазерным излучением было рассчитано [8] распределение температуры по глубине мишени путем решения задачи теплопроводности в диапазоне энергетической экспозиции  $H_e$  от 0,4 до 3,5 Дж/см<sup>2</sup>, использованных нами в эксперименте. Рассчитанные пороговые значения энергетической экспозиции излучения, необходимые для достижения температуры графитизации поверхности АПУ и температуры испарения графитизованного слоя, равны соответственно 0,14 и 0,8 Дж/см<sup>2</sup>. Следовательно, частичное испарение пленки АПУ также вносит вклад в изменение ее проводимости, если поверхность облучается с энергетической экспозицией, большей порогового значения, необходимого для начала испарения графитизованного слоя. На замедление роста проводимости может также влиять лазерно-индуцированное откалывание наноразмерных слоев в пленках АПУ [9], особенно выраженное для коротких лазерных импульсов.

**Заключение.** При импульсном лазерном облучении пленок алмазоподобного углерода с энергетической экспозицией 0,4–3,5 Дж/см<sup>2</sup> получены и исследованы электропроводящие структуры с поверхностным сопротивлением от тысяч до единиц кОм/□. Установлена связь электрической проводимости пленок АПУ с образованием и ростом областей  $sp^2$ -гибридизованного углерода, а при определенной мощности лазерного излучения – с образованием кластеров нанокристаллического графита. Выявлено влияние испарения графитизованного слоя на изменение поверхностного сопротивления пленок АПУ при плотностях энергии воздействующего лазерного излучения свыше 0,8 Дж/см<sup>2</sup>.

Работа выполнена в рамках проекта Ф11СРБ-004 Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований, задания 2.4.05 программы «Конвергенция», задания 1.29 программы «Кристаллические и молекулярные структуры» Республики Беларусь.

## Литература

1. Robertson J. // Materials Science and Engineering R. 2002. N 37. P. 129–281.
2. Армеев В. Я., Волков Ю. Я., Конов В. И. и др. // Письма в ЖТФ. 1990. № 16. С. 54–56.
3. Файзрахманов И. А., Базаров В. В., Степанов А. Л., Хайбуллин И. Б. // ФТП. 2003. № 37. С. 748–752.
4. Грицкевич Р. Н., Поклонский Н. А., Горбачук Н. И., Шнак Е. П. Пат. 14221 Респ. Беларусь / Афіц. бюл. Нац. цэнтр інтэлектуал. уласнасці. 2011. № 2. С. 136.
5. Ferrari A. C., Robertson J. // Phys. Rev. B. 2001. N 301. P. 075414 (13).
6. Tan P. H., Dimovsky S., Gogotsi Yu. // Phil. Trans. R. Soc. Lond. 2004. A362. P. 2289–2310.
7. Поклонский Н. А., Горбачук Н. И., Ксенович В. К. и др. // Аморфные и микрокристаллические полупроводники: сб. тр. IX Междунар. конф. СПб., 2014. С. 29–30.
8. Chumakov A., Nikonchuk I., Poklonski N. et al. // Proc. of the X Symp. of Belarus and Serbia on Physics and Diagnostics of Laboratory and Astrophysical Plasmas. Belgrade, 2014. P. 23–26.
9. Kononenko T. V., Pimenov S. M., Kononenko V. V. et al. // Appl. Phys. A. 2004. N 79. P. 543–549.

A. N. CHUMAKOV, I. S. NIKONCHUK, N. A. POKLONSKI, N. I. GORBACHUK, O. N. POKLONSKAYA, V. E. OBUKHOV

## ELECTRICALLY CONDUCTING STRUCTURES IN LASER-MODIFIED DIAMOND-LIKE CARBON FILMS

### Summary

Modification of diamond-like carbon (DLC) films by pulsed laser radiation with a wavelength of 532 nm and a pulse duration of 18 ns was investigated. Irradiation of DLC films with laser fluence over 0.4 J/cm<sup>2</sup> was accompanied by the formation of electrically conducting structures with a surface resistance varying from thousands to a kΩ/sq. The dependence of conductivity of films on the laser fluence was established. A relationship between the energy density of laser radiation and the structural changes in films, their heating and evaporation is discussed.

UDC 533.6.01

*K. ALHUSSAN<sup>1</sup>, T. V. SIDOROVICH<sup>2</sup>, A. D. CHORNY<sup>2</sup>*

**SUPERSONIC INVISCID FLOW AROUND BODIES OF REVOLUTION:  
EMPIRICAL VS. NUMERICAL COMPUTATION**

<sup>1</sup>*King Abdulaziz City for Science and Technology, Kingdom of Saudi Arabia*

<sup>2</sup>*A. V. Luikov Heat and Mass Transfer Institute of NAS of Belarus*

*(Received 10.10.2014)*

**Introduction.** Aerodynamic characteristics of flying vehicles shaped as bodies of revolution with a curvilinear surface generator are interested first of all to find parameters of flow around a body. On the one hand, it is necessary to analyze, from a practical point of view, aerodynamic characteristics of such vehicles moving along different trajectories in the earth's atmosphere. On the other hand, if supersonic flows are considered, it is needed to study complex flow phenomena around a body, specifically related to oblique shock wave and contact (slip) surface. Shock waves and contact surfaces are discontinuities in fluid dynamics problems [1]. The features of supersonic flow start manifesting themselves markedly for different-shape bodies (sphere, cone, cylinder, disc, etc.) at sufficiently large, but different Mach numbers  $M$ . The boundary separating a supersonic flow from a hypersonic one is highly conditional. Some of the characteristic properties of hypersonic flows appear in the vicinity of the nose of a blunt body already at  $M = 3$  [1, 2].

The presence of shock waves is the main feature of flow when a thin pointed or a blunt body moves at supersonic speeds upstream [1, 2]. Flow is considered to be undisturbed up to some boundary in the vicinity of the body nose. The front part of the body is enveloped by the shock wave propagating downstream in the form of a slightly expanding surface. Flow parameters along the compression shock remain invariable. Of main interest are the features of a narrow region between the shock wave and the body. It is called the shock layer. In this layer, temperature and pressure will be much larger than those in the undisturbed flow; temperature and pressure ratios can infinitely grow with increasing Mach number. On the contrary, the density ratio is limited, although the shock layer density is larger than the undisturbed flow density. Therefore, the physical meaning of the formation of a compression shock (shock wave) consists in separating undisturbed and disturbed gas flow regions. Far behind the body, the shock wave becomes weak, whereas downstream the rear wake is positioned. As the compression shock moves farther and farther away from the body, it transits into a wave of weak disturbances [1, 2]. In addition to the shock wave, another type of discontinuity termed as a contact surface is an interface that separates two flow regions, but moves with those regions. The velocity and the pressure of the gas on each side of the contact surface are the same, but the other thermodynamic properties may be different. Unlike the shock wave, there is no flow of the gas across the contact surface [1, 2].

It is essential to evaluate the abilities of the computational fluid dynamics (CFD) technique that can solve problems in which shocks and contact surfaces occur. In particular, it is necessary to understand the details of the construction of a numerical mesh, which will allow discontinuities to be resolved [3]. When new CFD software is under development, there always arises the question of confidence of numerical computation results obtained by use of this software. The validity of the results obtained can be determined in three ways: a) comparison with the tabular data for a considered body; b) comparison with the analytical formulas obtained within the framework of the theory of supersonic inviscid gas flows; c) comparison with the numerical computation results obtained with the use of well-known reliable software.

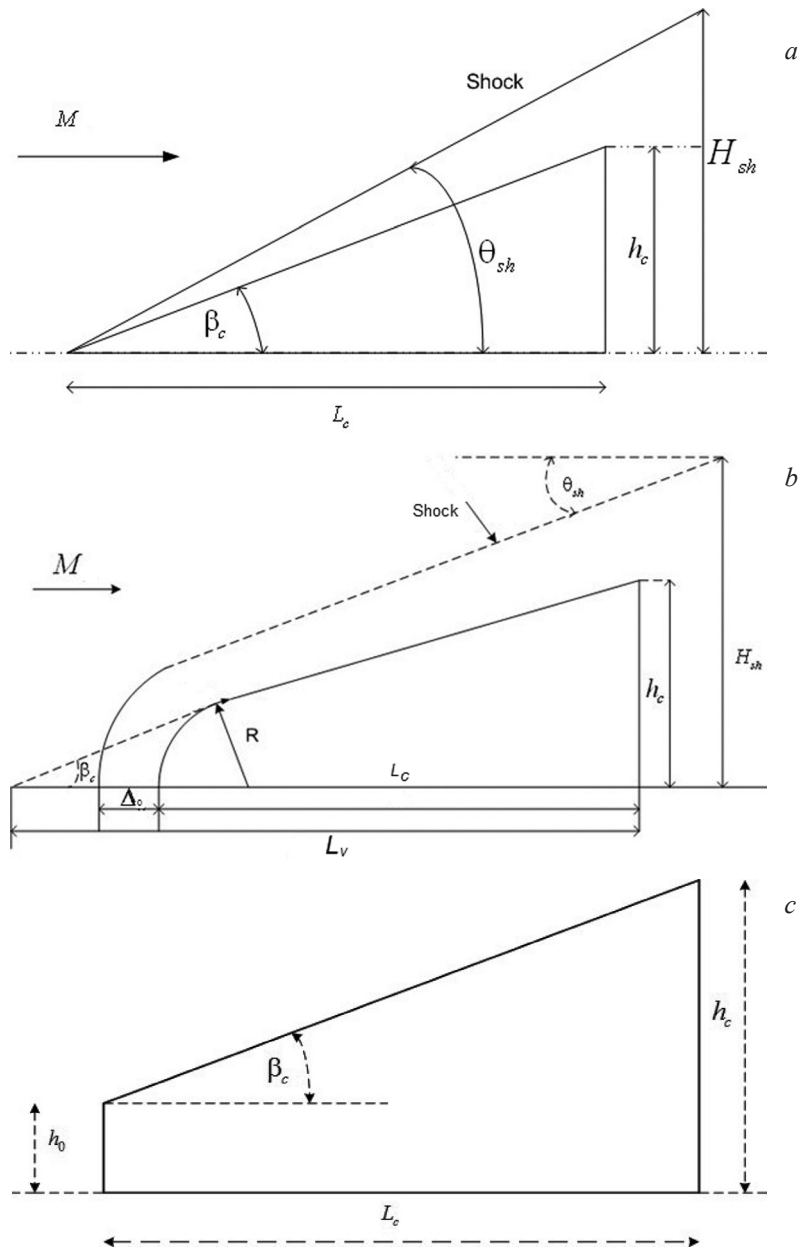


Fig. 1. Parameters of flow around circular cone (a), circular cone with the spherically blunt nose of radius  $R$  (b), and truncated cone (c) at zero angle of attack ( $\alpha = 0$ )

The objective of the present work is to model aerodynamic processes involving the supersonic movement of an axis-symmetrical body having a conical shape in the air environment at zero angle of attack with the implication of CFD [4]. It is assumed to obtain reasonable data on aerodynamic characteristics of a circular cone, a circular cone with a spherical nose, and a truncated cone (Fig. 1) at zero angle of attack ( $\alpha = 0$ ) and to analyze their accuracy in comparison with the results obtained by empirical formulas in the region of their validity. It is the important confidence criterion.

It is thought that the most complete information on aerodynamic characteristics of pointed cones of different length is outlined elsewhere in works [5–9] (in the form of tables, plots, and approximate formulas for calculation of flow parameters). This is very valuable for their direct use in CFD software for supersonic flow predictions in the vicinity of bodies of revolution, as well as in Tables [10–12].

**Circular cone.** In supersonic flow around a circular cone, a shock shaped as a conic surface (Fig. 1, a) is initiated ahead of it. To define aerodynamic characteristics of a body at zero angle of attack, it is needed to calculate parameters of a gas flow between a body and a shock, as well as an inclination angle of a shock

generator. The known quantities are:  $\beta_c$  is the half-angle at the cone vertex (in deg);  $M$  is the Mach number of the incoming flow far from the body;  $L_c$  is the cone length;  $P_\infty$  is the pressure of the gas incoming flow far from the body; thermodynamic properties depending on the atmosphere altitude: in particular,  $\rho_\infty$  is the density of the gas incoming flow far from the body;  $\gamma$  is the specific heats ratio (for air  $\gamma = 1.4$ ). It is needed to determine the following parameters: the wave drag coefficient equal to the pressure coefficient at the cone surface  $c_{p,c} = (P_c - P_\infty) / (\rho_\infty V_\infty^2 / 2)$  where  $P_c$  is the pressure at the cone surface; the cone surface-to-incoming flow pressure ratio  $P_c / P_\infty$ ; the dimensionless density at the cone surface  $\rho_c / \rho_\infty$ ; the deflection angle  $\theta_{sh}$  of the shock wave from the cone surface.

There are a number of analytical solutions to the above-stated problem that have been obtained in the constant density approximation [1, 5, 6]. This means that the density remains approximately constant between the body and the shock wave.

The ratio of shock layer density to density far from the cone is denoted as

$$\varepsilon = \frac{\rho_\infty}{\rho_{sh}} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \left[ 1 + \frac{2}{(\gamma - 1)M^2 \sin^2 \theta_{sh}} \right].$$

In [13], the formula is proposed, which ties the quantities  $\varepsilon$ ,  $\beta_c$  and  $\theta_{sh}$  by

$$\theta_{sh} - \beta_c = 0.5 \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \left[ 1 + \frac{2}{M^2 \theta_{sh}^2 (\gamma - 1)} \right] \left( 1 + \frac{\varepsilon}{12} \right) \theta_{sh}.$$

After some assumptions [14] are made, one can determine the deflection angle of the shock wave

$$\theta_{sh} = \left( \beta_c + \sqrt{\beta_c^2 + \frac{154\gamma^3 + 810\gamma^2 + 990\gamma + 350}{72(\gamma + 1)^4 M^2}} \right) / \left( \frac{11\gamma^2 + 50\gamma + 35}{12(\gamma + 1)^2} \right). \quad (1)$$

The shock layer thickness  $\Delta = H_{sh} - h_c$  can then be calculated in terms of the following radii:  $h_c = d_{con}/2 = L_c \operatorname{tg} \beta_c$  and  $H_{sh} = L_c \operatorname{tg} \theta_{sh}$ . The dimensionless pressure and the dimensionless density at the cone surface are as follows:

$$P_c / P_\infty = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} M^2 \sin^2 \theta_{sh} - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}, \quad \rho_c / \rho_\infty = \left( \frac{\gamma + 1}{2} M^2 \sin^2 \theta_{sh} \right) / \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \sin^2 \theta_{sh} \right). \quad (2)$$

The dimensionless pressure at the cone surface is related to the wave drag coefficient:  $P_c / P_\infty = 1 + c_{p,c} \gamma M^2 / 2$ . To calculate the wave drag coefficient, a number of the formulas are available

$$c_{p,c} = 2 \sin^2 \beta_c / [(1 - \varepsilon / 4) \cos^2(\theta_{sh} - \beta_c)]$$

or

$$c_{p,c} = (0.8 + M^{-2}) \beta_c^{1.7} / 500. \quad (3)$$

In the course of practical calculations over a wide range of  $M$  and  $\beta_c$ , these formulas yield the accuracy not worse than 5% [6]. In [5], it is defined more exactly. Better results are obtained over the ranges  $1.5 < M < 5$  and  $5^\circ < \beta_c < 25^\circ$  when the upper bound is set on the angles ( $\beta_c < 50^\circ$ ) and the Mach numbers ( $M < 7 - 8$ ), as well as the lower bound – on the conditions of flow around the cone. The formula, by which the estimated error of  $c_{p,c}$  with respect to the one assessed by exact theory does not exceed 2–3% at  $2 < M < 6$  and increases above 3–5 % at  $M < 1.5$ , has the following form [7]:

$$c_{p,c} = 2 \cdot \sin^2 \beta_c [1 + 4 / (1 + 16 \sin \beta_c \sqrt{M^2 - 1})]. \quad (4)$$

Formula (5) approximating another set of data [10] is more accurate. The formula, by which the maximum estimated error of  $c_{p,c}$  does not exceed 1 % at  $M > 2$  and increases not more than ~2.5 % at  $M < 1.5$ , has the following form:

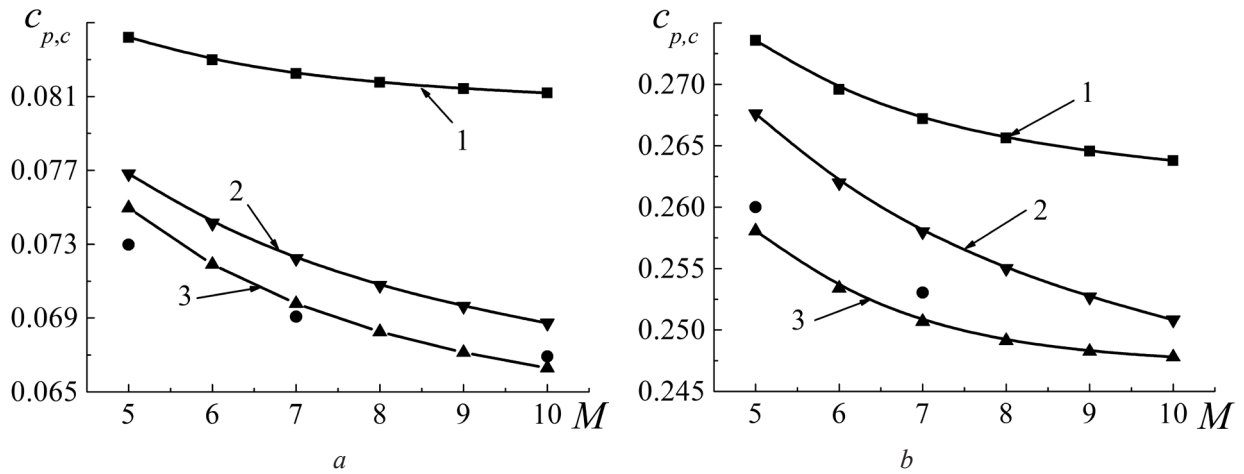


Fig. 2. Wave drag of the circular cone vs. incoming flow Mach number ( $a - \beta_c = 10^\circ$ ;  $b - 20^\circ$ ):  
1 – formula (3), 2 – (4), 3 – (5), • – numerical computation

$$c_{p,c} = 2e^x \sin^2 \beta_c \quad (5)$$

where  $x = 0.18145 - y(2.0923 - y(9.092 + y(6.876 - y(62.25 + 97.1y))))$ ,  $y = 0.1 \cdot \ln(\sin \beta_c \sqrt{M^2 - 1})$ .

ANSYS Fluent 14.5 [15] was adopted to conduct a series of numerical computations for definition of gas dynamic quantities in supersonic inviscid gas flow around circular cones with half-angles  $\beta_c = 5, 10, 20^\circ$ . Comparison was made with the above-mentioned analytical formulas and a series of tables and nomograms [10–12, 14], which allowed one to define  $P_c / P_\infty$ ,  $\rho_c / \rho_\infty$  and  $\theta_{sh}$  for pointed cones (Tab. 1). The numerical computation results for the dimensionless density and the dimensionless pressure near the cone surface coincide with the tabular values, and the analytical formulas confirm the correctness of the numerical computations performed (within 10 % of error).

Table 1. Comparison of numerical computation results, tabular values, and analytical formulas (1), (2)

M	$\beta_c, ^\circ$	$\rho_c / \rho_\infty$		$P_c / P_\infty$		$\theta_{sh}$		
		Tables [12]	Fluent	Tables [12]	Fluent	Tables [12]	Fluent	Formula (1)
5	10	1.8022	1.796	2.3083	2.3090	15.6083	15.55	15.01
7	10	2.3092	2.276	3.3962	3.3190	13.5405	13.10	13.28
5	20	3.0370	3.027	5.5582	5.6800	24.9427	24.61	24.37
7	20	3.8707	4.010	9.6810	9.9796	23.5298	23.22	23.20

Numerical computations showed that according to the conical-flow theory, the pressure and the density at the surface of the cone retain their value, except a small region in the vicinity of its vertex. The larger the Mach number, the smaller is the angle of the shock wave departure from the cone surface. The calculation results for the wave drag obtained by analytical expressions (3)–(5) (Fig. 2) are compared with the numerical computation data. As a result, expression (5) for the wave drag coefficient of circular cones can be recommended for verification.

**Cone with the spherically blunt nose.** The distance  $\Delta_0$ , at which the curvilinear shock wave departs from the spherical blunt nose, is determined as

$$\Delta_0 = C_0 \rho_\infty / \rho_{c0} R \quad (6)$$

where  $C_0 = 0.85$  in [14] and  $0.78$  in [16],  $\rho_{c0}$  and  $P_{c0}$  are the density and the pressure near the flow stagnation point of the cone nose that are determined by the expressions:

$$\frac{\rho_\infty}{\rho_{c0}} = \frac{1 + 0.5(\gamma - 1)M_\infty^2}{P_{c0} / P_\infty},$$

$$\frac{P_{c0}}{P_\infty} = [0.5(\gamma+1)M_\infty^2]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \cdot \left( \frac{\gamma+1}{2\gamma M_\infty^2 - \gamma + 1} \right)^{1/(\gamma-1)} \quad \text{or} \quad \frac{P_{c0}}{P_\infty} = 166.92 \cdot M_\infty^7 / (7M_\infty^2 - 1)^{2.5}.$$

The wave drag coefficient, the deflection angle of the shock wave of the conic part of the body, the dimensionless pressure at the body surface are the same as for the circular cone, whose length is equal to  $L_v = L_c + R/\sin \beta_c - R$ . The radii  $h_c$  and  $H_{sh}$  are calculated as  $h_c = L_v \tan \beta_c$  and  $H_{sh} = L_v \tan \theta_{sh}$ , as well as the shock layer thickness  $\Delta = H_{sh} - h_c$ . The stagnation temperature is found by the known relation [1, 2, 13]:

$$T_{c0} = T_\infty(1 + 0.5(\gamma-1)M^2). \quad (7)$$

The wave drag coefficient of the cone with the spherical nose is determined as  $C_{pc} = 0.5C_{p0}(1 + \sin^2 \beta_c)d^2 + c_{p,c}(1 - d^2)$  where  $c_{p,c}$  is the wave drag coefficient of the circular cone, whose length is equal to  $L_v$  and  $d = R \cos \beta_c / h_c$ . The pressure coefficient  $C_{p0}$  is determined similar to the sphere body at the stagnation point:  $C_{p0} = 2 - (\gamma-1) / (\gamma+1) - 2 / [(\gamma+1)M^2]$ .

For comparison of the results obtained by the analytical formulas and the CFD technique, the supersonic inviscid gas flow around the cone with the spherical blunt nose ( $\beta_c = 20^\circ$ ,  $L_v = 1$  m,  $R = 0.048087$  m) was considered ( $\gamma = 1.4$ ,  $T_\infty = 216$  K,  $P_\infty = 5474$  Pa). Numerical computations showed that the pressure growth in the shock layer (near the vertex of the spherical nose) coincides with the same for a sphere and is determined only by incoming flow Mach number values. The dimensionless pressure  $P_{c0}/P_\infty$  falls from 61 (spherical nose) to 9.2 characteristic for conical flows (Fig. 3, a).

The calculated stagnation temperature and shock layer thickness for the cone with the spherical nose were compared with the same obtained from formulas (6) and (7) (Tab. 2). As a result, expressions (6) and (7) can be recommended for verification and estimation of numerical mesh features.

Table 2. Stagnation temperature and the shock layer thickness for the cone with the spherical nose

M	$\beta_c, ^\circ$	$T_0, K$		$\Delta_0, m$	
		Fluent	Formula (7)	Fluent	Formula (6)
5	20	$\approx 1306$	1296	$\approx 0.007621$	0.00751
7	20	$\approx 2345$	2332.8	$\approx 0.00702$	0.00693

**Truncated cone.** A truncated cone is a particular case of bodies with a blunt nose, i. e., those having an aerodynamic shape, around which the flow is accompanied by the formation of a curvilinear shock wave, the development of local sub- and supersonic zones, internal shock waves. The wave drag coefficient of the truncated cone is found as [17]

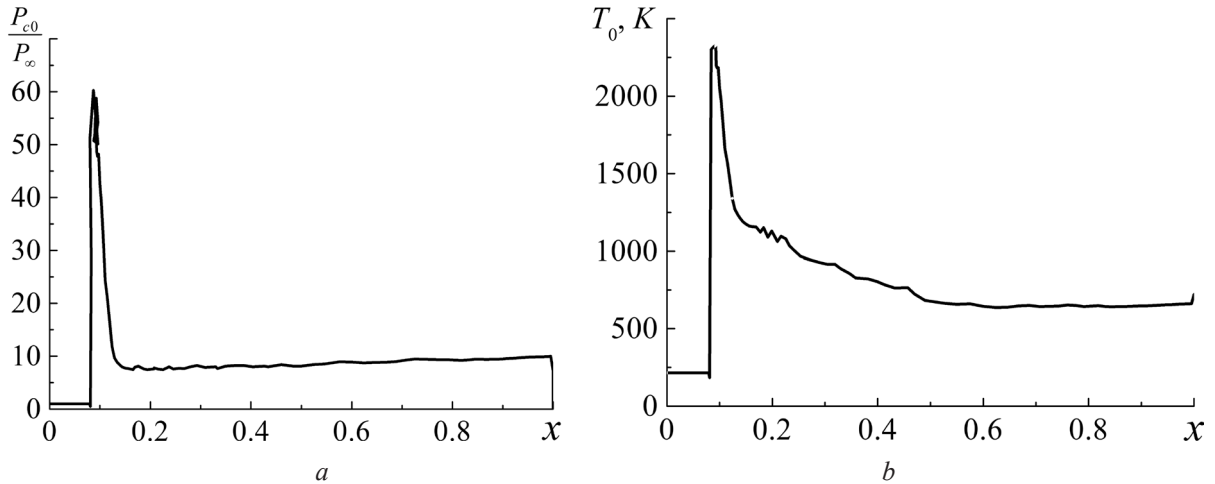


Fig. 3. Dimensionless pressure (a) and temperature (b) in the shock layer around the cone with the spherical nose (CFD data):  $\beta_c = 20^\circ$ ,  $M = 7$



$$C_{pc} = 0.915C_{p0}(1 + \sin^2 \beta_c)d^2 + c_{p,c}(1 - d^2) \quad (8)$$

where  $d = h_0 \cos \beta_c / h_c$ .

One of the important flow characteristics is a distance  $\Delta_0$ , at which the shock wave departs from the head of the truncated cone. For comparison, the following empirical relations are used:

$$\Delta_0 / 2h_0 = 0.23\sqrt{(M^2 + 5) / (M^2 - 1)}, \quad (9)$$

$$\Delta_0 / h_0 = 1.03\sqrt{\rho_\infty / (\rho_{c0} - \rho_\infty)}. \quad (10)$$

The wave drag coefficient, the deflection angle of the shock wave, and the dimensionless pressure of the conical part of the truncated cone are the same as for the circular cone, whose length is equal to  $L_v$ .

ANSYS Fluent 14.5 [15] was used to perform numerical computations and to compare them with the experimental data [17]. The diameter of the cone tail is  $d_{con} = 2h_c = 30$  mm, the diameter of the cone nose is  $h_0 = 2h_c/3$ , and the half-angle is  $\beta_c = 20^\circ$ . The calculated stagnation temperature and shock layer thickness for the truncated cone were compared with the same obtained from formulas (7), (9) and (10). As a result, these parameters found from the numerical analysis are in a good agreement with the analytical values of formulas (7), (9) and (10) (Tab. 3).

Table 3. Stagnation temperature and the shock layer thickness for the truncated cone

$M$	$T_0$ , K Formula (7)	$T_0$ , K, Fluent	$\Delta_0$ , m Fluent	$\Delta_0$ , m Formula (9)	$\Delta_0$ , m Formula (10)
5	1296.0	≈1300.0	≈0.00495	0.00510	≈0.00486
7	2332.8	≈2337.6	≈0.00480	0.00488	≈0.00466

**Conclusions.** The numerical data for wave drag coefficient, stagnation temperature, and shock layer thickness were used to show a good agreement between the numerical and empirical solutions for supersonic flow around the circular cone, the circular cone with the spherical nose, and the truncated cone. Through this computational analysis, a better interpretation of these physical phenomena can be made. One can conclude that the used empirical solutions can be recommended for CFD software verification and estimation of numerical mesh features. It all is capable of predicting accurate results and also of capturing flow discontinuities, e.g., oblique shock waves and contact surfaces.

## References

1. Chernyi G. G., Losev S. A., Macheret S. O. et al. Physical and Chemical Processes in Gas Dynamics. Virginia, 2004.
2. Anderson, J. D., Jr. Modern Compressible Flow. New York, 2002.
3. Alhussan K. Direct fluid–fluid interaction in three-dimensional supersonic non-steady flow. DSc. Diss. The George Washington University, 2002.
4. Alhussan K. Computational analysis of high speed flow over a conical surface for air as working fluid // Proc. 3rd IASME/WSEAS Int. Conf. on Fluid Dynamics & Aerodynamics, Corfu, Greece, Aug. 20–22. Corfu, 2005. P. 202–205.
5. Krasnov N. F. Aerodynamics of bodies of revolution. Moscow, 1958.
6. Krasnov N. F. Fundamentals of estimated aerodynamics. Moscow, 1981.
7. Hill J. C. // AIAA J. 1968. Vol. 7, no. 1. P. 165–167.
8. Simon W. E., Walter L. A. // AIAA J. 1963. Vol. 1, no. 7. P. 1696–1698.
9. Nielsen J. N. Missile aerodynamics. New York, 1988.
10. Sims J. R. Tables of supersonic flow around right circular cones at zero angle of attack. NASA-SP-3004. 1964.
11. Equations, Tables, and Charts for Compressible Flow (by Ames Research Staff). NASA Report 1135. 1953.
12. Bartlett M. A. Tables of supersonic symmetrical flow around right circular cones, with and without the addition of heat at the wave. R&M. 1968. No. 3521. London: Her Majesty's Stationary Office.
13. Hase U. D., Probstin R. F. Theory of supersonic flows. Moscow, 1962.
14. Barnette D. W. Program SHOCKS: Quickly estimating super- and hypersonic flows. New Mexico: Sandia National Laboratories, 1993.
15. ANSYS Fluent Tutorial Guide. Ansys Inc., 2011.
16. Lunev V. V. Supersonic aerodynamics. Moscow, 1975.
17. Brodetsky M. D., Shevchenko A. M. // Appl. Mech. Tech. Phys. 2003. Vol. 44, no. 5. P. 46–55.

*Х. АЛЬХУССАН, Т. В. СИДОРОВИЧ, А. Д. ЧОРНЫЙ*

**СВЕРХЗВУКОВОЙ НЕВЯЗКИЙ ПОТОК ОКОЛО ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ:  
ЭМПИРИЧЕСКИЙ И ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ**

**Резюме**

Расчетные данные по волновому коэффициенту сопротивления, температуре торможения, толщине ударного слоя и другим газодинамическим параметрам были использованы для того, чтобы показать приемлемое согласие между численными и эмпирическими результатами для обтекания сверхзвуковым потоком заостренного кругового конуса, кругового конуса со сферическим носиком и усеченного конуса. Из анализа численных данных, позволяющих получить представление о рассмотренных физических явлениях, можно сделать вывод, что использованные эмпирические соотношения могут быть рекомендованы для верификации разрабатываемого нового программного обеспечения вычислительной гидрогазодинамики, а также для оценки свойств применяемых вычислительных сеток. Это позволяет получать более точные результаты, а также разрешить такие особенности сверхзвукового потока, как ударные волны и контактные границы.

УДК 537.622:537.638.5

Т. М. ТКАЧЕНКО, В. С. ГОНЧАРОВ

## МАГНИТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СПЛАВОВ

 $\text{MnNi}_{1-x}\text{Fe}_x\text{Ge}$  ( $0,10 \leq x \leq 0,25$ )

Научно-практический центр НАН Беларуси по материаловедению

(Поступила в редакцию 05.11.2014)

**Введение.** Материалы с общей формулой  $(A_y B_{1-y})_{2+\delta} C_{1-x} D_x$  (где  $A$  – Mn или Co,  $B$  – Fe или Cr;  $C$  и  $D$  – из группы элементов P, As, V, Se, Ge, Si и Sb;  $0 \leq x \leq 1$ ;  $0 \leq y \leq 1$ ;  $-0,1 \leq \delta \leq +0,1$ ) имеют хорошие магнитокалорические характеристики [1] и являются перспективными в практическом использовании в качестве рабочих тел твердотельных магнитных рефрижераторов. В последнее время получен ряд новых материалов подобного типа, содержащих никель. К их числу относятся и четырехкомпонентные твердые растворы  $\text{MnNiFe:Ge}$  [2–4]. Ранее были получены и исследованы структурные и магнитные свойства тройных сплавов  $\text{MnFeGe}$  и  $\text{MnNiGe}$  [5–8]. В работе [5] показано, что во всем температурном диапазоне  $\text{MnFeGe}$  кристаллизуется в гексагональную структуру типа  $\text{Ni}_2\text{In}$ . По данным нейтронографических исследований порошка  $\text{Fe}_{1,0}\text{Mn}_{0,95}\text{Ge}$  магнитные моменты атомов Mn при температурах ниже 240 К упорядочены антиферромагнитно, тогда как моменты атомов Fe упорядочены ферромагнитно [6]. Тройной сплав состава  $\text{MnNiGe}$  при комнатной температуре имеет орторомбическую структуру типа  $\text{TiNiSi}$  (пространственная группа  $Pnma$ ) [7, 8]. Ниже температуры Нееля ( $T_N = 346$  К) это спиральный антиферромагнетик (AFM). При температуре порядка 470 К сплав претерпевает кристаллографический переход от низкотемпературной орторомбической структурной фазы типа  $\text{TiNiSi}$  к высокотемпературной структурной фазе типа  $\text{Ni}_2\text{In}$ . Показано также [7], что при замещении марганца или никеля железом в  $\text{MnNiGe}$  уже при комнатной температуре сплав имеет структуру  $\text{Ni}_2\text{In}$ , а не  $\text{TiNiSi}$ , т. е. температура структурного перехода значительно снижается. Однако свойства четырехкомпонентной системы  $\text{MnNiFeGe}$  в зависимости от содержания компонент и способа получения сплава практически не изучены.

Целью данной работы является исследование магнитных характеристик системы твердых растворов  $\text{MnNi}_{1-x}\text{Fe}_x\text{Ge}$  в области составов  $0,10 \leq x \leq 0,25$ , а также выяснение характера изменения этих характеристик при варьировании состава и способов термообработки.

**1. Методика эксперимента.** Образцы  $\text{MnNi}_{1-x}\text{Fe}_x\text{Ge}$  четырех различных составов ( $x = 0,10$ ;  $0,15$ ;  $0,20$  и  $0,25$ ) получены из расплава гомогенных смесей порошков чистотой не ниже 99,99 % в атмосфере аргона с последующей закалкой на колесо, вращающееся с линейной скоростью  $20 \text{ мм} \cdot \text{с}^{-1}$ . Часть полученных образцов каждого состава после закалки подвергали отжигу при температуре  $T = 1120$  К в течение 6 ч.

Рентгенографический фазовый анализ порошков полученных образцов, выполненный в  $\text{CuK}_\alpha$ -излучении, показал, что все полученные твердые растворы  $\text{MnNi}_{1-x}\text{Fe}_x\text{Ge}$  в области составов  $0,10 \leq x \leq 0,25$  кристаллизовались в гексагональную структуру типа  $\text{Ni}_2\text{In}$  (пространственная группа  $P6_3/mmc$ ).

Измерения удельных намагниченностей твердых растворов  $\text{MnNi}_{1-x}\text{Fe}_x\text{Ge}$  ( $0,10 \leq x \leq 0,25$ ) проведены методом Фарадея в поле 0,86 Тл и интервале температур  $77 \leq T \leq 500$  К. Температуры Кюри твердых растворов определены экстраполяцией линейной части кривой температурной зависимости квадрата удельной намагниченности к оси температур.

**2. Результаты и их обсуждение.** По характеру температурной зависимости удельной намагниченности образцы всех изученных составов  $\text{MnNi}_{1-x}\text{Fe}_x\text{Ge}$  ( $0,10 \leq x \leq 0,25$ ) относятся к ферромагнетикам (рис. 1). Переходов типа антиферромагнетик–ферромагнетик не обнаружено, также как и какой-либо значительной зависимости магнитных свойств от способа термообработки сплавов. Величины удельных намагниченностей и температур Кюри образцов одинакового состава, но полученных с помощью различных термообработок – закалкой и закалкой с отжигом, отличаются незначительно (таблица). Величины удельных намагниченностей закаленных образцов не более чем на 2 emu/g выше, чем образцов того же состава, но с дополнительным отжигом, а температуры Кюри соответственно выше не более чем на 2 К.

**Магнитные характеристики твердых растворов  $\text{MnNi}_{1-x}\text{Fe}_x\text{Ge}$  ( $0,10 \leq x \leq 0,25$ )**

№	Состав	Способ обработки	$T_C$ , К	$\sigma$ , emu/g
1	$\text{MnNi}_{0,75}\text{Fe}_{0,25}\text{Ge}$	Закалка на колесо	234	67,6
2	$\text{MnNi}_{0,80}\text{Fe}_{0,20}\text{Ge}$	Закалка на колесо	232	63,7
3	$\text{MnNi}_{0,85}\text{Fe}_{0,15}\text{Ge}$	Закалка на колесо	220	62,9
4	$\text{MnNi}_{0,90}\text{Fe}_{0,10}\text{Ge}$	Закалка на колесо	218	56,7
5	$\text{MnNi}_{0,75}\text{Fe}_{0,25}\text{Ge}$	Закалка + отжиг	232	65,2
6	$\text{MnNi}_{0,80}\text{Fe}_{0,20}\text{Ge}$	Закалка + отжиг	230	66,0
7	$\text{MnNi}_{0,85}\text{Fe}_{0,15}\text{Ge}$	Закалка + отжиг	219	59,6
8	$\text{MnNi}_{0,90}\text{Fe}_{0,10}\text{Ge}$	Закалка + отжиг	295	10,9

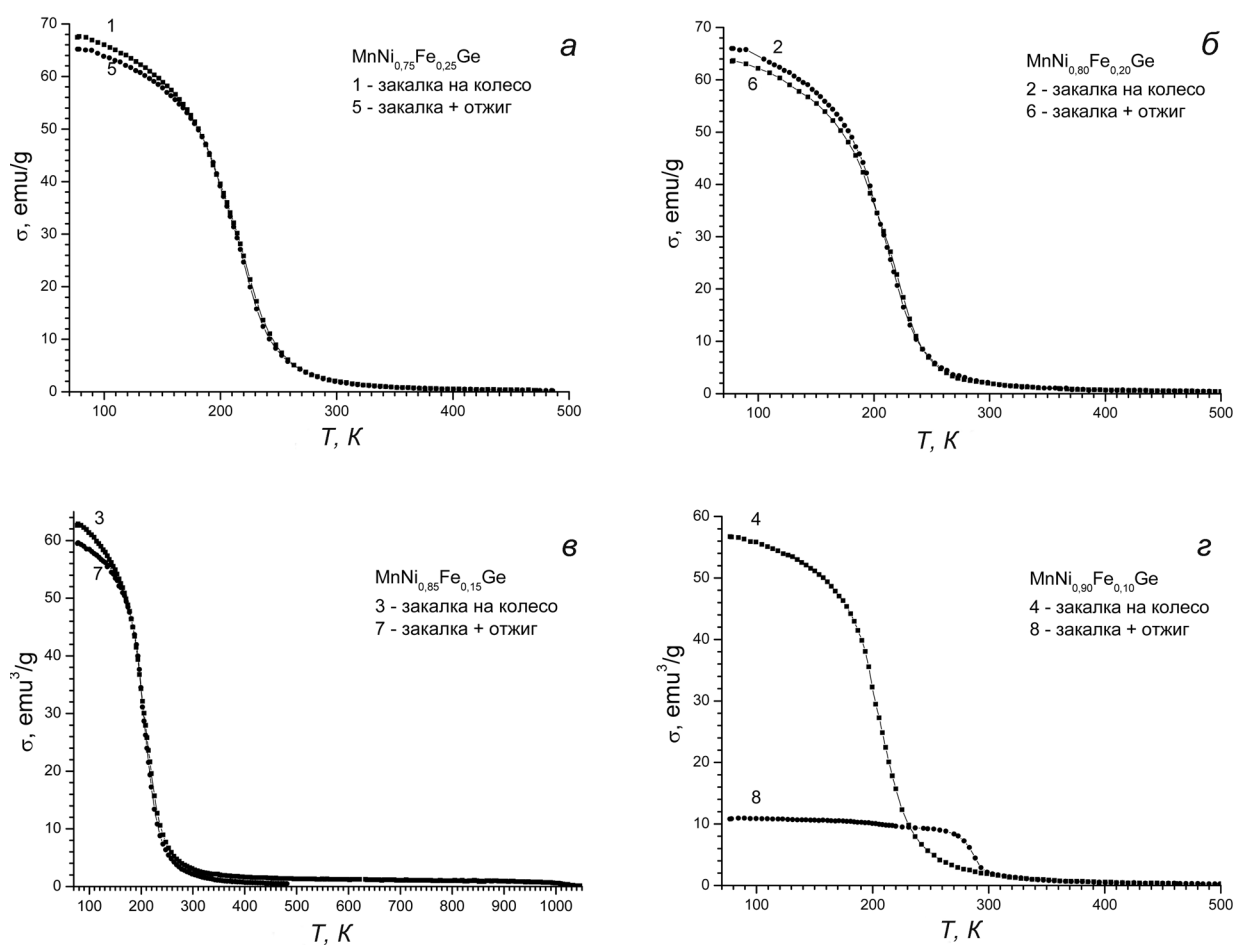


Рис. 1. Зависимости от температуры удельной намагниченности сплавов  $\text{MnNi}_{1-x}\text{Fe}_x\text{Ge}$  с различной термообработкой и составами: а –  $x = 0,25$ ; б –  $x = 0,2$ ; в –  $x = 0,15$ ; г –  $x = 0,10$

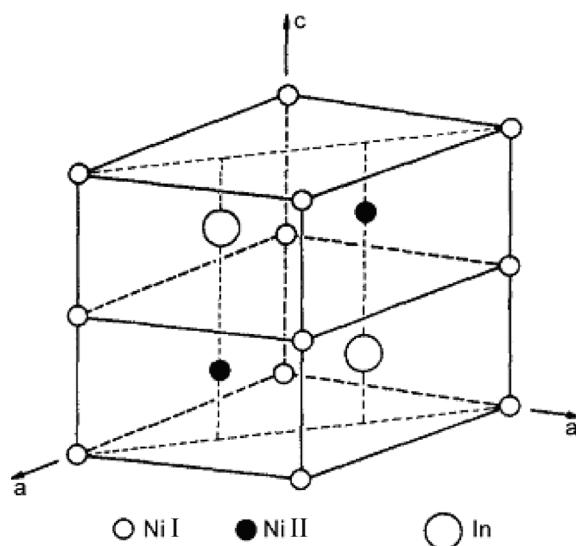


Рис. 2. Элементарная ячейка структуры типа  $Ni_2In$

Небольшое различие в величинах намагниченностей закаленных и отожженных сплавов одного состава может быть связано с особенностями структуры типа  $Ni_2In$ , модель элементарной ячейки которой показана на рис. 2. Гексагонально плотноупакованные атомы металлоида (в нашем случае – германия) образуют каркас, в котором имеются поры двух сортов, занимаемые атомами металла:  $2a$  – октаэдрические (Me I) и  $2d$  – тригонально-бипирамидальные (Me II). В двух этих типах структурно-неэквивалентных пор в нашем случае могут располагаться атомы металлов трех сортов: марганца, никеля и железа. Свойства полученного сплава в целом зависят от того, каким образом распределяются эти металлические атомы по позициям. Структурам этого типа присуща высокая дефектность, особенно в условиях получения сплава закалкой. В известных трехкомпонентных растворах с двумя сортами атомов металла ( $MnFeGe$  и  $MnNiGe$ ) общепринято [5, 8], что атомы марганца локализуются в позициях Me I, а атомы никеля (или железа) занимают только позиции Me II. Однако [5] для  $MnFeGe$  со структурой типа  $Ni_2In$  допускают возможность до 17 ат.% взаимного «смешивания» атомов по подрешеткам Me I и Me II. В случае трех сортов атомов металла картина их распределения по позициям может быть еще более сложной.

По атомной массе, строению внешней электронной оболочки и прочим характеристикам железо гораздо ближе к марганцу, чем к никелю, т. е. замещение атомами железа атомов марганца выглядит предпочтительнее замещения атомов никеля. Закалка ведет к высокой дефектности твердых растворов  $MnNi_{1-x}Fe_xGe$ , в обеих металлических подрешетках фиксируется некоторое количество вакантных структурных позиций. Отжиг приводит к регуляризации сплава, т. е. пустоты в октаэдрической подрешетке структуры (Me I) заполняются атомами металла. Поскольку никеля в расчетной формуле  $MnNi_{1-x}Fe_xGe$  меньше, чем в совокупности марганца и железа, то атомы Mn и Fe, при полностью заполненной подрешетке Me I, частично переходят в подрешетку Me II. Из литературы известно [2, 5], что в  $MnNiGe$  на атомах никеля в подрешетке Me II магнитный момент не локализуется. Таким образом, небольшое количество магнитных атомов железа и марганца, перейдя в подрешетку Me II, возможно, также перестает участвовать в магнитном взаимодействии, тем самым несколько снижая общую намагниченность сплава.

Однако если рассматривать влияние роста концентрации железа на намагниченность сплава при одинаковом способе термообработки, например сравнить только закаленные образцы, то оказывается, что рост  $x$  ведет к росту намагниченности твердого раствора в целом. Иными словами, железо постоянно замещает марганец и в позициях Me I. При этом магнитный момент, локализованный на каждом атоме железа, больше магнитного момента, локализованного на атоме марганца, что и ведет к росту намагниченности сплава в целом.

Единственный состав, для которого наблюдается значительное расхождение температурных кривых намагниченностей при различной термообработке образцов, – это состав  $MnNi_{0,9}Fe_{0,1}Ge$

с содержанием 10 ат.% железа. В результате дополнительного отжига удельная намагниченность образца этого состава существенно снижается (от ~56 до ~10 emu/g), при этом температура магнитного фазового перехода  $T_C$  растет от 218 К в закаленном до 295 К в отожженном образцах.

**Заключение.** Показано, что образцы  $\text{MnNi}_{1-x}\text{Fe}_x\text{Ge}$  ( $0,10 \leq x \leq 0,25$ ) всех изученных составов при комнатной температуре относятся к ферромагнетикам со структурой типа  $\text{Ni}_2\text{In}$ . При увеличении содержания железа от  $x = 0,10$  до  $x < 0,20$  идет процесс статистического замещения марганца в обоих типах структурных позиций Me I и Me II. При  $x \geq 0,20$ , когда весь марганец в позициях Me II замещен, железо замещает марганец только в позициях Me I. Никель находится лишь в позициях Me II и железом не замещается.

В завершение следует отметить, что работа находится в стадии продолжения, в частности, предполагается проведение нейтронографических исследований, являющихся прямым методом определения как кристаллической, так и магнитной структур.

Авторы выражают благодарность зав. отделом Донецкого физико-технического института В. И. Валькову за предоставленные образцы.

### Литература

1. Brück E. H., Tegusi O., Boer F. R. Material for magnetic refrigeration preparation and application. US Patent. 2004. 7069729 B2.
2. Liu E., Wang W., Feng L. et al. // Nat. Commun. 2012. Vol. 3. P. 873.
3. Chen L., Hu F. X., Wang J. et al. // Appl. Phys. Lett. 2012. Vol. 101. P. 012401.
4. Ma S. C., Xuan H. C., Zhang C. L. et al. // Appl. Phys. Lett. 2010. Vol. 97. P. 052506.
5. Szytula A., Pqdziwiatr A. T., Tomkowicz Z. et al. // J. of Magnetism and Magnetic Materials. 1981. Vol. 25. P. 176–186.
6. Murthy M. R. L. N., Natera M. G., Begum R. J. et al. // Proc. Nucl. Phys. and Solid State Physics: Symp. Bombay, 1972. P. 513.
7. Zhang C. L., Wang D. H., Chen J. et al. // Chin. Phys. B. 2011. Vol. 20. P. 097501-1–097501-4.
8. Zhang C. L., Wang D. H., Cao Q. Q. et al. // J. Phys. D: Appl. Phys. 2010. Vol. 43. P. 205003.

*T. M. TKACHENKA, V. S. GONCHAROV*

### MAGNETIC CHARACTERISTICS OF $\text{MnNi}_{1-x}\text{Fe}_x\text{Ge}$ ( $0.10 \leq x \leq 0.25$ ) ALLOYS

#### Summary

Magnetic characteristics of  $\text{MnNi}_{1-x}\text{Fe}_x\text{Ge}$  alloys are studied in the concentration region  $0.10 \leq x \leq 0.25$ . It is shown that all samples under study are ferromagnetics at room temperature and have the  $\text{Ni}_2\text{In}$ -type of the crystal structure. At  $x < 0.20$ , Fe atoms statistically substitute Mn atoms in Me I and Me II positions of  $\text{MnNi}_{1-x}\text{Fe}_x\text{Ge}$ . At  $x \geq 0.20$ , Fe atoms replace only Mn in Me I positions and do not replace Ni in Me II positions.

УДК 534.8

*В. Г. ГУРТОВОЙ, А. У. ШЕЛЕГ*

**ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МОНОКРИСТАЛЛОВ  
ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ СОЕДИНЕНИЙ  $\text{Cu}_2\text{ZnSnS}_4$  И  $\text{Cu}_2\text{ZnSnSe}_4$**

*Научно-практический центр НАН Беларуси по материаловедению*

*(Поступила в редакцию 28.11.2014)*

**Введение.** В настоящее время твердые растворы  $\text{Cu}(\text{InGa})\text{Se}_2$ ,  $\text{CuIn}(\text{S,Se})_2$ ,  $\text{CuGa}(\text{S,Se})_2$  – один из наиболее перспективных материалов для использования в качестве базовых слоев преобразователей солнечного излучения. В отличие от кремния, который широко используется в качестве базовой основы для создания фотопреобразователей и имеет непрямозонную энергетическую структуру, указанные твердые растворы являются прямозонными полупроводниками и обладают большим коэффициентом поглощения в видимой и ближней инфракрасной области спектра.

В ряде работ показано, что для твердых растворов  $\text{Cu}(\text{InGa})\text{Se}_2$ , которые применяются в качестве базовой основы фотопреобразователей солнечного излучения, коэффициент полезного действия (КПД) составляет ~19,0–20,3 % [1, 2]. Однако ограниченность земных запасов и высокая стоимость химических элементов In и Ga вынуждают исследователей находить и использовать более доступные элементы. Поэтому в последнее время осуществлен переход на другие прямозонные полупроводники, в которых дорогостоящие In и Ga заменены на более дешевые и распространенные Zn и Sn.

Таковыми полупроводниками являются четверные соединения  $\text{Cu}_2\text{ZnSnS}_4$  (CZTS) и  $\text{Cu}_2\text{ZnSnSe}_4$  (CZTSe) и твердые растворы на их основе. В последние годы в литературе появилось большое количество публикаций, посвященных как применению этих материалов, так и исследованию их физических свойств [3–5]. Однако, несмотря на большие усилия в этом направлении, самый большой КПД солнечных элементов на основе CZTSe к настоящему времени был получен ~11,1–12,6 % [6, 7]. Причина низкой эффективности фотоэлектрического преобразования этих материалов состоит в том, что существующие технологии пока не позволяют создавать тонкие пленки вышеуказанных соединений с высоким качеством структуры и подходящими для солнечных элементов электрическими свойствами. Также при получении четверных соединений CZTS и CZTSe возникает целый ряд проблем, решение которых может увеличить эффективность фотоэлектрического преобразования данного материала. Так, одна из главных проблем заключается в значительной нестехиометрии этих соединений (избыток или недостаток Cu и Zn), что приводит к высокой концентрации собственных структурных дефектов разной природы. Отклонение от стехиометрического состава может привести к образованию нежелательных примесей в виде двойных или тройных фаз. Кроме того, в этих соединениях возможна реализация различных кристаллографических форм (например, структур кестерита и станнита). Все это, как правило, обусловлено технологическими параметрами получения данных материалов.

Целью настоящей работы было изучение зависимостей диэлектрических свойств монокристаллов  $\text{Cu}_2\text{ZnSnS}_4$  и  $\text{Cu}_2\text{ZnSnSe}_4$  от температуры и частоты измерительного поля.

**Методика эксперимента.** Измерения диэлектрической проницаемости ( $\epsilon$ ) и электропроводности ( $\sigma$ ) монокристаллов  $\text{Cu}_2\text{ZnSnS}_4$  и  $\text{Cu}_2\text{ZnSnSe}_4$  проводили методом плоского конденсатора на монокристаллических пластинках с размерами ~2,0×5,0×0,5 мм вдоль кристаллографического направления [001] с помощью цифрового измерителя E7-20 на частотах измерительного поля  $10^3$ – $10^6$  Гц

в температурном диапазоне 100–300 К. Образцы с нанесенными омическими серебряными контактами помещали между металлическими прижимными контактами. Держатель с образцом экранировали латунным стаканом, на который через изоляционную прослойку из слюды наматывали нагреватель. Питание последнего осуществлялось постоянным током от стабилизированного источника. Температура контролировалась при помощи дифференциальной хромель-копелевой термопары и универсального цифрового вольтметра. Для измерений использовали метод непрерывного квазистатического нагревания со скоростью  $\sim 0,5$  К/мин. Точность измерения температуры составляла 0,1 – 0,2 К, погрешность измерений диэлектрических характеристик была  $\sim 0,5$  %.

**Результаты исследований и их анализ.** Для синтеза четверных соединений CZTS и CZTSe использовали однотемпературный метод, обеспечивающий чистоту получаемого вещества и отсутствие потерь компонентов. Исходными веществами служили элементарные компоненты: медь, цинк и олово чистоты 99,999 %, сера и селен марки ОСЧ. Синтез проводили в двойных кварцевых ампулах. Исходные компоненты в соотношениях, соответствующих формульному составу, в количестве  $\sim 15$  г загружали в ампулу, которую затем вакуумировали. Эту ампулу помещали в другую вакуумированную ампулу, которую устанавливали в вертикальной однозонной печи, где поэтапно с двухчасовой выдержкой температуру поднимали до значений, на 20–30 °С превышающих температуру плавления соединения. При достижении нужной температуры включали вибрационное перемешивание и выдерживали в течение 4 ч. Затем вибрацию отключали и проводили охлаждение со скоростью 5 градусов в час до полного затвердения раствора. Для гомогенизации полученных слитков твердых растворов проводили их отжиг в вакууме при 750 °С в течение 300 ч.

Монокристаллы четверных соединений  $\text{Cu}_2\text{ZnSnS}_4$  и  $\text{Cu}_2\text{ZnSnSe}_4$  выращивали методом химических газотранспортных реакций из синтезированных ранее поликристаллических слитков. В качестве газа-переносчика использовали элементарный йод марки В5. Синтезированные поликристаллы растирали в порошок и применяли как исходный материал для газотранспорта. Ампулу с исходным материалом и йодом помещали в горизонтальную печь с двумя независимо регулируемые зонами для создания необходимого градиента температур вдоль ампулы. Температуру в печи регулировали так, чтобы в зоне кристаллизации она была  $\sim 700$  °С, а в зоне реакции составляла  $\sim 780$  °С. В этих условиях происходил рост монокристаллов в течение  $\sim 8$  сут.

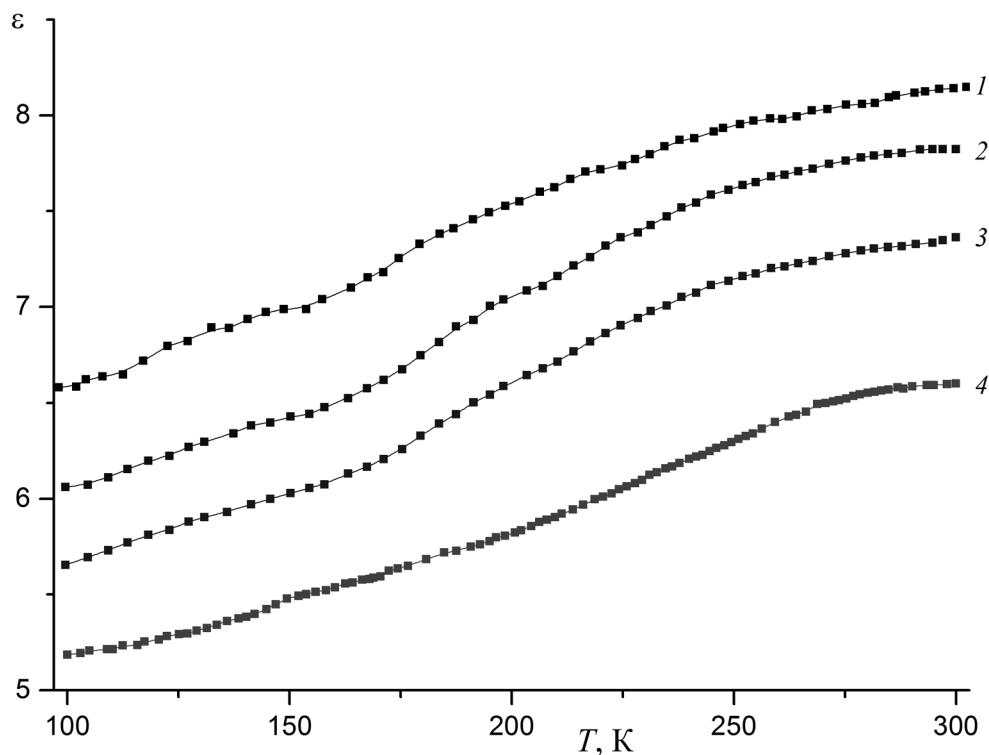


Рис. 1. Температурные зависимости диэлектрической проницаемости монокристаллов  $\text{Cu}_2\text{ZnSnS}_4$  на частотах: 1 – 1 кГц; 2 – 10 кГц; 3 – 100 кГц; 4 – 1 МГц



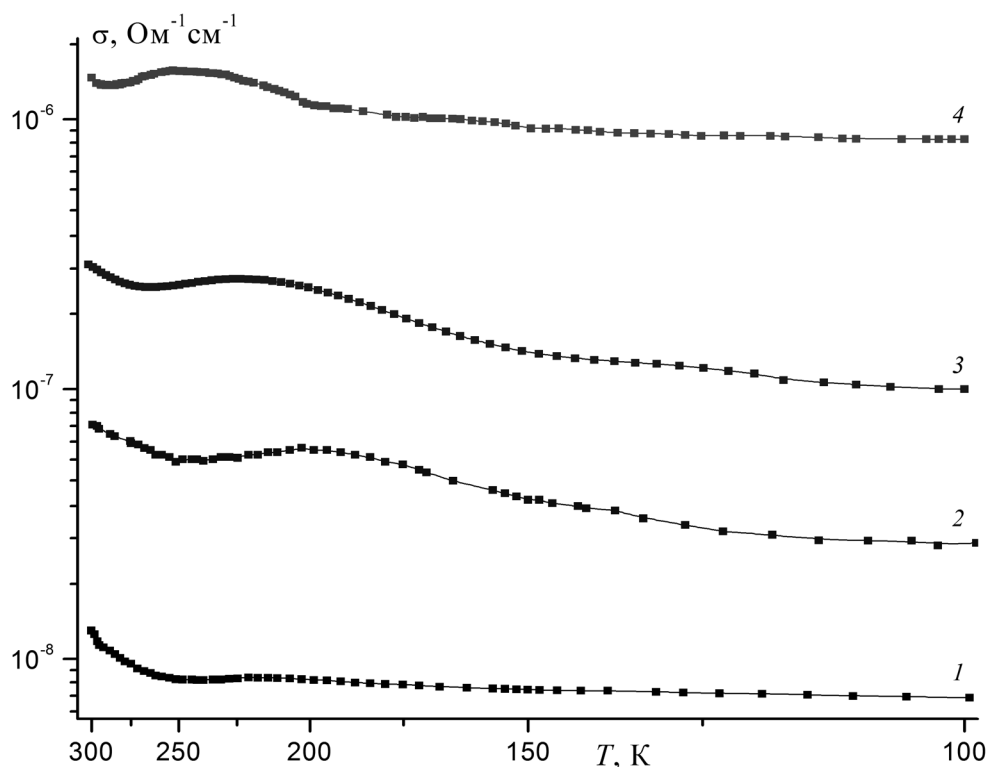


Рис. 2. Температурные зависимости удельной электропроводности монокристаллов  $\text{Cu}_2\text{ZnSnS}_4$  на частотах: 1 – 1 кГц; 2 – 10 кГц; 3 – 100 кГц; 4 – 1 МГц

На рис. 1 приведены температурные зависимости диэлектрической проницаемости монокристаллов  $\text{Cu}_2\text{ZnSnS}_4$ , измеренные на разных частотах. Видно, что с ростом температуры значения  $\epsilon$  для всех частот увеличиваются, причем зависимость нелинейная. С ростом частоты значения диэлектрической проницаемости уменьшаются, что связано с релаксационными процессами, происходящими в высокочастотной области измерений.

На рис. 2 показаны температурные зависимости удельной электропроводности монокристаллов  $\text{Cu}_2\text{ZnSnS}_4$  на разных частотах. Как видим, с ростом температуры электропроводность растет, причем на кривых  $\sigma = f(T)$  для всех частот в области температур 150–250 К наблюдаются максимумы, обусловленные изменением типа проводимости с прыжковой (при низких температурах) к собственной (при высоких). Следует отметить, что абсолютные значения электропроводности сильно зависят от частоты измерительного электрического поля: с ростом частоты они увеличиваются на несколько порядков. Такое поведение электрических свойств монокристаллов  $\text{Cu}_2\text{ZnSnS}_4$  так же, как и наличие максимумов на кривых  $\sigma = f(T)$ , по-видимому, связано с особенностями строения кристаллической структуры, и как следствие – со сложным механизмом переноса заряда. Участки с разным наклоном на кривых  $\sigma = f(T)$  указывают на наличие нескольких типов проводимости

в этих кристаллах. На этих участках исходя из закона Аррениуса  $\sigma = \sigma_0 T^{-1} e^{-\frac{E_a}{kT}}$  были рассчитаны обобщенные энергии активации  $E_a$  на частоте измерительного поля 1 МГц. В области низких температур ( $< 200$  К)  $E_a = 0,32$  эВ, в области высоких ( $> 270$  К) –  $E_a = 1,53$  эВ. Рассчитанные значения  $E_a$  хорошо согласуются с данными, полученными в работе [5] из оптических исследований.

На рис. 3 и 4 представлены температурные зависимости диэлектрической проницаемости и удельной электропроводности монокристалла  $\text{Cu}_2\text{ZnSnSe}_4$ , измеренные на различных частотах вдоль кристаллографического направления [001]. Видно, что характер зависимостей аналогичен таковому для монокристалла  $\text{Cu}_2\text{ZnSnS}_4$ . Рассчитанные нами энергии активации  $\text{Cu}_2\text{ZnSnSe}_4$  составляют в области низких температур ( $< 200$  К)  $E_a = 0,22$  эВ, в области высоких ( $> 270$  К) –  $E_a = 0,93$  эВ.

Абсолютные значения  $\epsilon$  и  $\sigma$   $\text{Cu}_2\text{ZnSnSe}_4$  несколько больше, чем аналогичные у  $\text{Cu}_2\text{ZnSnS}_4$ , что находится в неплохом соответствии с данными [5], где из результатов оптических исследований

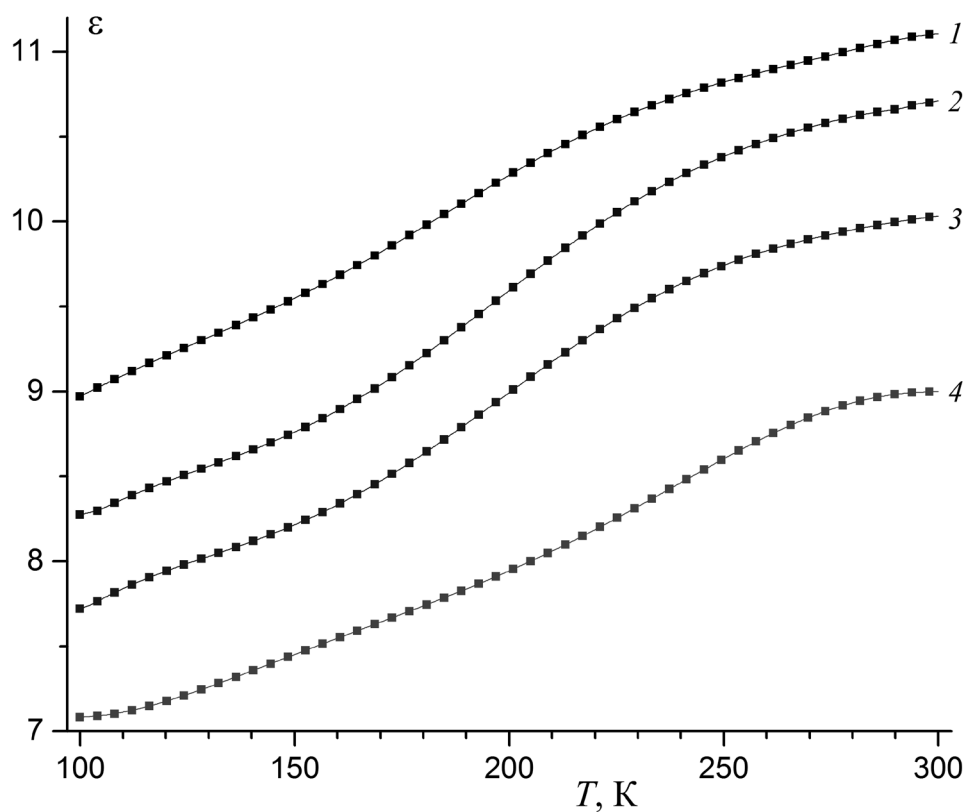


Рис. 3. Температурные зависимости диэлектрической проницаемости монокристаллов  $\text{Cu}_2\text{ZnSnSe}_4$  на частотах: 1 – 1 кГц; 2 – 10 кГц; 3 – 100 кГц; 4 – 1 МГц

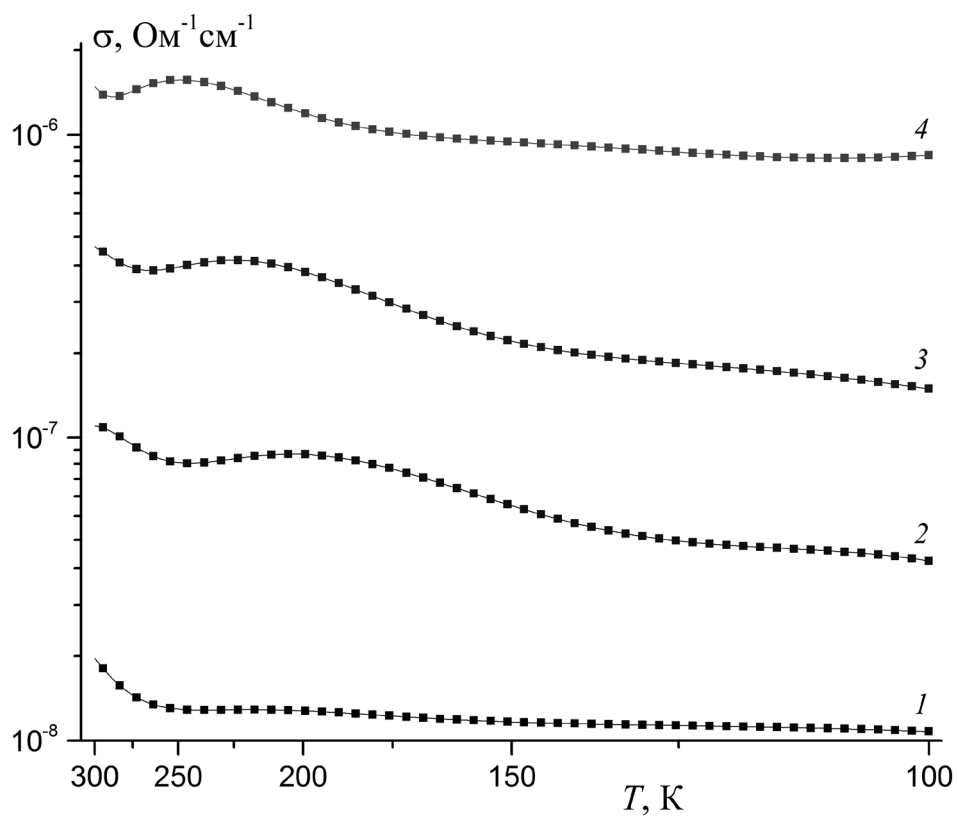


Рис. 4. Температурные зависимости удельной электропроводности монокристаллов  $\text{Cu}_2\text{ZnSnSe}_4$  на частотах: 1 – 1 кГц; 2 – 10 кГц; 3 – 100 кГц; 4 – 1 МГц

определены значения высокочастотной диэлектрической проницаемости  $\epsilon_\infty$ . Полученные нами значения диэлектрической проницаемости и энергии активации исследованных кристаллов при температуре 300 К сведены в таблицу. Здесь же для сравнения приведены высокочастотная диэлектрическая проницаемость и ширина запрещенной зоны, измеренные оптическими методами в работе [5].

Диэлектрические характеристики монокристаллов  $\text{Cu}_2\text{ZnSnS}_4$  и  $\text{Cu}_2\text{ZnSnSe}_4$  при  $T = 300$  К

Состав	$\epsilon_1$ МГц	$\epsilon_\infty^*$	$E_a$ , эВ	$E_a$ , эВ*
$\text{Cu}_2\text{ZnSnS}_4$	6,60	6,31	1,53	1,47
$\text{Cu}_2\text{ZnSnSe}_4$	8,99	8,05	0,95	0,90

\* Данные, полученные в работе [5].

**Заключение.** Проведены исследования диэлектрической проницаемости и удельной электропроводности монокристаллов  $\text{Cu}_2\text{ZnSnS}_4$  и  $\text{Cu}_2\text{ZnSnSe}_4$ , полученных одномоментным методом из элементарных компонентов в зависимости от температуры и частоты измерительного поля. Выявлена дисперсия изученных свойств, а именно: с ростом частоты значения диэлектрической проницаемости уменьшаются, а электропроводности – увеличиваются. Показано, что с ростом температуры значения  $\epsilon$  и  $\sigma$  увеличиваются. Обнаружено, что диэлектрические характеристики монокристаллов  $\text{Cu}_2\text{ZnSnSe}_4$  несколько больше, чем у  $\text{Cu}_2\text{ZnSnS}_4$ . Определены значения обобщенной энергии активации основных носителей заряда в этих кристаллах. Рассчитанные нами значения хорошо согласуются с литературными данными, полученными другими методами.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф13К-027).

## Литература

1. Jackson P., Hariskos D., Lotter E. et al. // Progress in Photovoltaics: Research and Applications. 2011. Vol. 19, N 7. P. 894–897.
2. Contreras M. A., Mansfield L. M., Egaas B. et al. // Progress in Photovoltaics: Research and Applications. 2012. Vol. 20, N 7. P. 843–850.
3. Grossberg M., Krustok J., Raudoja J. et al. // Appl. Phys. Lett. 2012. Vol. 101, N 10. P. 102102–102104.
4. León M., Levchenko S., Serna R. et al. // Mater. Chem. and Phys. 2013. Vol. 141, N 1. P. 58–62.
5. Kumar M., Persson C. // Intern. J. of Theoretical and Applied Sciences. 2013. Vol. 5, N 1. P. 1–8.
6. Todorov T. K., Tang J., Bag S. et al. // Advanced Energy Materials. 2013. Vol. 3, N 1. P. 34–38.
7. Wang W., Winkler M. T., Gunawan O. et al. // Advanced Energy Materials. 2014. Vol. 4, N 7. P. 36–45.

V. G. HURTAVY, A. U. SHELEG

## DIELECTRIC PROPERTIES OF SINGLE CRYSTALS OF $\text{Cu}_2\text{ZnSnS}_4$ AND $\text{Cu}_2\text{ZnSnSe}_4$ SEMICONDUCTORS

### Summary

The dielectric permittivity and electrical conductivity of  $\text{Cu}_2\text{ZnSnS}_4$  and  $\text{Cu}_2\text{ZnSnSe}_4$  single crystals are investigated in the temperature range 100–300 K at the measuring field frequencies of  $10^3$ – $10^6$  Hz. The values of the majority charge carriers generalized activation energy in these crystals are determined. It is shown, that the absolute values of the studied characteristics increases with the temperature. The dielectric properties dispersion of the studied single crystals is revealed: with the frequency growth the dielectric constant values decreases, and the electrical conductivity increases. It was found that the dielectric constant and conductivity of  $\text{Cu}_2\text{ZnSnSe}_4$  single crystals more than  $\text{Cu}_2\text{ZnSnS}_4$ .

УДК 538.956

А. К. ЛЕТКО<sup>1</sup>, А. Д. ШИЛИН<sup>2</sup>, Г. К. САВЧУК<sup>3</sup>

## ВЛИЯНИЕ УЛЬТРАЗВУКОВОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ НА КРИСТАЛЛИЧЕСКУЮ СТРУКТУРУ КЕРАМИКИ НА ОСНОВЕ ЦИРКОНАТА-ТИТАНАТА СВИНЦА

<sup>1</sup>Научно-практический центр НАН Беларуси по материаловедению,

<sup>2</sup>Витебский государственный технологический университет,

<sup>3</sup>Белорусский национальный технический университет

(Поступила в редакцию 02.12.2014)

**Введение.** Несмотря на значительные достижения в области исследований пьезокерамических материалов, темпы их совершенствования в последние годы значительно снизились. Это объясняется тем, что возможности улучшения электрофизических свойств пьезоэлектрических керамик путем изменения химического состава практически исчерпаны. Сегодня на первый план выступает задача поиска новых приемов совершенствования структуры и морфологии уже существующих материалов, которая может решаться путем применения различных воздействий как при приготовлении исходных порошков, так и в процессе получения керамики.

Получение высокопрочной оксидной пьезоэлектрической керамики конструкционного и инструментального назначения с высокодисперсной структурой возможно при использовании в качестве исходного сырья для спекающихся керамик наноструктурных порошков, приготовленных методом ультразвукового воздействия (УЗВ) [1–3]. До настоящего времени остается малоизученным вопрос о влиянии ультразвуковой обработки исходного порошкового сырья на особенности кристаллической структуры и электрофизические свойства получаемых на его основе пьезокерамик. Исследование механизмов воздействия ультразвуковой механоактивации важно также для дальнейшего прогнозирования свойств керамических материалов.

Целью настоящей работы являлось исследование влияния ультразвуковой обработки исходных синтезированных порошков на кристаллическую структуру и электрофизические свойства спеченной пьезоэлектрической керамики на основе цирконата-титаната свинца.

**Экспериментальная часть.** Керамика на основе цирконата-титаната свинца получена путем спекания порошков цирконата-титаната свинца, подвергнутых ультразвуковому воздействию, в лаборатории электронной керамики ГНПО «Научно-практический центр НАН Беларуси по материаловедению» (г. Минск). Ультразвуковая обработка порошков с целью получения нанопорошков производилась в ГНУ «Институт технической акустики НАН Беларуси» (г. Витебск). В качестве источника ультразвуковых колебаний использовался генератор УЗГ-1 с магнитострикционным преобразователем ПМС-1-1, соединенным с акустическими узлами (бустер, камера высокого давления), амплитуда звуковых смещений которых составляла до 30 мкм [3]. В процессе УЗВ варьировалось время обработки, которое составляло 30, 60, 90 мин.

Фазовый состав синтезированных порошков цирконата-титаната свинца после ультразвукового воздействия и керамических образцов после спекания контролировался с помощью рентгенофазового анализа, который производился в монохроматическом  $\text{CuK}_\alpha$ -излучении в диапазоне углов  $20\text{--}60^\circ$ . Параметры кристаллической структуры уточнялись методом полнопрофильного анализа. Микроанализ полученных керамических образцов проводился с использованием микроанализатора «Röntec Edwin» (диаметр зондирующего участка – 3 мкм). Наблюдение морфологии поверхности и определение размеров зерен фаз исследуемых керамических материалов осуществлялось с помощью

растрового электронного микроскопа марки «LEO» фирмы «Карл Цейсс». Диэлектрические измерения образцов были проведены с помощью моста E7-20 на частоте 1 кГц.

**Результаты и их обсуждение.** Согласно рентгенофазовым исследованиям (рис. 1, а, 2, а), порошки состава  $(\text{Pb}_{0,95}\text{Sr}_{0,05})(\text{Zr}_{0,53}\text{Ti}_{0,47})\text{O}_3 + 1\% \text{Nb}$  (ЦТС) после УЗВ при комнатной температуре имели структуру перовскита с тетрагональной (пространственная группа  $P4mm$ ) и ромбоэдрической (пространственная группа  $R3mR$ ) кристаллической решетками.

Влияние продолжительности ультразвукового воздействия на особенности кристаллической структуры порошков состава  $(\text{Pb}_{0,95}\text{Sr}_{0,05})(\text{Zr}_{0,53}\text{Ti}_{0,47})\text{O}_3 + 1\% \text{Nb}$  и спеченных на их основе керамик производилось на пиках: (002), (200).

Анализ формы пиков (002), (200) порошков после УЗВ (рис. 2, а) указывает на размытость рефлексов (002) тетрагональной фазы и их перекрытие с рефлексами ромбоэдрической фазы. Изучение зависимости уширения дифракционных пиков для дифрактограмм, представленных на рис. 1, а,

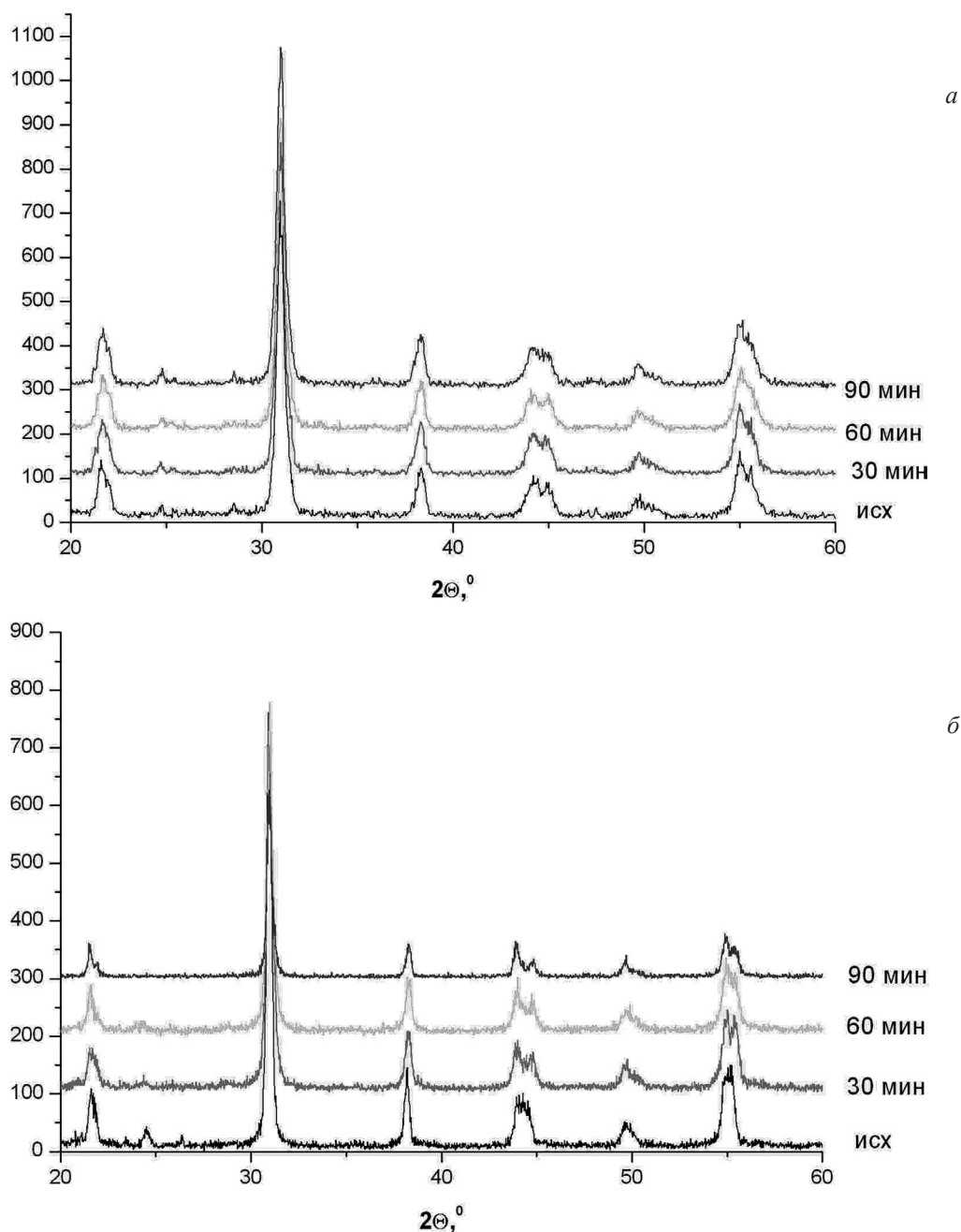


Рис. 1. Вид рентгенограмм порошков ЦТС (а) и образцов ЦТС после спекания (б) в зависимости от времени УЗВ

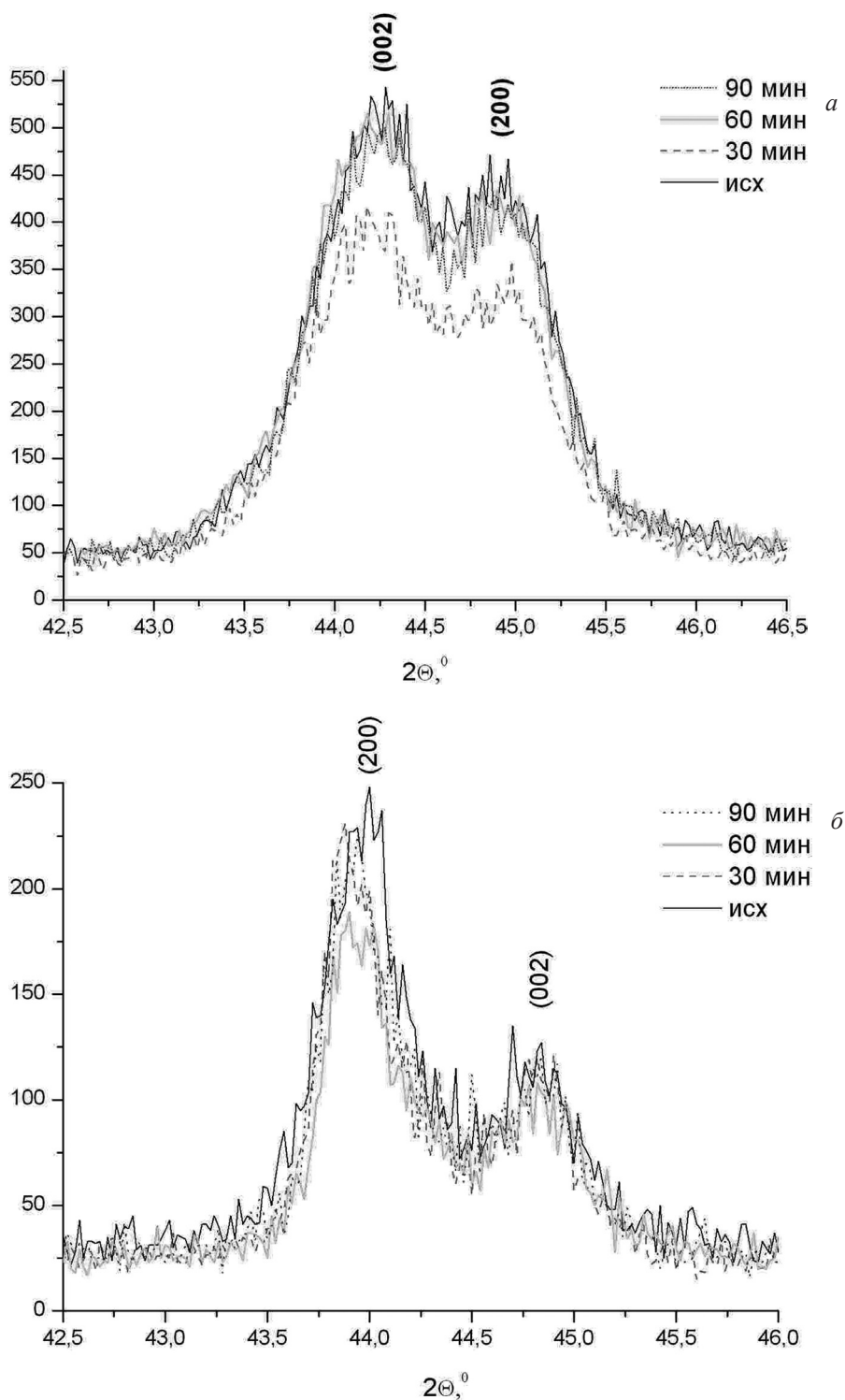


Рис. 2. Форма пиков (002) и (200) порошков ЦТС (а) и керамических образцов ЦТС (б) в зависимости от времени УЗВ

показывает, что при времени УЗВ от 30 до 60 мин степень уширения пиков уменьшается. Это говорит о том, что УЗВ приводит только к увеличению удельной поверхности порошков и не увеличивает число плотности точечных дефектов в кристаллитах. По результатам рентгеноструктурного и рентгенофазового анализов (рис. 1, б, 2, б) керамические образцы, полученные в результате спекания порошков, подвергнутых ультразвуковому воздействию, содержали только тетрагональную фазу, значения параметров элементарной ячейки которой в зависимости от времени ультразвукового воздействия представлены в таблице.

**Параметры элементарной кристаллической ячейки керамики ЦТС тетрагональной фазы**

Образцы	Время УЗВ, мин	Параметр элементарной кристаллической ячейки $a$ , Å	Параметр элементарной кристаллической ячейки $c$ , Å	Однородный параметр деформации $\delta$
ЦТС	0	4,0504	4,1175	0,0110
	30	4,0467	4,1245	0,0128
	60	4,0463	4,1267	0,0132
	90	4,0452	4,1245	0,0131

Также в ней показаны значения однородного параметра деформации  $\delta = 2/3(c/a-1)$ , который характеризует степень искажения приведенной перовскитной ячейки вдоль полярной оси в зависимости от времени УЗВ на исходную смесь, согласно которым при увеличении продолжительности

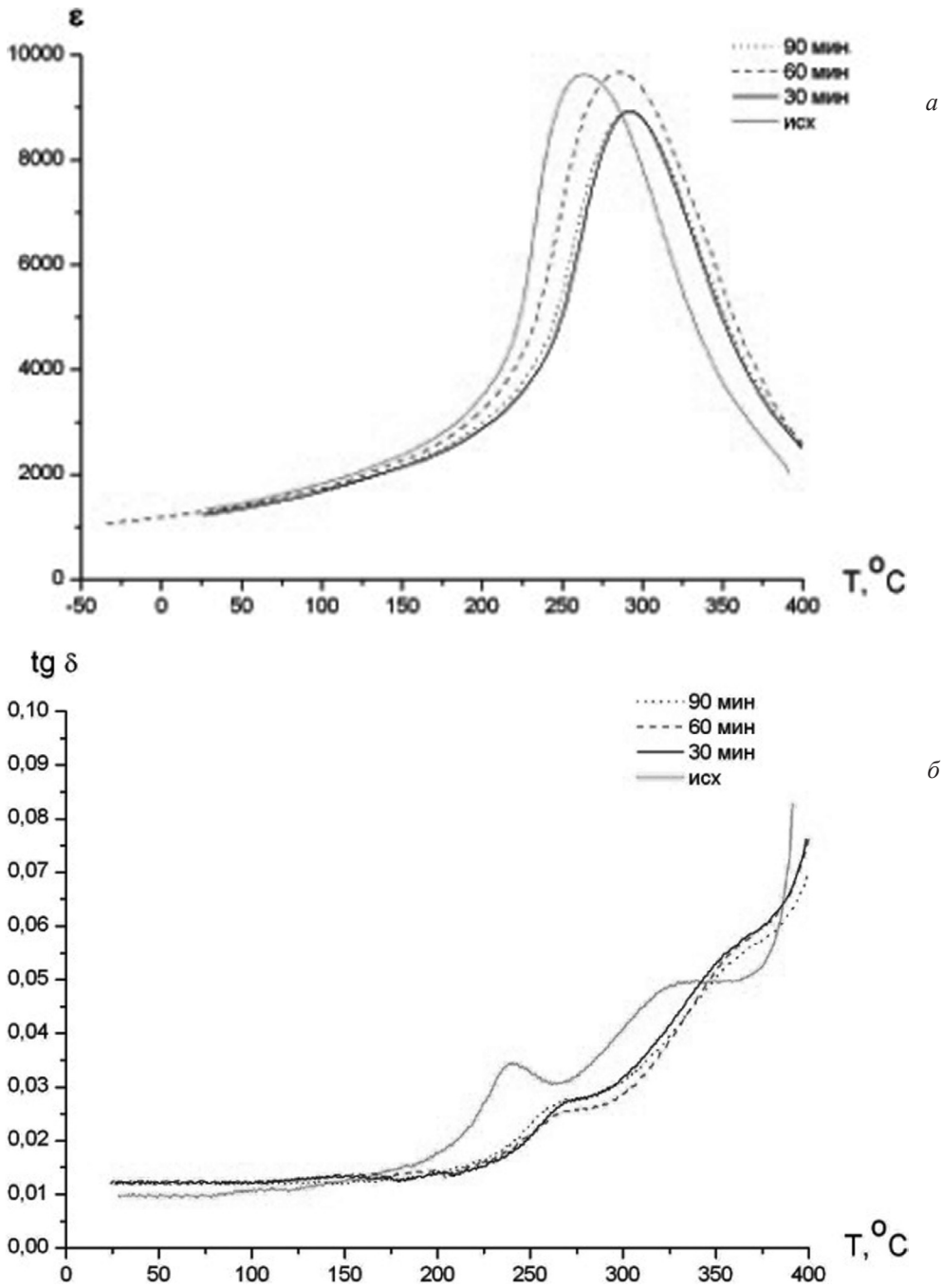


Рис. 3. Температурные зависимости диэлектрической проницаемости (а) и тангенса диэлектрических потерь (б) образцов ЦТС для различных времен УЗВ

ультразвукового воздействия искажение элементарной кристаллической ячейки ( $\delta$ ) ЦТС-керамик растёт. При этом, независимо от продолжительности времени воздействия, наблюдается уменьшение параметра  $a$  кристаллической решетки, в то время как параметр  $c$  для времени воздействия от 0 до 60 мин увеличивается, а затем начинает снижаться. Рост значений однородного параметра деформации для перовскитной ячейки приводит к увеличению относительного удлинения ячейки и, как следствие, к росту значений температур фазового перехода сегнетоэлектрик–параэлектрик (рис. 3, *a*) [4]. В интервале времени воздействия от 30 до 60 мин температура Кюри смещается на 50–60 °С, что существенно для области практического применения керамик.

Таким образом, проведенные исследования показывают, что использование ультразвукового воздействия способствует снижению температуры спекания ЦТС-керамик состава  $(\text{Pb}_{0,95}\text{Sr}_{0,05})(\text{Zr}_{0,53}\text{Ti}_{0,47})\text{O}_3 + 1\% \text{Nb}$  с 1260 до 1200 °С, а также позволяет получить ЦТС-пьезокерамику со значениями тангенса диэлектрических потерь от 0,01 до 0,007, которые превосходят соответствующие параметры керамики исследуемого состава, выпускаемой серийно, по температурной стабильности в интервале температур до 200 °С (рис. 3, *б*).

Микроструктурные исследования порошков состава  $(\text{Pb}_{0,95}\text{Sr}_{0,05})(\text{Zr}_{0,53}\text{Ti}_{0,47})\text{O}_3 + 1\% \text{Nb}$ , не подвергавшихся ультразвуковому воздействию, показали, что средний размер частиц перед процессом спекания составлял 1–2 мкм. После их спекания зернистая структура керамик была неоднородна и зерна достигали размеров до 5 мкм (рис. 4, *a*), при этом значения плотности варьировались от 98 до 99 % от теоретической.

Из представленных на рис. 4, *б–г* микрофотографий керамик, которые были получены на основе порошков, обработанных УЗВ, видно, что керамика состоит из плотно упакованных более

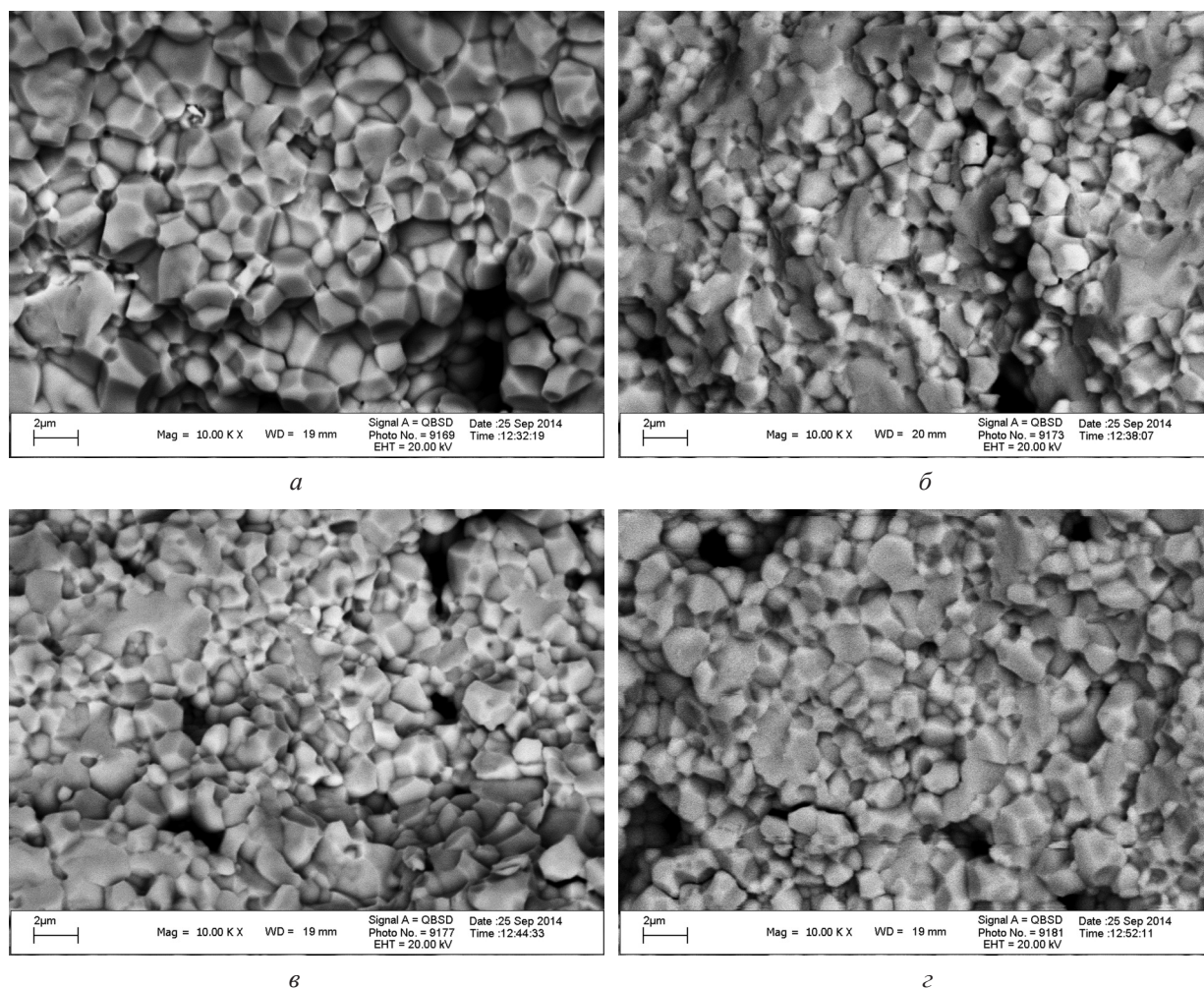


Рис. 4. Микроструктура поверхности излома керамических образцов ЦТС с различным временем механоактивации: *a* – без УЗВ; *б* – УЗВ 30 мин; *в* – УЗВ 60 мин; *г* – УЗВ 90 мин



мелких зерен правильной формы, размеры которых варьируются от 500 нм до 2 мкм. Наибольшую плотность имеют образцы с УЗВ в течение 60 мин. Представленные данные показывают, что в УЗ-керамике, в отличие от керамики, спеченной из порошков, которые не подвергаются ультразвуковому воздействию, формируется ультрадисперсная и более однородная структура. Известно, что чем меньше дисперсия распределения зерен по размерам, тем больше вероятность того, что процессы поляризации пройдут с меньшими механическими напряжениями [5]. Исследования процессов поляризации подтвердили этот факт.

Таким образом, УЗВ способствует формированию наноструктурной керамики с меньшими размерами зерен ( $d_{cp}$  от 500 нм до 2 мкм) по сравнению с образцами, изготовленными без УЗВ. Это приводит к повышению их трещиностойкости.

**Заключение.** Исследования показали, что применение ультразвукового воздействия на исходный порошок синтезированного состава дает возможность получать пьезоэлектрическую керамику с монокристаллической структурой и заданными физическими свойствами.

Ультразвуковая обработка порошков приводит к снижению температуры спекания пьезокерамик на 60 °С и смещению температуры Кюри на 50–60 °С в сторону больших температур, что увеличивает диапазон рабочих температур устройств, изготовленных на основе керамики. Наилучшие параметры имеют пьезокерамические ЦТС-образцы, полученные с использованием ультразвуковой механоактивации в течение 60 мин:  $tg\delta = 0,007$ ;  $\epsilon = 1430$ ;  $k_p = 0,61$ ;  $d_{31} = 173 \cdot 10^{-12}$  Кл/Н. Уменьшение размеров кристаллитов и однородность микроструктуры керамик способствует повышению их трещиностойкости и многократному повышению высокотемпературной прочности.

Использование УЗВ повышает экономичность технологического процесса за счет применения серийного оборудования, сокращения числа операций, а также энерго- и трудоемкости процесса.

## Литература

1. Нанотехнология в ближайшем десятилетии. Прогноз направления исследований: пер. с англ. / под ред. М. К. Роко, Р. С. Уильямса, П. Аливисатоса. М., 2002.
2. Гусев А. И. Нанокристаллические материалы: методы получения и свойства. Екатеринбург, 1998.
3. Шилин А. Д., Рубаник В. В., Рубаник В. В. // Перспективные материалы и технологии. Витебск, 2013. С. 630–651.
4. Акимов А. И., Савчук Г. К. Керамические материалы (диэлектрические, пьезоэлектрические, сверхпроводящие): условия получения, структура, свойства. Минск, 2012.
5. Нанотехнологии: азбука для всех // под ред. Ю.Д. Третьякова. 2-е изд., испр. и доп. М., 2009.

*A. K. LETKO, A. D. SHILIN, G. K. SAUCHUK*

## INFLUENCE ULTRASONIC TREATMENT ON THE CRYSTAL STRUCTURE OF CERAMICS BASED ON LEAD ZIRCONATE-TITANATE

### Summary

The crystal structure and electrical properties of ceramics obtained from sonicated powders of lead zirconate-titanate were investigated. It is found that ultrasonic treatment of the initial powders allows to obtain piezoelectric ceramics with the monocrystalline structure and desired physical properties.

УДК 621.315.592:546.28

Д. И. БРИНКЕВИЧ<sup>1</sup>, С. А. ВАБИЩЕВИЧ<sup>2</sup>, В. С. ПРОСОЛОВИЧ<sup>1</sup>, Ю. Н. ЯНКОВСКИЙ<sup>1</sup>

**МОДИФИКАЦИЯ ПРИПОВЕРХНОСТНЫХ СЛОЕВ МОНОКРИСТАЛЛОВ  
КРЕМНИЯ, ИМПЛАНТИРОВАННЫХ ВЫСОКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИМИ  
ИОНАМИ ФОСФОРА И БОРА**

<sup>1</sup>Белорусский государственный университет

<sup>2</sup>Полоцкий государственный университет

(Поступила в редакцию 02.12.2014)

**Введение.** Формирование комплиментарной металл-диэлектрик-полупроводник (КМОП) структуры предполагает образование паразитного тиристора в объеме кремния, т. е. формирование тиристорной *n-p-n-p*-структуры за счет создания областей *n*- и *p*-типа проводимости (карманов) в полупроводниковой слаболегированной подложке. Тиристор при воздействии помехи (когда носители тока протекают сквозь все три *p-n*-перехода) может оказаться во включенном устойчивом состоянии, т. е. состоянии с очень маленьким сопротивлением, когда большой ток протекает между шинами «земля» и «питание». В таком случае говорят, что наблюдается эффект «защелкивания», и схема под воздействием большого тока нагревается.

Использование высокоэнергетичной ( $E = 0,5-1$  МэВ) ионной имплантации для легирования кремния при изготовлении КМОП-структур позволяет создавать ретроградный профиль распределения примесей в «карманах» транзисторов. Максимум концентрации введенных имплантацией донорных и акцепторных примесей располагается ниже формируемого приповерхностного канала МОП-транзистора. В этом случае на поверхности пластины возможно сформировать пониженную концентрацию носителей заряда, необходимую для низких значений порогового напряжения транзистора, а в объеме – высокую, что уменьшит сопротивление самого «кармана» и снизит коэффициент усиления паразитного биполярного транзистора. В конечном итоге создание «карманов» с подобным распределением примесей позволит создавать КМОП-структуры, в которых ослаблен или подавлен эффект «защелки» [1].

Поскольку канал транзистора расположен в приповерхностной области, то целью настоящей работы являлось исследование влияния радиационных дефектов, созданных имплантацией, на свойства рабочей области пластин монокристаллического кремния.

**Методика эксперимента.** Пластины кремния КЭФ4,5(100), КДБ12(100) и КДБ10(111) имплантировались ионами  $V^+$  ( $E = 500$  кэВ и дозами ( $\Phi$ ) от  $5 \cdot 10^{12}$  до  $5 \cdot 10^{14}$  см<sup>-2</sup>) и  $P^+$  ( $E = 1000$  кэВ и  $\Phi$  от  $5 \cdot 10^{13}$  до  $5 \cdot 10^{14}$  см<sup>-2</sup>) при комнатной температуре на ускорителе ионов ДТЛ. Плотность ионного тока варьировалась в интервале от 0,3 до 2,5 мкА/см<sup>2</sup>. Быстрый термический отжиг (БТО) осуществлялся галогеновыми лампами накаливания при температуре 1000 °С длительностью до 60 с на установке AST-500.

Профили распределения примесей в имплантированных слоях определяли методом масс-спектрометрии вторичных ионов (ВИМС) на установке IMS-4f «Самеса». Измерение поверхностного сопротивления производилось четырехзондовым методом. Для изучения распределения электрической активации внедренной примеси по глубине пластины применялась методика последовательного стравливания тонких слоев. Измерения микротвердости ( $H$ ) проводились на приборе ПМТ-3. Нагрузка ( $P$ ) на индентор варьировалась в пределах от 20 до 200 г. При каждом измерении на поверхность образца наносилось не менее 50 отпечатков, и проводилась обработка результа-

тов измерений с использованием методов математической статистики, что обеспечивало погрешность измерений микротвердости менее 2,5 % (с доверительной вероятностью 0,95). Значения коэффициента вязкости разрушения  $K_{IC}$  и эффективной энергии разрушения  $\gamma$  рассчитывались по средней длине радиальных трещин в углах отпечатков согласно [2]. Погрешность измерений не превышала 8 %.

**Экспериментальные результаты и их обсуждение.** Исследованием ВИМС было установлено, что профили распределения имплантированных примесей бора и фосфора имеют максимум на глубинах  $\sim 1$  мкм. Концентрация примеси у поверхности пластины в зависимости от дозы находится в пределах  $1 \cdot 10^{16} - 1 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$ , что необходимо для создания субмикронных МОП-транзисторов.

При увеличении дозы имплантации в пределах до  $5 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-2}$  наблюдался рост микротвердости приповерхностного слоя, т. е. имел место эффект приповерхностного упрочнения. Однако при нагрузке 200 г, что соответствует глубине проникновения индентора  $\sim 3$  мкм, существенных изменений величины  $H$ , обусловленных радиационными дефектами, после имплантации не фиксировалось. Такая зависимость микротвердости характерна как для имплантации бора, так и для фосфора.

При дозах имплантации свыше  $5 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-2}$  выявлены существенные различия микротвердости в образцах, имплантированных ионами  $P^+$  и  $B^+$ . При имплантации бором эффект приповерхностного упрочнения продолжает возрастать, а при имплантации фосфора дозой  $1 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-2}$  он резко снижается и при  $\Phi_p = 5 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-2}$  практически исчезает (рис. 1). Принимая во внимание то, что глубина проникновения индентора при минимальной нагрузке 20 г составляла 0,8–0,9 мкм (а это соответствует максимуму нарушений при имплантации ионов фосфора), можно предположить, что наблюдавшееся экспериментально снижение величины  $H$  при нагрузке 20 г в образцах, имплантированных дозами  $\Phi_p$  свыше  $1 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-2}$ , обусловлено, вероятнее всего, аморфизацией приповерхностной области монокристалла [1]. Следует отметить, что микротвердость аморфных областей всегда ниже микротвердости монокристалла. Так, микротвердость пористого кремния почти на порядок ниже по сравнению с монокристаллом Si [3]. При имплантации бора аморфизация вплоть до доз  $\sim 1 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-2}$  отсутствует [1], поэтому даже при увеличении дозы ионов  $B^+$  эффект упрочнения приповерхностного слоя монокристалла не исчезал.

Методом ВИМС (рис. 2) установлено, что после проведения постимплантационного БТО распределение имплантированных бора и фосфора не претерпевает существенных изменений, т. е. максимумы концентрации примесей расположены на глубине около 1 мкм и сохраняется ретроградный

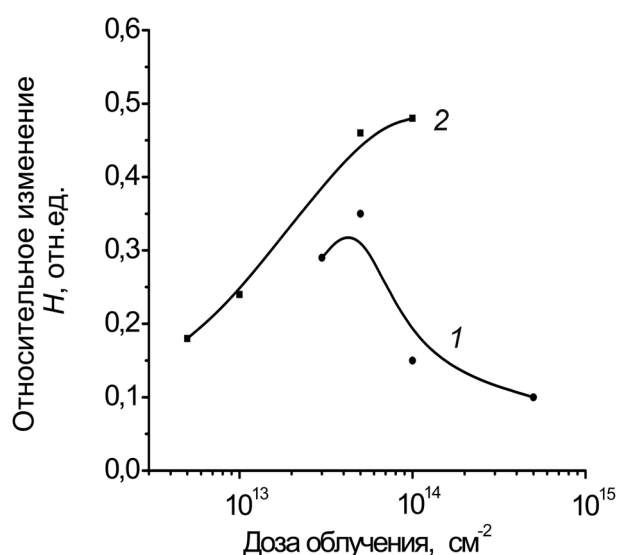


Рис. 1. Дозовая зависимость эффекта приповерхностного упрочнения (разница между значениями микротвердости при нагрузках 200 и 50 г) пластин КДБ12, имплантированных ионами фосфора (1) и пластин КЭФ4,5, имплантированных ионами бора (2)

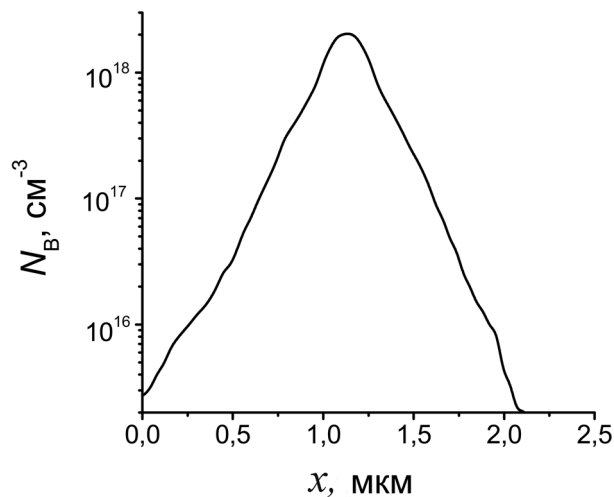


Рис. 2. Профиль распределения примеси бора, имплантированного с  $E = 500$  кэВ,  $\Phi = 1 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$  после БТО при  $1000^\circ\text{C}$  60 с

характер профилей распределения. Данное обстоятельство является весьма существенным, поскольку если бы термообработка после ионного внедрения изменяла профили распределения примесей, то это приводило бы к невозможности подавления эффекта «защелки».

Стационарные значения слоевого сопротивления, коррелирующие с величиной дозы внедрения, устанавливаются после БТО длительностью 60 с. Измерения поверхностного сопротивления в процессе последовательного удаления слоев кремния (рис. 3) показывают, что резкое увеличение величины сопротивления соответствует максимуму распределения примеси в кармане. Таким образом, БТО при  $T = 1000^\circ\text{C}$  длительностью 60 с является вполне достаточным для полной активации примеси и отжига радиационных дефектов. Следует отметить, что повышение температуры БТО свыше  $1000^\circ\text{C}$  приводит к увеличению количества структурных дефектов, генерирующихся при остывании образцов кремния после высокотемпературного нагрева.

После БТО в образцах, имплантированных ионами  $\text{B}^+$ , наблюдалось резкое снижение микротвердости в приповерхностной области пластины на глубинах до 1 мкм, что соответствовало нагрузкам 20–40 г. При увеличении нагрузки микротвердость резко возрастала и при  $P = 100$  г и выше достигала значений, характерных для исходных неимплантированных пластин. Дозовой зависимости для пластин, имплантированных ионами бора и подвергавшихся БТО, не наблюдалось. Для образцов, имплантированных ионами  $\text{P}^+$ , после БТО складывалась несколько иная кар-

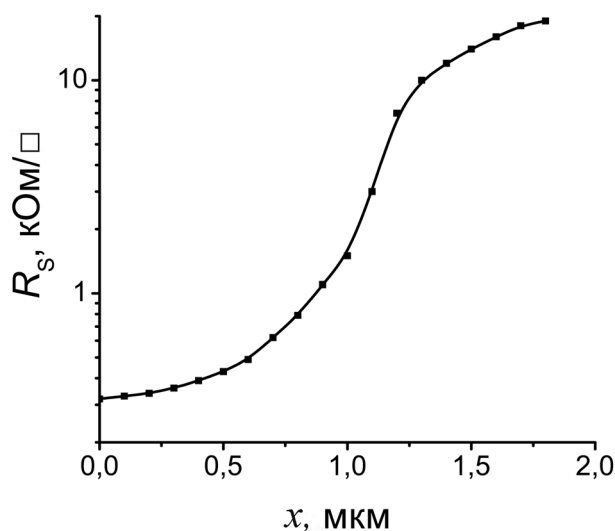


Рис. 3. Изменение слоевого сопротивления в процессе последовательного удаления слоев кремния в образцах, имплантированных ионами бора ( $E = 500$  кэВ,  $\Phi = 5 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-2}$ ) и последующего БТО при  $1000^\circ\text{C}$  60 с

тина. При увеличении дозы имплантации отжиг протекал менее интенсивно. В аморфизированных имплантацией образцах ( $\Phi_p > 1 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-2}$ ) микротвердость после БТО не снижалась ниже  $H = 9 \text{ ГПа}$  даже после проведения БТО длительностью 60 с.

Микрохрупкость имплантированных и отожженных образцов была несколько ниже, чем исходных пластин кремния. Так, даже при максимальной нагрузке 200 г не наблюдалось разрушения отпечатков, в то время как в исходном неимплантированном кремнии при этой же нагрузке их разрушалось около 10 %.

Имплантация ионов бора приводила также к снижению трещиностойкости кремния. Трещины в углах отпечатков появлялись только при нагрузке 50 г и выше. Значения коэффициента вязкости разрушения  $K_{IC}$  и эффективной энергии разрушения  $\gamma$  при увеличении нагрузки снижаются, т. е. трещиностойкость материала падает (табл. 1, 2). С увеличением дозы ионов бора  $\Phi_B$  фиксировалось монотонное снижение значений данных параметров. Быстрый термический отжиг длительностью 60 с приводил к увеличению трещиностойкости при малых нагрузках. Значения  $K_{IC}$  и  $\gamma$  во всех исследовавшихся образцах независимо от дозы имплантации восстанавливались до величин, характерных для пластин исходного (неимплантированного) кремния (см. табл. 1).

**Таблица 1. Параметры трещиностойкости кремния марки КЭФ4,5(100), имплантированного  $B^+$  ( $E_B = 500 \text{ кэВ}$ ) и подвергнутого БТО**

$\Phi_B, \text{ см}^{-2}$	Длительность БТО, с	$K_{IC} \cdot 10^6, \text{ Па} \cdot \text{м}^{1/2}$ при нагрузке, г				$\gamma, \text{ Па} \cdot \text{м}$ при нагрузке, г			
		50	100	150	200	50	100	150	200
$5 \cdot 10^{12}$	–	2,24	1,61	1,34	1,28	16,7	8,6	5,9	5,4
	60	2,74	1,64	1,34	1,29	25,0	9,1	5,9	5,5
$5 \cdot 10^{13}$	–	1,65	1,36	1,31	1,29	9,1	6,1	5,7	5,5
	60	2,66	1,68	1,35	1,31	23,6	9,35	6,0	5,7

**Таблица 2. Параметры трещиностойкости кремния КДБ12 (100), имплантированного  $P^+$  ( $E_P = 1000 \text{ кэВ}$ ) и подвергнутого БТО**

$\Phi_B, \text{ см}^{-2}$	Длительность БТО, с	$K_{IC} \cdot 10^6, \text{ Па} \cdot \text{м}^{1/2}$ при нагрузке, г				$\gamma, \text{ Па} \cdot \text{м}$ при нагрузке, г			
		50	100	150	200	50	100	150	200
$5 \cdot 10^{13}$	–	1,47	1,40	1,40	1,38	7,2	6,7	6,5	6,3
	15	1,83	1,54	1,35	1,30	11,1	7,12	6,05	5,7
	60	3,00	1,52	1,40	1,38	29,9	7,7	6,5	6,34
$1 \cdot 10^{14}$	–	2,05	1,50	1,50	1,50	14,0	7,5	7,5	7,5
	15	1,90	1,54	1,40	1,33	11,9	7,9	6,6	5,9
	60	1,91	1,64	1,53	1,51	12,1	9,0	7,7	7,6
$5 \cdot 10^{14}$	–	2,00	1,41	1,40	1,40	12,6	6,6	6,5	6,5
	15	1,92	1,66	1,51	1,48	12,4	9,2	7,6	7,0
	60	2,22	1,47	1,47	1,43	16,4	7,2	7,1	6,8

При имплантации ионов  $P^+$  дозой  $\Phi_p$  до  $5 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-2}$  также наблюдалось снижение трещиностойкости при малых нагрузках, а после БТО – восстановление величин  $K_{IC}$  и  $\gamma$  до их значений в исходных пластинах. При увеличении дозы имплантации  $\Phi_p$  до  $1 \cdot 10^{14} - 5 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-2}$  значения коэффициента вязкости разрушения при нагрузке 50 г возрастали до  $\sim 2,0 - 2,2 \text{ Па} \cdot \text{м}^{1/2}$ , при этом последующий БТО существенного влияния на величину  $K_{IC}$  не оказывал. Изменения коэффициента вязкости разрушения после БТО составляли 10–15 % и были близки к погрешности измерений (табл. 2). Аналогичная зависимость наблюдалась и для эффективной энергии разрушения  $\gamma$ .

Поскольку при имплантации ионов фосфора с  $E = 1000 \text{ кэВ}$   $R_p$  составляет  $\sim 1,1 \text{ мкм}$ , что сопоставимо с глубиной внедрения индентора при минимальной нагрузке 20 г, то в процессе измерения микротвердости индентор проходит нарушенный ионной имплантацией слой. Следовательно, упрочнение приповерхностного слоя пластины обусловлено радиационными дефектами, созданными при имплантации. Наличие полей упругих напряжений на границе раздела нарушенный

имплантацией слой – бездефектная подложка обуславливает снижение трещиностойкости при малых нагрузках в имплантированных образцах. Эту границу индентор достигает при нагрузке 50–70 г. Образование сильнонарушенного (аморфизованного) ионной имплантацией слоя приводит к снижению напряжений на этой границе раздела, что проявляется как увеличение трещиностойкости при нагрузке 50 г в образцах, имплантированных ионами  $P^+$  дозой свыше  $1 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-2}$  (см. табл. 2). Увеличение трещиностойкости кремния после БТО обусловлено увеличением пластичности материала и хорошо коррелирует с поведением микротвердости.

При БТО происходит отжиг радиационных дефектов, что приводит к подавлению эффекта радиационного упрочнения и снижению микротвердости приповерхностного слоя. Следует отметить, что свой вклад вносит и другой механизм снижения  $H$ . Известно [4, 5], что в процессе БТО по всему объему монокристалла кремния происходит генерация вакансий, которые могут приводить к разупрочнению кремния [6]. Понижение микротвердости в данном случае связано с процессами сжатия (индентирования) бездислокационных полупроводников и сопровождается генерацией избыточных собственных междоузельных атомов [7]. Резкое снижение (ниже значений, характерных для исходного кремния) микротвердости в приповерхностной области имплантированных образцов после проведения БТО обусловлено, вероятнее всего, указанным разупрочняющим воздействием вакансионных дефектов, формирующихся в результате ионной имплантации и последующего быстрого термического отжига.

**Закключение.** На основании полученных экспериментальных результатов можно сделать следующие выводы.

Обнаружено приповерхностное упрочнение монокристаллов при имплантации ионами бора и фосфора с проецированным пробегом в кремнии  $\sim 1,1 \text{ мкм}$ . Образование сильнонарушенного ионной имплантацией слоя приводит к разупрочнению материала в области пробега ионов и росту концентрации вакансионных дефектов за слоем внедрения ионов. Действие этих двух механизмов способствует существенному снижению значений  $H$  при малых нагрузках. Быстрый термический отжиг ведет к разупрочнению приповерхностной области монокристалла кремния на глубине до  $1 \text{ мкм}$  и увеличению трещиностойкости (росту  $K_{1C}$  и  $\gamma$ ) при малых нагрузках вследствие генерации вакансий в процессе БТО.

## Литература

1. Технология СБИС: в 2 кн. М., 1986. Кн. 1. С. 335–353.
2. Колесников Ю. В., Морозов Е. М. Механика контактного разрушения. М., 1989.
3. Соколов В. И., Шельх А. И. // Письма в ЖТФ. 2008. Т. 34, № 5. С. 34–39.
4. Falster R. J., Binns M. J., Korb H. W. US patent 6686620, primary class 438/473, publication 03.02.2004.
5. Voronkov V. V., Falster R. // Materials science in semiconductor processing. 2003. Vol. 5. P. 387–390.
6. Головин Ю. И., Дмитриевский А. А., Сучкова Н. Ю. // Физика твердого тела. 2006. Т. 48, № 2. С. 262–265.
7. Головин Ю. И., Тюрин А. И. // Физика твердого тела. 2000. Т. 42, № 10. С. 1818–1820.

*D. I. BRINKEVICH, S. A. VABISHCHEVICH, V. S. PROSOLOVICH, Y. N. YANKOVSKI*

### **MODIFICATION OF THE SURFACE LAYERS OF SILICON SINGLE CRYSTALS IMPLANTED WITH HIGH ENERGY PHOSPHORUS AND BORON IONS**

#### **Summary**

Properties of the surface layers of monocrystalline silicon wafers implanted with boron and phosphorus to form a heavily doped "pockets" of CMOS structures was investigated by mass spectrometry of secondary ions, measuring the surface resistivity and microhardness. Near-surface hardening of silicon wafers during implantation was founded. Amorphization of the implanted region of silicon reduces the microhardness of the surface layer. Rapid thermal annealing leads to a softening of the surface layer of the silicon single crystal to a depth of  $1 \text{ }\mu\text{m}$  and an increase in fracture toughness ( $K_{1C}$  and  $\gamma$ ) at low loads. The experimental results are discussed in terms of the generation of vacancies in the process of rapid thermal annealing.

УДК 537.311:537.638.214

С. С. АПЛЕСНИН<sup>1</sup>, О. Ф. ДЕМИДЕНКО<sup>2</sup>, Г. И. МАКОВЕЦКИЙ<sup>2</sup>,  
О. Б. РОМАНОВА<sup>1</sup>, Л. И. РЯБИНКИНА<sup>1</sup>, К. И. ЯНУШКЕВИЧ<sup>2</sup>**МАГНИТОСОПРОТИВЛЕНИЕ И ЭФФЕКТ ХОЛЛА  
В ТВЕРДОМ РАСТВОРЕ  $Mn_{0,55}V_{0,45}S$** <sup>1</sup>Институт физики им. Л. В. Киренского Сибирского отделения РАН (Красноярск, Россия)<sup>2</sup>Научно-практический центр НАН Беларуси по материаловедению

(Поступила в редакцию 03.12.2014)

**Введение.** Катионное замещение в твердых растворах создает условия для синтеза веществ, в которых реализуются новые сочетания электрических и магнитных свойств. Такой подход к синтезу новых материалов позволяет изучать закономерности изменения механизмов проводимости и магнитных свойств в зависимости от концентрации и типа замещающего элемента [1–7]. Синтез новых материалов на основе неупорядоченных полупроводниковых систем, обладающих переходом металл–диэлектрик и эффектом магнитосопротивления, а также изучение особенностей их магнитных и электрических свойств представляют интерес для технологов электронной промышленности [4, 5]. Практическая важность синтеза веществ с такими свойствами заключается в расширении класса магнитных полупроводниковых материалов, которые обладают магниторезистивными эффектами, перспективными для использования в устройствах микроэлектроники [7, 8]. В твердых растворах сульфидов на основе антиферромагнитного полупроводника  $\alpha$ -MnS с границентрированной кубической решеткой пространственной группы  $Fm\bar{3}m$  эффект магнитосопротивления обнаружен при катионном замещении и другими  $3d$ -элементами  $Mn_{1-x}Me_xS$  (Me–Cr, Fe, Co) [1–3]. В отличие от халькогенидов европия и оксидных соединений марганца, у которых магниторезистивный эффект наблюдается только в области температуры Кюри, в сульфидах  $3d$ -металлов отрицательный магниторезистивный эффект имеет место в достаточно широкой области температур и возрастает с понижением температуры. Например, в системе  $Mn_{1-x}Fe_xS$  для состава  $x = 0,29$  величина эффекта составляет  $\delta_H \sim 83\%$  при 160 К и индукции  $B = 1,0$  Тл и  $\delta_H \sim 450\%$  при 50 К в магнитном поле  $B = 3,0$  Тл [1]. В совокупности все это обуславливает актуальность задач эксперимента данной работы, целью которой является изучение особенностей магниторезистивного эффекта и эффекта Холла в твердом растворе состава  $Mn_{0,55}V_{0,45}S$ .

**Объект и образцы для эксперимента.** Выбор объекта для исследований обусловлен результатами изучения температурных зависимостей изменения параметра элементарной кристаллической ячейки, удельной магнитной восприимчивости и удельной электропроводности состава  $Mn_{0,55}V_{0,45}S$ , указывающими на неординарное изменение этих характеристик в диапазоне температур 80–300 К [9–11]. Во-первых, выявлено, что элементарная кубическая кристаллическая ячейка пространственной группы  $Fm\bar{3}m$  деформирована за счет ромбоэдрических искажений. Во-вторых, аномалия электрической проводимости находится в температурной области состояния Ферми-стекла и сопровождается изменениями в кристаллической структуре. В-третьих, в области температуры аномалии удельного электрического сопротивления наблюдается отклонение от закона Кюри – Вейсса температурной зависимости обратной магнитной восприимчивости  $1/\chi = f(T)$ . В-четвертых, фазовые переходы «магнитный порядок–магнитный беспорядок» и «полупроводник–полуметалл» в  $Mn_{0,55}V_{0,45}S$  имеют место при разных температурах ( $T_N \sim 130$  К,  $T_{tr} \sim 180$  К).

Образцы твердого раствора  $x = 0,45$  системы  $Mn_{1-x}V_xS$  синтезированы на основе порошков химически чистых элементов V, Mn и S в вакууме методом реакций в твердой фазе с последующим отжигом [9]. Также в работе [9] было установлено, что твердый раствор  $Mn_{0,55}V_{0,45}S$  обладает полупроводниковым типом проводимости с энергией активации  $\Delta E \sim 0,02$  эВ и при температурах ниже 100 К и выше 200 К обладает практически безактивационным типом проводимости.

**Методика эксперимента.** Измерения электрических свойств выполнены четырехзондовым методом в интервале температур 80–300 К на образцах в форме параллелепипеда. Магниторезистивный эффект исследован в магнитных полях с индукцией  $B$  до 2,1 Тл. Эффект Холла в магнитных полях  $B = 0,5$ ,  $B = 1,0$  и  $B = 1,5$  Тл на образцах твердого раствора  $Mn_{0,55}V_{0,45}S$  изучен стандартным методом в интервале температур 80–300 К. Измерения ЭДС Холла проводились при двух направлениях поля и тока в образце.

**Результаты эксперимента и их обсуждение.** Результаты эксперимента по изучению магниторезистивных свойств сульфида  $Mn_{0,55}V_{0,45}S$  представлены на рис. 1. Выявлена зависимость изменения величины и знака эффекта магнитосопротивления ( $\delta_H = (\rho_H - \rho_0) / \rho_0$ ) от величины индукции магнитного поля. Установлено, что в магнитном поле с индукцией  $B = 0,5$  Тл магниторезистивный эффект невелик ( $\delta_H \sim 2\%$ ) и положителен в диапазоне температур исследования. В магнитном поле  $B = 1,0$  Тл магниторезистивный эффект в интервале температур 100–180 К отрицателен и достигает своего наибольшего значения ( $\delta_H \sim -5\%$ ). Увеличение магнитной индукции до значений  $B = 1,5$  и  $B = 2,1$  Тл приводит к уменьшению магниторезистивного эффекта до  $\delta_H \sim -2\%$  и сужению температурного интервала его существования в области отрицательных значений. В диапазонах температур  $T < 100$  и  $T > 200$  К магниторезистивный эффект имеет положительные значения при всех значениях магнитных полей, используемых в данном эксперименте (см. рис. 1).

На рис. 2 показаны температурные зависимости коэффициента Холла ( $R_H$ ), концентрации носителей заряда ( $n$ ) и их подвижности ( $\mu$ ) в магнитных полях с индукцией 5, 10 и 15 Тл. Коэффициент Холла во всей области температур и значений магнитных полей для состава  $Mn_{0,55}V_{0,45}S$  имеет

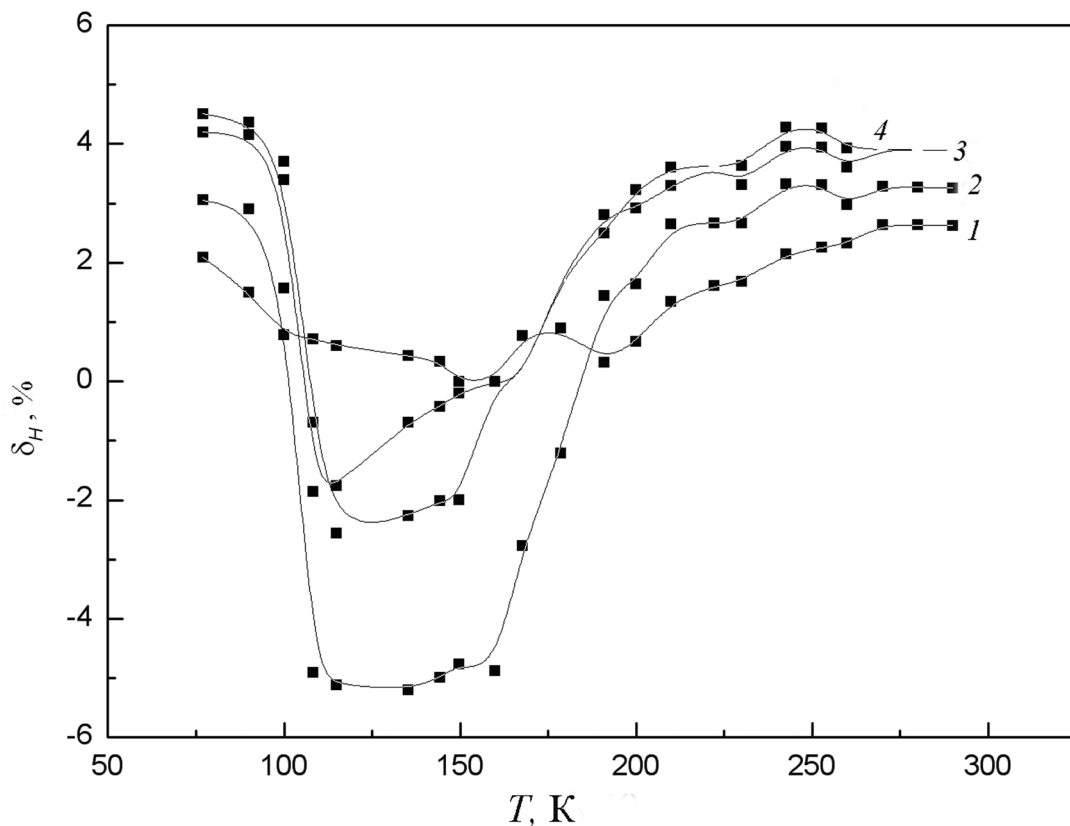


Рис. 1. Температурные зависимости магнитосопротивления  $\delta_H$  состава  $Mn_{0,55}V_{0,45}S$  в полях с индукцией  $B = 0,5$  Тл (1);  $B = 1,0$  Тл (2);  $B = 1,5$  Тл (3);  $B = 2,1$  Тл (4)



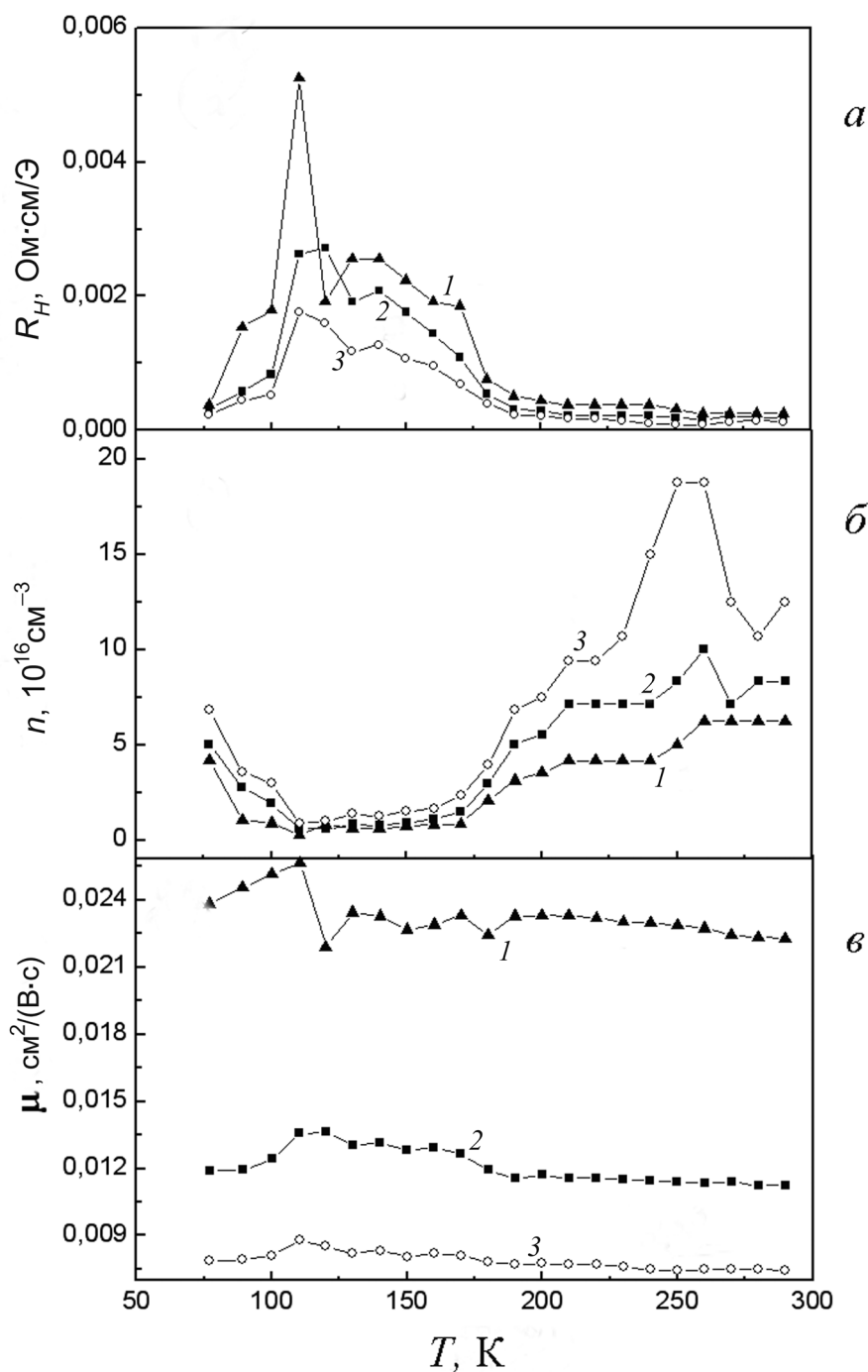


Рис. 2. Температурные зависимости коэффициента Холла  $R_H$  (а), концентрации носителей заряда  $n$  (б) и их подвижности  $\mu$  (в) состава  $\text{Mn}_{0,55}\text{V}_{0,45}\text{S}$  в магнитных полях с индукцией  $B = 0,5$  Тл (1);  $B = 1,0$  Тл (2);  $B = 1,5$  Тл (3)

положительные значения, что однозначно указывает на  $p$ -тип носителей заряда в исследуемом твердом растворе. В диапазоне температур 180–300 К (область положительного магниторезистивного эффекта) величина  $R_H$  слабо зависит от температуры и магнитного поля. При понижении температуры величина коэффициента Холла  $R_H$  возрастает и в области температур отрицательных значений магниторезистивного эффекта достигает наибольших значений. Из температурных зависимостей (см. рис. 2) следует, что величина  $R_H$  уменьшается с изменением магнитной индукции от 0,5 до 1,5 Тл. Концентрация носителей заряда ( $n$ ) минимальна в области температур магниторезистивного эффекта и изменяется незначительно в интервале температур 110–180 К, возрастая с понижением температуры от  $T < 110$  К и с ее повышением от  $T > 180$  К. При увеличении индукции магнитного

поля концентрация носителей возрастает, но при этом ее величина  $n \sim 10^{17} \text{ см}^{-3}$  на порядок ниже концентрации носителей заряда в  $\alpha\text{-MnS}$  [13]. Подвижность носителей ( $\mu$ ) незначительно возрастает с понижением температуры, достигая наибольшего значения вблизи  $T \sim 110 \text{ К}$ . Увеличение магнитной индукции приводит к уменьшению значений величины подвижности носителей заряда. При температурах, близких к комнатным, подвижность носителей заряда имеет величину  $\mu = 0,006 \text{ см}^2/\text{В}^{-1}\text{с}^{-1}$ . Это значение на порядок меньше подвижности носителей заряда в моносульфиде марганца  $\alpha\text{-MnS}$  при таких же температурах [13]. Уменьшение удельного электрического сопротивления при увеличении магнитного поля, в соответствии с зависимостью  $\rho = 1/en\mu$ , обусловлено увеличением концентрации носителей заряда.

Имеющиеся экспериментальные результаты особенностей температурных зависимостей удельной магнитной восприимчивости и расчеты магнитной фазовой диаграммы позволили ранее сделать вывод о наличии магнитной неоднородности в магнитном упорядочении твердых растворов системы  $\text{Mn}_{1-x}\text{V}_x\text{S}$  [9–12]. Магнитная фазовая диаграмма системы  $\text{Mn}_{1-x}\text{V}_x\text{S}$ , построенная на основе результатов эксперимента и расчетов методом Монте-Карло, включает антиферромагнитное упорядочение дальнего и ближнего порядка в гранецентрированной кубической решетке и антиасперромагнитное состояние (неколлинеарная антиферромагнитная структура, обусловленная образованием фрустрированных связей) [9, 12]. Твердый раствор  $\text{Mn}_{0,55}\text{V}_{0,45}\text{S}$  содержит антиасперромагнитную составляющую магнитного упорядочения в области температур  $T < T_N$ . Характерной особенностью такого магнитного упорядочения является то, что существует набор плоскостей, перпендикулярных диагонали куба, в которых спины упорядочены ферромагнитно, но так, что спины соседних плоскостей антипараллельны. В работе [10] измерениями электронного парамагнитного резонанса убедительно показано существование кластеров в твердом растворе  $\text{Mn}_{0,55}\text{V}_{0,45}\text{S}$  ниже температуры Нееля. Результаты изучения свойств состава  $\text{Mn}_{0,55}\text{V}_{0,45}\text{S}$  достаточно хорошо согласуются с моделью, предложенной в работе [5]. Согласно этой модели, в антиферромагнитной матрице могут иметь место ферромагнитные области (ферроны), в которых сосредоточены электроны проводимости, стремящиеся установить ферромагнитное упорядочение. Радиус этих областей составляет несколько постоянных элементарной ячейки. Ферромагнитные области таких размеров слабо взаимодействуют с антиферромагнитной матрицей. При  $T > T_N$  ферроны разрушаются, в твердом растворе  $\text{Mn}_{0,55}\text{V}_{0,45}\text{S}$  носители тока делокализуются, что соответственно отражается на восприимчивости, имеющей при  $T \sim 180 \text{ К}$  слабый излом, и  $1/\chi$  хорошо аппроксимируется законом Кюри – Вейсса с парамагнитной температурой  $\Theta = |-570| \text{ К}$ . Это согласуется и с результатами изучения эффекта Холла. При  $T > T_N$  выявлено увеличение концентрации

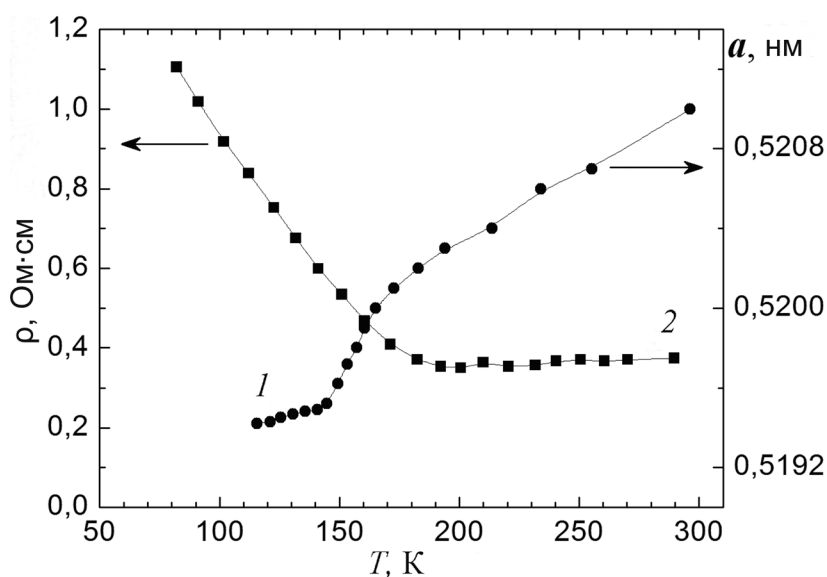


Рис. 3. Температурные зависимости параметра  $a$  элементарной кристаллической ячейки гранецентрированной кубической структуры (1) и удельного электросопротивления  $\rho$  твердого раствора  $\text{Mn}_{0,55}\text{V}_{0,45}\text{S}$  (2)

носителей заряда (см. рис. 2, б). Аномальное изменение величины параметра  $a = f(T)$  (рис. 3), при наличии ромбоэдрических искажений в элементарной кубической ячейке и уменьшении объема гранцентрированной кубической решетки в области 150 К приводит к увеличению плотности вещества, что является наиболее вероятной причиной наличия отрицательных значений  $\delta_H$ . В диапазоне температур существования этого эффекта в твердом растворе  $\text{Mn}_{0,55}\text{V}_{0,45}\text{S}$  имеет место и фазовое превращение типа «полупроводник–полуметалл» (см. рис. 3), поэтому допустимо предположение, что одним из возможных механизмов эффекта магнитосопротивления в твердом растворе  $\text{Mn}_{0,55}\text{V}_{0,45}\text{S}$  может быть магнитное и электронное разделение фаз, по сути близкое к теории протекания в сильнолегированных полупроводниках [14].

Работа поддержана грантом РФФИ – БРФФИ № 12-02-90004 Бел\_a и проектом БРФФИ – РФФИ № Ф12Р-060.

## Литература

1. Петраковский Г. А., Рябинкина Л. И., Абрамова Г. М. и др. // Письма в ЖЭТФ. 1999. Т. 69. С. 895; Петраковский Г. А., Рябинкина Л. И., Абрамова Г. М. и др. // Письма в ЖЭТФ. 2000. Т. 72. С. 99.
2. Рябинкина Л. И., Романова О. Б., Аплеснин С. С. // Изв. РАН. Сер. физ. 2008. Т. 8. С. 1115.
3. Аплеснин С. С., Рябинкина Л. И., Романова О. Б. и др. // ЖЭТФ. 2008. Т. 133. С. 875.
4. Мотт Н. Ф. Переходы металл–изолятор. М., 1979.
5. Нагаев Э. Л. // УФН. 1996. Т. 166. С. 833.
6. Petrakovskii G. A., Loseva G. V., Ryabinkina L. I., Aplesnin S. S. // JMMM. 1995. Vol. 147. P. 140–144.
7. Ведяев А. В. // УФН. 2002. Т. 172. С. 1458.
8. Аплеснин С. С. Основы спинтроники. Красноярск, 2007.
9. Петраковский Г. А., Лосева Г. В., Рябинкина Л. И. и др. // ФТТ. 1996. № 38. С. 2131.
10. Лосева Г. В., Рябинкина Л. И., Аплеснин С. С. и др. // ФТТ. 1997. № 39. С. 1428.
11. Burllet P. Le titre de docteur es-sciences physiques. Universite de Grenoble, 1968.
12. Янушкевич К. И. Твердые растворы монохалькогенидов 3d-металлов. Минск, 2009.
13. Heikens H. H., Wiegers G. A., Brugger C. F. van // Solid State Commun. 1977. Vol. 24. P. 205.
14. Шкловский Б. И., Эфрос А. Л. Электронные свойства легированных полупроводников. М., 1979.

S. S. APLESNIN, O. F. DEMIDENKO, G. I. MAKOVETSKII, O. B. ROMANOVA,  
L. I. RYABINKINA, K. I. YANUSHKEVICH

## MAGNETORESISTANCE AND HALL EFFECT IN $\text{Mn}_{0,55}\text{V}_{0,45}\text{S}$ SOLID SOLUTION

### Summary

In the 80–300 K temperature range and magnetic fields with induction of up to 2.1 T are studied the characteristics of magnetoresistive properties and Hall effect of  $\text{Mn}_{0,55}\text{V}_{0,45}\text{S}$  solid solution. It was found that the  $\text{Mn}_{0,55}\text{V}_{0,45}\text{S}$  composition is a semiconductor with high  $p$ -type carrier concentration and low values of their mobility; a magnetoresistive effect is observed; solid solution has a noncollinear antiferromagnetic structure at temperatures ranges  $T < T_N = 130$  K; in the vicinity of the temperature  $T = 180$  K in  $\text{Mn}_{0,55}\text{V}_{0,45}\text{S}$  there is a phase transition of semiconductor-semimetal type due to delocalization of charge carriers and the formation of micro areas with ferromagnetic ordering in an antiferromagnetic matrix. Magnetoresistive effect in this case, most likely is due to the magnetic inhomogeneity and can be interpreted in the framework of the electronic and magnetic phase separation consistent with the theory of current flow in heavily doped semiconductors.

### КАРОТКІЯ ПАВЕДАМЛЕННІ

УДК 511.42

М. В. ЛАМЧАНОВСКАЯ

#### АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ЧИСЛА ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ НА КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

*Институт информационных технологий Белорусского государственного университета  
информатики и радиоэлектроники*

*(Поступила в редакцию 24.10.2014)*

Теория диофантовых приближений берет свое начало с теоремы Дирихле о приближении действительных чисел рациональными [1]. Естественным образом эта задача была обобщена на задачу о приближении действительных и комплексных чисел алгебраическими числами [2]. В настоящей работе рассматривается метрическая задача о приближении нуля значениями модулей многочленов третьей степени в кругах комплексной плоскости малого радиуса. Из нее следует существование алгебраических чисел в таких кругах.

Пусть задано натуральное число  $Q > 1$  и некоторый круг  $K \subset \mathbb{C}$ ,  $K = K(z_0, r)$  с центром в точке  $z_0$  радиусом  $r$ , где  $r \geq c_1 Q^{-\mu}$ ,  $0 < \mu \leq 1$ ,  $\text{Im } z > \frac{\delta}{2}$ .

Рассмотрим множество многочленов третьей степени  $P(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$  с целыми коэффициентами. Обозначим через  $H(P)$  высоту многочлена, равную модулю максимального коэффициента многочлена  $H(P) = \max_{0 \leq i \leq 3} |a_i|$ .

Далее,  $\mu(B)$  – мера Лебега измеримого множества  $B \subset \mathbb{C}$ . Введем множество

$$\mathcal{P}_3(Q) = \{P(z) \in \mathbb{Z}[z] : \deg P = 3, H(P) \leq Q\}.$$

Нетрудно доказать с помощью принципа ящиков Дирихле, что для любого  $z \in K$  выполняется следующее неравенство:

$$|P(z)| < 8Q^{-1}. \quad (1)$$

При  $z \in K$  имеем  $|P'| = |3a_3 z^2 + 2a_2 z + a_1| \leq 6Q$ . Поэтому для любого  $z \in K$  верна система неравенств

$$\begin{cases} |P(z)| < c_2 Q^{-1}, \\ |P'(z)| < 6Q. \end{cases} \quad (2)$$

Оказывается [3], что систему неравенств (2) практически нельзя улучшить, т. е. поставить меньшие правые части.

Справедлива следующая

**Т е о р е м а.** Пусть  $\mathcal{L}(Q, \delta_0, K)$  обозначает множество  $z \in K(z_0, r)$ , для которых система неравенств

$$\begin{cases} |P(z)| < c_3 Q^{-1}, \\ |P'(z)| < \delta_0 Q \end{cases} \quad (3)$$

имеет решение в полиномах  $P(z) \in \mathcal{P}_3(Q)$ . Тогда при достаточно малой величине  $\delta_0$  имеем  $\mu \mathcal{L}(Q, \delta_0, K) < \frac{1}{4} \mu K$  для всех кругов  $K$  с условием  $r \geq c_1 Q^{-\mu}$ ,  $0 \leq \mu \leq 1$ .

Из теоремы следует, что для множества  $\mathcal{B} = K \setminus \mathcal{L}(Q, \delta_0, K)$  справедливо неравенство

$$\mu \mathcal{B} \geq \frac{3}{4} \mu K \quad (4)$$

и на множестве  $\mathcal{B}$  выполняется система неравенств (3), в которой  $|P'(z)| > \delta_0 Q$ . Из (4) и леммы 2 можно дать оценку  $|z - \alpha_1|$  и получить наличие алгебраических чисел в круге  $K$ .

**Л е м м а 1** [3]. Если многочлен  $P(z)$  удовлетворяет условию  $|a_n| > cH$ ,  $H = H(P)$ , то  $\max_{1 \leq i \leq n} |\alpha_i| \leq \frac{n}{c}$ ,  $0 < c \leq 1$ , где  $\alpha_i$  – какой-либо корень многочлена  $P(z)$ .

Пусть  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  – корни многочлена  $P(z)$ . Обозначим  $S(\alpha_i)$  множество комплексных чисел  $z$ , удовлетворяющих условию  $|z - \alpha_i| = \min_{1 \leq j \leq n} |z - \alpha_j|$ . Далее полагаем, что  $i = 1$  и корни многочлена  $P(z)$  упорядочены относительно  $\alpha_1 : |\alpha_1 - \alpha_2| < |\alpha_1 - \alpha_3| < \dots < |\alpha_1 - \alpha_n|$ .

**Л е м м а 2.** Пусть  $z \in S(\alpha_1)$ . Тогда

$$|z - \alpha_1| \leq n \frac{|P(z)|}{|P'(z)|}, \quad (5)$$

$$|z - \alpha_1| \leq 2^{n-1} \frac{|P(z)|}{|P'(\alpha_1)|}. \quad (6)$$

Неравенство (5) следует из тождества  $\frac{P(z)}{P'(z)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{z - \alpha_i}$ , а неравенство (6) доказано в [3].

**Д о к а з а т е л ь с т в о** теоремы. Многочлен нечетной степени всегда имеет действительный корень. Обозначим через  $\alpha_1$  действительный корень многочлена  $P(z) \in \mathcal{P}_3(Q)$ ,  $\alpha_2, \alpha_3 = \bar{\alpha}_2$  – комплексные корни.

Рассмотрим круг  $T(0,1)$  с центром в точке нуль и радиусом единица. Пусть  $K(z_0, r) \subset T(0,1)$ . Удалим из круга  $T(0,1)$  полосу шириной  $\delta : |\operatorname{Im} z| < \frac{\delta}{2}$ . Поэтому далее  $|\operatorname{Im} z| > \frac{\delta}{2}$  и

$$|\alpha_i - \alpha_j| > \frac{\delta}{2}. \quad (7)$$

Согласно лемме 1, корни многочлена ограничены. Из леммы 2 получаем

$$|z - \alpha_1| < 2^2 |P(z)| |P'(\alpha_1)|^{-1}.$$

Поскольку  $P'(\alpha_1) = a_3(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)$ , то из (7) следует, что  $|P'(\alpha_1)| > |a_3| \frac{\delta^2}{4}$ . Ясно, что можно считать  $a_3 > 0$ . Так как  $a_3 > c_4 H$ , то  $|P'(\alpha_1)| > \frac{\delta^2}{4} c_4 H$ . Тогда  $|z - \alpha_1| < 2^2 c_2 Q^{-1} c_5 Q^{-1}$ .

Используя последнее неравенство, оценим площадь круга  $K(z_0, r)$ :

$$\mu K < \pi c_6^2 Q^{-4}. \quad (8)$$

Зафиксируем вектор  $\bar{b} = (a_3, a_2)$ , состоящий из коэффициентов многочлена  $P(z) \in \mathcal{P}_3(Q)$ , и обозначим через  $\mathcal{P}_3(Q, \bar{b})$  подкласс многочленов из  $\mathcal{P}_3(Q)$  с одним и тем же вектором  $\bar{b}$ .

Тогда для всех  $z \in K(z_0, r)$

$$|P(z)| < c_7 Q^{1-\mu},$$

где  $z = z_0 + \gamma Q^{-\mu}$ ,  $|P(z_0)| < c_8 Q^{1-\mu}$ .

Рассмотрим многочлены  $P_1(z) \in \mathcal{P}_3(Q, \bar{b})$ ,  $P_2(z) \in \mathcal{P}_3(Q, \bar{b})$ ,

$$\begin{aligned} P_1(z) &= a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0, \\ P_2(z) &= a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0. \end{aligned}$$

Найдем разность этих многочленов в точке и получим линейный многочлен

$$S(z) = P_2(z) - P_1(z) = (a_{12} - a_{11})z + (a_{02} - a_{01}).$$

Оценим значение этого многочлена в точке  $z_0$ :

$$|S(z_0)| = |P_2(z_0) - P_1(z_0)| = |(a_{12} - a_{11})z_0 + (a_{02} - a_{01})| < c_8 Q^{1-\mu}.$$

Если  $z_0 = t_0 + it_1$ , то  $\text{Im}(S(z_0)) = (a_{12} - a_{11})t_1$ , поэтому

$$|a_{12} - a_{11}| < c_9 Q^{1-\mu}, \quad \text{Re}(S(z_0)) = (a_{12} - a_{11})t_0 + a_{02} - a_{01},$$

поэтому

$$|a_{02} - a_{01}| < c_{10} Q^{1-\mu}.$$

Оценим количество  $\#\{(a_{1j}, a_{0j})\} < c_{11} Q^{2(1-\mu)}$ ,  $j = 1, 2$ .

Из (8) имеем  $\pi c_6 Q^{-4} \cdot c_{11} Q^{2-2\mu} = c_{12} Q^{-2} \mu K$ .

Из оценки производной имеем

$$|P_2'(z) - P_1'(z)| = |3(a_{32} - a_{31})z^2 + 2(a_{22} - a_{21})z + (a_{12} - a_{11})| < \delta_0 Q.$$

Тогда  $\#\{(a_{3j}, a_{2j})\} < c_{13} \delta_0^2 Q^2$ , откуда из (8) получаем

$$\sum_{\bar{b}} \sum_{P \in \mathcal{P}_3(Q, \bar{b})} \mu \mathcal{L}(Q, \delta_0, K) < \pi c_6^2 Q^{-4} \cdot c_{11} Q^{2-2\mu} \cdot c_{13} \delta_0^2 Q^2 < c_{14} \delta_0^2 \cdot \mu K.$$

Выберем  $\delta_0$  так, чтобы  $c_{14} \delta_0^2 = \frac{1}{4}$ . Тогда  $\mu \mathcal{L}(Q, \delta_0, K) < \frac{1}{4} \mu K$ , что и доказывает теорему.

## Литература

1. *Baker A., Schmidt W. M.* // Proc. Lond. Math. Soc. 1970. Vol. 21 (3). P. 1–11.
2. *Bugeaud Y.* Approximation by Algebraic Numbers. Cambridge Univ. Press, 2004.
3. *Спринджук В. Г.* Проблема Малера в метрической теории чисел. Наука и техника. Минск, 1967.

*M. V. LAMCHANOVSKAYA*

### ALGEBRAIC NUMBERS OF THIRD DEGREE ON THE COMPLEX PLANE

#### Summary

For each  $Q > 1$ , the existence of algebraic numbers of third degree is proved in circles of radius  $cQ^{-1}$ , where  $c$  is a sufficiently large constant.

УДК 511.42

А. С. КУДИН

**ОБ ОЦЕНКЕ СНИЗУ КОЛИЧЕСТВА ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ МНОГОЧЛЕНОВ  
 ЗАДАННОЙ СТЕПЕНИ С МАЛОЙ ПРОИЗВОДНОЙ В КОРНЕ**

*Институт математики НАН Беларуси*

*(Поступила в редакцию 19.11.2014)*

Оценки расстояний действительного числа до алгебраических чисел имеют важное значение в метрической теории диофантовых приближений. С их помощью В. Г. Спринджук [1] была доказана известная проблема Малера, а В. И. Берником [2] найдена размерность Хаусдорфа множества действительных чисел с заданной мерой трансцендентности. Если производная многочлена в ближайшем корне мала, то оценка сверху расстояния до него оказывается грубой, и важно как можно точнее оценить сверху количество таких многочленов. В данной статье получена оценка снизу количества целочисленных многочленов заданной степени и ограниченной высоты с малой производной в корне, что позволяет более точно судить об оценке сверху их количества.

Для положительных действительных чисел  $Q$  и  $S$  введем обозначения

$$P_n(Q) = \{P \in \mathbb{Z}[x] \mid \deg P \leq n \wedge H(P) \leq Q\},$$

$$P_n(Q, S) = \{P \in P_n(Q) \mid \exists \alpha \in \mathbb{C} : P(\alpha) = 0 \wedge 0 < |P'(\alpha)| < S\}.$$

В работе будет доказана следующая

**Теорема.** *Если  $0 \leq \nu \leq \frac{n+1}{3}$ , то существуют такие положительные  $b_1(n), b_2(n), Q_0(n)$ , что при  $Q > Q_0$  выполняется неравенство*

$$\#P_n(Q, b_1 Q^{1-\nu}) \geq b_2 Q^{n+1-2\nu}. \quad (1)$$

В доказательстве теоремы будут использованы две леммы.

**Лемма 1.** *Пусть  $\nu_0, \dots, \nu_n$  – вещественные числа, такие что*

$$\begin{cases} \nu_0 \geq \nu_1 \geq \dots \geq \nu_n \geq -1, \\ \nu_0 + \dots + \nu_n = 0. \end{cases} \quad (2)$$

*Тогда существуют такие положительные  $\delta_0(n), c_0(n)$ , что для любого интервала  $J \subset \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$  можно найти  $Q_0(n, J)$  такое, что для всех  $Q > Q_0(n, J)$  найдется измеримое множество  $G_J \subseteq J$  с мерой  $|G_J| \geq \frac{3}{4}|J|$  такое, что для каждого  $x \in G_J$  имеется  $n+1$  линейно независимых, неприводимых и примитивных полиномов  $P \in \mathbb{Z}[x]$  степени ровно  $n$ , для которых выполняется следующая система неравенств:*

$$\begin{cases} \delta_0 Q^{-\nu_0} \leq |P(x)| \leq c_0 Q^{-\nu_0}, \\ \delta_0 Q^{-\nu_j} \leq |P^{(j)}(x)| \leq c_0 Q^{-\nu_j} \quad (1 \leq j \leq n). \end{cases} \quad (3)$$

Лемма 1 является частным случаем леммы 4 из [3].



Лемма 2. Пусть  $\delta_0(n), c_0(n), v_j$  – те же, что и в лемме 1. Пусть для величин  $d_j = v_{j-1} - v_j$  ( $1 \leq j \leq n$ ) выполняется условие

$$d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n \geq 0. \quad (4)$$

Тогда, если для некоторых  $x \in \mathbb{C}, Q > 1$ , полинома  $P = a_n x^n + \dots + a_0 \in \mathbb{C}[x]$  степени  $n$  верна система (3), то для корней  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$  полинома  $P$  справедливы оценки

$$|x - \alpha_j| \leq c_j Q^{-d_j} \quad (1 \leq j \leq n), \quad (5)$$

где  $c_j$  – некоторые константы, зависящие от  $n, \delta_0, c_0$ .

Доказательство леммы 2. Занумеруем корни  $\alpha_i$  в порядке удаления от  $x$ :

$$|x - \alpha_1| \leq |x - \alpha_2| \leq \dots \leq |x - \alpha_n|. \quad (6)$$

При  $0 \leq j \leq n$  обозначим  $S_j = (x - \alpha_{j+1}) \cdot \dots \cdot (x - \alpha_n)$ . В соответствии с леммой 2 из [1, с. 19] выполняется  $|x - \alpha_1| \leq n |P(x)| |P'(x)|^{-1}$ , откуда  $|x - \alpha_1| \leq n c_0 \delta_0^{-1} Q^{-v_0 + v_1} = c_1 Q^{-d_1}$ , что доказывает (5) для  $j = 1$ . Далее по индукции предположим, что (5) истинно при  $j < n$ , и докажем это при  $j + 1 \leq n$ . Очевидно, что  $P^{(j)}(x) = a_n \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{n-j} \leq n} (j!) (x - \alpha_{i_1}) (x - \alpha_{i_2}) \cdot \dots \cdot (x - \alpha_{i_{n-j}})$  при  $0 \leq j \leq n$ , откуда

и из (6) следует

$$|P^{(j)}(x)| \leq P_n^j |a_n S_j|, \quad (7)$$

где  $P_n^j = \frac{n!}{(n-j)!}$ . Если  $|x - \alpha_j| > \frac{1}{2} (P_n^j)^{-1} |x - \alpha_{j+1}|$ , то

$$|x - \alpha_{j+1}| < 2 P_n^j |x - \alpha_j| \leq 2 P_n^j c_j Q^{-d_j} = c_{j+1} Q^{-d_j} \leq c_{j+1} Q^{-d_{j+1}},$$

так как  $d_j \geq d_{j+1}$ . Если же  $|x - \alpha_j| \leq \frac{1}{2} (P_n^j)^{-1} |x - \alpha_{j+1}|$ , то

$$\begin{aligned} |P^{(j)}(x) - a_n S_j| &= \left| a_n \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{n-j} \leq n} (j!) (x - \alpha_{i_1}) \cdot \dots \cdot (x - \alpha_{i_{n-j}}) - a_n S_j \right| \leq \\ &\leq |a_n| \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{n-j} \leq n} (j!) \frac{1}{2} (P_n^j)^{-1} |S_j| \leq |a_n| (P_n^j) \frac{1}{2} (P_n^j)^{-1} |S_j| = \frac{1}{2} |a_n S_j|, \end{aligned}$$

откуда  $|P^{(j)}(x)| \geq \frac{1}{2} |a_n S_j| = \frac{1}{2} |a_n S_{j+1}| |x - \alpha_{j+1}|$ , из чего и из (7) вытекает

$$|P^{(j)}(x)| \geq \frac{1}{2} |a_n S_{j+1}| |x - \alpha_{j+1}| \geq \frac{1}{2} (P_n^{j+1})^{-1} |P^{(j+1)}(x)| |x - \alpha_{j+1}|.$$

Следовательно,  $|x - \alpha_{j+1}| \leq 2 P_n^{j+1} \frac{|P^{(j)}(x)|}{|P^{(j+1)}(x)|} \leq 2 P_n^{j+1} c_0 \delta_0^{-1} Q^{-v_j + v_{j+1}} = c_{j+1} Q^{-d_{j+1}}$ , что и завершает доказательство леммы.

Доказательство теоремы. Зафиксируем некоторые  $v_0, \dots, v_n$ , удовлетворяющие условиям (2) и (4). Конкретные значения  $v_0, \dots, v_n$  будут указаны позже. Зафиксируем интервал  $J = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ . По лемме 1 существуют такие  $\delta_0(n), c_0(n), Q_0(n, J)$ , что при  $Q > Q_0(n, J)$  найдется измеримое множество  $G_J \subseteq J, |G_J| \geq \frac{3}{4}|J|$  такое, что для каждого  $x \in G_J$  имеется неприводимый полином  $P \in \mathbb{Z}[x]$

степени  $n$ , для которого выполняется система (3). Зафиксируем  $Q > Q_0(n, J)$ . Тем самым зафиксировано множество  $G_J \subseteq J$ . Возьмем  $x \in G_J$  и соответствующий ему полином  $P = a_n x^n + \dots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ . Отметим, что для  $x$  и  $P$  также выполняется лемма 2.

Найдем оценку сверху высоты  $P$ . Из (3) следует, что  $|P^{(n)}(x)| = |n!a_n| \leq c_0 Q^{-v_n} \ll Q$ , откуда  $|a_n| \ll Q$ . Далее, из (3) следует, что  $|P^{(j)}(x)| = \left| \sum_{i=j}^n \frac{i!}{(i-j)!} a_i x^{i-j} \right| \leq c_0 Q^{-v_j} \ll Q$  ( $0 \leq j \leq n-1$ ). По индукции и в силу того, что  $|x| \leq \frac{1}{2}$ , имеем  $\left| \frac{i!}{(i-j)!} a_i x^{i-j} \right| \ll Q$  при  $j+1 \leq i \leq n$ , откуда  $|a_j| \ll Q$  при  $0 \leq j \leq n-1$ . Таким образом, доказано, что

$$|P| \leq b_3 Q. \quad (8)$$

Оценим  $|P'(\alpha_1)|$ , где  $\alpha_1$  – ближайший к  $x$  корень  $P$ . Из леммы 2 вытекает

$$|a_1 - \alpha_j| \leq |x - \alpha_1| + |x - \alpha_j| \leq c_1 Q^{-d_1} + c_j Q^{-d_j} \leq (c_1 + c_j) Q^{-d_j} \quad (2 \leq j \leq n),$$

откуда и из (8) имеем

$$|P'(\alpha_1)| = |a_n(\alpha_1 - \alpha_2) \dots (\alpha_1 - \alpha_n)| \leq b_4 Q^{1-(d_2+\dots+d_n)} = b_4 Q^{1-v_1+v_n}. \quad (9)$$

В силу (1) нам нужно, чтобы для некоторой величины  $b_1$  выполнялось  $|P'(\alpha_1)| < b_1 Q^{1-v}$ . Вследствие для этого достаточно, чтобы  $b_1 = b_4 + 1$  и  $1 - v \geq 1 - v_1 + v_n$ , откуда получаем следующее ограничение на  $v_j$ :

$$v_1 - v_n \geq v. \quad (10)$$

Также из неприводимости  $P$  следует, что  $\alpha_1$  не может быть корнем  $P'$ , откуда получаем  $|P'(\alpha_1)| > 0$ .

Оценим снизу количество таких  $P \in \mathbb{Z}[x]$ , которые для некоторого  $x \in G_J$  удовлетворяют (3). Так как для  $x$  и  $P$  выполняется лемма 2, то выполняется неравенство  $|x - \alpha_1| \leq c_1 Q^{-d_1}$ , откуда вытекает, что число таких различных  $\alpha_1$  не менее  $2c_1 Q^{d_1} |G_J| \geq \frac{3}{4} 2c_1 Q^{d_1} = b_5 Q^{d_1}$ . Следовательно, количество  $P \in \mathbb{Z}[x]$ , которые для некоторого  $x \in G_J$  удовлетворяют (3), не менее  $\frac{b_5}{n} Q^{d_1} = b_6 Q^{d_1} = b_6 Q^{v_0-v_1}$ .

Таким образом, доказано, что, если для  $v_0, \dots, v_n$  выполняются ограничения (2), (4) и (10), т. е. выполняется

$$\begin{cases} v_0 \geq v_1 \geq \dots \geq v_n \geq -1, \\ v_0 + \dots + v_n = 0, \\ v_0 - v_1 \geq v_1 - v_2 \geq \dots \geq v_{n-1} - v_n \geq 0, \\ v_1 - v_n \geq v, \end{cases} \quad (11)$$

то существуют такие положительные  $b_1(n), b_3(n), b_6(n)$ , что  $\#P_n(b_3 Q, b_1 Q^{1-v}) \geq b_6 Q^{v_0-v_1}$ . Найдем значения  $v \geq 0$ , при которых система (11) разрешима относительно  $(v_0, \dots, v_n)$ , и максимальное значение  $v_0 - v_1$ , которое может быть достигнуто при фиксированном  $v \geq 0$ . Заметим, что  $v_0 + \dots + v_n = d_1 + 2d_2 + \dots + nd_n + (n+1)v_n$  и перепишем (11) в следующем виде:

$$\begin{cases} v_n \geq -1, \\ d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n \geq 0, \\ d_1 + 2d_2 + \dots + nd_n + (n+1)v_n = 0, \\ d_2 + \dots + d_n \geq v. \end{cases} \quad (12)$$

Допустим, что существует хотя бы один вектор  $(d_1, \dots, d_n, v_n)$ , который удовлетворяет (12) при заданном  $v$ . Очевидно, можно считать, что  $v_n = -1$ , иначе можно перейти к вектору  $(\bar{d}_1, \dots, \bar{d}_n, \bar{v}_n) = (d_1 + (n+1)(v_n - (-1)), d_2, \dots, d_n, -1)$ , который также удовлетворяет (12), и  $\bar{d}_1 > d_1$ . Далее допустим, что  $d_i > 0$  при некотором  $i > 2$  и  $d_j = 0$  при  $i < j \leq n$ . Тогда мы можем перейти к вектору  $\bar{d}_1 = d_1 + (i-2)d_i$ ,  $\bar{d}_2 = d_2 + d_i$ ,  $\bar{d}_j = d_j$  ( $2 < j < i$ ),  $\bar{d}_j = 0$  ( $i \leq j \leq n$ ), который удовлетворяет (12), и  $\bar{d}_1 > d_1$ . Применяя описанное преобразование несколько раз, получим вектор вида  $(d_1, d_2, 0, \dots, 0, -1)$ . Далее, если  $d_2 > v$ , можно перейти к вектору  $\bar{d}_1 = d_1 + 2(d_2 - v)$ ,  $\bar{d}_2 = v$ , который удовлетворяет (12), и  $\bar{d}_1 > d_1$ . Таким образом, доказано, что если существует хотя бы один вектор  $(d_1, \dots, d_n, v_n)$ , который удовлетворяет (12) при заданном  $v$ , то вектор  $(n+1-2v, v, 0, \dots, 0, -1)$  также удовлетворяет (12) и  $\bar{d}_1 = n+1-2v$  – максимально возможное значение. Также легко проверить, что  $(n+1-2v, v, 0, \dots, 0, -1)$  удовлетворяет (12) тогда и только тогда, когда  $n+1 \geq 3v$ . Очевидно, что удовлетворяющей системе (12) вектору  $(\bar{d}_1, \dots, \bar{d}_n, \bar{v}_n) = (n+1-2v, v, 0, \dots, 0, -1)$  соответствует удовлетворяющий системе (11) вектор  $(v_0, \dots, v_n) = (n-v, v-1, -1, \dots, -1)$ .

Итак, доказано, что при  $0 \leq v \leq \frac{n+1}{3}$  существуют такие положительные  $b_1, b_3, b_6, Q_0$ , что верно  $\#P_n(b_3Q, b_1Q^{1-v}) \geq b_6Q^{n+1-2v}$  при  $Q \geq Q_0$ . Пусть  $b_7 = \max\{b_3, 1\}$ , тогда

$$\#P_n(b_7Q, b_1Q^{1-v}) \geq \#P_n(b_3Q, b_1Q^{1-v}) \geq b_6Q^{n+1-2v}. \quad (13)$$

Обозначив  $M = b_7Q$  и выразив  $Q$  через  $M$  в (13), получаем  $\#P_n(M, b_1b_7^{v-1}M^{1-v}) \geq b_6b_7^{2v-n-1}M^{n+1-2v}$ .

Так как  $b_7 \geq 1$  и  $0 \leq v \leq \frac{n+1}{3}$ , при  $M \geq M_0(n) = b_7Q_0(n)$  справедливо

$$\#P_n(M, b_1b_7^nM^{1-v}) \geq \#P_n(M, b_1b_7^{v-1}M^{1-v}) \geq b_6b_7^{2v-n-1}M^{n+1-2v} \geq b_6b_7^{-n-1}M^{n+1-2v},$$

что завершает доказательство.

## Литература

1. Спринджук В. Г. Проблема Малера в метрической теории чисел. Минск, 1967.
2. Bernik V. I. // Acta Arith. 1983. Vol 42, no 3. P. 219–253.
3. Beresnevich V., Bernik V., Gotze F. // Compos. Math. 2010. Vol 146, no 5. P. 1165–1179.

A. S. KUDIN

## LOWER BOUND OF THE NUMBER OF INTEGRAL POLYNOMIALS OF A GIVEN DEGREE WITH A SMALL VALUE OF THE DERIVATIVE AT THE ROOT

### Summary

In the article we obtain a lower bound of the number of integral polynomials of arbitrary degree and bounded height with small values of the derivative at any root of the polynomial.

УДК 681.865.8

*В. МАДЖИДНЕЖАД, И. Э. ХЕЙДОРОВ*

**ОБНАРУЖЕНИЕ ПАТОЛОГИИ РЕЧЕВОГО ТРАКТА НА ОСНОВЕ  
ГЕНЕТИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА И АНСАМБЛЯ ДЕРЕВА РЕШЕНИЙ**

*Отдел вычислительной техники Исламского университета АЗАД (Шабестар, Иран)*

*Белорусский государственный университет*

*(Поступила в редакцию 06.11.2014)*

Методы акустического анализа для обнаружения патологии речевого тракта обычно включают две фазы: этап извлечения признаков и этап классификации [1]. Первая фаза состоит из преобразования речевого сигнала в некоторый набор параметров, вторая – заключается в выборе вариантов необходимых обучающих методов.

Традиционно на этапе извлечения признаков имеют дело с такими параметрами, как джиттер, шиммер, отношение сигнал/шум, форманты. На втором этапе, как правило, используются широко известные классификаторы, такие как машины на опорных векторах (SVM) [2], модели гауссовских смесей (GVM) [3], искусственные нейронные сети (ANN) [4], скрытые марковские модели (НММ) [5].

В качестве базы данных для проведения экспериментов были использованы 75 записей пациентов с патологиями и 55 записей здоровых пациентов, из которых для анализа была выделена фонема «а». Все записи были представлены в формате РСМ моно с частотой дискретизации 44 100 гц и разрядностью 16 бит. Эти данные были использованы как для обучения классификаторов, так и для тестирования разработанных методик. Кепстральное представление входного речевого сигнала было найдено следующим образом: выделены 13 мел-частотных кепстральных коэффициентов (МЧКК), выполнена декомпозиция с помощью вейвлет-пакета на 5 уровнях для входного сигнала для получения вейвлет-пакетного дерева с 63 узлами и рассчитаны 63 энергетических коэффициента и 63 коэффициента энтропии Шеннона. Путем комбинации описанных выше характеристик был построен вектор признаков, включающий 139 компонент. Основной идеей исследования явилось уменьшение размерности вектора признаков, т. е. нахождения наименьшего набора важных признаков, обеспечивающего наилучшие характеристики классификации. Для этого был разработан новый подход на основе генетического алгоритма (ГА), в котором в качестве хромосом использовались от 1 до 139 векторов целых чисел с длиной, равной ожидаемой длине уменьшенного вектора признаков. Значение каждого гена представляло собой номер признака (из начального базового вектора), который должен быть использован в искомом векторе уменьшенной размерности. Для оптимизации размерности была выбрана фитнес-функция  $f$ , чтобы определить ошибку классификации для обучающего набора:

$$f = \frac{\sum_{i=1}^n |a_i - r_i|}{n},$$

где  $a$  – результат классификации,  $r$  – реальный класс для  $i$ -той выборки,  $n$  – общее число выборок в обучающем наборе. Цель предложенного метода, основанного на генетическом алгоритме, состоит в определении подмножества исходных признаков, минимизирующего  $f$ .

Для оценки эффективности предложенного вектора признаков был проведен сравнительный анализ различных классификаторов при решении задач обнаружения патологии голосового тракта, таких как линейный дискриминантный анализ, дерево принятия решения и метод К-ближайших соседей.

Эксперименты проводились в два этапа с применением 10-кратной кросс-валидации. В первом эксперименте был использован классификатор и исходный вектор признаков, содержащий все 139 признаков (13 МЧКК, 63 энергетических и 63 признаков энтропии), которые затем подавались на вход классификаторов для обучения. Далее для каждой выборки 139 признаков выделялись в соответствии с исходным вектором и подавались на классификаторы для тестирования. Ошибка классификации вычислялась путем сравнения метки реального класса и метки на выходе классификатора. Во втором эксперименте классификация выполнялась на основе оптимизированного по размеру вектора признаков, полученного с использованием предложенного алгоритма, и были оценены различные векторы признаков с разной длиной. Результаты экспериментов показаны в таблице.

**Точность классификации, полученная средствами предложенного ГА-метода**

Метод обучения	Точность классификации (%) на основе начального вектора признаков	Точность классификации (%) на основе оптимизированного вектора признаков
Метод К-ближайших соседей	64,7	84,6
Дискриминантный анализ	77,0	78,5
Дерево решений	85,4	93,9

Как видно из таблицы, предложенный метод уменьшения размерности вектора признаков на основе ГА приводит к повышению точности классификации. В итоге, как показали эксперименты, лучшие показатели классификации были достигнуты в случае объединения классификатора на основе дерева решений и метода ГА для уменьшения размерности вектора признаков. Такое объединение обеспечивает точность классификации 93,9 %.

## Литература

1. *Manfredi C.* // IEEE Trans. Biomedical Engineering. 2000. Vol. 47, no. 11. P. 1538–1543.
2. *Majidnezhad V., Kheidorov I.* // Intern. J. of Image, Graphics and Signal Proc. 2013. Vol. 5, no. 9. P. 1–7.
3. *Godino-Llorente J. I., Gomez-Vilda P., Blanco-Velasco M.* Dimensionality Reduction of a Pathological Voice Quality Assessment System Based on Gaussian Mixture Models and Short-Term Cepstral Parameters.
4. *Carvalho R. T. S., Cavalcante C. C., Cortez P. C.* Wavelet Transform and Artificial Neural Networks Applied to Voice Disorders Identification // 3rd World Congress on Nature and Biologically Inspired Computing (NaBIC). Salamanca, Spain, 2011. P. 371–376.
5. *Gavidia-Ceballos L., Hansen J. H. L.* // IEEE Transactions on Biomedical Engineering. Vol. 43, no. 4. 1996. P. 373–383.

*V. MAJIDNEZHAD, I. E. KHEIDOROV*

## VOCAL FOLD PATHOLOGY DIAGNOSIS ON THE BASIS OF GENETIC ALGORITHM AND DECISION TREE ENSEMBLE METHOD

### Summary

A combination of decision tree ensemble and genetic algorithm is proposed for the vocal fold pathology diagnosis by acoustic signals. The experimental results show a better performance (higher classification accuracy) of the proposed method in comparison with the others.

## РЭФЕРАТЫ

УДК 512.817

*Тараканов А. Н.* **О дискретных подгруппах группы Лоренца, генерирующих решетки в пространстве Минковского** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2014. № 4. С. 5–9.

На основе использования параметризации Федорова с помощью комплексного вектор-параметра найдены некоторые дискретные подгруппы группы Лоренца. Показано, что дискретные подгруппы группы Лоренца, не имеющие неподвижных точек, содержатся в бустах вдоль пространственного направления для времениподобных и пространственноподобных векторов и являются дискретными подгруппами группы  $SO(1,1)$ , тогда как дискретные подгруппы изотропного вектора являются подгруппами группы  $SO(1,1) \times E(1,1)$ . Приводится пример построения узлов «времениподобной» решетки.

Ил. 1. Библиогр. – 10 назв.

УДК 511.42

*Ламчановская М. В.* **Комплексные алгебраические числа большой высоты в кругах малого радиуса** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2014. № 4. С. 10–14.

В работе показано, что на числовой прямой и комплексной плоскости существуют интервалы  $I$  малой длины и круги  $K$  малого радиуса, внутри которых нет алгебраических чисел с небольшой высотой. При увеличении длины интервала и радиуса круга уже можно получать нетривиальные оценки для количества алгебраических чисел в  $I$  и  $K$ .

Библиогр. – 4 назв.

УДК 517.926.4+517.928.2

*Карпук М. В.* **О старшем показателе Ляпунова линейной дифференциальной системы с параметром-множителем как функции параметра** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2014. № 4. С. 15–24.

Рассматриваются старшие показатели Ляпунова линейных дифференциальных систем  $dx/dt = \mu A(t)x$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \geq 0$ , с кусочно-непрерывными коэффициентами и вещественным параметром-множителем как функции параметра. В работе доказано, что старший показатель Ляпунова является функцией, такой, что прообраз любого бесконечного полуинтервала, замкнутого слева, является  $G_\delta$ -множеством вещественной оси, равной нулю и удовлетворяющей альтернативе: либо она не меньше некоторой линейной функции, либо на какой-то из вещественных полуосей она тождественно равна плюс бесконечности. В первом случае доказана достаточность приведенных необходимых условий.

Библиогр. – 7 назв.

УДК 517.925

*Амелькин В. В., Василевич М. Н.* **Построение уравнения Фукса с четырьмя конечными особыми точками и заданной приводимой группой монодромии** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2014. № 4. С. 25–31.

Рассматривается одна обратная задача аналитической теории линейных дифференциальных уравнений, а именно, строится уравнение Фукса с четырьмя особыми точками и заданной приводимой группой монодромии ранга 2.

Библиогр. – 7 назв.

УДК 519.6

*Малютин В. Б.* **Вычисление интегралов по спиновым переменным от функционалов, содержащих взаимодействие удаленных узлов** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2014. № 4. С. 32–36.

Предложен метод приближенного вычисления функциональных интегралов по спиновым переменным от функционалов, содержащих взаимодействие удаленных узлов. Этот метод основан на разложении по большому и малому параметрам, содержащимся в функционале и мере.

Библиогр. – 10 назв.

УДК 519.1

*Иржавский П. А. Гамильтоновость локально связных графов: сложностной аспект // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2014. № 4. С. 37–43.*

В работе рассматривается вопрос о сложности задачи распознавания гамильтоновости графов с предписанной локальной структурой: локально связных графов с ограничениями на степени вершин,  $N_2$ -локально связных  $K_{1,3}$ -свободных графов и локально связных почти  $K_{1,3}$ -свободных графов. Установлена NP-полнота задачи в каждом из рассматриваемых классов графов, тем самым, в частности, опровергнута гипотеза, выдвинутая в 2011 г., о полиномиальной разрешимости задачи о гамильтоновом цикле в классе локально связных графов со степенями вершин, не превосходящими 6. Также показано, что некоторые полученные ранее достаточные условия гамильтоновости не могут быть естественным образом ослаблены без потери свойства полиномиальной разрешимости задачи о гамильтоновом цикле.

Ил. 4. Библиогр. – 12 назв.

УДК 537.8

*Андрушкевич И. Е., Шиёнок Ю. В. Сведение системы уравнений Максвелла к системе обыкновенных дифференциальных уравнений // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2014. № 4. С. 44–52.*

Алгебраический метод разделения переменных, разработанный ранее для релятивистского уравнения Дирака, улучшен и обобщен на случай системы уравнений Максвелла для построения ее точных решений.

Библиогр. – 12 назв.

УДК 543.4

*Муха В. С. Проверка гипотез в параллельном факторном анализе // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2014. № 4. С. 53–60.*

Представлены статистики, их распределения и критерии, позволяющие строить доверительные интервалы и проверять гипотезы в параллельном факторном анализе. Проиллюстрировано их применение на примере имитационного моделирования задачи определения концентрации веществ в растворах.

Ил. 3. Библиогр. – 8 назв.

УДК 514.142

*Прокопчук А. В., Янчевский В. И. О линейных оболочках коммутантов унитарных групп некоммутативных конечномерных алгебр с делением // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2014. № 4. С. 61–64.*

Пусть  $K/k$  – квадратичное сепарабельное расширение,  $\text{char } K \neq 2$ ,  $A$  – некоммутативная конечномерная  $K$ -алгебра с делением с  $k$ -инволюцией. Для алгебр  $A$  простого индекса взаимно простого с  $\text{char } K$  доказана следующая гипотеза:  $k$ -линейная оболочка коммутанта унитарной группы совпадает с  $A$ .

Библиогр. – 4 назв.

УДК 530.12

*Толкачев Е. А. Расслоение Хопфа  $S^3 \rightarrow S^2$ : проективные координаты и вектор-параметры Ф. И. Федорова // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2014. № 4. С. 65–71.*

В рамках ковариантного описания расслоения Хопфа  $S^3 \rightarrow S^2$  в кватернионах установлена связь соответствующих проективных координат с вектор-параметрами, что дает ковариантное представление потенциалов зацепляющихся электромагнитных полей и дополняет теорию векторной параметризации группы  $SU(2)$ .

Библиогр. – 11 назв.

УДК 533.9:621.373.826:539.2

*Чумаков А. Н., Никончук И. С., Поклонский Н. А., Горбачук Н. И., Поклонская О. Н., Обухов В. Е. Электропроводящие структуры в лазерно-модифицированных пленках алмазоподобного углерода // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2014. № 4. С. 72–75.*

Исследована модификация пленок алмазоподобного углерода (АПУ) импульсным лазерным излучением с длиной волны 532 нм и длительностью 18 нс. Облучение пленок АПУ с энергетической экспозицией свыше 0,4 Дж/см<sup>2</sup> сопровождалось формированием электропроводящих структур с поверхностным сопротивлением от тысяч до единиц кОм/□. Установлена зависимость проводимости пленок от энергетической экспозиции лазерного облучения и обсуждается ее связь со структурными изменениями пленок и процессами их нагрева и испарения.

Ил. 3. Библиогр. – 9 назв.

УДК 533.6.01

*Альхуссан Х., Сидорович Т. В., Чорный А. Д.* **Сверхзвуковой невязкий поток около тел вращения: эмпирический и численный расчет** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2014. № 4. С. 76–82.

Расчетные данные по волновому коэффициенту сопротивления, температуре торможения, толщине ударного слоя и другим газодинамическим параметрам были использованы для того, чтобы показать приемлемое согласие между численными и эмпирическими результатами для обтекания сверхзвуковым потоком заостренного кругового конуса, кругового конуса со сферическим носиком и усеченного конуса. Из анализа численных данных, позволяющих получить представление о рассмотренных физических явлениях, сделан вывод, что используемые эмпирические соотношения могут быть рекомендованы для верификации разрабатываемого нового программного обеспечения вычислительной гидрогазодинамики, а также для оценки свойств применяемых вычислительных сеток. Это позволяет получать более точные результаты, а также разрешить такие особенности сверхзвукового потока, как ударные волны и контактные границы.

Табл. 3. Ил. 3. Библиогр. – 17 назв.

УДК 537.622:537.638.5

*Ткаченко Т. М., Гончаров В. С.* **Магнитные характеристики сплавов  $MnNi_{1-x}Fe_xGe$  ( $0,10 \leq x \leq 0,25$ )** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2014. № 4. С. 83–86.

В работе исследованы магнитные характеристики сплавов  $MnNi_{1-x}Fe_xGe$  в области составов  $0,10 \leq x \leq 0,25$ . Показано, что образцы всех изученных составов при комнатной температуре относятся к ферромагнетикам со структурой типа  $Ni_2In$ . При увеличении содержания железа от  $x = 0,10$  до  $x < 0,20$  происходит процесс статистического замещения марганца в обоих типах структурных позиций Me I и Me II в  $MnNi_{1-x}Fe_xGe$ . При  $x \geq 0,20$  железо замещает марганец только в позициях Me I и не замещает никель в позициях Me II.

Табл. 1. Ил. 2. Библиогр. – 8 назв.

УДК 534.8

*Гуртовой В. Г., Шелег А. У.* **Диэлектрические характеристики монокристаллов полупроводниковых соединений  $Cu_2ZnSnS_4$  и  $Cu_2ZnSnSe_4$**  // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2014. № 4. С. 87–91.

Проведены исследования диэлектрической проницаемости и удельной электропроводности монокристаллов  $Cu_2ZnSnS_4$  и  $Cu_2ZnSnSe_4$  в интервале температур 100–300 К на частотах измерительного поля  $10^3$ – $10^6$  Гц. Определены значения обобщенной энергии активации основных носителей заряда в этих кристаллах. Показано, что абсолютные значения изученных характеристик возрастают при увеличении температуры. Выявлена дисперсия диэлектрических свойств исследованных монокристаллов: с ростом частоты значения диэлектрической проницаемости уменьшаются, а удельной электропроводности – увеличиваются. Обнаружено, что диэлектрическая проницаемость и проводимость у монокристаллов  $Cu_2ZnSnSe_4$  больше, чем у  $Cu_2ZnSnS_4$ .

Табл. 1. Ил. 4. Библиогр. – 7 назв.

УДК 538.956

*Летко А. К., Шилин А. Д., Савчук Г. К.* **Влияние ультразвукового воздействия на кристаллическую структуру керамики на основе цирконата-титаната свинца** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2014. № 4. С. 92–97.

Исследованы кристаллическая структура и электрофизические свойства керамик, полученных из обработанных ультразвуком порошков цирконата-титаната свинца. Установлено, что ультразвуковое воздействие на исходные порошки дает возможность получать пьезоэлектрическую керамику с монокристаллической структурой и заданными физическими свойствами.

Табл. 1. Ил. 4. Библиогр. – 5 назв.

УДК 621.315.592:546.28

*Бринкевич Д. И., Вабищевич С. А., Просолович В. С., Янковский Ю. Н.* **Модификация приповерхностных слоев монокристаллов кремния, имплантированных высокоэнергетическими ионами фосфора и бора** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2014. № 4. С. 98–102.

Методами масс-спектрометрии вторичных ионов, измерений поверхностного сопротивления и микротвердости проведены исследования свойств приповерхностной (рабочей) области пластин монокристаллического кремния, имплантированных ионами бора и фосфора с целью формирования сильнолегированных «карманов» комплементарных КМОП-структур. Обнаружено приповерхностное упрочнение пластин после имплантации.



Образование слоя с повышенной плотностью дефектов в кремнии снижает микротвердость приповерхностного слоя. Быстрый термический отжиг приводит к разупрочнению приповерхностной области монокристалла кремния на глубину до 1 мкм и увеличению трещиностойкости (росту  $K_{IC}$  и  $\gamma$ ) при малых нагрузках. Полученные экспериментальные результаты объяснены с учетом генерации вакансий в процессе быстрого термического отжига.  
Табл. 2. Ил. 3. Библиогр. – 7 назв.

УДК 537.311:537.638.214

*Аплеснин С. С., Демиденко О. Ф., Маковецкий Г. И., Романова О. Б., Рябинкина Л. И., Янушкевич К. И.* **Магнитосопротивление и эффект Холла в твердом растворе  $Mn_{0,55}V_{0,45}S$**  // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2014. № 4. С. 103–107.

В интервале температур 80–300 К и магнитных полях с индукцией до 2,1 Тл изучены особенности магниторезистивных свойств и эффекта Холла твердого раствора  $Mn_{0,55}V_{0,45}S$ . Установлено, что состав  $Mn_{0,55}V_{0,45}S$  является полупроводником с высокими значениями концентрации носителей заряда  $p$ -типа и низкими величинами их подвижности; обладает магниторезистивным эффектом; имеет неколлинеарную антиферромагнитную структуру в области температур  $T < T_N = 130$  К; в окрестности температуры  $T \sim 180$  К в  $Mn_{0,55}V_{0,45}S$  имеет место фазовое превращение типа полупроводник–полуметалл, обусловленное делокализацией носителей заряда и образованием микрообластей с ферромагнитным упорядочением в антиферромагнитной матрице. Магниторезистивный эффект в этом случае, вероятнее всего, обусловлен магнитной неоднородностью и может быть проинтерпретирован в рамках модели электронного и магнитного разделения фаз, согласующейся с теорией протекания тока в сильно легированных полупроводниках.

Ил. 3. Библиогр. – 14 назв.

УДК 511.42

*Ламчановская М. В.* **Алгебраические числа третьей степени на комплексной плоскости** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2014. № 4. С. 108–111.

Для любого  $Q > 1$  в работе доказано существование алгебраических чисел третьей степени в кругах радиуса, большего  $cQ^{-1}$ , при достаточно большой константе  $c$ . Доказательство основывается на метрической теореме диофантовых приближений в кругах малой меры.

Библиогр. – 3 назв.

УДК 511.42

*Кудин А. С.* **Об оценке снизу количества целочисленных многочленов заданной степени с малой производной в корне** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2014. № 4. С. 112–115.

Получена оценка снизу количества многочленов фиксированной степени и ограниченной высоты с малой производной в некотором корне, которая улучшает известные к настоящему времени оценки. Данная оценка получена с использованием методов метрической теории чисел.

Библиогр. – 3 назв.

УДК 681.865.8

*Маджиднежад В., Хейдоров И. Э.* **Обнаружение патологии речевого тракта на основе генетического алгоритма и ансамбля дерева решений** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2014. № 4. С. 116–117.

Для диагноза патологии речевого тракта по акустическому сигналу предлагается соединение ансамбля дерева принятия решений и генетического алгоритма. Результаты экспериментов подтверждают лучшие показатели (более высокую точность классификации) предложенного подхода по сравнению с другими методами.

Табл. 1. Библиогр. – 5 назв.

**ПАКАЗАЛЬНІК АРТЫКУЛАЎ, ЗМЕШЧАНЫХ У ЧАСОПІСЕ  
«ВЕСЦІ НАН БЕЛАРУСІ. СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК»  
у 2014 годзе**

**МАТЭМАТЫКА**

<b>Авдашкова Л. П., Каморников С. Ф., Шеметкова О. Л.</b> Об одном свойстве подгрупп фраттини-ева типа .....	№ 3. С. 38–43
<b>Айрян Э. А., Егоров А. Д., Севастьянов Л. А.</b> К вычислению математических ожиданий случайных функционалов .....	№ 2. С. 21–26
<b>Айрян Э. А., Малютин В. Б.</b> Вычисление матричнозначных функциональных интегралов с помощью функциональных многочленов .....	№ 1. С. 18–25
<b>Амелькин В. В., Василевич М. Н.</b> Построение уравнения Фукса с четырьмя конечными особыми точками и заданной приводимой группой монодромии .....	№ 4. С. 25–31
<b>Андрюшкевич И. Е., Шиёнок Ю. В.</b> Сведение системы уравнений Максвелла к системе обыкновенных дифференциальных уравнений .....	№ 4. С. 44–52
<b>Бенедиктович В. И.</b> Локальный признак существования плоского остовного дерева в геометрическом графе .....	№ 2. С. 58–63
<b>Берник В. И., Коледа Д. В.</b> Распределение значений дискриминантов многочленов второй и третьей степени .....	№ 2. С. 48–51
<b>Бондаренко А. А.</b> Бирациональная композиция квадратичных форм над полем функций .....	№ 3. С. 28–32
<b>Бухтояров С. Е., Емеличев В. А.</b> Устойчивость инвестиционной задачи Марковица с критериями крайнего оптимизма .....	№ 3. С. 44–48
<b>Васильев Д. В., Кудин А. С.</b> О выборе полиномов для алгоритма решета числового поля .....	№ 3. С. 54–59
<b>Гайшун И. В., Горячкин В. В., Крахотко В. В.</b> Оценка решений двухпараметрической дискретной системы с интервальными коэффициентами .....	№ 3. С. 5–8
<b>Грицук Е. В., Громач В. И.</b> Аналитические свойства решений нелинейных дифференциальных уравнений типа уравнений Пенлеве .....	№ 2. С. 32–39
<b>Деменчук А. К.</b> Управление асинхронным спектром линейных систем с правым блоком неполного ранга .....	№ 3. С. 21–27
<b>Дугинов О. И.</b> Покрытие расщепляемого графа наименьшим числом полных двудольных подграфов .....	№ 1. С. 54–60
<b>Жестков С. В.</b> О солитонных решениях обобщенного нелинейного уравнения Шредингера .....	№ 1. С. 77–81
<b>Жук Е. Е.</b> Статистическое отнесение многомерных наблюдений к классам, заданным обучающими выборками .....	№ 2. С. 82–87
<b>Жук Е. Е.</b> Статистическое соотнесение случайных выборок с заданным вероятностным распределением методом максимума правдоподобия .....	№ 3. С. 49–53
<b>Зверович Э. И.</b> Обобщение формулы перестановки Пуанкаре – Бертрана .....	№ 2. С. 12–14
<b>Иржавский П. А.</b> Гамильтоновость локально связанных графов: сложные аспекты .....	№ 4. С. 37–43
<b>Карпук М. В.</b> О старшем показателе Ляпунова линейной дифференциальной системы с параметром-множителем как функции параметра .....	№ 4. С. 15–24
<b>Ламчановская М. В.</b> Комплексные алгебраические числа большой высоты в кругах малого радиуса .....	№ 4. С. 10–14
<b>Лещев А. Е., Минченко Л. И.</b> Слабо регулярные задачи математического программирования ..	№ 2. С. 64–70
<b>Маковецкая О. А.</b> Алгоритмы построения решений периодической краевой задачи для матричного уравнения Ляпунова – Риккати .....	№ 1. С. 43–50
<b>Малютин В. Б.</b> Вычисление интегралов по спиновым переменным от функционалов, содержащих взаимодействие удаленных узлов .....	№ 4. С. 32–36
<b>Малютин В. Б.</b> О соотношении между интегралами по спиновым переменным и интегралами по антикоммутирующим переменным .....	№ 2. С. 15–20
<b>Муха В. С.</b> Многомерно-матричный линейный регрессионный анализ: распределения и свойства оценок параметров .....	№ 2. С. 71–81
<b>Муха В. С.</b> Проверка гипотез в параллельном факторном анализе .....	№ 4. С. 53–60
<b>Прокопчук А. В., Янчевский В. И.</b> О линейных оболочках коммутантов унитарных групп некоммутативных конечномерных алгебр с делением .....	№ 4. С. 61–64

<b>Прокопчук А. В., Янчевский В. И.</b> О нециклических унитарных инволюциях гензелевых дискретно-нормированных алгебр с делением .....	№ 1. С. 51–53
<b>Пунинский Г. Е.</b> Пример кольца эндоморфизмов полупростого модуля .....	№ 1. С. 61–62
<b>Расолько Г. А.</b> К приближенному решению интегрального уравнения первого рода с мультипликативным ядром Коши методом ортогональных многочленов .....	№ 3. С. 9–14
<b>Расолько Г. А.</b> К решению сингулярного интегрального уравнения первого рода с ядром Коши и специальной правой частью методом ортогональных многочленов .....	№ 2. С. 27–31
<b>Расолько Г. А.</b> Приближенное решение интегрального уравнения первого рода с мультипликативным ядром Коши методом ортогональных многочленов .....	№ 1. С. 26–35
<b>Ровба Е. А., Дирвук Е. В.</b> Рациональная квази-интерполяция Эрмита – Фейера .....	№ 3. С. 33–37
<b>Русак В. Н., Рыбаченко И. В.</b> Косинус-дроби Чебышева – Маркова в приближенном интегрировании .....	№ 3. С. 15–20
<b>Семенов М. Г., Воробьев Н. Т.</b> О характеристике инъекторов конечных групп .....	№ 2. С. 52–57
<b>Соболевский П. И., Лиходед Н. А., Мандрик П. А.</b> Метод получения границ областей определения функций глобальных зависимостей в задачах распараллеливания вычислений .....	№ 2. С. 5–11
<b>Тараканов А. Н.</b> О дискретных подгруппах группы Лоренца, генерирующих решетки в пространстве Минковского .....	№ 4. С. 5–9
<b>Трубников Ю. В., Орехова И. А.</b> Об экстремальных полиномах третьей степени комплексного аргумента .....	№ 2. С. 40–47
<b>Хартовский В. Е., Урбан О. И.</b> Управление линейными автономными алгебро-дифференциальными системами посредством динамических регуляторов .....	№ 1. С. 36–42
<b>Чернов С. Ю., Харин А. Ю.</b> О влиянии искажений в $L_1$ - и $C$ -метриках на вероятности ошибок для последовательного критерия отношения вероятностей .....	№ 1. С. 11–17
<b>Чичурин А. В., Швычкина Е. Н.</b> О построении решений с заданными предельными свойствами у систем, описывающих модели хемостата .....	№ 1. С. 69–76
<b>Швед О. Л.</b> Модель нелинейно упругопластического материала .....	№ 1. С. 63–68
<b>Янович Л. А., Гуло И. Н.</b> О приближенном вычислении функций от процесса броуновского движения .....	№ 1. С. 5–10

#### ФІЗІКА

<b>Альхуссан Х., Сидорович Т. В., Чорный А. Д.</b> Сверхзвуковой невязкий поток около тел вращения: эмпирический и численный расчет .....	№ 4. С. 76–82
<b>Ануфрик С. С., Белаш В. Ч., Васильев С. В., Иванов А. Ю., Копыцкий А. В.</b> Термодиффузия в металлах при импульсном неразрушающем лазерном воздействии .....	№ 2. С. 105–110
<b>Ануфрик С. С., Володенков А. П., Зноско К. Ф.</b> Оптимизация генерационных характеристик макета ХеСІ-лазера для абляционной обработки зубной ткани .....	№ 3. С. 107–112
<b>Аплеснин С. С., Демиденко О. Ф., Маковецкий Г. И., Романова О. Б., Рябинкина Л. И., Янушкевич К. И.</b> Магнитосопротивление и эффект Холла в твердом растворе $Mn_{0,55}V_{0,45}S$ .....	№ 4. С. 103–107
<b>Бринкевич Д. И., Вабищевич С. А., Просолович В. С., Янковский Ю. Н.</b> Модификация приповерхностных слоев монокристаллов кремния, имплантированных высокоэнергетическими ионами фосфора и бора .....	№ 4. С. 98–102
<b>Гончаренко А. М.</b> О распространении оптических солитонов в анизотропных средах .....	№ 3. С. 84–85
<b>Гуртовой В. Г., Шелег А. У.</b> Диэлектрические характеристики монокристаллов полупроводниковых соединений $Cu_2ZnSnS_4$ и $Cu_2ZnSnSe_4$ .....	№ 4. С. 87–91
<b>Дегтярь Н. Ф., Незальзова Е. И., Роговая М. В., Сеницын Г. В., Скорбанова Е. А., Ходасевич М. А.</b> Использование методов спектроскопии УФ-, видимого и ближнего ИК-диапазонов для определения оригинальности выдержанных винных дистиллятов .....	№ 3. С. 113–117
<b>Иванов А. П.</b> Лазерное зондирование атмосферы в Беларуси: исторический очерк .....	№ 1. С. 98–107
<b>Коршунов Ф. П., Жданович Н. Е., Гуринович В. А.</b> Отрицательная высокочастотная емкость облученных электронами $p$ - $n$ -переходов в режиме лавинного пробоя .....	№ 3. С. 97–101
<b>Кулак Г. В., Крох Г. В., Николаенко Т. В., Ропот П. И., Шакин О. В.</b> Преобразование двумерных квазибездифракционных световых пучков при акустооптическом взаимодействии в одноосных кристаллах .....	№ 3. С. 86–90
<b>Летко А. К., Шилин А. Д., Савчук Г. К.</b> Влияние ультразвукового воздействия на кристаллическую структуру керамики на основе цирконата-титаната свинца .....	№ 4. С. 92–97
<b>Манько А. Ю., Сапункевич И. С., Шуляковский Р. Г.</b> Монте-Карло генератор НЕРСотр для двухфотонного рождения лептонных пар в адронных столкновениях .....	№ 1. С. 108–112
<b>Мудрый А. В., Мофиднахаи Ф., Живулько В. Д., Зиновьев В. А., Двуреченский А. В., Кучинская П. А., Смагина Ж. В.</b> Структурные и оптические характеристики нанослоев Ge/Si с пространственно-упорядоченными группами квантовых точек .....	№ 2. С. 94–100
<b>Плавский В. Ю., Мостовникова Г. Р., Барулин Н. В., Плавская Л. Г., Третьякова А. И., Микулич А. В., Леусенко И. А., Мостовников А. В.</b> Биологическое и терапевтическое действие оптического излучения низкой интенсивности .....	№ 1. С. 82–97

<b>Плетюхов В. А.</b> О совместном описании безмассовых полей со спинами 0 и 1 .....	№ 3. С. 77–83
<b>Поклонский Н. А., Вырко С. А., Ковалев А. И.</b> Стационарная прыжковая миграция биполярнов по «мягким» точечным дефектам в частично разупорядоченных полупроводниках .....	№ 3. С. 91–96
<b>Рябушко А. П., Жур Т. А., Боярина И. П., Зубко О. Л., Юринок В. И.</b> О существовании треугольных точек либрации в фотогравитационном поле .....	№ 2. С. 111–118
<b>Рябушко А. П., Жур Т. А., Боярина И. П., Зубко О. Л., Юринок В. И.</b> Точки фотолибрации в небесной механике .....	№ 3. С. 60–67
<b>Сазонова А. Т.</b> Разрешимые случаи для упрощенных систем в задаче движения четырех тел в плоскости .....	№ 3. С. 68–76
<b>Ткаченко Т. М., Гончаров В. С.</b> Магнитные характеристики сплавов $MnNi_{1-x}Fe_xGe$ ( $0,10 \leq x \leq 0,25$ ) .....	№ 4. С. 83–86
<b>Толкачев Е. А.</b> Расслоение Хопфа $S^3 \rightarrow S^2$ : проективные координаты и вектор-параметры Ф. И. Федорова .....	№ 4. С. 65–71
<b>Толкачева Е. А., Мурин Л. И.</b> Исследование вакансионно-кислородных комплексов в облученных быстрыми электронами и нейтронами кристаллах кремния методом ИК-поглощения .....	№ 2. С. 101–104
<b>Точицкий Т. А., Дмитриева А. Э.</b> Влияние текстуры медной подложки на формирование структуры тонких электролитических пленок никеля .....	№ 3. С. 102–106
<b>Хорошко В. В., Цырельчук И. Н., Гременок В. Ф., Залесский В. Б., Ходин А. А.</b> Оптимизация параметров поглощающего слоя $Cu_xIn_xZn_{2-2x}Se_2$ для тонкопленочных солнечных элементов .....	№ 2. С. 88–93
<b>Чумаков А. Н., Никончук И. С., Поклонский Н. А., Горбачук Н. И., Поклонская О. Н., Обухов В. Е.</b> Электропроводящие структуры в лазерно-модифицированных пленках алмазоподобного углерода .....	№ 4. С. 72–75

#### ИНФАРМАТЫКА

<b>Бенедиктович В. И.</b> О совместимости триангуляций и геометрических графов .....	№ 1. С. 118–123
<b>Найденко В. Г.</b> $OS$ -выпуклая аппроксимация частично выпуклых оболочек .....	№ 1. С. 113–117

#### КАРОТКІЯ ПАВЕДАМЛЕННІ

<b>Гусакова А. Г.</b> Неулучшаемость теоремы Дирихле о приближении действительных чисел рациональными .....	№ 3. С. 118–121
<b>Кудин А. С.</b> Об оценке снизу количества целочисленных многочленов заданной степени с малой производной в корне .....	№ 4. С. 112–115
<b>Ламчановская М. В.</b> Алгебраические числа третьей степени на комплексной плоскости .....	№ 4. С. 108–111
<b>Маджиднежад В., Хейдоров И. Э.</b> Обнаружение патологии речевого тракта на основе генетического алгоритма и ансамбля дерева решений .....	№ 4. С. 116–117

#### ВУЧОНЫЯ БЕЛАРУСІ

<b>Апанасевич Павел Андреевич.</b> (К 85-летию со дня рождения) .....	№ 3. С. 122–124
<b>Коршунов Федор Павлович.</b> (К 80-летию со дня рождения) .....	№ 2. С. 119–120
<b>Сердюков Анатолий Николаевич.</b> (К 70-летию со дня рождения) .....	№ 2. С. 123–124
<b>Толкачев Виталий Антонович.</b> (К 80-летию со дня рождения) .....	№ 2. С. 121–122
<b>Янович Леонид Александрович.</b> (К 80-летию со дня рождения) .....	№ 1. С. 124–125

***LIST OF PUBLICATIONS FOR 2014 IN “PROCEEDINGS OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF BELARUS. PHYSICS AND MATHEMATICS SERIES”***

**MATHEMATICS**

<b>Amel'kin V. V., Vasilevich M. N.</b> Construction of the Fuchs equation with four finite critical points and a given reducible group of monodromy .....	№ 4. P. 25–31
<b>Andrushkevich I. E., Shienok Y. V.</b> Reduction of the system of Maxwell equations to the system of ordinary differential equations .....	№ 4. P. 44–52
<b>Avdashkova L. P., Kamornikov S. F., Shemetkova O. L.</b> On a property of Frattini-like subgroups.....	№ 3. P. 38–43
<b>Ayryan E. A., Egorov A. D., Sevastiyarov L. A.</b> Calculation of mathematical expectations of random functionals .....	№ 2. P. 21–26
<b>Ayryan E. A., Malyutin V. B.</b> Evaluation of matrix-valued functional integrals using functional polynomials .....	№ 1. P. 18–25
<b>Benediktovitch V. I.</b> Local feature for the existence of plane spanning tree in a geometric graph .....	№ 2. P. 58–63
<b>Bernik V. I., Kaliada D. U.</b> Distribution of the discriminant values for polynomials of second and third degree .....	№ 2. P. 48–51
<b>Bondarenko A. A.</b> Birational composition of quadratic forms over a function field .....	№ 3. P. 28–32
<b>Bukhtoyarov S. E., Emelichev V. A.</b> Stability of the Markowitz investment problem with extreme optimism criteria .....	№ 3. P. 44–48
<b>Charnou S. Yu., Kharin A. Yu.</b> Influence of distortions in the $L_1$ - and $C$ -metrics on the error probabilities for the sequential probability ratio test .....	№ 1. P. 11–17
<b>Chichurin A. V., Shvychkina A. N.</b> Construction of solutions with the given limit properties for the systems describing the chemostat models .....	№ 1. P. 69–76
<b>Demenchuk A. K.</b> Control problem of the asynchronous spectrum of linear systems with a right block of imperfect rank .....	№ 3. P. 21–27
<b>Dugin O. I.</b> Covering a split graph with the minimum number of complete bipartite subgraphs .....	№ 1. P. 54–60
<b>Gaishun I. V., Goryachkin V. V., Krakhotko V. V.</b> Estimates of solutions of two-parameter discrete systems with interval coefficients .....	№ 3. P. 5–8
<b>Grytsuk E. V., Gromak V. I.</b> Analytical properties of the solutions of the equations of the Penleve-type non-linear differential equations .....	№ 2. P. 32–39
<b>Irzhavski P. A.</b> Hamiltonicity of locally connected graphs: complexity results .....	№ 4. P. 37–43
<b>Karpuk M. V.</b> Largest Lyapunov exponent of the linear differential system with a parameter-multiplier as a function of parameter .....	№ 4. P. 15–24
<b>Khartovskii V. E., Urban O. I.</b> Control of linear autonomous algebraic-differential systems by means of dynamic regulators .....	№ 1, c. 36–42
<b>Lamchanovskaya M. V.</b> Complex algebraic numbers of large height in the circles of small radius .....	№ 4. P. 10–14
<b>Leschov A. E., Minchenko L. I.</b> Weakly regular mathematical programming problems .....	№ 2. P. 64–70
<b>Makovetskaya O. A.</b> Algorithms for constructing the solutions of the periodic boundary value problem for the matrix Lyapunov – Riccati equation .....	№ 1. P. 43–50
<b>Malyutin V. B.</b> Evaluation of integrals with respect to the spin variables of the functionals containing interaction of remote nodes .....	№ 4. P. 32–36
<b>Malyutin V. B.</b> Relation between the integrals with respect to spin variables and the integrals with respect to anticommuting variables .....	№ 2. P. 15–20
<b>Mukha V. S.</b> Checking the hypotheses in the parallel factor analysis .....	№ 4. P. 53–60
<b>Mukha V. S.</b> Multidimensional-matrix linear regression analysis: distributions and properties of the parameters .....	№ 2. P. 71–81
<b>Prokopchuk A. V., Yanchevskii V. I.</b> Non-cyclic unitary involutions of Henselian discretely valued division algebras .....	№ 1. P. 51–53
<b>Prokopchuk A. V., Yanchevskii V. I.</b> On linear spans of the commutator subgroups of unitary groups of non-commutative finite dimensional division algebras .....	№ 4. P. 61–64
<b>Puninski G. E.</b> One example of the endomorphism ring of a serial module .....	№ 1. P. 61–62
<b>Rasolko G. A.</b> Approximate solution of an integral first-kind equation with the multiplicative Cauchy kernel by the method of orthogonal polynomials .....	№ 3. P. 9–14
<b>Rasolko G. A.</b> Approximate solution of the first-kind integral equation with the multiplicative Cauchy kernel by the method of orthogonal polynomials .....	№ 1. P. 26–35

<b>Rasolko G. A.</b> To the solution of a first-kind singular integral equation with the Cauchy kernel and a special right-hand side by the method of orthogonal polynomials .....	№ 2. P. 27–31
<b>Rovba Y. A., Dirvuk Y. V.</b> Rational quasi-interpolation Hermite – Fejer .....	№ 3. P. 33–37
<b>Rusak V. N., Rybachenko I. V.</b> Chebyshev-Markov's cosine-fractions in the approximate integration .....	№ 3. P. 15–20
<b>Semenov M. G., Vorob'ev N. T.</b> Characterization of injectors of finite groups .....	№ 2. P. 52–57
<b>Shved O. L.</b> Model of nonlinear elastic-plastic material .....	№ 1. P. 63–68
<b>Sobolevsky P. I., Likhoded N. A., Mandrik P. A.</b> The method of obtaining the boundaries of the domains of the functions of global dependences in paralleling computation problems .....	№ 2. P. 5–11
<b>Tarakanov A. N.</b> Discrete subgroups of the Lorentz group generating lattices in the Minkowski space .....	№ 4. P. 5–9
<b>Trubnikov Y. V., Orehova I. A.</b> On the extreme third-degree polynomials with complex argument .....	№ 2. P. 40–47
<b>Vasilyev D. V., Kudin A. S.</b> On the choice of polynomials for the number field sieve .....	№ 3. P. 54–59
<b>Yanovich L. A., Gulo I. N.</b> Approximate calculation of the functions of the Brownian motion process .....	№ 1. P. 5–10
<b>Zhestkov S. V.</b> Soliton solutions of the generalized nonlinear Schrödinger equation .....	№ 1. P. 77–81
<b>Zhuk E. E.</b> Statistical assignment of multivariate observations to the classes determined by training samples .....	№ 2. P. 82–87
<b>Zhuk E. E.</b> Statistical assignment of random samples with a fixed probability distribution by the maximum likelihood method .....	№ 3. P. 49–53
<b>Zverovich E. I.</b> Generalization of the commutation Poincaré – Bertrand formula .....	№ 2. P. 12–14

## PHYSICS

<b>Alhussan K., Sidorovich T. V., Chorny A. D.</b> Supersonic inviscid flow around bodies of revolution: empirical vs. numerical computation .....	№ 4. P. 76–82
<b>Anufrik S. S., Belash V. Ch., Vasiliev S. V., Ivanov A. Yu., Kapytski A. V.</b> Metal thermodiffusion when affected by the non-destructive pulse laser radiation .....	№ 2. P. 105–110
<b>Anufrik S. S., Volodenkov A. P., Znosko K. F.</b> Optimization of generation characteristics of the XeCl laser prototype for ablation treatment of dental tissue .....	№ 3. P. 107–112
<b>Aplesnin S. S., Demidenko O. F., Makovetskii G. I., Romanova O. B., Ryabinkina L. I., Yanushkevich K. I.</b> Magneto-resistance and Hall effect in $Mn_{0.55}V_{0.45}S$ solid solution .....	№ 4. P. 103–107
<b>Brinkevich D. I., Vabishchevich S. A., Prosolovich V. S., Yankovski Y. N.</b> Modification of the surface layers of silicon single crystals implanted with high energy phosphorus and boron ions .....	№ 4. P. 98–102
<b>Chumakov A. N., Nikonchuk I. S., Poklonski N. A., Gorbachuk N. I., Poklonskaya O. N., Obukhov V. E.</b> Electrically conducting structures in laser-modified diamond-like carbon films .....	№ 4. P. 72–75
<b>Degtyar N. F., Nezalova E. I., Rogovaya M. V., Sinitsyn G. V., Skorbanova E. A., Khodasevich M. A.</b> Identification of the authenticity of matured wine distillates by the UV-, visible and near IR-spectroscopy methods .....	№ 3. P. 113–117
<b>Goncharenko A. M.</b> Propagation of optical solitons in anisotropic media .....	№ 3. P. 84–85
<b>Hurtavy V. G., Sheleg A. U.</b> Dielectric properties of single crystals of $Cu_2ZnSnS_4$ and $Cu_2ZnSnSe_4$ semiconductors .....	№ 4. P. 87–91
<b>Ivanov A. P.</b> Laser sensing of the atmosphere of Belarus: historical sketch .....	№ 1. P. 98–107
<b>Khoroshko V. V., Tsyrelchuk I. N., Gremenok V. F., Zalesski V. B., Khodin A. A.</b> $Cu_xIn_xZn_{2-2x}Se_2$ absorber layer characteristics optimization for thin-film solar cells .....	№ 2. P. 88–93
<b>Korshunov F. P., Jdanovich N. E., Gurinovich V. A.</b> Negative high-frequency capacitance of electron-irradiated $p-n$ -transitions in the avalanche breakdown mode .....	№ 3. P. 97–101
<b>Kulak G. V., Krokh G. V., Nikolaenko T. V., Ropot P. I., Shakin O. V.</b> Two-dimensional nearly absent-diffracted light beam transformation under acoustooptical interaction in uniaxial crystals .....	№ 3. P. 86–90
<b>Letko A. K., Shilin A. D., Sauchuk G. K.</b> Influence ultrasonic treatment on the crystal structure of ceramics based on lead zirconate-titanate .....	№ 4. P. 92–97
<b>Manko A. U., Satsunkevich I. S., Shulyakovsky R. G.</b> HEPComp Monte Carlo generator for two-photon production of lepton pairs at hadron collisions .....	№ 1. P. 08–112
<b>Mudryi A. V., Mofidnakhai F., Zhivulko V. D., Zinovyev V. A., Dvurechenskii A. V., Kuchinskaja P. A., Smagina Zh. V.</b> Structural and optical characteristics of Ge/Si nanolayers with spatially ordered groups of quantum dots .....	№ 2. P. 94–100
<b>Plavskii V. Yu., Mostovnikova G. P., Barulin N. V., Plavskaya L. G., Tret'yakova A. I., Mikulich A. V., Leusenko I. A., Mostovnikov A. V.</b> Biological and therapeutic actions of optical low-intensity radiation .....	№ 1. P. 82–97
<b>Pletyukhov V. A.</b> On simultaneous description of massless fields with spins 0 and 1 .....	№ 3. P. 77–83
<b>Poklonski N. A., Vyrko S. A., Kovalev A. I.</b> Stationary hopping migration of bipolarons via “soft” point defects in partly disordered semiconductors .....	№ 3. P. 91–96
<b>Ryabushko A. P., Zhur T. A., Boyarina I. P., Zubko O. L., Yurinok V. I.</b> Existence of triangle points of libration in the photogravitation field .....	№ 2. P. 11–118
<b>Ryabushko A. P., Zhur T. A., Boyarina I. R., Zubko O. L., Yurinok V. I.</b> Photolibration points in celestial mechanics .....	№ 3. P. 60–67

<b>Sazonova A. T.</b> Solvable cases for the simplified systems in the problem of the motion of four bodies in the plane .....	№ 3. P. 68–76
<b>Tkachenka T. M., Goncharov V. S.</b> Magnetic characteristics of $\text{MnNi}_{1-x}\text{Fe}_x\text{Ge}$ ( $0.10 \leq x \leq 0.25$ ) alloys .....	№ 4. P. 83–86
<b>Tochitskii T. A., Dmitrieva A. E.</b> Copper substrate influence on the structure formation of thin electrolytic nickel films .....	№ 3. P. 102–106
<b>Tolkachev E. A.</b> Hopf bundle $S^3 \rightarrow S^2$ : projective coordinates and F. I. Fedorov's vector-parameters ...	№ 4. P. 65–71
<b>Tolkacheva E. A., Murin L. I.</b> Ir absorption studies of vacancy-oxygen related complexes in fast electron and neutron-irradiated silicon crystals .....	№ 2. P. 101–104

### INFORMATICS

<b>Benediktovich V. I.</b> On the compatibility of triangulations and geometric graphs .....	№ 1. P. 118–123
<b>Naidenko V. G.</b> <i>OC</i> -convex approximation of partially convex hulls .....	№ 1. P. 113–117

### SHORT COMMUNICATIONS

<b>Gusakova A. G.</b> About unimprovable of Dirichlet's theorem on the approximation of real numbers by rational .....	№ 3. P. 118–121
<b>Kudin A. S.</b> Lower bound of the number of integral polynomials of a given degree with a small derivative at the root .....	№ 4. P. 112–115
<b>Lamchanovskaya M. V.</b> Algebraic numbers of third degree in the complex plane .....	№ 4. P. 108–111
<b>Majidnezhad V., Kheidorov I. E.</b> Vocal fold pathology diagnosis on the basis of genetic algorithm and decision tree ensemble method .....	№ 4. P. 116–117

### SCIENTISTS OF BELARUS

<b>Apanasevich Pavel Andreevich.</b> (To the 85 <sup>th</sup> Anniversary of Birthday) .....	№ 3. P. 122–124
<b>Korshunov Fedor Pavlovich.</b> (To the 80 <sup>th</sup> Anniversary of Birthday) .....	№ 2. P. 119–120
<b>Serdyukov Anatolii Nikolaevich.</b> (To the 70 <sup>th</sup> Anniversary of Birthday) .....	№ 2. P. 123–124
<b>Tolkachev Vitalii Antonovich.</b> (To the 80 <sup>th</sup> Anniversary of Birthday) .....	№ 2. P. 121–122
<b>Yanovich Leonid Aleksandrovich.</b> (To the 80 <sup>th</sup> Anniversary) .....	№ 1. P. 124–125



*Уважаемые авторы!*

*Наступаючы 2015 год для нашага выдання юбілейны: журналу «Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук» исполняется 50 лет!*

*Прыглашаем опублікаваць вынікі вашых навуковых даследаванняў на старонках нашага журнала ў гэты юбілейны год.*

*Надеемся на плодотворнае супрацоўніцтва!*