

ВЕСЦІ НАЦЫЯНАЛЬнай АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСІ

СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК. 2021. Т. 57, № 2

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ

СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК. 2021. Т. 57, № 2

Журнал основан в 1965 г. как «Весці Акадэміі навук БССР. Серыя фізіка-матэматычных навук»,
с 1992 г. – «Весці Акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук»,
с 1998 г. – современное название

Выходит четыре раза в год

Учредитель – Национальная академия наук Беларуси

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь,
свидетельство о регистрации № 392 от 18.05.2009

Издается при поддержке Белорусского физического общества

*Входит в Перечень научных изданий Республики Беларусь
для опубликования результатов диссертационных исследований,
включен в базу данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ)*

Главный редактор

Сергей Яковлевич Килин – Президиум Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

Редакционная коллегия

- Н. М. Олехнович** – Научно-практический центр Национальной академии наук Беларуси по материаловедению, Минск, Беларусь (*заместитель главного редактора*)
В. А. Орлович – Отделение физики, математики и информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь (*заместитель главного редактора*)
Т. Е. Янчук – (*ведущий редактор журнала*)
С. В. Абламейко – Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
С. М. Абрамов – Институт программных систем Российской академии наук, Москва, Россия
В. М. Анищик – Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
А. И. Белоус – Холдинг «ИНТЕГРАЛ», Минск, Беларусь
С. В. Гапоненко – Белорусский республиканский фонд фундаментальных исследований, Минск, Беларусь
В. В. Гороховик – Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
Н. А. Изобов – Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
Н. С. Казак – Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
В. И. Корзюк – Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

- Ф. П. Коршунов** – Научно-практический центр Национальной академии наук Беларуси по материаловедению, Минск, Беларусь
- Ю. А. Курочкин** – Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
- В. А. Лабунов** – Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь
- С. В. Лемешевский** – Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
- Д. С. Могилевцев** – Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
- Н. А. Поклонский** – Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
- С. А. Тихомиров** – Отделение физики, математики и информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
- Л. М. Томильчик** – Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
- А. В. Тузиков** – Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
- Ю. С. Харин** – Научно-исследовательский институт прикладных проблем математики и информатики Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь
- А. Ф. Чернявский** – Институт прикладных физических проблем имени А. Н. Севченко Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь
- Л. А. Янович** – Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
- В. И. Янчевский** – Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

Редакционный совет

- С. Я. Килин** – Президиум Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
- С. В. Абламейко** – Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
- А. Л. Асеев** – Президиум Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирск, Россия
- В. Г. Бондур** – Российская академия наук, Москва, Россия
- Й. Врахтруп** – Институт физики (3) Штутгартского университета, Штутгарт, Германия
- Ф. Б. Железко** – Институт квантовой оптики Университета Ульма, Ульм, Германия
- А. М. Желтиков** – Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия
- В. В. Козлов** – Математический институт имени В. А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия
- Г. Лёйхс** – Институт физики света имени М. Планка, Эрланген, Германия
- Д. С. Могилевцев** – Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
- Нгуен Дай Хунг** – Институт физики Вьетнамской академии наук и технологий, Ханой, Вьетнам
- В. А. Орлович** – Отделение физики, математики и информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
- Стивен Чу** – Стэнфордский университет, Стэнфорд, Калифорния, США
- А. Цайлингер** – Институт квантовой оптики и квантовой информатики Австрийской академии наук, Вена, Австрия

Адрес редакции:

ул. Академическая, 1, к. 118, 220072, г. Минск, Республика Беларусь.

Тел.: + 375 17 374-02-45; e-mail: fmvesti@mail.ru

vestifm.belnauka.by

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ.

Серия физико-математических наук. 2021. Т. 57, № 2.

Выходит на русском, белорусском и английском языках

Редактор *Т. Е. Янчук* Компьютерная верстка *И. В. Счеснюк*

Подписано в печать 21.06.2021. Выход в свет 28.06.2021. Формат 60×84 1/8. Бумага офсетная.

Печать цифровая. Усл. печ. л. 14,88. Уч.-изд. л. 16,4. Тираж 58 экз. Заказ 138.

Цена: индивидуальная подписка – 12,38 руб., ведомственная подписка – 29,38 руб.

Издатель и полиграфическое исполнение:

Республиканское унитарное предприятие «Издательский дом «Беларуская навука».

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/18 от 02.08.2013. ЛП № 02330/455 от 30.12.2013. Ул. Ф. Скорины, 40, 220141, г. Минск, Республика Беларусь

© РУП «Издательский дом «Беларуская навука»,
Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук, 2021

PROCEEDINGS OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF BELARUS

PHYSICS AND MATHEMATICS SERIES, 2021, vol. 57, no. 2

The Journal was founded in 1956 under the titles “Proceedings of the Academy of Sciences of BSSR. Physics and Mathematics Series”, since 1992 – “Proceedings of the Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series”, since 1998 – it comes under its actual title

Periodicity is 4 issues per annum

Founder is the National Academy of Sciences of Belarus

The journal is registered on May 18, 2009 by the Ministry of Information of the Republic of Belarus in the State Registry of Mass Media, reg. no. 392

It is published with support of the Belarusian Physical Society

*The Journal is included in The List of Journals for Publication
of the Results of Dissertation Research in the Republic of Belarus
and in the database of Russian Science Citation Index (RSCI)*

Editor-in-Chief

Sergei Ya. Kilin – Presidium of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

Editorial Board

Nikolai M. Olekhovich – The Scientific and Practical Materials Research Center of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus (*Associate Editor-in-Chief*)

Valentin A. Orlovich – Department of Physics, Mathematics and Informatics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus (*Associate Editor-in-Chief*)

Tatiana E. Yanchuk (*lead editor*)

Sergey V. Ablameyko – Belarusian State University, Minsk, Belarus

Sergei M. Abramov – Program Systems Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Viktor M. Anishchik – Belarusian State University, Minsk, Belarus

Anatoliy I. Belous – “INTEGRAL” Holding, Minsk, Belarus

Sergey V. Gaponenko – Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research, Minsk, Belarus

Valentin V. Gorokhovik – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

Nikolai A. Izobov – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

Nikolai S. Kazak – B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

Viktor I. Korzyuk – Belarusian State University, Minsk, Belarus

Fyodor P. Korshunov – The Scientific and Practical Materials Research Center of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

Yurii A. Kurochkin – B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

Vladimir A. Labunov – Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Belarus

Sergey V. Lemeshevsky – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

Dmitrii S. Mogilevcev – B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

Nikolai A. Poklonski – Belarusian State University, Minsk, Belarus

Sergei A. Tikhomirov – Department of Physics, Mathematics and Informatics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
Lev M. Tomil'chik – B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
Aleksandr V. Tuzikov – United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
Yurii S. Kharin – Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics of the Belarusian State University, Minsk, Belarus
Aleksandr F. Chernyavskii – A. N. Sevchenko Institute of Applied Physical Problems of Belarusian State University, Minsk, Belarus
Leonid A. Yanovich – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
Vyacheslav I. Yanchevskii – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

Editorial Council

Sergei Ya. Kilin – Presidium of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
Sergei V. Ablameyko – Belarusian State University, Minsk, Belarus
Aleksandr L. Aseev – Presidium of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia
Valery G. Bondur – Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
Jörg Wrachtrup – Institute of Physics (3) of the University of Stuttgart, Stuttgart, Germany
Fedor B. Jelezko – Institute for Quantum Optics of the Ulm University, Ulm, Germany
Aleksei M. Zheltikov – Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
Valery V. Kozlov – Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
Gerd Leuchs – Max Planck Institute for the Science of Light, Erlangen, Germany
Dmitrii S. Mogilevcev – B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
Nguyen Dai Hung – Institute of Physics of the Vietnam Academy of Science and Technology, Hanoi, Vietnam
Valentin A. Orlovich – Department of Physics, Mathematics and Informatics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
Steven Chu – Stanford University, Stanford, California, USA
Anton Zeilinger – Institute for Quantum Optics and Quantum Information of the Austrian Academy of Sciences, Vienna, Austria

Address of the Editorial Office:
 1, Akademicheskaya Str., room 118, 220072, Minsk, Republic of Belarus.
 Tel.: +375 17 374-02-45; e-mail: fmvesti@mail.ru
vestifm.belnauka.by

PROCEEDING OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF BELARUS.

Physics and Mathematics series, 2021, vol. 57, no. 2.

Printed in Russian, Belarusian and English languages

Editor *T. E. Yanchuk*
 Computer imposition *I. V. Schasniuk*

It is sent of the press 21.06.2021. Appearance 28.06.2021. Format 60×84¹/₈. Offset paper.
 The press digital. Printed pages 14,88. Publisher's signatures 16,4. Circulation 58 copies. Order 138.
 Price: individual subscription – 12,38 byn., departmental subscription – 29,38 byn.

Publisher and printing execution:

Republican unitary enterprise "Publishing House "Belaruskaya Navuka".
 Certificate on the state registration of the publisher, manufacturer, distributor of printing editions
 No. 1/18 dated August 2, 2013. License for the press no. 02330/455 dated December 30, 2013.
 Address: F. Scorina Str., 40, 220141, Minsk, Republic of Belarus.

© RUE "Publishing House "Belaruskaya Navuka",
 Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series, 2021

ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Коледа Д. В. О вещественных алгебраических числах, в которых производная их минимального многочлена мала	135
Корзюк В. И., Ковнацкая О. А. Решения задач для волнового уравнения с условиями на характеристиках	148
Поцейко П. Г., Ровба Е. А. Суммы Абеля – Пуассона сопряженных рядов Фурье – Чебышева и их аппроксимационные свойства	156
Васильев И. Л., Довгодилин В. В. О некоторых свойствах p -голоморфных и p -аналитических функций	176
Щукин М. В. n -Однородные C^* -алгебры	185
Амирова Р. Р., Ахмедова Ж. Б., Мансимов К. Б. О представлении решений некоторых классов линейных двумерных разностных уравнений	190
Егоров А. Д. Приближенные формулы для вычисления математического ожидания функционалов от решения линейного уравнения Скорохода	198
Муха В. С., Како Н. Ф. Интегралы и интегральные преобразования, связанные с совместным векторным гауссовским распределением	206

ФИЗИКА

Коржик М. В. Гадолиний-содержащее сцинтилляционное стекло для регистрации нейтронов в широком диапазоне энергий	217
Тихомиров С. А. Проявление динамики сверхбыстрых фотопроцессов в спектрах нестационарного поглощения растворов дифлавоноида	224
Оджаев В. Б., Петлицкий А. Н., Пилипенко В. А., Просолович В. С., Филипеня В. А., Шестовский Д. В., Явид В. Ю., Янковский Ю. Н. Влияние неконтролируемых технологических примесей на температурную зависимость коэффициента усиления биполярного n - p - n -транзистора	232
Карлович Т. Б., Сухоцкий А. Б., Данильчик Е. С. Конвективная неустойчивость воздушных потоков в вытяжной шахте над четырехрядным оребренным пучком	242

УЧЕНЫЕ БЕЛАРУСИ

Томильчик Лев Митрофанович (К 90-летию со дня рождения)	255
--	-----

ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)

CONTENTS

MATHEMATICS

Koleda D. V. On real algebraic numbers in which the derivative of their minimal polynomial is small	135
Korzyuk V. I., Kovnatskaya O. A. Solutions of problems for the wave equation with conditions on the characteristics	148
Patseika P. G., Rouba Y. A. The Abel – Poisson means of conjugate Fourier – Chebyshev series and their approximation properties	156
Vassilyev I. L., Dovgodilin V. V. On some properties of p -holomorphic and p -analytic function	176
Shchukin M. V. n -Homogeneous C^* -algebras	185
Amirova R. R., Ahmedova Zh. B., Mansimov K. B. On the representation of solutions of some classes of two-linear dimensional difference equations	190
Egorov A. D. Approximate formulas for the evaluation of the mathematical expectation of functionals from the solution to the linear Skorohod equation	198
Mukha V. S., Kako N. F. The integrals and integral transformations connected with the joint vector Gaussian distribution	206

PHYSICS

Korzhik M. V. Gadolinium contained scintillation glass for neutron detection in a wide energy range	217
Tikhomirov S. A. Manifestation of the dynamics of ultrafast photoprocesses in the transient absorption spectra of diflavonoid solutions	224
Odzaev V. B., Pyatlitski A. N., Pilipenko V. A., Prosolovich U. S., Filipenia V. A., Shestovski D. V., Yavid V. Yu., Yankovski Yu. N. The influence of uncontrolled technological impurities on the temperature dependence of the gain coefficient of a bipolar n - p - n -transistor	232
Karlovich T. B., Sukhotskii A. B., Danilchik E. S. Convective instability of air flows in the exhaust shaft above a four-row finned beam	242

SCIENTISTS OF BELARUS

Tomilchik Lev Mitrofanovich (To the 90th Anniversary)	255
--	-----

ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)

МАТЕМАТИКА MATHEMATICS

ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 511.35, 511.48, 511.75

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-2-135-147>

Поступила в редакцию 22.03.2021
Received 22.03.2021

Д. В. Коледа

Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

О Вещественных алгебраических числах, в которых производная их минимального многочлена мала

Аннотация. Алгебраические числа – это корни многочленов с целыми коэффициентами. Каждое алгебраическое число α характеризуется своим минимальным многочленом P_α – многочленом наименьшей положительной степени с целыми взаимно простыми коэффициентами, для которого α является корнем. Степень этого многочлена называется степенью числа α , а максимум модулей коэффициентов – высотой числа α . В работе рассматривается распределение алгебраических чисел α , степень которых фиксирована, высота ограничена растущим параметром Q , а минимальный многочлен P_α таков, что абсолютное значение его производной $P'_\alpha(\alpha)$ ограничено заданной величиной X . Показано, что когда ограничение X на производную лежит в определенном диапазоне, при $Q \rightarrow +\infty$ такие алгебраические числа распределяются равномерно в отрезке $[-1 + \sqrt{2/3}, 1 - \sqrt{2/3}]$.

Ключевые слова: алгебраические числа, распределение алгебраических чисел, целочисленные многочлены, многочлены с малой производной в корне

Для цитирования. Коледа, Д. В. О вещественных алгебраических числах, в которых производная их минимального многочлена мала / Д. В. Коледа // Вест. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2021. – Т. 57, № 2. – С. 135–147. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-2-135-147>

Denis V. Koleda

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

ON REAL ALGEBRAIC NUMBERS IN WHICH THE DERIVATIVE OF THEIR MINIMAL POLYNOMIAL IS SMALL

Abstract. Algebraic numbers are the roots of integer polynomials. Each algebraic number α is characterized by its minimal polynomial P_α that is a polynomial of minimal positive degree with integer coprime coefficients, α being its root. The degree of α is the degree of this polynomial, and the height of α is the maximum of the absolute values of the coefficients of this polynomial. In this paper we consider the distribution of algebraic numbers α whose degree is fixed and height bounded by a growing parameter Q , and the minimal polynomial P_α is such that the absolute value of its derivative $P'_\alpha(\alpha)$ is bounded by a given parameter X . We show that if this bounding parameter X is from a certain range, then as $Q \rightarrow +\infty$ these algebraic numbers are distributed uniformly in the segment $[-1 + \sqrt{2/3}, 1 - \sqrt{2/3}]$.

Keywords: algebraic numbers, distribution of algebraic numbers, integer polynomials, polynomials with small derivative at a root

For citation. Koleda D. V. On real algebraic numbers in which the derivative of their minimal polynomial is small. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2021, vol. 57, no. 2, pp. 135–147 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-2-135-147>

Введение. В задачах теории диофантовых приближений бывает полезно уметь отсеивать алгебраические числа, около которых их минимальный многочлен изменяется очень медленно. Например, целочисленные многочлены, имеющие малую производную в некоторых своих корнях, часто создают неудобства при вычислении хаусдорфовой размерности множеств, связанных с приближением вещественных или комплексных чисел алгебраическими. Поэтому в подобных задачах оценка количества таких многочленов, либо их корней – соответствующих алгебраических чисел, приобретает ключевое значение. Пример работы с такими «неудобными» многочленами можно найти в статье Р. Бэйкера [1], которая посвящена оценке сверху размерности Хаусдорфа множества чисел $x \in \mathbb{R}$, для каждого из которых найдется бесконечное число целочисленных многочленов P степени n , удовлетворяющих неравенству $|P(x)| < H(P)^{-w}$. Оценкам количества целочисленных многочленов с малой производной в корне посвящены работы [2–6].

Приведем основные определения и обозначения, необходимые для дальнейшего изложения. Чтобы в записях отличать сам многочлен, как функцию и формальное выражение, от значения этого многочлена в точке, будем в качестве формальной переменной использовать символ Y . Для многочлена $P(Y) = a_n Y^n + \dots + a_1 Y + a_0$ высоту определим как

$$H(P) := \max_{0 \leq k \leq n} |a_k|.$$

Под минимальным многочленом P_α алгебраического числа α мы подразумеваем ненулевой неприводимый над $\mathbb{Q}$ многочлен наименьшей степени, для которого α является корнем и коэффициенты которого суть взаимно простые целые числа, а старший коэффициент положителен. Степень и высоту алгебраического числа α определим как степень и высоту его минимального многочлена P_α , т. е.

$$\deg \alpha := \deg P_\alpha, \quad H(\alpha) := H(P_\alpha).$$

Символом $\mathbb{A}_n$ обозначим множество алгебраических чисел степени n над $\mathbb{Q}$.

Через $\mathcal{P}_n^*(Q)$ обозначим множество неприводимых над $\mathbb{Q}$ многочленов P степени n и высоты $H(P) \leq Q$, имеющих целые взаимно простые коэффициенты и положительный старший коэффициент. Другими словами, множество $\mathcal{P}_n^*(Q)$ образует минимальные многочлены степени n и высоты $H(P) \leq Q$.

Ниже используются следующие обозначения асимптотических соотношений. Запись $f \ll g$ или $f = O(g)$ означает, что $|f| \leq c|g|$ для некоторой постоянной c . При этом $f \gg g$ равносильно $g \ll f$. Выражение $f \asymp g$ значит, что одновременно $f \ll g$ и $g \ll f$. Записи вида $f \ll_{x_1, x_2, \dots} g$ или $f \asymp_{x_1, x_2, \dots} g$ означают, что неявные постоянные в соотношении зависят от параметров $x_1, x_2, \dots$; в нашем случае таким параметром будет степень n . Запись « $f(x) \sim g(x)$ при $x \rightarrow x_0$ » означает, что $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)/g(x) = 1$.

Выражение вида $\mathbf{1}\{\text{условие}\}$ определено так: $\mathbf{1}\{\text{условие}\} = 1$, если «условие» выполняется, в остальных же случаях $\mathbf{1}\{\text{условие}\} = 0$.

Основные результаты. Пусть заданы вещественные числа $Q \geq 1$ и $X > 0$ и множество $S \subseteq \mathbb{C}$. Обозначим через $\Psi_n(Q, X, S)$ количество таких алгебраических чисел $\alpha \in S$ степени n и высоты не больше Q , что у каждого из них минимальный многочлен P_α удовлетворяет неравенству $|P'_\alpha(\alpha)| \leq X$, т. е.

$$\Psi_n(Q, X, S) := \#\{\alpha \in \mathbb{A}_n \cap S : H(\alpha) \leq Q, |P'_\alpha(\alpha)| \leq X\}.$$

Теорема 1. Пусть $n \geq 2$. Тогда для любого промежутка $I \subseteq \mathbb{R}$ и любого $X > 0$ верно неравенство

$$\left| \Psi_n(Q, X, I) - \frac{Q^{n+1}}{2\zeta(n+1)} \int_I \Psi_n(X/Q; z) dz \right| \leq C'_n Q^n \ln^{1\{n=2\}} Q, \quad (1)$$

где постоянная C'_n зависит только от степени n , а функция $\Psi_n(\delta; z)$ имеет вид

$$\Psi_n(\delta; z) = \int_{B_n(\delta; z)} \left| \sum_{k=1}^n k a_k z^{k-1} \right| da_1 \dots da_n \quad (2)$$

с областью интегрирования

$$\mathcal{B}_n(\delta; z) = \left\{ (a_1, \dots, a_n) \in [-1, 1]^n : \left| \sum_{k=1}^n a_k z^k \right| \leq 1, \left| \sum_{k=1}^n k a_k z^{k-1} \right| \leq \delta \right\}.$$

Теорема 2. Функция $\psi_n(\delta, z)$ положительна для всех $\delta > 0$ и $z \in \mathbb{R}$ и может быть записана в виде

$$\psi_n(\delta; z) = \delta^2 g_n(z) + \delta^3 h_n(\delta; z) \quad (3)$$

где

$$g_n(z) = \text{Vol}_{n-1} \left\{ (a_2, \dots, a_n) \in [-1, 1]^{n-1} : \left| \sum_{k=2}^n (k-1) a_k z^k \right| \leq 1, \left| \sum_{k=2}^n k a_k z^{k-1} \right| \leq 1 \right\},$$

и при $0 < \delta \leq 1$

$$|h_n(\delta; z)| \leq \begin{cases} 0, & |z| \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{2-\delta}}, \\ \frac{4}{3|z|}, & 1 - \frac{1}{\sqrt{2-\delta}} < |z| \leq 1, \\ \frac{2^n}{3(n-1)|z|^{n-1}}, & |z| \geq 1. \end{cases} \quad (4)$$

При $n = 2$ верны соотношения

$$g_2(z) = \frac{2}{\max\{1, 2|z|, |z|^2\}}, \quad |h_2(\delta; z)| \leq \begin{cases} \frac{4}{3|z|}, & \frac{1-\delta}{2} \leq |z| \leq \frac{1+\delta}{2} \text{ или } \frac{2}{1+\delta} \leq |z| \leq \frac{2}{1-\delta}, \\ 0, & \text{для остальных } z. \end{cases} \quad (5)$$

Теорема 3. Зафиксируем $n \geq 2$ и $0 < \delta_0 < 1$. Тогда для любых

$$Q \geq 1, \quad 0 < X \leq \delta_0 Q \quad \text{и промежутка } I \subseteq \left[-1 + \frac{1}{\sqrt{2-\delta_0}}, 1 - \frac{1}{\sqrt{2-\delta_0}} \right]$$

выполняется неравенство

$$\left| \Psi_n(Q, X, I) - \frac{2^{n-2}}{\zeta(n+1)} Q^{n-1} X^2 |I| \right| \leq C'_n Q^n \ln^{1\{n=2\}} Q,$$

где постоянная C'_n та же, что и в теореме 1.

Если в теореме 3 взять $\delta_0 = 1/2$, получится результат о равномерном распределении, упомянутый в аннотации.

Следствие. Зафиксируем $n \geq 2$. Пусть $X = X(Q)$ растет с увеличением Q так, что

$$\lim_{Q \rightarrow +\infty} \frac{X}{\sqrt{Q \ln^{1\{n=2\}} Q}} = +\infty, \quad \lim_{Q \rightarrow +\infty} \frac{X}{Q} = 0.$$

Тогда при $Q \rightarrow +\infty$ для любого фиксированного промежутка $I \subseteq \mathbb{R}$ верна асимптотика

$$\Psi_n(Q, X, I) \sim \frac{Q^{n-1} X^2}{2\zeta(n+1)} \int_I g_n(z) dz.$$

Обзор известных результатов. Рассмотрим подробнее некоторые полученные ранее результаты, интересные в контексте теорем 1, 2 и 3.

Теорема 1 внешне напоминает результат из [7], где при $n \geq 2$ показано, что для любого промежутка $I \subseteq \mathbb{R}$ количество $\Phi_n(Q, I)$ алгебраических чисел $\alpha \in I$ степени n и высоты $\leq Q$ удовлетворяет соотношению

$$\left| \Phi_n(Q, I) - \frac{Q^{n+1}}{2\zeta(n+1)} \int_I \varphi_n(z) dz \right| \leq C_n Q^n \ln^{1\{n=2\}} Q,$$

где $\zeta(\cdot)$ – дзета-функция Римана, постоянная C_n зависит только от степени n , а функция $\varphi_n(z)$ может быть представлена в виде

$$\varphi_n(z) = \int_{\mathcal{D}_n(z)} \left| \sum_{k=1}^n k a_k z^{k-1} \right| da_1 \dots da_n$$

с областью интегрирования

$$\mathcal{D}_n(z) = \left\{ (a_1, \dots, a_n) \in [-1, 1]^n : \left| \sum_{k=1}^n a_k z^k \right| \leq 1 \right\}.$$

Очевидно, что $\Psi_n(Q, +\infty, S) = \Phi_n(Q, S)$ и $\psi_n(+\infty; z) = \varphi_n(z)$.

В упомянутой выше работе Бэйкера [1] для целого $n \geq 1$ и вещественных $H \geq 1$ рассматривается множество $\tilde{\mathcal{P}}_n^*(H, X)$ неприводимых над $\mathbb{Q}$ многочленов P степени $\deg P = n$ и высоты $H(P) = H$, которые имеют взаимно простые коэффициенты и старший коэффициент $a_n = H$, и у которых есть корень $\alpha \in \mathbb{C}$ с условием $|P'(\alpha)| < X$, а также подразумеваются некоторые технические ограничения, связанные с решаемой в [1] задачей. Бэйкер доказал, что при достаточно больших H для этого множества верна оценка

$$\#\tilde{\mathcal{P}}_n^*(H, X) \ll_n H^{n-1} \max\{1, X\}.$$

Для множества $S \subseteq \mathbb{C}$, целого $n \geq 1$ и действительных $Q \geq 1$, $X \geq 0$ обозначим через $\mathcal{P}_n^*(Q, X, S)$ множество многочленов $P \in \mathcal{P}_n^*(Q)$, которые имеют корень $\alpha \in S$ такой, что $|P'(\alpha)| < X$, т. е.

$$\mathcal{P}_n^*(Q, X, S) := \left\{ P \in \mathcal{P}_n^*(Q) : \text{у } P \text{ есть корень } \alpha \in S, \text{ такой что } |P'(\alpha)| \leq X \right\}.$$

В множество $\mathcal{P}_n^*(Q, X, S)$ по определению входят только минимальные многочлены. Очевидно, что для всех положительных Q, X и любого множества $S \subseteq \mathbb{C}$ верно

$$\frac{1}{n} \Psi_n(Q, X, S) \leq \#\mathcal{P}_n^*(Q, X, S) \leq \Psi_n(Q, X, S). \quad (6)$$

В серии работ [2–6] В. И. Берник, Д. В. Васильев и А. С. Кудин получили ряд верхних и нижних оценок для количества многочленов в $\mathcal{P}_n^*(Q, X, S)$ при $Q \rightarrow +\infty$ и различных ограничениях на n и X . В качестве множества S в этих работах рассматривается интервал $I_0 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

В [3] при $n \geq 2$ и $0 \leq v \leq \frac{n+1}{3}$ получена нижняя оценка

$$\#\mathcal{P}_n^*(Q, Q^{1-v}, I_0) \gg_n Q^{n+1-2v}. \quad (7)$$

Верхние оценки в этих работах имеют вид

$$\#\mathcal{P}_n^*(Q, Q^{1-v}, I_0) \ll_n Q^{n+1-\gamma v}, \quad (8)$$

где γ – положительная числовая постоянная.

– В [2] при $n \geq 1$ и $0 \leq v \leq \frac{3}{2}$ показано, что (8) выполняется с $\gamma = 1$.

– В [5] при $n \geq 3$ и $1,4 \leq v \leq \frac{7}{16}(n+1)$ доказано (8) с $\gamma = \frac{1}{7}$.

– В [6] при $n \geq 9$ и $1,5 \leq v \leq \frac{1}{2}(n+1)$ получено (8) с $\gamma = \frac{3}{5}$.

Кроме того, в [4] при $n \geq 2$ и $1 < \nu \leq \frac{1}{2}n$ показано, что количество многочленов $P \in \mathcal{P}_n^*(Q, Q^{1-\nu}, I_0)$, у которых в корне $\alpha \in I_0$, в добавок к неравенству $|P'(\alpha)| < Q^{1-\nu}$, выполняется $|P'(\alpha)| \asymp |a_n| |\alpha - \alpha'|$, где α' – ближайший к α корень того же многочлена P , оценивается сверху как

$$\#\{P \in \mathcal{P}_n^*(Q, Q^{1-\nu}, I_0) : |P'(\alpha)| \asymp |a_n| |\alpha - \alpha'|\} \ll_n Q^{n+1-\nu}.$$

Явный вид зависимости $\#\mathcal{P}_n^*(Q, X, S)$ от множества S в [2–6] не уточняется.

Из (6) и следствия видно, что при $n \geq 2$ и $0 < \nu < \frac{1}{2}$ и достаточно большом Q для любого фиксированного промежутка I верна асимптотическая оценка

$$\#\mathcal{P}_n^*(Q, Q^{1-\nu}, I) \asymp_n Q^{n+1-2\nu} \int_I g_n(z) dz.$$

Доказательство теоремы 1. Начнем с нескольких определений.

Целую точку $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ мы называем *несократимой*, если ее координаты взаимно просты, т. е. $\gcd(a_0, a_1, \dots, a_n) = 1$. Аналогично многочлен $\sum_{k=0}^n a_k Y^k \in \mathbb{Z}[Y]$ называем *несократимым*, если его вектор коэффициентов $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ несократим.

Для заданного множества $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^d$ и вещественного числа Q множество $Q\mathcal{A}$ определяем как

$$Q\mathcal{A} := \{Q\mathbf{a} : \mathbf{a} \in \mathcal{A}\}.$$

Для заданных множества $S \subseteq \mathbb{R}$ и вещественного $X > 0$ припишем ненулевому вещественному многочлену P вес $w_{X,S}(P)$, равный количеству корней ξ многочлена P , лежащих в S и удовлетворяющих неравенству $|P'(\xi)| \leq X$, т. е.

$$w_{X,S}(P) := \#\{\xi \in S : P(\xi) = 0, |P'(\xi)| \leq X\}.$$

Тогда

$$\Psi_n(Q, X, S) = \sum_{m=1}^n m \cdot \#\{P \in \mathcal{P}_n^*(Q) : w_{X,S}(P) = m\}. \quad (9)$$

Далее мы будем интерпретировать многочлены $\sum_{k=0}^n a_k Y^k$ как точки $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ евклидова пространства $\mathbb{R}^{n+1}$. При таком толковании наша задача теперь сводится к подсчету целых точек, соответствующих неприводимым несократимым целочисленным многочленам, которые удовлетворяют определенным условиям.

Вес ненулевой точки $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ определим как

$$w_{X,S}(a_0, \dots, a_n) := \#\left\{\xi \in S : \sum_{k=0}^n a_k \xi^k = 0, \left|\sum_{k=1}^n k a_k \xi^{k-1}\right| \leq X\right\}. \quad (10)$$

Заметим, что ξ , участвующее в этом определении, есть алгебраическая функция координат $a_0, \dots, a_n$, кроме того, эта функция является однородной функцией степени 0, т. е. $\xi(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n) = \xi(a_0, \dots, a_n)$ для любого ненулевого вещественного λ . Это означает, что выражение $\sum_{k=1}^n k a_k \xi^{k-1}$ также является алгебраической функцией от $a_0, \dots, a_n$, которая однородна степени 1. Поэтому для всех $\lambda \neq 0$ выполняется

$$w_{\lambda|X,S}(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n) = w_{X,S}(a_0, \dots, a_n). \quad (11)$$

Для ограниченного множества $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ определим

$$W_{X,S}(\mathcal{A}) := \sum_{\substack{(a_0, \dots, a_n) \in \mathcal{A} \cap \mathbb{Z}^{n+1} \\ \gcd(a_0, \dots, a_n) = 1}} w_{X,S}(a_0, \dots, a_n).$$

Согласно введенному выше соответствию «многочлен = точка», величина $W_{X,S}(\mathcal{A})$ подсчитывает все несократимые целочисленные многочлены степени $\leq n$, чьи векторы коэффициентов лежат в $\mathcal{A}$, с учетом их веса $w_{X,S}$. Чтобы получить сумму по несократимым неприводимым многочле-

нам, нужно отсеять из $W_{X,S}(\mathcal{A})$ точки, соответствующие многочленам степени $\leq n-1$ и приводимым многочленам степени n .

Для конечного множества $\mathcal{B} \subset \mathbb{Z}[Y]$ целочисленных многочленов определим

$$W_{X,S}(\mathcal{B}) := \sum_{\substack{P \in \mathcal{B} \\ P \text{ несократим}}} w_{X,S}(P).$$

Обозначим через $\mathcal{R}_n(Q)$ множество целочисленных приводимых многочленов степени n и высоты не более Q . Тогда

$$W_{X,S}([-Q, Q]^{n+1}) = 2\Psi_n(Q, X, S) + W_{X,S}([-Q, Q]^n) + W_{X,S}(\mathcal{R}_n(Q)),$$

где второе слагаемое в правой части соответствует точкам с $a_n = 0$ (т. е. многочленам степени не более $n-1$), множитель 2 в первом слагаемом возникает, потому что в $W_{X,S}$ мы учитываем точки независимо от знака координаты a_n .

Второе слагаемое в правой части можно оценить как

$$W_{X,S}([-Q, Q]^n) \leq (n-1) \cdot (2Q+1)^n,$$

поскольку общее количество ненулевых целочисленных многочленов степени $\leq n-1$ и высоты $\leq Q$ не превосходит $(2Q+1)^n$, и каждый из этих многочленов может иметь не более $n-1$ корней в S .

Про $\mathcal{R}_n(Q)$ известно (доказательство см. в [8–10]), что

$$\#\mathcal{R}_n(Q) \ll_n \begin{cases} Q^n, & n \geq 3, \\ Q^2 \log Q, & n = 2, \end{cases}$$

где неявная постоянная в символе Виноградова $\ll$ зависит только от степени n . Следовательно,

$$W_{X,S}(\mathcal{R}_n(Q)) \leq n \cdot \#\mathcal{R}_n(Q) = O\left(Q^n \log^{1\{n=2\}} Q\right).$$

Таким образом,

$$\Psi_n(Q, X, S) = \frac{1}{2} W_{X,S}([-Q, Q]^{n+1}) + O\left(Q^n \log^{1\{n=2\}} Q\right). \quad (12)$$

Вычислим теперь $W_{X,S}([-Q, Q]^{n+1})$. Для этого рассмотрим множество $\mathcal{A}_m \subset [-1, 1]^{n+1}$, состоящее из всех точек $\mathbf{a} = (a_0, \dots, a_n) \in [-1, 1]^{n+1}$, таких что $a_n \neq 0$ и $w_{\delta,S}(\mathbf{a}) = m$, т. е.

$$\mathcal{A}_m = \mathcal{A}_m(\delta, S) := \left\{ (a_0, \dots, a_n) \in [-1, 1]^{n+1} : a_n \neq 0, w_{\delta,S}(a_0, \dots, a_n) = m \right\}.$$

Далее обозначим $\delta := X/Q$. Согласно (11) имеем $w_{Q\delta,S}(Q\mathbf{a}) = w_{\delta,S}(\mathbf{a})$ для любых вещественных $Q > 0$. Отсюда по определению несократимого многочлена имеем

$$\#\{P \in \mathcal{P}_n(Q) : P \text{ несократим и } w_{X,S}(P) = m\} = N^*(Q\mathcal{A}_m),$$

где $N^*(\mathcal{A})$ обозначает количество несократимых целых точек во множестве $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Применяя это к (9), получаем

$$\Psi_n(Q, X, S) = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^n m N^*(Q\mathcal{A}_m) + O\left(Q^n \log^{1\{n=2\}} Q\right). \quad (13)$$

Напомним, что в правой части зависимость от X и S спрятана во множествах $\mathcal{A}_m$.

Лемма 1. Пусть граница $\partial\mathcal{A}$ ограниченной области $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^d$ содержится в объединении m алгебраических поверхностей, заданных уравнениями

$$F_j(x_1, \dots, x_d) = 0, \quad j = 1, \dots, m,$$

где степень многочленов F_j не превосходит k . Тогда количество $N^*(Q\mathcal{A})$ несократимых точек в области $Q\mathcal{A}$ равно

$$N^*(QA) = Q^d \frac{\text{Vol}_d(A)}{\zeta(d)} + O\left(Q^{d-1} \log^{1\{d=2\}} Q\right),$$

дзе $\zeta(\cdot)$ – дзета-функцыя Рымана, а неявная постоянная в символе « O большое» зависит только от d, m, k и диаметра области A .

Доказательство. Утверждение выводится из работы [11] с помощью принципа включения-исключений. Подробное доказательство можно найти, напр., в [7, лемма 2.4].

Лемма 2. Пусть $S \subseteq \mathbb{R}$ есть промежуток с концами α и β , где $\alpha < \beta$. Тогда граница области $A_m(\delta, S)$ содержится в объединении $2n + 8$ алгебраических поверхностей:

- $2n + 2$ плоскостей, заданных уравнениями $a_k \pm 1 = 0$, где $k = 0, 1, \dots, n$;
- три плоскости с уравнениями $a_n = 0$, $\sum_{k=0}^n a_k \alpha^k = 0$, $\sum_{k=0}^n a_k \beta^k = 0$;
- поверхность с уравнением $D\left[\sum_{k=0}^n a_k Y^k\right] = 0$, где $D[f(Y)]$ – дискриминант многочлена $f \in \mathbb{R}[Y]$, рассматриваемый как функция коэффициентов многочлена f ;
- две поверхности с уравнениями $\sum_{k=0}^n k a_k \xi^{k-1} \pm \delta = 0$, где ξ – вещественный корень члена $\sum_{k=0}^n a_k Y^k$.

Доказательство. Рассуждения повторяют доказательство леммы 1 в [12]. Отличие заключается только в добавлении поверхностей $a_k \pm 1 = 0$ и $\sum_{k=0}^n k a_k \xi^{k-1} \pm \delta = 0$.

Таким образом, по леммам 1 (при $d = n + 1 \geq 3$) и 2

$$\sum_{m=0}^n m N^*(QA_m) = \frac{Q^{n+1}}{\zeta(n+1)} \sum_{m=0}^n m \text{Vol}_{n+1}(A_m) + O(Q^n).$$

Очевидно, что

$$\sum_{m=0}^n m \text{Vol}_{n+1}(A_m) = \int_{[-1,1]^{n+1}} w_{\delta,S}(a_0, \dots, a_n) da_0 \dots da_n.$$

Заменим в интеграле переменную a_0 на z согласно равенству

$$a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n = 0.$$

По (10) нетрудно заметить, что при такой замене каждой точке $(a_0, \dots, a_n) \in [-1, 1]^{n+1}$ будет соответствовать в точности $w_{\delta,S}(a_0, \dots, a_n)$ точек вида $(z; a_1, \dots, a_n) \in B_n(\delta)$, где область

$$B_n(\delta) := \left\{ (z; a_1, \dots, a_n) \in S \times [-1, 1]^n : \left| \sum_{k=1}^n a_k z^k \right| \leq 1, \left| \sum_{k=1}^n k a_k z^{k-1} \right| \leq \delta \right\}.$$

Якобиан этой замены равен

$$\frac{\partial(a_0, a_1, \dots, a_n)}{\partial(z; a_1, \dots, a_n)} = \begin{vmatrix} -\sum_{k=1}^n k a_k z^{k-1} & -z & \dots & -z^n \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = -\sum_{k=1}^n k a_k z^{k-1}.$$

В итоге интеграл принимает вид

$$\int_{[-1,1]^{n+1}} w_{\delta,S}(a_0, \dots, a_n) da_0 \dots da_n = \int_S \psi_n(\delta; z) dz, \quad (14)$$

где мы обозначили

$$\psi_n(\delta; z) := \int_{B_n(\delta; z)} \left| \sum_{k=1}^n k a_k z^{k-1} \right| da_1 \dots da_n \quad (15)$$

с областью интегрирования

$$\mathcal{B}_n(\delta; z) := \left\{ (a_1, \dots, a_n) \in [-1, 1]^n : \left| \sum_{k=1}^n a_k z^k \right| \leq 1, \left| \sum_{k=1}^n k a_k z^{k-1} \right| \leq \delta \right\}.$$

Функцию ψ_n можно интерпретировать как плотность распределения интересующих нас алгебраических чисел в окрестности точки z . Таким образом, теорема 1 доказана.

Доказательство теорем 2 и 3. В интеграле (15) заменим переменную a_1 на p согласно равенству

$$p = a_1 + 2a_2 z + \dots + na_n z^{n-1}.$$

Якобиан такой замены равен 1, и интеграл (15) принимает вид

$$\psi_n(\delta; z) = \int_{-\delta}^{\delta} |p| dp \int_{\mathcal{G}_n(p; z)} da_2 \dots da_n = \int_{-\delta}^{\delta} |p| \text{Vol}_{n-1} \mathcal{G}_n(p; z) dp, \quad (16)$$

где

$$\mathcal{G}_n(p; z) := \left\{ (a_2, \dots, a_n) \in [-1, 1]^{n-1} : \left| pz - \sum_{k=2}^n (k-1) a_k z^k \right| \leq 1, \left| p - \sum_{k=2}^n k a_k z^{k-1} \right| \leq 1 \right\}. \quad (17)$$

Лемма 3. Для любых вещественных p и z

$$\text{Vol}_{n-1} \mathcal{G}_n(-p; z) = \text{Vol}_{n-1} \mathcal{G}_n(p; z), \quad \text{Vol}_{n-1} \mathcal{G}_n(p; -z) = \text{Vol}_{n-1} \mathcal{G}_n(p; z).$$

Доказательство. По определению (17) видно, что между областями $\mathcal{G}_n(-p; z)$ и $\mathcal{G}_n(p; z)$ есть биекция – отображение $(a_2, \dots, a_n) \mapsto (-a_2, \dots, -a_n)$. И поскольку оно изометрично, сразу получаем первое равенство.

Также легко заметить, что отображение

$$(a_2, \dots, a_n) \mapsto ((-1)^{2-1} a_2, \dots, (-1)^{n-1} a_n),$$

где значение координаты a_k отображается в $(-1)^{k-1} a_k$, является изометрической биекцией между $\mathcal{G}_n(p; -z)$ и $\mathcal{G}_n(p; z)$. Второе равенство доказано.

Исследуем поведение функции $\psi_n(\delta; z)$ при $\delta \rightarrow +0$. Очевидно, что

$$\psi_n(\delta, z) = \delta^2 \text{Vol}_{n-1} \mathcal{G}_n(0; z) + 2 \int_0^{\delta} \tilde{g}_n(p; z) p dp,$$

где мы обозначили

$$\tilde{g}_n(p; z) := \text{Vol}_{n-1} \mathcal{G}_n(p; z) - \text{Vol}_{n-1} \mathcal{G}_n(0; z).$$

Формула (3) получается после введения обозначений

$$g_n(z) := \text{Vol}_{n-1} \mathcal{G}_n(0; z), \quad h_n(\delta; z) := 2 \int_0^{\delta} \frac{\tilde{g}_n(q\delta; z)}{\delta} q dq. \quad (18)$$

Осталось доказать оценку (4) для функции $h_n(\delta; z)$, а также для $n = 2$ соотношения (5).

Далее везде в вычислениях полагаем $z > 0$ (случай $z = 0$ тривиален) для упрощения записей. Это возможно, поскольку из (16) и леммы 3 следует, что функция $\psi_n(\delta; z)$ четна по переменной z .

Лемма 4. Пусть $n \geq 2$. При $|p| \leq 1$ и $|z| \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{2-|p|}}$ верно равенство

$$\mathcal{G}_n(p; z) = [-1, 1]^{n-1}.$$

Доказательство. Согласно лемме 3, полагаем $0 \leq p \leq 1$. Очевидно, что в (17) неравенство

$$\left| pz - \sum_{k=2}^n (k-1) a_k z^k \right| \leq 1 \quad (19)$$

выполняется для всех $(a_2, \dots, a_n) \in [-1, 1]^{n-1}$, если и только если положительное z удовлетворяет

$$pz + \sum_{k=2}^n (k-1)z^k \leq 1.$$

Очевидно, что при $n \geq 2$ и $p > 0$ решения последнего неравенства образуют отрезок $[0, z_n]$, где $z_n < 1$. Оценим величину z_n снизу. Очевидно, что при $n \rightarrow \infty$ величина z_n монотонно убывает к значению z_∞ , которое является максимумом решений неравенства

$$pz + \sum_{k=2}^{\infty} (k-1)z^k \leq 1, \quad \text{т. е.} \quad pz + \frac{z^2}{(1-z)^2} \leq 1, \quad \text{или} \quad \frac{z}{1-z} \leq \sqrt{1-pz},$$

что можно переписать в виде

$$z \leq \frac{\sqrt{1-pz}}{1+\sqrt{1-pz}}. \quad (20)$$

При $0 \leq pz \leq 1$ (что верно ввиду $0 < z \leq z_n < 1$ и $0 < p \leq 1$) правая часть заведомо не больше $1/2$ и при этом является убывающей функцией от z . Поэтому справедливость неравенства

$$z \leq \frac{\sqrt{1-p/2}}{1+\sqrt{1-p/2}} \quad (21)$$

гарантирует, что будут выполнены (20) и, как следствие, (19).

Рассуждая аналогично, получаем, что второе неравенство в (17)

$$\left| p - \sum_{k=2}^n ka_k z^{k-1} \right| \leq 1$$

заведомо удовлетворено для всех $(a_2, \dots, a_n) \in [-1, 1]^{n-1}$, если

$$p + \sum_{k=2}^{\infty} kz^{k-1} \leq 1, \quad \text{т. е.} \quad p + \frac{1}{(1-z)^2} \leq 2, \quad \text{или} \quad z \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{2-p}}.$$

Несложно показать, что при выполнении последнего неравенства будет верно и (21). Тем самым лемма 4 доказана.

Из леммы 4 сразу получаем, что при $|p| \leq \delta$ и $|z| \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{2-\delta}}$ верны равенства

$$g_n(z) = 2^{n-1}, \quad h_n(\delta, z) = 0, \quad \psi_n(z) = 2^{n-1}\delta^2.$$

И таким образом из уже доказанной теоремы 1 получаем для всех $\delta \in (0, \delta_0]$ теорему 3.

Чтобы получить оценку (4) для остальных значений z , докажем несколько лемм.

Лемма 5. Пусть $n \geq 3$. Для всех p верна оценка

$$|\tilde{g}_n(p; z)| \leq \begin{cases} \frac{2|p|}{|z|}, & 1 - \frac{1}{\sqrt{2-|p|}} < |z| \leq 1, \\ \frac{2^{n-1}|p|}{(n-1)|z|^{n-1}}, & |z| \geq 1. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $0 < z \leq 1$. Из определения (17) области $\mathcal{G}_n(p; z)$ видно, что для заданных значений $p, a_3, \dots, a_n$ координата a_2 точки $(a_2, a_3, \dots, a_n) \in \mathcal{G}_n(p; z)$ принимает значения из отрезка $[A(p; z), B(p; z)]$, где

$$A(p; z) := \max \left\{ -1, \frac{1}{z^2} \left[-1 + pz - \sum_{k=3}^n (k-1)a_k z^k \right], \frac{1}{2z} \left[-1 + p - \sum_{k=3}^n ka_k z^{k-1} \right] \right\},$$

$$B(p; z) := \min \left\{ 1, \frac{1}{z^2} \left[1 + pz - \sum_{k=3}^n (k-1)a_k z^k \right], \frac{1}{2z} \left[1 + p - \sum_{k=3}^n ka_k z^{k-1} \right] \right\},$$

$$B(p; z) := \max\{A(p; z), B'(p; z)\}.$$

Заметим, что такое «двухуровневое» определение величины $B(p; z)$ удобно тем, что нам не придется выяснять, при каких значениях $p, a_3, \dots, a_n$ выполняется $A(p; z) \leq B'(p; z)$. При этом становится очевидным равенство

$$\tilde{g}_n(p; z) = \int_{[-1,1]^{n-2}} (B(p; z) - B(0; z) - [A(p; z) - A(0; z)]) da_3 \dots da_n. \quad (22)$$

Л е м м а 6. Для любого конечного набора вещественных чисел x_k и δ_k выполняются неравенства

$$\left| \min_k \{x_k + \delta_k\} - \min_k \{x_k\} \right| \leq \max_k |\delta_k|, \quad \left| \max_k \{x_k + \delta_k\} - \max_k \{x_k\} \right| \leq \max_k |\delta_k|.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выведем неравенство для минимумов. Пусть

$$\min_{1 \leq k \leq n} \{x_k + \delta_k\} = x_i + \delta_i, \quad \min_{1 \leq k \leq n} \{x_k\} = x_j.$$

Тогда $\delta_i \leq x_i + \delta_i - x_j = x_i + \delta_i - (x_j + \delta_j) + \delta_j \leq \delta_j$, т. е.

$$|x_i + \delta_i - x_j| \leq \max\{|\delta_i|, |\delta_j|\} \leq \max_{1 \leq k \leq n} |\delta_k|.$$

Докажем неравенство для максимумов. Допустим

$$\max_{1 \leq k \leq n} \{x_k + \delta_k\} = x_i + \delta_i, \quad \max_{1 \leq k \leq n} \{x_k\} = x_j.$$

Тогда $\delta_i \geq x_i + \delta_i - x_j = x_i + \delta_i - (x_j + \delta_j) + \delta_j \geq \delta_j$. Далее вывод очевиден.

По лемме 6 получаем

$$\begin{aligned} & |B(p; z) - B(0; z) - [A(p; z) - A(0; z)]| \leq \\ & \leq \max\{|B'(p; z) - B'(0; z)|, |A(p; z) - A(0; z)|\} + |A(p; z) - A(0; z)| \leq \frac{2p}{z}. \end{aligned}$$

Пусть $1 \leq z$. По аналогии с вышесказанным из (17) получаем, что при заданных $p, a_2, \dots, a_{n-1}$ координата a_n точки $(a_2, \dots, a_{n-1}, a_n) \in \mathcal{G}_n(p; z)$ лежит в отрезке $[A(p; z), B(p; z)]$, где на этот раз

$$\begin{aligned} A(p; z) &:= \max \left\{ -1, \frac{1}{(n-1)z^n} \left[-1 + pz - \sum_{k=2}^{n-1} (k-1)a_k z^k \right], \frac{1}{nz^{n-1}} \left[-1 + p - \sum_{k=2}^{n-1} ka_k z^{k-1} \right] \right\}, \\ B'(p; z) &:= \min \left\{ 1, \frac{1}{(n-1)z^n} \left[1 + pz - \sum_{k=2}^{n-1} (k-1)a_k z^k \right], \frac{1}{nz^{n-1}} \left[1 + p - \sum_{k=2}^{n-1} ka_k z^{k-1} \right] \right\}, \\ B(p; z) &:= \max\{A(p; z), B'(p; z)\}. \end{aligned}$$

Аналогично получаем равенство

$$\tilde{g}_n(p; z) = \int_{[-1,1]^{n-2}} (B(p; z) - B(0; z) - [A(p; z) - A(0; z)]) da_2 \dots da_{n-1} \quad (23)$$

и по лемме 6

$$|B(p; z) - B(0; z) - [A(p; z) - A(0; z)]| \leq \frac{2p}{(n-1)z^{n-1}}, \quad |\tilde{g}_n(p; z)| \leq \frac{2^{n-1}p}{(n-1)z^{n-1}}.$$

Лемма 6 доказана.

Л е м м а 7. Пусть $|p| < 1$. Тогда

$$|\tilde{g}_2(p; z)| \leq \begin{cases} \frac{2|p|}{|z|}, & \frac{1-|p|}{2} \leq |z| \leq \frac{1+|p|}{2} \text{ или } \frac{2}{1+|p|} \leq |z| \leq \frac{2}{1-|p|}, \\ 0, & \text{для остальных } z. \end{cases}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Опять ввиду леммы 3 полагаем $0 < z$ и $0 \leq p < 1$. При $n = 2$ интегрирования в (22) и (23) нет, и обе формулы принимают вид

$$\tilde{g}_2(p; z) = B(p; z) - B(0; z) - [A(p; z) - A(0; z)], \quad (24)$$

где теперь

$$A(p; z) := \max \left\{ -1, \frac{-1+pz}{z^2}, \frac{-1+p}{2z} \right\}, \quad B(p; z) := \min \left\{ 1, \frac{1+pz}{z^2}, \frac{1+p}{2z} \right\}.$$

При всех $z > 0$ оценка $|\tilde{g}_2(p; z)| \leq 2p/z$ получается полностью аналогично случаю высших степеней.

Установим множество тех $z > 0$, для которых $\tilde{g}_2(p; z) = 0$. Несложными вычислениями можно показать, что

$$A(p; z) = \begin{cases} -1, & 0 \leq z \leq \frac{1-p}{2}, \\ \frac{-1+p}{2z}, & \frac{1-p}{2} \leq z \leq \frac{2}{1+p}, \\ \frac{-1+pz}{z^2}, & \frac{2}{1+p} \leq z; \end{cases} \quad B(p; z) = \begin{cases} 1, & 0 \leq z \leq \frac{1+p}{2}, \\ \frac{1+p}{2z}, & \frac{1+p}{2} \leq z \leq \frac{2}{1-p}, \\ \frac{1+pz}{z^2}, & \frac{2}{1-p} \leq z; \end{cases}$$

$$B(p; z) - A(p; z) = \begin{cases} 2, & 0 \leq z \leq \frac{1-p}{2}, \\ 1 + \frac{1}{2z} - \frac{p}{2z}, & \frac{1-p}{2} \leq z \leq \frac{1+p}{2}, \\ \frac{1}{z}, & \frac{1+p}{2} \leq z \leq \frac{2}{1+p}, \\ \frac{1}{2z} + \frac{1}{z^2} - \frac{p}{2z}, & \frac{2}{1+p} \leq z \leq \frac{2}{1-p}, \\ \frac{2}{z^2}, & \frac{2}{1-p} \leq z. \end{cases}$$

Отсюда, ввиду (24), сразу следует утверждение леммы.

В итоге из лемм 4 и 5 для $n \geq 3$ имеем

$$\left| \int_0^\delta \tilde{g}_n(p; z) p dp \right| \leq \begin{cases} 0, & |z| \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{2-\delta}}, \\ \frac{2}{3|z|} \delta^3, & 1 - \frac{1}{\sqrt{2-\delta}} < |z| \leq 1, \\ \frac{2^{n-1}}{3(n-1)|z|^{n-1}} \delta^3, & |z| \geq 1, \end{cases}$$

а из леммы 7 неравенство

$$\left| \int_0^{\delta} \tilde{g}_2(p; z) p dp \right| \leq \begin{cases} \frac{2}{3|z|} \delta^3, & \frac{1-\delta}{2} \leq |z| \leq \frac{1+\delta}{2} \text{ или } \frac{2}{1+\delta} \leq |z| \leq \frac{2}{1-\delta}, \\ 0, & \text{для остальных } z. \end{cases}$$

Таким образом, ввиду (18), получаем (4) и (5). Выражение для $g_2(z)$ следует из определения (17) области $\mathcal{G}_2(0; z)$. Теорема 2 доказана.

Доказательство следствия. Из теорем 1 и 2, а именно из (1) и (3), получаем

$$\Psi_n(Q, Q\delta, I) = \frac{Q^{n+1}\delta^2}{2\zeta(n+1)} \left[\int_I g_n(z) dz + \delta \int_I h_n(\delta; z) dz + \theta_1 \tilde{C}'_n \frac{\ln^{1\{n=2\}} Q}{Q\delta^2} \right],$$

где $|\theta_1| \leq 1$ и $\tilde{C}'_n := 2\zeta(n+1)C'_n$. Согласно (4) и (5) при $n \geq 2$ и $0 < \delta \leq 1/2$ существует положительная постоянная $\tilde{C}''_n$, зависящая только от n , такая что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h_n(\delta; z)| dz \leq \tilde{C}''_n < +\infty.$$

Следовательно,

$$\Psi_n(Q, Q\delta, I) = \frac{Q^{n+1}\delta^2}{2\zeta(n+1)} \left[\int_I g_n(z) dz + \theta_2 \tilde{C}''_n \delta + \theta_1 \tilde{C}'_n \frac{\ln^{1\{n=2\}} Q}{Q\delta^2} \right],$$

где $|\theta_2| \leq 1$. Функция $g_n(z)$ положительна для всех z , поскольку равна объему выпуклой области $\mathcal{G}_n(0; z)$. Поэтому $\int_I g_n(z) dz > 0$ для любого промежутка $I \subseteq \mathbb{R}$. Таким образом, если δ зависит от Q и

$$\lim_{Q \rightarrow +\infty} \delta = 0, \quad \lim_{Q \rightarrow +\infty} \frac{\ln^{1\{n=2\}} Q}{Q\delta^2} = 0,$$

тогда для любого фиксированного промежутка I при $Q \rightarrow +\infty$ имеем

$$\Psi_n(Q, Q\delta, I) \sim \frac{Q^{n+1}\delta^2}{2\zeta(n+1)} \int_I g_n(z) dz.$$

Подставляя $\delta = X/Q$, получаем следствие.

Заключение. Установлен асимптотический вид зависимости количества алгебраических чисел фиксированной степени, лежащих в заданном интервале I , от верхней границы их высот Q , верхней границы X даваемых ими абсолютных значений производной их минимального многочлена и от самого интервала I . В рамках использованных подходов найден диапазон значений параметра X , в котором из этой зависимости можно извлечь точную асимптотику. Показано, что для упомянутого диапазона значений X такие алгебраические числа распределены равномерно на отрезке $[-1 + \sqrt{2/3}, 1 - \sqrt{2/3}]$ в пределе при $Q \rightarrow +\infty$.

Список использованных источников

1. Baker, R. C. Sprindzuk's theorem and Hausdorff dimension / R. C. Baker // *Mathematika*. – 1976. – Vol. 23, № 2. – P. 184–197. <https://doi.org/10.1112/s0025579300008780>
2. Берник, В. И. О числе целочисленных многочленов заданной степени и ограниченной высоты с малой производной в корне многочлена / В. И. Берник, Д. В. Васильев, А. С. Кудин // *Тр. Ин-та математики* – 2014. – Т. 22, № 2. – С. 3–8.
3. Кудин, А. С. Об оценке снизу количества целочисленных многочленов заданной степени с малой производной в корне / А. С. Кудин // *Вест. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук*. – 2014. – № 4. – С. 112–115.
4. Кудин, А. С. Об оценке сверху количества многочленов с ограниченной производной в корне / А. С. Кудин // *Докл. Нац. акад. наук Беларуси*. – 2015. – Т. 59, № 6. – С. 18–23.

5. Kudin, A. Counting real algebraic numbers with bounded derivative of minimal polynomial / A. Kudin, D. Vasilyev // *Int. J. Number Theory*. – 2019. – Vol. 15, № 10. – P. 2223–2239. <https://doi.org/10.1142/s1793042119501227>
6. Васильев, Д. В. Об оценках сверху числа минимальных полиномов с малой производной в корне / Д. В. Васильев, А. С. Кудин // *Чебышев. сб.* – 2019. – Т. 20, № 2. – С. 47–54. <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2019-20-2-47-54>
7. Koleda, D. On the density function of the distribution of real algebraic numbers / D. Koleda // *J. Théor. Nombres Bordeaux*. – 2017. – Vol. 29, № 1. – P. 179–200. <https://doi.org/10.5802/jtnb.975>
8. van der Waerden, B. L. Die Seltenheit der reduziblen Gleichungen und der Gleichungen mit Affekt / B. L. van der Waerden // *Monatsh. Math. Phys.* – 1936. – Vol. 43, № 1. – P. 133–147. <https://doi.org/10.1007/bf01707594>
9. Kuba, G. On the distribution of reducible polynomials / G. Kuba // *Math. Slovaca*. – 2009. – Vol. 59, № 3. – P. 349–356. <https://doi.org/10.2478/s12175-009-0131-6>
10. Dubickas, A. On the number of reducible polynomials of bounded naive height / A. Dubickas // *Manuscripta Math.* – 2014. – Vol. 144, № 3/4. – P. 439–456. <https://doi.org/10.1007/s00229-014-0657-y>
11. Davenport, H. On a principle of Lipschitz / H. Davenport // *J. London Math. Soc.* – 1951. – Vol. s1-26, № 3. – P. 179–183. <https://doi.org/10.1112/jlms/s1-26.3.179> (Davenport, H. Corrigendum: «On a principle of Lipschitz» / H. Davenport // *J. London Math. Soc.* – 1964. – Vol. s1-39, № 1. – P. 580. <https://doi.org/10.1112/jlms/s1-39.1.580-t>)
12. Коледа, Д. В. О распределении вещественных алгебраических чисел равной высоты / Д. В. Коледа // *Дальневост. мат. журн.* – 2018. – Вып. 1. – С. 56–70.

References

1. Baker R. C. Sprindzuk's theorem and Hausdorff dimension. *Mathematika*, 1976, vol. 23, no. 2, pp. 184–197. <https://doi.org/10.1112/s0025579300008780>
2. Bernik V. I., Vasiliev D. V., Kudin A. S. On the number of integral polynomials of given degree and bounded height with small value of derivative at root of polynomial. *Trudy Instituta matematiki* [Proceedings of the Institute of Mathematics], 2014, vol. 22, no. 2, pp. 3–8 (in Russian).
3. Kudin A. Lower bound of the number of integral polynomials of a given degree with a small value of the derivative at the root. *Vestsi Natsyianal'noi akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2014, no. 4, pp. 112–115 (in Russian).
4. Kudin A. S. On an upper bound on the number of polynomials with a bounded derivative at the root. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2015, vol. 59, no. 6, pp. 18–23 (in Russian).
5. Kudin A., Vasilyev D. Counting real algebraic numbers with bounded derivative of minimal polynomial. *International Journal of Number Theory*, 2019, vol. 15, no. 10, pp. 2223–2239. <https://doi.org/10.1142/s1793042119501227>
6. Vasil'ev D. V., Kudin A. S. On upper bounds for the number of minimal polynomials with a small derivative at a root. *Chebyshevskii sbornik*, 2019, vol. 20, no. 2, pp. 47–54 (in Russian). <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2019-20-2-47-54>
7. Koleda D. On the density function of the distribution of real algebraic numbers. *Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux*, 2017, vol. 29, no. 1, pp. 179–200. <https://doi.org/10.5802/jtnb.975>
8. van der Waerden B. L. Die Seltenheit der reduziblen Gleichungen und der Gleichungen mit Affekt. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 1936, vol. 43, no. 1, pp. 133–147 (in German). <https://doi.org/10.1007/bf01707594>
9. Kuba G. On the distribution of reducible polynomials. *Mathematica Slovaca*, 2009, vol. 59, no. 3, pp. 349–356. <https://doi.org/10.2478/s12175-009-0131-6>
10. Dubickas A. On the number of reducible polynomials of bounded naive height. *Manuscripta Mathematica*, 2014, vol. 144, no. 3–4, pp. 439–456. <https://doi.org/10.1007/s00229-014-0657-y>
11. Davenport H. On a principle of Lipschitz. *Journal of the London Mathematical Society*, 1951, vol. s1-26, no. 3, pp. 179–183. <https://doi.org/10.1112/jlms/s1-26.3.179> (Davenport H. Corrigendum: On a principle of Lipschitz. *Journal of the London Mathematical Society*, 1964, vol. s1-39, no. 1, p. 580. <https://doi.org/10.1112/jlms/s1-39.1.580-t>)
12. Koleda D. V. On the distribution of real algebraic numbers of equal height. *Dal'nevostochnyi matematicheskii zhurnal = Far Eastern Mathematical Journal*, 2018, no. 1, pp. 56–70 (in Russian).

Информация об авторе

Коледа Денис Владимирович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник отдела теории чисел, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: koledad@rambler.ru

Information about the author

Denis V. Koleda – Ph. D. (Physics and Mathematics), Senior Researcher of the Department of Number Theory, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: koledad@rambler.ru

ISSN 1561-2430 (Print)

ISSN 2524-2415 (Online)

УДК 517.954

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-2-148-155>

Поступила в редакцию 30.03.2021

Received 30.03.2021

В. И. Корзюк^{1,2}, О. А. Ковнацкая¹

¹*Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь*

²*Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь*

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С УСЛОВИЯМИ НА ХАРАКТЕРИСТИКАХ

Аннотация. Получено классическое решение одномерного волнового уравнения с условиями на характеристиках для разных областей, в которых рассмотрены эти задачи. Аналитическое решение строится методом характеристик. Кроме этого, доказана и единственность полученного решения. Доказаны необходимость и достаточность условий согласования для заданных функций задачи, при выполнении которых классическое решение существует при наличии гладкости заданных функций.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с частными производными, гиперболические уравнения, задача Гурса, условия согласования, классическое решение, метод характеристик

Для цитирования. Корзюк, В. И. Решения задач для волнового уравнения с условиями на характеристиках / В. И. Корзюк, О. А. Ковнацкая // Вест. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2021. – Т. 57, № 2. – С. 148–155. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-2-148-155>

Viktor I. Korzyuk^{1,2}, Olga A. Kovnatskaya¹

¹*Belarusian State University, Minsk, Belarus*

²*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus*

SOLUTIONS OF PROBLEMS FOR THE WAVE EQUATION WITH CONDITIONS ON THE CHARACTERISTICS

Abstract. In this paper we obtain a classical solution of the one-dimensional wave equation with conditions on the characteristics for different areas this problem is considered in. The analytical solution is constructed by the method of characteristics. In addition, the uniqueness of the obtained solution is proved. The necessity and sufficiency of the matching conditions for given functions of the problem are proved. When these conditions are satisfied and the given functions are smooth enough, the classical solution of the considered problem exists.

Keywords: partial differential equations, hyperbolic equations, Goursat problem, agreement condition, classical solution, method of characteristics

For citation: Korzyuk V. I., Kovnatskaya O. A. Solutions of problems for the wave equation with conditions on the characteristics. *Vesti Natsyional'noi akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2021, vol. 57, no. 2, pp. 148–155 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-2-148-155>

Введение. Задача с условиями на характеристиках для гиперболических уравнений рассматривалась и ранее [1–6, 8]. В [7, 8] с помощью методов функционального анализа и операторов осреднения с переменным шагом доказаны теоремы существования и единственности сильного решения задачи Коши и Гурса для гиперболических уравнений. В [8] методом последовательных приближений получено классическое решение для гиперболического уравнения, записанного во втором каноническом виде в случае двух независимых переменных. Однако здесь не исследована зависимость гладкости решения от заданных функций в точках их соприкосновения, как это сделано для других задач в случае нахождения классических решений [8–12].

Наша цель состоит в том, чтобы найти классическое решение рассматриваемых здесь задач Гурса и доказать необходимые и достаточные условия согласования для заданных функций помимо их гладкости, чтобы решение было классическим. Кроме того, изучается классическое решение задачи для одномерного волнового уравнения, которое задано на всей плоскости.

1. Задача Г-1. На плоскости $\mathbb{R}^2$ переменных $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ рассмотрим область Q , которая находится между прямыми $x_2 = \pm ax_1$, $a > 0$, для $x_1 > 0$ (рис. 1). Заметим, что линии $x_2 = \pm ax_1$ являются характеристиками одномерного волнового уравнения

$$\mathcal{L}u = (\partial_{x_1}^2 u - a^2 \partial_{x_2}^2 u)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad (1)$$

где $\partial_{x_j}^2$ – операторы дифференцирования второго порядка по переменным x_j , $j = 1, 2$.

Формулировка задачи Г-1. Найти решение $u: \mathbf{x} \rightarrow u(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ в области Q уравнения (1), которое на характеристиках $x_2 = \pm ax_1$, $x_1 > 0$, удовлетворяет граничным условиям

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2 = ax_1) &= \varphi^{(1)}(x_1), \quad x_1 > 0, \\ u(x_1, x_2 = -ax_1) &= \varphi^{(2)}(x_1), \quad x_1 > 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Обозначим через $\bar{Q}$ замыкание области Q . Находить решение задачи (1), (2) будем из класса дважды непрерывно дифференцируемых функций $C^2(\bar{Q})$, которое удовлетворяет уравнению (1) и условиям (2). Чтобы искомая функция u была из $C^2(\bar{Q})$, необходимо потребовать достаточные условия гладкости заданных функций f и $\varphi^{(j)}$, $j = 1, 2$, а также определить необходимые и достаточные условия согласования на функции f , $\varphi^{(j)}$ в точке $O = (0, 0) = (x_1 = 0, x_2 = 0)$.

Решение задачи Г-1. Предположим, что функции f и $\varphi^{(j)}$ ($j = 1, 2$) достаточно гладкие, гладкость которых уточним ниже.

Решение задачи Г-1 будем находить из общего решения уравнения (1), которое определяется, как известно [8], в виде суммы общего решения $u^{(0)}$ однородного уравнения (1) и какого-нибудь частного v_p неоднородного уравнения (1), т. е.

$$u(\mathbf{x}) = u^{(0)}(\mathbf{x}) + v_p(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \bar{Q}, \quad (3)$$

где

$$u^{(0)}(\mathbf{x}) = g^{(1)}(x_2 - ax_1) + g^{(2)}(x_2 + ax_1),$$

произвольные функции $g^{(j)}$ ($j = 1, 2$), определенные на $\mathbb{R}$, из класса C^2 . Если $\mathbf{x} \in \bar{Q}$, то области определения $\mathcal{D}(g^{(1)}) = (-\infty, 0]$, $\mathcal{D}(g^{(2)}) = [0, \infty)$ и $(x_2 - ax_1) \in \mathcal{D}(g^{(1)})$, $(x_2 + ax_1) \in \mathcal{D}(g^{(2)})$.

Из условий Гурса (2) следует необходимое и достаточное условие согласования

$$\varphi^{(1)}(0) = \varphi^{(2)}(0), \quad (4)$$

чтобы решение задачи Г-1 было из класса непрерывных функций $C(\bar{Q})$.

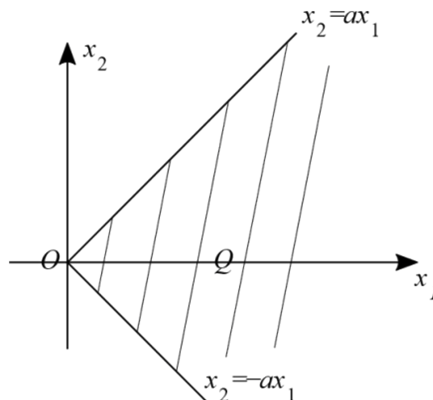


Рис. 1

Fig. 1

Интегрируя уравнение (1) [8], представим общее решение его в виде

$$u(\mathbf{x}) = g^{(1)}(x_2 - ax_1) + g^{(2)}(x_2 + ax_1) - \frac{1}{4a^2} \int_0^{x_2 - ax_1} dy \int_0^{x_2 + ax_1} f\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right) dz. \quad (5)$$

Здесь частное решение v_p определяется формулой

$$v_p(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4a^2} \int_0^{x_2 - ax_1} dy \int_0^{x_2 + ax_1} f\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right) dz. \quad (6)$$

Из формулы (6) следует: если $f \in C^1(\bar{Q})$, то $v_p \in C^2(\bar{Q})$ и

$$v_p|_{x \in \partial\bar{Q}} = 0, \quad (7)$$

т. е. значение функции v_p равно нулю на всей границе ∂Q области $\bar{Q}$.

Общее решение u уравнения (1), представленное формулой (5), удовлетворяем условиям Гурса (2). В результате получим соотношения

$$\begin{aligned} u(x_1, 2ax_1) &= g^{(1)}(0) + g^{(2)}(2ax_1) = \varphi^{(1)}(x_1), \quad x_1 > 0, \\ u(x_1, 0) &= g^{(1)}(-2ax_1) + g^{(2)}(0) = \varphi^{(2)}(x_1), \quad x_1 > 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Из системы (8) находим значения $g^{(j)}(z)$, $j = 1, 2$, функций $g^{(j)}$ на областях определения их $\mathcal{D}(g^{(j)})$. Полученные соотношения подставляем в представление (5). В результате, учитывая условие (4), получаем решение задачи (1), (2), которое определяется формулой

$$u(\mathbf{x}) = \varphi^{(1)}\left(\frac{x_2 + ax_1}{2a}\right) + \varphi^{(2)}\left(\frac{ax_1 - x_2}{2a}\right) - \varphi^{(1)}(0) - \frac{1}{4a^2} \int_0^{x_2 - ax_1} dy \int_0^{x_2 + ax_1} f\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right) dz, \quad \mathbf{x} \in \bar{Q}. \quad (9)$$

Предполагаем, что $\varphi^{(j)} \in C^2([0, \infty))$, $j = 1, 2$, $f \in C^1(\bar{Q})$. При указанных условиях гладкости на заданные функции задачи (1), (2) формула (9) представляет собой функцию из класса $C^2(\bar{Q})$, является решением уравнения (1) и удовлетворяет условиям (2).

Действительно, вычислим частные производные по x_1 и x_2 первого и второго порядков на множестве $\bar{Q}$. В результате получим соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_1} &= \frac{1}{2} d\varphi^{(1)}\left(\frac{x_2 + ax_1}{2a}\right) + \frac{1}{2} d\varphi^{(2)}\left(\frac{ax_1 - x_2}{2a}\right) + \\ &+ \frac{1}{4a} \int_0^{x_2 + ax_1} f\left(\frac{z - (x_2 - ax_1)}{2a}, \frac{z + (x_2 - ax_1)}{2}\right) dz - \frac{1}{4a} \int_0^{x_2 - ax_1} f\left(\frac{(x_2 + ax_1) - y}{2a}, \frac{(x_2 + ax_1) + y}{2}\right) dy, \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} &= \frac{1}{2a} d\varphi^{(1)}\left(\frac{x_2 + ax_1}{2a}\right) - \frac{1}{2a} d\varphi^{(2)}\left(\frac{ax_1 - x_2}{2a}\right) - \\ &- \frac{1}{4a^2} \int_0^{x_2 + ax_1} f\left(\frac{z - (x_2 - ax_1)}{2a}, \frac{z + (x_2 - ax_1)}{2}\right) dz - \frac{1}{4a^2} \int_0^{x_2 - ax_1} f\left(\frac{(x_2 + ax_1) - y}{2a}, \frac{(x_2 + ax_1) + y}{2}\right) dy, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} &= \frac{1}{4} d^2\varphi^{(1)}\left(\frac{x_2 + ax_1}{2a}\right) + \frac{1}{4} d\varphi^{(2)}\left(\frac{ax_1 - x_2}{2a}\right) + \frac{1}{2} f(x_1, x_2) + \\ &+ \frac{1}{4a} \int_0^{x_2 + ax_1} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y_1} \left(\frac{z - (x_2 - ax_1)}{2a}, \frac{z + (x_2 - ax_1)}{2} \right) - \frac{a}{2} \frac{\partial f}{\partial y_2} \left(\frac{z - (x_2 - ax_1)}{2a}, \frac{z + (x_2 - ax_1)}{2} \right) \right) dz - \\ &- \frac{1}{4a} \int_0^{x_2 - ax_1} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y_1} \left(\frac{(x_2 + ax_1) - y}{2a}, \frac{(x_2 + ax_1) + y}{2} \right) + \frac{a}{2} \frac{\partial f}{\partial y_2} \left(\frac{(x_2 + ax_1) - y}{2a}, \frac{(x_2 + ax_1) + y}{2} \right) \right) dy, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{1}{4a} d^2 \varphi^{(1)} \left(\frac{x_2 + ax_1}{2a} \right) + \frac{1}{4a} d \varphi^{(2)} \left(\frac{ax_1 - x_2}{2a} \right) + \\
&+ \frac{1}{4a} \int_0^{x_2 + ax_1} \left(\left(-\frac{1}{2a} \right) \frac{\partial f}{\partial y_1} \left(\frac{z - (x_2 - ax_1)}{2a}, \frac{z + (x_2 - ax_1)}{2} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y_2} \left(\frac{z - (x_2 - ax_1)}{2a}, \frac{z + (x_2 - ax_1)}{2} \right) \right) dz - \\
&- \frac{1}{4a} \int_0^{x_2 - ax_1} \left(\frac{1}{2a} \frac{\partial f}{\partial y_1} \left(\frac{(x_2 + ax_1) - y}{2a}, \frac{(x_2 + ax_1) + y}{2} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y_2} \left(\frac{(x_2 + ax_1) - y}{2a}, \frac{(x_2 + ax_1) + y}{2} \right) \right) dy, \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} &= \frac{1}{4a^2} d^2 \varphi^{(1)} \left(\frac{x_2 + ax_1}{2a} \right) + \frac{1}{4a^2} d \varphi^{(2)} \left(\frac{ax_1 - x_2}{2a} \right) + \frac{1}{2a^2} f(x_1, x_2) - \\
&- \frac{1}{4a^2} \int_0^{x_2 + ax_1} \left(\left(-\frac{1}{2a} \right) \frac{\partial f}{\partial y_1} \left(\frac{z - (x_2 - ax_1)}{2a}, \frac{z + (x_2 - ax_1)}{2} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y_2} \left(\frac{z - (x_2 - ax_1)}{2a}, \frac{z + (x_2 - ax_1)}{2} \right) \right) dz - \\
&- \frac{1}{4a^2} \int_0^{x_2 - ax_1} \left(\frac{1}{2a} \frac{\partial f}{\partial y_1} \left(\frac{(x_2 + ax_1) - y}{2a}, \frac{(x_2 + ax_1) + y}{2} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y_2} \left(\frac{(x_2 + ax_1) - y}{2a}, \frac{(x_2 + ax_1) + y}{2} \right) \right) dy.
\end{aligned} \tag{11}$$

Из формул (10) и (11) видно, что они представляют собой функции из класса $C(\bar{Q})$. Производные второго порядка (11) удовлетворяют уравнению (1), функция (9) удовлетворяет условиям (2) при выполнении условия согласования (4).

Кроме того, из представления функции (9) и ее производных (10), (11) следует, что только условие (4) является единственным необходимым и достаточным условием согласования для того, чтобы решение (9) было из класса $C^2(\bar{Q})$ задачи (1), (2), если $\varphi^{(j)} \in C^2([0, \infty))$, $j = 1, 2$; $f \in C^1(\bar{Q})$.

Теорема 1. Пусть функции $\varphi^{(j)} \in C^2([0, \infty))$, $j = 1, 2$; $f \in C^1(\bar{Q})$. Тогда функция (9) есть функция из класса $C^2(\bar{Q})$ и является единственным решением задачи (1), (2) тогда и только тогда, когда выполняется условие (4).

Доказательство следует из предыдущих рассуждений. Единственность доказывается методом от противного. Для разности двух решений получаем однородное уравнение (1) и однородные условия (2), из которых, согласно (9), следует только нулевое решение. Теорема 1 доказана.

2. Задача Г-2. На плоскости $\mathbb{R}^2$ переменных $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ рассмотрим область $Q^{(2)}$, представленную на рис. 2, границей которой является характеристика $x_2 + ax_1 = 0$, $a > 0$, и точки $\mathbf{x}$ плоскости $\mathbb{R}^2$ принадлежат $Q^{(2)}$, если $x_2 + ax_1 > 0$.

Задача Г-2 состоит в том, что уравнение (1) задается на замыкании $\overline{Q^{(2)}}$ области $Q^{(2)}$, а решение его удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned}
u(x_1, x_2 = ax_1) &= \varphi^{(1)}(x_1), \quad x_1 \in [0, \infty), \\
u(x_1, x_2 = -ax_1) &= \varphi^{(2)}(x_1), \quad x_1 \in \mathbb{R}.
\end{aligned} \tag{12}$$

Формулировка задачи Г-2. Найти решение $u: \mathbf{x} \rightarrow u(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ на $\overline{Q^{(2)}}$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям (12).

Решение задачи Г-2. Для нахождения решения задачи Г-2 будем использовать представление (5) решения уравнения (1) и на множестве $\overline{Q^{(2)}}$. Удовлетворяя соотношению (5) условиям (12), получим

$$\begin{aligned}
u(x_1, x_2 = ax_1) &= g^{(1)}(0) + g^{(2)}(2ax_1) = \varphi^{(1)}(x_1), \quad x_1 \in [0, \infty), \\
u(x_1, x_2 = -ax_1) &= g^{(1)}(-2ax_1) + g^{(2)}(0) = \varphi^{(2)}(x_1), \quad x_1 \in \mathbb{R}.
\end{aligned} \tag{13}$$

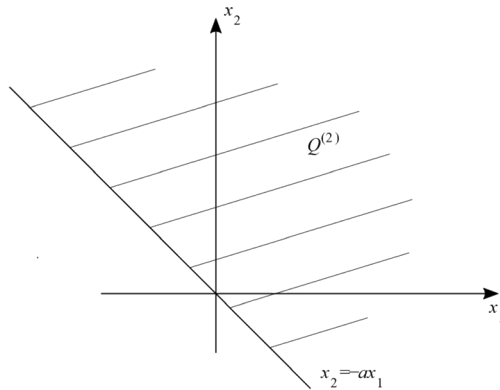


Рис. 2

Fig. 2

Из соотношений (13) имеем

$$\begin{aligned} g^{(1)}(x_2 - ax_1) &= \varphi^{(2)}\left(\frac{ax_1 - x_2}{2a}\right) - g^{(2)}(0), \\ g^{(2)}(x_2 + ax_1) &= \varphi^{(1)}\left(\frac{x_2 + ax_1}{2a}\right) - g^{(1)}(0), \quad x \in \overline{Q^{(2)}}. \end{aligned} \quad (14)$$

Из этих же соотношений имеем

$$g^{(1)}(0) + g^{(2)}(0) = \varphi^{(1)}(0). \quad (15)$$

Определенные значения функций $g^{(j)}, j = 1, 2$, по формулам (14) и (15) подставляем в (5). В результате получаем решение

$$u(x) = \varphi^{(1)}\left(\frac{x_2 + ax_1}{2a}\right) + \varphi^{(2)}\left(\frac{ax_1 - x_2}{2a}\right) - \varphi^{(1)}(0) - \frac{1}{4a^2} \int_0^{x_2 - ax_1} dy \int_0^{x_2 + ax_1} f\left(\frac{z - y}{2a}, \frac{z + y}{2}\right) dz, \quad x \in \overline{Q^{(2)}} \quad (16)$$

задачи Г-2.

Из условий (12) следует условие согласования

$$\varphi^{(1)}(0) = \varphi^{(2)}(0), \quad (17)$$

чтобы решение (16) задачи (1), (12) принадлежало классу $C(\overline{Q^{(2)}})$.

Для задачи Г-2 справедлива

Теорема 2. Пусть функции $\varphi^{(1)} \in C^2([0, \infty))$, $\varphi^{(2)} \in C^2(\mathbb{R})$, $f \in C^1(\overline{Q^{(2)}})$. Функция (16) есть функция из класса $C^2(\overline{Q^{(2)}})$ и является единственным решением задачи (1), (12) тогда и только тогда, когда выполняется условие (17).

Доказательство. Если выполнены условия теоремы гладкости заданных функций задачи Г-2, то формула (16) представляет собой функцию из класса $C^2(\overline{Q^{(2)}})$. Путем вычисления первых и вторых производных этой функции (формулы, аналогичные формулам (10), (11)) можно убедиться, что они являются непрерывными на множестве $\overline{Q^{(2)}}$ и функция (16) удовлетворяет уравнению (1) и условиям (12) при выполнении условия согласования (17). Кроме того, из формул (16) и (10), (11) следует, что только условие (17) является единственным необходимым и достаточным условием согласования для того, чтобы решение (16) было из класса $C^2(\overline{Q^{(2)}})$ задачи (1), (12), если $\varphi^{(1)} \in C^2([0, \infty))$, $\varphi^{(2)} \in C^2(\mathbb{R})$, $f \in C^1(\overline{Q^{(2)}})$.

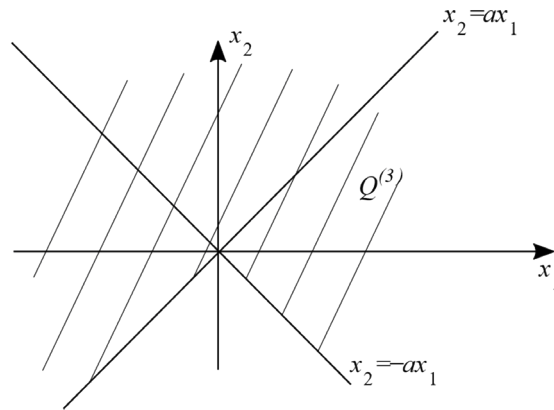


Рис. 3

Fig. 3

Единственность доказывается аналогично тому, как это было сделано при доказательстве теоремы 1. Теорема 2 доказана.

3. Задача Г-3. На плоскости $\mathbb{R}^2$ переменных $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ рассмотрим область $Q^{(3)}$, представленную на рис. 3, границей которой являются характеристики $x_2 - ax_1 = 0$, $a > 0$, для $x_1 < 0$ и $x_2 + ax_1 = 0$ для $x_1 > 0$, и области $Q^{(3)}$ принадлежат все точки, кроме тех точек $\mathbf{x}$ плоскости $\mathbb{R}^2$, для которых $x_2 \pm ax_1 < 0$.

Формулировка задачи Г-3. Найти решение $u : \mathbf{x} \rightarrow u(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ на $\overline{Q^{(3)}}$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2 = ax_1) &= \varphi^{(1)}(x_1), \quad x_1 \in \mathbb{R}, \\ u(x_1, x_2 = -ax_1) &= \varphi^{(2)}(x_1), \quad x_1 \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (18)$$

Решение задачи Г-3. Решение задачи Г-3 будем искать подобно тому, как это было сделано для задач Г-1 и Г-2. Интегрируя уравнение (1) и удовлетворяя полученное общее решение условиям (18), получим его решение в виде

$$u(\mathbf{x}) = \varphi^{(1)}\left(\frac{x_2 + ax_1}{2a}\right) + \varphi^{(2)}\left(\frac{ax_1 - x_2}{2a}\right) - \varphi^{(1)}(0) - \frac{1}{4a^2} \int_0^{x_2 - ax_1} dy \int_0^{x_2 + ax_1} f\left(\frac{z - y}{2a}, \frac{z + y}{2}\right) dz, \quad (19)$$

а также условие согласования

$$\varphi^{(1)}(0) = \varphi^{(2)}(0). \quad (20)$$

При достаточной гладкости функций f и $\varphi^{(j)}$ ($j = 1, 2$) (см. теорему 3) условие (20) является необходимым и достаточным для того, чтобы решение (19) было из класса $C^2(\mathbb{R}^2)$. Таким образом, для задачи Г-3 справедлива

Теорема 3. Пусть функции $\varphi^{(j)} \in C^2(\mathbb{R})$, $j = 1, 2$; $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. В этом случае гладкости заданных функций функция (19) есть функция из класса $C^2(\overline{Q^{(3)}})$ и является единственным решением задачи (1), (18) тогда и только тогда, когда выполняется условие (20).

Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теорем 1 и 2.

4. Задача Г-4. Рассмотрим уравнение (1) на всей плоскости $\mathbb{R}^2$ вещественных переменных $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ (рис. 4). На характеристиках $x_2 = \pm ax_1$, $a > 0$, уравнения (1) зададим условия

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2 = ax_1) &= \varphi^{(1)}(x_1), \quad x_1 \in \mathbb{R}, \\ u(x_1, x_2 = -ax_1) &= \varphi^{(2)}(x_1), \quad x_1 \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (21)$$

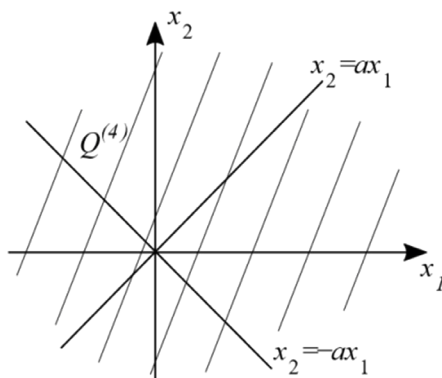


Рис. 4

Fig. 4

Формулировка задачи Г-4. Задача Г-4 состоит в том, чтобы найти решение $u: \mathbf{x} \rightarrow u(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ уравнения (1) на всей плоскости $\mathbb{R}^2$, удовлетворяющее условиям (21).

Решение задачи Г-4. Интегрируя уравнение (1) и удовлетворяя полученное общее решение условиям (21), получим его решение в виде

$$u(\mathbf{x}) = \varphi^{(1)}\left(\frac{x_2 + ax_1}{2a}\right) + \varphi^{(2)}\left(\frac{ax_1 - x_2}{2a}\right) - \varphi^{(1)}(0) - \frac{1}{4a^2} \int_0^{x_2 - ax_1} dy \int_0^{x_2 + ax_1} f\left(\frac{z - y}{2a}, \frac{z + y}{2}\right) dz, \quad (22)$$

а также условие согласования

$$\varphi^{(1)}(0) = \varphi^{(2)}(0). \quad (23)$$

Далее аналогично теоремам 1 и 2 доказываем теорему 4.

Теорема 4. Пусть функции $\varphi^{(j)} \in C^2(\mathbb{R})$, $j = 1, 2$; $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. При указанных условиях гладкости заданных функций f , $\varphi^{(j)}$, $j = 1, 2$, функция (22) есть функция из класса $C^2(\mathbb{R}^2)$ и является единственным решением задачи (1), (21) тогда и только тогда, когда выполняется условие (23).

Заключение. Таким образом, получены формулы классических решений задач для одномерного волнового уравнения с условиями на характеристиках. Доказано, что эти задачи имеют единственное решение тогда и только тогда, когда выполняются в угловых точках заданной области изменения независимых переменных условия согласования для заданных функций уравнения и условий. Следует отметить, что эти условия являются необходимыми и достаточными.

Особый интерес представляет задача Г-4, где волновое уравнение задано на всей плоскости.

Список использованных источников

1. Корзюк, В. И. Задача Гурса для уравнения четвертого порядка с биволновым оператором / В. И. Корзюк, Е. С. Чеб // Дифференц. уравнения. – 2009. – Т. 45, № 10. – С. 1435–1440.
2. Андреев, А. А. Задача типа Гурса для гиперболического уравнения и для одной системы гиперболических уравнений третьего порядка / А. А. Андреев, Ю. О. Яковлева // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер.: физ.-мат. науки. – 2019. – Т. 23, № 1. – С. 186–194.
3. Карачик, В. В. Задачи Коши и Гурса для уравнения 3-го порядка / В. В. Карачик // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Математика. Механика. Физика. – 2015. – Т. 7, № 2. – С. 31–43.
4. Аттаев, А. Х. Характеристическая задача для нагруженного вдоль одной из своих характеристик гиперболического уравнения второго порядка / А. Х. Аттаев // Вестн. КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. – 2018. – № 3. – С. 14–18. <https://doi.org/10.18454/2079-6641-2018-23-3-14-18>
5. Асанова, А. Т. Нелокальная задача с интегральными условиями для системы гиперболических уравнений в характеристическом прямоугольнике / А. Т. Асанова // Изв. вузов. Математика. – 2017. – № 5. – С. 11–25.
6. Кечина, О. М. О разрешимости нелокальной задачи для уравнения третьего порядка / О. М. Кечина // Вестн. Самар. ун-та. Естеств.-науч. сер. – 2017. – Т. 23, № 1. – С. 15–20.
7. Корзюк, В. И. Метод энергетических неравенств и операторов осреднения. Граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными / В. И. Корзюк. – Минск: Изд. центр БГУ, 2013. – 460 с.

8. Корзюк, В. И. Уравнения математической физики / В. И. Корзюк. – М.: Ленанд, 2021. – 480 с.
9. Корзюк, В. И. Классическое решение первой смешанной задачи для гиперболического уравнения третьего порядка с волновым оператором / В. И. Корзюк, А. А. Мандрик // Дифференц. уравнения. – 2014. – Т. 50, № 4. – С. 492–504.
10. Корзюк, В. И. Классическое решение задачи с интегральным условием для одномерного биволнового уравнения / В. И. Корзюк, Нгуен Ван Винь // Вест. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2016. – № 3. – С. 16–29.
11. Корзюк, В. И. Классическое решение смешанной задачи для уравнения типа Клейна – Гордона – Фока с характеристическими косыми производными в граничных условиях / В. И. Корзюк, И. И. Столярчук // Вест. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2019. – Т. 55, № 1. – С. 7–21. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-1-7-21>
12. Корзюк, В. И. Классическое решение в криволинейной полуполосе первой смешанной задачи для волнового уравнения / В. И. Корзюк, И. С. Козловская, С. Н. Наумовец // Дифференц. уравнения. – 2020. – Т. 56, № 1. – С. 99–109.

References

1. Korzyuk V. I., Cheb E. S. Goursat problem for a fourth-order equation with the biwave operator. *Differential Equations*, 2009, vol. 45, no. 10, pp. 1467–1472. <https://doi.org/10.1134/s0012266109100097>
2. Andreev A. A., Yakovleva J. O. The Goursat-type problem for a hyperbolic equation and system of third order hyperbolic equations. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: fiziko-matematicheskie nauki = Journal of Samara State Technical University, Series Physical and Mathematical Sciences*, 2019, vol. 23, no. 1, pp. 186–194 (in Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1666>.
3. Karachik V. V. Cauchy and Goursat problems for differential equation of third order. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya Matematika. Mekhanika. Fizika = Bulletin of the South Ural State University. Series Mathematics. Mechanics. Physics*, 2015, vol. 7, no. 2, pp. 31–43 (in Russian).
4. Attaev A. Kh. The characteristic problem for the second-order hyperbolic equation loaded along one of its characteristics. *Vestnik KRAUNTs. Fiziko-matematicheskie nauki = Bulletin of KRAESC. Physical & Mathematical Sciences*, 2018, no. 3, pp. 14–18 (in Russian). <https://doi.org/10.18454/2079-6641-2018-23-3-14-18>
5. Assanova A. T. Nonlocal problem with integral conditions for a system of hyperbolic equations in characteristic rectangle. *Russian Mathematics*, 2017, vol. 61, no. 5, pp. 7–20. <https://doi.org/10.3103%2FS1066369X17050024>
6. Ketchina O. M. On solvability of nonlocal problem for third-order equation. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvenno-nauchnaya seriya = Samara University Bulletin. Natural Science Series*, 2017, vol. 23, no. 1, pp. 15–20 (in Russian).
7. Korzyuk V. I. *Method of energy inequalities and averaging operators. Boundary value problems for partial differential equations*. Minsk, BSU Publ. Center, 2013, 460 p. (in Russian).
8. Korzyuk V. I. *Equations of mathematical physics*. Moscow, Lenand Publ., 2021, 480 p. (in Russian).
9. Korzyuk V. I., Mandrik A. A. Classical solution of the first mixed problem for a third-order hyperbolic equation with the wave operator. *Differential Equations*, 2014, vol. 50, no. 4, pp. 489–201. <https://doi.org/10.1134/s0012266114040077>
10. Korzyuk V. I. Nguyen Van Vinh. Classical solution of a problem with an integral condition for the one-dimensional biwave equation. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2016, no. 3, pp. 16–29 (in Russian).
11. Korzyuk V. I., Stolyarchuk I. I. Classical solution of the mixed problem for the Klein–Gordon–Fock type equation with characteristic oblique derivatives at boundary conditions. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2019, vol. 55, no. 1, pp. 7–21 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-1-7-21>
12. Korzyuk V. I., Kozlovskaya I. S., Naumavets S. N. Classical solution of the first mixed problem for the wave equation in a curvilinear half-strip. *Differential equations*, 2020, vol. 56, no. 1, pp. 98–108. <https://doi.org/10.1134/s0012266120010115>

Информация об авторах

Корзюк Виктор Иванович – академик Национальной академии наук Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Республика Беларусь); Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: korzyuk@bsu.by

Ольга Анатольевна Ковнацкая – кандидат физико-математических наук, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: Kovnatskaya@bsu.by

Information about the authors

Viktor I. Korzyuk – Academician of the National Academy of Sciences of Belarus, Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus); Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: korzyuk@bsu.by

Olga A. Kovnatskaya – Ph. D. (Physics and Mathematics), Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: Kovnatskaya@bsu.by

ISSN 1561-2430 (Print)

ISSN 2524-2415 (Online)

УДК 517.5

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-2-156-175>

Поступила в редакцию 22.03.2021

Received 22.03.2021

П. Г. Поцейко, Е. А. Ровба*Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь***СУММЫ АБЕЛЯ – ПУАССОНА СОПРЯЖЕННЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ – ЧЕБЫШЕВА И ИХ АППРОКСИМАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА**

Аннотация. Изучаются аппроксимационные свойства сумм Абеля – Пуассона рациональных сопряженных рядов Фурье по системе алгебраических дробей Чебышева – Маркова, а также исследуются приближения данным методом сопряженных на отрезке $[-1,1]$ функций с плотностью $|x|^s$, $s \in (1,2)$. Приведены результаты, относящиеся к исследованиям полиномиальных и рациональных приближений сопряженных функций. Проводится построение сопряженного ряда Фурье по одной системе алгебраических дробей Чебышева – Маркова. Устанавливается интегральное представление приближений сопряженных на отрезке $[-1,1]$ функций изучаемым методом, найдены асимптотически точные верхние грани уклонений сопряженных сумм Абеля – Пуассона на классах $\bar{H}^{(\gamma)}[-1,1]$, $\gamma \in (0,1]$, сопряженных функций $\hat{f}$, когда функция f удовлетворяет на отрезке $[-1,1]$ условию Липшица порядка γ , $\gamma \in (0,1]$, а также изучены приближения сопряженными суммами Абеля – Пуассона сопряженных функций с плотностью $|x|^s$, $s \in (1,2)$, на отрезке $[-1,1]$. Получены оценки приближений, асимптотическое выражение мажоранты приближений при $r \rightarrow 1$. Найдено оптимальное значение параметра, при котором обеспечивается наибольшая скорость убывания мажоранты. Как следствие полученных результатов подробно исследована задача приближения сопряженной функции с плотностью $|x|^s$, $s > 0$, суммами Абеля – Пуассона сопряженных полиномиальных рядов по системе многочленов Чебышева первого рода. Установлены оценки приближений, а также асимптотическое выражение мажоранты приближений. Работа носит как теоретический, так и прикладной характер. Возможно применение при чтении спецкурсов на математических факультетах и для решения конкретных задач вычислительной математики.

Ключевые слова: ряд Фурье – Чебышева, сопряженный ряд, суммы Абеля – Пуассона, сопряженная функция, приближения, условие Липшица, асимптотические оценки

Для цитирования. Поцейко, П. Г. Суммы Абеля – Пуассона сопряженных рядов Фурье – Чебышева и их аппроксимационные свойства / П. Г. Поцейко, Е. А. Ровба // Вес. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2021. – Т. 57, № 2. – С. 156–175. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-2-156-175>

Pavel G. Patseika, Yauheni A. Rouba*Yanka Kupala State University of Grodno, Grodno, Belarus***THE ABEL – POISSON MEANS OF CONJUGATE FOURIER – CHEBYSHEV SERIES AND THEIR APPROXIMATION PROPERTIES**

Abstract. Herein, the approximation properties of the Abel – Poisson means of rational conjugate Fourier series on the system of the Chebyshev–Markov algebraic fractions are studied, and the approximations of conjugate functions with density $|x|^s$, $s \in (1,2)$, on the segment $[-1,1]$ by this method are investigated. In the introduction, the results related to the study of the polynomial and rational approximations of conjugate functions are presented. The conjugate Fourier series on one system of the Chebyshev – Markov algebraic fractions is constructed. In the main part of the article, the integral representation of the approximations of conjugate functions on the segment $[-1,1]$ by the method under study is established, the asymptotically exact upper bounds of deviations of conjugate Abel – Poisson means on classes of conjugate functions when the function satisfies the Lipschitz condition on the segment $[-1,1]$ are found, and the approximations of the conjugate Abel – Poisson means of conjugate functions with density $|x|^s$, $s \in (1,2)$, on the segment $[-1,1]$ are studied. Estimates of the approximations are obtained, and the asymptotic expression of the majorant of the approximations in the final part is found. The optimal value of the parameter at which the greatest rate of decreasing the majorant is provided is found. As a consequence of the obtained results, the problem of approximating the conjugate function with density $|x|^s$, $s \in (1,2)$, by the Abel – Poisson means of conjugate polynomial series on the system of Chebyshev polynomials of the first kind is studied in detail. Estimates of the approximations are established, as well as the asymptotic expression of the majorants of the approximations. This work is of both theoretical and applied nature. It can be used when reading special courses at mathematical faculties and for solving specific problems of computational mathematics.

Keywords: Fourier – Chebyshev series, conjugate series, Abel – Poisson sums, conjugate function, approximations, Lipschitz condition, asymptotic estimates

For citation. Patseika P. G., Rouba Y. A. The Abel – Poisson means of conjugate Fourier – Chebyshev series and their approximation properties. *Vestsi Natsyianal'най akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2021, vol. 57, no. 2, pp. 156–175 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-2-156-175>

Введение. Ряд задач математики и физики приводят к интегралам с ядром типа Коши, взятым вдоль отрезка действительной оси, следующего вида:

$$\hat{f}(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(t)}{t-x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad x \in [-1, 1], \quad (1)$$

где интеграл в правой части понимается в смысле главного значения по Коши [1], причем требуется, чтобы функция $f(t)$ удовлетворяла на отрезке $[-1, 1]$ условию Липшица порядка $0 < \gamma \leq 1$ [2, 3].

Преобразование $\hat{f}(x)$ можно также рассматривать как один из вариантов определения сопряженной функции с функцией f , заданной на отрезке $[-1, 1]$. Действительно, пусть функция $f(x)$ суммируема с весом $(1-x^2)^{-1/2}$ на отрезке $[-1, 1]$. Тогда, следуя П. Л. Бутцеру и Р. Л. Штэнсу [4, с. 56], $\hat{f}(x)$ может быть представлена следующим образом:

$$\hat{f}(x) = \lim_{r \rightarrow 1-0} \sum_{n=1}^{+\infty} r^n c_n \sin n \arccos x, \quad c_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(t) T_k(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt, \quad x \in [-1, 1].$$

Заметим, что суперпозиция $\hat{f}(\cos \theta)$ выражается через функцию, тригонометрически сопряженную с индуцированной функцией $f(\cos \theta)$ с помощью сингулярного интеграла с ядром Гильберта

$$\hat{f}(\cos \theta) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\cos \tau) \operatorname{ctg} \frac{\tau - \theta}{2} d\tau, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Этот результат содержится, напр., в [5], см. также лемму 1 из [6].

Задачи, связанные с исследованиями сопряженных функций, отражены в работах математиков по теории функций, среди которых И. И. Привалов [7, 8], А. Н. Колмогоров [9], М. Рисс [10, 11]. Одной из задач теории аппроксимации является поиск взаимосвязей между наилучшими приближениями функций и их сопряженных [12, 13]. Этой задаче посвящены недавние исследования белорусских математиков (см. напр., [6]). Аппроксимации сопряженных функций вида (1) на отрезке $[-1, 1]$ алгебраическими многочленами, когда плотность $f(t)$ принадлежит различным функциональным классам, подробно изучена в работах В. П. Моторного (см., напр., [5]).

В [14] найдены сравнительные порядковые оценки для рациональных приближений взаимно сопряженных в смысле Гильберта функций действительной переменной в пространстве непрерывных 2π -периодических функций.

Одной из первых работ, где рассматриваются приближения непрерывных функций суммами Абеля – Пуассона, является статья И. П. Натансона [15], в которой установлено асимптотическое выражение точной верхней грани отклонений функций $f \in C_{2\pi}$ на классе $H_{2\pi}^{(\alpha)}$ функций, удовлетворяющих условию Липшица порядка α , $\alpha \in (0, 1]$, с константой, равной единице. А. Ф. Тиман [16] получил более точный результат, уточнив остаточный член в асимптотическом равенстве И. П. Натансона. Полное асимптотическое разложение верхних граней уклонений на классе $H_{2\pi}^{(1)}$ было получено Э. Л. Штарком [17]. В. В. Жук [18] получил оценки сверху уклонений сумм Пуассона от функций $f \in C_{2\pi}$ в терминах моделей непрерывности.

Для функций $f \in C[-1, 1]$ точные верхние грани отклонений сумм Абеля – Пуассона на классах $H^{(\alpha)}[-1, 1]$, $\alpha \in (0, 1]$, были установлены Ю. И. Русецким [19]. Т. В. Жигалло [20] уточнила остаточный член в асимптотической формуле, полученной Ю. И. Русецким.

Первые асимптотические выражения верхних граней уклонений сумм Абеля – Пуассона сопряженных рядов Фурье на классах $\bar{H}_{2\pi}^{(\alpha)}$ сопряженных 2π -периодических функций были установлены в работе Б. Надя [21]. В. А. Баскаков [22] получил полные асимптотические разложения по степеням $\ln 1/r$ точных верхних граней уклонений сопряженного интеграла Абеля – Пуассона на классах сопряженных функций $\hat{f} \in C_{2\pi}$, удовлетворяющих условию Липшица порядка $0 < \alpha \leq 1$. Полные асимптотические разложения верхних граней уклонений сопряженного интеграла Абеля – Пуассона на классах $\bar{W}_{\infty}^r$ и точные их значения в равномерной и интегральной метриках представлены в работах К. Н. Жигалло [23] и Ю. И. Харкевича [24].

А. А. Китбальян [25] предложил подход к построению сумм Абеля – Пуассона тригонометрических рядов Фурье и им сопряженных по системе рациональных 2π -периодических функций, введенных М. М. Джрбашьяном [26]. В частности, был установлен ряд теорем о сходимости при $r \rightarrow 1-0$ сумм Абеля – Пуассона к функции $f \in L_p(-\pi, \pi)$, $p > 1$.

В [27] были построены и исследованы ряды Фурье на отрезке $[-1, 1]$ по одной системе алгебраических дробей Чебышева – Маркова, которая является обобщением классической системы полиномов Чебышева первого рода. В частности, был построен интеграл Дирихле и изучены его аппроксимационные свойства в приближениях некоторых индивидуальных функций.

Одним из дальнейших результатов данных исследований стало построение сопряженного ряда Фурье по системе алгебраических дробей Чебышева – Маркова и исследование аппроксимационных свойств его частичных сумм в приближениях сопряженных на отрезке $[-1, 1]$ функций (1), когда плотность $f(t)$ имеет степенную особенность [28].

Целью настоящей работы является изучение аппроксимационных свойств классического метода построения сумм Абеля – Пуассона рациональных сопряженных рядов Фурье по системе алгебраических дробей Чебышева – Маркова. Представляет интерес получить аналоги теорем о приближении на классах $\bar{H}^{(\alpha)}[-1, 1]$ сопряженных на отрезке $[-1, 1]$ функций, изучить точные верхние грани уклонений сопряженных сумм Абеля – Пуассона на этих классах, а также исследовать приближения индивидуальных функций изучаемым методом суммирования.

1. Сопряженные суммы Абеля – Пуассона. Напомним основные сведения о рядах Фурье по системе алгебраических дробей Чебышева – Маркова. Алгебраическая косинус-дробь Чебышева – Маркова на отрезке $[-1, 1]$ с двумя комплексно-сопряженными параметрами имеет вид [27]

$$M_n(x) = \cos n \arccos \left(x \sqrt{\frac{1+a^2}{1+a^2x^2}} \right), \quad x \in [-1, 1], \quad a \geq 0, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2)$$

и при $a = 0$ представляет собой классический полином Чебышева первого рода. Система алгебраических дробей $M_n(x)$, $n = 0, 1, \dots$, является ортогональной на отрезке $[-1, 1]$ с весом

$$\rho(x, a) = \frac{\sqrt{1+a^2}}{(1+a^2x^2)\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1). \quad (3)$$

Функции $f(x)$, четной и абсолютно суммируемой с весом $\rho(x, a)$ на отрезке $[-1, 1]$, поставим в соответствие ряд Фурье по системе алгебраических дробей Чебышева – Маркова

$$f(x) \sim \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{2n} M_{2n}(x), \quad c_{2n} = \frac{4}{\pi} \int_0^1 f(t) M_{2n}(t) \rho(t, a) dt, \quad n = 0, 1, \dots \quad (4)$$

Сопряженным с рядом Фурье (4) будем называть ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_{2n} N_{2n}(x), \quad N_{2n}(x) = \sin 2n \arccos \left(x \sqrt{\frac{1+a^2}{1+a^2x^2}} \right), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (5)$$

c_{2n} определена в (4).

Суммой ряда (5) в смысле Абеля – Пуассона назовем функцию

$$\hat{f}(x, r) = \sum_{n=1}^{+\infty} r^{2n} c_{2n} N_{2n}(x), \quad 0 < r < 1, \quad x \in (-1, 1). \quad (6)$$

Имеет место

Теорема 1. Для функции $\hat{f}(x, r)$, $r \in (0, 1)$, справедливо представление

$$\hat{f}(x, r) = -\frac{2r^2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos v) \frac{\sin 2\varphi(u, v)}{1 - 2r^2 \cos 2\varphi(u, v) + r^4} \lambda(v) dv, \quad x = \cos u, \quad (7)$$

где

$$\varphi(u, v) = \int_u^v \lambda(y) dy, \quad \lambda(y) = \frac{1 - \alpha^4}{1 + 2\alpha^2 \cos 2y + \alpha^4}, \quad \alpha \in [0, 1). \quad (8)$$

Доказательство. Ряд (6) сходится равномерно по переменной $x \in [-1, 1]$ при $r \in (0, 1)$. Следовательно, оправдана замена порядка суммирования и интегрирования. Тогда

$$\hat{f}(x, r) = \frac{4}{\pi} \int_0^1 f(t) \rho(t, a) \hat{D}_r(t, x) dt, \quad 0 < r < 1, \quad x \in (-1, 1), \quad (9)$$

где

$$\hat{D}_r(t, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} r^{2n} M_{2n}(t) N_{2n}(x)$$

– сопряженное ядро Пуассона. Преобразуем его. Известно [27], что для алгебраических дробей Чебышева – Маркова первого и второго рода соответственно имеет место представление

$$M_{2n}(x) = \frac{1}{2} [\pi_n(\xi) + \overline{\pi_n(\xi)}], \quad N_{2n}(x) = \frac{1}{2i} [\pi_n(\xi) - \overline{\pi_n(\xi)}], \quad \xi = e^{iu}, \quad x = \cos u, \quad (10)$$

где

$$\pi_n(\xi) = \left(\frac{\xi^2 + \alpha^2}{1 + \alpha^2 \xi^2} \right)^n, \quad \alpha = \frac{a}{\sqrt{1 + a^2 + 1}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Выполнив в интеграле (9) замены $t = \cos v$, $x = \cos u$, и воспользовавшись представлениями (10), получим

$$\hat{D}_r(\cos v, \cos u) = \frac{1}{4i} \sum_{n=1}^{+\infty} r^{2n} (\pi_n(\zeta) + \overline{\pi_n(\zeta)}) (\pi_n(\xi) - \overline{\pi_n(\xi)}).$$

Используя формулу суммы геометрической прогрессии, находим, что

$$\hat{D}_r(\cos v, \cos u) = \frac{r^2}{4i} \left[\frac{\pi(\zeta)\pi(\xi)}{1 - r^2 \pi(\zeta)\pi(\xi)} - \frac{\pi(\zeta)\overline{\pi(\xi)}}{1 - r^2 \pi(\zeta)\overline{\pi(\xi)}} + \frac{\pi(\xi)\overline{\pi(\zeta)}}{1 - r^2 \pi(\xi)\overline{\pi(\zeta)}} - \frac{\overline{\pi(\zeta)}\pi(\xi)}{1 - r^2 \overline{\pi(\zeta)}\pi(\xi)} \right],$$

где $\pi_1(\cdot) = \pi(\cdot)$. Тогда в (9), с учетом выполненных замен переменных, получим

$$\hat{f}(x, r) = \frac{r^2}{\pi i} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos v) \lambda(v) \left[\frac{\pi(\zeta) \pi(\xi)}{1 - r^2 \pi(\zeta) \pi(\xi)} - \frac{\pi(\zeta) \overline{\pi(\xi)}}{1 - r^2 \pi(\zeta) \overline{\pi(\xi)}} + \frac{\pi(\xi) \overline{\pi(\zeta)}}{1 - r^2 \pi(\xi) \overline{\pi(\zeta)}} - \frac{\overline{\pi(\zeta) \pi(\xi)}}{1 - r^2 \overline{\pi(\zeta) \pi(\xi)}} \right] dv, \quad x = \cos u, \quad r \in (0, 1).$$

Разбивая последний интеграл на два интеграла, после соответствующих преобразований нетрудно получить, что

$$\hat{f}(x, r) = -\frac{r^2}{\pi i} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos v) \lambda(v) \left[\frac{\pi(\zeta) \overline{\pi(\xi)}}{1 - r^2 \pi(\zeta) \overline{\pi(\xi)}} - \frac{\pi(\xi) \overline{\pi(\zeta)}}{1 - r^2 \pi(\xi) \overline{\pi(\zeta)}} \right] dv, \quad x = \cos u. \quad (11)$$

Используя известное равенство [28, с. 121]

$$\exp[in\varphi(u, v)] = \sqrt{\frac{\pi_n(\zeta)}{\pi_n(\xi)}}, \quad (12)$$

где $\varphi(u, v)$ из (8), после несложных преобразований приходим к представлению (7). Теорема 1 доказана.

Следствие 1. Для сумм Абеля – Пуассона сопряженного ряда Фурье по системе полиномов Чебышева первого рода имеет место представление

$$\hat{f}(x, r) = -\frac{2r^2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos v) \frac{\sin 2(v - u)}{1 - 2r^2 \cos 2(v - u) + r^4} dv, \quad x = \cos u, \quad r \in (0, 1). \quad (13)$$

Представление (13) сумм Абеля – Пуассона сопряженного классического тригонометрического ряда Фурье для функции $f(\cos u)$ содержится в [24].

З а м е ч а н и е 1. Из теоремы 1 следует, что при любом $r \in (0, 1)$

$$\hat{f}_1(x, r) = -\frac{2r^2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2\varphi(u, v)}{1 - 2r^2 \cos 2\varphi(u, v) + r^4} \lambda(v) dv = 0, \quad x = \cos u. \quad (14)$$

2. Приближения сопряженными суммами Абеля – Пуассона. Изучим приближения сопряженными суммами Абеля – Пуассона (6) при $r \rightarrow 1$ сопряженных функций вида (1).

Теорема 2. Для сопряженной функции вида (1) с четной плотностью $f(t)$ имеет место представление

$$\hat{f}(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos v) \frac{\cos \varphi(u, v)}{\sin \varphi(u, v)} \lambda(v) dv, \quad x = \cos u, \quad (15)$$

где $\varphi(u, v)$, $\lambda(v)$ из (8) и интеграл справа понимается в смысле главного значения по Коши.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, рассмотрим функцию

$$\hat{g}(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos v) \frac{\cos \varphi(u, v)}{\sin \varphi(u, v)} \lambda(v) dv, \quad x = \cos u. \quad (16)$$

С учетом равенства (12) интеграл справа приводится к виду

$$\hat{g}(x) = -\frac{i}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos v) \frac{\pi(\zeta) + \pi(\xi)}{\pi(\zeta) - \pi(\xi)} \lambda(v) dv, \quad \zeta = e^{iv}, \quad \xi = e^{iu}, \quad x = \cos u.$$

Последний интеграл разобьем на два интеграла по промежуткам $[-\pi/2, 0]$ и $[0, \pi/2]$. В первом из них выполним замену переменного по формуле $v \mapsto -v$. Тогда

$$\begin{aligned} \hat{g}(x) &= -\frac{i}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos v) \left[\frac{\pi(\zeta) + \pi(\xi)}{\pi(\zeta) - \pi(\xi)} + \frac{\overline{\pi(\zeta)} + \pi(\xi)}{\overline{\pi(\zeta)} - \pi(\xi)} \right] \lambda(v) dv = \\ &= -\frac{2i}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos v) \frac{1 - \pi^2(\xi)}{1 - \pi(\xi)\pi(\zeta) - \pi(\xi)\overline{\pi(\zeta)} + \pi^2(\xi)} \lambda(v) dv, \quad x = \cos u. \end{aligned}$$

Разделим и умножим подынтегральное выражение на $\pi(\xi)$. Тогда

$$\hat{g}(x) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos v) \frac{N_2(\cos u)}{M_2(\cos u) - M_2(\cos v)} \lambda(v) dv, \quad x = \cos u,$$

где $M_2(\cdot), N_2(\cdot)$ – соответственно косинус-дроби и синус-дроби Чебышева – Маркова второго порядка. Выполним в интеграле справа замену переменного $\cos v \mapsto t$, $\cos u \mapsto x$, получим

$$\hat{g}(x) = \frac{2x\sqrt{1-x^2}}{\pi} \int_0^1 \frac{f(t)}{t^2 - x^2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad x \in [-1, 1].$$

Из (1) при условии четности $f(t)$ и последнего интегрального представления находим, что $\hat{g}(x) = \hat{f}(x)$. Теорема 2 доказана.

Введем следующие обозначения:

$$\hat{\varepsilon}_r(f, x, \alpha) = \hat{f}(x) - \hat{f}(x, r), \quad x \in [-1, 1]. \quad (17)$$

Подставив в правую часть (17) интегральные представления (7) и (15), получим

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}_r(f, x, \alpha) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos v) \left[\frac{\cos \varphi(u, v)}{\sin \varphi(u, v)} - \frac{2r^2 \sin 2\varphi(u, v)}{1 - 2r^2 \cos 2\varphi(u, v) + r^4} \right] \lambda(v) dv = \\ &= -\frac{(1-r^2)^2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos v) \frac{\cos \varphi(u, v)}{(1 - 2r^2 \cos 2\varphi(u, v) + r^4) \sin \varphi(u, v)} \lambda(v) dv, \end{aligned} \quad (18)$$

где $\varphi(u, v), \lambda(v)$ из (8), $r \in (0, 1)$, $x = \cos u$, $\alpha \in [0, 1]$.

З а м е ч а н и е 2. Положив в (18) значение параметра $\alpha = 0$, придем к приближениям сопряженной функции (1) с четной плотностью $f(t)$ суммами Абеля – Пуассона сопряженного ряда Фурье по системе полиномов Чебышева первого рода:

$$\hat{\varepsilon}_r(f, x, 0) = -\frac{(1-r^2)^2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos v) \frac{\cos(v-u)}{(1 - 2r^2 \cos 2(v-u) + r^4) \sin(v-u)} dv, \quad x = \cos u.$$

Последнее представление содержится, напр., в [23].

3. Приближения на классах $\bar{H}^{(\gamma)}[-1,1]$, $\gamma \in (0,1]$. Рассмотрим класс $\bar{H}^{(\gamma)}[-1,1]$, $\gamma \in (0,1]$, сопряженных функций $\hat{f}$, определяющихся интегралом (1), когда функция f удовлетворяет на отрезке $[-1,1]$ условию Липшица, порядка γ , $\gamma \in (0,1]$, с константой, равной единице, т. е. условию

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq |x_1 - x_2|^\gamma, \quad x_1, x_2 \in [-1,1].$$

Изучим асимптотическое поведение верхних граней

$$\mathcal{E}_r^{(\gamma)}(x, \alpha) = \sup_{\hat{f} \in \bar{H}^{(\gamma)}[-1,1]} |\hat{f}(x) - \hat{f}(x, r)| \quad (19)$$

уклонений сопряженных сумм Абеля – Пуассона от функции $\hat{f}(x) \in \bar{H}^{(\gamma)}[-1,1]$, $\gamma \in (0,1]$.

Отметим, что в нашем случае при каждом значении $r, r \in (0,1)$ могут выбираться соответствующие значения параметра α , т. е., вообще говоря, $\alpha = \alpha(r)$. В этом случае будем полагать обязательным выполнение условия

$$\lim_{r \rightarrow 1} \frac{1 - \alpha}{1 - r} = \infty \quad (20)$$

и учитывать его в дальнейшем.

Следующая теорема устанавливает асимптотическое поведение величины (19).

Теорема 3. Для приближений на классах $\bar{H}^{(\gamma)}[-1,1]$, $\gamma \in (0,1]$, при $r \rightarrow 1$, $0 < r \leq 1$, равномерно относительно $x \in [-1,1]$ справедливы асимптотические равенства

$$\mathcal{E}_r^{(\gamma)}(x, \alpha) = \frac{1}{\sin \frac{\pi\gamma}{2}} \left(\frac{\sqrt{1-x^2}(1-r)}{\lambda(u)} \right)^\gamma + o \left(\left(\frac{\sqrt{1-x^2}(1-r)}{\lambda(u)} \right)^\gamma \right) + \delta_r^{(\gamma)}(x), \quad \gamma \in (0,1), \quad (21)$$

$$\mathcal{E}_r^{(1)}(x, \alpha) = \frac{\sqrt{1-x^2}(1-r)}{\lambda(u)} + O \left(\frac{\sqrt{1-x^2}(1-r)^2}{\lambda^2(u)} \right) + \delta_r^{(1)}(x), \quad \gamma = 1, \quad (22)$$

где для $|x| < 1$

$$\delta_r^{(\gamma)}(x) = \begin{cases} O \left(\left(\frac{\sqrt{|x|(1-r)}}{2\lambda(u)} \right)^{2\gamma} \right), & \gamma \in (0,1), \\ O \left(\left(\frac{\sqrt{|x|(1-r)}}{2\lambda(u)} \right)^2 \ln \frac{\lambda(u)}{1-r} \right), & \gamma = 1. \end{cases} \quad (23)$$

При этом

$$\begin{cases} \delta_r^{(\gamma)}(\pm 1) = \frac{1}{\sin \pi\gamma} \left(\frac{1-r}{\sqrt{2}\beta} \right)^{2\gamma} + O \left(\left(\frac{1-r}{\beta} \right)^2 \right), & \gamma \in (0,1), \\ \delta_r^{(1)}(\pm 1) = \frac{2(1-r)^2}{\pi\beta^2} \ln \frac{\beta}{1-r} + O \left(\left(\frac{1-r}{\beta} \right)^2 \right), & \gamma = 1, \quad \beta = \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}. \end{cases} \quad (24)$$

Доказательство. Учитывая легко проверяемые равенства

$$\cos \varphi(u, v) = \frac{\sqrt{\lambda(u)\lambda(v)}}{1-\alpha^4} \left((1+2\alpha^2 \cos 2u + \alpha^4) \cos(v-u) - 2\alpha^2 \sin 2u \sin(v-u) \right),$$

$$\sin \varphi(u, v) = \sin(v - u) \sqrt{\lambda(u) \lambda(v)},$$

где $\varphi(u, v)$, $\lambda(v)$ определены в (8), а также воспользовавшись соотношением (14), из (18) получим

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}_r(f, x, \alpha) = & -\frac{1}{\lambda(u)\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (f(\cos v) - f(\cos u)) \frac{\lambda(v) \cos(v-u) dv}{(1 + R^2 \lambda(u) \lambda(v) \sin^2(v-u)) \sin(v-u)} + \\ & + \frac{2\alpha^2 \sin 2u}{(1 - \alpha^4)\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (f(\cos v) - f(\cos u)) \frac{\lambda(v) dv}{1 + R^2 \lambda(u) \lambda(v) \sin^2(v-u)}, \quad R = \frac{2r}{1-r^2}, \quad x = \cos u. \end{aligned}$$

В силу π -периодичности подынтегральных функций обоих интегралов по переменной интегрирования, придем к представлению

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}_r(f, x, \alpha) = & -\frac{1}{\lambda(u)\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(\cos(t+u)) - f(\cos u)) \frac{\lambda(t+u) \cos t dt}{(1 + R^2 \lambda(u) \lambda(t+u) \sin^2 t) \sin t} - \right. \\ & \left. - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(\cos(t-u)) - f(\cos u)) \frac{\lambda(t-u) \cos t dt}{(1 + R^2 \lambda(u) \lambda(t-u) \sin^2 t) \sin t} \right] + \\ & + \frac{2\alpha^2 \sin 2u}{(1 - \alpha^4)\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(\cos(t+u)) - f(\cos u)) \frac{\lambda(t+u) dt}{1 + R^2 \lambda(u) \lambda(t+u) \sin^2 t} - \right. \\ & \left. - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(\cos(t-u)) - f(\cos u)) \frac{\lambda(t-u) dt}{1 + R^2 \lambda(u) \lambda(t-u) \sin^2 t} \right], \quad R = \frac{2r}{1-r^2}, \quad x = \cos u. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} |\hat{\varepsilon}_r(f, x, \alpha)| \leq & \frac{1}{\lambda(u)\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos(t+u) - \cos u|^\gamma \frac{\lambda(t+u) \cos t dt}{(1 + R^2 \lambda(u) \lambda(t+u) \sin^2 t) \sin t} + \right. \\ & \left. + \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos(t-u) - \cos u|^\gamma \frac{\lambda(t-u) \cos t dt}{(1 + R^2 \lambda(u) \lambda(t-u) \sin^2 t) \sin t} \right] + \\ & + \frac{2\alpha^2 |\sin 2u|}{(1 - \alpha^4)\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos(t+u) - \cos u|^\gamma \frac{\lambda(t+u) dt}{1 + R^2 \lambda(u) \lambda(t+u) \sin^2 t} + \right. \\ & \left. + \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos(t-u) - \cos u|^\gamma \frac{\lambda(t-u) dt}{1 + R^2 \lambda(u) \lambda(t-u) \sin^2 t} \right], \quad R = \frac{2r}{1-r^2}, \quad x = \cos u. \end{aligned}$$

С другой стороны, это неравенство обращается в точное равенство для функции $f_x(y) = |x - y|^\gamma$, которая, очевидно, принадлежит классу $H^{(\gamma)}[-1, 1]$. Следовательно,

$$\mathcal{E}_r^{(\gamma)}(x, \alpha) = [I_1(+u, r) + I_1(-u, r)] + [I_2(+u, r) + I_2(-u, r)], \quad (25)$$

где

$$I_1(\pm u, r) = \frac{1}{\lambda(u)\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos(t \pm u) - \cos u|^\gamma \frac{\lambda(t \pm u) \cos t dt}{(1 + R^2 \lambda(u) \lambda(t \pm u) \sin^2 t) \sin t},$$

$$I_2(\pm u, r) = \frac{2\alpha^2 |\sin 2u|}{(1 - \alpha^4)\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos(t \pm u) - \cos u|^\gamma \frac{\lambda(t \pm u) dt}{1 + R^2 \lambda(u) \lambda(t \pm u) \sin^2 t}.$$

Исследуем асимптотическое поведение каждого из интегралов при $r \rightarrow 1$ в зависимости от значения $\gamma \in (0, 1]$. Так, для интеграла $I_1(\pm u, r)$ имеем

$$I_1(\pm u, r) = \frac{1}{\lambda(u)\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \sin u \sin t \pm 2 \cos u \sin^2 \frac{t}{2} \right|^\gamma \frac{\lambda(t \pm u) \cos t dt}{(1 + R^2 \lambda(u) \lambda(t \pm u) \sin^2 t) \sin t}, \quad x = \cos u.$$

Учитывая, что

$$|A \pm B|^\gamma = |A|^\gamma + \theta |B|^\gamma, \quad \theta \in [-1, 1],$$

получим

$$I_1(\pm u, r) = |\sin u|^\gamma I_3(u, r) + 2^\gamma \theta |\cos u|^\gamma I_4(u, r), \quad x = \cos u, \quad r \in (0, 1), \quad (26)$$

где

$$I_3(u, r) = \frac{1}{\lambda(u)\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\lambda(t \pm u) \cos t dt}{(1 + R^2 \lambda(u) \lambda(t \pm u) \sin^2 t) \sin^{1-\gamma} t},$$

$$I_4(u, r) = \frac{1}{\lambda(u)\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2\gamma}(t/2) \lambda(t \pm u) \cos t dt}{(1 + R^2 \lambda(u) \lambda(t \pm u) \sin^2 t) \sin t}.$$

Проведем исследование каждого из двух интегралов по отдельности. Нетрудно заметить, что их асимптотическое поведение при $r \rightarrow 1$ зависит исключительно от значений, принимаемых переменной интегрирования в непосредственной близости нуля. В этом случае для произвольно малого $\varepsilon > 0$ интеграл $I_3(u, r)$ примет вид

$$I_3(u, r) = \frac{1}{\pi} \int_0^\varepsilon \frac{\cos t dt}{(1 + R^2 \lambda^2(u) \sin^2 t) \sin^{1-\gamma} t} + \frac{1}{\lambda(u)\pi} \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} \frac{\lambda(t \pm u) \cos t dt}{(1 + R^2 \lambda(u) \lambda(t \pm u) \sin^2 t) \sin^{1-\gamma} t}.$$

Поскольку

$$\frac{1}{\lambda(u)\pi} \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} \frac{\lambda(t \pm u) \cos t dt}{(1 + R^2 \lambda(u) \lambda(t \pm u) \sin^2 t) \sin^{1-\gamma} t} \leq \frac{c(\varepsilon)}{\lambda^2(u) R^2 \pi},$$

где $c(\varepsilon)$ – некоторая величина, зависящая от ε , но не зависящая от u и R , заключаем, что второй интеграл имеет порядок

$$O\left(\left(\frac{1-r^2}{\lambda(u)}\right)^2\right), \quad r \rightarrow 1.$$

В первом интеграле выполним замену переменного по формуле $R\lambda(u)\sin t \mapsto t$. Тогда

$$I_3(u, r) = \frac{1}{\pi[R\lambda(u)]^\gamma} \int_0^{R\lambda(u)\sin \varepsilon} \frac{t^{\gamma-1} dt}{1+t^2} + O\left(\left(\frac{1-r^2}{\lambda(u)}\right)^2\right), \quad r \rightarrow 1.$$

Считая выполненными условия (20), при $r \rightarrow 1$ и $\gamma \in (0, 1]$ интеграл справа примет вид

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\gamma-1} dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2 \sin \frac{\pi\gamma}{2}}.$$

Отсюда

$$I_3(u, r) = \frac{(1-r)^\gamma}{2 \sin \frac{\pi\gamma}{2} [\lambda(u)]^\gamma} + O\left(\left(\frac{1-r}{\lambda(u)}\right)^2\right), \quad \gamma \in (0, 1], \quad r \rightarrow 1. \quad (27)$$

Исследуем интеграл $I_4(u, r)$. Перепишем его в виде

$$I_4(u, r) = \frac{1}{2^{2\gamma} \lambda(u) \pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\lambda(t \pm u) \cos t dt}{\cos^{2\gamma}(t/2) (1 + R^2 \lambda(u) \lambda(t \pm u) \sin^2 t) \sin^{1-2\gamma} t}.$$

Рассуждая совершенно аналогичным образом, как в случае с интегралом $I_3(u, r)$, заключаем, что

$$I_4(u, r) = \frac{1}{2^{2\gamma} [R\lambda(u)]^{2\gamma} \pi} \int_0^{R\lambda(u)\sin \varepsilon} \frac{t^{2\gamma-1} dt}{1+t^2} + O\left(\left(\frac{1-r^2}{\lambda(u)}\right)^2\right), \quad r \rightarrow 1. \quad (28)$$

Опять же, считая выполненными условия (20), при $r \rightarrow 1$ и $\gamma \in (0, 1)$ интеграл справа примет вид

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{2\gamma-1} dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2 \sin \pi\gamma}.$$

Если $\gamma = 1$, то интеграл в (28) примет вид

$$\int_0^{R\lambda(u)\sin \varepsilon} \frac{t dt}{1+t^2} = \frac{1}{2} \ln(1 + R^2 \lambda^2(u) \sin \varepsilon) \sim \ln R\lambda(u), \quad r \rightarrow 1.$$

Подставляя полученные выражения в (28), будем иметь

$$I_4(u, r) = \begin{cases} \frac{1}{2 \sin \pi\gamma} \left(\frac{1-r}{2\lambda(u)}\right)^{2\gamma} + O\left(\left(\frac{1-r}{\lambda(u)}\right)^2\right), & \gamma \in (0, 1), \\ \frac{1}{\pi} \left(\frac{1-r}{2\lambda(u)}\right)^2 \ln \frac{\lambda(u)}{1-r} + O\left(\left(\frac{1-r}{\lambda(u)}\right)^2\right), & \gamma = 1. \end{cases} \quad (29)$$

Из (27) и (29) в (26) придем к выражению

$$I_1(\pm u, r) = \begin{cases} \frac{1}{2 \sin \frac{\pi \gamma}{2}} \left(\frac{\sqrt{1-x^2}(1-r)}{\lambda(u)} \right)^\gamma + o \left(\left(\frac{\sqrt{1-x^2}(1-r)}{\lambda(u)} \right)^\gamma \right) + \frac{\delta_r^{(\gamma)}(x)}{2}, & \gamma \in (0,1), \\ \frac{\sqrt{1-x^2}(1-r)}{2\lambda(u)} + O \left(\frac{\sqrt{1-x^2}(1-r)^2}{\lambda^2(u)} \right) + \frac{\delta_r^{(1)}(x)}{2}, & \gamma = 1, \end{cases} \quad (30)$$

где $\delta_r^{(\gamma)}(x)$ определена в (23).

Рассмотрим теперь интеграл $I_2(\pm u, r)$. Применив аналогичные рассуждения, что и при исследовании интеграла $I_1(\pm u, r)$, получим

$$I_2(\pm u, r) = \frac{2\alpha^2 |\sin 2u|}{(1-\alpha^4)\pi} (|\sin u|^\gamma I_5(u, r) + 2^\gamma \theta_2 |\cos u|^\gamma I_6(u, r)), \quad x = \cos u, \quad (31)$$

для некоторого $\theta_2 \in (-1,1)$, где

$$I_5(u, r) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\gamma t \frac{\lambda(t \pm u) dt}{1 + R^2 \lambda(u) \lambda(t \pm u) \sin^2 t}, \quad I_6(u, r) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2\gamma}(t/2) \lambda(t \pm u) dt}{1 + R^2 \lambda(u) \lambda(t \pm u) \sin^2 t}.$$

Используя методы исследований из работы [21], заключаем, что равномерно по $r \in [0,1]$, $\alpha \in [0,1]$ и $t \in [0, \pi/2]$ при выполнении условия (20)

$$\frac{\sin^\gamma t \lambda(t \pm u)}{1 + R^2 \lambda(u) \lambda(t \pm u) \sin^2 t} - \frac{t^\gamma \lambda(u)}{1 + R^2 \lambda^2(u) t^2} = O \left(\frac{(1-r)^2}{\lambda(u)} \right).$$

Применив последнее соотношение к интегралу $I_5(u, r)$, получим

$$I_5(u, r) = \lambda(u) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^\gamma dt}{1 + R^2 \lambda^2(u) t^2} + O \left(\frac{(1-r^2)^2}{\lambda(u)} \right) = \frac{\lambda(u)}{[R\lambda(u)]^{\gamma+1}} \int_0^{R\lambda(u)\frac{\pi}{2}} \frac{t^\gamma dt}{1+t^2} + O \left(\frac{(1-r^2)^2}{\lambda(u)} \right), \quad r \rightarrow 1.$$

При $\gamma \in (0,1)$ и выполнении условий (20) будем иметь

$$\begin{aligned} I_5(u, r) &= \frac{\lambda(u)}{[R\lambda(u)]^{\gamma+1}} \left(\int_0^{+\infty} \frac{t^\gamma dt}{1+t^2} + O([R\lambda(u)]^{\gamma-1}) \right) + O \left(\frac{(1-r^2)^2}{\lambda(u)} \right) = \\ &= \frac{\pi \lambda(u) (1-r)^{\gamma+1}}{2 \cos \frac{\pi \gamma}{2} [\lambda(u)]^{\gamma+1}} + O \left(\frac{(1-r)^2}{\lambda(u)} \right), \quad r \rightarrow 1. \end{aligned} \quad (32)$$

Если $\gamma = 1$, то

$$I_5(u, r) = \frac{(1-r)^2}{\lambda(u)} \ln \frac{\lambda(u)}{1-r} + O \left(\frac{(1-r)^2}{\lambda(u)} \right), \quad r \rightarrow 1. \quad (33)$$

Из (32) и (33) следует, что

$$I_5(u, r) = \begin{cases} \frac{\pi \lambda(u)}{2 \cos \frac{\pi \gamma}{2}} \left(\frac{1-r}{\lambda(u)} \right)^{\gamma+1} + O \left(\frac{(1-r)^2}{\lambda(u)} \right), & \gamma \in (0,1), \\ \lambda(u) \left(\frac{1-r}{\lambda(u)} \right)^2 \ln \frac{\lambda(u)}{1-r} + O \left(\frac{(1-r)^2}{\lambda(u)} \right), & \gamma = 1. \end{cases} \quad (34)$$

Наконец рассмотрим интеграл $I_6(u, r)$. Известными рассуждениями он приводится к виду

$$I_6(u, r) = \frac{\lambda(u)}{[R\lambda(u)]^{2\gamma+1}} \int_0^{R\lambda(u)\frac{\pi}{2}} \frac{t^{2\gamma}}{1+t^2} dt + O\left(\frac{(1-r^2)^2}{\lambda(u)}\right), \quad r \rightarrow 1.$$

При $\gamma \in (0, 1/2)$

$$\begin{aligned} I_6(u, r) &= \frac{\lambda(u)}{[R\lambda(u)]^{2\gamma+1}} \left(\int_0^{+\infty} \frac{t^{2\gamma}}{1+t^2} dt + O([R\lambda(u)]^{2\gamma-1}) \right) + O\left(\frac{(1-r^2)^2}{\lambda(u)}\right) = \\ &= \frac{\pi\lambda(u)(1-r)^{2\gamma+1}}{2\cos\pi\gamma[R\lambda(u)]^{2\gamma+1}} + O\left(\frac{(1-r)^2}{\lambda(u)}\right), \quad r \rightarrow 1. \end{aligned} \quad (35)$$

При $\gamma = 1/2$

$$I_6(u, r) = \frac{(1-r)^2}{\lambda(u)} \ln \frac{\lambda(u)}{1-r} + O\left(\frac{(1-r)^2}{\lambda(u)}\right), \quad r \rightarrow 1. \quad (36)$$

Если $\gamma \in (1/2, 1)$, то

$$I_6(u, r) \leq \frac{\lambda(u)}{[R\lambda(u)]^{2\gamma+1}} \int_0^{R\lambda(u)\frac{\pi}{2}} t^{2\gamma-2} dt = O\left(\frac{(1-r)^2}{\lambda(u)}\right), \quad r \rightarrow 1. \quad (37)$$

Из (35), (36) и (37) следует, что

$$I_6(u, r) = \begin{cases} \frac{\pi\lambda(u)}{2\cos\pi\gamma} \left(\frac{1-r}{\lambda(u)}\right)^{2\gamma+1} + O\left(\frac{(1-r)^2}{\lambda(u)}\right), & \gamma \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \\ \lambda(u) \left(\frac{1-r}{\lambda(u)}\right)^2 \ln \frac{\lambda(u)}{1-r} + O\left(\frac{(1-r)^2}{\lambda(u)}\right), & \gamma = \frac{1}{2}, \\ O\left(\frac{(1-r)^2}{\lambda(u)}\right), & \gamma \in \left(\frac{1}{2}, 1\right). \end{cases} \quad (38)$$

Подставив (34) и (38) в (31), получим

$$I_2(\pm u, r) = \frac{4\alpha^2\lambda(u)}{1-\alpha^4} \begin{cases} \frac{|x|}{2\cos\frac{\pi\gamma}{2}} \left(\frac{\sqrt{1-x^2}(1-r)}{\lambda(u)}\right)^{\gamma+1} + \mu_r^{(\gamma)}(x), & \gamma \in (0, 1), \\ \frac{|x|}{\pi} \left(\frac{\sqrt{1-x^2}(1-r)}{\lambda(u)}\right)^2 \ln \frac{\lambda(u)}{1-r} + \mu_r^{(1)}(x), & \gamma = 1, \end{cases} \quad (39)$$

где величины $\mu_r^{(\gamma)}(x)$ равномерно зависят от $x \in [-1, 1]$, $r \in (0, 1)$, $\alpha \in [0, 1]$, $\gamma \in (0, 1]$ и имеют больший порядок малости в сравнении с главными частями соответствующих асимптотических разложений.

Из (30) и (39), заключаем, что

$$I_2(\pm u, r) = o(I_1(\pm u, r)), \quad r \rightarrow 1,$$

равномерно по $x \in [-1, 1]$, $x = \cos u$. Следовательно, в (25)

$$\mathcal{E}_r^{(\gamma)}(x, \alpha) = 2I_1(\pm u, r) + o(I_1(\pm u, r)), \quad r \rightarrow 1, \quad \gamma \in (0, 1],$$

и приходим к (21) и (22). Из (25) и (29) следует (24). Теорема 3 доказана.

З а м е ч а н и е 3. В отличие от уже известных асимптотических выражений верхних граней уклонений сопряженных сумм Абеля – Пуассона на классах $\bar{H}^{(\gamma)}$, (см., напр., [23]), правые части соотношений (21) и (22) существенным образом зависят от положения точки x на концах отрезка $[-1, 1]$, а также от полюсов аппроксимирующей функции. Причем скорости приближений на концах отрезка выше, чем в целом на отрезке.

4. Приближения сопряженной функции с плотностью $|x|^s$. Изучим приближения сумм Абеля – Пуассона (6) индивидуальных сопряженных функций.

Пусть на отрезке $[-1, 1]$ задана функция $|x|^s$, $s > 0$. Из (1) следует, что функция, сопряженная к ней, задается соотношением

$$\hat{f}_{|x|^s}(x) = \frac{2x\sqrt{1-x^2}}{\pi} \int_0^1 \frac{t^s}{t^2-x^2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad x \in (-1, 1),$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Отметим, что при $x = 0$ последний интеграл существует при выполнении условия $s > 1$. Это замечание будем учитывать в дальнейшем.

Теорема 4. Для величины $\hat{\varepsilon}_r(|\cdot|^s, x, \alpha)$, $x \in [-1, 1]$, $\alpha \in [0, 1]$, $s \in (1, 2)$, имеют место:

1) интегральное представление

$$\hat{\varepsilon}_r(|\cdot|^s, x, \alpha) = \frac{(1-r^2)\sin 2u}{2^{s-2}\pi} \sin \frac{\pi s}{2} \int_0^1 \frac{(1-t^2)^s t^{1-s} (1-r^2\chi^2(t)) dt}{(1+2t^2 \cos 2u + t^4)(1+2r^2\chi(t)M_2(x) + r^4\chi^2(t))}; \quad (40)$$

2) поточечная оценка

$$|\hat{\varepsilon}_r(|\cdot|^s, x, \alpha)| \leq \hat{\varepsilon}_r^*(|\cdot|^s, x, \alpha), \quad r \in (0, 1), \quad (41)$$

где

$$\hat{\varepsilon}_r^*(|\cdot|^s, x, \alpha) = \frac{(1-r^2)|\sin 2u|}{2^{s-2}\pi} \sin \frac{\pi s}{2} [I_1(\alpha, r, s) + I_2(\alpha, r, s)], \quad (42)$$

$$I_1(\alpha, r, s) = \int_\alpha^1 \frac{(1-t^2)^{s-2} t^{1-s} (1-r^2\chi^2(t))}{(1-r^2\chi(t))^2} dt, \quad I_2(\alpha, r, s) = \int_0^\alpha \frac{(1-t^2)^s t^{1-s} (1-r^2\chi^2(t))}{(1-r^2|\chi(t)|)^2} dt,$$

$M_2(x)$ – косинус-дробь Чебышева – Маркова второго порядка, $x = \cos u$,

$$\chi(t) = \frac{t^2 - \alpha^2}{1 - \alpha^2 t^2}. \quad (43)$$

Оценка (41) является точной. Равенство достигается при $x = 0$, а также на концах отрезка.

Доказательство. Известно (см., напр., [29, с. 403]), что суммы Абеля – Пуассона и частичные суммы рядов Фурье связывает соотношение, которое в нашем случае имеет вид

$$\hat{f}(x, r) = (1-r^2) \sum_{n=0}^{+\infty} r^{2n} \hat{s}_{2n}(f, x), \quad 0 < r < 1, \quad x \in (-1, 1).$$

Из последнего равенства и (17) нетрудно получить, что

$$\hat{\varepsilon}_r(f, x, \alpha) = (1-r^2) \sum_{n=0}^{+\infty} r^{2n} \hat{\delta}_{2n}(f, x, \alpha), \quad 0 < r < 1, \quad x \in (-1, 1), \quad x \in [-1, 1], \quad (44)$$

где $\hat{\delta}_{2n}(f, x, \alpha)$ – приближения сопряженных функций (1) частичными суммами сопряженных рядов (5). С другой стороны, известно [28], что

$$\hat{\delta}_{2n}(|x|^s, x, \alpha) = \frac{(-1)^n i}{2^{s-1} \pi} \sin \frac{\pi s}{2} \int_0^1 \frac{(1-t^2)^s t^{1-s}}{1-\alpha^2 t^2} \left[\frac{1+\xi^2 \alpha^2}{\xi^2+t^2} \overline{\pi^n(\xi)} - \frac{\xi^2+\alpha^2}{1+t^2 \xi^2} \pi^n(\xi) \right] \chi^n(t) dt,$$

где $\pi(\xi)$ из (10), $\chi(t)$ из (43), $\xi = e^{iu}$, $x = \cos u$.

Подставив последнее интегральное представление в (44) и поменяв порядок интегрирования и суммирования, что оправдано равномерной сходимостью ряда, получим

$$\hat{\epsilon}_r(|x|^s, x, \alpha) = \frac{i(1-r^2)}{2^{s-1} \pi} \sin \frac{\pi s}{2} \int_0^1 \frac{(1-t^2)^s t^{1-s}}{1-\alpha^2 t^2} \hat{P}_r(t, x) dt, \quad \xi = e^{iu}, \quad x = \cos u. \quad (45)$$

где

$$\hat{P}_r(t, x) = \frac{1+\xi^2 \alpha^2}{\xi^2+t^2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n r^{2n} \overline{\pi^n(\xi)} \chi^n(t) - \frac{\xi^2+\alpha^2}{1+t^2 \xi^2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n r^{2n} \pi^n(\xi) \chi^n(t).$$

В выражении $\hat{P}_r(t, x)$ находятся суммы геометрических прогрессий со знаменателями $-r^2 \chi(t) \pi(\xi)$ и $-r^2 \chi(t) \overline{\pi(\xi)}$, модули которых, очевидно, меньше единицы при $0 < r < 1$. Учитывая равенства

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n r^{2n} \chi^n(t) \pi^n(\xi) = \frac{1}{1+r^2 \chi(t) \pi(\xi)},$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n r^{2n} \chi^n(t) \overline{\pi^n(\xi)} = \frac{1}{1+r^2 \chi(t) \overline{\pi(\xi)}},$$

получим

$$\hat{P}_r(t, x) = \frac{(1+\alpha^2 \xi^2)(1+\xi^2 t^2)(1+r^2 \chi(t) \pi(\xi)) - (\xi^2+\alpha^2)(\xi^2+t^2)(1+r^2 \chi(t) \overline{\pi(\xi)})}{(1+\xi^2 t^2)(\xi^2+t^2)(1+2r^2 \chi(t) M_2(x) + r^4 \chi^2(t))}, \quad \xi = e^{iu}, \quad x = \cos u.$$

После необходимых преобразований будем иметь

$$\hat{P}_r(t, x) = \frac{-2i \sin 2u (1-\alpha^2 t^2)(1-r^2 \chi^2(t))}{(1+2t^2 \cos 2u + t^4)(1+2r^2 \chi(t) M_2(x) + r^4 \chi^2(t))}, \quad \xi = e^{iu}, \quad x = \cos u.$$

Подставив последнее соотношение в (45), получим (40). Отметим, что ограничения на параметр $s \in (1, 2)$ объясняются существованием интеграла в (40).

Для доказательства второго утверждения настоящей теоремы в представлении (40) воспользуемся хорошо известным неравенством

$$\sqrt{1+2t^2 \cos 2u + t^4} \geq 1-t^2, \quad t \in [0, 1], \quad u \in \mathbb{R}.$$

Тогда

$$|\hat{\epsilon}_r(|\cdot|^s, x, \alpha)| \leq \frac{(1-r^2) |\sin 2u|}{2^{s-2} \pi} \sin \frac{\pi s}{2} \int_0^1 \frac{(1-t^2)^{s-2} t^{1-s} (1-r^2 \chi^2(t)) dt}{1+2r^2 \chi(t) M_2(x) + r^4 \chi^2(t)}, \quad x = \cos u. \quad (46)$$

Нетрудно показать, что

$$\sqrt{1+2r^2\chi(t)M_2(x)+r^4\chi^2(t)} \geq \begin{cases} 1-r^2|\chi(t)|, & t \in (0,\alpha), \\ 1-r^2\chi(t), & t \in (\alpha,1). \end{cases}$$

Разбивая интеграл в (46) на два интеграла по промежуткам $[0,\alpha]$ и $[\alpha,1]$ и применив указанную оценку, найдем

$$|\hat{\varepsilon}_r(|\cdot|^s, x, \alpha)| \leq \frac{(1-r^2)|\sin 2u|}{2^{s-2}\pi} \sin \frac{\pi s}{2} \left[\int_{\alpha}^1 \frac{(1-t^2)^{s-2} t^{1-s} (1-r^2\chi^2(t))}{(1-r^2\chi(t))^2} dt + \int_0^{\alpha} \frac{(1-t^2)^s t^{1-s} (1-r^2\chi^2(t))}{(1-r^2|\chi(t)|)^2} dt \right],$$

$$r \in (0,1).$$

Из последней оценки приходим к (41), чем докажем второе утверждение теоремы 4.

Точность оценки (41) при $x=0$, а также на концах отрезка проверяется непосредственно, если учесть, что приближения $\hat{\varepsilon}_r(|\cdot|^s, x, \alpha)$ в этих точках обращаются в нуль. Доказательство теоремы 4 завершено.

В формулировке теоремы 4 положим значение параметра $\alpha=0$. Тогда величина $\hat{\varepsilon}_r(|\cdot|^s, x, 0) = \hat{\varepsilon}_r^{(0)}(|\cdot|^s, x)$ — есть поточечные приближения сопряженной функции с плотностью $|x|^s$, $s \in (1,2)$, на отрезке $[-1,1]$ суммами Абеля – Пуассона полиномиальных сопряженных рядов Фурье – Чебышева.

Следствие 2 (полиномиальный случай). Для величины $\hat{\varepsilon}_r^{(0)}(|\cdot|^s, x)$, $r \in (0,1)$, $s \in (1,2)$, на отрезке $[-1,1]$ справедливы:

1) интегральное представление

$$\hat{\varepsilon}_r^{(0)}(|\cdot|^s, x) = \frac{(1-r^2)\sin 2u}{2^{s-2}\pi} \sin \frac{\pi s}{2} \int_0^1 \frac{(1-t^2)^s t^{1-s} (1-r^2 t^4) dt}{(1+2t^2 \cos 2u + t^4)(1+2r^2 t^2 \cos 2u + r^4 t^4)}, \quad x = \cos u, \quad r \in (0,1);$$

2) оценка сверху

$$|\hat{\varepsilon}_r^{(0)}(|\cdot|^s, x)| \leq \frac{(1-r^2)|\sin 2u|}{2^{s-2}\pi} \sin \frac{\pi s}{2} \int_0^1 \frac{(1-t^2)^{s-2} t^{1-s} (1-r^2 t^4)}{(1-r^2 t^2)^2} dt, \quad r \in (0,1),$$

равномерно по $x, x \in [-1,1]$.

5. Асимптотическое выражение мажоранты приближений. Изучим асимптотическое поведение величины (42) при $r \rightarrow 1$. С этой целью в интегралах, в ее правой части выполним замену переменного по формуле $t^2 = (1-u)/(1+u)$, $dt = -du / ((1+u)^{3/2}(1-u)^{1/2})$. Тогда

$$\hat{\varepsilon}_r^*(|\cdot|^s, x, \alpha) = \frac{R|\sin 2u|}{\pi} \sin \frac{\pi s}{2} [I_1(\alpha, r, s) + I_2(\alpha, r, s)], \quad s \in (1,2), \quad (47)$$

где

$$I_1(\alpha, r, s) = \int_0^{\beta} \frac{u^{s-2}}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}}} \frac{\beta^2 R + 2u\beta + u^2 R}{(\beta R + u)^2} du,$$

$$I_2(\alpha, r, s) = \int_{\beta}^1 \frac{u^{s-2}}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}}} \frac{\beta^2 R + 2u\beta + u^2 R}{(uR + \beta)^2} du, \quad R = \frac{1-r^2}{1+r^2}, \quad \beta = \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}.$$

Теорема 5. Для мажоранты $\hat{\varepsilon}_r(|\cdot|^s, \alpha)$ при $r \rightarrow 1$ справедливы асимптотические равенства

$$\hat{\varepsilon}_r^*(|\cdot|^s, x, \alpha) \sim |\sin 2u| \left[\frac{\beta^{s-1} R^{s-1} s}{2 \left| \cos \frac{\pi s}{2} \right|} + \sin \frac{\pi s}{2} \frac{2R}{\pi \beta} \int_{\beta}^1 \frac{u^{s-1} du}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}}} \right], \quad r \rightarrow 1, \quad s \in (1, 2). \quad (48)$$

Доказательство. Исследуем каждый из интегралов, входящих в выражение (47) по отдельности. Изучим их асимптотическое поведение при $r \rightarrow 1$. Дальнейшему доказательству теоремы 5 предположим две леммы.

Лемма 1. *Справедливы асимптотические равенства*

$$I_1(\alpha, r, s) \sim -\frac{\beta^{s-1} R^{s-2} \pi s}{\sin \pi s}, \quad r \rightarrow 1, \quad s \in (1, 2). \quad (49)$$

Доказательство. В интеграле $I_1(\alpha, r, s)$ выполним замену переменного по формуле $u \mapsto \beta R u$. Тогда

$$I_1(\alpha, r, s) = \beta^{s-1} R^{s-2} \int_0^{\frac{1}{R}} \frac{u^{s-2} (1 + 2u + Ru^2) du}{(1 - \beta^2 R^2 u^2)^{\frac{s}{2}} (1 + u)^2}.$$

Очевидно, что при $r \rightarrow 1$ для интеграла $I_1(\alpha, r, s)$ справедливо асимптотическое представление

$$I_1(\alpha, r, s) \sim \beta^{s-1} R^{s-2} \int_0^{\infty} \frac{u^{s-2} (1 + 2u) du}{(1 + u)^2}, \quad s \in (1, 2).$$

Учитывая, что

$$\int_0^{\infty} \frac{u^{s-2} (1 + 2u) du}{(1 + u)^2} = -\frac{\pi s}{\sin \pi s}, \quad s \in (1, 2),$$

приходим к (49). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Справедливы асимптотические равенства*

$$I_2(\alpha, r, s) \sim \frac{2}{\beta} \int_{\beta}^1 \frac{u^{s-1} du}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}}}, \quad r \rightarrow 1, \quad s \in (1, 2). \quad (50)$$

Доказательство. Выполним в интеграле $I_2(\alpha, r, s)$ предельный переход при $r \rightarrow 1$ с выполнением условия (20), сразу же приходим к (50). Лемма 2 доказана.

Из (49), (50) и (47) приходим к (48). Теорема 5 доказана.

Следствие 3 (полиномиальный случай). *Положив в формулировке теоремы 5 значение параметра $\alpha = 0$, получим*

$$|\hat{\varepsilon}_r^{(0)}(|\cdot|^s, x)| \leq |x| \sqrt{1-x^2} \frac{s(1-r)^{s-1}}{\left| \cos \frac{\pi s}{2} \right|}, \quad r \rightarrow 1, \quad s \in (1, 2).$$

Представляет интерес минимизировать правую часть соотношения (48) посредством выбора оптимального для этой задачи параметра α . Другими словами, искать наименьшую мажоранту приближений сопряженной функции с плотностью $|x|^s$, $s \in (1, 2)$, на отрезке $[-1, 1]$ сопряженными суммами Абеля – Пуассона (6). С этой целью положим

$$\hat{\varepsilon}_r^*(|\cdot|^s, x) = \inf_{\alpha \in (0, 1)} \hat{\varepsilon}_r^*(|\cdot|^s, x, \alpha), \quad r \in (0, 1).$$

Справедлива

Теорема 6. Для заданного $s \in (1, 2)$ имеют место асимптотические равенства

$$\hat{\varepsilon}_r^*(|\cdot|^s, x) \sim |\sin 2u| \left(\frac{s(s-1)}{2 \left| \cos \frac{\pi s}{2} \right|} \right)^{\frac{1}{s}} \frac{s}{s-1} (1-r)^{\frac{2}{s}(s-1)}, \quad r \rightarrow 1. \quad (51)$$

Доказательство. Исследуем равенство (48). Очевидно, что при постоянных значениях параметра $\beta, \beta \in (0, 1)$, порядок убывания правой части при $r \rightarrow 1$ не отличается от полиномиального. Пусть $\beta = \beta(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 1$ с обязательным выполнением условия (20). При этом находим, что

$$\int_{\beta}^1 \frac{u^{s-1} du}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}}} \xrightarrow{r \rightarrow 1} \int_0^1 \frac{u^{s-1} du}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}}} = \frac{\pi}{2 \sin \frac{\pi s}{2}}, \quad s \in (1, 2).$$

Следовательно,

$$\hat{\varepsilon}_r^*(|\cdot|^s, x, \alpha) \sim |\sin 2u| \left[\frac{\beta^{s-1} R^{s-1} s}{2 \left| \cos \frac{\pi s}{2} \right|} + \frac{R}{\beta} \right], \quad r \rightarrow 1, \quad s \in (1, 2). \quad (52)$$

При каждом заданном $s \in (1, 2)$ соответствующие значения величины, стоящей в квадратных скобках (52), имеют строгий минимум как функции переменного $\beta, \beta \in (0, 1]$. Действительно, функция в квадратных скобках является непрерывно дифференцируемой по $\beta, \beta \in (0, 1]$. Естественнo искать точку минимума этой функции по β там, где выполняется необходимое условие экстремума. Решая эту задачу, находим, что оптимальным при заданном $s \in (1, 2)$ будет значение

$$\beta^* = \left(\left| \cos \frac{\pi s}{2} \right| \frac{2R^{2-s}}{s(s-1)} \right)^{\frac{1}{s}}, \quad s \in (1, 2), \quad \alpha^* = \sqrt{\frac{1-\beta^*}{1+\beta^*}}.$$

При найденном оптимальном значении параметра, учитывая, что $R \sim 1-r, r \rightarrow 1$, из (52) приходим к (51). Теорема 6 доказана.

Замечание 4. Сравнивая результаты теоремы 6 и следствия 3, приходим к выводу, что при $s \in (1, 2)$ специальным выбором параметра $\alpha = \alpha(r)$ возможно добиться более высокой скорости приближений сопряженной функции с плотностью $|x|^s$ сопряженными суммами Абеля – Пуассона в сравнении с полиномиальным случаем. Данный результат отражает особенности рациональной аппроксимации в равномерной метрике сопряженных функций с плотностью, имеющей степенную особенность.

Заключение. Изучены аппроксимационные свойства сумм Абеля – Пуассона сопряженных рядов Фурье по одной системе алгебраических дробей Чебышева – Маркова. Установлено интегральное представление изучаемых сумм Абеля – Пуассона и приближений сопряженной функции на отрезке $[-1, 1]$ данным методом. Получены асимптотически точные верхние грани отклонений сопряженных сумм Абеля – Пуассона на классах $\bar{H}^{(\gamma)}[-1, 1], \gamma \in (0, 1]$, сопряженных функций $\hat{f}$, определяющихся интегралом (1), когда функция f удовлетворяет на отрезке $[-1, 1]$ условию Липшица, порядка $\gamma, \gamma \in (0, 1]$. Проведено исследование приближений сопряженной функции с плотностью $|x|^s, s \in (1, 2)$, изучаемым методом. Установлено интегральное представление и оценки сверху приближений, найдено асимптотическое выражение мажоранты прибли-

жений, получено оптимальное значение параметра, обеспечивающее максимальную скорость убывания мажоранты. Следствием полученных результатов являются асимптотические оценки приближений сопряженной функции с плотностью $|x|^s$, $s \in (1,2)$, суммами Абеля – Пуассона полиномиальных сопряженных рядов Фурье – Чебышева.

Список использованных источников

1. Пыхтеев, Г. Н. О вычислении некоторых сингулярных интегралов с ядром типа Коши / Г. Н. Пыхтеев // Приклад. математика и механика. – 1959. – Т. 23, № 6. – С. 1074–1082.
2. Гахов, Ф. Д. Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. – М.: Физматлит, 1958. – 543 с.
3. Мусхелишвили, Н. И. Сингулярные интегральные уравнения / Н. И. Мусхелишвили. – 3-е изд. – М.: Наука, 1968. – 513 с.
4. Butzer, P. L. The Operational Properties of the Chebyshev Transform. II. Fractional Derivatives / P. L. Butzer, R. L. Stens // Теория приближения функций: Междунар. конф. по теории приближения функций, Калуга, 24–28 июля 1975 г.: труды. – М.: Наука, 1977. – С. 49–61.
5. Моторный, В. П. Приближение некоторых классов сингулярных интегралов алгебраическими многочленами / В. П. Моторный // Укр. мат. журн. – 2001. – Т. 53, № 3. – С. 331–345.
6. Мисюк, В. Р. Сопряженные функции на отрезке и соотношения для их наилучших равномерных полиномиальных приближений / В. Р. Мисюк, А. А. Пекарский // Вест. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2015. – № 2. – С. 37–40.
7. Priwaloff, J. Sur les fonctions conjuguées / J. Priwaloff // Bull. Soc. Math. Fr. – 1916. – Vol. 44. – P. 100–103. <https://doi.org/10.24033/bmf.965>
8. Привалов, И. И. К теории сопряженных тригонометрических рядов / И. И. Привалов // Мат. сб. – 1923. – № 2. – С. 224–228.
9. Kolmogoroff, A. Sur les fonctions harmoniques conjuguées et les series de Fourier / A. Kolmogoroff // Fundam. Math. – 1925. – Vol. 7. – P. 24–29. <https://doi.org/10.4064/fm-7-1-24-29>
10. Riesz, M. Les fonctions conjuguées et les series de Fourier / M. Riesz // C. R. Acad. Sci. – 1924. – Vol. 178. – P. 1464–1467.
11. Riesz, M. Sur les fonctions conjuguées / M. Riesz // Math. Z. – 1927. – Vol. 27, № 1. – P. 218–244. <https://doi.org/10.1007/bf01171098>
12. Бари, Н. К. О наилучшем приближении тригонометрическими полиномами двух сопряженных функций / Н. К. Бари // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1955. – Т. 19, № 5. – С. 285–302.
13. Стечкин, С. Б. О наилучшем приближении сопряженных функций тригонометрическими полиномами / С. Б. Стечкин // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1956. – Т. 20, № 2. – С. 197–206.
14. Русак, В. Н. Равномерная рациональная аппроксимация сопряженных функций / В. Н. Русак, И. В. Рыбаченко // Вестн. БГУ. Сер. 1. Физика. Математика. Информатика. – 2013. – № 3. – С. 83–86.
15. Натансон, И. П. О порядке приближения непрерывной 2π -периодической функции при помощи ее интеграла Пуассона / И. П. Натансон // Докл. АН СССР. – 1950. – Т. 72, № 1. – С. 11–14.
16. Тиман, А. Ф. Точная оценка остатка при приближении периодических дифференцируемых функций интегралами Пуассона. / А. Ф. Тиман // Докл. АН СССР. – 1950. – Т. 74, № 1. – С. 17–20.
17. Штарк, Э. Л. Полное асимптотическое разложение для верхней грани уклонения функций из $Lip1$ от сингулярного интеграла Абеля – Пуассона / Э. Л. Штарк // Мат. заметки. – 1973. – Т. 13, № 1. – С. 21–28.
18. Жук, В. В. О порядке приближения непрерывной 2π -периодической функции при помощи средних Фейера и Пуассона ее ряда Фурье / В. В. Жук // Мат. заметки. – 1968. – Т. 4, № 1. – С. 21–32.
19. Русецкий, Ю. И. О приближении непрерывных на отрезке функций суммами Абеля – Пуассона / Ю. И. Русецкий // Сиб. мат. журн. – 1968. – Т. 9, № 1. – С. 136–144.
20. Жигалло, Т. В. Приближение функций, удовлетворяющих условию Липшица на конечном отрезке вещественной оси, интегралами Пуассона – Чебышева / Т. В. Жигалло // Проблемы управления и информатики. – 2018. – № 3. – С. 1–14.
21. Sz.-Nagy, B. Sur l'ordre de l'approximation d'une fonction par son intégrale de Poisson / B. Sz.-Nagy // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. – 1950. – Vol. 1, № 2–4. – P. 183–188. <https://doi.org/10.1007/bf02021310>
22. Баскаков, В. А. Асимптотические оценки приближения сопряженных функций сопряженными интегралами Абеля – Пуассона / В. А. Баскаков // Применение функционального анализа в теории приближений. – Калинин, 1975. – Вып. 5. – С. 14–20.
23. Жигало, К. М. Повна асимптотика відхилення від класу диференційовних функцій множини їх гармонійних інтегралів Пуассона / К. М. Жигало, Ю. И. Харкевич // Укр. мат. журн. – 2002. – Т. 54, № 1. – С. 43–52.
24. Жигало, К. М. Наближення спряжених диференційовних функцій їх інтегралами Абеля – Пуассона / К. М. Жигало, Ю. И. Харкевич // Укр. мат. журн. – 2009. – Т. 61, № 1. – С. 73–82.
25. Китбалян, А. А. Разложения по обобщенным тригонометрическим системам / А. А. Китбалян // Изв. АН Армян. ССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1963. – Т. 16, № 6. – С. 3–24.
26. Джрбашян, М. М. К теории рядов Фурье по рациональным функциям / М. М. Джрбашян // Изв. АН Армян. ССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1956. – Т. 9, № 7. – С. 3–28.

27. Rouba, Y. On one system of rational Chebyshev – Markov fractions / Y. Rouba, P. Patseika, K. Smatrytski // *Anal. Math.* – 2018. – Vol. 44, № 1. – P. 115–140. <https://doi.org/10.1007/s10476-018-0110-7>
28. Ровба, Е. А. Приближения сопряженных функций частичными суммами сопряженных рядов Фурье по одной системе алгебраических дробей Чебышева – Маркова / Е. А. Ровба, П. Г. Поцейко // *Изв. вузов. Математика.* – 2020. – № 9. – С. 68–84.
29. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. / Г. М. Фихтенгольц. – М.: Физматлит, 1970. – Т. 2. – 800 с.

References

1. Pykhteev G. N. On the evaluation of certain singular integrals with a kernel of the cauchy type. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1959, vol. 23, no. 6, pp. 1536–1548. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(59\)90010-3](https://doi.org/10.1016/0021-8928(59)90010-3)
2. Gakhov F. D. *Boundary Value Problems*. Moscow, Fizmatlit Publ., 1958. 543 p. (in Russian).
3. Muskhelishvili N. I. *Singular integral equations*. Moscow, Nauka Publ., 1968. 513 p. (in Russian).
4. Butzer P. L., Stens R. L. The Operational Properties of the Chebyshev Transform. II. Fractional Derivatives. *Teoriia priblizheniia funktsii: Mezhdunarodnaya konferentsiya po teorii priblizheniia funktsii, Kaluga, 24–28 iyulya 1975 g.: tr. [Approximation Theory of Functions: International Conference on the Theory of Approximation of Functions, Kaluga, 24–28 July 1975. Proceedings]*. Moscow, Nauka Publ., 1977, pp. 49–61 (in Russian).
5. Motornyi V. P. Approximation of some classes of singular integrals by algebraic polynomials. *Ukrainskii matematicheskii zhurnal = Ukrainian Mathematical Journal*, 2001, vol. 53, no. 3, pp. 331–345 (in Russian).
6. Misiuk V. R., Pekarskii A. A. Conjugate functions on an interval and relations for their best uniform polynomial approximations. *Vesti Natsyional'noi akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2015, no. 2, pp. 37–40 (in Russian).
7. Priwaloff J. Sur les fonctions conjuguées. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 1916, vol. 44, pp. 100–103. <https://doi.org/10.24033/bsmf.965>
8. Privalov I. I. On the theory of conjugate trigonometric series. *Matematicheskii sbornik = Sbornik: Mathematics*, 1923, no. 2, pp. 224–228 (in Russian).
9. Kolmogoroff A. Sur les fonctions harmoniques conjuguées et les series de Fourier. *Fundamenta Mathematicae*, 1925, vol. 7, pp. 24–29 (in French). <https://doi.org/10.4064/fm-7-1-24-29>
10. Riesz M. Les fonctions conjuguées et les series de Fourier. *Comptes rendus de l'Academie des Sciences*, 1924, vol. 178, pp. 1464–1467 (in French).
11. Riesz M. Sur les fonctions conjuguées. *Mathematische Zeitschrift*, 1927, vol. 27, no. 1, pp. 218–244 (in French). <https://doi.org/10.1007/bf01171098>
12. Bari N. K. Best approximation by trigonometric polynomials of two conjugate functions. *Izvestiya AN SSSR. Seriya matematicheskaya = Izvestiya: Mathematics*, 1955, vol. 19, no. 5, pp. 285–302 (in Russian).
13. Stechkin S. B. Best approximation of conjugate functions by trigonometric polynomials. *Izvestiya AN SSSR. Seriya matematicheskaya = Izvestiya: Mathematics*, 1956, vol. 20, no. 2, pp. 197–206 (in Russian).
14. Rusak V. N. Uniform rational approximation of conjugate functions. *Vestnik Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1. Fizika. Matematika. Informatika = Bulletin of the Belarusian State University. Series 1. Physics. Mathematics. Computer science*, 2013, vol. 3, pp. 83–86 (in Russian).
15. Natanson I. P. On the order of approximation of a continuous 2π -periodic function using its Poisson integral. *Doklady Akademii nauk SSSR [Proceedings of the Academy of Sciences of the USSR]*, 1950, vol. 72, no. 1, pp. 11–14 (in Russian).
16. Timan A. F. Exact estimate of the remainder in the approximation of periodic differentiable functions by Poisson integrals. *Doklady Akademii nauk SSSR [Proceedings of the Academy of Sciences of the USSR]*, 1950, vol. 74, no. 1, pp. 17–20 (in Russian).
17. Shtark E. L. Complete asymptotic expansion for the upper bound for the deviation of functions from Lip1 from the singular Abel – Poisson integral. *Matematicheskie zametki = Mathematical Notes*, 1973, vol. 13, no. 1, pp. 21–28 (in Russian).
18. Zhuk V. V. On the order of approximation of a continuous 2π -periodic function by means of the Fejér and Poisson means of its Fourier series. *Matematicheskie zametki = Mathematical Notes*, 1968, vol. 4, no. 1, pp. 21–32 (in Russian).
19. Rusetskii Yu. I. Approximation of continuous functions on an interval by Abel – Poisson means. *Sibirskii matematicheskii zhurnal = Siberian Mathematical Journal*, 1968, vol. 9, no. 1, pp. 136–144 (in Russian).
20. Zhigallo T. V. Approximation of functions satisfying the Lipschitz condition on a finite segment of the real axis by Poisson – Chebyshev integrals. *Problemy upravleniia i informatiki = Journal of Automation and Information Sciences*, 2018, no. 3, pp. 1–14 (in Russian).
21. Sz.-Nagy B. Sur l'ordre de l'approximation d'une fonction par son intégrale de Poisson. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*, 1950, vol. 1, no. 2–4, pp. 183–188 (in French). <https://doi.org/10.1007/bf02021310>
22. Baskakov V. A. Asymptotic estimates for the approximation of conjugate functions by conjugate Abel – Poisson integrals. *Primenenie funktsional'nogo analiza v teorii priblizhenii = Application of Functional Analysis in Approximation Theory*. Kalinin, 1975, iss. 5, pp. 14–20 (in Russian).
23. Zhigalo K. M., Kharkevich Yu. I. The asymptotic behavior of the visualization of the class of differential functions of the set of the i th harmonic Poisson integrals. *Ukrainskii matematicheskii zhurnal = Ukrainian Mathematical Journal*, 2002, vol. 54, no. 1, pp. 43–52 (in Ukrainian).
24. Zhigalo K. M., Kharkevich Yu. I. The approximation of conjugations of differential functions ix by Abel – Poisson integrals. *Ukrainskii matematicheskii zhurnal = Ukrainian Mathematical Journal*, 2009, vol. 61, no. 1, pp. 73–82 (in Ukrainian).

25. Kitbalian A. A. Expansions in generalized trigonometric systems. *Izvestiia AN Armianskoi SSR, Seriya fiziko-matematicheskikh nauk* [Bulletin of the Academy of Sciences of the Armenian SSR, Series Physical and Mathematical Sciences], 1963, vol. 16, no. 6, pp. 3–24 (in Russian).
26. Dzhrbashian M. M. On the theory of Fourier series in rational functions. *Izvestiia AN Armianskoi SSR, Seriya fiziko-matematicheskikh nauk* [Bulletin of the Academy of Sciences of the Armenian SSR, Series Physical and Mathematical Sciences], 1956, vol. 9, no. 7, pp. 3–28 (in Russian).
27. Rouba Y., Patseika P., Smatrytski K. On one system of rational Chebyshev–Markov fractions. *Analysis Mathematica*, 2018, vol. 44, no. 1, pp. 115–140. <https://doi.org/10.1007/s10476-018-0110-7>
28. Rovba E. A., Patseika P. G. Approximations of conjugate functions by partial sums of conjugate Fourier series with respect to one system of algebraic fractions of Chebyshev – Markov. *Izvestiya vuzov. Matematika = Russian Mathematics*, 2020, vol. 64, no. 9, pp. 61–75. <https://doi.org/10.3103/s1066369x20090066>
29. Fikhtengol'ts G. M. *Differential and Integral Calculus Course. Vol. 2*. Moscow, Fizmatlit Publ., 1970. 800 p. (in Russian).

Информация об авторах

Пойейко Павел Геннадьевич – кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры фундаментальной и прикладной математики (ул. Ожешко, 22, 230023, г. Гродно, Республика Беларусь). E-mail: pahamatby@gmail.com. <https://orcid.org/0000-0001-7835-0500>

Ровба Евгений Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой фундаментальной и прикладной математики, Гродненский государственный университет им. Я. Купалы (ул. Ожешко, 22, 230023, г. Гродно, Республика Беларусь). Email: rovba.ea@gmail.com

Information about the authors

Pavel G. Patseika – Ph. D. (Physics and Mathematics), Senior Lecturer of the Department of Fundamental and Applied Mathematics, Yanka Kupala State University of Grodno (22, Ozheshko Str., 230023, Grodno, Republic of Belarus). E-mail: pahamatby@gmail.com. <https://orcid.org/0000-0001-7835-0500>

Yauheni A. Rouba – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Department of Fundamental and Applied Mathematics, Yanka Kupala State University of Grodno (22, Ozheshko Str., 230023, Grodno, Republic of Belarus). Email: rovba.ea@gmail.com

ISSN 1561-2430 (Print)

ISSN 2524-2415 (Online)

УДК 517.537.38

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-2-176-184>

Поступила в редакцию 19.03.2021

Received 19.03.2021

И. Л. Васильев, В. В. Довгодили*Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь***О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ p -ГОЛОМОРФНЫХ
И p -АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ**

Аннотация. Рассмотрена взаимосвязь условий p -дифференцируемости, p -голоморфности и существования производной функции p -комплексного переменного. Найден общий вид p -голоморфной функции. Получены достаточные условия p -аналитичности и локальной обратимости. Доказаны принципы сохранения области и максимума нормы для p -голоморфной функции и теорема единственности.

Ключевые слова: дуальные числа, кольцо p -комплексных чисел, p -комплексные функции, делители нуля, p -голоморфность, p -аналитичность, локальная обратимость, принцип сохранения области, принцип максимума нормы, теорема единственности

Для цитирования. Васильев, И. Л. О некоторых свойствах p -голоморфных и p -аналитических функций / И. Л. Васильев, В. В. Довгодили // Вес. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2021. – Т. 57, № 2. – С. 176–184. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-2-176-184>

Igor L. Vassilyev, Vladimir V. Dovgodilin*Belarusian State University, Minsk, Belarus***ON SOME PROPERTIES OF p -HOLOMORPHIC AND p -ANALYTIC FUNCTIONS**

Abstract. In this article the relationship between the conditions of p -differentiability, p -holomorphicity, and the existence of the derivative of a function of a p -complex variable is considered. The general form of a p -holomorphic function is found. The sufficient conditions for p -analyticity and local invertibility are obtained. The open mapping theorem and the principle of maximum of the norm for a p -holomorphic function and the uniqueness theorem are proved.

Keywords: dual numbers, ring of p -complex numbers, p -complex functions, zero divisors, p -holomorphicity, p -analyticity, local invertibility, domain preservation principle, open mapping theorem, norm maximum principle, uniqueness theorem

For citation. Vassilyev I. L., Dovgodilin V. V. On some properties of p -holomorphic and p -analytic function. *Vestsi Natsyional'nai akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2021, vol. 57, no. 2, pp. 176–184 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-2-176-184>

Введение. Теория p -комплексных (дуальных) чисел и функций p -комплексных переменных в математической литературе освещена недостаточно. Имеющиеся результаты, приведенные в [1–3], касаются в основном алгебраических свойств кольца p -комплексных чисел, а также непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости p -комплексных функций. В работе [4] исследованы некоторые свойства p -комплексных степенных рядов. Дуальные числа находят применение в различных областях математики и физики, поэтому актуальным является дальнейшее изучение свойств p -комплексных функций. В статье рассмотрены некоторые свойства p -голоморфных и p -аналитических функций, а также изучены вопросы их локальной обратимости, доказаны принципы сохранения области и максимума нормы, а также теорема единственности.

О p -голоморфных и p -аналитических функциях. Пусть $\mathbb{C}_p$ – кольцо p -комплексных чисел: чисел вида $z = x + jy$, где $x, y \in \mathbb{R}$, $j^2 = 0$, $j \neq 0$. В кольце $\mathbb{C}_p$ имеются делители нуля jy и только они. Топология на $\mathbb{C}_p$ порождается следующей нормой: $\|z\| = \|x + jy\| = \max\{|x|, |y|\}$. Эту норму будем называть параболической. Модулем p -комплексного числа называется $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. (Более подробно с p -комплексными числами можно ознакомиться в работах [1] и [4].) Пусть $D \subset \mathbb{C}_p$ – область.

Рассмотрим p -комплексную в области D функцию $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$, где функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы в области $D^* = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : z = x + jy \in D\}$.

Определение 1. Говорят, что функция $f : D \subset \mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{C}_p$ имеет производную в точке $z \in \mathbb{C}_p$, если существует конечный предел

$$f'(z) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0, \\ \operatorname{Re} h \neq 0}} \frac{f(z+h) - f(z)}{h},$$

число $f'(z)$ называется производной в точке z .

Определение 2. Функция $f : D \subset \mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{C}_p$ называется p -дифференцируемой в $z \in \mathbb{C}_p$, если $\exists A \in \mathbb{C}_p$ такое, что

$$f(z+h) - f(z) = Ah + o(\|h\|),$$

при $\|h\| \rightarrow 0, \operatorname{Re} h \neq 0$.

Нетрудно проверить, что p -дифференцируемость в точке равносильна существованию производной в ней.

Теорема 1. Функция $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ имеет производную в $D \subset \mathbb{C}_p$ тогда и только тогда, когда $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы в $D^* \subset \mathbb{R}^2$ и выполнены следующие аналоги условий Коши – Римана

$$\begin{cases} u'_x(x, y) = v'_y(x, y), \\ u'_y(x, y) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

причем $f'(z) = f'(x + jy) = u'_x(x, y) + jv'_x(x, y)$.

Доказательство. Допустим $f(z)$ имеет производную в точке $z \in D$. Возьмем $z = x + jy$ и $h = \lambda \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(x + \lambda, y) - f(x, y)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{(u(x + \lambda, y) + jv(x + \lambda, y)) - (u(x, y) + jv(x, y))}{\lambda} = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(\frac{u(x + \lambda, y) - u(x, y)}{\lambda} + j \frac{v(x + \lambda, y) - v(x, y)}{\lambda} \right) = u'_x + jv'_x. \end{aligned}$$

Теперь пусть $h = \lambda + j\lambda$. Тогда

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(x + \lambda, y + \lambda) - f(x, y)}{\lambda(1 + j)} = \\ &= (1 - j) \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(\frac{u(x + \lambda, y + \lambda) - u(x, y)}{\lambda} + j \frac{v(x + \lambda, y + \lambda) - v(x, y)}{\lambda} \right) = \\ &= (1 - j) \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(\frac{(u'_x \lambda + u'_y \lambda) + \alpha(\lambda) \lambda}{\lambda} + j \frac{(v'_x \lambda + v'_y \lambda) + \beta(\lambda) \lambda}{\lambda} \right) = \\ &= (1 - j)(u'_x + u'_y + j(v'_x + v'_y)), \end{aligned}$$

где $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \alpha(\lambda) = 0$ и $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \beta(\lambda) = 0$.

Сравнивая два выражения для $f'(z)$, получаем

$$u'_x + jv'_x = (1 - j)(u'_x + u'_y + j(v'_x + v'_y)) = u'_x + u'_y + j(v'_x + v'_y - u'_x - u'_y),$$

откуда и следует, что $u'_x = v'_y$ и $u'_y = 0$.

Теперь, пусть $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы в точке $(x, y) \in D^*$ и удовлетворяют равенствам $u'_x = v'_y$ и $u'_y = 0$. Тогда, при $h = s + jt$

$$f(z+h) - f(z) = (u(x+s, y+t) - u(x, y)) + j(v(x+s, y+t) - v(x, y)) =$$

$$\begin{aligned}
&= (u'_x s + u'_y t) + \alpha(h)h + j(v'_x s + v'_y t) + \beta(h)h = (u'_x + jv'_x)s + ju'_y t + \alpha(h)h + \beta(h)h = \\
&= (u'_x + jv'_x) \left(\frac{h + \bar{h}}{2} \right) + u'_x \left(\frac{h - \bar{h}}{2} \right) + (\alpha(h) + \beta(h))h = \\
&= u'_x h + jv'_x h - jv'_x \frac{h}{2} + jv'_x \frac{\bar{h}}{2} + u'_x \frac{\bar{h}}{2} - u'_x \frac{h}{2} + (\alpha(h) + \beta(h))h = \\
&= (u'_x + jv'_x)h - jv'_x \frac{s + jt}{2} + jv'_x \frac{s - jt}{2} + (\alpha(h) + \beta(h))h = \\
&= (u'_x + jv'_x)h - jv'_x \frac{s}{2} + jv'_x \frac{s}{2} + (\alpha(h) + \beta(h))h = (u'_x + jv'_x)h + v(h)h,
\end{aligned}$$

где $\lim_{h \rightarrow 0} v(h) = \lim_{h \rightarrow 0} (\alpha(h) + \beta(h)) = 0$. Отсюда следует, что

$$f'(z) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0, \\ \operatorname{Re} h \neq 0}} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = u'_x + jv'_x.$$

Таким образом, $f(z)$ имеет производную в области, где выполнены условия (1). Теорема 1 доказана.

Определение 3. Функция $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ называется p -голоморфной в $z_0 = x_0 + jy_0 \in \mathbb{C}_p$, если в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы и выполнены условия (1).

Замечание 1. Термин « p -голоморфность» объясняется тем, что функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ являются решениями параболической системы уравнений (1).

Лемма 1. Если $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ удовлетворяет равенствам $u'_x = v'_y$ и $u'_y = 0$ в некоторой области, то она представима в виде $f(z) = u(x) + j(yu'(x) + \varphi(x))$, где функция $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема, а $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна.

Доказательство. Поскольку $u'_y = 0$, тогда $u(x, y) = u(x)$. Таким образом, получаем, что $u'(x) = u'_x = v'_y$, интегрируя по y получаем $v(x, y) = yu'(x) + \varphi(x)$. Лемма 1 доказана.

Очевидно, что функции данного вида p -голоморфны при условии, что $\varphi(x)$ дифференцируема, а $u(x)$ дважды дифференцируема.

Теорема 2. Функция $f(z)$ p -голоморфна в z тогда и только тогда, когда представима в виде

$$f(z) = f(x) + jf'(x)y. \quad (2)$$

Доказательство. Пусть функция $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ p -голоморфна в $z = x + jy$. Тогда $f(z) = u(x) + j(yu'(x) + \varphi(x))$. При $y = 0$ получаем, что $f(x) = u(x) + j\varphi(x)$, а значит, $u(x) = f(x) - j\varphi(x)$ и $u'(x) = f'(x) - j\varphi'(x)$, следовательно,

$$\begin{aligned}
f(z) &= (f(x) - j\varphi(x)) + j(yu'(x) + \varphi(x)) = f(x) - j\varphi(x) + jyu'(x) + j\varphi(x) = \\
&= f(x) + jy(f'(x) - j\varphi'(x)) = f(x) + jyf'(x),
\end{aligned}$$

что и требовалось получить.

Теперь пусть $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ представима в виде (2).

При $y = 0$ получаем, что $f(x) = u(x, 0) + jv(x, 0)$, а $f'(x) = u'_x(x, 0) + jv'_x(x, 0)$. Тогда по формуле (2)

$$\begin{aligned}
f(z) &= (u(x, 0) + jv(x, 0)) + jy(u'_x(x, 0) + jv'_x(x, 0)) = \\
&= u(x, 0) + j(yu'_x(x, 0) + v(x, 0)).
\end{aligned}$$

Очевидно, что данная функция удовлетворяет условиям (1). Теорема 2 доказана.

Далее нам понадобится следующая теорема из вещественного анализа, доказательство которой вытекает из [5, теорема 15.18, с. 261] и которое мы не приводим.

Теорема 3. Пусть $F: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ дифференцируема в окрестности точки $(a, b) \in D$. Тогда

$$|F(a+s, b+t) - F(a, b)| \leq \sup_{0 < \theta < 1} \left| F'(a + \theta s, b + \theta t) \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} \right|. \quad (3)$$

Поставим в соответствие функции $f(z)$ отображение $F(x, y) = \begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix}$, будем называть его сопутствующим. Его матрица Якоби

$$F'(x, y) = \begin{bmatrix} u'_x(x, y) & u'_y(x, y) \\ v'_x(x, y) & v'_y(x, y) \end{bmatrix}.$$

Из неравенства Коши – Буняковского и теоремы 3 получим

$$\begin{aligned} |F(a+s, b+t) - F(a, b)| &= \left| \begin{bmatrix} u(a+s, b+t) - u(a, b) \\ v(a+s, b+t) - v(a, b) \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{bmatrix} \right| = \\ &= \sqrt{(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2} \leq \sup_{0 < \theta < 1} \sqrt{(u'_x s + u'_y t)^2 + (v'_x s + v'_y t)^2} \leq \\ &\leq \sup_{0 < \theta < 1} \sqrt{((u'_x)^2 + (u'_y)^2 + (v'_x)^2 + (v'_y)^2)(s^2 + t^2)}, \end{aligned}$$

где все производные вычислены в точке $(a + \theta s, b + \theta t)$.

Таким образом, из (3) следует

$$|F(a+s, b+t) - F(a, b)| \leq \sup_{0 < \theta < 1} \sqrt{((u'_x)^2 + (u'_y)^2 + (v'_x)^2 + (v'_y)^2)(s^2 + t^2)}. \quad (4)$$

Пусть $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ p -голоморфна в области $D \subset \mathbb{C}_p$.

А значит, $u'_y = 0$, $u'_x = v'_y$, $f'(z) = u'_x + jv'_x$, $\|f'(z)\| = \max\{|u'_x|, |v'_x|\}$. Тогда $|u'_x| \leq \|f'(z)\|$, $|v'_x| \leq \|f'(z)\|$, $|v'_y| = |u'_x| \leq \|f'(z)\|$. Заметим, что

$$\|f(z+h) - f(z)\| = \|\Delta u + j\Delta v\| = \max\{|\Delta u|, |\Delta v|\} \leq \sqrt{|\Delta u|^2 + |\Delta v|^2},$$

и

$$|h| = |s + jt| = \sqrt{s^2 + t^2} \leq \sqrt{2} \max\{|s|, |t|\} = \sqrt{2} \|h\|.$$

Теорема 4. Пусть $f(z)$ p -голоморфна в области $D \subset \mathbb{C}_p$. Тогда

$$\|f(z+h) - f(z)\| \leq \sqrt{6} \max_{\tau \in [z, z+h]} \|f'(\tau)\| \|h\|.$$

Доказательство. Пусть отрезок $[z, z+h] \subset D$. В силу теоремы 3 и следующего из него неравенства (4), а также приведенных выше рассуждений

$$\begin{aligned} \|f(z+h) - f(z)\| &\leq \sqrt{|\Delta u|^2 + |\Delta v|^2} \leq \max_{\tau \in [z, z+h]} \sqrt{((u'_x)^2 + (u'_y)^2 + (v'_x)^2 + (v'_y)^2)(s^2 + t^2)} \leq \\ &\leq \max_{\tau \in [z, z+h]} \sqrt{(\|f'(\tau)\|^2 + \|f'(\tau)\|^2 + \|f'(\tau)\|^2) |h|^2} \leq \\ &\leq \max_{\tau \in [z, z+h]} \sqrt{3 \|f'(\tau)\|^2} \|h\| = \sqrt{6} \max_{\tau \in [z, z+h]} \|f'(\tau)\| \|h\|. \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

Определение 4. Функция $f(z)$ называется p -аналитической в точке a , если существует ее окрестность $U(a)$ такая, что для любой точки $z \in U(a)$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k, \quad (5)$$

где $c_k \in \mathbb{C}_p$, $k = 0, 1, \dots$.

Теорема 5. Пусть функция f бесконечно p -дифференцируема в $D \subset \mathbb{C}_p$, и $\|f^{(n)}(z)\| \leq Mn!$ при любых $n \in \mathbb{N}$, где $z \in U(a) = \{z - a\| \leq R\}$, $R < 1$, достаточно мало так, что $U(a) \subset D$. Тогда f разлагается в ряд (5), равномерно сходящийся в $U(a)$.

Доказательство. Пусть $z \in U(a)$. Перепишем $f(z)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} f(z) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + r_n(z) = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k + r_n(z) = T_n(z, a) + r_n(z). \end{aligned}$$

Т. е. $r_n(z) = f(z) - T_n(z, a)$.

Рассмотрим функцию $F(t) = f(z) - T_n(z, t) = f(z) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(z-t)^k$. Очевидно, что она p -голоморфна. Кроме того, $F(z) = 0$ и $F(a) = r_n(z)$, а ее производная

$$F'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(z-t)^n.$$

В силу теоремы 4 и условия $\|f^{(n)}(z)\| \leq Mn!$ при $\|z-a\| \leq R$, где $R < 1$ достаточно мало, и учитывая $\|(z-t)^n\| \leq n\|z-t\|^n$, получаем

$$\begin{aligned} \|r_n(z)\| &= \|F(z) - F(a)\| \leq \sqrt{6} \max_{\tau \in [a, z]} \|F'(\tau)\| \|z-a\| \leq \\ &\leq 2\sqrt{6}M \frac{(n+1)!nR^n}{n!} \|z-a\| \leq 2\sqrt{6}Mn(n+1)R^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Таким образом, f p -аналитична в точке $a \in D$ и

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k,$$

причем ряд сходится равномерно в $U(a)$. Теорема 5 доказана.

Замечание 2. Из теоремы 5 следует, что ряд (5) есть ряд Тейлора своей суммы.

Теорема 6. Пусть функция f бесконечно p -дифференцируема в $D \subset \mathbb{C}_p$, и $\|f^{(n)}(z)\| \leq Me^{AR^m}$ при любых $n \in \mathbb{N}$, где $z \in U(a) = \{\|z-a\| \leq R\} \subset D$. Тогда f разлагается в ряд (5), равномерно сходящийся в $U(a)$.

Доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы. В силу теоремы 4 и $\|f^{(n)}(z)\| \leq Me^{AR^m}$ при $\|z-a\| \leq R$ и учитывая $\|(z-t)^n\| \leq n\|z-t\|^n$, получаем

$$\begin{aligned} \|r_n(z)\| &= \|F(z) - F(a)\| \leq \sqrt{6} \max_{\tau \in [a, z]} \|F'(\tau)\| \|z-a\| \leq \\ &\leq 2\sqrt{6}M \frac{e^{AR^m} nR^n}{n!} \|z-a\| \leq 2\sqrt{6}M \frac{e^{AR^m} R^{n+1}}{(n-1)!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Таким образом, f p -аналитична в точке $a \in D$ и

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k,$$

причем ряд сходится равномерно в $U(a)$. Теорема 6 доказана.

О локальной обратимости p -голоморфных функций. Пусть функция $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ p -голоморфна в области $D \subset \mathbb{C}_p$. В отличие от классических голоморфных функций условие $f'(z) \neq 0$ не является достаточным даже для локальной обратимости p -голоморфных функций. Например, для функции $f(z) = jz = jx$ производная $f'(z) = j$ всюду в $\mathbb{C}_p$, однако эта функция не обратима ни в одной точке, так как j делитель нуля. При более сильных ограничениях локальная обратимость p -голоморфных функций имеет место.

Теорема 7. Пусть функция $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ p -голоморфна в области $D \subset \mathbb{C}_p$ и $a = \alpha + j\beta \in D$. Если $u'_x(\alpha, \beta) \neq 0$, то существуют открытая окрестность A точки a и откры-

тая окрестность B точки $b = f(a)$ такие, что функция $f : A \rightarrow B$ имеет обратную $f^{-1} : B \rightarrow A$, которая непрерывно p -дифференцируема в B , и

$$\{f^{-1}\}'(w) = \frac{1}{f'(z)}, \quad (6)$$

где $w = f(z)$. Если же $u'_x(x, y) \equiv 0$ в некоторой окрестности точки $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, то f не обратима в соответствующей окрестности точки a .

Доказательство. Поставим функции f в соответствие непрерывно дифференцируемое в окрестности точки $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ сопутствующее отображение $F(x, y) = \begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix}$. Его якобиан

$$J = \det F'(x, y) = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u'_x & 0 \\ v'_x & u'_x \end{vmatrix} = (u'_x)^2,$$

$J(\alpha, \beta) = \det F'(\alpha, \beta) \neq 0$. В силу теоремы об обратном отображении существуют открытая окрестность A^* точки $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ и открытая окрестность B^* точки $F(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ такие, что отображение $F : A^* \rightarrow B^*$ имеет обратное $F^{-1} : B^* \rightarrow A^*$. Это отображение также непрерывно дифференцируемо и

$$\{F^{-1}\}'(u, v) = \{F'(x, y)\}^{-1}. \quad (7)$$

Отображению $F^{-1}(u, v) = \begin{bmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \end{bmatrix}$ поставим в соответствие функцию

$$z = f^{-1}(w) = x(u, v) + jy(u, v).$$

Окрестностям A^* и B^* соответствуют окрестности A и B точек $a = \alpha + j\beta$ и $b = f(a)$. Тогда функции $f : A \rightarrow B$ и $f^{-1} : B \rightarrow A$ являются обратными друг к другу.

Теперь докажем (6). Имеем:

$$F'(x, y) = \begin{bmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u'_x & 0 \\ v'_x & u'_x \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \{F'(x, y)\}^{-1} &= \begin{bmatrix} u'_x / J & 0 \\ -v'_x / J & u'_x / J \end{bmatrix}, \\ \{F^{-1}\}'(u, v) &= \begin{bmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Из (7) получим, что

$$x'_u = \frac{u'_x}{J}, \quad x'_v = 0, \quad y'_u = \frac{-v'_x}{J}, \quad y'_v = \frac{u'_x}{J}.$$

Для функции $z = f^{-1}(w) = x(u, v) + jy(u, v)$ имеем

$$x'_u = y'_v = \frac{u'_x}{J}, \quad x'_v = 0.$$

Следовательно, f^{-1} — p -голоморфна в B , тогда

$$\{f^{-1}\}'(w) = x'_u + jy'_u = \frac{u'_x - jv'_x}{J} = \frac{1}{u'_x + jv'_x} = \frac{1}{f'(z)}.$$

Пусть теперь $u'_x(x, y) \equiv 0$ в некоторой окрестности A^* точки (α, β) . Функция f в соответствующей окрестности A точки a имеет вид $f(z) = c + jv(x)$. Рассмотрим произвольный интервал $Y = \{z = x_0 + jy\} \subset A$. Его образом является точка $w_0 = c + jv(x_0)$. Таким образом, функция f не обратима в A , что и требовалось доказать.

Принцип сохранения области. Для p -голоморфных функций классический принцип сохранения области из комплексного анализа не имеет места. Например, образом области

$$D = \{z = x + jy \in \mathbb{C}_p : \alpha < x < \beta; \mu < y < \nu\}$$

при отображении $f(z) = jz = jx$ будет интервал $\{jy \in \mathbb{C}_p : \alpha < y < \beta\}$, который не является областью в $\mathbb{C}_p$. Тем не менее верна

Теорема 8. Пусть функция $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ p -голоморфна в области $D \subset \mathbb{C}_p$ и $u'_x(x, y) \neq 0$ в области D^* . Тогда множество $E = f(D)$ также является областью. Если же $u'_x(x, y) \equiv 0$ в области D^* , то $f(D)$ – интервал вида $\gamma = \{z = c + jy : m < y < M\}$, где $m = \inf_{z \in D} v(x)$, $M = \sup_{z \in D} v(x)$.

Доказательство. Пусть $u'_x(x, y) \neq 0$ для любой точки $(x, y) \in D^*$. Сперва докажем, что $E = f(D)$ открытое множество. Выберем произвольную точку $w_0 = f(z_0) \in E$, где $z_0 = x_0 + jy_0 \in D$. В силу теоремы 7 найдутся открытые окрестности A и B точек z_0 и w_0 соответственно такие, что функция $f : A \rightarrow B$ имеет обратную $f^{-1} : B \rightarrow A$. Тогда для любой $w_1 \in B$ существует единственная $z_1 \in A$ такая, что $z_1 = f^{-1}(w_1)$ и $w_1 = f(z_1) \in E$. Следовательно E – открытое множество.

Теперь докажем, что E – связное множество. Для открытых множеств связность эквивалентна линейной связности [6, с. 24]. Пусть $w_1, w_2 \in E$, $z_1 \in D$ – один из прообразов w_1 , $z_2 \in D$ – один из прообразов w_2 . Найдется путь $\gamma : z = z(t)$, $t \in [0, 1]$, связывающий в D точки z_1 и z_2 . Из непрерывности f вытекает, что образ $\gamma^* : z = f[z(t)]$, $t \in [0, 1]$, будет путем, связывающим в E точки w_1 и w_2 . Очевидно, что $\gamma^* \subset E$. Следовательно, E – связное множество.

Таким образом, при $u'_x(x, y) \neq 0$ в области D^* множество $E = f(D)$ является областью.

Пусть теперь $u'_x(x, y) \equiv 0$ во всей D^* . Тогда функция f имеет вид $f(z) = c + jv(x)$. Обозначим $m = \inf_{z \in D} v(x)$ и $M = \sup_{z \in D} v(x)$. Пусть $z_0 = x_0 + jy_0$ – произвольная точка из D . Тогда $w_0 = f(z_0) = c + jv(x_0)$. Следовательно, при этом отображении образом области D будет интервал $\gamma = \{z = c + jy : m < y < M\}$, который не является областью в $\mathbb{C}_p$. Теорема 8 доказана.

Принцип максимума нормы. Теорема 9. Пусть функция $w = f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ p -голоморфна в области $D \subset \mathbb{C}_p$ и $u'_x(x, y) \neq 0$ в области D^* . Тогда функция $\|f(z)\|$ не может достигать максимума во внутренней точке области D .

Доказательство. В силу теоремы 8 множество $E = f(D)$ является областью. Пусть $\|f(z)\|$ достигает максимума в $z_0 \in D$. Обозначим $w_0 = f(z_0) \in E$. Найдутся открытые окрестности A и B точек z_0 и w_0 соответственно такие, что функция $f : A \rightarrow B$ имеет обратную. Очевидно, что в окрестности B найдется сколько угодно близкая к w_0 точка w_1 такая, что $\|w_1\| > \|w_0\|$. Тогда в A найдется точка z_1 такая, что $w_1 = f(z_1)$. Это противоречит тому, что $\|f(z)\|$ достигает максимума в z_0 . Что и требовалось доказать.

Следствие 1. Если в условиях теоремы 9 функция $f \in C(\overline{D})$, то $\|f(z)\|$ достигает максимума на границе ∂D .

Следствие 2. Если в условиях теоремы 9 функция $f \neq 0$ для любой $z \in D$, то $\|f(z)\|$ не может достигать минимума внутри D .

Нули аналитических функций и теорема единственности. В отличие от классических голоморфных функций, нули которых всегда изолированы, если функция не тождественный нуль, нули p -голоморфной функции могут быть не изолированы. Например, функции z^2 и z^3 имеют кратный корень 0, а следовательно, и вертикальную прямую нулей $I = \{z = jy : y \in \mathbb{R}\}$.

Для p -аналитических функций не будет выполняться теорема единственности в классической формулировке из комплексного анализа, что видно из примера выше. Действительно, обе функции равны на прямой I , однако ни в одной области они не будут совпадать. Тем не менее аналог теоремы единственности будет выполняться при более сильных ограничениях.

Сначала докажем следующее.

Лемма 2. Пусть функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ аналитична на интервале $I \subset \mathbb{R}$, а точка $x_0 \in I$ – нуль этой функции. Если в некоторой окрестности точки x_0 функция f отлична от тождественного нуля, то существует проколота окрестность $U(x_0) \setminus \{x_0\}$ такая, что для любой $x \in U(x_0) \setminus \{x_0\}: f(x) \neq 0$.

Доказательство. Функция f – аналитична, поэтому разложим ее в ряд

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k,$$

сходящийся в некоторой окрестности $U_1(x_0)$. Заметим, что $a_0 = f(x_0) = 0$. Так как f отлична от тождественного нуля в $U_1(x_0)$, то среди остальных коэффициентов есть отличные от нуля. Пусть $a_n \neq 0$, а $a_0 = a_1 = \dots = a_{n-1} = 0$. Тогда

$$f(x) = a_n (x - x_0)^n + a_{n+1} (x - x_0)^{n+1} + a_{n+2} (x - x_0)^{n+2} + \dots = (x - x_0)^n \varphi(x),$$

где

$$\varphi(x) = a_n + a_{n+1} (x - x_0) + a_{n+2} (x - x_0)^2 + \dots,$$

причем этот ряд сходится в той же окрестности $U_1(x_0)$. Так как $\varphi(x)$ – аналитична и $\varphi(x_0) = a_n$, то существует такая окрестность $U(x_0) \subset U_1(x_0)$, что в любой ее точке $\varphi(x) \neq 0$. Лемма 2 доказана.

Теорема 10. Пусть функции f_1 и f_2 p -аналитичны в области $D \subset \mathbb{C}_p$. Также пусть $f_1(z_n) = f_2(z_n)$, где последовательность $z_n \in D$, $n = 0, 1, \dots$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0 \in D$. Если $\forall n \in \mathbb{N}: \operatorname{Re} z_n \neq \operatorname{Re} z_0$, то $f_1 \equiv f_2$ всюду в D .

Доказательство. Достаточно доказать, что $f := f_1 - f_2 = 0$ всюду в D . Введем в рассмотрение множество $\Phi := \{z \in D: f(z) = 0\}$. Покажем, что $\Phi = D$. Рассмотрим его внутренность $\operatorname{int} \Phi \subset \Phi$. Пусть $c_k = a_k + j b_k$, $z_0 = x_0 + j y_0$, $z = x + j y$. Нетрудно убедиться, что

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k + j \left((y - y_0) \sum_{k=1}^{\infty} a_k k (x - x_0)^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k \right). \quad (8)$$

В силу непрерывности p -аналитической функции $f(z_0) = 0$, так как для любого $n \in \mathbb{N}: f(z_n) = 0$.

Тогда из (8) и леммы 2 следует, что сумма ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ тождественно равна нулю на неко-

тором интервале $I(x_0) \subset \mathbb{R}$, где $\operatorname{Re} z_0 = x_0 \in I(x_0)$, так как в любой проколота окрестности точки x_0 найдутся нули указанной суммы. А значит, в этом же интервале будет равна нулю сумма ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k k (x - x_0)^{k-1}$. В силу вышесказанного из леммы 2 и равенства (8) вытекает, что найдется со-

держащий x_0 интервал $I_1(x_0) \subset I(x_0)$ такой, что в нем $\sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k \equiv 0$. Отсюда и следует, что

существует окрестность $U(z_0)$, в которой $f(z) \equiv 0$. Поэтому $z_0 \in \operatorname{int} \Phi$, а значит, $\operatorname{int} \Phi \neq \emptyset$. Если $\operatorname{int} \Phi = D$, то теорема доказана. Если $\operatorname{int} \Phi \subset D$, но $\operatorname{int} \Phi \neq D$, то найдется граничная точка d множества $\operatorname{int} \Phi$, которая является внутренней точкой D . Тогда найдется последовательность $\{d_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \operatorname{int} \Phi$ такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = d \in D$ и $\forall n \in \mathbb{N}: \operatorname{Re} d_n \neq \operatorname{Re} d$. Заметим, что $\lim_{n \rightarrow \infty} f(d_n) = f(d) = 0$.

Учитывая рассуждения, приведенные выше, заключаем, что найдется окрестность $U(d)$ такая, что в ней $f(z) \equiv 0$. Однако это противоречит тому, что d – граничная точка $\operatorname{int} \Phi$, а значит, $\operatorname{int} \Phi = D$. В силу включений $\operatorname{int} \Phi \subset \Phi \subset D$ имеем $\Phi = D$. Теорема 10 доказана.

Заключение. Рассмотрены условия p -дифференцируемости, p -голоморфности и существования производной функции p -комплексного переменного. Найден общий вид p -голоморфной функции. Получены условия p -аналитичности и локальной обратимости. Доказаны принципы сохранения области и максимума нормы для p -голоморфной функции и теорема единственности.

Список использованных источников

1. Яглом, И. М. Комплексные числа и их применение в геометрии / И. М. Яглом. – Изд. 2-е, стер. – М.: Едиториал УРСС. – 2004. – 192 с.
2. Messelmi, F. Analysis of Dual Functions / F. Messelmi // Ann. Rev. Chaos Theory, Bifurc. Dynam. Sys. – 2013. – Vol. 4. – P. 37–54.
3. DenHartigh, K. Liouville theorems in the Dual and Double Planes / K. DenHartigh, R. Flim // Rose-Hulman Undergraduate Mat. J. – 2011. – Vol. 12, № 2. – P. 37–60.
4. Довгодилин, В. В. Сходимость на множестве p -комплексных чисел и свойства p -комплексных степенных рядов / В. В. Довгодилин // Весці БДПУ. Сер. 3. Фізіка. Матэматыка. Інфарматыка. Біялогія. Геаграфія. – 2020. – № 4. – С. 32–39.
5. Зверович, Э. И. Вещественный и комплексный анализ: в 6 ч. / Э. И. Зверович. – Минск: Выш. шк., 2008. – Ч. 2: Интегральное исчисление функций скалярного аргумента; Ч. 3: Дифференциальное исчисление функций векторного аргумента. – 319 с.
6. Шабат, Б. В. Введение в комплексный анализ: в 2 ч. / Б. В. Шабат. – М.: Физматгиз, 1961. – Ч. 1: Функции одного переменного. – 336 с.

References

1. Yaglom I. M. *Complex Numbers in Geometry*. Moscow: Editorial URSS Publ., 2004. 192 p. (in Russian).
2. Messelmi F. Analysis of Dual Functions. *Annual Review of Chaos Theory, Bifurcations and Dynamical Systems*, 2013, vol. 4, pp. 37–54.
3. DenHartigh K., Flim R. Liouville theorems in the Dual and Double Planes. *Rose-Hulman Undergraduate Mathematics Journal*, 2011, vol. 12, no. 2, pp. 37–60.
4. Dovgodilin V. Convergence on a set of p -complex numbers and properties of p -complex power series. *Vestsi BDPU. Seriya 3. Fizika. Matematyka. Infarmatyka. Biyalogiya. Geagrafiya* [BGPU Bulletin. Series 3. Physics. Mathematics. Informatics. Biology. Geography], 2020, no. 4, pp. 32–39 (in Russian).
5. Zverovich E. I. *Real and Complex Analysis. In 6 chapters. Chapter 2. Integral calculus of functions of scalar argument. Chapter 3. Differential calculus of vector argument functions*. Minsk: Vysheishaya shkola Publ., 2008. 319 p. (in Russian).
6. Shabat B. V. *Introduction to Complex Analysis. Chapter 1. Functions of one variable*. Moscow, Fizmatlit Publ., 1961. 336 p. (in Russian).

Информация об авторах

Васильев Игорь Леонидович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры теории функций, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: Vassilyevl@bsu.by

Довгодилин Владимир Владимирович – аспирант, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: footballer4@mail.ru

Information about the authors

Igor L. Vassilyev – Ph. D. (Physics and Mathematics), Assistant Professor, Assistant Professor of the Department of Function Theory, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: Vassilyevl@bsu.by

Vladimir V. Dovgodilin – Postgraduate Student, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: footballer4@mail.ru

ISSN 1561-2430 (Print)
 ISSN 2524-2415 (Online)
 УДК 517.9

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-2-185-189>

Поступила в редакцию 16.11.2020

Received 16.11.2020

М. В. Щукин

Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь

n -ОДНОРОДНЫЕ C^* -АЛГЕБРЫ

Аннотация. Рассматриваются результаты, касающиеся n -однородных C^* -алгебр. Приводятся классические результаты Ж. Фелла, Ж. Томияма, М. Такесаки, описывающие n -однородную C^* -алгебру как алгебру всех непрерывных сечений соответствующего алгебраического расслоения. Посредством этой геометрической интерпретации, различные авторы описывали классы n -однородных C^* -алгебр с пространством примитивных идеалов, гомеоморфным двумерной сфере S^2 , трехмерной сфере S^3 , двумерному тору T^2 , трехмерному тору T^3 , произвольному связному ориентируемому и неориентируемому компактному двумерному многообразию. Также А. Антонец и Н. Крупник задавали различные структуры на множестве классов эквивалентности алгебраических расслоений на сферах. Дальнейшая работа в этом направлении может состоять в описании классов эквивалентности алгебраических расслоений над трехмерными, четырехмерными многообразиями и т. д.

Ключевые слова: n -однородная C^* -алгебра, пространство примитивных идеалов, алгебраическое расслоение, расслоенное пространство, база расслоения, операторная алгебра, двумерное многообразие, двумерный тор, трехмерный тор, двумерная сфера, трехмерная сфера

Для цитирования. Щукин, М. В. n -Однородные C^* -алгебры / М. В. Щукин // Вест. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2021. – Т. 57, № 2. – С. 185–189. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-2-185-189>

Mikhail V. Shchukin

Belarusian National Technical University, Minsk, Belarus

N -HOMOGENEOUS C^* -ALGEBRAS

Abstract. The classical results by J. Fell, J. Tomiyama, M. Takesaki describe n -homogeneous C^* -algebras as algebras of all continuous sections for an appropriate algebraic bundle. By using this realization, several authors described the set of n -homogeneous C^* -algebras with different spaces of primitive ideals. In 1974 F. Krauss and T. Lawson described the set of all n -homogeneous C^* -algebras whose space $\text{Prim} A$ of primitive ideals is homeomorphic to the sphere S^2 . Suppose the space $\text{Prim} A$ of primitive ideals is homeomorphic to the sphere S^3 for some n -homogeneous C^* -algebra A . In this case, these authors showed that the algebra A is isomorphic to the algebra $C(S^3, C^{n \times n})$. If $n \geq 2$ then there are countably many pairwise non-isomorphic n -homogeneous C^* -algebras A such that $\text{Prim} A \cong S^4$. Further, let $n \geq 3$. There is only one n -homogeneous C^* -algebra A such that $\text{Prim} A \cong S^5$. There are two non-isomorphic 2-homogeneous C^* -algebras A and B with space $\text{Prim} A \cong S^5$. On the other hand, algebraic bundles over the torus T^2 are described by a residue class $[p]$ in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \pi_1(PU_n)$. Two such bundles with classes $[p_i]$ produce isomorphic C^* -algebras if and only if $[p_1] = \pm[p_2]$. An algebraic bundle over the torus T^3 is determined by three residue classes in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Anatolii Antonevich and Nahum Krupnik introduced some structures on the set of algebraic bundles over the sphere S^2 . Algebraic bundles over the compact connected two-dimensional oriented manifolds were considered by the author. In this case, the set of non-equivalent algebraic bundles over such space is like the set of algebraic bundles over the torus T^2 . Further advances could be in describing the set of algebraic bundles over the 3-dimensional manifolds.

Keywords: C^* -algebras, operator algebras, algebraic bundles, n -homogeneous C^* -algebras, two-dimensional manifolds, G -bundles, fiber bundles

For citation. Shchukin M. V. n -Homogeneous C^* -algebras. *Vestsi Natsyianal'noi akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk* = *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2021, vol. 57, no. 2, pp. 185–189 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-2-185-189>

Введение. Интерес к C^* -алгебрам возник в связи с тем, что C^* -алгебра может быть реализована как замкнутая самосопряженная подалгебра алгебры $B(H)$ ограниченных линейных операторов на гильбертовом пространстве H . Развитие теории C^* -алгебр является естественным развитием алгебры, геометрии на некоммутативный случай. Эти объекты имеют важные приложения в современной физике. Некоммутативную математику называют также «квантовой».

И. М. Гельфанд и М. А. Наймарк в работе [1] доказали, что любая унитарная коммутативная C^* -алгебра изоморфна алгебре всех непрерывных функций $C(M)$ на компактном хаусдорфовом пространстве M . Дальнейшее развитие теории C^* -алгебр может состоять в изучении

C^* -алгебр с конечномерными неприводимыми представлениями. Представлением C^* -алгебры A называется пара (H, φ) . Здесь H – гильбертово пространство, $\varphi : A \rightarrow B(H)$ – $*$ -гомоморфизм алгебры A в алгебру ограниченных линейных операторов $B(H)$ на гильбертовом пространстве H . Представление (H, φ) алгебры A называется неприводимым, если алгебра $\varphi(A)$ действует неприводимо на гильбертовом пространстве H . Это значит, что не существует замкнутых инвариантных подпространств в H , за исключением 0 и H .

Если все неприводимые представления C^* -алгебры A имеют одну и ту же размерность n , то алгебра A называется n -однородной. В работах Ж. Фелла [2], Ж. Томияма и М. Такесаки [3] было показано, что любая n -однородная C^* -алгебра A изоморфна алгебре $\Gamma(E)$ всех непрерывных сечений соответствующего алгебраического расслоения $\zeta_A = (E, M, p)$. Теория расслоенных пространств активно развивается с начала XX в.

Алгебраическое расслоение – это локально тривиальное G -расслоение с типовым слоем $F = C^{n \times n}$ (алгебра квадратных матриц порядка n с элементами в поле комплексных чисел C) и структурной группой $G = \text{Aut}(n)$ – группа автоморфизмов алгебры $C^{n \times n}$. То есть алгебраическое расслоение – это тройка (E, M, p) . Здесь E и M – топологические пространства, и $p : E \rightarrow M$ – непрерывная сюръекция. Существует открытое покрытие U_i базы расслоения M и набор гомоморфизмов $\varphi_i : U_i \times F \rightarrow p^{-1}(U_i)$. При этом отображение $\varphi_{ij} : (U_i \cap U_j) \times C^{n \times n} \rightarrow (U_i \cap U_j) \times C^{n \times n}$, определяемое правилом $\varphi_{ij} = \varphi_j^{-1} \circ \varphi_i$ принадлежит группе $\text{Aut}(n)$. Пусть $SU(n)$ обозначает группу унитарных матриц порядка n с определителем, равным 1. То есть $SU(n)$ есть замкнутая подгруппа группы унитарных матриц $U(n)$ порядка n . Пусть $Z(SU(n))$ обозначает центр алгебры $SU(n)$. Тогда $Z(SU(n)) = Z_n$. Центр $Z(SU(n))$ состоит из матриц вида $\lambda \cdot I$, где $|\lambda| = 1$ и $\lambda^n = 1$. При этом группа $\text{Aut}(n)$ изоморфна группе $SU(n)/Z(SU(n)) = PU(n)$. Следует отметить, что понятие эквивалентности двух алгебраических расслоений в работе Ж. Томияма и М. Такесаки [3] отличается от понятия эквивалентности G -расслоений, данного в [4, с. 18]. В этой работе два G -расслоения $\xi_1 = (E_1, M, p_1)$ и $\xi_2 = (E_2, M, p_2)$ эквивалентны, если существует гомеоморфизм $\gamma : E_1 \rightarrow E_2$ такой что $\gamma(F_x) = F_x$ ($x \in M$), причем этот гомеоморфизм слоя F принадлежит группе G . То есть гомеоморфизм пространств расслоений порождает гомеоморфизм слоя F над точкой $x \in M$ пространства E_1 в слой F над той же точкой $x \in M$ другого расслоения. В работе же Ж. Томияма и М. Такесаки используется следующее определение эквивалентности двух алгебраических расслоений: два алгебраических расслоения $\xi_1 = (E_1, M, p_1)$ и $\xi_2 = (E_2, M, p_2)$ эквивалентны, если существует гомеоморфизм $\gamma : E_1 \rightarrow E_2$ такой что $\gamma(F_x) = F_{\alpha(x)}$, где $\alpha : M \rightarrow M$ – гомеоморфизм базы расслоения M . То есть гомеоморфизм $\gamma : E_1 \rightarrow E_2$ переводит слой F_x над точкой $x \in M$ в слой $F_{\alpha(x)}$ над другой точкой $\alpha(x)$. Это понятие эквивалентности алгебраических расслоений обладает тем свойством, что два алгебраических расслоения ξ_1 и ξ_2 эквивалентны тогда и только тогда, когда соответствующие n -однородные C^* -алгебры $\Gamma(E_1)$ и $\Gamma(E_2)$ изоморфны [3].

Обзор результатов. В 1961 г. в работах [2], [3] было показано, что любая n -однородная унитарная C^* -алгебра изоморфна алгебре $\Gamma(E)$ всех непрерывных сечений соответствующего алгебраического расслоения $\zeta = (E, M, p)$. Здесь база расслоения гомеоморфна пространству $\text{Prim} A$ примитивных идеалов алгебры A , снабженному оболочечно-ядерной топологией. С этой топологией пространство $\text{Prim} A$ является хаусдорфовым.

Предложение 1 [2, теорема 3.2; 3, теорема 5]. *Каждая n -однородная C^* -алгебра A C^* -изоморфна C^* -алгебре $\Gamma(\xi)$ всех непрерывных ограниченных сечений некоторого расслоения ξ с базой расслоения $\text{Prim} A$, слоем $C^{n \times n}$ и группой $PU(n)$, действующей на $C^{n \times n}$ посредством внутренних автоморфизмов.*

В 1974 г. Ф. Краусс и Т. Лаусон [5] описали классы эквивалентных алгебраических расслоений с базой, гомеоморфной сферам S^2, S^3, S^4 и т. д.

Предложение 2 [5]. *Если n -однородная C^* -алгебра A обладает тем свойством, что $\text{Prim} A \cong S^1$, то алгебра A изоморфна алгебре всех непрерывных функций $C(S^1, C^{n \times n})$.*

Пусть символы e_+^2 и e_-^2 обозначают верхнюю и нижнюю полусферы сферы S^2 . Каждая из этих полусфер гомеоморфна кругу $\{z \in C \mid |z| \leq 1\}$. Представим каждую из этих полусфер как часть плоскости C с границей $S^1 = \{z \in C \mid |z| = 1\}$.

Пусть символ $\coprod$ обозначает дизъюнктное объединение двух множеств. То есть это измененная операция объединения множеств, которая заключается в объединении непересекающихся «копий» множеств. Дизъюнктное объединение множеств $\coprod_{i \in I} A_i$ – это объединение $\bigcup_{i \in I} \{(x, i) | x \in A_i\}$.

Предложение 3 [5]. Если у n -однородной C^* -алгебры A пространство примитивных идеалов $\text{Prim}A$ гомеоморфно сфере S^2 , то алгебра A изоморфна одной из алгебр $A_j = C\left(e_+^2 \coprod_{i \in I} e_-^2, C^{n \times n}\right)$, которые определяются следующим образом. Матрица-функция $f \in A_j$, если при $z \in S^1$ значения функции на границе верхней полусферы e_+^2 и на границе нижней полусферы e_-^2 связаны соотношениями

$$f_+(z) = g_j(z) \cdot f_-(z) = \begin{pmatrix} z^j & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot f_-(z) \cdot \begin{pmatrix} \bar{z}^{-j} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь $g_j(z)$ обозначает оператор перевода значений функции f с границы нижней полусферы e_-^2 в границу верхней полусферы e_+^2 .

Предложение 4 [5]. Если n -однородная C^* -алгебра A имеет пространство примитивных идеалов, гомеоморфное S^3 , то алгебра A изоморфна алгебре $C(S^3, C^{n \times n})$ всех непрерывных матричнозначных функций из S^3 в $C^{n \times n}$.

Предложение 5 [5].

(I) 1-однородная C^* -алгебра A с пространством примитивных идеалов $\text{Prim}A \cong S^4$ изоморфна алгебре всех непрерывных комплекснозначных функций $C(S^4)$.

(II) Существует бесконечное счетное множество попарно неизоморфных n -однородных ($n \geq 2$) C^* -алгебр с пространством примитивных идеалов $\text{Prim}A \cong S^4$. Каждая такая C^* -алгебра C^* -изоморфна одной из алгебр $A_{n,p} = g_p\left(e_+^4 \coprod e_-^4, C^{n \times n}\right)$, определенных следующим образом: для матрицы-функции $f \in A_{n,p}$ и $(z, w) \in S^3$ (т. е. $|z|^2 + |w|^2 = 1$) имеет место следующее равенство:

$$f_+(z, w) = g_p(z, w) \cdot f_-(z, w) = \begin{pmatrix} z & -\bar{w} & 0 & \dots & 0 \\ w & \bar{z} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}^p \cdot f_-(z, w) \cdot \begin{pmatrix} \bar{z} & \bar{w} & 0 & \dots & 0 \\ -w & z & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}^p.$$

Здесь e_+^4 обозначает верхнюю 4-мерную полусферу, а e_-^4 – нижнюю полусферу. Символ $g_p(z, w)$ обозначает оператор, переводящий значения матрицы-функции f с границы нижней полусферы e_-^4 в значения на границе верхней полусферы e_+^4 .

Предложение 6 [5].

(I) Если $n \neq 2$, то существует только одна n -однородная C^* -алгебра A с пространством примитивных идеалов $\text{Prim}A$ гомеоморфным сфере S^5 .

(II) Если $n = 2$, то существуют две неизоморфные 2-однородные C^* -алгебры A и B , такие что $\text{Prim}A \cong S^5 \cong \text{Prim}B$.

Предложение 7 [5]. Существует $n!$ -однородных C^* -алгебр A , таких что $\text{Prim}A \cong S^{2n+1}$.

В [6] описываются n -однородные C^* -алгебры с пространством примитивных идеалов, гомеоморфным тору T^2 или T^3 .

Предложение 8. Алгебраические расслоения со слоем $C^{n \times n}$ и базой T^2 описываются классом $[p]$ в группе $\pi_1(PU_n) = \mathbb{Z} / n\mathbb{Z}$. Два таких расслоения порождают изоморфные n -однородные C^* -алгебры тогда и только тогда когда $[p_1] = \pm[p_2]$.

Алгебраические расслоения со слоем $C^{n \times n}$ и базой T^3 определяются тремя классами в группе $\pi_1(PU_n) = \mathbb{Z} / n\mathbb{Z}$. Но многие такие расслоения порождают изоморфные n -однородные C^* -алгебры. Каждая n -однородная C^* -алгебра с пространством примитивных идеалов $\text{Prim}A \cong T^3$ имеет вид $B \otimes C(T)$, где B – n -однородная C^* -алгебра с пространством примитивных идеалов, гомеоморфным T^2 . И может быть так, что $B_1 \otimes C(T) \cong B_2 \otimes C(T)$, и при этом B_1 не изоморфна B_2 .

Как известно, двумерное ориентируемое многообразие гомеоморфно сфере S^2 с приклеенными k ручками [7]. Обозначим такое пространство символом P_k [7]. Вырежем из P_k множество D_1 , гомеоморфное единичному кругу D . Граница множества D_1 гомеоморфна единичной окружности S^1 . Тогда алгебраическое расслоение ξ над P_k можно представить как склейку двух алгебраических расслоений. Первое расслоение – это ограничение расслоения ξ на множество D_1 . Второе алгебраическое расслоение – это ограничение расслоения ξ на множество $P_k \setminus D_1$. При этом возникает функция p склейки слоев над границей $\delta(D_1)$ этих двух алгебраических расслоений. Граница $\delta(D_1)$ гомеоморфна окружности S^1 . Ограничение расслоения ξ на множество D_1 тривиально, т. е. эквивалентно расслоению-произведению $D_1 \times C^{n \times n}$ [8]. Ограничение расслоения ξ на множество $P_k \setminus D_1$ также тривиально, т. е. эквивалентно расслоению-произведению $(P_k \setminus D_1) \times C^{n \times n}$ [8]. Оказывается, поэтому алгебраическое расслоение ξ описывается классом отображения p в фундаментальной группе $\pi_1(PU_n)$.

Предложение 9 [8]. *Алгебраическое расслоение ξ со слоем $C^{n \times n}$ и базой P_k ($k \geq 1$) определяется классом $[p] \in \pi_1(PU_n) = \mathbb{Z} / n\mathbb{Z}$. Две n -однородные C^* -алгебры A_1 и A_2 с пространствами примитивных идеалов, гомеоморфными P_k , изоморфны тогда и только тогда, когда $[p_1] = \pm [p_2]$.*

Двумерное не ориентируемое компактное связное многообразие гомеоморфно сфере S^2 с приклеенными l проективными плоскостями ([7]). Обозначим такое множество через P^l ($l \geq 1$). Это множество P^l также можно представить как объединение множества D и $P^l \setminus D$. Множество D выбирается гомеоморфным единичному кругу. Тогда расслоение ξ над P^l представляется как склейка ограничения расслоения ξ на множество D и ограничения расслоения ξ на множество $P^l \setminus D$. При этом граница $\delta(D)$ множества D гомеоморфна окружности S^1 . Поэтому при склейке этих двух алгебраических расслоений возникает функция $p: S^1 \rightarrow PU_n$. Класс этого отображения в группе $\pi_1(PU_n)$ описывает алгебраическое расслоение ξ с точностью до эквивалентности.

Предложение 10 [9]. *Алгебраическое расслоение со слоем $C^{n \times n}$ и базой P^l определяется классом отображения $[p] \in \pi_1(PU_n) = \mathbb{Z} / n\mathbb{Z}$. Два таких алгебраических расслоения ξ_1 и ξ_2 изоморфны тогда и только тогда, когда $[p_1] \pm [p_2] = 2s$, $s \in \mathbb{Z}$.*

Используя это предложение, несложно найти количество классов неэквивалентных между собой алгебраических расслоений с базой P^l .

Предложение 11 [9]. *Пусть ξ есть алгебраическое расслоение с базой P^l и слоем $C^{n \times n}$. Тогда если n четное, то существуют два неэквивалентных алгебраических расслоения над P^l . Если же n нечетное, то расслоение ξ тривиально, т. е. эквивалентно расслоению-произведению $P^l \times C^{n \times n}$.*

В [10] описана связь между множеством алгебраических и векторных расслоений с базой S^k . Также в этой работе изучались операции, заданные на множестве $\text{Alg}(S^2)$ алгебраических расслоений с базой S^2 .

Предложение 12 [10]. *Множество алгебраических расслоений $\text{Alg}_n(S^2)$ со слоем $C^{n \times n}$ и базой S^2 состоит из n элементов. Каждое такое алгебраическое расслоение со слоем $C^{n \times n}$ и базой S^2 определяется двумя числами $n \in \mathbb{N}$ и $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.*

Таким образом, любое алгебраическое расслоение над S^2 может быть записано в виде $A_{n,k}$, $n \in \mathbb{N}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Следует отметить, что в [10] использовалось определение эквивалентности алгебраических расслоений такое же, как в работе [4, с. 18]. Это значит, что неэквивалентные в этом смысле расслоения могут порождать изоморфные n -однородные C^* -алгебры. Различие двух определений эквивалентности алгебраических расслоений обсуждалось во введении. В предложении 3 дается конкретная реализация соответствующих n -однородных C^* -алгебр с пространством примитивных идеалов $\text{Prim} A$, гомеоморфным двумерной сфере S^2 .

Пусть T обозначает полугруппу комплексных чисел вида $ne^{2\pi i k/n}$, $n \in \mathbb{N}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, с обычной операцией умножения комплексных чисел. Пусть $\text{Alg}(S^2)$ обозначает множество алгебраических расслоений с базой S^2 .

Предложение 13 [10]. *Полугруппа $(\text{Alg}(S^2), \otimes)$ изоморфна полугруппе T . Изоморфизм задается отображением*

$$A_{n,k} \rightarrow ne^{\frac{2\pi i k}{n}}.$$

Отсюда видно, что множество алгебраических расслоений над двумерной сферой S^2 достаточно хорошо изучено.

Заклучение. Таким образом, описаны n -однородные C^* -алгебры с пространством примитивных идеалов $\text{Prim} A$, гомеоморфным сферам S^2, S^3, S^4, S^5 , торами T^2, T^3 , компактному двумерному связному ориентируемому многообразию P_k , компактному двумерному связному не ориентируемому многообразию P^k . Дальнейшее развитие теории n -однородных C^* -алгебр может заключаться в описании классов эквивалентности алгебраических расслоений над трехмерными многообразиями, четырехмерными многообразиями и т. д.

Благодарности. Автор выражает благодарность профессору Анатолию Борисовичу Антоневичу за ценные дискуссии, касающиеся изложенных здесь результатов.

Acknowledgments. The author is glad to thank Professor Anatolii Antonevich for useful discussions regarding this work.

Список использованных источников

1. Наймарк, М. А. Нормированные кольца / М. А. Наймарк. – М.: Физматлит, 1968. – 664 с.
2. Fell, J. M. G. The structure of algebras of operator fields / J. M. G. Fell // *Acta Math.* – 1961. – Vol. 106, № 3/4. – P. 233–280. <https://doi.org/10.1007/bf02545788>
3. Tomiyama, J. Applications of fibre bundles to the certain class of C^* -algebras / J. Tomiyama, M. Takesaki // *Tohoku Math. J.* – 1961. – Vol. 13, № 3. – P. 498–522. <https://doi.org/10.2748/tmj/1178244253>
4. Steenrod, N. *Topology of Fibre Bundles* / N. Steenrod – Princeton, USA, 1951. – 236 p. <https://doi.org/10.1515/9781400883875>
5. Krauss, F. Examples of homogeneous C^* -algebras / F. Krauss, T. Lawson // *Memoirs Am. Math. Soc.* – 1974. – Vol. 148. – P. 153–164.
6. Disney, S. Homogeneous C^* -algebras whose spectra are tori / S. Disney, I. Raeburn // *J. Aust. Math. Soc. Ser. A. Pure Math. Statist.* – 1985. – Vol. 38, № 1. – P. 9–39. <https://doi.org/10.1017/s1446788700022576>
7. Massey, W. S. *Algebraic Topology: An Introduction* / W. S. Massey. – New York: Springer-Verlag, 1977. – 292 p.
8. Shchukin, M. V. On n -homogeneous C^* -algebras over a two-dimensional compact oriented connected manifold / M. V. Shchukin // *Таврич. вестн. информатики и математики.* – 2018. – № 2. – С. 90–97.
9. Shchukin, M. On n -homogeneous C^* -algebras over two-dimensional non-oriented compact manifolds / M. Shchukin // *Serdica Math. J.* – 2016. – Vol. 42, № 3/4. – P. 203–210.
10. Antonevich, A. On trivial and non-trivial N -homogeneous C^* -algebras / A. Antonevich, N. Krupnik // *Integral Equations and Operator Theory.* – 2000. – Vol. 38, № 2. – P. 172–189. <https://doi.org/10.1007/bf01200122>

References

1. Naimark M. A. *The Normed Rings*. Moscow, Fizmatlit Publ., 1968. 664 p. (in Russian).
2. Fell J. M. G. The structure of algebras of operator fields. *Acta Mathematica*. 1961, vol. 106, no. 3–4, pp. 233–280. <https://doi.org/10.1007/bf02545788>
3. Tomiyama J., Takesaki M. Applications of fibre bundles to the certain class of C^* -algebras. *Tohoku Mathematical Journal*, 1961, vol. 13, no. 3, pp. 498–522. <https://doi.org/10.2748/tmj/1178244253>
4. Steenrod N. *Topology of Fibre Bundles*. Princeton, USA, 1951. 236 p. <https://doi.org/10.1515/9781400883875>
5. Krauss F., Lawson T. Examples of homogeneous C^* -algebras. *Memoirs of the American Mathematical Society*, 1974, vol. 148, pp. 153–164.
6. Disney S., Raeburn I. Homogeneous C^* -algebras whose spectra are tori. *Journal of the Australian Mathematical Society. Series A. Pure Mathematics and Statistics*, 1985, vol. 38, no. 1, pp. 9–39. <https://doi.org/10.1017/s1446788700022576>
7. Massey W. S. *Algebraic Topology: An Introduction*. New York, Springer-Verlag, 1977.
8. Shchukin M. V. On n -homogeneous C^* -algebras over a two-dimensional compact oriented connected manifold. *Tavrisheskii vestnik informatiki i matematiki = Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics*, 2018, no. 2, pp. 90–97.
9. Shchukin M. On n -homogeneous C^* -algebras over two-dimensional non-oriented compact manifolds. *Serdica Mathematical Journal*, 2016, vol. 42, no. 3–4, pp. 203–210.
10. Antonevich A., Krupnik N. On trivial and non-trivial n -homogeneous C^* -algebras. *Integral Equations and Operator Theory*, 2000, vol. 38, no. 2, pp. 172–189. <https://doi.org/10.1007/bf01200122>

Информация об авторе

Шукін Міхаіл Владимирович – кандидат фізіко-матэматычных навук, доцэнт кафедры «Вышэйшая матэматыка», Беларускі нацыянальны тэхнічны ўніверсітэт (ул. Хмельніцкага, 9, 220013, г. Мінск, Рэспубліка Беларусь). E-mail: mvshchukin@bntu.by

Information about the author

Mikhail V. Shchukin – Ph. D. (Physics and Mathematics), Assistant Professor of the Department “Higher Mathematics”, Belarusian National Technical University (9, Khmel’nitskii Str., 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: mvshchukin@bntu.by

ISSN 1561-2430 (Print)

ISSN 2524-2415 (Online)

УДК 517.9

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-2-190-197>

Поступила в редакцию 13.02.2020

Received 13.02.2020

Р. Р. Амирова¹, Ж. Б. Ахмедова^{2,3}, К. Б. Мансимов^{2,3}¹*Азербайджанский университет языков, Баку, Азербайджан*²*Институт систем управления Национальной академии наук Азербайджана, Баку, Азербайджан*³*Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджан***О ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ
ЛИНЕЙНЫХ ДВУМЕРНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ**

Аннотация. Рассматриваются некоторые классы линейных двумерных разностных уравнений типа Вольтерра. Получены представления решений с помощью аналогов резольвенты и матрицы Римана.

Ключевые слова: двумерное разностное уравнение Вольтерра, аналог матрицы Римана, представление решения краевой задачи, сопряженное уравнение, аналог резольвенты уравнения

Для цитирования. Амирова, Р. Р. О представлении решений некоторых классов линейных двумерных разностных уравнений / Р. Р. Амирова, Ж. Б. Ахмедова, К. Б. Мансимов // Вест. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. науки. – 2021. – Т. 57, № 2. – С. 190–197. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-2-190-197>

Rasmiyya Rza Amirova¹, Zhalya Bilal Ahmedova^{2,3}, Kamil Bayramali Mansimov^{2,3}¹*Azerbaijan University of Languages, Baku, Azerbaijan*²*Institute of Control Systems of the National Academy of Sciences of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan*³*Baku State University, Baku, Azerbaijan***ON THE REPRESENTATION OF SOLUTIONS OF SOME CLASSES
OF TWO-LINEAR DIMENSIONAL DIFFERENCE EQUATIONS**

Abstract. Herein, some classes of linear two-dimensional difference equations of Volterra type are considered. Representations of solutions using analogs of the resolvent and the Riemann matrix are obtained.

Keywords: two-dimensional difference Volterra equation, analogue of the Riemann matrix, representation of the solution of a boundary value problem, adjoint equation, analogue of the resolvent of an equation

For citation. Amirova R. R., Ahmedova Zh. B., Mansimov K. B. On the representation of solutions of some classes of two-linear dimensional difference equations. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2021, vol. 57, no. 2, pp. 190–197 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-2-190-197>

Введение. При исследовании различных задач оптимального управления, описываемых как линейными, так и нелинейными уравнениями, существенную роль играет представление решений линейных или линеаризованных уравнений (см., напр., [1–4]). Исходя из этого настоящая статья посвящена нахождению представления решений двух классов линейных разностных уравнений. Найдено представление решения двумерных линейных разностных уравнений типа Вольтерра, а также решение краевой задачи для линейного разностного уравнения, представляющего собой дискретный аналог гиперболического интегро-дифференциального уравнения типа Вольтерра.

1. Представление решения двумерных линейных неоднородных уравнений типа Вольтерра. Постановка задачи. Рассмотрим систему двумерных линейных разностных уравнений типа Вольтерра:

$$z(t, x) = \sum_{\tau=t_0}^t \sum_{s=x_0}^x K(t, x, \tau, s) z(\tau, s) + f(t, x), \quad (1)$$

$$(t, x) \in D = \{(t, x): t = t_0, t_0 + 1, \dots, t_1; \quad x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1\}.$$

Здесь $K(t, x, \tau, s)$ – заданная $(n \times n)$ дискретная матричная функция, t_0, t_1, x_0, x_1 – заданные числа, причем разности $t_1 - t_0, x_1 - x_0$ – есть натуральные числа, $f(t, x)$ – заданная n -мерная дискретная вектор-функция, $z(t, x)$ – искомая n -мерная вектор-функция.

Система уравнений (1) является дискретным аналогом системы двумерных линейных интегральных уравнений типа Вольтерра (см., напр., [5–7]).

Требуется найти представления решения системы уравнений (1) через дискретный аналог резольвенты матрицы $K(t, x, \tau, s)$.

Представление решения. Пусть $R(m, \ell; t, x)$ ($t_0 \leq t \leq m \leq t_1; x_0 \leq x \leq \ell \leq x_1$) – пока неизвестная $(n \times n)$ матричная функция. Тогда для произвольных (m, ℓ) справедливо соотношение

$$\sum_{t=t_0}^m \sum_{x=x_0}^{\ell} R(m, \ell; t, x) (z(t, x) - f(t, x)) = \sum_{t=t_0}^m \sum_{x=x_0}^{\ell} R(m, \ell; t, x) \left[\sum_{\tau=t_0}^t \sum_{s=x_0}^x K(t, x, \tau, s) z(\tau, s) \right]. \quad (2)$$

Имеет место

Л е м м а. Пусть $L(t, x, \tau, s)$ и $M(t, x, \tau, s)$ – заданные $(n \times n)$ дискретные матричные функции. Тогда справедливо тождество

$$\sum_{t=t_0}^m \sum_{x=x_0}^{\ell} \left[\sum_{\tau=t_0}^t \sum_{s=x_0}^x L(m, \ell, t, x) M(t, x, \tau, s) \right] = \sum_{t=t_0}^m \sum_{x=x_0}^{\ell} \left[\sum_{\tau=t}^m \sum_{s=x}^{\ell} L(m, \ell, \tau, s) M(\tau, s, t, x) \right]. \quad (3)$$

Лемма представляет собой дискретный аналог двумерной леммы Фубини (см. напр., [8–11]).

Предположим, что матричная функция $R(m, \ell; t, x)$ является решением матричного разностного уравнения Вольтерра

$$R(m, \ell; t, x) = \sum_{\tau=t}^m \sum_{s=x}^{\ell} R(m, \ell; \tau, s) K(\tau, s, t, x) - K(m, \ell, t, x). \quad (4)$$

Далее, с учетом леммы из (2) получаем справедливость тождества

$$\sum_{t=t_0}^m \sum_{x=x_0}^{\ell} R(m, \ell; t, x) (z(t, x) - f(t, x)) = \sum_{t=t_0}^m \sum_{x=x_0}^{\ell} \left[\sum_{\tau=t}^m \sum_{s=x}^{\ell} R(m, \ell; \tau, s) K(\tau, s, t, x) \right] z(t, x). \quad (5)$$

Из (4) ясно, что

$$R(m, \ell; t, x) + K(m, \ell, t, x) = \sum_{\tau=t}^m \sum_{s=x}^{\ell} R(m, \ell; \tau, s) K(\tau, s, t, x). \quad (6)$$

Поэтому из (5) с учетом (6) получаем

$$\sum_{t=t_0}^m \sum_{x=x_0}^{\ell} R(m, \ell; t, x) (z(t, x) - f(t, x)) = \sum_{t=t_0}^m \sum_{x=x_0}^{\ell} [R(m, \ell; t, x) + K(m, \ell, t, x)] z(t, x).$$

Следовательно,

$$\sum_{t=t_0}^m \sum_{x=x_0}^{\ell} R(m, \ell; t, x) f(t, x) = - \sum_{t=t_0}^m \sum_{x=x_0}^{\ell} K(m, \ell, t, x) z(t, x).$$

Последнее означает, что

$$\sum_{\tau=t_0}^t \sum_{s=x_0}^x K(t, x, \tau, s) z(\tau, s) = - \sum_{\tau=t_0}^t \sum_{s=x_0}^x R(t, x; \tau, s) f(\tau, s). \quad (7)$$

Принимая во внимание тождества (7) и (1), приходим к соотношению

$$z(t, x) = f(t, x) - \sum_{\tau=t_0}^t \sum_{s=x_0}^x R(t, x; \tau, s) f(\tau, s). \quad (8)$$

Далее можно показать, что

$$\sum_{\tau=t}^m \sum_{s=x}^{\ell} R(m, \ell; \tau, s) K(\tau, s, t, x) = \sum_{\tau=t}^m \sum_{s=x}^{\ell} K(m, \ell; \tau, s) R(\tau, s, t, x) \quad (\tau \leq t \leq m; s \leq x \leq \ell). \quad (9)$$

Принимая во внимание тождество (9) в (4), получим

$$R(m, \ell; t, x) = \sum_{\tau=t}^m \sum_{s=x}^{\ell} K(m, \ell; \tau, s) R(\tau, s, t, x) - K(m, \ell, t, x). \quad (10)$$

Матричную функцию $R(m, \ell; t, x)$ по аналогии с работами [8–11] назовем резольвентой уравнения (1), а матричные разностные уравнения (4) и (10) – уравнениями резольвенты.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Решение $z(t, x)$ системы линейных двумерных разностных уравнений типа Вольтерра (1) допускает представление в виде (8).*

Здесь $R(t, x; \tau, s)$ является решением двумерных линейных матричных разностных уравнений типа Вольтерра (4) и (9).

Об одном обобщении. Предположим, что в уравнении (1) свободный член $f(t, x)$ имеет вид

$$f(t, x) = \sum_{\tau=t_0}^t \sum_{s=x_0}^x g(t, x, \tau, s), \quad (11)$$

где $g(t, x, \tau, s)$ – заданная дискретная ограниченная n -мерная вектор-функция. Другими словами, рассмотрим уравнение

$$z(t, x) = \sum_{\tau=t_0}^t \sum_{s=x_0}^x K(t, x, \tau, s) z(\tau, s) + \sum_{\tau=t_0}^t \sum_{s=x_0}^x g(t, x, \tau, s). \quad (12)$$

Его решение на основе теоремы 1 (см. (8)) допускает представление

$$z(t, x) = \sum_{\tau=t_0}^t \sum_{s=x_0}^x g(t, x, \tau, s) - \sum_{\tau=t_0}^t \sum_{s=x_0}^x R(t, x; \tau, s) \left[\sum_{\alpha=t_0}^{\tau} \sum_{\beta=x_0}^s g(\tau, s, \alpha, \beta) \right]. \quad (13)$$

Применяя лемму, получаем, что

$$\sum_{\tau=t_0}^t \sum_{s=x_0}^x \left[\sum_{\alpha=t_0}^{\tau} \sum_{\beta=x_0}^s R(t, x; \tau, s) g(\tau, s, \alpha, \beta) \right] = \sum_{\tau=t_0}^t \sum_{s=x_0}^x \left[\sum_{\alpha=\tau}^t \sum_{\beta=s}^x R(t, x; \alpha, \beta) g(\alpha, \beta, \tau, s) \right].$$

Тогда представление (13) принимает вид

$$z(t, x) = \sum_{\tau=t_0}^t \sum_{s=x_0}^x \left[g(t, x, \tau, s) - \sum_{\alpha=\tau}^t \sum_{\beta=s}^x R(t, x; \alpha, \beta) g(\alpha, \beta, \tau, s) \right]. \quad (14)$$

Таким образом, удалось решение уравнения (12) представить в виде (14).

2. Представление решения системы линейных неоднородных разностных уравнений, являющееся разностным аналогом интегро-дифференциального уравнения гиперболического типа. Постановка задачи. Рассмотрим систему разностных уравнений

$$z(t+1, x+1) = A(t, x) z(t, x) + \sum_{\tau=t_0}^t \sum_{s=x_0}^x [B(t, x, \tau, s) z(\tau, s) + f(t, x, \tau, s)], \quad (15)$$

$$\begin{aligned} z(t_0, x) &= a(x), \quad x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1, \\ z(t, x_0) &= b(t), \quad t = t_0, t_0 + 1, \dots, t_1, \\ a(x_0) &= b(t_0) = a_0. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь $A(t, x)$, $B(t, x, \tau, s)$ – заданные $(n \times n)$ дискретные матричные функции, $f(t, x, \tau, s)$ – заданная n -мерная дискретная вектор-функция, $a(x)$ и $b(t)$ – заданные n -мерные дискретные вектор-функции, t_0 , t_1 , x_0 , x_1 – заданные числа, причем разности $t_1 - t_0$ и $x_1 - x_0$ есть натуральные числа.

Представление решения. Через $R(m, \ell; t, x)$ обозначим пока неизвестную $(n \times n)$ матричную функцию. Пусть $z(t, x)$ – решение краевой задачи (15)–(16).

Умножим обе части уравнения (15) слева на матричную функцию $R(m+1, \ell+1; t+1, x+1)$ и просуммируем обе части полученного соотношения по $t(x)$ от $t_0(x_0)$ до $m(\ell)$ ($m \geq t_0$), ($\ell \geq x_0$).

Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{t=t_0}^m \sum_{x=x_0}^{\ell} R(m+1, \ell+1; t+1, x+1) z(t+1, x+1) &= \sum_{t=t_0}^m \sum_{x=x_0}^{\ell} R(m+1, \ell+1; t+1, x+1) \times \\ &\times A(t, x) z(t, x) + \sum_{t=t_0}^m \sum_{x=x_0}^{\ell} R(m+1, \ell+1; t+1, x+1) \left[\sum_{\tau=t_0}^t \sum_{s=x_0}^x B(t, x, \tau, s) z(\tau, s) \right] + \\ &+ \sum_{t=t_0}^m \sum_{x=x_0}^{\ell} R(m+1, \ell+1; t+1, x+1) \left[\sum_{\tau=t_0}^t \sum_{s=x_0}^x f(t, x, \tau, s) \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Займемся преобразованием левой части тождества (17). Делая замену переменных $\alpha = t+1$, $\beta = x+1$, получим

$$\begin{aligned} \sum_{t=t_0}^m \sum_{x=x_0}^{\ell} R(m+1, \ell+1; t+1, x+1) z(t+1, x+1) &= \sum_{t=t_0+1}^{m+1} \sum_{x=x_0+1}^{\ell+1} R(m+1, \ell+1; t, x) z(t, x) = \\ &= \sum_{x=x_0+1}^{\ell+1} R(m+1, \ell+1; m+1, x) z(m+1, x) - \sum_{x=x_0+1}^{\ell+1} R(m+1, \ell+1; t_0, x) z(t_0, x) + \\ &+ \sum_{t=t_0}^m \sum_{x=x_0+1}^{\ell+1} R(m+1, \ell+1; t, x) z(t, x) = R(m+1, \ell+1; m+1, \ell+1) z(m+1, \ell+1) - \\ &- R(m+1, \ell+1; m+1, x_0) z(m+1, x_0) + \\ &+ \sum_{x=x_0}^{\ell} R(m+1, \ell+1; m+1, x) z(m+1, x) - R(m+1, \ell+1; t_0, \ell+1) z(t_0, \ell+1) + R(m+1, \ell+1; t_0, x_0) z(t_0, x_0) - \\ &- \sum_{x=x_0}^{\ell} R(m+1, \ell+1; t_0, x) z(t_0, x) + \sum_{t=t_0}^m R(m+1, \ell+1; t, \ell+1) z(t, \ell+1) - \\ &- \sum_{t=t_0}^m R(m+1, \ell+1; t, x_0) z(t, x_0) + \sum_{t=t_0}^m \sum_{x=x_0}^{\ell} R(m+1, \ell+1; t, x) z(t, x). \end{aligned} \quad (18)$$

Используя дискретный аналог двумерной леммы Фубини, получим

$$\begin{aligned} \sum_{t=t_0}^m \sum_{x=x_0}^{\ell} R(m+1, \ell+1; t+1, x+1) \left[\sum_{\tau=t_0}^t \sum_{s=x_0}^x B(t, x, \tau, s) z(\tau, s) \right] &= \\ &= \sum_{t=t_0}^m \sum_{x=x_0}^{\ell} \left[\sum_{\tau=t}^m \sum_{s=x}^{\ell} R(m+1, \ell+1; \tau+1, s+1) B(\tau, s, t, x) \right] z(t, x), \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{t=t_0}^m \sum_{x=x_0}^{\ell} R(m+1, \ell+1; t+1, x+1) \left[\sum_{\tau=t}^t \sum_{s=x_0}^x f(t, x, \tau, s) \right] = \\ & = \sum_{t=t_0}^m \sum_{x=x_0}^{\ell} \left[\sum_{\tau=t}^m \sum_{s=x}^{\ell} R(m+1, \ell+1; \tau+1, s+1) f(\tau, s, t, x) \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

С учетом тождеств (18)–(20) из (17) будем иметь

$$\begin{aligned} & R(m+1, \ell+1; m+1, \ell+1) z(m+1, \ell+1) - R(m+1, \ell+1; m+1, x_0) z(m+1, x_0) + \\ & + \sum_{x=x_0}^{\ell} R(m+1, \ell+1; m+1, x) z(m+1, x) - R(m+1, \ell+1; t_0, \ell+1) z(t_0, \ell+1) + \\ & + R(m+1, \ell+1; t_0, x_0) z(t_0, x_0) - \sum_{x=x_0}^{\ell} R(m+1, \ell+1; t_0, x) z(t_0, x) + \\ & + \sum_{t=t_0}^m R(m+1, \ell+1; t, \ell+1) z(t, \ell+1) - \sum_{t=t_0}^m R(m+1, \ell+1; t, x_0) z(t, x_0) + \sum_{t=t_0}^m \sum_{x=x_0}^{\ell} R(m+1, \ell+1; t, x) z(t, x) = \\ & = \sum_{t=t_0}^m \sum_{x=x_0}^{\ell} \left[\sum_{\tau=t}^m \sum_{s=x}^{\ell} R(m+1, \ell+1; \tau+1, s+1) B(\tau, s, t, x) \right] z(t, x) + \\ & + \sum_{t=t_0}^m \sum_{x=x_0}^{\ell} R(m+1, \ell+1; t+1, x+1) A(t, x) z(t, x) + \sum_{t=t_0}^m \sum_{x=x_0}^{\ell} \left[\sum_{\tau=t}^m \sum_{s=x}^{\ell} R(m+1, \ell+1; \tau+1, s+1) f(\tau, s, t, x) \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

Пусть матричная функция $R(m, \ell; t, x)$ является решением краевой задачи

$$R(m+1, \ell+1; t, x) = R(m+1, \ell+1; t+1, x+1) A(t, x) + \sum_{\tau=t}^m \sum_{s=x}^{\ell} R(m+1, \ell+1; \tau+1, s+1) B(\tau, s, t, x), \quad (22)$$

$$\begin{aligned} R(m+1, \ell+1; m+1, x) &= 0, \\ R(m+1, \ell+1; t, \ell+1) &= 0, \\ R(m+1, \ell+1; m+1, \ell+1) &= E, \end{aligned} \quad (23)$$

($E - (n \times n)$ – единичная матрица).

Тогда из тождества (21) следует, что

$$\begin{aligned} z(m+1, \ell+1) &= \sum_{x=x_0}^{\ell} R(m+1, \ell+1; t_0, x) a(x) + \sum_{t=t_0}^m R(m+1, \ell+1; t, x_0) b(t) + \\ & + R(m+1, \ell+1; t_0, x_0) z(t_0, x_0) + \sum_{t=t_0}^m \sum_{x=x_0}^{\ell} \left[\sum_{\tau=t}^m \sum_{s=x}^{\ell} R(m+1, \ell+1; \tau+1, s+1) f(\tau, s, t, x) \right]. \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} z(m, \ell) &= R(m, \ell; t_0, x_0) a_0 + \sum_{x=x_0}^{\ell-1} R(m, \ell; t_0, x) a(x) + \sum_{t=t_0}^{m-1} R(m, \ell; t, x_0) b(t) + \\ & + \sum_{t=t_0}^{m-1} \sum_{x=x_0}^{\ell-1} \left[\sum_{\tau=t}^{m-1} \sum_{s=x}^{\ell-1} R(m, \ell; \tau+1, s+1) f(\tau, s, t, x) \right]. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$z(t, x) = R(t, x; t_0, x_0) z(t_0, x_0) + \sum_{\ell=x_0}^{x-1} R(t, x; t_0, \ell) a(\ell) + \sum_{m=t_0}^{t-1} R(t, x; m, x_0) b(m) + \\ + \sum_{m=t_0}^{t-1} \sum_{\ell=x_0}^{x-1} \left[\sum_{\tau=m}^{t-1} \sum_{s=\ell}^{x-1} R(t, x; \tau+1, s+1) f(\tau, s, m, \ell) \right]. \quad (24)$$

Теорема 2. *Решение краевой задачи (15)–(16) допускает представление в виде (24).*

Дадим второе представление решения задачи (15)–(16) с помощью дискретного аналога матрицы Римана [7].

Пусть $Q(t, x; \tau, s)$ – пока произвольная, т. е. неизвестная $(n \times n)$ матричная функция, а $z(t, x)$ является решением задачи (15)–(16). Тогда для любых (t, x) справедливо соотношение

$$\sum_{\tau=t_0}^{t-1} \sum_{s=x_0}^{x-1} Q(t, x; \tau, s) z(\tau+1, s+1) = \sum_{\tau=t_0}^{t-1} \sum_{s=x_0}^{x-1} Q(t, x; \tau, s) A(\tau, s) z(\tau, s) + \\ + \sum_{\tau=t_0}^{t-1} \sum_{s=x_0}^{x-1} \left[\sum_{\alpha=\tau}^{\tau} \sum_{\beta=s}^s Q(t, x; \tau, s) B(\tau, s, \alpha, \beta) z(\alpha, \beta) \right] + \sum_{\tau=t_0}^{t-1} \sum_{s=x_0}^{x-1} \left[\sum_{\alpha=\tau}^{\tau} \sum_{\beta=s}^s Q(t, x; \tau, s) f(\tau, s, \alpha, \beta) \right]. \quad (25)$$

Отсюда на основе двумерного аналога формулы Фубини имеем:

$$\sum_{\tau=t_0}^{t-1} \sum_{s=x_0}^{x-1} \left[\sum_{\alpha=\tau}^{\tau} \sum_{\beta=s}^s Q(t, x; \tau, s) B(\tau, s, \alpha, \beta) z(\alpha, \beta) \right] = \sum_{\tau=t_0}^{t-1} \sum_{s=x_0}^{x-1} \left[\sum_{\alpha=\tau}^{t-1} \sum_{\beta=s}^{x-1} Q(t, x; \alpha, \beta) B(\alpha, \beta, \tau, s) \right] z(\tau, s), \quad (26)$$

$$\sum_{\tau=t_0}^{t-1} \sum_{s=x_0}^{x-1} \left[\sum_{\alpha=\tau}^{\tau} \sum_{\beta=s}^s Q(t, x; \tau, s) f(\tau, s, \alpha, \beta) \right] = \sum_{\tau=t_0}^{t-1} \sum_{s=x_0}^{x-1} \left[\sum_{\alpha=\tau}^{t-1} \sum_{\beta=s}^{x-1} Q(t, x; \alpha, \beta) f(\alpha, \beta, \tau, s) \right]. \quad (27)$$

Далее, делая замену переменных $\tau+1=\alpha$, $s+1=\beta$, получаем справедливость цепочки равенств

$$\sum_{\tau=t_0}^{t-1} \sum_{s=x_0}^{x-1} Q(t, x; \tau, s) z(\tau+1, s+1) = \sum_{\tau=t_0+1}^t \sum_{s=x_0+1}^x Q(t, x; \tau-1, s-1) z(\tau, s) = \sum_{s=x_0+1}^x Q(t, x; t-1, s-1) z(t, s) - \\ - \sum_{s=x_0+1}^x Q(t, x; t_0-1, s-1) z(t_0, s) + \sum_{\tau=t_0}^{t-1} \sum_{s=x_0+1}^x Q(t, x; \tau-1, s-1) z(\tau, s) = Q(t, x; t-1, x-1) z(t, x) - \\ - Q(t, x; t-1, x_0-1) z(t, x_0) + \sum_{s=x_0}^{x-1} Q(t, x; t-1, s-1) z(t, s) - Q(t, x; t_0-1, x-1) z(t_0, x) + \\ + Q(t, x; t_0-1, x_0-1) z(t_0, x_0) - \sum_{s=x_0}^{x-1} Q(t, x; t_0-1, s-1) z(t_0, s) + \sum_{\tau=t_0}^{t-1} Q(t, x; \tau-1, x-1) z(\tau, x) - \\ - \sum_{\tau=t_0}^{t-1} Q(t, x; \tau-1, x_0-1) z(\tau, x_0) + \sum_{\tau=t_0}^{t-1} \sum_{s=x_0}^{x-1} Q(t, x; \tau-1, s-1) z(\tau, s). \quad (28)$$

Учитывая соотношения (26)–(28) в (25), приходим к соотношению

$$Q(t, x; t-1, x-1) z(t, x) - Q(t, x; t-1, x_0-1) z(t, x_0) - Q(t, x; t_0-1, x) z(t_0, x) + \\ + Q(t, x; t_0-1, x_0-1) z(t_0, x_0) + \sum_{s=x_0}^{x-1} Q(t, x; t-1, s-1) z(t, s) - \sum_{s=x_0}^{x-1} Q(t, x; t_0-1, s-1) z(t_0, s) + \\ + \sum_{\tau=t_0}^{t-1} Q(t, x; \tau-1, x-1) z(\tau, x) - \sum_{\tau=t_0}^{t-1} Q(t, x; \tau-1, x_0-1) z(\tau, x_0) + \sum_{\tau=t_0}^{t-1} \sum_{s=x_0}^{x-1} Q(t, x; \tau-1, s-1) z(\tau, s) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\tau=t_0}^{t-1} \sum_{s=x_0}^{x-1} Q(t, x; \tau, s) A(\tau, s) z(\tau, s) + \sum_{\tau=t_0}^{t-1} \sum_{s=x_0}^{x-1} \left[\sum_{\alpha=\tau}^{t-1} \sum_{\beta=s}^{x-1} Q(t, x; \alpha, \beta) B(\alpha, \beta, \tau, s) \right] z(\tau, s) + \\
&\quad + \sum_{\tau=t_0}^{t-1} \sum_{s=x_0}^{x-1} \left[\sum_{\alpha=\tau}^{t-1} \sum_{\beta=s}^{x-1} Q(t, x; \alpha, \beta) f(\alpha, \beta, \tau, s) \right]. \quad (29)
\end{aligned}$$

Предположим, что матричная функция $Q(t, x; \tau, s)$ является решением разностного двумерного уравнения Вольтерра

$$Q(t, x; \tau-1, s-1) = Q(t, x; \tau, s) A(\tau, s) + \sum_{\alpha=\tau}^{t-1} \sum_{\beta=s}^{x-1} Q(t, x; \alpha, \beta) B(\alpha, \beta, \tau, s) \quad (30)$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned}
Q(t, x; \tau-1, x-1) &= 0, \\
Q(t, x; t-1, s-1) &= 0, \\
Q(t, x; t-1, x-1) &= E.
\end{aligned} \quad (31)$$

Тогда из соотношения (29) следует представление

$$\begin{aligned}
z(t, x) &= -Q(t, x; t_0-1, x_0-1) z(t_0, x_0) + Q(t, x; t_0-1, x-1) a(x) + Q(t, x; t-1, x_0-1) b(t) + \\
&+ \sum_{s=x_0}^{x-1} Q(t, x; t_0-1, s-1) a(s) + \sum_{\tau=t_0}^{t-1} Q(t, x; \tau-1, x_0-1) b(\tau) + \sum_{\tau=t_0}^{t-1} \sum_{s=x_0}^{x-1} \left[\sum_{\alpha=\tau}^{t-1} \sum_{\beta=s}^{x-1} Q(t, x; \alpha, \beta) f(\alpha, \beta, \tau, s) \right]. \quad (32)
\end{aligned}$$

Теорема 3. При сделанных предположениях решение краевой задачи (15)–(16) допускает представление в виде (32), где матричная функция $Q(t, x; \tau, s)$ является решением матричного разностного уравнения (30), с краевыми условиями (31).

Заключение. Таким образом, для двух типов линейных разностных уравнений Вольтерра двумя способами получены представления решений. Отметим, что полученные в настоящей работе представления решений для двух классов линейных двумерных разностных уравнений Вольтерра могут найти применение при доказательстве ограниченности и устойчивости решений соответствующих уравнений, а также при исследовании соответствующих задач оптимального управления подобными нелинейными уравнениями.

Список использованных источников

1. Габасов, Р. Принцип максимума в теории оптимального управления / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова. – М.: Либроком, 2011. – 272 с.
2. Габасов, Р. Оптимизация линейных систем / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова. – Минск: БГУ, 1973. – 256 с.
3. Габасов, Р. Особые оптимальные управления / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова. – М.: Либроком, 2011. – 256 с.
4. Мансимов, К. Б. Дискретные системы / К. Б. Мансимов. – Баку, Изд-во Бак. ун-та, 2013. – 151 с.
5. Петровский, И. Г. Лекции по теории интегральных уравнений / И. Г. Петровский. – М.: Физматлит, 2009. – 136 с.
6. Смирнов, В. И. Курс высшей математики: в 5 т. / В. И. Смирнов. – М.: Наука, 1974 – Т. 4, ч. 1. – 336 с.
7. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М.: МГУ, 1997. – 793 с.
8. Choi, S. K. Boundedness of discrete Volterra systems / S. K. Choi, Y. U. Goo, N. J. Koo // Bull. Korean Math. Soc. – 2007. – Vol. 44, № 4. – P. 663–675. <https://doi.org/10.4134/bkms.2007.44.4.663>
9. Song, Y. Linearized, stability analysis of discrete Volterra equations / Y. Song, C. T. H. Baker // J. Math. Anal. Appl. – 2004. – Vol. 294, № 1. – P. 310–333. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2004.02.019>
10. Ивинская, Е. В. Об ограниченности решений некоторых разностных уравнений Вольтерра / Е. В. Ивинская, В. Б. Колмановский // Автоматика и телемеханика. – 2000. – № 8. – С. 86–97.
11. Колмановский, В. Б. Об асимптотических свойствах решений некоторых нелинейных систем Вольтерра / В. Б. Колмановский // Автоматика и телемеханика. – 2000. – № 4. – С. 42–50.

References

1. Gabasov R., Kirillova F. M. *The Maximum Principle in Optimal Control Theory*. Moscow, Librokom Publ., 2011. 272 p. (in Russian).
2. Gabasov R., Kirillova F. M. *Linear Systems Optimization*. Minsk, BSU, 1973. 256 p. (in Russian).
3. Gabasov R., Kirillova F. M. *Special Optimal Controls*. Moscow, Librokom Publ., 2011. 256 p. (in Russian).
4. Mansimov K. B. *Discrete Systems*. Baku, Baku University Publishing House, 2013. 151 p. (in Russian).
5. Petrovskii I. G. *Lectures on the Theory of Integral Equations*. Moscow, Fizmatlit Publ., 2009. 136 p. (in Russian).
6. Smirnov V. I. *Higher Mathematics Course. Vol. 4, Part. 1*. Moscow, Nauka Publ., 1974. 336 p. (in Russian).
7. Tikhonov A. I., Samarskiy A. A. *Equations of Mathematical Physics*. Moscow, Moscow State University, 1997. 793 p. (in Russian).
8. Choi S. K., Goo Y. U., Koo N. J. Boundedness discrete Volterra systems. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, 2007, vol. 44, no. 4, pp. 663–675. <https://doi.org/10.4134/bkms.2007.44.4.663>
9. Song Y., Baker C. T. H. Linearized, stability analysis of discrete Volterra equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2004, vol. 294, no. 1, pp. 310–333 p. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2004.02.019>
10. Ivinskaya E. V., Kolmanovskiy V. B. On the boundedness of the solutions of some Volterra difference equations. *Avtomatika i telemekhanika = Automation and Remote Control*, 2000, no. 8, pp. 86–97 (in Russian).
11. Kolmanovskiy V. B. On the asymptotic properties of solutions of some nonlinear Volterra systems. *Avtomatika i telemekhanika Avtomatika i telemekhanika = Automation and Remote Control*, 2000, no. 4, pp. 42–50 (in Russian).

Информация об авторах

Амирова Расмия Рза кызы – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Математика и информатика», Азербайджанский университет языков (ул. Рашида Бехбудова, 2, г. Баку, Азербайджанская Республика). E-mail: akja@rambler.ru

Ахмедова Жалыя Билал кызы – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Математическая кибернетика», Бакинский государственный университет (ул. З. Халилова, 23, Az 1148, г. Баку, Азербайджанская Республика).

Мансимов Камил Байрамали оглы – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Математическая кибернетика», Бакинский государственный университет; заведующий лабораторией «Управление в сложных динамических системах», Институт систем управления Национальной академии наук Азербайджана (ул. Б. Вагабзаде, 9, Az 1141, г. Баку, Азербайджанская Республика). E-mail: kamilbmansimov@gmail.com

Information about the authors

Rasmiyya Rza kyzy Amirova – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor of the Department of Mathematics of Informatics, Azerbaijan University of Languages (2, Rashid Behbudov Str., Baku, Republic of Azerbaijan). E-mail: akja@rambler.ru

Zhalya Bilal kyzy Akhmedova – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor of the Department of Mathematical Cybernetics, Baku State University (23, Z. Khalilova Str., Az 1148, Baku, Republic of Azerbaijan).

Kamil Bayramali oglu Mansimov – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Department of Mathematical Cybernetics, Baku State University (9, B. Vahabzade Str., Az 1141, Baku, Republic of Azerbaijan). E-mail: kamilbmansimov@gmail.com

ISSN 1561-2430 (Print)

ISSN 2524-2415 (Online)

УДК 519.21+519.6

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-2-198-205>

Поступила в редакцию 11.03.2021

Received 11.03.2021

А. Д. Егоров

Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ СКОРОХОДА

Аннотация. Данная работа посвящена приближенному вычислению математических ожиданий нелинейных функционалов от решения линейного уравнения Скорохода с ведущим винеровским процессом и случайным начальным условием. Предложен новый подход к построению квадратурных формул, точных для функциональных многочленов третьей степени, который основан на использовании кратных интегралов Стильбеса. Также построена составная приближенная формула, точная для функциональных многочленов третьего порядка, сходящаяся к точному значению ожидания, основанная на комбинации полученной квадратурной формулы и аппроксимации ведущего винеровского процесса. Рассмотрены тестовые примеры, иллюстрирующие применение полученных формул.

Ключевые слова: стохастические дифференциальные уравнения, уравнение Скорохода, математические ожидания функционалов от решения, приближенные формулы

Для цитирования. Егоров, А. Д. Приближенные формулы для вычисления математического ожидания функционалов от решения линейного уравнения Скорохода / А. Д. Егоров // Вест. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2021. – Т. 57, № 2. – С. 198–205. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-2-198-205>

Alexandr D. Egorov

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

APPROXIMATE FORMULAS FOR THE EVALUATION OF THE MATHEMATICAL EXPECTATION OF FUNCTIONALS FROM THE SOLUTION TO THE LINEAR SKOROHOD EQUATION

This paper is devoted to the construction of approximate formulas for calculating the mathematical expectation of non-linear functionals from the solution to the linear Skorohod stochastic differential equation with a random initial condition. To calculate the mathematical expectations of nonlinear functionals from random processes, functional analogs of quadrature formulas have been developed, based on the requirement of their accuracy for functional polynomials of a given degree. Most often, formulas are constructed that are exact for polynomials of the third degree [1–9], which are used to obtain an initial approximation and in combination with approximations of the original random process. In the latter case, they are usually also exact for polynomials of a given degree and are called compound formulas. However, in the case of processes specified in the form of compound functions from other random processes the constructed functional quadrature formulas, as a rule, have great computational complexity and cannot be used for computer implementation. This is exactly what happens in the case of functionals from the solutions of stochastic equations. In [1, 2], the approaches to solving this problem were considered for some types of Ito equations in martingales. The solution of the problem is simplified in the cases when the solution of the stochastic equation is found in explicit form: the corresponding approximations were obtained in the cases of the linear equations of Ito, Ito – Levy and Skorohod in [3–11]. In [7, 8, 11], functional quadrature formulas were constructed that are exact for the approximations of the expansions of the solutions in terms of orthonormal functional polynomials and in terms of multiple stochastic integrals. This work is devoted to the approximate calculation of the mathematical expectations of non-linear functionals from the solution of the linear Skorokhod equation with a leading Wiener process and a random initial condition. A new approach to the construction of quadrature formulas, exact for functional polynomials of the third degree, based on the use of multiple Stieltjes integrals over functions of bounded variation in the sense of Hardy – Krause, is proposed. A composite approximate formula is also constructed, which is exact for second-order functional polynomials, converging to the exact expectation value, based on a combination of the obtained quadrature formula and an approximation of the leading Wiener process. The test examples illustrating the application of the obtained formulas are considered.

Keywords: stochastic differential equations, Skorokhod equation, mathematical expectations of functionals from solutions, approximate formulas

For citation. Egorov A. D. Approximate formulas for the evaluation of the mathematical expectation of functionals from the solution to the linear Skorohod equation. *Vesti Natsyional'noi akademii nauk Belarusi. Seriya fizika-matematichnykh nauk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2021, vol. 57, no. 2, pp. 198–205 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-2-198-205>

Введение. Приближенное вычисление математического ожидания функционалов от решений стохастических дифференциальных уравнений является актуальной и в общем случае чрезвычайно трудной задачей. Это связано с большой вычислительной сложностью алгоритмов, в которых должны соединиться аппроксимации траекторий решений стохастических уравнений и аппроксимации интегрируемых функционалов от решений, которые обеспечили бы достаточную для сходимости метода суммарную погрешность аппроксимации. Известные функциональные квадратурные формулы для вычисления математических ожиданий нелинейных функционалов от траекторий случайных процессов требуют выполнения условия их точности для полиномиальных функционалов заданной степени. Наиболее часто используются формулы, точные для полиномов третьей степени, которые применяются для получения быстрого первоначального приближения, а также в комбинации с другими аппроксимациями (составные формулы [1–9]). Однако в случае процессов, заданных в виде сложных функций от других случайных процессов, как это имеет место для функционалов от решений стохастических уравнений, построенные функциональные квадратурные формулы, как правило, обладают большой вычислительной сложностью и не могут быть использованы для компьютерной реализации. В [1, 2] рассмотрены подходы к решению этой задачи для некоторых видов уравнений Ито по мартингалам. Решение задачи упрощается в случаях, когда решение стохастического уравнения находится в явном виде: соответствующие аппроксимации получены для случая линейных уравнений Ито, Ито – Леви и Скорохода в работах [3–11]. В [7, 8, 11] построены функциональные квадратурные формулы, точные для некоторых аппроксимаций, полученных разложением решений по ортонормированным функциональным полиномам и по кратным стохастическим интегралам. В настоящей работе предлагается новый подход к построению квадратурных приближенных формул для вычисления ожиданий функционалов от решения уравнений Скорохода со случайным начальным условием. Формулы основаны на использовании кратного интеграла Стильтьеса по функциям ограниченной вариации в смысле Харди – Краузе и точны для функциональных многочленов второго и третьего порядков. Рассмотрены тестовые примеры, иллюстрирующие применение полученных формул.

Предварительные сведения. Пусть задано стохастическое дифференциальное уравнение вида

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(s) X_s \delta W_s, \quad t \in [0, 1], \quad (1)$$

где W_t , $t \in [0, 1]$, – стандартный винеровский процесс, определенный на вероятностном пространстве $\Omega = C_0([0, 1])$, $W_t(\omega) = \omega(t)$; $\sigma(s)$ – детерминированная функция, $\int_0^1 \sigma^2(s) ds < \infty$; $X_0 = X_0(W_{(\cdot)}) \in L_p(\Omega)$ для некоторого $p > 2$. Интеграл в правой части (1) понимается в смысле интеграла Скорохода, поскольку X_t не адаптирован к процессу W_t . Известно [12, 13], что единственное решение (1) дается равенством

$$X_t = X_0(T_t^{-\sigma} \omega) \exp \left\{ \int_0^t \sigma(s) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2(s) ds \right\},$$

где $T_t^{-\sigma}$ – преобразование на Ω , определяемое равенством

$$(T_t^{-\sigma} \omega)(s) = \omega(s) - \int_0^{t \wedge s} \sigma(\tau) d\tau.$$

Далее, в силу принятого отождествления $W_t(\omega) = \omega(t)$ нам будет удобно использовать запись решения в виде

$$X_t = X_0 \left(W_{(\cdot)} - \int_0^{t \wedge \cdot} \sigma(s) ds \right) \exp \left\{ \int_0^t \sigma(s) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2(s) ds \right\}. \quad (2)$$

При построении приближенных формул используются первых три момента решения. В общем случае моменты не могут быть вычислены в явном виде, тем не менее соответствующие математические ожидания, задающие моменты, можно несколько упростить и свести к вычислению ожиданий функционалов от винеровского процесса, не содержащих второго множителя в (2), используя формулу Гирсанова

$$E[F(W_{(\cdot)})] = E\left[F\left(W_{(\cdot)} - \int_0^{\cdot} b(s)ds\right)\right] \exp\left\{\int_0^1 b(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^1 b^2(s)ds\right\}, \quad (3)$$

где $b(s)$ – детерминированная функция. Заметим, что первый момент имеет вид

$$M_t = E\left[X_0\left(W_{(\cdot)} + \int_0^{t\wedge\cdot} \sigma(\tau)d\tau\right)\right].$$

Далее, последовательно применяя (3) при $b(s) = 1_{[0,t]}(s)\sigma(s)$, получим [9]

$$\begin{aligned} M_2(t_1, t_2) &\equiv E[X_{t_1}X_{t_2}] = \exp\left\{\int_0^{t_1\wedge t_2} \sigma^2(\tau)d\tau\right\} \times \\ &\times E\left[X_0\left(W_{(\cdot)} + \int_0^{t_1\wedge\cdot} \sigma(\tau)d\tau\right)X_0\left(W_{(\cdot)} + \int_0^{t_2\wedge\cdot} \sigma(\tau)d\tau\right)\right], \\ M_3(t_1, t_2, t_3) &\equiv E\left[\prod_{k=1}^3 X_{t_k}\right] = E\left[X_0(W_{(\cdot)}; t_1, t_2)X_0(W_{(\cdot)}; t_1, t_3)X_0(W_{(\cdot)}; t_2, t_3)\right] \times \\ &\times \exp\left\{\int_0^{t_1\wedge t_2} \sigma^2(\tau)d\tau\right\} \exp\left\{\int_0^{t_1\wedge t_3} \sigma^2(\tau)d\tau\right\} \exp\left\{\int_0^{t_2\wedge t_3} \sigma^2(\tau)d\tau\right\}, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$X_0(W_{(\cdot)}; t_i, t_j) = X_0\left(W_{(\cdot)} + \int_0^{t_i\wedge\cdot} \sigma(\tau)d\tau + \int_0^{t_j\wedge\cdot} \sigma(\tau)d\tau\right).$$

Мы будем также использовать в (2) сходящуюся в $L_2(\Omega)$ аппроксимацию винеровского процесса:

$$W_t^{(n)} = \sum_{j=1}^n \int_0^1 \alpha_j(\tau)dW_\tau \int_0^t \alpha_j(\tau)d\tau = \int_0^1 (1_{[0,t]})_n(\tau)dW_\tau,$$

где

$$a_n(t) = \sum_{j=1}^n \alpha_j(t) \int_0^1 a(\tau)\alpha_j(\tau)d\tau, \quad \alpha_j(t), \quad j=1, 2, \dots,$$

– ортонормированный базис в $L_2([0,1])$, и соответствующую аппроксимацию решения:

$$X_t^{(n)} = X_0\left(\int_0^1 (1_{[0,\cdot]})_n(\tau)dW_\tau - \int_0^{t\wedge\cdot} \sigma(\tau)d\tau\right) \exp\left\{\int_0^1 (1_{[0,t]})_n(\tau)dW_\tau - \frac{1}{2}\int_0^1 \sigma^2(\tau)d\tau\right\}, \quad (5)$$

при условии сходимости $M_k^{(n)}(t_1, t_2, t_k) \rightarrow M_k(t_1, t_2, t_k)$, $k=1, 2, 3$.

Заметим, что (5) может быть представлено в виде

$$X_t^{(n)} = X_0\left(\sum_{j=1}^n \xi_j \int_0^{\cdot} \alpha_j(\tau)d\tau - \int_0^{t\wedge\cdot} \sigma(s)ds\right) \exp\left\{\sum_{j=1}^n \xi_j \int_0^t \sigma(\tau)\alpha_j(\tau)d\tau - \frac{1}{2}\int_0^1 \sigma^2(\tau)d\tau\right\},$$

где

$$\xi_j = \int_0^1 \alpha_j(\tau) dW_\tau, \quad j = 1, 2, \dots,$$

являются независимыми стандартными гауссовскими величинами.

Моменты процесса (5) будем обозначать $M_k^{(n)}$, $k = 1, 2, 3$.

Основные результаты. Задачей данной работы является построение приближенных формул, точных для функциональных многочленов третьего порядка, для вычисления математических ожиданий от функционалов вида $F(X_{(\cdot)})$, где F – нелинейный функционал, заданный на траекториях $X_{(\cdot)}$. Предполагается, что F допускает аппроксимацию функциональными многочленами $P_3(X_{(\cdot)})$, достаточную для получения начального приближения для $E[F(X_{(\cdot)})]$, которое может быть использовано само по себе, либо при построении составных приближенных формул, сходящихся к точному значению ожидания. Предполагается, что функциональные многочлены на пространстве траекторий процесса X_t , $t \in [0, 1]$, могут быть представлены в виде

$$P^{(3)}(X_{(\cdot)}) = \text{const} + \sum_{k=1}^3 \int_{[0,1]^k} \prod_{l=1}^k X_{t_l} d^{(l)} A_l(t_1, \dots, t_l), \quad (6)$$

где в правой части стоят кратные интегралы Стильеса, $A_l(t_1, t_2, t_3)$ – функции ограниченной вариации, а X_t непрерывно зависит от t .

Теорема 1. Пусть $M_k(t_1, \dots, t_k)$, $k = 2, 3$, непрерывны на $[0, 1]^k$, а функции $F\left(\sum_{j=1}^k 1_{[0, \cdot]}(u_j)\right)$, $k = 2, 3$, имеют ограниченную вариацию на $[0, 1]^k$ в смысле Харди – Краузе. Тогда имеет место следующая приближенная формула, точная для функциональных многочленов третьей степени:

$$E[F(X_{(\cdot)})] \approx \sum_{k=1}^3 J_k(F) \equiv J(F), \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} J_1(F) &= F(0) + \sum_{j=1}^2 A_j \Delta F(c_j M_{(\cdot)}), \\ J_2(F) &= 0,5 \int_{[0,1]^2} M_2(u_1, u_2) d_{u_1, u_2}^2 \Delta F(1_{[0, \cdot]}(u_1) + 1_{[0, \cdot]}(u_2)), \\ J_3(F) &= -\frac{1}{6} \int_{[0,1]^3} M_3(u_1, u_2, u_3) d_{u_1, u_2, u_3}^3 \Delta F\left(\sum_{j=1}^3 1_{[0, \cdot]}(u_j)\right); \end{aligned}$$

где в правой части стоят кратные интегралы Стильеса; константы A_1, A_2, c_1, c_2 находятся из условий $A_1 c_1 + A_2 c_2 = 1$, $A_1 c_1^3 + A_2 c_2^3 = 0$; $\Delta F(x) = 0,5(F(x) + F(-x))$, $\Lambda F(x) = 0,5(F(x) - F(-x))$.

Доказательство. Справедливость теоремы доказывается непосредственным вычислением правой и левой частей формулы (7) для указанных функциональных многочленов (из (6) следует, что достаточно доказать ее для мономов $P_k = \prod_{l=1}^k X_{t_l}$, $k = 1, 2, 3$, и постоянного функционала). Приведем лишь доказательство точности формулы для мономов P_3 ; случаи P_1 и P_2 рассматриваются аналогично. Поскольку $J_1(P_3) = 0$, в силу определения коэффициентов A_k, c_k , $k = 1, 2, 3$, и $J_2(P_3) = 0$, в силу свойств оператора Δ достаточно рассмотреть только случай $J_3(P_3)$. Кратный интеграл Стильеса

$$\int_{[0,1]^3} f(u_1, u_2, u_3) d_{u_1, u_2, u_3}^3 g(u_1, u_2, u_3)$$

определяется как предел сумм

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^p f(u_{1,i}^*, u_{2,j}^*, u_{3,k}^*) \left[g(u_{1,i}, u_{2,j}, u_{3,k}) - g(u_{1,i-1}, u_{2,j}, u_{3,k}) - \right. \\ \left. - g(u_{1,i}, u_{2,j-1}, u_{3,k}) + g(u_{1,i-1}, u_{2,j-1}, u_{3,k}) - g(u_{1,i}, u_{2,j}, u_{3,k-1}) + \right. \\ \left. + g(u_{1,i-1}, u_{2,j}, u_{3,k-1}) + g(u_{1,i}, u_{2,j-1}, u_{3,k-1}) - g(u_{1,i-1}, u_{2,j-1}, u_{3,k-1}) \right], \quad (8)$$

где $u_{1,i-1} < u_{1,i}^* < u_{1,i}$, $u_{2,j-1} < u_{2,j}^* < u_{2,j}$, $u_{3,k-1} < u_{3,k}^* < u_{3,k}$ при бесконечном измельчении промежутков деления отрезков $0 \leq u_1 \leq 1$, $0 \leq u_2 \leq 1$, $0 \leq u_3 \leq 1$. Если функция $f(u_1, u_2, u_3)$ непрерывна на $[0, 1]^3$, а $g(u_1, u_2, u_3)$ – функция ограниченной вариации в смысле Харди – Краузе [14], то интеграл Стильеса существует. Ограниченность вариации функции трех переменных в смысле Харди – Краузе означает помимо ограниченности вариации как функции трех переменных дополнительное требование ограниченности вариации по каждой переменной отдельно. Для функций

$$f(u_1, u_2, u_3) = M_k(u_1, u_2, u_3), \quad g(u_1, u_2, u_3) = \Lambda F \left(\sum_{j=1}^3 1_{[0, \cdot]}(u_j) \right)$$

приведенные условия существования выполнены и, таким образом, соответствующий интеграл Стильеса в (7) определен.

Проверим точность формулы:

$$J_3(P_3(X_{(\cdot)})) = -\frac{1}{6} \int_{[0,1]^3} M_3(u_1, u_2, u_3) d_{u_1, u_2, u_3}^3 \prod_{l=1}^3 \left(\sum_{j=1}^3 1_{[0, t_l]}(u_j) \right) = \\ = - \int_{[0,1]^3} M_3(u_1, u_2, u_3) d_{u_1, u_2, u_3}^3 (1_{[0, t_1]}(u_1) 1_{[0, t_2]}(u_2) 1_{[0, t_3]}(u_3)). \quad (9)$$

Здесь мы использовали симметричность функции $M_3(u_1, u_2, u_3)$ и тот факт, что

$$\int_{[0,1]^3} M_3(u_1, u_2, u_3) d_{u_1, u_2, u_3}^3 g(u_1, u_2, u_3) = 0,$$

если в $g(u_1, u_2, u_3)$ хотя бы одна из переменных u_1, u_2, u_3 отсутствует (см. выше определение кратного интеграла Стильеса). Далее вычисление интеграла в правой части (9) несложно произвести по формуле (8), поскольку интегрирующая функция $1_{[0, t_1]}(u_1) 1_{[0, t_2]}(u_2) 1_{[0, t_3]}(u_3)$ является простой, и результатом вычислений служит значение подынтегральной функции в точках скачка, т. е. $M_3(u_1, u_2, u_3)$.

Заметим, что $J_3(F) = 0$ для мономов четного порядка в силу наличия оператора Λ . Очевидно также, что параметры A_1, A_2, c_1, c_2 заданными условиями определяются неоднозначно.

З а м е ч а н и е. В рассмотренных далее примерах используется для сравнения точности аппроксимаций также приближенная формула, точная для функциональных многочленов второй степени, представляющая собой сумму первых двух слагаемых правой части (7).

Приведем составную приближенную формулу, при построении которой используется приближенная формула, точная для функциональных многочленов третьей степени.

Теорема 2. Пусть $M_k^{(n)}(t_1, \dots, t_k)$, $k = 1, 2, 3$, непрерывны и равномерно сходятся на $[0, 1]^k$ к $M_k(t_1, \dots, t_k)$ при $n \rightarrow \infty$. Пусть $F(X_{(\cdot)}(\omega))$ – непрерывный на $L_2(\Omega)$ функционал, такой что определены и равномерно ограничены по n последовательности функционалов

$$\int_{[0,1]^k} M_k^{(n)}(u_1, \dots, u_k) d_{u_1, \dots, u_k}^2 \Delta F \left(\sum_{j=1}^k 1_{[0, \cdot]}(u_j) \right), \quad k = 2, 3. \quad (10)$$

Тогда приближенная формула

$$E[F(X_{(\cdot)})] \approx E[F(X_{(\cdot)}^{(n)})] - J^{(n)}(F) + J(F) \equiv J_2^{(n)}(F), \quad (11)$$

дзе апроксимацыя $X_t^{(n)}$ вызначана формулай (5), а $J^{(n)}(F)$ – формулай (7), в якой надо паложыць $M_k^{(n)}$ замест M_k , $k=1,2,3$, точна для функцыянальных многачленаў трэцяй ступені і сыходзіцца к точнаму значэнню пры $n \rightarrow \infty$.

Доказателство точнасці формулы для функцыянальных многачленаў праводзіцца аналагічна доказателству тэарэмы 1. Сходзімось следуюць з сходимости $W_n(t) \rightarrow W(t)$ в $L_2(\Omega)$, непрырывнасці $F(X_{(\cdot)}(\omega))$ на $L_2(\Omega)$ і тэарэмы о прадельном пераходзе под знакам інтэграла Стыльеса.

Численные результаты. Рассматрим численные примеры применения формул (7) и (10)–(11).

Пример 1. $F(X_{(\cdot)}) = \sin\left(\lambda X_t + \frac{\pi}{4}\right)$, $t \in [0,1]$, $X_0 = \int_0^1 a(\tau) dW_\tau$, $a(\tau)$ – детерминированная функция. Приближенное значение, полученное по формуле (7), в данном случае приводится к виду

$$J(F) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + M_2(t,t) \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos\left(2\lambda + \frac{\pi}{4}\right) - 2 \cos\left(\lambda + \frac{\pi}{4}\right) + 1 \right) 0,5 + \\ + M_3(t,t,t) \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin(3\lambda) - 3 \sin(2\lambda) + 3 \sin(\lambda)) \frac{1}{6}.$$

Точные значения ожидания $E\left[\sin\left(\lambda X_t + \frac{\pi}{4}\right)\right]$ и моментов при $a(\tau) = \tau$, $\sigma(\tau) = \sqrt{\tau}$, полученные их сведением к двойному интегралу по гауссовскому распределению (по формуле вычисления ожиданий от функции двух линейных функционалов от винеровского процесса), и их приближенные значения для различных значений t приведены в табл. 1.

Таблица 1

Table 1

t	Точное	2-й степени точности	3-й степени точности	Аппроксимация $n=2$	3-й степени точности, $n=2$	Сост. 3-й степени, $n=2$	Сост. 3-й степени, $n=4$
0,2	0,677621	0,681326	0,681167	0,678346	0,681913	0,6776	0,677595
0,3	0,676426	0,686589	0,680116	0,677115	0,680729	0,676503	0,676477
0,4	0,674660	0,679541	0,678459	0,675314	0,679016	0,676503	0,674694
0,5	0,671991	0,677983	0,675790	0,673401	0,677167	0,672025	0,671979
0,6	0,668173	0,675660	0,671462	0,671508	0,675145	0,667825	0,668025
0,7	0,663061	0,672152	0,664238	0,669033	0,671844	0,661428	0,662487
0,8	0,656736	0,666768	0,651718	0,664280	0,668126	0,64802	0,655296
0,9	0,649404	0,663671	0,644558	0,641323	0,671312	0,614569	0,651912

Пример 2. Пусть $X_0 = \exp\left\{\int_0^1 a(\tau) dW_\tau\right\}$, $F(X_{(\cdot)}) = \sin(\lambda X_t)$, $a(\tau) = \tau$, $\sigma(\tau) = \sqrt{\tau}$, $t \in [0,1]$, $\lambda = 0,5$. Приближенные значения, полученные по формуле (7), в данном случае приводятся к виду

$$J(F) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\lambda \sqrt{2} \exp\left(\frac{1}{6}\right)\right) + 2 \sin\left(\lambda \exp\left(\frac{1}{6}\right)\right) + \\ + M_3(t,t,t) \frac{1}{6} (\sin(3\lambda) - 3 \sin(2\lambda) + 3 \sin(\lambda)).$$

Результаты вычислений приведены в табл. 2.

Таблица 2

Table 2

t	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
Точное	0,5092	0,5045	0,4956	0,4818	0,4630
2-й степени	0,5895	0,5895	0,5895	0,5895	0,5895
3-й степени	0,5218	0,5161	0,5042	0,4820	0,4423

Заметим, что в обоих примерах использовались значения $A_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $A_2 = 2$, $c_1 = \sqrt{2}$, $c_2 = 1$. Точные значения $E[\sin(X_t)]$ и $M_3(t, t, t)$ получены сведением, как и в предыдущем примере, к двойному интегралу по гауссовскому распределению и его приближенным вычислением, $M_1 = E[X_t] = \exp\left(\frac{1}{6}\right)$. Приведенные численные результаты показывают типичную для формул, точных для функциональных многочленов третьей степени от процесса, точность аппроксимации в заданном временном интервале. По причине быстрого роста значений моментов решения X_t использовался малый параметр λ . Поскольку в примере 2 первый момент M_t не зависит от t , а слагаемое $J_2(F) = J_2(\sin)$ в (7) обращается в нуль для четных функционалов, полученное по формуле точной для многочленов второй степени приближенное значение в этом случае не зависит от t .

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Института математики Национальной академии наук Беларуси в рамках Государственной программы фундаментальных исследований «Конвергенция-20» и Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований в рамках проекта № Ф20МС-005.

Acknowledgements. The work was financially supported by the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus within the framework of the Government Research Program “Convergence-20” and by the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research within the framework of Project no. Ф20МС-005.

Список использованных источников

1. Egorov, A. D. Functional Integrals: Approximate Evaluations and Applications / A. D. Egorov, P. I. Sobolevsky, L. A. Yanovich. – Kluwer Academic Publ., 1993. <https://doi.org/10.1007/978-94-011-1761-6>
2. Егоров, А. Д. Введение в теорию и приложения функционального интегрирования / А. Д. Егоров, Е. П. Жидков, Ю. Ю. Лобанов. – М.: Физматлит, 2006. – 400 с.
3. Egorov, A. D. Approximate formulas for expectation of functionals of solutions to stochastic differential equations / A. D. Egorov, K. K. Sabelfeld // Monte Carlo Methods Appl. – 2010. – Vol. 16, № 2. – P. 95–127. <https://doi.org/10.1515/mcma.2010.003>
4. Егоров, А. Д. Приближенные формулы третьего порядка точности для вычисления математического ожидания функционалов от решения стохастического уравнения / А. Д. Егоров, А. Ф. Уласик // Вес. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2012. – № 1. – С. 8–12.
5. Егоров, А. Д. О составных приближенных формулах для ожиданий функционалов от случайных процессов // Тр. Ин-та математики. – 2014. – Т. 22, № 1. – С. 70–77.
6. Егоров, А. Д. О приближенном вычислении математического ожидания функционалов от решения линейного уравнения Ито – Леви / А. Д. Егоров // Докл. Нац. акад. наук Беларусі. – 2015. – Т. 59, № 1. – С. 13–17.
7. Егоров, А. Д. О приближенных формулах для вычисления одного класса функционалов от пуассоновского процесса / А. Д. Егоров // Вес. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2017. – № 1. – С. 7–13.
8. Approximate formulas for mathematical expectations of functionals of random processes defined by Ito – Levy multiple integral expansions / E. A. Ayryan [et al.] // Math. Modell. Geometry. – 2017. – Vol. 5, № 3. – P. 1–15. <https://doi.org/10.26456/mmg/2017-531>
9. Egorov, A. D. Approximate formulas for expectation of functionals from solution to linear Skorohod stochastic differential equation / A. D. Egorov, A. V. Zherelo // Proc. of the XII Int. Conf. “Computer Data Analysis and Modeling 2019. Stochastics and Data Science”. Sept. 18–22, 2019, Minsk. – Minsk, 2019. – P. 158–162.
10. Egorov, A. D. Approximate formulas of the second order of accuracy for expectation of functionals from solution to linear SDE in Skorohod sense / A. D. Egorov, A. V. Zherelo // Nonlinear Phenom. Complex Syst. – 2019. – Vol. 22, № 3. – P. 292–298.
11. Egorov, A. D. An approximate formulas for calculating the expectations of functionals from random processes based on using the Wiener chaos expansion / A. D. Egorov // Monte Carlo Methods Appl. – 2020. – Vol. 26, № 4. – P. 285–292. <https://doi.org/10.1515/mcma-2020-2074>
12. Buckdahn, R. Linear Skorohod stochastic differential equations / R. Buckdahn // Probab. Th. Rel. Fields. – 1991. – Vol. 90, № 2. – P. 223–240. <https://doi.org/10.1007/bf01192163>

13. Buckdahn, R. Linear stochastic differential equations and Wick products / R. Buckdahn, D. Nualart // *Probab. Th. Rel. Fields.* – 1994. – Vol. 99, № 4. – P. 501–526. <https://doi.org/10.1007/bf01206230>
14. Ковальчик, И. М. Обобщенный винеровский интеграл и некоторые его приложения / И. М. Ковальчик, Л. А. Янович. – Минск: Наука и техника, 1989. – 119 с.

References

1. Egorov A. D., Sobolevsky P. I., Yanovich L. A. *Functional Integrals: Approximate Evaluations and Applications*. Kluwer Academic Publishers, 1993. <https://doi.org/10.1007/978-94-011-1761-6>
2. Egorov A. D., Zhidkov E. P., Lobanov Yu. Yu. *Introduction to Theory and Applications of Functional Integration*. Moscow, Fizmatlit Publ., 2006. 400 p. (in Russian).
3. Egorov A. D., Sabelfeld K. K. Approximate formulas for expectation of functionals of solutions to stochastic differential equations. *Monte Carlo Methods and Applications*, 2010, vol. 16, no. 2, pp. 95–127. <https://doi.org/10.1515/mcma.2010.003>
4. Egorov A. D., Ulasik A. F. Approximate formulas of third accuracy degree for evaluation of mathematical expectation of functionals from solution to stochastic equation. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2012, no. 1, pp. 8–12 (in Russian).
5. Egorov A. D. On the composite approximate formulas for expectation of functionals from random processes. *Trudy Instituta Matematiki = Proceeding of the Institute of Mathematics*, 2014, vol. 22, no. 1, pp. 70–77 (in Russian).
6. Egorov A. D. On approximate evaluation of mathematical expectation of functionals from solution to the Itô-Levy linear equation. *Doklady of the National'nai akademii navuk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2015, vol. 59, no. 1, pp. 13–17 (in Russian).
7. Egorov A. D. On approximate formulas for evaluation a class of functionals from the Poisson process. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2017, no. 1, pp. 7–13 (in Russian).
8. Ayryan E. A., Egorov A. D., Malyutin V. B. and Sevastianov L. A. Approximate formulas for mathematical expectations of functionals of random processes defined by Ito – Levy multiple integral expansions. *Mathematical Modelling and Geometry*, 2017, vol. 5, no. 3, pp. 1–15. <https://doi.org/10.26456/mmj/2017-531>
9. Egorov A. D., Zherelo A. V. Approximate formulas for expectation of functionals from solution to linear Skorohod stochastic differential equation. *Proceedings of the XII International conference "Computer Data Analysis and Modeling 2019. Stochastics and Data Science", September 18–22, 2019, Minsk*. Minsk, 2019, pp. 158–162.
10. Egorov A. D., Zherelo A. V. Approximate formulas of the second order of accuracy for expectation of functionals from solution to linear SDE in Skorohod sense. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, 2019, vol. 22, no. 3, pp. 292–298.
11. Egorov A. D. An approximate formulas for calculating the expectations of functionals from random processes based on using the Wiener chaos expansion. *Monte Carlo Methods and Applications*, 2020, vol. 26, no. 4, pp. 285–292. <https://doi.org/10.1515/mcma-2020-2074>
12. Buckdahn R. Linear Skorohod stochastic differential equations. *Probability Theory and Related Fields*, 1991, vol. 90, no. 2, pp. 223–240. <https://doi.org/10.1007/bf01192163>
13. Buckdahn R., Nualart D. Linear stochastic differential equations and Wick products. *Probability Theory and Related Fields*, 1994, vol. 99, no. 4, pp. 501–526. <https://doi.org/10.1007/bf01206230>
14. Koval'chik I. M., Yanovich L. A. *Generalized Wiener Integral and Some of its Applications*. Minsk, Nauka i tekhnika Publ., 1989. 119 p. (in Russian).

Информация об авторе

Егоров Александр Дмитриевич – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: egorov@im.bas-net.by

Information about the author

Alexandr D. Egorov – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Chief Researcher, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus), E-mail: egorov@im.bas-net.by

ISSN 1561-2430 (Print)

ISSN 2524-2415 (Online)

UDC 519.237

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-2-206-216>

Received 15.04.2021

Поступила в редакцию 15.04.2021

Vladimir S. Mukha, Nancy Forat Kako

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Belarus

THE INTEGRALS AND INTEGRAL TRANSFORMATIONS CONNECTED WITH THE JOINT VECTOR GAUSSIAN DISTRIBUTION

Abstract. In many applications it is desirable to consider not one random vector but a number of random vectors with the joint distribution. This paper is devoted to the integral and integral transformations connected with the joint vector Gaussian probability density function. Such integral and transformations arise in the statistical decision theory, particularly, in the dual control theory based on the statistical decision theory. One of the results represented in the paper is the integral of the joint Gaussian probability density function. The other results are the total probability formula and Bayes formula formulated in terms of the joint vector Gaussian probability density function. As an example the Bayesian estimations of the coefficients of the multiple regression function are obtained. The proposed integrals can be used as table integrals in various fields of research.

Keywords: Bayesian estimations, joint vector Gaussian distribution, multivariate integrals, total probability formula, Bayes formula, multiple regression function.

For citation. Mukha V. S., Kako N. F. The integrals and integral transformations connected with the joint vector Gaussian distribution. *Vestsi Natsyional'nei akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2021, vol. 57, no. 2, pp. 206–216. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-2-206-216>

В. С. Муха, Н. Ф. Како

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь

ИНТЕГРАЛЫ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ, СВЯЗАННЫЕ С СОВМЕСТНЫМ ВЕКТОРНЫМ ГАУССОВСКИМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

Аннотация. Во многих приложениях желательно рассматривать не один случайный вектор, а набор случайных векторов с совместным распределением. Данная статья посвящена интегралам и интегральным преобразованиям, связанным с совместной векторной гауссовской функцией плотности вероятности. Такие интегралы и преобразования возникают в теории статистических решений, в частности в теории дуального управления, которая базируется на теории статистических решений. Одним из представленных результатов является интеграл от совместной векторной гауссовской функции плотности вероятности. Другие результаты – это формула полной вероятности и формула Байеса, сформулированные в терминах совместной векторной гауссовской функции плотности вероятности. В качестве примера получены байесовские оценки коэффициентов множественной функции регрессии. Предложенные интегралы могут быть использованы как табличные интегралы в различных областях исследований

Ключевые слова: байесовские оценки, совместное векторное гауссовское распределение, многомерные интегралы, формула полной вероятности, формула Байеса, множественная функция регрессии.

Для цитирования. Муха, В. С. Интегралы и интегральные преобразования, связанные с совместным векторным гауссовским распределением / В. С. Муха, Н. Ф. Како // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2021. – Т. 57, № 2. – С. 206–216. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-2-206-216>

Introduction. The integrals connected with probability distributions are used in many applications, one of them being the statistical decision theory, or, in other words, the Bayesian approach in statistics [1–4]. The statistical decision theory attracts much attention due to the ability to formulate problems in strict mathematical form and to process data in real time. One of the technical problems solved by the statistical decision theory is the dual control problem [5]. The equations of dynamic programming in the dual control problem contain the integrals connected with the multivariate probability distributions. The integrals and integral transformations connected with the vector Gaussian distribution were considered in papers [6, 7]. However, it is desirable to consider not one separate random vector, but a number of ran-

dom vectors. In this paper, the results of works [6, 7] are generalized for the case of the joint Gaussian distribution.

1. Integrals connected with the joint vector Gaussian distribution. The random k_{Ξ} -component vector $\Xi^T = (\Xi_1, \dots, \Xi_{k_{\Xi}})$ is distributed by the Gaussian (or normal) law if its probability density function has the following form:

$$f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{k_{\Xi}} |d_{\Xi}|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\xi - v_{\Xi})^T d_{\Xi}^{-1}(\xi - v_{\Xi})\right), \quad (1)$$

where $\xi^T = (\xi_1, \dots, \xi_{k_{\Xi}})$ is the row vector of the arguments, $v_{\Xi}^T = (v_{\Xi_1}, \dots, v_{\Xi_{k_{\Xi}}})$ is the row vector of the parameters, $d_{\Xi} = (d_{\Xi_i, j})$, $i, j = \overline{1, k_{\Xi}}$, is the symmetric positive definite $(k_{\Xi} \times k_{\Xi})$ -matrix of the parameters, d_{Ξ}^{-1} is the matrix inverse to the d_{Ξ} , $|d_{\Xi}|$ is the determinant of the matrix d_{Ξ} , and T is the transpose symbol. The parameters v_{Ξ} and d_{Ξ} are the mathematical expectation and variance-covariance matrix of the random vector Ξ respectively.

The following integral connected with function (1) was proved in [6]:

$$\int_{E^{k_{\Xi}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\xi^T A \xi + B^T \xi\right) d\xi = \sqrt{(2\pi)^{k_{\Xi}} |A^{-1}|} \exp\left(\frac{1}{2}B^T A^{-1} B\right), \quad (2)$$

where $\xi^T = (\xi_1, \dots, \xi_{k_{\Xi}})$, $A = (a_{i, j})$, $i, j = \overline{1, k_{\Xi}}$, is the symmetric positive definite matrix, $B^T = (B_1, \dots, B_{k_{\Xi}})$ is the row vector, A^{-1} is the matrix inverse to the A , $|A^{-1}|$ is the determinant of the matrix A^{-1} , and $E^{k_{\Xi}}$ is the k_{Ξ} -dimensional Euclidean space.

In some cases, it is desirable to consider not one random vector with the Gaussian distribution, but several random vectors with the joint Gaussian distribution. This case is possible to study by partitioning the vector $\xi^T = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{k_{\Xi}})$ with k_{Ξ} components into m vectors with $k_1, k_2, \dots, k_m$ components, $k_1 + k_2 + \dots + k_m = k_{\Xi}$, so that the vector ξ^T in (1) is $\xi^T = (\xi_1^T, \xi_2^T, \dots, \xi_m^T)$, where $\xi_1^T, \xi_2^T, \dots, \xi_m^T$ are the row vectors. Let as partition also the vector $v_{\Xi}^T = (v_{\Xi_1}, \dots, v_{\Xi_{k_{\Xi}}})$ in (1) into m vectors with $k_1, k_2, \dots, k_m$ components, so that $v_{\Xi}^T = (v_{\Xi_1, 1}^T, v_{\Xi_1, 2}^T, \dots, v_{\Xi_1, k_{\Xi}}^T)$, and partition the rows and columns of the matrix d_{Ξ}^{-1} into m groups of rows and columns, agreed with the partitioning of the vectors ξ^T and v_{Ξ}^T , so that $d_{\Xi}^{-1} = (d_{\Xi}^{i, j})$, $i, j = \overline{1, m}$, where $d_{\Xi}^{i, j}$ are blocks of the matrix d_{Ξ}^{-1} . As a result, we get the following expression instead of formula (1):

$$\begin{aligned} f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{k_{\Xi}} |d_{\Xi}|}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (\xi_i - v_{\Xi_i})^T d_{\Xi}^{i, j} (\xi_j - v_{\Xi_j})\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{k_{\Xi}} |d_{\Xi}|}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \xi_i^T d_{\Xi}^{i, j} \xi_j + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m v_{\Xi_i}^T d_{\Xi}^{i, j} \xi_j - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m v_{\Xi_i}^T d_{\Xi}^{i, j} v_{\Xi_j}\right). \end{aligned} \quad (3)$$

We will call expression (3) as the joint Gaussian probability density function of the random vectors $\Xi_1, \Xi_2, \dots, \Xi_m$. It is supposed that the matrix $d_{\Xi} = (d_{\Xi_i, j})$, $i, j = \overline{1, m}$, in (1) is partitioned into the blocks corresponding to the blocks of the matrix d_{Ξ}^{-1} , so that the $d_{\Xi_i, i}$ is the variance-covariance matrix of the random vector Ξ_i , and the $d_{\Xi_i, j}$, $i \neq j$, is the covariance matrix of the random vectors Ξ_i, Ξ_j . The v_{Ξ_i} is the mathematical expectation of the random vector ξ_i .

Let us formulate the task of generalizing formula (2) to the case of many vector variables, i. e. the task of calculating the integral connected with function (3). More specifically, let it be required to calculate the following integral:

$$\int_{E^{k_{\Xi}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\xi^T A \xi + B^T \xi\right) d\xi \quad (4)$$

provided the matrix A is the symmetric positive definite and the vector ξ^T consists of m vectors.

In order to solve this task, we partition the k_{Ξ} -component vectors ξ^T and B^T into m vectors with $k_1, k_2, \dots, k_m$, components, $k_1 + k_2 + \dots + k_m = k$, i. e. represent them in the forms of $\xi^T = (\xi_1^T, \xi_2^T, \dots, \xi_m^T)$ and $B^T = (B_1^T, B_2^T, \dots, B_m^T)$ so that the vectors ξ_i^T and B_i^T consist of the same numbers of components. We partition also the rows of the matrix $A = (a_{i,j})$, $i, j = \overline{1, k_{\Xi}}$, into m groups of rows and the columns into m groups of columns, coordinated with the partition of the vectors ξ^T and B^T . As a result, we obtain the matrix with block elements $A_{i,j}$ (the so-called block matrix), which we will denote

$$A = (A_{i,j}), \quad i, j = \overline{1, m}. \quad (5)$$

Let the following integral be subjected to the following calculation:

$$\int_{E^{k_{\Xi}}} \exp\left(-\frac{1}{2} \xi^T A \xi + B^T \xi\right) d\xi = \int_{E^{k_{\Xi}}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \xi_i^T A_{i,j} \xi_j + \sum_{i=1}^m B_i^T \xi_i\right) d\xi_1 \dots d\xi_m. \quad (6)$$

Let us proceed to the calculation of integral (6).

The application to the block matrix $A = (A_{i,j})$ (5) of the generalized (block) Gauss algorithm [8] gives us the following block upper triangular matrix:

$$G = \begin{pmatrix} A_{1,1}^{(0)} & A_{1,2}^{(0)} & \dots & A_{1,m}^{(0)} \\ 0 & A_{2,2}^{(1)} & \dots & A_{2,m}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_{m,m}^{(m-1)} \end{pmatrix} = (A_{i,j}^{(i-1)}), \quad i, j = \overline{1, m}. \quad (7)$$

If $i > j$ then the blocks $A_{i,j}^{(i-1)}$ in (7) is equal to zero ($A_{i,j}^{(i-1)} = 0$). The determinant of the block upper triangular matrix G (7) is equal to the product of the determinants of the diagonal blocks and the same as the determinant of the matrix A [8]:

$$|G| = |A_{1,1}^{(0)}| |A_{2,2}^{(1)}| \dots |A_{m,m}^{(m-1)}| = |A| = \prod_{i=1}^m |A_{i,i}^{(i-1)}|.$$

The matrix A can be represented in the form of

$$A = G^T \hat{D} G, \quad (8)$$

where $\hat{D}$ is the block diagonal matrix

$$\hat{D} = \text{diag}\left\{\left(A_{1,1}^{(0)}\right)^{-1}, \left(A_{2,2}^{(1)}\right)^{-1}, \dots, \left(A_{m,m}^{(m-1)}\right)^{-1}\right\}. \quad (9)$$

We denote the diagonal blocks of the matrix $\hat{D}$ (9) as $\hat{D}_{i,i} = \left(A_{i,i}^{(i-1)}\right)^{-1}$, $i = \overline{1, m}$. The following equalities are fulfilled:

$$|\hat{D}^{-1}| = |G| |A| = \prod_{i=1}^m |A_{i,i}^{(i-1)}|. \quad (10)$$

Let us suppose that we can find in the block form the inverse matrix $G^{-1} = (G^{i,j})$, $i, j = \overline{1, m}$. The replacing of variables

$$x = G^{-1} z \quad (11)$$

transforms the integrated function $F(x) = \exp\left(-\frac{1}{2} \xi^T A \xi + B^T \xi\right)$ in (4) to the following function of the argument z :

$$F(z) = \exp\left(-\frac{1}{2} z^T P z + D z\right),$$

where

$$P = (G^{-1})^T A G^{-1},$$

$$D = B^T G^{-1} = (D_i) = \left(\sum_{j=1}^m B_j^T G^{j,i} \right), \quad i = \overline{1, m}. \quad (12)$$

Since, given (8),

$$P = (G^{-1})^T A G^{-1} = (G^{-1})^T G^T \hat{D} G G^{-1} = \hat{D},$$

we have the following function of the argument $z = (z_i)$, $i = \overline{1, m}$ (z_i are vectors):

$$F(z) = \exp \left(-\frac{1}{2} z^T \hat{D} z + D z \right). \quad (13)$$

As it is known, the following equality is fulfilled when the variables are replaced:

$$\int F(x) dx = J \int F(z) dz, \quad (14)$$

where J is the Jacobian of the transformation (11):

$$J = |G^{-1}| = |\hat{D}| = \prod_{i=1}^m |A_{i,i}^{(i-1)}|^{-1}.$$

Let us rewrite function $F(z)$ (13) as the function of the elements of its matrices:

$$F(z) = \exp \left(-\frac{1}{2} z^T \hat{D} z + D z \right) = \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m z_i^T \left(A_{i,i}^{(i-1)} \right)^{-1} z_i + \sum_{i=1}^m D_i z_i \right) =$$

$$= \prod_{i=1}^m \exp \left(-\frac{1}{2} z_i^T \left(A_{i,i}^{(i-1)} \right)^{-1} z_i + D_i z_i \right). \quad (15)$$

Substituting (15) into (14), we obtain

$$\int_{E^{k\Xi}} F(x) dx = J \prod_{i=1}^m \int_{E^{k\Xi}} \exp \left(-\frac{1}{2} z_i^T \left(A_{i,i}^{(i-1)} \right)^{-1} z_i + D_i z_i \right) dz_i. \quad (16)$$

The integral in the right-hand side of expression (16) is the integral of type (2). In such a case

$$\int_{E^{k\Xi}} \exp \left(-\frac{1}{2} z_i^T \left(A_{i,i}^{(i-1)} \right)^{-1} z_i + D_i z_i \right) dz_i = \sqrt{(2\pi)^{k_i} |A_{i,i}^{(i-1)}|} \exp \left(\frac{1}{2} D_i A_{i,i}^{(i-1)} D_i^T \right). \quad (17)$$

Substituting (17) into (16), we obtain the following formula

$$\int_{E^{k\Xi}} \exp \left(-\frac{1}{2} \xi^T A \xi + B^T \xi \right) d\xi = \int_{E^{k\Xi}} \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \xi_i^T A_{i,j} \xi_j + \sum_{i=1}^m B_i^T \xi_i \right) d\xi_1 \cdots d\xi_m =$$

$$= \prod_{i=1}^m \sqrt{(2\pi)^{k_i} |A_{i,i}^{(i-1)}|} \exp \left(\sum_{i=1}^m \frac{1}{2} D_i A_{i,i}^{(i-1)} D_i^T \right),$$

or in block-matrix form

$$\int_{E^{k\Xi}} \exp \left(-\frac{1}{2} \xi^T A \xi + B^T \xi \right) d\xi = \sqrt{(2\pi)^{k\Xi} |\hat{D}^{-1}|} \exp \left(\frac{1}{2} D \hat{D}^{-1} D^T \right). \quad (18)$$

Let us come back in (18) from the matrices D and $\hat{D}$ to the matrices A and B . Since $|D| = |A^{-1}|$ (formula (10)), $\hat{D}^{-1} = G A^{-1} G^T$ (formula (8)) and $D = B^T G^{-1}$ (formula (12)), then

$$D\hat{D}^{-1}D^T = B^T G^{-1}GA^{-1}G^T (G^{-1})^T B = B^T A^{-1}B,$$

and instead of (18) we get the following expression:

$$\begin{aligned} \int_{E^{k_{\Xi}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\xi^T A \xi + B^T \xi\right) d\xi &= \int_{E^{k_{\Xi}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \xi_i^T A_{i,j} \xi_j + \sum_{i=1}^m B_i^T \xi_i\right) d\xi_1 \cdots d\xi_m = \\ &= \sqrt{(2\pi)^{k_{\Xi}} |A^{-1}|} \exp\left(\frac{1}{2}B^T A^{-1}B\right) = \sqrt{(2\pi)^{k_{\Xi}} |A^{-1}|} \exp\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m B_i^T A^{i,j} B_j\right). \end{aligned} \quad (19)$$

It should be taken into account that the matrices A and B in (19) are block matrices, i. e. $A = (A_{i,j})$, $B = (B_i)$, $i, j = \overline{1, m}$, and one deals with the block operations of inversion and of multiplication.

Let us summarize the obtained result in the form of the following theorem.

Theorem 1 (the integral connected with the joint Gaussian distribution of the random vectors). *If $A = (A_{i,j})$, $i, j = \overline{1, m}$, is the square block symmetric positive definite matrix, $A^{-1} = (A^{i,j})$ is the block matrix inverse to the matrix $A = (A_{i,j})$, $|A^{-1}|$ is the determinant of the matrix A^{-1} , $\xi^T = (\xi_1^T, \xi_2^T, \dots, \xi_m^T)$ is the vector composed of vectors $\xi_1^T, \xi_2^T, \dots, \xi_m^T$ and permitting the block multiplication $A\xi$, k_i is the number of the scalar components of the vector ξ_i , $k_1 + k_2 + \dots + k_m = k$, $B^T = (B_1^T, B_2^T, \dots, B_m^T)$ is the vector of the parameters composed of vectors $B_1^T, B_2^T, \dots, B_m^T$ and permitting the block multiplication $B_i^T \xi_i$, then equalities (19) are fulfilled.*

2. Total probability formulae for the joint vector Gaussian distribution.

Theorem 2 (total probability formula for the joint vector Gaussian distribution). *Let $\Xi^T = (\Xi_1^T, \Xi_2^T, \dots, \Xi_m^T)$ be a random vector composed of vectors $\Xi_1^T, \Xi_2^T, \dots, \Xi_m^T$, $k_{\Xi,i}$ the number of the scalar components of the vector Ξ_i , $i = \overline{1, m}$, $f(\xi)$ the probability density function of the vector Ξ^T , $k_{\Xi} = k_{\Xi,1} + k_{\Xi,2} + \dots + k_{\Xi,m}$ the number of the scalar components of the vector Ξ , $f(y|\xi)$ the conditional probability density function of the random vector Y , k_Y the number of the scalar components of the vector Y , and $E^{k_{\Xi}}$ the k_{Ξ} -dimensional Euclidean space. If in the total probability formula*

$$f(y) = \int_{E^{k_{\Xi}}} f(y|\xi) f(\xi) d\xi \quad (20)$$

the conditional probability density function $f(y|\xi)$ is represented in the form

$$f(y|\xi) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{k_Y} |d_Y|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \xi_i^T S_{i,j} \xi_j + \sum_{i=1}^m V_i^T \xi_i - \frac{1}{2}W\right\} \quad (21)$$

where $S_{i,j}$ are the blocks of a block symmetric positive definite matrix $S = (S_{i,j})$, $i, j = \overline{1, m}$, V_i^T are the blocks of a block matrix $V^T = (V_i^T)$, $i = \overline{1, m}$, W is a scalar, and the probability density function $f(\xi)$ is represented in the form

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{k_{\Xi}} |d_{\Xi}|}} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (\xi_i - v_{\Xi,i})^T d_{\Xi}^{i,j} (\xi_j - v_{\Xi,j})\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{k_{\Xi}} |d_{\Xi}|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \xi_i^T d_{\Xi}^{i,j} \xi_j + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m v_{\Xi,i}^T d_{\Xi}^{i,j} \xi_j - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{1}{2} v_{\Xi,i}^T d_{\Xi}^{i,j} v_{\Xi,j}\right\}, \end{aligned} \quad (22)$$

where $d_{\Xi}^{i,j}$ are the blocks of a block symmetric positive definite matrix $d_{\Xi}^{-1} = (d_{\Xi}^{i,j})$, $i, j = \overline{1, m}$, $v_{\Xi,i}^T$ are the blocks of a block matrix $v_{\Xi}^T = (v_{\Xi,i}^T)$, $i = \overline{1, m}$, then integral (20) (the total probability formula) is defined by the following expression

$$f(y) = \int_{E^{k_{\Xi}}} f(y|\xi) f(\xi) d\xi = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{k_Y} |d_{\Xi}| |d_Y| |A|}} \exp\left(\frac{1}{2}B^T A^{-1}B - \frac{1}{2}C\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{k_Y} |d_{\Xi}| |d_Y| |A|}} \exp \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m B_i^T A^{i,j} B_j - \frac{1}{2} C \right), \quad (23)$$

where

$$A = (A_{i,j}) = (d_{\Xi}^{i,j} + S_{i,j}) = d_{\Xi}^{-1} + S, \quad i, j = \overline{1, m}, \quad (24)$$

$$B = (B_i) = \left(\sum_{j=1}^m d_{\Xi}^{i,j} v_{\Xi,j} + V_i \right) = d_{\Xi}^{-1} v_{\Xi} + V, \quad i = \overline{1, m}, \quad (25)$$

$$C = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m v_{\Xi,i}^T d_{\Xi}^{i,j} v_{\Xi,j} + W. \quad (26)$$

Proof. Multiplying (21) by (22), we get the following expression of the integrated function in (20):

$$f(y/\xi)f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{k_Y+k_{\Xi}} |d_Y| |d_{\Xi}|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \xi_i^T A_{i,j} \xi_j + \sum_{i=1}^m B_i \xi_i - \frac{1}{2} C \right\}, \quad (27)$$

where A, B, C are determined by formulae (24), (25), (26). In order to integrate the received function we can use formula (19) and write the equality

$$f(y) = \int_{E^{k_{\Xi}}} f(y/\xi)f(\xi)d\xi = \frac{\sqrt{(2\pi)^{k_{\Xi}} |A^{-1}|}}{\sqrt{(2\pi)^{k_Y+k_{\Xi}} |d_Y| |d_{\Xi}|}} \exp \left(\sum_{i=1}^m \frac{1}{2} B^T A^{-1} B - \frac{1}{2} C \right).$$

The proof is completed.

The functions $f(y/\xi)$ and $f(\xi)$ in total probability formula (20) are usually given not in the form of expressions (21), (22), but in the natural for the Gaussian distribution form. In this case, theorem 2 takes the form of theorem 3, more convenient for the practical utilization.

Theorem 3. Let $\Xi^T = (\Xi_1^T, \Xi_2^T, \dots, \Xi_m^T)$ be a random vector composed of vectors $\Xi_1^T, \Xi_2^T, \dots, \Xi_m^T$, $k_{\Xi,i}$ the number of the scalar components of the vector Ξ_i , $i = \overline{1, m}$, $f(\xi)$ the probability density function of the vector Ξ , $k_{\Xi} = k_{\Xi,1} + k_{\Xi,2} + \dots + k_{\Xi,m}$ the number of the scalar components of the vector Ξ , $f(y/\xi)$ the conditional probability density function of the random vector Y , k_Y the number of the scalar components of the vector Y , and $E^{k_{\Xi}}$ the k_{Ξ} -dimensional Euclidean space. If in the total probability formula

$$f(y) = \int_{E^{k_{\Xi}}} f(y/\xi)f(\xi)d\xi$$

the conditional probability density function $f(y/\xi)$ has the following form

$$\begin{aligned} f(y/\xi) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{k_Y} |d_Y|}} \exp \left(-\frac{1}{2} (y - h\xi)^T d_Y^{-1} (y - h\xi) \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{k_Y} |d_Y|}} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(y - \sum_{i=1}^m h_i \xi_i \right)^T d_Y^{-1} \left(y - \sum_{i=1}^m h_i \xi_i \right) \right), \end{aligned}$$

where $h = (h_1, h_2, \dots, h_m)$ is a matrix composed of $(k_Y \times k_{\Xi,i})$ -matrices (blocks) h_i , $i = \overline{1, m}$, and the probability density function $f(\xi)$ has the following form

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{k_{\Xi}} |d_{\Xi}|}} \exp \left(-\frac{1}{2} (\xi - v_{\Xi})^T d_{\Xi}^{-1} (\xi - v_{\Xi}) \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{k_{\Xi}} |d_{\Xi}|}} \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (\xi_i - v_{\Xi,i})^T d_{\Xi}^{i,j} (\xi_j - v_{\Xi,j}) \right), \end{aligned}$$

where $v_{\Xi,i}$ are blocks of the matrix $v_{\Xi} = (v_{\Xi,i})$, corresponding to the blocks of the random vector Ξ_i , $i = \overline{1,m}$, $d_{\Xi}^{i,j}$ are the blocks of the symmetric positive definite matrix $d_{\Xi}^{-1} = (d_{\Xi}^{i,j})$, $i, j = \overline{1,m}$, then integral (20) (the total probability formula) is defined by the following expression:

$$\begin{aligned} f(y) &= \int_{E^{k_{\Xi}}} f(y/\xi) f(\xi) d\xi = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{k_Y} |D_Y|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(y - hv_{\Xi})^T D_Y^{-1}(y - hv_{\Xi})\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{k_Y} |D_Y|}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(y - \sum_{i=1}^m h_i v_{\Xi,i}\right)^T D_Y^{-1}\left(y - \sum_{i=1}^m h_i v_{\Xi,i}\right)\right), \end{aligned}$$

where

$$D_Y = d_Y + h d_{\Xi} h^T = d_Y + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m h_i d_{\Xi,i,j} h_j^T.$$

This theorem is the generalization of the theorem proved in [7].

3. The Bayes formula for the joint vector Gaussian distribution.

Theorem 4 (the Bayes formula for the joint vector Gaussian distribution). Let $\Xi^T = (\Xi_1^T, \Xi_2^T, \dots, \Xi_m^T)$ be a random vector composed of vectors $\Xi_1^T, \Xi_2^T, \dots, \Xi_m^T$, $k_{\Xi,i}$ the number of the scalar components of the vector Ξ_i , $f(\xi)$ the probability density function of the vector Ξ , $k_{\Xi} = k_{\Xi,1} + k_{\Xi,2} + \dots + k_{\Xi,m}$ the number of the scalar components of the vector Ξ , $f(y/\xi)$ the conditional probability density function of the random vector Y , and k_Y the number of the scalar components of the vector Y . If in the Bayes formula

$$f(\xi/y) = \frac{f(\xi)f(y/\xi)}{\int_{E^{k_{\Xi}}} f(\xi)f(y/\xi) d\xi} \quad (28)$$

the conditional probability density function $f(y/\xi)$ is represented in the form

$$f(y/\xi) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{k_Y} |d_Y|}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \xi_i^T S_{i,j} \xi_j + \sum_{i=1}^m V_i^T \xi_i - \frac{1}{2} W\right\},$$

where $S_{i,j}$ are the blocks of a block symmetric positive definite matrix $S = (S_{i,j})$, $i, j = \overline{1,m}$, V_i^T is the blocks of a block matrix $V^T = (V_i^T)$, $i = \overline{1,m}$, W is a scalar, and the probability density function $f(\xi)$ is represented in the form

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{k_{\Xi}} |d_{\Xi}|}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (\xi_i - v_{\Xi,i})^T d_{\Xi}^{i,j} (\xi_j - v_{\Xi,j})\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{k_{\Xi}} |d_{\Xi}|}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \xi_i^T d_{\Xi}^{i,j} \xi_j + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m v_{\Xi,i}^T d_{\Xi}^{i,j} \xi_j - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{1}{2} v_{\Xi,i}^T d_{\Xi}^{i,j} v_{\Xi,j}\right\}, \end{aligned} \quad (29)$$

where $d_{\Xi}^{i,j}$ are the blocks of a block symmetric positive definite matrix $d_{\Xi}^{-1} = (d_{\Xi}^{i,j})$, $i, j = \overline{1,m}$, $v_{\Xi,i}^T$ are the blocks of a block matrix $v_{\Xi}^T = (v_{\Xi,i}^T)$, $i = \overline{1,m}$, then the posterior probability density function $f(\xi/y)$ of the random vector Ξ defined by the Bayes formula (28), has the following form:

$$\begin{aligned} f(\xi/y) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{k_{\Xi}} |D_{\Xi}|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\xi - N_{\Xi})^T D_{\Xi}^{-1}(\xi - N_{\Xi})\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{k_{\Xi}} |D_{\Xi}|}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \left(\xi_i - \sum_{k=1}^m D_{\Xi,i,k} B_k\right)^T D_{\Xi}^{i,j} \left(\xi_j - \sum_{l=1}^m D_{\Xi,i,l} B_l\right)\right), \end{aligned} \quad (30)$$

where

$$D_{\Xi}^{-1} = (D_{\Xi}^{i,j}) = (d_{\Xi}^{i,j} + S_{i,j}) = d_{\Xi}^{-1} + S, \quad i, j = \overline{1, m},$$

$$B = (B_i) = \left(\sum_{j=1}^m d_{\Xi}^{i,j} v_{\Xi,j} + V_i \right) = d_{\Xi}^{-1} v_{\Xi} + V,$$

$$N_{\Xi} = (N_{\Xi,i}) = D_{\Xi} B = \sum_{k=1}^m D_{\Xi,i,k} B_k.$$

Proof. Let us note that the given theorem is formulated in the same conditions and notations as theorem 2. In this case the numerator of the Bayes formula (28) is defined by expression (27) and the denominator by the total probability formula (23). Dividing (27) by (23), we get the formula

$$f(\xi / y) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{k_{\Xi}} | (A_{1,1}^{(0)})^{-1} | \dots | (A_{m,m}^{(m-1)})^{-1} |}} \times \\ \times \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \xi_i^T A_{i,j} \xi_j + \sum_{i=1}^m B_i^T \xi_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m B_i^T A^{i,j} B_j \right), \quad (31)$$

where A and B are defined by formulae (24), (25). Formula (31) can be written in the following form

$$f(\xi / y) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{k_{\Xi}} | A^{-1} |}} \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (\xi_i - N_{\Xi,i})^T A_{i,j} (\xi_j - N_{\Xi,j}) \right), \quad (32)$$

where

$$N_{\Xi,i} = \sum_{j=1}^m A^{i,j} B_j. \quad (33)$$

We will be convinced in the equality between (31) and (32) by multiplication in (32) given expression (33).

The matrix $d_{\Xi} = (d_{\Xi,i,j})$, $i, j = \overline{1, m}$, in formula (29) is the block priori variance-covariance matrix of the random vector $\Xi^T = (\Xi_1^T, \Xi_2^T, \dots, \Xi_m^T)$, the matrices $d_{\Xi}^{i,j}$ are the elements (blocks) of the block inverse matrix $d_{\Xi}^{-1} = (d_{\Xi}^{i,j})$, $i, j = \overline{1, m}$, and the vector $v_{\Xi}^T = (v_{\Xi,1}^T, v_{\Xi,2}^T, \dots, v_{\Xi,m}^T)$ is the block priori mathematical expectation of the random vector $\Xi^T = (\Xi_1^T, \Xi_2^T, \dots, \Xi_m^T)$. The matrix $A = (A^{i,j})$ in the Bayes formula (32) is the posterior variance-covariance matrix of the random vectors Ξ ($A^{i,j} = \text{cov}(\Xi_i, \Xi_j / y)$) that we denote now $D_{\Xi} = (D_{\Xi,i,j}) = A^{-1} = (A^{i,j})$. The vector $N_{\Xi} = (N_{\Xi,i}) = \left(\sum_{j=1}^m A^{i,j} B_j \right) = \left(\sum_{j=1}^m D_{\Xi,i,j} B_j \right)$, $i = \overline{1, m}$, in the Bayes formula (32) is the posterior mathematical expectation of the random vector $\Xi^T = (\Xi_1^T, \Xi_2^T, \dots, \Xi_m^T)$ ($N_{\Xi,i} = E(\Xi_i / y)$).

This completes the proof of theorem 4.

4. Example. Multiple Bayesian regression. We consider an example of obtaining the Bayes estimations of the coefficients of the multiple regression function. Let $x^T = (x_1, x_1, \dots, x_{n_X})$ be the vector input variable of some regression object and the scalar output variable Y of this object have the Gaussian probability density function

$$f(y / x, \Xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi d_Y}} \exp \left(-\frac{1}{2} d_Y^{-1} \left(y - \sum_{k=1}^m h_k^T \Xi_k \right)^2 \right),$$

where $\sum_{k=1}^m h_k^T \Xi_k$ is the regression function of Y on x . In contrast to the classical case, we consider the case when the vector of the basis functions $h^T = (h_1^T, h_2^T, \dots, h_m^T)$ contains not the scalar components, but is

represented as a set of the vector components $h_1^T, h_2^T, \dots, h_m^T$, $h_i^T = h_i^T(x)$, $i = 1, 2, \dots, m$. The vector $\Xi^T = (\Xi_1^T, \Xi_2^T, \dots, \Xi_m^T)$ is the vector of the coefficients of the regression function which is represented, like the vector h , by a set of its vector components $\Xi_1^T, \Xi_2^T, \dots, \Xi_m^T$. Each vector Ξ_i has the k_{Ξ_i} scalar components. Let the vector coefficients $\Xi_1, \Xi_2, \dots, \Xi_m$ have the mean values $v_{\Xi_1}, v_{\Xi_2}, \dots, v_{\Xi_m}$ and the covariance matrices $d_{\Xi_i, j}$, $i, j = 1, 2, \dots, m$, so that $d_{\Xi} = (d_{\Xi_i, j})$ is the block variance-covariance matrix of the vector Ξ . Let the vector Ξ have the Gaussian probability density function:

$$f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{k_{\Xi}} |d_{\Xi}|}} \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (\xi_i - v_{\Xi_i})^T d_{\Xi}^{i,j} (\xi_j - v_{\Xi_j}) \right), \quad k_{\Xi} = k_{\Xi_1} + \dots + k_{\Xi_m}, \quad (34)$$

where $d_{\Xi}^{i,j}$ are the blocks of the matrix $d_{\Xi}^{-1} = (d_{\Xi}^{i,j})$ inverse to the matrix $d_{\Xi} = (d_{\Xi_i, j})$.

Let us formulate the task of finding the Bayes estimations $\hat{\Xi}_k$ of the coefficients Ξ_k of the regression function $\sum_{k=1}^m h_k^T \Xi_k$ on the basis of independent measurements $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$.

Let the regression function be the function of two variables x_1, x_2 in the following form:

$$\varphi = \alpha + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \gamma_1 x_1^2 + \gamma_2 x_2^2 + \gamma_3 x_1 x_2,$$

where $\alpha, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ are the unknown coefficients, and we wish to divide these coefficients into 3 vectors representing the intercept, linear, and quadratic parts of the regression function. Then we have to choose the following vectors of the coefficients:

$$\Xi_1 = \alpha, \quad \Xi_2^T = (\beta_1, \beta_2), \quad \Xi_3^T = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3),$$

and the following vectors of the basis functions:

$$h_1 = 1, \quad h_2^T = (x_1, x_2), \quad h_3^T = (x_1^2, x_2^2, x_1 x_2).$$

We will use theorem 4 for solving the task. The set of the measurements $y = (y_{\mu})$, $\mu = \overline{1, n}$, is the vector with following probability density function:

$$f(\bar{y} / \bar{x}, \Xi) = \prod_{\mu=1}^n f(y_{\mu} / x_{\mu}, \Xi) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{n_Y} |d_Y|}} \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^n d_Y^{-1} \left(y_{\mu} - \sum_{j=1}^m h_{\mu, j}^T \Xi_j \right)^2 \right). \quad (35)$$

Let us transform function (35) to the form

$$f(\bar{y} / \bar{x}, \Xi) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{n_Y} |d_Y|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \xi_i^T S_{i,j} \xi_j + \sum_{j=1}^m V_j^T \xi_j - \frac{1}{2} W \right\}, \quad (36)$$

which is supposed in theorem 4. Since we have in (35)

$$u_{\mu} = \left(\sum_{j=1}^m h_{\mu, j}^T \Xi_j \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^m \Xi_i^T h_{\mu, i} \right) \left(\sum_{j=1}^m h_{\mu, j}^T \Xi_j \right) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \Xi_i^T h_{\mu, i} h_{\mu, j}^T \Xi_j,$$

then

$$\sum_{\mu=1}^n d_Y^{-1} u_{\mu} = d_Y^{-1} \sum_{\mu=1}^n u_{\mu} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \Xi_i^T \left(d_Y^{-1} \sum_{\mu=1}^n h_{\mu, i} h_{\mu, j}^T \right) \Xi_j = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \Xi_i^T \left(d_Y^{-1} S_{hh, i, j} \right) \Xi_j,$$

where

$$S_{hh, i, j} = \sum_{\mu=1}^n h_{\mu, i} h_{\mu, j}^T, \quad S_{hh} = (S_{hh, i, j}) = \left(\sum_{\mu=1}^n h_{\mu, i} h_{\mu, j}^T \right), \quad i, j = \overline{1, m}.$$

In such a case we obtain the following expression for $S_{i,j}$ in (36):

$$S_{i,j} = d_Y^{-1} S_{hh,i,j} = d_Y^{-1} \sum_{\mu=1}^n h_{\mu,i} h_{\mu,j}^T, \quad S = (S_{i,j}) = d_Y^{-1} S_{hh}, \quad i, j = \overline{1, m}.$$

Further, since in (35)

$$\sum_{\mu=1}^n d_Y^{-1} y_{\mu} \sum_{j=1}^m h_{\mu,j}^T \Xi_j = \sum_{j=1}^m \left(d_Y^{-1} \sum_{\mu=1}^n y_{\mu} h_{\mu,j}^T \right) \Xi_j = \sum_{j=1}^m d_Y^{-1} S_{yh,j}^T \Xi_j,$$

where

$$S_{yh,j}^T = \sum_{\mu=1}^n y_{\mu} h_{\mu,j}^T, \quad S_{yh}^T = (S_{yh,j}^T) = \left(\sum_{\mu=1}^n y_{\mu} h_{\mu,j}^T \right), \quad i, j = \overline{1, m},$$

then we obtain the following expression for V_j^T in (36):

$$V_j^T = d_Y^{-1} S_{yh,j}^T = d_Y^{-1} \sum_{\mu=1}^n y_{\mu} h_{\mu,j}^T, \quad V^T = (V_j^T) = (d_Y^{-1} S_{yh,j}^T) = d_Y^{-1} S_{yh}^T, \quad j = \overline{1, m}.$$

The probability density function $f(\xi)$ (34) is presented easily in the following form:

$$f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{k_{\Xi}} |d_{\Xi}|}} \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \xi_i^T d_{\Xi}^{i,j} \xi_j + \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^m v_{\Xi,i}^T d_{\Xi}^{i,j} \right) \xi_j - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m v_{\Xi,i}^T d_{\Xi}^{i,j} v_{\Xi,j} \right),$$

supposed in theorem 4.

Thus, on the basis of theorem 4 (formula (30)), the joint posterior probability density function of the coefficients $\Xi_1, \Xi_2, \dots, \Xi_m$ has the following form:

$$\begin{aligned} f(\xi / \bar{y}, \bar{x}) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{k_{\Xi}} |D_{\Xi}|}} \exp \left(-\frac{1}{2} (\bar{\xi} - N_{\Xi})^T D_{\Xi}^{-1} (\bar{\xi} - N_{\Xi}) \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{k_{\Xi}} |D_{\Xi}|}} \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \left(\xi_i - \sum_{k=1}^m D_{\Xi,i,k} B_k \right)^T D_{\Xi}^{i,j} \left(\xi_j - \sum_{l=1}^m D_{\Xi,j,l} B_l \right) \right), \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} D_{\Xi}^{-1} &= (D_{\Xi}^{i,j}) = (d_{\Xi}^{i,j} + d_Y^{-1} S_{hh,i,j}) = d_{\Xi}^{-1} + d_Y^{-1} S_{hh}, \quad S_{hh} = (S_{hh,i,j}) = \left(\sum_{\mu=1}^n h_{\mu,i} h_{\mu,j}^T \right), \quad i, j = \overline{1, m}, \\ B &= (B_i) = \left(\sum_{j=1}^m d_{\Xi}^{i,j} v_{\Xi,j} + d_Y^{-1} S_{yh,i} \right) = d_{\Xi}^{-1} v_{\Xi} + d_Y^{-1} S_{yh}, \quad S_{yh} = (S_{yh,i}) = \left(\sum_{\mu=1}^n y_{\mu} h_{\mu,i} \right), \quad N_{\Xi} = D_{\Xi} B. \end{aligned}$$

The N_{Ξ} and the D_{Ξ} , are the block posterior mathematical expectation and the block posterior variance-covariance matrix of the random vector Ξ respectively.

The calculations are performed in the following order. The parameters of the unknown block vector parameter Ξ distribution are given: the block variance-covariance matrix $d_{\Xi} = (d_{\Xi,i,j})$, $i, j = \overline{1, m}$, and the block vector of mathematical expectation $v_{\Xi}^T = (v_{\Xi,i}^T)$, $i = \overline{1, m}$. Then the block matrix $d_{\Xi}^{-1} = (d_{\Xi}^{i,j})$ inverse to the matrix d_{Ξ} is calculated. Further, the block matrices $S_{hh} = (S_{hh,i,j})$, $S_{yh} = (S_{yh,j})$, $B = (B_j) = (d_{\Xi}^{-1} v_{\Xi}) + d_Y^{-1} S_{yh}$, $i = \overline{1, m}$, are calculated. After that the block matrix $D_{\Xi}^{-1} = (D_{\Xi}^{i,j}) = (d_{\Xi}^{i,j} + d_Y^{-1} S_{hh,i,j})$, $i, j = \overline{1, m}$, is formed and the inverse to it block matrix $D_{\Xi} = (D_{\Xi,i,j})$, $i, j = \overline{1, m}$, is calculated. Finally, the block vector of the posterior mathematical expectation

$N_{\Xi} = D_{\Xi}B$ is defined. For performing these operations we need the programs of transposing, multiplying and inverting of the block matrices.

Conclusion. The results obtained in this paper are aimed at solving the dual control problems formulated in works [9, 10]. The sequence of the control actions in the dual control of the multivariate stochastic objects is defined by the functional equations of the dynamic programming [9], which contain the integrals like the integrals calculated in this article. One of the practical examples is the task of the optimal allowance distribution as the task of the dual control considered in work [10].

References

1. Wakefield J. *Bayesian and Frequentist Regression Methods*. Springer, 2013. 709 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0925-1>
2. DeGroot M. H. *Optimal Statistical Decisions*. McGraw-Hill Inc., 1970. 489 p.
3. Zellner A. *An Introduction to Bayesian Inference in Econometrics*. John Wiley and Sons, Inc., 1971. 448 p.
4. Berger J. O. *Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis*. New York, Springer-Verlag, 1985. 618 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-4286-2>
5. Fel'dbaum A. A. *Optimal Control Systems*. New York, London, Academic Press, 1965. 452 p.
6. Mukha V. S., Kako N. F. Integrals and integral transformations connected with vector Gaussian distribution. *Vestsi Natsyional'nei akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2019, vol. 55, no. 4, pp. 457–466. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-4-457-466>
7. Mukha V. S., Kako N. F. Total probability formula for vector Gaussian distributions. *Doklady BGUIR*, 2021, vol. 19, no. 2, pp. 58–64. <https://doi.org/10.35596/1729-7648-2021-19-2-58-64>
8. Gantmacher F. R. *The Theory of Matrices. Vol. 1*. New York, Chelsea Publ. Company, 1959. 374 p. <https://doi.org/10.1126/science.131.3408.1216-a>
9. Mukha V. S., Kako N. F. Dual Control of Multidimensional-matrix Stochastic Objects. *Informatsionnye tekhnologii i sistemy 2019 (ITS 2019): Materialy mezhdunarodnoi konferentsii, BGUIR, Minsk, 30 oktyabrya 2019 g.* [Information Technologies and Systems 2019 (ITS 2019): Proceeding of the International Conference, BSUIR, Minsk, 30th October 2019]. Minsk, 2019, pp. 236–237 (in Russian).
10. Mukha V. S., Kako N. F. Flat Problem of Allowance Distribution as Dual Control Problem. *Informatsionnye tekhnologii i sistemy 2020 (ITS 2020): Materialy mezhdunarodnoi konferentsii, BGUIR, Minsk, Belarus', 18 noyabrya 2020 g.* [Information Technologies and Systems 2020 (ITS 2020): Proceeding of the International Conference, BSUIR, Minsk, Belarus, 18th November 2020]. Minsk, 2020, pp. 195–196 (in Russian).

Information about the authors

Vladimir S. Mukha – Dr. Sc. (Engineering), Professor, Professor of the Department of Information Technologies of Automated Systems, Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (6, P. Brovka Str., 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: mukha@bsuir.by

Nancy Forat Kako – Postgraduate Student, Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (6, P. Brovka Str., 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: kako.nancy@gmail.com

Информация об авторах

Муха Владимир Степанович – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры информационных технологий автоматизированных систем, Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (ул. П. Бровки, 6, 220013, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: mukha@bsuir.by

Како Нэнси Форат – аспирант, Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (ул. П. Бровки, 6, 220013, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: kako.nancy@gmail.com

ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)

ФИЗИКА PHYSICS

ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 539.1.07 + 539.1.074.3
<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-2-217-223>

Поступила в редакцию 23.02.2021
Received 23.02.2021

М. В. Коржик

Институт ядерных проблем Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь

ГАДОЛИНИЙ-СОДЕРЖАЩЕЕ СЦИНТИЛЛЯЦИОННОЕ СТЕКЛО ДЛЯ РЕГИСТРАЦИИ НЕЙТРОНОВ В ШИРОКОМ ДИАПАЗОНЕ ЭНЕРГИЙ

Аннотация. Неорганические сцинтилляционные стекла формируют домен быстроразвивающихся детекторных материалов, используемых для детектирования различных видов ионизирующего излучения. Наибольшее распространение получили литий-силикатные стекла, обогащенные изотопом ^6Li , которые используются для регистрации тепловых нейтронов. Вместе с тем в силу специфики энергетической зависимости сечения нейтронов легких ядер такие материалы малоприспособлены для регистрации эпитепловых и более высокоэнергетических нейтронов. Использование редкоземельных элементов в составе стекол позволяет повысить чувствительность к нейтронам. В системе $\text{BaO-Gd}_2\text{O}_3\text{-SiO}_2$ при активации ионами церия впервые создано сцинтилляционное стекло с выходом не менее 2500 фот/МэВ, что позволяет создавать недорогие детекторные элементы значительного объема для регистрации нейтронов. Установлено, что детекторы на основе стекла $\text{BaO-Gd}_2\text{O}_3\text{-SiO}_2$ обладают удовлетворительными детекторными свойствами при регистрации нейтронов в широком спектре их энергий.

Ключевые слова: сцинтиллятор, стекло, световыход, гадолиний, нейтрон

Для цитирования. Коржик, М. В. Гадолиний-содержащее сцинтилляционное стекло для регистрации нейтронов в широком диапазоне энергий / М. В. Коржик // Вест. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2021. – Т. 57, № 2. – С. 217–223. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-2-217-223>

Mikhail V. Korzhik

Institute of Nuclear Problems of the Belarus State University, Minsk, Belarus

GADOLINIUM CONTAINED SCINTILLATION GLASS FOR NEUTRON DETECTION IN A WIDE ENERGY RANGE

Abstract. Inorganic scintillation glasses form a domain of rapidly evolving detector materials used to measure various types of ionizing radiation. The most widespread are lithium-silicate glasses enriched with the ^6Li isotope, which are used to register thermal neutrons. At the same time, due to the specificity of the energy dependence of the neutron cross-section of light nuclei, such materials are of little use for the evaluation of epithermal and more highly energetic neutrons. The use of rare earth elements in the composition of glasses makes it possible to increase the sensitivity to neutrons. In the $\text{BaO-Gd}_2\text{O}_3\text{-SiO}_2$ system, doped with Ce ions, a scintillation glass with a yield of at least 2500 photons / MeV was created for the first time, which permits to create inexpensive detector elements of a significant volume for registering neutrons. It has been shown that a detector based on $\text{BaO-Gd}_2\text{O}_3\text{-SiO}_2$ glass has satisfactory properties when detecting neutrons in a wide spectrum of their energies.

Keywords: scintillator, glass, light yield, gadolinium, neutron

For citation. Korzhik M. V. Gadolinium contained scintillation glass for neutron detection in a wide energy range. *Vesti Natsyional'nai akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2021, vol. 57, no. 2, pp. 217–223 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-2-217-223>

Введение. Неорганические сцинтилляционные материалы, содержащие изотоп ^6Li [1, 2] зарекомендовали себя как эффективные детекторные материалы для регистрации тепловых нейтронов. Недавно было установлено, что расширение энергетического диапазона регистрируемых нейтронов обеспечивается при использовании гадолиний-содержащих кристаллических сцинтилляторов [3, 4]. Стекланные сцинтилляционные материалы обладают невысоким выходом сцинтилляций по сравнению с кристаллическими соединениями, однако при наполнении композиции стекла ионами с ядрами, активно поглощающими нейтроны с образованием вторичных ионизирующих частиц, могут рассматриваться как альтернатива кристаллическим материалам, прежде всего благодаря их относительно простому и недорогому способу производства. Среди многообразия стекол силикатное стекло относительно простых композиций позволяет получать наибольший выход при активации ионами церия или тербия [5]. Из стекла могут быть изготовлены различные элементы путем выработки в форму, вплоть до блоков больших объемных размеров, либо в форме волокна. Силикатное стекло с добавлением модификаторов получают по стандартной технологии производства при температурах 1400–1550 °С с последующей термической обработкой отжигом при относительно низкой температуре. Стекло на основе легкого силиката лития подробно рассмотрено ранее [6]. Также было получено тяжелое силикатное сцинтилляционное стекло на основе тяжелых элементов, таких как Ba [7, 8]. Стекло со стехиометрическим составом дисиликата бария ($\text{BaO} \cdot 2\text{SiO}_2$), легированное Ce (Disilicate of Barium, DSB:Ce), является одним из новых сцинтилляционных материалов. В случае подобных двухкатионных силикатных систем структура сетки стекла образована слоями тетраэдрически координированного кремния с ионами элемента-модификатора между ними. Двухвалентные ионы Ba^{2+} в стекле могут быть частично заменены другими одно- и двухвалентными ионами первой или второй групп или трехвалентными редкоземельными ионами. Поэтому естественным направлением исследований стало внедрение в барий-кремниевое стекло ионов гадолиния с целью создания Ba–Gd–Si сцинтилляционного стекла для регистрации нейтронов.

Методика получения стекла состава $\text{BaO} \cdot \text{Gd}_2\text{O}_3 \cdot 3\text{SiO}_2 \cdot \text{Ce}^{3+}$. Стекло DSB:Ce может быть получено из механической смеси всех исходных компонентов сырья [9, 10]. Состав $\text{BaO} \cdot 2\text{SiO}_2$ плавится и достигает необходимой вязкости для выработки при температуре ~1430 °С. В литературе нет полной определенности по точной форме линии ликвидуса со стороны, обогащенной SiO_2 относительно данной фазы, однако при снижении количества SiO_2 падение температуры плавления в точке эвтектики минимально, и в целом наблюдается уверенный рост температуры плавления системы. В данном исследовании состав (Gd–Ba)-содержащего стекла был выбран комбинированием двух известных стехиометрических составов – упомянутого выше DSB и ортосиликата гадолиния (Gd_2SiO_5 , $\text{Gd}_2\text{O}_3 \cdot \text{SiO}_2$, температура плавления – около 1900 °С), аналога известного кристаллического сцинтиллятора [1]. Состав композиции результирующего стекла был $\text{BaO} \cdot \text{Gd}_2\text{O}_3 \cdot 3\text{SiO}_2 \cdot \text{Ce}$, а его ожидаемая температура плавления была оценена как 1520 °С.

Для сохранения активирующего иона Ce в трехвалентном состоянии в шихту добавлялся восстановитель в виде SiC в количестве 0,2 мас.% [8].

Использование описанных выше приемов позволило синтезировать методом закалки расплава образцы стекла объемом до 20 см³. В результате были получены бесцветные стекла, обладающие интенсивной люминесценцией в голубой области спектра (рис. 1).

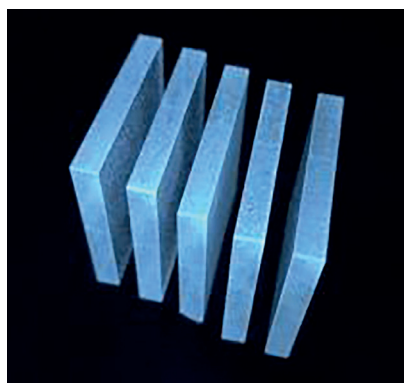


Рис. 1. Фотографии образцов сцинтилляционных элементов при освещении излучением 360 нм

Fig. 1. Photos of samples of scintillation elements under illumination with radiation of 360 nm

Спектрально-люминесцентные свойства Ba–Gd–Si, активированного ионами Се. Измерения радиolumинесценции (РЛ) при возбуждении рентгеновским излучением и с источником нейтронов Am–Be проводились в кооперации с участниками Crystal Clear Collaboration (ЦЕРН). Спектры РЛ записывали с помощью монохроматора Sincerity, Jobin Yvon (с решеткой 234 штрихов/мм), с детектором типа Charge Coupled Device (CCD). РЛ возбуждали рентгеновским излучением с использованием трубки Philips PW2274, работающей при 20 кВ и 20 мА.

Измерения временного разрешения совпадений были выполнены при комнатной температуре с использованием образцов стекол $2 \times 2 \times 5$ мм³, установленных на кремниевые фотомножители (SiPM) HPK S13360 3050PE, Hamamatsu с эффективностью фоторегистрации ~60 % при 410 нм и источника коррелированных аннигиляционных гамма-квантов ²²Na. Аналогичная методика, также называемая «старт-стоп» с применением вакуумных фотомножителей Philips XR2020, применялась для измерения кинетики сцинтилляций, а для измерения кинетики фотolumинесценции использовался спектрофлуориметр.

Нормированные спектры радиolumинесценции исследованных образцов представлены на рис. 2. В широком диапазоне температур спектры состоят из полосы с максимумом при 410 нм, обусловленной переходами $5d_1 \rightarrow {}^2F_{5/2,7/2}$ в Ce^{3+} . Дополнительная полоса излучения с максимумом 313 нм наблюдается рядом с основной полосой излучения Се при низких температурах (см. спектр при 10 К на рис. 2). Эта полоса обусловлена электронным переходом между состояниями 6P – 8S ионов Gd^{3+} . Второй порядок полосы наблюдается при 626 нм. Тушение люминесценции Gd^{3+} при повышенных температурах подтверждает эффективную передачу электронных возбуждений от подсистемы Gd^{3+} к активаторным ионам Ce^{3+} .

В стекле, в отличие от монокристаллов, повышенная концентрация активатора ионов Се является необходимым условием получения максимального выхода сцинтилляции, поэтому проблема окисления Се в расплаве при высокой температуре требует особого внимания. При высоком содержании Се в стекле часть его окисляется до состояния Ce^{4+} , что может привести к коричневому окрашиванию стекла из-за широкой бесструктурной полосы поглощения в видимом диапазоне. Присутствие Ce^{4+} приводит к падению световыхода сцинтилляции за счет перепоглощения сцинтилляционного света, как ранее установлено нами для литий-силикатных стекол [5].

Сравнение кинетики фотolumинесценции и сцинтилляции, измеренное при комнатной температуре, представлено в табл. 1.

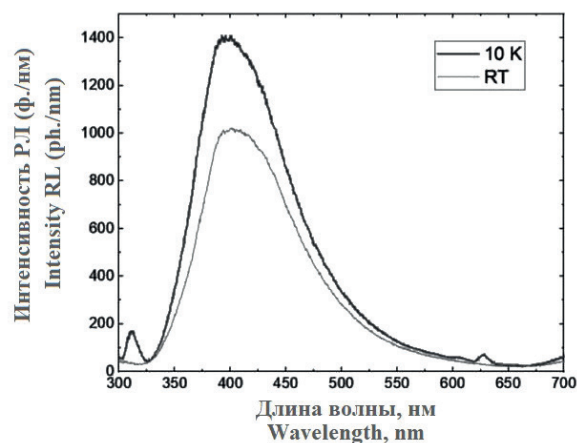
Таблица 1. Параметры кинетики фотolumинесценции, сцинтилляции и временного разрешения совпадений, полученные с образцами стекла $\text{BaO} \cdot \text{Gd}_2\text{O}_3 \cdot 3\text{SiO}_2 \cdot \text{Ce}$, измеренные при комнатной температуре

Table 1. The parameters of the photoluminescence kinetics, scintillation, and coincidence time resolution obtained with $\text{BaO} \cdot \text{Gd}_2\text{O}_3 \cdot 3\text{SiO}_2 \cdot \text{Ce}$ glass samples measured at room temperature

Константа затухания кинетики люминесценции, возбуждение 340 нм, нс	Константа затухания кинетики сцинтилляций, доля в кинетике, нс (%)	Временное разрешение совпадений, измеренное с аннигиляционными гамма-квантами 511кэВ, пс (%)
50	90 (45) 400 (55)	215

Рис. 2. Спектры радиolumинесценции стекла $\text{BaO} \cdot \text{Gd}_2\text{O}_3 \cdot 3\text{SiO}_2 \cdot \text{Ce}$ при 300 и 10 К

Fig. 2. Radioluminescence spectra of $\text{BaO} \cdot \text{Gd}_2\text{O}_3 \cdot 3\text{SiO}_2 \cdot \text{Ce}$ glass at 300 and 10 K



Фотолюминесценция показывает моноэкспоненциальное затухание с постоянной времени 50 нс. Между тем затухание сцинтилляции происходит значительно медленнее, его можно описать двумя компонентами с сопоставимыми вкладами: быстрой составляющей с постоянной времени 90 нс (45 %) и медленной составляющей с постоянной времени 400 нс (55 %). Полученное значение временного разрешения всего в два раза больше, чем значение, получаемое с кристаллами $\text{Lu}_2\text{SiO}_5\text{:Ce}$, которые широко применяются в новейших сканерах позитронно-эмиссионной томографии [11].

Амплитудный спектр, измеренный с ^{137}Cs источником γ -квантов (662 кэВ) и зависимость выхода сцинтилляций от времени интегрирования сигнала при различных температурах приведены на рис. 3. При времени интегрирования 4 мкс коэффициент изменения световыхода от температуры в указанном диапазоне температур составил 0,3 % /°C. Значение световыхода приведено в фотоэлектронах, учитывая эффективность фоторегистрации ФЭУ около 20 %, можно оценить световыход стекла величиной 2500 фот/МэВ. Полученный результат по световыходу сцинтилляций является наилучшим для тяжелых сцинтилляционных стекол, имеющих к настоящему времени.

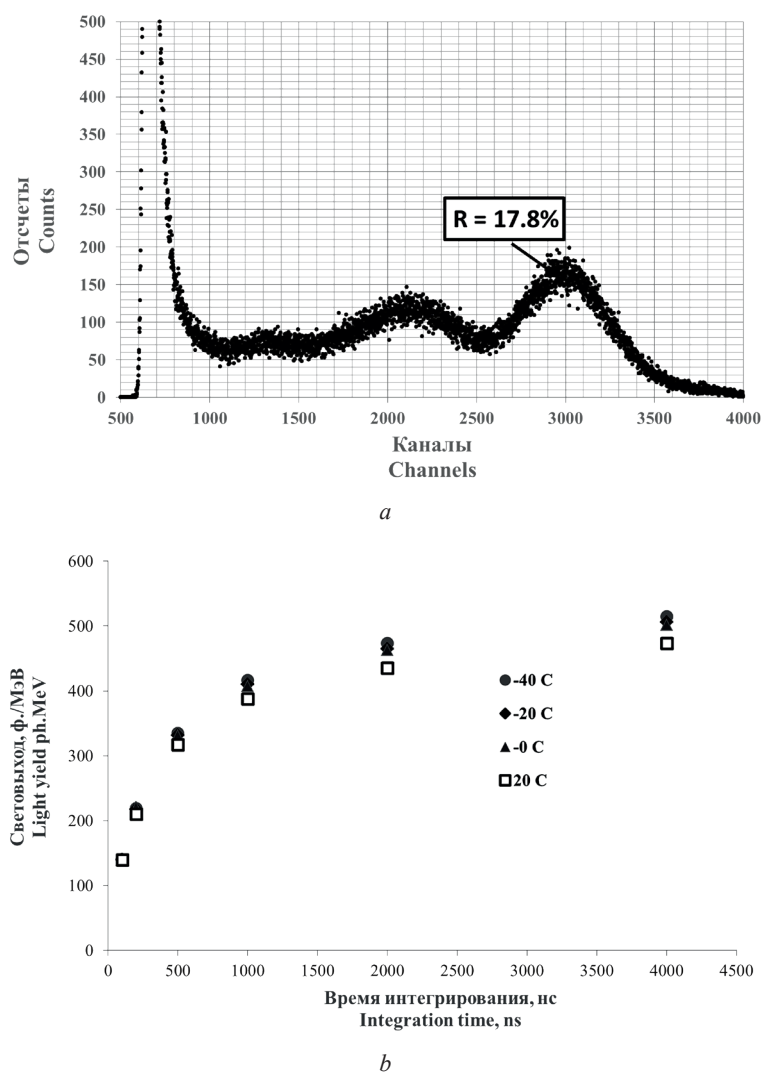


Рис. 3. Амплитудный спектр (а), измеренный с ^{137}Cs источником γ -квантов с образцом с содержанием Gd_2O_3 и CeO_2 20 и 0,5 мас.% в композиции стекла Ba–Gd–Si и температурная зависимость световыхода (б) от времени интегрирования в тракте регистрации

Fig. 3 The pulse height spectrum of ^{137}Cs γ -quanta measured with Ba–Gd–Si glass (20 weight % of Gd and 0.5 weight % of CeO_2 in the composition) (a) and (b) the temperature dependence of the gated light yield

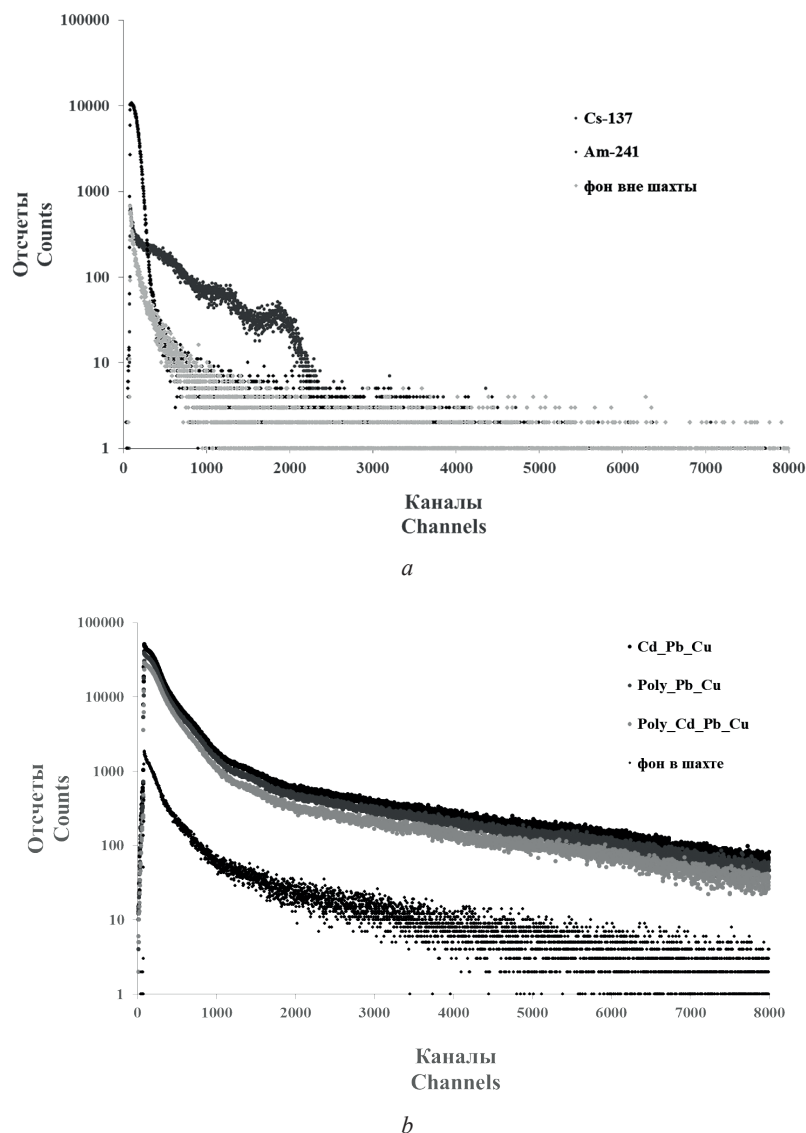


Рис. 4. Спектр фона в лаборатории и амплитудные спектры калибровочных источников (а), спектр фона вблизи шахты с источником нейтронов и продуктов взаимодействия нейтронов в сцинтилляторе, измененный с различными поглотителями и модератором между источником и детектором нейтронов на основе стекла $\text{BaO} \cdot \text{Gd}_2\text{O}_3 \cdot 3\text{SiO}_2 \cdot \text{Ce}$ (b)

Fig. 4. The background spectrum in the laboratory and the amplitude spectra of the calibration sources (a), the background spectrum near the well with a neutron source and the secondary particles in the scintillator under the neutron source, the flux of which was modified with different absorbers and a moderator between the source and a neutron detector based on $\text{BaO} \cdot \text{Gd}_2\text{O}_3 \cdot 3\text{SiO}_2 \cdot \text{Ce}$ glass (b)

Регистрация нейтронов детектором на основе стекла композиции $\text{BaO} \cdot \text{Gd}_2\text{O}_3 \cdot 3\text{SiO}_2 \cdot \text{Ce}$. Стекло $\text{BaO} \cdot \text{Gd}_2\text{O}_3 \cdot 3\text{SiO}_2 \cdot \text{Ce}$ представляет большой интерес в качестве дешевого детекторного материала с чувствительностью к нейтронам. Высокое разрешение временных совпадений делает возможной временную дискриминацию для некоторых задач с использованием разности времени пролета нейтронов с различными кинетическими энергиями, а величина световыхода дает возможность регистрировать сигнал нейтронов по мягким гамма-квантам, испускаемым ядрами ^{156}Gd , ^{158}Gd после захвата нейтронов.

Результаты и их обсуждение. В отличие от монокристаллических сцинтилляционных детекторов, обеспечивающих хорошее энергетическое разрешение в области низких энергий гамма-квантов [12], измерение с сцинтиллятором $\text{BaO} \cdot \text{Gd}_2\text{O}_3 \cdot 3\text{SiO}_2 \cdot \text{Ce}$ обеспечивает существенное превышение над фоном, однако отдельные линии не разрешены. В отсутствие четко выражен-

ных пиков в низкоэнергетической области спектров для оценки эффективности регистрации нейтронов можно применить прямое интегрирование спектра в диапазонах, соответствующих линиям γ -квантов от (n, γ) -реакций с атомами гадолиния.

В табл. 2 представлены интегральные значения отсчетов разных геометрий для интервала энергий 70–200 кэВ.

Таблица 2. Интегральные значения отсчетов для интервала энергий 70–200 кэВ с различными поглотителями и замедлителем между детектором и источником нейтронов

Table 2. Integrals of the counts in the energy range 70–200 keV with different absorbers and a moderator in between the detector and neutron source

№	Геометрия	Интегральное значение событий
1	Фон около шахты с погруженным источником нейтронов	106999
2	Cd, Pb, Cu: Pb-, Cu-поглотители γ -квантов и Cd-фильтр тепловых нейтронов размещены между источником нейтронов и детектором (с вычетом фона)	3911575
3	Poly, Pb, Cu: Pb-, Cu-поглотители γ -квантов и полиэтилметиленовый замедлитель размещены между источником нейтронов и детектором (с вычетом фона)	3103439
4	Poly, Cd, Pb, Cu: Pb-, Cu-поглотители γ -квантов, Cd-фильтр тепловых нейтронов и полиэтилметиленовый замедлитель размещены между источником нейтронов и детектором (с вычетом фона)	2363034

Данные, представленные в табл. 2, позволяют оценить возможность регистрации нейтронов при помощи исследуемого образца сцинтилляционного стекла с высоким содержанием гадолиния. Количество событий для геометрии (2) с Pb- и Cu-поглотителями и кадмиевым фильтром тепловых нейтронов представляют собой зарегистрированные γ -кванты от (n, γ) -реакции спектра нейтронов от надтепловых до быстрых источника Am–Be. При добавлении дополнительной пластины модератора (геометрия 3) ожидаемо уменьшается количество событий по причине перераспределения нейтронов в область низких энергий. Уменьшение отсчетов наблюдается при установке кадмиевого фильтра (геометрия 4). Из полученных результатов можно сделать вывод, что исследованный сцинтиллятор наиболее чувствителен к эпитепмальным нейтронам и нейтронам высоких энергий, что обусловлено в первую очередь широкой областью резонансов в сечении нейтронов ядер гадолиния ^{155}Gd , ^{157}Gd .

Достоинством стекла выступает относительно низкая плотность в сравнении с гадолиний-содержащими монокристаллами, что делает стекло Ba–Gd–Si:Ce менее чувствительным к фоновым γ -квантам. Следовательно, разработанный сцинтилляционный материал может быть использован в производстве больших экранов для детектирования нейтронов.

Закключение. Разработанное сцинтилляционное стекло, сочетающее атомы Ba, Gd, Si и Ce, демонстрирует высокую чувствительность при регистрации нейтронов в широком диапазоне энергий с высоким временным разрешением. Поэтому разработанный сцинтилляционный материал может быть использован в производстве больших экранов различной формы для детектирования нейтронов. Особый интерес представляют экраны в виде труб большого диаметра для помещения внутрь исследуемых объектов. Это позволит сделать существенный шаг в увеличении производительности нейтронных диагностических методов за счет использования для регистрации геометрии, близкой к 4π , и открывает перспективу создания нейтронных 3D-сканеров.

Список использованных источников

1. Lecoq, P. Inorganic Scintillators for detecting systems / P. Lecoq, A. Gektin, M. Korzhik. – Springer, 2017. – 408 p.
2. Коржик, М. В. Стеклокерамические материалы для регистрации нейтронов / М. В. Коржик // Вест. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2018. – № 4. – С. 67–71.
3. Detection of neutrons in a wide energy range with crystalline $\text{Gd}_3\text{Al}_2\text{Ga}_3\text{O}_{12}$, Lu_2SiO_5 and LaBr_3 doped with Ce scintillators / M. Korzhik [et al.] // Nucl. Instrum. Methods Phys. Res., Sect. A. – 2019. – Vol. 931. – P. 88–91. <https://doi.org/10.1016/j.nima.2019.04.034>
4. Sensitivity of GAGG based scintillation neutron detector with SiPM readout / A. Fedorov [et al.] // Nucl. Eng. Technol. – 2020. – Vol. 52, № 10. – P. 2306–2312. <https://doi.org/10.1016/j.net.2020.03.012>
5. Scintillation efficiency of binary $\text{Li}_2\text{O}-2\text{SiO}_2$ glass doped with Ce^{3+} and Tb^{3+} ions / Y. Tratsiak [et al.] // J. Alloys Compd. – 2018. – Vol. 735. – P. 2219–2224. <https://doi.org/10.1016/j.jallcom.2017.11.386>

6. Li-Based glasses for neutron detection – classic material revisited / G. Dosovitskiy [et al.] // *Rev. J. Chem.* – 2020. – Vol. 10, № 1/2. – P. 1–11. <https://doi.org/10.1134/s207997802001001x>
7. DSB: Ce^{3+} scintillation glass for future / E. Auffray [et al.] // *J. Phys.: Conf. Ser.* – 2015. – Vol. 587. – P. 012062. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/587/1/012062>
8. Distribution of luminescent centers in Ce^{3+} -ion doped amorphous stoichiometric glass $\text{BaO}-2\text{SiO}_2$ and dedicated glass ceramics / M. Korjik [et al.] // *Opt. Mater.* – 2015. – Vol. 47. – P. 129–134. <https://doi.org/10.1016/j.optmat.2015.07.014>
9. Thermodynamic modeling of the $\text{BaO}-\text{SiO}_2$ and $\text{SrO}-\text{SiO}_2$ binary melts / A. Romero-Serrano [et al.] // *Glass Phys. Chem.* – 2010. – Vol. 36, № 2. – P. 171–178. <https://doi.org/10.1134/s1087659610020045>
10. Zhang, R. A thermodynamic assessment of the $\text{BaO}-\text{MgO}$, $\text{BaO}-\text{CaO}$, $\text{BaO}-\text{Al}_2\text{O}_3$ and $\text{BaO}-\text{SiO}_2$ systems [Electronic Resource] / R. Zhang, P. Taskinen // Aalto University. – 2014. – Mode of access: <https://aaltodoc.aalto.fi/bitstream/handle/123456789/12848/isbn9789526056135.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
11. Experimental time resolution limits of modern SiPMs and TOF-PET detectors exploring different scintillators and Cherenkov emission / S. Gundacker [et al.] // *Phys. Med. Biol.* – 2020. – Vol. 65, № 2. – P. 025001. <https://doi.org/10.1088/1361-6560/ab63b4>
12. Временные и спектральные характеристики детекторов на основе неорганического сцинтиллятора Ce: ГАГГ при использовании вакуумных и кремниевых фотоприемников / В. Богомолов [и др.] // *Приборы и техника эксперимента.* – 2020. – № 5. – С. 23–21.

References

1. Lecoq P., Gektin A., Korzhik M., *Inorganic Scintillators for Detecting Systems*, Springer, 2017. 408 p.
2. Korjik M. V. Glass-ceramic materials for neutron registration. *Vestsi Natsyional'nei akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, no. 4, pp. 67–71 (in Russian).
3. Korzhik M., Brinkmann K.-Th., Dosovitskiy G., Dormenev V., Fedorov A., Komar D., Kozemiakin V., Kozlov D., Mechinsky V., Zaunick H.-G., Yashin I., Iyudin A., Bogomolov V., Svertilov S., Maximov I. Detection of neutrons in a wide energy range with crystalline $\text{Gd}_3\text{Al}_2\text{Ga}_3\text{O}_{12}$, Lu_2SiO_5 and LaBr_3 doped with Ce scintillators. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A*, 2019, vol. 931, pp. 88–91. <https://doi.org/10.1016/j.nima.2019.04.034>
4. Fedorov A., Gurinovich V., Guzun V., Dosovitskiy G., Korzhik M., Kozhemyakin V., Lopatik A., Kozlov D., Mechinsky V., Retivov V. Sensitivity of GAGG based scintillation neutron detector with SiPM readout. *Nuclear Engineering and Technology*, 2020, vol. 52, no. 10, pp. 2306–2312. <https://doi.org/10.1016/j.net.2020.03.012>
5. Tratsiak Y., Fedorov A., Dosovitskiy G., Akimova O., Gordienko E., Korjik M., Mechinsky V., Trusova E. Scintillation efficiency of binary $\text{Li}_2\text{O}-2\text{SiO}_2$ glass doped with Ce^{3+} and Tb^{3+} ions. *Journal of Alloys and Compounds*, 2018, vol. 735, pp. 2219–2224. <https://doi.org/10.1016/j.jallcom.2017.11.386>
6. Dosovitskiy G., Akimova O., Amelina A., Belus S., Fedorov A., Karpyuk P., Kozlov D., Mechinsky V., Mikhlin A., Retivov V., Smyslova V., Volkov P., Korzhik M. Li-Based glasses for neutron detection – classic material revisited. *Review Journal of Chemistry*, 2020, vol. 10, no. 1–2, pp. 1–11. <https://doi.org/10.1134/s207997802001001x>
7. Auffray E., Akchurin N., Benaglia A., Borisevich A., Cowden C., Damgov J., Dormenev V., Dragoiu C., Dudero P., Korjik M., Kozlov D., Kunori S., Lecoq P., Lee S. W., Lucchini M., Mechinsky V., Pauwels K. DSB: Ce^{3+} scintillation glass for future. *Journal of Physics: Conference Series*, 2015, vol. 587, pp. 012062. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/587/1/012062>
8. Korjik M. V., Vaitkevicius A., Dobrovolskas D., Tret'yak E. V., Trusova E., Tamulaitis G. Distribution of luminescent centers in Ce^{3+} -ion doped amorphous stoichiometric glass $\text{BaO}-2\text{SiO}_2$ and dedicated glass ceramics. *Optical Materials*, 2015, vol. 47, pp. 129–134. <https://doi.org/10.1016/j.optmat.2015.07.014>
9. Romero A., Cruz A., Zeifert B. H., Hallen-Lopez M. Thermodynamic modeling of the $\text{BaO}-\text{SiO}_2$ and $\text{SrO}-\text{SiO}_2$ binary melts. *Glass Physics and Chemistry*, 2010, vol. 36, no. 2, pp. 171–178. <https://doi.org/10.1134/s1087659610020045>
10. Zhang R., Taskinen P. A thermodynamic assessment of the $\text{BaO}-\text{MgO}$, $\text{BaO}-\text{CaO}$, $\text{BaO}-\text{Al}_2\text{O}_3$ and $\text{BaO}-\text{SiO}_2$ systems. *Aalto University*. 2014. Available at: <https://aaltodoc.aalto.fi/bitstream/handle/123456789/12848/isbn9789526056135.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
11. Gundacker S., Turtos R. M., Kratochwil N., Pots R. H., Paganoni M., Lecoq P., Auffray E. Experimental time resolution limits of modern SiPMs and TOF-PET detectors exploring different scintillators and Cherenkov emission. *Physics in Medicine & Biology*, 2020, vol. 65, no. 2, pp. 025001. <https://doi.org/10.1088/1361-6560/ab63b4>
12. Bogomolov V., Dosovitskiy G., Iyudin A., Korjik M., Tikhomirov S., Svertilov S., Kozlov D., Yashin I. The Timing and Spectral Characteristics of Detectors Based on a Ce:GAGG Inorganic Scintillator Using Photomultiplier Tubes and Silicon Photodetectors. *Pribory i tekhnika experimenta = Instruments and experimental technique*, 2020, vol. 63, no. 5, pp. 633–640. <https://doi.org/10.1134/s0020441220050097>

Информация об авторе

Коржик Михаил Васильевич – доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией, Институт ядерных проблем Белорусского государственного университета (ул. Бобруйская, 11, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: korzhik@inp.bsu.by

Information about the author

Mikhail V. Korzhik – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Head of the Laboratory, Institute of Nuclear Problems of the Belarus State University (11, Bobruiskaya Str., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: korzhik@inp.bsu.by

ISSN 1561-2430 (Print)

ISSN 2524-2415 (Online)

УДК 535.34+621.375.8

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-2-224-231>

Поступила в редакцию 14.05.2021

Received 14.05.2021

С. А. Тихомиров*Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь***ПРОЯВЛЕНИЕ ДИНАМИКИ СВЕРХБЫСТРЫХ ФОТОПРОЦЕССОВ
В СПЕКТРАХ НЕСТАЦИОНАРНОГО ПОГЛОЩЕНИЯ
РАСТВОРОВ ДИФЛАВОНОИДА**

Аннотация. С использованием метода фемтосекундной абсорбционной спектроскопии исследована динамика спектров нестационарного наведенного поглощения дифлавоноида 3,7-дигидрокси-2,8-ди(4-метоксифенил)-4Н,6Н-пирано[3,2-*g*]хромен-4,6-диона (ДФВ) в растворителях различной природы. Установлено, что трансформация нестационарных спектров ДФВ во времени обусловлена процессами внутримолекулярного переноса протонов в возбужденном синглетном состоянии. В неполярном растворителе толуоле реализуется перенос двух протонов в две стадии. Вначале за субпикосекундные времена из франк-кондоновского состояния образуется форма с одним перенесенным протоном. Далее из данного переходного состояния во временном диапазоне до 9 пс происходит перенос второго протона и формирование таутомера, обладающего высоким квантовым выходом флуоресценции ~0,66 и соответствующей полосой усиления в нестационарных спектрах наведенного поглощения. В полярном растворителе диметилформамиде в возбужденном состоянии за аналогичные, характерные для неполярного толуола, субпикосекундные времена образуется короткоживущая форма с одним перенесенным протоном и временем жизни порядка 25 пс. Полярность среды, влияющая на формирование набора «закрытых» и «открытых» форм ДФВ в основном состоянии, отличающихся различным относительным расположением в пространстве гидроксильных и карбонильных групп, и, соответственно, возможностями образования внутримолекулярных водородных связей, в значительной мере определяет механизм процесса внутримолекулярного переноса протонов в молекуле ДФВ. В неполярном растворителе реализуется последовательный перенос двух протонов с образованием флуоресцирующего долгоживущего таутомера, а в полярном происходит преимущественно перенос одного протона с образованием короткоживущей нефлуоресцирующей формы.

Ключевые слова: внутримолекулярный перенос протона, фемтосекундная абсорбционная спектроскопия, нестационарные спектры поглощения

Для цитирования. Тихомиров, С. А. Проявление динамики сверхбыстрых фотопроцессов в спектрах нестационарного поглощения растворов дифлавоноида / С. А. Тихомиров // Вес. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2021. – Т. 57, № 2. – С. 224–231. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-2-224-231>

Sergei A. Tikhomirov*B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus***MANIFESTATION OF THE DYNAMICS OF ULTRAFAST PHOTOPROCESSES
IN THE TRANSIENT ABSORPTION SPECTRA OF DIFLAVONOID SOLUTIONS**

Abstract. Herein, using the femtosecond absorption spectroscopy method, the dynamics of the nonstationary induced absorption spectra of diflavonoid 3,7-dihydroxy-2,8-di(4-methoxyphenyl)-4H, 6H-pyrano[3,2-*g*]chromene-4,6-dione (DFV) in solvents of different polarities is studied. It is found that the rapid transformation of the transient absorption spectra of DFV in time is due to the processes of intramolecular protons transfer in excited singlet states. For a nonpolar solvent, two protons are transferred in two stages. Initially, during the sub-picosecond times, a form with a single transferred proton is formed from the Frank-Condon state. From this transition state, in a time range of about 9 ps, the second proton is transferred and the two proton transfer tautomer with a high quantum yield of fluorescence ~0.66 is formed, which has the gain band in the transient absorption spectra. For the polar solvent dimethylformamide only the short-lived form with a single proton transferred is formed also during the subpicosecond times practically the same ones as for the nonpolar solution and has a lifetime of about 20 ps. The polarity of the medium, which affects the formation of a set of the “closed” and “open” forms of DFV in the ground state, differing in relative positions in the space of hydroxyl and carbonyl groups, largely determines the mechanism of the intramolecular proton transfer process in the DFV molecule, which consists in the sequential transfer of two protons in a non-polar solvent to form a fluorescent long-lived tautomer and the transfer of one proton in polar solvents to form a short-lived non-fluorescent form.

Keywords: dynamics of intramolecular proton transfer, femtosecond spectroscopy, transient absorption spectra

For citation. Tikhomirov S. A. Manifestation of the dynamics of ultrafast photoprocesses in the transient absorption spectra of diflavonoid solutions. *Vesti Natsyional'noi akademii nauk Belarusi. Seriya fizika-matematichnykh nauk* = *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2021, vol. 57, no. 2, pp. 224–231 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-2-224-231>

Введение. Внутримолекулярный фотоперенос протона является одним из наиболее распространенных фотоиндуцированных молекулярных процессов, играющих важную роль в фотохимии и фотобиологии [1, 2]. Системы с фотопереносом протона находят практическое применение в качестве активных сред лазеров [3], сенсоров влажности [4], быстросрабатывающих фотохромных переключателей [5], как компоненты органических светоизлучающих диодов [6] и во многих других приложениях. Изучение фотопереноса протона представляет значительный интерес как с научной, так и практической точки зрения, а внимание исследователей к изучению динамики и механизмов данных процессов с течением времени не ослабевает [7–8]. К настоящему времени накоплен достаточно большой объем данных о процессах фотопереноса водорода в различных молекулярных системах, однако до сих пор отсутствует единая точка зрения о механизмах внутримолекулярного переноса протонов даже в таком изучаемом уже в течение более 50 лет соединении, как димер 7-азаиндола. Идея об одновременном внутримолекулярном переносе двух протонов в димере 7-азаиндола была предложена для объяснения мутагенных изменений в молекуле ДНК под действием УФ-облучения [9]. При этом вопрос о механизме переноса двух протонов до сих пор остается дискуссионным: происходит ли он одновременно [9, 10] или ступенчато [11]. В зависимости от условий эксперимента в системах с двумя возможными центрами реализации внутримолекулярного переноса протонов обсуждались различные варианты протекания данных процессов. Так, авторы [11] показали, что для димера 7-азаиндола в гексане при возбуждении импульсом длительностью 290 фс и $\lambda_{\text{возб}} = 280$ нм реализуется ступенчатый механизм, а при $\lambda_{\text{возб}} = 313$ нм – одновременный. В молекулах дифлавонов, в зависимости от заместителей и используемых растворителей, в спектрах флуоресценции регистрировались как все три возможные возбужденные формы (исходная + формы с одним и двумя перенесенными протонами), так и две формы (исходная + форма с одним перенесенным протоном или с двумя) [12, 13], что свидетельствует о существенном влиянии заместителей, не задействованных напрямую в формировании внутримолекулярной водородной связи, и типа растворителя на процессы внутримолекулярного переноса протонов.

Таким образом, можно констатировать, что вопрос о механизмах и кинетике внутримолекулярного фотопереноса протона в различных системах на сегодняшний день по-прежнему актуален, учитывая, что природа окружения и условия эксперимента часто оказывают определяющее влияние на ход процесса. В настоящей работе приведены результаты исследования сверхбыстрой динамики внутримолекулярного переноса протонов в возбужденном синглетном состоянии дифлавоноида в зависимости от природы используемого растворителя, позволяющей регулировать внутри- и межмолекулярные взаимодействия и, соответственно, влиять на процессы внутримолекулярного переноса протонов.

Методика измерений. Синтез дифлавоноида 3,7-дигидрокси-2,8-ди(4-метоксифенил)-4Н,6Н-пирано[3,2-*g*]хромен-4,6-диона (ДФВ), а также методика приготовления образцов подробно описаны в [14]. Все измерения проводились при комнатных температурах. Стационарные спектры поглощения и флуоресценции измерялись в центре аналитических и спектральных измерений Института физики НАН Беларуси.

Разрешенные во времени нестационарные спектры поглощения регистрировались с использованием фемтосекундного спектрометра [15], в основе которого лежит оригинальный генератор фемтосекундных импульсов на сапфире с титаном, синхронно накачиваемый импульсным пикосекундным Nd:YAG-лазером, а также многопроходный усилитель. Лазерный блок спектрометра позволяет с необходимой частотой повторения получать перестраиваемые в спектральном диапазоне 770–820 нм импульсы длительностью $\tau = 140$ фс и энергией до 1 мДж. Импульсы основной частоты после усилителя делятся на две части в отношении 1 : 4. Вторая гармоника более интенсивного пучка использовалась для возбуждения образцов. Энергия возбуждающего

импульса составляла 10 мкДж при диаметре пятна накачки на образце 1,5 мм. Зондирование осуществлялось с использованием фемтосекундного суперконтинуума, генерируемого при фокусировке меньшей доли импульса основной частоты в кювету с водой длиной 1 см.

В спектрометре реализована двухлучевая схема измерений. Излучение континуума делится полупрозрачным зеркалом на два примерно одинаковых по интенсивности импульса (опорный и пробный), которые фокусируются в образце с использованием зеркальной оптики. Опорный импульс попадает на исследуемый образец до прихода импульса возбуждения, а пробный – с задаваемым временным интервалом относительно возбуждающего импульса. Спектры обоих импульсов для каждой лазерной вспышки регистрируются и обрабатываются системой на основе полихроматора, ПЗС-матрицы и микропроцессора. Изменение оптической плотности ΔD рассчитывается по формуле

$$\Delta D(\lambda, t) = \lg(T_0 / T),$$

где $T = I_{\text{проб}} / I_{\text{оп}}$ и $T_0 = I_{\text{проб}}^0 / I_{\text{оп}}$ – отношения энергий пробного и опорного импульсов, проходящих через исследуемый образец при возбуждении и без него. Минимальное регистрируемое изменение оптической плотности составляет порядка 10^{-3} ед. опт. пл. для каждой позиции линии задержки при условии усреднения сигналов по 100 импульсам. Регистрация наведенной плотности осуществлялась в диапазоне $\sim 400\text{--}780$ нм. При построении дифференциальных спектров для фиксированных временных задержек проводилась коррекция, учитывающая возникновение дополнительных временных задержек спектральных компонент широкополосного континуума относительно возбуждающего импульса вследствие дисперсии показателя преломления оптических элементов в канале зондирования.

Результаты и обсуждение. На рис. 1 приведены спектры поглощения и флуоресценции ДФВ в неполярном толуоле и полярном диметилформамиде, а также структурная формула его полностью закрытой (с двумя внутримолекулярными водородными связями) формы. Аномально большой стоксов сдвиг спектров флуоресценции относительно спектров поглощения обусловлен тем, что за испускание отвечают таутомерные формы молекулы, образующиеся в возбужденном электронном состоянии в результате внутримолекулярного переноса протонов. Интенсивность флуоресценции ДФВ в толуоле более чем на два порядка превышает интенсивность в диметилформамиде. Это прямо указывает на влияние сольватационных эффектов на вероятности образования закрытых форм в полярных растворителях и соответственно на процессы внутримолекулярного фотопереноса заряда. В общем случае в основном состоянии молекулы ДФЛ в растворе находятся в виде набора «закрытых» и «открытых» форм, отличающихся различным относительным расположением в пространстве гидроксильных и карбонильных групп, обуславливающим возможность образования форм с внутримолекулярными водородными связями. В зависимости от природы растворителя и соответствующего сольватного окружения молекул ДФЛ может быть реализован тот или иной вариант набора исходных форм.

На рис. 2, а приведены нестационарные спектры наведенного поглощения ДФВ в толуоле. Под действием импульса возбуждения ($\lambda_{\text{возб}} = 395$ нм, длительность 140 фс) практически без задержки, за время, соответствующее аппаратной функции спектрометра, в спектральной области с длинами волн короче 420 нм формируется отрицательный сигнал (просветление длинноволнового крыла полосы $S_1 \leftarrow S_0$ поглощения исходной формы ДФВ). Полная полоса просветления не регистрируется вследствие существенного падения чувствительности кремниевого матричного фотоприемника в спектральной области короче 410 нм и ослабления интенсивности самого зондирующего излучения в этой спектральной области. Одновременно с просветлением во всей спектральной области регистрации формируется наведенное $S_1 \rightarrow S_n$ поглощение из возбужденного франк-кондоновского состояния. Данное поглощение характеризуется выраженными максимумами при 439 и 527 нм.

Далее наблюдается существенный дополнительный рост наведенного поглощения в коротковолновой и длинноволновой областях спектра во временном диапазоне до 10 пс, сопровождаемый батохромным сдвигом коротковолновой полосы наведенного поглощения от 439 до 450 нм.

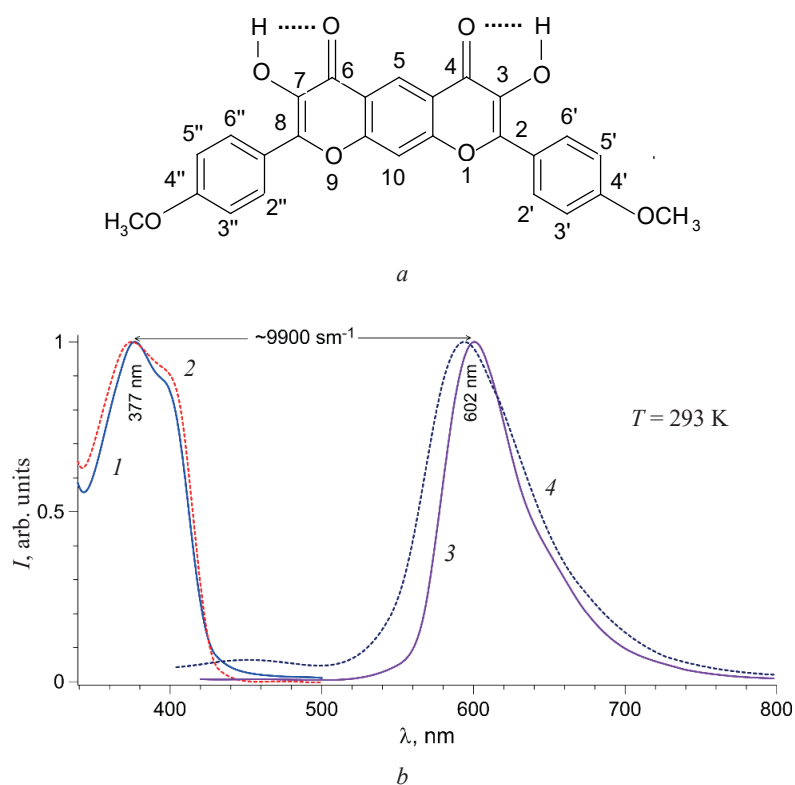


Рис. 1. Структурная формула полностью закрытой формы ДФЛ (а); стационарные спектры поглощения (1, 2) и флуоресценции (3, 4) ДФЛ в толуоле (1, 3) и диметилформамиде (2, 4) (b)

Fig. 1. The structural formula of completely closed form of DFV (a); stationary absorption (1, 2) and fluorescence (3, 4) spectra of DFV in toluene (1, 3) and dimethylformamide (2, 4) (b)

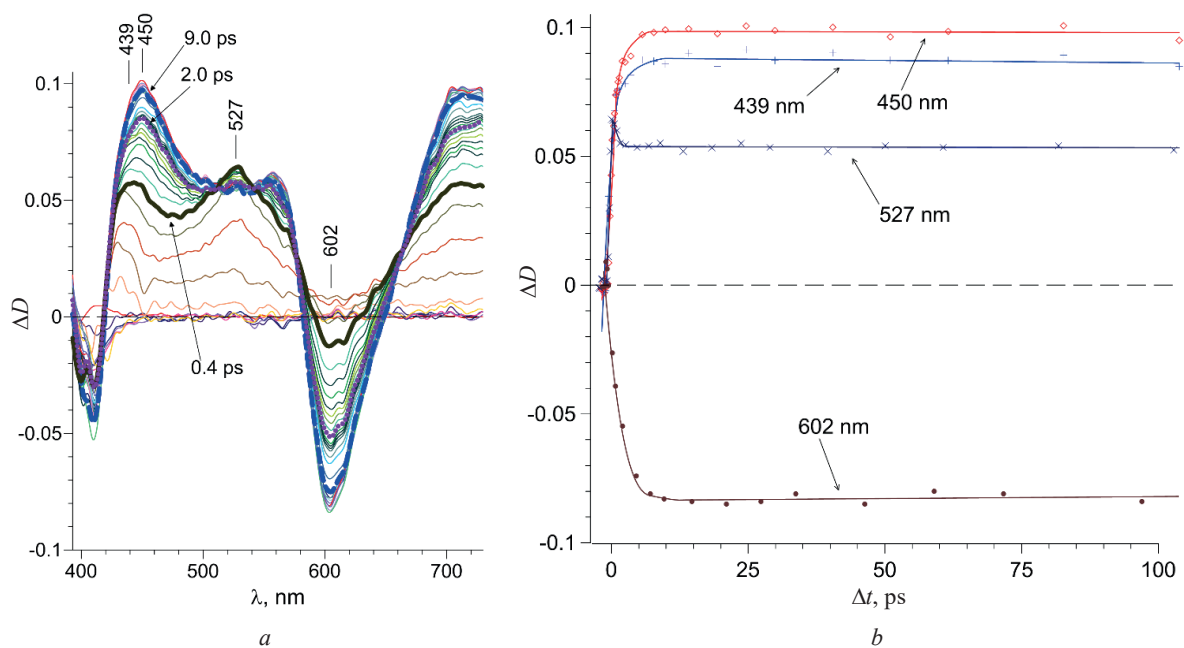


Рис. 2. Скорректированные на дисперсию групповой скорости нестационарные спектры наведенного поглощения ДФЛ в толуоле (а) и кинетика наведенной оптической плотности в характерных спектральных интервалах (b)

Fig. 2. Transient absorption spectra of DFV in toluene corrected for the group velocity dispersion (a) and the kinetics of the induced optical density in characteristic spectral intervals (b)

Одновременно с возрастанием наведенного поглощения (положительный сигнал) наблюдается рост полосы усиления в результате вынужденных переходов (отрицательное ΔD) в спектральной области, соответствующей полосе интенсивной флуоресценции с $\lambda_{\text{max}} = 602$ нм. Максимум интенсивности полосы усиления достигается в том же временном диапазоне, что и максимум наведенного поглощения в коротковолновой и длинноволновой областях спектра. Регистрация спектров при более длинных задержках вплоть до 1600 пс показала, что они остаются практически неизменными по форме в регистрируемом временном диапазоне. Анализ зависимостей величины наведенной оптической плотности ДФВ в толуоле от времени задержки в характерных спектральных областях (рис. 2, *b*) и результаты их глобального фитирования показывают, что при $\lambda_{\text{рег}} = 450$ в кинетике изменения оптической плотности можно выделить две нарастающие экспоненты с характеристическими временами 0,6 и 3,1 пс. При этом в кинетике при $\lambda_{\text{рег}} = 527$ нм выделяется симбатная затухающая компонента с таким же субпикосекундным характеристическим временем 0,6 пс. В кинетике нарастания усиления при $\lambda_{\text{рег}} = 602$ нм проявляется компонента с характеристическим временем 3 пс, которому соответствует характеристическое время аналогичной компоненты в кинетике нарастания наведенного поглощения при $\lambda_{\text{рег}} = 450$ нм.

Из совпадения времени распада франк-кондоновского состояния, оцениваемое по субпикосекундной затухающей компоненте в кинетике релаксации наведенной оптической плотности в полосе с $\lambda_{\text{max}} = 527$ нм, и быстрой компоненты в кинетике нарастания поглощения на длине волны $\lambda_{\text{рег}} = 450$ нм можно сделать вывод, что за субпикосекундные времена образуется первый фотопродукт, который по времени формирования сопоставим с возникновением формы с внутримолекулярным переносом протона для ряда других гетероароматических соединений [10, 11]. Поэтому логично приписать образующееся состояние форме ДФВ с одним перенесенным протоном. Вторая форма ДФВ с двумя перенесенными протонами возникает в толуоле последовательно из первой с характеристическим временем 3,1 пс, и ей соответствует спектр наведенного поглощения и усиления при временных задержках $\Delta t \geq 10,0$ пс с выраженными максимумами 450 и 602 нм соответственно.

Следует подчеркнуть, что, как показали измерения с большими временными задержками, амплитуда наведенных изменений в диапазоне до 1600 пс уменьшается с небольшим наклоном, позволяющим оценить характеристическое время затухания сигнала, которое оказалось соответствующим примерно 5,0 нс. Эта величина в пределах ошибки эксперимента согласуется с длительностью флуоресценции ДФВ в толуоле (6 нс). Таким образом, за интенсивную флуоресценцию ДФВ в толуоле отвечает тауомер с двумя перенесенными протонами, что подтверждается результатами прямых измерений разрешенных во времени нестационарных спектров поглощения. Характер регистрируемой спектрально-временной динамики нестационарного поглощения ДФВ показывает, что в неполярном толуоле в основном состоянии реализуется полностью закрытая форма ДФВ с двумя внутримолекулярными водородными связями.

Форма спектров наведенного поглощения ДФВ в полярном диметилформамиде (рис. 3, *a*) и их динамика существенно отличаются от общей картины, наблюдаемой в неполярном толуоле. Только на малых временных задержках (в пределах аппаратной функции спектрометра), соответствующих заселению франк-кондоновского синглетного электронного состояния, нестационарные спектры поглощения в обоих растворителях в области наведенного поглощения близки по форме.

Как и в случае неполярного толуола за время, соответствующее аппаратной функции спектрометра, формируется широкополосное наведенное поглощение с выраженными максимумами в области при $\lambda_{\text{max}}^{\text{abc}} = 527$ и 439 нм. Далее происходит дополнительный быстрый рост наведенной оптической плотности в спектральном диапазоне 440–620 нм. Наведенное поглощение достигает максимума интенсивности во временном диапазоне до 2 пс с одновременным изменением формы нестационарных спектров главным образом в виде существенного увеличения полуширины основной полосы при $\lambda_{\text{max}}^{\text{abc}} = 527$ нм, а затем его амплитуда начинает уменьшаться. При этом происходит дальнейшая трансформация спектров, заключающаяся в выраженном длинноволновом сдвиге основной полосы от $\lambda_{\text{max}}^{\text{abc}} = 527$ нм до $\lambda_{\text{max}}^{\text{abc}} = 580$ нм во временном диапазоне до 30,0 пс. К $\Delta t = 100$ пс наведенное поглощение почти полностью исчезает во всей спектральной области регистрации.

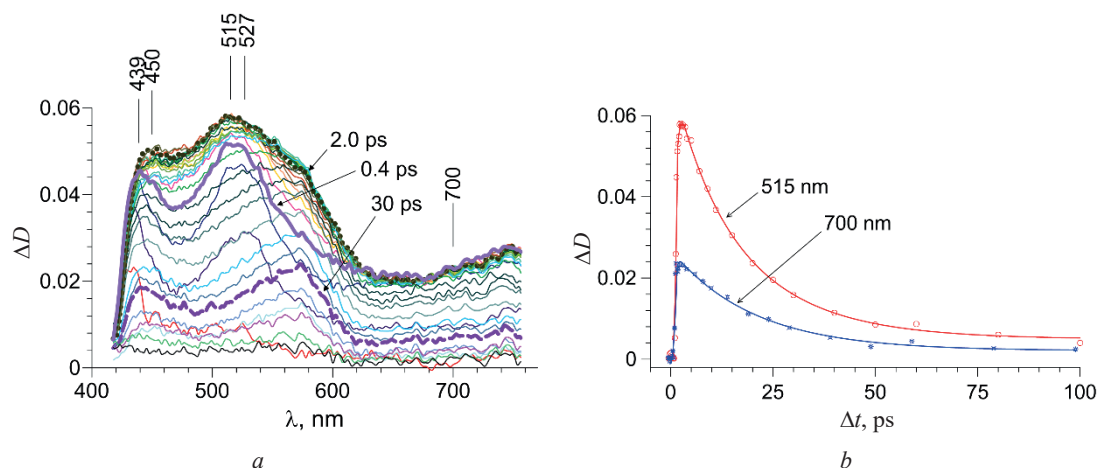


Рис. 3. Скорректированные на дисперсию групповой скорости нестационарные спектры наведенного поглощения ДФЛ в диметилформамиде (а) и кинетика наведенной оптической плотности в характерных спектральных интервалах (b)

Fig. 3. Transient absorption spectra of DFV in dimethylformamide corrected for the group velocity dispersion (a) and the kinetics of the induced optical density in characteristic spectral intervals (b)

Кинетики оптической плотности ДФВ в диметилформамиде в характерных спектральных интервалах, представленные на рис. 3, b, демонстрируют наблюдаемые различия в явном виде. Детальный анализ экспериментальных зависимостей показал, что в них можно выделить нарастающую компоненту с характеристическим временем порядка 0,6 пс, согласующуюся со временем быстрой компоненты в толуоле. Это говорит о том, что за субпикосекундные времена в диметилформамиде, так же, как и в толуоле, в возбужденном состоянии образуется первый фотопродукт – форма ДФЛ с одним перенесенным протоном.

В кинетике распада данного состояния для длинноволновой области спектра ($\lambda_{\text{рег}} = 700$ нм), где по форме спектры со временем практически не меняются, проявляется одна экспонента с характеристическим временем 20 пс. Для $\lambda_{\text{рег}} = 515$ нм в кинетике оптической плотности регистрируется дополнительная затухающая экспонента с характеристическим временем порядка 9,5 пс, обусловленная длинноволновым сдвигом полосы нестационарного поглощения, который связан с сольватной диполь-дипольной релаксацией возбужденной формы ДФЛ с одним перенесенным протоном. В полярном диметилформамиде по нестационарным спектрам поглощения не наблюдается последовательного переноса второго протона с образованием интенсивно флуоресцирующего таутомера (соответствующей полосы усиления в нестационарном спектре), что свидетельствует об отсутствии второй внутримолекулярной водородной связи, вдоль которой и реализуется внутримолекулярный перенос второго протона в случае неполярного толуола.

Следует отметить, что флуоресценция ДФЛ в диметилформамиде характеризуется сильным тушением (почти в 150 раз) в сравнении с толуольным раствором, при почти неизменной длительности. Это дополнительно свидетельствует о том, что в полярных растворителях полностью закрытая форма с двумя внутримолекулярными водородными связями реализуется с очень малой вероятностью. Можно сделать вывод о том, что в полярном растворителе динамическое равновесие в распределении исходных сольватированных форм ДФЛ в основном состоянии смещено в значительной степени в сторону формы с одной внутримолекулярной водородной связью.

Заключение. Таким образом, в настоящей работе с использованием методов фемтосекундной абсорбционной спектроскопии исследована динамика нестационарных спектров поглощения дифлавоноида 3,7-дигидрокси-2,8-ди(4-метоксифенил)-4Н,6Н-пирано[3,2-*g*]хромен-4,6-диона в полярном и неполярном растворителе. Установлено, что регистрируемая спектрально-временная трансформация нестационарных спектров обусловлена процессами внутримолекулярного переноса протонов в возбужденном синглетном состоянии и последующей релаксацией образующихся таутомерных форм. Вследствие существенного различия в исходном распределении на-

бора «закрытых» и «открытых» форм дифлавоноида в основном состоянии для полярных и неполярных растворителей реализуются разные сценарии фото процессов в возбужденном состоянии.

В неполярных растворителях, поскольку возбуждаемой формой является полностью закрытая форма с двумя внутримолекулярными водородными связями, реализуется перенос двух протонов в две стадии. Вначале за субпикосекундные времена из франк-кондоновского состояния образуется форма с одним перенесенным протоном. Далее с характеристическим временем порядка 3 пс происходит перенос второго протона, в результате чего формируется таутомер, обладающий высоким квантовым выходом флуоресценции и соответствующей полосой усиления в нестационарных спектрах наведенного поглощения. В полярном растворителе диметилформамиде, где в основном состоянии преимущественно реализуется форма с одной внутримолекулярной водородной связью, в возбужденном состоянии образуется короткоживущий таутомер с одним перенесенным протоном и временем жизни порядка 20 пс.

Список использованных источников

1. Uzhinov, B. M. Conformational effects in excited state intramolecular proton transfer of organic compounds / B. M. Uzhinov, M. N. Khimich // *Russ. Chem. Rev.* – 2011. – Vol. 80, № 6. – P. 553–578. <https://doi.org/10.1070/rc2011v080n06abeh004144>
2. Mapping GFP structure evolution during proton transfer with femtosecond Raman spectroscopy / C. Fang [et al.] // *Nature*. – 2009. – Vol. 462, № 7272. – P. 200–205. <https://doi.org/10.1038/nature08527>
3. The Proton-Transfer Laser. Gain Spectrum and Amplification of Spontaneous Emission of 3-Hydroxyflavone / P. Chou [et al.] // *J. Phys. Chem.* – 1984. – Vol. 88, № 20. – P. 4596–4599. <https://doi.org/10.1021/j150664a032>
4. Fluorescence Studies of Salicylic Acid Doped Poly (Vinyl Alcohol) Film as a Water/Humidity Sensor / H. Mishra [et al.] // *J. Phys. Chem. A*. – 2004. – Vol. 108, № 12. – P. 2346–2352. <https://doi.org/10.1021/jp0309365>
5. Sobolewski, A. L. Reversible Molecular Switch Driven by Excited-State Hydrogen Transfer / A. L. Sobolewski // *Phys. Chem. Chem. Phys.* – 2008. – Vol. 10, № 9. – P. 1243–1247. <https://doi.org/10.1039/b716075e>
6. Control of the Reversibility of Excited-State Intramolecular Proton Transfer (ESIPT) Reaction: Host-Polarity Tuning White Organic Light Emitting Diode on a New Thiazolo[5,4-d]Thiazole ESIPT System / Z. Zhang [et al.] // *Chem. Mater.* – 2016. – Vol. 28, № 23. – P. 8815–8824. <https://doi.org/10.1021/acs.chemmater.6b04707>
7. Ultrafast excited state intramolecular proton transfer (ESIPT) mechanism for 2,6-bis(benzothiazolyl-2-yl)phenol: A theoretical investigation / D. Yang [et al.] // *Chem. Phys. Lett.* – 2020. – Vol. 744. – P. 137226. <https://doi.org/10.1016/j.cplett.2020.137226>
8. Excited-State Intramolecular Proton Transfer in the Kinetic-Control Regime / Z.-Y. Liu [et al.] // *Phys. Chem. Chem. Phys.* – 2020. – Vol. 22, № 39. – P. 22271–22278. <https://doi.org/10.1039/d0cp03408h>
9. Taylor, C. A. Excited-State Two-Proton Tautomerism in Hydrogen-Bonded N-Heterocyclic Base Pairs / C. A. Taylor, M. A. El-Bayoumi, M. Kasha // *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*. – 1969. – Vol. 63, № 2. – P. 253–260. <https://doi.org/10.1073/pnas.63.2.253>
10. Takeuchi, S. The answer to concerted versus step-wise controversy for the double proton transfer mechanism of 7-azaindole dimer in solution / S. Takeuchi, T. Tahara // *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*. – 2007. – Vol. 104, № 13. – P. 5285–5290. <https://doi.org/10.1073/pnas.0610141104>
11. Kwon, O.-H. Double Proton Transfer Dynamics of Model DNA Base Pairs in the Condensed Phase / O.-H. Kwon, A. H. Zewail // *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*. – 2007. – Vol. 104, № 21. – P. 8703–8708. <https://doi.org/10.1073/pnas.0702944104>
12. Pivovarenko, V. G. 2,8-Bis[4-(diethylamino)phenyl]-3,7-dihydroxy-4H,6H-pyrano[3,2-g]chromene-4,6-dione? A New Liquid-Phase-Sensitive Fluorescent Probe Utilising Intramolecular One- or Two-Proton Transfer Phenomena / V. G. Pivovarenko, L. Jozwiak, J. Blaziejowski // *Eur. J. Org. Chem.* – 2002. – Vol. 2002, № 23. – P. 3979–3985. [https://doi.org/10.1002/1099-0690\(200212\)2002:23<3979::aid-ejoc3979>3.0.co;2-5](https://doi.org/10.1002/1099-0690(200212)2002:23<3979::aid-ejoc3979>3.0.co;2-5)
13. Falkovskaia, E. Interplay between Intra- and Intermolecular Excited-State Single- and Double-Proton-Transfer Processes in the Biaxially Symmetric Molecule 3,7-Dihydroxy-4H,6H-pyrano[3,2-g]-chromene-4,6-dione / E. Falkovskaia, V. G. Pivovarenko, J. C. del Valle // *J. Phys. Chem. A*. – 2003. – Vol. 107, № 18. – P. 3316–3325. <https://doi.org/10.1021/jp021791p>
14. Photodynamics of intramolecular proton transfer in polar and nonpolar biflavonoid solutions / S. L. Bondarev [et al.] // *Opt. Spectrosc.* – 2012. – Vol. 113, № 4. – P. 401–410. <https://doi.org/10.1134/s0030400x12070065>
15. Solvent polarity effect on nonradiative decay rate of Thioflavin T / V. I. Stsiapura [et al.] // *J. Phys. Chem. A*. – 2016. – Vol. 120, № 28. – P. 5481–5496. <https://doi.org/10.1021/acs.jpca.6b02577>

References

1. Uzhinov B. M., Khimich M. N. Conformational effects in excited state intramolecular proton transfer of organic compounds. *Russian Chemical Reviews*, 2011, vol. 80, no. 6, pp. 553–578. <https://doi.org/10.1070/rc2011v080n06abeh004144>
2. Fang C, Frontiera R. R, Tran R, Mathies R. A. Mapping GFP structure evolution during proton transfer with femtosecond Raman spectroscopy. *Nature*, 2009, vol. 462, no. 7270, pp. 200–205. <https://doi.org/10.1038/nature08527>

3. Chou P., McMorro D., Aartsma T. J., Kasha M. The Proton-Transfer Laser. Gain Spectrum and Amplification of Spontaneous Emission of 3-Hydroxyflavone. *Journal of Physical Chemistry*, 1984, vol. 88, no. 20, pp. 4596–4599. <https://doi.org/10.1021/j150664a032>
4. Mishra H., Misra V., Mehata M. S., Pant T. C., Tripathi H. B. Fluorescence Studies of Salicylic Acid Doped Poly (Vinyl Alcohol) Film as a Water/Humidity Sensor. *Journal of Physical Chemistry A*, 2004, vol. 108, no. 12, pp. 2346–2352. <https://doi.org/10.1021/jp0309365>
5. Sobolewski A. L. Reversible Molecular Switch Driven by Excited-State Hydrogen Transfer. *Physical Chemistry Chemical Physics*, 2008, vol. 10, no. 9, pp. 1243–1247. <https://doi.org/10.1039/b716075e>
6. Zhang Z., Chen Y.-A., Hung W.-Y., Tang W.-F., Hsu Y.-H., Chen C.-L., Meng F.-Y., Chou P.-T. Control of the Reversibility of Excited-State Intramolecular Proton Transfer (ESIPT) Reaction: Host-Polarity Tuning White Organic Light Emitting Diode on a New Thiazolo[5,4- d]Thiazole ESIPT System. *Chemistry of Materials*, 2016, vol. 28, no. 23, pp. 8815–8824. <https://doi.org/10.1021/acs.chemmater.6b04707>
7. Yang D., Liu W., Kong L., Zhang Q., Liu Y. Ultrafast excited state intramolecular proton transfer (ESIPT) mechanism for 2,6-bis(benzothiazolyl-2-yl)phenol: A theoretical investigation. *Chemical Physics Letters*, 2020, vol. 744, pp. 137226. <https://doi.org/10.1016/j.cplett.2020.137226>
8. Liu Z.-Y., Hu J.-W., Huang T.-H., Chen K.-Y., Chou P.-T. Excited-State Intramolecular Proton Transfer in the Kinetic-Control Regime. *Physical Chemistry Chemical Physics*, 2020, vol. 22, no. 39, pp. 22271–22278. <https://doi.org/10.1039/d0cp03408h>
9. Taylor C. A., El-Bayoumi M. A., Kasha M. Excited-State Two-Proton Tautomerism in Hydrogen-Bonded N-Heterocyclic Base Pairs. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 1969, vol. 63, no. 2, pp. 253–260. <https://doi.org/10.1073/pnas.63.2.253>
10. Takeuchi S., Tahara T. The answer to concerted versus step-wise controversy for the double proton transfer mechanism of 7-azaindole dimer in solution. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 2007, vol. 104, no. 13, pp. 5285–5290. <https://doi.org/10.1073/pnas.0610141104>
11. Kwon O.-H., Zewail A. H. Double Proton Transfer Dynamics of Model DNA Base Pairs in the Condensed Phase. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 2007, vol. 104, no. 21, pp. 8703–8708. <https://doi.org/10.1073/pnas.0702944104>
12. Pivovarenko V. G., Jozwiak L., Blazejowski J. 2,8-Bis[4-(diethylamino)phenyl]-3,7-dihydroxy-4H,6H-pyrano[3,2-g]chromene-4,6-dione? A New Liquid-Phase-Sensitive Fluorescent Probe Utilising Intramolecular One- or Two-Proton Transfer Phenomena. *European Journal of Organic Chemistry*, 2002, vol. 2020, no. 23, pp. 3979–3985. [https://doi.org/10.1002/1099-0690\(200212\)2002:23<3979::aid-ejoc3979>3.0.co;2-5](https://doi.org/10.1002/1099-0690(200212)2002:23<3979::aid-ejoc3979>3.0.co;2-5)
13. Falkovskaia E., Pivovarenko V. G., del Valle J. C. Interplay between Intra- and Intermolecular Excited-State Single- and Double-Proton-Transfer Processes in the Biaxially Symmetric Molecule 3,7-Dihydroxy-4H,6H-pyrano[3,2-g]-chromene-4,6-dione. *The Journal of Physical Chemistry A*, 2003, vol. 107, no. 18, pp. 3316–3325. <https://doi.org/10.1021/jp021791p>
14. Bondarev S. L., Knyukshto V. N., Tikhomirov S. A., Buganov O. V., Pyrko A. N. Photodynamics of intramolecular proton transfer in polar and nonpolar biflavonoid solutions. *Optics and Spectroscopy*, 2012, vol. 113, no. 4, pp. 401–410. <https://doi.org/10.1134/s0030400x12070065>
15. Stsiapura V. I., Kurhuzenkau S. A., Kuzmitsky V. A., Bouganov O. V., Tikhomirov S. A. Solvent polarity effect on nonradiative decay rate of Thioflavin T. *The Journal of Physical Chemistry A*, 2016, vol. 120, no. 28, pp. 5481–5496. <https://doi.org/10.1021/acs.jpca.6b02577>

Інфармацыя аб аўторе

Тихомиров Сергей Александрович – член-корреспондент Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі, доктор фізіка-матэматычных навук, галоўны навучны супрацоўнік Цэнтра фотонікі атамных і молекулярных структур, Інстытут фізікі ім. Б. І. Сцяпнова Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі (пр. Незавіскасці, 68-2, 220072, г. Мінск, Рэспубліка Беларусь). E-mail: s.tik@dragon.bas-net.by

Information about the author

Sergei A. Tikhomirov – Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Belarus, Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Chief Researcher of the Center of Photonics of Atoms and Molecules Structures, B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (68-2, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: s.tik@dragon.bas-net.by

ISSN 1561-2430 (Print)

ISSN 2524-2415 (Online)

УДК 621.382

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-2-232-241>

Поступила в редакцию 04.09.2020

Received 04.09.2020

В. Б. Оджаев¹, А. Н. Петлицкий², В. А. Пилипенко², В. С. Просолович¹,
В. А. Филипеня², Д. В. Шестовский², В. Ю. Явид¹, Ю. Н. Янковский¹

¹Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь²Открытое акционерное общество «Интеграл» – управляющая компания холдинга «Интеграл»,
Минск, Беларусь

ВЛИЯНИЕ НЕКОНТРОЛИРУЕМЫХ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРИМЕСЕЙ НА ТЕМПЕРАТУРНУЮ ЗАВИСИМОСТЬ КОЭФФИЦИЕНТА УСИЛЕНИЯ БИПОЛЯРНОГО *n-p-n*-ТРАНЗИСТОРА

Аннотация. Исследованы температурные зависимости статического коэффициента усиления по току (β) биполярных *n-p-n*-транзисторов, сформированных по аналогичным технологическим маршрутам (серии *A* и *B*), в интервале температур 20–125 °С. Содержание неконтролируемых технологических примесей в приборах серии *A* было ниже предела обнаружения методом полного внешнего отражения рентгеновского излучения (по Fe < $4,0 \cdot 10^9$ ат/см²). В приборах серии *B* вся поверхность пластин была покрыта слоем Fe со средней концентрацией $3,4 \cdot 10^{11}$ ат/см², наблюдались также пятна Cl, K, Ca, Ti, Cr, Cu, Zn. Установлено, что в приборах серии *B* при среднем уровне тока коллектора ($1,0 \cdot 10^{-6} < I_c < 1,0 \cdot 10^{-3}$ А) статический коэффициент усиления по току больше соответствующего значения в приборах серии *A*. Это обусловлено большей эффективностью эмиттера вследствие высокой концентрации основной легирующей примеси. Данное обстоятельство определяло и более сильную температурную зависимость β в приборах серии *B* вследствие значительного вклада в его величину температурного изменения ширины запрещенной зоны кремния. При $I_c < 1,0 \cdot 10^{-6}$ А β для приборов серии *B* становится существенно меньше соответствующих значений для приборов серии *A* и практически перестает зависеть от температуры. В приборах серии *B* рекомбинационно-генерационный ток преобладает над полезным диффузионным током неосновных носителей заряда в базе вследствие наличия высокой концентрации неконтролируемых технологических примесей. Для приборов серии *A* при $I_c < 10^{-6}$ А температурная зависимость β практически не отличается от аналогичной зависимости для среднего уровня инжекции.

Ключевые слова: биполярный *n-p-n*-транзистор, статический коэффициент усиления по току, рекомбинационно-генерационный ток, температурное изменение ширины запрещенной зоны

Для цитирования. Влияние технологических примесей на температурную зависимость коэффициента усиления биполярного *n-p-n*-транзистора / В. Б. Оджаев [и др.] // Вес. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2021. – Т. 57, № 2. – С. 232–241. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-2-232-241>

Vladimir B. Odzaev¹, Aliaksandr N. Pyatlitski², Vladimir A. Pilipenko², Uladislau S. Prosolovich¹,
Viktar A. Filipenia², Dmitry V. Shestovski², Valentin Yu. Yavid¹, Yuri N. Yankovski¹

¹Belarusian State University, Minsk, Belarus²JSC “Integral” – “Integral” Holding Managing Company, Minsk, Belarus

THE INFLUENCE OF UNCONTROLLED TECHNOLOGICAL IMPURITIES ON THE TEMPERATURE DEPENDENCE OF THE GAIN COEFFICIENT OF A BIPOLAR *n-p-n*-TRANSISTOR

Abstract. Herein, the temperature dependences of the static current gain (β) of bipolar *n-p-n*-transistors, formed by similar process flows (series *A* and *B*), in the temperature range 20–125 °C was investigated. The content of uncontrolled technological impurities in the *A* series devices was below the detection limit by the TXRF method (for Fe < $4,0 \cdot 10^9$ at/cm²). In series *B* devices, the entire surface of the wafers was covered with a layer of Fe with an average concentration of $3,4 \cdot 10^{11}$ at/cm²; Cl, K, Ca, Ti, Cr, Cu, Zn spots were also observed. It was found that in *B* series devices at an average collector current level ($1,0 \cdot 10^{-6} < I_c < 1,0 \cdot 10^{-3}$ A) the static current gain was greater than the corresponding value in *A* series devices. This was due to the higher efficiency of the emitter due to the high concentration of the main dopant. This circumstance also determined a stronger temperature dependence of β in series *B* devices due to a significant contribution to its value from the temperature change in the silicon band gap. At $I_c < 1,0 \cdot 10^{-6}$ A β for *B* series devices became significantly less than the corresponding values for *A* series devices and practically ceases to depend on temperature. In series *B* devices, the recombination-generation current prevailed over the useful diffusion current of minority charge carriers in the base due to the presence of a high concentration of uncontrolled technological impurities. For *A* series devices at $I_c < 10^{-6}$ A, the temperature dependence of β practically did not differ from the analogous dependence for the average injection level.

Keywords: bipolar n - p - n -transistor, static current gain, recombination-generation current, temperature change in the band gap

For citation. Odzaev V. B., Pyatlitski A. N., Pilipenko V. A., Prosolovich U. S., Filipenia V. A., Shestovski D. V., Yavid V. Yu., Yankovski Yu. N. The influence of uncontrolled technological impurities on the temperature dependence of the gain coefficient of a bipolar n - p - n -transistor. *Vestsi Natsyianal'nei akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk* = *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2021, vol. 57, no. 2, pp. 232–241 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-2-232-241>

Введение. В практическом плане при эксплуатации биполярных транзисторов важным параметром является статический коэффициент усиления по току, который определяет усилительные свойства как отдельного прибора, так и схемы в целом. Ранее было установлено [1], что электрофизические характеристики биполярных n - p - n -транзисторов существенным образом зависят от содержания неконтролируемых технологических примесей в материале подложки. Наличие высокой концентрации генерационно-рекомбинационных центров, связанных с металлическими примесями, приводит как к увеличению обратного тока через переход коллектор-база транзисторов, так и к существенному снижению напряжения пробоя коллекторного перехода. Это обусловлено тем, что при создании приборов по планарной технологии вблизи p - n -переходов в областях обеднения барьерных структур происходит аккумуляция генерационно-рекомбинационных центров (ГРЦ), что в значительной степени влияет на генерационно-рекомбинационные процессы, ухудшает эксплуатационные параметры полупроводниковых приборов и интегральных микросхем и приводит к снижению процента выхода годных приборов микроэлектроники [2]. Численным моделированием установлено [3], что управлять величиной статического коэффициента усиления по току можно путем изменения геометрических и физических параметров эмиттера и базы. Однако наличие в готовой структуре неконтролируемых технологических примесей может оказывать существенное влияние на усилительные свойства биполярных транзисторов и нивелировать те изменения, которые достигаются варьированием параметров эмиттера и базы. Кроме того, авторами [4] показано, что влияние ГРЦ наиболее существенно проявляется при низких ($I_c < 10^{-6}$ А) уровнях инжекции вследствие увеличения темпа рекомбинации носителей в эмиттерном переходе в приборах с высоким содержанием неконтролируемых технологических примесей. В связи с вышесказанным актуальным является выявление причин лабильной воспроизводимости основных характеристик биполярных планарных n - p - n -транзисторов с целью обнаружения основных факторов, определяющих надежность работы и стабильность эксплуатационных параметров полупроводниковых приборов.

Объекты и методы исследований. В настоящей работе проведены исследования температурных зависимостей статического коэффициента усиления по току биполярных n - p - n -транзисторов в интегральных схемах, сформированных по аналогичным технологическим маршрутам (серии A и B) с использованием идентичных материалов с помощью метода измерения вольт-амперных характеристик (ВАХ) на измерителе параметров полупроводниковых приборов Agilent B 1500A с применением зондовой станции Cascade Summit 11000 (минимальный измеряемый ток $\sim 10^{-15}$ А) в интервале температур 20–125 °С. Легированные слои создавались в пластинах кремния p -типа проводимости с удельным сопротивлением 10 Ом · см ионной имплантацией бора при формировании p -слоя, фосфора при формировании n -слоя. Содержание неконтролируемых технологических примесей на поверхности пластин кремния определялось методом полного внешнего отражения рентгеновского излучения на установке Rigaku TXRF 3750 [5, 6]. Содержание неконтролируемых технологических примесей (таких как Fe, Cl, Ca, Cu, Zn и др.) в приборах серии A было ниже предела обнаружения (по Fe $< 4,0 \cdot 10^9$ ат/см²). В приборах серии B вся поверхность пластин была покрыта слоем Fe со средней концентрацией $3,4 \cdot 10^{11}$ ат/см², наблюдались также пятна Cl, K, Ca, Ti, Cr, Cu, Zn по поверхности пластин. Повышенное содержание неконтролируемых технологических примесей на поверхности пластин серии B создавалось выдержкой пластин в открытой таре в обычном помещении в течение трех суток.

Экспериментальные результаты и их обсуждение. На рис. 1 приведены зависимости коэффициента усиления β от величины коллекторного тока I_c при различных температурах для обеих исследовавшихся партий приборов. Видно, что для средних и высоких значений коллекторного

тока в приборах серии *B* имеют место более высокие значения статического коэффициента усиления по току в схеме с общим эмиттером β , чем в приборах серии *A*. В области больших токов для приборов обеих серий наблюдается спад коэффициента усиления вследствие действия следующих факторов: уменьшения удельного сопротивления базы, оттеснения тока эмиттера к периферии, увеличения физической толщины базы.

Уменьшение коэффициента усиления при возрастании I_c известно под названием эффекта Вебстера [7], при высоком уровне инжекции β изменяется обратно пропорционально I_c . При малых токах коллектора ($I_c < 10^{-6}$ А) величина β в приборах серии *B* наоборот меньше соответствующего значения для приборов серии *A*. Это обусловлено тем, что вклад рекомбинационно-генерационного тока (так называемого тока Са – Нойса – Шокли [7]) в обедненной области эмиттера и поверхностных токов утечки вследствие наличия высокого содержания неконтролируемых технологических примесей может превышать полезный диффузионный ток неосновных носителей в базе, что приводит к снижению эффективности эмиттера γ . С увеличением температуры для приборов обеих серий β в интервале значений тока коллектора $10^{-6} < I_c < 10^{-3}$ А заметно увеличивается. Рост β связывают главным образом с улучшением эффективности эмиттера γ и коэффициента переноса носителей в базе α_T [7, 8]. Согласно [7] эффективность эмиттера выражается как

$$\gamma = \left[1 + \frac{p_E}{n_B} \frac{D_E}{D_B} \frac{L_B}{L_E} \tanh\left(\frac{W}{L_B}\right) \right]^{-1}, \quad (1)$$

где p_E – концентрация дырок в эмиттере, D_E – коэффициент диффузии носителей заряда в эмиттере, L_B – диффузионная длина носителей заряда в базе, n_B – концентрация электронов в базе, D_B – коэффициент диффузии носителей заряда в базе, L_E – диффузионная длина носителей заряда в эмиттере, W – ширина базы. Коэффициент переноса α_T выражается как

$$\alpha_T \approx 1 - \frac{W^2}{2L_B^2}. \quad (2)$$

Согласно (1) величину γ определяет непосредственно степень легирования эмиттера, которая в биполярном транзисторе должна быть во много раз выше, чем степень легирования базы, т. е. $N_E/N_B \gg 1$ (или для *n-p-n*-транзистора $p_E/n_B \ll 1$), где N_B и N_E – концентрация легирующей примеси в базе и эмиттере соответственно. При очень высокой концентрации примеси в эмиттере начинает сказываться эффект сужения ширины запрещенной зоны, который играет ключевую

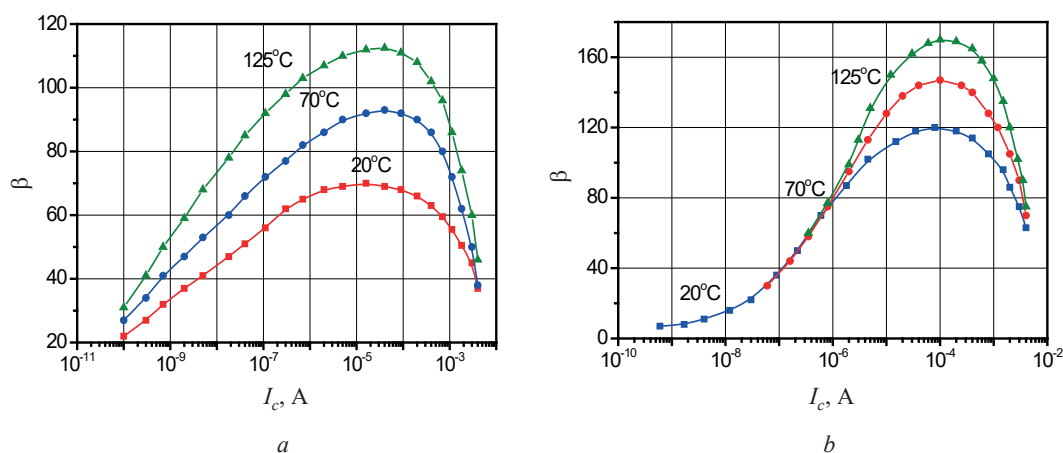


Рис. 1. Зависимость статического коэффициента усиления по току β биполярного *n-p-n*-транзистора от тока коллектора I_c при разных температурах в приборах серии *A* (а) и приборах серии *B* (б)

Fig. 1. Dependence of the static current gain β of a bipolar *n-p-n*-transistor on the collector current I_c at different temperatures in devices of the *A* series (а) and devices of the *B* series (б)

роль в зависимости β от температуры [7, 9]. Сужение ширины запрещенной зоны в сильнолегированном кремнии, как показали исследования [7, 10], связано с повышением энергии электростатического взаимодействия основных и неосновных носителей заряда. Уменьшение ширины запрещенной зоны ΔE_g определяется выражением [7]

$$\Delta E_g = \frac{3q^2}{16\pi\epsilon_s} \left(\frac{q^2 N_E}{\epsilon_s kT} \right)^{1/2}. \quad (3)$$

При комнатной температуре сужение ширины запрещенной зоны ΔE_g описывается формулой [7]

$$\Delta E_g = 22,5 \left(\frac{N_E}{10^{18}} \right)^{1/2} [\text{мэВ}]. \quad (4)$$

Ранее было установлено, что экспериментальные данные [7] хорошо согласуются с формулой (4).

При таких условиях для концентрации собственных носителей в эмиттере n_{iE} справедливо выражение

$$n_{iE}^2 = N_c N_v \exp \left[\frac{-(E_g - \Delta E_g)}{kT} \right] = n_i^2 \exp \left(\frac{\Delta E_g}{kT} \right), \quad (5)$$

где N_c и N_v – эффективные плотности состояний в зоне проводимости и в валентной зоне соответственно, n_i – концентрация собственных носителей заряда в отсутствие эффекта сужения ширины запрещенной зоны. Концентрации неосновных носителей заряда, фигурирующие в выражении (1), допускают следующую замену:

$$n_B = \frac{n_i^2}{N_B} \quad (6)$$

и

$$p_E = \frac{n_{iE}^2}{N_E} = \frac{n_i^2}{N_E} \exp \left(\frac{\Delta E_g}{kT} \right). \quad (7)$$

Следовательно, для эффективности эмиттера справедливо соотношение

$$\gamma \sim \frac{n_B}{p_E} \sim \exp \left(\frac{-\Delta E_g}{kT} \right). \quad (8)$$

На рис. 2 представлены расчетные температурные зависимости эффективности эмиттера γ для n - p - n -транзистора с различным уровнем легирования эмиттера, т. е. разным значением сужения ширины запрещенной зоны. Расчет проведен по формуле (1) с учетом (7) при значениях N_B/N_E , при которых величина γ при комнатной температуре (20 °C) для всех расчетных кривых имела бы приблизительно одно и то же значение, а $W/L_B = 0,1$.

Полученные расчетные данные, приведенные на рис. 2, иллюстрируют увеличение эффективности эмиттера с ростом температуры при различных значениях ΔE_g , т. е. различных уровнях легирования эмиттера. Следовательно, чем больше уровень легирования эмиттера, тем больше ΔE_g и тем сильнее зависимость γ от температуры.

Согласно [7] в биполярном транзисторе с шириной базы $W < 0,1 L_B$ при условии, что коэффициент переноса инжектированных носителей в базе $\alpha_T \approx 1$, коэффициент усиления по току практически полностью определяется эффективностью эмиттера

$$\beta \approx \frac{\gamma}{1-\gamma} \sim \frac{N_E}{N_B W} = \frac{N_E}{Q_b}, \quad (9)$$

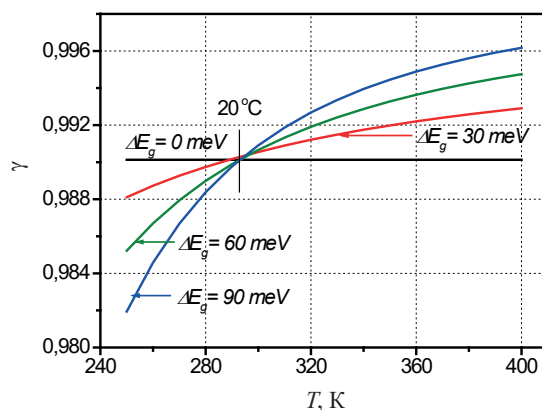


Рис. 2. Зависимости эффективности эмиттера биполярного $n-p-n$ -транзистора от температуры при различных значениях величины сужения ширины запрещенной зоны сильнолегированного кремния ΔE_g

Fig. 2. Dependences of the efficiency of the emitter of a bipolar $n-p-n$ -transistor on temperature at various values of the narrowing of the band gap of heavy doped silicon ΔE_g

где N_B и N_E – концентрация легирующей примеси в базе и эмиттере соответственно, Q_b – число Гуммеля, количество примеси на единицу площади базы (доза при имплантации)

$$Q_b = \int_0^W N_B(x) dx. \quad (10)$$

Из (9) следует, что β будет тем выше, чем сильнее легирован эмиттер, а также иметь такую же температурную зависимость, как и γ . Поэтому коэффициент усиления транзистора по току β также будет пропорционален $\exp(-\Delta E_g/kT)$. На рис. 3 приведены результаты расчетов зависимости коэффициента усиления транзистора по току β от обратной температуры. Расчет проводился по формуле (9) в соответствии с данными рис. 2. Из рис. 3 следует, что в соответствии с выражениями (7)–(9) γ зависит от температуры практически экспоненциально, эта зависимость определяется присутствием в (7) члена $\exp(-\Delta E_g/kT)$, который учитывает сужение запрещенной зоны в сильнолегированном эмиттере. Для умеренно и слаболегированных эмиттеров (концентрация ниже $1 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$) величина ΔE_g достаточно мала и так же пренебрежимо мало влияние температуры на значение коэффициента усиления.

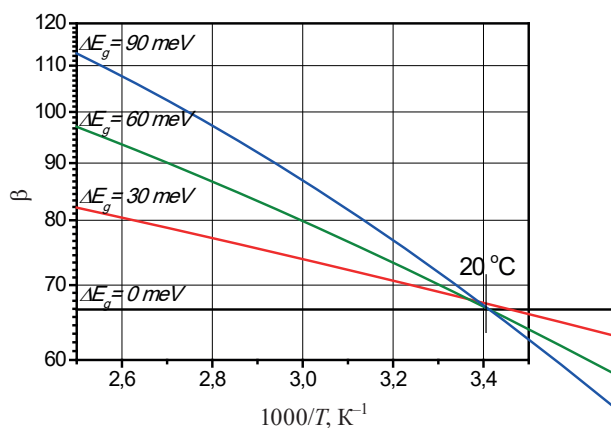


Рис. 3. Зависимости статического коэффициента усиления по току биполярного $n-p-n$ -транзистора от обратной температуры при различных значениях величины сужения ширины запрещенной зоны сильнолегированного кремния ΔE_g

Fig. 3. Dependences of the static current gain of a bipolar $n-p-n$ -transistor on the reciprocal temperature at different values of the narrowing of the band gap of heavy doped silicon ΔE_g

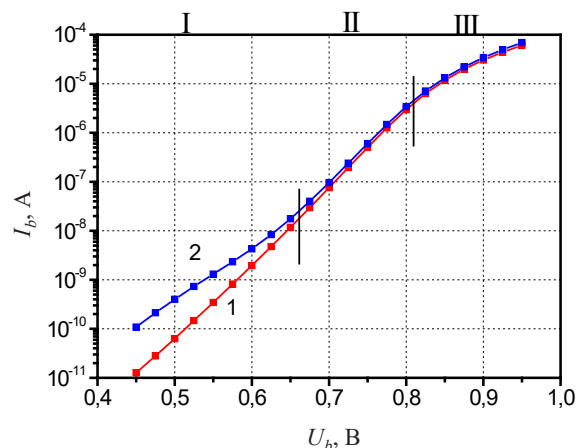


Рис. 4. Зависимость тока базы биполярного $n-p-n$ -транзистора от напряжения эмиттер – база для приборов серии A (кривая 1) и серии B (кривая 2) при $U_{кз} = 3$ В

Fig. 4. Dependence of the base current of a bipolar $n-p-n$ -transistor on the emitter-base voltage for devices of the A series (curve 1) and the B series (curve 2) by $U_{ce} = 3$ V

Из (1), (2) и (8) следует, что на температурную зависимость β в определенной мере могут оказывать влияние и температурные изменения коэффициентов диффузии носителей заряда в базе и эмиттере, а также изменения диффузионной длины неосновных носителей в базе. При уровнях легирования выше 10^{19} см $^{-3}$ подвижность дырок в эмиттере практически не изменяется с ростом температуры [8]. Из соотношения Эйнштейна $D_p = (kT/q)\mu_p$ тогда следует, что коэффициент диффузии должен возрастать при увеличении температуры. Время жизни дырок в эмиттере τ_p также увеличивается при росте температуры [8], следовательно, диффузионная длина дырок в эмиттере $L_p = (D_p \cdot \tau_p)^{1/2}$ при увеличении температуры возрастает, и этот рост совместно с влиянием члена $\exp(-\Delta E_g/kT)$ также приводит к росту коэффициента усиления транзистора.

На рис. 4 приведены зависимости тока базы от напряжения эмиттер – база для приборов серии A и серии B , где можно выделить три участка [7]: I – область малых токов, где базовый ток изменяется по закону $\exp(qV_b/mkT)$, где m находится в диапазоне от 1 до 2; II – область, где $m = 1$; III – область среднего и высокого уровня инжекции, отличающаяся значительным падением напряжения на сопротивлении базы.

Наибольшее различие в представленных на рис. 4 ВАХ наблюдается в области малых токов (область I). Более высокие значения базового тока в образцах серии B определяются высокой плотностью рекомбинационных центров в обедненной области и на поверхности полупроводникового прибора [1]. В области не очень малого уровня инжекции, где $m = 1$, (область II) и области среднего и высокого уровня инжекции (область III) для обоих образцов различие в значениях базового тока невелико. Однако следует отметить, что во всем исследуемом диапазоне напряжений эмиттер – база величины тока базы для приборов серии B имели несколько более высокие значения, чем для приборов серии A . Ток базы в области III определяется прежде всего ее сопротивлением, которое в свою очередь зависит от профиля легирования базы и конструкции самого транзистора. Поскольку конструкционные и технологические условия изготовления обоих образцов примерно одинаковы, то и величины сопротивления базы r_b имеют близкие значения.

На рис. 5 представлены температурные зависимости коэффициента усиления β для приборов серии A и серии B при токе коллектора $I_c = 1,0 \cdot 10^{-4}$ А. При таком значении коллекторного тока величина базового тока попадает в интервал, соответствующий $I_b \sim \exp(qV_b/kT)$, где $m = 1$ (см. рис. 4, область II), β достигает области максимальных значений. Температурные зависимости коэффициентов усиления транзисторов по току β в интервале температур 20–125 °С практически параллельны и лишь немного отличаются температурными коэффициентами пропорциональности $\partial\beta/\partial T$ (температурный уход β) при $I_c = \text{const}$. Для транзисторов из серии A – 0,44 °С $^{-1}$, а для B – 0,50 °С $^{-1}$.

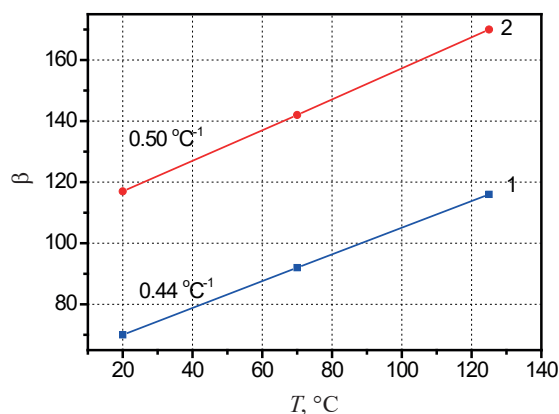


Рис. 5. Температурные зависимости статического коэффициента усиления по току биполярного $n-p-n$ -транзистора приборов серии A (кривая 1) и серии B (кривая 2) для тока коллектора $I_c = 1,0 \cdot 10^{-4}$ А

Fig. 5. Temperature dependences of the static current gain of a bipolar $n-p-n$ -transistor of the A series (curve 1) and the B series (curve 2) for the collector current $I_c = 1.0 \cdot 10^{-4}$ A

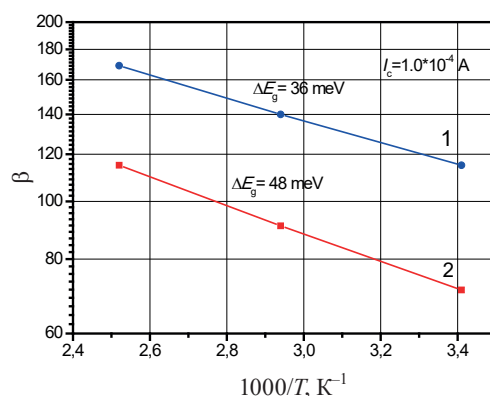


Рис. 6. Зависимость статического коэффициента усиления по току биполярного $n-p-n$ -транзистора приборов серии A (кривая 1) и серии B (кривая 2) от обратной температуры для тока коллектора $I_c = 1,0 \cdot 10^{-4}$ А

Fig. 6. Dependence of the static current gain of a bipolar $n-p-n$ -transistor of the A series (curve 1) and the B series (curve 2) on the reciprocal temperature for the collector current $I_c = 1.0 \cdot 10^{-4}$ A

Если предположить, что основная причина роста коэффициента β с температурой связана с сужением запрещенной зоны при высоких уровнях легирования эмиттера, анализ зависимости $\ln\beta = f(1000/T)$, приведенной на рис. 5, позволил оценить величину ΔE_g . Проведенные при данном предположении расчеты показали, что сужение ширины запрещенной зоны кремния в эмиттере $n-p-n$ -транзистора, ответственное за рост β , должно быть равно 36 и 48 мэВ в приборах из серий A и B соответственно.

Сопоставив полученные расчетные значения ΔE_g , нами была оценена концентрация основной легирующей примеси в эмиттере. Для транзисторов из серии A она приблизительно равна $1,2 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$. Для транзисторов из серии B $N_E \approx 4,5 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$, что примерно в 3,5 раза больше, чем для приборов из серии A . Таким образом, для $I_c = 1,0 \cdot 10^{-4}$ А при зависимости $I_b \sim \exp(qV_b/kT)$, где $m = 1$, большее значение коэффициента усиления по току для приборов серии B , несмотря на большее содержание в них неконтролируемых технологических примесей, обусловлено в первую очередь более высокой концентрацией основной легирующей примеси в эмиттере. Это, однако, связано и с более сильной температурной зависимостью β в данной области токов инжекции.

При уменьшении токов инжекции менее $1,0 \cdot 10^{-6}$ А коэффициент усиления по току для приборов серии B становится существенно меньше соответствующих значений для приборов се-

рии A . В данной области β для приборов серии B практически перестает зависеть от температуры. Это обусловлено тем, что при низких ($I_c < 10^{-6}$ А) уровнях инжекции при наличии в приборах серии B высокой концентрации неконтролируемых технологических примесей (таких как Fe, Cl, Ca, Cu, Zn и др.) весьма существенным становится вклад рекомбинационно-генерационного тока вследствие наличия большого количества поверхностных состояний в обедненной области эмиттера на границе раздела кремний–окисел по сравнению с полезным диффузионным током неосновных носителей в базе.

Увеличение темпа рекомбинации носителей в эмиттерном переходе в приборах с высоким содержанием неконтролируемых технологических примесей приводит к уменьшению коэффициента инжекции и, как следствие, к уменьшению коэффициента усиления по току.

Высокий вклад рекомбинационно-генерационных процессов в приборах серии B превалирует над эффектом температурного изменения ширины запрещенной зоны. Для приборов серии A с низким содержанием неконтролируемых технологических примесей при токах коллектора $I_c < 10^{-6}$ А температурная зависимость коэффициента усиления по току практически не отличается от аналогичной зависимости для среднего уровня инжекции. Таким образом, при малых токах коллектора из-за существенного вклада рекомбинационно-генерационных процессов (так называемого тока Са – Нойса – Шокли [7]) в обедненной области эмиттера и поверхностных токов утечки в транзисторах из серии B эффект влияния температуры на величину β существенно ниже, чем в транзисторах из серии A .

Как сказано выше, ток базы в области III (а следовательно, и ток коллектора) определяется прежде всего сопротивлением базы, которое в свою очередь зависит от профиля легирования базы и конструкции самого транзистора.

Зависимость статического коэффициента усиления по току от изменения температуры способствует образованию горячих точек [9, 10] и изменению энергетической границы появления вторичного пробоя. Следовательно, для уменьшения температурной зависимости статического коэффициента усиления по току необходимо, например, снижение уровня легирования базы транзистора и/или ограничение поверхностной концентрации примесей в эмиттере [9, 10].

Заключение. Установлено, что в биполярном n - p - n -транзисторе с высоким содержанием неконтролируемых технологических (фоновых) примесей для увеличения статического коэффициента усиления по току при среднем уровне тока коллектора ($1,0 \cdot 10^{-6} < I_c < 1,0 \cdot 10^{-3}$ А) необходима более высокая концентрация основной легирующей примеси в эмиттере по сравнению с приборами с низким содержанием неконтролируемых технологических (фоновых) примесей. Данное обстоятельство обуславливает и более сильную температурную зависимость β вследствие значительного вклада в его величину температурного изменения ширины запрещенной зоны в сильнолегированном кремнии.

При низких токах инжекции ($I_c < 1,0 \cdot 10^{-6}$ А) статический коэффициент усиления по току для приборов серии B становится существенно меньше соответствующих значений для приборов серии A и практически перестает зависеть от температуры. Это вызвано существенным вкладом рекомбинационно-генерационного тока в приборах серии B по сравнению с полезным диффузионным током неосновных носителей в базе вследствие наличия высокой концентрации неконтролируемых технологических примесей (таких как Fe, Cl, Ca, Cu, Zn и др.) и, соответственно, большим количеством поверхностных состояний в обедненной области эмиттера на границе раздела кремний–окисел.

Для приборов серии A с низким содержанием неконтролируемых технологических (фоновых) примесей при токах коллектора $I_c < 10^{-6}$ А температурная зависимость коэффициента усиления по току практически не отличается от аналогичной зависимости для среднего уровня инжекции.

Список использованных источников

1. Исследование влияния технологических примесей на вольт-амперные характеристики биполярного n - p - n -транзистора / В. Б. Оджаев [и др.] // Вест. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-техн. наук. – 2018. – Т. 63, № 2. – С. 244–249. <https://doi.org/10.29235/1561-8358-2018-63-2-244-249>
2. Челябинский, А. Р. Дефектно-примесная инженерия в имплантированном кремнии / А. Р. Челябинский, Ф. Ф. Комаров // Успехи физ. наук. – 2003. – Т. 173, № 8. – С. 813–846.

3. Белоус, А. И. Проектирование интегральных микросхем с пониженным энергопотреблением / А. И. Белоус, В. А. Емельянов, В. С. Сякерский. – Минск: Интегралполиграф, 2009. – 320 с.
4. Зависимость коэффициента усиления биполярного n - p - n -транзистора от параметров легированных областей и содержания технологических примесей / В. Б. Оджаев [и др.] // Материалы и структуры современной электроники: Материалы VIII Междунар. науч. конф. – Минск, 2018. – С. 195–199.
5. SEMI M33–0988.
6. Surface analysis for Si-Wafers using total reflection X-ray fluorescence analysis / W. Berneike [et al.] // Fresenius' Zeitschrift für analytische Chemie. – 1989. – Vol. 333, № 4/5. – P. 524–526. <https://doi.org/10.1007/bf00572369>
7. Sze, S. M. Semiconductor Devices: Physics and Technology / S. M. Sze, M. K. Lee. – 3rd ed. – John Wiley & Sons Singapore Pte. Limited, 2012. – 582 p.
8. Бликер, А. Физика силовых биполярных и полевых транзисторов: пер. с англ. / А. Бликер. – Л.: Энергоатомиздат: Ленингр. отд-ние, 1986. – 248 с.
9. Buhanan, D. Investigation of current-gain temperature dependence in silicon transistors / D. Buhanan // IEEE Trans. Electron Devices. – 1969. – Vol. 16, № 1. – P. 117–124. <https://doi.org/10.1109/t-ed.1969.16573>
10. Фистуль, В. И. Сильнолегированные полупроводники / В. И. Фистуль. – М.: Наука, – 1967. – 416 с.

References

1. Odzhaev V. B., Panfilenko A. K., Pyatlitski A. N., Prosolovich V. S., Shvedau S. V., Filipenya V. A., Yavid V. Yu., Yankovsky Yu. N. Investigation of influence of technological impurities on the I–V characteristics of the bipolar n - p - n -transistor. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-technichnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physical-technical series*, 2018, vol. 63, no. 2, pp. 244–249 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-8358-2018-63-2-244-249>
2. Chelyadinsky A. R., Komarov F. F. Defect-impurity engineering in implanted silicon. *Physics-Uspekhi*, 2003, vol. 46, no. 8, pp. 789–820. <https://doi.org/10.1070/pu2003v046n08abeh001371>
3. Belous A. I., Emelyanov V. A., Syakersky V. S. *Design of Integrated Circuits with Reduced Power Consumption*. Minsk, Integralpoligraf Publ., 2009. 320 p. (in Russian).
4. Odzaev V. B., Panfilenko A. K., Pyatlitski A. N., Pilipenko V. A., Prasalovich V. S., Filipenia V. A., Yavid V. Yu., Yankovsky Y. N. Dependence of the gain of a bipolar n - p - n -transistor on the parameters of doped regions and the content of technological impurities. *Materialy VIII Mezhdunarodnoi konferentsii "Materialy i struktury sovremennoi elektroniki"* [Proceedings of the VIII International Scientific Conference "Materials and Structures of Modern Electronics"]. Minsk, 2018, pp. 195–199 (in Russian).
5. SEMI M33–0988.
6. Berneike W., Knott J., Schwenke H., Weisbrod U., Fresenius Z. Surface analysis for Si-wafers using total reflection X-ray fluorescence analysis. *Fresenius' Zeitschrift für analytische Chemie*, 1989, vol. 333, no. 4–5, pp. 524–526. <https://doi.org/10.1007/bf00572369>
7. Sze S. M., Lee M. K. *Semiconductor Devices: Physics and Technology*, 3rd ed. John Wiley & Sons Singapore Pte. Limited, 2012. 582 p.
8. Blikher A. *Field-Effect and Bipolar Power Transistor Physics Paperback*. Academic Press, 1981. 336 p. <https://doi.org/10.1016/b978-0-12-105850-0.50012-6>
9. Buhanan D. Investigation of current-gain temperature dependence in silicon transistors. *IEEE Transactions on Electron Devices*, 1969, vol. 16, no. 1, pp. 117–124. <https://doi.org/10.1109/t-ed.1969.16573>
10. Fistul V. I. *Heavy Doped Semiconductors*. Moscow, Nauka Publ., 1967. 416 p. (in Russian).

Информация об авторах

Оджаев Владимир Борисович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой физики полупроводников и нанoeлектроники, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: odzaev@bsu.by

Петлицкий Александр Николаевич – кандидат физико-математических наук, директор центра, ОАО «Интеграл» – управляющая компания холдинга «Интеграл» (ул. Казинца, 121а, 220108, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: petan@tut.by

Пилипенко Владимир Александрович – член-корреспондент Национальной академии наук Беларуси, доктор технических наук, профессор, заместитель директора ГЦ «Белмикроанализ» ОАО «Интеграл» – управляющая компания холдинга «Интеграл» (ул. Казинца, 121а, 220108, г. Минск, Республика Беларусь).

Прасолович Владислав Савельевич – кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий НИИ

Information about the authors

Vladimir B. Odzaev – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Department of Semiconductor Physics and Nanoelectronics, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: odzaev@bsu.by

Aliaksandr N. Pyatlitski – Ph. D. (Physics and Mathematics), Director of the “Belmicroanalysis” state Center of the JSC “Integral” – “Integral” Holding Managing Company (121a, Kazinets Str., 220108, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: petan@tut.by

Vladimir A. Pilipenko – Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Belarus, Dr. Sc. (Engineering), Professor, Deputy Director of the “Belmicroanalysis” State Center of the JSC “Integral” – “Integral” Holding Managing Company (121a, Kazinets Str., 220108, Minsk, Republic of Belarus).

Uladislau S. Prasalovich – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Head of the Laboratory of

спектроскопии полупроводников, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: prosolovich@bsu.by

Филипеня Виктор Анатольевич – ведущий инженер ГЦ «Белмикрoанализ», ОАО «Интеграл» – управляющая компания холдинга «Интеграл» (ул. Казинца, 121а, 220108, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: office@integral.by

Шестовский Дмитрий Викторович – инженер-технолог отдела перспективных технологических процессов, ОАО «Интеграл» – управляющая компания холдинга «Интеграл» (ул. Казинца, 121а, 220108, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: DShestovski@integral.by

Явид Валентин Юльянович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник НИЛ спектроскопии полупроводников, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: yavid@bsu.by

Янковский Юрий Николаевич – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник НИЛ спектроскопии полупроводников, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: yankouski@bsu.by

the Semiconductor Spectroscopy, Assistant Professor at the Department Semiconductor Physics and Nanoelectronics, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: prosolovich@bsu.by

Viktar A. Filipenia – Lead Engineer of the “Belmicr-oanalysis” State Center of the JSC “Integral” – “Integral” Holding Managing Company (121a, Kazinets Str., 220108, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: office@integral.by

Dmitry V. Shestovski – Engineer-Technologist of the Advanced Technological Processes Department of the JSC “Integral” – “Integral” Holding Managing Company (121a, Kazinets Str., 220108, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: DShestovski@integral.by

Valentin Yu. Yavid – Ph. D. (Physics and Mathematics), Senior Researcher of the Laboratory of the Semiconductor spectroscopy, Assistant Professor at the Department Semiconductor Physics and Nanoelectronics, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: yavid@bsu.by

Yuri N. Yankovski – Ph. D. (Physics and Mathematics), Leading Researcher of the Laboratory of the Semiconductor Spectroscopy, Assistant Professor at the Department Semiconductor Physics and Nanoelectronics, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: yankouski@bsu.by

ISSN 1561-2430 (Print)

ISSN 2524-2415 (Online)

УДК 536.24:66.045

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-2-242-254>

Поступила в редакцию 30.03.2021

Received 30.03.2021

Т. Б. Карлович, А. Б. Сухоцкий, Е. С. Данильчик*Белорусский государственный технологический университет, Минск, Беларусь***КОНВЕКТИВНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ВОЗДУШНЫХ ПОТОКОВ
В ВЫТЯЖНОЙ ШАХТЕ НАД ЧЕТЫРЕХРЯДНЫМ ОРЕБРЕННЫМ ПУЧКОМ**

Аннотация. Рассмотрены разнонаправленные квазипериодические воздушные течения в вытяжной шахте над четырехрядным горизонтальным пучком, состоящим из биметаллических ребристых труб, которые служат для отвода теплоты в теплообменных аппаратах. Проведено моделирование движения воздуха на основе уравнений для термогравитационной конвекции, включающей тепловую и гидродинамическую задачи для свободно-конвективного течения вязкой жидкости в приближении Буссинеска. Предложена интерпретация квазипериодических воздушных течений в шахте на основе конвекции Рэлея – Бенара, в результате которой в жидкости или газе формируются правильные структуры, называемые ячейками Рэлея – Бенара. Ячейки Рэлея – Бенара появляются при переходе из устойчивого состояния системы в неустойчивое в результате действия возмущений скорости и температуры. Рассмотрены возможные двумерные (конвективные валы) и трехмерные (прямоугольные ячейки) структуры, формирующиеся в шахте для различных подводенных электрических мощностей к пучку оребренных труб. Для оценки числа возникающих структур рассчитаны критические числа Рэлея, характеризующие критические градиенты температур и критические движения в системе. Для двух экспериментов проведено сравнение экспериментальных чисел Рэлея с их критическими значениями. Также обсуждаются отличия условий проведения эксперимента от используемых в расчетах идеальных граничных условий и частичном разрушении квазипериодических структур вследствие этого.

Ключевые слова: свободная конвекция, вытяжная шахта, оребренная труба, теплопередача, приближение Буссинеска, уравнение Навье – Стокса, уравнение теплопроводности, конвективная неустойчивость, ячейка Рэлея – Бенара

Для цитирования. Карлович, Т. Б. Конвективная неустойчивость воздушных потоков в вытяжной шахте над четырехрядным оребренным пучком / Т. Б. Карлович, А. Б. Сухоцкий, Е. С. Данильчик // Вес. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2021. – Т. 57, № 2. – С. 242–254. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-2-242-254>

Tatyana B. Karlovich, Albert B. Sukhotskii, Ekaterina S. Danilchik*Belarusian State Technological University, Minsk, Belarus***CONVECTIVE INSTABILITY OF AIR FLOWS
IN THE EXHAUST SHAFT ABOVE A FOUR-ROW FINNED BEAM**

Abstract. Herein, multidirectional quasiperiodic air flows in an exhaust shaft above a four-order horizontal bundle consisting of bimetallic finned tubes used to remove heat in heat exchangers are considered. Modeling of the air movement is carried out on the basis of equations for thermogravitational convection in the Boussinesq approximation. It takes into account the viscosity of the air and the dependence of the air density on the temperature. An interpretation of quasiperiodic airstreams is proposed on the basis of Rayleigh – Bénard convection, as a result of which regular structures, called Rayleigh – Bénard cells, are formed in a liquid or gas. Rayleigh – Bénard cells are an analytical solution to the problem of the stability of hydrodynamics flows in the linear approximation. The appearance of two-dimensional (convective rolls) and three-dimensional (rectangular cells) is possible. To estimate the number of emerging structures, the critical Rayleigh numbers were calculated, which characterizes the transition from an unstable mode of the convective fluid flow to a stable mode. For two experiments, the experimental Rayleigh numbers are compared with their critical values. The differences between the experimental conditions and the ideal boundary conditions used in the calculations and the partial destruction of quasiperiodic structures as a result of this are also discussed.

Keywords: free convection, exhaust shaft, finned tube, heat transfer, Boussinesq approximation, Navier – Stokes equation, heat conduction equation, convective instability, Rayleigh – Bénard cell

For citation. Karlovich T. B., Sukhotskii A. B., Danilchik E. S. Convective instability of air flows in the exhaust shaft above a four-row finned beam. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2021, vol. 57, no. 2, pp. 242–254 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-2-242-254>

Введение. Конвекция Рэлея – Бенара, возникающая в тонком протяженном слое жидкости при ее подогреве снизу, экспериментально наблюдалась в опытах Г. Бенара [1] и теоретически была объяснена Д. У. Рэлеем [2]. Суть явления заключается в образовании правильных периодических структур (ячеек Рэлея – Бенара) в жидкости за счет совместного действия выталкивающей силы и силы вязкого трения. На нижние более теплые слои жидкости с меньшей плотностью действует подъемная сила, и они стремятся подняться вверх, в то время как более тяжелые холодные слои стараются опуститься вниз. Если градиент температуры будет достаточно велик, так что равновесие в жидкости за счет наличия возмущений в среде станет неустойчивым, возникнет конвекция, при этом пороговое значение для устойчивого течения определится критическим числом Рэлея. Критический режим течения жидкости приводит к образованию в ней правильных структур в виде ячеек Рэлея – Бенара. Форма и число ячеек во многом зависят от формы и размеров области, ограничивающей жидкость [3]. В отдельной ячейке вследствие действия конвективных сил организуется направленное движение жидкости – подъем по центру более теплой жидкости и опускание по периферии холодной. Для газов, наоборот, в центре ячейки газ опускается и поднимается по краям ячейки. Такое поведение жидкостей и газов было теоретически обосновано в [4] и экспериментально подтверждено в [5]. Оно обусловлено различной зависимостью вязкости для жидкостей и газов от температуры: вязкость жидкостей с температурой уменьшается, а вязкость газов, наоборот, возрастает. В случае дальнейшего роста температурного градиента происходит распад существующих конвективных ячеек на более мелкие структуры, а затем осуществляется переход к хаотическому режиму течения жидкости.

Важную роль в формировании ячеек играет температурная зависимость коэффициента поверхностного натяжения, приводящая к так называемому термокапиллярному эффекту. В случае критического соотношения сил поверхностного натяжения и сил вязкого трения в жидкости появляются периодические структуры – ячейки Бенара – Марангони. В [6] наблюдались периодические ячейки в пленках даже при отсутствии действия термогравитационного механизма.

Отдельным вопросом является обоснование устойчивости конвективных ячеек Рэлея – Бенара, поскольку процесс перемешивания слоев жидкостей, обусловленный неоднородным нагревом, представляет собой пример неустойчивого течения в вязкой среде [7]. Теоретическое описание неустойчивых течений основано на тепловых и гидродинамических уравнениях, связанных с решением нелинейных задач на устойчивость. Большинство из них поддаются решению только с помощью численных методов. Однако конвекция Рэлея – Бенара служит примером аналитически решаемой задачи, основанной на расщеплении временных и пространственных характеристик [8] и демонстрирующей возникновение правильных устойчивых периодических структур. Примером двумерных структур являются конвективные валы, примерами трехмерных структур – треугольные, прямоугольные и гексагональные ячейки [3]. Также под влиянием случайных внешних возмущений могут формироваться сложные неоднородные структуры – текстуры [9]. Их динамика с учетом крупномасштабного дрейфа может быть описана на основе двумерной модели конвекции с использованием метода Бубнова – Галеркина [10], суть которого состоит в использовании конечного числа собственных функций невозмущенной задачи, удовлетворяющих соответствующим граничным условиям в качестве базиса для разложения решения в виде возмущений.

В настоящее время широко используются различные численные методы расчета уравнений термогравитационной конвекции. Их можно разделить на две группы: конечно-разностные и спектральные методы (типа метода Бубнова – Галеркина). Как отмечается в [11], спектральные методы приблизительно на два порядка эффективнее конечно-разностных схем, однако существуют определенные трудности в вычислении нелинейных слагаемых с их помощью. В [12] использовался метод спектральных элементов NEC5000 для трехмерных прямых численных расчетов уравнений в приближении Буссинеска. В этой статье проведено численное моделирование для широкого ряда чисел Прандтля от 0,005 до 70 и чисел Рэлея до 10^7 .

Конвекция Рэлея – Бенара находит многочисленные экспериментальные подтверждения в различных областях исследований. Прежде всего речь идет об атмосферных явлениях, таких как вихри, циклоны, ветры [13]. В небе можно наблюдать правильные дорожки из обла-

ков [14], за самолетами возможно образование нестационарных периодических структур [15]. Периодические столбчатые структуры, обусловленные наличием ячеек Рэлея – Бенара, образуются в базальтовых породах [16] и при выращивании кристаллов методом Чохральского [17]. Периодические конвекционные потоки встречаются в мантии Земли [18] и приповерхностном слое океана [19]. Также на основе конвекции Рэлея – Бенара описываются явления самоорганизации в различного рода стохастических системах, где из первоначального хаоса возникают самоорганизованные структуры [20].

В настоящей работе проводится моделирование течения воздуха в шахте над четырехрядным пучком оребренных труб на основе уравнений термогравитационной конвекции с идеализированными граничными условиями. Интерпретация полученных результатов с использованием конвекции Рэлея – Бенара позволяет объяснить возникновение гейзерных течений в вытяжной шахте над горизонтальным пучком оребренных труб, к которому подводится тепловая мощность. Такие пучки являются составной частью теплообменных устройств и служат для быстрого отведения большого количества теплоты от охлаждаемого объекта [21].

Экспериментальная установка. При экспериментальном моделировании процесса теплообмена в установке (рис. 1) для его интенсификации используется прямоугольная $b \times c = 38 \times 31$ см вытяжная шахта высотой $H = 52$ см. Общий вид установки показан на рис. 2. При определенной мощности, подводимой к тепловым трубам пучка, разогретый воздух образует направленный вертикально вверх неустойчивый поток в шахте [22]. Выходя из шахты, он смешивается с холодным воздухом, образуя нестационарные гейзерные течения. В данной работе исследуется природа возникновения этих течений, их зависимость от мощности нагрева и локализация в пространстве шахты.

Также рассматривается четырехрядный шахматный пучок, состоящий из оребренных труб и служащий для воздушного охлаждения в теплообменных устройствах (см. рис. 2). Он состоит из $m = 22$ шт. ребристых труб с поперечным $S_1 = 64$ мм и продольным $S_2 = 55,4$ мм шагами. Геометрические размеры биметаллической оребренной трубы со спиральными накатными ребрами следующие: наружный диаметр – $d = 56$ мм; диаметр трубы по основанию – $d_0 = 26,8$ мм; высота ребра – $h = 14,6$ мм; шаг ребра – $s = 2,5$ мм; средняя толщина ребра – $\Delta = 0,5$ мм; длина трубы – $l_n = 330$ мм (теплоотдающая длина $l = 300$ мм); коэффициент оребрения трубы – $\phi = 19,26$. Материал ребристой оболочки – алюминиевый сплав АД1М, материал несущей трубы – углеродистая сталь. Диаметр несущей трубы $d_n = 25$ мм; толщина стенки $\delta = 2$ мм.

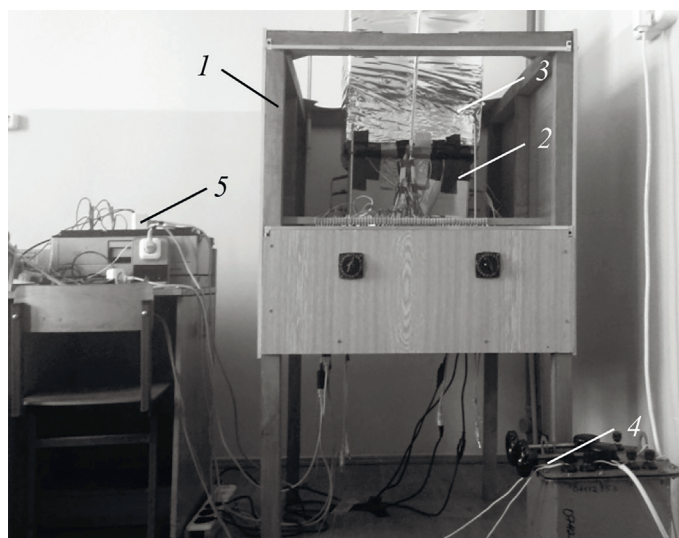


Рис. 1. Экспериментальная установка: 1 – камера; 2 – пучок оребренных труб; 3 – вытяжная шахта; 4 – трансформатор; 5 – измерительная аппаратура

Fig. 1. Experimental setup: 1 – camera; 2 – bundle of finned tubes; 3 – exhaust shaft; 4 – transformer; 5 – measuring equipment

Движение воздуха в экспериментальной установке можно условно разделить на три этапа: засасывание холодного воздуха в межреберное пространство пучка и его нагрев, ускорение теплового потока в шахте и выброс нагретого воздуха в окружающую среду. Описание движения воздуха в шахте является сложной тепло-гидравлической задачей, связанной с решением системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных для термогравитационной конвекции в четырехмерной области с координатами (x, y, z, τ) . Для реальной сжимаемой жидкости (в случае отсутствия внутренних источников тепловыделения и пренебрежения теплотой, которая выделяется за счет внутреннего трения) система уравнений имеет вид

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \tau} + \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{w} \right) = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{w} + \left(\frac{\eta}{3} + \xi \right) \nabla \nabla \cdot \mathbf{w} + \rho \mathbf{g},$$

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} + \mathbf{w} \cdot \nabla t = a \Delta t,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{w}) = 0,$$
(1)

где τ – время, $\mathbf{w} = w_x \mathbf{i} + w_y \mathbf{j} + w_z \mathbf{k}$ – скорость, p – давление, η и ξ – коэффициенты сдвиговой и объемной вязкости соответственно, t – температура, ρ – плотность жидкости, a – коэффициент температуропроводности.

Систему уравнений (1) можно упростить в случае достаточно слабой конвекции (малой скорости потока жидкости), когда термодинамические переменные (t, p) представимы в виде суммы средних значений и малых добавок $(t_m + t_1, p_m + p_1)$, так что в термодинамической зависимости $\rho = \rho(t, p)$ можно ограничиться слагаемыми первого порядка малости

$$\rho = \rho_m + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_p t_1 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_t p_1 = \rho_m (1 - \beta t_1 + \alpha p_1),$$
(2)

где β и α – коэффициенты теплового расширения и изотермической сжимаемости

$$\beta = -\frac{1}{\rho_m} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_p, \quad \alpha = \frac{1}{\rho_m} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_t.$$
(3)

И далее будем предполагать, что изменение плотности воздуха за счет неоднородности температуры значительно превышает изменение плотности воздуха из-за неоднородности давления

$$|\beta t_1| \ll |\alpha p_1|,$$
(4)

тогда зависимостью плотности от давления можно пренебречь и записать формулу (2) в виде

$$\rho = \rho_m (1 - \beta t_1).$$
(5)

Равенство (5) позволяет упростить систему уравнений (1), сохранив зависимость плотности от температуры только в уравнении Навье – Стокса в слагаемом с подъемной силой.

Модель Буссинеска. Линеаризованная система уравнений для конвекции воздуха в поле силы тяжести, дополненная уравнением непрерывности для несжимаемой жидкости, в приближении Обербека – Буссинеска (5), имеет вид [8]

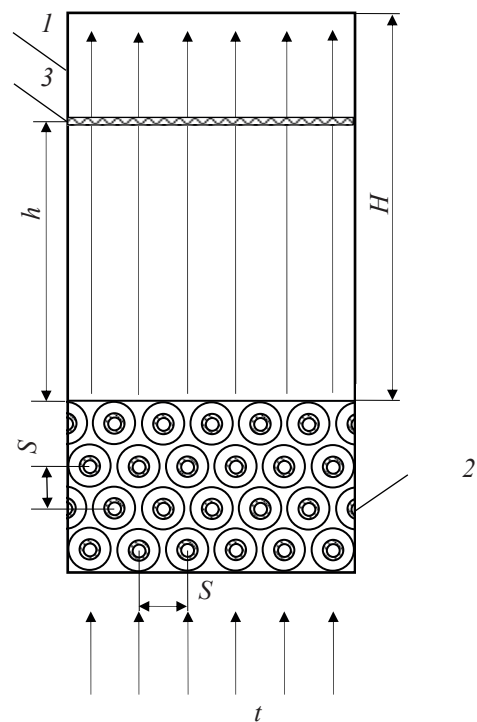


Рис. 2. Схема экспериментальной установки:
1 – вытяжная шахта; 2 – пучок оребренных труб; 3 – сетка из легких нитей

Fig. 2. Scheme of the experimental setup:
1 – exhaust shift; 2 – bundle of finned tubes;
3 – mesh of light

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \tau} &= -\frac{1}{\rho_m} \nabla p_1 + \nu \Delta \mathbf{w} - \beta t_1 \mathbf{g}, \\ \frac{\partial t_1}{\partial \tau} + \mathbf{w} \cdot \nabla t_m &= a \Delta t_1, \\ \nabla \mathbf{w} &= 0,\end{aligned}\tag{6}$$

где ν – кинематическая вязкость. Допустим, что в системе существует механическое равновесие жидкости или ее скорость $\mathbf{w} = 0$, тогда для стационарного температурного распределения в шахте получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}-\frac{1}{\rho_m} \nabla p_0 + \beta t_0 \mathbf{g} &= 0, \\ \Delta t_0 &= 0,\end{aligned}\tag{7}$$

где давление и температура в равновесном состоянии соответствуют значениям p_0 и t_0 . Система (7) имеет решение в виде постоянного температурного градиента, направленного вдоль оси z :

$$\nabla t_0 = -A \mathbf{k},\tag{8}$$

где A – модуль градиента. Это значит, что температура меняется только вдоль оси z : $t = t(z)$, а в направлении других осей ее изменения отсутствуют. Предположим, что из состояния равновесия система выходит под действием малых нестационарных возмущений температуры θ , $t_1 = t_0 + \theta$, скорости $\mathbf{v}$ и давления в шахте p_2 , $p_1 = p_0 + p_2$. Тогда система (6) может быть записана для малых возмущений в безразмерном виде с использованием чисел Прандтля (Pr) и Рэлея (Ra):

$$Pr = \frac{\nu}{a}, \quad Ra = Ag \frac{\beta H^4}{a\nu},\tag{9}$$

где H – характерный линейный размер рассматриваемого объема воздуха; a/H , H^2/ν , $\rho_0 \nu a/H^2$ – характерные скорость, время и давление соответственно:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} &= -\nabla p_2 + \Delta \mathbf{v} + Ra \cdot \theta \cdot \mathbf{k}, \\ Pr \frac{\partial \theta}{\partial \tau} - \mathbf{v} \cdot \nabla \theta &= \Delta \theta, \\ \nabla \mathbf{v} &= 0.\end{aligned}\tag{10}$$

Дальнейшее решение задачи (10) связано с рассмотрением различных граничных условий для возникновения периодических структур при свободном движении жидкости. Наиболее простой задачей является исследование течения жидкости между двумя бесконечными плоскостями при равномерном подогреве нижней плоскости. Если температуры плоскостей равны θ_1 и θ_2 , а расстояние между плоскостями – H , то постоянный температурный градиент определится соотношением

$$A = (\theta_1 - \theta_2)/H.\tag{11}$$

В этом случае возможно рассмотрение двух видов граничных условий: так называемых жестких и свободных границ. Для жестких границ выполняется условие прилипания жидкости или обращение в нуль всех компонент скорости

$$\mathbf{v} = 0.\tag{12}$$

Для свободных границ считается, что конвективные возмущения не приводят к деформации плоских границ и z -компонента скорости обращается в нуль. Также предполагается, что в жидкости отсутствуют касательные напряжения и исчезают температурные флуктуации на границах. Эти граничные условия будут использоваться далее в решении задачи (10). В координатах, нормированных на расстояние между плоскостями H , граничные условия запишутся в виде

$$v_z = 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0, \quad \theta = 0 \quad \text{при } z = 0, 1. \quad (13)$$

Дифференцируя уравнение непрерывности в системе (6) по переменной z , получаем граничное соотношение (13) в виде

$$v_z = 0, \quad \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} = 0, \quad \theta = 0 \quad \text{при } z = 0, 1. \quad (14)$$

Задача Рэлея. Задача (10), (14) носит название задачи Рэлея о конвективной устойчивости бесконечного плоскопараллельного слоя жидкости. Для ее решения применим операцию двойного ротора $\nabla \times \nabla \times$ к уравнению Навье – Стокса в системе (10). Эта операция повышает порядок уравнения со второго до четвертого, но позволяет исключить переменную давления p_2 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta \mathbf{v}}{\partial \tau} &= \Delta \Delta \mathbf{v} + \text{Ra} \cdot \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\kappa}) \theta, \\ \text{Pr} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} - \mathbf{v} \boldsymbol{\kappa} &= \Delta \theta, \\ \nabla \mathbf{v} &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Спроецируем скорость на ось z и запишем линейную замкнутую систему уравнений относительно компоненты скорости $v_z = v_z(x, y, z, \tau)$ и флуктуаций температуры θ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta v_z}{\partial \tau} &= \Delta \Delta v_z + \text{Ra} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right), \\ \text{Pr} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} - v_z &= \Delta \theta. \end{aligned} \quad (16)$$

Решение линейной двумерной задачи (16) представимо в виде совокупности нормальных возмущений, экспоненциально зависящих от времени и осциллирующих в плоскости (x, z) :

$$\begin{aligned} v_z(x, z, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} c_{1nl} \exp(-\lambda_{nl} \tau) \sin(n\pi z) \cos(lk_x x), \\ \theta(x, z, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} c_{2nl} \exp(-\lambda_{nl} \tau) \sin(n\pi z) \cos(lk_x x), \end{aligned} \quad (17)$$

где k_x – минимальное волновое число вдоль направления x ; λ_{nl} – декремент, характеризующий временной ход возмущения. При $\lambda_{nl} > 0$ возмущения будут затухать, решение устойчиво; при $\lambda_{nl} < 0$ возмущения будут нарастать, решение неустойчиво. При этом решение (16) будет неустойчивым, если хотя бы один из декрементов λ_{nl} будет отрицательным. Условие $\lambda_{nl} = 0$ соответствует периодическому решению в плоскости (x, z) . Коэффициенты c_{1nl} и c_{2nl} определяются из линейной однородной системы уравнений

$$\begin{aligned} \lambda_{nl} c_{1nl} d_{nl}^2 &= c_{1nl} d_{nl}^4 - \text{Ra} c_{2nl} (lk_x)^2, \\ \lambda_{nl} \text{Pr} c_{2nl} + c_{1nl} &= c_{2nl} d_{nl}^2, \end{aligned} \quad (18)$$

где введено обозначение $d_{nl}^2 = (n\pi)^2 + (lk_x)^2$. Система уравнений (18) является задачей на отыскание собственных функций и собственных значений для стационарной системы, описывающей нейтральные возмущения

$$\begin{aligned} \Delta \Delta \mathbf{v} + \text{Ra} \cdot \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\kappa}) \theta &= 0, \\ \Delta \theta + \mathbf{v} \boldsymbol{\kappa} &= 0, \\ \nabla \mathbf{v} &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

При этом собственные функции

$$\Phi_{nl} = \begin{pmatrix} c_{1nl} \\ c_{2nl} \end{pmatrix} \sin(n\pi z) \sin(lk_x x), \quad (20)$$

относящиеся к различным индексам n и l , ортогональны друг другу в силу выполнения соотношений

$$\int_{-1}^1 \sin m\pi x \cdot \sin n\pi x dx = \delta_{nm}, \quad \frac{k_x}{\pi} \int_{-\pi/k_x}^{\pi/k_x} \sin(lk_x x) \cdot \sin(mk_x x) dx = \delta_{lm} \quad (21)$$

и образуют полный набор. Коэффициенты c_{1nl} и c_{2nl} с учетом условия нормировки

$$\frac{\pi}{k_x} (c_{1nl}^2 + c_{2nl}^2) = 1 \quad (22)$$

имеют вид

$$c_{1nl} = d_{nl}^2 \sqrt{\frac{k_x}{\pi(1+d_{nl}^2)}}, \quad c_{2nl} = \sqrt{\frac{k_x}{\pi(1+d_{nl}^2)}}. \quad (23)$$

Однородная линейная система уравнений (18) имеет нетривиальное решение в случае, если ее определитель равен нулю. Соответствующие корни характеристического уравнения вычисляются по формуле

$$\lambda_{nl\pm} = \frac{d_{nl}^2(1+\text{Pr})}{2\text{Pr}} \pm \sqrt{\frac{d_{nl}^4(\text{Pr}-1)^2}{4\text{Pr}^2} + \frac{\text{Ra}(lk_x)^2}{d_{nl}^2\text{Pr}}}. \quad (24)$$

В общем случае декремент λ_{nl} может быть комплексным числом. Однако в случае подогрева снизу число Рэлея положительно, поэтому подкоренное выражение в формуле (24) всегда является вещественным и флуктуации температуры и скорости имеют монотонный характер. С ростом числа Рэлея корень λ_{nl-} может изменить знак с «+» на «-», тогда решение (17) станет неустойчивым. Соответствующий переход из режима устойчивого молекулярного теплопереноса к режиму неустойчивого вихревого течения определяется равенством $\lambda_- = 0$, из которого следует формула для критического числа Рэлея:

$$\text{Ra}_{cr} = \frac{(n^2\pi^2 + l^2k_x^2)^3}{l^2k_x^2}. \quad (25)$$

Критическое число Рэлея может принимать минимальное значение, которое согласно (20) рассчитывается по формуле

$$\text{Ra}_{\min} = \frac{27}{4}\pi^4 \approx 657,5, \quad n=1, \quad l=1. \quad (26)$$

В системе с числом Рэлея меньше минимального критического значения наблюдение конвективных упорядоченных структур невозможно.

Согласно (25) в случае $\text{Ra} = \text{Ra}_{cr}$ задача Рэлея имеет нестационарное периодическое решение в виде конвективных валов с осями, параллельными оси y . Каждая конвективная ячейка состоит из двух валов, при этом вращение соседних валов осуществляется в противоположные стороны.

Проведем оценку критического числа Рэлея на основе формулы (25), справедливой для бесконечного плоского горизонтального слоя со свободными границами. Строго говоря, такое приближение будет верным для большого аспектного отношения G :

$$G = L/H, \quad (27)$$

где L – характерный горизонтальный размер области, в остальных случаях требуется уточнение расчетов. Как показано в работе [23] с использованием метода Бубнова – Галеркина и подтверждено в эксперименте [24] для прямоугольной шахты – наличие боковых стенок в случае жестких границ приводит к формированию валов, параллельных короткой стороне резервуара. Тогда за приоритетное направление ориентации конвективных валов выберем ширину шахты $c = 0,31\text{м}$. Безразмерное минимальное волновое число оценим с учетом длины шахты $b = 0,38\text{м}$:

$$k_x = \frac{2\pi}{b}H = 8,6, \quad (28)$$

а минимальное критическое число Рэлея имеет значение $Ra_{2\min} = 8000$.

Кроме двумерных конвективных валов в шахте возможно появление трехмерных периодических ячеек. Как отмечается в [8], формирование устойчивых двумерных или трехмерных конвективных структур во многом определяется температурной зависимостью вязкости жидкости, числом Прандтля, а также формой и теплопроводностью стенок, ограничивающих жидкость.

Для решения трехмерной задачи Рэлея дополним систему (16) уравнениями для x - и y -компонент скорости:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta v_x}{\partial \tau} &= \Delta \Delta v_x - Ra \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial z}, \\ \frac{\partial \Delta v_y}{\partial \tau} &= \Delta \Delta v_y - Ra \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial z}. \end{aligned} \quad (29)$$

Решение систем уравнений (16) и (29) с использованием [25, 26] представляется в виде

$$\begin{aligned} v_z(x, y, z, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_{1nlm} \exp(-\lambda_{nlm} \tau) \sin(n\pi z) \cos(lk_x x) \cos(mk_y y), \\ v_x(x, y, z, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_{3nlm} \exp(-\lambda_{nlm} \tau) \cos(n\pi z) \sin(lk_x x) \cos(mk_y y), \\ v_y(x, y, z, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_{4nlm} \exp(-\lambda_{nlm} \tau) \cos(n\pi z) \cos(lk_x x) \sin(mk_y y), \\ \theta(x, y, z, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_{2nlm} \exp(-\lambda_{nlm} \tau) \sin(n\pi z) \cos(lk_x x) \cos(mk_y y), \end{aligned} \quad (30)$$

где m – номер гармоники колебания вдоль оси y , k_y – минимальное волновое число вдоль направления y : $k_y = 2\pi H/c$. Коэффициенты c_{3nlm} и c_{4nlm} связаны с коэффициентом c_{1nlm} равенствами

$$c_{3nlm} = -\frac{\pi n l k_x}{l^2 k_x^2 + m^2 k_y^2} c_{1nlm}, \quad c_{4nlm} = -\frac{\pi n m k_y}{l^2 k_x^2 + m^2 k_y^2} c_{1nlm}. \quad (31)$$

Решение (30) также удовлетворяет необходимым граничным условиям: на боковых стенках шахты должны исчезать нормальные составляющие горизонтальной скорости. Подставляя граничные значения для компонент скорости v_x и v_y , имеем

$$v_x(x=0, b; y; z) = 0, \quad v_y(x; y=0, c; z) = 0. \quad (32)$$

Соответствующее критическое число Рэлея для трехмерного случая имеет вид

$$Ra_{cr} = \frac{(n^2 \pi^2 + l^2 k_x^2 + m^2 k_y^2)^3}{l^2 k_x^2 + m^2 k_y^2}, \quad (33)$$

а его минимальное значение для $n = 1, l = 1, m = 1$ с учетом

$$k_y = \frac{2\pi}{c} H = 10,5 \quad (34)$$

равно $Ra_{3min} = 40000$.

В шахте (см. рис. 1) исследовались два режима истечения теплового потока, интерпретируемые на основе периодических решений задачи Рэлея. Для первого режима мощность составляла 90 Вт, температуры на входе и выходе из шахты – 84 и 57 °С. Для второго режима мощность была 125 Вт, температуры на входе и выходе из шахты – 103 и 68 °С. Температура воздуха окружающей среды равнялась 21 °С. Соответствующие экспериментальные числа Рэлея можно оценить с использованием формулы (9), тогда в первом режиме $Ra_1 = 1,89 \cdot 10^8$, во втором – $Ra_2 = 1,99 \cdot 10^8$. Квазипериодические конвективные структуры наблюдались и в первом, и во втором случае, однако при подводе меньшей мощности размах колебаний нитей был более значительным.

Оценим максимальный порядок конвективных валов и ячеек на основе критических чисел Рэлея в соответствии с формулами (25) и (33). Подберем номера гармоник n, l, m таким образом, чтобы они максимально приближались к экспериментальным значениям Ra_1 и Ra_2 . Для равных значений n и l в случае конвективных валов имеем $n = l = 12$ и $Ra_{lcr} = 1,7 \cdot 10^8$. Для равных значений n, l, m в случае конвективных ячеек имеем $n = l = m = 8$ и $Ra_{2cr} = 1,6 \cdot 10^8$. В обоих случаях теоретические критические числа Рэлея ближе к экспериментальному значению Ra_1 , что возможно и обуславливает более ярко выраженные квазипериодические движения воздуха в шахте. Поскольку порядок конвективных ячеек меньше, чем конвективных валов, вероятнее всего именно трехмерные ячейки присутствуют в шахте. При этом на основании решения (30) устойчивыми будут ячейки всех порядков с первого по восьмой, однако в силу неидеальности граничных условий появляется только часть из них. Внешний вид конвективных структур можно наглядно представить с помощью визуализации поля скоростей в каждой точке пространства шахты, выбрав, например, одно слагаемое в решении (30). На рис. 3 и 4 представлены проекции трехмерной конвективной ячейки в плоскости (x, y) и плоскости (x, z) для гармоник $n = 1, l = 2$ и $m = 2$.

Эксперимент. Конвективные ячейки Бенара наблюдались в шахте над четырехрядным оребранным пучком в виде гейзерных течений воздуха. Обратное течение воздуха в шахте фиксировалось путем установки внутрь шахты сетки из легких нитей, закрепленной на жесткой рамке. Рамка устанавливалась на высоте $h = 37$ см от оребренного пучка труб (см. рис. 2). На рис. 5

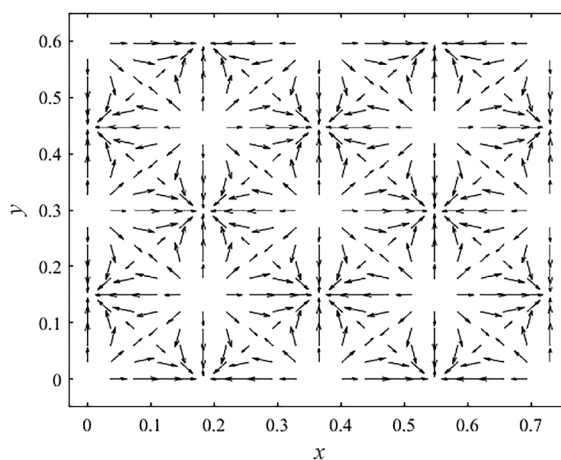


Рис. 3. Ячейки Рэлея – Бенара в вытяжной шахте для $n = 1, l = 2, m = 2$; стрелками обозначено направление скорости воздуха в плоскости (x, y)

Fig. 3. Rayleigh – Benard cells in the exhaust shaft for $n = 1, l = 2, m = 2$; arrows indicate the direction of the air velocity in the plane (x, y)

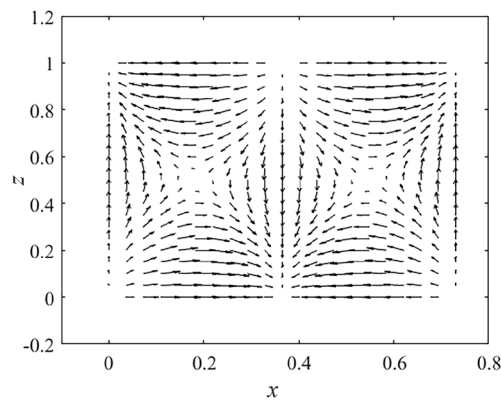


Рис. 4. Параметры для ячеек Рэлея – Бенара те же, что и на рис. 3; стрелками обозначено направление скорости воздуха в плоскости (x, z)

Fig. 4. The parameters for the Rayleigh – Benard cells are the same as in Fig. 3; the arrows indicate the direction of the air velocity in the plane (x, z)

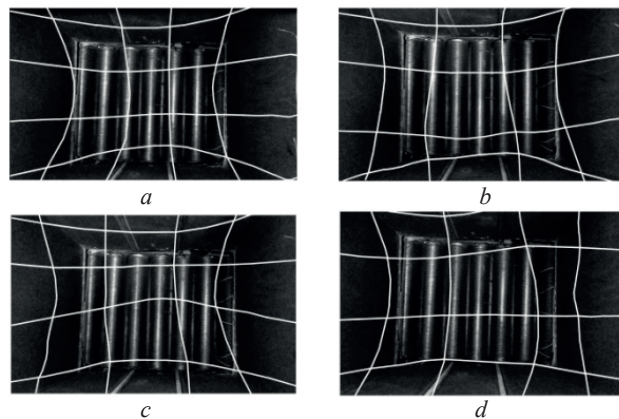


Рис. 5. Квазипериодические структуры воздушных потоков в шахте. Время съемок: 4-я (a), 13-я (b), 17-я (c), 20-я (d) секунды от начала наблюдения (для лучшей видимости нити утолщены и выделены белым цветом)

Fig. 5. Quasiperiodic structures of air flows in the shaft. Shooting time: 4th (a), 13th (b), 17th (c), 20th (d) seconds from the start of observation (for the better visibility, the threads are thickened and highlighted in white)

продемонстрировано положение нитей в различные моменты времени для подведенной мощности 90 Вт. По направлению деформации нитей можно судить о направлении воздушных потоков в шахте. Так, на рис. 5, *a* отчетливо видно, что холодный воздух задувается в шахту с четырех сторон возле стенок, однако потоки возле боковых поверхностей шахты гораздо интенсивнее, чем возле передней и задней стенок. На рис. 5, *b* деформация сетки видна в центре, на рис. 5, *c* наблюдается задувание потока воздуха ближе к правой боковой поверхности шахты, причем на крайней левой нити заметны волны. На рис. 5, *d* показан задув воздуха в центре справа, также хорошо заметны волны на крайней правой нити, свидетельствующие о наличии близко расположенных противоположных по направлению воздушных потоков в шахте.

Если нити находятся на небольшой высоте над пучком шахты, то амплитуда колебаний резко снижается. Видимо, в непосредственной близости от поверхности нагрева идет перестройка температурного поля от неоднородного распределения с максимумами в межреберном пространстве к равномерному нагреву по мере удаления от пучка.

Течение воздуха в шахте является более сложным по сравнению с предсказаниями конвективной модели Рэлея – Бенара. Это обусловлено в первую очередь неравномерным подогревом воздуха оребренным пучком труб. Воздух засасывается в шахту снизу, проходя расстояние между четырьмя рядами труб и образуя ряд вторичных тепловых источников на входе в шахту, име-

ющих ненулевую начальную скорость. Конвекция Рэлея – Бенара для плоского горизонтального слоя жидкости с проницаемыми границами рассматривалась в [27], где было показано, что наличие ненулевой средней скорости жидкости приводит к значительному росту критического числа Рэлея и повышению устойчивости ее течения. Также являются идеализированными условия исчезновения на границах флуктуаций температуры и скорости, не учитывается конечная теплопроводность стенок шахты. Тем не менее при достижении режима конвективной неустойчивости теплопроводный режим переноса тепла нарушается, появляется конвективная составляющая теплового потока и происходит интенсификация процесса теплообмена [3]. Распад воздушных потоков на квазипериодические структуры и движение в противоположном направлении соседних слоев воздуха приводят к росту скорости передачи теплоты. Увеличение теплоотдачи воздуха в рамках конвекции Рэлея – Бенара может найти применение в теплообменных аппаратах, использующих для охлаждения теплоносителей атмосферный воздух.

Заключение. Рассмотрены разнонаправленные течения воздуха в вытяжной шахте над горизонтальным четырехрядным оребренным пучком на основе задачи Рэлея. С использованием рамки с легкими нитями зафиксировано возникновение квазипериодических воздушных структур в шахте над оребренным пучком. Предложена модель для описания течения воздуха внутри шахты на основе линеаризованных уравнений для термогравитационной конвекции с идеализированными граничными условиями. Данная модель позволяет интерпретировать гейзерные течения воздуха в шахте как трехмерные конвективные ячейки Рэлея – Бенара. Представлено решение уравнений термогравитационной конвекции в виде рядов Фурье, коэффициенты которых находятся с программой Matlab. Рассчитаны критические числа Рэлея для двумерного и трехмерного случаев и проведено сравнение с экспериментальными числами Рэлея.

Список использованных источников

1. Bénard, H. Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquid / H. Bénard // *Rev. Gen. Sci. Pure Appl.* – 1900. – Vol. 11. – P. 1261–1271, 1309–1328.
2. Rayleigh, L. On convective currents in a horizontal layer of fluid when the higher temperature is on the under side / L. Rayleigh // *London, Edinburgh, and Dublin Phil. Mag and J. Sci.* – 1916. – Vol. 32, № 192. – P. 529–546.
3. Гершуни, Г. З. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости / Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий. – М.: Наука, 1972. – 392 с.
4. Graham, A. Shear patterns in an unstable layer of air / A. Graham // *Phil. Trans. Roy. Soc. A.* – 1933. – Vol. 232, № 707–720. – P. 285–296. <https://doi.org/10.1098/rsta.1934.0008>
5. Tippelskirch, H. V. Über Konvektionzellen, insbesondere im flüssigen Schwefel / H. V. Tippelskirch // *Beitr. Phys. Atmos.* – 1956. – Bd. 29. – P. 37–54.
6. Block, M. J. Surface tension as the cause of Bénard cells and surface deformation in a liquid film / M. J. Block // *Nature.* – 1956. – Vol. 178, № 4534. – P. 650–651. <https://doi.org/10.1038/178650a0>
7. Ландау, Л. Д. Гидродинамика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – 3 изд. – М.: Наука, 1986. – 736 с.
8. Гетлинг, А. В. Формирование пространственных структур конвекции Рэлея – Бенара / А. В. Гетлинг // *Успехи физ. наук.* – 1991. – Т. 161, № 9. – С. 1–80.
9. Manneville, P. A two-dimensional model for three-dimensional convective patterns in wide containers / P. Manneville // *J. de Phys. Fr.* – 1983. – Vol. 44, № 7. – P. 759–765. <https://doi.org/10.1051/jphys:01983004407075900>
10. Finlayson, B. A. The Galerkin method applied to convective instability problems / B. A. Finlayson // *J. Fluid Mech.* – 1968. – Vol. 33, № 1. – P. 201–208. <https://doi.org/10.1017/s0022112068002454>
11. Палымский, И. Б. Численное моделирование сложных режимов конвекции Рэлея – Бенара: дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.02.05 / И. Б. Палымский. – Пермь, 2012. – 206 л.
12. Pandey, A. Turbulent superstructures in Rayleigh-Bénard convection / A. Pandey, J. D. Scheel, J. Schumacher // *Nature Commun.* – 2018. – Vol. 9, № 1. <https://doi.org/10.1038/s41467-018-04478-0>
13. Когерентные структуры в турбулентной атмосфере. Эксперимент и теория / В. В. Носов [и др.] // *Солнечно-земная физика.* – 2009. – Вып. 14. – С. 97–113.
14. Шмерлин, Б. Я. Конвективная неустойчивость Рэлея в присутствии фазовых переходов влаги. Формирование крупномасштабных вихрей и облачных структур / Б. Я. Шмерлин, М. В. Калашник // *Успехи физ. наук.* – 2013. – Т. 183, № 5. – С. 497–510. <https://doi.org/10.3367/ufnr.0183.201305d.0497>
15. Аржаник, А. Р. Постановка демонстраций ячеек Бенара и вихрей Тейлора / А. Р. Аржаник, Ю. П. Михайличенко, Р. Н. Сотириади // *Физ. образование в вузах.* – 2000. – Т. 6, № 4. – С. 60–67.
16. Трапезников, Д. Е. К вопросу о происхождении столбчатой отдельности в базальтах и ее аналогов / Д. Е. Трапезников, А. С. Сунцов, Т. М. Рыбальченко // *Вестн. Перм. ун-та. Геология.* – 2012. – Вып. 2 (15). – С. 8–15.
17. Теплообмен в классическом методе Чохральского / В. С. Бердников [и др.] // *ИФЖ.* – 2001. – Т. 74, № 4. – С. 122–127.

18. Travis, B. The transition from two-dimensional to three dimensional planforms in infinite-Prandtl-number thermal convection / B. Travis, P. Olson, G. Schubert // *J. Fluid. Mech.* – 1990. – Vol. 216. – P. 71–91. <https://doi.org/10.1017/s0022112090000349>
19. Физика океана / В. В. Богородский [и др.]. – Л.: Гидрометеиздат, 1978. – 294 с.
20. Николис, Г. Самоорганизация в неравновесных системах / Г. Николис, И. М. Пригожин. – М.: Мир, 1979. – 512 с.
21. Мильман, О. О. Экспериментальное исследование теплообмена при естественной циркуляции воздуха в модели воздушного конденсатора с вытяжной шахтой / О. О. Мильман // *Теплоэнергетика.* – 2005. – № 5. – С. 16–19.
22. Сухоцкий, А. Б. Особенности гравитационного течения нагретого воздуха в вытяжной шахте над многорядным оребренным пучком / А. Б. Сухоцкий, Г. С. Маршалова // *ИФЖ.* – 2019. – Т. 92, № 3. – С. 1–7.
23. Davis, S. H. Convection in a box: linear theory / S. H. Davis // *J. Fluid Mech.* – 1967. – Vol. 30, № 3. – P. 465–478. <https://doi.org/10.1017/s0022112067001545>
24. Stork, K. Convection in boxes: experiments / K. Stork, U. Müller // *J. Fluid Mech.* – Vol. 54, № 4. – P. 599–611. <https://doi.org/10.1017/s0022112072000898>
25. Chandrasekhar, S. *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability* / S. Chandrasekhar. – Oxford at the Clarendon Press, 1961. – 654 p.
26. Палымский, И. Б. О моделировании сложных режимов конвекции Рэлея – Бенара / И. Б. Палымский // *Сиб. журн. вычисл. математики.* – 2011. – Т. 14, № 2. – С. 179–204.
27. Шварцблат, Д. Л. О спектре возмущений и конвективной неустойчивости плоского горизонтального слоя жидкости с проницаемыми границами / Д. Л. Шварцблат // *Приклад. математика и механика.* – 1968. – Вып. 2. – С. 276–281.

References

1. Bénard H. Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide. *Revue Générale des Sciences Pures et Appliquées*, 1900, vol. 11, pp. 1261–1271, 1309–1328.
2. Rayleigh L. On convective currents in a horizontal layer of fluid when the higher temperature is on the under side. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 1916, vol. 32, no. 192, pp. 529–546.
3. Gershuni G. Z., Zhuhovickij E. M. *Convective Stability of an Incompressible Fluid*. Moscow, Nauka Publ., 1972. 392 p. (in Russian).
4. Graham A. Shear patterns in an unstable layer of air. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, 1933, vol. 232, no. 707–720, pp. 285–296. <https://doi.org/10.1098/rsta.1934.0008>
5. Tippelskirch H. V. Über Konvektionzellen, insbesondere im flüssigen Schwefel. *Beiträge zur Physik der Atmosphäre*, 1956, Bd. 29, pp. 37–54 (in German).
6. Block M. J. Surface tension as the cause of Bénard cells and surface deformation in a liquid film. *Nature*, 1956, vol. 178, no. 4534, pp. 650–651. <https://doi.org/10.1038/178650a0>
7. Landau L. D., Livshic E. M. *Hydrodynamics*, 3d ed. Moscow, Nauka Publ., 1986. 736 p. (in Russian).
8. Getling A. V. Formation of spatial structures in Rayleigh–Bénard convection. *Soviet Physics Uspekhi*, 1991, vol. 34, no. 9, pp. 737–776. <https://doi.org/10.1070/pu1991v034n09abeh002470>
9. Manneville P. A two-dimensional model for three-dimensional convective patterns in wide containers. *Journal de Physique France*, 1983, vol. 44, no. 7, pp. 759–765. <https://doi.org/10.1051/jphys:01983004407075900>
10. Finlayson B. A. The Galerkin method applied to convective instability problems. *Journal of Fluid Mechanics*, 1968, vol. 33, no. 1, pp. 201–208. <https://doi.org/10.1017/s0022112068002454>
11. Palymskiy I. B. *Numerical modeling of complex Releigh–Bénard convections regimes*. Permian, 2012. 206 p. (in Russian).
12. Pandey A., Scheel J. D., Schumacher J. Turbulent superstructures in Rayleigh–Bénard convection. *Nature Communications*, 2018, vol. 9, no. 1. <https://doi.org/10.1038/s41467-018-04478-0>
13. Nosov V. V., Grigor'ev V. M., Kovadlo P. G., Lukin V. P., Nosov E. V., Torgaev E. V. Coherent structures in a turbulent atmosphere. Experiment and theory. *Solnechno-zemnaya fizika = Solar-Terrestrial Physics*, 2009, iss. 14, pp. 97–113.
14. Shmerlin B. Ja., Kalashnik M. V. Rayleigh convective instability in the presence of phase transitions of water vapor. The formation of large-scale eddies and cloud structures. *Physics-Uspekhi*, 2013, vol. 56, no. 5, pp. 473–485. <https://doi.org/10.3367/ufne.0183.201305d.0497>
15. Arzhanik A. R., Mihajlichenko Ju. P., Sotoriadi R. N. Staging demonstrations of Benard cells and Taylor vortices. *Fizicheskoe obrazovanie v vuzah = Physics in Higher Education*, 2000, vol. 6, no. 4, pp. 60–67 (in Russian).
16. Trapeznikov D. E., Suncov A. S., Rybal'chenko T. M. On the origin of columnar separation in basalts and its analogues. *Vestnik Permskogo universiteta. Geologiya = Bulletin of Perm University. Geology*, 2012, iss. 2 (15), pp. 8–15 (in Russian).
17. Berdnikov V. S., Vinokurov V. V., Panchenko V. I., Solov'ev S. V. Heat transfer in the classical Czochralski method. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2001, vol. 74, no. 4, pp. 1007–1014. <https://doi.org/10.1023/a:1012375827219>
18. Travis B., Olson P., Schubert G. The transition from two-dimensional to threedimensional planforms in infinite-Prandtl-number thermal convection. *Journal of Fluid Mechanics*, 1990, vol. 216, pp. 71–91. <https://doi.org/10.1017/s0022112090000349>
19. Bogorodskii V. V., Gusev A. V., Doronin Yu. P. [et al.] *Ocean Physics*. Leningrad, Gidrometeoizdat Publ., 1978. 294 p. (in Russian).
20. Nicolis G., Prigozhin I. *Self-organization in Nonequilibrium Systems*. Moscow, Mir Publ., 1979. 512 p. (in Russian).

21. Mil'man O. O. An experimental study of heat transfer during natural air circulation in an air condenser model with an exhaust shaft. *Teploenergetika = Thermal Engineering*, 2005, no. 5, pp. 16–19 (in Russian).
22. Suhockii A. B., Marshalova G. S. Features of the gravitational flow of heated air in an exhaust shaft above a multi-row finned beam. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2019, vol. 92, no. 3, pp. 596–602. <https://doi.org/10.1007/s10891-019-01967-x>
23. Davis S. H. Convection in a box: linear theory. *Journal of Fluid Mechanics*, 1967, vol. 30, no. 3, pp. 465–478. <https://doi.org/10.1017/s0022112067001545>
24. Stork K., Müller U. Convection in boxes: experiments. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 54, no. 4, pp. 599–611. <https://doi.org/10.1017/s0022112072000898>
25. Chandrasekhar S. *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Oxford at the Clarendon Press, 1961. 654 p.
26. Palymskii I. B. Modeling complex Rayleigh-Benard convection regimes. *Sibirskii zhurnal vychislitelnoi matematiki = Siberian Journal of Numerical Mathematics*, 2011, vol. 14, no. 2, pp. 179–204 (in Russian).
27. Shvartsblat D. L. On the spectrum of perturbations and convective instability of a plane horizontal layer of a liquid with permeable boundaries. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1968, vol. 32, no. 2, pp. 266–271. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(68\)90127-5](https://doi.org/10.1016/0021-8928(68)90127-5)

Информация об авторах

Карлович Татьяна Борисовна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры энергосбережения, гидравлики и теплотехники, Белорусский государственный технологический университет (ул. Свердлова, 13а, 220006, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: tbkar@mail.ru

Сухоцкий Альберт Борисович – кандидат технических наук, доцент кафедры энергосбережения, гидравлики и теплотехники, Белорусский государственный технологический университет (ул. Свердлова, 13а, 220006, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: alk2905@mail.ru

Данильчик Екатерина Сергеевна – аспирант, Белорусский государственный технологический университет (ул. Свердлова, 13а, 220006, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: katya.156.156@gmail.com

Information about the authors

Tatyana B. Karlovich – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor of the Department of Energy-Saving, Hydraulics and Heat Engineering, Belarusian State Technological University (13a, Sverdlov Str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: tbkar@mail.ru

Albert B. Sukhotskii – Ph. D. (Engineering), Associate Professor of the Department of Energy-Saving, Hydraulics and Heat Engineering, Belarusian State Technological University (13a, Sverdlov Str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: alk2905@mail.ru

Ekaterina S. Danilchik – Postgraduate Student, Belarusian State Technological University (13a, Sverdlov Str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: katya.156.156@gmail.com

ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)

УЧЕНЫЕ БЕЛАРУСИ
SCIENTISTS OF BELARUS

ЛЕВ МИТРОФАНОВИЧ ТОМИЛЬЧИК

(К 90-летию со дня рождения)

1 апреля 2021 г. исполнилось 90 лет со дня рождения известного белорусского физика-теоретика, члена-корреспондента НАН Беларуси, доктора физико-математических наук, профессора Льва Митрофановича Томильчика.

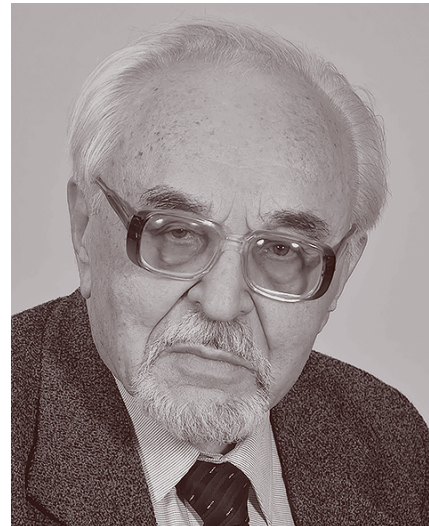
Лев Митрофанович родился в г. Минске. В 1949 г. после окончания средней школы поступил в Белорусский государственный университет на физико-математический факультет (отделение физики). В 1954 г. получил университетский диплом с отличием и продолжил учебу в аспирантуре БГУ на кафедре теоретической физики под руководством Ф. И. Федорова. Выполненные молодым исследователем работы по оптике магнитных кристаллов легли в основу его кандидатской диссертации «Электромагнитные волны в проводящих магнитных анизотропных средах». Л. М. Томильчик построил феноменологическую теорию распространения электромагнитных волн в неограниченных средах, обладающих произвольной анизотропией диэлектрических, магнитных и поглощающих свойств. На ее базе была впервые дана исчерпывающая классификация поглощающих магнитных кристаллов по их оптическим свойствам.

В 1957 г. Л. М. Томильчик стал сотрудником Института физики АН БССР. С тех пор научная судьба ученого неразрывно связана с Институтом, где он возглавлял лабораторию теоретической физики, а также был главным научным сотрудником центра «Фундаментальные взаимодействия и астрофизика». После защиты кандидатской диссертации Лев Митрофанович кардинально изменил тематику исследований. Его увлекла не очень популярная в то время проблема магнитного монополя. И уже в 1963 г. вышла в свет его работа о несовместимости гипотезы о существовании магнитного заряда с требованием инвариантности электродинамики относительно пространственных отражений. Это исследование положило начало созданию в Беларуси нового научного направления, а впоследствии и школы по весьма актуальной и разнообразной сегодня тематике, объединяемой термином «магнитный монополю».

Результаты первого этапа исследований в этом направлении были обобщены в фундаментальной монографии «Электродинамика с магнитным зарядом» (в соавторстве с В. И. Стражевым). Наряду с работами по теории магнитных монополей ученый получил серию интересных результатов по непрерывной дуальной симметрии уравнений электродинамики. К числу фундаментальных из них относятся следующие: критический анализ различных лагранжевых подходов в теории магнитного заряда; построение явного вида дуальных токов; расчет ряда модельных квантово-механических систем на фоне монопольных потенциалов; решение так называемой проблемы Липкина – Вайсберга – Пешкина и многие другие. Эти результаты были обобщены в докторской диссертации «Дуальная инвариантность и магнитный заряд в электродинамике», успешно защищенной ученым в 1979 г. Несомненным личным научным достижением Льва Митрофановича стало использование в 1971 г. для классификации адронных резонансов специфической алгебры, содержащей одновременно как коммутаторы, так и антикоммутаторы своих образующих, что, как стало ясно впоследствии, стало первым примером построения суперсимметричной алгебры.

Л. М. Томильчик с учениками разработал оригинальный способ геометрического описания классических и квантовых систем многих частиц с потенциалами, зависящими от скорости. Этот подход идейно связан с исследованиями запирающих эффектов конформно плоской метрики специального вида (так называемые системы с максимальным ускорением). Лев Митрофанович фактически был первым, кто геометризовал феноменологическую релятивистскую модель конфайнмента кварков, использующую так называемый лоренц-скалярный потенциал или координатную зависимость массы.

Среди новейших результатов ученого следует отметить эффективную геометризацию взаимодействия частиц на основе использования пространства отрицательной кривизны, что позволило, с одной стороны,



построить квантово-механическую модель дейтрона, которая точно воспроизводит современные экспериментальные данные, а с другой – успешно промоделировать электронные состояния в полупроводниковой квантовой точке. Несомненный интерес представляет также феноменологическая гамильтонова модель, в рамках которой дано описание характерных особенностей внутригалактических движений, и, в частности, достаточно точно аппроксимируется вид эмпирических ротационных кривых типичных спиральных галактик. За эти, а так же и другие работы Л. М. Томильчик был удостоен в 2014 г. премии им. Ф. И. Федорова Национальной академии наук Беларуси. В последние годы Л. М. Томильчик развивает ряд подходов для описания ускоренно расширяющейся Вселенной, основанных на использовании конформной симметрии. Ученый использует принцип взаимной инвариантности М. Борна для объяснения некоторых возможных эффектов в ранней Вселенной, развивает теоретико-групповые основы данного принципа.

Научная работа Льва Митрофановича тесно связана с педагогической деятельностью. Целое поколение белорусских физиков выросло на его прекрасных лекциях по квантовой механике и теории групп и физике элементарных частиц. На протяжении многих лет ученый читал лекции и для школьников в Национальном детском образовательно-оздоровительном центре «Зубренок», благодаря чему некоторые из его слушателей пришли в науку.

Около 35 лет Л. М. Томильчик работал в системе аттестации научных кадров в качестве члена Совета по защите диссертаций, а последние 20 лет возглавлял Совет по защите докторских диссертаций по теоретической физике, физике высоких энергий, физике атомного ядра и элементарных частиц при Институте физики НАН Беларуси. Им подготовлено 11 кандидатов наук, один из которых защитил докторскую диссертацию.

Л. М. Томильчик ведет большую научно-организационную работу не только в рамках Института физики. С момента образования Отделения физико-математических наук НАН Беларуси в 1963 г. в течение семи лет он работал ученым секретарем Отделения. Именно в этот период Лев Митрофанович начал исследования по истории и методологии науки. Совместно с В. С. Степиным им был проведен глубокий анализ процесса возникновения максвелловской электродинамики. Результаты этих работ (наряду с теми, которые вошли в написанную им совместно с В. С. Степиным книгу «Практическая природа познания и методологические проблемы современной физики» (1970), посвященную концептуальному анализу квантовой механики) легли в основу нового современного направления в истории и методологии науки. Впоследствии развитая схема возникновения нового теоретического знания была успешно применена к анализу становления квантовых и релятивистских представлений. Новый импульс этим исследованиям в конце 1980-х гг. придало взаимообогащающее сотрудничество ученого с белорусским физиком и историком науки академиком НАН Беларуси М. А. Ельяшевичем.

Существенный вклад внесен Л. М. Томильчиком в понимание механизма принятия новых идей научным сообществом. Действительный характер предложенных критериев ассимиляции научного знания убедительно продемонстрирован им на многочисленных примерах становления физических концепций XX в.

Историко-методологические исследования, а также богатый опыт рецензирования самых различных работ, мимикрирующих «под науку», способствовали тому, что Лев Митрофанович одним из первых взглянул на проблему псевдонауки как на научно-методологическую проблему. Сегодня, на переломе тысячелетий, она выросла до общественного явления, изучаемого десятками исследователей во многих странах мира.

Говоря о научной деятельности Л. М. Томильчика, нельзя не упомянуть и о его публицистическом таланте, который проявился в многочисленных публикациях и выступлениях в масс-медиа, посвященных пропаганде науки и ее защите от поспешных реформ «на злобу дня».

Оригинальность мысли, юношеская увлеченность разрабатываемыми проблемами, мягкость в общении с коллегами и тонкое чувство юмора являются неотъемлемыми чертами Льва Митрофановича. Его уважают и ценят как в коллективе Института физики, так и далеко за его пределами.

В эти юбилейные дни Президиум НАН Беларуси наградил члена-корреспондента Льва Митрофановича Томильчика медалью В. М. Игнатовского за значительный вклад в развитие науки в области теоретической физики и методологии науки, многолетнюю плодотворную научно-организационную деятельность и подготовку научных кадров.

Искренне поздравляем Льва Митрофановича с юбилеем, желаем доброго здоровья, благополучия и осуществления творческих замыслов.

*Отделение физики, математики и информатики НАН Беларуси,
Институт физики имени Б. И. Степанова НАН Беларуси,
Белорусское физическое общество,
редколлегия журнала «Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі.
Серія фізіка-матэматычных навук»*