

ВЕСЦІ

НАЦЫЯНАЛЬНАЯ АКАДЭМІЯ НАВУК БЕЛАРУСІ

СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК 2014 № 3

ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ

СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК 2014 № 3

ЗАСНАВАЛЬНІК – НАЦЫЯНАЛЬНАЯ АКАДЭМІЯ НАВУК БЕЛАРУСІ

Часопіс выдаецца са студзеня 1956 г.

Выходзіць чатыры разы ў год

ЗМЕСТ

МАТЭМАТЫКА

Гайшун І. В., Горячкин В. В., Крахотко В. В. Оценка решений двухпараметрической дискретной системы с интервальными коэффициентами	5
Расолько Г. А. К приближенному решению интегрального уравнения первого рода с мультипликативным ядром Коши методом ортогональных многочленов	9
Русак В. Н., Рыбаченко И. В. Косинус-дробь Чебышева – Маркова в приближенном интегрировании	15
Деменчук А. К. Управление асинхронным спектром линейных систем с правым блоком неполного ранга	21
Бондаренко А. А. Бирациональная композиция квадратичных форм над полем функций	28
Ровба Е. А., Дирвук Е. В. Рациональная квази-интерполяция Эрмита – Фейера	33
Авдашкова Л. П., Каморников С. Ф., Шеметкова О. Л. Об одном свойстве подгрупп фраттиниера типа	38
Бухтояров С. Е., Емеличев В. А. Устойчивость инвестиционной задачи Марковица с критериями крайнего оптимизма	44
Жук Е. Е. Статистическое соотнесение случайных выборок с заданным вероятностным распределением методом максимума правдоподобия	49
Васильев Д. В., Кудин А. С. О выборе полиномов для алгоритма решета числового поля	54

ФІЗІКА

Рябушко А. П., Жур Т. А., Боярина И. П., Зубко О. Л., Юринок В. И. Точки фотолибрации в небесной механике	60
Сафонова А. Т. Разрешимые случаи для упрощенных систем в задаче движения четырех тел в плоскости	68

Плетюхов В. А. О совместном описании безмассовых полей со спинами 0 и 1	77
Гончаренко А. М. О распространении оптических солитонов в анизотропных средах	84
Кулак Г. В., Крох Г. В., Николаенко Т. В., Ропот П. И., Шакин О. В. Преобразование двумерных квази- бездифракционных световых пучков при акустооптическом взаимодействии в одноосных кристаллах	86
Поклонский Н. А., Вырко С. А., Ковалев А. И. Стационарная прыжковая миграция биполяронов по «мягким» точечным дефектам в частично разупорядоченных полупроводниках	91
Коршунов Ф. П., Жданович Н. Е., Гуринович В. А. Отрицательная высокочастотная емкость облучен- ных электронами <i>p-n</i> -переходов в режиме лавинного пробоя	97
Точицкий Т. А., Дмитриева А. Э. Влияние текстуры медной подложки на формирование структуры тон- ких электролитических пленок никеля	102
Ануфрик С. С., Володенков А. П., Зноско К. Ф. Оптимизация генерационных характеристик макета XeCl-лазера для абляционной обработки зубной ткани	107
Дегтярь Н. Ф., Незальзова Е. И., Роговая М. В., Сеницын Г. В., Скорбанова Е. А., Ходасевич М. А. Ис- пользование методов спектроскопии УФ-, видимого и ближнего ИК-диапазонов для определения оригиналь- ности выдержанных винных дистиллятов	113

КАРОТКІЯ ПАВЕДАМЛЕННІ

Гусакова А. Г. Неулучшаемость теоремы Дирихле о приближении действительных чисел рациональными	118
---	-----

ВУЧОНЫЯ БЕЛАРУСІ

Павел Андреевич Апанасевич (К 85-летию со дня рождения)	122
--	-----

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ 2014 № 3

Серия физико-математических наук

На русском и белорусском языках

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь,
свидетельство о регистрации № 392 от 18.05.2009

Компьютерная верстка *Н. И. Кашубы, В. Л. Смольской*

Здадзена ў набор 08.08.2014. Падпісана да друку 17.09.2014. Выхад у свет 29.09.2014. Фармат 60×84¹/₈. Папера афсетная.

Друк лічбавы. Ум. друк. арк. 14,88. Ул.-выд. арк. 16,4. Тыраж 68 экз. Заказ 157.

Кошт нумару: індывідуальная падпіска – 58 650 руб.; ведамасная падпіска – 141 919 руб.

Выдавец і паліграфічнае выкананне:

Рэспубліканскае ўнітарнае прадпрыемства «Выдавецкі дом «Беларуская навука». Пасведчанне аб дзяржаўнай
рэгістрацыі выдаўца, вытворцы, распаўсюджвальніка друкаваных выданняў № 1/18 ад 02.08.2013.

ЛП 02330/455 ад 30.12.2013. Вул. Ф. Скарыны, 40, 220141, г. Мінск.

© Выдавецкі дом «Беларуская навука».

Весці НАН Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук, 2014

PROCEEDINGS OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF BELARUS

PHYSIC AND MATHEMATICS SERIES 2014 N 3

FOUNDED IS THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF BELARUS

The Journal has been published since January 1956

Issued four times a year

CONTENTS

MATHEMATICS

Gaishun I. V., Goryachkin V. V., Krakhotko V. V. Estimates of solutions of two-parameter discrete systems with interval coefficients	5
Rasolko G. A. Approximate solution of an integral first-kind equation with the multiplicative Cauchy kernel by the method of orthogonal polynomials	9
Rusak V. N., Rybachenko I. V. Chebyshev-Markov's cosine-fractions in the approximate integration	15
Demenchuk A. K. Control problem of the asynchronous spectrum of linear systems with a right block of imperfect rank	21
Bondarenko A. A. Birational composition of quadratic forms over a function field	28
Rovba Y. A., Dirvuk Y. V. Rational quasi-interpolation Hermite – Fejer	33
Avdashkova L. P., Kamornikov S. F., Shemetkova O. L. On a property of Frattini-like subgroups	38
Bukhtoyarov S. E., Emelichev V. A. Stability of the Markowitz investment problem with extreme optimism criteria	44
Zhuk E. E. Statistical assignment of random samples with a fixed probability distribution by the maximum likelihood method	49
Vasilyev D. V., Kudin A. S. On the choice of polynomials for the number field sieve	54

PHYSICS

Ryabushko A. P., Zhur T. A., Boyarina I. R., Zubko O. L., Yurinok V. I. Photolibration points in celestial mechanics	60
Sazonova A. T. Solvable cases for the simplified systems in the problem of the motion of four bodies in the plane	68
Pletyukhov V. A. On simultaneous description of massless fields with spins 0 and 1	77
Goncharenko A. M. Propagation of optical solitons in anisotropic media	84
Kulak G. V., Krokh G. V., Nikolaenko T. V., Ropot P. I., Shakin O. V. Two-dimensional nearly absent-diffracted light beam transformation under acoustooptical interaction in uniaxial crystals	86
Poklonski N. A., Vyrko S. A., Kovalev A. I. Stationary hopping migration of bipolarons via “soft” point defects in partly disordered semiconductors	91
Korshunov F. P., Jdanovich N. E., Gurinovich V. A. Negative high-frequency capacitance of electron-irradiated p - n -transitions in the avalanche breakdown mode	97
Tochitskii T. A., Dmitrieva A. E. Copper substrate influence on the structure formation of thin electrolytic nickel films	102

Anufrik S. S., Volodenkov A. P., Znosko K. F. Optimization of generation characteristics of the XeCl laser prototype for ablation treatment of dental tissue	107
Degtyar N. F., Nezalzova E. I., Rogovaya M. V., Sinitsyn G. V., Skorbanova E. A., Khodasevich M. A. Identification of the authenticity of matured wine distillates by the UV-, visible and near IR-spectroscopy methods	113
SHORT COMMUNICATIONS	
Gusakova A. G. About unimprovable of Dirichlet's theorem on the approximation of real numbers by rational	118
SCIENTISTS OF BELARUS	
Pavel Andreevich Apanasevich (To the 85 th Anniversary of Birthday)	122

МАТЭМАТЫКА

УДК 517.977

И. В. ГАЙШУН¹, В. В. ГОРЯЧКИН², В. В. КРАХОТКО²

**ОЦЕНКА РЕШЕНИЙ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ
С ИНТЕРВАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ**

¹*Институт математики НАН Беларуси*

²*Белорусский государственный университет*

(Поступила в редакцию 11.07.2014)

Введение. Многомерные дискретные системы находят широкое применение в различных разделах науки и техники (см., напр. [1–4]). Ряд теоретических результатов, относящихся к таким системам, изложен в монографии [4]. Предлагаемая статья посвящена многомерным дискретным системам, у которых коэффициенты точно неизвестны и могут изменяться произвольным образом в некоторых интервалах.

В работе приняты следующие обозначения. Если A – матрица с действительными элементами a_{ij} , то запись $A \geq 0$ ($A > 0$, $A \leq 0$, $A < 0$) означает, что $a_{ij} \geq 0$ ($a_{ij} > 0$, $a_{ij} \leq 0$, $a_{ij} < 0$); $|A|$ – это матрица с элементами $|a_{ij}|$.

1. Многомерные дискретные системы с неопределенными коэффициентами. Пусть A_0 , D_0 , B_0 – фиксированные матрицы с действительными элементами размеров $n \times n$, $n \times n$, $n \times m$; ΔA , ΔD , ΔB – заданные неотрицательные матрицы таких же размеров. Рассматриваются многомерные дискретные системы

$$x(t+1, s) = Ax(t, s+1) + Dx(t, s) + Bu(t, s), \quad (1)$$

коэффициенты которых неизвестны и удовлетворяют неравенствам

$$|A - A_0| \leq \Delta A, |D - D_0| \leq \Delta D, |B - B_0| \leq \Delta B. \quad (2)$$

Независимые переменные t и s изменяются в множестве \mathbf{Z}_+ – положительных целых чисел и в множестве \mathbf{Z} целых чисел соответственно. Функция $u: \mathbf{Z}_+ \times \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{R}^m$ трактуется как управление, принимающее значения в множестве $U \subset \mathbf{R}^m$.

При любом начальном условии $x(0, s) = \alpha(s)$ и при фиксированных матрицах A , D , B и фиксированном управлении $u(t, s)$ система (1) имеет единственное решение, которое определяется следующим образом [5]:

$$x(t, s) = \sum_{j=0}^t G(t, j)\alpha(s+j) + \sum_{i=0}^{t-1} \sum_{j=0}^{t-i-1} G(t-i-1, j)Bu(i, s+j), \quad (3)$$

где матрицы $G(i, j)$ находятся из рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned} G(i+1, j) &= AG(i, j-1) + DG(i, j), \\ G(0, 0) &= E, G(i, j) = 0 \quad (j < 0 \text{ или } i < j). \end{aligned} \quad (4)$$

Далее предполагается, что начальное условие $\alpha(s)$ может изменяться согласно неравенству

$$|\alpha(s) - \alpha_0(s)| \leq \Delta\alpha(s), \quad (5)$$

где $\alpha_0(s)$ и $\Delta\alpha(s)$ – известные n -вектор функции, при этом $\Delta\alpha(s)$ – вектор с неотрицательными компонентами.

Выберем какое-либо управление $u = u(t, s)$. Совокупность всех решений системы (1), когда матрицы A, D, B независимо пробегает неравенства (2), а функция $\alpha(s)$ – неравенство (5), обозначим через $X(t, s, u)$ и назовем пучком решений. Сечением в точке $(\tau, \sigma) \in \mathbf{Z}_+ \times \mathbf{Z}$ этого пучка назовем множество $X(\tau, \sigma, u) \subset \mathbf{R}^n$, полученное из семейства $X(t, s, u)$ при $t = \tau, s = \sigma$.

2. Оценка сечения пучка решений. Пусть $X(\tau, \sigma, u)$ – сечение пучка решений. Рассмотрим задачу построения параллелепипеда $P(u) \subset \mathbf{R}^n$ с ребрами, параллельными координатным осям, содержащего множество $X(\tau, \sigma, u)$. Для решения этой задачи нам потребуется ряд вспомогательных утверждений.

Обозначим через $G_0(i, j), G_{|0|}(i, j), \hat{G}(i, j)$ матрицы, полученные при $A = A_0, D = D_0; A = |A_0|, D = |D_0|; A = |A_0| + \Delta A, D = |D_0| + \Delta D$.

Л е м м а 1. Для любых матриц A, D , удовлетворяющих неравенствам (2), справедливы оценки

$$\begin{aligned} |G(i, j) - G_0(i, j)| &\leq \hat{G}(i, j) - G_{|0|}(i, j); \\ |G(i, j)| - \hat{G}(i, j) &\leq 0; \end{aligned}$$

кроме того,

$$|G_0(i, j)| - G_{|0|}(i, j) \leq 0 \quad (6)$$

$$(i = 0, 1, 2, \dots, j = 0, 1, 2, \dots).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем неравенства (6). Для этого воспользуемся математической индукцией по индексу i . Очевидно, при $i = 0$ это неравенство выполняется. Предположим, что оно выполняется при некотором i и проверим его для $i + 1$. Но это действительно так, поскольку

$$|G_0(i + 1, j)| - G_{|0|}(i + 1, j) \leq |A_0|(|G_0(i, j - 1)| - G_{|0|}(i, j - 1)) + |D_0|(|G_0(i, j)| - G_{|0|}(i, j)) \leq 0.$$

Остальные неравенства, фигурирующие в лемме, доказываются аналогично.

Очевидно, $\Delta G(i, j) = \hat{G}(i, j) - G_{|0|}(i, j) \geq 0$, поэтому из леммы 1 следует, что $|G(i, j) - G_0(i, j)| \leq \Delta G(i, j)$.

Л е м м а 2. Для любых матриц A, D, B , удовлетворяющих неравенствам (2), имеет место неравенство

$$|G(i, j)B - G_0(i, j)B_0| \leq (|G_0(i, j)| + \Delta G(i, j))\Delta B + \Delta G(i, j)|B_0|.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о вытекает из следующих соотношений:

$$\begin{aligned} |G(i, j)B - G_0(i, j)B_0| &= |G(i, j)B - G_0(i, j)B + G_0(i, j)B - G_0(i, j)B_0| \leq \\ &\leq \Delta G(i, j)|B| + |G_0(i, j)|\Delta B \leq (|G_0(i, j)| + \Delta G(i, j))\Delta B + \Delta G(i, j)|B_0|. \end{aligned}$$

Фиксируем числа τ, σ и введем в рассмотрение вектор-столбцы

$$\alpha = (\alpha(\sigma), \alpha(\sigma + 1), \dots, \alpha(\sigma + \tau)), \alpha_0 = (\alpha_0(\sigma), \alpha_0(\sigma + 1), \dots, \alpha_0(\sigma + \tau)),$$

$$\Delta \alpha = (\Delta \alpha(\sigma), \Delta \alpha(\sigma + 1), \dots, \Delta \alpha(\sigma + \tau)),$$

$$u = (u(0, \sigma), \dots, u(0, \sigma + \tau - 1), u(1, \sigma), \dots, u(\tau - 1, \sigma))$$

и матрицы

$$L = (G(\tau, 0), G(\tau, 1), \dots, G(\tau, \tau)), L_0 = (G_0(\tau, 0), G_0(\tau, 1), \dots, G_0(\tau, \tau)),$$

$$M = (G(\tau - 1, 0)B, \dots, G(\tau - 1, \tau - 1)B, G(\tau - 2, 0)B, \dots, G(0, 0)B),$$

$$M_0 = (G_0(\tau - 1, 0)B_0, \dots, G_0(\tau - 1, \tau - 1)B_0, G_0(\tau - 2, 0)B_0, \dots, G_0(0, 0)B_0).$$

В силу лемм 1, 2 справедливы оценки

$$|L - L_0| \leq \Delta L, |M - M_0| \leq \Delta M,$$

где

$$\Delta L = (\Delta G(\tau, 0), \Delta G(\tau, 1), \dots, \Delta G(\tau, \tau)),$$

$$\begin{aligned} \Delta M = & (|G_0(\tau - 1, 0)| + \Delta G(\tau - 1, 0))\Delta B + \Delta G(\tau - 1, 0)|B_0|, \dots, \\ & (|G_0(\tau - 1, \tau - 1)| + \Delta G(\tau - 1, \tau - 1))\Delta B + \Delta G(\tau - 1, \tau - 1)|B_0|, \\ & (|G_0(\tau - 2, 0)| + \Delta G(\tau - 2, 0))\Delta B + \Delta G(\tau - 2, 0)|B_0|, \dots, (|G_0(0, 0)| + \Delta G(0, 0))\Delta B + \Delta G(0, 0)|B_0|. \end{aligned}$$

Кроме того, произвольный элемент $x(\tau, \sigma, u)$ сечения $X(\tau, \sigma, u)$ пучка решений может быть представлен в виде

$$x(\tau, \sigma, u) = L\alpha + Mu.$$

Оценим разность $|x(\tau, \sigma, u) - x_0(\tau, \sigma, u)|$, где $x_0(\tau, \sigma, u)$ – решение системы (1) при $A = A_0$, $D = D_0$, $B = B_0$, $\alpha(s) = \alpha_0(s)$.

Воспользовавшись леммой 2, получим

$$|x(\tau, \sigma, u) - x_0(\tau, \sigma, u)| \leq (|L_0| + \Delta L)\Delta\alpha + \Delta L|\alpha_0| + \Delta M|u|.$$

Это значит, что справедлива

Т е о р е м а. Сечение $X(\tau, \sigma, u)$ пучка решений $X(t, s, u)$ содержится в параллелепипеде

$$P(u) = \{x \in \mathbf{R}^n : |x - x_0(\tau, \sigma, u)| \leq g + \Delta M|u|\},$$

где $g = (|L_0| + \Delta L)\Delta\alpha + \Delta L|\alpha_0|$.

3. Задача терминального управления. Пусть задан многогранник

$$F = \{x \in \mathbf{R}^n : Kx \leq f\},$$

где $K - (q \times n)$ -матрица, $f - q$ -вектор-столбец.

Задача терминального управления заключается в следующем: выбрать такое управление $u^0 = u^0(t, s)$, при котором сечение $X(\tau, \sigma, u^0)$ в фиксированной точке (τ, σ) содержится в множестве F . Однако, как легко убедиться, сформулированная задача разрешима не всегда. Поэтому поставим задачу терминального управления несколько иначе.

Пусть $\varepsilon - q$ -вектор с неотрицательными координатами и $F_\varepsilon = \{x \in \mathbf{R}^n : Kx \leq f + \varepsilon\}$ – ε -окрестность множества F . Требуется указать такое управление $u^* = u^*(t, s)$, что $X(\tau, \sigma, u^*) \subset F_\varepsilon$ и сумма $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_q$ – минимальна. Минимальность суммы $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_q$ означает следующее: если для некоторого другого управления $\hat{u} = \hat{u}(t, s)$ справедливо включение $X(\tau, \sigma, \hat{u}) \subset F_\eta$, то $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_q < \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_q$.

Сформулированная задача попадания в минимальную окрестность множества F является достаточно сложной. Поэтому рассмотрим более простую задачу о включении параллелепипеда $P(u)$, построенного в предыдущем разделе, в минимальную окрестность F_ε . Ясно, что условие $P(u) \subset F_\varepsilon$ обеспечивает требование $X(\tau, \sigma, u) \subset F_\varepsilon$, т. е. разрешима задача терминального управления.

Используя результаты работ [6, 7], нетрудно прийти к выводу, что задача включения параллелепипеда $P(u)$ в множество F_ε эквивалентна задаче нелинейного программирования

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_q & \rightarrow \min, \\ KM_0u + |K|\Delta M|u| - \varepsilon & \leq f - KL_0\alpha_0 - |K|g = \xi, \\ \varepsilon & \geq 0, u \in U, \end{aligned} \tag{7}$$

где минимум берется по переменным u, ε .

В случае, когда U многогранник, следуя [7], введем в рассмотрение задачу линейного программирования

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_q & \rightarrow \min, \\ KM_0u + |K|\Delta Mw - \varepsilon & \leq \xi, \\ \varepsilon & \geq 0, |u| \leq w, u \in U, \end{aligned} \tag{8}$$

в которой минимизация проводится по переменным u, ε, w . Связь между задачами (7) и (8) описывается следующими утверждениями, доказанными в работе [7, с. 145].

1. Пусть P_1 и P_2 – множества планов задач (7) и (8). Тогда P_1 есть ортогональная проекция множества P_2 на подпространство переменных u, ε, w .

2. Оптимальный план u^*, ε^*, w^* задачи (8) существует, при этом пара u^*, ε^* является решением задачи (7).

Сформулированные утверждения дают конструктивный способ решения задачи терминального управления попадания в минимальную окрестность множества F .

Литература

1. Прэтт У. Цифровая обработка изображений: в 2 кн. М., 1982. Кн. 1.
2. Прэтт У. Цифровая обработка изображений: в 2 кн. М., 1982. Кн. 2.
3. Kaczorek T. Two-dimensional linear systems. Berlin, 1985.
4. Гайшун И. В. Многомерные системы управления. Минск, 1996.
5. Гайшун И. В., Горячкин В. В. // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1989. № 4. С. 3–8.
6. Ащепков Л. Т. // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1980. № 2. С. 510–513.
7. Ащепков Л. Т., Бадам У. Модели и методы повышения живучести управляемых систем. Владивосток, 2006.

I. V. GAISHUN, V. V. GORYACHKIN, V. V. KRAKHOTKO

ESTIMATES OF SOLUTIONS OF TWO-PARAMETER DISCRETE SYSTEMS WITH INTERVAL COEFFICIENTS

Summary

External evaluations of trajectories for a stationary two-parameter discrete system with interval coefficients were obtained, with the use of which a constructive method of management, resulting in a minimum set of solutions in a neighborhood of a given polyhedron, was proposed.

УДК 517.968

Г. А. РАСОЛЬКО

**К ПРИБЛИЖЕННОМУ РЕШЕНИЮ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ
 ПЕРВОГО РОДА С МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ ЯДРОМ КОШИ
 МЕТОДОМ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ**

Белорусский государственный университет

(Поступила в редакцию 06.06.2014)

1. В данной статье предлагаются алгоритмы приближенного решения сингулярного интегрального уравнения первого рода со специальной правой частью

$$\frac{1}{\pi^2} \iint_D \frac{\varphi(t, \tau)}{(t-x)(\tau-y)} dt d\tau = f(x, y) \ln \frac{1-x}{1+x} \ln \frac{1-y}{1+y}, \quad (x, y) \in D = (-1, 1) \times (-1, 1), \quad (1)$$

где $f(x, y)$ – заданная функция, непрерывная по Гельдеру в \bar{D} , φ – искомая функция в двух классах функций.

Уравнение применяется в аэроупругости [1]. Решение указанного уравнения зависит от класса функций, в котором оно разыскивается [2, 3].

Уточним определения классов функций по Мусхелишвили.

Мы говорим, что функция $\varphi(x, y) \in h(-1) \times h(-1)$, если она в любой замкнутой области из D , не содержащей граничных точек, принадлежит классу Гельдера, а вблизи граничных точек представима в виде $\varphi(x, y) = (x-1)^{\alpha_1} (y-1)^{\alpha_2} \varphi_0(x, y)$, где $\varphi_0(x, y) \in H$, $-1 < \alpha_1, \alpha_2 \leq 0$.

Функция $\varphi(x, y) \in h(1) \times h(1)$, если она в любой замкнутой области из D , не содержащей граничных точек, принадлежит классу Гельдера, а вблизи граничных точек представима в виде $\varphi(x, y) = (x+1)^{\alpha_1} (y+1)^{\alpha_2} \varphi_0(x, y)$, где $\varphi_0(x, y) \in H$, $-1 < \alpha_1, \alpha_2 \leq 0$.

2. Пусть решение уравнения (1) разыскивается в классе функций $\varphi(x, y) \in h(-1) \times h(-1)$, тогда оно имеет вид [3]

$$\varphi(x, y) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \sqrt{\frac{1+y}{1-y}} \frac{1}{\pi^2} \iint_D f(t, \tau) \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \sqrt{\frac{1-\tau}{1+\tau}} \ln \frac{1-t}{1+t} \ln \frac{1-\tau}{1+\tau} \frac{dt d\tau}{(t-x)(\tau-y)}. \quad (2)$$

Для построения приближенного решения уравнения (1) в заданном классе аппроксимируем функцию $f(x, y)$ интерполяционным многочленом $f_{n,m}(x, y)$, построенным по узлам – нулям многочлена Чебышева первого рода.

Приближенное решение $\varphi_{n,m}(x, y)$ уравнения (1) найдем как точное решение уравнения

$$\frac{1}{\pi^2} \iint_D \varphi_{n,m}(t, \tau) \frac{dt d\tau}{(t-x)(\tau-y)} = f_{n,m}(x, y) \ln \frac{1-x}{1+x} \ln \frac{1-y}{1+y}, \quad -1 < x, y < 1. \quad (3)$$

Выполним далее обращение уравнения в заданном классе и получим

$$\varphi_{n,m}(x, y) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \sqrt{\frac{1+y}{1-y}} \frac{1}{\pi^2} \iint_D f_{n,m}(t, \tau) \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \sqrt{\frac{1-\tau}{1+\tau}} \ln \frac{1-t}{1+t} \ln \frac{1-\tau}{1+\tau} \frac{dt d\tau}{(t-x)(\tau-y)}. \quad (4)$$

При построении вычислительной схемы методом ортогональных многочленов будем использовать следующие квазиспектральные соотношения для сингулярного интеграла со степенно-логарифмической особенностью, полученные в [4, 5] для $x \in (-1, 1)$ и $k \geq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \ln \frac{1-t}{1+t} U_k(t) \frac{dt}{t-x} &= -\pi \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} U_k(x) + 4U_{k-1}(x) - \\ &- \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \sum_{m=0}^{j-1} \frac{8}{2m+1} U_{k-2j}(x) + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \left(\sum_{m=0}^j \frac{8}{2m+1} - \frac{4}{2j+1} \right) U_{k-1-2j}(x); \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \ln \frac{1-t}{1+t} T_k(t) \frac{dt}{t-x} &= -\pi \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} T_k(x) + 2U_{k-1}(x) - \\ &- \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \frac{4}{2j-1} U_{k-2j}(x) + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \frac{8j}{4j^2-1} U_{k-1-2j}(x); \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \ln \frac{1-t}{1+t} T_k(t) \frac{dt}{t-x} &= -\pi \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} T_k(x) + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k-2}{2} \rfloor} {}^0\alpha_j T_{k-2-2j}(x) - \\ &- \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} {}^0\beta_j T_{k-1-2j}(x), \quad \alpha_j = \sum_{m=0}^j \frac{-8}{2m+1}, \quad \beta_j = \alpha_j + \frac{4}{2j+1}; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \ln \frac{1-t}{1+t} U_k(t) \frac{dt}{t-x} &= -\pi \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} U_k(x) + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k-2}{2} \rfloor} {}^0\delta_j T_{k-2-2j}(x) - \\ &- \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} {}^0\gamma_j T_{k-1-2j}(x), \quad \delta_j = \sum_{m=0}^j \frac{-16(j+1-m)}{2m+1}, \quad \gamma_0 = -8, \gamma_j = (\delta_{j-1} + \delta_j)/2, j > 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где $T_k(x)$, $U_k(x)$ – многочлены Чебышева первого и второго рода соответственно,

$$\sum_{j=0}^m {}^0\rho_j T_{m-j} \equiv \rho_0 T_m + \rho_1 T_{m-1} + \dots + \rho_{m-1} T_1 + \frac{1}{2} \rho_m T_0.$$

Для построения интерполяционного многочлена $f_{n,m}(x, y)$ введем обозначения:

$$x_k = \cos \frac{2k-1}{2n+2} \pi, \quad k = 1, 2, \dots, n+1, \quad y_k = \cos \frac{2k-1}{2m+2} \pi, \quad k = 1, 2, \dots, m+1, \quad \zeta_p = \begin{cases} 1, & p = 0, \\ 2, & p \geq 1. \end{cases}$$

Пусть [6]

$$f(x, y) \approx f_{n,m}(x, y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m f_{i,j}^* T_i(x) T_j(y), \quad f_{i,j}^* = \frac{1}{(n+1)(m+1)} \sum_{p=1}^{n+1} \zeta_i T_i(x_p) \sum_{r=1}^{m+1} \zeta_j T_j(y_r) f(x_p, y_r). \quad (9)$$

Применяя в (4) свойство линейности интеграла и переходя от кратных интегралов к повторным, используя (7) и учитывая (9), из (4) получим равенство

$$\begin{aligned} \Phi_{n,m}(x, y) &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \left[-\pi T_i(x) + \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \left(\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{i-2}{2} \rfloor} {}^0\alpha_p T_{i-2-2p}(x) - \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor} {}^0\beta_p T_{i-1-2p}(x) \right) \right] \left[-\pi T_j(y) + \right. \\ &\left. + \sqrt{\frac{1+y}{1-y}} \left(\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{j-2}{2} \rfloor} {}^0\alpha_p T_{j-2-2p}(y) - \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{j-1}{2} \rfloor} {}^0\beta_p T_{j-1-2p}(y) \right) \right] f_{i,j}^*, \quad \alpha_p = \sum_{m=0}^p \frac{-8}{2m+1}, \quad \beta_p = \alpha_p + \frac{4}{2p+1}. \end{aligned} \quad (10)$$

Используя (6) и учитывая (9), из (4) получим другое равенство:

$$\begin{aligned} \Phi_{n,m}(x,y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \left[-\pi T_i(x) + \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \left(\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor} \delta_p U_{i-1-2p}(x) + \sum_{p=1}^{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor} \gamma_p U_{i-2p}(x) \right) \right] \times \left[-\pi T_j(y) + \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{1+y}{1-y}} \left(\sum_{q=0}^{\lfloor \frac{j-1}{2} \rfloor} \delta_q U_{j-1-2q}(y) + \sum_{p=1}^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} \gamma_p U_{j-2p}(y) \right) \right] f_{i,j}^*, \quad \delta_p = \begin{cases} 2, & p=0, \\ \frac{8p}{4p^2-1}, & p>0, \end{cases} \quad \gamma_p = \frac{-4}{2p-1}. \end{aligned} \quad (11)$$

Пусть далее

$$\begin{aligned} f(x,y) \approx f_{n,m}(x,y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m f_{i,j}^* U_i(x) U_j(y), \\ \sigma_i = \begin{cases} 1, & i = \overline{0, n-2}, \\ 0, & i = n-1, n, \end{cases} \quad \sigma_j = \begin{cases} 1, & j = \overline{0, m-2}, \\ 0, & j = m-1, m, \end{cases} \\ f_{i,j}^* = \frac{1}{(n+1)(m+1)} \sum_{p=1}^{n+1} (T_i(x_p) - \sigma_i T_{i+2}(x_p)) \sum_{r=1}^{m+1} (T_j(y_r) - \sigma_j T_{j+2}(y_r)) f(x_p, y_r). \end{aligned} \quad (12)$$

По аналогии с (10), (11), используя (5) и учитывая (12), из (4) получим для $\Phi_{n,m}(x,y)$ равенство

$$\begin{aligned} \Phi_{n,m}(x,y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \left[-\pi U_i(x) + \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \left(\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{i-2}{2} \rfloor} \alpha_p U_{i-2-2p}(x) - \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor} \beta_p U_{i-1-2p}(x) \right) \right] \times \left[-\pi U_j(y) + \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{1+y}{1-y}} \left(\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{j-2}{2} \rfloor} \alpha_p U_{j-2-2p}(y) - \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{j-1}{2} \rfloor} \beta_p U_{j-1-2p}(y) \right) \right] f_{i,j}^*, \quad \alpha_p = \sum_{m=0}^p \frac{-8}{2m+1}, \quad \beta_p = \alpha_p + \frac{4}{2p+1}. \end{aligned} \quad (13)$$

Используя (8) и учитывая (12), из (4) получим решение уравнения в таком виде:

$$\begin{aligned} \Phi_{n,m}(x,y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \left[-\pi U_i(x) + \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \left(-\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor} \gamma_p T_{i-1-2p}(x) + \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{i-2}{2} \rfloor} \delta_p T_{i-2-2p}(x) \right) \right] \times \\ \times \left[-\pi U_j(y) + \sqrt{\frac{1+y}{1-y}} \left(-\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{j-1}{2} \rfloor} \gamma_p T_{j-1-2p}(y) + \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{j-2}{2} \rfloor} \delta_p T_{j-2-2p}(y) \right) \right] f_{i,j}^*, \\ \delta_p = \sum_{m=0}^p \frac{-16(p+1-m)}{2m+1}, \quad p \geq 0, \quad \gamma_0 = -8, \quad \gamma_p = \frac{\delta_{p-1} + \delta_p}{2}, \quad p > 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Приведем оценки погрешности приближенного решения эквивалентных вычислительных алгоритмов (10), (11) и (13), (14).

Мы говорим, что функция $f(x,y) \in W^r H^\mu$, $r \geq 0$, если она по каждой переменной имеет производные до порядка r и r -я производная из класса $H(\mu)$, $0 < \mu \leq 1$.

На основании (2) и (4) с учетом оценки сингулярного интеграла со степенно-логарифмической особенностью, указанной в [7, 8], имеет место

Т е о р е м а 1. Пусть функция $f(x,y)$, являющаяся правой частью уравнения (1), принадлежит классу $W^r H^\mu$, $r \geq 0$, $0 < \mu \leq 1$. Пусть далее $f(x,y)$ аппроксимируется интерполяционными

многочленами (9) или (12) по узлам Чебышева первого рода, $\varphi(x, y)$, $\varphi_{n,m}(x, y)$ означают соответственно точное и приближенное решения уравнений (1) и (3) в классе функций $h(-1) \times h(-1)$. Тогда

$$\sqrt{(1-x)(1-y)} \left\| \varphi(x, y) - \varphi_{n,m}(x, y) \right\|_{\infty} \leq M_1 \frac{\ln^4(k)}{k^{r+\mu}}, \quad x \in [-\delta, \delta] \subset (-1, 1), \quad y \in [-\gamma, \gamma] \subset (-1, 1).$$

Здесь $k = \min(n, m)$, константа M_1 не зависит от k . Д о к а з а т е л ь с т в о проводится по схеме работы [8].

3. Рассмотрим далее решение уравнения (1) в классе $\varphi(x, y) \in h(1) \times h(1)$.

Как и ранее, при построении вычислительных схем методом ортогональных многочленов будем использовать следующие квазиспектральные соотношения, полученные в [4, 5] для $x \in (-1, 1)$ и $k \geq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \ln \frac{1-t}{1+t} U_k(t) \frac{dt}{t-x} &= -\pi \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} U_k(x) - 4U_{k-1}(x) - \\ &- \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \sum_{m=0}^{j-1} \frac{8}{2m+1} U_{k-2j}(x) - \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \left(\sum_{m=0}^j \frac{8}{2m+1} - \frac{4}{2j+1} \right) U_{k-1-2j}(x); \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \ln \frac{1-t}{1+t} T_k(t) \frac{dt}{t-x} &= -\pi \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} T_k(x) - 2U_{k-1}(x) - \\ &- \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \frac{4}{2j-1} U_{k-2j}(x) - \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \frac{8j}{4j^2-1} U_{k-1-2j}(x); \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \ln \frac{1-t}{1+t} T_k(t) \frac{dt}{t-x} &= -\pi \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} T_k(x) + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k-2}{2} \rfloor} {}^0\alpha_j T_{k-2-2j}(x) + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} {}^0\beta_j T_{k-1-2j}(x), \\ \alpha_j &= \sum_{m=0}^j \frac{-8}{2m+1}, \quad j \geq 0, \quad \beta_j = \alpha_j + \frac{4}{2j+1}, \quad j \geq 0; \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \ln \frac{1-t}{1+t} U_k(t) \frac{dt}{t-x} &= -\pi \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} U_k(x) + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k-2}{2} \rfloor} {}^0\delta_j T_{k-2-2j}(x) + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} {}^0\gamma_j T_{k-1-2j}(x), \\ \delta_j &= \sum_{m=0}^j \frac{-16(j+1-m)}{2m+1}, \quad j \geq 0, \quad \gamma_0 = -8, \quad \gamma_j = (\delta_{j-1} + \delta_j)/2, \quad j > 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Решение уравнения (1) класса функций $\varphi(x, y) \in h(1) \times h(1)$ имеет вид

$$\varphi(x, y) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \sqrt{\frac{1-y}{1+y}} \frac{1}{\pi^2} \iint_D f(t, \tau) \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}} \ln \frac{1-t}{1+t} \ln \frac{1-\tau}{1+\tau} \frac{dt d\tau}{(t-x)(\tau-y)}. \quad (19)$$

Приближенное решение $\varphi_{n,m}(x, y)$ найдем как точное решение уравнения

$$\frac{1}{\pi^2} \iint_D \varphi_{n,m}(t, \tau) \frac{dt d\tau}{(t-x)(\tau-y)} = f_{n,m}(x, y) \ln \frac{1-x}{1+x} \ln \frac{1-y}{1+y}, \quad -1 < x, y < 1. \quad (20)$$

Выполним далее обращение уравнения (20) в заданном классе:

$$\varphi_{n,m}(x, y) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \sqrt{\frac{1-y}{1+y}} \frac{1}{\pi^2} \iint_D f_{n,m}(t, \tau) \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}} \ln \frac{1-t}{1+t} \ln \frac{1-\tau}{1+\tau} \frac{dt d\tau}{(t-x)(\tau-y)}. \quad (21)$$

Аналогично предыдущему построим алгоритмы численного решения уравнения (1).

Пусть имеет место (9). Применяя в (21) свойство линейности интеграла и переходя от кратных интегралов к повторным, используя (17), из (21) получим равенство

$$\begin{aligned} \Phi_{n,m}(x,y) &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \left[-\pi T_i(x) + \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \left(\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{i-2}{2} \rfloor} \alpha_p T_{i-2-2p}(x) + \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor} \beta_p T_{i-1-2p}(x) \right) \right] \times \\ &\times \left[-\pi T_j(y) + \sqrt{\frac{1-y}{1+y}} \left(\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{j-2}{2} \rfloor} \alpha_p T_{j-2-2p}(y) + \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{j-1}{2} \rfloor} \beta_p T_{j-1-2p}(y) \right) \right] f_{i,j}^*, \\ \alpha_p &= \sum_{m=0}^p \frac{-8}{2m+1}, \quad p \geq 0, \quad \beta_p = \alpha_p + \frac{4}{2p+1}, \quad p \geq 0. \end{aligned} \quad (22)$$

По аналогии, используя (16) и учитывая (9), из (21) получим такое равенство:

$$\begin{aligned} \Phi_{n,m}(x,y) &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \left[-\pi T_i(x) + \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \left(\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor} \delta_p U_{i-1-2p}(x) + \sum_{p=1}^{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor} \gamma_p U_{i-2p}(x) \right) \right] \times \\ &\times \left[-\pi T_j(y) + \sqrt{\frac{1-y}{1+y}} \left(\sum_{q=0}^{\lfloor \frac{j-1}{2} \rfloor} \delta_q U_{j-1-2q}(y) + \sum_{p=1}^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} \gamma_p U_{j-2p}(y) \right) \right] f_{i,j}^*, \quad \delta_p = \begin{cases} -2, & p=0, \\ -\frac{8p}{4p^2-1}, & p>0, \end{cases} \\ \gamma_p &= \frac{-4}{2p-1}, \quad p > 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Используя же (15) и учитывая (12), из (21) получим для $\Phi_{n,m}(x,y)$ равенство

$$\begin{aligned} \Phi_{n,m}(x,y) &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \left[-\pi U_i(x) + \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \left(\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{i-2}{2} \rfloor} \alpha_p U_{i-2-2p}(x) + \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor} \beta_p U_{i-1-2p}(x) \right) \right] \times \\ &\times \left[-\pi U_j(y) + \sqrt{\frac{1-y}{1+y}} \left(\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{j-2}{2} \rfloor} \alpha_p U_{j-2-2p}(y) + \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{j-1}{2} \rfloor} \beta_p U_{j-1-2p}(y) \right) \right] f_{i,j}^*, \\ \alpha_p &= \sum_{m=0}^p \frac{-8}{2m+1}, \quad p \geq 0, \quad \beta_p = \alpha_p + \frac{4}{2p+1}, \quad p \geq 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Используя (18) и учитывая (12), из (21) приходим к следующему виду решения уравнения:

$$\begin{aligned} \Phi_{n,m}(x,y) &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \left[-\pi U_i(x) + \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \left(\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor} \gamma_p T_{i-1-2p}(x) + \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{i-2}{2} \rfloor} \delta_p T_{i-2-2p}(x) \right) \right] \times \\ &\times \left[-\pi U_j(y) + \sqrt{\frac{1-y}{1+y}} \left(\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{j-1}{2} \rfloor} \gamma_p T_{j-1-2p}(y) + \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{j-2}{2} \rfloor} \delta_p T_{j-2-2p}(y) \right) \right] f_{i,j}^*, \\ \delta_p &= \sum_{m=0}^p \frac{-16(p+1-m)}{2m+1}, \quad p \geq 0, \quad \gamma_0 = -8, \quad \gamma_p = \frac{\delta_{p-1} + \delta_p}{2}, \quad p > 0. \end{aligned} \quad (25)$$

На основании (19) и (21) с учетом оценки сингулярного интеграла со степенно-логарифмической особенностью, указанной в [7, 8], имеет место

Т е о р е м а 2. Пусть функция $f(x, y)$, являющаяся правой частью уравнения (1), принадлежит классу $W^r H^\mu$, $r \geq 0$, $0 < \mu \leq 1$. Пусть далее $f(x, y)$ аппроксимируется интерполяционными многочленами (9) или (12) по узлам Чебышева первого рода, $\varphi(x, y)$, $\varphi_{n,m}(x, y)$ – соответственно точное и приближенное решения уравнений (1) и (20) в классе функций $h(1) \times h(1)$. Тогда

$$\sqrt{(1+x)(1+y)} \left\| \varphi(x, y) - \varphi_{n,m}(x, y) \right\|_{\infty} \leq M_2 \frac{\ln^4(k)}{k^{r+\mu}}, \quad x \in [-\delta, \delta] \subset (-1, 1), \quad y \in [-\gamma, \gamma] \subset (-1, 1).$$

Литература

1. Bisplinghof R. L., Ashley H., Halfman R. L. Aeroelasticity. Mineola, 1996.
2. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., 1968.
3. Шешко М. А., Расолько Г. А. // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25, № 5. С. 911–915.
4. Расолько Г. А. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2012. № 3. С. 27–31.
5. Расолько Г. А. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2013. № 3. С. 27–31.
6. Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. М., 1983.
7. Шешко М. А., Якименко Т. С. // Изв. вузов. Математика. 1979. № 6. С. 82–84.
8. Шешко М. А. Сингулярные интегральные уравнения с ядром Коши и Гильберта и их приближенное решение. Люблин, 2003.

G. A. RASOLKO

APPROXIMATE SOLUTION OF AN INTEGRAL FIRST-KIND EQUATION WITH THE MULTIPLICATIVE CAUCHY KERNEL BY THE METHOD OF ORTHOGONAL POLYNOMIALS

Summary

Numerical methods for solving singular integral first-kind equations with a special form of the right-hand side are developed. The proposed schemes are based on the decomposition of singular integrals with power-logarithmic singularity in Chebyshev's polynomials of first and second kind. Accuracy estimates of the considered methods are presented.

УДК 517.5

В. Н. РУСАК, И. В. РЫБАЧЕНКО

**КОСИНУС-ДРОБИ ЧЕБЫШЕВА – МАРКОВА В ПРИБЛИЖЕННОМ
 ИНТЕГРИРОВАНИИ**

Белорусский государственный университет

(Поступила в редакцию 30.05.2014)

Наименее уклоняющиеся от нуля алгебраические дроби систематически применяются в теории рациональной аппроксимации (см., напр., [1]), в частности при нахождении экстремальных оценок для производных рациональных функций, при построении рациональных операторов и нахождении порядковых оценок их уклонений в различных пространствах. В данной статье косинус-дроби Чебышева – Маркова применяются при построении квадратурных формул типа Гаусса, точных на рациональных функциях с фиксированными знаменателями.

Пусть $q_{2n-1}(x) = \prod_{j=1}^{2n-1} (1 + a_j x)$, где числа a_j либо действительные и $|a_j| < 1$, либо попарно комплексно-сопряженные. Введем косинус-дробь Чебышева – Маркова, полагая

$$M_n(x) = \cos \varphi_{2n}(x), \quad x \in [-1, 1], \quad \varphi_{2n}(-1) = 2n\pi,$$

$$\varphi'_{2n}(x) = -\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \left(1 + \sum_{j=1}^{2n-1} \frac{\sqrt{1-a_j^2}}{1+a_j x} \right) = -\frac{\lambda_n(x)}{2\sqrt{1-x^2}}, \quad (1)$$

где действительная часть всех радикалов берется положительной. Как хорошо известно, $M_n(x) = \mu_n(x) / \sqrt{q_{2n-1}(x)}$, где $\mu_n(x)$ — алгебраический полином, имеющий на $(-1, 1)$ n различных простых нулей $\{x_\nu\}$, $\nu = 1, n$, $-1 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < 1$.

Л е м м а 1. *Косинус-дроби Чебышева – Маркова удовлетворяют условиям ортогональности*

$$\int_{-1}^1 \frac{\cos \varphi_{2n}(x)}{\sqrt{q_{2n-1}(x)}} \frac{x^k}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0, \quad k = \overline{0, n-1}. \quad (2)$$

Данная лемма 1 принадлежит С. Н. Бернштейну, доказательство имеется в работе [2].

В пространстве $C[-1, 1]$ непрерывных функций определим интерполяционный оператор L_n , полагая

$$L_n(x, f) = \sum_{m=1}^n f(x_m) l_m(x), \quad l_m(x) = \frac{M_n(x)}{(x-x_m)M'_n(x_m)}. \quad (3)$$

Этот оператор отображает $C[-1, 1]$ в пространство алгебраических дробей

$$p_{n-1}(x) / \sqrt{q_{2n-1}(x)}, \quad (4)$$

причем каждая функция вида (4) отображается в себя, в частности, если полином $p_{n-1}(x) \equiv 1$, то выполняется равенство

$$\sum_{m=1}^n \frac{1}{\sqrt{q_{2n-1}(x_m)}} \frac{M_n(x)}{(x-x_m)M'_n(x_m)} = \frac{1}{\sqrt{q_{2n-1}(x)}}. \quad (5)$$

Л е м м а 2. Справедливы равенства при всех $k = \overline{1, n}$:

$$\int_{-1}^1 \frac{M_n^2(x)}{(x-x_k)^2 (M_n'(x_k))^2 \sqrt{1-x^2}} dx = \sqrt{q_{2n-1}(x_k)} \int_{-1}^1 \frac{M_n(x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx}{\sqrt{q_{2n-1}(x)}(x-x_k)M_n'(x_k)}. \quad (6)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего проверим, что фундаментальные дроби $l_m(x)$ взаимно ортогональны с чебышевским весом. Действительно, учитывая (1), (3) и (2), найдем

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{l_m(x)l_j(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int_{-1}^1 \frac{M_n(x)}{M_n'(x_m)M_n'(x_j)} \frac{M_n(x)}{(x-x_m)(x-x_j)} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \\ &= \int_{-1}^1 M_n(x) \frac{p_{n-2}(x)}{\sqrt{q_{2n-1}(x)} \sqrt{1-x^2}} dx = 0, \quad m \neq j, \end{aligned} \quad (7)$$

и, таким образом, ортогональность $l_m(x)$ и $l_j(x)$ установлена. Умножим теперь равенство (5) на $l_k(x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ и проинтегрируем с учетом (7), тогда

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{M_n(x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx}{\sqrt{q_{2n-1}(x)}(x-x_k)M_n'(x_k)} &= \sum_{m=1}^n \frac{1}{\sqrt{q_{2n-1}(x_m)}} \int_{-1}^1 \frac{M_n(x)}{(x-x_m)M_n'(x_m)} \frac{M_n(x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx}{(x-x_k)M_n'(x_k)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{q_{2n-1}(x_k)}} \int_{-1}^1 \frac{M_n^2(x)}{(x-x_k)^2 (M_n'(x_k))^2} \frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx}{\sqrt{q_{2n-1}(x)}}, \end{aligned}$$

что равносильно соотношению (6).

З а м е ч а н и е 1. В полиномиальном случае, когда все $a_j = 0$, $j = \overline{1, 2n-1}$, соответственно $q_{2n-1}(x) \equiv 1$, равенство (6) из леммы 2 принимает вид

$$\int_{-1}^1 \frac{l_k^2(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^1 \frac{l_k(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Л е м м а 3. При всех k , $k = \overline{1, n}$, выполняются равенства

$$\int_{-1}^1 \frac{M_n^2(x) dx}{(x-x_k)^2 (M_n'(x_k))^2 \sqrt{1-x^2}} = \frac{2\pi}{\lambda_n(x_k)}. \quad (8)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как установлено в [1], с помощью замены $x = (1-y^2)/(1+y^2)$, отображающей $(-\infty, \infty)$ в дважды пробегаемый отрезок $[-1, 1]$, алгебраические дроби $M_n(x)$ преобразуются в косинус-дроби Бернштейна так, что

$$\cos \varphi_{2n}(x) = \cos \Phi_{2n}(y) = p_{2n}(y)/\sqrt{h_{4n}(y)},$$

$$h_{4n}(y) = \prod_{j=1}^{2n} \left(y^2 + \frac{1+a_j}{1-a_j} \right), \quad -\infty < y < \infty, \quad a_{2n} = 0, \quad (9)$$

где $p_{2n}(y)$ – четный алгебраический полином степени не выше $2n$. Полином $h_{4n}(y)$ является положительным на действительной оси, и его корни попарно комплексно-сопряженные, а также расположены симметрично относительно мнимой оси. Обозначим через $\{z_\nu\}$, $\nu = \overline{1, 2n}$, те корни полинома $h_{4n}(y)$, для которых $\text{Im } z_\nu > 0$. Тогда выполняются равенства

$$h_{4n}(y) = \prod_{\nu=1}^{2n} (z_\nu - y)(\bar{z}_\nu - y), \quad \cos \Phi_{2n}(y) = \frac{1}{2} \left(\prod_{\nu=1}^{2n} \frac{z_\nu - y}{|z_\nu - y|} + \prod_{\nu=1}^{2n} \frac{\bar{z}_\nu - y}{|\bar{z}_\nu - y|} \right). \quad (10)$$

Отметим дополнительно, что если $x = (1 - y^2)/(1 + y^2)$, то

$$q_{2n-1}(x) = \prod_{j=1}^{2n-1} (1 - a_j) \cdot h_{4n}(y)/(1 + y^2)^{2n}, \quad (11)$$

и нули $\{x_v\}_{v=1}^n$ косинус-дроби Чебышева — Маркова связаны с положительными нулями $\{y_v\}$ косинус-дроби $\cos \Phi_{2n}(y)$ равенствами

$$x_v = (1 - y_v^2)/(1 + y_v^2), \quad y_v > 0, \quad v = \overline{1, n}. \quad (12)$$

Выполняя замену переменной интегрирования в интеграле, входящем в правую часть (6), с учетом соотношений (9–12) получим

$$\begin{aligned} J_k &= \int_{-1}^1 \frac{M_n(x)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{q_{2n-1}(x)}(x-x_k)} dx = \frac{1+y_k^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \Phi_{2n}(y)}{\sqrt{q_{2n-1}(x)} y_k^2 - y^2} dy = \\ &= \frac{1+y_k^2}{2 \left(\prod_{j=1}^{2n-1} (1-a_j) \right)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \Phi_{2n}(y) (1+y^2)^n}{\sqrt{h_{4n}(y)} y_k^2 - y^2} dy = \\ &= \frac{(1+y_k^2)}{4 \left(\prod_{j=1}^{2n-1} (1-a_j) \right)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\prod_{v=1}^{2n} (z_v - y) + \prod_{v=1}^{2n} (\bar{z}_v - y)}{\prod_{v=1}^n (z_v - y)(\bar{z}_v - y)} \frac{(1+y^2)^n}{y_k^2 - y^2} dy. \end{aligned} \quad (13)$$

Будем считать $\text{Im } z > 0$ и найдем с помощью вычетов интеграл

$$\begin{aligned} J_k(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\prod_{v=1}^{2n} (z_v - y) + \prod_{v=1}^{2n} (\bar{z}_v - y)}{\prod_{v=1}^n (z_v - y)(\bar{z}_v - y)} \frac{(1+y^2)^n}{y^2 - z^2} dy = \\ &= \frac{\pi i}{z} (1+z^2)^n \left(\frac{\prod_{v=1}^{2n} (z_v - z)}{\prod_{v=1}^{2n} (z_v - z)(\bar{z}_v - z)} + \frac{\prod_{v=1}^{2n} (\bar{z}_v + z)}{\prod_{v=1}^{2n} (\bar{z}_v + z)(z_v + z)} \right). \end{aligned}$$

Теперь воспользуемся равенством $J_k(y_k) = \lim_{z \rightarrow y_k} J_k(z)$, подставим $J_k(y_k)$ в (13) и найдем, учитывая (11) и симметричность $\{z_v\}$ относительно мнимой оси

$$\begin{aligned} J_k &= \frac{(1+y_k^2)(-\pi i)}{4 \left(\prod_{j=1}^{2n-1} (1-a_j) \right)^{\frac{1}{2}}} \frac{(1+y_k^2)^n}{y_k} \left(\frac{\prod_{v=1}^{2n} (z_v - y_k)}{\prod_{v=1}^{2n} (z_v - y_k)(\bar{z}_v - y_k)} + \frac{\prod_{v=1}^{2n} (\bar{z}_v + y_k)}{\prod_{v=1}^{2n} (\bar{z}_v + y_k)(z_v + y_k)} \right) = \\ &= -\frac{\pi i}{4 y_k} \frac{(1+y_k^2)^{n+1}}{\left(\prod_{j=1}^{2n-1} (1-a_j) \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{h_{4n}(y_k)}} \left(\prod_{v=1}^{2n} \frac{z_v - y_k}{|z_v - y_k|} + \prod_{v=1}^{2n} \frac{\bar{z}_v + y_k}{|\bar{z}_v + y_k|} \right) = \\ &= -\frac{\pi i}{2 y_k} \frac{1+y_k^2}{\sqrt{q_{2n-1}(x_k)}} \prod_{v=1}^{2n} \frac{z_v - y_k}{|z_v - y_k|}. \end{aligned} \quad (14)$$

Обозначим $\omega_{n,k} = \prod_{v=1}^{2n} (z_v - y_k) / |z_v - y_k|$, тогда в силу (10) $\omega_{n,k} + \overline{\omega_{n,k}} = 0$. С другой стороны, в нулях косинус-дроби $\cos \Phi_{2n}(y)$ выполняется равенство $\sin \Phi_{2n}(y_k) = \text{sign } M'_n(x_k)$, или $\omega_{n,k} - \overline{\omega_{n,k}} = 2i \text{sign } M'_n(x_k)$, поэтому $\omega_{n,k} = i \text{sign } M'_n(x_k)$. Соответственно равенство (14) будет иметь вид

$$\begin{aligned} J_k &= -\frac{\pi i}{2y_k} \frac{1+y_k^2}{\sqrt{q_{2n-1}(x_k)}} i \text{sign } M'_n(x_k) = \\ &= \frac{\pi(1+y_k^2)}{\sqrt{q_{2n-1}(x_k)} 2y_k} \text{sign } M'_n(x_k) = \frac{\pi}{\sqrt{1-x_k^2}} \frac{\text{sign } M'_n(x_k)}{\sqrt{q_{2n-1}(x_k)}}. \end{aligned} \quad (15)$$

Из соотношений (6), (13), (15) и (1) получим

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{M_n^2(x) dx}{(x-x_k)^2 (M'_n(x_k))^2 \sqrt{1-x^2}} &= \frac{\sqrt{q_{2n-1}(x_k)}}{M'_n(x_k)} \frac{\pi}{\sqrt{1-x_k^2}} \frac{\text{sign } M'_n(x_k)}{\sqrt{q_{2n-1}(x_k)}} = \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{1-x_k^2} \cdot |M'_n(x_k)|} = \frac{\pi}{\sqrt{1-x_k^2}} \frac{2\sqrt{1-x_k^2}}{\lambda_n(x_k)} = \frac{2\pi}{\lambda_n(x_k)}, \end{aligned}$$

и доказательство леммы 3 полностью завершено.

З а м е ч а н и е 2. Равенство (5) останется правильным, если его правую часть умножить на полином $p_{n-1}(x)$ степени не выше $n-1$, а m -е слагаемое левой части умножить на $p_{n-1}(x_m)$.

Пусть, как и в (1), $q_{2n-1}(x)$ – фиксированный полином, положительный на отрезке $[-1, 1]$, и

$$r_{2n-1}(x) = p_{2n-1}(x)/q_{2n-1}(x) \quad (16)$$

– правильная рациональная функция, $M_n(x)$ – косинус-дроби Чебышева – Маркова. Введем рациональные функции

$$\begin{aligned} A_k(x) &= M_n^2(x) (M'_n(x_k)(x-x_k))^{-2} \left(1 - M_n''(x_k) (M'_n(x_k))^{-1} (x-x_k)\right), \\ B_k(x) &= M_n^2(x) (M'_n(x_k))^{-2} (x-x_k)^{-1}. \end{aligned} \quad (17)$$

Л е м м а 4. Рациональная функция $r_{2n-1}(x)$ вида (16) определяется по своим значениям и значениям производной в точках $\{x_k\}_{k=1}^n$ единственным образом и имеет представление

$$r_{2n-1}(x) = \sum_{k=1}^n r_{2n-1}(x_k) A_k(x) + \sum_{k=1}^n r'_{2n-1}(x_k) B_k(x). \quad (18)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, при всех k и i имеем $B_k(x_i) = 0$. Если $k \neq i$, то очевидными являются равенства

$$A_k(x_i) = 0, A'_k(x_i) = 0, B'_k(x_i) = 0.$$

В свою очередь соотношения $A_k(x_k) = 1$, $A'_k(x_k) = 0$, $B'_k(x_k) = 1$ проверяются с помощью правила Лопиталю. Если бы существовала другая рациональная функция вида (16) $r_{2n-1}^*(x)$ такая, что

$$r_{2n-1}^*(x_k) = r_{2n-1}(x_k), \quad r_{2n-1}^{*'}(x_k) = r'_{2n-1}(x_k), \quad k = \overline{1, n},$$

то их разность $r_{2n-1}(x) - r_{2n-1}^*(x)$ была бы рациональной функцией, имеющей n двойных нулей, что невозможно ввиду того, что в числителе ее находится полином степени не выше $2n-1$.

Отметим важный частный случай формулы (18), когда $r_{2n-1}(x) \equiv 1$, и она принимает вид

$$\sum_{k=1}^n A_k(x) = 1. \quad (19)$$

Будем рассматривать квадратурные формулы с чебышевским весом

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + \rho_n(f) \quad (20)$$

в пространстве $C[-1,1]$. Через $R_{2n-1}(f)$ обозначим наилучшее равномерное приближение функции $f(x)$ рациональными функциями вида (16).

Т е о р е м а. Если $\{x_k\}_{k=1}^n$ – нули косинус-дроби $M_n(x) = \cos \varphi_{2n}(x)$ и коэффициенты $A_k = 2\pi/\lambda_n(x_k)$, то квадратурная формула (20) точна на рациональных функциях (16), и для любой функции $f(x) \in C[-1,1]$ выполняется неравенство

$$|\rho_n(f)| \leq 2\pi \cdot R_{2n-1}(f).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пользуясь леммами 4 и 1, а также соотношениями (17) и леммой 3, найдем равенство

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{r_{2n-1}(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \sum_{k=1}^n \left(r_{2n-1}(x_k) \int_{-1}^1 \frac{A_k(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx + r'_{2n-1}(x_k) \int_{-1}^1 \frac{B_k(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \right) = \\ &= \sum_{k=1}^n r_{2n-1}(x_k) \int_{-1}^1 M_n^2(x) (M'_n(x_k)(x-x_k))^{-2} \left(1 - \frac{M''_n(x_k)}{M'_n(x_k)}(x-x_k) \right) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \\ &= \sum_{k=1}^n r_{2n-1}(x_k) \int_{-1}^1 \frac{M_n^2(x)}{(M'_n(x_k)(x-x_k))^2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=1}^n \frac{2\pi}{\lambda_n(x_k)} r_{2n-1}(x_k), \end{aligned}$$

которое означает, что остаток $\rho_n(r_{2n-1}) = 0$, т. е. квадратурная формула (20) с $A_k = 2\pi/\lambda_n(x_k)$ точна на рациональных функциях (16). В частности, отметим равенство

$$\sum_{k=1}^n \frac{2\pi}{\lambda_n(x_k)} = \int_{-1}^1 (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx = \pi,$$

вытекающее также и из соотношения (19).

Пусть $f(x) \in C[-1,1]$ и $r_{2n-1}^*(x)$ – рациональная функция наилучшего приближения. В силу неотрицательности коэффициентов $A_k = 2\pi/\lambda_n(x_k)$ и точности квадратурной формулы для $r_{2n-1}^*(x)$ будем иметь

$$\begin{aligned} |\rho_n(f)| &= \left| \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx - \sum_{k=1}^n \frac{2\pi}{\lambda_n(x_k)} f(x_k) \right| = \\ &= \left| \int_{-1}^1 \frac{f(x) - r_{2n-1}^*(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx + \sum_{k=1}^n \frac{2\pi}{\lambda_n(x_k)} (r_{2n-1}^*(x_k) - f(x_k)) \right| \leq \\ &\leq R_{2n-1}(f) \cdot \left(\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \sum_{k=1}^n \frac{2\pi}{\lambda_n(x_k)} \right) = \\ &= 2R_{2n-1}(f) \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 2\pi \cdot R_{2n-1}(f). \end{aligned}$$

З а м е ч а н и е 3. Квадратурные формулы для отрезка $[-1,1]$, точные на рациональных функциях

$$p_{2n-1}(x) / \prod_{j=1}^{n-1} (1+a_j x)^2,$$

содержатся в теореме. Заметим, однако, что они были получены ранее в работе [3] на основе лагранжевой интерполяции.

Литература

1. *Русак В. Н.* Рациональные функции как аппарат приближения. Минск, 1979.
2. *Бернштейн С. Н.* Собрание сочинений. М., 1952. Т. 1., ст. № 42.
3. *Ровба Е. А.* Интерполяция и ряды Фурье в рациональной аппроксимации. Гродно, 2001.

V. N. RUSAK, I. V. RYBACHENKO

CHEBYSHEV-MARKOV'S COSINE-FRACTIONS IN THE APPROXIMATE INTEGRATION

Summary

Gauss-type quadrature formulas for rational functions with simple poles have been investigated.

УДК 517.925:517.977

А. К. ДЕМЕНЧУК

УПРАВЛЕНИЕ АСИНХРОННЫМ СПЕКТРОМ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ПРАВЫМ БЛОКОМ НЕПОЛНОГО РАНГА

Институт математики НАН Беларуси

(Поступила в редакцию 28.03.2014)

Рассмотрим линейную систему управления

$$\dot{x} = A(t)x + Bu, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad n \geq 2, \quad (1)$$

где $A(t)$ – непрерывная ω -периодическая $(n \times n)$ -матрица, B – постоянная $(n \times n)$ -матрица. Будем считать, что управление задается в виде линейной по фазовым переменным обратной связи

$$u = U(t)x \quad (2)$$

с непрерывной ω -периодической $(n \times n)$ -матрицей $U(t)$. Задача выбора такой матрицы $U(t)$ (коэффициента обратной связи), чтобы замкнутая система

$$\dot{x} = (A(t) + BU(t))x \quad (3)$$

имела сильно нерегулярные периодические решения с заданным спектром частот L (целевым множеством), названа задачей управления спектром нерегулярных колебаний с целевым множеством L (задачей управления асинхронным спектром) [1].

В работе [1] получено решение сформулированной задачи для системы (1) с невырожденной матрицей B , а также с вырожденной матрицей B и нулевым средним значением \hat{A} матрицы коэффициентов $A(t)$. В работе [2] рассмотрен случай совпадения рангов матрицы B и расширенной $(n \times 2n)$ -матрицы, составленной из B и \hat{A} . Для блочно-треугольного усреднения матрицы коэффициентов в [3] задача решена в некритическом случае, а в [4] – в критическом случае при наличии некоторых стационарных элементов матрицы коэффициентов. Решение поставленной задачи получено в [5–7] в предположении полного столбцового ранга двух блоков нестационарной части матрицы коэффициентов, а в [8] – с линейно независимыми столбцовыми базисами этих блоков.

В настоящей работе устанавливаются условия разрешимости задачи управления асинхронным спектром для системы (1) с правым блоком неполного столбцового ранга.

Пусть $L = \{\lambda_1, \dots, \lambda_{r'}\}$ – целевое множество частот, элементы которого попарно различны, соизмеримы между собой и несоизмеримы с $2\pi/\omega$. В таком случае найдется наибольшее положительное вещественное λ , которому будут кратны числа $\lambda_1, \dots, \lambda_{r'}$, т. е. $\lambda_j = k_j \lambda$ ($k_j \in \mathbb{N}$; $j = \overline{1, r'}$). Обозначим $\Omega = 2\pi/\lambda$, при этом отношение чисел ω и Ω иррационально.

Будем рассматривать случай вырожденной матрицы B

$$\text{rank } B = r < n, \quad (n - r = d). \quad (4)$$

Обозначим через $B_{d,n}$ и $B_{r,n}$ матрицы, составленные соответственно из d первых и r остальных строк матрицы B . Можно считать, что первые d строк матрицы B нулевые, т. е.

$$B_{d,n} = 0, \quad (5)$$

так как в противном случае этого можно добиться линейным неособенным стационарным преобразованием. Отметим, что в силу (4), (5) ранг матрицы $B_{r,n}$ также равен r .

Представим матрицу коэффициентов $A(t)$ в блочном виде, учитывая структуру матрицы B . Пусть $A_{d,d}^{(11)}(t)$, $A_{r,d}^{(21)}(t)$ – ее левый верхний и нижний, а $A_{d,r}^{(12)}(t)$, $A_{r,r}^{(22)}(t)$ – правые верхний и нижний блоки (нижние индексы указывают размерность блоков). Соответственно такому представлению усредненную матрицу $\hat{A} = \frac{1}{\omega} \int_{\omega_0}^{\omega} A(\tau) d\tau$ в свою очередь разобьем на такие же четыре блока $\hat{A}_{d,d}^{(11)}$, $\hat{A}_{r,d}^{(21)}$, $\hat{A}_{d,r}^{(12)}$, $\hat{A}_{r,r}^{(22)}$ соответствующих размерностей. Далее будем считать, что матрица \hat{A} имеет нижнюю блочно-треугольную форму, т. е.

$$\hat{A}_{d,r}^{(12)} = 0, \quad (6)$$

причем имеет место критический случай, когда у левого верхнего блока $\hat{A}_{d,d}^{(11)}$ имеются чисто мнимые собственные числа

$$\pm i\lambda_j \quad (\lambda_j \in L; j=1, \dots, d'; d' \leq [d/2]). \quad (7)$$

Отметим, что в некритическом случае поставленная задача решена в работе [3].

Наряду с системой (3) рассмотрим также систему

$$\dot{x} = (\hat{A} + B\hat{U})x, \quad (\tilde{A}(t) + B\tilde{U}(t))x = 0, \quad (8)$$

где \hat{U} – среднее значение коэффициента обратной связи $U(t)$, $\tilde{U}(t) = U(t) - \hat{U}$, $\tilde{A}(t) = A(t) - \hat{A}$. С учетом предположений (5), (6) систему (8) можно записать в виде

$$\dot{x}^{[d]} = \hat{A}_{d,d}^{(11)} x^{[d]}, \quad \dot{x}_{[r]} = \left(\hat{A}_{r,d}^{(21)} + B_{r,n} \hat{U}_{n,d} \right) x^{[d]} + \left(\hat{A}_{r,r}^{(22)} + B_{r,n} \hat{U}_{n,r} \right) x_{[r]},$$

$$\tilde{A}_{d,d}^{(11)}(t) x^{[d]} + A_{d,r}^{(12)}(t) x_{[r]} = 0, \quad \left(\tilde{A}_{r,d}^{(21)}(t) + B_{r,n} \tilde{U}_{n,d}(t) \right) x^{[d]}(t) + \left(\tilde{A}_{r,r}^{(22)}(t) + B_{r,n} \tilde{U}_{n,r}(t) \right) x_{[r]}(t) = 0, \quad (9)$$

где векторы $x = \text{col}(x^{[d]}, x_{[r]})$, $x^{[d]} = \text{col}(x_1, \dots, x_d)$, $x_{[r]} = \text{col}(x_{d+1}, \dots, x_n)$ и матрицы $\hat{U} = \{\hat{U}_{n,d}, \hat{U}_{n,r}\}$, $\tilde{U}(t) = \{\tilde{U}_{n,d}(t), \tilde{U}_{n,r}(t)\}$.

Как отмечено выше, случай, когда оба блока $\tilde{A}_{d,d}^{(11)}$ и $A_{d,r}^{(12)}$ матрицы $\tilde{A}(t)$ имеют полный столбцовый ранг, изучен в работах [5–7]. Поэтому предположим, что верхний левый блок имеет полный столбцовый ранг, а верхний правый – неполный, т. е. выполнены соотношения

$$\text{rank}_{\text{col}} \tilde{A}_{d,d}^{(11)} = r_1 = d, \quad \text{rank}_{\text{col}} A_{d,r}^{(12)} = r_2 < r. \quad (10)$$

Если базисные столбцы правого блока образуют со столбцами левого блока линейно независимую систему, решение поставленной задачи управления можно получить на основании [8]. Учитывая это обстоятельство, далее будем считать, что для $(d \times n)$ -матрицы $\{\tilde{A}_{d,d}^{(11)}, A_{d,r}^{(12)}\}$, составленной из столбцов блоков $\tilde{A}_{d,d}^{(11)}(t)$, $A_{d,r}^{(12)}(t)$, выполняется условие

$$\text{rank}_{\text{col}} \{\tilde{A}_{d,d}^{(11)}, A_{d,r}^{(12)}\} < d + r_2. \quad (11)$$

В силу второго условия в (10) найдется постоянная неособенная $(r \times r)$ -матрица Q такая, что у матрицы $A_{d,r}^{(12)}(t)Q$ первые $d_2 = r - r_2$ столбцов нулевые, в то время как остальные r_2 столбцов будут линейно независимыми. Введем замену переменных

$$x_{[r]} = Qw, \quad (12)$$

которая приводит систему (9) к системе

$$\dot{x}^{[d]} = \hat{A}_{d,d}^{(11)} x^{[d]}, \quad \dot{w} = \hat{P}x^{[d]} + \hat{H}w, \\ \tilde{A}_{d,d}^{(11)}(t) x^{[d]} + A_{d,r}^{(12)}(t) Qw = 0, \quad \tilde{P}(t) x^{[d]} + \tilde{H}(t) Qw = 0, \quad (13)$$

где $\hat{P} = Q^{-1}(\hat{A}_{r,d}^{(21)} + B_{r,n} \hat{U}_{n,d})$, $\hat{H} = Q^{-1}(\hat{A}_{r,r}^{(22)} + B_{r,n} \hat{U}_{n,r})Q$, $\tilde{P}(t) = Q^{-1}(\tilde{A}_{r,d}^{(21)}(t) + B_{r,n} \tilde{U}_{n,d}(t))$, $\tilde{H}(t) = Q^{-1}(\tilde{A}_{r,r}^{(22)}(t) + B_{r,n} \tilde{U}_{n,r}(t))Q$. Обозначим матрицу, составленную из последних r_2 столбцов

матричного коэффициента $A_{d,r}^{(12)}(t)Q$ третьей системы в (13), через $C(t)$. Согласно второму неравенству в (9), $(d \times r_2)$ -матрица $C(t)$ имеет полный столбцовый ранг. Пусть $w = \text{col}(w^{[d_2]}, w_{[r_2]})$, $w^{[d_2]} = \text{col}(w_1, \dots, w_{d_2})$, $w_{[r_2]} = \text{col}(w_{d_2+1}, \dots, w_r)$. Учитывая структуру вектора w , представим матрицу \hat{H} в блочном виде таком, что матрицы $\hat{H}_{d_2, d_2}^{(11)}$ и $\hat{H}_{r_2, d_2}^{(21)}$ – ее левые верхний и нижний, а матрицы $\hat{H}_{d_2, r_2}^{(12)}$ и $\hat{H}_{r_2, r_2}^{(22)}$ – правые верхний и нижний блоки соответственно (нижние индексы указывают размер блоков). Тогда система (13) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}^{[d]} &= \hat{A}_{d,d}^{(11)} x^{[d]}, \\ \dot{w}^{[d_2]} &= \hat{H}_{d_2, d_2}^{(11)} w^{[d_2]} + \hat{H}_{d_2, r_2}^{(12)} w_{[r_2]} + \hat{P}_1 x^{[d]}, \quad \dot{w}_{[r_2]} = \hat{H}_{r_2, d_2}^{(21)} w^{[d_2]} + \hat{H}_{r_2, r_2}^{(22)} w_{[r_2]} + \hat{P}_2 x^{[d]}, \\ \tilde{A}_{d,d}^{(11)}(t)x^{[d]} + C(t)w_{[r_2]} &= 0, \quad \tilde{P}(t)x^{[d]} + \tilde{H}(t)w = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

где матрицы \hat{P}_1, \hat{P}_2 составлены соответственно из d_2 первых и оставшихся r_2 строк матрицы \hat{P} .

Из условий (10), (11) вытекает, что пересечение векторных подпространств Π_1 и Π_2 пространства Π непрерывных ω -периодических вектор-функций, образованных линейными оболочками столбцов соответственно блоков $\tilde{A}_{d,d}^{(11)}(t)$ и $C(t)$, нетривиально, т. е., другими словами, $\dim(\Pi_1 \cap \Pi_2) = s$, $1 \leq s \leq \min\{d, r_2\}$. В таком случае между столбцами этих блоков имеется зависимость вида

$$\tilde{A}_{d,d}^{(11)}(t)F = C(t)G, \quad (15)$$

где F – постоянная $(d \times s)$ -матрица, G – постоянная $(r_2 \times s)$ -матрица, $\text{rank } F = \text{rank } G = s$.

Зависимость вида (15) в [7] определена как двусторонняя. В частных случаях, когда в линейной комбинации (15) присутствует матричный коэффициент только при левом (правом) блоке, зависимость такого рода будет левосторонней (правосторонней), т. е. односторонней. Отметим, что при односторонней зависимости пересечением подпространств Π_1 и Π_2 является одно из этих подпространств.

Так как ранг матрицы F равен s , то у нее найдется отличный от нуля минор порядка s . Без ограничения общности будем считать, что этот минор является главным, поскольку в противном случае этого можно добиться подходящим линейным невырожденным преобразованием строк матрицы F . Пусть F_1 – $(s \times s)$ -матрица, составленная из первых s строк матрицы F , а F_2 – $(d-s) \times s$ -матрица, составленная из остальных строк. Согласно сделанному допущению, $\det F_1 \neq 0$. Матрицу $\tilde{A}_{d,d}^{(11)}(t)$ разобьем по вертикали на два блока $\tilde{A}_1^{(11)}(t)$ и $\tilde{A}_2^{(11)}(t)$ размерностей $d \times s$ и $d \times (d-s)$. Представим двустороннюю зависимость (15) в виде

$$\tilde{A}_1^{(11)}(t)F_1 + \tilde{A}_2^{(11)}(t)F_2 = C(t)G,$$

откуда находим

$$\tilde{A}_1^{(11)}(t) = -\tilde{A}_2^{(11)}(t)F_2F_1^{-1} + C(t)GF_1^{-1}. \quad (16)$$

С учетом принятых обозначений четвертая система в (14) примет вид

$$\tilde{A}_1^{(11)}(t)x'^{[d]} + \tilde{A}_2^{(11)}(t)x''^{[d]} + C(t)w_{[r_2]} = 0,$$

где векторы $x'^{[d]} = \text{col}(x'^{[d]}, x''^{[d]})$, $x'^{[d]} = \text{col}(x_1^{[d]}, \dots, x_s^{[d]})$, $x''^{[d]} = \text{col}(x_{s+1}^{[d]}, \dots, x_d^{[d]})$. Подставляя в последнее равенство вместо $\tilde{A}_1^{(11)}(t)$ зависимость (16), получим

$$\left(-\tilde{A}_2^{(11)}(t)F_2F_1^{-1} + C(t)GF_1^{-1}\right)x'^{[d]} + \tilde{A}_2^{(11)}(t)x''^{[d]} + C(t)w_{[r_2]} = 0,$$

откуда находим

$$\tilde{A}_2^{(11)}(t)\left(-F_2F_1^{-1}x'^{[d]} + x''^{[d]}\right) + C(t)\left(GF_1^{-1}x'^{[d]} + w_{[r_2]}\right) = 0.$$

Поскольку столбцы матриц $\tilde{A}_2^{(11)}(t)$ и $C(t)$ линейно независимы, то последняя система имеет сильно нерегулярные периодические решения тогда и только тогда, когда выполняются равенства

$-F_2 F_1^{-1} x'^{[d]} + x''^{[d]} = 0$, $GF_1^{-1} x'^{[d]} + w_{[r_2]} = 0$. Пусть матрица $\hat{A}_{d,d}^{(11)}$ разбита соответственно представлению вектора $x^{[d]} = \text{col}(x^{[d]}, x^{[d]})$ на четыре блока $\hat{A}_{11}^{(11)}$, $\hat{A}_{12}^{(11)}$, $\hat{A}_{21}^{(11)}$, $\hat{A}_{22}^{(11)}$. Тогда система (14) запишется в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}^{[d]} &= \hat{A}_{11}^{(11)} x'^{[d]} + \hat{A}_{12}^{(11)} x''^{[d]}, \quad \dot{x}''^{[d]} = \hat{A}_{21}^{(11)} x'^{[d]} + \hat{A}_{22}^{(11)} x''^{[d]}, \\ \dot{w}^{[d_2]} &= \hat{H}_{d_2, d_2}^{(11)} w^{[d_2]} + \hat{H}_{d_2, r_2}^{(12)} w_{[r_2]} + \hat{P}_1 x^{[d]}, \\ \dot{w}_{[r_2]} &= \hat{H}_{r_2, d_2}^{(21)} w^{[d_2]} + \hat{H}_{r_2, r_2}^{(22)} w_{[r_2]} + \hat{P}_2 x^{[d]}, \\ \tilde{P}(t)x^{[d]} + \tilde{H}(t)w &= 0, \quad x''^{[d]} = F_2 F_1^{-1} x'^{[d]}, \quad w_{[r_2]} = -GF_1^{-1} x'^{[d]}, \end{aligned}$$

откуда получаем

$$\begin{aligned} \dot{x}^{[d]} &= (\hat{A}_{11}^{(11)} + \hat{A}_{12}^{(11)} F_2 F_1^{-1}) x'^{[d]}, \quad (F_2 F_1^{-1} (\hat{A}_{11}^{(11)} + \hat{A}_{12}^{(11)} F_2 F_1^{-1}) - (\hat{A}_{21}^{(11)} + \hat{A}_{22}^{(11)} F_2 F_1^{-1})) x'^{[d]} = 0, \\ \dot{w}^{[d_2]} &= \hat{H}_{d_2, d_2}^{(11)} w^{[d_2]} + (-\hat{H}_{d_2, r_2}^{(12)} GF_1^{-1} + \hat{P}_1 + \hat{P}_2 F_2 F_1^{-1}) x'^{[d]}, \\ GF_1^{-1} \dot{x}^{[d]} &= \hat{H}_{r_2, d_2}^{(21)} w^{[d_2]} + (\hat{H}_{r_2, r_2}^{(22)} GF_1^{-1} + \hat{P}_2 + \hat{P}_2 F_2 F_1^{-1}) x'^{[d]}, \\ \tilde{P}(t)x^{[d]} + \tilde{H}(t)w &= 0, \quad x''^{[d]} = F_2 F_1^{-1} x'^{[d]}, \quad w_{[r_2]} = -GF_1^{-1} x'^{[d]}, \end{aligned} \quad (17)$$

где матрицы \hat{P}_1 , \hat{P}_2 образованы первыми s столбцами матриц \hat{P}_1 , \hat{P}_2 , а \hat{P}_{21} , \hat{P}_{22} – оставшимися $d - s$ столбцами указанных матриц.

В силу [9] частотные спектры сильно нерегулярных периодических решений систем (8) и (17) совпадают.

Л е м м а. Пусть выполнены предположения (4)–(7), (10), (11) и (15). Тогда задача управления асинхронным спектром для системы (1) сводится к нахождению ω -периодической матрицы $U(t) = \hat{U} + \tilde{U}(t)$ такой, что система (17) имеет сильно нерегулярное периодическое решение $x^{[d]}(t)$, $w(t)$, при этом нерегулярное решение замкнутой системы (3) имеет вид $x(t) = \text{col}(x^{[d]}(t), Qw(t))$.

Заметим, что если у матрицы $\hat{A}_{11}^{(11)} + \hat{A}_{12}^{(11)} F_2 F_1^{-1}$ имеются чисто мнимые собственные числа

$$\pm i\lambda_j \quad (\lambda_j \in L; j = 1, \dots, l; 0 \leq 2l \leq s), \quad (18)$$

которым соответствует p_j групп элементарных делителей, то первая система в (17) имеет семейство Ω -периодических решений

$$x^{[d]}(t) = \sum_{j=1}^l a_j \cos \lambda_j t + b_j \sin \lambda_j t, \quad (19)$$

где коэффициенты a_j , b_j зависят от $2l'$ произвольных вещественных постоянных ($p_1 + \dots + p_l = l'$).

Имеет место

Т е о р е м а. Пусть в системе (1) у матрицы B первые d строк нулевые, а остальные строки линейно независимы, матрица коэффициентов $A(t)$ удовлетворяет условиям (10), (11), (15), а ее усреднение допускает нижнее блочно-треугольное представление (6) в критическом случае (7).

Задача управления асинхронным спектром с целевым множеством L для системы (1) с обратной связью (2) разрешима тогда и только тогда, когда выполняется тождество

$$\left(F_2 F_1^{-1} (\hat{A}_{11}^{(11)} + \hat{A}_{12}^{(11)} F_2 F_1^{-1}) - \hat{A}_{21}^{(11)} - \hat{A}_{22}^{(11)} F_2 F_1^{-1} \right) x'^{[d]}(t) \equiv 0 \quad (20)$$

и имеет место оценка

$$|L| \leq [s/2] + [(r - r_2)/2]. \quad (21)$$

Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть поставленная задача разрешима, т. е. найдется непрерывный ω -периодический матричный коэффициент $U(t)$ обратной связи (2) такой, что замкнутая система (3) имеет сильно нерегулярное периодическое решение $x(t)$ с целевым множеством частот L . Докажем, что при сделанных предположениях (4)–(7), (10), (11) и (15) условия теоремы являются необходимыми.

Согласно лемме, вектор $x(t) = \text{col}\left(x^{[d_1]}(t), x^{[d_2]}(t), Q\text{col}\left(w^{[d_2]}(t), w_{[r_2]}(t)\right)\right)$ удовлетворяет также системе (17). Пусть матрица $\hat{A}_{11}^{(11)} + \hat{A}_{12}^{(11)} F_2 F_1^{-1}$ имеет $0 \leq l \leq [s/2]$ пар чисто мнимых собственных чисел (18). Тогда компонента $x^{[d_1]}(t)$ нерегулярного решения $x(t)$ имеет вид (19) и мощность ее частотного спектра не превосходит величины $[s/2]$. Если таких собственных чисел нет, то $x^{[d_1]}(t) \equiv 0$. Поскольку $x^{[d_1]}(t)$ удовлетворяет второй системе в (17), то выполняется тождество (20).

Третья система в (17) является линейной неоднородной и имеет нерегулярное решение $w^{[d_2]}(t)$. Поскольку частотный спектр ее неоднородной части определяется вектором $x^{[d_1]}(t)$, а соответствующая однородная система является стационарной, то частотный спектр решения $w^{[d_2]}(t)$ содержит не более $[(r-r_2)/2]$ частот, отличных от чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_l$. Оставшиеся компоненты $x^{[d_1]}(t), w_{[r_2]}(t)$ нерегулярного решения системы (17) линейно выражаются через $x^{[d_1]}(t)$. Поэтому их частотные спектры могут содержать только числа $\lambda_1, \dots, \lambda_s$. Значит, для мощности частотного спектра нерегулярного решения $x(t)$ системы (3) имеет место оценка (21).

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть выполнены условия теоремы. Требуемый для решения поставленной задачи ω -периодический коэффициент обратной связи управления (2) представим в каноническом виде $U(t) = \hat{U} + \tilde{U}(t)$. При сделанных предположениях (4)–(7), (10), (11) и (15) в смысле существования нерегулярных колебаний системы (3) и (17) эквивалентны.

Поскольку матрица $\hat{A}_{11}^{(11)} + \hat{A}_{12}^{(11)} F_2 F_1^{-1}$ имеет собственные числа (18), то вектор $x^{[d_1]}(t)$, определяемый равенством (19), является решением первой системы в (17). Кроме этого, в силу тождества (20) $x^{[d_1]}(t)$ удовлетворяет также и второй системе в (17).

Пусть $\hat{H}_{d_2, d_2}^{(11)}$ – некоторая $d_2 \times d_2$ -матрица, имеющая собственные числа

$$\pm i\lambda_j \quad (\lambda_j \in L; j = l+1, \dots, l+m; 0 < m \leq [d_2/2]). \quad (22)$$

Выберем матрицы $\hat{H}_{d_2, r_2}^{(12)}, \hat{P}_{11}, \hat{P}_{12}$ таким образом, чтобы выполнялось равенство

$$-\hat{H}_{d_2, r_2}^{(12)} G F_1^{-1} + \hat{P}_{11} + \hat{P}_{12} F_2 F_1^{-1} = 0. \quad (23)$$

Этого всегда можно добиться, так как, по меньшей мере, \hat{P}_{11} линейно выражается через $\hat{H}_{d_2, r_2}^{(12)}$ и \hat{P}_{12} . С учетом (22), (23) третья система в (17) будет иметь периодическое решение

$$w^{[d_2]}(t) = \sum_{j=l+1}^{l+m} a_j \cos \lambda_j t + b_j \sin \lambda_j t, \quad (24)$$

где коэффициенты a_j, b_j зависят от $2m$ произвольных вещественных постоянных, а частоты λ_j принадлежат целевому множеству L .

Далее положим

$$\hat{H}_{r_2, d_2}^{(21)} = 0, \quad (25)$$

а матрицы $\hat{H}_{r_2, r_2}^{(22)}, \hat{P}_{21}, \hat{P}_{22}$ выберем так, чтобы выполнялось равенство

$$\hat{H}_{r_2, r_2}^{(22)} G F_1^{-1} + \hat{P}_{21} + \hat{P}_{22} F_2 F_1^{-1} = G F_1^{-1} \left(\hat{A}_{11}^{(11)} + \hat{A}_{12}^{(11)} F_2 F_1^{-1} \right). \quad (26)$$

Этого также всегда можно добиться, поскольку, в частности, \hat{P}_{21} линейно выражается через остальные матрицы. В силу (25), (26) четвертая система в (17) превращается в тождество.

Определим векторы $x^{[d_1]}(t)$ и $w_{[r_2]}(t)$ следующим образом:

$$x^{[d_1]}(t) = F_2 F_1^{-1} x^{[d]}(t), \quad w_{[r_2]}(t) = G F_1^{-1} x^{[d]}(t). \quad (27)$$

Тогда $x^{[d]}(t)$ и $w_{[r_2]}(t)$ будут удовлетворять последним двум равенствам в системе (17).

Если выбрать матрицы

$$\tilde{P}(t) \equiv 0, \quad \tilde{H}(t) \equiv 0, \quad (28)$$

то пятая система в (17) становится тождеством.

В итоге вектор

$$\text{col}\left(x^{[d]}(t), x^{[d]}(t), w^{[d_2]}(t), w_{[r_2]}(t)\right) \quad (29)$$

будет Ω -периодическим решением системы (17).

Из построенных выше матриц с учетом (22), (23), (25), (26) образуем матрицы

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} \hat{P}_{11} & \hat{P}_{12} \\ \hat{P}_{21} & \hat{P}_{22} \end{pmatrix}, \quad \hat{H} = \begin{pmatrix} \hat{H}_{d_2, d_2}^{(11)} & \hat{H}_{d_2, r_2}^{(12)} \\ \hat{H}_{r_2, d_2}^{(21)} & \hat{H}_{r_2, r_2}^{(22)} \end{pmatrix} \quad (30)$$

и рассмотрим матричные уравнения

$$B_{r,n} \hat{Y}_{n,d} = -\hat{A}_{r,d}^{(21)} + Q\hat{P}, \quad (31)$$

$$B_{r,n} \hat{Y}_{n,r} = -\hat{A}_{r,r}^{(22)} + Q\hat{H} \quad (32)$$

с неизвестными матрицами $\hat{Y}_{n,d}$ и $\hat{Y}_{n,r}$ размерностей $n \times d$ и $n \times r$ соответственно.

Пусть $E_{r,r}$ – единичная $(r \times r)$ -матрица. Так как ранг матрицы $B_{r,n}$ равен r , $r < n$, то система $B_{r,n}Y_0 + E_{r,r} = 0$ разрешима относительно $(n \times r)$ -матрицы Y_0 . Пусть Y_0 – какое-либо ее решение. Тогда матрицы $\hat{Y}_{n,d} = Y_0(\hat{A}_{r,d}^{(21)} - Q\hat{P})$ и $\hat{Y}_{n,r} = Y_0(\hat{A}_{r,r}^{(22)} - Q\hat{H})$ будут решениями уравнений (31) и (32). Для выбора стационарной составляющей коэффициента обратной связи положим

$$\hat{U} = \{\hat{Y}_{n,d}, \hat{Y}_{n,r}\}. \quad (33)$$

Рассмотрим также матричные уравнения

$$B_{r,n} \tilde{Y}_{n,d} = -\tilde{A}_{r,d}^{(21)}(t) + Q\tilde{P}(t), \quad (34)$$

$$B_{r,n} \tilde{Y}_{n,r}(t) = -\tilde{A}_{r,r}^{(22)}(t) + Q\tilde{H}(t), \quad (35)$$

где $\tilde{Y}_{n,d}$ и $\tilde{Y}_{n,r}$ – неизвестные ω -периодические матрицы размерностей $n \times d$ и $n \times r$ соответственно, а $\tilde{P}(t)$ и $\tilde{H}(t)$ согласно (28) тождественно равны нулю. В таком случае $Y_{n,d}(t) = Y_0 \tilde{A}_{r,d}^{(21)}(t)$ и $Y_{n,r}(t) = Y_0 \tilde{A}_{r,r}^{(22)}(t)$ будут решениями уравнений (34) и (35). Для выбора нестационарной составляющей коэффициента обратной связи положим

$$\tilde{U}(t) = \{\tilde{Y}_{n,d}(t), \tilde{Y}_{n,r}(t)\}. \quad (36)$$

Согласно лемме, вектор

$$x(t) = \text{col}\left(x^{[d]}(t), F_2 F_1^{-1} x^{[d]}(t), Q \text{col}\left(w^{[d_2]}(t), G F_1^{-1} x^{[d]}(t)\right)\right), \quad (37)$$

где $x^{[d]}(t)$, $w^{[d_2]}(t)$ определяются равенствами (19) и (24), является сильно нерегулярным решением замкнутой системы (3).

Таким образом, при выполнении условий теоремы для системы (1) разрешима задача управления асинхронным спектром. Требуемый коэффициент обратной связи управления (2) имеет канонический вид $U(t) = \hat{U} + \tilde{U}(t)$, слагаемые которого определяются равенствами (33) и (36). Сильно нерегулярное периодическое решение с целевым множеством частот L замкнутой управления (2) системы (3) представлено тригонометрическим многочленом вида (37).

Теорема доказана.

Работа выполнена в Институте математики НАН Беларуси в рамках ГПНИ «Конвергенция».

Літэратура

1. *Деменчук А. К.* // Докл. НАН Беларусі. 2009. Т. 53, № 4. С. 37–42.
2. *Деменчук А. К.* // Дыфэрэнц. ураўнення. 2011. Т. 47, № 9. С. 1241–1246.
3. *Деменчук А. К.* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2011. № 4. С. 11–16.
4. *Деменчук А. К.* // Докл. НАН Беларусі. 2011. Т. 55, № 5. С. 35–39.
5. *Деменчук А. К.* // Докл. НАН Беларусі. 2012. Т. 56, № 4. С. 27–31.
6. *Деменчук А. К.* // Тр. Ін-та матэматыкі НАН Беларусі. 2013. Т. 21, № 2. С. 22–29.
7. *Деменчук А. К.* // Дыфэрэнц. ураўнення. 2014. Т. 50, № 4. С. 439–445.
8. *Деменчук А. К.* // Дыфэрэнц. ураўнення. 2013. Т. 49, № 1. С. 3–8.
9. *Грудо Э. И.* // Дыфэрэнц. ураўнення. 1986. Т. 22, № 9. С. 1499–1504.

A. K. DEMENCHUK

CONTROL PROBLEM OF AN ASYNCHRONOUS SPECTRUM OF LINEAR SYSTEMS WITH A RIGHT BLOCK OF IMPERFECT RANK

Summary

We consider a linear control periodic system with reverse communication. It is supposed that a right block of coefficient matrix has an imperfect column rank. The control problem of an asynchronous spectrum is solved.

УДК 513.6

А. А. БОНДАРЕНКО

**БИРАЦИОНАЛЬНАЯ КОМПОЗИЦИЯ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ
НАД ПОЛЕМ ФУНКЦИЙ***Белорусский государственный университет**(Поступила в редакцию 30.05.2014)*

Пусть K – поле характеристики $\neq 2$, $X = (x_1, \dots, x_m)$, $Y = (y_1, \dots, y_n)$ и $Z = (z_1, \dots, z_{m+n})$ – независимые наборы переменных над K , $f(X)$ и $g(Y)$ – невырожденные квадратичные формы над полем K .

О п р е д е л е н и е. Если произведение $f(X) \cdot g(Y)$ бирационально эквивалентно над K квадратичной форме $h(Z)$ над K , т. е. $f(X) \cdot g(Y)$ представляется квадратичной K – формой $h(Z)$ над $K(X, Y)$ и $x_i, y_j \in K(Z)$, то будем говорить, что квадратичные формы $f(X)$ и $g(Y)$ образуют бирациональную композицию $h(Z)$ над полем K .

Первые результаты по проблеме композиции восходят к Гурвицу, который изучал задачу о «сумме квадратов»: найти наименьшее t при заданных m и n , чтобы выполнялось тождество $(x_1^2 + \dots + x_m^2)(y_1^2 + \dots + y_n^2) = \Phi_1^2 + \dots + \Phi_t^2$, где Φ_i – билинейные формы от x_1, \dots, x_m и y_1, \dots, y_n над K . Классические результаты Гурвица и Радона по этой задаче хорошо известны (см. [1, 2]). Обзор [3] посвящен результатам и методам в изучении такой композиции квадратичных форм. Пфистер продолжил рассматривать такие тождества, но полагал, что Φ_i – рациональные функции от x_1, \dots, x_m и y_1, \dots, y_n . Им описаны мультипликативные квадратичные формы [4]. В работе [5] получены первые общие теоремы о бирациональной композиции квадратичных форм над полем K . Полное решение проблемы бирациональной композиции квадратичных форм над локальными полями получено в [6], над конечными полями – в [7].

Пусть F – глобальное поле положительной характеристики $\neq 2$, т. е. F – конечное расширение поля $F_q(t)$, где F_q – конечное поле и t трансцендентно над F_q , $\text{char} F_q \neq 2$. Часто F называют полем функций.

Основная цель настоящей статьи – решение проблемы бирациональной композиции над полем функций F , $\text{char} F \neq 2$.

Решение проблемы бирациональной композиции $f(X)$ и $g(Y)$ над полем F , если $f(X)$ либо $g(Y)$ изотропна над F следует из теоремы 1 статьи [5]: произведение $f(X) \cdot g(Y)$ бирационально эквивалентно $h(Z)$ над F тогда и только тогда, когда $h(Z)$ – любая ненулевая квадратичная форма размерности $m + n$, невырожденная часть которой изотропна над F .

Полное решение проблемы бирациональной композиции, когда обе квадратичные формы $f(X)$ и $g(Y)$ анизотропные над полем функций F дает

Т е о р е м а. Пусть $f(X)$ и $g(Y)$ – анизотропные квадратичные формы над полем функций F , $\text{char} F \neq 2$, размерности m и n , $m \leq n$. Тогда $1 \leq m \leq n \leq 4$, бирациональная композиция $h(Z)$ над F квадратичных форм $f(X)$ и $g(Y)$ определена однозначно с точностью до F -эквивалентности следующим образом:

если 1) $1 = m \leq n \leq 4$, то бирациональная композиция существует всегда и $h(z_1, \dots, z_{n+1}) = \text{ag}(z_1, \dots, z_n)$, где $a \in D_F(f)$;

2) $m = n = 2$ и $m = n = 3$, то бирациональная композиция существует тогда и только тогда, когда $f(X)$ и $g(Y)$ эквивалентны с точностью до множителя над F , и если $m = n = 2$, то $h(z_1, z_2, z_3, z_4) = a \cdot g(z_1, z_2)$, где $a \in D_F(f)$, если $m = n = 3$, то $h(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) = \lambda(z_1^2 + \alpha z_2^2 + \beta z_3^2 + \alpha\beta z_4^2)$, где $g(Y) \sim \lambda f(X)$, $f(X) \sim a(x_1^2 + \alpha x_2^2 + \beta x_3^2)$;

3) $m = n = 4$, то бирациональная композиция существует тогда и только тогда, когда $f(X)$ и $g(Y)$ эквивалентны с точностью до множителя над F одной той же пфистеровой форме, и если $f(X) \sim a(x_1^2 + ax_2^2 + \beta x_3^2 + \alpha \beta x_4^2)$, $g(Y) \sim b(y_1^2 + ay_2^2 + \beta y_3^2 + a\beta y_4^2)$, то $h(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8) = ab(z_1^2 + az_2^2 + \beta z_3^2 + a\beta z_4^2)$;

4) $m = 2, n = 3$, то бирациональная композиция существует тогда и только тогда, когда $f(X)$ является с точностью до множителя над F подформой $g(Y)$, и если $f(X) \sim a(x_1^2 + ax_2^2)$, $g(Y) \sim b(y_1^2 + ay_2^2 + \beta y_3^2)$, то $h(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) = ab((z_1^2 + az_2^2 + \beta z_3^2 + a\beta z_4^2)$;

5) $m = 2, 3$ и $n = 4$, то бирациональная композиция существует тогда и только тогда, когда $g(Y)$ эквивалентна с точностью до множителя над F пфистеровой форме и $f(X)$ с точностью до множителя над F является подформой $g(Y)$, и если $f(X) \sim a(x_1^2 + ax_2^2)$ при $m = 2$, $f(X) \sim a(x_1^2 + ax_2^2 + \beta x_3^2)$ при $m = 3$ и $g(Y) \sim b(y_1^2 + ay_2^2 + \beta y_3^2 + a\beta y_4^2)$, то $h(z_1, \dots, z_{m+n}) = ab(z_1^2 + az_2^2 + \beta z_3^2 + a\beta z_4^2)$.

Основные понятия и обозначения традиционны (см. [8–11]).

1. Докажем утверждения о квадратичных формах над произвольным полем, которые будем использовать при доказательстве основной теоремы. Они представляют и самостоятельный интерес.

Предложение 1. Пусть $f(X)$ и $g(Y)$ – анизотропные квадратичные формы размерности m и n над полем K образуют бирациональную композицию $h(Z)$, $m \leq n$, $f(X)$ – пфистерова квадратичная форма, h_1 – невырожденная часть h . Тогда $h_1 \sim \beta_1 f + \dots + \beta_k f$.

Доказательство. Так как h – бирациональная композиция квадратичных форм $f(X)$ и $g(Y)$ над K , то согласно лемме 1 из [5] $D_{K(X)} h \ni \beta_1 f(X)$, где $\beta_1 \in D_{K(X)}$. И поэтому (см. [10, теорема 2.1])

$$h_1 \sim \beta_1 f + h_2. \quad (1)$$

Если h_2 – нулевая квадратичная форма, то теорема доказана. Если $h_2 \neq 0$, то продолжаем доказательство.

Пусть $K(U) = K(u_1, \dots, u_m)$, где u_1, \dots, u_m – независимые переменные над K . Квадратичная форма $f(X)$ пфистерова, поэтому по теореме 4.1 из [10] $f(U):f(X) \sim f(V)$ над $K(U)$, где $V = (v_1, \dots, v_m)$ – независимый набор переменных над K . Квадратичные формы $f(X)$ и $g(Y)$ анизотропны над K , и следовательно, анизотропны над $K(U)$, образуют бирациональную композицию $h(Z)$ над K , и следовательно, над $K(U)$, и $f(U):f(X) \cdot g(Y) = f(U)h(Z)$, и следовательно, $f(V):g(Y) \sim f(U)h(Z)$ над $K(U)$. Бирациональная композиция анизотропных квадратичных форм определена однозначно с точностью до эквивалентности согласно теореме 2 из [5], поэтому $f(U)h_1(z)$ эквивалентны $h_1(Z)$ над $K(U)$. Из (1) получаем

$$f(U)h_1(Z) \sim \beta_1 f(U)f(X) + f(U)h_2. \quad (2)$$

Но, как только что замечено, $f(U)h_1(Z)$ эквивалентно $h_1(Z)$ над $K(U)$ и $f(U)f(X)$ эквивалентно $f(X)$ над $K(U)$, а следовательно, по теореме 4 (см. [8, гл. 4]) из (1) и (2) получаем, что $f(U)h_2$ эквивалентно h_2 над $K(U)$.

Пусть $\beta_2 \in D_K(h_2)$, тогда квадратичная форма $\beta_2^{-1}h_2$ представляет 1 над K и $f(U) \in G_{K(U)}(\beta_2^{-1}h_2) \subset D_{K(U)}(\beta_2^{-1}h_2)$, где $G_{K(U)}(\beta_2^{-1}h_2)$ – группа подобий квадратичной формы $\beta_2^{-1}h_2$, последнее включение имеет место для всех форм, представляющих 1 (см. замечание 3.3 из [10]). А поэтому по теореме 2.1 из [10] $\beta_2^{-1}h_2 \sim f + h_3$, а следовательно, $h_2 \sim \beta_2 f + \beta_2 h_3$ и $h_1 \sim \beta_1 f + \beta_2 f + \beta_2 h_3$.

Если $\beta_2 h_3$ – нулевая квадратичная форма, то теорема доказана, если нет, то с $\beta_2 h_3$ работаем так же, как с h_2 , и получаем $\beta_2 h_3 \sim \beta_3 f + \beta_3 h_4$.

Размерность квадратичных форм h_k все время уменьшается на m и на некотором шаге h_{k+1} будет нулевой квадратичной формой. Размерность h_k не может быть меньше m , ибо в этом случае $f h_k \sim h_k$, и следовательно, $h_k \sim \beta_k f + \beta_k h_{k+1}$ и этого не может быть, если $\dim h_k < m$.

В итоге получаем

$$h_1 \sim \beta_1 f + \beta_2 f + \dots + \beta_k f.$$

В дальнейшем будет полезно

Предложение 2. Пусть $f(X)$ и $g(Y)$ – анизотропные квадратичные формы над K размерности m и n образуют бирациональную композицию $h(Z)$ и $f(X) \cdot g(Y) \in D_{K(X,Y)} q$, где $q = q(U)$ –

анизотропная квадратичная форма над K . Тогда h_1 – подформа q и $\text{rang } h \leq \text{rang } q$, где h_1 – невырожденная часть h .

Доказательство. Можно считать, что $h(Z) = h_1(z_1, \dots, z_r)$, где h_1 – невырожденная часть h и $r = \text{rang } h$, $q(U) = q(u_1, \dots, u_t)$, где $t = \text{rang } q$. Учитывая, что $h(Z)$ – бирациональная композиция $f(X)$ и $g(Y)$, имеем $h_1(z_1, \dots, z_r) \in D_{K(Z)}q$, следовательно, $h_1(z_1, \dots, z_r) \in D_{L(z_1, \dots, z_r)}q$, где $L = K(z_{r+1}, \dots, z_{m+n})$. По теореме 2 из [5] h_1 – анизотропная квадратичная форма над K , q – по условию анизотропная квадратичная форма над K . Поэтому h_1 и q – анизотропные квадратичные формы над L и $h_1 \in D_{L(z_1, \dots, z_r)}q$. А следовательно, по теореме 2.1 из [10] h_1 – подформа q . А значит, $\text{rang } q \geq \text{rang } h$. И предположение доказано.

2. Доказательство теоремы.

Из утверждения 66.2 (см. [11, с. 188]) следует, что если квадратичная форма над F анизотропна, то ее размерность не превосходит 4. Поэтому $1 \leq m \leq n \leq 4$, и возможности для m и n исчерпываются следующими случаями:

- 1) $m = 1, n \leq 4$;
- 2) $m = n = 2$ и $m = n = 3$;
- 3) $m = n = 4$;
- 4) $m = 2$ и $n = 3$;
- 5) $m = 2, 3$ и $n = 4$.

Из теоремы 2 статьи [5] следует, что если квадратичные формы образуют бирациональную композицию $h(Z)$ над F , то $h(Z)$ определена однозначно с точностью до эквивалентности над F . Укажем необходимые и достаточные условия на $f(X)$ и $g(Y)$ в случаях 1)–5), когда они образуют бирациональную композицию над F , и укажем квадратичную форму $h(Z)$, бирационально эквивалентную произведению $f(X)$ и $g(Y)$ над F . Это и докажет нашу теорему.

В случае 1) по определению $h(Z)$ – квадратичная форма от $(n + 1)$ переменной. Если $f(X) = ax_1^2$, то $f(X)g(Y) = ax_1^2 g(y_1 \dots y_n) = ag(z_1, \dots, z_n)$, где $a \in D_K(f)$, $n = 1, 2, 3$ либо 4 и

$$\begin{cases} z_1 = x_1 y_1 \\ \dots\dots\dots \\ z_n = x_1 y_n \\ z_{n+1} = x_1. \end{cases} \quad (3)$$

Из (3) следует, что

$$\begin{cases} x_1 = z_{n+1} \\ y_1 = \frac{z_1}{z_{n+1}} \\ \dots\dots\dots \\ y_n = \frac{z_n}{z_{n+1}}. \end{cases}$$

Это доказывает бирациональную эквивалентность над F произведения $f(X)g(Y)$ и квадратичной формы $h(z_1, \dots, z_{n+1}) = ag(z_1, \dots, z_n)$.

Случай 2), если $m = n = 2$, следует из теоремы 1 из [6] с учетом замечания 2 к этой теореме. А именно, бирациональная композиция $f(X)$ и $g(Y)$ существует тогда и только тогда, когда $f(X)$ и $g(Y)$ эквивалентны с точностью до множителя над F и $h(z_1, z_2, z_3, z_4) = ag(z_1, z_2)$, где $a \in D_K(f)$.

Случай 2), если $m = n = 3$, следует из теоремы статьи [12]. А именно, бирациональная композиция анизотропных тернарных квадратичных форм $f(X)$ и $g(Y)$ существует тогда и только тогда, когда $f(X)$ и $g(Y)$ эквивалентны с точностью до множителя над F . И если $g(Y) \sim \lambda f(X)$, $f(X) \sim a(x_1^2 + ax_2^2 + \beta x_3^2)$, то $h(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) = \lambda(z_1^2 + \alpha z_2^2 + \beta z_3^2 + \alpha \beta z_4^2)$.

Отметим общее наблюдение для всех случаев, когда существует бирациональная композиция $f(X)$ и $g(Y)$ над F . Так как $f(X)$ и $g(Y)$ анизотропны над F квадратичные формы, то невырожденная часть h_1 их бирациональной композиции h , согласно теореме 2 из [5], – анизотропная

квадратичная форма над F . Следовательно, $\dim h_1 = \text{rang} h_1 = \text{rang} h \leq 4$. Пусть $f(X) = af_1(X)$ и $g(Y) = bg_1(Y)$, где $1 \in D_K f_1$ и $1 \in D_K g_1$. Если бирациональная композиция $f_1(X)$ и $g_1(Y)$ равна q , то бирациональная композиция $f(X)$ и $g(Y)$, очевидно, равна $h = abq$. Согласно лемме 1 из [5], $f_1(X) \in D_{K(X)} q_1$ и $g_1(Y) \in D_{K(Y)} q_1$, где q_1 – невырожденная часть q , и следовательно, $f_1(X)$ и $g_1(Y)$ по теореме 2.1 из [10] подформы q_1 . Отметим, что существование бирациональной композиции $f(X)$ и $g(Y)$ над F равносильно существованию бирациональной композиции $f_1(X)$ и $g_1(Y)$ над F .

Теперь перейдем к случаю 3): $m = n = 4$. В этом случае f_1 и g_1 ранга 4, а следовательно, по только что проведенному наблюдению, $\text{rang} q_1 = 4$, и значит, $q_1 \sim f_1$ и $q_1 \sim g_1$ над F . Согласно теореме 4.1 из [10], f_1 , g_1 и h_1 – эквивалентные пфистеровы формы над F . А это и означает, что $f(X)$ и $g(Y)$ эквивалентны одной и той же пфистеровой форме с точностью до множителя над F .

Докажем достаточность условия в случае 3). Пусть $f(X) \sim a(x_1^2 + \alpha x_2^2 + \beta x_3^2 + \alpha \beta x_4^2)$ и $g(Y) \sim b(y_1^2 + \alpha y_2^2 + \beta y_3^2 + \alpha \beta y_4^2)$ эквивалентны с точностью до множителя над F одной и той же пфистеровой форме. Тогда $f(X)g(Y) = abf_1(X)g_1(Y)$ и бирациональная композиция $f_1(X)$ и $g_1(Y)$ согласно следствию 2 из [5] равна $q(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8) = z_1^2 + \alpha z_2^2 + \beta z_3^2 + \alpha \beta z_4^2$. Следовательно, бирациональная композиция $f(X)$ и $g(Y)$ равна $h = abq = ab(x_1^2 + \alpha x_2^2 + \beta x_3^2 + \alpha \beta x_4^2)$.

В случае 4) $m = 2$ и $n = 3$, пусть $f(X) = af_1(X) = a(x_1^2 + \alpha x_2^2)$, $g(Y) = bg_1(Y)$, где $1 \in D_K g_1$, и существует бирациональная композиция $f(X)$ и $g(Y)$, равная h , и f_1 и g_1 , равная q , то $h = abq$. Очевидно, $f_1 = x_1^2 + \alpha x_2^2$ – пфистерова квадратичная форма и, по определению, q – квадратичная форма размерности 5. Согласно предложению 1, невырожденная часть q – квадратичная форма $q_1 \sim f + \beta f \sim \langle 1, \alpha, \beta, \alpha \beta \rangle$, ибо ранг q – четное число между 3 и 5. Далее, согласно лемме 1 из [5], $g_1(Y) \in D_{K(Y)} q_1$, а следовательно, $q_1 \sim g_1 + \langle \gamma \rangle$ (см. [10], теорему 2.1). Но q_1 – пфистерова форма и $\gamma \in D_K q_1 = G_K q_1$, поэтому $\gamma q_1 \sim q_1 \sim \gamma g_1 + \langle 1 \rangle$. Но $q_1 \sim \langle 1 \rangle + \langle \alpha, \beta, \alpha \beta \rangle$, следовательно, по теореме 4 из [8, гл. 4] $\gamma g_1 \sim \langle \alpha, \beta, \alpha \beta \rangle$, а значит, $g_1 \sim \gamma \beta \langle 1, \alpha \rangle + \langle \gamma \alpha \rangle$. Последнее означает, что $f_1 = \langle 1, \alpha \rangle$ – подформа g_1 с точностью до множителя из F , а значит, f – подформа g с точностью до множителя из F . И необходимость доказана.

Докажем достаточность в случае 4). Пусть $f(X) \sim a(x_1^2 + \alpha x_2^2)$, $f(X)$ является подформой $g(Y)$ с точностью до множителя, поэтому $g(Y) \sim b(y_1^2 + \alpha y_2^2 + \beta y_3^2)$. Тогда $f(X)g(Y) = ab[(x_1^2 + \alpha x_2^2)(y_1^2 + \alpha y_2^2) + \beta(x_1 y_3)^2 + \beta \alpha(x_2 y_3)^2] = ab(z_1^2 + \alpha z_2^2 + \beta z_3^2 + \alpha \beta z_4^2) = h(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)$, где

$$\begin{cases} z_1 = x_1 y_1 + \alpha x_2 y_2 \\ z_2 = x_2 y_1 - x_1 y_2 \\ z_3 = x_1 y_3 \\ z_4 = x_2 y_3 \\ z_5 = y_3. \end{cases} \quad (4)$$

Из (4) x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 рационально выражаются через z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 . Это и завершает доказательство случая 4).

Перейдем к рассмотрению последнего случая 5). Пусть вначале $m = 2$ и $n = 4$. Тогда $f(X) = af_1(X) = a(x_1^2 + \alpha x_2^2)$, $g(Y) = bg_1(Y)$, где $1 \in D_K g_1$, и существует бирациональная композиция $f(X)$ и $g(Y)$, равная h , и f_1 и g_1 , равные q , то $h = abq$. Невырожденная часть q квадратичная форма q_1 анизотропна и поэтому $\text{rang} q = \dim q_1 \leq 4$. Но g_1 – подформа q и $\dim g_1 = 4$, поэтому, как уже было, $g_1 \sim q_1$ над F . Согласно предположению 1, как и в предыдущем случае, квадратичная форма $q_1 \sim \langle 1, \alpha, \beta, \alpha \beta \rangle$, т. е. является формой пфистера. Квадратичная форма f_1 является подформой квадратичной формы q_1 . Следовательно, $g(Y) = ag_1(Y)$ эквивалентна с точностью до множителя над F пфистеровой форме q_1 , а $f(X)$ является эквивалентной с точностью до множителя над F подформой квадратичной формы $g(Y)$. А это и доказывает необходимость.

Докажем достаточность. Пусть $f(X) = a(x_1^2 + \alpha x_2^2) = af_1$, можем считать $g(Y) = b(y_1^2 + \alpha y_2^2 + \beta y_3^2 + \alpha \beta y_4^2) = bg_1(Y)$. Тогда $f(X)g(Y) = abf_1 g_1$, где g_1 – пфистерова квадратичная форма, а f_1 – ее подформа. Поэтому, согласно следствию 2 из [5], существует бирациональная композиция $f_1(X)$ и $g_1(Y)$, равная $q(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) = z_1^2 + \alpha z_2^2 + \beta z_3^2 + \alpha \beta z_4^2$. А тогда бирациональная композиция $f(X)$ и $g(Y)$ равна $h(Z) = abq(Z)$.

И наконец, последний случай $m = 3, n = 4, f(X) = af_1(X) = a(x_1^2 + \alpha x_2^2 + \beta x_3^2), g(Y) = bg_1(Y)$, где $1 \in D_K g_1(Y)$. Существует бирациональная композиция $f(X)$ и $g(Y)$ над F , равная h , а $f_1(X)$ и $g_1(Y)$ равна q . Как и в предыдущем случае, невырожденная часть квадратичной формы q – квадратичная форма q_1 размерности 4 и $g_1 \sim q_1$ над F , а квадратичная форма f_1 – подформа g_1 , т. е. g_1 можно считать эквивалентной квадратичной форме $\langle 1, \alpha, \beta, \gamma \rangle$ и $g_1(y_1, y_2, y_3, 0) \sim \langle 1, \alpha, \beta \rangle$. Так как q – бирациональная композиция f_1 и g_1 , то $f_1(X) \cdot g_1(Y) \in D_{K(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, y_4)} q_1 = D_{K(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3)(y_4)} q_1$. А тогда по теореме 2.3 из [10] $f_1(X) \cdot g_1(Y) \in D_{K(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3)(y_4)} q_1$. И можем в последнем представлении $f_1(X) \cdot g_1(Y)$ формой q_1 положить $y_4 = 0$. Тогда получим $f_1(X) \cdot g_1(y_1, y_2, y_3, 0) \in D_{K(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3)} q_1$. Согласно теореме из [12], существует бирациональная композиция $f_1 = \langle 1, \alpha, \beta \rangle$ и $g_1(y_1, y_2, y_3, 0) = y_1^2 + \alpha y_2^2 + \beta y_3^2$, равная $m(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) = z_1^2 + \alpha z_2^2 + \beta z_3^2 + \alpha \beta z_4^2$. А тогда по предположению 2 квадратичная форма $\langle 1, \alpha, \beta, \alpha \beta \rangle$ является подформой q_1 . А так как $\dim q_1 = 4$, то $q_1 \sim \langle 1, \alpha, \beta, \alpha \beta \rangle$, т. е. q_1 является пфистеровой формой. Следовательно, $g(Y) = bg_1(Y)$ является с точностью до множителя над F пфистеровой квадратичной формой, а $f(X)$ – подформой $g(Y)$ с точностью до множителя над F . И необходимость доказана.

Рассмотрим достаточность в последнем случае. Пусть $f(X) = a(x_1^2 + \alpha x_2^2 + \beta x_3^2) = af_1(X)$ и $g(Y) = b(y_1^2 + \alpha y_2^2 + \beta y_3^2 + \alpha \beta y_4^2) = bg_1(Y)$, т. е. $g(Y)$ – пфистерова квадратичная форма с точностью до постоянного множителя над F , а $f(X)$ – ее подформа с точностью до постоянного множителя над F . $f(X) \cdot g(Y) = abf_1(X) \cdot g_1(Y)$, где $g_1(Y)$ – пфистерова квадратичная форма над F , а $f_1(X)$ – ее подформа. Тогда, согласно следствию 2 из [5], бирациональная композиция $f_1(X)$ и $g_1(Y)$ с точностью до эквивалентности над F равна $q(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7) = z_1^2 + \alpha z_2^2 + \beta z_3^2 + \alpha \beta z_4^2$. А тогда бирациональная композиция $f(X)$ и $g(Y)$ равна $h(Z) = abq(Z)$. И теорема полностью доказана.

Литература

1. Hurwitz A. // Math. Ann. 1923. Bd. 88, N 1/2. S. 1–25.
2. Radon J. // Abh. Math. Sem. Univer. Hamburg. 1922. Bd. 1, N 1. S. 1–14
3. Lam K. Y. // Quadratic and hermitian Forms. CMS Conf. Proc. Vol. 4. Providence, 1984. P. 173–192
4. Pfister A. // Arch. Math. 1965. Bd. 16, N 1. P. 363–370.
5. Бондаренко А. А. // Весті НАН Беларусі. Сер фіз.-мат. навук. 2007. № 4. С. 56–61.
6. Бондаренко А. А. // Мат. заметки. 2009. Т. 85, № 5. С. 661–670.
7. Бондаренко А. А. // Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. 2010. № 3. С. 90–93.
8. Серр Ж.-П. Курс арифметики. М., 1972.
9. Lam T. Y. Algebraic theory of quadratic forms. Bengamin, 1973.
10. Knebush M., Scharlau W. Algebraic Theory of quadratic forms. Generic methods and pfister forms. DMV Sem1. Boston, 1980.
11. O'Meara O. T. Introduction to Quadratic Forms. Berlin, 1971.
12. Бондаренко А. А. // Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. 2012. № 2. С. 106–110.

A. A. BONDARENKO

BIRATIONAL COMPOSITION OF QUADRATIC FORMS OVER A FUNCTION FIELD

Summary

Let $f(X)$ and $g(Y)$ be nonsingular quadratic forms over a field K having dimensions m and n , $\text{char} K \neq 2$. The following problem of a birational compositions $f(X)$ and $g(Y)$ is considered: under which conditions is the product $f(X) \cdot g(Y)$ birationally equivalent over K to a quadratic form $h(Z)$ of dimension $m+n$ over K ?

The main result of the paper is a complete solution of the birational composition problem for quadratic forms $f(X)$ and $g(Y)$ over the function field F , $\text{char} F \neq 2$.

УДК 513.51

Е. А. РОВБА, Е. В. ДИРВУК

РАЦИОНАЛЬНАЯ КВАЗИ-ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ЭРМИТА – ФЕЙЕРА

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы

(Поступила в редакцию 11.07.2014)

Введение. Интерполирование рациональными функциями на отрезке $[-1,1]$ по специальным системам узлов впервые было рассмотрено В. Н. Русаком [1] в 1962 г. В качестве узлов интерполирования выбирались нули рациональных функций Чебышева – Маркова, частным случаем которых являются классические узлы Чебышева первого рода. В работе [2] были построены рациональные интерполяционные функции типа Эрмита – Фейера.

Позже В. Н. Русак, Т. С. Мардвилко, Н. В. Гриб и др. использовали подобные интерполяционные функции для оценки рациональных приближений некоторых классов функций (см., напр., [3]).

Рациональная квази-интерполяция Эрмита – Фейера впервые была рассмотрена в работе Г. Мина [4]. В этой работе был построен соответствующий интерполяционный процесс и доказана его равномерная сходимость для функций $f \in C[-1,1]$ при весьма жестких условиях на полюсы – полюсы аппроксимирующих рациональных функций не должны иметь предельных точек на отрезке $[-1,1]$. В таком случае рациональные функции ведут себя подобно полиномам. Специфические свойства, аппроксимирующие рациональные функции, проявляются именно в том случае, когда полюса располагаются вблизи промежутка, на котором рассматривается приближение.

В настоящей работе построены интерполяционные рациональные функции типа Эрмита – Фейера на основании иных подходов в сравнении с [4]. В основе нашего метода лежат идеи работ [2, 5]. При этом доказывается равномерная сходимость рассматриваемого интерполяционного процесса для функции $f \in C[-1,1]$ при условии полноты соответствующей системы рациональных функций. В качестве узлов интерполирования выбираются нули рациональных функций Чебышева – Маркова второго рода.

Построение квази-интерполяционного процесса Эрмита – Фейера. Пусть числа a_k , $k = 0, 1, \dots, n-1$, являются действительными и $a_k \in (-1,1)$ либо попарно комплексно-сопряженными, $a_0 = 0$. Обозначим через $U_n(x)$ рациональную функцию Чебышева – Маркова второго рода (см., напр., [6])

$$U_n(x) = \frac{\sin \mu_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}, \mu_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \arccos \frac{x+a_k}{1+a_k x},$$

причем

$$\mu_n'(x) = -\frac{\lambda_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}, \lambda_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sqrt{1+a_k^2}}{1+a_k x}. \quad (1)$$

Функция $U_n(x)$ является рациональной порядка $n-1$ и имеет $n-1$ нулей на интервале $(-1,1)$:

$$-1 < x_{n-1} < x_{n-2} < \dots < x_1 < 1, \mu_n(x_k) = k\pi, k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Полагаем, что $x_0 = 1$ и $x_n = -1$. Тогда для всякой функции f , определенной на отрезке $[-1,1]$, можно построить следующую рациональную функцию:

$$H_n(x, f) = \sum_{k=0}^n f(x_k) A_k(x) + \sum_{k=1}^{n-1} y_k B_k(x), \quad (2)$$

где $y_k, k = 1, 2, \dots, n-1$, – произвольные действительные числа. Функции $A_k(x)$ и $B_k(x)$ определяются следующим образом:

$$A_k(x) = \frac{(1-x^2)(1-x_kx)}{\lambda_n(x)\lambda_n(x_k)} \left(\frac{U_n(x)}{x-x_k} \right)^2, \quad k = 1, 2, \dots, n-1; \quad (3)$$

$$A_0(x) = \frac{1+x}{2\lambda_n(x)\lambda_n(1)} U_n^2(x), \quad A_n(x) = \frac{1-x}{2\lambda_n(x)\lambda_n(-1)} U_n^2(x);$$

$$B_k(x) = \frac{(1-x^2)(1-x_k^2)}{\lambda_n(x)\lambda_n(x_k)} \frac{U_n^2(x)}{x-x_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1. \quad (4)$$

Покажем, что функция $H_n(x, f)$ обладает свойствами:

$$\begin{aligned} H_n(x_k, f) &= f(x_k), \quad k = 0, 1, \dots, n; \\ H_n'(x_k, f) &= y_k, \quad k = 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (5)$$

Действительно, при $k = 1, 2, \dots, n-1$, воспользовавшись правилом Лопиталья, получим

$$\lim_{x \rightarrow x_k} A_k(x) = \frac{(1-x_k^2)^2}{\lambda_n^2(x_k)} \left(\lim_{x \rightarrow x_k} \frac{\sin \mu_n(x)}{\sqrt{1-x^2}(x-x_k)} \right)^2 = \frac{1-x_k^2}{\lambda_n^2(x_k)} \left(\lim_{x \rightarrow x_k} \frac{\cos \mu_n(x)(-\lambda_n(x))}{\sqrt{1-x^2}} \right)^2 = 1.$$

Аналогично

$$\lim_{x \rightarrow x_k} A_k(x) = 1, \quad k = 0, n.$$

Если же $j, k = 0, 1, \dots, n, j \neq k$, то легко видеть, что

$$A_k(x_j) = 0, \quad A_k'(x_j) = 0.$$

Покажем теперь, что и

$$\lim_{x \rightarrow x_k} A_k'(x) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n-1. \quad (6)$$

Из равенств (2) получим

$$A_k'(x) = \frac{-x_k \lambda_n(x) - (1-x_kx) \lambda_n'(x)}{\lambda_n^2(x) \lambda_n(x_k)} \left(\frac{\sin \mu_n(x)}{x-x_k} \right)^2 + 2 \frac{1-x_kx}{\lambda_n(x) \lambda_n(x_k)} \frac{\sin \mu_n(x)}{x-x_k} \left(\frac{\sin \mu_n(x)}{x-x_k} \right)'. \quad (7)$$

Теперь нетрудно найти, что

$$\lim_{x \rightarrow x_k} \frac{\sin \mu_n(x)}{x-x_k} = -\cos \mu_n(x_k) \frac{\lambda_n(x)}{\sqrt{1-x_k^2}}, \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_k} \left(\frac{\sin \mu_n(x)}{x-x_k} \right)' = \frac{1}{2} \cos \mu_n(x_k) \mu_n''(x_k), \quad \mu_n''(x) = -\frac{x \lambda_n(x) + (1-x^2) \lambda_n'(x)}{(1-x^2)^{3/2}}.$$

Воспользовавшись этими равенствами, из (7) получим соотношения (6).

Таким образом, в итоге мы имеем:

$$\begin{aligned} A_k(x_j) &= \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k, \quad k = 0, 1, \dots, n; \end{cases} \\ A_k'(x_j) &= 0, \quad k, j = 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (9)$$

Что касается функции $B_k(x)$ (см. (4)), то очевидно

$$\begin{aligned} B_k(x_j) &= 0, \quad j, k = 0, 1, \dots, n; \\ B_k'(x_j) &= 0, \quad j, k = 1, 2, \dots, n-1, \quad j \neq k. \end{aligned} \quad (10)$$

Легко найти

$$\lim_{x \rightarrow x_k} B_k'(x) = \left(\frac{1-x_k^2}{\lambda_n(x_k)} \right)^2 \lim_{x \rightarrow x_k} \left(\frac{U_n^2(x)}{x-x_k} \right)' = \left(\frac{1-x_k^2}{\lambda_n(x_k)} \right)^2 \lim_{x \rightarrow x_k} \left(\frac{2U_n(x)U_n'(x)}{x-x_k} - \left(\frac{U_n(x)}{x-x_k} \right)^2 \right)'.$$

Учитывая равенство (8) и то, что

$$U_n'(x) = \frac{-\cos \mu_n(x) \lambda_n(x) \sqrt{1-x^2} + x \sin \mu_n(x)}{(1-x^2)^{3/2}},$$

отсюда получим

$$\lim_{x \rightarrow x_k} B_k'(x) = \left(\frac{1-x_k^2}{\lambda_n(x_k)} \right)^2 \lim_{x \rightarrow x_k} \frac{U_n(x)}{x-x_k} \left(\frac{-\cos \mu_n(x) \lambda_n(x)}{1-x_k^2} - \frac{U_n(x)}{x-x_k} \right) = 1, \quad (11)$$

$$k = 1, 2, \dots, n-1.$$

На основании равенств (9)–(11) получим требуемые свойства (5) функции $H(x, f)$.

Из равенств (5) следует, что, во-первых, функция $H(x, f)$ является квази-интерполяционной, так как добавляются в качестве узлов точки $x_0 = 1$ и $x_n = -1$ (см., напр., [7]), во-вторых, безусловно является функцией типа Эрмита – Фейера (см., напр., [8]).

Пусть b_1, b_2, \dots, b_{n-1} – нули функции $\lambda_n(x)$, см. (1). Ясно, что эти числа находятся вне отрезка $[-1, 1]$.

Л е м м а 1. *Функция $H_n(x, f)$ является рациональной порядка не выше $2n-1$ и точной для всякой рациональной функции вида*

$$r_{2n-1}(x) = \frac{p_{2n-1}(x)}{\prod_{k=1}^{n-1} (x-b_k)(1+a_k x)}, \quad (12)$$

где $p_{2n-1}(x)$ – произвольный полином степени не выше $2n-1$.

Действительно, на основании равенства (2) и формул (3), (4) нетрудно посчитать, что

$$H_n(x, f) = \frac{q_{2n-1}(x)}{\prod_{k=1}^{n-1} (x-b_k)(1+a_k x)},$$

где $q_{2n-1}(x)$ – некоторый полином степени не выше $2n-1$. Тогда для всякой функции $r_{2n-1}(x)$ вида (12) равенство

$$H_n(x, r_{2n-1}) \equiv r_{2n-1}(x)$$

следует из условий (5).

Сходимость квази-интерполяционного процесса Эрмита – Фейера. Полагаем $y_k = 0$, $k = 1, 2, \dots, n-1$. Тогда

$$H_n(x, f) = \sum_{k=0}^n f(x_k) A_k(x). \quad (13)$$

Очевидно, оператор

$$H_n : C[-1, 1] \rightarrow C[-1, 1]$$

является линейным, положительным и точным для всякой функции $r_{2n-1}(x)$ вида (12), в частности

$$H_n(x, 1) \equiv 1. \quad (14)$$

Т е о р е м а. *Если ряд*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (1-|c_n|), \quad c_n = a_n^{-1} - \sqrt{a_n^{-2} - 1}, \quad |c_n| < 1, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (15)$$

расходится, то для любой функции $f \in C[-1, 1]$ соответствующая последовательность $\{H_n(x, f)\}$ равномерно сходится к функции f на отрезке $[-1, 1]$.

Отметим, что расходимость ряда (13) является необходимым и достаточным условием замкнутости системы функции $\left\{ \frac{1}{1+a_k x} \right\}_{k=0}^{\infty}$ в $C[-1,1]$ (см. [9, с. 294]).

В качестве вспомогательного результата приведем следующую лемму.

Л е м м а 2. *Справедливо равенство*

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda_n(x_0)} + \frac{1}{\lambda_n(x_n)} \right) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_n(x_k)} = 1. \quad (16)$$

Равенство (16) содержится в работе [10].

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы. Из соотношений (13) и (14) следует, что

$$f(x) - H_n(x, f) = \sum_{k=0}^n (f(x) - f(x_k)) A_k(x).$$

Зададим произвольное число ε , $\varepsilon > 0$. Тогда найдется число δ , $0 < \delta(\varepsilon) \leq 1$, такое, что

$$\forall x', x'' \in [-1, 1], |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Пусть $x \in [-1, 1]$. Обозначим через $\Omega_x = \{k : k = 0, 1, \dots, n, |x - x_k| < \delta\}$, $C\Omega_x = \{0, 1, \dots, n\} \setminus \Omega_x$. Тогда

$$|f(x) - H_n(x, f)| \leq \varepsilon \sum_{k \in \Omega_x} A_k(x) + 2M \sum_{k \in C\Omega_x} A_k(x), \quad (17)$$

где $M = \|f\|_{C[-1,1]}$.

Так как $A(x) \geq 0$, $x \in [-1, 1]$, $k = 0, 1, \dots, n$, то из равенства (14) следует, что

$$\sum_{k \in \Omega_x} A_k(x) \leq 1,$$

и остается оценить вторую сумму в правой части неравенства (17).

Здесь заметим, что в случае, когда $k \in C\Omega_x$, $|x - x_k| \geq \delta$. Воспользовавшись неравенством

$$(1 - x^2)U_n^2(x) \leq 1, \quad x \in [-1, 1],$$

из (3) получим

$$A_k(x) \leq \frac{2}{\delta^2 \lambda_n(x) \lambda_n(x_k)}, \quad k \neq 0, n.$$

Если, например, $|x - x_0| \geq \delta$, то

$$A_0(x) = \frac{1}{2\lambda_n(1)\lambda_n(x)} \frac{\sin^2 \mu_n(x)}{1-x} \leq \frac{1}{2\lambda_n(1)\lambda_n(x)\delta^2}.$$

Аналогично поступаем в случае, если $n \in C\Omega_x$. Таким образом, имеем

$$\sum_{k \in C\Omega_x} A_k(x) \leq \frac{2}{\lambda_n(x)\delta^2} \left(\frac{1}{2\lambda_n(1)} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_n(x_k)} + \frac{1}{2\lambda_n(-1)} \right).$$

Теперь воспользуемся леммой 2 и перейдем к неравенству (17). В итоге получим

$$|f(x) - H_n(x, f)| \leq \varepsilon + \frac{2}{\lambda_n(x)\delta^2}.$$

Остается заметить, что условие (15) обеспечивает равномерную сходимость к нулю последовательности $\{\lambda_n^{-1}(x)\}$ на отрезке $[-1, 1]$. Теорема доказана.

Литература

1. Русак В. Н. // Докл. АН БССР. 1962. Т. 4, № 9. С. 548–550.
2. Ровба Е. А. Интерполяция и ряды Фурье в рациональной аппроксимации. Гродно, 2001.
3. Гриб Н. В. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз-мат. навук. 2013. № 4. С. 92–100.
4. Min G. // J. of Computation and Applied Mathematics. 1998. № 94. P. 1–12.
5. Ровба Е. А. // Мат. заметки. 1993. Вып. 2. Т. 53, № 3. С. 114–121.
6. Русак В. Н. Рациональные функции как аппарат приближения. Минск, 1979.
7. Szisz P. // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 1959. Vol. 10. P. 413–439.
8. Szabados J., Vertesi P. Interpolation of Functions. Singapore, 1990.
9. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. М., 1965.
10. Ровба Е. А., Смотрицкий К. А. // Докл. НАН Беларуси. 2008. Т. 52, № 5. С. 11–15.

Y. A. ROVBA, Y. V. DIRVUK

RATIONAL QUASI-INTERPOLATION HERMITE – FEJER

Summary

In this paper we studied the question of constructing rational interpolation operators of Hermite – Fejer. **Uniform convergence** of considered interpolation process for function on condition of completeness of system of rational functions is thus proved. Also, we proved uniform convergence for considered interpolation process for functions $f(x) \in C[-1,1]$ of complete system of rational functions The rational interpolating functions construction with nodes in the zeros of Chebyshev – Markov polynomials of the second kinds.

УДК 512.542

Л. П. АВДАШКОВА¹, С. Ф. КАМОРНИКОВ², О. Л. ШЕМЕТКОВА³**ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ПОДГРУПП ФРАТТИНИЕВА ТИПА**¹Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации²Гомельский филиал Международного университета «МИТСО»³Российский экономический университет им. Г. В. Плеханова (Москва, Россия)

(Поступила в редакцию 10.12.2013)

Хорошо известно (см., напр., [1]), что если N – нормальная подгруппа конечной группы G , то подгруппа Фраттини $\Phi(N)$ подгруппы N содержится в подгруппе Фраттини $\Phi(G)$ группы G . В связи с этим результатом Л. А. Шеметковым была предложена задача нахождения других подгрупп фраттиниева типа, обладающих описанным свойством. Один из вариантов этой задачи зафиксирован в работе [2] как вопрос 4.4.10:

для каких регулярных t -функторов θ выполняется включение $\Phi_\theta(N) \subseteq \Phi_\theta(G)$ для каждой конечной группы G и любой ее нормальной подгруппы N ?

Простые примеры показывают, что существуют подгрупповые t -функторы θ , для которых θ -подгруппа Фраттини не обладает отмеченным свойством вложения. В частности, это имеет место для подгруппового t -функтора θ , который сопоставляет каждой группе саму группу и множество всех ее ненормальных максимальных подгрупп. В этом случае для любой разрешимой примитивной группы G непростого порядка и ее единственной минимальной нормальной подгруппы N , очевидно, выполняются равенства $\Phi_\theta(G) = 1$ и $\Phi_\theta(N) = N$. Поэтому $\Phi_\theta(N)$ не содержится в $\Phi_\theta(G)$.

В данной работе приводится характеристика подгрупповых t -функторов, удовлетворяющих условиям вопроса 4.4.10, и строятся серии подгрупп фраттиниева типа со свойством $\Phi_\theta(N) \subseteq \Phi_\theta(G)$.

Рассматриваются только конечные группы, используются определения и обозначения, принятые в [1] и [2]. Для удобства читателя приведем основные из них. Центральное место в работе занимает понятие подгруппового функтора, которое введено А. Н. Скибой в монографии [3].

Пусть A, B – группы, $\varphi: A \rightarrow B$ – эпиморфизм. И пусть Ω и Σ – некоторые системы подгрупп из A и B соответственно. Обозначим через Ω^φ множество $\{H^\varphi \mid H \in \Omega\}$ всех образов в B всех подгрупп из Ω , а через $\Sigma^{\varphi^{-1}}$ – множество $\{H^{\varphi^{-1}} \mid H \in \Sigma\}$ всех полных прообразов в A всех подгрупп из Σ .

Пусть X – непустой класс конечных групп. Отображение θ , сопоставляющее каждой группе $G \in X$ некоторую непустую систему $\theta(G)$ ее подгрупп, называется *подгрупповым X -функтором* (или, иначе, *подгрупповым функтором на X*), если для любого изоморфизма φ каждой группы $G \in X$ выполняется равенство $(\theta(G))^\varphi = \theta(G^\varphi)$.

Если X – класс всех групп, то, следуя [2], подгрупповой X -функтор будем называть просто *подгрупповым функтором*. *Разрешимым подгрупповым функтором* будем называть подгрупповой X -функтор, если X – класс всех разрешимых групп.

Подгрупповой X -функтор θ называется *регулярным*, если для любого эпиморфизма $\varphi: A \rightarrow B$, где $A, B \in X$, имеют место включения $(\theta(A))^\varphi \subseteq \theta(B)$, $(\theta(B))^{\varphi^{-1}} \subseteq \theta(A)$ и, кроме того, $G \in \theta(G)$ для любой группы G из X . В случае, когда класс X является гомоморфом (т. е. X замкнут относительно взятия факторгрупп), регулярность подгруппового X -функтора θ означает, что для любой нормальной подгруппы N группы $G \in X$ всегда выполняются следующие условия:

1) из $H \in \theta(G)$ следует $HN/N \in \theta(G/N)$;

2) из $HN/N \in \theta(G/N)$ следует $H \in \theta(G)$.

Пусть θ – подгрупповой функтор на X , который выделяет в каждой группе G множество $\theta(G)$, содержащее группу G и некоторые ее максимальные подгруппы. Следуя [2], этот X -функтор будем называть *подгрупповым t -функтором на X* или просто *t -функтором на X* . С учетом изложенного выше вполне понятны термины *подгрупповой t -функтор* (X – класс всех групп) и *разрешимый подгрупповой t -функтор* (X – класс всех разрешимых групп).

Пусть θ – подгрупповой t -функтор на X . Для группы $G \in X$ обозначим через $\Phi_\theta(G)$ и будем называть θ -подгруппой Фраттини (или *обобщенной подгруппой Фраттини*) пересечение всех подгрупп из $\theta(G)$.

Отметим, что определение θ -подгруппы Фраттини корректно, так как для любой группы $G \in X$ множество $\theta(G)$ определено и содержит по крайней мере одну подгруппу, а именно, подгруппу G . При этом $\Phi_\theta(G) = G$ тогда и только тогда, когда $\theta(G) = \{G\}$. Кроме того, так как для группы G множество $\theta(G)$ автоморфно допустимо, то $\Phi_\theta(G)$ – характеристическая подгруппа группы G .

Ключевую роль в данной работе играет следующее

О п р е д е л е н и е. Пусть X – непустой класс групп, замкнутый относительно взятия нормальных подгрупп. Подгрупповой t -функтор θ на X называется *нормально вложенным* (или *S_n -вложенным*), если для любой группы $G \in X$ и каждой ее нормальной подгруппы N всегда из $M \in \theta(G)$ и $M \cap N \neq N$ следует, что найдется подгруппа $H \in \theta(N)$, отличная от N , для которой $M \cap N \subseteq H$.

Л е м м а 1. Пусть M и S – максимальные подгруппы группы G , дополняющие ее абелев главный фактор N/K . Если θ – регулярный t -функтор и $M \in \theta(G)$, то $S \in \theta(G)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть G – группа наименьшего порядка, для которой лемма не верна. Рассмотрим группу G/K . В ней максимальные подгруппы M/K и S/K дополняют абелеву минимальную нормальную подгруппу N/K . Так как подгрупповой t -функтор θ регулярен, то $M/K \in \theta(G/K)$. Если $K \neq 1$, то ввиду выбора группы G имеем, что $S/K \in \theta(G/K)$. Но тогда снова из регулярности θ имеем $S \in \theta(G)$. Пришли к противоречию с выбором группы G .

Итак, $K = 1$ и N – абелева минимальная нормальная подгруппа группы G , дополняемая максимальными подгруппами M и S . Пусть $\varphi_1: m \mapsto Nm$, где $m \in M$, – естественный изоморфизм групп M и $MN/N = G/N$, а $\varphi_2: s \mapsto Ns$, где $s \in S$, – естественный изоморфизм групп S и $SN/N = G/N$.

Рассмотрим отображение φ подгруппы M в подгруппу S , равное композиции отображений φ_2^{-1} и φ_1 , т. е. $\varphi(m) = \varphi_2^{-1}(\varphi_1(m))$. Очевидно, отображение φ является изоморфизмом подгрупп M и S .

Так как $G = NM$ и $N \cap M = 1$, то, очевидно, каждый элемент x группы G единственным образом представим в виде $x = nm$, где $n \in N$, $m \in M$. В частности, элемент m единственным образом представим в виде $m = n^*s$, где $n^* \in N$ и $s \in S$. Тогда

$$\varphi(m) = \varphi_2^{-1}(\varphi_1(m)) = \varphi_2^{-1}(Nm) = \varphi_2^{-1}(Ns) = s.$$

Из равенства $m = n^*s$ следует также, что $Nm = N\varphi(m)$. Поэтому $m(\varphi(m))^{-1} \in N$. Так как подгруппа N является абелевой, то $n^{m(\varphi(m))^{-1}} = n$ для любого элемента $n \in N$. Отсюда имеем, что $n^m = n^{\varphi(m)}$ для любого элемента $n \in N$.

Рассмотрим отображение $f: nm \mapsto n\varphi(m)$. Покажем, что f – автоморфизм группы G . Пусть x, y – произвольные элементы из G . Тогда $x = n_1m_1, y = n_2m_2$, где $n_1, n_2 \in N, m_1, m_2 \in M$. Поэтому

$$xy = (n_1m_1)(n_2m_2) = (n_1n_2^{m_1^{-1}})(m_1m_2),$$

а значит,

$$f(xy) = (n_1n_2^{m_1^{-1}})\varphi(m_1m_2) = (n_1n_2^{m_1^{-1}})\varphi(m_1)\varphi(m_2).$$

С другой стороны,

$$f(x)f(y) = (n_1\varphi(m_1))(n_2\varphi(m_2)) = (n_1n_2^{\varphi(m_1^{-1})})(\varphi(m_1)\varphi(m_2)).$$

Так как $n_2^{m_i^{-1}} = n_2^{q(m_i^{-1})}$, то $f(xy) = f(x)f(y)$. При этом отображение f является биективным. Значит, $f \in \text{Aut}(G)$.

Так как θ – подгрупповой m -функтор, то выполняется равенство $(\theta(G))^f = \theta(G^f) = \theta(G)$. Поэтому $M^f = \varphi(M) = S \in \theta(G)$. Снова пришли к противоречию с выбором группы G . Лемма доказана.

Т е о р е м а 1. *Справедливы следующие утверждения:*

1) *если θ – нормально вложенный подгрупповой m -функтор, то $\Phi_\theta(N) \subseteq \Phi_\theta(G)$ для любой группы G и каждой ее нормальной подгруппы N ;*

2) *если θ – разрешимый регулярный m -функтор и для любой разрешимой группы G и каждой ее нормальной подгруппы N выполняется включение $\Phi_\theta(N) \subseteq \Phi_\theta(G)$, то θ является нормально вложенным.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Пусть θ – нормально вложенный подгрупповой m -функтор. Покажем, что в этом случае для любой группы G и каждой ее нормальной подгруппы N выполняется включение $\Phi_\theta(N) \subseteq \Phi_\theta(G)$.

Обозначим $\Phi_\theta(N)$ через K . Предположим, что K не содержится в $\Phi_\theta(G)$. Тогда в $\theta(G)$ найдется некоторая максимальная подгруппа M , которая не содержит K . Из максимальной M следует, что $KM = G$. Поэтому ввиду тождества Дедекинда $N = K(N \cap M)$. Так как $K \cap M$ – собственная подгруппа из N , то из нормальной вложенности m -функтора θ следует, что найдется максимальная подгруппа $H \in \theta(N)$, содержащая $N \cap M$. Но тогда справедливо равенство

$$N = K(N \cap M) = KH = H.$$

Пришли к противоречию с тем, что H – собственная подгруппа из N .

Таким образом, если θ – нормально вложенный подгрупповой m -функтор, то для любой группы G и каждой ее нормальной подгруппы N имеет место включение $\Phi_\theta(N) \subseteq \Phi_\theta(G)$.

2) Пусть теперь θ – разрешимый регулярный m -функтор и для любой разрешимой группы G и каждой ее нормальной подгруппы N выполняется включение $\Phi_\theta(N) \subseteq \Phi_\theta(G)$. Покажем, что подгрупповой m -функтор θ является нормально вложенным.

Предположим, что утверждение не верно, т. е. подгрупповой m -функтор θ не является нормально вложенным. Тогда найдется по крайней мере одна разрешимая группа G , которая обладает нормальной подгруппой N и такой максимальной подгруппой M , принадлежащей $\theta(G)$, что M не содержит N , а все максимальные подгруппы из N , содержащие $M \cap N$, не принадлежат $\theta(N)$. Среди всех таких групп G выберем группу наименьшего порядка.

Пусть $L = \text{Core}_G(M) \cap N$. И пусть K/L – такой главный фактор группы G , что $K \subseteq N$. Тогда K не содержится в M и из разрешимости группы G следует, что $G/L = (M/L)(K/L)$ и $(M/L) \cap (K/L) = 1$. Рассмотрим два случая.

1) Пусть $L \neq 1$. Тогда из регулярности m -функтора θ имеем, что $M/L \in \theta(G/L)$. Кроме того, M/L не содержит N/L . Поэтому, ввиду выбора группы G , найдется такая максимальная подгруппа H/L группы N/L , принадлежащая $\theta(N/L)$, что

$$(M/L) \cap (N/L) \subseteq H/L.$$

Так как m -функтор θ является регулярным, то $H \in \theta(N)$. Пришли к противоречию с выбором группы G .

2) Пусть теперь $L = 1$. Тогда K – минимальная нормальная подгруппа группы G . При этом $MK = G$ и $M \cap K = 1$. Поэтому $(M \cap N)K = N$ и $(M \cap N) \cap K = 1$. Ввиду утверждения А.4.13 из [1], $K \subseteq \text{Soc}(N)$.

Пусть H – произвольная максимальная подгруппа группы N , не содержащая K . Тогда в K найдется такая минимальная нормальная подгруппа V группы N , что $HV = N$ и $H \cap V = 1$. Так как $K \subseteq \text{Soc}(N)$, то $K = V \times V^*$, где V^* – нормальная подгруппа группы N . Простая проверка показывает, что $(M \cap N)V^*$ – максимальная подгруппа группы N . Так как $M \cap N \subseteq (M \cap N)V^*$, то $(M \cap N)V^* \notin \theta(N)$. А так как максимальная подгруппа $(M \cap N)V^*$ дополняет V , то на основании леммы 1 имеем, что H не принадлежит множеству $\theta(N)$.

Итак, все θ -подгруппы группы N , отличные от N , содержат K . Значит, $K \subseteq \Phi_\theta(N)$. Отсюда и из условия $\Phi_\theta(N) \subseteq \Phi_\theta(G)$ имеем $K \subseteq M$. Снова пришли к противоречию. Теорема доказана.

С л е д с т в и е 1. Пусть θ – разрешимый регулярный подгрупповой t -функтор. Тогда и только тогда $\Phi_\theta(N) \subseteq \Phi_\theta(G)$ для любой группы G и каждой ее нормальной подгруппы N , когда t -функтор θ является нормально вложенным.

Пусть π – некоторое множество простых чисел. Пусть θ – отображение, сопоставляющее каждой группе G саму группу G и множество всех максимальных подгрупп группы G , индексы которых не делятся на числа из π . Так как для любого изоморфизма $\varphi: G \rightarrow G^\varphi$ и каждой максимальной подгруппы M группы G справедливо равенство $|G : M| = |G^\varphi : M^\varphi|$, то θ – подгрупповой t -функтор. Проверка показывает, что t -функтор θ является нормально вложенным. Будем обозначать далее подгруппу $\Phi_\theta(G)$ через $\Phi_\pi(G)$. В случае, когда множество π состоит из одного простого числа p , θ -подгруппа Фраттини группы G совпадает с введенной Дескинсом в [4] подгруппой $\Phi_p(G)$.

С л е д с т в и е 2. Для любого множества π простых чисел, любой группы G и каждой ее нормальной подгруппы N справедливо включение $\Phi_\pi(N) \subseteq \Phi_\pi(G)$.

Если π – множество простых чисел, то через π^n обозначим множество n -ых степеней всех простых чисел из π . Пусть θ – подгрупповой t -функтор, выделяющий в каждой группе G все максимальные подгруппы, индексы которых принадлежат множеству $(\bigcup_{1 \leq i \leq n} \pi^i)$. Обобщенную θ -подгруппу Фраттини группы G в этом случае будем обозначать через $\Phi_\pi^n(G)$. Если же $\pi = \mathbf{P}$ – множество всех простых чисел, то вместо $\Phi_\pi^n(G)$ будем писать $\Phi^n(G)$. В частности, $\Phi^1(G)$ – пересечение всех максимальных подгрупп группы G , имеющих простой индекс. Проверка показывает, что t -функтор θ , выделяющий в каждой группе G все максимальные подгруппы, индексы которых принадлежат множеству $(\bigcup_{1 \leq i \leq n} \pi^i)$, является нормально вложенным.

С л е д с т в и е 3. Для любого натурального числа n , любой группы G и каждой ее нормальной подгруппы N справедливо включение $\Phi^n(N) \subseteq \Phi^n(G)$.

С л е д с т в и е 4. Для любой группы G и каждой ее нормальной подгруппы N справедливо включение $\Phi^1(N) \subseteq \Phi^1(G)$.

Напомним, что класс групп X называется нормально наследственным (или S_n -замкнутым), если всегда из $G \in X$ и $N \triangleleft G$ следует $N \in X$.

Класс групп F называется классом Фиттинга (или радикальным классом), если выполняются следующие условия:

- 1) F – нормально наследственный класс;
- 2) из $G = AB$, где $A \triangleleft G$, $B \triangleleft G$, $A \in F$, $B \in F$, всегда следует, что $G \in F$.

Пусть F – непустой класс Фиттинга. Тогда F -радикалом группы G называется наибольшая нормальная подгруппа из G , принадлежащая F (из определения класса Фиттинга следует, что такая подгруппа существует в любой группе; она совпадает с произведением всех нормальных F -подгрупп из G). В дальнейшем F -радикал группы G обозначается через G_F .

Следующая лемма устанавливает простейшие свойства F -радикала группы. Доказательство ее можно найти в работе [1].

Л е м м а 2. Пусть F – непустой класс Фиттинга, N – субнормальная подгруппа группы G . Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) $N_F = N \cap G_F$;
- 2) $G_F = \langle K \mid K \in \text{sn}(G), K \in F \rangle$.

Пусть F – непустой класс групп. Подгруппа V группы G называется F -инъектором, если для любой субнормальной подгруппы N группы G пересечение $V \cap N$ является F -максимальной подгруппой в N .

Как показано в работе [5], для любого класса Фиттинга F в каждой конечной разрешимой группе существует единственный класс сопряженных F -инъекторов.

Если V – F -инъектор группы, то для всех $\alpha \in \text{Aut}(G)$ подгруппа V^α является F -инъектором. Поэтому отображение θ , выделяющее в каждой группе G саму группу G и все ее максимальные подгруппы, содержащие хотя бы один F -инъектор, является подгрупповым t -функтором.

Подгрупповым t -функтором будет и отображение θ , выделяющее в каждой группе G множество подгрупп, содержащее G и все те максимальные подгруппы группы G , которые содержат F -радикал G_F .

Предложение 1. Пусть F – непустой класс Фиттинга и θ – t -функтор, выделяющий в каждой группе множество подгрупп, содержащее саму группу и все те максимальные подгруппы, которые содержат ее F -радикал. Тогда $\Phi_\theta(N) \subseteq \Phi_\theta(G)$ для любой группы G и каждой ее нормальной подгруппы N .

Доказательство. Ввиду леммы 2 справедливо равенство $N_F = N \cap G_F$. Поэтому, если $M \in \theta(G)$ и подгруппа N не содержится в M , то $N_F = N \cap G_F \subseteq N \cap M$. Пусть H – максимальная подгруппа группы N , содержащая $N \cap M$. Тогда $N_F \subseteq H$, а значит, $H \in \theta(N)$. Следовательно, подгрупповой t -функтор θ является нормально вложенным. Отсюда, ввиду теоремы 1, следует, что $\Phi_\theta(N) \subseteq \Phi_\theta(G)$. Предложение доказано.

Если F – класс всех нильпотентных групп, то $G_F = F(G)$ – подгруппа Фиттинга группы G . Поэтому частным случаем предложения 1 является следующий результат.

Предложение 2. Пусть θ – t -функтор, выделяющий в каждой группе множество подгрупп, содержащее саму группу и все те максимальные подгруппы, которые содержат ее подгруппу Фиттинга. Тогда $\Phi_\theta(N) \subseteq \Phi_\theta(G)$ для любой группы G и каждой ее нормальной подгруппы N .

Предложение 3. Пусть F – непустой класс Фиттинга, а θ – подгрупповой t -функтор, выделяющий в каждой группе саму группу и все максимальные подгруппы, содержащие хотя бы один F -инъектор группы. Тогда $\Phi_\theta(N) \subseteq \Phi_\theta(G)$ для любой группы G и каждой ее нормальной подгруппы N .

Доказательство. Пусть M – максимальная подгруппа группы G , принадлежащая $\theta(G)$. Тогда M содержит некоторый F -инъектор V группы G . Из определения F -инъектора следует, что $V \cap N$ – F -инъектор подгруппы N . Поэтому, если N не содержится в M , то каждая максимальная подгруппа H группы N , содержащая $N \cap M$, принадлежит $\theta(N)$, т. е. подгрупповой t -функтор θ является нормально вложенным. Отсюда на основании теоремы 1 следует, что $\Phi_\theta(N) \subseteq \Phi_\theta(G)$. Предложение доказано.

Если F – класс всех нильпотентных групп, то частным случаем предложения 3 является следующий результат.

Предложение 4. Пусть θ – подгрупповой t -функтор, выделяющий в каждой группе саму группу и все максимальные подгруппы, содержащие хотя бы один нильпотентный инъектор группы. Тогда $\Phi_\theta(N) \subseteq \Phi_\theta(G)$ для любой группы G и каждой ее нормальной подгруппы N .

Приведем еще одно свойство вложенных подгрупповых t -функторов.

Теорема 2. Пусть θ – регулярный нормально вложенный подгрупповой t -функтор. Тогда

$$\Phi_\theta(G_1 \times \dots \times G_n) = \Phi_\theta(G_1) \times \dots \times \Phi_\theta(G_n).$$

Доказательство. Пусть $D = G_1 \times \dots \times G_n$. Так как подгруппа G_i нормальна в D , то ввиду теоремы 1 имеем $\Phi_\theta(G_i) \subseteq \Phi_\theta(D)$. Следовательно,

$$\Phi_\theta(G_1) \times \dots \times \Phi_\theta(G_n) \subseteq \Phi_\theta(D). \quad (*)$$

Пусть $K_i = G_1 \times \dots \times G_{i-1} \times G_{i+1} \times \dots \times G_n$. Очевидно, имеет место включение $\Phi_\theta(D)K_i / K_i \subseteq \Phi_\theta(D/K_i)$. Так как $D/K_i = G_i K_i / K_i \cong G_i$, то справедливо равенство $\Phi_\theta(D/K_i) = \Phi_\theta(G_i)K_i / K_i$ для всех $i = 1, \dots, n$. Отсюда следует, что $|\Phi_\theta(D) / \Phi_\theta(D) \cap K_i| \leq |\Phi_\theta(G_i)|$.

Так как $K_1 \cap \dots \cap K_n = 1$, то ввиду леммы А.4.17 из [1] подгруппа $\Phi_\theta(D)$ изоморфна подгруппе прямого произведения групп $\Phi_\theta(D) / \Phi_\theta(D) \cap K_1, \dots, \Phi_\theta(D) / \Phi_\theta(D) \cap K_n$. Отсюда следует, что

$$|\Phi_\theta(D)| \leq |\Phi_\theta(G_1)| \cdot \dots \cdot |\Phi_\theta(G_n)| = |\Phi_\theta(G_1) \times \dots \times \Phi_\theta(G_n)|.$$

Теперь, сравнивая порядки подгрупп $\Phi_\theta(D)$ и $\Phi_\theta(G_1) \times \dots \times \Phi_\theta(G_n)$, из включения (*) получаем требуемое равенство. Теорема доказана.

С л е д с т в и е 5. Для любого множества π простых чисел справедливо равенство $\Phi_\pi(G_1 \times \dots \times G_n) = \Phi_\pi(G_1) \times \dots \times \Phi_\pi(G_n)$.

С л е д с т в и е 6. Для любого натурального числа k справедливо равенство $\Phi^k(G_1 \times \dots \times G_n) = \Phi^k(G_1) \times \dots \times \Phi^k(G_n)$.

Литература

1. Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. Berlin; New York, 1992.
2. Каморников С. Ф., Селькин М. В. Подгрупповые функторы и классы конечных групп. Минск, 2003.
3. Скиба А. Н. Алгебра формаций. Минск, 1997.
4. Deskins W. E. // Illinois J. Math. 1961. Vol. 5, N 2. P. 306–313.
5. Fischer B., Gaschütz W., Hartley B. // Math. Z. 1967. Bd. 102. S. 337–339.

L. P. AVDASHKOVA, S. F. KAMORNIKOV, O. L. SHEMETKOVA

ON A PROPERTY OF FRATTINI-LIKE SUBGROUPS

Summary

In the article some properties of Frattini-like subgroups of finite groups are investigated.

УДК 519.8

С. Е. БУХТОЯРОВ, В. А. ЕМЕЛИЧЕВ

УСТОЙЧИВОСТЬ ИНВЕСТИЦИОННОЙ ЗАДАЧИ МАРКОВИЦА С КРИТЕРИЯМИ КРАЙНЕГО ОПТИМИЗМА

Белорусский государственный университет

(Поступила в редакцию 30.05.2014)

Настоящая работа лежит в русле направлений, связанных с исследованием количественных характеристик устойчивости множества Парето многокритериальных задач дискретной оптимизации. Одна из таких характеристик, называемая обычно радиусом устойчивости задачи, определяется как предельный уровень возмущений ее параметров в метрическом пространстве, не приводящих к появлению новых оптимумов Парето. Здесь устанавливаются нижняя и верхняя оценки радиуса устойчивости многокритериальной булевой задачи формирования портфеля инвестора с классическими критериями теории принятия решений – критериями крайнего оптимизма по доходности портфеля. При этом анализ устойчивости к возмущениям исходных данных (оценок эффективности инвестиционных проектов) проводится в предположении, что в пространстве портфелей задана произвольная метрика Гельдера l_p , $1 \leq p \leq \infty$, а в пространстве состояний финансового рынка и критериальном пространстве доходности – чебышевская метрика l_∞ . Ранее аналогичные результаты были получены в работах [1–5] лишь в частных случаях, когда в трехмерном пространстве параметров многокритериальной инвестиционной задачи с критериями Вальда и Сэвиджа в различных комбинациях задавались линейная (l_1) и чебышевская метрики (l_∞). В случае, когда метрика Гельдера l_p задана в каждом из трех пространств параметров инвестиционной задачи, нижняя и верхняя оценки получены лишь для радиуса устойчивости фиксированного парето-оптимального критерия [6].

1. Постановка задачи и основные определения. Рассмотрим многокритериальный дискретный вариант известной задачи управления инвестициями Марковица [7], основанной на диверсификации как методе снижения риска при отборе проектов. Для этого введем ряд обозначений.

Пусть n – количество альтернативных инвестиционных проектов (активов), $n \geq 2$; m – количество прогнозных состояний (ситуаций) финансового рынка, т. е. число возможных сценариев развития, $m \geq 1$; s – количество показателей экономической эффективности (доходности) инвестиционного проекта, $s \geq 1$. Пусть $x_j = 1$, если j -й проект, $j \in N_n = \{1, 2, \dots, n\}$, реализуется, и $x_j = 0$ в противном случае. Инвестиционным портфелем назовем булевый вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$. Через $X \subset \mathbf{E}^n$, где $\mathbf{E} = \{0, 1\}$, $|X| > 1$, будем обозначать множество всех допустимых инвестиционных портфелей, т. е. тех портфелей, реализация которых не превосходит начального капитала инвестора. Инвестиционный портфель x будем оценивать величиной $\sum_{j \in N_n} e_{ijk} x_j$, где e_{ijk} – ожидаемая оценка эффективности вида $k \in N_s$ инвестиционного проекта $j \in N_n$ в случае, когда рынок находится в состоянии $i \in N_m$ [8–10]. В этом контексте исходными данными задачи является трехмерная матрица эффективности проектов E размером $m \times n \times s$ с элементами e_{ijk} из множества \mathbf{R} .

На множестве инвестиционных портфелей X зададим векторную целевую функцию $f(x, E) = (f_1(x, E_1), f_2(x, E_2), \dots, f_s(x, E_s))$, компонентами которой являются критерии крайнего оптимизма по эффективности портфеля (MAXMAX):

$$f_k(x, E_k) = \max_{i \in N_m} e_{ik} x = \max_{i \in N_m} \sum_{j \in N_n} e_{ijk} x_j \rightarrow \max_{x \in X}, \quad k \in N_s,$$

где $E_k \in \mathbf{R}^{m \times n}$ – k -е сечение матрицы $E \in \mathbf{R}^{m \times n \times s}$, $e_{ik} = (e_{i1k}, e_{i2k}, \dots, e_{ink})$ – i -я строка этого сечения. С помощью такого критерия азартный инвестор оптимизирует эффективность портфеля в предположении, что рынок находится в самом выгодном для него состоянии, а именно, когда доходность портфеля максимальна. Очевидно, что подобный подход основан на стереотипе поведения безоглядного оптимиста («или пан, или пропал», «кто не рискует, тот не выигрывает» и т. п.).

Под векторной (s -критериальной) инвестиционной булевой задачей $Z^s(E)$, $s \in \mathbf{N}$, будем понимать задачу поиска множества Парето, состоящего из парето-оптимальных инвестиционных портфелей

$$P^s(E) = \{x \in X : X(x, E) = \emptyset\},$$

где

$$X(x, E) = \{x' \in X : f(x, E) \leq f(x', E), \quad f(x, E) \neq f(x', E)\}.$$

Легко видеть, что в частном случае при $m = 1$ наша задача $Z^s(E)$ превращается в векторную булеву задачу с линейными критериями (на максимум). Такой случай можно интерпретировать как ситуацию, при которой состояние финансового рынка не вызывает сомнений.

В пространстве портфелей \mathbf{R}^n зададим произвольную метрику Гёльдера l_p , $1 \leq p \leq \infty$, а в пространстве состояний рынка \mathbf{R}^m и критериальном пространстве эффективности \mathbf{R}^s – чебышевскую метрику l_∞ , т. е. полагаем

$$\|E_k\|_{p_\infty} = \left\| \left(\|e_{1k}\|_p, \|e_{2k}\|_p, \dots, \|e_{mk}\|_p \right) \right\|_\infty, \quad k \in N_s,$$

$$\|E\|_{p_\infty} = \left\| \left(\|E_1\|_{p_\infty}, \|E_2\|_{p_\infty}, \dots, \|E_s\|_{p_\infty} \right) \right\|_\infty,$$

где, как обычно, норма Гёльдера l_p вектора $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$ задается формулой

$$\|a\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{j \in N_n} |a_j|^p \right)^{1/p}, & \text{если } 1 \leq p < \infty, \\ \max\{|a_j| : j \in N_n\}, & \text{если } p = \infty. \end{cases}$$

При любом $p \in [1, \infty]$ очевидны неравенства

$$\|e_{ik}\|_p \leq \|E_k\|_{p_\infty} \leq \|E\|_{p_\infty}, \quad i \in N_m, \quad k \in N_s. \quad (1)$$

Наряду с числом $p \in [1, \infty]$ будем использовать понятие сопряженного с ним числа q , которое определяется равенством $1/p + 1/q = 1$, причем $q = 1$, если $p = \infty$, и $q = \infty$, если $p = 1$. Поэтому в дальнейшем считаем, что областью изменений чисел p и q является отрезок $[1, \infty]$, а сами числа связаны указанными выше условиями. В этих обозначениях будем полагать, что $1/p = 0$ при $p = \infty$.

Используя (1) и известное неравенство Гёльдера

$$ab \leq \|a\|_p \|b\|_q,$$

где $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T \in \mathbf{R}^n$, для любых портфелей $x, x' \in X$ получаем

$$e_{ik}x - e_{i'k}x' \geq -(\|e_{ik}\|_p \|x\|_q + \|e_{i'k}\|_p \|x'\|_q) \geq -\|E_k\|_{p_\infty} (\|x\|_q + \|x'\|_q), \quad i, i' \in N_m, \quad k \in N_s. \quad (2)$$

Следуя [1–3, 5], радиусом устойчивости инвестиционной задачи $Z^s(E)$ назовем число

$$\rho = \rho(m, s, p) = \begin{cases} \sup \Xi, & \text{если } \Xi \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если } \Xi = \emptyset, \end{cases}$$

где

$$\Xi = \left\{ \varepsilon > 0 : \forall E' \in \Omega_p(\varepsilon) \quad (P^s(E + E') \subseteq P^s(E)) \right\},$$

$$\Omega_p(\varepsilon) = \left\{ E' \in \mathbf{R}^{m \times n \times s} : \|E'\|_{p\infty} < \varepsilon \right\}.$$

Множество $\Omega_p(\varepsilon)$ принято называть множеством возмущающих матриц. Таким образом, радиус устойчивости задачи $Z^s(E)$ – это предельный уровень всех тех возмущений элементов матрицы E в метрическом пространстве $\mathbf{R}^{m \times n \times s}$, которые не приводят к появлению новых парето-оптимальных портфелей.

Очевидно, что при выполнении равенства $P^s(E) = X$ включение $P^s(E + E') \subseteq P^s(E)$ выполняется при любых возмущающих матрицах $E' \in \Omega_p(\varepsilon)$ для любого числа $\varepsilon > 0$. Поэтому радиус устойчивости задачи $Z^s(E)$ не ограничен сверху. Задачу $Z^s(E)$, для которой $P^s(E) \neq X$, будем называть нетривиальной.

2. Оценки радиуса устойчивости задачи. Для нетривиальной задачи $Z^s(E)$ положим

$$\varphi = \varphi(m, s, p) = \min_{x \notin P^s(E)} \max_{x' \in P(x, E)} \frac{Y(x, x')}{\|x\|_q + \|x'\|_q},$$

$$\psi = \psi(m, s) = \min_{x \notin P^s(E)} \max_{x' \in P(x, E)} \frac{Y(x, x')}{\|x - x'\|_1},$$

где

$$Y(x, x') = \min \{ f_k(x', E_k) - f_k(x, E_k) : k \in N_s \},$$

$$P(x, E) = P^s(E) \cap X(x, E).$$

Очевидно, что φ и ψ – неотрицательные числа.

Т е о р е м а. При любых числах $m, s \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$ и $p \in [1, \infty]$ для радиуса устойчивости $\rho(m, s, p)$ нетривиальной задачи $Z^s(E)$ справедливы следующие оценки:

$$\varphi(m, s, p) \leq \rho(m, s, p) \leq n^{1/p} \psi(m, s). \quad (3)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала убедимся в справедливости неравенства $\rho \geq \varphi$. При $\varphi = 0$ оно очевидно. Пусть $\varphi > 0$. Согласно определению числа φ , для любого портфеля $x \notin P^s(E)$ найдется такой портфель $x^0 \in P(x, E)$, что

$$f_k(x^0, E_k) - f_k(x, E_k) \geq \varphi (\|x\|_q + \|x^0\|_q), \quad k \in N_s.$$

Отсюда, учитывая (1) и (2), для всякого индекса $k \in N_s$ и любой возмущающей матрицы $E' \in \Omega_p(\varphi)$ с сечением E'_k , $k \in N_s$, имеем

$$\begin{aligned} f_k(x^0, E_k + E'_k) - f_k(x, E_k + E'_k) &= \max_{i \in N_m} (e_{ik} + e'_{ik})x^0 - \max_{i \in N_m} (e_{ik} + e'_{ik})x = \\ &= \min_{i \in N_m} \max_{i' \in N_m} (e_{i'k}x^0 + e'_{i'k}x^0 - e_{ik}x - e'_{ik}x) \geq f_k(x^0, E_k) - f_k(x, E_k) - \\ &- \|E'_k\|_{p\infty} (\|x\|_q + \|x^0\|_q) \geq (\varphi - \|E'_k\|_{p\infty}) (\|x\|_q + \|x^0\|_q) > 0. \end{aligned}$$

Поэтому портфель $x \notin P^s(E + E')$. Откуда заключаем, что при любой возмущающей матрице $E' \in \Omega_p(\varphi)$ справедливо включение $P^s(E + E') \subseteq P^s(E)$. Следовательно, верно неравенство $\rho \geq \varphi$.

Далее докажем неравенство $\rho \leq n^{1/p} \psi$. В соответствии с определением величины ψ найдется такой портфель $x^0 \notin P^s(E)$, что для каждого портфеля $x \in P(x^0, E)$ существует индекс $v = v(x) \in N_s$, удовлетворяющий условию

$$\psi \|x - x^0\|_1 \geq f_v(x, E_v) - f_v(x^0, E_v). \quad (4)$$

Пусть $\varepsilon > n^{1/p} \psi$. Элементы e_{ijk}^0 возмущающей матрицы $E^0 \in \mathbf{R}^{m \times n \times s}$ с сечениями E_k^0 , $k \in N_s$, зададим по правилу

$$e_{ijk}^0 = \begin{cases} \delta, & \text{если } i \in N_m, x_j^0 = 1, k \in N_s, \\ -\delta & \text{в противных случаях,} \end{cases}$$

где $\varepsilon/n^{1/p} > \delta > \psi$. Все строки e_{ik}^0 , $i \in N_m$, любого k -го сечения E_k^0 одинаковы. Поэтому, обозначив такую строку через A , получаем

$$A(x - x^0) = -\delta \|x - x^0\|_1, \quad (5)$$

$$\|A\|_p = \|e_{ik}^0\|_p = n^{1/p} \delta = \|E_k^0\|_{p\infty} = \|E^0\|_{p\infty}, \quad i \in N_m, k \in N_s.$$

Поэтому $E^0 \in \Omega_p(\varphi)$. Теперь, учитывая (4) и (5), выводим, что для любого портфеля $x \in X(x^0, E)$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} f_v(x, E_v + E_v^0) - f_v(x^0, E_v + E_v^0) &= \max_{i \in N_m} (e_{iv} + A)x - \max_{i \in N_m} (e_{iv} + A)x^0 = \\ &= f_v(x, E_v) - f_v(x^0, E_v) + A(x - x^0) \leq (\psi - \delta) \|x - x^0\|_1 < 0. \end{aligned}$$

Таким образом, справедливо утверждение

$$\forall x \in P(x^0, E) \left(x \notin X(x^0, E + E^0) \right), \quad (6)$$

т. е., если $x \in P(x^0, E)$, то $x \notin X(x^0, E + E^0)$.

Допустим теперь, что портфель $x \notin P(x^0, E)$. Тогда возможны лишь следующие два случая.

С л у ч а й 1. Пусть $f(x, E) = f(x^0, E)$. Тогда для любого индекса $k \in N_s$ согласно равенству (5) имеем

$$\begin{aligned} f_k(x, E_k + E_k^0) - f_k(x^0, E_k + E_k^0) &= \max_{i \in N_m} (e_{ik} + A)x - \max_{i \in N_m} (e_{ik} + A)x^0 = \\ &= f_k(x, E_k) - f_k(x^0, E_k) + A(x - x^0) = -\delta \|x - x^0\|_1 < 0. \end{aligned}$$

С л у ч а й 2. Существует такой индекс $u \in N_s$, что $f_u(x, E_u) < f_u(x^0, E_u)$. Тогда, вновь используя равенство (5), получаем $f_u(x, E_u + E_u^0) < f_u(x^0, E_u + E_u^0)$.

Таким образом, если $x \notin P(x^0, E)$, то $x \notin X(x^0, E + E^0)$. В результате с учетом (6) выводим, что $X(x^0, E + E^0) = \emptyset$, т. е. x^0 – парето-оптимальный портфель возмущенной задачи $Z^s(E + E^0)$. Поэтому, учитывая $x^0 \notin P^s(E)$, заключаем, что для всякого числа $\varepsilon > n^{1/p} \psi$ существует такая возмущающая матрица $E^0 \in \Omega_p(\varepsilon)$, что $P^s(E + E^0) \not\subseteq P^s(E)$. Следовательно, справедливо неравенство $\rho \leq n^{1/p} \psi$. Теорема доказана.

3. Следствия из теоремы. Из теоремы вытекает ряд следствий.

С л е д с т в и е 1. При любых $m, s \in \mathbf{N}$ справедливы оценки

$$\min_{x \notin P^s(E)} \max_{x' \in P(x, E)} \frac{Y(x, x')}{\|x + x'\|_1} = \varphi(m, s, \infty) \leq \rho(m, s, \infty) \leq \psi(m, s) = \min_{x \notin P^s(E)} \max_{x' \in P(x, E)} \frac{Y(x, x')}{\|x - x'\|_1}.$$

Отметим, что ранее в [2] были получены аналогичные оценки для радиуса устойчивости векторной инвестиционной задачи с критериями Сэвиджа в случае, когда во всех трех пространствах параметров задачи задавалась одна и та же метрика Чебышева.

Из следствия 1 получаем следующее утверждение, которое свидетельствует о достижимости оценок (3) в случае, когда $p = \infty$.

С л е д с т в и е 2. Если для всякой пары портфелей $x \in P^s(E)$ и $x' \in P(x, E)$ множество $\{j \in N_n : x_j = x'_j = 1\}$ пусто, то при любых $m, s \in \mathbf{N}$, верна формула

$$\rho(m, s, \infty) = \varphi(m, s, \infty) = \psi(m, s).$$

При $m=1$ наша векторная инвестиционная задача $Z^s(E)$ превращается в s -критериальную задачу линейного булева программирования

$$f_k(x, e_k) = e_k x \rightarrow \max_{x \in X}, \quad k \in N_s,$$

где $e_k \in \mathbf{R}^{1 \times n}$, $k \in N_s$, – k -я строка матрицы $E = [e_{1jk}] \in \mathbf{R}^{1 \times n \times s}$, $X \subseteq \mathbf{E}^n$. При этом, как и ранее, в критериальном пространстве \mathbf{R}^s задана метрика Чебышева l_∞ , а в пространстве решений \mathbf{R}^n – произвольная метрика Гёльдера l_p , $1 \leq p \leq \infty$. В этих обозначениях из теоремы вытекает следующий известный [11] результат.

С л е д с т в и е 3 [11]. *При любых $s \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$ и $p \in [1, \infty]$ справедливо соотношение*

$$\rho(1, s, p) \leq n^{1/p} \psi(1, s) = n^{1/p} \min_{x \notin P^s(E)} \max_{x' \in P(x, E)} \min_{k \in N_s} \frac{e_k(x' - x)}{\|x' - x\|_1}.$$

Отметим, что в [11] доказана достижимость этой верхней оценки при $s = 1$, т. е. указан класс скалярных линейных булевых задач, для которых справедливо равенство $\rho(1, 1, p) = n^{1/p} \psi(1, 1)$ при любых $n \geq 2$ и $p \in [1, \infty]$.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф13К-078).

Литература

1. Емеличев В. А., Коротков В. В. // Дискрет. математика. 2012. Т. 24, № 3. С. 3–16.
2. Емеличев В. А., Коротков В. В. // Кибернетика и систем. анализ. 2012. № 3. С. 68–77.
3. Емеличев В. А., Коротков В. В. // Изв. НАН Азербайджана. Сер. физ.-тех. и мат. наук. 2012. Т. 32, № 6. С. 88–98.
4. Емеличев В. А., Коротков В. В. // Тр. Ин-та. математики НАН Беларуси. 2012. Т. 20, № 2. С. 10–17.
5. Емеличев В. А., Коротков В. В. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2012. № 1. С. 44–49.
6. Емеличев В. А., Коротков В. В. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2012. № 4. С. 42–48.
7. Markowitz H. M. Portfolio selection: efficient diversification of investments. New York, 1991.
8. Бронштейн Е. М., Черняк Д. А. // Экономика и мат. методы. 2005. Т. 41, № 2. С. 21–28.
9. Виленский П. Л., Ливищ В. Н., Соляк С. А. Оценки эффективности инвестиционных проектов: теория и практика. М., 2008.
10. Царев В. В. Оценки экономической эффективности инвестиций. СПб., 2004.
11. Емеличев В. А., Коротков В. В. // Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. 2013. № 3. С. 100–103.

S. E. BUKHTOYAROV, V. A. EMELICHEV

STABILITY OF THE MARKOWITZ INVESTMENT PROBLEM WITH EXTREME OPTIMISM CRITERIA

Summary

The multicriteria investment boolean Markowitz problem with extreme optimism criteria is considered. Upper and lower bounds of the radius of the stability of this problem are given in the case of the arbitrary Holder metric l_p , $1 \leq p \leq \infty$ in the portfolio space and the Chebyshev metric l_∞ in the space of financial market states and in the space of investment project profitability.

УДК 519.2

Е. Е. ЖУК

**СТАТИСТИЧЕСКОЕ СООТНЕСЕНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЫБОРОК
С ЗАДАННЫМ ВЕРОЯТНОСТНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ
МЕТОДОМ МАКСИМУМА ПРАВДОПОДОБИЯ**

Белорусский государственный университет

(Поступила в редакцию 20.02.2014)

1. Математическая модель и постановка задачи. Пусть в пространстве наблюдений R^N ($N \geq 1$) зарегистрировано $m \geq 2$ случайных выборок $X^{(1)}, \dots, X^{(m)}$, удовлетворяющих следующим двум условиям.

У1. Выборка $X^{(i)} = \{x_t^{(i)}\}_{t=1}^{n_i}$ состоит из независимых в совокупности одинаково распределенных N -векторов-наблюдений $x_t^{(i)} \in R^N$, $t = \overline{1, n_i}$, где n_i – ее объем, а сами наблюдения имеют плотность

$$p_i(x) \geq 0, x \in R^N : \int_{R^N} p_i(x) dx = 1, i = \overline{1, m}. \quad (1)$$

У2. Выборки $\{X^{(i)}\}_{i=1}^m$ независимы между собой в совокупности.

Плотности $\{p_i(\cdot)\}_{i=1}^m$ из (1), определяющие выборки $\{X^{(i)}\}_{i=1}^m$, неизвестны. Задана некоторая фиксированная (гипотетическая [1, 2]) плотность распределения вероятностей

$$p(x) \geq 0, x \in R^N : \int_{R^N} p(x) dx = 1, \quad (2)$$

и среди выборок $\{X^{(i)}\}_{i=1}^m$ необходимо выделить ту, которая по своему распределению вероятностей «ближе» к распределению с гипотетической плотностью (2) (соотнести с гипотетическим распределением (2) ту выборку из $\{X^{(i)}\}_{i=1}^m$, которая с ним «лучше всего согласуется»).

Отметим, что поставленная выше задача отличается от задачи проверки так называемых гипотез согласия с заданным вероятностным распределением [1, 2], поскольку у соотносимых с гипотетическим распределением (2) выборок распределения вероятностей (1), вообще говоря, заведомо не совпадают с (2). Отличается данная задача и от задачи статистической классификации [3, 4]. Выше зафиксирован (задан) только один класс с плотностью $p(\cdot)$ из (2), и к нему необходимо отнести одну из выборок $\{X^{(i)}\}_{i=1}^m$, построив решающее правило (РП) вида

$$d = d(X^{(1)}, \dots, X^{(m)}) \in M, M = \{1, \dots, m\}, \quad (3)$$

где $d \in M$ – номер соотнесенной с гипотетическим распределением (2) выборки.

2. Решающее правило по принципу максимума правдоподобия и его риск. Для построения РП (3) по аналогии с [4] воспользуемся принципом максимума правдоподобия [1–4]:

$$d = d(X^{(1)}, \dots, X^{(m)}) = \arg \max_{i \in M} P(X^{(i)}); \quad (4)$$

$$P(X^{(i)}) = \prod_{t=1}^{n_i} p(x_t^{(i)}), i \in M,$$

где $P(X^{(i)})$ – гипотетическая плотность выборки $X^{(i)}$, записанная в предположении, что $p_i(\cdot) \equiv p(\cdot)$ ($P(X^{(i)})$ – гипотетическая функция правдоподобия [1, 2], вычисленная для $X^{(i)}$).

Содержательный смысл РП (4) состоит в следующем: оно соотносит с гипотетическим распределением (2) ту выборку $X^{(d)}$ ($d \in M$) из предложенных выборок $\{X^{(i)}\}_{i \in M}$, появление которой в условиях заданного гипотетического распределения (2) «наиболее правдоподобно» («наиболее вероятно»).

Т е о р е м а 1. Пусть в условиях У1, У2 конечны интегралы:

$$\int_{R^N} |\ln(p(x))| p_i(x) dx < +\infty, \quad i \in M, \quad (5)$$

где $\{p_i(\cdot)\}_{i \in M}$, $p(\cdot)$ – плотности из (1), (2), а среди величин

$$H_i = H(p_i(\cdot), p(\cdot)) = \int_{R^N} \ln(p(x)) p_i(x) dx, \quad i \in M, \quad (6)$$

лишь одна по значению больше остальных ($\exists d^o \in M : H_{d^o} > H_i, \forall i \neq d^o, i \in M$). Тогда при совпадении объемов выборок:

$$n_i = n, \quad i \in M, \quad (7)$$

РП (4) сходится в смысле почти наверное:

$$d = d(X^{(1)}, \dots, X^{(n)}) \xrightarrow{\text{п.н.}} d^o, \quad n \rightarrow +\infty; \quad (8)$$

$$d^o = \arg \max_{i \in M} H_i.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $n_i = n, i \in M$, РП (4) можно записать в эквивалентном виде:

$$d = d(X^{(1)}, \dots, X^{(n)}) = \arg \max_{i \in M} l(X^{(i)}); \quad (9)$$

$$l(X^{(i)}) = \frac{1}{n} \ln(P(X^{(i)})) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \ln(p(x_t^{(i)})), \quad i \in M.$$

Далее с учетом условия (5) и того факта, что $\{x_t^{(i)}\}_{t=1}^n$ независимы в совокупности и одинаково распределены с плотностью $p_i(\cdot)$, применяем к $l(X^{(i)})$ усиленный закон больших чисел Колмогорова [1] ($i \in M$):

$$l(X^{(i)}) \xrightarrow{\text{п.н.}} H_i, \quad n \rightarrow +\infty; \quad (10)$$

$$H_i = E \left\{ \ln(p(x_t^{(i)})) \right\} = \int_{R^N} \ln(p(x)) p_i(x) dx.$$

Из соотношений (9), (10) и известных теорем непрерывности [2] и заключаем справедливость (8).

Отметим, что функционалы $\{H(p_i(\cdot), p(\cdot))\}_{i \in M}$ из (6) традиционно связаны с классическим методом максимума правдоподобия [1, 2] и для большинства встречающихся на практике семейств Π допустимых плотностей ($p_i(\cdot) \in \Pi, i \in M; p(\cdot) \in \Pi$) обладают так называемым свойством идентифицируемости [1, 2]:

$$\forall p(\cdot) \in \Pi, \forall p_i(\cdot) \in \Pi : H(p_i(\cdot), p_i(\cdot)) > H(p_i(\cdot), p(\cdot)), \quad p(\cdot) \neq p_i(\cdot), \quad i \in M. \quad (11)$$

Свойство (11) проясняет смысл величины $d^o \in M$ в (8). Величины $\{H_i\}_{i \in M}$ из (6) определяют степень «схожести» («близости») распределений (1) выборок $\{X^{(i)}\}_{i \in M}$ с гипотетическим распределением с плотностью $p(\cdot)$ из (2), а величина d^o – номер выборки, наиболее близкой по распределению к гипотетическому распределению (в смысле величин (6)).

Приведенные выше аналитические результаты позволяют, подобно [4], предложить в качестве меры эффективности РП (4) так называемый риск:

$$r = r(d(X^{(1)}, \dots, X^{(n)})) = P \left\{ d(X^{(1)}, \dots, X^{(n)}) \notin D^o \right\}; \quad (12)$$

$$D^o = \left\{ k : H_k = \max_{j \in M} H_j \right\},$$

где учтено, что среди $\{H_i\}_{i \in M}$ из (6), в отличие от условий теоремы 1, на практике могут быть совпадающие по значению, а само РП (4) используется в общем случае (условие (7) о совпадении объемов $\{n_i\}_{i \in M}$ выборок $\{X^{(i)}\}_{i \in M}$, вообще говоря, не предполагается).

Содержательный смысл риска (12) очевиден: r – это вероятность не соотнести при помощи РП (4) с гипотетическим распределением (2) те выборки из $\{X^{(i)}\}_{i \in M}$, которые к нему близки по распределению в смысле величин (6). Чем меньше значение r из (12) ($0 \leq r \leq 1$), тем эффективнее РП (4) решает задачу соотнесения с гипотетическим распределением (2) выборок с плотностями (1).

Отметим, что если среди $\{H_i\}_{i \in M}$ из (6) нет совпадающих по значению (множество D^o в (12) содержит один элемент: $|D^o| = 1$), то риск (12) упрощается:

$$r = r(d(X^{(1)}, \dots, X^{(m)})) = \mathbb{P}\{d(X^{(1)}, \dots, X^{(m)}) \neq d^o\}; \quad (13)$$

$$d^o = \arg \max_{i \in M} H_i.$$

Если же все $\{H_i\}_{i \in M}$ равны между собой ($D^o = \{1, \dots, m\} = M$, $|D^o| = m$), то очевидно, что $r = 0$.

3. Асимптотическое вычисление риска в случае двух выборок одинакового объема. Модель Фишера. Пусть с гипотетическим распределением (2) необходимо соотнести две ($m = 2$) выборки $X^{(1)} = \{x_t^{(1)}\}_{t=1}^n$, $X^{(2)} = \{x_t^{(2)}\}_{t=1}^n$ одинакового объема ($n_1 = n_2 = n$). РП (4) можно записать в виде ($M = \{1, 2\}$):

$$d(X^{(1)}, X^{(2)}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \bar{\xi}_n(X^{(1)}, X^{(2)}) \leq 0; \\ 2, & \text{если } \bar{\xi}_n(X^{(1)}, X^{(2)}) > 0, \end{cases} \quad (14)$$

где

$$\bar{\xi}_n(X^{(1)}, X^{(2)}) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \ln \left(\frac{p(x_t^{(2)})}{p(x_t^{(1)})} \right), \quad (15)$$

а $p(\cdot)$ – гипотетическая плотность из (2).

Риск r из (12), (13) для РП (14), (15) примет вид:

$$r = \begin{cases} P\{\bar{\xi}_n(X^{(1)}, X^{(2)}) \leq 0\}, & \text{если } H_1 < H_2; \\ 1 - P\{\bar{\xi}_n(X^{(1)}, X^{(2)}) \leq 0\}, & \text{если } H_1 > H_2; \\ 0, & \text{если } H_1 = H_2; \end{cases} \quad (16)$$

где H_1, H_2 – величины из (6).

Т е о р е м а 2. Пусть в случае двух выборок ($m = 2$) одинакового объема ($n_1 = n_2 = n$) выполнены условия У1, У2, а плотности $p_1(\cdot)$, $p_2(\cdot)$ из (1) и плотность $p(\cdot)$ из (2) таковы, что

$$G_i = \int_{R^N} (\ln(p(x)))^2 p_i(x) dx < +\infty, \quad G_i - H_i^2 \neq 0, \quad i = 1, 2, \quad (17)$$

тогда риск (16) может быть вычислен из асимптотического соотношения ($H_1 \neq H_2$):

$$\frac{r}{\tilde{r}} \rightarrow 1, \quad n \rightarrow +\infty; \quad \tilde{r} = \Phi \left(-\sqrt{n} \frac{|H_1 - H_2|}{\sqrt{G_1 + G_2 - (H_1^2 + H_2^2)}} \right), \quad (18)$$

где $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z \exp\left(-\frac{w^2}{2}\right) dw$, $z \in R$ – функция распределения вероятностей стандартного нормального закона $N_1(0, 1)$.

Доказательство. В условиях $U1, U2$ случайные величины

$$\xi_t = \ln \left(\frac{p(x_t^{(2)})}{p(x_t^{(1)})} \right), \quad t = \overline{1, n},$$

независимы в совокупности и одинаково распределены с математическим ожиданием:

$$E\{\xi_t\} = E \left\{ \ln \left(\frac{p(x_t^{(2)})}{p(x_t^{(1)})} \right) \right\} = E \{ \ln(p(x_t^{(2)})) \} - E \{ \ln(p(x_t^{(1)})) \} = H_2 - H_1$$

и конечной ненулевой дисперсией:

$$D\{\xi_t\} = D \{ \ln(p(x_t^{(2)})) \} + D \{ \ln(p(x_t^{(1)})) \} = G_2 - H_2^2 + G_1 - H_1^2 = G_1 + G_2 - (H_1^2 + H_2^2) < +\infty,$$

где учтено условие (17).

Согласно центральной предельной теореме Леви – Линдберга [1], асимптотически нормально распределена случайная величина $\bar{\xi}_n(X^{(1)}, X^{(2)}) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \xi_t$, для которой с учетом нормировки имеем:

$$\sqrt{n} \frac{\bar{\xi}_n(X^{(1)}, X^{(2)}) - E\{\xi_t\}}{\sqrt{D\{\xi_t\}}} = \frac{\bar{\xi}_n(X^{(1)}, X^{(2)}) - (H_2 - H_1)}{\sqrt{G_1 + G_2 - (H_1^2 + H_2^2)}} \rightarrow N_1(0, 1), \quad n \rightarrow +\infty. \quad (19)$$

Из (16) с учетом (19) и известного свойства функции распределения $\Phi(\cdot)$ стандартного нормального закона: $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$, $z \in R$, получаем соотношение (18).

Из результата (18) теоремы 2 видно, что если $H_1 \neq H_2$, то эффективность сопоставления с гипотетическим распределением выборок $X^{(1)}, X^{(2)}$ при помощи РП (14), (15) повышается (риск уменьшается) с увеличением различия значений H_1 и H_2 между собой, а также с ростом объема n выборок $X^{(1)}, X^{(2)}$. Если же $H_1 = H_2$, то $r = 0$, и неважно, какая из выборок $X^{(1)}$ или $X^{(2)}$ будет сопоставлена с гипотетическим распределением (2).

Пусть теперь плотности $p_1(\cdot)$, $p_2(\cdot)$ и $p(\cdot)$ многомерные нормальные (гауссовские):

$$p_i(x) = n_N(x | \mu_i, \Sigma), \quad i = 1, 2; \quad p(x) = n_N(x | \mu, \Sigma), \quad x \in R^N, \quad (20)$$

где

$$n_N(x | \bar{\mu}, \Sigma) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \exp \left(-\frac{1}{2} (x - \bar{\mu})^T \Sigma^{-1} (x - \bar{\mu}) \right)$$

– плотность N -мерного нормального закона распределения вероятностей («т»– символ транспонирования); $\mu_1 = E\{x_t^{(1)}\}$, $\mu_2 = E\{x_t^{(2)}\}$ – N -вектора математических ожиданий наблюдений из выборок $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$ соответственно, $\mu \in R^N$ – математическое ожидание гипотетического распределения, а Σ – общая для всех распределений невырожденная ковариационная ($N \times N$)-матрица ($|\Sigma| \neq 0$).

Отметим, что плотностями (20) часто на практике адекватно описываются реальные статистические данные, и такая модель известна как модель Фишера [3, 4].

С учетом (20) для асимптотического значения риска \tilde{r} из (18) получаем ($n \rightarrow +\infty$):

$$\tilde{r} = \Phi \left(-\sqrt{n} \frac{|\rho^2(\mu, \mu_1) - \rho^2(\mu, \mu_2)|}{2\sqrt{N + \rho^2(\mu, \mu_1) + \rho^2(\mu, \mu_2)}} \right), \quad (21)$$

где

$$\rho(\mu, \mu_i) = \sqrt{(\mu - \mu_i)^T \Sigma^{-1} (\mu - \mu_i)}$$

– расстояние Махаланобиса [1, 3, 4] между μ и μ_i ($i = 1, 2$). Используются выражения для моментов случайных величин, имеющих нецентральное χ^2 -распределение, приведенные в [5], которые позволили получить следующие выражения для величин $\{H_i, G_i - H_i^2\}_{i=1}^2$ из (6) и (17):

$$\begin{aligned}
H_i &= E\left\{\ln\left(n_N(x_t^{(i)} | \mu, \Sigma)\right)\right\} = \ln\left((2\pi)^{-\frac{N}{2}} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}}\right) - \frac{1}{2} E\left\{(x_t^{(i)} - \mu)^T \Sigma^{-1} (x_t^{(i)} - \mu)\right\} = \\
&= \ln\left((2\pi)^{-\frac{N}{2}} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}}\right) - \frac{1}{2} (N + \rho^2(\mu, \mu_i)); \\
G_i - H_i^2 &= D\left\{\ln\left(n_N(x_t^{(i)} | \mu, \Sigma)\right)\right\} = D\left\{\ln\left((2\pi)^{-\frac{N}{2}} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}}\right) - \frac{1}{2} (x_t^{(i)} - \mu)^T \Sigma^{-1} (x_t^{(i)} - \mu)\right\} = \\
&= \frac{1}{4} D\left\{(x_t^{(i)} - \mu)^T \Sigma^{-1} (x_t^{(i)} - \mu)\right\} = \frac{1}{4} (2(N + 2\rho^2(\mu, \mu_i))) = \frac{1}{2} (N + 2\rho^2(\mu, \mu_i)),
\end{aligned}$$

где учтено, что случайная величина $(x_t^{(i)} - \mu)^T \Sigma^{-1} (x_t^{(i)} - \mu)$ имеет нецентральное χ^2 -распределение с N степенями свободы и параметром нецентральности $\rho^2(\mu, \mu_i)$.

Формула (21) справедлива для $\rho(\mu, \mu_1) \neq \rho(\mu, \mu_2)$ (при этом $H_1 \neq H_2$), и, согласно (21), эффективность соотношения увеличивается с ростом различия расстояний Махаланобиса $\rho(\mu, \mu_1)$ и $\rho(\mu, \mu_2)$ от гипотетического математического ожидания μ до математических ожиданий μ_1 и μ_2 наблюдений из выборок $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$ соответственно. Если эти расстояния равны: $\rho(\mu, \mu_1) = \rho(\mu, \mu_2)$, то риск $r = 0$.

Литература

1. Харин Ю. С., Зуев Н. М., Жук Е. Е. Теория вероятностей, математическая и прикладная статистика. Минск, 2011.
2. Боровков А. А. Математическая статистика. М., 1984.
3. Айвазян С. А., Бухштабер В. М., Енюков И. С., Мешалкин Л. Д. Прикладная статистика. Классификация и снижение размерности. М., 1989.
4. Жук Е. Е. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2013. № 4. С. 101–106.
5. Хацкевич Г. А. // Заводская лаборатория. 1994. № 10. С. 49–55.

E. E. ZHUK

STATISTICAL ASSIGNMENT OF RANDOM SAMPLES WITH THE FIXED PROBABILITY DISTRIBUTION BY THE MAXIMUM LIKELIHOOD METHOD

Summary

The problem of statistical assignment of arbitrarily distributed multivariate samples with the fixed probability distribution is considered. The decision rule based on the maximum likelihood method is proposed and its efficiency is analytically investigated. The case of two samples and the Fisher model is investigated.

УДК 519.61

Д. В. ВАСИЛЬЕВ, А. С. КУДИН

О ВЫБОРЕ ПОЛИНОМОВ ДЛЯ АЛГОРИТМА РЕШЕТА ЧИСЛОВОГО ПОЛЯ

Институт математики НАН Беларуси

(Поступила в редакцию 08.08.2014)

Введение. В настоящее время широко распространены криптосистемы, стойкость которых основана на высокой сложности задач факторизации больших целых чисел и дискретного логарифмирования в простом конечном поле. Например, такими являются криптосистема RSA [1], схемы Эль – Гамала [2, гл. 11], схема Диффи – Хеллмана [3]. На сегодняшний день асимптотически и практически наиболее эффективными алгоритмами решения задач факторизации и дискретного логарифмирования в случае больших параметров являются различные версии алгоритма решета числового поля [4, 5, 6]. В то же время этот алгоритм является и наиболее сложным для программной реализации.

Алгоритмы решета числового поля состоят из нескольких основных трудоемких стадий (выбор полиномов, просеивание по простым числам из интервала, решение системы линейных сравнений), каждая из которых допускает различные варианты реализаций с использованием тех или иных оптимизаций. Одной из основных стадий является стадия выбора двух или нескольких полиномов, задающих некоторое алгебраическое расширение поля \mathbb{Q} . Проблема оптимального выбора полиномов важна, так как более качественные полиномы могут значительно сократить время выполнения последующей стадии просеивания в алгоритме решета числового поля.

Одной из существенных проблем является вопрос, связанный с оценкой эффективности выбора полиномов. Чтобы понять насколько удачно выбраны полиномы, используются два подхода: первый заключается в вычислении теоретического рейтинга Б. Мерфи для пары полиномов, а второй – в выполнении непосредственного просеивания. Вычисление рейтинга дает довольно грубую оценку эффективности полинома. Второй подход дает точное представление об эффективности полинома, но просеивание полного интервала простых требует больших затрат времени.

В данной работе предлагается методика оценки эффективности выбора полиномов для алгоритма решета числового поля, основанная на разбиении всего интервала просеивания и частичном просеивании по коротким интервалам. На основе этой методики проведено экспериментальное исследование и сравнение эффективности различных вариантов стадии выбора полиномов, задающих алгебраические расширения, а именно метода разложения по основанию m (base- m метод) [7], методов Мерфи [7] и Кляйнюнга [8].

Методы выбора полиномов и рейтинг. Сформулируем основную задачу, решаемую на стадии выбора полиномов для алгоритмов решета числового поля. В ходе стадии выбора алгебраических расширений выбираются полиномы $f_1(x), f_2(x) \in \mathbb{Z}[x]$, обладающие следующими свойствами:

- 1) $f_1(x)$ и $f_2(x)$ неприводимы в $\mathbb{Z}[x]$;
- 2) существует такое целое $0 < m < n$, что $f_1(m) \equiv f_2(m) \equiv 0 \pmod{n}$.

В случае дискретного логарифма n заменяется на простое число p . На полиномы $f_1(x), f_2(x)$ могут накладываться дополнительные условия в зависимости от конкретной реализации алгоритма решета числового поля.

За стадией выбора алгебраических расширений следует другая трудоемкая стадия – просеивание [7, с. 6]. Пусть регион просеивания имеет вид $S = [-A, A] \times [1, B] \cap \mathbb{Z}^2$. Введем величину,

называемую скошенностью региона просеивания, равную $s = A / B$ [7, с. 77]. Обозначим однородные полиномы, соответствующие f_1 и f_2 , как $F_i(x, y) = f_i\left(\frac{x}{y}\right)y^{\deg f_i}$, $i = 1, 2$.

Обозначим через U множество взаимно простых пар $(a, b) \in S$, для которых значения $F_1(a, b)$ и $F_2(a, b)$ являются одновременно гладкими с некоторыми границами гладкости B_1 и B_2 соответственно, выбранными заранее.

В ходе стадии просеивания нужно найти достаточно большое число пар из U . Ясно, что для ускорения стадии просеивания необходимо, чтобы значения на регионе просеивания $F_i(x, y)$ принимали как можно больше B_i -гладких значений. В настоящее время наиболее эффективно стадия просеивания реализуется с помощью метода решеточного просеивания с использованием специальных простых [5].

Рейтинги полиномов Мерфи. В работе [7] Б. Мерфи исследует вероятность появления гладких значений полинома $F_i(x, y)$ на регионе просеивания S и свойства, влияющие на нее: свойства размера и корней.

Под свойствами размера понимается величина значений, принимаемых полиномом на регионе просеивания. Влияние свойств размера на вероятность гладкости значений полинома очевидно, так как при фиксированной границе гладкости вероятность появления гладких значений полинома быстро падает с их ростом.

Под свойствами корней понимается распределение корней $F_i(x, y)$ по модулям степеней малых простых чисел. Их влияние на вероятность гладкости менее очевидно: если у $F_i(x, y)$ много корней по модулям степеней малых простых чисел, то его значения ведут себя при просеивании так, как если бы они были меньше.

Для оценки свойств размера полинома $F_i(x, y)$ на регионе просеивания $S = [-A, A] \times [1, B]$ со скошенностью $s = A / B$ Б. Мерфи вводит следующую величину:

$$I(F_i, S) = \frac{1}{2} \ln \left(\int_1^B \int_{-A}^A F_i^2(x, y) dx dy \right).$$

Скошенностью полинома F будем называть скошенность региона просеивания s , которая минимизирует $I(F, S)$ среди регионов просеивания одинаковой площади.

Для оценки свойств корня полиномов Б. Мерфи вводит величину

$$\alpha(F_i) = \sum_{p \leq B_i} \left(1 - \frac{q_p p}{p+1} \right) \frac{\ln p}{p-1},$$

где q_p – число корней $F_i(x, y)$ по модулю p , т. е. q_p включает корни x / y многочлена $F(x, 1)$ и проективные корни. Суммирование здесь ведется по простым, не делящим дискриминант f . Б. Мерфи высказывает и экспериментально обосновывает эвристическое предположение о том, что значения $F_i(x, y)$, имеющие порядок v , при просеивании ведут себя так же, как случайные числа порядка $v e^{\alpha(F_i)}$, и являются B_i -гладкими с той же вероятностью. Это предположение позволяет ввести для полинома F_i понятие рейтинга:

$$I(F_i, S) + \alpha(F_i).$$

Чем ниже этот рейтинг, тем выше вероятность B_i -гладкости чисел из $F_i(S)$.

Введем обозначение

$$u_{f_i}(\theta) = \frac{\ln \left| F_i \left(\sqrt{s} \cos \theta, \frac{1}{\sqrt{s}} \sin \theta \right) \right| + \alpha(F_i)}{\ln B_i}.$$

В работе [7] также вводится рейтинг пары полиномов, некоторым образом характеризующий вероятность одновременной гладкости $F_1(a, b)$ и $F_2(a, b)$ при $(a, b) \in S$:

$$E(f_1, f_2) = \sum_{k=1}^K \rho(u_{f_1}(\theta_k)) \rho(u_{f_2}(\theta_k)),$$

где ρ – функция Дикмана, а θ_k лежат посередине $K = 1000$ равных интервалов, делящих $[0, \pi]$. Чем выше этот рейтинг, тем выше вероятность того, что $F_1(a, b)$ и $F_2(a, b)$ будут одновременно гладкими при $(a, b) \in \mathcal{S}$.

Метод разложения по основанию m . В общем случае этот метод при заданных d и n строит число m и пару полиномов, удовлетворяющих свойствам 1 и 2, причем нелинейный полином f_1 – не обязательно унитарный:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \dots + a_1 x + a_0, \\ f_2(x) &= x - m. \end{aligned}$$

На первом шаге метода выбирается число $m \in ({}^{d+1}\sqrt{n}, {}^d\sqrt{n})$. Такой выбор m гарантирует существование разложения n из $d+1$ цифры в системе счисления с основанием m , цифры a_d, \dots, a_0 которого находятся на втором шаге и полагаются равными коэффициентам многочлена f_1 . Также мы могли бы разлагать по основанию m числа cn для небольших $c \in \mathbb{Z}$, однако не ясно, какие преимущества это дает. Для полученных a_i справедливо $0 \leq a_i < m$. Третьим шагом можно добиться, чтобы $|a_i| \leq m/2$ при $i = 0, \dots, d-1$. Для этого достаточно для тех $0 \leq i < d$, при которых $a_i > m/2$, выполнять замену $a_i := a_i - m$ и $a_{i+1} := a_{i+1} + 1$. Эта замена сохраняет значение $f_1(m)$.

Метод разложения по основанию m имеет тот недостаток, что мы должны выбирать m как можно меньшим, если хотим получить небольшие коэффициенты f_1 и f_2 . В общем случае могут существовать полиномы f_1 и f_2 с малыми коэффициентами и большим общим корнем m по модулю n , которые нельзя получить этим методом.

Метод Мерфи. Метод Мерфи, описываемый в работе [7], при заданном d и n позволяет найти пару полиномов вида

$$\begin{aligned} f_1(x) &= a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \dots + a_1 x + a_0, \\ f_2(x) &= x - m, \end{aligned}$$

удовлетворяющую свойствам 1 и 2 и имеющую наилучший рейтинг, путем последовательного улучшения рейтинга начальной пары полиномов, полученной методом разложения по основанию m . Предлагается улучшать рейтинг данной пары полиномов (f_1, f_2) следующими преобразованиями, применяемыми несколько раз:

1) уменьшая значение $I(F_1, S)$, варьируя скошенность региона просеивания;

2) сдвигая f_1 и f_2 на некоторый $t \in \mathbb{Z}$, т. е. переходя к новой паре полиномов $(\bar{f}_1(x), \bar{f}_2(x)) = (f_1(x-t), f_2(x-t))$ и к новому $\bar{m} = m + t$;

3) прибавляя к $f_1(x)$ некоторое кратное $f_2(x)$, т. е. переходя к новой паре $(\bar{f}_1(x), \bar{f}_2(x)) = (f_1(x) + f_2(x)P(x), f_2(x))$ при некотором $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$.

Первое и второе преобразования не изменяют свойства корней, но могут улучшить свойства размера. Третье преобразование может изменять и свойства корней, и свойства размера. Стоит отметить, что третье преобразование эффективно реализуется как поиск полиномов вида $f_{1, j_0, j_1}(x) = f_1(x) + (j_1 x - j_0)(x - m)$, имеющих наилучшие свойства корней, путем просеивания по j_0, j_1 . На последнем шаге метода Мерфи выбирается пара полиномов, имеющая наиболее высокий рейтинг $E(f_1, f_2)$.

Метод Кляйнюнга. В работе [8] Т. Кляйнюнг предложил улучшенный и обобщенный вариант первого шага метода Мерфи (разложения по основанию m), а именно метод эффективного выбора полиномов вида

$$\begin{aligned} f_1(x) &= a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \dots + a_0, \\ f_2(x) &= px - m, \end{aligned} \tag{1}$$

где $p, m \in \mathbb{Z}$, $(p, m) = 1$ со следующими свойствами:

1) $F_1(m, p) = N;$

2) a_d имеет много делителей p^k для малых простых $p;$

3) мала норма полинома $\sup(f_1)$, определяемая выражением $\sup(f) = \min_{s>0} \max_i \left| a_i s^{i - \frac{\deg(f)}{2}} \right|.$

Важно отметить, что в работе [8] подробно описан метод Кляйнюнга только для случая, когда $\deg f_1 = 5.$

Алгоритм экспериментального сравнения эффективности выбора полиномов. В данном разделе исследуется проблема выбора метода из предложенных выше, генерирующего наилучшие пары полиномов, т. е. пары, минимизирующие время просеивания. Для выбора наилучшей пары полиномов можно пытаться использовать рейтинги, предложенные ранее, вычисление которых достаточно просто. Однако эти рейтинги имеют чисто эвристическое обоснование, а теоретическое их обоснование крайне сложно. Также они не учитывают многие аспекты поведения полиномов на регионе просеивания. Поэтому в данном разделе описывается экспериментальный метод сравнения качества пар полиномов. Стоит отметить, что его можно использовать для оценки точности различных рейтингов пар полиномов.

Мы сравнивали пары полиномов (f_1, f_2) степеней $(5, 1)$, сгенерированные методами разложения по основанию m , Мерфи и Кляйнюнга. Так как сравниваемые пары полиномов имеют одинаковые степени $(5, 1)$, правомерно предположить, что оптимальные размеры региона просеивания $S = [-A, A] \times [1, B] \cap \mathbb{Z}^2$, границы факторных баз B_1 и B_2 , и границы больших простых \bar{B}_1 и \bar{B}_2 для них одинаковы. Также правомерно считать одинаковым количество пар из U , которое нужно найти для составления системы уравнений.

Как показывают экспериментальные данные (табл. 2), время полного просеивания при фиксированных $B_1, B_2, \bar{B}_1, \bar{B}_2$ практически не зависит от пары полиномов. Поэтому лучшей парой полиномов является та, которая позволит набрать необходимое число пар из U быстрее.

Для оценки числа пар из U , даваемых парой полиномов, можно было бы использовать полное просеивание. Однако для факторизации чисел размером более 100 десятичных знаков стадия просеивания занимает несколько часов на одном персональном компьютере, поэтому полное просеивание не выполнялось. Вместо этого интервал больших простых $[\bar{B}_1, B_1]$ полинома степени 5 покрывался $K + 1$ интервалами $[l_t, l_{t+1})$ одинаковой длины так, чтобы $l_0 = \bar{B}_1, l_K = B_1$, т. е. чтобы последний интервал начинался в точке B_1 . И с помощью алгоритма 1 для каждой пары полиномов выполнялось решеточное просеивание для полинома степени 5 со специальными простыми [5] из начала каждого интервала $[l_t, l_{t+1})$, т. е. со специальными простыми из $[l_t, l_t + h_t)$, где $h_t = L |l_{t+1} - l_t|$, для какого-то $0 < L < 1$.

А л г о р и т м 1.

1. Зная \bar{B}_1, B_1, L и K , вычислить координаты интервалов $[l_t, l_{t+1})$ и $h_t = L |l_{t+1} - l_t|$.

2. С помощью просеивателя вычислить $\hat{\chi}_t$ и χ_t – количество идеалов из факторной базы на интервалах $[l_t, l_{t+1})$ и $[l_t, l_t + h_t)$ соответственно.

3. С помощью просеивателя выполнить частичные просеивания на интервалах специальных простых $[l_t, l_t + h_t)$, измеряя δ_t – время просеивания интервала $[l_t, l_t + h_t)$ и ε_t – число пар из U на интервале $[l_t, l_t + h_t)$.

4. Зная $\delta_t, \varepsilon_t, \chi_t, \hat{\chi}_t$, вычислить $\bar{\delta}_t = \frac{\hat{\chi}_t}{\chi_t} \delta_t$ – экстраполированное время просеивания интервала $[l_t, l_{t+1})$ и $\bar{\varepsilon}_t = \frac{\hat{\chi}_t}{\chi_t} \varepsilon_t$ – экстраполированное число пар из U на интервале $[l_t, l_{t+1})$.

5. Далее вычислить $\bar{\varepsilon}_t = \frac{\bar{\varepsilon}_{t+1} + \bar{\varepsilon}_t}{2}, 0 \leq t < K$, – оценочное время просеивания интервала $[l_t, l_{t+1})$ и $\bar{\delta}_t = \frac{\bar{\delta}_{t+1} + \bar{\delta}_t}{2}, 0 \leq t < K$, – оценочное число пар из U на интервале $[l_t, l_{t+1})$.

В дальнейшем обозначим как $\hat{\delta}_t$ и $\hat{\varepsilon}_t$ соответственно время полного просеивания и число пар из U для интервала $[l_t, l_{t+1})$.

Результаты эксперимента. Эксперименты проводились с использованием пакетов программ с открытым исходным кодом *ggnfs* [9] и *gdlog* [10], предназначенных для факторизации и логарифмирования алгоритмом решета числового поля соответственно. Как оказалось, просеивание с двумя неунитарными полиномами f_1 и f_2 (которые генерируются методом Кляйнюнга) поддерживает только программа *gdlg_sieve* из пакета *gdlog*, поэтому для экспериментального просеивания использовалась именно она. Так как нам не нужно полное решение задачи логарифмирования, то для экспериментального просеивания было достаточно задать только простые числа p и $q \mid p-1$, как описано в работе [6].

Для заданной пары p и q алгоритм проведения эксперимента следующий.

А л г о р и т м 2.

1. Используя программы из пакета *ggnfs*, сгенерировать параметры просеивания для факторизации чисел размера p , а именно, границы факторных баз B_1 и B_2 , границы больших простых \overline{B}_1 и \overline{B}_2 , и границы регионов просеивания A и B .

2. Сгенерировать пару полиномов методом разложения по основанию m с помощью программы, созданной авторами.

3. Извлечь параметры *ggnfs* по умолчанию для факторизации чисел размера p и в дальнейшем использовать их при вызове программ *polyselect*, *pol51m0b* и *pol51opt*.

4. Сгенерировать полиномы по методу Мерфи программой *polyselect* из пакета *ggnfs*.

5. Сгенерировать полиномы по методу Кляйнюнга программами *pol51m0b* и *pol51opt* из пакета *ggnfs*.

6. С помощью просеивателя *gdlg_sieve* и алгоритма 1 выполнить частичное просеивание в каждом регионе $[l_t, l_{t+1})$ специальных простых полинома степени 5, и вычислить ε_t и δ_t .

Все эксперименты проводились при $L = \frac{1}{40}$, и $[\overline{B}_1, B_1]$ разбивался на $K = 16$ интервалов. Для оценки вносимой погрешности из-за просеивания более короткого промежутка специальных простых было выполнено полное просеивание трех промежутков специальных простых при p размером 100 десятичных знаков. Получившиеся погрешности представлены в табл. 1.

Таблица 1. Ошибки экспериментальной оценки

Номер региона $[l_t, l_{t+1}), t$	Относительная ошибка оценки времени просеивания, $\frac{ \overline{\varepsilon}_t - \widehat{\varepsilon}_t }{\widehat{\varepsilon}_t}$			Относительная ошибка оценки числа найденных пар из U , $\frac{ \overline{\delta}_t - \widehat{\delta}_t }{\widehat{\delta}_t}$		
	base- m	Мерфи	Кляйнюнг	base- m	Мерфи	Кляйнюнг
0	0,0273	0,0099	0,0121	0,0591	0,0274	0,0121
8	0,0047	0,0056	0,0160	0,0285	0,0022	0,0059
15	0,0104	0,0069	0,0140	0,0498	0,0384	0,0052

Из представленных данных вытекает, что выбранные $L = \frac{1}{40}$ и $K = 16$ позволяют получать адекватные оценки времени просеивания и числа найденных пар из U .

В табл. 2 представлены зависимости оценок времени просеивания и числа найденных пар из U от области специальных простых $[l_t, l_{t+1})$ для p размером 100 десятичных знаков.

Из табл. 2 можно сделать вывод, что время просеивания незначительно зависит от метода выбора полиномов, а именно, максимальное время просеивания отличается от минимального не более чем в 1,12 раза. Небольшую разницу во времени просеивания можно объяснить дополнительными временными затратами на обработку большего числа пар из U . Видно, что метод Кляйнюнга дает значительно больше пар, чем все остальные, и в 2,2–2,5 раза больше пар, чем метод Мерфи. Очевидно, что метод разложения по основанию m дает значительно меньше пар, чем остальные (не менее чем в 3,7 раза), поэтому в дальнейших результатах этот метод не присутствует.

Для p размером 100, 104, 108, 112, 116, 120 десятичных знаков был проведен эксперимент, описанный выше, и в табл. 3 даны рейтинги полученных пар полиномов и границы отношения числа пар из U для метода Кляйнюнга к числу пар для метода Мерфи.

Таблица 2. Оценки времени просеивания и числа пар из U для p размером 100 десятичных знаков

Номер региона $[l, l_{t+1}), t$	Оценка времени просеивания, \bar{e}_t , с			Оценка числа найденных пар из U , $\bar{\delta}_t$		
	base- m	Мерфи	Кляйнюнг	base- m	Мерфи	Кляйнюнг
0	3760	3992	4103	10618	39434	94378
1	3760	3892	4103	9008	37225	90180
2	3744	3997	4171	8807	38462	88316
3	3695	3887	4074	9056	37240	82141
4	3687	3934	4061	9169	36045	80416
5	3662	3866	4059	8310	33396	81412
6	3653	3802	3979	7421	31373	78229
7	3646	3817	4016	8062	31042	78336
8	3687	3837	3980	8304	32122	75062
9	3587	3741	3964	6971	30812	74037
10	3631	3702	3943	7280	29817	75102
11	3587	3794	3975	7491	30126	73130
12	3570	3726	3859	7399	28726	67947
13	3561	3762	3895	7306	28754	68055
14	3537	3657	3831	7110	28696	66750
15	3535	3758	3914	7069	29803	66265

Таблица 3. Результаты эксперимента для p размером 100, 104, 108, 112, 116, 120 десятичных знаков

Размер p	$E(f_1, f_2)$ для пары полиномов Кляйнюнга	$E(f_1, f_2)$ для пары полиномов Мерфи	Отношение рейтингов Кляйнюнг/Мерфи	Границы отношения числа пар из U Кляйнюнг/Мерфи
100	55,2856	39,1366	1,4126	2,2057–2,5236
104	44,0243	34,1833	1,2879	1,6303–1,7646
108	33,8394	22,309	1,5169	1,8115–2,0008
112	28,9876	20,9761	1,3819	1,5553–1,7810
116	24,7566	16,2829	1,5204	1,9949–2,3471

Это показывает, что полиномы метода Кляйнюнга дают приблизительно в 2 раза больше пар из U , чем полиномы метода Мерфи. Таким образом, алгоритм 1 дает методику оценки времени полного просеивания и числа пар из U , что позволяет существенно сократить время оценки качества полиномов для алгоритма решета числового поля. Для пар полиномов фиксированных степеней эта методика позволяет сравнить эффективность различных методов выбора полиномов.

Литература

1. Rivest R., Shamir A., Adleman B. // Communications of the ACM. 1978. Vol. 21, iss. 2.
2. Vanstone S., Menezes A., Oorschot P. van. Handbook of Applied Cryptography. London, 1996.
3. Diffie W., Hellman M. // Information Theory IEEE Transactions. 1976. Vol. 22 (2). P. 644–654.
4. Buhler J. P., Lenstra H. W., Pomerance C. // Springer Berlin / Heidelberg, Lecture Notes in Mathematics. 1993. Vol. 1554. P. 50–94.
5. Pollard J. M. // Springer Berlin / Heidelberg, Lecture Notes in Mathematics. 1993. Vol. 1554. P. 43–49.
6. Lercier R., Joux A. // Mathematics of computation. 1999. Vol. 72. P. 953–967.
7. Murphy B. A. Polynomial Selection for the Number Field Sieve Integer Factorization Algorithm. PhD thesis. The Australian National University, 1999.
8. Kleinjung Th. // Math. Comp. 2006. Vol. 75. P. 2037–2047.
9. Monico C. GGNFS suite // sourceforge. net [Electronic resource]. 2012. Mode of access: <http://sourceforge.net/projects/ggnfs/>. Date of access: 17.09.2013.
10. General number field sieve implementation // sourceforge. net [Electronic resource]. 2012. Mode of access: <http://gdlog.sourceforge.net/>. Date of access: 17.09.2013.

D. V. VASILYEV, A. S. KUDIN

ON THE CHOICE OF POLYNOMIALS FOR THE NUMBER FIELD SIEVE

Summary

In the paper an algorithm is suggested for quick estimate of sieving time and the number of relations for the number field sieve algorithm.

ФІЗІКА

УДК 530.12

А. П. РЯБУШКО¹, Т. А. ЖУР², И. П. БОЯРИНА², О. Л. ЗУБКО¹, В. И. ЮРИНОК¹

ТОЧКИ ФОТОЛИБРАЦИИ В НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКЕ

¹Белорусский национальный технический университет

²Белорусский государственный аграрный технический университет

(Поступила в редакцию 06.06.2014)

Введение. Актуальность исследования обусловлена необходимостью более точного прогнозирования движения малых тел в Солнечной системе (космических аппаратов и станций, астероидов, метеоритов и т. д.) в связи с интенсивным освоением космоса. Основной задачей данного исследования является получение уравнений движения точек фотолибрации и тел в их окрестностях в ограниченной задаче трех тел при учете светового давления. Если воспользоваться результатами работ [1–5], то можно вывести точные уравнения движения (УД) в ограниченной задаче трех тел, при учете прямого светового (электромагнитного) давления, имеющие следующий вид (движение тел A_i , $i = 1, 2, 3$ происходит в плоскости xOy , t – время):

$$\frac{d^2 \tilde{x}_1}{dt^2} + \frac{\gamma m_2}{\tilde{r}_{12}^3} (\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2) = 0, \quad \frac{d^2 \tilde{y}_1}{dt^2} + \frac{\gamma m_2}{\tilde{r}_{12}^3} (\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2) = 0; \quad (1)$$

$$\frac{d^2 \tilde{x}_2}{dt^2} + \frac{\gamma m_1}{\tilde{r}_{12}^3} (\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1) = \frac{\gamma A_{12}}{\tilde{r}_{12}^3} (\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1), \quad \frac{d^2 \tilde{y}_2}{dt^2} + \frac{\gamma m_1}{\tilde{r}_{12}^3} (\tilde{y}_2 - \tilde{y}_1) = \frac{\gamma A_{12}}{\tilde{r}_{12}^3} (\tilde{y}_2 - \tilde{y}_1); \quad (2)$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 \tilde{x}_3}{dt^2} + \frac{\gamma m_2}{\tilde{r}_{23}^3} (\tilde{x}_3 - \tilde{x}_2) + \frac{\gamma m_1}{\tilde{r}_{13}^3} (\tilde{x}_3 - \tilde{x}_1) = \frac{\gamma A_{13}}{\tilde{r}_{13}^3} (\tilde{x}_3 - \tilde{x}_1), \\ \frac{d^2 \tilde{y}_3}{dt^2} + \frac{\gamma m_2}{\tilde{r}_{23}^3} (\tilde{y}_3 - \tilde{y}_2) + \frac{\gamma m_1}{\tilde{r}_{13}^3} (\tilde{y}_3 - \tilde{y}_1) = \frac{\gamma A_{13}}{\tilde{r}_{13}^3} (\tilde{y}_3 - \tilde{y}_1), \end{cases} \quad (3)$$

где A_1 – звезда, A_2 – темное тело, A_3 – пробное тело; m_1, m_2, m_3 – их массы; тильда «~» над координатами тел A_i x_i, y_i означает, что при учете светового давления (СД) $A_{12} \neq 0, A_{13} \neq 0$ и решения системы (1)–(3) иные, нежели при отсутствии СД ($A_{12} = 0, A_{13} = 0$); $\tilde{r}_{ij} = \left[(\tilde{x}_j - \tilde{x}_i)^2 + (\tilde{y}_j - \tilde{y}_i)^2 \right]^{1/2}$, $i \neq j, i, j = 1, 2, 3$ – расстояния между телами A_i и A_j . Величины A_{12} и A_{13} – редуцирующие массы звезды A_1 , соответствующие телам A_2 и A_3 , имеют следующую структуру:

$$A_{12} = \frac{k_2 \sigma_2 W_1 r_0^2}{\gamma m_2 c}, \quad A_{13} = \frac{k_3 \sigma_3 W_1 r_0^2}{\gamma m_3 c}, \quad (4)$$

где k_2, k_3 – коэффициенты отражения света телами A_2 и A_3 , $1 \leq k_2 \leq 2, 1 \leq k_3 \leq 2$, σ_1, σ_2 – площади миделевых сечений тел A_2 и A_3 ; c – скорость света в вакууме; γ – ньютоновская постоянная тяготения; W_1 – звездная постоянная, являющаяся плотностью энергии электромагнитного (светового) излучения звезды A_1 , проходящего за 1 с через 1 см² площадки, перпендикулярной направлению на звезду и находящейся на расстоянии r_0 от нее.

1. Парусность и ее влияние на редукцию массы звезды. Введем понятие *парусность* тела. Если тело A имеет массу m , миделево сечение σ и коэффициент отражения k , то *парусностью* тела A назовем величину

$$\Pi = k \frac{\sigma}{m}. \quad (5)$$

Заметим, что некоторые авторы парусностью называют отношение σ/m (см. напр., [6]), тем самым игнорируется отражательная способность пробного тела, которая может менять парусность в 2 раза ($1 \leq k \leq 2$).

Для тел A_2, A_3 имеем, согласно (5), соответственно парусности $\Pi_2 = k_2 \sigma_2 / m_2$, $\Pi_3 = k_3 \sigma_3 / m_3$, и далее, согласно (4), редуцирующие массы звезды и их отношение:

$$A_{12} = \Pi_2 \frac{W_1 r_0^2}{\gamma c}, \quad A_{13} = \Pi_3 \frac{W_1 r_0^2}{\gamma c}, \quad A_{12} / A_{13} = \Pi_2 / \Pi_3 = \frac{k_2 \sigma_2}{k_3 \sigma_3} \cdot \frac{m_3}{m_2}. \quad (6)$$

В Солнечной системе (С. с.) *солнечная постоянная* имеет значение (см. [7, § 8.3]):

$$W_1 = W_{\odot} = (1366 \pm 4) \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-2} \approx 1,376 \cdot 10^6 \text{ эрг} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}, \quad (7)$$

при этом в (6) $r_0 = 1 \text{ а. е.} = 1,5 \cdot 10^{13} \text{ см}$ – среднее расстояние от Земли до Солнца.

Если обозначим через Π_T парусность любого тела, то относительно него редуцирующая масса Солнца согласно (6) и (7) находится по формуле

$$A_T = 1,54 \cdot 10^{29} \Pi_T, \quad \Pi_T = k_T \sigma_T / m_T. \quad (8)$$

Редуцированная масса Солнца для этого тела m_1^* тогда равна разности

$$m_1^* = m_{\odot}^* = m_{\odot} - A_T = (2 \cdot 10^{33} - 1,54 \cdot 10^{29} \Pi_T) \text{ г}. \quad (9)$$

Если тело обладает диффузным отражением солнечного излучения, то $k_T = 13/9 = 1,44$ (см., напр., [6, с. 618]), и окончательно находим согласно (8) и (9), что

$$m_{\odot}^* = (2 \cdot 10^{33} - 2,22 \cdot 10^{29} \sigma_T / m_T) \text{ г}. \quad (10)$$

Ясно, что существует такое отношение σ_T / m_T , при котором $m_{\odot}^* = 0$, т. е. солнечное давление и притяжение тела Солнцем уравниваются. Легко подсчитываем, что из $m_{\odot}^* = 0$ следует $\sigma_T / m_T \approx 9009 \text{ см}^2 \cdot \text{г}^{-1}$. Известно [6, 7], что, например, для ледяного микрометеорита (плотность $\delta = 0,9 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$, радиус $\rho = 10^{-4} \text{ см}$) $\Pi_T = k_T \sigma_T / m_T \sim 10^4 \text{ см}^2 \cdot \text{г}^{-1}$. Также известно [9], что существует множество пробных тел (частиц) в межпланетном пространстве с подобной характеристикой (например, в хвостах комет), для которых согласно (10) могут выполняться неравенства и $m_{\odot}^* > 0$, и $m_{\odot}^* < 0$. Для упомянутого микрометеорита $m_{\odot}^* < 0$, т. е. Солнцем он отталкивается, но телом A_2 – притягивается. Американские спутники-баллоны «Эхо-1», «Эхо-2», «Пагеос», запущенные на околоземную орбиту в 1960-х гг., имели парусность порядка 100, 50, 130 $\text{см}^2 \cdot \text{г}^{-1}$ соответственно и, следовательно, притягивались Солнцем, но их наблюдаемые траектории заметно отличались от траекторий, рассчитанных по законам ньютоновской небесной механики, не учитывающей светового давления.

Для планет С. с. парусность ничтожно малая. Например, для Юпитера и Земли парусность имеет порядок $10^{-10} \text{ см}^2 \cdot \text{г}^{-1}$. Поэтому редуцирующая масса Солнца для планет согласно (9) практически совпадает с массой Солнца и траектории планет, рассчитанные без учета и при учете СД, дают при нынешней точности наблюдений одинаковый результат.

Дело коренным образом меняется, когда рассматриваются пробные тела (частицы) с большой парусностью. Их траектории (орбиты) существенно отличаются в С. с. (и любой звездной планетарной системе) от ньютоновских траекторий. Эти отличия могут играть важную роль в астронавигации и вопросах, связанных с космогонией С. с. и любых других планетарных систем.

2. Интегрирование систем (1)–(3). В свете вышесказанного члены с A_{12} в (2) на много порядков меньше членов с A_{13} в (3). Например, для системы Солнце (A_1)–Юпитер (A_2)–спутник-баллон (A_3) $A_{12}/A_{13} \sim 10^{-12}$, а для системы Солнце (A_1)–Юпитер (A_2)–микрометеорит (A_3) имеем $A_{12}/A_{13} \sim 10^{-14}$, т. е. при существующей точности наблюдений можно считать, что $A_{12} = 0$. Тогда

система (1), (2) дает известную ньютоновскую систему УД для двух тел A_1 и A_2 , которая точно решается и в полярной системе координат ($\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 = x_1 - x_2 = r \cos \varphi$, $\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2 = y_1 - y_2 = r \sin \varphi$), уравнение относительной орбиты их движения имеет вид

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e \cos \varphi}{p}, \quad (11)$$

т. е. является коническим сечением (e и p – эксцентриситет и параметр орбиты соответственно).

Рассмотрим подробно случай *кругового* движения тел A_1 и A_2 , т. е. в (11) $e = 0$ и $r = p = r_0 = \text{const}$. Тогда параметрические уравнения орбит тел A_1 и A_2 можно представить в виде (см., напр., [1] или [3]):

$$A_1(x_1, y_1) \begin{cases} x_1 = -\frac{m_2}{m} r_0 \cos \omega_0 t, \\ y_1 = -\frac{m_2}{m} r_0 \sin \omega_0 t; \end{cases} \quad A_2(x_2, y_2) \begin{cases} x_2 = \frac{m_1}{m} r_0 \cos \omega_0 t, \\ y_2 = \frac{m_1}{m} r_0 \sin \omega_0 t; \end{cases} \quad \omega_0^2 = \gamma m / r_0^3, \quad m = m_1 + m_2. \quad (12)$$

Система координат xOy – барицентрическая: $m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0$, $m_1 y_1 + m_2 y_2 = 0$; движение плоское, т. е. $z_1 = 0$, $z_2 = 0$; тела A_1 и A_2 все время находятся на прямой, проходящей через точку O .

Теперь можно интегрировать систему УД (3) для пробного тела A_3 , заменив в ней \tilde{x}_1 , \tilde{y}_1 , \tilde{x}_2 , \tilde{y}_2 соответственно на x_1 , x_2 , y_1 , y_2 . Тогда окончательно находим УД для пробного тела A_3 в фотогравитационном поле системы звезда (A_1) – темное тело (A_2):

$$\begin{cases} \frac{d^2 \tilde{x}_3}{dt^2} + \frac{\gamma(m_1 - A_{13})(\tilde{x}_3 - x_1)}{[(\tilde{x}_3 - x_1)^2 + (\tilde{y}_3 - y_1)^2]^{3/2}} + \frac{\gamma m_2 (\tilde{x}_3 - x_2)}{[(\tilde{x}_3 - x_2)^2 + (\tilde{y}_3 - y_2)^2]^{3/2}} = 0, \\ \frac{d^2 \tilde{y}_3}{dt^2} + \frac{\gamma(m_1 - A_{13})(\tilde{y}_3 - y_1)}{[(\tilde{x}_3 - x_1)^2 + (\tilde{y}_3 - y_1)^2]^{3/2}} + \frac{\gamma m_2 (\tilde{y}_3 - y_2)}{[(\tilde{x}_3 - x_2)^2 + (\tilde{y}_3 - y_2)^2]^{3/2}} = 0. \end{cases} \quad (13)$$

3. Стационарные решения системы (13).

Если в (13) положить $A_{13} = 0$, то придем к ньютоновским УД, которые точно решены в частных случаях Л. Эйлером в 1767 г. [10] и Ж. Лагранжем в 1772 г. [11]: пробное тело A_3 движется по окружности (как и тела A_1 , A_2), находясь на постоянных расстояниях от тел A_1 и A_2 , причем имеется пять возможностей в положении тела A_3 относительно тел A_1 и A_2 . Эти положения тела A_3 по сложившейся традиции называются точками либрации и обозначаются буквами L_1 , L_2 , L_3 , L_4 , L_5 (рис. 1). Точки L_4 , L_5 называются лагранжевыми треугольными точками либрации, а L_1 , L_2 , L_3 – эйлеровыми коллинеарными точками либрации, так как они находятся на прямой $A_1 A_2$. Все точки либрации описывают с угловой скоростью ω_0 окружности с центром в начале координат O (центре масс тел A_1 и A_2), треугольники $A_1 A_2 L_4$ и $A_1 A_2 L_5$ – равносторонние. Координаты треугольных точек либрации L_4 , L_5 находятся во вращающейся с угловой скоростью ω_0 около O системе координат по формулам:

$$x_3^0 = \frac{m_1 - m_2}{2m} r_0, \quad y_3^0 = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} r_0, \quad z_3 = 0, \quad (14)$$

где верхний знак у y_3^0 соответствует точке либрации L_4 , а нижний – точке L_5 . Пользуясь формулами (12) и (14), легко показать, что все стороны треугольников $A_1 A_2 L_4$ и $A_1 A_2 L_5$ равны r_0 . Расстояния точек L_1 , L_2 , L_3 до тел A_1 и A_2 – разные, но постоянные.

Переход к фотогравитационному полю ($A_{13} \neq 0$) приводит к УД (13), и сразу же возникает вопрос о существовании либрационных решений у системы (13), т. е. представляет интерес следующая

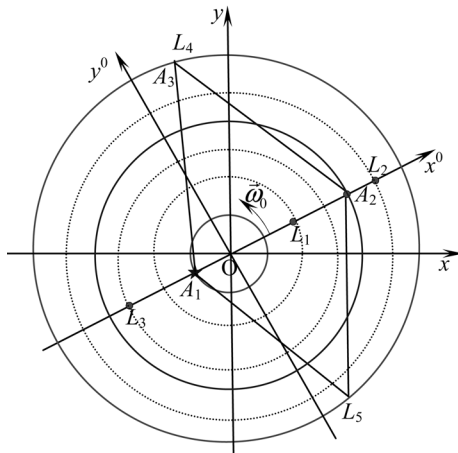


Рис. 1

З а д а ч а. Выяснить, существуют ли точные решения системы (13) вида

$$\tilde{x}_3 = \tilde{x}_3^0 \cos \omega_0 t - \tilde{y}_3^0 \sin \omega_0 t, \quad \tilde{y}_3 = \tilde{x}_3^0 \sin \omega_0 t + \tilde{y}_3^0 \cos \omega_0 t, \quad (15)$$

где $\tilde{x}_3^0 = \text{const}$, $\tilde{y}_3^0 = \text{const}$, и в случае существования найти их.

Р е ш е н и е. Дважды дифференцируя по t \tilde{x}_3 , \tilde{y}_3 из (15), находим:

$$d^2 \tilde{x}_3 / dt^2 = -\tilde{x}_3^0 \omega_0^2 \cos \omega_0 t + \tilde{y}_3^0 \omega_0^2 \sin \omega_0 t, \quad d^2 \tilde{y}_3 / dt^2 = -\tilde{x}_3^0 \omega_0^2 \sin \omega_0 t - \tilde{y}_3^0 \omega_0^2 \cos \omega_0 t. \quad (16)$$

Подставив x_1, x_2, y_1, y_2 из (12), \tilde{x}_3, \tilde{y}_3 из (15) и их вторые производные из (16) в (13), после необходимых преобразований приходим к алгебраической системе уравнений для нахождения неизвестных $\tilde{x}_3^0, \tilde{y}_3^0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\tilde{x}_3^0 \omega_0^2 + \frac{\gamma m_1^* \left(\tilde{x}_3^0 + \frac{m_2}{m} r_0 \right)}{\left[\left(\tilde{x}_3^0 + \frac{m_2}{m} r_0 \right)^2 + (\tilde{y}_3^0)^2 \right]^{3/2}} + \frac{\gamma m_2 \left(\tilde{x}_3^0 - \frac{m_1}{m} r_0 \right)}{\left[\left(\tilde{x}_3^0 - \frac{m_1}{m} r_0 \right)^2 + (\tilde{y}_3^0)^2 \right]^{3/2}} = 0, \\ \tilde{y}_3^0 \omega_0^2 - \frac{\gamma m_1^* \tilde{y}_3^0}{\left[\left(\tilde{x}_3^0 + \frac{m_2}{m} r_0 \right)^2 + (\tilde{y}_3^0)^2 \right]^{3/2}} - \frac{\gamma m_2 \tilde{y}_3^0}{\left[\left(\tilde{x}_3^0 - \frac{m_1}{m} r_0 \right)^2 + (\tilde{y}_3^0)^2 \right]^{3/2}} = 0. \end{array} \right. \quad (17)$$

При решении системы (17), (18) рассмотрим два случая.

1. Коллинеарный случай. Он получается при $\tilde{y}_3^0 = 0$. Тогда (18) обращается в нулевое тождество, а (17) дает уравнение для нахождения \tilde{x}_3^0 . Это уравнение после замены ω_0^2 согласно (12) приводим к виду

$$f(\tilde{x}_3^0) = -\tilde{x}_3^0 \pm \frac{m_1^* r_0^3}{m \left(\tilde{x}_3^0 + \frac{m_2}{m} r_0 \right)^2} \pm \frac{m_2 r_0^3}{m \left(\tilde{x}_3^0 - \frac{m_1}{m} r_0 \right)^2} = 0, \quad (19)$$

где во втором и третьем членах знак «+» берется при положительных значениях выражений в скобках и знак «-» – при отрицательных значениях. Введенная в (19) функция $f(\tilde{x}_3^0)$ обращается в бесконечность при $\tilde{x}_3^0 = \pm\infty$, $\tilde{x}_3^0 = -\frac{m_2}{m} r_0$, $\tilde{x}_3^0 = \frac{m_1}{m} r_0$ и имеет конечные значения и непрерывна в трех интервалах при $m_1^* \neq 0$:

$$\left(-\infty, -\frac{m_2}{m} r_0 \right), \left(-\frac{m_2}{m} r_0, \frac{m_1}{m} r_0 \right), \left(\frac{m_1}{m} r_0, +\infty \right). \quad (20)$$

Если же $m_1^* = 0$, то будем иметь только два таких интервала:

$$\left(-\infty, \frac{m_1}{m} r_0 \right), \left(\frac{m_1}{m} r_0, +\infty \right). \quad (21)$$

Находим производную

$$\frac{df(\tilde{x}_3^0)}{d\tilde{x}_3^0} = -1 \mp 2 \frac{m_1^*}{m} r_0^3 \left(\tilde{x}_3^0 + \frac{m_2}{m} r_0 \right)^{-3} \mp 2 \frac{m_2}{m} r_0^3 \left(\tilde{x}_3^0 - \frac{m_1}{m} r_0 \right)^{-3}, \quad (22)$$

необходимую для исследования свойств функции $f(\tilde{x}_3^0)$, которые существенно отличаются в случаях а) $m_1^* > 0$, б) $m_1^* = 0$, в) $m_1^* < 0$.

а) Убеждаемся в том, что при $m_1^* > 0$ производная во всех трех интервалах (20) существует и отрицательна, что говорит о монотонном убывании $f(\tilde{x}_3^0)$ в каждом из этих интервалов. Кроме того, вблизи левого конца каждого из этих интервалов $f(\tilde{x}_3^0) > 0$, а вблизи правого конца $f(\tilde{x}_3^0) < 0$. Отсюда следует, что в каждом интервале существует единственная точка фотолибрации для

пробного тела A_3 , положение которой зависит не только от m_1 и m_2 , но и от A_{13} , так как входящая в (19) и (22) величина $m_1^* = m_1 - A_{13}$.

Итак, доказано, что существуют три коллинеарные точки фотолибрации L_1^*, L_2^*, L_3^* при заданном A_{13} из промежутка $0 \leq A_{13} < m_1$.

Далее приходим к выводу, что на прямой A_1A_2 существуют три отрезка, заполненные точками фотолибрации для разных пробных тел. Эти отрезки назовем *отрезками фотолибрации*. Без учета светового давления отрезки фотолибрации вырождаются в точки либрации L_1, L_2, L_3 , абсциссы которых находятся известными методами (см., напр., [2, 12]). При учете светового давления ($A_{13} \neq 0$) уравнение (19) можно решать теми же методами или, следуя духу времени, решение уравнения можно искать с помощью компьютерных программ, например Mathematica или Mathcad.

б) Исследование уравнения (19) в случае $m_1^* = 0$, т. е. $A_{13} = m_1$, показывает, что существует одна точка фотолибрации во втором интервале из (21), а именно точка L_2^* , а две точки фотолибрации L_1^* и L_3^* сливаются в одну точку A_1 , т. е. звезда является двойной точкой фотолибрации.

в) Случай $m_1^* < 0$, т. е. $A_{13} > m_1$, исследуется аналогично случаю а) $m_1^* > 0$: имеем три интервала непрерывности функции $f(\tilde{x}_3^0)$ (20) и производной (22), но второй член в (19) и (22) изменил знак. Поэтому в первом и втором интервалах (20) график функции $f(\tilde{x}_3^0)$ не пересекает ось Ox^0 , т. е. в этих интервалах уравнение (19) не имеет решений и, следовательно, нет точек фотолибрации L_1^* и L_3^* . В третьем интервале (20) уравнение (19) имеет одно решение, т. е. существует одна точка фотолибрации L_2^* . Меняя значения A_{13} в интервале $m_1 < A_{13} < +\infty$, получим отрезок коллинеарных точек фотолибрации L_2^* , лежащий на оси Ox^0 справа от тела A_2 (рис. 2).

2. Треугольный случай. В этом случае $\tilde{y}_3^0 \neq 0$ и уравнение (18) не исчезает. Возьмем следующую комбинацию уравнений (17) и (18): (17) умножим на \tilde{y}_3^0 , а (18) – на \tilde{x}_3^0 и полученные выражения сложим. Тогда придем к следующему уравнению:

$$\frac{m_1^*}{\left[\left(\tilde{x}_3^0 + \frac{m_2}{m} r_0 \right)^2 + (\tilde{y}_3^0)^2 \right]^{3/2}} = \frac{m_1}{\left[\left(\tilde{x}_3^0 - \frac{m_1}{m} r_0 \right)^2 + (\tilde{y}_3^0)^2 \right]^{3/2}}. \quad (23)$$

Из (23) сразу же следует, что $m_1^* > 0$ и, следовательно, $0 \leq A_{13} < m_1$.

Заменив в уравнении (18) ω_0^2 его выражением из (12) и сократив (18) на \tilde{y}_3^0 , придем к уравнению

$$\frac{m}{r_0^3} - \frac{m_1^*}{\left[\left(\tilde{x}_3^0 + \frac{m_2}{m} r_0 \right)^2 + (\tilde{y}_3^0)^2 \right]^{3/2}} - \frac{m_2}{\left[\left(\tilde{x}_3^0 - \frac{m_1}{m} r_0 \right)^2 + (\tilde{y}_3^0)^2 \right]^{3/2}} = 0. \quad (24)$$

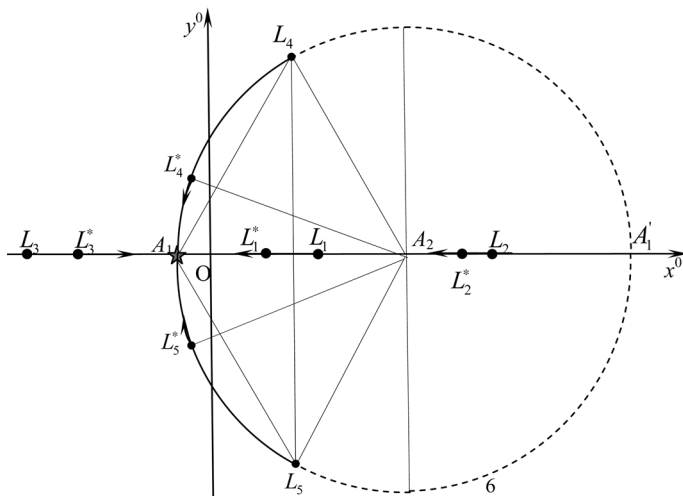


Рис. 2

Сложив почленно уравнения (23) и (24), получаем уравнение

$$\left[\left(\tilde{x}_3^0 - \frac{m_1}{m} r_0 \right)^2 + (\tilde{y}_3^0)^2 \right]^{3/2} = r_0^3, \quad (25)$$

подстановка левой части которого в (23) приводит к уравнению

$$\left[\left(\tilde{x}_3^0 + \frac{m_2}{m} r_0 \right)^2 + (\tilde{y}_3^0)^2 \right]^{3/2} = \frac{m_1^*}{m_1} r_0^3. \quad (26)$$

Возведя обе части уравнений (25) и (26) в степень $2/3$, приходим к системе

$$\begin{cases} \left(\tilde{x}_3^0 - \frac{m_1}{m} r_0 \right)^2 + (\tilde{y}_3^0)^2 = r_0^2, \\ \left(\tilde{x}_3^0 + \frac{m_2}{m} r_0 \right)^2 + (\tilde{y}_3^0)^2 = \left(\frac{m_1^*}{m_1} \right)^{2/3} r_0^2, \end{cases} \quad (27)$$

решение которой имеет вид

$$\tilde{x}_3^0 = \frac{m_1 - m_2}{2m} r_0 - \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{m_1^*}{m_1} \right)^{2/3} \right] r_0, \quad \tilde{y}_3^0 = \pm \left(\frac{m_1^*}{m_1} \right)^{1/3} \cdot r_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4} \left(\frac{m_1^*}{m_1} \right)^{2/3}}. \quad (28)$$

Решая систему (27) при $A_{13} = 0$, т. е. при $m_1^* = m_1$, приходим к решению (14); решение (28) также переходит в (14).

Таким образом, для конкретного пробного тела (A_{13} задано) существуют две симметричные треугольные точки фотолибрации. Для разных пробных тел параметр A_{13} может быть разным и поэтому треугольные точки фотолибрации также будут разными. Это означает, что на равенства (28) можно смотреть как на параметрические уравнения линий (A_{13} – параметр), состоящих из треугольных точек фотолибрации L_4^* , L_5^* . Эти линии будем называть *линиями треугольных точек фотолибрации*.

По определению $A_{13} \geq 0$, но из (28) следует, что A_{13} должно быть ограничено сверху условием $1 - \frac{1}{4} \left(\frac{m_1^*}{m_1} \right)^{2/3} \geq 0$, из которого получаем область изменения A_{13} : $0 \leq A_{13} \leq 9m_1$. Но ранее имели $0 \leq A_{13} < m_1$. Поэтому окончательно областью изменения A_{13} будет

$$0 \leq A_{13} < m_1. \quad (29)$$

Нетрудно показать, что при условии (29) уравнения (28) определяют две дуги окружности

$$\left(\tilde{x}_3^0 - \frac{m_1}{m} r_0 \right)^2 + (\tilde{y}_3^0)^2 = r_0^2, \quad (30)$$

имеющей центр в точке A_2 и радиус r_0 , но в силу ограничения (29) дуга окружности (30) точкой фотолибрации L_4^* с ростом A_{13} проходит против хода часовой стрелки от точки L_4 до A_1 , а L_5^* – по ходу часовой стрелки от точки L_5 до A_1 , не включая A_1 . Треугольники $A_1 A_2 L_4^*$ и $A_1 A_2 L_5^*$ – равнобедренные (см. рис. 2).

Итак, задача решена: доказано, что система (13) имеет точные решения (15), соответствующие пяти видам точек фотолибрации.

4. Числовые оценки и обсуждение полученных результатов. Проведем некоторые численные расчеты в случае коллинеарных точек фотолибрации L_1^* , L_2^* , L_3^* для систем Солнце–Юпитер–пробное тело и Солнце–Земля–пробное тело и сведем их в две таблицы, приняв в уравнении (19) соответственно $m_1 = 2 \cdot 10^{33}$ г, $m_2 = 2 \cdot 10^{30}$ г, $r_0 = 7,78 \cdot 10^{13}$ см, и $m_1 = 2 \cdot 10^{33}$ г, $m_2 = 2 \cdot 10^{30}$ г, $r_0 = 7,78 \cdot 10^{13}$ см (табл. 1 и 2).

В табл. 1 и 2 случай $A_{13} \rightarrow \infty$ не реален и рассматривается формально математически для того, чтобы подчеркнуть тенденцию стремления L_2^* справа к телу A_2 при увеличении A_{13} .

Из уравнения (19) легко находим значение A_{13} , при котором $\tilde{x}_3^0 = 0$ (точка фотолибрации L_1^* находится в центре масс O тел A_1 и A_2):

$$A_{13} = m_1 \left(1 - m_2^3 / m_1^3 \right). \quad (31)$$

При $m_1 = m_2$ из (31) получаем $A_{13} = 0$. Это означает, что только в случае равенства масс звезды A_1 и темного тела A_2 их центр масс O , находящийся посередине отрезка $A_1 A_2$, является коллинеарной точкой либрации L_1 . Во всех остальных случаях ($m_1 > m_2$) центр масс O является коллинеарной точкой фотолибрации L_1^* , получаемой из (19) при значении A_{13} из (31).

Таблица 1. Для системы тел СЮПТ

A_{13}, Γ	$\bar{x}_3^0 / 10^{13} \text{ см}$		
	L_1^*	L_2^*	L_3^*
0	7,2456	8,3238	-7,7832
$0,1m_1$	7,1358	8,2518	-7,5149
$0,3m_1$	6,7527	8,1549	-6,9115
$0,5m_1$	6,114	8,0951	-6,1789
$0,7m_1$	5,1780	8,0550	-5,2126
$0,9m_1$	3,5958	8,0261	-3,6163
m_1	$-7,7722 \cdot 10^{-3}$	8,0145	-0,00777
$1,1m_1$	–	8,0043	–
$1,5m_1$	–	7,9730	–
$2m_1$	–	7,9471	–
$4m_1$	–	7,8964	–
$9m_1$	–	7,8550	–
$20m_1$	–	7,8276	–
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
∞	–	7,7722	–

Таблица 2. Для системы тел СЗПТ

A_{13}, Γ	$\bar{x}_3^0 / 10^{13} \text{ см}$		
	L_1^*	L_2^*	L_3^*
0	1,4752	1,5049	-1,4900
$0,1m_1$	1,4374	1,4976	-1,4386
$0,3m_1$	1,3229	1,4946	-1,3230
$0,5m_1$	1,1826	1,4936	-1,1826
$0,7m_1$	0,9974	1,4931	-0,9975
$0,9m_1$	0,6916	1,4927	-0,6916
m_1	$-0,4455 \cdot 10^{-5}$	1,4926	$-0,4455 \cdot 10^{-5}$
$1,1m_1$	–	1,4924	–
$1,5m_1$	–	1,4921	–
$2m_1$	–	1,4918	–
$4m_1$	–	1,4913	–
$9m_1$	–	1,4908	–
$20m_1$	–	1,4906	–
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
∞	–	1,4900	–

Итак, согласно уравнению (19) и таблицам 1 и 2, коллинеарные точки фотолибрации при увеличении A_{13} в области $0 \leq A_{13} < +\infty$ ведут себя следующим образом. Точка L_1^* справа, а точка L_3^* слева приближаются к звезде A_1 при $A_{13} \rightarrow m_1$ и сливаются с A_1 при $A_{13} = m_1$ (см. рис. 2). При $A_{13} > m_1$ точек фотолибрации L_1^* и L_3^* не существует. Точка фотолибрации L_2^* при всех A_{13} из области $0 \leq A_{13} < +\infty$ существует и стремится к темному телу A_2 справа при увеличении A_{13} (см. табл. 1, 2 и рис. 2). Таким образом, самой близкой слева к телу A_2 является коллинеарная точка либрации L_1 , а самой дальней справа от тела A_2 является коллинеарная точка либрации L_2 (см. рис. 2).

Поведение треугольных точек фотолибрации L_4^* и L_5^* легко усматривается из их параметрических уравнений (28) и области изменения параметра A_{13} (29) (см. текст, сопутствующий уравнениям (28)–(30)).

Все рассмотренные ситуации относятся к вращающейся системе координат x^0Oy^0 . В неподвижной системе координат xOy (см. рис. 1) все точки фотолибрации движутся с угловой скоростью ω_0 по окружностям соответствующего радиуса с центром в центре масс O тел A_1 и A_2 .

Заключение. Проведенное исследование в рамках задачи трех тел показывает, что учет прямого светового давления приводит к появлению новых закономерностей движения, отсутствующих в ньютоновской небесной механике. Но на движение тел в фотогравитационном поле действуют также возмущающие силы, обязанные своим существованием эффектам специальной и общей теории относительности: продольный и поперечный эффекты Доплера, лоренцево сокращение площади, увеличение массы движущегося тела, абберация света, кривизна пространства-времени. Учитывая эти возмущающие силы, мы сделаем несколько шагов к реальной картине движения тел. В задаче двух тел подобные исследования по проблеме движения уже осуществлены белорусскими учеными (см. [4, 5, 13–15]). В задачах трех тел учет упомянутых возмущающих сил будет проведен в следующих работах авторов.

Литература

1. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М., 1968.
2. Маркеев А. П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М., 1978.
3. Рябушко А. П. Движение тел в общей теории относительности. Минск, 1979. Гл. 4.
4. Рябушко А. П., Жур Т. А., Боярина И. П. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2012. № 3. С. 77–83.
5. Рябушко А. П., Жур Т. А., Боярина И. П. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2012. № 4. С. 89–95.

6. Поляхова Е. Н. Космический полет с солнечным парусом. М., 2011.
7. Кононович Э. В., Мороз В. И. Общий курс астрономии. М., 2004.
8. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике / под ред. Г. Н. Дубошина. М., 1976.
9. Фесенков В. Г. Солнце и Солнечная система: избр. тр. М., 1976. С. 118, 191.
10. Euler L. De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentium // Novi Comm. Acad. Sci. Imp. Petrop. 1767. Т. 11. Р. 144–151.
11. Lagrange J. Essais sur le probleme des trois corps. Paris, 1772.
12. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М., 1964.
13. Рябушко А. П., Жур Т. А., Боярина И. П. // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2011. № 4. С. 93–97.
14. Рябушко А. П., Зубко О. Л., Жур Т. А., Боярина И. П. // Новейшие достижения европейской науки-2012: материалы 8-й Междунар. науч.-практ. конф. София, 2012. Т. 18. С. 30–38.
15. Рябушко А. П., Жур Т. А., Боярина И. П. и др. // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2014. № 2. С. 85–91.

A. P. RYABUSHKO, T. A. ZHUR, I. R. BOYARINA, O. L. ZUBKO, V. I. YURINOK

PHOTOLIBRATION POINTS IN CELESTIAL MECHANICS

Summary

Taking into account the star light pressure it is proved that for a star-dark body-test body system in the bounded planar circular problem of three bodies there exist a countless number of photolibration points filling up three segments of the straight line passing through the star and the dark body (collinear case) or those points filling up the two circular arcs passing through the Lagrangian libration points L_4, L_5 (triangular case).

УДК 517.925

А. Т. САЗОНОВА

РАЗРЕШИМЫЕ СЛУЧАИ ДЛЯ УПРОЩЕННЫХ СИСТЕМ В ЗАДАЧЕ ДВИЖЕНИЯ ЧЕТЫРЕХ ТЕЛ В ПЛОСКОСТИ

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы

(Поступила в редакцию 04.08.2014)

Введение. В последнее время в связи с развитием методов аналитической теории дифференциальных уравнений и современных систем компьютерной математики значительный интерес вызывает исследование классической ньютоновской задачи движения многих тел [1, 2]. Интересно проанализировать (как аналитически, так и численно) различные решения, возникающие в данной задаче, а также исследовать как интегрируемые, так и неинтегрируемые случаи (зависящие от наборов значений констант межчастичного взаимодействия).

Решение задачи о движении одного тела содержится уже в первом законе Ньютона – законе инерции [1].

Решение задачи двух тел также было получено Ньютоном. Опираясь на законы Кеплера движения планет и некоторые другие результаты своих предшественников, Ньютон открыл закон всемирного тяготения. Исходя из этого он доказал, что не только планеты движутся вокруг Солнца, в первом приближении в соответствии с законами Кеплера, но и движение спутников вокруг планет, а также комет вокруг Солнца подчиняется тем же законам динамики. Естественно, эти утверждения справедливы в рамках невозмущенной динамической модели, т. е. в рамках задачи двух тел, когда не учитываются взаимные планетные притяжения [3].

В отличие от задачи двух тел, задача трех тел не допускает общего решения, позволяющего для произвольных значений координат и скоростей тел в начальный момент времени $t = 0$ предсказать положение каждого из трех тел для любого будущего момента времени $t > 0$. И это несмотря на то, что ввиду своей важности задача трех тел привлекала к себе внимание многих математиков и механиков: Л. Эйлера, Ж. Лагранжа, П. Лапласа, К. Якоби, А. Пуанкаре, Дж. Биркгофа. В 1912 г. финскому математику К. Зундману удалось построить общее решение ньютоновской задачи движения трех тел в виде степенных рядов [4]. Точнее, ему удалось описать алгоритм нахождения их коэффициентов. Однако, как показал Д. Белорицкий [5], для вычислительной астрономии данные ряды не представляют интереса в силу того, что скорость их сходимости чрезвычайно мала.

Исследования задачи трех тел встречаются также в работах [6, 7], в которых математическая модель движения N тел записана в виде системы, состоящей из N обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\zeta_n'' = 2 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{m=N} a_{nm} \frac{\zeta_n' \zeta_m'}{\zeta_n - \zeta_m}, \quad n = 1, \dots, N. \quad (1)$$

Зависимые переменные $\zeta_n = \zeta_n(\tau)$ являются комплексными. Константы взаимодействия a_{nm} априори произвольны, за исключением требования симметрии $a_{nm} = a_{mn}$.

Интерес к исследованию системы (1) также вызвал следующий факт: при отождествлении комплексной ζ -плоскости с физической плоскостью и при рассмотрении вещественной пере-

менной τ (интерпретируемое как «физическое время») движение N точек ζ_n определяется решением плоской задачи многих тел, описываемой ньютоновскими уравнениями движения с интересным свойством периодичности (а именно, среди таких решений задачи многих тел имеется много решений с полностью периодическими траекториями [8, 9]). Следует также отметить, что в работах [7, 10] были получены необходимые и достаточные условия наличия мероморфных решений в плоской задаче трех тел.

Несмотря на кажущуюся простоту формул (1), аналитического решения задачи в общем виде для $N > 3$ пока не найдено.

В данной работе рассматривается плоская классическая ньютоновская задача о движении четырех тел.

Из (1) [7] видно, что центр масс $Z \equiv Z(\tau)$,

$$Z = \frac{\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + \zeta_4}{4}$$

движется равномерно. Действительно,

$$Z'' = 0,$$

$$Z(\tau) = Z(0) + Z'(0)\tau = Z(0) + V\tau,$$

где V – постоянная. Положим

$$\begin{aligned} a_{12} = a_{21} = a, a_{13} = a_{31} = c, a_{14} = a_{41} = d, \\ a_{23} = a_{32} = b, a_{24} = a_{42} = e, a_{34} = a_{43} = f. \end{aligned}$$

Существует также интеграл движения (что непосредственно следует из вида системы (1)) [6]:

$$K = \zeta_1' \zeta_2' \zeta_3' \zeta_4' (\zeta_1 - \zeta_2)^{2a} (\zeta_2 - \zeta_3)^{2b} (\zeta_3 - \zeta_1)^{2c} (\zeta_4 - \zeta_1)^{2d} (\zeta_2 - \zeta_4)^{2e} (\zeta_3 - \zeta_4)^{2f}.$$

Введем координаты относительно центра масс $u_n = \zeta_n - Z$, $n = 1, 2, 3, 4$. Тогда выполняется условие

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0.$$

Для удобства обозначений положим

$$u_1 = x, u_2 = y, u_3 = z, u_4 = -x - y - z.$$

С помощью несложных алгебраических преобразований можно теперь записать уравнения движения (1) при $N = 4$ и интеграл движения K в новых переменных x, y, z :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2a \frac{(\dot{x} + V)(\dot{y} + V)}{x - y} + 2c \frac{(\dot{x} + V)(\dot{z} + V)}{x - z} - 2d \frac{(\dot{x} + V)(\dot{x} + \dot{y} + \dot{z} - V)}{2x + y + z}, \\ \ddot{y} = -2a \frac{(\dot{x} + V)(\dot{y} + V)}{x - y} + 2b \frac{(\dot{y} + V)(\dot{z} + V)}{y - z} - 2e \frac{(\dot{y} + V)(\dot{x} + \dot{y} + \dot{z} - V)}{x + 2y + z}, \\ \ddot{z} = -2c \frac{(\dot{x} + V)(\dot{z} + V)}{x - z} - 2b \frac{(\dot{y} + V)(\dot{z} + V)}{y - z} - 2f \frac{(\dot{z} + V)(\dot{x} + \dot{y} + \dot{z} - V)}{x + y + 2z}, \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} K = (\dot{x} + V)(\dot{y} + V)(\dot{z} + V)(\dot{x} + \dot{y} + \dot{z} - V)(x - y)^{2a}(y - z)^{2b} \times \\ \times (z - x)^{2c}(2x + y + z)^{2d}(x + 2y + z)^{2e}(x + y + 2z)^{2f}, \end{aligned}$$

где $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t = \tau - \tau_0$, $V = Z'(0)$, $K = \text{const}$.

Основная часть. Рассмотрим дифференциальную систему шестого порядка

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2c \frac{\dot{x}\dot{z}}{x - z} - 2d \frac{\dot{x}(\dot{x} + \dot{z})}{2x + z}, \\ \ddot{y} = -2a \frac{\dot{x}(\dot{y} + V)}{x} + 2b \frac{(\dot{y} + V)\dot{z}}{z} - 2e \frac{(\dot{y} + V)(\dot{x} + \dot{z})}{x + z}, \\ \ddot{z} = -2c \frac{\dot{x}\dot{z}}{x - z} - 2f \frac{\dot{z}(\dot{x} + \dot{z})}{x + 2z}, \end{cases} \quad (3)$$

которая является инвариантной относительно замены переменных $(t, x, y, z; \varepsilon t, \varepsilon x, \varepsilon y, \varepsilon z)$, где ε – параметр. Система (3) является упрощенной для (2).

З а м е ч а н и е 1. Система (3) получена путем замены переменных в системе (2) $t = \varepsilon t, y = \varepsilon y$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, где ε – параметр.

Преобразуем второе уравнение системы (3)

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= -2a \frac{\dot{x}}{x}(\dot{y} + V) + 2b \frac{\dot{z}}{z}(\dot{y} + V) - 2e \frac{\dot{x} + \dot{z}}{x + z}(\dot{y} + V), \\ \frac{\ddot{y}}{\dot{y} + V} &= -2a \frac{\dot{x}}{x} + 2b \frac{\dot{z}}{z} - 2e \frac{\dot{x} + \dot{z}}{x + z}. \end{aligned}$$

Интегрирование последнего уравнения дает

$$\dot{y} = Ax^{-2a} z^{2b} (x + z)^{-2e} - V, \quad (4)$$

где A – произвольная постоянная.

Рассмотрим теперь первое и третье уравнения системы (3)

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2c \frac{\dot{x}\dot{z}}{x - z} - 2d \frac{\dot{x}(\dot{x} + \dot{z})}{2x + z}, \\ \ddot{z} = -2c \frac{\dot{x}\dot{z}}{x - z} - 2f \frac{\dot{z}(\dot{x} + \dot{z})}{x + 2z}. \end{cases} \quad (5)$$

Согласно результатам работы [10], справедлива

Л е м м а 1. Для наличия у системы (5) свойства Пенлеве [11] необходимо выполнение одного из условий

1. $d = f = -\frac{1}{2}, c = 0$;
2. $d = 0, c = f = -\frac{1}{2}$.

Согласно результатам работы [6], справедлива

Л е м м а 2. Для того, чтобы все решения системы (1) являлись мероморфными функциями переменной t , необходимо, чтобы все показатели $\Gamma, \gamma_n, \beta_n, n = \overline{1, 6}$, n – порядковый номер элемента, определяемые через константы a, b, c, d, e, f с помощью соотношений

$$\Gamma = \frac{2}{2 + a + b + c + d + e + f}, \quad \gamma_n = \frac{1}{1 + a_n}, \quad \beta_n = -2a_n,$$

где

$$a_n \in \left\{ -2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 0 \right\}, \quad a_1 = a, \quad a_2 = b, \quad a_3 = c, \quad a_4 = d, \quad a_5 = e, \quad a_6 = f,$$

принимали целочисленные или бесконечные значения.

Пусть $c = 0, d = f = -\frac{1}{2}$, тогда система (5) принимает вид

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{\dot{x}(\dot{x} + \dot{z})}{2x + z}, \\ \ddot{z} = \frac{\dot{z}(\dot{x} + \dot{z})}{x + 2z} \end{cases} \quad (6)$$

и имеет соответствующий интеграл движения

$$K = \frac{\dot{x}\dot{y}(\dot{x} + \dot{y})}{(x + 2z)(2x + z)}.$$

Непосредственной подстановкой в систему (6) легко проверить, что данная система имеет общее решение вида

$$\begin{aligned} x &= \frac{K}{6}t^3 + A_2t^2 + A_0, \\ z &= \frac{K}{6}t^3 + B_2t^2 + B_1t + B_0, \end{aligned} \quad (7)$$

где $t = \tau - \tau_0$, τ_0 , K , A_0 , A_2 – произвольные постоянные, а величины B_0 , B_1 , B_2 определяются из соотношений

$$\begin{aligned} B_0 &= -2A_0, \\ B_1 &= -\frac{3KA_0}{2A_2}, \\ B_2 &= -\frac{3K^2A_0}{8A_2^2}. \end{aligned}$$

Из лемм 1, 2 и равенств (7) следует, что для наличия у системы (3) свойства Пенлеве необходимо, чтобы a, b, c, d, e, f принимали значения, приведенные в табл. 1.

Таблица 1. Значение констант a, b, c, d, e, f

a	-2	0	0	-2	-2	-1	0	0	-1	-3/2	-3/2	0	-3/2	-3/2	0	0	-1/2	-1	-1
b	0	-2	0	-1	0	-2	-2	-1	0	-3/2	0	-3/2	-1/2	0	-3/2	-1/2	-3/2	-1	-1
c	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
d	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2
e	0	0	-2	0	-1	0	-1	-2	-2	0	-3/2	-3/2	0	-1/2	-1/2	-3/2	0	-1	0
f	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2
a	-1/2	-1	0	0	-1	-1	0	-1/2	-1/2	0	-1/2	0	0	-1/2	0	-1/2	-1/2	-1	0
b	0	0	-1	0	-1/2	0	-1	-1	0	-1/2	0	-1/2	0	-1/2	-1/2	0	-1/2	0	-1
c	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
d	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2
e	-3/2	0	0	-1	0	-1/2	-1/2	0	-1	-1	0	0	-1/2	0	-1/2	-1/2	-1/2	-1	-1
f	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2

При $c = -\frac{1}{2}$, $d = 0$, $f = -\frac{1}{2}$ система (5) принимает вид

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{\dot{x}\dot{z}}{x-z}, \\ \ddot{z} = \frac{\dot{x}\dot{z}}{x-z} + \frac{\dot{z}(\dot{x} + \dot{z})}{x+2z} \end{cases} \quad (8)$$

и имеет соответствующий интеграл движения

$$K = \frac{\dot{x}\dot{z}(\dot{x} + \dot{z})}{(x-z)(x+2z)}.$$

Продифференцируем первое уравнение системы (8):

$$\ddot{x} = -\frac{\ddot{x}\dot{z}}{x-z} - \frac{\dot{x}\ddot{z}}{x-z} + \frac{(\dot{x} - \dot{z})\dot{x}\dot{z}}{(x-z)^2}.$$

Подставим в последнее уравнение выражения для \ddot{x} и \ddot{z} , взятые из системы (8):

$$\ddot{x} = \frac{\dot{x}\dot{z}^2}{(x-z)^2} - \frac{\dot{x}^2\dot{z}}{(x-z)^2} - \frac{\dot{x}\dot{z}(\dot{x} + \dot{z})}{(x-z)(x+2z)} + \frac{\dot{x}^2\dot{z}}{(x-z)^2} - \frac{\dot{x}\dot{z}^2}{(x-z)^2}.$$

Приводя подобные слагаемые в правой части последнего равенства и учитывая выражения для интеграла движения исследуемой системы, получим

$$\ddot{x} = -K.$$

Рассуждая аналогичным образом получим линейное дифференциальное уравнение третьего порядка с постоянными коэффициентами и для функции z :

$$\ddot{z} = 2K.$$

Трижды интегрируя оба уравнения третьего порядка найдем вид функций x, z . Подставляя полученные решения в систему (8), установим связь между произвольными постоянными и запишем общее решение этой системы в виде

$$\begin{aligned} x &= -\frac{K}{6}t^3 + C_1t^2 + C_3, \\ z &= \frac{K}{3}t^3 + D_1t^2 - \left(\frac{4C_1D_1 + 4C_1^2}{K}\right)t + C_3, \end{aligned} \quad (9)$$

где $D_1 = \frac{3K^2C_3 - 8C_1^3}{8C_1^2}$, $t = \tau - \tau_0$, τ_0, K, C_1, C_3 – произвольные постоянные.

Согласно леммам 1, 2 и равенствам (9), заключаем, что для наличия у системы (3) свойства Пенлеве необходимо, чтобы константы a, b, c, d, e, f принимали значения, приведенные в табл. 2.

Таблица 2. Значения констант a, b, c, d, e, f

a	-2	0	0	-2	-2	-1	0	0	-1	-3/2	-3/2	0	-3/2	-3/2	0	0	-1/2	-1/2	0
b	0	-2	0	-1	0	-2	-2	-1	0	-3/2	0	-3/2	-1/2	0	-3/2	-1/2	-3/2	0	-1
c	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2
d	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e	0	0	-2	0	-1	0	-1	-2	-2	0	-3/2	-3/2	0	-1/2	-1/2	-3/2	0	-3/2	-1
f	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2
a	-1	0	0	-1	-1	0	-1/2	-1/2	0	-1/2	0	0	-1/2	0	-1/2	-1/2	-1	-1	-1
b	0	-1	0	-1/2	0	-1	-1	0	-1/2	0	-1/2	0	-1/2	-1/2	0	-1/2	-1	-1	0
c	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2
d	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e	0	0	-1	0	-1/2	-1/2	0	-1	-1	0	0	-1/2	0	-1/2	-1/2	-1/2	-1	0	-1
f	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2

Рассмотрим теперь опять второе уравнение системы (3), которое, как было показано выше, может быть записано в виде (4). В соответствии с табл. 1 и 2, непосредственной подстановкой в уравнение (4) наборов значений констант взаимодействия a, b, e , можно записать 38 простейших дифференциальных уравнений первого порядка:

1. $a = -2, b = 0, e = 0; \dot{y} = Ax^4 - V;$
2. $a = 0, b = -2, e = 0; \dot{y} = A\frac{1}{z^4} - V;$
3. $a = 0, b = 0, e = -2; \dot{y} = A(x+z)^4 - V;$
4. $a = -2, b = -1, e = 0; \dot{y} = A\frac{x^4}{z^2} - V;$
5. $a = -2, b = 0, e = -1; \dot{y} = Ax^4(x+z)^2 - V;$
6. $a = -1, b = -2, e = 0; \dot{y} = A\frac{x^2}{z^4} - V;$
7. $a = 0, b = -2, e = -1; \dot{y} = A\frac{(x+z)^2}{z^4} - V;$
8. $a = 0, b = -1, e = -2; \dot{y} = A\frac{(x+z)^4}{z^2} - V;$
9. $a = -1, b = 0, e = -2; \dot{y} = Ax^2(x+z)^4 - V;$
10. $a = -\frac{3}{2}, b = -\frac{3}{2}, e = 0; \dot{y} = A\frac{x^3}{z^3} - V;$

11. $a = -\frac{3}{2}, b = 0, e = -\frac{3}{2}; \dot{y} = Ax^3(x+z)^3 - V;$
12. $a = 0, b = -\frac{3}{2}, e = -\frac{3}{2}; \dot{y} = A\frac{(x+z)^3}{z^3} - V;$
13. $a = -\frac{3}{2}, b = -\frac{1}{2}, e = 0; \dot{y} = A\frac{x^3}{z} - V;$
14. $a = -\frac{3}{2}, b = 0, e = -\frac{1}{2}; \dot{y} = Ax^3(x+z) - V;$
15. $a = 0, b = -\frac{1}{2}, e = -\frac{1}{2}; \dot{y} = A\frac{(x+z)}{z^3} - V;$
16. $a = 0, b = -\frac{1}{2}, e = -\frac{3}{2}; \dot{y} = A\frac{(x+z)^3}{z} - V;$
17. $a = -\frac{1}{2}, b = -\frac{3}{2}, e = 0; \dot{y} = A\frac{x}{z^3} - V;$
18. $a = -\frac{1}{2}, b = 0, e = -\frac{3}{2}; \dot{y} = Ax(x+z)^3 - V;$
19. $a = -1, b = 0, e = 0; \dot{y} = Ax^2 - V;$
20. $a = 0, b = -1, e = 0; \dot{y} = A\frac{1}{z^2} - V;$
21. $a = 0, b = 0, e = -1; \dot{y} = A(x+z)^2 - V;$
22. $a = -1, b = -\frac{1}{2}, e = 0; \dot{y} = A\frac{x^2}{z} - V;$
23. $a = -1, b = 0, e = -\frac{1}{2}; \dot{y} = Ax^2(x+z) - V;$
24. $a = 0, b = -1, e = -\frac{1}{2}; \dot{y} = A\frac{(x+z)}{z^2} - V;$
25. $a = -\frac{1}{2}, b = 0, e = -1; \dot{y} = A\frac{x}{z^2} - V;$
26. $a = -\frac{1}{2}, b = 0, e = -1; \dot{y} = Ax(x+z)^2 - V;$
27. $a = 0, b = -\frac{1}{2}, e = -1; \dot{y} = A\frac{(x+z)^2}{z} - V;$
28. $a = -\frac{1}{2}, b = 0, e = 0; \dot{y} = Ax - V;$
29. $a = 0, b = 0, e = -\frac{1}{2}; \dot{y} = A\frac{1}{z} - V;$
30. $a = 0, b = 0, e = -\frac{1}{2}; \dot{y} = A(x+z) - V;$
31. $a = -\frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}, e = 0; \dot{y} = A\frac{x}{z} - V;$
32. $a = -\frac{1}{2}, b = 0, e = -\frac{1}{2}; \dot{y} = Ax(x+z) - V;$
33. $a = 0, b = -\frac{1}{2}, e = -\frac{1}{2}; \dot{y} = A\frac{(x+z)}{z} - V;$
34. $a = -\frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}, e = -\frac{1}{2}; \dot{y} = A\frac{x(x+z)}{z} - V;$
35. $a = -1, b = -1, e = -1; \dot{y} = A\frac{x^2(x+z)^2}{z^2} - V;$
36. $a = -1, b = -1, e = 0; \dot{y} = A\frac{x^2}{z^2} - V;$
37. $a = -1, b = 0, e = -1; \dot{y} = Ax^2(x+z)^2 - V;$
38. $a = 0, b = -1, e = -1; \dot{y} = A\frac{(x+z)^2}{z^2} - V.$

Функции x и z определены равенствами (7) и (9), которые соответствуют наборам значений констант взаимодействия $(c, d, f): \left(0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right).$

Легко показать, что лишь обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка с номерами 1, 3, 5, 9, 11, 14, 18, 19, 21, 23, 26, 28, 30, 32, 37 будут обладать свойством Пенлеве. Также несложно установить, что в остальных случаях при интегрировании уравнений возникает логарифм, а, значит, решения данных простейших дифференциальных уравнений имеют подвижные критические особенности.

Технику отбора уравнений проиллюстрируем на двух примерах.

Пример 1. Для набора значений констант взаимодействия $a = -1$, $b = 0$, $e = 0$ (порядковый номер 19) уравнение (4) имеет вид

$$\dot{y} = Ax^2 - V. \quad (10)$$

Пусть функция x определена равенством (7). Заметим, что функция x является полиномом третьей степени относительно переменной t . Следовательно, функция $Ax^2 - V$ есть полином шестой степени по t .

Интегрирование уравнения (10) дает

$$y = \frac{AK^2}{252}t^7 - \frac{A}{18}KA_2t^6 + \frac{3AA_2^2}{15}t^5 + \frac{AKA_0}{12}t^4 + \frac{2AA_0A_2}{3}t^3 + (AA_0^2 - V)t + B,$$

где A, B – произвольные постоянные.

Таким образом, если $a = -1$, $b = 0$, $e = 0$, то уравнение (4) обладает свойством Пенлеве.

Аналогичным образом находим решение для уравнений с порядковыми номерами 1, 3, 5, 9, 11, 14, 18, 21, 23, 26, 28, 30, 32, 37.

Пример 2. Для набора значений констант взаимодействия $a = 0$, $b = 0$, $e = -\frac{1}{2}$ (порядковый номер 29) уравнение (4) принимает вид

$$\dot{y} = \frac{A}{z} - V. \quad (11)$$

Функция z определена равенством (7). Значит, уравнение (11) можно переписать следующим образом:

$$\dot{y} = \frac{6A}{Kt^3 + 6B_2t^2 + 6B_1t + 6B_0} - V.$$

$P_3(t) = Kt^3 + 6B_2t^2 + 6B_1t + 6B_0$ есть многочлен третьей степени, следовательно, он имеет по крайней мере один действительный корень. Пусть α_1 – такой корень многочлена P_3 , тогда данный многочлен можно представить в виде: $P_3(t) = (t - \alpha_1)P_2(t)$, $\deg P_2(t) = 2$. С учетом этого факта перепишем наше дифференциальное уравнение в виде

$$\dot{y} = \frac{6A}{(t - \alpha_1)P_2(t)} - V;$$

$$\dot{y} = 6A \left(\frac{B}{(t - \alpha_1)} + \frac{P_1(t)}{P_2(t)} \right) - V, \quad \deg P_1(t) = 1.$$

Интегрирование последнего уравнения дает его общее решение

$$y = 6AB \ln(t - \alpha_1) + 6A \int \frac{P_1(t)}{P_2(t)} dt - Vt + C.$$

Независимо от значения интеграла $\int \frac{P_1(t)}{P_2(t)} dt$, первое слагаемое в правой части содержит логарифм. Отсюда следует, что $t = \alpha_1$ – трансцендентная точка, а значит, уравнение (4) с коэффициентами $a = 0$, $b = 0$, $e = -\frac{1}{2}$ не обладает свойством Пенлеве.

Учитывая результаты, полученные в работе [12], заключаем, что справедлива следующая
Теорема 1. Для наличия у системы (3) свойства Пенлеве необходимо и достаточно, чтобы константы a, b, c, d, e, f принимали одно из значений табл. 3.

Таблица 3. Наборы значений констант взаимодействия

a	-2	0	-2	-1	-3/2	-3/2	-1/2	-1	0	-1	-1/2	-1/2	0	-1/2	-1	-2	-1/2	-3/2	-1
b	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
c	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
d	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2
e	0	-2	-1	-2	-3/2	-1/2	-3/2	0	-1	-1/2	-1	0	-1/2	-1/2	-1	-1/2	-2	-1	-3/2
f	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1	-1	-1	-1
a	-2	0	-2	-1	-3/2	-3/2	-1/2	-1	0	-1	-1/2	-1/2	0	-1/2	-1	-1	0	-1	-1/2
b	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
c	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	0	0	0	0
d	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2
e	0	-2	-1	-2	-3/2	-1/2	-3/2	0	-1	-1/2	-1	0	-1/2	-1/2	-1	0	-1	-1/2	-1
f	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1	-1	-1	-1
a	-2	0	-2	-1	-3/2	-3/2	-1/2	-1	0	-1	-1/2	-1/2	0	-1/2	-1	-1/2	-1/2	0	0
b	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
c	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	0	0	0	0
d	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2
e	0	-2	-1	-2	-3/2	-1/2	-3/2	0	-1	-1/2	-1	0	-1/2	-1/2	-1	-1/2	0	-1/2	-1
f	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1

Заключение. Исследована упрощенная для системы (2) система (3), состоящая из трех нелинейных дифференциальных уравнений и описывающая плоское движение четырех тел. Для данной упрощенной системы найдены необходимые условия наличия мероморфных решений, параметры которых приведены в табл. 1 и 2.

Для обоих случаев леммы 1 записаны соответствующие упрощенные системы (6), (8) и найдены их общие решения (7), (9). Для второго уравнения системы (3) в соответствии с наборами констант из табл. 1 и 2 для функции u получены уравнения с разделяющимися переменными.

Показано, что при указанных в табл. 3 наборах значений констант межчастичного взаимодействия общее решение системы (3) можно записать в замкнутом виде, а значит, возможно описать некоторые траектории движения в плоской задаче четырех тел.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант № Ф14М-148).

Литература

1. Ньютон И. Математические начала натуральной философии. М., 1989. С. 688.
2. Дубошин Г. Н. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. М., 1976. С. 854.
3. Ихсанов Е. В. Компьютерные методы нормализации гамильтонов ограниченных задач небесной механики. М., 2004. С. 132.
4. Sundman K. // Acta mathematica. 1912. N 36. P. 14–179.
5. Belorizky D. // C. R. 1931. N 193. P. 766–768.
6. Calogero F. Classical Many-Body Problems Amenable to Exact Treatment. Berlin, 2001. Vol. 66.
7. Calogero F., Sommacal M. // J. of nonlinear mathematical physics. 2002. Vol. 9, N 4. P. 483–516.
8. Calogero F., Françoise J-P. // J. of nonlinear mathematical physics. 2002, Vol. 9, N 1. P. 99–125.
9. Calogero F., Sommacal M., Françoise J-P. // J. of nonlinear mathematical physics. 2003. Vol. 10, N 2. P. 157–214.
10. Лозовская А. Т. // Наука-2009: сб. ст. студентов и магистрантов ГрГУ им. Я. Купалы. Гродно, 2009. Ч. 2. С. 48–51.
11. Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М., 1950. С. 78–81.
12. Сазонова А. Т. // Весн. Гродз. дзярж. ун-та імя Я. Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальна тэхніка і кіраванне. 2013. № 3 (159). С. 56–60.

**SOLVABLE CASES FOR THE SIMPLIFIED SYSTEMS IN THE PROBLEM
OF THE MOTION OF FOUR BODIES IN THE PLANE**

Summary

The introduction contains the object of investigation – the system consisting of N ordinary differential equations, which is a mathematical model of the motion of N bodies in the plane. The basic concepts are: motion of four bodies, interparticle interaction constant, Painlevé property, simplified system.

The purpose of this study is to establish the analytic properties of solution of simplified systems for a system of nonlinear differential equations describing the motion of the four bodies.

The main part deals with the study of simplified systems of a system describing the planar motion of the four bodies. These systems consist of nonlinear differential equations, each of which is of second order.

A set of interparticle interaction constants in the two cases of the problem under investigation in the plane is found. The general solution at these constants can be written in closed (rather simple) form.

Obtained are 15 nonlinear autonomous differential equations of first order with respect to one of the components of the system, whose general solution is an integer, i.e., these ordinary differential equations possess the Painlevé property, as well as 23 autonomous nonlinear differential equations of first order, whose general solution contains a logarithm. Therefore, these equations are not the equations of Painlevé type.

Necessary and sufficient conditions are established for the existence of the Painlevé property of the studied system that reveal 56 cases in the problem of four bodies in the plane when trajectories of the given bodies in the plane can be described.

The results can be applied in the analytical theory of differential equations, as well as in celestial mechanics theory.

УДК 539.12:530.145

В. А. ПЛЕТЮХОВ

О СОВМЕСТНОМ ОПИСАНИИ БЕЗМАССОВЫХ ПОЛЕЙ СО СПИНАМИ 0 И 1

Брестский государственный университет им. А. С. Пушкина

(Поступила в редакцию 04.04.2014)

Описание свободных безмассовых квантовомеханических полей может быть осуществлено на основе релятивистски-инвариантной системы уравнений первого порядка, которая представима в матричной форме [1–3]

$$(\Gamma_{\mu} \partial_{\mu} + \Gamma_0) \psi(x) = 0, \quad (1)$$

где $\psi(x)$ – многокомпонентная волновая функция, преобразующаяся по некоторому приводимому представлению Γ группы Лоренца, Γ_{μ} и Γ_0 – квадратные числовые матрицы, причем матрица Γ_0 является особенной ($\det \Gamma_0 = 0$).

В случае неособенной матрицы Γ_0 уравнение (1) приводится к виду

$$(\Gamma_{\mu} \partial_{\mu} + mI) \psi(x) = 0 \quad (2)$$

и описывает микрообъекты с ненулевой массой.

Уравнения вида (1), (2) называются релятивистскими волновыми уравнениями (РВУ) и являются одним из распространенных способов описания элементарных частиц.

Основные требования, предъявляемые к РВУ (1), (2), заключаются в возможности лагранжевой формулировки теории и инвариантности лагранжиана относительно преобразований группы Лоренца, включая пространственные отражения. Отсюда вытекает, что представление Γ волновой функции ψ должно состоять из зацепляющихся неприводимых компонент, образующих так называемую схему зацеплений.

Важное различие РВУ (1) и (2) состоит в том, что в случае безмассового поля некоторые компоненты волновой функции являются наблюдаемыми (напряженности), а некоторые – ненаблюдаемыми (потенциалы). На потенциалах можно задать градиентные, или калибровочные преобразования Π рода и наложить дополнительные условия, исключая часть «лишних» компонент функции ψ . Для микрообъектов с ненулевой массой деление компонент волновой функции на наблюдаемые и ненаблюдаемые отсутствует, а дополнительные условия содержатся в самом уравнении (2).

Особенностью известных РВУ вида (1) является также то, что при переходе от уравнения (2), описывающего частицу со спином s , к уравнению (1) с помощью формальной замены $mI \rightarrow \Gamma_0$ ($\det \Gamma_0 = 0$) сохраняются не все значения проекции спина (спиральности) от $+s$ до $-s$. Так, например, если взять уравнение Даффина – Кеммера для спина 1, базирующееся на схеме зацеплений

$$(0,1) - \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) - (1,0) \quad (\psi = \psi_{\mu}, \psi_{[\mu\nu]}), \quad (3)$$

и совершить в нем замену

$$mI \rightarrow \Gamma_0 = \begin{pmatrix} 0_4 & \\ & I_6 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

получим хорошо известную тензорную систему

$$\begin{aligned}\partial_\nu \Psi_{[\mu\nu]} &= 0, \\ -\partial_\mu \Psi_\nu + \partial_\nu \Psi_\mu + \Psi_{[\mu\nu]} &= 0,\end{aligned}\tag{5}$$

описывающую электромагнитное поле, или фотон – частицу со спиральностью ± 1 . Здесь в качестве потенциала служит вектор Ψ_μ и выпадает степень свободы, связанная со спиральностью $s = 0$. Наоборот, при замене

$$mI \rightarrow \Gamma_0 = \begin{pmatrix} I_4 & \\ & 0_6 \end{pmatrix}\tag{6}$$

приходим к системе

$$\begin{aligned}\partial_\nu \Psi_{[\mu\nu]} + \Psi_\mu &= 0, \\ -\partial_\mu \Psi_\nu + \partial_\nu \Psi_\mu &= 0\end{aligned}\tag{7}$$

с тензор-потенциалом $\Psi_{[\mu\nu]}$, которая описывает нотоф – безмассовую частицу со спиральностью 0 [4]. При такой замене выпадают значения спиральности ± 1 .

В современных теоретико-полевых моделях, однако, возникает нередко необходимость совместного описания безмассовых полей с различными значениями спиральности [5–7]. Так, в работе [5] предложено использовать поле со спиральностью 0 (поле Кальба – Рамонда) для полупенемологического описания взаимодействия заряженных микрообъектов, представляемых в 4-мерном пространстве-времени в виде замкнутых струн. Но в случае взаимодействия открытых струн одного этого поля недостаточно. Рассматривая концы струны как точечные заряды, необходимо ввести еще вектор-потенциал Ψ_μ , соответствующий электромагнитному полю. Другими словами, для описания взаимодействия открытых струн в 4-мерном пространстве-времени необходимы два взаимосвязанных друг с другом поля: безмассовое векторное поле со спиральностями ± 1 и безмассовое скалярное поле со спиральностью 0. А поскольку струна представляет собой единый физический объект, то с точки зрения теории РВУ естественным является подход, заключающийся в совместном описании этих полей в рамках одной не распадающейся по полной группе Лоренца системы уравнений.

Для решения указанной задачи используем схему зацеплений

$$\begin{aligned}(0,0) \\ | \\ (0,1) - \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) - (1,0),\end{aligned}\tag{8}$$

которая является расширением схемы (3) за счет включения в последнюю скалярного представления $(0,0)$. Этой схеме зацеплений соответствует тензорная система уравнений наиболее общего вида

$$\alpha \partial_\mu \Psi_\mu + a \Psi_0 = 0,\tag{9a}$$

$$\beta^* \partial_\nu \Psi_{[\mu\nu]} + \alpha^* \partial_\mu \Psi_0 + b \Psi_\mu = 0,\tag{9б}$$

$$\beta(-\partial_\mu \Psi_\nu + \partial_\nu \Psi_\mu) + c \Psi_{[\mu\nu]} = 0\tag{9в}$$

и РВУ вида (1), в котором при выборе базиса

$$\Psi = (\Psi_0, \Psi_\mu, \Psi_{[\mu\nu]})\tag{10}$$

матрица Γ_0 имеет скалярно-блочную структуру

$$\Gamma_0 = \begin{pmatrix} a & & \\ & bI_4 & \\ & & cI_6 \end{pmatrix}.\tag{11}$$

Рассмотрим случай, когда

$$a = b = 0, \quad \alpha = \beta = c = 1. \quad (12)$$

Получим систему

$$\partial_\mu \Psi_\mu = 0, \quad (13a)$$

$$\partial_\nu \Psi_{[\mu\nu]} + \partial_\mu \Psi_0 = 0, \quad (13б)$$

$$-\partial_\mu \Psi_\nu + \partial_\nu \Psi_\mu + \Psi_{[\mu\nu]} = 0, \quad (13в)$$

в которой величины Ψ_0 и Ψ_μ играют роль потенциалов, $\Psi_{[\mu\nu]}$ – напряженность, уравнение (13б) – уравнение движения и (13а) – условие калибровки Лоренца, которое содержится в самой системе в качестве равноправного уравнения. Система (13а)–(13в) инвариантна относительно калибровочных (в вышеуказанном смысле) преобразований

$$\Psi_\mu \rightarrow \Psi_\mu + \partial_\mu \Lambda(x), \quad (14)$$

где произвол в выборе функции $\Lambda(x)$ ограничен условием

$$\square \Lambda = 0. \quad (15)$$

Указанная калибровочная инвариантность совместно с условием (13а) приводит к тому, что из четырех компонент вектор-потенциала Ψ_μ , удовлетворяющего уравнению второго порядка

$$\square \Psi_\mu - \partial_\mu \Psi_0 = 0, \quad (16)$$

независимыми остаются только две. Еще одна степень свободы связана со скалярной функцией Ψ_0 , подчиняющейся уравнению второго порядка

$$\square \Psi_0 = 0. \quad (17)$$

Уравнения (16), (17) показывают, что здесь мы имеем дело с двумя взаимосвязанными безмассовыми полями – векторным со спиральностью ± 1 и скалярным со спиральностью 0. При этом градиент скалярного поля играет роль (внутреннего) источника для векторного поля.

Возьмем теперь в (9а)–(9в)

$$\alpha = \beta = a = c = 1, \quad b = 0. \quad (18)$$

Получим систему

$$\partial_\mu \Psi_\mu + \Psi_0 = 0, \quad (19a)$$

$$\partial_\nu \Psi_{[\mu\nu]} + \partial_\mu \Psi_0 = 0, \quad (19б)$$

$$-\partial_\mu \Psi_\nu + \partial_\nu \Psi_\mu + \Psi_{[\mu\nu]} = 0. \quad (19в)$$

Система (19а)–(19в) отличается от (13а)–(13в) только видом первого уравнения, которое в данном случае можно рассматривать как содержащееся в самой системе дополнительное условие типа калибровки Фейнмана. Поэтому может создаться впечатление, что по своему физическому содержанию эти системы эквивалентны. Поясним, что имеется в виду.

Трудности квантового описания безмассовых полей обусловлены наличием нефизических степеней свободы у потенциалов, которые вводятся в теорию для достижения ее явной инвариантности. На классическом уровне «лишние» степени свободы устраняются добавлением к уравнениям движения подходящего дополнительного условия. Для электромагнитного поля это обычно лоренцевская калибровка (13а). В квантовой теории $\hat{\Psi}_\mu$ – операторы, подчиняющиеся определенным коммутационным соотношениям, и перенесение на них условия (13а) приводит к противоречиям [8]. Способ снять указанные противоречия впервые был предложен Э. Ферми [9] и заключается в том, чтобы потребовать выполнения условия

$$\partial_\mu \widehat{\Psi}_\mu \Psi = 0 \quad (20)$$

на векторах Ψ гильбертова пространства физических состояний. Впоследствии выяснилось, что условие (20) является слишком жестким и может быть заменено на более слабое

$$\partial_\mu \widehat{\Psi}_\mu^{(+)} \Psi = 0, \quad (21)$$

где операторы $\widehat{\Psi}_\mu^{(+)}$ содержат только положительно-частотные части. Однако и в этой схеме обнаружилось недостатки, заключающиеся в появлении в физическом подпространстве векторов состояний с нулевой нормой, которые не могут иметь физического смысла.

Один из способов обойти указанные трудности состоит во введении в классическую теорию дополнительных степеней свободы, например скалярного поля, которые при квантовании компенсируют нефизические степени свободы вектор-потенциала $\psi_\mu(x)$. Покажем, что именно такой подход позволяет осуществить система (19а)–(19в).

Прежде всего, легко убедиться, что из этой системы вытекает уравнение Даламбера (17) для функции $\psi_0(x)$ и такое же уравнение для $\psi_\mu(x)$, т. е. потенциалы $\psi_0(x)$, $\psi_\mu(x)$ действительно описывают безмассовое поле. Общие решения этих уравнений можно представить в виде суперпозиции плоских волн

$$\psi_\mu(x) = \sum_k N_k (C_{\mu k} e^{ikx} + C_{\mu k}^+ e^{-ikx}), \quad (22)$$

$$\psi_0(x) = \sum_k N_k (B_k e^{ikx} + B_k^+ e^{-ikx}). \quad (23)$$

Здесь N_k – нормировочный множитель (при данном k); $C_{\mu k}, C_{\mu k}^+, B_k, B_k^+$ – амплитуды волн; $kx = k_\mu x_\mu$ – скалярное произведение четырехмерного волнового вектора $k_\mu = (\vec{k}, i\omega)$, удовлетворяющего условию

$$k^2 = k_\mu k_\mu = \vec{k}^2 - \omega^2 = 0, \quad (24)$$

и четырехмерного радиус-вектора $x_\mu = (\vec{r}, it)$.

Для исключения нефизических решений системы (19а)–(19в) разложим амплитуды $C_{\mu k}, C_{\mu k}^+$ по полному базису

$$e_\mu^{(1)}, e_\mu^{(2)}, k_\mu, n_\mu \quad (25)$$

со свойствами [4]

$$e_\mu^{(i)} e_\mu^{(j)} = \delta_{ij}, \quad e_\mu^{(i)} k_\mu = 0, \quad e_\mu^{(i)} n_\mu = 0, \quad n_\mu^2 = -1. \quad (26)$$

Особенностью этого базиса является его неортогональность, так как он содержит изотропный вектор k_μ и $k_\mu n_\mu \neq 0$.

Искомое разложение может быть записано в виде

$$C_{\mu k} = \sum_{i=1}^2 c_{ki} e_\mu^{(i)} + c_{k3} k_\mu + c_{k0} n_\mu, \quad (27)$$

$$C_{\mu k}^+ = \sum_{i=1}^2 c_{ki}^+ e_\mu^{(i)} + c_{k3}^+ k_\mu + c_{k0}^+ n_\mu. \quad (28)$$

Далее учтем, что система (19а)–(19в) инвариантна относительно калибровочных преобразований (14), где произвол в выборе калибровочной функции Λ ограничен условием (15). Уравнение (15) означает, что функцию Λ также можно представить в виде разложения, аналогичного (27), (28):

$$\Lambda(x) = \sum_k N_k (\lambda_k e^{ikx} + \lambda_k^+ e^{-ikx}), \quad (29)$$

где λ_k, λ_k^+ – произвольные амплитуды. Подставляя формулы (22), (27)–(29) в (14), получим калибровочные преобразования для амплитуд

$$C_{\mu k} \rightarrow C_{\mu k} + i\lambda_k k_\mu, \quad (30)$$

$$C_{\mu k}^+ \rightarrow C_{\mu k}^+ - i\lambda_k^+ k_\mu, \quad (31)$$

из которых следует, что амплитуды $C_{\mu k}, C_{\mu k}^+$ определяются с точностью до несущественных слагаемых $i\lambda_k k_\mu, -i\lambda_k^+ k_\mu$ соответственно. В разложениях (27), (28) роль таких несущественных слагаемых выполняют члены $c_{k3} k_\mu$ и $c_{k3}^+ k_\mu$. Отбрасывая их, получим

$$C_{\mu k} = \sum_{i=1}^2 c_{ki} e_\mu^{(i)} + c_{k0} n_\mu, \quad (32)$$

$$C_{\mu k}^+ = \sum_{i=1}^2 c_{ki}^+ e_\mu^{(i)+} + c_{k0}^+ n_\mu. \quad (33)$$

Окончательные выражения для амплитуд классического поля представим, перейдя в обычный ортонормированный базис

$$e_\mu^{(\lambda)} = \delta_{\mu\lambda}, \quad (34)$$

первые два орта которого ($\lambda = 1, 2$) соответствуют поперечным поляризациям и совпадают с ортами $e_\mu^{(i)}$ базиса (25), (26), третий ($\lambda = 3$) и четвертый ($\lambda = 4$) – продольной и скалярной поляризациям потенциала $\psi_\mu(x)$. При этом выполняются соотношения

$$e_\mu^{(\lambda)} e_\mu^{(\lambda')} = \delta_{\lambda\lambda'}, \quad e_\mu^{(\lambda)} e_\nu^{(\lambda')} = \delta_{\mu\nu}. \quad (35)$$

Векторы k_μ, n_μ в базисе (34), (35) имеют компоненты

$$k_\mu = (0, 0, \omega, i\omega), \quad n_\mu = (0, 0, 0, i), \quad (36)$$

а амплитуды $C_{\mu k}$ (32), $C_{\mu k}^+$ (33) принимают вид

$$C_{\mu k} = \sum_{\lambda=1,2,4} c_{k\lambda} e_\mu^{(\lambda)}, \quad C_{\mu k}^+ = \sum_{\lambda=1,2,4} c_{k\lambda}^+ e_\mu^{(\lambda)+}, \quad (37)$$

где введены обозначения $c_{k4} = ic_{k0}, c_{k4}^+ = ic_{k0}^+$.

Лагранжиан системы (19а)–(19в) может быть представлен следующим способом:

$$L = \frac{1}{2} \Psi_0^2 - \Psi_\mu \partial_\mu \Psi_0 - \frac{1}{2} \Psi_{[\mu\nu]} (\partial_\mu \Psi_\nu - \partial_\nu \Psi_\mu) + \frac{1}{4} \Psi_{[\mu\nu]}^2. \quad (38)$$

Отсюда для тензора энергии импульса

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \Psi_A)} \partial_\nu \Psi_A - \delta_{\mu\nu} L \quad (39)$$

и его компоненты T_{44} следуют выражения:

$$T_{\mu\nu} = -\Psi_\mu \partial_\nu \Psi_0 - \Psi_{[\mu\alpha]} \partial_\nu \Psi_\alpha - \delta_{\mu\nu} L, \quad (40)$$

$$T_{44} = -\Psi_4 \partial_4 \Psi_0 - \Psi_{[4\alpha]} \partial_4 \Psi_\alpha - L. \quad (41)$$

Подставляя в (41) разложения (22), (23) с учетом (37) и вводя вместо амплитуд B_k, B_k^+ скалярного поля амплитуды

$$b_k = \frac{B_k}{\omega}, \quad b_k^+ = \frac{B_k^+}{\omega}, \quad (42)$$

получим для энергии

$$E = \int T_{44} d^3x$$

формулу

$$E = \frac{1}{2} \sum_k \omega \left[\sum_{\lambda=1,2,4} (c_{k\lambda} c_{k\lambda}^+ + c_{k\lambda}^+ c_{k\lambda}) + (b_k b_k^+ + b_k^+ b_k) \right], \quad (43)$$

в которой учтено, что $N = 1/\sqrt{2V\omega}$ (V – нормировочный объем).

Вторичное квантование осуществляется путем замены амплитуд $c_{k\lambda}$, $c_{k\lambda}^+$, b_k , b_k^+ на операторы, удовлетворяющие перестановочным соотношениям

$$[c_{k\lambda}, c_{k'\lambda'}^+]_- = \delta_{kk'} \delta_{\lambda\lambda'} \quad (\lambda, \lambda' = 1, 2, 4), \quad (44)$$

$$[b_k, b_k^+]_- = \delta_{kk'} \quad (45)$$

и все остальные коммутаторы равны нулю. Из условий квантования (44), (45) следует, что собственными значениями оператора $c_{k\lambda} c_{k\lambda}^+$ являются целые положительные числа или нуль.

Уравнение (19а), входящее в рассматриваемую систему как составная часть, для квантованного поля сформулируем в виде условия, накладываемого на операторы $\widehat{\psi}_\mu$, $\widehat{\psi}_0$, а именно, будем полагать, что

$$\left(\partial_\mu \widehat{\psi}_\mu(x) + \widehat{\psi}_0(x) \right)^{(+)} \Psi = 0, \quad (46)$$

где $\left(\partial_\mu \widehat{\psi}_\mu(x) + \widehat{\psi}_0(x) \right)^{(+)}$ – часть оператора $\left(\partial_\mu \widehat{\psi}_\mu(x) + \widehat{\psi}_0(x) \right)$, содержащая только положительные частоты. Из условия (46) вытекает равенство

$$\left(\sum_k \omega (b_k - c_{k4}) e^{ikx} \right) \Psi = 0, \quad (47)$$

из которого, в свою очередь, следует, что функция Ψ при всех k должна удовлетворять условию

$$(b_k - c_{k4}) \Psi = 0. \quad (48)$$

Учитывая, что операторы b_k и b_k^+ , а также c_{k4} и $(-c_{k4})^+$ эрмитово сопряжены, имеем

$$\Psi^* (b_k^+ + c_{k4}^+) = 0. \quad (49)$$

Из условий (48), (49) получаем

$$\left(\Psi, (b_k^+ - c_{k4}^+) (b_k - c_{k4}) \Psi \right) + \left(\Psi, (b_k^+ + c_{k4}^+) (b_k + c_{k4}) \Psi \right) = 0,$$

т. е.

$$\left(\Psi, (b_k b_k^+ + c_{k4} c_{k4}^+) \Psi \right) = 0. \quad (50)$$

Благодаря условию (50) исчезают средние значения той части оператора энергии, которые связаны со скалярным потенциалом ψ_0 и скалярной составляющей вектор-потенциала ψ_μ . Таким образом, остаются только поперечные колебания, и дальнейшая процедура вторичного квантования осуществляется в полном соответствии с квантованием обычного электромагнитного поля. Следовательно, система (19а)–(19в) описывает только электромагнитное поле, а скалярный потенциал ψ_0 играет в нем роль калибровочной функции.

Что же касается системы (13а)–(13в), то в соответствии с уравнением (13а) при ее квантовании используется условие (21), которое приводит к соотношениям

$$c_{k4}\Psi = 0, \quad \Psi^* c_{k4}^+ = 0. \quad (51)$$

Из (51) следует

$$\left(\Psi, c_{k4}^+ c_{k4} \Psi \right) = 0. \quad (52)$$

В данном случае устраняется среднее значение той части оператора энергии, которая отвечает только скалярной составляющей вектор-потенциала ψ_μ . Степень свободы, связанная со скалярным потенциалом ψ_0 , условием (52) не затрагивается. Следовательно, в данном случае потенциал ψ_0 описывает физическое поле, а система (13а)–(13в) дает совместное описание безмассовых полей со спиральностями 0 и ± 1 как единого физического объекта.

Заметим еще, что различие между физическим содержанием скалярных потенциалов ψ_0 в системах (13а)–(13в) и (19а)–(19в) можно установить косвенным путем и на классическом уровне, если ввести в уравнения движения (13б), (19б) источник j_μ . Считая ток j_μ сохраняющимся ($\partial_\mu j_\mu = 0$), для величин ψ_μ, ψ_0 в первом случае получим уравнения движения второго порядка

$$\square \psi_\mu - \partial_\mu \psi_0 = -j_\mu, \quad \psi_0 = 0, \quad (53)$$

а во втором

$$\square \psi_\mu = -j_\mu, \quad \psi_0 = 0. \quad (54)$$

Уравнения (54) показывают, что скалярная функция ψ_0 никак не связана с источником (не зависит от источника) и не может, следовательно, описывать физическое поле. В уравнениях (53) такая связь имеется благодаря наличию градиентного члена $\partial_\mu \psi_0$.

Результаты работы свидетельствуют о принципиальной возможности совместного описания безмассовых полей не только с максимальным $\pm s$, но и с промежуточными значениями спиральности, включая нулевую, в рамках не распадающихся по полной группе Лоренца релятивистских волновых уравнений первого порядка. Для реализации такого описания необходимо привлекать расширенный набор представлений группы Лоренца по сравнению с тем, который является минимально необходимым при построении теории безмассового поля со спиральностью $\pm s$. Полученные результаты могут представить, на наш взгляд, интерес с точки зрения приложения методов теории РВУ к современным полевым моделям фундаментальных частиц и их взаимодействий, в том числе $SU(n)$ – калибровочным моделям, теории суперструн и т. п.

Литература

1. Федоров Ф. И. // Докл. АН СССР. 1952. Т. 82, № 1. С. 37–40.
2. Богуш А. А., Мороз Л. Г. Введение в теорию классических полей. Минск, 1968.
3. Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я. Представления группы вращений и группы Лоренца. М., 1958.
4. Огиевецкий В. И., Полубаринов И. В. // Ядерная физика. 1966. Т. 4, вып. 1. С. 216–224.
5. Kalb M., Ramond P. // Phys. Rev. 1974. N 8. P. 2273–2284.
6. Aurilia A., Takahashi Y. // Progr. Theor. Phys. 1981. Vol. 66. P. 693–712.
7. Dvoeglazov V. V. // arXiv: physics/9804010 v 1 7 Apr 1998.
8. Прохоров Л. В. // УФН. 1988. Т. 154, вып. 2. С. 299–320.
9. Ферми Э. Научные труды. М., 1971. Т. 1. С. 302–375.
10. Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика. М., 1969.

V. A. PLETYUKHOV

ON SIMULTANEOUS DESCRIPTION OF MASSLESS FIELDS WITH SPINS 0 AND 1

Summary

Two eleven-component tensor field systems of Maxwell type are considered. It has been shown that an additional scalar function in one of the system is a gauge function. Therefore, this system describes a massless vector field. The second system provides a simultaneous description of massless fields with helicities 0 and ± 1 as a united physical object.

УДК 530.1+535.3

А. М. ГОНЧАРЕНКО

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ОПТИЧЕСКИХ СОЛИТОНОВ В АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси

(Поступила в редакцию 06.06.2014)

В большинстве работ, посвященных свойствам оптических солитонов, рассматриваются солитоны в изотропных средах (см., напр., [1–3]). Это обусловлено определенной сложностью теории солитонов. Но нелинейные среды во многих случаях являются анизотропными. Поэтому желательно рассмотреть основные свойства солитонов в анизотропных (кристаллических) средах.

В работе [4] частично исследованы свойства постоянных солитонов в кристаллах. При этом использованы функции Гаусса для представления пространственного профиля солитонов [5–8]. В данной статье рассмотрены пространственные солитоны переменного профиля, распространяющиеся в главных плоскостях кристаллов. Последнее обусловлено сложностью получения решения нелинейного уравнения в общем случае. Отметим также, что наиболее характерные особенности свойств солитонов в кристаллах проявляются при их распространении в плоскости оптических осей. В этом случае тензор диэлектрической проницаемости может быть представлен в виде

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & \varepsilon_{13} \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ \varepsilon_{31} & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Уравнения Максвелла для анизотропных сред удобнее свести к дифференциальному уравнению относительно поперечной компоненты H_y вектора магнитного поля. Предполагая, что солитон распространяется вдоль оси oz , получаем

$$H_y = A\psi(x, y, z)\exp(-ikz). \quad (2)$$

При этом постоянная распространения k определяется уравнением Френеля для анизотропных сред [9, 10], а функция $\psi(x, y, z)$ – решением следующего уравнения:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\varepsilon_{33} \partial^2 \psi}{\varepsilon_{11} \partial y^2} - 2ik \frac{\varepsilon_{33} \partial \psi}{\varepsilon_{11} \partial z} - 2ik \frac{\varepsilon_{13} \partial \psi}{\varepsilon_{33} \partial x} + \beta |\psi|^2 \psi = 0. \quad (3)$$

Здесь $\beta = \alpha A^2$ – параметр нелинейности.

Решение уравнения (3) ищем в виде следующей функции:

$$\psi = \exp \left[i\gamma_1(z) - \gamma_2(z) - \frac{(\varepsilon_{33}x - \varepsilon_{13}z)^2}{\varepsilon_{33}x_0^2 f(z)} + i \frac{(\varepsilon_{33}x - \varepsilon_{13}z)^2}{\varepsilon_{33}x_0^2 g(z)} - \frac{\varepsilon_{11}y^2}{\varepsilon_{33}y_0^2 h(z)} + i \frac{\varepsilon_{11}y^2}{\varepsilon_{33}y_0^2 l(z)} \right]. \quad (4)$$

Здесь функции f, h определяют пространственную форму солитона, функции g, l — его фазовую поверхность, а γ_1, γ_2 — фазовую скорость и коэффициент затухания. Подставляя (4) в уравнение (3), получаем систему уравнений, решения которых достаточно сложные и громоздкие. Поэтому рассмотрим только пространственную форму солитона.

Функции $f(z)$ и $h(z)$ определяются следующими уравнениями:

$$\frac{df}{dz} = \frac{4\varepsilon_{11}}{k\varepsilon_{33}x_0^2\sqrt{f_0}} \left(f - f_0 - \delta_1 f_0 f \ln \frac{f}{f_0} \right)^{1/2}, \quad (5)$$

$$\frac{dh}{dz} = \frac{4\varepsilon_{11}}{k\varepsilon_{33}y_0^2\sqrt{h_0}} \left(h - h_0 - \delta_2 h_0 h \ln \frac{h}{h_0} \right)^{1/2}. \quad (6)$$

Здесь f_0, h_0 — значения функций f, h при $z = 0$, $\delta_1 = 1/2\beta x_0^2$, $\delta_2 = 1/2\beta y_0^2$.

Уравнения (5), (6) не имеют решений в известных функциях. Но некоторые особенности свойств солитонов в кристаллах можно определить из общих соотношений. Из уравнений (5) и (6), в частности, следует, что функции $f(z), h(z)$ имеют точку перегиба при

$$f = f_0 \exp(1/\delta_1 f_0 - 1), \quad (7)$$

$$h = h_0 \exp(1/\delta_2 h_0 - 1). \quad (8)$$

Существование точки перегиба этих функций означает, что поперечные размеры солитона ограничены по величине. А из этого следует устойчивость пространственных пульсирующих солитонов.

Из выражения (4) следует, что поперечные сечения солитона представляются уравнением

$$\frac{(\varepsilon_{33}x - \varepsilon_{13}z)^2}{\varepsilon_{33}x_0^2 f(z)} + \frac{\varepsilon_{11}y^2}{\varepsilon_{33}y_0^2 h(z)} = 1. \quad (9)$$

Это уравнение переменного с глубиной эллипса. При этом солитон распространяется в направлении, составляющим угол $\delta = \arctg \varepsilon_{13}/\varepsilon_{33}$, с направлением распространения фазы (оси oz). Следовательно, и осциллирующий солитон сохраняет основные особенности свойств анизотропных сред.

Наконец, отметим, что при небольших колебаниях поперечных размеров солитона, уравнения (5) и (6) можно решить приближенно. В таком случае получаем

$$f(z) \cong \frac{1 + \delta_1 f_0}{2\delta_1} - \frac{1 - \delta_1 f_0}{2\delta_1} \cos \left(\sqrt{\frac{\delta_1}{f_0}} \frac{4\varepsilon_{11}}{kx_0^2 \varepsilon_{33}} z \right), \quad (10)$$

$$h(z) = \frac{1 + \delta_2 h_0}{2\delta_2} - \frac{1 - \delta_2 h_0}{2\delta_2} \cos \left(\sqrt{\frac{\delta_2}{h_0}} \frac{4\varepsilon_{11}}{ky_0^2 \varepsilon_{33}} z \right). \quad (11)$$

Это означает, что солитон представляет собой осциллирующий импульс с различными периодами осцилляций в главных плоскостях $(xz), (yz)$.

Литература

1. *Rosanov N. N.* // Progr. in Opt. 1996. Vol. 35. P. 1–60.
2. *Silberberg Y.* // Opt. Lett. 1990. Vol. 15, N 22. P. 1282–1284.
3. *Snyder A. W., Mitchell D. J.* // Science. 1987. Vol. 276. P. 1538–1541.
4. *Гончаренко А. М.* // Докл. НАН Беларуси. 2011. Т. 55. С. 32–34.
5. *Гончаренко А. М.* Гауссовы пучки света. М., 2005.
6. *Гончаренко А. М.* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 1999. № 3. С. 43–45.
7. *Гончаренко А. М.* // Докл. НАН Беларусі. 2000. Т. 44. С. 43–45.
8. *Гончаренко А. М.* и др. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2002. № 4. С. 60–64.
9. *Федоров Ф. И.* Оптика анизотропных сред. М., 2004.
10. *Гончаренко А. М.* и др. Основы теории оптических волноводов. Минск, 2009.

A. M. GONCHARENKO

PROPAGATION OF OPTICAL SOLITONS IN ANISOTROPIC MEDIA

Summary

The properties of changeable optical solitons in anisotropic media are considered. It is shown that variable solitons also keep the basic specific features of light propagation in crystals.

УДК 534.535

Г. В. КУЛАК¹, Г. В. КРОХ¹, Т. В. НИКОЛАЕНКО¹, П. И. РОПОТ², О. В. ШАКИН³

**ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДВУМЕРНЫХ КВАЗИБЕЗДИФРАКЦИОННЫХ
СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ ПРИ АКУСТООПТИЧЕСКОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ
В ОДНООСНЫХ КРИСТАЛЛАХ**

¹Мозырский государственный педагогический университет им. И. П. Шамякина

²Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси

³Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения
(Санкт-Петербург, Россия)

(Поступила в редакцию 16.05.2014)

Введение. Для целей оптимизации акустооптических (АО) устройств (модуляторов, дефлекторов, процессоров) необходимо знать, какое влияние оказывает поляризация и амплитудное распределение световых пучков на характеристики дифрагированного света [1]. К настоящему времени хорошо изучена дифракция гауссовых световых пучков на ультразвуке [1–4]. При этом в работах [1, 2] применен спектральный метод расчета дифрагированных световых пучков, а в [3, 4] – метод Римана для расчета дифракции ограниченных световых пучков. В статье [3] исследовано влияние затухания ультразвука на поляризационные и энергетические характеристики световых пучков, в работе [4] – влияние оптической гиротропии. Квазибездифракционные световые пучки находят широкое применение в области нелинейной кристаллооптики (см. [5]). Так, с использованием БСП реализовано большинство известных нелинейно-оптических взаимодействий, ранее изученных для пучков гауссова типа (самовоздействие, генерация гармоник, параметрическое преобразование частоты и др.). Показано [5], что в кристаллах парателлуриата возможна поляризационно-независимая модуляция бесселевых световых пучков, т. е. эффективность брэгговской дифракции не зависит от состояния поляризации падающего пучка. Значительный интерес для целей АО-преобразования могут иметь двумерные квазибездифракционные пучки, которые сохраняют свойство бездифракционности только в плоскости АО-взаимодействия. Такие пучки, например, могут быть сформированы с помощью бипризмы при прохождении через нее, в общем случае, супергауссового пучка. Тогда за бипризмой в результате дифракции формируется так называемый косинус-супергауссов пучок, являющийся двумерным квазибездифракционным пучком. Представляет интерес исследовать особенности АО-преобразования для случая, когда АО-взаимодействие совпадает с плоскостью квазибездифракционности косинус-супергауссового пучка.

В настоящей работе с использованием двумерной теории связанных волн рассмотрена брэгговская АО-дифракция косинус-супергауссовых световых пучков (КСГП), распространяющихся вблизи оптической оси одноосного гиротропного кристалла, на бегущей ультразвуковой (УЗ) волне. Предложено теоретическое обоснование преобразования формы КСГП, дифрагированных на ультразвуке.

Теоретические результаты и обсуждение. Предположим, что область, занятая ультразвуком, занимает пространство между плоскостями $z = 0$ и $z = l$. Световой пучок с некоторым распределением амплитуды распространяется в плоскости XZ под углом φ_1 к фронту УЗ-волны и дифрагирует под углом φ_2 . Геометрия АО-взаимодействия и схема расположения волновых векторов света ($k_{o,e}, k'_{o,e}$) и ультразвука ($K_{1,2}$) представлена на рис. 1.

Плоская УЗ- волна имеет вектор смещения вида [1]:

$$U = U_0 \exp[i(Kx - \Omega t)], \quad (1)$$

где $\Omega = 2\pi f$ – центральная частота УЗ-источника, U_0 – амплитуда УЗ-волны; $K = \Omega/v$, (v – фазовая скорость УЗ-волны). УЗ-волна создает периодическое в пространстве и во времени измене-

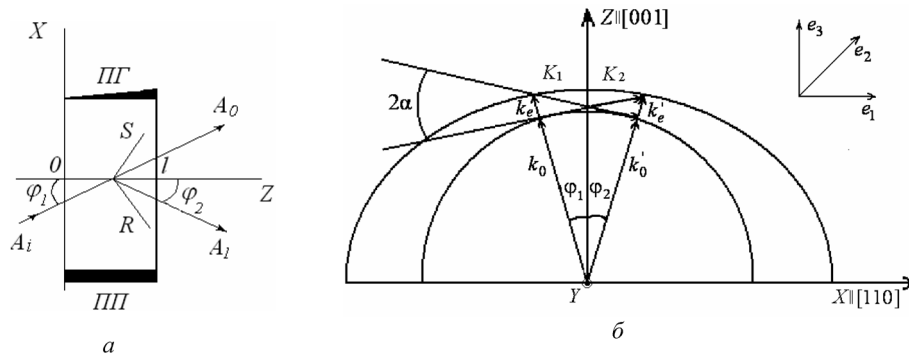


Рис. 1. Геометрия анизотропной акустооптической дифракции ограниченных световых пучков (ПП – пьезопреобразователь, ПГ – поглотитель) (а); схема расположения преломленной и дифрагированной плосковолновых компонент КСГП в плоскости дифракции кристалла TeO_2 ($K_{1,2}$ – волновые векторы ультразвука; $k_{0,e}, k'_{0,e}$ – волновые векторы преломленной и дифрагированной волн; 2α – угол между акустическими векторами K_1 и K_2 ; $e_{1,2,3}$ – единичные векторы) (б)

ние тензора диэлектрической проницаемости $\Delta\epsilon_{ij}$, связанное с тензором упругих деформаций $U_{ik} = (\nabla_k U_i + \nabla_i U_k)/2$ и тензором фотоупругих постоянных p_{ijkl} .

Из уравнений Максвелла и материальных уравнений следует волновое уравнение для напряженности светового поля в области, занятой ультразвуком [1, 3]. Решение волнового уравнения ищем в виде суммы двух связанных волн с медленно изменяющимися амплитудами:

$$E = e_{\tau_0} A_0(x, z) e^{i[k_0 r - \omega t]} + e_{\tau_1} A_1(x, z) e^{i[k_1 r - \omega_1 t]}, \quad (2)$$

где $e_{\tau_{0,1}}$ – единичные векторы эллиптической поляризации дифрагированных волн; $\omega_1 = \omega \pm \Omega$, где ω – частота световой волны; $k_{0x} = (\omega/c)n_0 \sin \varphi_1$, $k_{0z} = (\omega/c)n_0 \cos \varphi_1$, $k_{1x} = \{(\omega \pm \Omega)/\tilde{n}\} n_1 \sin \varphi_2$, $k_{1z} = \{(\omega \pm \Omega)/c\} n_1 \cos \varphi_2$ – волновые векторы падающей и дифрагированной волн; c – скорость света в вакууме; $n_0 = \sqrt{\epsilon_{ij} \tilde{k}_0 \tilde{k}_0}$, $n_1 = \sqrt{\epsilon_{ij} \tilde{k}_1 \tilde{k}_1}$, где \tilde{k}_0 (\tilde{k}_1) – единичные векторы в направлении распространения дифрагированной волны нулевого (первого) порядка. Подставив выражение (2) в волновое уравнение для напряженности светового пол E получим систему уравнений связанных волн

$$\frac{\partial A_0}{\partial s} + i\gamma_0 A_1 = 0, \quad \frac{\partial A_1}{\partial r} + i\gamma_1 A_0 = 0, \quad (3)$$

где коэффициенты связи мод выражаются через свертки тензора диэлектрической проницаемости $\Delta\epsilon_{ij}$ с векторами поляризации $\gamma_{0,1} = k(e_{\tau_{0,1}}^* \Delta\epsilon^* e_{\tau_{1,0}}) / 4\sqrt{n_o n_e \cos(\alpha - \varphi_1) \cos(\alpha + \varphi_2)}$, причем $k = 2\pi/\lambda_0$ (знак «*» означает комплексное сопряжение, λ_0 – длина световой волны в вакууме); $s = z \sin \varphi_2 - x \cos \varphi_2$, $r = z \sin \varphi_1 + x \cos \varphi_1$; n_o (n_e) – обыкновенный (необыкновенный) показатели преломления кристалла. При таком подходе из-за малой длины АО-взаимодействия не учитывается изменение фазового волнового фронта светового пучка.

Предполагается, что падающий световой пучок имеет косинус-супергауссово амплитудное распределение [7]: $A(r') = A_{0n} \exp[-(r'^{2n}/2w^{2n})] \cos(k\gamma r')$, где γ – угол между центральными волновыми векторами интерферирующих супергауссовых пучков; w – полуширина супергауссовой составляющей пучка; n – параметр супергауссовости. Амплитуда пучка A_{0n} находится из условия нормировки $A_{0n} = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-r'^{2n}/w^{2n}) \cos^2(k\gamma r') dr' \right]^{-1/2}$.

Если искать решение системы уравнений (3) методом Римана [3, 4] с использованием граничных условий $A_0(z=0) = A$, $A_1(z=0) = 0$, то общее решение для дифрагированных волн нулевого $A_0(r)$ и первого $A_1(s)$ порядка можно представить в виде

$$A_0(r) = A(r) - 0,5v \int_{-1}^{+1} A[r - l(1 - \xi) \sin \varphi_1] \frac{J_1[v\sqrt{1 - \xi^2}]}{\sqrt{1 - \xi^2}} d\xi, \quad (4)$$

$$A_1(s) = 0,5i \int_{-1}^{+1} A[l(1-\xi)\sin\varphi_2 - s] J_0[v\sqrt{1-\xi^2}] d\xi, \quad (5)$$

где v – коэффициент АО-модуляции на монохроматической УЗ-волне частотой Ω ; l – длина АО-взаимодействия; $J_0(x)$, $J_1(x)$ – функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядков соответственно.

Величина v определяется сверткой тензора приращений диэлектрической проницаемости $\Delta\varepsilon_{ij}$ с единичными векторами эллиптической поляризации $e_{\tau_{0,1}} = (e_{p,2} + i\tau_{o,e}e_{2,p})/\sqrt{1+\tau_{o,e}^2}$ (e_p – единичный вектор, перпендикулярный направлению распространения дифрагированной волны и лежащий в плоскости дифракции; e_2 – единичный вектор, перпендикулярный плоскости дифракции; $\tau_{o,e}$ – эллиптичности дифрагированных волн), т. е. $v \sim (e_{\tau_{0,1}}^* \Delta\hat{\varepsilon} e_{\tau_{0,1}})$ [6].

Расчеты проводились для анизотропной АО-дифракции световых волн, распространяющихся вблизи оптической оси кристалла парателлуриата (TeO_2), обладающего гиротропией, на медленной сдвиговой УЗ-волне, распространяющейся вдоль оси $[110]$ и поляризованной вдоль оси $[\bar{1}10]$. В результате выполнения свертки тензора $\Delta\hat{\varepsilon}$ с вектором поляризации получаем коэффициент АО-модуляции световой волны

$$v_{oe} = \Delta \{ [\tau_o \tau_e \cos(\alpha - \varphi_2) - \cos(\alpha - \varphi_1)] \Delta_1 + [\sin(\alpha + \varphi_1) - \tau_o \tau_e \sin(\alpha - \varphi_2)] \Delta_2 \}, \quad (6)$$

где

$$\Delta_1 = [n_e^4(p_{11} - p_{12}) + n_o^2 n_e^2 p_{44} \sin(2\alpha)/8] / \tau_{oe}, \quad \Delta_2 = [n_e^4 \sin(2\alpha)(p_{12} - p_{11}) + n_o^2 n_e^2 p_{44}/2] / \tau_{oe},$$

$$\Delta = \pi U_{12} l / \{ 2\lambda_0 [n_o n_e \cos(\alpha - \varphi_1) \cos(\alpha + \varphi_2)]^{1/2} \}, \quad \tau_{oe} = [(1 + \tau_o^2)(1 + \tau_e^2)]^{1/2},$$

причем $U_{12} = [2I_a / \rho v^3]^{1/2}$ (I_a – интенсивность УЗ-волны, v – фазовая скорость УЗ-волны, ρ – плотность кристалла; p_{11} , p_{12} , p_{44} – фотоупругие постоянные). В случае e - o преобразования световых пучков в формулах (4)–(6) следует выполнить замену: $\alpha \rightarrow -\alpha$, $o \leftrightarrow e$.

Разлагая выражения (4), (5) в степенной ряд (до первой степени) по малым геометрическим параметрам $g_1 = l \sin(\varphi_{1,2}) / w$ [7], $g_2 = k\gamma l \sin \varphi_{1,2}$ ($\varphi_1 \approx \varphi_2$), получим:

$$A_0(r') = A_{0n} \cos(v) \exp(-0,5r'^{2n}) \cos(r'') - 0,5A_{0n} v n \exp(-0,5r'^{2n}) [g_1 r'^{2n-1} \cos(r'') - g_2 \sin(r'')] (I_1 - I_3), \quad (7)$$

$$A_1(r') = A_{0n} \sin(v) \exp(-0,5s'^{2n}) \cos(s'') - 0,5A_{0n} v n \exp(-0,5s'^{2n}) [g_1 s'^{2n-1} \cos(s'') - g_2 \sin(s'')] (I_2 - I_4), \quad (8)$$

где $r' = r/w$, $s' = s/w$, $r'' = k\gamma r$, $s'' = k\gamma s$, $I_1 = (4/v) \sin^2(v/2)$, $I_2 = 2 \sin(v)/v$, $I_3 = 2[J_0(v) - 1]/v$, $I_4 = -2J_1(v)/v$.

С учетом выражений (7), (8) интенсивности КСГП равны:

$$I_{n0} = \int_{-\infty}^{+\infty} |A_0(r)|^2 dr = \cos^2 v - v A_{0n}^2 \cos v (I_1 - I_3) (ng_1 I_a - g_2 I_b), \quad (9)$$

$$I_{n1} = \int_{-\infty}^{+\infty} |A_1(r)|^2 dr = \sin^2 v - v A_{0n}^2 \sin v (I_2 - I_4) (ng_1 I_a - g_2 I_b), \quad (10)$$

где $I_a = \int_{-\infty}^{+\infty} r'^{2n-1} \cos^2(r'') \exp(-r'^{2n}/2) dr$, $I_b = \int_{-\infty}^{+\infty} r'^{2n-1} \sin(r'') \cos(r'') \exp(-r'^{2n}/2) dr$.

Эффективности o - e (e - o) преобразования собственных эллиптически поляризованных КСГП, находим из соотношений

$$\eta_{oe(eo)} = \frac{I_{n1}(v_{oe(eo)})}{I_{n0}(v_{oe(eo)}) + I_{n1}(v_{oe(eo)})}. \quad (11)$$

Из выражений (7), (8) следует, что при АО-дифракции имеет место изменение формы КСГП, зависящее от величины угла γ между центральными волновыми векторами интерферирующих пучков, ширины супергауссовой огибающей пучка, интенсивности ультразвука, а также геометрических параметров пучков g_1 и g_2 . Как следует из выражений (9)–(11), при учете геометрических параметров дифрагированных косинус-супергауссовых пучков имеет место изменение модуляционных зависимостей дифрагированных пучков по сравнению с плосковолновым приближением [1].

Численные расчеты на основании выражений (7)–(11) проводились для АО-дифракции КСГП с длиной волны $\lambda_0 = 0,63$ мкм, распространяющихся вблизи оптической оси кристалла TeO_2 , на медленной сдвиговой УЗ-волне с фазовой скоростью $v = 617$ м/с.

На рис. 2 представлена зависимость нормированной амплитуды дифрагированного светового пучка нулевого ($A_{0n} = |A_0| / \max(|A_0|)$) и первого ($A_{1n} = |A_1| / \max(|A_1|)$) порядка от поперечной координаты r и s соответственно. Из рис. 2, *а, б* следует, что для падающего КСГП, имеющего малую ширину w , дифрагированный пучок нулевого и первого порядка существенно искажается. При этом несимметричная форма пучка обусловлена дифракционным процессом, когда боковые максимумы падающего КСГП достигают значительных интенсивностей и при высокой интенсивности ультразвука происходит преобразование энергии в первый дифракционный порядок (и наоборот). С увеличением ширины гауссовой составляющей КСГП ($w = 0,6$ мм) дифрагированные пучки испытывают значительно менее существенные преобразования формы (по сравнению с падающим пучком). При больших ширинах падающего пучка ($w \geq 1,5$ мм) дифрагированные пучки сохраняют форму падающего. Расчеты показывают, что для супергауссовых падающих световых пучков ($\gamma \rightarrow 0$) дифрагированные световые пучки нулевого и первого порядка имеют супергауссов профиль. Преобразование формы КСГП на границе области АО-взаимодействия может также трактоваться как эффект Гусса – Хэнхена продольного смещения световых пучков вдоль выходной грани области АО-взаимодействия [3, 7].

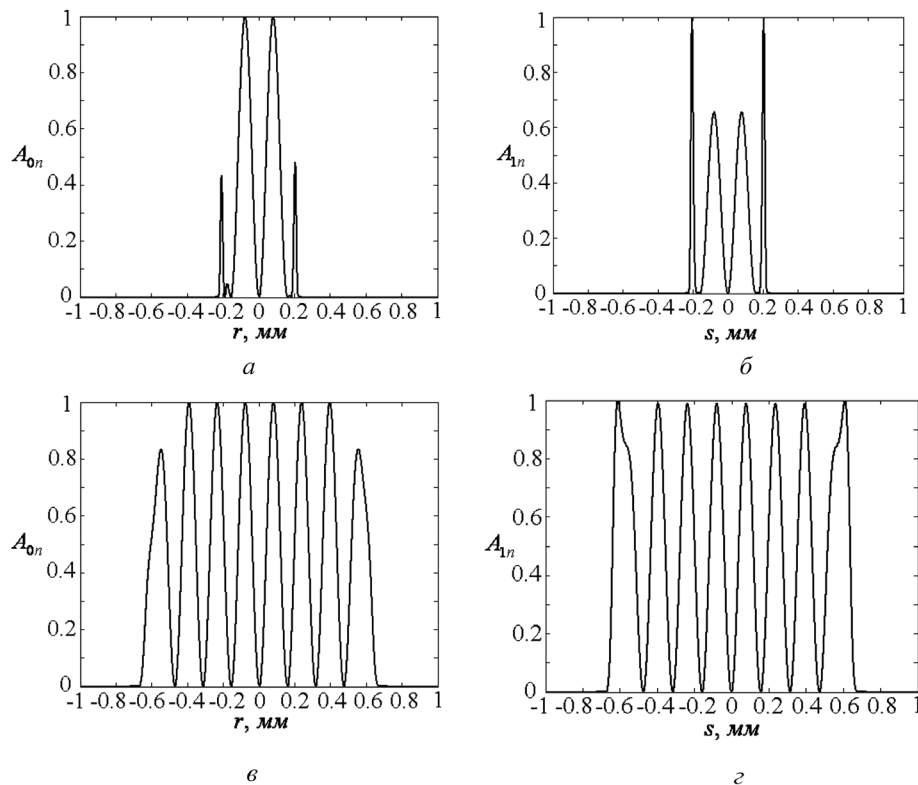


Рис. 2. Поперечное распределение амплитуды дифрагированного светового пучка нулевого A_{0n} и первого A_{1n} порядка для падающего КСГП с $w = 0,2$ мм (*а, б*) и $w = 0,6$ мм (*в, г*) ($n = 10, l = 5$ мм, $n_o = 2,21; n_e = 2,35; \gamma = 2$ мрад, $\alpha = 8^\circ, f = 30$ МГц, $p_{11} = 0,0074; p_{12} = 0,187; p_{44} = -0,17; \rho = 5,72$ кг/см³, $I_a = 1$ Вт/см²)

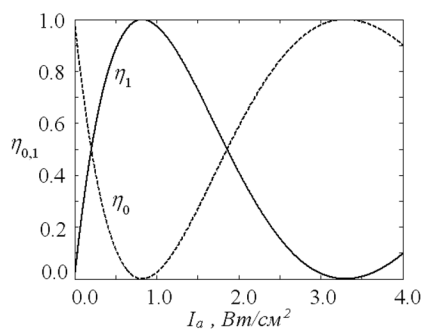


Рис. 3. Зависимость эффективности дифракции $\eta_{0,1}$ падающего косинус-супергауссового светового пучка с $w = 0,2 \div 2$ мм от интенсивности ультразвука I_a для нулевого (η_0) и первого (η_1) порядка дифракции ($n = 10$, $l = 5$ мм, $n_o = 2,21$; $n_e = 2,35$; $\gamma = 2$ мрад, $\alpha = 8^\circ$, $f = 30$ МГц, $p_{11} = 0,0074$; $p_{12} = 0,187$; $p_{44} = -0,17$; $\rho = 5,72$ кг/см³)

Зависимость эффективности дифракции η от интенсивности ультразвука I_a для нулевого и первого дифракционного порядка представлена на рис. 3. Видно, что изменение полуширины супергауссовой составляющей падающего светового пучка w в пределах от 0,2 до 2 мм не сказывается на поведении зависимостей $\eta(I_a)$ (на рис. 3 кривые налагаются друг на друга). При изменении ширины гауссовой составляющей КСГП эффективность дифракции в нулевом и первом дифракционных порядках практически не изменяется и достигает максимального значения. Данная особенность дифракции объясняется тем, что каждая плосковолновая компонента, принадлежащая угловому спектру падающего КСГП, рассеивается в соответствующую компоненту дифрагированного КСГП с эффективностью, близкой к ста процентам.

Заключение. Таким образом, в работе развита двумерная теория дифракции КСГП на ультразвуке. Полученные результаты показывают, что в гиротропных кристаллах парателлуриата при дифракции КСГП имеет место преобразование их формы. Варьирование параметров, характеризующих АО-взаимодействие, позволяет добиваться условий оптимальной формы дифрагированных пучков при различных применениях. Такие АО-устройства перспективны для применений в лазерных технологиях (в частности, для лазерной резки и сварки), для зондирования поглощающих и рассеивающих сред на большую глубину, лазерной локации, микроскопии высокого разрешения и в других областях, а также для решения проблем лазерной диагностики и контроля в промышленности, микро- и нанотехнологиях [5, 6]. Аналогичные особенности АО-взаимодействия могут наблюдаться в одноосных гиротропных кристаллах теллура при брэгговской дифракции ИК-излучения на ультразвуке вблизи оптической оси кристалла [8].

Литература

1. Балакиши В. Н., Парыгин В. Н., Чирков Л. Е. Физические основы акустооптики. М., 1985.
2. Балакиши В. Н., Упасен Ч. А. // Вестн. МГУ. Сер. физ.-мат. наук. 1982. Т. 23, вып. 5. С. 71–76.
3. Белый В. Н., Войтенко И. Г., Кулак Г. В. // Журн. прикладной спектроскопии. 1992. Т. 56, вып. 5/6. С. 831–836.
4. Шарангович С. Н. // Автометрия. 1994. № 1. С. 31–39.
5. Белый В. Н., Казак Н. С., Кондратюк Н. В. и др. // Квантовая электроника 1998. Т. 25, № 11. С. 1037–1042.
6. Белый В. Н., Кулак Г. В., Крох Г. В., Шакин О. В. // Журн. прикладной спектроскопии. 2014. Т. 81, № 1. С. 75–80.
7. Moharam M. G., Goylord T. K., Magnusson R. // J. Opt. Soc. Am. 1980. Vol. 70, N 3. P. 300–304.
8. Adler E. L., Gundjian A. A., Conilhat D. et al. // IEEE Ultrasonics: Pros. of Intern. Symp. New York, Oct., 1982. New York, 1982. P. 330–435.

G. V. KULAK, G. V. KROKH, T. V. NIKOLAENKO, P. I. ROPOT, O. V. SHAKIN

TWO-DIMENSIONAL NEARLY ABSENT-DIFFRACTED LIGHT BEAM TRANSFORMATION UNDER ACOUSTOOPTICAL INTERACTION IN UNIAXIAL CRYSTALS

Summary

Participants of shape transformation of two-dimensional nearly absent-diffracted (cosine-super-gaussian) light beams under Bragg's diffraction by ultrasonic waves in iniaxial gyrotropic crystals are investigated. It is shown that at diffraction of such light beams travelling in the vicinity of the crystal optical axis on a slow shear ultrasonic wave under the conditions of a strong acoustooptical interaction, light beams experience a significant deformation of the intensity distribution in the beam cross section. At large widths of a supergaussian component of an incident beam, the shape of a diffracted beam remains unchanged. It is stated that the diffraction efficiency weakly depends on the width of the supergaussian component of the cosine-super-gaussian beam.

УДК 517.958:537.311.1;621.315.592

Н. А. ПОКЛОНСКИЙ, С. А. ВЫРКО, А. И. КОВАЛЕВ

**СТАЦИОНАРНАЯ ПРЫЖКОВАЯ МИГРАЦИЯ БИПОЛЯРОНОВ
ПО «МЯГКИМ» ТОЧЕЧНЫМ ДЕФЕКТАМ
В ЧАСТИЧНО РАЗУПОРЯДОЧЕННЫХ ПОЛУПРОВОДНИКАХ**

Белорусский государственный университет

(Поступила в редакцию 27.06.2014)

Введение. Воздействуя на полупроводниковые кристаллы ионизирующим излучением (гамма-квантами, электронами, протонами, быстрыми реакторными нейтронами и др.), можно управлять их свойствами без заметного изменения химического состава [1, 2], что расширяет возможности технологии создания функциональных элементов опто- и магнитоэлектроники [3–6]. Метод «легирования» полупроводников устойчивыми радиационными дефектами имеет определенное преимущество по сравнению с «металлургическим» легированием атомами примесей, потому что позволяет, в частности, вводить в большой концентрации трехзарядные дефекты с двумя энергетическими уровнями в запрещенной зоне (энергетической щели) кристаллической матрицы [7–9]. Экспериментально установлено, что у многих элементарных (моноатомных) полупроводников и полупроводниковых соединений под действием ионизирующего излучения (радиации) создаются достаточно устойчивые (в области температур функционирования полупроводниковых приборов) радиационные дефекты [1, 2]. При этом с увеличением флюенса радиации уровень Ферми (химический потенциал) смещается к предельному положению в запрещенной зоне (реже он смещается в s - или v -зону). Это предельное положение уровня Ферми является характеристикой самого частично разупорядоченного полупроводника и слабо зависит от типа ионизирующего излучения [7–10]. Стабилизация уровня Ферми определяется накоплением собственных радиационных дефектов (вакансий, междоузельных атомов и их ассоциатов). Итак, стабилизацию положения уровня Ферми в запрещенной энергетической зоне полупроводника связывают (см., напр., [9, 11]) с **введением ионизирующим излучением собственных точечных дефектов кристаллической структуры в трех зарядовых состояниях ($Z = -1, 0, +1$, в единицах элементарного заряда e).** Такие дефекты в принципе самодостаточны для обеспечения электрической нейтральности полупроводникового образца. Если концентрации электронов в s -зоне и дырок в v -зоне пренебрежимо малы, то постоянный электрический ток определяется прыжками электронов (или дырок) между дефектами [12, 13]. Актуальность этих исследований обусловлена поиском материалов с большими диэлектрической и/или магнитной проницаемостями, которые могут быть интегрированы планарной технологией в твердотельные электрические и оптические цепи [14, 15].

1. *Электронная энергия точечных дефектов кристалла.* Число уровней энергии и зарядовых состояний дефектов зависит и от типа дефектов, и от типа кристаллической структуры полупроводников. В адиабатическом приближении (выделение «медленной» подсистемы – ядер атомов, входящих в состав дефекта) электронная энергия дефекта представляет собой сумму кинетической энергии электронов и потенциальных энергий взаимодействия электронов с электронами, электронов с ядрами и ядер с ядрами [16, 17]. По виду зависимости электронной энергии точечных дефектов от зарядовых состояний различают дефекты с положительной и отрицательной корреляционными энергиями в кристаллической матрице полупроводника. Для дефекта с положительной

корреляционной энергией («жесткого» дефекта, или t -дефекта) увеличение числа электронов, локализованных на t -дефекте, увеличивает его электронную энергию [2, 18, 19]. Для дефекта с отрицательной корреляционной энергией («мягкого» дефекта, или s -дефекта) увеличение числа электронов, локализованных на s -дефекте, как бы приводит к притяжению между электронами, обусловленному искажением входящего в состав дефекта фрагмента кристаллической матрицы, и уменьшает электронную энергию дефекта [20–23].

2. «Жесткие» дефекты (с положительной корреляционной энергией, или дефекты t -типа). Рассмотрим два примера t -дефектов, которые реализуются при температуре жидкого гелия и ниже. В ковалентном кристалле p -Si:B атомы бора замещают атомы Si в узлах кристаллической решетки. Наряду с A^0 -центрами, т. е. атомами бора как акцепторами в зарядовых состояниях (0), существуют также A^+ -центры – атомы бора в зарядовом состоянии (+1). Акцепторы в зарядовых состояниях (+1) и (0) формируют A^+ -зону, которая расположена ближе к потолку v -зоны, чем A^0 -зона, образованная зарядовыми состояниями (0) и (–1). В ковалентном кристалле n -Ge:Sb атомы сурьмы замещают атомы Ge в узлах кристаллической решетки. Наряду с D^0 -центрами, т. е. атомами сурьмы как донорами в зарядовых состояниях (0), существуют также D^- -центры – атомы сурьмы в зарядовом состоянии (–1). Доноры в зарядовых состояниях (–1) и (0) формируют D^- -зону, которая расположена ближе ко дну c -зоны, чем D^0 -зона, образованная зарядовыми состояниями (0) и (+1). Прыжки дырок (электронных вакансий) между атомами бора в кремнии и электронов между атомами сурьмы в германии осуществляются в основном поодиночке [24–26].

3. «Мягкие» дефекты (с отрицательной корреляционной энергией, или дефекты s -типа). Минимум полной энергии для s -дефекта достигается в том случае, если выигрыш в электронной энергии за счет искажения атомов кристаллической матрицы и атомной структуры самого дефекта превышает проигрыш за счет кулоновского расталкивания добавленного электрона и электронов исходного неискаженного дефекта [27–29]. Во многих разупорядоченных элементарных полупроводниках и полупроводниковых соединениях содержатся примесные атомы и дефекты одного сорта в трех зарядовых состояниях ($Z = -1, 0, +1$). Для s -дефектов характерны прыжки не одиночных электронов, а электронных пар (биполяронов) [27, 30]. Энергетические уровни s -дефектов (центров) расположены по отношению к краям зон разрешенных энергий (дну c -зоны и потолку v -зоны) в обратном порядке по сравнению с t -дефектами. Такие s -центры, по-видимому, обеспечивают реализацию фотографического процесса в кристаллитах AgBr, погруженных в желатиновую матрицу. Так, по модели [31] именно раздельная локализация электронных и дырочных биполяронов способствует сохранению скрытого фотографического изображения от стирания (т. е. препятствует рекомбинации электронов и дырок).

Цель данной работы – нахождение выражения для длины экранирования внешнего стационарного электрического поля в полупроводниковых кристаллах, содержащих точечные дефекты одного сорта в трех зарядовых состояниях $Z = -1, 0, +1$ с отрицательной энергией корреляции, т. е. s -дефекты, или «мягкие» дефекты. Предполагается, что электропроводность на постоянном токе осуществляется посредством прыжков пар электронов (биполяронов) между точечными s -дефектами кристаллической решетки в зарядовых состояниях $Z = -1$ и $Z = +1$, т. е. два электрона перепрыгивают не порознь, а вместе.

Рассмотрим частично разупорядоченный полупроводник, содержащий хаотически распределенные по объему точечные двухуровневые дефекты s -типа, каждый из которых может находиться в одном из трех зарядовых состояний (–1, 0, +1). Дефекты s -типа в зарядовых состояниях (+1, 0) формируют c' -зону, которая расположена ближе ко дну c -зоны кристаллической полупроводниковой матрицы, чем v' -зона, которую формируют эти же дефекты в зарядовых состояниях (–1, 0), т. е. v' -зона расположена ближе к потолку v -зоны. Считаем, что концентрация s -дефектов $N = N_{-1} + N_0 + N_{+1}$ постоянна в пространстве и достаточна для стабилизации уровня Ферми в окрестности середины энергетической щели полупроводника (примерно посередине между c' -зоной и v' -зоной s -дефектов). Условие электрической нейтральности: $N_{-1} = N_{+1} + KN$, где $KN = N_d - N_a$ – разность концентраций водородоподобных доноров (d) и акцепторов (a), полностью находящихся в зарядовых состояниях (+1) и (–1) соответственно; $-1 < K < 1$ – степень ком-

пенсации s -дефектов и донорами с концентрацией N_d , и акцепторами с концентрацией N_a . Далее принимается, что и $N_d \ll N$, и $N_a \ll N$.

Согласно [13], для s -дефектов переходы одиночных электронов $(0) \rightarrow (0)$ выполняют роль тепловой «генерации» биполяронов, а переходы одиночных электронов $(-1) \rightarrow (+1)$ – «рекомбинации» биполяронов. При этом концентрация электрически нейтральных N_0 дефектов много меньше концентрации дефектов в зарядовых состояниях (-1) и $(+1)$, т. е. $N_0 \ll N_{-1}$ и $N_0 \ll N_{+1}$, так что $N_{-1} + N_{+1} \approx N$. Вследствие этого концентрация прыгающих между s -дефектами в зарядовых состояниях (-1) и $(+1)$ биполяронов $N_{-1,+1} = N_{-1}N_{+1}/N$ много больше концентрации прыгающих по одиночке электронов ($N_{-1,0} = N_{-1}N_0/N$ между зарядовыми состояниями (-1) и (0) и $N_{0,+1} = N_0N_{+1}/N$ между зарядовыми состояниями (0) и $(+1)$).

Прыжковый ток биполяронов по дефектам в дрейфово-диффузионном приближении. Если к находящемуся в термостате полупроводнику приложено внешнее стационарное электрическое поле вдоль координатной оси x , то плотность постоянного прыжкового тока биполяронов по s -дефектам [13, 32]:

$$J_{-1,+1} = J_{dr} + J_{dif} = 2eN_{-1,+1}(x) \left(M_{-1,+1}E + D_{-1,+1} \frac{d}{dx} \ln \frac{N_{-1}(x)}{N_{+1}(x)} \right), \quad (1)$$

где J_{dr} и J_{dif} – дрейфовая и диффузионная компоненты тока; $-2e < 0$ – заряд биполярона; $N_{-1,+1}(x) \approx N_{-1}(x)N_{+1}(x)/(N_{-1}(x) + N_{+1}(x))$ – эффективная концентрация биполяронов, прыгающих между дефектами в зарядовых состояниях (-1) и $(+1)$ в окрестности точки с координатой x ; $M_{-1,+1}$ – дрейфовая подвижность биполяронов; E – напряженность внешнего электрического поля внутри полупроводникового образца; $D_{-1,+1}$ – коэффициент диффузии биполяронов по дефектам; $M_{-1,+1}$ и $D_{-1,+1}$ зависят от x значительно слабее, чем $N_{-1}(x)$ и $N_{+1}(x)$.

Неравновесную (при $J_{-1,+1} \neq 0$) концентрацию дефектов в зарядовых состояниях $(-1, +1)$ представим как $N_{-1}(x) = N_{-1} + \delta N_{-1}(x)$, $N_{+1}(x) = N_{+1} + \delta N_{+1}(x)$; N_{-1} , N_{+1} – здесь и далее равновесные (в отсутствие прыжкового тока и внешнего электрического поля) значения концентраций, $\delta N_{-1}(x)$, $\delta N_{+1}(x)$ – отклонения от N_{-1} , N_{+1} соответственно в результате действия внешнего электрического поля на прыгающие между дефектами биполяроны [12].

Связь между коэффициентом диффузии и подвижностью биполяронов дается соотношением Нернста – Эйнштейна [32]: $M_{-1,+1}/D_{-1,+1} = 2e/(\xi_{-1,+1}k_B T)$, где k_B – постоянная Больцмана, T – температура, $\xi_{-1,+1} \geq 1$ – безразмерный параметр, зависящий от отношений ширины c' - и v' -зон (в запрещенной зоне кристаллической матрицы) к тепловой энергии $k_B T$.

Далее считается, что в содержащем s -дефекты полупроводнике плотность прыжкового тока одиночных электронов ($J_{-1,0}$ между зарядовыми состояниями (-1) и (0) , а также $J_{0,+1}$ между зарядовыми состояниями (0) и $(+1)$) много меньше прыжкового тока биполяронов ($J_{-1,+1}$ между зарядовыми состояниями (-1) и $(+1)$): $J_{-1,0} + J_{0,+1} \ll J_{-1,+1}$.

Из формулы (1) с учетом того, что $N_{-1}(x) + N_{+1}(x) \approx N$, имеем:

$$J_{-1,+1} = \sigma_{-1,+1}E + \frac{2eD_{-1,+1}}{(N_{-1}(x) + N_{+1}(x))} \left(\frac{dN_{-1}(x)}{dx} N_{+1}(x) - \frac{dN_{+1}(x)}{dx} N_{-1}(x) \right), \quad (2)$$

где $\sigma_{-1,+1} = 2eN_{-1,+1}(x)M_{-1,+1}$ – прыжковая электрическая проводимость биполяронов на постоянном токе [12].

Поскольку $N = N_{-1}(x) + N_0(x) + N_{+1}(x) \approx N_{-1}(x) + N_{+1}(x)$, а также в силу однородного распределения дефектов по кристаллу $dN/dx = 0$, имеем: $dN_{-1}(x)/dx + dN_0(x)/dx + dN_{+1}(x)/dx \approx dN_{-1}(x)/dx + dN_{+1}(x)/dx \approx 0$. Следовательно, $dN_{-1}(x)/dx \approx -dN_{+1}(x)/dx$. Тогда с учетом отношения $M_{-1,+1}/D_{-1,+1}$ получим из (2) градиенты концентраций s -дефектов в кристалле полупроводника:

$$\frac{dN_{-1}(x)}{dx} = \frac{J_{-1,+1}}{2eD_{-1,+1}} - \frac{2eEN_{-1}(x)N_{+1}(x)}{(N_{-1}(x) + N_{+1}(x))\xi_{-1,+1}k_B T} \approx -\frac{dN_{+1}(x)}{dx}. \quad (3)$$

Если к электрически нейтральному образцу полупроводника с однородно распределенными по его объему s -дефектами приложено внешнее электрическое поле, то напряженность поля E внутри образца дается уравнением Пуассона [12]: $dE/dx = \rho(x)/\varepsilon$, где $\rho(x) = N_{+1}(x) - N_{-1}(x) + KN$ – плотность наведенного заряда, $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$ – статическая диэлектрическая проницаемость кристаллической матрицы (решетки), ε_0 – электрическая постоянная.

Для малых отклонений концентраций $\delta N_{-1}(x)$, $\delta N_{+1}(x)$ от равновесных значений N_{-1} , N_{+1} уравнение Пуассона принимает вид [12]

$$\frac{dE}{dx} = \frac{e}{\varepsilon} [\delta N_{+1}(x) - \delta N_{-1}(x)]. \quad (4)$$

Для стационарной плотности тока $J_{-1,+1}$ имеем: $dJ_{-1,+1}/dx \approx 0$, так как выполняется соотношение $(dJ_{-1,+1}/dx) + (dJ_{-1,0}/dx) + (dJ_{0,+1}/dx) = 0$ и $J_{-1,+1} \gg J_{-1,0} + J_{0,+1}$.

Итак, в диффузионно-дрейфовом приближении электронные процессы, определяемые дефектами в зарядовых состояниях $(-1, +1)$ при наложении на кристалл внешнего стационарного электрического поля (напряженностью E), с учетом (3), (4) и $dJ_{-1,+1}/dx = 0$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [12]):

$$\begin{aligned} \frac{dN_{-1}(x)}{dx} = -\frac{dN_{+1}(x)}{dx} = \frac{J_{-1,+1}}{2eD_{-1,+1}} - \frac{2eEN_{-1}(x)N_{+1}(x)}{(N_{-1}(x) + N_{+1}(x))\xi_{-1,+1}k_B T}; \\ \frac{dE}{dx} = \frac{e}{\varepsilon} [\delta N_{+1}(x) - \delta N_{-1}(x)]; \quad \frac{dJ_{-1,+1}}{dx} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

При малом уровне возмущения равновесного состояния системы прыгающих между дефектами электронов внешним электрическим полем система уравнений (5) линеаризуется относительно четырех переменных ($\delta N_{-1}/N_{-1} \ll 1$; $\delta N_{+1}/N_{+1} \ll 1$; E ; $J_{-1,+1}$) [12]. В этом случае систему уравнений (5) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} dy_1/dx &= a_{13}y_3 + a_{14}y_4; \\ dy_2/dx &= a_{23}y_3 + a_{24}y_4; \\ dy_3/dx &= a_{31}y_1 + a_{32}y_2; \\ dy_4/dx &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где $y_1 = \delta N_{-1}$; $y_2 = \delta N_{+1}$; $y_3 = E$; $y_4 = J_{-1,+1}$; $a_{13} = -a_{23} = -2eN_{-1}N_{+1}/[(N_{-1} + N_{+1})\xi_{-1,+1}k_B T]$; $a_{14} = -a_{24} = 1/(2eD_{-1,+1})$; $a_{31} = -a_{32} = -e/\varepsilon$.

Система линейных дифференциальных уравнений (6) соответствует матрице коэффициентов

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решая характеристическое уравнение $\det[A - \lambda \mathbf{1}] = 0$ (здесь $\mathbf{1}$ – единичная 4×4 -матрица), находим собственные значения:

$$\lambda_{1,2} = 0, \quad \lambda_{3,4} = \mp \left(\frac{4e^2 N_{-1} N_{+1}}{\varepsilon \xi_{-1,+1} k_B T (N_{-1} + N_{+1})} \right)^{1/2}.$$

Общее решение системы (6) имеет вид (см. также [12])

$$\begin{pmatrix} \delta N_{-1} \\ \delta N_{+1} \\ E \\ J_{-1,+1} \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_{-1,+1}^{-1} \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} B \\ -B \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(\lambda_3 x) + C_4 \begin{pmatrix} -B \\ B \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(\lambda_4 x), \quad (7)$$

где параметры C_1, C_2, C_3, C_4 определяются из граничных условий, которые накладываются на полупроводниковый образец; $B^2 = a_{13}/2a_{31}$; $\sigma_{-1,+1}^{-1} = 2eN_{-1,+1}M_{-1,+1} = -a_{13}/a_{14}$.

Экранирование внешнего электрического поля биполяронами. Из (7) следует, что длина экранирования Λ_s внешнего электростатического поля (при $C_1 = C_4 = 0$) дается обратной величиной собственного значения λ_3 , т. е.

$$\Lambda_s = -\lambda_3^{-1} = \sqrt{\frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 \xi_{-1,+1} k_B T}{(2e)^2 N_{-1} N_{+1} / (N_{-1} + N_{+1})}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 \xi_{-1,+1} k_B T}{4e^2 N_{-1,+1}}}, \quad (8)$$

где $\xi_{-1,+1} k_B T / 2e = D_{-1,+1} / M_{-1,+1}$ – отношение прыжкового коэффициента диффузии к дрейфовой прыжковой подвижности биполярона, $4e^2$ – квадрат заряда биполярона.

Согласно (8), длина экранирования Λ_s внешнего электростатического поля определяется концентрацией прыгающих по дефектам пар электронов (биполяронам) $N_{-1,+1} \approx N_{-1} N_{+1} / (N_{-1} + N_{+1})$, где принято, что для s -дефектов $N_0 \ll N_{-1} + N_{+1} \approx N$. При этом подвижные зарядовые состояния неподвижных дефектов, определяющих ионизационное равновесие и экранирование внешнего поля, удовлетворяют условию электрической нейтральности $N_{-1} = N_{+1} + KN$.

Заключение. Впервые получено аналитическое выражение для длины экранирования внешнего стационарного электрического поля в частично разупорядоченных полупроводниках в зависимости от концентрации прыгающих по мягким точечным дефектам в зарядовых состояниях (–1) и (+1) пар электронов (биполяронам), а также от отношения коэффициента диффузии к дрейфовой подвижности биполярона.

Работа выполнена в рамках программ «Кристаллические и молекулярные структуры» и «Конвергенция» Республики Беларусь.

Литература

1. Radiation effects in semiconductors / ed. by K. Iniewski. Boca Raton, 2011.
2. Бургуэн Ж., Ланно М. Точечные дефекты в полупроводниках. Экспериментальные аспекты. М., 1985.
3. Козлов В. А., Козловский В. В. // Физика и техника полупроводников. 2001. Т. 35, № 7. С. 769–795.
4. Vogel E. M. // Nat. Nanotech. 2007. Vol. 2, N 1. P. 25–32.
5. Rogalski A. // Progr. Quant. Electron. 2012. Vol. 36, N 2/3. P. 342–473.
6. Nanomagnetism and spintronics / ed. by T. Shinjo. Amsterdam, 2014.
7. Coates R., Mitchell E. W. J. // Adv. Phys. 1975. Vol. 24, N 5. P. 593–644.
8. Lugakov P. F., Lukashevich T. A., Shusha V. V. // Phys. Status Solidi A. 1982. Vol. 74, N 2. P. 445–452.
9. Брудный В. Н., Колин Н. Г., Смирнов Л. С. // Физика и техника полупроводников. 2007. Т. 41, № 9. С. 1031–1040.
10. McPherson M. // Physica B. 2004. Vol. 344, N 1/4. P. 52–57.
11. Поклонский Н. А. Международная зимняя школа по физике полупроводников: науч. программа и тез. докл., С.-Петербург – Зеленогорск, 1–5 марта 2007 г. СПб., 2007. С. 43–47.
12. Поклонский Н. А., Лопатин С. Ю. // Физика твердого тела. 1998. Т. 40, № 10. С. 1805–1809.
13. Поклонский Н. А., Вырко С. А., Забродский А. Г. // Физика и техника полупроводников. 2008. Т. 42, № 12. С. 1420–1425.
14. Ng K. K. Complete guide to semiconductor devices. New York, 2002.
15. Zimmermann H. K. Integrated silicon optoelectronics (Springer series in optical sciences. Vol. 148). Heidelberg, 2010.
16. Поклонский Н. А., Вырко С. А., Поденок С. Л. Статистическая физика полупроводников. М., 2005.
17. Поклонский Н. А., Вырко С. А., Лапчук Н. М. Полупроводники: основные понятия. Минск, 2002.
18. Милнс А. Примеси с глубокими уровнями в полупроводниках. М., 1977.
19. Гершензон Е. М., Мельников А. П., Рабинович Р. И., Серебрякова Н. А. // Успехи физ. наук. 1980. Т. 132, № 2. С. 353–378.
20. Драбкин И. А., Мойжес Б. Я. // Физика и техника полупроводников. 1981. Т. 15, № 4. С. 625–648.

21. Аморфные полупроводники / под ред. М. Бродски. М., 1982.
22. Ионов С. П. // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1985. Т. 49, № 2. С. 310–325.
23. Бордовский Г. А., Немов С. А., Марченко А. В., Серегин П. П. // Физика и техника полупроводников. 2012. Т. 46, № 1. С. 3–23.
24. Забродский А. Г., Немов С. А., Равич Ю. И. Электронные свойства неупорядоченных систем. СПб., 2000.
25. Pollak M. // Phys. Status Solidi B. 2002. Vol. 230, N 1. P. 295–304.
26. Stallinga P. // Adv. Mater. 2011. Vol. 23, N 30. P. 3356–3362.
27. Anderson P. W. // Phys. Rev. Lett. 1975. Vol. 34, N 15. P. 953–955.
28. Богословский Н. А., Цэндин К. Д. // Физика и техника полупроводников. 2012. Т. 46, № 5. С. 577–608.
29. Litvinov V. V., Palchik G. V., Urenev V. I. // Phys. Status Solidi A. 1988. Vol. 108, N 1. P. 311–321.
30. Каширина Н. И., Лахно В. Д. // Успехи физ. наук. 2010. Т. 180, № 5. С. 449–473.
31. Красинькова М. В., Мойжес Б. Я. // Физика и техника полупроводников. 1990. Т. 24, № 11. С. 1934–1942.
32. Поклонский Н. А., Ковалев А. И., Вырко С. А. // Докл. НАН Беларуси. 2014. Т. 58, № 3. С. 37–43.

N. A. POKLONSKI, S. A. VYRKO, A. I. KOVALEV

STATIONARY HOPPING MIGRATION OF BIPOLARONS VIA “SOFT” POINT DEFECTS IN PARTLY DISORDERED SEMICONDUCTORS

Summary

Hopping migration of bipolarons (electron pairs) via immobile defects of one kind in three charge states (-1 , 0 , $+1$) in partly disordered semiconductors is considered theoretically. They are considered to have negative correlation energy and to “stabilize” the Fermi level in the vicinity of the middle of the band gap of a semiconductor. The expression is written for the drift and diffusion components of the dc current density of bipolarons hopping from defects in the charge states (-1) to those in the charge states ($+1$). The analytical expression for screening length of an external stationary electric field is found. It is shown that the concentration of mobile electric charges responsible for electric field screening is equal to the bipolaron concentration.

УДК 621.315.592

Ф. П. КОРШУНОВ, Н. Е. ЖДАНОВИЧ, В. А. ГУРИНОВИЧ

ОТРИЦАТЕЛЬНАЯ ВЫСОКОЧАСТОТНАЯ ЕМКОСТЬ ОБЛУЧЕННЫХ ЭЛЕКТРОНАМИ *p-n*-ПЕРЕХОДОВ В РЕЖИМЕ ЛАВИННОГО ПРОБОЯ

Научно-практический центр НАН Беларуси по материаловедению

(Поступила в редакцию 06.06.2014)

В настоящее время имеется ряд публикаций, в которых исследуется такое физическое явление, как отрицательная емкость. К примеру, отрицательная емкость наблюдалась в полупроводниковых приборах с *p-n*-переходами, диодах Шоттки, приборах с переходами металл–изолятор–металл, транзисторах MESFET и т. д. [1–5]. Также в литературе рассматриваются различные физические механизмы, которые обуславливают природу указанного явления, при этом пока отсутствуют точные модели, описывающие его природу. В работе [2] предполагается, что в диодах с *p-n*-переходом эффект отрицательной емкости обусловлен модуляцией проводимости базы неосновными носителями при больших амплитудах переменного тока. В работе [6] установлено, что емкость прямосмещенных диффузионных кремниевых диодов в основном определяется подвижными носителями заряда в области *p-n*-перехода и при измерении на малом переменном сигнале большой частоты наблюдается резкое изменение знака реактивной составляющей. Исследование импеданса диода, проведенное в работе [7], обнаружило зависимость его вещественной и мнимой частей как от постоянной составляющей тока через *p-n*-переход, так и от частоты сигнала. Отрицательная емкость наблюдалась в кремниевых фотодиодах, облученных нейтронами [8]. В работе [9] показано, что эффект отрицательной емкости также может наблюдаться в содержащих точечные дефекты и их комплексы барьерных структурах с *p-n*-переходом. В этой публикации высказано предположение, что отрицательная емкость определяется центрами прилипания, которые удерживают носители заряда в течение времени порядка полупериода измерительного сигнала.

Цель данной работы заключалась в исследовании влияния радиационных дефектов (РД) на импеданс обратносмещенных кремниевых *p-n*-переходов в режиме лавинного пробоя.

Исследования проводились на структурах серийных стабилитронов Д817, изготовленных по стандартной диффузионно-сплавной технологии. Исследуемые образцы изготавливались из Si типа БКЭФ с удельным сопротивлением 0,5 Ом·см. Удельное сопротивление пластины *p*-типа (легированной бором) составляло 0,015 Ом·см. Сплавление пластин *p*- и *n*-типа осуществлялось посредством силумина в вакууме (10^{-5} мм рт. ст.), после чего методом зонной перекристаллизации градиентом температуры слой эвтектики отводился в *p*-область с одновременной разгонкой Al в *n*-область.

Омические контакты создавались на основе Ni по стандартной технологии. Площадь структур была около 0,04 см². Напряжение лавинного пробоя исходных *p-n*-переходов составляло 90–100 В при температуре измерения 300 К.

Облучение образцов проводилось на электронном ускорителе при комнатной температуре электронами с энергией 4 МэВ. Режим облучения – импульсный, частота повторения импульсов – 200 Гц, длительность импульса – 5 мкс, плотность потока электронов в импульсе – $2 \cdot 10^{15}$ см⁻²·с⁻¹, флюенс облучения составил $\Phi = 1 \cdot 10^{15} - 1 \cdot 10^{17}$ см⁻².

Измерения емкости и проводимости проводились на частоте 1 МГц на измерителе LCR E7-12 по параллельной схеме замещения при низком уровне измерительного сигнала (25 мВ).

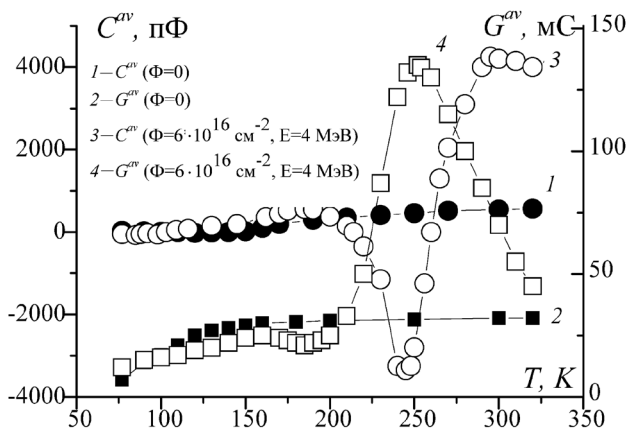


Рис. 1. Температурные зависимости емкости C^{av} (кривые 1, 3) и проводимости G^{av} (кривые 2, 4) структуры стабилитрона Д817, измеренные в режиме пробоя при токе пробоя 5 мА: 1, 2 – до облучения; 3, 4 – после облучения электронами с энергией 4 МэВ флюенсом $6 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-2}$

На рис. 1 приведены температурные зависимости емкости C^{av} и проводимости G^{av} исследуемой структуры в режиме лавинного пробоя до облучения (кривые 1, 2) и облученной электронами с энергией 4 МэВ флюенсом $6 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-2}$ (кривые 3, 4). Как видим, до облучения зависимости емкости и проводимости от температуры имеют монотонный характер, после облучения на зависимости $G^{av}(T)$ наблюдается максимум проводимости при температуре порядка 250 К, а на зависимости $C^{av}(T)$ имеет место немонотонное изменение емкости, причем вначале емкость падает до минимума при температуре порядка 245 К, меняя при этом знак, и на зависимости появляется участок с отрицательными значениями (что можно проинтерпретировать как появление в эквивалентной схеме индуктивности). Затем, с ростом температуры, на зависимости $C^{av}(T)$ снова появляется участок положительной емкости с максимумом при температуре порядка 295 К. При этом при комнатной температуре мы имеем следующее соотношение значений емкости:

- барьерная емкость при напряжении вблизи напряжения пробоя – 60 пФ (примерно одинакова для облученного и необлученного образцов, так как концентрация глубоких уровней в области структуры вблизи границы обедненной области при напряжении пробоя составляла порядка $5 \div 10\%$ от концентрации легирующей примеси);
- емкость необлученной структуры при токе пробоя 5 мА имела значение порядка 600 пФ;
- емкость облученной структуры при том же токе пробоя имела значение порядка 4000 пФ.

На рис. 2 приведены зависимости емкости в режиме пробоя C^{av} от тока пробоя I_R . Кривая 1 $C^{av0}(I_R)$ получена для необлученного стабилитрона. Кривая 2 отображает зависимость $[(C_{\text{max}}^{avR} - C^{av0})(I_R)]$ – разность между значением емкости в максимуме ($T = 295 \text{ К}$, см. кривую 3 на рис. 1 для $I_R = 5 \text{ мА}$) на зависимости $C^{avR}(T)$ и значением емкости в пробое необлученного образца при том же значении тока пробоя в той же температурной точке). Кривая 3 отображает зависимость $[(C_{\text{min}}^{avR} - C^{av0})(I_R)]$ – сумма значения емкости в минимуме облученного энергией 4 МэВ флюенсом $6 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-2}$ образца ($T = 245 \text{ К}$, см. кривую 3 на рис. 1 для $I_R = 5 \text{ мА}$) на зависимости $C^{avR}(T)$ и значения емкости в пробое необлученного образца при том же значении тока пробоя в той же температурной точке.

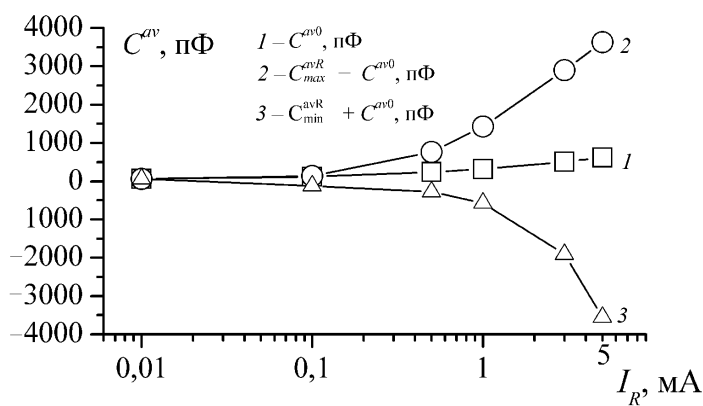


Рис. 2. Зависимость емкости в режиме пробоя C^{av} от тока пробоя I_R : 1 – $C^{av0}(I_R) - \Phi = 0$; 2 – $(C_{\text{max}}^{avR} - C^{av0})(I_R)$; 3 – $(C_{\text{min}}^{avR} + C^{av0})(I_R)$

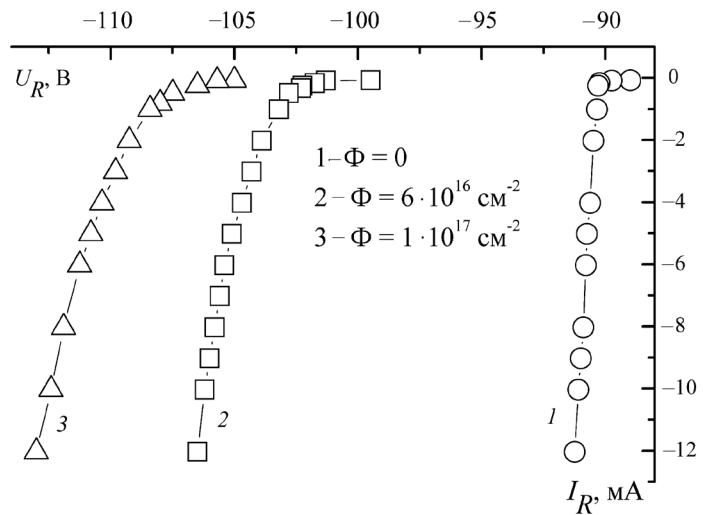


Рис. 3. ВАХ образца после облучения различными флюенсами электронов: 1 – $\Phi = 0$; 2 – $\Phi = 6 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-2}$; 3 – $\Phi = 1 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-2}$

Как видно из рис. 2, с ростом тока пробоя I_R в диапазоне токов 0,01–5 мА (получить данные в области токов пробоя превышающих 5 мА для образцов с таким напряжением пробоя не удалось из-за конструктивных ограничений измерителя LCR E7-12) наблюдается увеличение разности между емкостью в минимуме и максимуме в режиме пробоя облученного образца и величиной для такого же значения тока в той же температурной точке необлученного образца. Причем эти значения практически совпадают по величине, что свидетельствует об одинаковом вкладе в отрицательную и положительную емкости составляющей, обусловленном введением в структуру прибора радиационных дефектов.

На рис. 3 приведены обратные вольтамперные характеристики (ВАХ) исследуемых диодов, которые облучены различными флюенсами электронов, измеренные при комнатной температуре.

Как видно из рис. 3, характер изменений ВАХ в предпробойной области существенно отличается от области пробоя. Для первой области наблюдается лишь некоторое увеличение обратного тока, а для второй – смещение в область больших напряжений с одновременным увеличением наклона. При этом рост дифференциального сопротивления особенно заметно проявляется в начальной области пробоя (так называемое «смягчение» обратной ВАХ в результате облучения [10]). Что же касается ее смещения вдоль оси напряжений, то это вызвано ростом напряжения пробоя с увеличением дозы облучения.

На рис. 4 приведена зависимость относительного изменения градиента концентрации примеси a при облучении, измеренная при комнатной температуре. Значения a определялись из вольт-фарадных зависимостей $C^{-3}(U)$, измеренных на частоте $f = 10 \text{ кГц}$, которые при всех значениях Φ хорошо аппроксимируются прямыми в диапазоне изменения обратного смещения вплоть до значений, близких к пробивным, что говорит о сохранении плавности p - n -перехода при комнатной температуре во всем диапазоне доз облучения. Как видим, с ростом Φ a уменьшается за счет

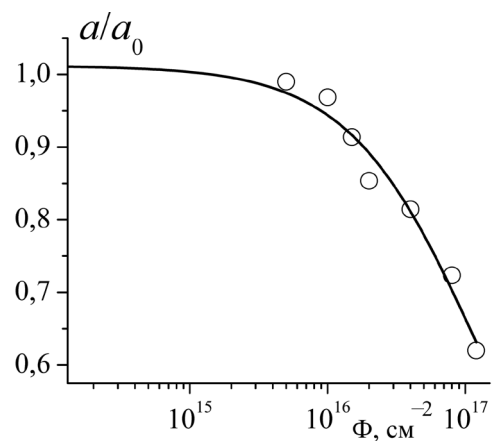


Рис. 4. Относительные изменения градиента концентрации примеси a при электронном облучении

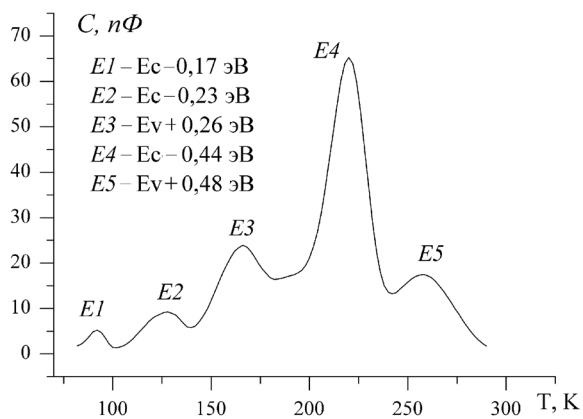


Рис. 5. DLTS-спектр исследуемой структуры; частота измерительного сигнала составляет 1 МГц, постоянная времени измерения равна 10,5 мс, $\Phi = 3 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-2}$

компенсации легирующей примеси введенными при облучении радиационными дефектами. При этом его можно достаточно близко аппроксимировать экспоненциальной зависимостью (сплошная линия на рис. 4).

На рис. 5 представлен DLTS-спектр исследуемого образца, облученного флюенсом электронов $3 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-2}$. Видно, что данный спектр содержит пять характерных максимумов $E1 \div E5$. Они соответствуют перезарядке глубоких уровней (ГУ) основных радиационных дефектов (РД), вводимых облучением в n - и p -области p - n -перехода, поскольку данные стабилитроны имеют плавный p - n -переход. Наибольшей скоростью введения обладает дефект, ответственный за пик $E4$, о чем свидетельствует его доминирующая величина по сравнению с остальными максимумами. Энергетическое положение ГУ этого дефекта, определяемое из кривых Аррениуса, равно $E_c - 0,44 \text{ эВ}$. Это неплохо согласуется с данными для комплекса $V-P$ (E -центр). Пик $E5$ соответствует самому глубокому уровню с $E_v + 0,48 \text{ эВ}$ комплекса $V-Al$. Пик $E1$ дает уровень $E_c - 0,17 \text{ эВ}$, который может принадлежать комплексам $V-O$ и C_i-C_s . Его незначительная величина свидетельствует об относительно небольшой скорости введения указанных РД. Пик $E3$ дает уровень с $E_v + 0,26 \text{ эВ}$, а $E2$ – с $E_c - 0,23 \text{ эВ}$. Слабая выраженность этих максимумов указывает на то, что каждый из них может быть обусловлен перезарядкой близко расположенных в запрещенной зоне Si уровней. Последние могут принадлежать комплексам $V2$, Al_i , Al_iAl_s и др. При этом основной вклад в максимум $E3$, видимо, дает комплекс междуузельного алюминия.

Анализ приведенных на рис. 1–5 данных позволяет предположить, что рост емкости необлученного образца в режиме пробоя в диапазоне токов пробоя 0,01–5 мА в сравнении со значением барьерной емкости до пробоя обусловлен свободными электронами и дырками, генерируемыми в области ударной ионизации (умножения), где их заряды компенсируют друг друга, которые затем «растаскиваются» полем в противоположные стороны и образуют заряды разного знака на границах области умножения по обеим сторонам p - n -перехода [11]. Увеличение амплитуды емкости обоих знаков в пробое для облученных образцов обусловлено, по-видимому, необходимостью увеличения заряда свободных носителей на границе зоны умножения из-за «захвата» части заряда дрейфующих в электрическом поле свободных носителей на уровни РД во всей области ОПЗ. Также можно предположить, что процессы перезарядки глубоких уровней РД на высоких частотах (1 МГц) приводят к модуляции напряженности электрического поля в области умножения и смещению границ области умножения в сторону p - n -перехода, что также способствует росту значений емкости в режиме пробоя после облучения. При этом измерения в стационарном режиме (см. рис. 3) и на низких частотах (см. рис. 4) при комнатной температуре свидетельствуют об удалении границы ОПЗ от p - n -перехода в результате компенсации неподвижного заряда ионизированной легирующей примеси зарядом противоположного знака радиационных дефектов. Однако эти данные носят интегральный характер, распространяющийся на всю область ОПЗ, в то время как соотношение заряда РД и скомпенсированного заряда легирующих примесей будет максимальным вблизи p - n -перехода и РД могут, по-видимому, существенно влиять на высокочастотную емкость и проводимость уже при незначительной компенсации усредненного по всей области ОПЗ заряда.

Появление на зависимости $C^{av}(T)$ по мере роста температуры участка отрицательной емкости обусловлено, по всей видимости, тем, что вначале процесс перезарядки уровней РД запаздывает по отношению к прилагаемому высокочастотному синусоидальному измерительному сигналу, что объясняется эффектом прилипания на ГУ (максимум значения отрицательной емкости наблюдается, вероятно, когда время пребывания захваченных на акцепторный уровень носителей равно полупериоду измерительного сигнала) с последующим изменением знака реактивной составляющей по мере увеличения коэффициента термополевой эмиссии с ростом температуры. При этом наблюдаемые на рис. 1 зависимости емкости и проводимости определяются, в основном, доминирующим в *DLTS*-спектре уровнем *E*-центра (*E4*) (см. рис. 5). Однако несимметричная форма зависимостей и широкий диапазон температур, в котором проявляется этот эффект, указывают на то, что определенный вклад также вносят уровни *E3* и *E5*.

Более детальное описание данного эффекта требует проведения дальнейших экспериментальных и теоретических исследований.

Таким образом, в данной работе проведены исследования импеданса кремниевых *p-n*-переходов в режиме лавинного пробоя и впервые показано появление, после облучения высокоэнергетическими электронами, участка отрицательной емкости и максимума проводимости на температурных зависимостях высокочастотной емкости и проводимости.

Литература

1. *Werner J., Levi A. F. J., Tung R. T. et al.* // Phys. Rev. Lett. 1988. Vol. 60 (1). P. 53–56.
2. *Ershov M., Liu H. C., Li L. et al.* // IEEE Trans. Electron Dev. 1998. Vol. 45 (10). P. 2196–2206.
3. *Beale M., Mackay P.* // Phil. Mag. B. 1992. Vol. 65 (1). P. 47–64.
4. *Omura I., Ohashi H., Fichtner W.* // IEEE Electron Dev. Lett. 1997. Vol. 18 (12). P. 622–624.
5. *Noguchi T., Kitagawa M., Taniguchi I.* // Jap. J. Appl. Phys. 1980. Vol. 19 (7). P. 1423–1424.
6. *Абдуллаев Г. Б., Искендерзаде З. А., Джафарова Э. А.* // Радиоэлектроника. 1965. Т. 10 (4). С. 776–779.
7. *Синица С. П.* // Радиоэлектроника. 1957. Т. 2. С. 1427–1429.
8. *McPherson M.* // Nucl. Instrum. Meth. Phys. Res. 2002. Vol. 488. P. 100–109.
9. *Поклонский Н. А., Шпаковский С. В., Горбачук Н. И., Ластовский С. Б.* // Физика и техника полупроводников. 2006. Т. 40, вып. 7. С. 824–828.
10. *Коршунов Ф. П., Марченко И. Г.* // Физика и техника полупроводников. 1983. Т. 17, вып. 12. С. 2201–2204.
11. *Грехов И. В., Серёжкин Ю. Н.* // Лавинный пробой *p-n*-перехода в полупроводниках. Л., 1980. С. 74–76.

F. P. KORSHUNOV, N. E. JDANOVICH, V. A. GURINOVICH

NEGATIVE HIGH-FREQUENCY CAPACITANCE OF ELECTRON-IRRADIATED *p-n*-TRANSITIONS IN THE AVALANCHE BREAKDOWN MODE

Summary

The high-frequency ($f=1$ MHz) negative capacitance of avalanche diodes irradiated with fast electrons in the breakdown mode has been studied for the first time. It is found that the appearance of a negative capacitance area on the curve for temperature-dependent capacitance is accompanied by a conductivity maximum on a similar curve for temperature-dependent conductivity. It is suggested that this effect is due to the influence of trapping centers on the process of recharging deep levels in the entire space-charge region.

УДК 539.216.2:537.622.4

Т. А. ТОЧИЦКИЙ, А. Э. ДМИТРИЕВА

ВЛИЯНИЕ ТЕКСТУРЫ МЕДНОЙ ПОДЛОЖКИ НА ФОРМИРОВАНИЕ СТРУКТУРЫ ТОНКИХ ЭЛЕКТРОЛИТИЧЕСКИХ ПЛЕНОК НИКЕЛЯ

Научно-практический центр НАН Беларуси по материаловедению

(Поступила в редакцию 13.10.2013)

Введение. Изучение структурного состояния тонких электролитически осажденных слоев, примыкающих к подложке, позволяет получить сведения о начальных стадиях процесса электрокристаллизации и имеет большое значение при разработке технологии осаждения магнитных пленок и многослойных пленочных структур для устройств хранения и обработки информации.

Осаждение электролитических пленок производится в основном на металлические проводящие подложки (медные, алюминиевые и др.). Известно [1], что медная подложка (фольга) имеет текстуру прокатки, т. е. на поверхности подложки находятся различные плоскости ГЦК-решетки. Однако до сих пор не ясно, какое влияние на рост пленок оказывают различно ориентированные зерна подложки и состояние их поверхности. В настоящей работе приведены результаты исследования влияния текстуры медной подложки на формирование структуры тонких пленок никеля.

Методика и результаты эксперимента. Поликристаллические пленки никеля толщиной ~ 20 нм осаждались из сернокислого электролита при комнатной температуре ($t = 20$ °С) на медную полированную фольгу толщиной ~ 0,1 мм. Плотность тока осаждения была постоянной $i_k = 15$ мА/см², кислотность раствора – рН2÷6. Текстура пленок определялась на электронографе ЭМР-100. Полюсные фигуры строились по методу, описанному в работах [2–4]. Структура пленок изучалась с помощью электронного микроскопа ЭМВ-100ЛМ. Состав электролита для осаждения пленок и методика подготовки образцов для электронно-микроскопических и электронно-графических исследований приведены в работах [1–5].

На рис. 1 а, б представлены полюсные фигуры {110} подложки из медной полированной фольги и осажденной на нее пленки никеля толщиной ~ 20 нм. Анализ полюсной фигуры подложки показывает, что текстура подложки является многократной текстурой прокатки кристаллов: крестик – (110) [001]; треугольник – (112) [1 $\bar{1}$ 1]; светлый кружок – (113) [111]; квадрат – (110) [$\bar{1}$ 12]; черный кружок – (110) [111]; черный квадрат – (100) [001]; полужелтый кружок – (100) [$\bar{1}$ 10]; индекс в круглых скобках в этой записи соответствует плоскости прокатки, а индекс в прямых скобках – направлению прокатки. Судя по распределению полюсной плотности, основная ориентировка кристаллов соответствует плоскостям (110), лежащим параллельно поверхности подложки, а направлением прокатки является [$\bar{1}$ 12] и близкие к нему направления [111] и [001] (табл. 1).

Из анализа полюсной фигуры {110} пленки следует, что в пленках имеются все основные ориентировки кристаллов, которые присущи подложке, т. е. пленка растет эпитаксиально в пределах крупных (~ 1 мкм) зерен медной подложки. Однако наблюдается усиление рефлексов, соответствующих ориентациям (112) [1 $\bar{1}$ 1] и (110) [$\bar{1}$ 12] и ослабление интенсивности рефлексов, соответствующих ориентациям (100) [001], (100) [$\bar{1}$ 10] и (113) [111]. При уменьшении кислотности раствора до рН6 интенсивность рефлексов, соответствующих ориентациям (112) [1 $\bar{1}$ 1] и (110) [$\bar{1}$ 12], уменьшается, а интенсивность других рефлексов увеличивается.

На рис. 1, в представлена электронограмма пленки никеля. Как видим, структура пленки состоит из эпитаксиальных участков, которые находятся один по отношению к другому в двойни-

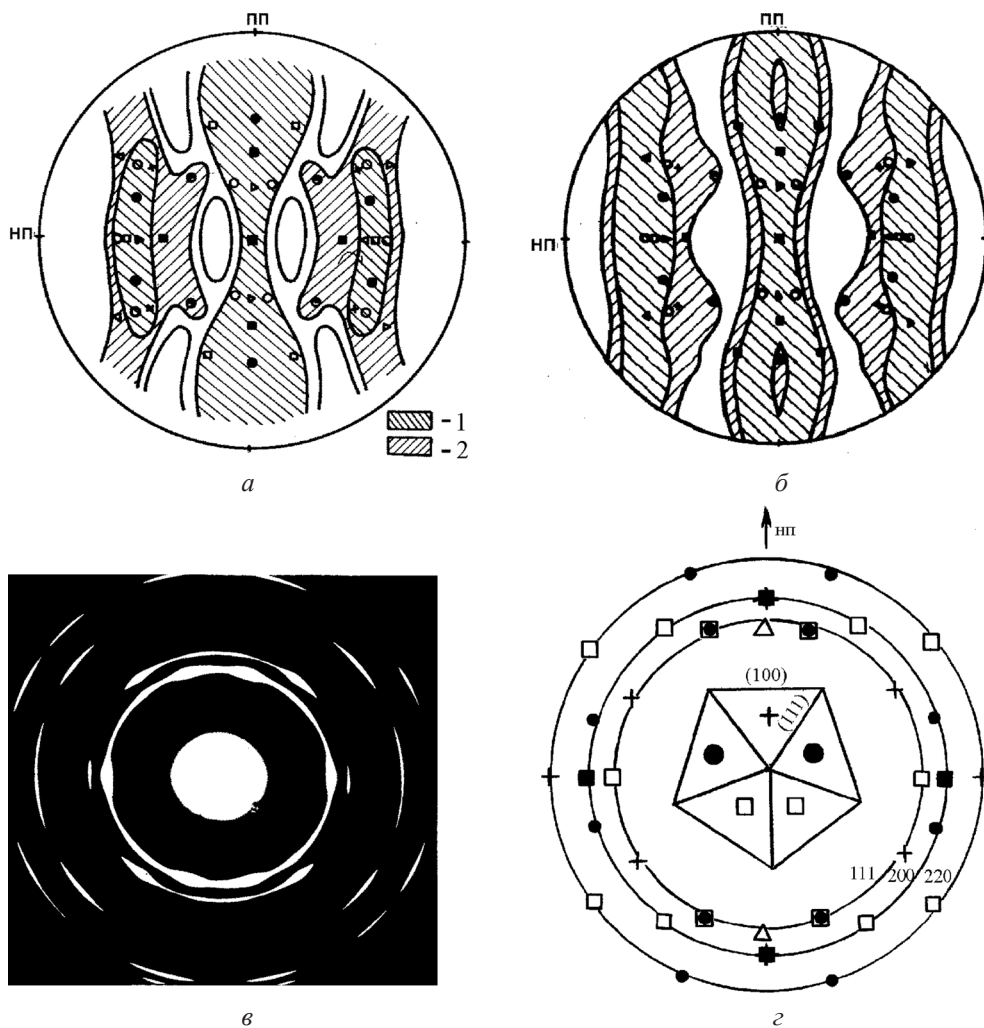


Рис. 1. Полюсные фигуры $\{110\}$ медной подложки (а) и осажденной на нее пленки (~ 20 нм) никеля (pH2) (б), электрограмма пленки (в) и ее схема (г); 1 – интенсивные максимумы, 2 – менее интенсивные максимумы

ковой ориентации [6]. Из схемы также видно, что эпитаксиальные участки с преимущественной ориентацией $[110]$ в основном формируют текстурные дужки на линиях (111) , (200) и (220) электрограммы.

Микродифракционный анализ пленок с преимущественной ориентацией $[110]$ показывает, что все они имеют двойники и дефекты упаковки (ДУ). При этом на участках (110) $[\bar{1}12]$ двойниковые прослойки шириной до ~ 20 нм и дефекты упаковки вытянуты вдоль направления прокатки. На участках (110) $[001]$ и (110) $[111]$ двойники размером ~ 60 нм имеют неправильную форму и распределены на пленке хаотически. На микрофотографиях пленок двойники имеют темный цвет (рис. 2, в, г). Ранее нами установлено [7], что вероятность образования ДУ в таких пленках может достигнуть $\alpha \sim 3 \cdot 10^{-2}$. На участках пленок с ориентацией (110) $[\bar{1}12]$ наблюдаются параллельные направлению прокатки линии, представляющие собой унаследованные от прокатанной

Таблица 1. Расположение плоскостей двойникования $\{111\}$ в эпитаксиальной пленке никеля по отношению к ориентированной параллельно плоскости катода грани (110) и направлениям прокатки зерен медной подложки

$\{111\}$	(110)	Направления прокатки		
		$[\bar{1}12]$	$[100]$	$[111]$
(111)	$35,3^\circ$	$35,3^\circ$	$35,3^\circ$	90°
$(\bar{1}\bar{1}\bar{1})$	90°	0°	$35,3^\circ$	$19,5^\circ$
$(1\bar{1}\bar{1})$	90°	$70,5^\circ$	$35,3^\circ$	$19,5^\circ$
$(11\bar{1})$	$35,3^\circ$	$70,5^\circ$	$35,3^\circ$	$19,5^\circ$

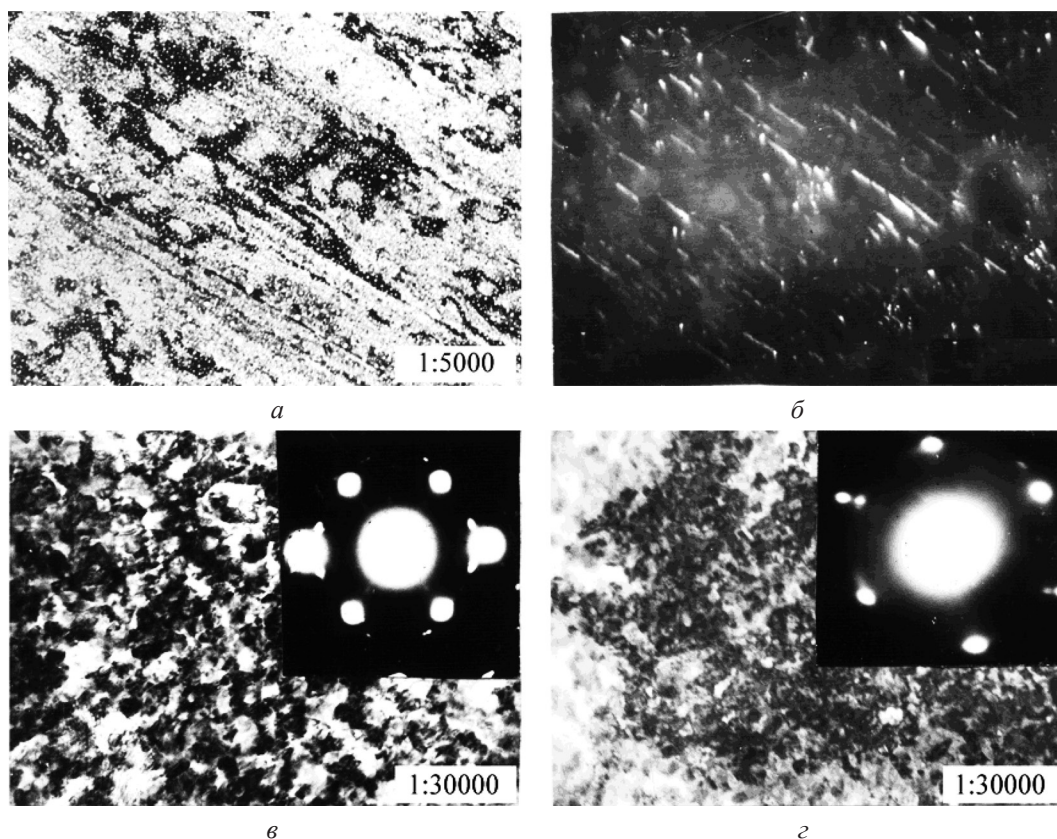


Рис. 2. Микрофотографии структуры эпитаксиальных участков пленок никеля, имеющих различные ориентации: *a, б* – (110) $[\bar{1}12]$, *в* – (110) $[111]$ и *г* – (110) $[001]$; *б* – темнопольное изображение структуры пленки в свете двойниковой дифракции, соответственно светлопольному изображению структуры пленки (*a*).

медной подложки места пересечений плоскостей скольжения (111) ГЦК-решетки меди с поверхностью зерен подложки (рис. 2, *a*). Анализ микроэлектроннограмм таких пленок, отделенных от подложек для исследований, показывает, что межплоскостные расстояния d_{111} (0,207 нм) в направлении поперек прокатки меньше на ~ 4 %, чем d_{111} (0,197 нм) в направлении прокатки. Для никеля табличные значения $d_{111} = 0,204$ нм. На участках пленок (110) $[111]$ и (110) $[001]$, в которых линии скольжения не совпадают с направлением прокатки (см. табл. 1), анизотропии межплоскостных расстояний d_{111} не обнаружено.

Обсуждение результатов. В основе электролитического осаждения пленок никеля лежит процесс электрохимического восстановления на катоде ионов никеля по реакции



При электролизе сернокислого никеля наряду с реакцией (1) протекает реакция выделения на катоде газообразного водорода



Так, при $\text{pH} \leq 2$ на катоде выделяется наибольшее количество водорода (выход по току ~ 85 %) [8].

Выше установлено, что крупные зерна медной подложки по отношению к электролиту ориентированы различными гранями ГЦК-решетки: (110), (100), (311), (211) и (111). Из табл. 2 видно, что ретикулярная плотность граней (111) наибольшая, а граней (211) – наименьшая. Можно полагать, что более плотноупакованные грани, имеющие большую плотность электронов проводимости, обладают лучшей способностью восстанавливать положительно заряженные ионы, чем грани с меньшей плотностью упаковки атомов. С другой стороны, вероятность присоеди-

ния (А) атомов металла к более плотноупакованным граням ГЦК-решетки меньшая, чем к граням с меньшей плотностью упаковки $A_{111} < A_{100} < A_{110} < A_{113} < A_{211}$ [7].

Таблица 2. Ретикулярная плотность (L) атомов в гранях ГЦК решетки

hkl	$L \cdot 10^{-20} \text{ м}^{-2}$	L_{111} / L_{hkl}
111	0,183	–
100	0,158	1,16
110	0,112	1,63
113	0,095	1,93
210	0,071	2,57
211	0,054	3,39

Согласно реакциям (1) и (2), на гранях (111) и (100), являющимися наиболее плотноупакованными, в первую очередь должны восстанавливаться ионы никеля и водорода. Однако, поскольку водород не присоединяется к кристаллической решетке подложки, а, захватывая электроны, превращается в газ, то он, согласно [7], начинает выделяться раньше никеля и препятствует преимущественному восстановлению последнего на этих гранях. В этом случае, наиболее вероятно, должны преимущественно развиваться кристаллиты никеля на медных гранях (110), имеющих среднюю ретикулярную плотность атомов, по сравнению с другими гранями катода (см. табл. 2). Поэтому при pH2 раствора, когда на катоде выделяется больше водорода, чем при pH6 раствора, происходит эпитаксиальное нарастание пленки, т. е. растут участки пленки с ориентациями (110) $[\bar{1}12]$, (110) [100] и (110) [111].

Реальный рост осадков никеля при электролизе сопровождается адсорбцией на катоде, помимо водорода, различных примесей (анионов солей, молекул гидроксидов, ПАВ и др.). Примеси адсорбируются преимущественно по линиям скольжения [9]. Частично примеси (водород) включаются в растущий осадок, при этом межплоскостные расстояния увеличиваются [7]. На микрофотографиях тонких пленок такие участки имеют темный цвет (см. рис. 2, а). В результате десорбции, происходящей более интенсивно при отделении пленки от подложки, концентрация водорода в пленке понижается, а его выход из кристаллической решетки, сопровождающийся релаксацией ближайших атомов в сторону образовавшихся вакансий, служит одной из основных причин уменьшения d_{111} ниже табличных значений. Поэтому на участках катода с ориентацией (110) $[\bar{1}12]$, на которых линии скольжения зерен меди параллельны направлению прокатки, в растущих кристаллитах пленок никеля наблюдается анизотропия межплоскостных расстояний d_{111} .

В ГЦК-решетке медной подложки плотноупакованные грани (111) ориентированы перпендикулярно к плоскости катода (рис. 3). При эпитаксиальном росте грани (111) пленок также ориентируются по нормали к плоскости катода. Однако, поскольку параметры кристаллических решеток меди (0,3615 нм) и никеля (0,3517 нм) различаются, то в результате их сопряжения на границе раздела двух металлов образуются дислокации несоответствия или дефекты упаковки (рис. 3, а) [7].

Известно [10], что при уменьшении кислотности электролита от pH2 до pH6 на поверхности катода образуется коллоидная пленка, состоящая из адсорбированных частиц гидроксидов $\text{Ni}(\text{OH})_2$. В ней имеются области как с меньшей, так и большей плотностью адсорбированных частиц примесей. В тех местах медной подложки, где меньшая плотность адсорбированных частиц примесей (рис. 3, б, участок I), идет эпитаксиальный рост кристаллитов никеля и в переходных слоях «пленка–подложка» формируются грани (111) с увеличенным межатомным расстоянием. В других участках катода, где большая степень блокировки мест роста, эпитаксиальный рост кристаллитов никеля нарушается и формируются грани (111) с плотнейшей упаковкой атомов (рис. 3, б, участок II). На границе между такими участками в результате сопряжения деформированной и недеформированной граней (111) может произойти двойникование [7]. Из последнего следует, что наиболее вероятно двойники образуются в пленках на участках, растущих на зернах подложки с ориентацией (110) $[\bar{1}12]$, так как эти участки имеют анизотропию включенных примесей

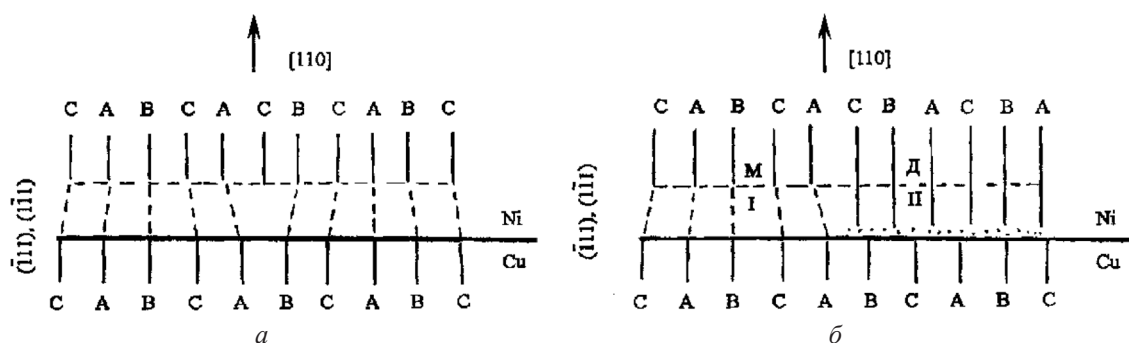


Рис. 3. Схема образования ДУ (а) и микродвойников (б) в эпитаксиальных слоях пленок никеля на медных подложках с текстурой [110] (М – матрица, Д – двойник)

и анизотропию величины межплоскостных расстояний в кристаллической решетке. На других участках пленок примеси распределены более равномерно, что приводит к меньшей степени деформации кристаллической решетки и меньшей вероятности образования двойников.

При $\text{pH} > 6$ или добавления ПАВ в раствор адсорбция примесей на катоде и их включение в кристаллиты растет, резкие границы между участками с различной степенью блокировки мест роста исчезают и вероятность образования двойников уменьшается [11].

При увеличении плотности тока осаждения скорость роста кристаллитов превышает скорость пассивации, и адсорбция примесей на катоде меньше влияет на процессы двойникования в переходных слоях «подложка–пленка». Если же на катоде меньше адсорбируется частиц примесей и меньше их включается в кристаллиты ($\text{pH} = 2$ и без добавления в электролит ПАВ), то в переходных слоях пленок никеля на меди образуются преимущественно дефекты упаковки (см. рис. 3, а) [11].

Таким образом, проведенное исследование позволяет утверждать, что формирование структуры эпитаксиальных пленок существенно зависит от ориентации зерен подложки и степени адсорбции примесей на них. Установлено, что наиболее интенсивно образуются двойники, а следовательно, наиболее быстро растут пленки [11] на зернах медной подложки, в которых плоскости скольжения (111) составляют наименьшие углы с направлением прокатки (см. табл. 1).

Литература

1. Ильющенко Л. Ф., Шелег М. У., Болтушкин А. В. Электролитически осажденные магнитные пленки. Минск, 1979.
2. Созин Ю. И. // ФММ. 1959. № 8. С. 240–248.
3. Созин Ю. И. // ФММ. 1960. № 9. С. 892–896.
4. Горелик С. С., Расторгуев Л. Н., Скаков Ю. А. Рентгенографический и электроннографический анализ металлов. М., 1970.
5. Точицкий Т. А., Болтушкин А. В. // Поверхность. 1991. № 12. С. 119–123.
6. Хирт Дж., Лоте И. Теория дислокаций. М., 1972.
7. Точицкий Т. А., Федосюк В. М. Электролитически осажденные пленки и наноструктуры. Минск, 2011.
8. Ваграмян А. Т., Соловьева З. А. Методы исследования электроосаждения металлов. М., 1960.
9. Бернштейн М. Л., Заимовский В. А. Механические свойства металлов. М., 1979.
10. Поветкин В. В., Ковенский Н. М., Устиновиков Ю. И. Структура и свойства электролитических сплавов. М., 1992.
11. Точицкий Т. А., Федосюк В. М. Двойникование в наноструктурных пленках и нанопроволоках. Минск, 2009.

T. A. TOCHITSKII, A. E. DMITRIEVA

COPPER SUBSTRATE INFLUENCE ON THE STRUCTURE FORMATION OF THIN ELECTROLYTIC NICKEL FILMS

Summary

The influence of differently focused grains of a copper substrate and the condition of their surface on the growth of thin electrolytic nickel films is investigated.

УДК 535.8

С. С. АНУФРИК, А. П. ВОЛОДЕНКОВ, К. Ф. ЗНОСКО

ОПТИМИЗАЦИЯ ГЕНЕРАЦИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК МАКЕТА ХеСІ-ЛАЗЕРА ДЛЯ АБЛЯЦИОННОЙ ОБРАБОТКИ ЗУБНОЙ ТКАНИ

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы

(Поступила в редакцию 06.06.2014)

Введение. Пионерские исследования по лазерной абляции были впервые выполнены 50 лет назад группой исследователей в Институте физики АН БССР под руководством М. А. Ельяшевича [1].

Интерес к применению лазеров для абляционного воздействия в стоматологии возник после исследований, показавших, что облучение поверхности зубов излучением рубинового лазера улучшало их поверхностные свойства [2, 3].

В работе [4] эксимерные лазеры впервые были применены в стоматологии. Для лечения зубных корневых каналов использовалось излучение ХеСІ-лазера. В работе [5] АгF-лазеры применялись для улучшения адгезии материалов пломб к зубной поверхности. В работе [6] изучалась абляция зубной эмали под действием излучения АгF-лазера. Была исследована глубина кратера в зависимости от плотности энергии на поверхности эмали. Длительность импульса по полувысоте составляла 20 нс при энергии импульса от 300 до 600 мДж. При взаимодействии луча эксимерного лазера с молекулами мишени энергия фотонов оказывается достаточной или даже превышает внутреннюю энергию ковалентных связей между отдельными атомами, что ведет к разрыву этих связей, распаду молекул на отдельные фрагменты и взрывообразному, со сверхзвуковыми скоростями, извержению этих фрагментов с образованием абляционного кратера. При энергии ковалентных связей выше 3–5 эВ к фрагментации молекулы могут приводить и двухфотонные процессы. В любом случае фрагменты в виде газового облака извергаются из объекта с настолько высокой скоростью, что большая часть заключенной в них тепловой энергии не успевает передаваться на стенки образующегося кратера, которые поэтому разогреваются лишь незначительно. Таковы были представления начала 1980-х гг. о механизме данного вида абляции, который называют абляционным фотораспадом. Дальнейшие исследования подтвердили и расширили их.

Тепловые характеристики дентина человеческого зуба и абляция при воздействии ХеСІ-лазера представлены в работе [7]. Было проведено исследование влияния дозы облучения и частоты повторения импульсов на процесс абляции и температуру зоны облучения, обнаружена гибель 99,9 % бактерий при длительности облучения 100 мс (частота 100 Гц) при использовании ХеСІ-лазера и указано на перспективность этой методики для подготовки ротовой полости к стоматологическим операциям [8]. По данным работы [9] при использовании ХеСІ-лазеров с плотностью энергии 5 Дж/см² и с длительностью импульса 60 нс получают кратеры глубиной ~60 мкм при облучении 800 импульсами. Порог абляции эмали зуба составляет ~2 Дж/см². Обнаружено, что при плотности энергии 1 Дж/см² происходит эффективное удаление зубного камня, но при этом не наступает абляция эмали зуба. Представляется целесообразным выполнить исследования по абляционному воздействию излучения ХеСІ-лазера на зубную эмаль и зубной камень при использовании более коротких длительностей импульса ~7,5 нс.

Экспериментальная установка. Исследования выполнялись с помощью эксимерного лазера, система возбуждения которого представлена на рис. 1, а.

Система возбуждения, представляющая собой LC-контур, содержит накопительную емкость $C1$ и последовательно включенную с ней через индуктивность $L1$ обострительную емкость $C0$ (см. рис. 1). Так как $C1$ перезаряжается на $C0$ через коммутатор, который обладает активным сопротивлением, сравнимым с сопротивлением плазмы в межэлектродном промежутке, то на нем теряется значительная часть энергии, запасенной в $C1$. Следовательно, одним из путей увеличения эффективности и выходной энергии генерации является уменьшение потерь на коммутаторе. Возможны следующие характерные режимы работы LC-контура

1. При малых величинах обострительной емкости $C0$ ее основная функция состоит в формировании объемного разряда. Она заряжается от накопительной емкости $C1$ до напряжения порядка двойного зарядного, а LC-контур затем быстро разряжается на межэлектродный промежуток. При столь высоком перенапряжении и крутом фронте импульса возбуждения формируется однородный объемный разряд. Сама обострительная емкость $C0$ разряжается на стадии пробоя, когда сопротивление разрядной плазмы достаточно высоко. Основной энергосклад в разряд в этом случае осуществляется от накопительной емкости $C1$.

2. При увеличении обострительной емкости $C0$ (при одновременном увеличении $L1$) ее роль изменяется. Наряду с формированием разряда она осуществляет и энергосклад в разряд, причем ее вклад сравним с энергоскладом от $C1$.

3. При величине обострительной емкости $C0$ одного порядка с накопительной $C1$, возможен режим работы с полной перезарядкой. В этом случае вся энергия, запасенная в $C1$, переходит в обострительную емкость $C0$, причем именно в таком режиме обеспечивается, как правило, максимальный КПД лазера.

Излучатель представлял собой фторопластовую разрядную камеру, внутри которой располагались профилированный цельнометаллический анод (2), сетчатый катод (1) и электрод предъюстизации (3).

Основной разрядный объем составлял $30 \times 2 \times 1$ см³ (ширина разряда 1 см). На торцах разрядной камеры располагались фланцы, на которых были закреплены кварцевые подложки под некоторым углом к оптической оси резонатора.

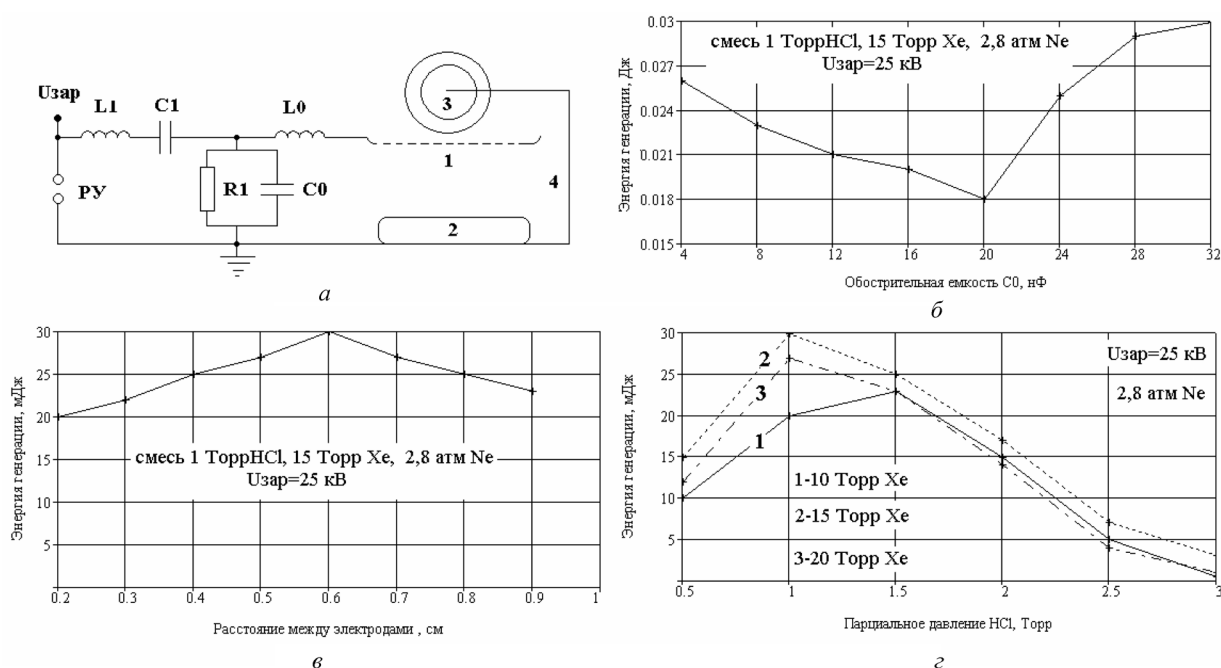


Рис. 1. Эквивалентная электрическая схема возбуждения лазера (а); зависимость энергии генерации от величины обострительной емкости $C0$ (б); зависимость энергии генерации от расстояния между электродами 1 и 3 (в); зависимость энергии генерации от парциального давления HCl (г)

Резонатор лазера был образован плоским зеркалом с Al-покрытием и плоскопараллельной кварцевой пластиной.

Емкость C_1 представляла собой конденсатор типа КМЧ-50-0,1. Он имел емкость 100 нФ и максимальную величину зарядного напряжения 50 кВ. Емкость C_0 набиралась из конденсаторов КВИ-2 (470 пФ), которые располагались с двух сторон непосредственно на разрядной камере (вдоль нее) для достижения минимальной индуктивности разрядного контура. Таким образом, емкость C_0 была набрана из 68 конденсаторов и ее величина составила 32 нФ. Конструкция системы возбуждения предусматривает возможность изменения величины емкостей C_1 и C_0 в ходе экспериментов по оптимизации. Электрод предыонизации (3) соединен с заземленным основным электродом (2) при помощи высоковольтного кабеля (4). Такое соединение и расположение электродов обусловлено применением положительного зарядного напряжения. Предыонизация активной среды в межэлектродном промежутке осуществлялась излучением разряда между электродами 1 и 3 при подаче импульса высокого напряжения на основные электроды 1 и 2. Такое расположение системы предыонизации позволило максимально приблизить источник ионизирующего излучения к зоне основного разряда и достичь однородного распределения начальных электронов в межэлектродном промежутке. Диэлектрик на электроде предыонизации представлял собой кварцевую трубку с толщиной стенок ~ 1 мм. Отличительной особенностью предыонизации являлось то, что емкостной разряд зажигался на большой площади $\sim (30 \times 2)$ см². Этим компенсировалась меньшая по сравнению с сильноточной искрой интенсивность ионизирующего излучения. Рабочая поверхность электрода предыонизации находилась на расстоянии 5 мм от поверхности основного сетчатого электрода, причем это расстояние могло изменяться.

Для измерения формы импульса излучения использовался коаксиальный фотоэлемент ФЭК22-СПУ, сигнал с которого подавался на осциллограф БЛОР-04. Для измерения энергии излучения применялся прибор типа ИМО-2Н, для регистрации спектра излучения – спектрограф MS2001I фирмы «СОЛАР ТИИ» с ПЗС-детектором, сигнал с которого обрабатывался компьютером.

Оптимизация генерационных характеристик лазера. Были использованы следующие параметры системы возбуждения: накопительная емкость $C_1=100$ нФ. В результате оптимизации

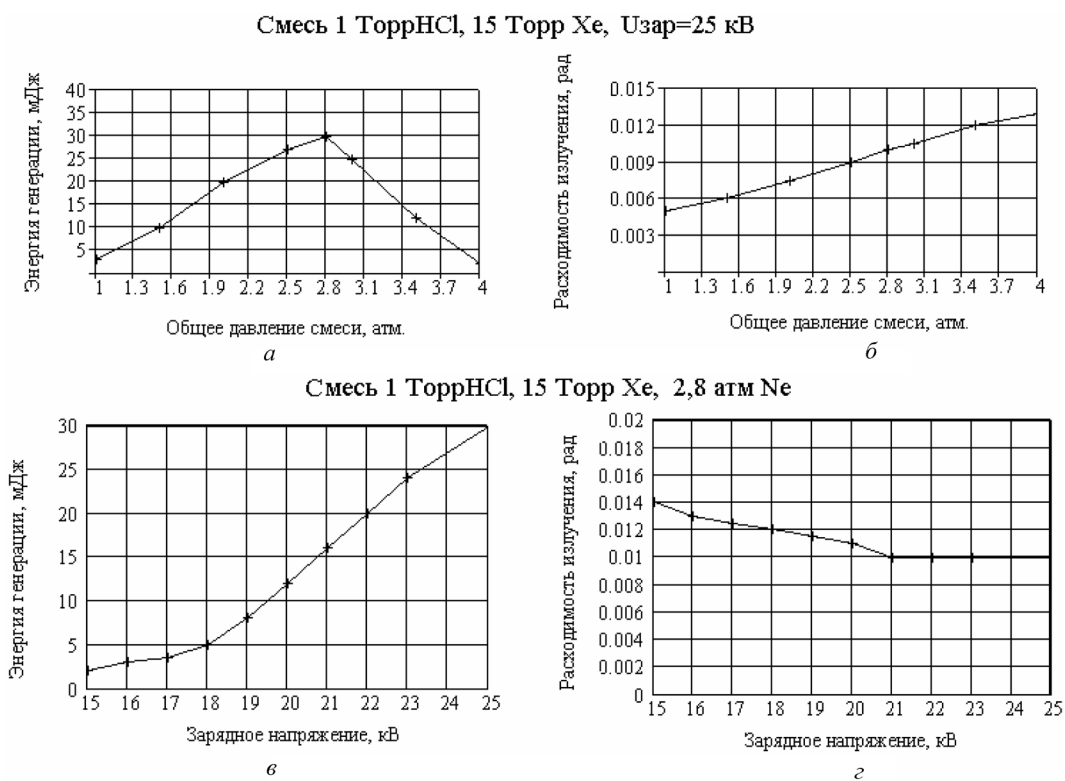


Рис. 2. Зависимость энергии генерации (а) и расходимости излучения (б) от общего давления смеси; зависимость энергии генерации (в) и расходимости излучения (г) от величины зарядного напряжения

установлено, что наибольшая величина энергии генерации 30 мДж достигается при величине обострительной емкости $C0 = 32$ нФ (рис. 1, б) и расстоянии между электродами 1 и 3 равным 0,6 см. Оптимизировано расстояние между электродом предыонизации и основным электродом. На рис. 1, в представлена зависимость энергии от величины расстояния между электродом предыонизации и основным электродом.

Была произведена также оптимизация состава и общего давления лазерной смеси при использовании в качестве буферного газа гелия и неона. На рис. 1, г показана зависимость энергии генерации от величины парциального давления HCl.

На рис. 2, а представлена зависимость энергии генерации от общего давления смеси; на рис. 2, б – зависимость расходимости от величины общего давления смеси.

Возрастание расходимости лазерного излучения с ростом давления активной среды связано с тем, что разряд становится более неоднородным. Согласно работе [10], для достижения однородности плазменного столба разряда необходимо, чтобы начальная концентрация электронов n_0 превышала критическое значение, определяемое соотношением

$$n_0 \geq n_0^{кр} = \left[\frac{4D_e}{\nu} \ln \left(\frac{kT_e}{4e^2 \sqrt[3]{n_0}} \right) \right]^{-3/2}, \quad (1)$$

где D_e – коэффициент диффузии электронов; ν – эффективная частота ионизации; e – заряд электрона, T_e – электронная температура; k – постоянная Больцмана. На рис. 2, в показана зависимость энергии от величины зарядного напряжения, а на рис. 2, г – зависимость расходимости от величины зарядного напряжения. Из представленных зависимостей следует, что при снижении зарядного напряжения расходимость излучения возрастает. Это связано с тем, что разряд становится более неоднородным.

В оптимальной смеси с буферным газом Ne (1 Торр HCl, 15 Торр Хе и 2,4 атм Ne) была получена энергии импульса $E = 15$ мДж при длительности 10 нс ($\tau = 5$ нс по полувысоте). При использовании оптимальной смеси на основе Ne (1 Торр HCl, 15 Торр Хе и 2,8 атм Ne) энергия генерации составила $E = 30$ мДж при длительности 15 нс ($\tau = 7,5$ нс по полувысоте). Применение фокусирующей линзы с фокусным расстоянием 10 см позволило получить пятно генерации диаметром ~ 1 мм.

Максимальная плотность энергии сфокусированного излучения равнялась 3,8 Дж/см², при этом максимальная плотность мощности составляла 500 МВт/см².

Результаты экспериментальных исследований по абляции зубной ткани. Энергия импульса лазерного излучения в процессе экспериментов изменялась с помощью специальной диафрагмы, которая позволяла регулировать световой поток, падающий на фокусирующую линзу с фокусным расстоянием 10 см. Образцы зубной ткани облучались при использовании частоты повторения импульсов 1 Гц серией из 1000 импульсов. На рис. 3, а представлена зависимость глубины кратера от плотности энергии после 1000 импульсов.

Из этих данных следует, что зависимость носит пороговый характер и при плотности энергии меньшей 0,3 Дж/см² процесс образования кратеров не наблюдается. Отметим, что получаются достаточно гладкие кратеры без следов обугливания (карбонизации), что указывает на то, что они образуются по абляционному механизму. Это согласуется также с данными работы [11], в которой использовался эксимерный ArF-лазер. Следует отметить, что при плотности энергии ниже пороговой образование кратеров не происходит, но при этом изменяется вид поверхности эмали: она становится более гладкой и блестящей, как это видно по участкам вокруг кратера (рис. 4, а).

Следует отметить, что определяющим фактором для глубины кратера является плотность мощности (на рис. 3, б представлена зависимость глубины кратера от плотности мощности лазерного излучения после 1000 импульсов).

При использовании ХеCl-лазеров с плотностью энергии 5 Дж/см², но с длительностью импульса 60 нс по полувысоте возникают кратеры глубиной ~ 60 мкм [9] при облучении 800 импульсами. Результаты, изложенные в работе [6] при использовании ArF-лазера с сопоставимой плотностью мощности, примерно совпадают с нашими данными.

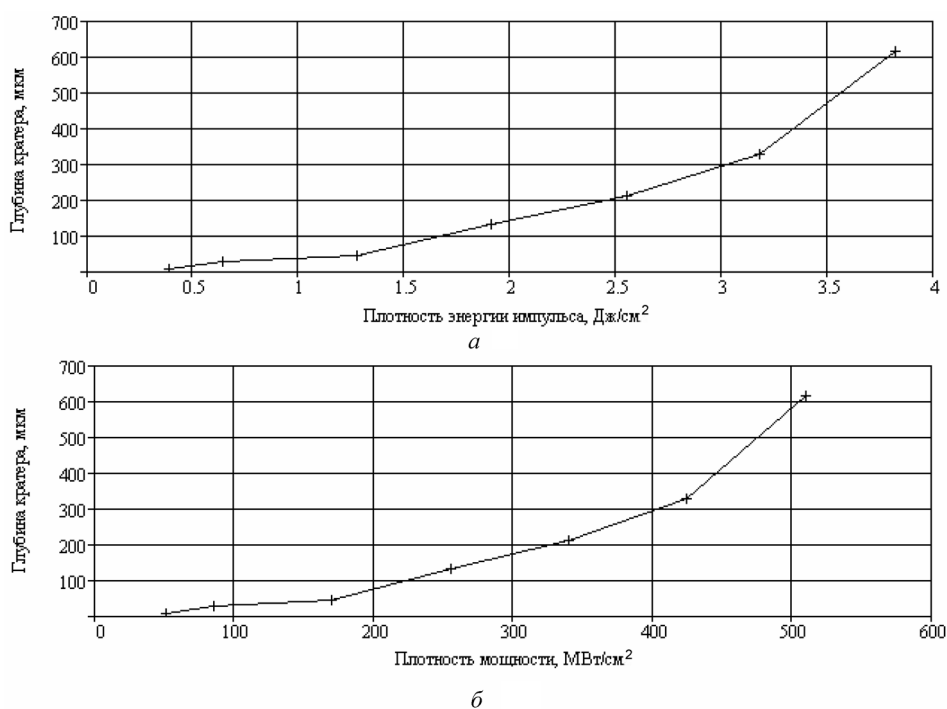


Рис. 3. Зависимость глубины кратера от плотности энергии (а) и плотности мощности (б) после 1000 импульсов облучения

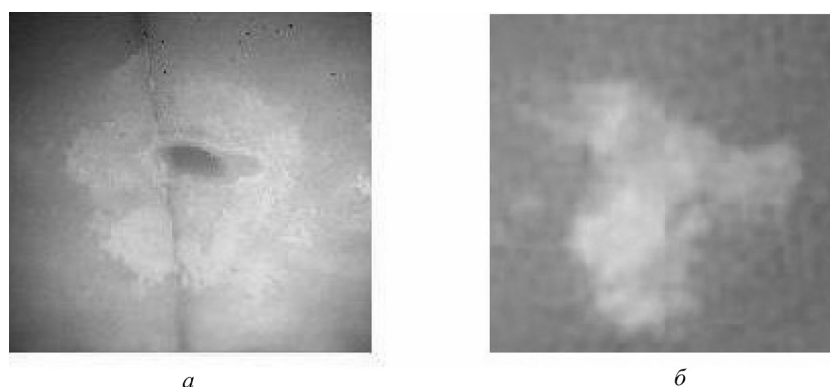


Рис. 4. Фотография поверхности эмали, полученная при помощи микроскопа

По данным работы [9] при применении ХеСl-лазеров с длительностью импульса 60 нс по плавывсоте порог абляции эмали зуба составляет ~ 2 Дж/см² и обнаружено, что при плотности энергии 1 Дж/см² происходит эффективное удаление зубного камня, но при этом не наступает абляция эмали зуба.

В нашем случае при применении ХеСl-лазеров с длительностью импульса 7,5 нс порог абляции эмали зуба составляет $\sim 0,3$ Дж/см² и обнаружено, что при плотности энергии большей 0,15 Дж/см² происходит эффективное удаление зубного камня, но при этом не наступает абляция эмали зуба. Поэтому излучение ХеСl-лазера может быть использовано для удаления зубного камня с поверхности зубов без повреждения эмали. На рис. 4, б представлена поверхность зубной эмали, с участка которой удален зубной камень.

Отличие порогов абляции по плотности энергии, полученных в данной работе, $\sim 0,3$ Дж/см² и в [9] – 2 Дж/см², связано с тем, что импульсы генерации имеют различную длительность (в данной работе она в 8 раз меньше). Поэтому порог абляции по плотности мощности, который получен в нашей работе, составляет 40 МВт/см², а в [9] – 33 МВт/см², т. е. пороги совпадают с точностью до $\sim 20\%$.

Заключение. Создан макет электроразрядного ХеСl-лазера для абляционной обработки биологических тканей. Макет лазера отличается простотой конструкции. Исследованы и оптимизированы его генерационные характеристики, изучена зависимость величины энергии генерации от величины обострительной емкости, от расстояния между основным электродом и электродом предыонизации, от состава и общего давления смеси.

При использовании оптимальной смеси 1 Торр НСl, 15 Торр Хе, 2,8 атм Не и зарядного напряжения 25 кВ была получена энергия импульса $E = 30$ мДж при длительности импульса 7,5 нс по полувысоте.

Максимальная плотность энергии сфокусированного излучения равнялась 3,8 Дж/см². Максимальная плотность мощности сфокусированного излучения составляла 500 МВт/см².

Была проведена обработка зубной эмали УФ-излучением (308 нм) и определена зависимость величины абляции от плотности пиковой мощности излучения лазера при фиксированном числе облучающих импульсов (1000). Установлено, что порог абляции эмали зуба составляет ~ 0,3 Дж/см² и обнаружено, что при плотности энергии большей 0,15 Дж/см² происходит эффективное удаление зубного камня, но при этом не наступает абляция эмали зуба.

Литература

1. Ельяшевич М. А. Разрушение металлов под действием излучения оптического квантового генератора // Отчет Ин-та физики АН БССР. 1963. № КЭ-14.
2. Goldman L., Hornby P., Meyer R., Goldman B. // Nature. 1964. Vol. 203. P. 417.
3. Stern R. H., Sognaes R. F. // J. Dent. Res. 1964. Vol. 43. P. 873–876.
4. Pini R., Salimben R., Vannini M. // Lasers. Surg. Med. 1989. Vol. 9. P. 358–361.
5. Frentzen M., Koort H. J. // Dtsch. Zahnarzt. Z. 1989. Vol. 44, N 6. P. 454–457.
6. Feuerstein O., Palanker D., Fuxbrunner O. // Lasers Surg. Med. 1992. Vol. 12 (5). P. 471–477.
7. Neev J., Stabholtz A., Liaw L. H. // Lasers Surg. Med. 1993. Vol. 13, N 3. P. 353–362.
8. Folwaczny M., Liesenhoff T., Lehn N. Horch H. // J. of endodontics. 1998. Vol. 24, N 12. P. 781–785.
9. Folwaczny M., A. Mehl A, Haffner C., Hickel R. // J. Clin. Periodontol. 1999. Vol. 26. P. 306–312.
10. Осунов В. В. // Успехи физ. наук. 2000. Т. 70, № 3. С. 225–245.
11. Tomohiro Ishida, Kenichi Tonami, Kouji Araki, Norimasa Kurosaki // J. Med. Dent. Sci. 2008. Vol. 55. P. 155–161.

S. S. ANUFRUK, A. P. VOLODENKOV, K. F. ZNOSKO

OPTIMIZATION OF GENERATION CHARACTERISTICS OF THE ХеСl LASER PROTOTYPE FOR ABLATION TREATMENT OF DENTAL TISSUE

Summary

The treatment of dental enamel by UV (308 nm) radiation is made and the dependence of the ablation value of the peak power density of laser radiation at a fixed number of pulses is determined. It is established that the ablation threshold of dental enamel is about 0.3 J/cm². It is found that at an energy density of more than 0.15 J/cm² dental calcium is removed without dental enamel ablation.

УДК 535.243+663.2

*Н. Ф. ДЕГТЯРЬ¹, Е. И. НЕЗАЛЬЗОВА¹, М. В. РОГОВАЯ², Г. В. СИНИЦЫН²,
Е. А. СКОРБАНОВА¹, М. А. ХОДАСЕВИЧ²*

**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДОВ СПЕКТРОСКОПИИ УФ-,
ВИДИМОГО И БЛИЖНЕГО ИК-ДИАПАЗОНОВ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ
ОРИГИНАЛЬНОСТИ ВЫДЕРЖАННЫХ ВИННЫХ ДИСТИЛЛЯТОВ**

*¹Научно-практический институт плодоводства, виноградарства и пищевых технологий
(Кишинев, Молдова)*

²Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси

(Поступила в редакцию 11.07.2014)

В настоящее время все большее количество потребителей проявляют заботу о своем здоровье и хотят покупать натуральные и аутентичные продукты питания. Согласно [1], аутентичность (подлинность) пищевой продукции – неотъемлемая составная часть качества пищевой продукции, определяемая совокупностью физико-химических и биологических показателей, абсолютные количественные значения и интервалы изменения которых обоснованы природными свойствами сырья и допустимым технологическим воздействием при получении готовых пищевых продуктов. Из предложенной в работе [2] классификации видов подлинности нас в первую очередь интересует аутентичность оригинальности, которая подчеркивает исторические истоки происхождения товара или бренда, использование технологий или сырья, специфичных для данного вида продукции и отличных от общепринятой практики товарного производства.

Достаточно остро проблема аутентичности оригинальности проявляется в производстве и контроле качества коньяков и бренди, производимых из выдержанных винных дистиллятов. Основными факторами, препятствующими их фальсификации и выпуску низкокачественной продукции, являются контроль возраста выдержки и географического происхождения дистиллятов и идентификация производителя коньяков или бренди.

В данной статье в качестве объектов исследования были выбраны выдержанные молдавские винные дистилляты, характеризующиеся более однородными физико-химическими параметрами по сравнению с кондиционными по качеству дивинами (молдавскими бренди), в процессе купажа которых проводится смешивание дистиллятов разного возраста, воды, сахарного сиропа и красителя (колера).

Для определения аутентичности оригинальности исследуемых объектов нами применялась спектроскопия УФ-, видимого и ближнего ИК-диапазонов с последующей хемометрической обработкой спектров пропускания.

Именно спектроскопия ближнего ИК-диапазона в последнее время стала широко внедряться в фармацевтическую [3], нефтехимическую [4], пищевую [5, 6] отрасли промышленности, биомедицину [7, 8] и т. д. не только из-за развитости аппаратных средств, простоты и экспрессного характера их использования, но и из-за повышения качества получаемых результатов вследствие применения хемометрических методов. Наиболее удачно, с нашей точки зрения, понятие «хемометрика» определено в работе [9] – это дисциплина, использующая математические, статистические и другие методы на основе формальной логики для построения или выбора оптимальных процедур или экспериментов, а также для достижения максимума релевантной информации при анализе экспериментальных данных. Именно с помощью хемометрики спектроскопия ближнего ИК-диапазона, ранее мало востребованная вследствие зашумленности спектров из-за интенсивного

поглощения воды и влияния рассеяния света [10], стала наравне конкурировать со спектроскопией среднего ИК-диапазона для определения физических и химических характеристик исследуемых объектов.

Единственными общепринятыми оптическими характеристиками коньяков на сегодняшний день являются оптические плотности на длинах волн 420 и 520 нм [11]. Однако наличие в винных дистиллятах веществ, обладающих сходными оптическими свойствами, не позволяет сделать объективный вывод о качестве и свойствах исследуемых образцов по спектрофотометрическим измерениям на малом количестве выделенных длин волн. Поэтому в настоящей работе мы применим хемометрический подход к зарегистрированным двухлучевым спектрофотометром Shimadzu PC 3101 широкополосным спектрам пропускания (190–2600 нм, шаг сканирования 0,5 нм в диапазоне 190–480 нм и 1 нм в диапазоне 480–2600 нм) репрезентативной выборки из 42 молдавских винных дистиллятов и оценим качество моделирования характеристик исследуемых объектов. После регистрации спектры сглаживались фильтром Савицкого – Голея 3-й степени по 9 соседним отсчетам.

Таким образом, каждый исследуемый образец характеризуется 2698 спектральными отсчетами или переменными, т. е. он может быть представлен уникальной точкой в 2698-мерном пространстве. Для декомпозиции многомерного пространства нами применялся метод главных компонент (англ. principal component (PC) analysis, PCA) с предварительным центрированием данных (приведение средней величины отсчетов на каждой длине волны к нулевому значению) или автошкалированием (комбинация центрирования и нормирования на каждой длине волны на стандартное отклонение по выборке), которое уравнивает вклад разных переменных в рассматриваемую модель. PCA [12] последовательно выбирает направления PC в многомерном пространстве отсчетов, которым присуща максимальная дисперсия исходных данных. Для определения правильного числа PC был применен анализ зависимости объясненной дисперсии матрицы данных от числа PC. Установлено, что объясненная четырьмя главными компонентами дисперсия составляет 92,1 и 98,9 % для автошкалирования и центрирования соответственно.

Одним из признаков аутентичности коньяка или бренди является идентификация предприятия-производителя дистиллятов. Именно этот признак отражен в символах объектов на рис. 1. На нем не изображены дистилляты производителей, которые представлены в исследуемой выборке единственным образцом, и прослеживается неполная кластеризация исследуемых дистиллятов. Предварительный анализ этого рисунка вызывает сомнения в достоверной классификации обозначенных квадратами дистиллятов только одного производителя. Для более аргументированного вывода проведем классификацию исследуемых объектов по их спектральным данным

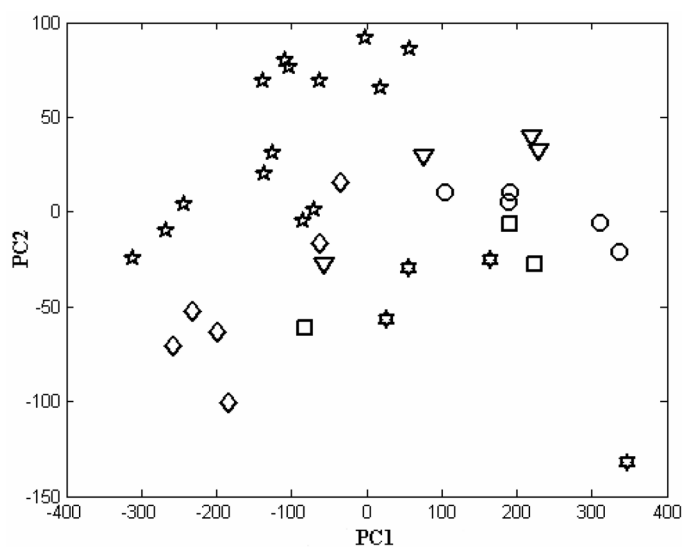


Рис. 1. График счетов молдавских винных дистиллятов возрастом от 4 до 7 лет в двумерном пространстве главных компонент

пониженной размерности с помощью двух видов обучения с учителем – дискриминантного анализа и классификационных деревьев. При этом для дискриминантного анализа будем применять счета двух главных компонент, для построения классификационного дерева – трех.

Линейный дискриминантный анализ (Linear Discriminant Analysis – LDA) [13], или (как еще его часто называют по имени создателя) дискриминантный анализ Фишера, предназначен для поиска линейной комбинации переменных, проекция на которую максимизирует отношение общей дисперсии выборки к сумме дисперсий внутри отдельных классов. В ряде случаев алгоритм LDA может успешно работать и с перекрывающимися классами. Перекрывание границ классов не играет большой роли, пока их центры находятся достаточно далеко друг от друга, чтобы дисперсия выборки и дисперсия классов существенно отличались друг от друга. Естественным обобщением LDA является квадратичный дискриминантный анализ (Quadratic Discriminant analysis – QDA), который использует для разделения классов параболы. Нами были применены LDA и QDA для парной классификации производителей дистиллятов в двумерном пространстве главных компонент (см. рис. 2, на котором представлены примеры правильной дискриминации обоими методами (а) и одним методом (б), а также неправильной дискриминации обоими методами (в)). Установлено, что попарная дискриминация 6 производителей осуществляется методами LDA и QDA для пар 1–3, 1–4, 2–4, 2–6, 3–5, 4–5 и 4–6. Не осуществляется линейная дискриминация для пар 1–2, 1–5, 1–6, 2–3 и 5–6, но для этих случаев действенным является метод QDA. И три пары производителей (2–5, 3–4 и 3–6) не дискриминируются ни LDA, ни QDA. Таким образом, с помощью дискриминантного анализа удается классифицировать 12 пар производителей молдавских винных дистиллятов из 15.

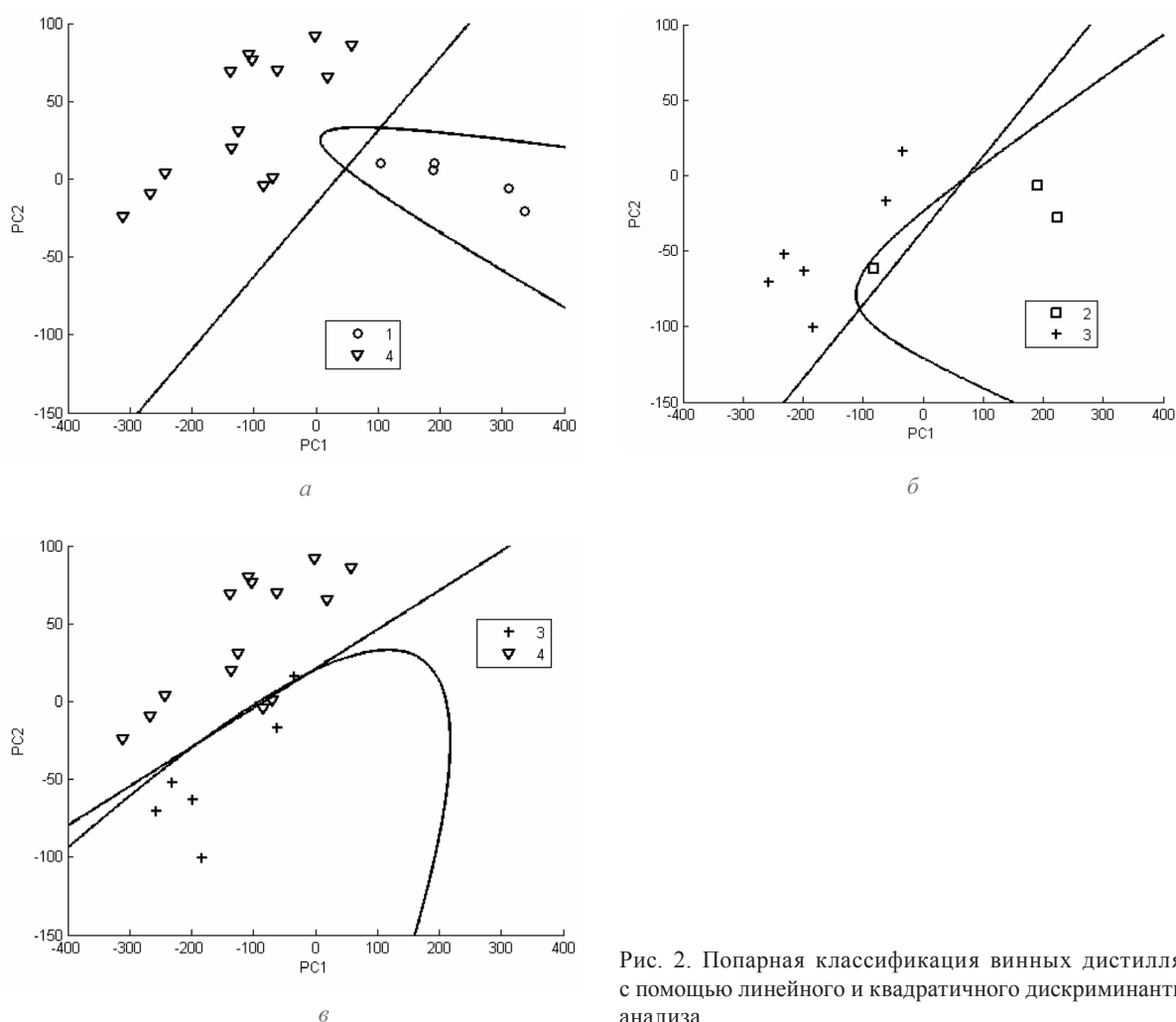


Рис. 2. Попарная классификация винных дистиллятов с помощью линейного и квадратичного дискриминантного анализа

Другим видом обучения с учителем является построение деревьев принятия решений (деревьев классификации или регрессионных деревьев, если прогнозируется количественный показатель) [14]. Деревья классификации представляют собой набор «листьев» и «веток» с бинарными правилами перехода. На «ветках» дерева решения записаны атрибуты, от которых зависит целевая функция, в «листьях» – значения целевой функции. Цель моделирования состоит в том, чтобы предсказать значение целевой переменной на основе нескольких переменных на входе. В нашем случае входными переменными являются три главные компоненты, определенные из спектров пропускания дистиллятов, а целевой переменной – условный номер завода-производителя. Остановка построения дерева классификации происходит в случае, когда каждый «лист» содержит уникальное значение целевой переменной. Наилучший результат построения дерева классификации был получен на основе трех главных компонент при использовании алгоритма, рассматривающего все возможные $2^{L-1}-1$ комбинации построения L -уровневого предиктора, и индекса разнообразия Джини – Симпсона $1 - \sum p_i^2$, где p_i – вероятность того, что дистиллят изготовлен i -м производителем. Величина PC3, меньшая $-0,504488$, определяет принадлежность дистиллята к производителям с номерами 4 или 5. При этом образец относится к производителю 5 при PC2 < $-13,2575$. Величина PC3, большая или равная $-0,504488$, определяет принадлежность дистиллята к производителям с номерами 1, 3 или 6. Среди этих образцов величина PC1 < $-132,251$ классифицирует дистиллят производителя номер 3. Оставшиеся образцы классифицируются величиной PC2. При PC2 < $20,0857$ дистиллят относится к производителю номер 1, в противном случае – к номеру 6. Построенное дерево классификации таким образом способно достоверно определить пять производителей дистиллятов из исследуемых шести.

Вторым признаком аутентичности оригинальности винного дистиллята является его возраст. С помощью метода главных компонент и двух рассмотренных видов классификации на его основе нам не удалось определить возраст дистиллятов исследуемой выборки. Применим для достижения этой цели однооткликтовую регрессию на латентные структуры (PLS1 – projection on latent structures) [15]. Отличие PLS1 от регрессии на главные компоненты состоит в том, что вместо поиска подпространства отсчетов с максимальной корреляцией между предикторами (спектральными отсчетами) и откликами (возраст дистиллятов) PLS1 строит линейную регрессионную модель с помощью одновременного проецирования предикторов и откликов в новое пространство так называемых латентных структур. PLS1 регрессия показывает великолепные результаты в случае, когда матрица отсчетов мультиколлинеарна (спектральные отсчеты на раз-

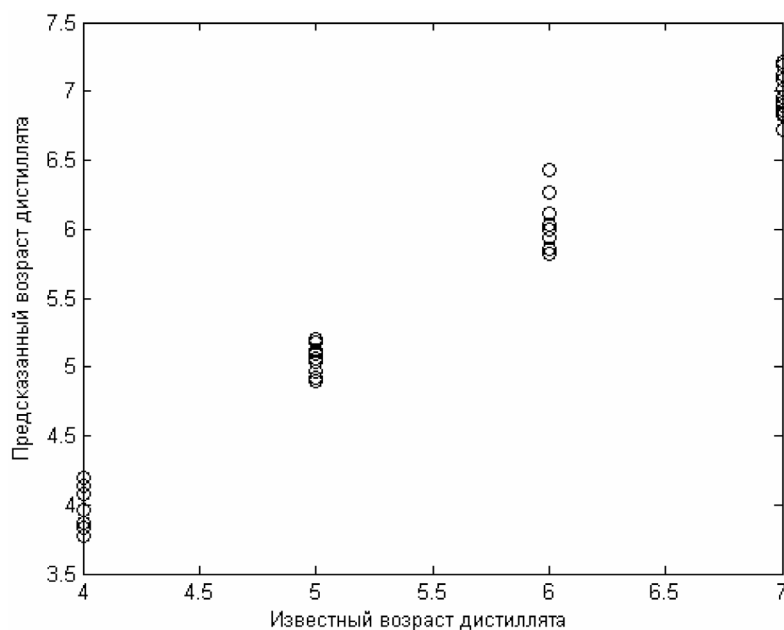


Рис. 3. Результаты применения регрессии на латентные структуры для определения возраста выдержанных винных дистиллятов

ных длинах волн коррелируют друг с другом) и количество образцов значительно уступает количеству спектральных отсчетов. Стандартные методы регрессии в этом случае неэффективны. Именно с таким случаем мы имеем дело. На рис. 3 представлены результаты применения PLS1, полученные для 21 латентной структуры при проведении кросс-валидации, в которой образцы исключались по одному из выборки объемом 42 дистиллята. Параметр регрессии R^2 , представляющий собой разность 1 и отношения суммы квадратов разностей предсказанной и известной величин к сумме квадратов разностей известной и средней величин, равен 0,9801. Видно, что с помощью PLS1 дискретный возраст винных дистиллятов определяется однозначно. Отклонения относительных предсказанных значений возраста от известных показали, что погрешность определения возраста не превышает 8 %.

Итак, применение хемометрических методов (метода главных компонент, дискриминантного анализа, построения деревьев классификации и регрессии на латентные структуры) к широкополосным спектрам пропускания винных дистиллятов позволило определить и производителя, и возраст объектов исследования. Таким образом, продемонстрирован один из возможных способов решения проблемы определения оригинальности выдержанных винных дистиллятов. Метод позволяет установить аутентичность изделий ликеро-водочной промышленности и может быть полезен при разработке средств борьбы с производством контрафактной продукции.

Часть результатов, изложенных в данной работе, была получена в рамках совместных проектов Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований № Ф13МЛД-011 и № 13.820.14.07/ВА Академии наук Молдовы.

Литература

1. Методы контроля, химические и микробиологические факторы. Оценка подлинности и выявление фальсификации молочной продукции: МУ 4.1/4.2.2484-09: утв. Гл. сан. врачом Рос. Федерации 11.02.2009. М., 2009.
2. Куселев В. М., Коркачева О. В., Ганиев П. М. // Ползуновский вестн. 2012. № 2/2. С. 44–48.
3. Blanco M., Peguero A. // Trends in Analytical Chemistry. 2010. Vol. 29. P. 1127–1136.
4. Gonzaga F. B., Pasquini C. // Analytica Chimica Acta. 2010. Vol. 670. P. 92–97.
5. Xie L. et al. // Food Chemistry. 2009. Vol. 114. P. 1135–1140.
6. Cozzolino D. et al. // Talanta. 2008. Vol. 74. P. 711–716.
7. Kasemsumran S. et al. // Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems. 2006. Vol. 82. P. 97–103.
8. Chuah Z. et al. // Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems. 2010. Vol. 104. P. 347–351.
9. Massart D. L. et al. Chemometrics: Data Handling in Science and Technology. Elsevier, 1988.
10. Blanco M., Villarroya I. // Trends in analytical chemistry. 2002. Vol. 21. P. 240–250.
11. Скурихин И. М. Химия коньяка и бренди. М., 2005.
12. Abdi H., Williams L. J. // Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Statistics. 2010. Vol. 2. P. 433–459.
13. Fisher R. A. // Annals of Eugenics. 1938. Vol. 8. P. 376–386.
14. Brown S. D., Myles A. J. // Comprehensive Chemometrics: Chemical and Biochemical Data Analysis. 2009. Vol. 3. P. 541–569.
15. Abdi H. // Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Statistics. 2010. Vol. 2. P. 97–106.

N. F. DEGTYAR, E. I. NEZALZOVA, M. V. ROGOVAYA, G. V. SINITSYN, E. A. SKORBANOVA, M. A. KHODASEVICH

IDENTIFICATION OF THE AUTHENTICITY OF MATURED WINE DISTILLATES BY THE UV-, VISIBLE AND NEAR IR-SPECTROSCOPY METHODS

Summary

Ultraviolet, visible and near infra-red spectroscopy is used for identification of the authenticity of matured wine distillates. The use of principal component analysis, the discriminant analysis, the classification trees and projection latent structures to broad-band transmission spectra of wine distillates allowed determining manufacturer and aging of wine distillates.

КАРОТКІЯ ПАВЕДАМЛЕННІ

УДК 511.42

А. Г. ГУСАКОВА

**НЕУЛУЧШАЕМОСТЬ ТЕОРЕМЫ ДИРИХЛЕ
О ПРИБЛИЖЕНИИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ РАЦИОНАЛЬНЫМИ**

Белорусский государственный университет

(Поступила в редакцию 30.03.2014)

Теория диофантовых приближений начинается с 1842 г. со следующей теоремы.

Т е о р е м а Дирихле [1]. Пусть α и $Q \geq 1$ – действительные числа. Тогда существуют целые числа p, q , удовлетворяющие неравенствам

$$|\alpha - p/q| < \frac{1}{qQ}, \quad 1 \leq q \leq Q. \quad (1)$$

В работе доказано, что теорема Дирихле о приближении действительных чисел рациональными не допускает принципиального улучшения. Для этого используется теорема Гурвица и новый подход, основанный на метрической теории диофантовых приближений.

Будем искать такое $c_1 > 0$, что про любом $\varepsilon > 0$, некотором $Q > Q_0(\varepsilon)$ и $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ выполняется неравенство

$$|\alpha - p/q| > \frac{c_1 - \varepsilon}{qQ}. \quad (2)$$

Т е о р е м а. Справедливы следующие утверждения:

Предложение 1. Если $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, то $c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Предложение 2. Существуют действительные числа $\alpha \in [0,1)$, для которых $c_1 = \frac{\pi^2}{12}$.

Предложение 3. В окрестности числа $\frac{1}{2}$ существуют действительные числа, для которых $c_1 = 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о предложения 1. Возьмем $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ и натуральное q , при котором верно неравенство

$$|\gamma_1 - p/q| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2},$$

где $\gamma_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Положим $Q = q$. Иррациональные числа $\gamma_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ и $\gamma_2 = \frac{-\sqrt{5}-1}{2}$ являются сопряженными корнями квадратного трехчлена $P_2(x) = x^2 + x - 1$. Так как $P_2(x) = (x - \gamma_1)(x - \gamma_2)$ и $P_2(x)$ не имеет рациональных корней, то для любого рационального числа p/q выполняются неравенства $P_2(p/q) \neq 0$ и $|q^2 P_2(p/q)| \geq 1$. Если $|\gamma_1 - p/q| > \varepsilon$, то неравенство (2) справедливо при любом $Q > Q_0(\varepsilon)$. Поэтому остается рассмотреть случай $|\gamma_1 - p/q| < \varepsilon$, в котором $|p/q| < \gamma_1 + \varepsilon$.

Заметим, что $\gamma_1 - \gamma_2 = \sqrt{D(P_2)} = \sqrt{5}$. Тогда из неравенств

$$\begin{aligned} 1 &\leq q^2 |\gamma_1 - p/q| |\gamma_2 - p/q| < q^2 (|\gamma_2| + \gamma_1 + \varepsilon) |\gamma_1 - p/q| = \\ &= q^2 (-\gamma_2 + \gamma_1 + \varepsilon) |\gamma_1 - p/q| = q^2 (\sqrt{5} + \varepsilon) |\gamma_1 - p/q| \end{aligned}$$

следует

$$|\gamma_1 - p/q| > \frac{1}{q^2(\sqrt{5} + \varepsilon)} = \frac{1}{qQ(\sqrt{5} + \varepsilon)} > \frac{1/\sqrt{5} - \varepsilon}{qQ}.$$

Доказательство предложения 2. Для доказательства нам понадобятся две леммы.

Лемма 1 (преобразование Абеля). *Справедливо равенство*

$$\sum_{n=1}^N a_n b_n = \sum_{n=1}^{N-1} (b_n - b_{n+1}) A_n + b_N A_N, \quad (3)$$

где $A_n = a_1 + \dots + a_n$.

Для доказательства леммы 1 достаточно раскрыть скобки в правой части равенства (3) и привести подобные члены.

Лемма 2. Пусть $\varphi(n)$ – функция Эйлера натурального числа n . Тогда

$$\sum_{n=1}^N \varphi(n) = \frac{3}{\pi^2} N^2 + o(N \ln N).$$

Лемма 2 доказана в [3].

Обозначим через $A(c_3, Q)$ множество точек интервала $[0, 1)$, для которых при $0 \leq p \leq q$ выполняется неравенство

$$|x - p/q| < \frac{c_3}{qQ}, \quad 1 \leq q \leq Q. \quad (4)$$

Если зафиксировать p и q , то подмножество $A(p, q) \in A(c_3, Q)$ представляет собой интервал с центром в точке p/q длины $|A(p, q)| = \frac{2c_3}{qQ}$. В случае, когда p и q имеют общий делитель α , очевидно, что $A(p, q) \subset A\left(\frac{p}{\alpha}, \frac{q}{\alpha}\right)$. Это означает, что множество $A(c_3, Q)$ останется неизменным,

если в неравенстве (4) рассматривать p и q с условием $(p, q) = 1$.

Обозначим

$$A(q) = \bigcup_{\substack{1 \leq p \leq q \\ (p, q) = 1}} A(p, q)$$

и оценим меру $A(q)$. Имеем

$$\mu A(q) \leq \sum_{\substack{1 \leq p \leq q \\ (p, q) = 1}} \mu A(p, q) = \frac{2c_3}{Q} \sum_{(p, q) = 1} q^{-1} = \frac{2c_3}{Q} \frac{\varphi(q)}{q}, \quad (5)$$

где $\varphi(q)$ – функция Эйлера. Обозначим $T(Q) = \sum_{q=1}^Q \varphi(q) q^{-1}$, применим к сумме преобразование Абеля и проведем оценки, используя лемму 2:

$$\begin{aligned} T(Q) &= \sum_{q=1}^Q \varphi(q) q^{-1} = \sum_{q=1}^{Q-1} \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{q+1} \right) \sum_{l=1}^q \varphi(l) + Q^{-1} \sum_{l=1}^Q \varphi(l) = \\ &= \sum_{q=1}^{Q-1} \frac{1}{q(q+1)} \left(\frac{3}{\pi^2} q^2 + o(q \ln q) \right) + Q^{-1} \left(\frac{3}{\pi^2} Q^2 + o(Q \ln Q) \right) \leq \\ &\leq \sum_{q=1}^{Q-1} \frac{3}{\pi^2} \left(1 - \frac{1}{q+1} \right) + \frac{3}{\pi^2} Q + o(\ln^2 Q) \leq \frac{6}{\pi^2} Q + o(\ln^2 Q). \end{aligned} \quad (6)$$

С учетом (5) и (6) получим

$$\mu A(c_3, Q) \leq \sum_{q=1}^Q \mu A(q) \leq \frac{12c_3}{\pi^2} + o\left(\frac{\ln^2 Q}{Q}\right) = \frac{12c_3}{\pi^2} + \varepsilon_2$$

для любого ε_2 и $Q > Q_0(\varepsilon_2)$.

Сейчас выберем c_3 таким, чтобы выполнялось неравенство $\frac{12c_3}{\pi^2} + \varepsilon_2 < 1$. Получаем оценку $c_3 < \frac{(1-\varepsilon_2)\pi^2}{12}$. Для таких c_3 мера множества $[0, 1) \setminus A(c_3, Q)$ положительна. Это означает, что существуют точки $\alpha \in [0, 1)$, для которых при $c_1 = \frac{\pi^2}{12}$ выполняется неравенство (2).

Д о к а з а т е л ь с т в о предложения 3. Докажем сейчас, что при любом $\varepsilon_3 > 0$ и достаточно большом $Q > Q_0(\varepsilon_3)$ всегда найдется точка $\alpha = 1/2 + \delta$ такая, что неравенство

$$|\alpha - p/q| > \frac{1-\varepsilon_3}{qQ} \quad (7)$$

выполняется для всех $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, $1 \leq q \leq Q$. При $\delta = \frac{1-\varepsilon_4}{2Q}$ верно неравенство

$$|\alpha - 1/2| = \frac{1-\varepsilon_4}{2Q} > \frac{1-\varepsilon_3}{2Q}$$

для $\varepsilon_4 = \varepsilon_3/2$ и (7) выполняется. Возьмем произвольное рациональное число $p/q \neq 1/2$, $1 \leq q \leq Q$. Тогда имеем неравенство

$$0 \neq \left| \frac{1}{2} - p/q \right| = \left| \frac{q-2p}{2p} \right| \geq \frac{1}{2q}. \quad (8)$$

Для $p/q > \frac{1}{2}$ пусть выполняется неравенство

$$|\alpha - p/q| < \frac{1-\varepsilon_3}{qQ}. \quad (9)$$

Тогда из (8) и

$$|\alpha - p/q| = \left| \frac{1}{2} + \frac{1-\varepsilon_4}{2Q} - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{2q} - \frac{1-\varepsilon_4}{2Q}$$

получим неравенство

$$\frac{1}{2q} - \frac{1-\varepsilon_4}{2Q} < \frac{1-\varepsilon_3}{qQ},$$

откуда

$$\frac{1-\varepsilon_3}{Q} + \frac{1-\varepsilon_4}{2} \frac{q}{Q} > \frac{1}{2};$$

$$1 - (1-\varepsilon_4) < \frac{2(1-\varepsilon_3)}{Q}.$$

Поэтому $Q < \frac{2(1-\varepsilon_3)}{\varepsilon_4}$. Если $Q > Q_0(\varepsilon_3) = \frac{2(1-\varepsilon_3)}{\varepsilon_4}$, то неравенство (9) противоречиво. Таким образом, $c_1 = 1$.

Литература

1. *Dirichlet L. G. P.* Verallgemeinerung eines Satzes aus der Lehre von den Kettenbrüchen nebst einigen Anwendungen auf die Theorie der Zahlen. S.-B. Preus. Akad. Wiss., 1842. P. 93–95.
2. *Bernik V. I., Dodson M. M.* Metric Diophantine approximation on manifolds. Cambridge Tracts in Mathematics, CUP, 1999. Vol. 137.
3. *Schmidt W. M.* Diophantine Approximation (Lecture Notes in Mathematics). Berlin, 1980.

A. G. GUSAKOVA

ABOUT UNIMPROVABLE OF DIRICHLET'S THEOREM ON THE APPROXIMATION OF REAL NUMBERS BY RATIONAL

Summary

It is proved that the Dirichlet's theorem on the approximation of real numbers by rational can not be improved.

ВУЧОНЫЯ БЕЛАРУСІ

ПАВЕЛ АНДРЕЕВИЧ АПАНАСЕВИЧ

(К 85-летию со дня рождения)



14 июля 2014 г. исполнилось 85 лет Павлу Андреевичу Апанасевичу, лауреату государственных премий СССР и БССР, заслуженному деятелю науки Республики Беларусь, академику НАН Беларуси, профессору, доктору физико-математических наук, почетному директору Института физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси, видному белорусскому ученому в области теории взаимодействия света с веществом, лазерной физики, нелинейной оптики и спектроскопии.

П. А. Апанасевич родился в деревне Староселье Докшицкого района Витебской области (в то время территория Польши) в многодетной крестьянской семье. Хотя учеба в школе, сначала польской, а затем белорусской, прерывалась Великой Отечественной войной, П. А. Апанасевич поступил и в 1954 г. с отличием окончил Белорусский государственный университет. В Белгосуниверситете он обращает на себя внимание Б. И. Степанова, который приглашает его к себе в аспирантуру (1954 г.) в создаваемый Институт физики и математики. Павел Андреевич становится аспирантом, а с 1957 г. – сотрудником Института, в 1958 г. успешно защищает кандидатскую диссертацию «Зависимость

свойств рассеяния и фотолуминесценции от спектрального состава облучающего света». С этим институтом (с 1959 г. – Институтом физики, а с 1988 г. Институту физики присвоено имя Б. И. Степанова) связана основная научная деятельность П. А. Апанасевича, где он прошел путь от аспиранта (1954–1957 гг.) до директора (1985–1998 гг.) и возглавлял лабораторию нелинейной спектроскопии (1968–1994 гг.).

Уже в первых аспирантских работах (1950-е гг.) П. А. Апанасевич под руководством Б. И. Степанова решил ряд принципиальных проблем теоретической спектроскопии. Была построена классификация вторичного свечения по элементарным актам его возникновения из первичного (падающего на среду) излучения и определены границы применимости вероятностного метода расчета поглощения и испускания света атомами и молекулами.

В период бурного развития лазерной физики с 1960-х гг. П. А. Апанасевич активно занимался разработкой основ современной теории взаимодействия мощных световых потоков с веществом и решением конкретных задач лазерной физики и нелинейной оптики. К решению этих задач он одним из первых применяет аппарат матрицы плотности, что позволяет ему выявить тонкие эффекты нелинейного взаимодействия света с веществом. В частности, в 1963 г. Павел Андреевич публикует результаты исследований спектров спонтанного испускания, возбуждаемого сильным монохроматическим излучением, впервые предсказывает расщепление резонансной линии на три компоненты. Шестью годами позже появляются аналогичные работы Б. Моллоу (B. Mollow), именем которого и назван этот эффект.

Активное развитие нелинейной лазерной физики расширяет круг рассматриваемых П. А. Апанасевичем задач. Проводятся исследования влияния мощного лазерного излучения на спектры поглощения атомов и молекул и процессы релаксации квантовых систем, механизмов нелинейного показателя преломления, развиваются теории вынужденного комбинационного рассеяния, четырехфотонного параметрического взаимодействия световых потоков и светоиндуцированной дифракции. Наряду с теоретическими в лаборатории П. А. Апанасевича широко проводятся и экспериментальные исследования, создаются лазеры с активной и пассивной синхронизацией мод, разрабатываются системы преобразования частоты лазерного излучения. Теоретические и экспериментальные исследования по вынужденному комбинационному рассеянию приводят к разработке ВКР-преобразователей частоты от инфракрасного до ультрафиолетового диапазонов с режимами работы от пикосекундного до квазистационарного. Создаются промышленные образцы приборов.

Результаты научной работы П. А. Апанасевича этого периода находят отражение в его докторской диссертации «Нелинейное взаимодействие лазерного излучения с молекулярными системами» (1974 г.) и монографии «Основы теории взаимодействия света с веществом» (1977 г.), а также в сотнях статей в журналах и сборниках, докладах на конференциях, кандидатских (22) и докторских (9) диссертациях, выполненных в его лаборатории. Следует отметить, что 9 научных сотрудников, подготовивших кандидатские диссертации под руководством Павла Андреевича, защитили затем докторские диссертации, один из них стал академиком и два – членами-корреспондентами НАН Беларуси.

За исследования «Спектрально-оптические свойства вещества в поле мощного лазерного излучения» П. А. Апанасевич удостоен Государственной премии БССР (1978 г.), а за работы, вошедшие в цикл «Физические основы динамической голографии и новые методы преобразования пространственной структуры световых пучков» присуждена Государственная премия СССР в области науки и техники (1982 г.), за цикл работ «Вынужденное комбинационное рассеяние: физические основы и приложения» – премия имени академика Б. И. Степанова Президиума НАН Беларуси.

Благодаря своим достижениям П. А. Апанасевич становится одним из ведущих специалистов СССР по нелинейной оптике и лазерной физике, входит в состав членов бюро Научного совета АН СССР по проблеме «Когерентная и нелинейная оптика» (1965–1991 гг.), избирается членом-корреспондентом (теоретическая спектроскопия, 1980 г.), а затем академиком (теоретическая физика, 1984 г.) АН БССР. Активно участвует в организационной деятельности. Так, он был инициатором и одним из организаторов первой в СССР конференции по нелинейной оптике (Нарочь, 1965 г.), положившей начало крупной серии всесоюзных, а затем и международных конференций в области лазерной физики и нелинейной оптики. П. А. Апанасевич читал курс лекций по теории взаимодействия лазерного света с веществом и нелинейной оптике для студентов физического факультета Белорусского государственного университета, руководил курсовыми и дипломными работами студентов.

В 1978–1987 гг. П. А. Апанасевич успешно выполняет обязанности заместителя директора по научной работе. Наряду с этим в 1981–2010 гг. он является председателем проблемного совета Института физики НАН Беларуси по специальности лазерная физика и физическая оптика (1981–2010 гг.) и с 1986 г. по настоящее время – председателем Совета по защитах докторских диссертаций при Институте физики. Избирался председателем правления белорусского физического общества (1999–2005 гг.). Награжден орденом СССР «Знак Почета», орденом Почета (Республика Беларусь). Ему присвоено звание Заслуженный деятель науки Республики Беларусь.

С 1987 по 1998 г. П. А. Апанасевич – директор Института физики. Приняв на себя ответственность по руководству институтом в период неопределенных надежд и социальных потрясений П. А. Апанасевич смог с присущей ему предусмотрительностью и вниманием к нуждам коллег сохранить основной потенциал института. В 1998 г. в знак заслуг перед коллективом института П. А. Апанасевич назначается его почетным директором.

П. А. Апанасевичу присущи широта взглядов и удивительная скромность, глубокая порядочность и доброжелательность, стремление передавать свой опыт и знания другим. Как почетный директор Института физики им. Б. И. Степанова он заботится о сохранении в коллективе «степановских» традиций. Для Павла Андреевича характерны увлеченность наукой в сочетании с природной любознательностью и стремлением понять самые сложные физические процессы, что способствует его творческой деятельности и позволяет решать актуальные проблемы современной лазерной физики и нелинейной оптики.

Сердечно поздравляем Павла Андреевича с юбилеем и желаем ему крепкого здоровья и оптимизма, личного благополучия и дальнейших творческих успехов в многогранной деятельности на благо белорусской науки.

РЭФЕРАТЫ

УДК 517.977

Гайшун И. В., Горячкин В. В., Крахотко В. В. Оценка решений двухпараметрической дискретной системы с интервальными коэффициентами // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2014. № 3. С. 5–8.

Для стационарной двухпараметрической дискретной системы с интервальными коэффициентами получены внешние оценки ее траекторий, с помощью которых предложен конструктивный способ построения управления, приводящего совокупность решений в минимальную окрестность заданного многогранника.

Библиогр. – 7 назв.

УДК 517.968

Расолько Г. А. К приближенному решению интегрального уравнения первого рода с мультипликативным ядром Коши методом ортогональных многочленов // Весці НАН Беларусі. 2014. № 3. С. 9–14.

Разработаны численные методы решения сингулярного интегрального уравнения первого рода со специальной правой частью. Предложенные схемы основаны на разложении сингулярного интеграла со степенно-логарифмической особенностью по многочленам Чебышева первого и второго рода. Даны оценки точности рассмотренных методов.

Библиогр. – 8 назв.

УДК 517.5

Русак В. Н., Рыбаченко И. В. Косинус-дроби Чебышева – Маркова в приближенном интегрировании // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2014. № 3. С. 15–20.

Построены квадратурные формулы типа Гаусса на отрезке с чебышевским весом, точные на рациональных функциях с заданным набором простых полюсов.

Библиогр. – 3 назв.

УДК 517.925:517.977

Деменчук А. К. Управление асинхронным спектром линейных систем с правым блоком неполного ранга // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2014. № 3. С. 21–27.

Рассматривается линейная система управления

$$\dot{x} = A(t)x + Bu, \quad t \in R, \quad x \in R^n, \quad n \geq 2,$$

где $A(t)$ – непрерывная ω -периодическая $(n \times n)$ -матрица, B – постоянная $(n \times n)$ -матрица, у которой первые $d \geq 0$ столбцов нулевые, а остальные столбцы линейно независимы. Предполагается, что матрица коэффициентов без среднего имеет некоторый правый блок неполного столбцового ранга. Выбором управления в виде обратной связи $u = U(t)x$ с непрерывной ω -периодической $(n \times n)$ -матрицей $U(t)$ решается задача управления асинхронным спектром.

Библиогр. – 9 назв.

УДК 513.6

Бондаренко А. А. Бирациональная композиция квадратичных форм над полем функций // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2014. № 3. С. 28–32.

Пусть $f(X)$ и $g(Y)$ – невырожденные квадратичные формы размерности m и n над полем K , $\text{char}K \neq 2$. Рассматривается проблема бирациональной композиции $f(X)$ и $g(Y)$: когда произведение $f(X) \cdot g(Y)$ бирационально эквивалентно над K квадратичной форме $h(Z)$ над K размерности $m + n$?

Дано полное решение проблемы бирациональной композиции квадратичных форм над глобальным полем F положительной характеристики $\neq 2$: получены необходимые и достаточные условия существования бирациональной

композиции $h(Z)$ для квадратичных форм $f(X)$ и $g(Y)$ над полем F , описано множество квадратичных форм, которые подходят в качестве $h(Z)$ в этом случае.

Библиогр. – 12 назв.

УДК 513.51

Ровба Е. А., Дирвук Е. В. Рациональная квази-интерполяция Эрмита – Фейера // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2014. № 3. С. 33–37.

В настоящей работе построены интерполяционные рациональные операторы типа Эрмита – Фейера. При этом доказывается равномерная сходимость рассматриваемого интерполяционного процесса для функции $f \in C[-1,1]$ при условии полноты соответствующей системы рациональных функций. В качестве узлов интерполирования выбираются нули рациональных функций Чебышева – Маркова второго рода.

Библиогр. – 10 назв.

УДК 512.542

Авдашкова Л. П., Каморников С. Ф., Шеметкова О. Л. Об одном свойстве подгрупп Фраттиниева типа // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2014. № 3. С. 38–43.

В работе приводится характеристика подгрупповых m -функторов θ , для которых выполняется условие $\Phi_\theta(N) \subseteq \Phi_\theta(G)$ для каждой конечной группы G и любой ее нормальной подгруппы N .

Библиогр. – 5 назв.

УДК 519.8

Бухтояров С. Е., Емеличев В. А. Устойчивость инвестиционной задачи Марковица с критериями крайнего оптимизма // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2014. № 3. С. 44–48.

Получены нижняя и верхняя оценки радиуса устойчивости многокритериальной инвестиционной булевой задачи Марковица с критериями крайнего оптимизма в случае, когда в пространстве портфелей задана произвольная метрика Гельдера l_p , $1 \leq p \leq \infty$, а в критериальном пространстве доходности инвестиционного проекта и пространстве состояний финансового рынка – чебышевская метрика l_∞ .

Библиогр. – 11 назв.

УДК 519.2

Жук Е. Е. Статистическое соотнесение случайных выборок с заданным вероятностным распределением методом максимума правдоподобия // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2014. № 3. С. 49–53.

Рассматривается задача статистического соотнесения произвольно распределенных многомерных выборок с заданным (гипотетическим) распределением вероятностей. Для принятия решений предложено использовать решающее правило по методу максимума правдоподобия. Проведено аналитическое исследование его эффективности. Исследован случай двух классов и модели Фишера.

Библиогр. – 5 назв.

УДК 519.61

Васильев Д. В., Кудин А. С. О выборе полиномов для алгоритма решета числового поля // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2014. № 3. С. 54–59.

В работе предлагается методика для быстрой экспериментальной оценки времени просеивания и числа пар взаимно простых чисел, дающих гладкие значения полиномов для алгоритма решета числового поля.

Табл. 3. Библиогр. – 10 назв.

УДК 530.12

Рябушко А. П., Жур Т. А., Боярина И. П., Зубко О. Л., Юринок В. И. Точки фотолибрации в небесной механике // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2014. № 3. С. 60–67.

Доказано, что для системы звезда–темное тело–пробное тело в ограниченной плоской круговой задаче трех тел при учете светового давления звезды существует бесчисленное количество точек фотолибрации, заполняющих три отрезка на прямой, проходящей через звезду и темное тело (коллинеарный случай), или заполняющие две дуги окружности, проходящие через лагранжевы точки либрации L_4, L_5 (треугольный случай).

Табл. 2. Ил. 2. Библиогр. – 15 назв.

УДК 517.925

Сазонова А. Т. **Разрешимые случаи для упрощенных систем в задаче движения четырех тел в плоскости** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2014. № 3. С. 68–76.

Указан объект исследования – система, состоящая из N обыкновенных дифференциальных уравнений, являющаяся математической моделью движения N тел в плоскости. Целью исследования является установление аналитических свойств решения упрощенных систем для системы нелинейных дифференциальных уравнений, описывающей плоское движение четырех тел. Рассматриваются упрощенные системы вида (3) для системы (2), описывающей движение четырех тел в плоскости, состоящие из нелинейных дифференциальных уравнений, каждое из которых имеет второй порядок. Найдены наборы констант межчастичного взаимодействия в двух случаях исследуемой задачи в плоскости, при которых общее решение можно записать в замкнутом (довольно простом) виде ((7), (9)). Установлены необходимые и достаточные условия (табл. 3) наличия свойства Пенлеве у исследуемой системы, выделяющие 56 случаев в задаче четырех тел в плоскости, при которых возможно описание траекторий движения данных тел.

Полученные результаты могут быть применены в аналитической теории дифференциальных уравнений, а также в теории небесной механики.

Табл. 3. Библиогр. – 12 назв.

УДК 539.12:530.145

Плетюхов В. А. **О совместном описании безмассовых полей со спинами 0 и 1** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2014. № 3. С. 77–83.

Рассмотрены две 11-компонентные тензорные полевые системы максвелловского типа. Показано, что в одной из них дополнительная скалярная функция играет роль калибровочной функции. Следовательно, эта система описывает векторное безмассовое поле. Вторая система дает совместное описание безмассовых полей со спинами $0, \pm 1$ как единого физического объекта.

Библиогр. – 10 назв.

УДК 530.1+535.3

Гончаренко А. М. **О распространении оптических солитонов в анизотропных средах** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2014. № 3. С. 84–85.

Исследованы основные особенности свойств осциллирующих солитонов в анизотропных средах. Показано, что и переменные солитоны сохраняют основные особенности распространения света в кристаллах.

Библиогр. – 10 назв.

УДК 534.535

Кулак Г. В., Крох Г. В., Николаенко Т. В., Ропот П. И., Шакин О. В. **Преобразование двумерных квазибездифракционных световых пучков при акустооптическом взаимодействии в одноосных кристаллах** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2014. № 3. С. 86–90.

Исследованы особенности преобразований формы двумерных квазибездифракционных (косинус-супергауссовых) световых пучков при брэгговской дифракции на ультразвуковых волнах в одноосных гиротропных кристаллах. Показано, что при дифракции таких световых пучков, распространяющихся вблизи оптической оси кристалла на медленной сдвиговой УЗ-волне в условиях сильного акустооптического взаимодействия, дифрагированные световые пучки испытывают существенную деформацию распределения интенсивности в поперечном сечении пучка. При больших ширинах супергауссовой составляющей падающего пучка форма дифрагированного пучка остается неизменной. Установлено, что эффективность дифракции слабо зависит от ширины супергауссовой составляющей косинус-супергауссового пучка.

Ил. 3. Библиогр. – 8 назв.

УДК 517.958:537.311.1;621.315.592

Поклонский Н. А., Вырко С. А., Ковалев А. И. **Стационарная прыжковая миграция биполяронов по «мягким» точечным дефектам в частично разупорядоченных полупроводниках** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2014. № 3. С. 91–96.

Теоретически рассмотрена прыжковая миграция биполяронов (пар электронов) по неподвижным дефектам одного сорта (типа) в трех зарядовых состояниях ($-1, 0, +1$) в частично разупорядоченных полупроводниках. Считается, что эти дефекты имеют отрицательную энергию корреляции и «стабилизируют» уровень Ферми

в окрестности середины энергетической щели (запрещенной зоны) полупроводника. Записано выражение для дрейфовой и диффузионной компонент плотности постоянного прыжкового тока биполярнон, прыгающих с дефектов в зарядовых состояниях (-1) на дефекты в зарядовых состояниях (+1). Получено аналитическое выражение для длины экранирования внешнего стационарного электрического поля в полупроводнике. Показано, что концентрация экранирующих поле подвижных электрических зарядов равна концентрации биполярнон.

Библиогр. – 32 назв.

УДК 621.315.592

Коршунов Ф. П., Жданович Н. Е., Гуринович В. А. **Отрицательная высокочастотная емкость облученных электронами *p-n*-переходов в режиме лавинного пробоя** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2014. № 3. С. 97–101.

Впервые проведены исследования отрицательной высокочастотной ($f = 1$ МГц) емкости в облученных быстрыми электронами стабилитронах в режиме пробоя. Установлено, что появление участка отрицательной емкости на температурной зависимости емкости сопровождается появлением максимума проводимости на аналогичной зависимости проводимости от температуры. Сделано предположение, что данный эффект обусловлен влиянием центров прилипания на процесс перезарядки глубоких уровней во всей области пространственного заряда.

Ил. 5. Библиогр. – 11 назв.

УДК 539.216.2:537.622.4

Точицкий Т. А., Дмитриева А. Э. **Влияние текстуры медной подложки на формирование структуры тонких электролитических пленок никеля** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2014. № 3. С. 102–106.

Исследовано влияние различно ориентированных зерен медной подложки и состояние их поверхности на рост тонких электролитических пленок никеля.

Ил. 3. Библиогр. – 11 назв.

УДК 535.8

Ануфрик С. С., Володенков А. П., Зноско К. Ф. **Оптимизация генерационных характеристик макета ХеСІ-лазера для абляционной обработки зубной ткани** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2013. № 3. С. 107–112.

Проведена обработка зубной эмали УФ-излучением (308 нм) и определена зависимость величины абляции от плотности пиковой мощности излучения лазера при фиксированном числе облучающих импульсов. Установлено, что порог абляции эмали зуба составляет $\sim 0,3$ Дж/см² и обнаружено, что при плотности энергии бóльшей 0,15 Дж/см² происходит эффективное удаление зубного камня, но при этом не наступает абляция эмали зуба.

Ил. 4. Библиогр. – 11 назв.

УДК 535.243+663.2

Дегтярь Н. Ф., Незальзова Е. И., Роговая М. В., Синицын Г. В., Скорбанова Е. А., Ходасевич М. А. **Использование методов спектроскопии УФ-, видимого и ближнего ИК-диапазонов для определения оригинальности выдержанных винных дистиллятов** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2014. № 3. С. 113–117.

Спектроскопия УФ-, видимого и ближнего ИК-диапазонов применена для определения оригинальности выдержанных винных дистиллятов. Использование метода главных компонент, дискриминантного анализа, построения деревьев классификации и регрессии на латентные структуры к широкополосным спектрам пропускания винных дистиллятов позволило определить производителя и возраст выдержки объектов исследования.

Ил. 3. Библиогр. – 15 назв.

УДК 511.42

Гусакова А. Г. **Неулучшаемость теоремы Дирихле о приближении действительных чисел рациональными** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2014. № 3. С. 118–121.

По теореме Дирихле при любых действительных x , $Q \geq 1$ и $c_1 \geq 1$ найдутся целые p и q такие, что $1 \leq q \leq Q$, для которых справедливо неравенство $|x - p/q| < c_1/qQ$. В работе тремя различными методами показано, что для некоторых различных множеств действительных чисел c_1 нельзя взять меньшим $\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\frac{\pi^2}{12}$, 1 соответственно.

Библиогр. – 3 назв.