

ВЕСЦІ

НАЦЫЯНАЛЬнай АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСІ

СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК 2014 № 2

ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ

СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК 2014 № 2

ЗАСНАВАЛЬНІК – НАЦЫЯНАЛЬНАЯ АКАДЭМІЯ НАВУК БЕЛАРУСІ

Часопіс выдаецца са студзеня 1956 г.

Выходзіць чатыры разы ў год

ЗМЕСТ

МАТЭМАТЫКА

| | |
|---|----|
| Соболевский П. И., Лиходед Н. А., Мандрик П. А. Метод получения границ областей определения функций глобальных зависимостей в задачах распараллеливания вычислений | 5 |
| Зверович Э. И. Обобщение формулы перестановки Пуанкаре – Бертрана | 12 |
| Малютин В. Б. О соотношении между интегралами по спиновым переменным и интегралами по антикоммутирующим переменным | 15 |
| Айрян Э. А., Егоров А. Д., Севастьянов Л. А. К вычислению математических ожиданий случайных функционалов | 21 |
| Расолько Г. А. К решению сингулярного интегрального уравнения первого рода с ядром Коши и специальной правой частью методом ортогональных многочленов | 27 |
| Грицук Е. В., Громак В. И. Аналитические свойства решений нелинейных дифференциальных уравнений типа уравнений Пенлеве | 32 |
| Трубников Ю. В., Орехова И. А. Об экстремальных полиномах третьей степени комплексного аргумента ... | 40 |
| Берник В. И., Коледа Д. В. Распределение значений дискриминантов многочленов второй и третьей степени | 48 |
| Семенов М. Г., Воробьев Н. Т. О характеристике инъекторов конечных групп | 52 |
| Бенедиктович В. И. Локальный признак существования плоского остовного дерева в геометрическом графе | 58 |
| Лещев А. Е., Минченко Л. И. Слабо регулярные задачи математического программирования | 64 |
| Муха В. С. Многомерно-матричный линейный регрессионный анализ: распределения и свойства оценок параметров | 71 |
| Жук Е. Е. Статистическое отнесение многомерных наблюдений к классам, заданным обучающими выборками | 82 |

ФІЗІКА

| | |
|--|-----|
| Хорошко В. В., Цырельчук И. Н., Гременок В. Ф., Залесский В. Б., Ходин А. А. Оптимизация параметров поглощающего слоя $Cu_xIn_xZn_{2-2x}Se_2$ для тонкопленочных солнечных элементов | 88 |
| Мудрый А. В., Мофиднахан Ф., Живулько В. Д., Зиновьев В. А., Двуреченский А. В., Кучинская П. А., Смагина Ж. В. Структурные и оптические характеристики нанослоев Ge/Si с пространственно-упорядоченными группами квантовых точек | 94 |
| Толкачева Е. А., Мулин Л. И. Исследование вакансионно-кислородных комплексов в облученных быстрыми электронами и нейтронами кристаллах кремния методом ИК-поглощения | 101 |
| Ануфрик С. С., Белаш В. Ч., Васильев С. В., Иванов А. Ю., Копыцкий А. В. Термодиффузия в металлах при импульсном неразрушающем лазерном воздействии | 105 |
| Рябушко А. П., Жур Т. А., Боярина И. П., Зубко О. Л., Юринок В. И. О существовании треугольных точек либрации в фотогравитационном поле | 111 |

БЕЛАРУСКІЯ ВУЧОНЫЯ

| | |
|--|-----|
| Федор Павлович Коршунов. (К 80-летию со дня рождения)..... | 119 |
| Виталий Антонович Толкачев. (К 80-летию со дня рождения)..... | 121 |
| Анатолий Николаевич Сердюков. (К 70-летию со дня рождения)..... | 123 |

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ 2014 № 2

Серия физико-математических наук

На русском и белорусском языках

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь,
свидетельство о регистрации № 392 от 18.05.2009

Компьютерная верстка В. Л. Смольская

Здадзена ў набор 19.05.2014. Падпісана да друку 11.06.2014. Выход у свет 27.06.2014. Фармат 60×84¹/₈. Папера афсетная.

Друк лічбавы. Ум. друк. арк. 14,88. Ул.-выд. арк. 16,4. Тыраж 78 экз. Заказ 103.

Кошт нумару: індывідуальная падпіска – 48 650 руб.; ведамасная падпіска – 117 945 руб.

Выдавец і паліграфічнае выкананне:

Рэспубліканскае ўнітарнае прадпрыемства «Выдавецкі дом «Беларуская навука». Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца, вытворцы, распаўсюджвальніка друкаваных выданняў № 1/18 ад 02.08.2013.

ЛП 02330/455 ад 30.12.2013. Вул. Ф. Скарыны, 40, 220141, г. Мінск.

© Выдавецкі дом «Беларуская навука».

Весці НАН Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук, 2014

PROCEEDINGS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF BELARUS

PHYSICS AND MATHEMATICS SERIES 2014 N 2

FOUNDER IS THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF BELARUS

The Journal has been published since January 1956

Issued four times a year

CONTENTS

MATHEMATICS

| | |
|---|----|
| Sobolevsky P. I., Likhoded N. A., Mandrik P. A. The method of obtaining the boundaries of the domains of the functions of global dependences in paralleling computation problems | 5 |
| Zverovich E. I. Generalization of the commutation Poincaré – Bertrand formula | 12 |
| Malyutin V. B. Relation between the integrals with respect to spin variables and the integrals with respect to anti-commuting variables | 15 |
| Airyán E. A., Egorov A. D., Sevastiyánov L. A. Calculation of mathematical expectations of random functionals ... | 21 |
| Rasolko G. A. To the solution of a first-kind singular integral equation with the Cauchy kernel and a special right-hand side by the method of orthogonal polynomials | 27 |
| Grytsuk E. V., Gromak V. I. Analytical properties of the solutions of the equations of the Penleve-type non-linear differential equations | 32 |
| Trubnikov Y. V., Orehova I. A. On the extreme third-degree polynomials with complex argument | 40 |
| Bernik V. I., Kaliada D. U. Distribution of the discriminant values for polynomials of second and third degree | 48 |
| Semenov M. G., Vorob'ev N. T. Characterization of injectors of finite groups | 52 |
| Benediktovitch V. I. Local feature for the existence of plane spanning tree in a geometric graph | 58 |
| Leschov A. E., Minchenko L. I. Weakly regular mathematical programming problems | 64 |
| Mukha V. S. Multidimensional-matrix linear regression analysis: distributions and properties of the parameters ... | 71 |
| Zhuk E. E. Statistical assignment of multivariate observations to the classes determined by training samples | 82 |

PHYSICS

| | |
|---|-----|
| Khoroshko V. V., Tsyrelchuk I. N., Gremenok V. F., Zalesski V. B., Khodin A. A. $\text{Cu}_x\text{In}_x\text{Zn}_{2-2x}\text{Se}_2$ absorber layer characteristics optimization for thin-film solar cells | 88 |
| Mudryi A. V., Mofidnakhai F., Zhivulko V. D., Zinovyev V. A., Dvurechenskii A. V., Kuchinskaja P. A., Smagina Zh. V. Structural and optical characteristics of Ge/Si nanolayers with spatially ordered groups of quantum dots | 94 |
| Tolkacheva E. A., Murin L. I. Ir absorption studies of vacancy-oxygen related complexes in fast electron and neutron-irradiated silicon crystals | 101 |
| Anufrik S. S., Belash V. Ch., Vasiliev S. V., Ivanov A. Yu., Kapytski A. V. Metal thermodiffusion when affected by the non-destructive pulse laser radiation | 105 |
| Ryabushko A. P., Zhur T. A., Boyarina I. P., Zubko O. L., Yurinok V. I. Existence of triangle points of libration in the photogravitation field | 111 |

SCIENTISTS OF BELARUS

| | |
|--|-----|
| Fedor Pavlovich Korshunov. (To the 80th Anniversary of Birthday) | 119 |
| Vitalii Antonovich Tolkachev. (To the 80th Anniversary of Birthday) | 121 |
| Anatolii Nikolaevich Serdyukov. (To the 70th Anniversary of Birthday) | 123 |

МАТЭМАТЫКА

УДК 519.6

П. И. СОБОЛЕВСКИЙ¹, Н. А. ЛИХОДЕД², П. А. МАНДРИК²

**МЕТОД ПОЛУЧЕНИЯ ГРАНИЦ ОБЛАСТЕЙ ОПРЕДЕЛЕНИЯ
ФУНКЦИЙ ГЛОБАЛЬНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ
В ЗАДАЧАХ РАСПАРАЛЛЕЛИВАНИЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ**

¹*Институт математики НАН Беларуси*

²*Белорусский государственный университет*

(Поступила в редакцию 28.11.2013)

Введение. При построении алгоритмов для реализации на параллельных компьютерах с распределенной памятью, на многоядерных персональных компьютерах и графических ускорителях часто используется тайлинг [1–4], т. е. разбиение множества операций на множества, называемые зернами вычислений или тайлами. Операции одного тайла выполняются атомарно, как одна единица вычислений; применение тайлинга позволяет значительно снизить накладные расходы на коммуникационные операции и использование иерархической памяти.

В работе [5] предложен метод построения функций глобальных зависимостей, которые позволяют получать информационные зависимости между тайлами. Сведения о зависимостях глобального уровня можно использовать для нахождения коммуникационных операций зернистых вычислений и распараллеливания алгоритмов на уровне тайлов. Области определения функций глобальных зависимостей были получены методом окаймления, допускающим избыточность областей.

В этой статье разработан метод уточнения этих границ. Точное представление границ позволяет избегать избыточных вычислений при выполнении коммуникационных операций и дает больше возможностей для распараллеливания зернистых алгоритмов.

Функции глобальных зависимостей. Получение областей определения функций методом окаймления. Приведем необходимые для дальнейшего изложения сведения о тайлинге и об информационной структуре зернистых алгоритмов.

Будем считать, что алгоритм задан последовательной программой, основную вычислительную часть которой составляют циклы произвольной структуры вложенности; границы изменения параметров циклов задаются неоднородными формами, линейными по совокупности параметров циклов и внешних переменных. Пусть в гнезде циклов имеется K выполняемых операторов S_β , объединенных в Θ наборах выполняемых операторов. Область изменения параметров циклов для оператора S_β и размерность этой области обозначим соответственно V_β и n_β . Под набором операторов будем понимать один или несколько операторов, окруженных одним и тем же множеством циклов. Обозначим: V^ϑ , $1 \leq \vartheta \leq \Theta$, – области изменения параметров циклов, окружающих наборы операторов; n^ϑ – размерность области V^ϑ (число циклов, окружающих ϑ -й набор операторов).

Выполнение оператора S_β при конкретных значениях β и вектора параметров цикла J будем называть операцией и обозначать $S_\beta(J)$. Зависимости (информационные связи) между операциями можно задать функциями [6] $\overline{\Phi}_{\alpha,\beta}(J)$, $J \in V_{\alpha,\beta}$. Функция зависимостей $\overline{\Phi}_{\alpha,\beta}(J)$ позволяет для операции $S_\beta(J)$ найти операцию $S_\alpha(I)$, от которой $S_\beta(J)$ зависит.

Тайлинг – это преобразование алгоритма для получения макроопераций, называемых также зернами вычислений или тайлами. При тайлинге каждый цикл разбивается на два цикла: глобальный, параметр которого определяет на данном уровне вложенности порядок вычисления тайлов, и локальный, в котором параметр исходного цикла изменяется в границах одного тайла. Допускается вырожденное разбиение цикла, при котором все итерации относятся или к глобальному, или к локальному циклам.

Следующие величины и множества используются для формализации тайлинга:

$m_\zeta^\vartheta = \min j_\zeta$, $M_\zeta^\vartheta = \max j_\zeta$ – предельные значения изменения параметра цикла уровня вложенности ζ для ϑ -го набора операторов; если два набора операторов имеют общий цикл с параметром j_ζ , то $m_\zeta^{\vartheta_1} = m_\zeta^{\vartheta_2}$, $M_\zeta^{\vartheta_1} = M_\zeta^{\vartheta_2}$;

$r_1^\vartheta, \dots, r_{n_\vartheta}^\vartheta$ – заданные натуральные числа, определяющие размеры тайла; r_ζ^ϑ обозначает число значений параметра j_ζ , приходящихся на один тайл ϑ -го набора операторов; r_ζ^ϑ может принимать фиксированное значение в пределах от 1 до $r_\zeta^{\vartheta, \max}$ включительно, где $r_\zeta^{\vartheta, \max} = M_\zeta^\vartheta - m_\zeta^\vartheta + 1$; если два набора операторов имеют общий цикл с параметром j_ζ , то $r_\zeta^{\vartheta_1} = r_\zeta^{\vartheta_2}$;

$R^\vartheta = \text{diag}(r_1^\vartheta, \dots, r_{n_\vartheta}^\vartheta)$ – диагональная матрица; $\bar{R}^\vartheta = (r_1^\vartheta, \dots, r_{n_\vartheta}^\vartheta)$ – вектор;

$Q_\zeta^\vartheta = \lceil (M_\zeta^\vartheta - m_\zeta^\vartheta + 1) / r_\zeta^\vartheta \rceil$, $1 \leq \zeta \leq n_\vartheta$, – число частей, на которые разбивается область значений параметра j_ζ цикла, окружающего ϑ -й набор операторов;

$V^{\vartheta, gl} = \{J^{gl}(j_1^{gl}, \dots, j_{n_\vartheta}^{gl}) \mid 0 \leq j_\zeta^{gl} \leq Q_\zeta^\vartheta - 1, 1 \leq \zeta \leq n_\vartheta\}$ – области изменения параметров глобальных, т. е. уровня тайлов, циклов;

$V_{J^{gl}}^\vartheta = \{J(j_1, \dots, j_{n_\vartheta}) \in V^\vartheta \mid m_\zeta^\vartheta + j_\zeta^{gl} r_\zeta^\vartheta \leq j_\zeta \leq m_\zeta^\vartheta - 1 + (j_\zeta^{gl} + 1) r_\zeta^\vartheta, 1 \leq \zeta \leq n_\vartheta\}$, $J^{gl}(j_1^{gl}, \dots, j_{n_\vartheta}^{gl}) \in V^{\vartheta, gl}$, – области изменения параметров локальных (уровня операций тайлов) циклов при фиксированных значениях параметров глобальных циклов.

В работе [5] по заданным функциям, определяющим зависимости на уровне операций, построены функции глобальных зависимостей $\bar{\Phi}_{\alpha, \beta}^{gl}$, найдены их области определения. Области определения функций $\bar{\Phi}_{\alpha, \beta}^{gl}$ получены методом окаймления, допускающим избыточность этих областей:

$$V_{\alpha, \beta}^{gl, 0} = \{J^{gl}(j_1^{gl}, \dots, j_{n_\vartheta}^{gl}) \in Z^{n_\vartheta} \mid q^{gl, 0} \leq j^{gl} \leq Q^{gl, 0}\},$$

где $q^{gl, 0} = \left\lfloor \left(R^\vartheta \right)^{-1} \left(m^{\alpha, \beta} - m^\vartheta \right) \right\rfloor$, $Q^{gl, 0} = \left\lfloor \left(R^\vartheta \right)^{-1} \left(M^{\alpha, \beta} - m^\vartheta \right) \right\rfloor$, $m^{\alpha, \beta} = \min_{J \in V_{\alpha, \beta}} J$, $M^{\alpha, \beta} = \max_{J \in V_{\alpha, \beta}} J$.

Здесь и далее минимальные (максимальные) значения векторов понимаются как векторы, составленные из минимальных (максимальных) значений соответствующих координат векторов.

Пусть $V_{\alpha, \beta}^{gl}$ является точно вычисленной областью определения функции $\bar{\Phi}_{\alpha, \beta}^{gl}$. Имеет место включение $V_{\alpha, \beta}^{gl, 0} \supseteq V_{\alpha, \beta}^{gl}$.

Обоснование необходимости уточнения границ областей определения функций глобальных зависимостей при распараллеливании алгоритмов. Математическим аппаратом для распараллеливания и других преобразований алгоритмов являются так называемые таймирующие функции (scheduling functions – в англоязычной литературе; развертки графа алгоритма – в терминологии монографии [6]). Пусть V – некоторая n -мерная область изменения параметров локальных или глобальных циклов. Функция $t: V \rightarrow Z$ называется таймирующей, если $t(J) \geq t(I)$ для любых итераций J, I таких, что результат вычислений на итерации I требуется для вычислений на итерации J . Наличие нескольких таймирующих функций уровня тайлов требуется для указания в явном виде одновременно выполняемых макроопераций алгоритма. Основанные на таком

подходе методы распараллеливания алгоритмов для реализации на многоядерных процессорах и на графических ускорителях предложены, в частности, в работах [3, 4].

Таймирующая функции вида $t(J) = \tau J + a$, $\tau \in Z^n$, $a \in Z$, называется координатной таймирующей функцией, если $a = 0$ и вектор τ содержит ровно одну отличную от нуля компоненту. Можно гарантировать наличие стольких координатных таймирующих функций, сколько координат векторов, характеризующих глобальные зависимости, оказываются неотрицательными. Это непосредственно вытекает из приведенных определений. Действительно, если ζ -я компонента вектора τ равна 1, остальные компоненты равны 0, компонента с номером ζ вектора $J - I$ зависимостей неотрицательна, то $t(J) - t(I) = t(j_1, \dots, j_n) - t(i_1, \dots, i_n) = j_\zeta - i_\zeta \geq 0$.

Чем точнее будут найдены области определения функций глобальных зависимостей, тем потенциально больше можно получить таймирующих функций. Приведем иллюстрационный пример.

Рассмотрим алгоритм решения системы линейных алгебраических уравнений $Ax = b$ с левой треугольной матрицей порядка n и единичными диагональными элементами:

```

S1: x(1) = b(1)
do i = 2, n
  S2: x(i) = b(i)
  do j = 1, i - 1
    S3: x(i) = x(i) - a(i, j)x(j)
  enddo
enddo

```

Одна из функций [6, с. 381], определяющих зависимости на уровне операций, имеет вид

$$\bar{\Phi}_{3,3}(i, j) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (j, j-1), \quad (i, j) \in V_{3,3} = \{(i, j) \in Z^2 \mid 3 \leq i \leq n, 2 \leq j \leq i-1\}.$$

Соответствующая функция глобальных зависимостей имеет вид

$$\bar{\Phi}_{3,3}^{gl}(j_1^{gl}, j_2^{gl}) = \begin{pmatrix} 0 & \rho \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1^{gl} \\ j_2^{gl} \end{pmatrix} - \varphi^{gl}, \quad V_{3,3}^{gl,0} = \left\{ (j_1^{gl}, j_2^{gl}) \in Z^2 \mid 0 \leq j_1^{gl} \leq \left\lfloor \frac{n-2}{r_1} \right\rfloor, 0 \leq j_2^{gl} \leq \left\lfloor \frac{n-2}{r_2} \right\rfloor \right\},$$

где $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leq \varphi^{gl} \leq \begin{pmatrix} \rho \\ 1 \end{pmatrix}$; ρ – натуральное число такое, что $r_2 = \rho \cdot r_1$. Мы рассматриваем только эту функцию глобальных зависимостей, так как другие не создают проблем для получения координатных таймирующих функций.

Функция $\bar{\Phi}_{3,3}^{gl}(j_1^{gl}, j_2^{gl})$ задает информационную связь между операциями, выполняемыми на итерациях $(\rho j_2^{gl}, j_2^{gl}) - \varphi^{gl}$ и (j_1^{gl}, j_2^{gl}) : по определению функции зависимостей, данные, вычисленные на итерации $\bar{\Phi}_{3,3}^{gl}(j_1^{gl}, j_2^{gl})$, являются аргументами для вычислений на итерации (j_1^{gl}, j_2^{gl}) . Векторы, задающие глобальные зависимости, имеют вид

$$(j_1^{gl}, j_2^{gl}) - \bar{\Phi}_{3,3}^{gl}(j_1^{gl}, j_2^{gl}) = (j_1^{gl}, j_2^{gl}) - ((\rho j_2^{gl}, j_2^{gl}) - \varphi^{gl}) = (j_1^{gl} - \rho j_2^{gl}, 0) + \varphi^{gl}.$$

Вторая координата вектора $(j_1^{gl} - \rho j_2^{gl}, 0) + \varphi^{gl}$ всегда неотрицательна, поэтому функция $t(j_1^{gl}, j_2^{gl}) = j_2^{gl}$ является координатной таймирующей функцией.

Если область определения функции глобальных зависимостей $\bar{\Phi}_{3,3}^{gl}(j_1^{gl}, j_2^{gl})$ найдена методом окаймления, то $0 \leq j_1^{gl} \leq \left\lfloor \frac{n-2}{r_1} \right\rfloor$, $0 \leq j_2^{gl} \leq \left\lfloor \frac{n-2}{r_2} \right\rfloor$. Первая координата вектора $(j_1^{gl} - \rho j_2^{gl}, 0) + \varphi^{gl}$ может быть как положительной, так и отрицательной, поэтому функция $t(j_1^{gl}, j_2^{gl}) = j_1^{gl}$ не является таймирующей. Более того, используя определение таймирующих функций можно показать,

что для произвольного (не фиксированного) n второй (не обязательно координатной) таймирующей функции не существует. Причина в том, что величина $j_1^{gl} - \rho j_2^{gl}$ может принимать произвольно большие как положительные, так и отрицательные значения.

Если область определения функции $\bar{\Phi}_{3,3}^{gl}(j_1^{gl}, j_2^{gl})$ найдена предлагаемым в этой работе методом (об этом см. в следующем разделе), то $-r_1 + 2 \leq r_1 j_1^{gl} \leq n - 2$, $-r_2 + 2 \leq r_2 j_2^{gl} \leq \min(n - 2, r_1 - 1 + r_1 j_1^{gl})$, первая координата вектора $(j_1^{gl} - \rho j_2^{gl}, 0) + \varphi^{gl} = (r_1 j_1^{gl} - r_2 j_2^{gl}, 0)/r_1 + \varphi^{gl}$ неотрицательна и функция $t(j_1^{gl}, j_2^{gl}) = j_1^{gl}$ является таймирующей. Действительно, из неравенства $-r_2 + 2 \leq r_2 j_2^{gl} \leq \min(n - 2, r_1 - 1 + r_1 j_1^{gl})$ следует $r_2 j_2^{gl} - r_1 j_1^{gl} \leq \min(n - 2 - r_1 j_1^{gl}, r_1 - 1)$, а из неравенств $-r_1 + 2 \leq r_1 j_1^{gl} \leq n - 2$, $n \geq 3$ следует $0 \leq n - 2 - r_1 j_1^{gl} \leq r_1 - 1 + n - 3$. В результате справедлива оценка $r_2 j_2^{gl} - r_1 j_1^{gl} \leq \min(n - 2 - r_1 j_1^{gl}, r_1 - 1) \leq r_1 - 1$. В силу целочисленности вектора (j_2^{gl}, j_1^{gl}) и того, что $r_2 / r_1 = \rho$ – натуральное число, имеем $\rho j_2^{gl} - j_1^{gl} \leq 0$. Таким образом, имеются две таймирующие функции и можно применять известные методы распараллеливания алгоритмов для реализации на многоядерных процессорах и графических ускорителях.

Уточнение областей определения функций. Будем предполагать (не ограничивая случаев, возникающих на практике), что область определения функции зависимостей $\bar{\Phi}_{\alpha,\beta}(J)$ можно задать в виде

$$V_{\alpha,\beta} = \left\{ J \in Z^{n^g} \mid m^{(-p)} \leq H^{(-p)} J, 1 \leq p \leq P, H^{(+q)} J \leq M^{(+q)}, 1 \leq q \leq Q \right\}, \quad (1)$$

где $H^{(-p)}$ и $H^{(+q)}$ – некоторые нижние треугольные матрицы (порядка n^g) с единицами на главной диагонали; $m^{(-p)}$ и $M^{(+q)}$ – некоторые n^g -мерные векторы. Далее $H_+^{(-p)}$ – матрица, получаемая из матрицы $H^{(-p)}$ обнулением всех ее отрицательных элементов; $H_-^{(+q)}$ – матрица, получаемая из матрицы $H^{(+q)}$ обнулением всех ее положительных элементов.

Введем в рассмотрение множество

$$V_{\alpha,\beta}^{gl,0,1} = \left\{ J^{gl} (j_1^{gl}, \dots, j_{n^g}^{gl}) \in Z^{n^g} \mid q^{gl,0,1} \leq J^{gl} \leq Q^{gl,0,1} \right\},$$

где $q^{gl,0,1} = (R^g)^{-1} \left(\max \left(m^{\alpha,\beta} - m^g - \bar{R}^g + \bar{1}, \max_{1 \leq p \leq P} \left(m^{(-p)} - H^{(-p)} m^g - H_+^{(-p)} (\bar{R}^g - \bar{1}) - (H^{(-p)} - E) R^g J^{gl} \right) \right) \right)$,
 $Q^{gl,0,1} = (R^g)^{-1} \left(\min \left(M^{\alpha,\beta} - m^g, \min_{1 \leq q \leq Q} \left(M^{(+q)} - H^{(+q)} m^g - H_-^{(+q)} (\bar{R}^g - \bar{1}) - (H^{(+q)} - E) R^g J^{gl} \right) \right) \right)$.

Матрицы $H^{(-p)} - E$ и $H^{(+q)} - E$ являются нижними треугольными, поэтому область изменения любой из координат j_k^{gl} , $k = 1, 2, \dots, n^g$, может зависеть только от координат $j_1^{gl}, \dots, j_{k-1}^{gl}$ с меньшими номерами.

Отметим, что величины $m^{(-p)}$, $M^{(+q)}$, $H^{(-p)}$, $H^{(+q)}$, $q^{gl,0,1}$, $Q^{gl,0,1}$ зависят от α и β , величины $q^{gl,0,1}$, $Q^{gl,0,1}$ – также от J^{gl} . Чтобы избежать громоздких обозначений, в явном виде эти зависимости указывать не будем.

Пусть $V'_{\alpha,\beta,J^{gl}}$ – множество таких $J' \in V_{\alpha,\beta}$, что справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \max \left(m^{\alpha,\beta}, \max_{1 \leq p \leq P} \left(m^{(-p)} - \left(H_+^{(-p)} - E \right) (\bar{R}^g - \bar{1}) - \left(H^{(-p)} - E \right) (m^g + R^g J^{gl}) \right) \right) &\geq \\ &\geq \max_{1 \leq p \leq P} \left(m^{(-p)} - \left(H^{(-p)} - E \right) J' \right), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\min\left(M^{\alpha,\beta}, \min_{1 \leq q \leq Q} \left(M^{(+q)} - H_-^{(+q)}(\bar{R}^{\mathfrak{g}} - \bar{1}) - (H^{(+q)} - E)(m^{\mathfrak{g}} + R^{\mathfrak{g}} J^{gl}) \right)\right) \leq \leq \min_{1 \leq q \leq Q} \left(M^{(+q)} - (H^{(+q)} - E)J' \right). \quad (3)$$

Если $P = 1$ и $H^{(-1)} = E$, то $m^{(-1)} = m^{\alpha,\beta}$, $H_+^{(-1)} - E = 0$ и неравенство (2) выполняется (становится равенством). Если $Q = 1$ и $H^{(+1)} = E$, то $M^{(+1)} = M^{\alpha,\beta}$, $H_-^{(+1)} = 0$ и равенством становится неравенство (3).

Т е о р е м а. Пусть множество $V_{\alpha,\beta}$ имеет вид (1). Если при фиксированных значениях элементов матрицы $R^{\mathfrak{g}}$ выполняется неравенство

$$V'_{\alpha,\beta,J^{gl}} \neq \emptyset \text{ для любого } J^{gl} \in V_{\alpha,\beta}^{gl,0,1}, \quad (4)$$

то $V_{\alpha,\beta}^{gl,0,1} = V_{\alpha,\beta}^{gl}$. Если условие (4) не выполняется, то $V_{\alpha,\beta}^{gl,0} \supseteq V_{\alpha,\beta}^{gl,0,1} \supseteq V_{\alpha,\beta}^{gl}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $V = V_{\alpha,\beta}$, $R = R^{\mathfrak{g}}$, $\bar{R} = \bar{R}^{\mathfrak{g}}$, $J^{\bar{0}} = m^{\mathfrak{g}}$. Рассмотрим множество

$$V^{gl,1} = \{J^{gl} \in Z^n \mid q^{gl,1} \leq J^{gl} \leq Q^{gl,1}\},$$

где

$$Rq^{gl,1} = \max_{1 \leq p \leq P} \left(m^{(-p)} - H^{(-p)}J^{\bar{0}} - H_+^{(-p)}(\bar{R} - \bar{1}) - (H^{(-p)} - E)RJ^{gl} \right),$$

$$RQ^{gl,1} = \min_{1 \leq q \leq Q} \left(M^{(+q)} - H^{(+q)}J^{\bar{0}} - H_-^{(+q)}(\bar{R} - \bar{1}) - (H^{(+q)} - E)RJ^{gl} \right).$$

Если для любого $J^{gl} \in V^{gl,1}$ существует точка $J' \in V$ такая, что

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq p \leq P} \left(m^{(-p)} - H^{(-p)}J^{\bar{0}} - H_+^{(-p)}(\bar{R} - \bar{1}) - (H^{(-p)} - E)RJ^{gl} \right) \geq \\ & \geq \max_{1 \leq p \leq P} \left(m^{(-p)} - (H^{(-p)} - E)J' \right) - J^{\bar{0}} - \bar{R} + \bar{1}, \\ & \min_{1 \leq q \leq Q} \left(M^{(+q)} - H^{(+q)}J^{\bar{0}} - H_-^{(+q)}(\bar{R} - \bar{1}) - (H^{(+q)} - E)RJ^{gl} \right) \leq \min_{1 \leq q \leq Q} \left(M^{(+q)} - (H^{(+q)} - E)J' \right) - J^{\bar{0}}, \end{aligned}$$

то $V^{gl,1} = V^{gl}$. Доказать это утверждение можно по аналогии с частным случаем $P = Q = 1$, рассмотренным в работе [7]. Основано доказательство на построении расширения области V вида (1), включающего начальные вершины $J^{\bar{0},gl} = RJ^{gl} + J^{\bar{0}}$ всех непустых тайлов. Такое расширение имеет вид

$$\begin{aligned} V^1 &= \left\{ J \in Z^n \mid \max_{1 \leq p \leq P} \left(m^{(-p)} - H_+^{(-p)}(\bar{R} - \bar{1}) - (H^{(-p)} - E)J \right) \leq J \leq \right. \\ & \left. \leq \min_{1 \leq q \leq Q} \left(M^{(+q)} - H_-^{(+q)}(\bar{R} - \bar{1}) - (H^{(+q)} - E)J \right) \right\}. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь множество $V^{gl,0} = \{J^{gl} \in Z^n \mid q^{gl,0} \leq J^{gl} \leq Q^{gl,0}\}$, где $q^{gl,0} = R^{-1}(m^{\mathfrak{g}} - J^{\bar{0}} - \bar{R} + \bar{1})$, $Q^{gl,0} = R^{-1}(M^{\mathfrak{g}} - J^{\bar{0}})$. Если для любого $J^{gl} \in V^{gl,0}$ существует точка $J' \in V$ такая, что $m^{\mathfrak{g}} \geq \max_{1 \leq p \leq P} \left(m^{(-p)} - (H^{(-p)} - E)J' \right)$, $M^{\mathfrak{g}} \leq \min_{1 \leq q \leq Q} \left(M^{(+q)} - (H^{(+q)} - E)J' \right)$, то $V^{gl,0} = V^{gl}$. Доказательство следует из включения

$$\begin{aligned} V^{gl} &= \left\{ J^{gl} \in Z^n \mid J^{gl} = \left\lfloor R^{-1}(J - J^{\bar{0}}) \right\rfloor, J \in V \right\} \subseteq \\ & \subseteq \left\{ J^{gl} \in Z^n \mid \left\lfloor R^{-1}(\min_{J \in V} J - J^{\bar{0}}) \right\rfloor \leq J^{gl} \leq \left\lfloor R^{-1}(\max_{J \in V} J - J^{\bar{0}}) \right\rfloor \right\} = V^{gl,0} \end{aligned}$$

и неравенств

$$\max_{1 \leq p \leq P} \left(m^{(-p)} - \left(H^{(-p)} - E \right) J \right) - \bar{R} + \bar{1} \leq m^{\mathfrak{g}} - \bar{R} + \bar{1} \leq J^{0,gl} \leq M^{\mathfrak{g}} \leq \min_{1 \leq q \leq Q} \left(M^{(+q)} - \left(H^{(+q)} - E \right) J' \right).$$

Справедливость доказываемого утверждения теоремы следует теперь из представления

$$V^{gl,0,1} = V^{gl,0} \cap V^{gl,1} = \left\{ J^{gl} \in Z^n \mid q^{gl,0,1} \leq J^{gl} \leq Q^{gl,0,1} \right\},$$

$q^{gl,0,1} = \max(q^{gl,0}, q^{gl,1})$, $Q^{gl,0,1} = \min(Q^{gl,0}, Q^{gl,1})$, а также из равносильности существования требуемой точки $J' \in V$ и непустоты множества $V'_{\alpha,\beta,J^{gl}}$.

Таким образом, если выполняется предположение теоремы, то $q^{gl,0,1}$ и $Q^{gl,0,1}$ точно задают границы областей определения функций глобальных зависимостей. Если предположение теоремы не выполняется, то $q^{gl,0,1}$ и $Q^{gl,0,1}$ представляют границы областей определения функций не хуже, по крайней мере, чем известное представление.

Рассмотрим пример из предыдущего раздела и применим теорему.

Представим область $V_{3,3}$ в виде (1):

$$V_{3,3} = \left\{ (i, j) \in Z^2 \mid 3 \leq i \leq n, 2 \leq j \leq i-1 \right\} = \left\{ J(i, j) \in Z^2 \mid m^{(-1)} \leq H^{(-1)} J, H^{(+1)} J \leq M^{(+1)} \right\},$$

где $m^{(-1)} = (3, 2)$, $H^{(-1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $H^{(+1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $M^{(+1)} = (n, -1)$.

Пусть произведен тайлинг области $V^{\mathfrak{g}} = V^2 = \left\{ (i, j) \in Z^2 \mid 2 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq i-1 \right\}$.

Имеем: $m^{3,3} = (3, 2)$, $M^{3,3} = (n, n-1)$, $J^{\bar{0}} = m^{\mathfrak{g}} = m^2 = (2, 1)$, $R^{\mathfrak{g}} = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}$, $H_+^{(-1)} = H^{(-1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,
 $H_-^{(+1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned} q^{gl,0,1} &= (R^{\mathfrak{g}})^{-1} \left(\max \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) - 0 \right) \right) = \\ &= (R^{\mathfrak{g}})^{-1} \left(\max \left(\begin{pmatrix} -r_1 + 2 \\ -r_2 + 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -r_1 + 2 \\ -r_2 + 2 \end{pmatrix} \right) \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{r_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -r_1 + 2 \\ -r_2 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-r_1 + 2}{r_1} \\ \frac{-r_2 + 2}{r_2} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q^{gl,0,1} &= (R^{\mathfrak{g}})^{-1} \left(\min \left(\begin{pmatrix} n \\ n-1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 - 1 \\ r_2 - 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 j_1^{gl} \\ r_2 j_2^{gl} \end{pmatrix} \right) \right) = \\ &= (R^{\mathfrak{g}})^{-1} \left(\min \left(\begin{pmatrix} n-2 \\ n-2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -r_1 + 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -r_1 j_1^{gl} \end{pmatrix} \right) \right) = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{r_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_2} \end{pmatrix} \left(\min \left(\begin{pmatrix} n-2 \\ n-2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n-2 \\ r_1 - 1 + r_1 j_1^{gl} \end{pmatrix} \right) \right) = \begin{pmatrix} \frac{n-2}{r_1} \\ \min \left(\frac{n-2}{r_2}, \frac{r_1 - 1 + r_1 j_1^{gl}}{r_2} \right) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$V_{3,3}^{gl,0,1} = \left\{ (j_1^{gl}, j_2^{gl}) \in Z^2 \mid \frac{-r_1 + 2}{r_1} \leq j_1^{gl} \leq \frac{n-2}{r_1}, \frac{-r_2 + 2}{r_2} \leq j_2^{gl} \leq \min \left(\frac{n-2}{r_2}, \frac{r_1 - 1 + r_1 j_1^{gl}}{r_2} \right) \right\}.$$

Покажем, что выполняются условия (4). Неравенство (2) верно для любого $J^{gl} \in V_{\alpha,\beta}^{gl,0,1}$, так как $H^{(-1)} = E$. Проанализируем неравенство (3):

$$\min \left(\binom{n}{n-1}, \binom{n}{-1} - \binom{0 \ 0}{-1 \ 0} \binom{r_1-1}{r_2-1} - \binom{0 \ 0}{-1 \ 0} \binom{2+r_1 j_1^{gl}}{1+r_2 j_2^{gl}} \right) \leq \binom{n}{-1} - \binom{0 \ 0}{-1 \ 0} \binom{j_1'}{j_2'},$$

$$\min \left(\binom{n}{n-1}, \binom{n}{-1} - \binom{0}{-r_1+1} - \binom{0}{-2-r_1 j_1^{gl}} \right) \leq \binom{n}{-1} - \binom{0}{-j_1'}, \quad \min \left(\binom{n}{n-1}, \binom{n}{r_1+r_1 j_1^{gl}} \right) \leq \binom{n}{j_1'-1}.$$

Неравенство $\min(n-1, r_1+r_1 j_1^{gl}) \leq j_1'-1$ выполняется для $J'(j_1', j_2') \in V_{3,3}$ таких, что $j_1' = \min(n, r_1 j_1^{gl} + r_1 + 1)$. С учетом вида области $V_{3,3}$ можно сделать заключение, что такие J' принадлежат этой области, поэтому $V'_{3,3, J^{gl} \neq \emptyset} \neq \emptyset$ для любого $J^{gl} \in V_{\alpha,\beta}^{gl,0,1}$.

Таким образом, $V_{\alpha,\beta}^{gl,0,1} = V_{\alpha,\beta}^{gl}$, величины $q^{gl,0,1}$ и $Q^{gl,0,1}$ точно задают границы областей определения функций глобальных зависимостей.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (договор № Ф12ОБ-005).

Литература

1. Xue J., Cai W. // Parallel Computing. 2002. Vol. 28, N 5. P. 915–939.
2. Kim D., Rajopdhye S. Parameterized tiling for imperfectly nested loops // Technical Report CS-09–101, Colorado State University, Department of Computer Science, February 2009.
3. Tavarageri S., Hartono A., Baskaran M. et al. Parametric tiling of affine loop nests // Proc. 15th Workshop on Compilers for Parallel Computers. Vienna, Austria, July 2010.
4. Baskaran M., Ramaniyam J., Sadayappan, P. Automatic C-to-CUDA code generation for affine programs // Proc. of the Compiler Construction, 19th International Conference. Part of the Joint European Conferences on Theory and Practice of Software. Paphos, Cyprus, March 2010.
5. Толстикова А. А., Лиходед Н. А. Функции, определяющие информационную структуру зернистых алгоритмов // XI Белорусская математическая конференция: тез. докл. Междунар. науч. конф. Минск, Респ. Беларусь, 5–8 нояб. 2012 г. Минск, 2012. Ч. 3. С. 23–24.
6. Воеводин В. В., Воеводин Вл. В. Параллельные вычисления. СПб., 2002.
7. Соболевский П. И., Баханович С. В. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2012. № 4. С. 111–117.

P. I. SOBOLEVSKY, N. A. LIKHODED, P. A. MANDRIK

THE METHOD OF OBTAINING THE BOUNDARIES OF THE DOMAINS OF THE FUNCTIONS OF GLOBAL DEPENDENCES IN PARALLELING COMPUTATION PROBLEMS

Summary

A method to obtain the domains of the functions of global dependences based on the refined approximations of the set of tiles is developed. The exact presentation of the boundaries of the domains of the functions of global dependences avoids redundant computations in the performance of communication operations and provides more opportunities for granular paralleling algorithms.

УДК 517.948.32:517.544

Э. И. ЗВЕРОВИЧ

ОБОБЩЕНИЕ ФОРМУЛЫ ПЕРЕСТАНОВКИ ПУАНКАРЕ – БЕРТРАНА

Белорусский государственный университет

(Поступила в редакцию 17.01.2014)

Пусть $L \subset \mathbb{C}$ – гладкая замкнутая ориентированная кривая, а функция $\varphi(\zeta, \tau): L \times L \rightarrow \mathbb{C}$ достаточное число раз дифференцируема. Для простоты будем считать, что $\varphi(\zeta, \tau) \in C^\infty(L \times L)$. Формула перестановки Пуанкаре – Бертрана

$$\int_L \frac{d\tau}{\tau-t} \int_L \frac{\varphi(\zeta, \tau) d\zeta}{\zeta-\tau} = -\pi^2 \varphi(t, t) + \int_L d\zeta \int_L \frac{\varphi(\zeta, \tau) d\tau}{(\tau-t)(\zeta-\tau)}, \quad t \in L, \quad (1)$$

касается изменения порядка интегрирования в повторном сингулярном интеграле, где оба интеграла (внешний и внутренний) понимаются в смысле главного значения по Коши.

Повторный интеграл

$$\int_L \frac{d\tau}{(\tau-t)^{m+1}} \int_L \frac{\varphi(\zeta, \tau) d\zeta}{(\zeta-\tau)^{n+1}}, \quad t \in L, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2)$$

существует в смысле конечной части по Адамару [1, с. 123–125] и является более общим по сравнению с интегралом, стоящим в левой части равенства (1). Цель этой работы – обобщить формулу (1) на повторный интеграл (2). Все интегралы, встречающиеся ниже, понимаются в смысле конечной части по Адамару. Предварительно установим следующую простую лемму.

Л е м м а. *При любых целых $m \geq 0$, $n \geq 0$ и при $t \in L$, $\zeta \in L$ имеем:*

$$\int_L \frac{d\tau}{(\tau-t)^{m+1} (\zeta-\tau)^{n+1}} = 0. \quad (3)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выбрасывая из контура L части, попадающие в круги $|z-t| < \rho$ и $|z-\zeta| < \rho$ соответственно с центрами в точках t и ζ , достаточно малого радиуса ρ и заменяя выброшенные части дугами окружностей, видим, что интеграл (3) равен произведению πi на сумму вычетов подынтегральной функции в точках t и ζ . При $t \neq \zeta$ имеем:

$$\begin{aligned} \int_L \frac{d\tau}{(\tau-t)^{m+1} (\zeta-\tau)^{n+1}} &= \pi i \left[\operatorname{res}_{\tau=t} \frac{1}{(\tau-t)^{m+1} (\zeta-\tau)^{n+1}} + \operatorname{res}_{\tau=\zeta} \frac{1}{(\tau-t)^{m+1} (\zeta-\tau)^{n+1}} \right] = \\ &= (-1)^{n+1} \frac{\pi i}{m!} \left(\frac{d}{d\tau} \right)^m (\tau-\zeta)^{-n-1} \Big|_{\tau=t} + \frac{\pi i}{n!} \left(\frac{d}{d\tau} \right)^n (\tau-\zeta)^{-m-1} \Big|_{\tau=\zeta} = \\ &= \frac{\pi i}{m!} \frac{(-n-1)(-n-2)\dots(-n-m)}{(t-\zeta)^{n+m+1}} + \frac{\pi i}{n!} \frac{(-m-1)(-m-2)\dots(-m-n)}{(t-\zeta)^{m+n+1}} = \\ &= \frac{\pi i (m+n)!}{m! n!} \left[\frac{(-1)^m}{(t-\zeta)^{n+m+1}} + \frac{(-1)^n}{(-1)^{n+m+1} (t-\zeta)^{m+n+1}} \right] = 0. \end{aligned}$$

Если же $\tau = \zeta$, то

$$\int_L \frac{d\tau}{(\tau-t)^{m+n+2}} = \pi i \cdot \text{res}_{\tau=t} \frac{1}{(\tau-t)^{m+n+2}} = \frac{\pi i}{(m+n+1)!} \left(\frac{d}{d\tau} \right) (1) = 0.$$

Лемма доказана.

Будем использовать следующие равенства:

$$\left(\frac{d}{dt} \right)^m \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t} d\tau = \int_L \frac{\varphi^{(m)}(\tau)}{\tau-t} d\tau = m! \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-t)^{m+1}}, \quad t \in L. \quad (4)$$

Первое из них принадлежит Р. С. Исаханову, Ю. М. Крикунову [2, с. 43], а второе является следствием установленных в работе [3] обобщенных формул Сохоцкого

$$\Phi(t^\pm) = \pm \frac{1}{2} \varphi^{(m)}(t) + \frac{m!}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-z)^{m+1}}, \quad t \in L,$$

для интеграла

$$\Phi(z) = \frac{m!}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-t)^{m+1}}, \quad z \notin L.$$

Переходя непосредственно к обобщению формулы (1), запишем сначала ее для частной производной $\frac{\partial^n \varphi(\zeta, \tau)}{\partial \zeta^n}$:

$$\int_L \frac{d\tau}{\tau-t} \int_L \frac{\partial^n \varphi(\zeta, \tau)}{\partial \zeta^n} \frac{d\zeta}{\zeta-\tau} = -\pi^2 \frac{\partial^n \varphi(\zeta, t)}{\partial \zeta^n} \Big|_{\zeta=t} + \int_L d\zeta \int_L \frac{\partial^n \varphi(\zeta, \tau)}{\partial \zeta^n} \frac{d\tau}{(\tau-t)(\zeta-\tau)}.$$

В силу (4) это равенство можно переписать в следующем виде:

$$n! \int_L \frac{d\tau}{\tau-t} \int_L \frac{\varphi(\zeta, \tau)}{(\zeta-\tau)^{n+1}} = -\pi^2 \frac{\partial^n \varphi(\zeta, t)}{\partial \zeta^n} \Big|_{\zeta=t} + n! \int_L d\zeta \int_L \frac{\varphi(\zeta, \tau) d\tau}{L(\tau-t)(\zeta-\tau)^{n+1}}. \quad (5)$$

Действуя на это равенство оператором $\left(\frac{d}{dt} \right)^m$, получим:

$$\begin{aligned} & m! n! \int_L \frac{d\tau}{(\tau-t)^{m+1}} \int_L \frac{\varphi(\zeta, \tau) d\zeta}{(\zeta-\tau)^{n+1}} = \\ & = -\pi^2 \left(\frac{d}{dt} \right)^m \left[\frac{\partial^n \varphi(\zeta, \tau)}{\partial \zeta^n} \Big|_{\zeta=t} \right] + n! \left(\frac{d}{dt} \right)^m \int_L d\zeta \int_L \frac{\varphi(\zeta, \tau) d\tau}{L(\tau-t)(\zeta-\tau)^{n+1}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Осталось показать, что в последнем слагаемом равенства (6) можно дифференцировать под знаком повторного интеграла. С этой целью разложим $\varphi(\zeta, \tau)$ по степеням разности $\tau - \zeta$:

$$\varphi(\zeta, \tau) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \frac{\partial^k \varphi(\zeta, \tau)}{\partial \tau^k} \Big|_{\tau=\zeta} \cdot (\tau-\zeta)^k + (\zeta-\tau)^{n+1} r(\zeta, \tau), \quad (7)$$

где $r(\zeta, \tau) \in C^\infty(L, L)$. Тогда получим

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d}{dt} \right)^m \int_L d\zeta \int_L \frac{\varphi(\zeta, \tau) d\tau}{L(\tau-t)(\zeta-\tau)^{n+1}} = \\ & = \left(\frac{d}{dt} \right)^m \left[\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \int_L \frac{\partial^k \varphi(\zeta, \tau)}{\partial \tau^k} \Big|_{\tau=\zeta} d\zeta \int_L \frac{d\tau}{L(\tau-t)(\zeta-\tau)^{n+1-k}} + \int_L \frac{r(\zeta, \tau)}{\tau-t} d\tau \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

В силу леммы в последнем равенстве все внутренние интегралы под знаком суммы равны нулю. Значит, и вся сумма равна нулю, и мы имеем

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt}\right)^m \int_L d\zeta \int_L \frac{\varphi(\zeta, \tau) d\tau}{(\tau-t)(\zeta-\tau)^{n+1}} &= \left(\frac{d}{dt}\right)^m \int_L d\zeta \int_L \frac{r(\zeta, \tau)}{\tau-t} d\tau = \\ &= \int_L d\zeta \left(\frac{d}{dt}\right)^m \int_L \frac{r(\zeta, \tau)}{\tau-t} d\tau = m! \int_L d\zeta \int_L \frac{r(\zeta, \tau) d\tau}{(\tau-t)^{m+1}}. \end{aligned}$$

Подставим сюда вместо $r(\zeta, \tau)$ выражение из (7) и, опять воспользовавшись леммой, получим

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt}\right)^m \int_L d\zeta \int_L \frac{\varphi(\zeta, \tau) d\tau}{(\tau-t)(\zeta-\tau)^{n+1}} &= -m! \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \int_L \frac{\partial^k \varphi(\zeta, \tau)}{\partial \tau^k} \Big|_{\tau=\zeta} d\zeta \int_L \frac{d\tau}{(\zeta-\tau)^{n+1} (\tau-t)^{m+1}} + \\ &+ m! \int_L d\zeta \int_L \frac{\varphi(\zeta, \tau) d\tau}{(\zeta-\tau)^{n+1} (\tau-t)^{m+1}} = m! \int_L d\zeta \int_L \frac{\varphi(\zeta, \tau) d\tau}{(\tau-t)^{m+1} (\zeta-\tau)^{n+1}}. \end{aligned}$$

Подставив это в правую часть равенства (6) и разделив на $m!n!$, получим окончательно

$$\int_L \frac{d\tau}{(\tau-t)^{m+1}} \int_L \frac{\varphi(\zeta, \tau) d\zeta}{(\zeta-\tau)^{n+1}} = -\frac{\pi^2}{m!n!} \left(\frac{d}{dt}\right)^m \left[\left(\frac{d}{d\zeta}\right)^n \varphi(\zeta, \tau) \Big|_{\zeta=t} \right] + \int_L d\zeta \int_L \frac{\varphi(\zeta, \tau) d\tau}{(\tau-t)^{m+1} (\zeta-\tau)^{n+1}}, \quad t \in L. \quad (9)$$

Это и есть искомое обобщение формулы (1). При $m = n = 0$ формула (9) переходит в формулу (1). В случае, когда $\varphi(\zeta, \tau) \equiv \varphi(\zeta)$, т. е. не зависит от τ , интеграл в правой части равенства (9) исчезает (в силу леммы), и мы имеем равенство

$$\int_L \frac{d\tau}{(\tau-t)^{m+1} (\zeta-\tau)^{n+1}} = -\frac{\pi^2}{m!n!} \varphi^{(m+n)}(t), \quad t \in L,$$

обобщающее известное свойство инволютивности сингулярного интегрального оператора, имеющее место при $m = n = 0$.

Литература

1. Диткин В. А., Прудников А. П. Операционное исчисление. М., 1966.
2. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., 1973.
3. Зверович Э. И. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2012. № 2. С. 24–28.

E. I. ZVEROVICH

GENERALIZATION OF THE COMMUTATION POINCARÉ – BERTRAND FORMULA

Summary

The autor generalizes the formula

$$\int_L \frac{d\tau}{\tau-t} \int_L \frac{\varphi(\zeta, \tau) d\zeta}{\zeta-\tau} = -\pi^2 \varphi(t, t) + \int_L d\zeta \int_L \frac{\varphi(\zeta, \tau) d\tau}{(\tau-t)(\zeta-\tau)}, \quad t \in L,$$

for the integral $\int_L \frac{d\tau}{(\tau-t)^{m+1}} \int_L \frac{\varphi(\zeta, \tau) d\zeta}{(\zeta-\tau)^{n+1}}$ that it is understood in the meaning of the Hadamart finite part.

УДК 517.987.4+519.6

В. Б. МАЛЮТИН

О СООТНОШЕНИИ МЕЖДУ ИНТЕГРАЛАМИ ПО СПИНОВЫМ ПЕРЕМЕННЫМ И ИНТЕГРАЛАМИ ПО АНТИКОММУТИРУЮЩИМ ПЕРЕМЕННЫМ

Институт математики НАН Беларуси

(Поступила в редакцию 28.03.2013)

Введение. Интегралы и суммы по спиновым переменным активно используются в статистической физике, в частности, для представления статистической суммы и корреляционных функций решеточных моделей [1–3]. Спиновые переменные принимают два значения ± 1 . К функциям от спиновых переменных не удается применить методы анализа функций от вещественных переменных, например, методы интегрирования функций. Для преодоления указанных трудностей можно использовать другое представление интеграла по спиновым переменным. В работах [4, 5] интеграл по спиновым переменным записывается в виде среднего значения по точкам, в которых траектории имеют разрыв. Это представление позволяет для решения задачи использовать методы анализа функций от вещественных переменных. Еще один способ решения задач статистической физики – это использование связи между статистической физикой и теорией поля [6–10]. Давно было замечено, что модели статистической физики можно интерпретировать в терминах теории фермионных полей. Если представить модель статистической физики в терминах теории поля, то могут быть применены разнообразные техники теории поля, такие как теория возмущений, вариационные методы, функциональные методы и т. д. Для решения задач статистической физики, записанных на языке теории поля, могут быть использованы методы анализа функций от антикоммутирующих (грасмановых) переменных, в частности, методы интегрирования по антикоммутирующим переменным [11].

Несмотря на известный факт наличия фермионной структуры в моделях статистической физики, в настоящий момент задача представления интегралов или сумм по спиновым переменным в виде интегралов по антикоммутирующим переменным решена только для некоторых классов моделей. В некоторых работах для описания моделей статистической физики не используются спиновые переменные, а сразу записываются выражения в виде интегралов по антикоммутирующим переменным.

В настоящей работе рассматривается соотношение между интегралами по спиновым переменным и интегралами по антикоммутирующим переменным для класса функционалов, имеющих вид полиномов. Также приводится вычисление интегралов по антикоммутирующим и спиновым переменным с помощью формул для гауссовых интегралов.

1. Соотношение между интегралами по спиновым переменным и интегралами по антикоммутирующим переменным. Рассматриваемые в работе интегралы определяются следующим образом. Интеграл по спиновым переменным, определенный на функциях, заданных на отрезке $[0, t]$, принимающих значения ± 1 и удовлетворяющих циклическим граничным условиям $x(t) = x(0)$, определяется равенством

$$\int F(x(\bullet)) d\nu(x) = \lim_j \sum_{\max \Delta t_j \rightarrow 0} \sum_{x_1 = \pm 1} \dots \sum_{x_n = \pm 1} F \left(\sum_{j=1}^n x_j \chi_{[t_{j-1}, t_j]}(\bullet) \right) \prod_{j=1}^n S(\Delta t_j, x_{j-1}, x_j), \quad (1)$$

если этот предел существует для любого разбиения отрезка $[0, t]$ точками $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$.

Здесь $x_j = x(t_j)$; $x_0 = x_n$; $\Delta t_j = t_j - t_{j-1}$; $\chi_{[t_{j-1}, t_j]}(s)$ – характеристическая функция интервала $[t_{j-1}, t_j]$; $S(\Delta t_j, x_{j-1}, x_j)$ – переходная функция, обладающая свойствами:

$$\sum_{x_j=\pm 1} \lim_{\Delta t_j \rightarrow 0} S(\Delta t_j, x_{j-1}, x_j) f(x_j) = f(x_{j-1}),$$

$$\sum_{x_j=\pm 1} S(\Delta t_j, x_{j-1}, x_j) S(\Delta t_{j+1}, x_j, x_{j+1}) = S(\Delta t_j + \Delta t_{j+1}, x_{j-1}, x_{j+1}).$$

Для функционала $F(x(t_1), \dots, x(t_k))$, зависящего от конечного числа точек $0 \leq t_1 < \dots < t_k \leq t$, интеграл по спиновым переменным записывается в виде кратной суммы по спиновым переменным

$$\sum_{x_0=\pm 1} \dots \sum_{x_k=\pm 1} F(x_1, \dots, x_k) \prod_{j=1}^k S(\Delta t_j, x_{j-1}, x_j), \quad x_0 = x_k, \quad \Delta t_1 = t_1 - t_k + t.$$

Интеграл по антикоммутирующим переменным на множестве полиномов, зависящих от u_j, u_j^* , $1 \leq j \leq n$, определяется по следующим правилам интегрирования [6, 11]:

$$\int u du = 1, \quad \int du = 0, \quad \int u^* du^* = 1, \quad \int du^* = 0,$$

$$\int f(u_1, \dots, u_n) u_{n+1} du_1 \dots du_{n+1} = \int f(u_1, \dots, u_n) du_1 \dots du_n. \quad (2)$$

Функциональный интеграл по антикоммутирующим переменным, определенный на функциях $u(\tau)$, $u^*(\tau)$, заданных на отрезке $[0, t]$ и удовлетворяющих граничным условиям $u(t) = -u(0)$, $u^*(t) = -u^*(0)$, определяется равенством

$$\int F(u(\cdot), u^*(\cdot)) d\mu(u, u^*) = \lim_{\max_j \Delta t_j \rightarrow 0} \int \dots \int F \left(\sum_{j=1}^n u_j \chi_{[t_{j-1}, t_j]}(\cdot), \sum_{j=1}^n u_j^* \chi_{[t_{j-1}, t_j]}(\cdot) \right) \times$$

$$\times \exp \left(\sum_{j=1}^n u_j u_j^* \right) \exp \left(b \sum_{j=0}^{n-1} u_j^* u_{j+1} \right) du_1 du_1^* \dots du_n du_n^*, \quad (3)$$

если этот предел существует для любого разбиения отрезка $[0, t]$ точками $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$.

Здесь $u_j = u(t_j)$; $u_j^* = u^*(t_j)$; $u_0 = -u_n$, $u_0^* = -u_n^*$.

В данной работе рассматриваются функционалы вида $F(x(t_1), \dots, x(t_k))$. В силу свойств спиновых переменных функционал указанного вида всегда можно представить в виде полинома $P(x(t_1), \dots, x(t_k))$, зависящего от $x(t_1), \dots, x(t_k)$. Соотношение между интегралами по спиновым переменным и интегралами по антикоммутирующим переменным рассмотрим для функций полиномиального вида.

У т в е р ж д е н и е. Пусть интеграл по спиновым переменным, заданный на функциях с циклическими граничными условиями $x(t) = x(0)$, определяется равенством (1) и переходной функцией $S(\Delta t_j, x_{j-1}, x_j) = \frac{1}{2} (\exp(A_1 \Delta t_j) + \exp(A_2 \Delta t_j) x_{j-1} x_j)$, $\Delta t_j = \frac{t}{n}$.

Пусть функциональный интеграл по антикоммутирующим переменным, заданный на функциях с граничными условиями $u(t) = -u(0)$, $u^*(t) = -u^*(0)$, определяется равенством (3), где $b = \exp \left((A_2 - A_1) \frac{t}{n} \right)$.

Тогда справедливо равенство

$$\int P(x(t_1), \dots, x(t_k)) d\nu(x) = \exp(A_1 t) \int TP(u(t_1) + u^*(t_1), \dots, u(t_k) + u^*(t_k)) d\mu(u, u^*), \quad (4)$$

где символ T – знак хронологического упорядочения.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как интегралы обладают свойством линейности, то достаточно доказать утверждение для функционалов вида $\prod_{j=1}^l x(s_j)$, где $1 \leq l \leq k$, $s_j = t_{r_j}$, $1 \leq r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_l \leq k$.

По определению интеграла

$$\int \prod_{j=1}^l x(s_j) dv(x) = \lim_{\max_j \Delta t_j \rightarrow 0} \sum_{x_1=\pm 1} \dots \sum_{x_n=\pm 1} \prod_{i=1}^l \sum_{j=1}^n x_j \chi_{[t_{j-1}, t_j]}(s_i) \prod_{j=1}^n \frac{1}{2} (\exp(A_1 \Delta t_j) + \exp(A_2 \Delta t_j) x_{j-1} x_j).$$

Выражение под знаком предела можно записать в виде

$$\sum_{x_1=\pm 1} \dots \sum_{x_n=\pm 1} \prod_{j=1}^l x_{q_j} \prod_{j=1}^n \frac{1}{2} (\exp(A_1 \Delta t_j) + \exp(A_2 \Delta t_j) x_{j-1} x_j), \quad (5)$$

где $t_{q_{j-1}} < s_j \leq t_{q_j}$.

В выражении (5) поставим каждому множителю x_j в соответствие вершину с номером j и одной линией, выходящей из этой вершины.

Так как $\sum_{x_k=\pm 1} F(x_1, \dots, x_{k-1}) x_k = 0$, то ненулевой вклад дадут только траектории с двумя линиями в каждой вершине, т. е. траектории, дающие ненулевой вклад, не могут начинаться или заканчиваться в вершине и, следовательно, являются замкнутыми.

Так как в выражении (5) степень каждого множителя x_j меньше либо равна трем, то каждая вершина содержит не более трех линий и, следовательно, траектории не имеют пересечений, так как в случае пересечений минимальное число линий в вершине равно четырем.

Таким образом, выражение (5) равно сумме по всем непересекающимся замкнутым траекториям, которые соединяют все линии, выходящие из вершин. Слагаемые в сумме равны $\exp(A_1 t) \exp\left((A_2 - A_1) \frac{pt}{n}\right)$, где $2p$ равно количеству линий траектории, соответствующих x_j , взятым из выражения $\prod_{j=1}^n \frac{1}{2} (\exp(A_1 \Delta t_j) + \exp(A_2 \Delta t_j) x_{j-1} x_j)$.

Рассмотрим выражение

$$\exp(A_1 t) \int \prod_{j=1}^l (u_{q_j} + u_{q_j}^*) \exp\left(\sum_{j=1}^n u_j u_j^*\right) \exp\left(\exp\left((A_2 - A_1) \frac{t}{n}\right) \sum_{j=0}^{n-1} u_j^* u_{j+1}\right) du_1 du_1^* \dots du_n du_n^* \quad (6)$$

В выражении (6) поставим каждому множителю u_j в соответствие вершину с номером j и одной линией, выходящей из этой вершины, каждому множителю u_j^* – в соответствие вершину с номером j и одной линией, входящей в эту вершину.

Так как

$$\int f(u_1, u_1^*, \dots, u_n, u_n^*) u_{n+1} du_1 du_1^* \dots du_{n+1} du_{n+1}^* = \int f(u_1, u_1^*, \dots, u_n, u_n^*) u_{n+1}^* du_1 du_1^* \dots du_{n+1} du_{n+1}^* = 0,$$

то ненулевой вклад дадут только траектории с одной входящей и одной выходящей линией в каждой вершине, т. е. траектории, дающие ненулевой вклад, являются замкнутыми.

Так как $u_j^2 = u_j^{*2} = 0$, то каждая вершина содержит не более одной входящей и одной выходящей линии и, следовательно, траектории не имеют пересечений.

Значит, выражение (6) равно сумме по всем непересекающимся замкнутым траекториям, которые соединяют все линии, выходящие из вершин. Слагаемые в сумме равны $\exp(A_1 t) \exp\left((A_2 - A_1) \frac{pt}{n}\right)$, где p равно количеству линий траектории, соответствующих u_j , взятым из выражения $\exp\left(\exp\left((A_2 - A_1) \frac{t}{n}\right) \sum_{j=0}^{n-1} u_j^* u_{j+1}\right)$.

Таким образом, выражения (5) и (6) записываются в виде сумм с одинаковыми областями суммирования и слагаемые, соответствующие одинаковым траекториям, равны между собой. Следовательно, выражения (5) и (6) равны между собой.

Так как интегралы $\int \prod_{j=1}^l x(s_j) dv(x)$ существуют [12], то существуют пределы при $\max_j \Delta t_j \rightarrow 0$ выражений (5) и (6) и значения пределов равны. Следовательно, справедливо равенство (4) и утверждение доказано.

2. Вычисление интегралов по антикоммутирующим переменным от полиномов. Как упоминалось выше, для вычисления интегралов по антикоммутирующим переменным можно использовать методы, которые не удавалось применить к интегралам по спиновым переменным. В данном разделе рассматривается применение формул для гауссовых интегралов к вычислению интегралов по антикоммутирующим и спиновым переменным.

Показатель экспонент в равенстве (3) можно записать в виде

$$\sum_{j=1}^n u_j u_j^* + b \sum_{j=0}^{n-1} u_j^* u_{j+1} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n C_{ij}^{-1} v_i v_j,$$

где

$$v_j = u_j, \quad 1 \leq j \leq n, \quad v_j = u_{j-n}^*, \quad n+1 \leq j \leq 2n, \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & C_1^{-1} \\ -(C_1^{-1})^T & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \exp\left((A_2 - A_1)\frac{t}{n}\right) \\ -\exp\left((A_2 - A_1)\frac{t}{n}\right) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\exp\left((A_2 - A_1)\frac{t}{n}\right) & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как пфаффиан $\text{Pf}(C^{-1})$ матрицы C^{-1} равен $(\exp((A_2 - A_1)t) + 1)(-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}$, то интеграл

$$\int F(u_1, u_1^*, \dots, u_n, u_n^*) \exp\left(\sum_{j=1}^n u_j u_j^*\right) \exp\left(b \sum_{j=0}^{n-1} u_j^* u_{j+1}\right) du_1 du_1^* \dots du_n du_n^*$$

можно переписать в виде

$$\frac{\exp((A_2 - A_1)t) + 1}{\text{Pf}(C^{-1})} \int F(v_1, v_2, \dots, v_{2n}) \exp\left(\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n C_{ij}^{-1} v_i v_j\right) dv_1 \dots dv_{2n}.$$

Матрица C , обратная к матрице C^{-1} , имеет вид $C = \begin{pmatrix} 0 & -C_1^T \\ C_1 & 0 \end{pmatrix}$. Матрица C_1 , обратная к матрице C_1^{-1} , имеет вид

$$C_1 = \frac{1}{e^{(A_2 - A_1)t} + 1} \begin{pmatrix} 1 & -e^{(A_2 - A_1)\frac{(n-1)t}{n}} & -e^{(A_2 - A_1)\frac{(n-2)t}{n}} & \dots & -e^{(A_2 - A_1)\frac{2t}{n}} & -e^{(A_2 - A_1)\frac{t}{n}} \\ e^{(A_2 - A_1)\frac{t}{n}} & 1 & -e^{(A_2 - A_1)\frac{(n-1)t}{n}} & \dots & -e^{(A_2 - A_1)\frac{3t}{n}} & -e^{(A_2 - A_1)\frac{2t}{n}} \\ e^{(A_2 - A_1)\frac{2t}{n}} & e^{(A_2 - A_1)\frac{t}{n}} & 1 & \dots & -e^{(A_2 - A_1)\frac{4t}{n}} & -e^{(A_2 - A_1)\frac{3t}{n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ e^{(A_2 - A_1)\frac{(n-2)t}{n}} & e^{(A_2 - A_1)\frac{(n-3)t}{n}} & e^{(A_2 - A_1)\frac{(n-4)t}{n}} & \dots & 1 & -e^{(A_2 - A_1)\frac{(n-1)t}{n}} \\ e^{(A_2 - A_1)\frac{(n-1)t}{n}} & e^{(A_2 - A_1)\frac{(n-2)t}{n}} & e^{(A_2 - A_1)\frac{(n-3)t}{n}} & \dots & e^{(A_2 - A_1)\frac{t}{n}} & 1 \end{pmatrix}.$$

Через элементы матрицы C выражаются моменты второго порядка, а именно справедливо равенство [13, 14]

$$\frac{1}{\text{Pf}(C^{-1})} \int v_i v_j \exp\left(\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n C_{ij}^{-1} v_i v_j\right) dv_1 \dots dv_{2n} = -C_{ij}.$$

Если перейти к переменным u_j, u_j^* , то равенства примут вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\text{Pf}(C^{-1})} \int u_i u_j \exp\left(\sum_{j=1}^n u_j u_j^*\right) \exp\left(b \sum_{j=0}^{n-1} u_j^* u_{j+1}\right) du_1 \dots du_n du_1^* \dots du_n^* = 0, \\ & \frac{1}{\text{Pf}(C^{-1})} \int u_i^* u_j^* \exp\left(\sum_{j=1}^n u_j u_j^*\right) \exp\left(b \sum_{j=0}^{n-1} u_j^* u_{j+1}\right) du_1 \dots du_n du_1^* \dots du_n^* = 0, \\ & \frac{1}{\text{Pf}(C^{-1})} \int u_i u_j^* \exp\left(\sum_{j=1}^n u_j u_j^*\right) \exp\left(b \sum_{j=0}^{n-1} u_j^* u_{j+1}\right) du_1 \dots du_n du_1^* \dots du_n^* = \\ & = -C(i, n+j) = C_1^T(i, j) = C_1(j, i) = \frac{1}{e^{(A_2-A_1)t} + 1} \begin{cases} e^{(A_2-A_1)\frac{(j-i)t}{n}}, & i \leq j \\ -e^{(A_2-A_1)\frac{(n+j-i)t}{n}}, & i > j \end{cases}. \end{aligned} \quad (7)$$

Если перейти к функциям $u_j = u(t_j), u_j^* = u^*(t_j)$, то равенства примут вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{e^{(A_2-A_1)t} + 1} \int u(t_1)u(t_2)d\mu(u, u^*) = 0, \quad \frac{1}{e^{(A_2-A_1)t} + 1} \int u^*(t_1)u^*(t_2)d\mu(u, u^*) = 0, \\ & \frac{1}{e^{(A_2-A_1)t} + 1} \int u(t_1)u^*(t_2)d\mu(u, u^*) = \frac{1}{e^{(A_2-A_1)t} + 1} \begin{cases} e^{(A_2-A_1)(t_2-t_1)}, & t_1 \leq t_2 \\ -e^{(A_2-A_1)(t+t_2-t_1)}, & t_1 > t_2 \end{cases}. \end{aligned} \quad (8)$$

Обозначим $v(\tau) = u(\tau), 0 \leq \tau \leq t, v(t+\tau) = u^*(\tau), 0 \leq \tau \leq t, \int F(v(\cdot))d\mu(v) = \int F(u(\cdot), u^*(\cdot))d\mu(u, u^*)$. Тогда моменты, имеющие порядок выше второго, записываются с помощью формул (8) и формул для гауссовых интегралов по грассмановым (антикоммутирующим) величинам [13, 14]

$$\frac{1}{e^{(A_2-A_1)t} + 1} \int v(t_1)v(t_2)\dots v(t_{2k})d\mu(v) = 2^{-k} \sum (-1)^p \frac{\int v(t_{j_1})v(t_{j_2})d\mu(v)}{e^{(A_2-A_1)t} + 1} \dots \frac{\int v(t_{j_{2k-1}})v(t_{j_{2k}})d\mu(v)}{e^{(A_2-A_1)t} + 1},$$

где суммирование производится по всем перестановкам $(j_1, j_2, \dots, j_{2k})$ чисел $(1, 2, \dots, 2k)$; p – четность перестановки $(j_1, j_2, \dots, j_{2k})$.

Приведем примеры вычисления интегралов, определяемых равенством (3), где $b = \exp\left((A_2 - A_1)\frac{t}{n}\right)$. Во всех случаях $t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4$.

Пример 1.

$$\begin{aligned} & \int u(t_1)u^*(t_2)u(t_3)u^*(t_4)d\mu(u, u^*) = (e^{(A_2-A_1)t} + 1) \times \\ & \times \left(\frac{\int u(t_1)u^*(t_2)d\mu(u, u^*)}{e^{(A_2-A_1)t} + 1} \frac{\int u(t_3)u^*(t_4)d\mu(u, u^*)}{e^{(A_2-A_1)t} + 1} + \frac{\int u(t_1)u^*(t_4)d\mu(u, u^*)}{e^{(A_2-A_1)t} + 1} \frac{\int u^*(t_2)u(t_3)d\mu(u, u^*)}{e^{(A_2-A_1)t} + 1} \right) = \\ & = (e^{(A_2-A_1)t} + 1) \left(\frac{e^{(A_2-A_1)(t_2-t_1)}}{e^{(A_2-A_1)t} + 1} \frac{e^{(A_2-A_1)(t_4-t_3)}}{e^{(A_2-A_1)t} + 1} - \frac{e^{(A_2-A_1)(t_4-t_1)}}{e^{(A_2-A_1)t} + 1} \frac{-e^{(A_2-A_1)(t+t_2-t_3)}}{e^{(A_2-A_1)t} + 1} \right) = \\ & = \frac{e^{(A_2-A_1)(t_2-t_1+t_4-t_3)}}{e^{(A_2-A_1)t} + 1} + \frac{e^{(A_2-A_1)(t_4-t_1+t+t_2-t_3)}}{e^{(A_2-A_1)t} + 1} = e^{(A_2-A_1)(t_2-t_1+t_4-t_3)}. \end{aligned}$$

Пример 2.

$$\begin{aligned} & \int u^*(t_1)u(t_2)u^*(t_3)u(t_4)d\mu(u, u^*) = (e^{(A_2-A_1)t} + 1) \times \\ & \times \left(\frac{\int u^*(t_1)u(t_2)d\mu(u, u^*)}{e^{(A_2-A_1)t} + 1} \frac{\int u^*(t_3)u(t_4)d\mu(u, u^*)}{e^{(A_2-A_1)t} + 1} + \frac{\int u^*(t_1)u(t_4)d\mu(u, u^*)}{e^{(A_2-A_1)t} + 1} \frac{\int u(t_2)u^*(t_3)d\mu(u, u^*)}{e^{(A_2-A_1)t} + 1} \right) = \\ & = (e^{(A_2-A_1)t} + 1) \left(\frac{e^{(A_2-A_1)(t+t_1-t_2)}}{e^{(A_2-A_1)t} + 1} \frac{e^{(A_2-A_1)(t+t_3-t_4)}}{e^{(A_2-A_1)t} + 1} + \frac{e^{(A_2-A_1)(t+t_1-t_4)}}{e^{(A_2-A_1)t} + 1} \frac{e^{(A_2-A_1)(t_3-t_2)}}{e^{(A_2-A_1)t} + 1} \right) = \\ & = \frac{e^{(A_2-A_1)(2t+t_1-t_2+t_3-t_4)}}{e^{(A_2-A_1)t} + 1} + \frac{e^{(A_2-A_1)(t+t_1-t_4+t_3-t_2)}}{e^{(A_2-A_1)t} + 1} = e^{(A_2-A_1)(t+t_1-t_2+t_3-t_4)}. \end{aligned}$$

Пример 3.

$$\int u(t_1)u(t_2)u^*(t_3)u^*(t_4)d\mu(u, u^*) = (e^{(A_2-A_1)t} + 1) \times$$

$$\times \left(\frac{\int u(t_1)u^*(t_3)d\mu(u, u^*) \int u(t_2)u^*(t_4)d\mu(u, u^*)}{e^{(A_2-A_1)t} + 1} + \frac{\int u(t_1)u^*(t_4)d\mu(u, u^*) \int u(t_2)u^*(t_3)d\mu(u, u^*)}{e^{(A_2-A_1)t} + 1} \right) =$$

$$= (e^{(A_2-A_1)t} + 1) \left(-\frac{e^{(A_2-A_1)(t_3-t_1)}}{e^{(A_2-A_1)t} + 1} \frac{e^{(A_2-A_1)(t_4-t_2)}}{e^{(A_2-A_1)t} + 1} + \frac{e^{(A_2-A_1)(t_4-t_1)}}{e^{(A_2-A_1)t} + 1} \frac{e^{(A_2-A_1)(t_3-t_2)}}{e^{(A_2-A_1)t} + 1} \right) = 0.$$

Пример 4.

$$\int u(t_1)u^*(t_2)u^*(t_3)u(t_4)d\mu(u, u^*) = (e^{(A_2-A_1)t} + 1) \times$$

$$\times \left(\frac{\int u(t_1)u^*(t_2)d\mu(u, u^*) \int u^*(t_3)u(t_4)d\mu(u, u^*)}{e^{(A_2-A_1)t} + 1} - \frac{\int u(t_1)u^*(t_3)d\mu(u, u^*) \int u^*(t_2)u(t_4)d\mu(u, u^*)}{e^{(A_2-A_1)t} + 1} \right) =$$

$$= (e^{(A_2-A_1)t} + 1) \left(\frac{e^{(A_2-A_1)(t_2-t_1)}}{e^{(A_2-A_1)t} + 1} \frac{e^{(A_2-A_1)(t+t_3-t_4)}}{e^{(A_2-A_1)t} + 1} - \frac{e^{(A_2-A_1)(t_3-t_1)}}{e^{(A_2-A_1)t} + 1} \frac{e^{(A_2-A_1)(t+t_2-t_4)}}{e^{(A_2-A_1)t} + 1} \right) = 0.$$

Приведем пример вычисления интеграла по спиновым переменным, определяемого равенством (1) и переходной функцией $S(\Delta t_j, x_{j-1}, x_j) = \frac{1}{2}(\exp(A_1 \Delta t_j) + \exp(A_2 \Delta t_j)x_{j-1}x_j)$, $\Delta t_j = \frac{t}{n}$, с помощью соотношения (4) и формул для интегралов по антикоммутирующим переменным. Пусть $t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4$.

$$\int x(t_1) \dots x(t_4) dv(x) = \exp(A_1 t) \int (u(t_1) + u^*(t_1)) \dots (u(t_4) + u^*(t_4)) d\mu(u, u^*) =$$

$$= \exp(A_1 t) \left(\int u(t_1)u^*(t_2)u(t_3)u^*(t_4)d\mu(u, u^*) + \int u^*(t_1)u(t_2)u^*(t_3)u(t_4)d\mu(u, u^*) \right) =$$

$$= \exp(A_1 t) (e^{(A_2-A_1)(t_2-t_1+t_4-t_3)} + e^{(A_2-A_1)(t+t_1-t_2+t_3-t_4)}).$$

Литература

1. Попов В. Н. Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике. М., 1976.
2. Джимбо М., Мива Т. Алгебраический анализ точно решаемых моделей. Ижевск, 2000.
3. Fradkin E. S., Shteingradt D. M. // Nuovo Cimento. 1978. Vol. 47A, N 1. P. 115–138.
4. Малютин В. Б. // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2009. Т. 17, № 2. С. 45–55.
5. Малютин В. Б. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2012. № 3. С. 18–25.
6. Plechko V. N. // Physica A. 1988. Vol. 152. P. 51–97.
7. Samuel S. // J. Math. Phys. 1980. Vol. 21, N 12. P. 2806–2814.
8. Samuel S. // J. Math. Phys. 1980. Vol. 21, N 12. P. 2815–2819.
9. Samuel S. // J. Math. Phys. 1980. Vol. 21, N 12. P. 2820–2833.
10. Samuel S. // Nuclear Physics. 1991. Vol. B350. P. 729–744.
11. Владимиров В. С., Волович И. В. // Теорет. и мат. физика. 1984. Т. 60, № 2. С. 169–198.
12. Малютин В. Б. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2009. № 4. С. 16–19.
13. Roepstorff G. Path integral approach to quantum physics. An introduction. Springer-Verlag, 1996.
14. Малютин В. Б. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 1995. № 1. С. 16–23.

V. B. MALYUTIN

RELATION BETWEEN THE INTEGRALS WITH RESPECT TO SPIN VARIABLES AND THE INTEGRALS WITH RESPECT TO ANTICOMMUTING VARIABLES

Summary

The representation of a special class of integrals with respect to spin variables by means of integrals with respect to anticommuting variables is obtained. Evaluation of integrals with respect to anticommuting and spin variables by means of the formulas for Gaussian integrals with respect to anticommuting variables is presented.

УДК 517.987.4+519.216

Э. А. АЙРЯН¹, А. Д. ЕГОРОВ², Л. А. СЕВАСТЬЯНОВ³

**К ВЫЧИСЛЕНИЮ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЖИДАНИЙ
 СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ**

¹Объединенный институт ядерных исследований (Дубна, Россия)

²Институт математики НАН Беларуси

³Российский университет дружбы народов (Москва, Россия)

(Поступила в редакцию 14.03.2014)

В работе рассматривается задача приближенного вычисления математического ожидания функционалов от случайных процессов вида $F(\omega, X_{(\cdot)}(\omega)) = \int_0^t A(s, \omega) X_s(\omega) ds$, где $A(s, \omega)$, $X(s, \omega)$ – процессы, заданные на пространстве (Ω, \mathcal{F}, P) ; Ω – пространство с гауссовой мерой P на сигма-алгебре \mathcal{F} , порожденной цилиндрическими множествами Ω . В дальнейшем, не уменьшая общности, ограничимся случаем, когда $\omega = Y_{(\cdot)} \equiv Y$ – гауссовский процесс на $[0, t]$; таким образом, рассматривается задача вычисления математических ожиданий

$$E\left[F(\omega, X_{(\cdot)}(\omega))\right] = E\left[\int_0^t A(s, Y_{(\cdot)}) X_s(Y_{(\cdot)}) ds\right] \equiv I. \quad (1)$$

Функционалы рассматриваемого типа возникают, в частности, как линейные члены разложения в функциональный ряд Тейлора нелинейных функционалов $G(\omega, X_{(\cdot)}(\omega)) = G(\omega, 0) + \int_0^t G'(\omega, 0) X(s, \omega) ds + R(G)$, где $G'(\omega, 0)$ – функциональная производная; $R(G)$ – остаточный член разложения. В общем случае даже задача вычисления математических ожиданий от каждого из процессов $A(s, Y_{(\cdot)})$ и $X_s(Y_{(\cdot)})$, в том числе и при фиксированном s , представляет собой сложную вычислительную проблему, решению которой посвящено большое количество работ (см. [1, 2] и приведенные в них ссылки). Однако непосредственное применение разработанных методов к ожиданиям вида (1) в большинстве случаев малоэффективно. В работе [3] предложен подход к вычислению (1), заключающийся в предварительном использовании для приближенного вычисления математического ожидания (1) следующей аппроксимации:

$$I \approx I_{K,N} = \int_0^t \left(\sum_{\alpha \in J_{K,N}} a_\alpha(s) x_\alpha(s) \right) ds, \quad a_\alpha(s) = E[A(s, Y) T_\alpha], \quad x_\alpha(s) = E[X_s T_\alpha],$$

которая получается подстановкой в (1) гауссовских хаотических разложений (см. [2]):

$$X_s(Y) = \sum_{\alpha \in J} x_\alpha(s) T_\alpha, \quad A(s, Y) = \sum_{\alpha \in J} a_\alpha(s) T_\alpha, \quad (2)$$

где $T_\alpha = T_\alpha(Y) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} H_\alpha(Y)$, $H_\alpha(Y) = \prod_{i=1}^{\infty} H_{\alpha_i}(\xi_i)$, $H_{\alpha_i}(u)$ – эрмитов многочлен на R , $\xi_i = (e_i, Y)$ – измеримый линейный функционал на Ω , $e_i = e_i^t(s)$, $i = 1, 2, \dots$, – ортонормированный базис про-

пространства Камерона – Мартина \mathcal{H} (см. [1, 2]) процесса $Y(s), s \in [0, t]; J = \left\{ \alpha = (\alpha_i)_{i \geq 1} \mid \alpha_i \in \{0, 1, 2, \dots\}, |\alpha| = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i < \infty \right\}; \alpha! = \prod_i \alpha_i!, J_{K,N} \subset J$ – подмножество индексов α , для которых $|\alpha| \leq N, i \leq K, K, N$ – целые положительные числа. Семейство функционалов $\{T_\alpha\}, \alpha \in J$, образует полную ортонормированную систему в $L_2(\Omega, P)$, и в предположении (которое в дальнейшем будет считаться выполненным), что $E[X_s^2(Y)] < \infty, E[A^2(s, Y)] < \infty$, разложения (2) сходятся в этом пространстве. Предполагается также, что $E\left[\int_0^t A(s, Y(\cdot)) X_s(Y(\cdot)) ds\right] = \int_0^t E\left[A(s, Y(\cdot)) X_s(Y(\cdot))\right] ds$. Обозначим через $\delta^{(\alpha)} f(Y; e_\alpha)$ вариацию функционала $f(Y)$ по направлению $e_\alpha = (e_{\alpha_1}, \dots, e_{\alpha_n}) \in \mathcal{H}$.

Т е о р е м а 1. Пусть функционал $A(s, Y)$ имеет производную порядка m по подпространству Камерона – Мартина процесса Y (см. [1, 2]). Тогда имеет место оценка:

$$a_\alpha(s) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\alpha!}} E\left[\delta^{(\alpha)} A(s, Y; e_\alpha)\right] & \text{для } |\alpha| \leq m, \\ \left(\frac{\gamma!}{(\beta + \gamma)!}\right)^{1/2} \left(E\left[\left(\delta^{(\beta)} A(s, Y; e_\beta)\right)^2\right]\right)^{1/2} & \text{для } \alpha = \beta + \gamma, |\beta| = m, \gamma \in J. \end{cases}$$

Доказательство. Имеем: $a_\alpha(s) = E[A(s, Y) T_\alpha] = \frac{1}{\sqrt{\alpha!}} E[A(s, Y) H_\alpha(Y)]$, где $e_\alpha = (e_{\alpha_1}, \dots, e_{\alpha_n})$. Воспользовавшись далее соотношением (см. [1]) $E[f(Y) H_\alpha(Y)] = E[\delta^{(\alpha)} f(Y; e_\alpha)]$, получим $a_\alpha(s) = \frac{1}{\sqrt{\alpha!}} E[\delta^{(\alpha)} A(s, Y; e_\alpha)]$ для $|\alpha| \leq m$. В случае $|\alpha| > m$ будем иметь, положив $\alpha = \beta + \gamma$, где $|\beta| = m$ и $\gamma \in J$:

$$\begin{aligned} a_\alpha(s) &= \frac{1}{\sqrt{(\beta + \gamma)!}} E\left[\delta^{(\beta + \gamma)} A(s, Y; e_\alpha)\right] = \frac{1}{\sqrt{(\beta + \gamma)!}} E\left[\delta^{(\beta)} A(s, Y; e_\beta) H_\gamma(Y)\right] = \\ &= \frac{\sqrt{\gamma!}}{\sqrt{(\beta + \gamma)!}} E\left[\delta^{(\beta)} A(s, Y; e_\beta) T_\gamma(Y)\right] \leq \\ &\leq \left(\frac{\gamma!}{(\beta + \gamma)!}\right)^{1/2} \left(E\left[\left(\delta^{(\beta)} A(s, Y; e_\beta)\right)^2\right]\right)^{1/2} \left(E\left[\left(T_\gamma(Y)\right)^2\right]\right)^{1/2} = \\ &= \left(\frac{\gamma!}{(\beta + \gamma)!}\right)^{1/2} \left(E\left[\left(\delta^{(\beta)} A(s, Y; e_\beta)\right)^2\right]\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

С л е д с т в и е. Пусть $A(s, Y)$ имеет производные любого порядка по подпространству \mathcal{H} . Тогда для погрешности $R_{K,N} = I - I_{K,N}$ аппроксимации (1) имеет место оценка

$$R_{K,N} = \left(\int_0^t \left(\sum_{\alpha \in J \setminus J_{K,N}} \frac{1}{\alpha!} \left(E\left[\delta^{(\alpha)} A(s, Y; e_\alpha)\right]\right)^2\right) ds\right)^{1/2} \left(\int_0^t \left(\sum_{\alpha \in J \setminus J_{K,N}} x_\alpha^2(s)\right) ds\right)^{1/2}. \quad (3)$$

Доказательство. Используя неравенство Коши – Буняковского, получим

$$R_{K,N} = \int_0^t \left(\sum_{\alpha \in J \setminus J_{K,N}} a_\alpha(s) x_\alpha(s)\right) ds \leq \int_0^t \left(\sum_{\alpha \in J \setminus J_{K,N}} a_\alpha^2(s)\right)^{1/2} \left(\sum_{\alpha \in J \setminus J_{K,N}} x_\alpha^2(s)\right)^{1/2} ds \leq$$

$$\leq \left(\int_0^t \left(\sum_{\alpha \in J \setminus J_{K,N}} a_\alpha^2(s) \right) ds \right)^{1/2} \left(\int_0^t \left(\sum_{\alpha \in J \setminus J_{K,N}} x_\alpha^2(s) \right) ds \right)^{1/2}. \quad (4)$$

Применяя приведенное в доказательстве теоремы 1 интегральное равенство, связывающее вариационные производные и функциональные многочлены Эрмита, приходим к требуемой оценке.

З а м е ч а н и е 1. Отметим, что в случае, когда функционал $A(s, Y)$ имеет производную порядка не выше фиксированного порядка m по подпространству \mathcal{H} , рассмотренный подход, который основан на найденном в теореме выражении для $a_\alpha(s)$, не может быть использован для получения оценки погрешности $R_{K,N}$, в которой оценки погрешностей аппроксимаций $A(s, Y)$ и $X_s(Y)$ были бы разделены. В самом деле, воспользовавшись полученной в теореме оценкой, справедливой при $|\alpha| \rightarrow \infty$, мы получим неравенство

$$a_\alpha(s) = \left(\frac{\gamma!}{(\beta + \gamma)!} \right)^{1/2} E \left[\delta^{(\beta)} A(s, Y; e_\beta) T_\gamma(Y) \right] < \\ < \left(\frac{\gamma!}{(\beta + \gamma)!} \right)^{1/2} E \left[\delta^{(\beta)} A(s, Y; e_\beta) T_0(Y) \right] = \left(\frac{\gamma!}{(\beta + \gamma)!} \right)^{1/2} E \left[\delta^{(\beta)} A(s, Y; e_\beta) \right],$$

которое после подстановки в (4) приводит к неравенству

$$R_{K,N} < \left(\int_0^t \left(E \left[\delta^{(\beta)} A(s, Y; e_\beta) \right] \right)^2 \sum_{\gamma \in J \setminus J_{K,N}} \frac{\gamma!}{(\beta + \gamma)!} ds \right)^{1/2} \left(\int_0^t \left(\sum_{\alpha \in J \setminus J_{K,N}} x_\alpha^2(s) \right) ds \right)^{1/2},$$

где ряд $\sum_{\gamma \in J \setminus J_{K,N}} \frac{\gamma!}{(\beta + \gamma)!}$ в общем случае может быть расходящимся.

Необходимость в методах приближенного вычисления математических ожиданий функционалов от процессов, основанных на использовании хаотических разложений, естественным образом возникает в случае функционалов от решений стохастических уравнений. Разработке и исследованию методов типа Галеркина для нахождения решений стохастических дифференциальных уравнений с использованием хаотических разложений посвящен целый ряд работ (см., напр., [4] и цитированную в них литературу). В частности, в работе [4] исследовано применение метода Галеркина, основанного на использовании винеровского хаотического разложения, к решению стохастического уравнения Бюргера и приближенному вычислению моментов от решения. Далее мы рассмотрим обобщение одного из результатов этой работы на случай стохастического уравнения Бюргера с гауссовским воздействием

$$u(x, t) = u_0(x) + \int_0^t \left[\mu u_{xx}(x, \tau) - \frac{1}{2} u_x^2(x, \tau) \right] d\tau + \sigma Y(t), \quad (5) \\ u(x, 0) = u_0(x), u(0, t) = u(1, t); (t, x \in (0, T] \times [0, 1]),$$

где μ, σ – константы, $Y(t)$, $t \in [0, T]$, – гауссовский случайный процесс с $Y(0) = 0$, и тем самым будем иметь уточнение оценки (3) для этого конкретного случая. Решение уравнения может быть записано в виде $u(x, t) = v(x - \sigma \int_0^t Y(s) ds, t) + \sigma Y(t)$, где $v = v(x, t)$ – решение детерминированного уравнения $v_t + \frac{1}{2} (v_x^2)_x = \mu v_{xx}$, $v(x, 0) = u_0(x)$, $v(0, t) = v(1, t)$. Доказательство этого факта повторяет приведенное в [4] доказательство случая, когда Y_t является винеровским процессом. Уравнение для коэффициентов $u_\alpha(x, t)$ решения уравнения (5) в схеме Галеркина имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} u_\alpha(x, t) + \frac{1}{2} \sum_{p \in J} \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} C(\alpha, \beta, p) \frac{\partial}{\partial x} (u_{\alpha - \beta + p} u_{\beta + p})(x, t) = \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_\alpha(x, t) + \sigma \sum_{i=1}^{\infty} I_{\{\alpha_i = \delta_{ij}\}} e_i^t(t), \quad (6)$$

где $u_{K, N} = \sum_{\alpha \in J_{K, N}} u_\alpha(x, t) T_\alpha$, $u_\alpha(x, t) = E[u(x, t) T_\alpha]$, $C(\alpha, \beta, p) = (C_\alpha^\beta C_\beta^p C_p^{\alpha - \beta + p})^{1/2}$, $e_k^t(s)$, $k = 1, 2, \dots$, – ортонормированный базис пространства Камерона – Мартина процесса $Y(s)$, $s \in [0, t]$; в обозначении мультииндекса $\{\alpha_i = \delta_{ij}\}$ подразумевается, что на i -м месте стоит единица, а на остальных местах – нуль.

Т е о р е м а 2. *Имеет место следующая оценка погрешности аппроксимации решения уравнения (1):*

$$\begin{aligned} \max_x \left(E \left[|u(x, t) - u_{K, N}(x, t)|^2 \right] \right)^{1/2} &\leq B_{N+1} \sigma \left(\sum_{k=K+1}^{\infty} \left(\int_0^t e_k^t(s) ds \right)^2 \right)^{1/2} + \\ &+ B_{N+1} \sigma^{N+1} \frac{\sqrt{(2N+1)!!}}{(N+1)!} \left(\int_0^t \int_0^t B(\tau, s) d\tau ds \right)^{N+1}. \end{aligned} \quad (7)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о следует схеме доказательства аналогичного результата для случая винеровского процесса (см. [4]). Вводя обозначение $Z(t) = \int_0^t Y(s) ds$ и используя разложение (в хаосы первого порядка) гауссовского случайного процесса (см. [2]) $Y(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k^t(s)$, получим $Z(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \int_0^t e_k^t(s) ds = Z_K + Z_R$, где $Z_K = \sum_{k=1}^K \xi_k \int_0^t e_k^t(s) ds$, $Z_R = \sum_{k=K+1}^{\infty} \xi_k \int_0^t e_k^t(s) ds$. Тогда, записывая решение (5) в виде $u(x, t) = v(x - \sigma Z_K - \sigma Z_R, t) + \sigma \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \int_0^t e_k^t(s) ds$, разлагая затем функцию $v(x - \sigma Z_K - \sigma Z_R, t)$ в ряд Тейлора по Z_R и Z_K , используя ограниченность производных и свойство минимальности ортогональной проекции в пространстве $L_2(\Omega, P)$, приходим к неравенствам

$$\begin{aligned} \left(E \left[|u(x, t) - u_{K, N}(x, t)|^2 \right] \right)^{1/2} &\leq \left(E \left[|u(x, t) - \tilde{u}_{K, N}(x, t)|^2 \right] \right)^{1/2} \leq \\ &\leq B_1 \sigma \left(E \left[Z_R^2 \right] \right)^{1/2} + B_{N+1} \frac{\sigma^{N+1}}{(N+1)!} \left(E \left[Z_K^{2N+2} \right] \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

$$\text{где } \tilde{u}_{K, N}(x, t) = v(x, t) + \sum_{n=1}^N \frac{(-\sigma Z_K)^n}{n!} \frac{\partial^n v}{\partial x^n}(x, t) + \sigma \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \int_0^t e_k^t(s) ds, \quad B_n = \sup_x \left| \frac{\partial^n v}{\partial x^n}(x, t) \right|.$$

Используя затем соотношения

$$E \left[Z_R^2 \right] = \sum_{k=K+1}^{\infty} \left(\int_0^t e_k^t(s) ds \right)^2 \quad \text{и} \quad E \left[Z_K^{2N+2} \right] = \left(E \left[Z_K^2 \right] \right)^{N+1} (2N+1)!! \leq \left(E \left[Z^2 \right] \right)^{N+1} (2N+1)!!,$$

где $E \left[Z^2 \right] = \int_0^t \int_0^t B(\tau, s) d\tau ds$, получаем требуемую оценку.

З а м е ч а н и е 2. В правой части (7) можно применить оценку $\frac{\sqrt{(2N+1)!!}}{(N+1)!} \leq \frac{2^{N/2}}{\sqrt{(N+1)!}}$ и далее с помощью формулы Стирлинга получить асимптотику второго слагаемого в правой части оценки (7):

$$\sigma^{N+1} \frac{\sqrt{(2N+1)!!}}{(N+1)!} \left(\int_0^t \int_0^t B(\tau, s) d\tau ds \right)^{N+1} = O \left(\left(\frac{2er(t)^2}{N+1} \right)^{\frac{N+1}{2}} \right), \quad r(t) = \int_0^t \int_0^t B(\tau, s) d\tau ds. \quad (8)$$

В случаях, когда известны собственные значения λ_k^t и собственные функции $\phi_k^t(\tau)$ ядра $B(\tau, s)$, $\tau, s \in [0, t]$, используя стандартное разложение $B(\tau, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^t \phi_k^t(\tau) \phi_k^t(s)$ и неравенство Гельдера, будем иметь в (7):

$$\left(\sum_{k=K+1}^{\infty} \left(\int_0^t e_k^t(s) ds \right)^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{k=K+1}^{\infty} \lambda_k^t \left(\int_0^t \phi_k^t(s) ds \right)^2 \right)^{1/2} \leq \left(t^2 \sum_{k=K+1}^{\infty} \lambda_k^t \int_0^t \left(\phi_k^t(s) \right)^2 ds \right)^{1/2} = t \sum_{k=K+1}^{\infty} \lambda_k^t. \quad (9)$$

З а м е ч а н и е 3. Из оценок (7), (8) и (9) видно, что погрешность рассматриваемой аппроксимации существенно зависит от корреляционной функции гауссовского процесса $Y(t)$ и параметра σ . С ростом t для получения удовлетворительной погрешности параметр аппроксимации N должен быть взят очень большим, что при вычислительной реализации метода неосуществимо.

Так, в случае винеровского процесса: $\xi_i = \int_0^t \beta_i(\tau) dW_\tau$, $\xi_i = \int_0^T \beta_i(\tau) dW_\tau$, где $\{\beta_i(\tau)\}$, $i = 1, 2, \dots$, – полная ортонормированная система в $L_2([0, T])$, имеем $r(t) = \frac{t^3}{3}$, что ограничивает использование метода малыми значениями t при значениях $\sigma \geq 1$. Для некоторых гауссовских процессов порядок параметра $r(t)$ может быть несколько меньшим. Так, для процесса Орнштейна – Уленбека с $B(\tau, s) = \frac{1}{2a} \left(e^{-a|\tau-s|} - e^{-a(\tau+s)} \right)$, $r(t) = \frac{1}{2a^3} (3 - 2at - 4e^{-at} + e^{-2at})$, т. е. $r(t) = O(t)$ при фиксированном a и убывает с ростом a как $\frac{1}{a^2}$, что также может быть использовано для уменьшения числа слагаемых в хаотическом разложении при расчетах.

Поскольку нахождение собственных функций и собственных значений корреляционного оператора представляет самостоятельную вычислительную проблему, приведем примеры, когда базис $\{e_k^t(s)\}$, используемый в гауссовском хаотическом разложении, можно найти в явном виде. Для гауссовского процесса с ковариационной функцией $B(\tau, s) = \int_0^t R(\tau, u) R(u, s) du$, где $R(\tau, u)$ – ядро симметрического положительно определенного оператора с конечным следом, $e_k^t(\tau) = \int_0^t R(\tau, u) \alpha_k^t(u) du$, где $\{\alpha_k^t(u)\}$, $k = 1, 2, \dots$, – ортонормированный базис в $L_2[0, t]$ (см. [1]). В случае, когда $B(\tau, s) = \int_0^t \rho(u, \tau) \rho(u, s) du$, можно также взять в качестве требуемого базиса $e_k^t(\tau) = \int_0^t \rho(u, \tau) \alpha_k^t(u) du$. В самом деле,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} e_k^t(\tau) e_k^t(s) &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \rho(u, \tau) \alpha_k^t(u) du \int_0^t \rho(u, s) \alpha_k^t(u) du = \\ &= \int_0^t \int_0^t \rho(u, \tau) \rho(u, s) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^t(u) \alpha_k^t(v) \right) dudv = \int_0^t \rho(u, \tau) \rho(u, s) du = B(\tau, s), \end{aligned}$$

поскольку $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^t(u) \alpha_k^t(v)$ является ядром единичного оператора в $L_2[0, t]$.

Пусть $Y(t) = M(t)$ – гауссовский мартингал с квадратической вариацией $\langle M \rangle_t$. Тогда $B(t, s) = \langle M \rangle_{t \wedge s}$. Обозначим через $h^t(M) = \int_0^t h(s) dM(s)$ стохастический интеграл, где $h(s)$ – детерминированная функция из гильбертова пространства H функций, удовлетворяющих условию $\int_0^t h^2(s) d\langle M \rangle_s < \infty$, со скалярным произведением $(h_1^t, h_2^t)_H = \int_0^t h_1^t(s) h_2^t(s) d\langle M \rangle_s$ (см. [1, 2]). Тогда базис $e_k^t(s)$, $s \in [0, t]$, можно искать из условия сопряженности к базису $\phi_k^t(s)$, $s \in [0, t]$, пространства H , сопряженного к пространству \mathcal{H} . В частности, в случае гауссовского мартингала, заданного равенством $M(t) = \int_0^t b(s) dW(s)$, где $e_k^t(s)$, $W(s)$, $s \in [0, t]$, – винеровский процесс, имеем:

$\langle M \rangle_t = \int_0^t b(s) dW(s)$, $B(t, s) = f(t \wedge s)$, где $f(u) = \int_0^u b^2(\tau) d\tau$; $E[h_1^t \langle M \rangle h_2^t \langle M \rangle] = \int_0^t h_1^t(s) h_2^t(s) b^2(s) ds$.

В качестве базиса $\varphi_k^t(s)$, $s \in [0, t]$, в пространстве H , в частности, можно взять $\varphi_k(s) = \frac{\beta_k(s)}{b(s)}$, где $\{\beta_k(s)\}$, $s \in [0, t]$, – ортонормированный базис в $L_2[0, t]$, а в качестве базиса в пространстве \mathcal{H} Камерона – Мартина, используемого в рассматриваемых нами приближенных формулах, можно в этом случае взять $e_k^t(s) = \int_0^t b(s) \beta_k(s) ds$.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (договор № Ф12Д-001).

Литература

1. Егоров А. Д., Соболевский П. И., Янович Л. А. Приближенные методы вычисления континуальных интегралов. Минск, 1985.
2. Егоров А. Д., Жидков Е. П., Лобанов Ю. Ю. Введение в теорию и приложения функционального интегрирования. М., 2006.
3. Egorov A. D. // Math. Modelling and computational physics. Book of Abstracts of Internet. Conf. Dubna, July 8–12, 2013. P. 75–76.
4. Wu L. Wiener chaos expansion and numerical solutions of stochastic partial differential equations (Thesis). California Institute of Technology, 2001.

E. A. AIRYAN, A. D. EGOROV, L. A. SEVASTIYANOV

CALCULATION OF MATHEMATICAL EXPECTATIONS OF RANDOM FUNCTIONALS

Summary

The approximation error of the expectation of a class of random functionals of a Gaussian process and the approximation error of solution of the Burgers equation based on Gaussian chaos development are investigated.

УДК 517.968

Г. А. РАСОЛЬКО

**К РЕШЕНИЮ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА
С ЯДРОМ КОШИ И СПЕЦИАЛЬНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ
МЕТОДОМ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ**

Белорусский государственный университет

(Поступила в редакцию 04.04.2014)

Предлагается алгоритм численного решения сингулярного интегрального уравнения первого рода с ядром Коши и специальной правой частью вида

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(t)}{t-x} dt = \ln \frac{1-x}{1+x} f(x), \quad -1 < x < 1, \quad (1)$$

в классах $h(-1)$ и $h(1)$, основанный на разложении сингулярного интеграла по многочленам Чебышева. Здесь $f(x)$ – заданная на $[-1, 1]$ функция, непрерывная по Гельдеру; $\varphi(x)$ – искомая функция.

Класс $h(-1)$ по Мухелишвили означает ограниченность решения в окрестности точки $x = -1$ и интегрируемую особенность в окрестности точки $x = 1$. Класс $h(1)$ по Мухелишвили означает ограниченность решения в окрестности точки $x = 1$ и интегрируемую особенность в окрестности точки $x = -1$.

Аппарат сингулярных интегральных уравнений (СИУ) применяется при исследовании большого класса граничных задач теории упругости, аэродинамики и в других проблемах естествознания [1–3]. Эффективность численных методов для решения подобных задач во многом зависит от способа дискретизации задачи. Среди известных подходов следует отметить методы, основанные на полиномиальной аппроксимации искомого решения, в том числе метод ортогональных многочленов [2–5].

Метод ортогональных многочленов базируется на замечательном свойстве классических ортогональных многочленов Чебышева первого и второго рода для сингулярных интегралов:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}} \frac{dt}{t-x} = U_{n-1}(x), \quad \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{U_{n-1}(t) dt}{t-x} = -T_n(x), \quad |x| < 1, \quad n \geq 1,$$

где $T_n(x)$, $U_{n-1}(x)$ – многочлены Чебышева первого и второго рода соответственно.

Эти «спектральные соотношения» для сингулярных интегралов позволили в дальнейшем построить хорошо известные методы решения простейшего сингулярного интегрального уравнения (1), основанные на обращении сингулярного интеграла в различных классах функций [2–5].

В работе [6] получены «квазиспектральные соотношения» для сингулярного интеграла со степенно-логарифмической особенностью, в частности, следующие.

Т е о р е м а 1. Для $x \in (-1, 1)$ и $k \geq 0$ справедливы равенства

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \ln \frac{1-t}{1+t} \frac{T_k(t) dt}{t-x} = -\frac{\pi}{\sqrt{1-x^2}} T_k(x) - 8 \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k-2}{2} \rfloor} \sum_{m=0}^j \frac{1}{2m+1} T_{k-2-2j}(x), \quad (2)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \ln \frac{1-t}{1+t} \frac{U_k(t) dt}{t-x} = -\frac{\pi}{\sqrt{1-x^2}} U_k(x) - 16 \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k-2}{2} \rfloor} \sum_{l=0}^j \frac{j+1-l}{2l+1} T_{k-2-2j}(x), \quad (3)$$

где

$$\sum_{j=0}^m \rho_j T_{m-j} \equiv \rho_0 T_m + \rho_1 T_{m-1} + \dots + \rho_{m-1} T_1 + \frac{1}{2} \rho_m T_0.$$

В данной работе на основании (2), (3) получены в дополнение к работе [7] разложения сингулярного интеграла со степенно-логарифмической особенностью по многочленам Чебышева первого рода и построены вычислительные схемы приближенного решения уравнения (1) в классах $h(1)$ и $h(-1)$.

Т е о р е м а 2. Для $x \in (-1, 1)$ и $k \geq 0$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1+t}}{\sqrt{1-t}} \ln \frac{1-t}{1+t} T_k(t) \frac{dt}{t-x} &= -\pi \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} T_k(x) + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k-2}{2} \rfloor} \alpha_j T_{k-2-2j}(x) + \\ &+ \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \beta_j T_{k-1-2j}(x), \quad \alpha_j = \sum_{m=0}^j \frac{-8}{2m+1}, \quad \beta_j = \alpha_j + \frac{4}{2j+1}, \quad j \geq 0; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1+t}}{\sqrt{1-t}} \ln \frac{1-t}{1+t} U_k(t) \frac{dt}{t-x} &= -\pi \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} U_k(x) + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k-2}{2} \rfloor} \delta_j T_{k-2-2j}(x) + \\ &+ \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \gamma_j T_{k-1-2j}(x), \quad \delta_j = \sum_{m=0}^j \frac{-16(j+1-m)}{2m+1}, \\ \gamma_0 &= -8, \quad \gamma_j = \frac{\delta_{j-1} + \delta_j}{2}, \quad j \geq 1. \end{aligned} \quad (5)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выполним под интегралом в левой части (4) преобразование веса: $\sqrt{\frac{1+t}{1-t}} = \frac{1+t}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1+T_1(t)}{\sqrt{1-t^2}}$. Далее применим равенство $2T_k(t)T_1(t) = T_{k+1}(t) + T_{k-1}(t)$. Затем используем разложение (2). После элементарных преобразований получим равенство (4).

Доказательство равенства (5) проводится аналогично с учетом разложения (3).

Т е о р е м а 3. Для $x \in (-1, 1)$ и $k \geq 0$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}} \ln \frac{1-t}{1+t} T_k(t) \frac{dt}{t-x} &= -\pi \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} T_k(x) + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k-2}{2} \rfloor} \alpha_j T_{k-2-2j}(x) - \\ &- \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \beta_j T_{k-1-2j}(x), \quad \alpha_j = \sum_{m=0}^j \frac{-8}{2m+1}, \quad \beta_j = \alpha_j + \frac{4}{2j+1}, \quad j \geq 0; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}} \ln \frac{1-t}{1+t} U_k(t) \frac{dt}{t-x} &= -\pi \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} U_k(x) + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k-2}{2} \rfloor} \delta_j T_{k-2-2j}(x) - \\ &- \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \gamma_j T_{k-1-2j}(x), \quad \delta_j = \sum_{m=0}^j \frac{-16(j+1-m)}{2m+1}, \\ \gamma_0 &= -8, \quad \gamma_j = \frac{\delta_{j-1} + \delta_j}{2}, \quad j \geq 1. \end{aligned} \quad (7)$$

Доказательство. Выполним под интегралом в левой части (6) преобразование веса: $\sqrt{\frac{1-t}{1+t}} = \frac{1-t}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1-T_1(t)}{\sqrt{1-t^2}}$. Далее применим равенство $2T_k(t)T_1(t) = T_{k+1}(t) + T_{k-1}(t)$. Затем исполь-

зуем разложение (2). После элементарных преобразований получим равенство (6).

Доказательство равенства (7) проводится аналогично с учетом разложения (3).

Применим полученные формулы (4)–(7) к построению приближенного решения уравнения (1).

Известно [8, 9], что искомое решение $\varphi(x) \in h(1)$ уравнения (1) определяется формулой

$$\varphi(x) = -\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \ln \frac{1-t}{1+t} f(t) \frac{dt}{t-x} \right), \quad -1 < x < 1. \quad (8)$$

Для приближенного решения уравнения (1) используем разложение функции $f(x)$ по полиномам Чебышева [10], в результате чего приходим к следующему уравнению:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi_n(t) \frac{dt}{t-x} = \ln \frac{1-x}{1+x} f_n(x), \quad -1 < x < 1, \quad (9)$$

где

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k T_k(x), \quad f_0 = \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} f(t_j), \quad f_k = \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} f(t_j) T_k(t_j), \quad k > 0, \quad (10)$$

$$t_j = \cos \frac{2j-1}{2n+2} \pi, \quad j = 1, 2, \dots, n+1.$$

Согласно (8), решение уравнения (9) в заданном классе дается формулой

$$\varphi_n(x) = -\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \ln \frac{1-t}{1+t} f_n(t) \frac{dt}{t-x} \right), \quad -1 < x < 1. \quad (11)$$

Используя (10) и учитывая (4), из (11) получаем схему I:

$$\varphi_n(x) = \pi f_n(x) - \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \left(\sum_{j=0}^{n-2} {}^0 T_{n-2-j}(x) \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} \alpha_k f_{n-j+2k} + \sum_{j=0}^{n-1} {}^0 T_{n-1-j}(x) \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} \beta_k f_{n-j+2k} \right), \quad (12)$$

$$\alpha_k = \sum_{m=0}^k \frac{-8}{2m+1}, \quad \beta_k = \alpha_k + \frac{4}{2k+1}, \quad k \geq 0.$$

Пусть далее [10]

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k U_k(x), \quad f_k = G_k - \varepsilon_k G_{k+2}, \quad G_k = \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} f(t_j) T_k(t_j), \quad (13)$$

$$\varepsilon_k = \begin{cases} 1, & k = 0, 1, \dots, n-2, \\ 0, & k = n-1, n, \end{cases} \quad t_j = \cos \frac{2j-1}{2n+2} \pi, \quad j = 1, 2, \dots, n+1.$$

Используя (13) и учитывая (5), из (11) имеем схему II:

$$\varphi_n(x) = \pi f_n(x) - \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \left(\sum_{j=0}^{n-2} {}^0 T_{n-2-j}(x) \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} \delta_k f_{n-j+2k} + \sum_{j=0}^{n-1} {}^0 T_{n-1-j}(x) \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} \gamma_k f_{n-j+2k} \right), \quad (14)$$

$$\delta_k = \sum_{m=0}^k \frac{-16(k+1-m)}{2m+1}, \quad \gamma_0 = -8, \quad \gamma_k = \frac{\delta_{k-1} + \delta_k}{2}, \quad k \geq 1.$$

Оценим порядок точности приближенного решения в классе функций $W^r H^\mu$, $r \geq 0$, $0 < \mu \leq 1$, имеющих производные до порядка r включительно, причем r -я производная принадлежит классу

Гельдера $H(\mu)$: $|f^{(r)}(x_1) - f^{(r)}(x_2)| \leq K|x_1 - x_2|^\mu$, $\forall x_1, x_2 \in [-1, 1]$, где K и μ – константы, не зависящие от выбора точек x_1, x_2 .

С учетом (8), (11) и оценки сингулярного интеграла со степенно-логарифмической особенностью [11], может быть доказана следующая теорема.

Теорема 4. Пусть функция $f(x)$, являющаяся правой частью уравнения (1), принадлежит классу $W^r H^\mu$, $r \geq 0$, $0 < \mu \leq 1$. Пусть, далее, $f(x)$ аппроксимируется интерполяционным многочленом (10) или (13) по узлам Чебышева первого рода, $\varphi(x)$, $\varphi_n(x)$, определяемые формулами (8), (11), означают соответственно точное и приближенное решения уравнений (1), (9) в классе $h(1)$. Тогда

$$\sqrt{1+x} \|\varphi(x) - \varphi_n(x)\|_\infty \leq M \frac{\ln^2(n)}{n^{r+\mu}}, \quad x \in [-\delta, \delta] \subset (-1, 1).$$

Константа M не зависит от n .

В таблице даны результаты численного решения уравнения (1) в классе $h(1)$ по формулам (12), (14) ($\varphi_n^{(I,II)}(x)$) при $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$. В данном случае функция $\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2} \left(1 - \frac{\sqrt{2}\sqrt{1-x^2}}{4}\right)$ будет решением.

| n | 20 | 25 | 30 | 35 |
|---|---------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| $\max_{ x <1} \varphi(x) - \varphi_n^{(I,II)}(x) $ | $1,7 \cdot 10^{-8}$ | $1,6 \cdot 10^{-10}$ | $2,0 \cdot 10^{-12}$ | $2,3 \cdot 10^{-14}$ |

Следует отметить, что замена переменных $t \rightarrow -t$, $x \rightarrow -x$ переводит один из классов $h(-1)$, $h(1)$ в другой. Поэтому, на основании решения уравнения (1) в классе $\varphi(x) \in h(1)$, для решения в классе $\varphi(x) \in h(-1)$ приведем сразу вычислительные схемы:

$$\varphi_n(x) = \pi f_n(x) - \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \left(\sum_{j=0}^{n-2} {}^0 T_{n-2-j}(x) \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} \alpha_k f_{n-j+2k} - \sum_{j=0}^{n-1} {}^0 T_{n-1-j}(x) \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} \beta_k f_{n-j+2k} \right),$$

$$\alpha_k = \sum_{m=0}^k \frac{-8}{2m+1}, \quad \beta_k = \alpha_k + \frac{4}{2k+1}, \quad k \geq 0;$$

$$\varphi_n(x) = \pi f_n(x) - \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \left(\sum_{j=0}^{n-2} {}^0 T_{n-2-j}(x) \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} \delta_k f_{n-j+2k} - \sum_{j=0}^{n-1} {}^0 T_{n-1-j}(x) \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} \gamma_k f_{n-j+2k} \right),$$

$$\delta_k = \sum_{m=0}^k \frac{-16(k+1-m)}{2m+1}, \quad k \geq 0, \quad \gamma_0 = -8, \quad \gamma_k = \frac{\delta_{k-1} + \delta_k}{2}, \quad k \geq 1.$$

Литература

1. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., 1966.
2. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацьшин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев, 1976.
3. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М., 1982.
4. Габдулхаев Б. Г. Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений первого рода. Численный анализ. Казань, 1994.
5. Лифанов И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М., 1995.
6. Расолько Г. А. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2012. № 3. С. 27–31.
7. Расолько Г. А. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2011. № 1. С. 25–31.
8. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., 1968.
9. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., 1977.

10. Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. М., 1983.
11. Шейко М. А., Якименко Т. С. // Изв. вузов. Математика. 1979. № 6. С. 82–84.

G. A. RASOLKO

**TO THE SOLUTION OF THE FIRST-KIND SINGULAR INTEGRAL EQUATION
WITH THE CAUCHY KERNEL AND A SPECIAL RIGHT-HAND SIDE
BY THE METHOD OF ORTHOGONAL POLYNOMIALS**

Summary

An algorithm for solution of the first-kind singular integral equation

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(t)}{t-x} dt = \ln \frac{1-x}{1+x} f(x), \quad -1 < x < 1,$$

is suggested. Here f is the Hölder's continuous functions on $[-1, 1]$; $\varphi(x)$ is an unknown function. The algorithm is based on the decomposition of singular integral with respect to Chebyshev's polynomials in the classes $h(1)$ and $h(-1)$.

УДК 517.925.7

Е. В. ГРИЦУК, В. И. ГРОМАК

**АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ
 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА УРАВНЕНИЙ ПЕНЛЕВЕ**

Белорусский государственный университет

(Поступила в редакцию 21.03.2014)

Введение. Свойства решений уравнений Пенлеве изучались с различных точек зрения. Первые исследования в этом направлении связаны с классификацией Пенлеве обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) второго порядка без подвижных критических точек (свойство Пенлеве) [1–7]. Задача нахождения условий наличия свойства Пенлеве может рассматриваться и для ОДУ высших порядков, однако в настоящее время нет полной классификации таких уравнений. Уравнения Пенлеве естественно возникают из симметричных редукций интегрируемых нелинейных уравнений с частными производными. При таком подходе возможно построение иерархий ОДУ высших порядков Пенлеве-типа, что, в частности, явилось одной из причин возобновления интереса к уравнениям Пенлеве-типа и появлением гипотезы Абловица и др. [8], согласно которой все симметричные редукции интегрируемых нелинейных уравнений с частными производными есть ОДУ Пенлеве-типа. В работах [9, 10] рассмотрены аналитические свойства решений уравнений 4-го и 6-го порядков иерархии K_2 [11], связанной со вторым уравнением Пенлеве. В настоящей работе исследуются аналитические свойства решений уравнений иерархии K_2 произвольного порядка.

1. Структура уравнений иерархии K_2 . Иерархия уравнений K_2 может быть представлена в виде [11]

$$\left(\frac{d}{dz} + w\right)H_n\left(w' - \frac{1}{2}w^2\right) - zw + \beta = 0, \quad (K_2)$$

где последовательность операторов H_n удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\begin{aligned} H_{n+2}(w) &= J(w)\Omega(w)H_n(w), \\ H_0(w) &= 1, H_1(w) = w'' + 4w^2, n = 0, 1, 2, \dots, \\ \Omega(w) &= D^3 + 2wD + w_z, \\ J(w) &= D^3 + 3(wD + Dw) + 2(D^2wD^{-1} + D^{-1}wD^2) + 8(w^2D^{-1} + D^{-1}w^2), \\ D &= \frac{d}{dz}, D^{-1} = \int(\cdot)dz. \end{aligned} \quad (1)$$

Для $n = 1$ и $n = 2$ соответственно имеем

$$w^{(4)} + w^5 + 5w'w'' - 5w^2w''' - 5w(w')^2 - zw + \beta = 0, \quad ({}_4K_2)$$

$$\begin{aligned} w^{(6)} - \frac{4}{3}w^7 - w\left(\frac{28}{3}(w')^3 + 21(w'')^2 + 28w'w^{(3)}\right) + 7w'w^{(4)} - 14w^2w'w'' - \\ - 7w^2w^{(4)} + 14w''w^{(3)} - 28w''(w')^2 + 14w^4w''' + 28w^3(w')^2 - zw + \beta = 0. \end{aligned} \quad ({}_6K_2)$$

Заметим также, что если $H_n(u) = u$, то уравнение (K_2) эквивалентно второму уравнению Пенлеве в виде $w'' - (w)^3 / 2 - zw + \beta = 0$.

Теорема 1. Уравнение (K_2) , $n \geq 2$, в явной форме представимо в виде

$$w_{3n+s} + \gamma_{3n+s} w_0^{3n+s+1} + Q_{3n+s-1}(w_0, w_1, \dots, w_{3n+s-2}) - zw + \beta = 0, \quad (2)$$

где $w_m := \frac{d^m w}{dz^m}$, $m = 0, 1, \dots, 3n+s$, Q_{3n+s-1} – полином от $w_0, w_1, \dots, w_{3n+s-1}$ степени $3n+s-1$, вида

$$Q_{3n+s-1}(w_0, w_1, \dots, w_{3n+s-1}) := \sum_{\substack{\langle k \rangle = 3n+s+1 \\ k_0 \leq 3n+s-2}} b_{k_0 k_1 \dots k_{3n+s-2}} w_0^{k_0} w_1^{k_1} \dots w_{3n+s-2}^{k_{3n+s-2}}. \quad (3)$$

Через k обозначен мультииндекс $k = (k_0, k_1, \dots, k_{3n+s-2})$ с нормой

$$\langle k \rangle := \sum_{p=0}^{3n+s-2} (p+1)k_p, \quad (4)$$

$b_{k_0 k_1 \dots k_{3n+s-2}}$ – константы, и

$$\gamma_{3n+s} = \alpha_{4s+4} \left(-\frac{1}{2} \right)^{\frac{3n+s}{2}} \frac{n+s-4}{2} \prod_{j=0}^{n+s-4} \frac{2^5 (3n+s-5-6j)(3n+s-2-6j)}{(3n+s-4-6j)(3n+s-6j)}, \quad (5)$$

где $s = 0$ при четном n и $s = 1$ при нечетном n , $\alpha_4 = 32/3$, $\alpha_8 = 256/3$.

Доказательство. Воспользуемся представлением оператора $H_n(w)$ из работы [12]:

$$H_n(w_0) = w_{3n+s-2} + \gamma_{3n+s-2} w_0^{(3n+s)/2} + P_{(3n+s-2)/2}(w_0, w_1, \dots, w_{3n+s-4}), \quad (6)$$

$$P_{(3n+s-2)/2}(w_0, w_1, \dots, w_{3n+s-4}) := \sum_{\substack{\langle k \rangle = 3n+s \\ k_0 \leq (3n+s-4)/2}} b_{k_0 k_1 \dots k_{3n+s-4}} w_0^{k_0} w_1^{k_1} \dots w_{3n+s-4}^{k_{3n+s-4}}.$$

В формуле (6) сделаем подстановку

$$w_0 \rightarrow w_1 - \frac{1}{2} w_0^2. \quad (7)$$

Получаем

$$H_n \left(w_1 - \frac{1}{2} w_0^2 \right) = w_{3n+s-1} + \left(-\frac{1}{2} \right)^{\frac{3n+s}{2}} \gamma_{3n+s-2} w_0^{3n+s} + \dots$$

Тогда

$$\left(\frac{d}{dz} + w_0 \right) H_n \left(w_1 - \frac{1}{2} w_0^2 \right) = w_{3n+s} + \left(-\frac{1}{2} \right)^{\frac{3n+s}{2}} \gamma_{3n+s-2} w_0^{3n+s+1} + Q_{3n+s-1}.$$

Выясним, как изменяются полином $P_{(3n+s-2)/2}(w_0, w_1, \dots, w_{3n+s-4})$ и ограничения на мультииндекс k в результате подстановки (7).

Пусть моном $w_0^{k_0} w_1^{k_1} \dots w_{3n+s-4}^{k_{3n+s-4}}$ дает наивысшую степень полинома $P_{(3n+s-2)/2}(w_0, w_1, \dots, w_{3n+s-4})$, т. е. $k_0 + k_1 + \dots + k_{3n+s-4} = (3n+s-2)/2$. Согласно подстановке (7), получаем

$$w_0 \rightarrow -\frac{1}{2} w_0^2 + w_1, \quad w_1 \rightarrow -w_0 w_1 + w_2, \dots, \quad w_j \rightarrow -w_0 w_j - (\dots) + w_{j+1}, \quad j = 2, 3, \dots, 3n+s-4.$$

Тогда

$$w_0^{k_0} w_1^{k_1} \dots w_{3n+s-4}^{k_{3n+s-4}} \rightarrow \left(-\frac{1}{2} \right)^{k_0} (-w_0)^{k_0+k_1+\dots+k_{3n+s-4}} w_0^{k_0} w_1^{k_1} \dots w_{3n+s-4}^{k_{3n+s-4}} + \tilde{Q}(w_0, w_1, \dots, w_{3n+s-3}).$$

Наивысшая степень мономов в первом слагаемом последней суммы равна $2(k_0 + k_1 + \dots + k_{3n+s-4}) = 3n+s-2$. Под действием оператора $\left(\frac{d}{dz} + w_0 \right)$ степень увеличивается на единицу и равна $3n+s-1$, а порядок дифференцирования становится равным $3n+s-2$. **Значит, степень полинома Q_{3n+s-1} , если и окажется выше, то не за счет слагаемых полинома $P_{(3n+s-2)/2}$.**

Убедимся, что и второе слагаемое из (6) не может дать моном степени выше $3n + s - 1$. Действительно,

$$\left(w_1 - \frac{1}{2}w_0^2\right)^{\frac{3n+s}{2}} = \sum_{l=0}^{\frac{3n+s}{2}} C_{\frac{3n+s}{2}}^l \left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{3n+s-2l}{2}} w_0^{3n+s-2l} w_1^l.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dz} + w_0\right) \left(w_1 - \frac{1}{2}w_0^2\right)^{\frac{3n+s}{2}} &= \sum_{l=0}^{\frac{3n+s}{2}} C_{\frac{3n+s}{2}}^l \left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{3n+s-2l}{2}} w_0^{3n+s-2l+1} w_1^l + \\ &+ \sum_{l=0}^{\frac{3n+s}{2}} C_{\frac{3n+s}{2}}^l \left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{3n+s-2l}{2}} \left((3n+s-2l)w_0^{3n+s-2l-1} w_1^{l+1} + l w_0^{3n+s-2l} w_1^{l-1} w_2\right). \end{aligned}$$

Мономы первой суммы имеют степень $3n + s + l - 1 \leq 3n + s - 1$, при $l \geq 2$. Поэтому следует рассмотреть мономы лишь для случаев $l = 0, 1$. Первый тип мономов из второй суммы имеет степень $3n + s - l \leq 3n + s - 1$, при $l \geq 1$. Поэтому следует рассмотреть мономы лишь для случая $l = 0$. Второй тип мономов из второй суммы имеет степень $3n + s - l \leq 3n + s - 1$, при $l \geq 1$. Но при $l = 0$ он отсутствует, поэтому дополнительных исследований здесь не требуется. Итак, рассмотрим случай $l = 0$ для первой суммы. Получаем моном w_0^{3n+s+1} , он выписан в формуле (2) с коэффициентом γ_{3n+s} и, следовательно, не входит в полином (3). Теперь рассмотрим случай $l = 1$ для первой суммы и $l = 0$ для второй. В этом случае имеем моном $w_0^{3n+s-1} w_1$ с коэффициентом $C_{\frac{3n+s}{2}}^1 \left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{3n+s-2}{2}} + (3n+s) \left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{3n+s}{2}} = 0$. Таким образом, степень полинома Q_{3n+s-1} не превосходит $3n + s - 1$. Далее, умножая неравенство на k_0 из (6) на 2 и учитывая, что степень множителя w_0 равна 1, получаем ограничение $k_0 \leq 3n + s - 3 < 3n + s - 2$. При этом моном $w_0^{3n+s-1} w_1$, получаемый из второго слагаемого формулы (6), как показано выше, имеет коэффициент, равный нулю. Значит, степень $k_0 \leq 3n + s - 2$. Теорема 1 доказана.

2. Порядок подвижного полюса решения уравнения (K_2) .

Л е м м а 1. Если решение уравнения (K_2) имеет подвижный полюс, то только первого порядка.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для определения порядка q подвижного полюса в уравнении (2) произведем замену $w \sim a_0 (z - z_0)^{-q}$. Ведущими членами уравнения (2) являются старшая производная и либо слагаемые полинома (3), либо моном $\gamma_{3n+s} w_0^{3n+s+1}$. В первом случае имеем условие $q + 3n + s = qk_0 + (q + 1)k_1 + \dots + (q + 3n + s - 2)k_{3n+s-2}$, которое с учетом (4) преобразуется в $q + 3n + s = (q - 1)(k_0 + k_1 + \dots + k_{3n+s-2}) + \langle k \rangle$. Так как $\langle k \rangle = 3n + s + 1$, то имеем $(q - 1)(k_0 + k_1 + \dots + k_{3n+s-2} - 1) = 0$. Условие $k_0 + k_1 + \dots + k_{3n+s-2} = 1$ вступает в противоречие с ограничением $\langle k \rangle = 3n + s + 1$. Значит, $q = 1$. Во втором случае имеем условие $q + 3n + s = q(3n + s + 1)$. Откуда также находим $q = 1$. Лемма доказана.

Заметим, что утверждение леммы 1 реализуется, в частности, для рациональных решений. Для уравнений $({}_4K_2)$ и $({}_6K_2)$ критерий существования рациональных решений получен в работах [9, 10]. Более общие случаи рассмотрены в статье [13].

3. Исследование решения уравнения (K_2) , $n \geq 2$, в окрестности подвижного полюса.

Применим метод резонансов для определения номеров коэффициентов a_j , которые, возможно, являются произвольными параметрами в разложении решения

$$w = \sum_{j=0}^{\infty} a_j t^{j-1}, \quad t = z - z_0 \quad (8)$$

уравнения порядка $3n + s$ иерархии K_2 в окрестности подвижного полюса z_0 , $z_0 \in \mathbb{C}$. Произведем замену

$$w \sim a_0 t^{-1} + \beta t^{-1}, \quad (9)$$

тогда

$$w' - \frac{1}{2}w^2 \sim c_0 t^{-2} + \beta(r-1-a_0)t^{r-2}, \quad c_0 = -\frac{1}{2}(a_0^2 + 2a_0),$$

$$H_n \left(w' - \frac{1}{2}w^2 \right) \sim L_{\frac{n-s}{2}}(s, c_0)t^{-3n-s} + \beta(r-1-a_0)R_{3n+s-2}(r, c_0)t^{r-3n-s},$$

$$\left(\frac{d}{dz} + w \right) H_n \left(w' - \frac{1}{2}w^2 \right) \sim (a_0 - 3n - s)L_{\frac{n-s}{2}}(s, c_0)t^{-3n-s-1} + \beta\tau_{3n+s}(r, a_0)t^{r-3n-s-1},$$

где резонансный многочлен

$$\tau_{3n+s}(r, a_0) = (r-1-a_0)(r-3n-s+a_0)R_{3n+s-2}(r, c_0) + L_{\frac{n-s}{2}}(s, c_0), \quad (10)$$

а $L_{\frac{n-s}{2}}(s, c_0)$ определяется в [12] рекуррентными формулами

$$L_0(0, c_0) = 1,$$

$$L_{j+1}(0, c_0) = \frac{2(3j+2)(6j+1)}{3(j+1)(3j+1)} (2c_0 + 36j^2 + 48j + 15)(2c_0 + 36j^2 + 12j)(2c_0 + 9j^2 + 12j + 3)L_j(0, c_0), \quad (11)$$

в случае четного n ;

$$L_0(1, c_0) = 2c_0(2c_0 + 3),$$

$$L_{j+1}(1, c_0) = \frac{2(3j+4)(6j+5)}{3(j+1)(3j+5)} (2c_0 + 36j^2 + 96j + 63)(2c_0 + 36j^2 + 60j + 24)(2c_0 + 9j^2 + 24j + 15)L_j(1, c_0), \quad (12)$$

в случае нечетного n ; $R_{3n+s-2}(r, c_0)$ – резонансный многочлен соответствующего уравнения иерархии K_1 . С учетом определения c_0 справедлива

Л е м м а 2. Для четных n коэффициент a_0 определяется из условия

$$(a_0 - 3n) \prod_{j=0}^{\frac{n-2}{2}} (a_0 - 6j - 3)(a_0 - 3j - 1)(a_0 + 6j + 5)(a_0 + 6j + 2)(a_0 + 3j + 3)(a_0 - 6j) = 0, \quad (13)$$

для нечетных n коэффициент a_0 определяется из условия

$$(a_0 - 1)(a_0 + 2)(a_0 + 3)(a_0 - 3n - 1) \times$$

$$\times \prod_{j=0}^{\frac{n-3}{2}} (a_0 - 3j - 3)(a_0 - 6j - 4)(a_0 - 6j - 7)(a_0 + 3j + 5)(a_0 + 6j + 6)(a_0 + 6j + 9) = 0. \quad (14)$$

Рассмотрим случай четных n , т. е. $s = 0$. Из уравнения (13) следует, что имеем семь типов коэффициентов a_0 . Произведем в уравнении (K_2) подстановку (9). Тогда коэффициент при βt^{r-3n-1} определяет резонансный многочлен $\tau_{3n}(a_0(l), r)$. Последовательно имеем следующие резонансные многочлены.

Для первого типа из (9):

$$a_0^{(1)}(l) = 6l + 3, \quad l = 0, 1, 2, \dots, \frac{n-2}{2}, \quad n = 2, 4, 6, \dots,$$

$$\tau_{3n}(a_0^{(1)}(l), r) = (r+1)(r+5)(r-3n-2)(r-6l-4)(r-3n-6)(r-3n+6l+3) \times$$

$$\times \prod_{j=0}^{l-1} (r-6j-6l-3n-12)(r-6j-3n-12)(r-6j-3n-8)(r+6j+7)(r+12j+11)(r+12j+17) \times$$

$$\times \prod_{i=0}^{\frac{n-2l-4}{2}} (r-6i-3)(r-6i-6)(r-6i-6l-7)(r-6i+6l-2)(r-6i-6l-10)(r-6i-12l-11). \quad (15)$$

Для второго типа:

$$\begin{aligned}
a_0^{(2)}(l) &= 3l + 1, l = 0, 1, 2, \dots, \frac{n-2}{2}, n = 2, 4, 6, \dots, \\
\tau_{3n}(a_0^{(2)}(l), r) &= (r+1)(r-3)(r-4)(r-3l-2)(r-3n+3l+1)(r-3n-6l-2) \times \\
&\times \prod_{j=0}^{l-1} (r-3j-3n-3)(r-6j-3n-2)(r-6j-9)(r-6j-10)(r+3j+2)(r+6j+7) \times \\
&\times \prod_{i=0}^{\frac{n-2l-4}{2}} (r-6i-6)(r-6i-3l-5)(r-6i-6l-7)(r-6i-3l-8)(r-6i-6l-9)(r-6i-6l-10). \quad (16)
\end{aligned}$$

Для третьего типа:

$$\begin{aligned}
a_0^{(3)}(l) &= -6l - 5, l = 0, 1, 2, \dots, \frac{n-2}{2}, n = 2, 4, 6, \dots, \\
\tau_{3n}(a_0^{(3)}(l), r) &= (r+1)(r+5)(r-3n-6l-5)(r+6l+4)(r-3n-12-6)(r-3n-6l-2) \times \\
&\times \prod_{j=0}^{l-1} (r-6j-3n-2)(r-12j-3n-6)(r-12j-3n-12)(r+6j+7)(r+12j+11)(r+12j+17) \times \\
&\times \prod_{i=0}^{\frac{n-2l-4}{2}} (r-6i-3)(r-6i-6)(r-6i+6l-2)(r-6i-6l-7)(r-6i-6l-10)(r-6i-12l-11). \quad (17)
\end{aligned}$$

Для четвертого типа:

$$\begin{aligned}
a_0^{(4)}(l) &= -6l - 2, l = 0, 1, 2, \dots, \frac{n-2}{2}, n = 2, 4, 6, \dots, \\
\tau_{3n}(a_0^{(4)}(l), r) &= (r+6l+1)(r-3n+2)(r-3n-6l-2)(r-3n-6l+1) \times \\
&\times (r-3n+6l+3)(r-3n+12l+4) \times \\
&\times \prod_{j=0}^{l-1} (r-6j-3n-6l-6)(r-6j-3n-6)(r-6j-3n-2)(r+6j+1)(r+12j+11)(r+12j+5) \times \\
&\times \prod_{i=0}^{\frac{n-2l-4}{2}} (r-6i-3)(r-6i-6)(r-6i+6l-2)(r-6i-6l-4)(r-6i-12l-5)(r-6i-6l-7). \quad (18)
\end{aligned}$$

Для пятого типа:

$$\begin{aligned}
a_0^{(5)}(l) &= -3l - 3, l = 0, 1, 2, \dots, \frac{n-2}{2}, n = 2, 4, 6, \dots, \\
\tau_{3n}(a_0^{(5)}(l), r) &= (r+1)(r-3)(r-4)(r-3n-6l-2)(r+3l+2)(r-3n-3l-3) \times \\
&\times \prod_{j=0}^{l-1} (r-6j-3n+6l-4)(r-6j-3n+6l-3)(r-6j-3n-2)(r+3j+2)(r-3j-3n-3)(r+6j+7) \times \\
&\times \prod_{i=0}^{\frac{n-2l-4}{2}} (r-6i-6)(r-6i-9)(r-6i-10)(r-6i-6l-7)(r-6i-3l-8)(r-6i-3l-5). \quad (19)
\end{aligned}$$

Для шестого типа:

$$\begin{aligned}
a_0^{(6)}(l) &= 6l, l = 1, 2, \dots, \frac{n-2}{2}, n = 4, 6, 8, \dots, \\
\tau_{3n}(a_0^{(6)}(l), r) &= (r+1)(r+5)(r+11)(r-6l-1)(r+6l-2)(r-3n+6l)(r-3n+2) \times \\
&\times (r-3n-2)(r-3n-6l+1)(r-3n+6l+3)(r-3n-6)(r-3n-12) \times \\
&\times \prod_{j=0}^{l-2} (r-6j-3n-8)(r-6j-3n-18)(r-6j-3n-6l-12)(r+6j+7)(r+12j+17)(r+12j+23) \times \\
&\times \prod_{i=0}^{\frac{n-2l-4}{2}} (r-6i-3)(r-6i-6)(r-6i-12l-5)(r-6i-6l-7)(r-6i-6l-4)(r-6i+6l-8). \quad (20)
\end{aligned}$$

Для седьмого типа:

$$\begin{aligned}
a_0^{(7)}(l) &= 3n, n = 2, 4, 6, \dots, \\
\tau_{3n}(a_0^{(7)}(l), r) &= (r+1)(r+5)(r+11)(r-3n-12)(r-3n-2)(r-3n-6) \times \\
&\times \prod_{j=0}^{\frac{n-4}{2}} (r+6j+7)(r+12j+17)(r+12j+23)(r-3n-12j-24)(r-3n-12j-18)(r-3n-6j-8). \quad (21)
\end{aligned}$$

Рассмотрим теперь случай нечетных n , т. е. $s = 1$. Из уравнения (14) следует, что имеем 10 типов коэффициентов a_0 . Произведем в формуле (K_2) подстановку (9), тогда при βt^{r-3n-2} выделяем резонансный многочлен $\tau_{3n+1}(a_0(l), r)$. В этом случае имеем следующие резонансные многочлены.

Для первого типа из (10):

$$\begin{aligned} a_0^{(1)} &= 3l + 3, l = 0, 1, 2, \dots, \frac{n-3}{2}, n = 3, 5, 7, \dots, \\ \tau_{3n+1}(a_0^{(1)}, r) &= (r+1)(r+5)(r-2)(r-3)(r-8)(r-9)(r-3l-4) \times \\ &\quad \times (r-3n+3l+2)(r-3n-3)(r-3n-7) \times \\ &\quad \times \prod_{j=0}^{l-1} (r-6j-3n-13)(r-3j-3n-6)(r-6j-3n+6l-6)(r+3j+4)(r-6j-3n+6l-5)(r+6j+11) \times \\ &\quad \times \prod_{i=0}^{\frac{n-2l-5}{2}} (r-6i-3)(r-6i-6)(r-6i-12l-5)(r-6i-6l-7)(r-6i-6l-4)(r-6i+6l-8). \end{aligned} \quad (22)$$

Для второго типа:

$$\begin{aligned} a_0^{(2)}(l) &= 6l + 4, l = 0, 1, 2, \dots, \frac{n-3}{2}, n = 3, 5, 7, \dots, \\ \tau_{3n+1}(a_0^{(2)}, r) &= (r+1)(r+7)(r+6l+2)(r-3n+1)(r-3n-3)(r-3n+6l+6)(r-6l-5) \times \\ &\quad \times (r-3n+6l+3)(r-3n-6l-4)(r-3n-9) \times \\ &\quad \times \prod_{j=0}^{l-1} (r-12j-3n-21)(r-12j-3n-15)(r-6j-3n-7)(r+6j+5)(r+12j+13)(r+12j+19) \times \\ &\quad \times \prod_{i=0}^{\frac{n-2l-5}{2}} (r-6i-3)(r-6i-6)(r-6i-6l-8)(r-6i+6l-4)(r-6i-6l-11)(r-6i-12l-13). \end{aligned} \quad (23)$$

Для третьего типа:

$$\begin{aligned} a_0^{(3)}(l) &= 6l + 7, l = 0, 1, 2, \dots, \frac{n-3}{2}, n = 3, 5, 7, \dots, \\ \tau_{3n+1}(a_0^{(3)}, r) &= (r+1)(r+5)(r+7)(r+13)(r-3n-7)(r-3n-9)(r-3n-15) \times \\ &\quad \times (r-3n+6l+6)(r-6l-8)(r-3n-3) \times \\ &\quad \times \prod_{j=0}^{l-1} (r-12j-3n-27)(r-12j-3n-21)(r-6j-3n-13)(r+6j+11)(r+12j+19)(r+12j+25) \times \\ &\quad \times \prod_{i=0}^{\frac{n-2l-5}{2}} (r-6i-3)(r-6i-6)(r-6i-6l-11)(r-6i-6l-14)(r-6i-12l-19)(r-6i+6l+2). \end{aligned} \quad (24)$$

Для четвертого типа:

$$\begin{aligned} a_0^{(4)}(l) &= -3l - 5, l = 0, 1, 2, \dots, \frac{n-3}{2}, n = 3, 5, 7, \dots, \\ \tau_{3n+1}(a_0^{(4)}, r) &= (r+1)(r+5)(r-3n-7)(r-3n-3)(r-3n+6l+7)(r-3n+6l+6) \times \\ &\quad \times (r-3n+6l+1)(r-3n+6l-3)(r+3l+4)(r-3n-3l-6) \times \\ &\quad \times \prod_{j=0}^{l-1} (r-6j-3n-13)(r-3j-3n-6)(r-6j-3n+6l-5)(r+3j+4)(r-3n-6j+6l-6)(r+6j+11) \times \\ &\quad \times \prod_{i=0}^{\frac{n-2l-5}{2}} (r-6i-2)(r-6i-3)(r-6i-6)(r-6i-3l-10)(r-6i-3l-7)(r-6i-3l-11). \end{aligned} \quad (25)$$

Для пятого типа:

$$\begin{aligned} a_0^{(5)}(l) &= -6l - 6, l = 0, 1, 2, \dots, \frac{n-3}{2}, n = 3, 5, 7, \dots, \\ \tau_{3n+1}(a_0^{(5)}, r) &= (r+1)(r+7)(r-3n-3)(r-3n+1)(r-3n-6l-9)(r-3n-6l-4) \times \\ &\quad \times (r-3n+6l+6)(r-3n-6l-7)(r+6l+5)(r+6l+2) \times \\ &\quad \times \prod_{j=0}^{l-1} (r-6j-3n-6l-15)(r-6j-3n-9)(r-6j-3n-7)(r+6j+5)(r+12j+13)(r+12j+19) \times \\ &\quad \times \prod_{i=0}^{\frac{n-2l-5}{2}} (r-6i-3)(r-6i-6)(r-6i-6l-8)(r-6i-6l-11)(r-6i-12l-13)(r-6i+6l-4). \end{aligned} \quad (26)$$

Для шестого типа:

$$\begin{aligned}
 a_0^{(6)}(l) &= -6l - 9, l = 0, 1, 2, \dots, \frac{n-3}{2}, n = 3, 5, 7, \dots, \\
 \tau_{3n+1}(a_0^{(6)}, r) &= (r+1)(r+5)(r+7)(r+13)(r-3n-6l-10)(r-3n-15) \times \\
 &\quad \times (r-3n-9)(r-3n-7)(r-3n-3)(r+6l+8) \times \\
 &\quad \times \prod_{j=0}^{l-1} (r-12j-3n-27)(r-12j-3n-21)(r-6j-3n-13)(r+6j+11)(r+12j+19)(r+12j+25) \times \\
 &\quad \times \prod_{i=0}^{\frac{n-2l-5}{2}} (r-6i-3)(r-6i-6)(r-6i-6l-11)(r-6i+6l+2)(r-6i-12l-19)(r-6i-6l-14). \quad (27)
 \end{aligned}$$

Для седьмого типа:

$$\begin{aligned}
 a_0^{(7)} &= -3, n = 3, 5, 7, \dots, \\
 \tau_{3n+1}(a_0^{(7)}, r) &= (r+1)(r+2)(r-3)(r-4)(r-5)(r-6)(r-7)(r-8)(r-12)(r-3n-4) \times \\
 &\quad \times \prod_{j=0}^{\frac{n-5}{2}} (r-6j-9)(r-6j-10)(r-6j-11)(r-6j-13)(r-6j-14)(r-6j-18). \quad (28)
 \end{aligned}$$

Для восьмого типа:

$$\begin{aligned}
 a_0^{(8)} &= -2, n = 3, 5, 7, \dots, \\
 \tau_{3n+1}(a_0^{(8)}, r) &= (r+1)(r-2)(r-3)(r-4)(r-5)(r-6)(r-7)(r-8)(r-9)(r-3n-3) \times \\
 &\quad \times \prod_{j=0}^{\frac{n-5}{2}} (r-6j-10)(r-6j-11)(r-6j-12)(r-6j-13)(r-6j-14)(r-6j-15). \quad (29)
 \end{aligned}$$

Для девятого типа:

$$\begin{aligned}
 a_0^{(9)} &= 1, n = 3, 5, 7, \dots, \\
 \tau_{3n+1}(a_0^{(9)}, r) &= (r+1)(r+2)(r-3)(r-4)(r-5)(r-6)(r-7)(r-8)(r-12)(r-3n) \times \\
 &\quad \times \prod_{j=0}^{\frac{n-5}{2}} (r-6j-9)(r-6j-10)(r-6j-11)(r-6j-13)(r-6j-14)(r-6j-18). \quad (30)
 \end{aligned}$$

Для десятого типа:

$$\begin{aligned}
 a_0^{(10)} &= 3n + 1, n = 3, 5, 7, \dots, \\
 \tau_{3n+1}(a_0^{(10)}, r) &= (r+1)(r+5)(r+7)(r+13)(r+19)(r-3n-3)(r-3n-7) \times \\
 &\quad \times (r-3n-9)(r-3n-15)(r-3n-21) \times \\
 &\quad \times \prod_{j=0}^{\frac{n-5}{2}} (r+6j+11)(r+12j+31)(r+12j+25)(r-3n-12j-33) \times \\
 &\quad \times (r-3n-12j-27)(r-3n-6j-13). \quad (31)
 \end{aligned}$$

Резонансные многочлены $\tau_{3n}(1, r)$ и $\tau_{3n+1}(-2, r)$ имеют соответственно $3n - 1$ и $3n$ целых положительных корней. Также можно убедиться, что при указанных ограничениях на i, j, l, n корни каждого из многочленов (15)–(31) целые и однократные. Относительно всех резонансных многочленов уравнения (K_2) во всех случаях справедлива

Т е о р е м а 2. *Резонансные многочлены уравнения (K_2) имеют только целые и однократные корни.*

Заметим, что из характера корней резонансных многочленов следует, что уравнение (K_2) не проходит тест Пенлеве, так как одно из условий теста требует, чтобы для каждого баланса (a_0, q) существовал $m - 1$ целый положительный резонанс, где m – порядок уравнения [14]. Тем не менее уравнение (K_2) , так же как и уравнения иерархий $({}_2n P_1)$, $({}_2n P_2)$ и K_1 , проходит ослабленный тест

Пенлеве, в котором упомянутое условие заменяется на существование хотя бы одного баланса (a_0, q) , для которого вместе с резонансом -1 существует еще $m - 1$ целый положительный резонанс. Отметим также, что уравнение $({}_4P_1)$ имеет свойство Пенлеве [15].

Литература

1. Painleve' P. // Bull. Soc. Math. France. 1900. Vol. 28. P. 201–261.
2. Painleve' P. // Acta Math. 1902. Vol. 25. P. 1–85.
3. Gambier B. // Acta Math. 1909. Vol. 33. P. 1–55.
4. Ince E. L. Ordinary Differential Equations. Dover; New York, 1956.
5. Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.; Л., 1950.
6. Громак В. И., Лукашевич Н. А. Аналитические свойства решений уравнений Пенлеве. Минск, 1990.
7. Кудряшов Н. А. Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений. М., 2004.
8. Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи рассеяния. М., 1987.
9. Громак В. И. // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42, № 8. С. 1017–1026.
10. Громак В. И. // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44, № 2. С. 172–180.
11. Кудряшов Н. А. // ТМФ. 2000. Т. 122. С. 72–87.
12. Грицук Е. В. // Весці НАН Беларусі. Сер. физ.-мат. навук. 2011. № 4. С. 33–41.
13. N. A. Kudryashov // Physics Letters A. 2008. Vol. 372. P. 1945–1956.
14. Ablowitz M. J., Ramani A., Segur H. // J. Math. Phys. 1980. Vol. 21. P. 715–721.
15. Simomura S. // Nonlinierity. 2001. Vol. 14. P. 193–203.

E. V. GRYTSUK., V. I. GROMAK

ANALYTICAL PROPERTIES OF THE SOLUTIONS OF THE PENLEVE-TYPE NON-LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

Summary

The theorem of a general structure of equations in the K_2 hierarchy is proved. The order of movable poles of solutions is determined. The resonant polynomials are constructed in explicit form, and the character of their roots is determined.

УДК 517.587

Ю. В. ТРУБНИКОВ, И. А. ОРЕХОВА

**ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ПОЛИНОМАХ ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ
КОМПЛЕКСНОГО АРГУМЕНТА**

Витебский государственный университет им. П. М. Машерова

(Поступила в редакцию 20.12.2013)

Построение экстремальных полиномов в комплексной плоскости является весьма важной задачей не только с теоретической точки зрения, но и в приложениях, в частности, при построении оптимальных итерационных процессов высоких порядков для линейных операторов в банаховых пространствах [1].

Под экстремальными полиномами понимаются точные и приближенные полиномы типа Чебышева, определенные на различных множествах действительной прямой или комплексной плоскости. Такие полиномы применяются для решения самых различных задач: аппроксимации потенциалов в небесной механике, проектировании электрических фильтров, построении оптимальных итерационных процессов и т. д. Основными теоретическими методами доказательства экстремальности полиномов в комплексных областях являются методы, основанные на критериях А. Н. Колмогорова (1948) [2] или В. К. Иванова, Е. Я. Ремеза (1953) [3]. В настоящей статье принят метод доказательства экстремальности, основанный на критерии экстремальности, который изложен в монографии [4]. Ю. В. Трубниковым были построены экстремальные полиномы комплексного аргумента, заданные на квадрате комплексной плоскости до шестой степени включительно, непосредственно обобщающие полиномы Чебышева [5]. Авторами данной статьи ранее были получены результаты, связанные с доказательством одного из случаев построения экстремальных полиномов третьей степени комплексного аргумента, заданного на прямоугольнике, смещенном по оси абсцисс [6].

В данной работе рассматривается одно из самых естественных обобщений на комплексный случай полиномов Чебышева, т. е. задача нахождения кубического полинома вида

$$z^3 + az^2 + bz + c$$

комплексного аргумента z , заданного на прямоугольнике D с вершинами в точках $w + hi$, $-w + hi$, $-w - hi$, $w - hi$ ($w > 0$, $h > 0$), имеющего минимальную чебышевскую норму (экстремального полинома).

Приведем для удобства читателя соответствующий результат для полиномов второй степени. Обозначим $s = h/w$.

Т е о р е м а 1 [5]. *При выполнении неравенства $0 \leq s \leq 1/2$ экстремальным является полином*

$$P_*(z) = z^2 - \frac{w^2}{2} - h^2,$$

при этом

$$\|P_*\| = \frac{w^2}{2} + 2h^2;$$

если $1/2 \leq s \leq 2$, то

$$P_*(z) = z^2 - w^2 + h^2,$$

при этом

$$\|P_*\| = 2wh;$$

и, наконец, если $s > 2$, то

$$P_*(z) = z^2 + w^2 + \frac{h^2}{2},$$

$$\|P_*\| = 2w^2 + \frac{h^2}{2}.$$

Основным результатом данной статьи является следующая теорема.

Т е о р е м а 2. При выполнении неравенства $0 \leq s \leq \frac{1}{3}(\sqrt{7} - 2)$ экстремальным является полином

$$P_*(z) = z^3 - \frac{3(w^2 + h^2)^2}{4(w^2 - 3h^2)} \cdot z, \quad (1)$$

а его норма $\|P_*\|$ равна

$$\|P_*\| = \frac{1}{4} \cdot \frac{w^3(1 + 9s^2)(1 + s^2)^{3/2}}{1 - 3s^2} \quad \left(s = \frac{h}{w} \right). \quad (2)$$

Если

$$\frac{1}{3}(\sqrt{7} - 2) \leq s \leq 1, \quad (3)$$

то

$$P_* = z^3 - (w^2 - h^2)z, \quad (4)$$

$$\|P_*\| = 2w^3s(1 + s^2)^{1/2}. \quad (5)$$

Далее при выполнении неравенства

$$1 \leq s \leq \sqrt{7} + 2 \quad (6)$$

имеем

$$P_* = z^3 + (w^2 - h^2)z, \quad (7)$$

$$\|P_*\| = \frac{2h^3(1 + s^2)^{1/2}}{s^2}; \quad (8)$$

и, наконец, если

$$\sqrt{7} + 2 \leq s < \infty, \quad (9)$$

то

$$P_*(z) = z^3 + \frac{3(w^2 + h^2)^2}{4(h^2 - 3w^2)} \cdot z, \quad (10)$$

$$\|P_*\| = \frac{1}{4} \cdot \frac{h^3(s^2 + 9)(s^2 + 1)^{3/2}}{s^3(s^2 - 3)}. \quad (11)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся субдифференциальным критерием оптимальности [7]. В соответствии с алгоритмом, основанном на субдифференциальном критерии оптимальности, прежде всего необходимо найти систему ϵ -точек (т. е. точек, в которых $|P(z)| = \|P\|$) полинома (1).

Так как по теореме о максимуме модуля аналитической функции максимум модуля достигается на границе области, то при $y = h$ получаем:

$$\begin{aligned} |P_*(x+hi)|^2 &= \frac{1}{16} \cdot \frac{w^6 s^2 (1+10s^2-9s^4)^2}{(1-3s^2)^2} + \\ &+ \frac{3}{16} \cdot \frac{w^4 (1+6s^2+21s^4)(3-6s^2+7s^4)}{(1-3s^2)^2} \cdot t - \frac{3}{2} \cdot \frac{w^2 (1+7s^4)}{1-3s^2} \cdot t^2 + t^3 \quad (t=x^2). \end{aligned} \quad (12)$$

Изучим поведение функции (12) по переменной t ($0 \leq t \leq w^2$).

Так как

$$\frac{d(|P_*(x+hi)|^2)}{dt} = \frac{3}{16} \cdot \frac{w^4 (1+6s^2+21s^4)(3-6s^2+7s^4)}{(1-3s^2)^2} - 3 \cdot \frac{w^2 (1+7s^4)}{1-3s^2} \cdot t + 3t^2,$$

то, решая квадратное уравнение

$$\frac{d(|P_*(x+hi)|^2)}{dt} = 0,$$

получаем, что его корни

$$t_1 = \frac{w^2 (3-6s^2+7s^4)}{4(1-3s^2)}, \quad t_2 = \frac{w^2 (1+6s^2+21s^4)}{4(1-3s^2)}.$$

Заметим, что при выполнении условия

$$0 \leq s \leq \frac{1}{3} \cdot (\sqrt{7}-2) \approx 0,215249 \quad (13)$$

имеет место неравенство

$$t_2 < t_1.$$

Действительно, неравенство

$$1+6s^2+21s^4 < 3-6s^2+7s^4$$

эквивалентно неравенству

$$0 < 2-12s^2-14s^4$$

или, что то же самое, неравенству

$$7s^4 + 6s^2 - 1 < 0. \quad (14)$$

Неравенство (14) выполняется при

$$s \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{7}}\right),$$

т. е. тем более и при

$$s \in \left[0, \frac{\sqrt{7}-2}{3}\right].$$

Таким образом, локальный максимум квадрата модуля $|P(x+hi)|^2$ достигается при

$$x_2 = \frac{w}{2} \cdot \sqrt{\frac{1+6s^2+21s^4}{1-3s^2}}. \quad (15)$$

Подставляя значение (14) в выражение (12), получаем:

$$|P(x_2 + hi)|^2 = \frac{1}{16} \cdot \frac{w^6(1+9s^2)(1+s^2)^3}{(1-3s^2)^2}. \quad (16)$$

Кроме того, возможен краевой максимум, так как при выполнении условия (13) имеет место неравенство

$$t_1 = \frac{w^2(3-6s^2+7s^4)}{4(1-3s^2)} < w^2.$$

При подстановке значения $x = w$ в правую часть равенства (12) получаем тот же самый результат

$$|P_*(w + hi)|^2 = \frac{1}{16} \cdot \frac{w^6(1+9s^2)(1+s^2)^3}{(1-3s^2)^2}. \quad (17)$$

Таким образом, в восьми точках

$$\begin{aligned} z_1 = w + hi, \quad z_2 = \sqrt{t_2} + hi, \quad z_3 = -\sqrt{t_2} + hi, \quad z_4 = -w + hi, \\ z_5 = -w - hi, \quad z_6 = -\sqrt{t_2} - hi, \quad z_7 = \sqrt{t_2} - hi, \quad z_8 = w - hi \end{aligned}$$

выполняется равенство

$$|P_*(z_j)| = \|P_*\| \quad (j=1,2,\dots,8).$$

Далее в соответствии с алгоритмом [7] нам необходимо построить функционал μ , обладающий свойствами

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\langle \mu, \text{const} \rangle = 0, \quad \operatorname{Re}\langle \mu, z \rangle = 0, \\ \operatorname{Re}\langle \mu, z^2 \rangle = 0, \quad \operatorname{Re}\langle \mu, P_* \rangle = \|P_*\|, \quad \|\mu\| = 1, \end{aligned}$$

где скобки $\langle \mu, \varphi \rangle$ обозначают значение функционала μ на функции φ . Существование такого линейного функционала гарантирует экстремальность полинома P_* .

Для этого найдем значения $\operatorname{Re} P_*(z_j)$, $\operatorname{Im} P_*(z_j)$ ($1 \leq j \leq 4$) в четырех точках:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} P_*(z_1) &= \frac{1}{4} \cdot \frac{w^3(1-30s^2+33s^4)}{1-3s^2}, \\ \operatorname{Im} P_*(z_1) &= \frac{1}{4} \cdot \frac{w^3s(3-8s+3s^2)(3+8s+3s^2)}{1-3s^2}, \\ \operatorname{Re} P_*(z_2) &= -\frac{1}{4} \cdot \frac{w^3(1+9s^2)\sqrt{(1-3s^2)(1+6s^2+21s^4)}}{1-3s^2}, \\ \operatorname{Im} P_*(z_2) &= \frac{2w^3s^3(1+9s^2)}{1-3s^2}, \\ \operatorname{Re} P_*(z_3) &= \frac{1}{4} \cdot \frac{w^3(1+9s^2)\sqrt{(1-3s^2)(1+6s^2+21s^4)}}{1-3s^2}, \\ \operatorname{Im} P_*(z_3) &= \frac{2w^3s^3(1+9s^2)}{1-3s^2}, \end{aligned}$$

$$\operatorname{Re} P_*(z_4) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{w^3(1-30s^2+33s^4)}{1-3s^2},$$

$$\operatorname{Im} P_*(z_4) = \frac{1}{4} \cdot \frac{w^3 s(3-8s+3s^2)(3+8s+3s^2)}{1-3s^2}.$$

После нахождения этих значений записываем уравнения:

$$\|P_*\| \cdot \operatorname{Re}\langle \mu, \text{const} \rangle = \operatorname{Re}(r_1 \bar{P}_*(z_1)x + r_2 \bar{P}_*(z_2)x + r_3 \bar{P}_*(z_3)x + r_4 \bar{P}_*(z_4)x) = 0, \quad (18)$$

$$\|P_*\| \cdot \operatorname{Re}\langle \mu, z \rangle = \operatorname{Re}(r_1 \bar{P}_*(z_1)(w+hi) + r_2 \bar{P}_*(z_2)(\sqrt{t_2}+hi) + r_3 \bar{P}_*(z_3)(-\sqrt{t_2}+hi) + r_4 \bar{P}_*(z_4)(-w+hi)) = 0, \quad (19)$$

$$\|P_*\| \cdot \operatorname{Re}\langle \mu, z^2 \rangle = \operatorname{Re}(r_1 \bar{P}_*(z_1)(w+hi)^2 + r_2 \bar{P}_*(z_2)(\sqrt{t_2}+hi)^2 + r_3 \bar{P}_*(z_3)(-\sqrt{t_2}+hi)^2 + r_4 \bar{P}_*(z_4)(-w+hi)^2) = 0, \quad (20)$$

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 1. \quad (21)$$

Существование положительного решения r_j ($j = 1, 2, 3, 4$) системы уравнений (18)–(21) гарантирует экстремальность полинома P_* .

Решим систему уравнений (18)–(21) по правилу Крамера. Обозначив матрицу системы через M , а соответствующие матрицы для нахождения r_j через M_j ($j = 1, 2, 3, 4$), получаем:

$$\det M = \frac{9}{128} \cdot \frac{xw^{12}(1+9s^2)(1-7s^2)^3(1+s^2)^2}{(1-3s^2)^3} \cdot \sqrt{(1-3s^2)(1+6s^2+21s^4)};$$

$$\det M_1 = \frac{3}{256} \cdot \frac{xw^{12}(1+9s^2)^2(1+s^2)^3(1+5s^2)(1-7s^2)^2}{(1-3s^2)^4} \cdot \sqrt{(1-3s^2)(1+6s^2+21s^4)};$$

$$\det M_2 = \frac{3}{128} \cdot \frac{xw^{12}(1+9s^2)(1+4s-3s^2)(1-4s-3s^2)(1-7s^2)^2(1+s^2)^3}{(1-3s^2)^4} \times$$

$$\times \sqrt{(1-3s^2)(1+6s^2+21s^4)};$$

$$\det M_3 = \frac{3}{128} \cdot \frac{xw^{12}(1+9s^2)(1+4s-3s^2)(1-4s-3s^2)(1-7s^2)^2(1+s^2)^3}{(1-3s^2)^4} \times$$

$$\times \sqrt{(1-3s^2)(1+6s^2+21s^4)};$$

$$\det M_4 = \frac{3}{256} \cdot \frac{xw^{12}(1+9s^2)(1+s^2)^3(1+5s^2)(1-7s^2)^2}{(1-3s^2)^4} \cdot \sqrt{(1-3s^2)(1+6s^2+21s^4)}.$$

Таким образом,

$$r_1 = r_4 = \frac{1}{6} \cdot \frac{(1+5s^2)(1+9s^2)}{(1-7s^2)(1-3s^2)};$$

$$r_2 = r_3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{(1-4s-3s^2)(1+4s-3s^2)}{(1-7s^2)(1-3s^2)}.$$

Очевидно, что при $s \in \left[0, \frac{1}{3}(\sqrt{7}-2)\right)$ выполняются неравенства $r_j > 0$ ($j = 1, 2, 3, 4$). Далее выясним, что происходит при

$$s = \frac{1}{3}(\sqrt{7}-2) \approx 0,215249.$$

Уравнение

$$\frac{3(w^2 + h^2)^2}{4(w^2 - 3h^2)} = w^2 - h^2$$

приводится к виду

$$9s^4 - 22s^2 + 1 = 0,$$

и один из его корней

$$s_1 = \frac{1}{3}\sqrt{11-4\sqrt{7}} = \frac{1}{3}(\sqrt{7}-2).$$

То есть происходит непрерывное «переключение» на выражение для квадрата корня, равное $w^2 - h^2$.

Так как

$$\frac{3(w^2 + h^2)^2}{4(w^2 - 3h^2)} = \frac{3w^2(1+s^2)^2}{4(1-3s^2)} \equiv g(s)$$

и

$$\frac{dg}{ds} = \frac{3}{2} \cdot \frac{w^2 s(1+s^2)(5-3s^2)}{(1-3s^2)^2} > 0$$

при $s \in \left[0, \frac{1}{3}(\sqrt{7}-2)\right)$, то при $s = \frac{1}{3}(\sqrt{7}-2)$ удаление корней переходит в их сближение, и такое сближение продолжается на интервале $s \in \left(\frac{1}{3}(\sqrt{7}-2), 1\right)$, т. е. до того значения $s = 1$, когда прямоугольник превратится в квадрат.

Перейдем к рассмотрению случая, когда $\frac{1}{3}(\sqrt{7}-2) \leq s \leq 1$.

Построим функционал μ , принадлежащий субдифференциалу полинома (4) с требуемыми свойствами. В этом случае

$$\left|P_*(x+hi)\right|^2 = w^6 s^2 + w^4(4s^4 - 2s^2 + 1)t + w^2(5s^2 - 2)t^2 + t^3 \quad (t = x^2). \quad (22)$$

Далее находим производную

$$\frac{d\left|P_*(x+hi)\right|^2}{dt} = 3t^2 + 2w^2(5s^2 - 2)t + w^4(4s^4 - 2s^2 + 1). \quad (23)$$

Решая уравнение

$$3t^2 + 2w^2(5s^2 - 2)t + w^4(4s^4 - 2s^2 + 1) = 0, \quad (24)$$

получаем корни

$$t_1 = \frac{w^2}{3} \left(2 - 5s^2 - \sqrt{1 - 14s^2 + 13s^4} \right),$$

$$t_2 = \frac{w^2}{3} \left(2 - 5s^2 + \sqrt{1 - 14s^2 + 13s^4} \right).$$

Если выполняется неравенство

$$13s^4 - 14s^2 + 1 \geq 0, \quad (25)$$

а это происходит при $s \in \left[\frac{\sqrt{7}-2}{3}, \frac{\sqrt{13}}{13} \right]$, то локальный максимум выражения (22) достигается при $t = t_1$. Подставляя значение $x_1 = \sqrt{t_1}$ в правую часть равенства (22), получаем:

$$\begin{aligned} |P_*(x_1 + hi)|^2 &= \frac{2w^6}{27} \left[2(s^2 - 1) + \sqrt{(1-s^2)(1-13s^2)} \right] \times \\ &\times \left[11s^4 - 10s^2 + 1 + (s^2 - 1)\sqrt{(1-s^2)(1-13s^2)} \right] \quad (x_1 = \sqrt{t_1}). \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$|P_*(w + hi)|^2 = 4w^6 s^2 (1 + s^2).$$

Знак разности

$$q(s) \equiv |P_*(x_1 + hi)|^2 - |P_*(w + hi)|^2 \quad (26)$$

на интервале $s \in \left(\frac{\sqrt{7}-2}{3}, \frac{\sqrt{13}}{13} \right)$ можно определить прямым вычислением значений функции (26). Так, например,

$$\begin{aligned} q(0,23) &\approx -0,02w^6, & q(0,24) &\approx -0,04w^6, & q(0,25) &\approx -0,05w^6, \\ q(0,26) &\approx -0,07w^6, & q(0,27) &\approx -0,09w^6. \end{aligned}$$

Этот факт означает, что равенство $|P_*(z)| = \|P_*\|$ достигается только в четырех точках $z_1 = w + hi$, $z_2 = -w + hi$, $z_3 = -w - hi$, $z_4 = w - hi$. При $s \in \left(\frac{\sqrt{13}}{13}, 1 \right)$ дискриминант $13s^4 - 14s^2 + 1$ становится отрицательным, т. е. тем более равенство $|P_*(z)| = \|P_*\|$ достигается только в точках z_j ($j = 1, 2, 3, 4$).

Далее находим

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \operatorname{Re} P_*(w + hi) = -2w^3 s^2, & \beta_1 &= \operatorname{Im} P_*(w + hi) = 2w^3 s, \\ \alpha_2 &= \operatorname{Re} P_*(-w + hi) = 2w^3 s^2, & \beta_2 &= \operatorname{Im} P_*(-w + hi) = 2w^3 s, \\ \alpha_3 &= \operatorname{Re} P_*(-w - hi) = 2w^3 s^2, & \beta_3 &= \operatorname{Im} P_*(-w - hi) = -2w^3 s, \\ \alpha_4 &= \operatorname{Re} P_*(w - hi) = -2w^3 s^2, & \beta_4 &= \operatorname{Im} P_*(w - hi) = -2w^3 s. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \|P_*\| \cdot \operatorname{Re} \langle \mu, \operatorname{const} \rangle &= \operatorname{Re} \left[\sum_{j=1}^4 r_j (\alpha_j - \beta_j i)(x + yi) \right] = -2w^3 s^2 (r_1 - r_2 - r_3 + r_4) x + \\ &\quad + 2w^3 s (r_1 + r_2 - r_3 - r_4) y; \\ \|P_*\| \cdot \operatorname{Re} \langle \mu, z \rangle &= \operatorname{Re} (r_1 (\alpha_1 - \beta_1 i)(w + hi) + r_2 (\alpha_2 - \beta_2 i)(-w + hi) + \\ &\quad + r_3 (\alpha_3 - \beta_3 i)(-w - hi) + r_4 (\alpha_4 - \beta_4 i)(w - hi)) = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|P_*\| \cdot \operatorname{Re}\langle \mu, z^2 \rangle &= \operatorname{Re}(r_1(\alpha_1 - \beta_1 i)(w + hi)^2 + r_2(\alpha_2 - \beta_2 i)(-w + hi)^2 + \\ &+ r_3(\alpha_3 - \beta_3 i)(-w - hi)^2 + r_4(\alpha_4 - \beta_4 i)(w - hi)^2) = \\ &= 2w^5 s^2 (1 + s^2)(r_1 - r_2 - r_3 + r_4), \end{aligned}$$

т. е. система уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{Re}\langle \mu, \operatorname{const} \rangle = 0, \\ \operatorname{Re}\langle \mu, z \rangle = 0, \\ \operatorname{Re}\langle \mu, z^2 \rangle = 0, \\ \|\mu\| = 1 \end{cases}$$

приводится к виду

$$\begin{cases} r_1 - r_2 - r_3 + r_4 = 0, \\ r_1 + r_2 - r_3 + r_4 = 0, \\ r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 1. \end{cases}$$

Одним из решений такой системы является решение $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 1/4$. Тем самым экстремальность полинома (4) установлена.

При $\frac{h}{w} = s = 1$, т. е. в случае квадрата $P_*(z) = z^3$, кроме того, при $s > 1$ движение корней начинается по оси Oy . Вторая часть теоремы вытекает из аналогичного расположения корней полинома на оси Oy .

Результатом данной работы является сформулированная и доказанная теорема 2 о виде экстремального полинома третьей степени, заданного на симметричном относительно осей Ox , Oy , прямоугольнике комплексной плоскости, которая также отражает движение корней построенного экстремального полинома.

Литература

1. Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П. и др. Приближенное решение операторных уравнений. М., 1969. С. 96.
2. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М., 1977. С. 47.
3. Иоффе А. Д. Теория экстремальных задач. М., 1974. С. 89.
4. Трубников Ю. В. Экстремальные конструкции в негладком анализе и операторные уравнения с аккретивными нелинейностями. М., 2002. С. 71.
5. Трубников Ю. В. // Таврич. вестн. информатики и математики. 2003. № 2. С. 45–56.
6. Трубников Ю. В., Орехова И. А. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2013. № 1. С. 13–22.
7. Трубников Ю. В., Орехова И. А., Сунь Байюй // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та. 2012. № 6. С. 13–19.

Yu. V. TRUBNIKOV, I. A. OREHOVA

ON THE EXTREME THIRD-DEGREE POLYNOMIALS WITH COMPLEX ARGUMENT

Summary

The article deals with the construction of extreme third degree polynomial defined on a rectangle in the complex plane. The main theoretical methods prove extreme polynomials in complex domains are those based on the criteria of A. N. Kolmogorov (1948) and V. K. Ivanov – E. Y. Remez (1953). Extreme polynomials are used in the construction of optimal high-order iterative processes for linear bounded operators in a Banach space, with the region of spectrum localization in the rectangle.

УДК 511.42

В. И. БЕРНИК, Д. В. КОЛЕДА

**РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ДИСКРИМИНАНТОВ
 МНОГОЧЛЕНОВ ВТОРОЙ И ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ**

Институт математики НАН Беларуси

(Поступила в редакцию 11.04.2014)

Пусть $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ – многочлен степени n , пусть $H(P) = \max_{0 \leq i \leq n} |a_i|$ обозначает высоту многочлена P , а $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ – корни P . Число

$$D(P) = a_n^{2n-2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_i - \alpha_j)^2 \quad (1)$$

называется дискриминантом многочлена P . Для многочленов первой степени нет содержательного толкования понятия дискриминанта, поэтому в дальнейшем они рассматриваться не будут.

Дискриминант многочлена является одной из основных характеристик многочлена и играет важную роль в алгебре и теории чисел [1, 2]. В задачах метрической теории диофантовых приближений верхние оценки для количества многочленов ограниченной высоты привели к решению проблемы Малера для многочленов третьей степени [3, 4], а также к точным верхним оценкам размерности Хаусдорфа [5].

Дискриминант является целочисленным многочленом от $n+1$ переменных коэффициентов многочлена P (см. [1]). Это следует из представления дискриминанта в виде определителя.

Ясно, что $D(P) = 0$ тогда и только тогда, когда $P(x)$ имеет кратные корни. Если $D(P) \neq 0$, то из представления $D(P)$ в виде определителя легко получается неравенство

$$1 \leq |D(P)| \leq \gamma_n H(P)^{2n-2}, \quad (2)$$

где постоянная γ_n зависит только от степени n и определена как

$$\gamma_n := \sup_{\substack{P \in \mathbb{Z}[x] \\ \deg P = n}} \frac{|D(P)|}{(H(P))^{2n-2}}.$$

Будем обозначать $\#M$ число элементов конечного множества M , а через μB обозначим меру Лебега измеримого множества $B \subset \mathbb{R}$. Далее через $c_1 = c_1(n), c_2, \dots$ обозначаем величины, зависящие только от n и не зависящие от H . Также будем использовать символ Виноградова \ll . Выражение $f \ll g$ равносильно тому, что $f \leq c_1 g$ для некоторой постоянной c_1 , которая зависит только от степени n . Выражение $f \asymp g$ означает, что $g \ll f \ll g$.

Пусть заданы $n \in \mathbb{N}$, $Q > 1$ и $v \geq 0$. Определим множества

$$\mathcal{P}_n(Q) = \{P \in \mathbb{Z}[x] : \deg P = n, H(P) \leq Q\}, \quad (3)$$

$$\mathcal{P}_n(Q, v) = \{P \in \mathcal{P}_n(Q) : 0 < |D(P)| \leq \gamma_n Q^{2n-2-2v}\}, \quad (4)$$

$$\mathcal{P}_{\leq n}(Q, v) = \bigcup_{k=2}^n \mathcal{P}_k(Q, v). \quad (5)$$

В данной работе мы получим нижние оценки числа элементов во множествах $\mathcal{P}_3(Q, v)$ и $\mathcal{P}_{\leq 3}(Q, v)$.

Т е о р е м а 1. При $0 \leq v \leq 2$ выполняется неравенство

$$\#\mathcal{P}_3(Q, v) \gg Q^{4-5v/3}.$$

В работе [6] получена оценка

$$c_3 Q^{4-5v/3} < \#\mathcal{P}_3(Q, v) < c_4 Q^{4-5v/3},$$

однако только при $v \leq 3/5$. Важное значение при доказательстве теоремы 1 имеет следующая лемма.

Л е м м а 1. Пусть заданы целые числа $n \geq 2$ и $0 \leq m \leq n-1$. Тогда существуют положительные постоянные $\delta_0 = \delta_0(n)$ и $c_0 = c_0(n)$ со следующими свойствами. Для любого промежутка $I \subset [-1/2, 1/2]$ найдется достаточно малое $\varepsilon > 0$ такое, что для любых положительных параметров $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$, удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned} \xi_i < c_5, \quad 0 \leq i \leq m-1; & \quad \xi_j > c_5, \quad m \leq j \leq n; \\ \xi_0 < \varepsilon, \quad \xi_n > \varepsilon^{-1}, & \quad \xi_0 \xi_1 \dots \xi_n = 1, \end{aligned}$$

найдется измеримое множество S_I с мерой

$$\mu S_I > \frac{3}{4} \mu I, \tag{6}$$

такое, что для любого $x \in S_I$ существует неприводимый многочлен $P(x)$, $\deg P = n$, с условиями

$$\delta_0 \xi_j < |P^{(j)}(x)| < c_0 \xi_j, \quad 0 \leq j \leq n. \tag{7}$$

Лемма 1 доказана в работе [7]. Величину $3/4$ в (6) можно заменить на любое число γ , $0 < \gamma < 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Возьмем точку $x_1 \in S_I$ и воспользуемся леммой 1 при специальном выборе величины ξ_j . Тогда система неравенств (7) примет вид при $P(x) = P_1(x)$:

$$\begin{cases} \delta_0 Q^{-v_0} < |P_1(x_1)| < c_0 Q^{-v_0}, & \delta_0 Q^{-v_1} < |P_1'(x_1)| < c_0 Q^{-v_1}, \\ \delta_0 Q^{-v_2} < |P_1''(x_1)| < c_0 Q^{-v_2}, & \delta_0 Q < |P_1^{(3)}(x_1)| < c_0 Q, \\ v_0 + v_1 + v_2 = 1. \end{cases} \tag{8}$$

Потребуем выполнения неравенства

$$v_0 - v_1 \geq v_1 - v_2 \geq v_2 + 1.$$

Упорядочим корни многочлена $P_1(x)$ относительно точки x_1 :

$$|x_1 - \alpha_1| \leq |x_1 - \alpha_2| \leq \dots \leq |x_1 - \alpha_n|.$$

Необходимую для $|x_1 - \alpha_1|$ оценку сверху дает

Л е м м а 2 [8]. Если α_1 – ближайший к числу x_1 корень многочлена $P(x)$, $\deg P = n$, то справедливы неравенства

$$\begin{aligned} |x_1 - \alpha_1| &\leq n |P(x_1)| |P'(x_1)|^{-1}, \\ |x_1 - \alpha_1| &\leq 2^n |P(x_1)| |P'(\alpha_1)|^{-1}. \end{aligned} \tag{9}$$

Если обозначить через β_1, β_2 корни $P'(x)$, а через γ – корень $P_1''(x)$, то, применив лемму 2 к неравенствам (8), получим

$$|x_1 - \alpha_1| < c_6 Q^{-v_0+v_1}, \quad |x_1 - \beta_1| < c_6 Q^{-v_1+v_2}, \quad |x_1 - \gamma| < c_6 Q^{-v_2-1}. \tag{10}$$

В работе [7] показано, что из (8) и (10) можно получить

$$|\alpha_1 - \alpha_2| < c_7 Q^{-v_1+v_2}, \quad |\alpha_1 - \alpha_3| < c_7 Q^{-v_2-1}. \quad (11)$$

Возьмем в (11) величины $v_0 = 3 - v$, $v_1 = 2v/3 - 1$, $v_2 = v/3 - 1$. Тогда (11) примет вид

$$|\alpha_1 - \alpha_2| < c_8 Q^{-v/3}, \quad |\alpha_1 - \alpha_3| < c_8 Q^{-v/3}, \quad |\alpha_2 - \alpha_3| < c_8 Q^{-v/3}. \quad (12)$$

Из неравенств (12) следует $1 \leq |D(P)| < c_9 Q^{4-2v}$.

При выполнении неравенств (10) и (12) имеем

$$|x_1 - \alpha_1| < c_6 Q^{-4+5v/3}. \quad (13)$$

Для многочлена $P_1(x)$ неравенство (13) может выполняться только в окрестностях корней α_1 , α_2 и α_3 с общей длиной, не большей $6c_6 Q^{-4+5v/3}$. Если $P_1(x), P_2(x), \dots, P_l(x)$ – многочлены, имеющие точки $x \in S_I$, для которых выполняется неравенство (13), то должно выполняться неравенство

$$6c_6 t Q^{-4+5v/3} \geq \mu S_I > \frac{3}{4} \mu I,$$

откуда

$$t > \frac{1}{8} c_6^{-1} Q^{4-5v/3} \mu I. \quad (14)$$

Таким образом, в кубическом случае зависимость между показателями степени порядков $x = 4 - 2v$ и $y = 4 - 5v/3$ имеет вид $y = \frac{5}{6}x + \frac{2}{3}$. Мы получим зависимость между x и y вида

$$y = F_3(x) = \begin{cases} 4, & x > 4, \\ \frac{5}{6}x + \frac{2}{3}, & 0 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

О п р е д е л е н и е 1. Функцию $F_n(x)$, удовлетворяющую соотношению

$$\#\{P \in \mathcal{P}_n(Q) : 0 < |D(P)| \leq \gamma_n Q^x\} \geq c_{10} Q^{F_n(x)}$$

для некоторой постоянной c_{10} при достаточно больших Q , будем называть *нижней функцией распределения степеней дискриминантов степени n* . А функцию $F_{\leq n}(x)$, удовлетворяющую неравенству

$$\#\{P \in \mathcal{P}_k(Q) : 2 \leq k \leq n, 0 < |D(P)| \leq \gamma_n Q^x\} \geq c_{11} Q^{F_{\leq n}(x)}$$

для некоторой постоянной c_{11} при достаточно больших Q , назовем *нижней функцией распределения степеней дискриминантов степени не больше n* .

Решим задачу о зависимости между величиной дискриминанта многочлена второй степени и количеством элементов множества $\mathcal{P}_2(Q, v)$. Вновь воспользуемся леммой 1. В точке $x_1 \in S_I$ построим неприводимый многочлен второй степени $P_1(x)$, как в (8):

$$\begin{cases} \delta_0 Q^{-v_0} < |P_1(x_1)| < c_0 Q^{-v_0}, & \delta_0 Q^{-v_1} < |P_1'(x_1)| < c_0 Q^{-v_1}, \\ \delta_0 Q < |P_1''(x_1)| < c_0 Q, & v_0 + v_1 = 1. \end{cases} \quad (15)$$

Выберем $v_0 = 2 - v$, $v_1 = v - 1$. Тогда в окрестности

$$|x_1 - \alpha_1| < c_{10} Q^{-3+2v} \quad (16)$$

имеем многочлен, дискриминант которого удовлетворяет неравенству

$$1 \leq |D(P)| < c_{11}Q^{2-2\nu}. \quad (17)$$

Т е о р е м а 2. При $0 \leq \nu \leq 1$ справедливо неравенство

$$c_{12}Q^{3-2\nu} < \#\mathcal{P}_2(Q, \nu). \quad (18)$$

В силу (18) в квадратичном случае зависимость между показателями степени $y = 3 - 2\nu$ и $x = 2 - 2\nu$ имеет вид

$$y = F_2(x) = \begin{cases} 2, & x > 2, \\ x + 1, & 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Объединяя теоремы 1 и 2, получим теорему 3.

Т е о р е м а 3. Функция $F_{\leq 3}(x)$ имеет вид

$$F_{\leq 3}(x) = \begin{cases} 4, & x > 4, \\ \frac{5}{6}x + \frac{2}{3}, & 14/5 \leq x \leq 4, \\ 3, & 2 \leq x < 14/5, \\ x + 1, & 0 \leq x < 2. \end{cases}$$

Литература

1. Ван дер Варден Б. Л. Алгебра. М., 1976.
2. Спринджук В. Г. Проблема Малера в метрической теории чисел. Минск, 1967.
3. Davenport H. // Mathematika. 1961. Vol. 8. P. 58–62.
4. Volkmann B. // Mathematika. 1961. Vol. 8. P. 55–57.
5. Bernik V., Dodson M. Metric Diophantine approximation on manifolds // Cambridge Tracts in Mathematics. Vol. 137. Cambridge, 1999.
6. Коледа Д. В. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз-мат. навук. 2013. № 3. 10–16.
7. Beresnevich V., Bernik V., Götze F. // Compositio Mathematica. 2010. Vol. 146, N 5. P. 1165–1179.
8. Берник В. И. // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1980. Т. 44, № 1. С. 24–45.

V. I. BERNIK, D. U. KALIADA

DISTRIBUTION OF THE DISCRIMINANT VALUES FOR POLYNOMIALS OF SECOND AND THIRD DEGREE

Summary

In the article a relation between the number of square and cubic integer polynomials of bounded degree and discriminant values for these polynomials is established.

УДК 512.542

М. Г. СЕМЕНОВ, Н. Т. ВОРОБЬЕВ

О ХАРАКТЕРИЗАЦИИ ИНЪЕКТОРОВ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Витебский государственный университет им. П. М. Машерова

(Поступила в редакцию 03.03.2014)

Введение. В работе рассматриваются только конечные группы. Одним из известных результатов в теории разрешимых групп является обобщение фундаментальных теорем Силова и Холла, которое было получено Гашюцом, Фишером и Хартли в работе [1], где доказано, что для любого класса Фиттинга \mathfrak{F} в каждой разрешимой группе G существуют \mathfrak{F} -инъекторы и любые два из них сопряжены. Напомним, что класс групп \mathfrak{F} называют классом Фиттинга, если \mathfrak{F} замкнут относительно взятия нормальных подгрупп и произведений нормальных \mathfrak{F} -подгрупп. Из определения класса Фиттинга вытекает, что если \mathfrak{F} – непустой класс Фиттинга, то в любой группе G существует наибольшая нормальная \mathfrak{F} -подгруппа. Ее называют \mathfrak{F} -радикалом G и обозначают $G_{\mathfrak{F}}$. Подгруппа V группы G называется \mathfrak{F} -инъектором G , если для любой субнормальной подгруппы N группы G подгруппа $V \cap N$ является максимальной из подгрупп N , принадлежащих \mathfrak{F} . Заметим, что если $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p$ – класс всех p -групп и $\mathfrak{F} = \mathfrak{C}_\pi$ – класс всех π -групп, \mathfrak{F} -инъектор группы G – это силовская p -подгруппа G и холлова π -подгруппа E_π -группы G [2, с. 328, п. 7.2] соответственно. Очевидно, что каждый \mathfrak{F} -инъектор группы G содержит ее \mathfrak{F} -радикал. Примечателен тот факт, что Фишером [3] при помощи \mathfrak{N} -радикала разрешимой группы G , т. е. подгруппы Фиттинга $F(G)$, была найдена изящная характеристика \mathfrak{N} -инъекторов G (\mathfrak{N} – класс Фиттинга всех нильпотентных групп). А именно, в работе [3] установлено, что множество всех нильпотентных инъекторов разрешимой группы G – это, в точности, множество всех максимальных нильпотентных подгрупп G , которые содержат подгруппу $F(G)$. Развивая данный результат, Хартли [4] показал, что для локальных классов Фиттинга вида \mathfrak{XN} (\mathfrak{X} – непустой класс Фиттинга) подгруппа V группы G является \mathfrak{XN} -инъектором тогда и только тогда, когда $V/G_{\mathfrak{X}}$ – нильпотентная подгруппа группы $G/G_{\mathfrak{X}}$. Значительный прогресс в этом направлении исследований был достигнут в работе [5], где доказано, что для любого класса Хартли – класса Фиттинга \mathfrak{H} вида $\bigcap_{i \in I} h(\pi_i) \mathfrak{S}_{\pi_i} \mathfrak{S}_{\pi_i}$ подгруппа V разрешимой группы G является \mathfrak{H} -инъектором тогда и только тогда, когда V/G_h – \mathfrak{D} -инъектор группы G/G_h , где $\mathfrak{D} = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{S}_{\pi_i} \mathfrak{S}_{\pi_i}$ и $G_h = \prod_{i \in I} G_{h(\pi_i)}$. Более того, было установлено, что множество всех \mathfrak{H} -инъекторов группы G совпадает с множеством всех \mathfrak{H} -максимальных подгрупп G , содержащих ее \mathfrak{H} -радикал.

Заметим, что все указанные выше результаты об инъекторах ограничивались только случаем универсума \mathfrak{S} всех разрешимых групп. Вместе с тем Иранцо и Торесс [6] (см. также [2, следствие 1 и замечание 7.2.32]) показали, что любая конечная p -разрешимая группа G обладает единственным классом сопряженных p -нильпотентных инъекторов и, кроме того, p -нильпотентные инъекторы G – это, в точности, те максимальные из p -нильпотентных подгрупп G , которые содержат ее p -нильпотентный радикал, т. е. подгруппу $F_p(G)$.

В настоящей работе мы усиливаем результаты Иранцо – Торесса из [6]. Нами, в частности, установлено, что \mathfrak{H} -инъекторы существуют и сопряжены для любого класса Хартли вида $\mathfrak{H} = \mathfrak{X} \mathfrak{C}_p \mathfrak{N}_p$ лишь при ограничении p -разрешимости не самой группы, а только ее подходящей факторгруппы.

В качестве следствия, мы получаем основной результат работы [6] о существовании и сопряженности p -нильпотентных инъекторов в любой p -разрешимой группе и их характеристику при помощи p -нильпотентного радикала.

1. Предварительные сведения. Напомним, что если \mathfrak{F} и \mathfrak{H} – классы Фиттинга, то их произведением называют класс $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = (G : G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H})$. Хорошо известно (см. [7, IX.1.12]), что произведение классов Фиттинга является классом Фиттинга и операция умножения классов Фиттинга ассоциативна.

Пусть $\Sigma = \{\pi_i : i \in I\}$ – семейство таких попарно различных множеств простых чисел π_i , что $\pi = \bigcup_{i \in I} \pi_i$. Функцию $h: \Sigma \rightarrow \{\text{классы Фиттинга}\}$ будем называть функцией Хартли или H -функцией [8]. Классом Хартли называют [5] класс Фиттинга \mathfrak{H} , если $\mathfrak{H} = \bigcap_{i \in I} h(\pi_i)\mathfrak{C}_{\pi_i}\mathfrak{C}_{\pi_i}$ для некоторой H -функции h , где \mathfrak{C}_{π_i} – класс всех π_i -групп и $\mathfrak{C}_{\pi_i'}$ – класс всех π_i' -групп, а $\pi_i' = \mathbb{P} \setminus \pi_i$. В этом случае мы будем говорить, что \mathfrak{H} определяется локально H -функцией h . В частности, если $\pi_i = \{p_i\}$ для всех $i \in I$ и $p_i \in \pi$, то H -функция $h: \pi \rightarrow \{\text{классы Фиттинга}\}$ локально определяет класс Хартли вида $\bigcap_{p \in \pi} h(p)\mathfrak{C}_p\mathfrak{C}_p$.

H -функцию h назовем приведенной, если $h(\pi_i) \subseteq \mathfrak{H}$ для всех i из I . Известно (см. [4]), что каждый класс Хартли определяется локально приведенной H -функцией.

Легко видеть, что классы Фиттинга \mathfrak{N} и $\mathfrak{X}\mathfrak{N}$ являются классами Хартли, так как они определяются H -функциями f и h такими, что $f(p) = (1)$ и $h(p) = \mathfrak{X}$ для всех $p \in \mathbb{P}$.

Мы будем использовать следующее известное свойство радикалов, которое представляет

Л е м м а 1 [9, IX.1.1]. *Если \mathfrak{F} – непустой класс Фиттинга и N – субнормальная подгруппа группы G , то $G_{\mathfrak{F}} \cap N = N_{\mathfrak{F}}$.*

Напомним, что группу G называют [9, с. 251] p -нильпотентной, если она обладает нормальной p' -холловой подгруппой, и π -нильпотентной, если G является p -нильпотентной для всех $p \in \pi$.

Группу G называют \mathfrak{F} -скованной [2], если $C_G(G_{\mathfrak{F}}) \subseteq G_{\mathfrak{F}}$. В частности, если $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$ и $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}^{\pi}$ – класс Фиттинга всех π -нильпотентных групп, то группа G является \mathfrak{N} -скованной, если $C_G(F(G)) \subseteq F(G)$ и \mathfrak{N}^{π} -скованной (\mathfrak{N}^p -скованной) в случае, когда $C_G(F_{\pi}(G)) \subseteq F_{\pi}(G)$ ($C_G(F_p(G)) \subseteq F_p(G)$) соответственно.

Известно (см. [9, следствие 4.1.2]), что каждая π -разрешимая (p -разрешимая) группа является \mathfrak{N}^{π} -скованной (\mathfrak{N}^p -скованной). В других обозначениях и определениях мы следуем [7, 9].

2. Классы Хартли и h -радикалы. Мы будем использовать локальное задание класса Хартли, которое представляет следующая лемма (см. также [10, лемма 2]).

Л е м м а 2. *Каждый класс Хартли $\mathfrak{H} = \bigcap_{p \in \pi} h(p)\mathfrak{C}_p\mathfrak{N}_p$ определяется локально приведенной H -функцией h такой, что $h(p) \subseteq h(q)\mathfrak{C}_q$ для всех различных p и q из π .*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть \mathfrak{H} – класс Хартли. Тогда для некоторой приведенной H -функции \bar{h} и функция f такова, что $f(p) = \{G : G \cong H^{\mathfrak{C}_p} (H \in \bar{h}(p))\}$ для всех $p \in \pi$.

Если $G \in f(p)$, то $G \cong H^{\mathfrak{C}_p}$ для некоторой группы $H \in \bar{h}(p)$. Следовательно, $H^{\mathfrak{C}_p} \in \bar{h}(p)$ и $G \in \bar{h}(p)$. Значит, $f(p) \subseteq \bar{h}(p)$ и справедливо включение $f(p)\mathfrak{C}_p \subseteq \bar{h}(p)\mathfrak{C}_p$. Докажем обратное включение. Пусть $G \in \bar{h}(p)\mathfrak{C}_p$. Тогда $G/G_{\bar{h}(p)} \in \mathfrak{C}_p$ и $G^{\mathfrak{C}_p} \in \bar{h}(p)$. Ввиду равенства

$(G^{\mathfrak{C}_{p'}})^{\mathfrak{C}_{p'}} = G^{\mathfrak{C}_{p'}}$, имеем $G^{\mathfrak{C}_{p'}} \in f(p)$. Следовательно, $G \in f(p)\mathfrak{C}_{p'}$. Итак, мы показали справедливость равенства $f(p)\mathfrak{C}_{p'} = \bar{h}(p)\mathfrak{C}_{p'}$.

Пусть теперь $h(p) = \text{Fit}(f(p))$ для всех $p \in \pi$. Тогда $f(p) \subseteq h(p) \subseteq \bar{h}(p)$ и $h(p)\mathfrak{C}_{p'} \subseteq \bar{h}(p)\mathfrak{C}_{p'}$, для всех $p \in \pi$. Так как $f(p)\mathfrak{C}_{p'} = \bar{h}(p)\mathfrak{C}_{p'}$, то $\text{Fit}(f(p)\mathfrak{C}_{p'}) = \text{Fit}(\bar{h}(p)\mathfrak{C}_{p'}) = \bar{h}(p)\mathfrak{C}_{p'}$. Значит,

$$\bar{h}(p)\mathfrak{C}_{p'} = \text{Fit}(f(p)\mathfrak{C}_{p'}) \subseteq \text{Fit}(f(p))\mathfrak{C}_{p'} = h(p)\mathfrak{C}_{p'}.$$

Итак, $\bar{h}(p)\mathfrak{C}_{p'} = h(p)\mathfrak{C}_{p'}$ для всех $p \in \pi$. Следовательно, $\bar{h}(p)\mathfrak{C}_{p'}\mathfrak{N}_p = h(p)\mathfrak{C}_{p'}\mathfrak{N}_p$ и $\mathfrak{H} = \bigcap_{p \in \pi} \bar{h}(p)\mathfrak{C}_{p'}\mathfrak{N}_p = \bigcap_{p \in \pi} h(p)\mathfrak{C}_{p'}\mathfrak{N}_p$. Таким образом, h является H -функцией, определяющей локально класс \mathfrak{H} . Заметим также, что из включения $h(p) \subseteq \bar{h}(p)$ для всех $p \in \pi$ следует, что h является приведенной H -функцией класса \mathfrak{H} .

Предположим теперь, что $L \in f(p)$. Тогда $L \cong K^{\mathfrak{C}_{p'}}$ для некоторой группы K из $\bar{h}(p)$. Пусть $q \in \pi$ и $q \neq p$. Тогда $\mathfrak{N}_q \subseteq \mathfrak{C}_{p'}$ и $K^{\mathfrak{C}_{p'}} \leq K^{\mathfrak{N}_q}$. Ввиду того что $K \in \bar{h}(p) \subseteq \mathfrak{H}$, имеем $K/K_{\bar{h}(q)\mathfrak{C}_q} \in \mathfrak{N}_q$. Значит, $K^{\mathfrak{N}_q} \in \bar{h}(q)\mathfrak{C}_q$. Учитывая включение $K^{\mathfrak{C}_{p'}} \leq K^{\mathfrak{N}_q}$, получаем $K^{\mathfrak{C}_{p'}} \in \bar{h}(q)\mathfrak{C}_q$, и $L \in \bar{h}(q)\mathfrak{C}_q$. Итак, мы доказали включение $f(p) \subseteq \bar{h}(q)\mathfrak{C}_q$. Следовательно,

$$h(p) = \text{Fit}(f(p)) \subseteq \text{Fit}(\bar{h}(q)\mathfrak{C}_q) = \bar{h}(q)\mathfrak{C}_q = h(q)\mathfrak{C}_q,$$

и h – искомая приведенная H -функция класса \mathfrak{H} .

Лемма доказана.

Множество $\{p \in \mathbb{P} : h(p) \neq \emptyset\}$ назовем носителем H -функции h и будем обозначать $\text{Supp}(h)$. Пусть $\pi = \text{Supp}(h)$. Тогда подгруппу $G_h = \prod_{p \in \pi} G_{h(p)}$ назовем h -радикалом группы G .

Л е м м а 3. Пусть \mathfrak{H} – класс Хартли вида $\bigcap_{p \in \pi} h(p)\mathfrak{C}_p\mathfrak{N}_p$, где $\pi = \text{Supp}(h) \neq \emptyset$ и h – такая приведенная H -функция, что $h(p) \subseteq h(q)\mathfrak{C}_q$ для всех p и q из π . Если группа G такова, что $G/G_h \mathfrak{N}^\pi$ -скована, то подгруппа V , содержащая \mathfrak{H} -радикал G , принадлежит \mathfrak{H} тогда и только тогда, когда V/G_h – π -нильпотентная группа.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $V \in \mathfrak{H}$ и $G_{\mathfrak{H}} \subseteq V$, то $V_{h(p)} \cap G_{\mathfrak{H}} = (G_{\mathfrak{H}})_{h(p)} = G_{h(p)}$. Значит, $[V_{h(p)}, G_{\mathfrak{H}}] \subseteq G_{h(p)}$. Следовательно, $V_{h(p)} \subseteq C_G(G_{\mathfrak{H}}/G_{h(p)})$ для всех простых $p \in \pi$.

Покажем сначала, что $G_{\mathfrak{H}}/G_h = F_\pi(G/G_h)$. Пусть $F_\pi(G/G_h) = K/G_h$. Так как $G_{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{H}$, то $G_{\mathfrak{H}}/G_{h(p)}$ – p -нильпотентная группа для всех простых $p \in \pi$. Следовательно, группа $G_{\mathfrak{H}}/G_h$ – π -нильпотентна. Тогда, ввиду определения \mathfrak{N}^π -радикала, $G_{\mathfrak{H}}/G_{h(p)} \leq K/G_{h(p)}$ и $G_{\mathfrak{H}} \leq K$. Докажем, что $K \subseteq G_{\mathfrak{H}}$. Для этого достаточно выяснить, что $K \in \mathfrak{H}$. Так как K/G_h – π -нильпотентная группа, то, используя изоморфизм $K/K_{h(p)}G_h \cong K/G_h/K_{h(p)}G_h/G_h$, получаем $K/K_{h(p)}G_h \in \mathfrak{C}_p\mathfrak{N}_p$, и поэтому $K/K_{h(p)}/K_{h(p)}G_h/K_{h(p)} \in \mathfrak{C}_p\mathfrak{N}_p$ для всех простых $p \in \pi$. Следовательно, для того чтобы $K \in \mathfrak{H}$, остается показать, что $K_{h(p)}G_h/K_{h(p)}$ является p' -группой для каждого простого $p \in \pi$.

Так как $G_h \triangleleft K$, то $G_{h(p)} = (G_h)_{h(p)} = G_h \cap K_{h(p)} \subseteq K_{h(p)}$. Пусть q – любое простое число из π отличное от p . Так как $G_{h(q)}G_{h(p)}/G_{h(p)} \cong G_{h(q)}/G_{h(q)} \cap G_{h(p)}$, то $G_{h(q)}G_{h(p)}/G_{h(p)} \cong G_{h(q)}/(G_{h(q)})_{h(p)}$.

Но h – такая H -функция, что $h(q) \subseteq h(p)\mathfrak{C}_{p'}$, для всех различных p и q из π . Следовательно, $G_{h(q)} \in h(p)\mathfrak{C}_{p'}$, и поэтому $G_{h(q)}/(G_{h(q)})_{h(p)} \in \mathfrak{C}_{p'}$.

Значит, для любых различных p и q из π подгруппа $G_{h(q)}G_{h(p)}/G_{h(p)}$ является p' -группой. Следовательно, $G_h/G_{h(p)} \in \mathfrak{C}_{p'}$. Теперь, ввиду изоморфизма

$$K_{h(p)}G_h/K_{h(p)} \cong G_h/G_h \cap K_{h(p)} \cong G_h/G_{h(p)}/G_h \cap K_{h(p)}/G_{h(p)},$$

получаем, что $K_{h(p)}G_h/K_{h(p)}$ является p' -группой для каждого простого $p \in \pi$. Итак, мы показали, что $G_{\mathfrak{F}}/G_h = F_{\pi}(G/G_h)$.

Ввиду \mathfrak{N}^{π} -скованности группы G/G_h , имеем $C_{G/G_h}(G_{\mathfrak{F}}/G_h) \subseteq G_{\mathfrak{F}}/G_h$. Значит, $C_G(G_{\mathfrak{F}}/G_h) \subseteq G_{\mathfrak{F}}$. Так как $C_G(G_{\mathfrak{F}}/G_{h(p)}) \subseteq C_G(G_{\mathfrak{F}}/G_h)$, то $V_{h(p)} \subseteq C_G(G_{\mathfrak{F}}/G_{h(p)}) \subseteq G_{\mathfrak{F}}$. Следовательно, $V_{h(p)} = G_{h(p)}$ для всех простых $p \in \pi$ и $V/V_{h(p)}$ – p -нильпотентная группа для всех простых $p \in \pi$. Итак, группа V/G_h π -нильпотентна.

Обратно, пусть V/G_h – π -нильпотентная группа. Тогда, ввиду изоморфизма $V/V_{h(p)}G_h \cong \cong V/G_h/V_{h(p)}G_h/G_h$, следует $V/V_{h(p)}G_h \in \mathfrak{C}_{p'}\mathfrak{N}_p$. Значит, $V/V_{h(p)}/V_{h(p)}G_h/V_{h(p)} \in \mathfrak{C}_{p'}\mathfrak{N}_p$ для всех простых $p \in \pi$.

Так как $G_h \triangleleft V$, то $G_{h(p)} = (G_h)_{h(p)} = G_h \cap V_{h(p)} \subseteq V_{h(p)}$. Из того, что $G_h/G_{h(p)} \in \mathfrak{C}_{p'}$ для всех простых $p \in \pi$, ввиду изоморфизма $V_{h(p)}G_h/V_{h(p)} \cong G_h/G_h \cap V_{h(p)} \cong G_h/G_{h(p)}/G_h \cap V_{h(p)}/G_{h(p)}$, следует, что $V_{h(p)}G_h/V_{h(p)}$ является p' -группой для каждого простого $p \in \pi$. Таким образом, $V/V_{h(p)} \in \mathfrak{C}_{p'}\mathfrak{N}_p$ для всех простых $p \in \pi$ и $V \in \mathfrak{F}$.

Лемма доказана.

В случае, когда $\text{Supp}(h) = \{p\}$, из леммы 3 получаем

С л е д с т в и е 1. Пусть \mathfrak{F} – класс Хартли вида $\mathfrak{X}\mathfrak{C}_p\mathfrak{N}_p$, где \mathfrak{X} – непустой класс Фиттинга и G – такая группа, что $G/G_{\mathfrak{X}}$ является \mathfrak{N}^p -скованной группой. Подгруппа V , содержащая \mathfrak{F} -радикал группы G , принадлежит \mathfrak{F} тогда и только тогда, когда $V/G_{\mathfrak{X}}$ – p -нильпотентная группа.

Следующие свойства \mathfrak{F} -инъектора для класса Фиттинга \mathfrak{F} вытекают непосредственно из определения \mathfrak{F} -инъектора.

Л е м м а 4. Для любой группы G справедливы следующие утверждения:

- 1) если V – \mathfrak{F} -инъектор группы G и $K \triangleleft G$, то $V \cap K$ – \mathfrak{F} -инъектор группы K ;
- 2) если V – \mathfrak{F} -инъектор группы G и $\alpha: G \rightarrow G^{\alpha}$ – изоморфизм, то V^{α} – \mathfrak{F} -инъектор группы G^{α} ;
- 3) если V – \mathfrak{F} -максимальная подгруппа G и $V \cap M$ – \mathfrak{F} -инъектор группы M для любой максимальной нормальной подгруппы M группы G , то V – \mathfrak{F} -инъектор группы G .

3. Основной результат. Для доказательства теоремы мы будем использовать следующий результат [6].

Л е м м а 5 [6]. В любой \mathfrak{N}^p -скованной группе G существует единственный класс сопряженных p -нильпотентных инъекторов. Более того, p -нильпотентные инъекторы G – это, в точности, те \mathfrak{N}^p -максимальные в G подгруппы, которые содержат ее \mathfrak{N}^p -радикал.

Т е о р е м а. Пусть класс Хартли $\mathfrak{F} = \mathfrak{X}\mathfrak{C}_p\mathfrak{N}_p$, где \mathfrak{X} – непустой класс Фиттинга и G – такая группа, что группа $G/G_{\mathfrak{X}}$ – \mathfrak{N}^p -скована (в частности, p -разрешима). Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) V/G_x – p -нильпотентный инъектор группы G/G_x тогда и только тогда, когда V – \mathfrak{H} -инъектор группы G ;
- 2) в группе G существуют \mathfrak{H} -инъекторы и любые два из них сопряжены;
- 3) \mathfrak{H} -инъекторы группы G это, в точности, те \mathfrak{H} -максимальные в G подгруппы, которые содержат ее \mathfrak{H} -радикал.

Доказательство. 1) Пусть V – \mathfrak{H} -инъектор группы G . Тогда $G_\mathfrak{H} \leq V$ и V – \mathfrak{H} -максимальная подгруппа в G . Ввиду следствия 1, $V/G_x \in \mathfrak{N}^p$. Тогда из \mathfrak{H} -максимальности V в G следует, что V/G_x – \mathfrak{N}^p -максимальная подгруппа в G/G_x . Действительно, если предположить, что $V/G_x \leq W/G_x \leq G/G_x$ и W/G_x – \mathfrak{N}^p -максимальная подгруппа в G/G_x , то, ввиду следствия 1, $W \in \mathfrak{H}$. Но тогда из \mathfrak{H} -максимальности V в G следует $V = W$.

Как и при доказательстве леммы 3, легко видеть, что $G_\mathfrak{H}/G_x = F_p(G/G_x)$. Тогда из $G_\mathfrak{H} \leq V$ получаем, что V/G_x – \mathfrak{N}^p -максимальная подгруппа в G/G_x , содержащая \mathfrak{N}^p -радикал группы G/G_x . Следовательно, по лемме 5 V/G_x – p -нильпотентный инъектор группы G/G_x .

Докажем обратное утверждение.

Пусть V/G_x – p -нильпотентный инъектор группы G/G_x . Покажем, что V – \mathfrak{H} -инъектор группы G . Доказательство проведем методом индукции по порядку группы G . Пусть G – группа наименьшего порядка, для которой утверждение неверно, и M – максимальная нормальная подгруппа G . Заметим, что $G_\mathfrak{H}/G_x = G_\mathfrak{H}/(G_\mathfrak{H})_x \in \mathfrak{C}_p \mathfrak{N}_p = \mathfrak{N}^p$. Так как V/G_x – p -нильпотентный инъектор группы G/G_x , то $G_\mathfrak{H} \leq V$. Теперь, учитывая следствие 1, заключаем, что $V \in \mathfrak{H}$. Итак, V является \mathfrak{H} -подгруппой.

Рассмотрим два возможных случая.

1. \mathfrak{X} -радикал G_x является подгруппой M .

В этом случае, ввиду леммы 1, $M_x = M \cap G_x = G_x$. Так как V/G_x – p -нильпотентный инъектор группы G/G_x , то по утверждению 1) леммы 4 подгруппа $V \cap M/G_x$ является p -нильпотентным инъектором группы M/M_x . Следовательно, по индукции $V \cap M$ – \mathfrak{H} -инъектор группы M .

Докажем, что подгруппа V является \mathfrak{H} -максимальной в G . Пусть $V \leq V_1$, где V_1 – \mathfrak{H} -максимальная подгруппа в G . Из \mathfrak{H} -максимальности подгруппы $V \cap M$ в M следует равенство $V \cap M = V_1 \cap M$. Значит, $V_1 \cap M$ – \mathfrak{H} -инъектор группы M для любой максимальной нормальной подгруппы M из G . Следовательно, по утверждению 3) леммы 4 подгруппа V_1 – \mathfrak{H} -инъектор группы G . Теперь, ввиду следствия 1, V_1/G_x – p -нильпотентная группа и $V/G_x \subseteq V_1/G_x$. Но V/G_x – \mathfrak{N}^p -максимальна в G/G_x и, следовательно, $V = V_1$. Значит, V – \mathfrak{H} -инъектор группы G . Остается принять случай

2. \mathfrak{X} -радикал G_x не является подгруппой M .

Так как M – максимальная нормальная подгруппа группы G , то $G = MG_x$. Тогда $G/G_x \cong M/G_x \cap M = M/M_x$ и по утверждению 2) леммы 4 заключаем, что подгруппа $V \cap M/M_x$ является \mathfrak{N}^p -инъектором группы M/M_x . Следовательно, по индукции $V \cap M$ – \mathfrak{H} -инъектор группы M . Теперь, следуя доказательству случая 1, заключаем, что V – \mathfrak{H} -инъектор группы G . Утверждение 1) настоящей теоремы доказано.

2) Так как группа G/G_x является \mathfrak{N}^p -скованной, то по лемме 5 в G/G_x существует p -нильпотентный инъектор V/G_x . Следовательно, по утверждению 1) V – \mathfrak{H} -инъектор группы G . Пусть V_1/G_x – инъектор группы G/G_x , отличный от V/G_x . Тогда V_1/G_x и V/G_x сопряжены в G/G_x . Отсюда следует, что V_1 и V сопряжены в G и утверждение 2) теоремы доказано.

3) Если V – \mathfrak{H} -инъектор группы G , по определению \mathfrak{H} -инъектора, очевидно, $G_{\mathfrak{H}} \leq V$ и V – \mathfrak{H} -максимальная подгруппа G .

Обратно, если $G_{\mathfrak{H}} \subseteq V$ и V – \mathfrak{H} -максимальная подгруппа G , ввиду следствия 1, $V/G_{\mathfrak{H}}$ – p -нильпотентная группа. Как и при доказательстве утверждения 1) настоящей теоремы, легко видеть, что $V/G_{\mathfrak{H}}$ – \mathfrak{N}^p -максимальная подгруппа группы $G/G_{\mathfrak{H}}$, содержащая \mathfrak{N}^p -радикал группы $G/G_{\mathfrak{H}}$. Тогда, по лемме 5, $V/G_{\mathfrak{H}}$ – p -нильпотентный инъектор группы $G/G_{\mathfrak{H}}$.

Теорема доказана.

С л е д с т в и е 2 [6]. *Любая p -разрешимая группа G имеет единственный класс сопряженных p -нильпотентных инъекторов, причем такими инъекторами являются, в точности, все максимальные p -нильпотентные подгруппы из G , содержащие p -нильпотентный радикал.*

Литература

1. Fischer B., Gaschütz W., Hartley B. // Math. Z. 1967. N 102. S. 337–339.
2. Ballester-Bolinches A, Ezquerro L. M. Classes of Finite Groups. Dordrecht, 2006.
3. Fischer B. Klassen konjugierter Untergruppen in endlichen auflösbaren Gruppen. Frankfurt, 1966.
4. Hartley B. // Proc. London Math. Soc. 1969. Vol. 3, N 2. P. 193–207.
5. Vorob'ev N. T., Guo W. // Comm. Algebra. 2008. N 36. P. 3200–3208.
6. Iranzo M. I., Torres M. // Rend. Semc. Math. Univ. Padova. 1989. Vol. 82. P. 233–237.
7. Doerk K., Hawkes. T. Finite Soluble Groups. Berlin; New York, 1992.
8. Воробьев Н. Т. // Сиб. мат. журн. 1996. № 37 (6). С. 1137–1142.
9. Шеметков Л. А. Формации конечных групп. М., 1978.
10. Семенов М. Г. // Весн. ВДУ. 2012. № 2 (68). С. 10–13.

M. G. SEMENOV, N. T. VOROB'EV

CHARACTERIZATION OF INJECTORS OF FINITE GROUPS

Summary

Let \mathfrak{X} be a non-empty Fitting class and \mathfrak{H} be a Hartley class such that $\mathfrak{H} = \mathfrak{X}\mathfrak{C}_p\mathfrak{N}_p$. It is proved that if G is a finite group such that the quotient $G/G_{\mathfrak{H}}$ is \mathfrak{N}^p -constrained, then G has unique conjugation of \mathfrak{H} -injectors. Moreover, the characterization of \mathfrak{H} -injectors is established.

УДК 519.173

В. И. БЕНЕДИКТОВИЧ

ЛОКАЛЬНЫЙ ПРИЗНАК СУЩЕСТВОВАНИЯ ПЛОСКОГО ОСТОВНОГО ДЕРЕВА В ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ГРАФЕ

Институт математики НАН Беларуси

(Поступила в редакцию 28.02.2014)

Пусть V – конечное множество точек на евклидовой плоскости в *общем положении*, т. е. никакие три из них не лежат на одной прямой; среди проходящих через них прямых нет параллельных и никакие три из этих прямых не пересекаются в точке, не принадлежащей множеству V . Тогда *геометрический граф* с множеством вершин V есть пара $G = (V, E)$, где каждое ребро из множества E представляет собой некоторый прямолинейный отрезок с концами из множества точек V . Два ребра геометрического графа *пересекаются*, если они имеют общую внутреннюю (для обоих) точку пересечения. Если два ребра e и f геометрического графа G пересекаются (не пересекаются), то кратко этот факт будем обозначать через $e \cap f \neq \emptyset$ ($e \cap f = \emptyset$). *Плоское* (или *непересекающееся*) *остовное дерево* – это дерево графа G без самопересечений своих ребер, которое содержит все вершины множества V .

Для геометрического графа $G = (V, E)$ и подмножества вершин $U \subseteq V$ обозначим через $G[U]$ подграф G , *индуцированный множеством* U , т. е. геометрический граф с множеством вершин U , ребрами которого являются все те ребра графа G , концы которых принадлежат множеству вершин U . Произвольное непересекающееся остовное дерево геометрического подграфа H часто будем обозначать через T_H . Для любых двух точек v и w евклидовой плоскости через $[vw]$ обозначим луч с началом v и направлением, заданным вектором \overrightarrow{vw} .

Как хорошо известно, одна из важных проблем топологической теории графов, а именно, проблема распознавания существования непересекающегося подграфа H с заданным графовым свойством P , даже в геометрическом графе является в общем случае трудноразрешимой для основных графовых свойств [1]. Поэтому возникает задача: исследовать условия, достаточные для существования непересекающегося подграфа с графовым свойством P в заданном геометрическом графе G .

В данной статье продолжают исследования, связанные с нахождением в геометрическом графе $G = (V, E)$ локальных достаточных условий существования в нем непересекающегося остовного дерева. Эта проблема была инспирирована работой [2], в которой были выдвинуты несколько гипотез о существовании такого дерева в геометрическом графе G . В частности, там была сформулирована следующая гипотеза.

Г и п о т е з а. Пусть $t \geq 2$ – произвольное целое число и G – геометрический граф, по крайней мере, с t вершинами. Тогда, если $G[U]$ имеет плоское остовное дерево для любого множества U из t вершин, то и граф G имеет плоское остовное дерево.

В работе [3] мы частично подтвердили эту гипотезу в частном случае, когда $t = 6$. Далее докажем следующую теорему.

Т е о р е м а 1. Пусть $t \geq 6$ – произвольное целое число. Тогда почти все геометрические графы $G = (V, E)$ порядка $n \geq t$ (кроме, может быть, $(t-2)(t-3)/2$ графов) обладают следующим свойством: если для любого подмножества $U \subset V$ из t вершин индуцированный граф $G[U]$ содержит плоское остовное дерево, то и сам граф G содержит плоское остовное дерево.

Доказательство. Покажем сначала, что если порядок G графа имеет вид:

$$n = (m - 1) \cdot k + (m - 2) \cdot l + 1, \text{ где } k \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\},$$

то геометрический граф G удовлетворяет указанному свойству. Действительно, рассмотрим две произвольные экстремальные точки v_1, v_2 множества V , последовательно выбранные на границе $\text{Ch}(V)$ выпуклой оболочки $\text{conv}(V)$ множества V при обходе ее против часовой стрелки. Будем вращать луч $[v_1 v_2)$ против часовой стрелки вокруг вершины v_1 , пока он не пройдет через такую вершину u_1 , что в секторе $v_2 v_1 u_1$ лежат m вершин, включая вершины v_2, v_1, u_1 . Вращая луч $[v_1 v_2)$ дальше против часовой стрелки вокруг вершины v_1 , найдем такую вершину u_2 , что в секторе $u_1 v_1 u_2$ лежат m вершин, включая вершины u_2, v_1 и не включая вершины u_1 . Продолжаем вращать луч $[v_1 v_2)$ дальше, пока не найдем во множестве V такую вершину u_k , что в секторе $u_{k-1} v_1 u_k$ лежат m вершин, включая вершины u_k, v_1 и не включая вершины u_{k-1} .

Заметим, что если $l = 0$, то u_k является экстремальной точкой, предшествующей вершине v_1 при обходе границы $\text{Ch}(V)$ против часовой стрелки.

Если же $l > 0$, то продолжаем вращать луч $[v_1 v_2)$ против часовой стрелки вокруг вершины v_1 , пока он не пройдет через такую вершину w_1 , что в секторе $w_1 v_1 u_k$ лежат m вершин, включая три вершины w_1, v_1 и u_k . Вращая луч $[v_1 v_2)$ дальше против часовой стрелки вокруг вершины v_1 , найдем такую вершину w_2 , что в секторе $w_2 v_1 w_1$ лежат m вершин, включая три вершины w_2, v_1 и w_1 . Продолжаем вращать луч $[v_1 v_2)$, пока не найдем такую вершину w_l , что в секторе $w_{l-1} v_1 w_l$ лежат m вершин, включая три вершины w_{l-1}, v_1 и w_l . При этом из вида порядка графа G вершина w_l является последней просмотренной вершиной множества V , причем экстремальной точкой, предшествующей вершине v_1 при обходе границы $\text{Ch}(V)$ против часовой стрелки.

В силу построения вершин u_i ($i = 1, 2, \dots, k$) и w_j ($j = 1, 2, \dots, l$) и условия теоремы в каждом секторе $u_{i-1} v_1 u_i$ и $w_{j-1} v_1 w_j$ существует плоское остовное дерево T_i ($i = 1, 2, \dots, k$) и T_j ($j = 1, 2, \dots, l$). Объединение всех этих деревьев

$$H = \left(\bigcup_{i=1}^k T_i \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^l T_j \right)$$

является плоским остовным подграфом графа G . Удаляя из графа H лишние ребра, получим плоское остовное дерево в геометрическом графе G .

Чтобы оценить число геометрических графов, имеющих указанный выше порядок, нам понадобится следующая лемма.

Л е м м а 1. Для любого целого числа $m \geq 1$ следующие множества совпадают:

$$\{m \cdot k + (m - 1) \cdot l + 1 \mid k \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{Z}_+\} = \{(m - 1) \cdot s + t \mid \text{где } s \in \mathbb{N}, 2 \leq t \leq s + 1\}. \quad (1)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем справедливость включения \subset : имеем

$$m \cdot k + (m - 1) \cdot l + 1 = (m - 1) \cdot (k + l) + (k + 1).$$

Положим $s = (k + l) \geq 1$, тогда $k = s - l$ и, следовательно, $2 \leq k + 1 = s + 1 - l \leq s + 1$.

Справедливость обратного включения \supset покажем индукцией по s . Пусть $s = 1$, тогда $t = 2$, следовательно, $(m - 1) \cdot 1 + 2 = m + 1$, т. е. при $k = 1, l = 0$ число $(m - 1) \cdot 1 + 2$ лежит в левом множестве равенства (1).

Предположим теперь, что включение \supset справедливо для всех $s \leq S$. Покажем, что оно верно для $S + 1$.

Если $t \leq S + 1$, то $(m - 1) \cdot (S + 1) + t = (m - 1) \cdot S + t + (m - 1)$, но по индуктивному предположению сумма первых двух слагаемых равна $m \cdot k + (m - 1) \cdot l + 1$ для некоторых $k \in \mathbb{N}$ и $l \in \mathbb{Z}_+$. Следовательно, всю сумму можно представить в виде: $m \cdot k + (m - 1) \cdot (l + 1) + 1$, т. е. число $(m - 1) \cdot (S + 1) + t$ лежит в левом множестве равенства (1).

Если $t = S + 2$, то $(m - 1) \cdot (S + 1) + (S + 2) = m \cdot (S + 1) + 1$, т. е. при $k = S + 1, l = 0$ число $(m - 1) \cdot (S + 1) + (S + 2)$ лежит в левом множестве равенства (1).

Лемма 1 доказана.

Таким образом, в силу леммы 1 показано, что для графа G порядка n из множества

$$N = \{(m-2)s + t \mid \text{где } s \in \mathbb{N}, 2 \leq t \leq s + 1\}$$

справедливо утверждение теоремы 1.

Покажем теперь, что любое целое число $n \geq (m-2)^2 + 2$ принадлежит множеству N . Действительно, разделим n на $(m-2)$ с остатком:

$$n = (m-2)p + q, \text{ где } 0 \leq q \leq m-3.$$

Заметим, что $p \geq (m-2)$, так как иначе $n \leq (m-2) \cdot (m-3) + (m-3) < (m-2)^2 + 2$, противоречие. Если $p = (m-2)$, то остаток q удовлетворяет неравенствам

$$2 \leq q \leq m-3 < p+1,$$

т. е. $n \in N$.

Если $p > (m-2)$, то при q , удовлетворяющем неравенствам $2 \leq q \leq m-3 < p+1$, также $n \in N$. Поэтому пусть $p > (m-2)$, и $q = 0$ или 1 . В этом случае имеем:

$$n = (m-2)p + q = (m-2)(p-1) + (m-2+q),$$

т. е. полагая $s = p-1 > m-3 > 1$ и замечая, что $m-2+q \leq m-1 < s+1$, получаем, что $n \in N$.

Таким образом, любое целое число $n \geq (m-2)^2 + 2$ действительно лежит во множестве N .

Подсчитаем теперь число таких натуральных чисел $n < (m-2)^2 + 2$, которые не принадлежат множеству N .

Прежде всего, такие n будут иметь вид

$$n = (m-2)p + q,$$

где $1 < p < m-2$ и $q = 0$ или 1 .

Действительно, если $p \leq m-3$, тогда n можно представить в виде

$$n = (m-2)p + q = (m-2)(p-1) + (m-2+q),$$

но $m-2+q \geq m-2 > m-3 \geq (p-1)+1$, т. е. $n \notin N$.

Множеству N не принадлежит также целое число n вида $n = (m-2)p + q$, где $p = m-2$ и $q = 1$. Действительно, в этом случае n имеет вид

$$n = (m-2) \cdot (m-2) + 1 = (m-2) \cdot (m-3) + (m-1),$$

но $m-1 > (m-3)+1$, т. е. снова $n \notin N$.

Следующая серия таких натуральных чисел $n < (m-2)^2 + 2$, которые не принадлежат множеству N , получается, когда в разложении $n = (m-2)p + q$, частное p удовлетворяет неравенствам $1 \leq p \leq m-5$, а остаток q — неравенствам $p+2 \leq q \leq m-3$. Действительно, уже при $q = m-2$ имеем случай, когда частное равно $p+1$, а остаток $q = 0$: $n = (m-2)p + (m-2) = (m-2) \cdot (p+1)$. Нетрудно подсчитать, что число таких натуральных n равно:

$$1 + 2 + \dots + (m-5) = \frac{(m-4)(m-5)}{2}.$$

Окончательно подсчитывая число всех натуральных чисел $n < (m-2)^2 + 2$, которые не принадлежат множеству N , получаем:

$$2 \cdot (m-2) + 1 + \frac{(m-4)(m-5)}{2} = \frac{(m-2)(m-3)}{2}.$$

Теорема 1 доказана.

В частности, при $m = 6$ из теоремы 1 получаем шесть значений n , а именно, $n = 7, 8, 9, 12, 13, 17$, для которых нельзя непосредственно применить эту теорему. Тем не менее далее покажем, что для $m = 6$ справедливо следующее утверждение.

Т е о р е м а 2. Если для любого подмножества $U \subset V$ из 6 вершин геометрического графа $G = (V, E)$ порядка $n \geq 6$ индуцированный граф $G[U]$ содержит плоское остовное дерево, то и сам граф G содержит плоское остовное дерево.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу результата из [3] наше утверждение достаточно доказать для случая, когда $|\text{Ch}(V)| = 3$. Обозначим $\text{Ch}(V) = \{v_1, v_2, v_3\}$. Заметим сначала, что с помощью следующего утверждения из [4] случаи $n = 12, 13, 17$ можно свести к случаю $n = 7$.

Л е м м а 2 (о разбиении). Пусть S – множество точек в общем положении на евклидовой плоскости, v_1, v_2, \dots, v_l – вершины границы выпуклой оболочки $\text{Ch}(S)$ и t точек множества S лежат внутри выпуклой оболочки $\text{conv}(S)$. Пусть задано некоторое разбиение числа $n = n_1 + n_2 + \dots + n_l$, где все n_i неотрицательные целые числа. Тогда выпуклая оболочка $\text{conv}(S)$ может быть разбита на l выпуклых многоугольников P_1, P_2, \dots, P_l , таких, что каждый многоугольник P_i ($i = 1, 2, \dots, l$) содержит сторону $v_i v_{i+1}$ в качестве своего ребра и ровно n_i внутренних точек множества S . (Некоторые внутренние точки могут лежать на границах многоугольников P_1, P_2, \dots, P_l , и для этих точек мы сами устанавливаем их принадлежность к соответствующему многоугольнику.)

Действительно, в силу данной леммы, примененной для случая при $n = 17$ и $l = 3$, можно разбить внутренность треугольника $\Delta v_1 v_2 v_3$ с помощью некоторой внутренней точки u на три треугольника $P_1 = \Delta v_1 v_2 u, P_2 = \Delta v_2 v_3 u, P_3 = \Delta v_1 v_3 u$ таким образом, чтобы в каждом треугольнике P_1, P_2, P_3 лежали 4, 5, 5 вершин соответственно. В силу предположения о справедливости утверждения теоремы 2 для $n = 6$ и 7 у индуцированных графов на вершинах, лежащих в каждом треугольнике, вместе с соответствующими вершинами из границы $\text{Ch}(V)$, существуют плоские остовные деревья T_i ($i = 1, 2, 3$). Тогда их объединение является плоским остовным графом, из которого легко выделить плоское остовное дерево всего графа G .

Аналогично при $n = 13$ разбиваем внутренность треугольника $\Delta v_1 v_2 v_3$ на треугольники P_1, P_2, P_3 таким образом, чтобы в каждом треугольнике P_1, P_2, P_3 лежали 5, 5, 0 вершин соответственно, а при $n = 12$ – 5, 4, 0 вершин соответственно. В силу предположения о справедливости утверждения теоремы 2 для $n = 6$ и 7 у индуцированных графов на вершинах, лежащих в треугольниках P_1 и P_2 , вместе с соответствующими вершинами из границы $\text{Ch}(V)$, существуют плоские остовные деревья T_i ($i = 1, 2$). Тогда их объединение является плоским остовным деревом всего графа G .

Таким образом, осталось доказать утверждение теоремы 2 для $n = 7, 8$ и 9. Рассмотрим случай $n = 7$.

О п р е д е л е н и е 1. Ребро, лежащее на границе $\text{Ch}(V)$, назовем *граничным ребром*. Для любой вершины $v_i \in \text{Ch}(V)$ ($i = 1, 2, 3$) и $w \in \text{Ch}(V \setminus v_i)$ ребро $e = v_i w$ назовем *крайним*.

Заметим, что граничные и крайние ребра не пересекают никаких ребер графа G . Поэтому далее будем считать, что граф G не содержит граничных и крайних ребер, так как иначе можно построить плоское остовное дерево в исходном графе G , добавив это ребро $v_i w$ к плоскому остовному дереву $T_{V \setminus v_i}$, лежащему в индуцированном графе $G[(V \setminus v_i)]$.

Обозначим через $\text{Ch}_2(V) = \text{Ch}(V \setminus \{v_1, v_2, v_3\})$, т. е. 2-й слой множества вершин V . Пусть сначала $|\text{Ch}_2(V)| = 3$, скажем, $\text{Ch}_2(V) = \{v_4, v_5, v_6\}$. Тогда вершина v_7 лежит внутри $\Delta v_4 v_5 v_6$.

Поскольку граф G не содержит граничных и крайних ребер, то среди вершин $\text{Ch}(V)$ не может быть более одной вершины v_i , для которой $|\text{Ch}(V \setminus v_i)| = 4$, поскольку иначе нетрудно видеть, что в индуцированном графе $G[(V \setminus v_i)]$ нельзя найти плоское остовное дерево.

Пусть существует только одна вершина $\text{Ch}(V)$, скажем v_3 , для которой $|\text{Ch}(V \setminus v_3)| = 4$. Обозначим $\text{Ch}(V \setminus v_3) = \{v_1, v_2, v_6, v_4\}$ (рис. 1, а). Тогда в плоском остовном дереве T индуцированного графа $G[\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}]$ должны лежать ребра $v_1 v_5, v_2 v_5, v_3 v_5$, а значит, и ребра $v_4 v_5$ и $v_6 v_5$. Поскольку в графе G нет граничных и крайних ребер, то для любой внутренней вершины u треугольника $\Delta v_4 v_5 v_6$, в плоском остовном дереве графа $G[\{v_1, v_2, v_3, v_6, v_4, u\}]$ лежит ребро $v_3 u$. Все такие ребра (при $n = 7, 8$ и 9) вместе с деревом T образуют плоское остовное дерево графа G .

Пусть теперь для любой вершины $v_i \in \text{Ch}(V)$ ($i = 1, 2, 3$) $|\text{Ch}(V \setminus v_i)| = 3$. Обозначим вершины $\text{Ch}(V \setminus v_i) = \{v_{i+1}, v_{i+2}, v_{i+3}\}$ ($i = 1, 2, 3$) (рис. 1, б).

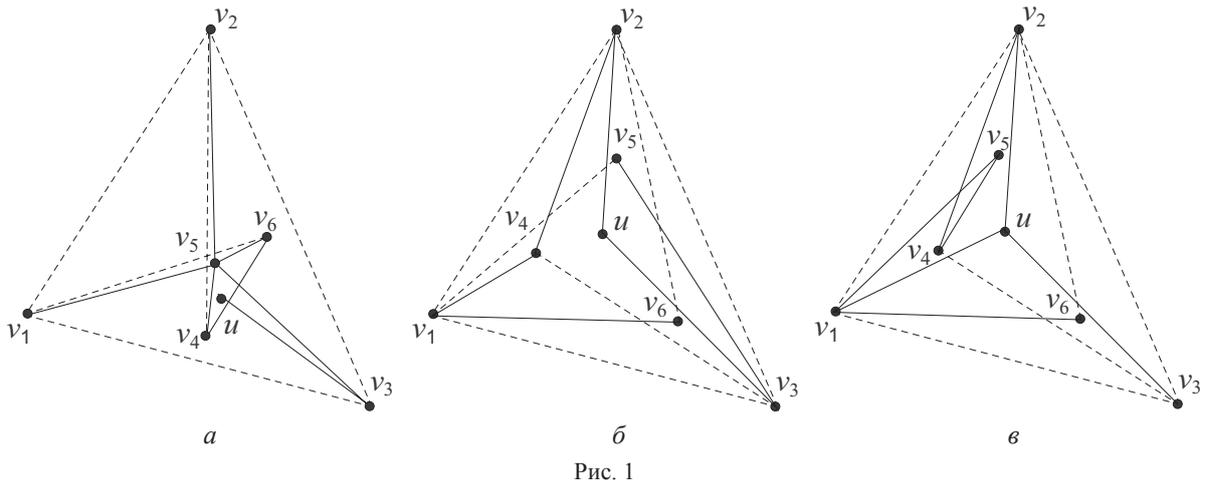


Рис. 1

О п р е д е л е н и е 2. Для произвольной внутренней вершины u и треугольника $\Delta v_4 v_5 v_6$ ребра uv_4, uv_5, uv_6 назовем *внутренними*.

Поскольку в графе G нет граничных и крайних ребер, то в плоском остовном дереве T индуцированного графа $G[\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}]$ лежат либо три ребра $v_1 v_5, v_2 v_6$ и $v_3 v_4$, либо три ребра $v_1 v_6, v_2 v_4$ и $v_3 v_5$, а также, по крайней мере, два ребра $\Delta v_4 v_5 v_6$. Так как эти случаи симметричны, без ограничения общности можно рассмотреть первый случай. Поэтому если в графе G существует хотя бы одно внутреннее ребро, то оно вместе с деревом T . Поэтому в дальнейшем будем считать, что граф G вместе с граничными и крайними ребрами не содержит внутренних ребер.

а) Если $uv_1 \cap v_3 v_4 \neq \emptyset, uv_2 \cap v_1 v_5 \neq \emptyset, uv_3 \cap v_2 v_6 \neq \emptyset$ (см. рис. 1, б), то в плоском остовном дереве T_1 индуцированного графа $G[\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, u\}]$ должны лежать ребра $v_1 u$ и $v_2 v_4$. Аналогично в плоском остовном дереве T_2 индуцированного графа $G[\{v_1, v_2, v_3, v_5, v_6, u\}]$ должны лежать ребра $v_2 u$ и $v_3 v_5$, а в плоском остовном дереве T_3 индуцированного графа $G[\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_6, u\}]$ – ребра $v_3 u$ и $v_1 v_6$. Все эти ребра образуют плоское остовное дерево графа индуцированного графа $G[\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, u\}]$.

б) Если $uv_1 \cap v_3 v_4 \neq \emptyset, uv_2 \cap v_1 v_5 = \emptyset, uv_3 \cap v_2 v_6 \neq \emptyset$ (рис. 1, в), то в плоском остовном дереве T_1 индуцированного графа $G[\{v_1, v_2, v_3, v_5, v_6, u\}]$ должны лежать ребра $v_2 u$ и $v_3 u$. А поскольку граф G не содержит внутренних ребер, то ребра $v_1 v_5, v_1 v_6$ и $v_1 u \in T_1$. Осталось показать, что ребро $v_4 v_5 \in G$. Действительно, если бы $v_4 v_5 \notin G$, то в индуцированном графе $G[\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, u\}]$ не существовало бы плоское остовное дерево T_2 . Поскольку тогда бы дереву T_2 принадлежало либо ребро $v_4 v_2$, а значит, и несвязная с ним цепь из ребер $v_1 u, uv_3$ и $v_3 v_5$, либо ребро $v_1 v_5$, а значит, и несвязная с ним цепь из ребер $v_4 v_3, v_3 u$ и uv_2 .

в) Случай $uv_1 \cap v_3 v_4 \neq \emptyset, uv_2 \cap v_1 v_5 = \emptyset, uv_3 \cap v_2 v_6 = \emptyset$ симметричен случаю б).

г) Случай $uv_1 \cap v_3 v_4 = \emptyset, uv_2 \cap v_1 v_5 = \emptyset, uv_3 \cap v_2 v_6 = \emptyset$ сводится к случаю а), если вместо тройки ребер $v_1 v_5, v_2 v_6$ и $v_3 v_4$ рассматривать тройку ребер $v_1 v_6, v_2 v_4$ и $v_3 v_5$.

Пусть теперь $|\text{Ch}_2(V)| = 4$, т. е. $\text{Ch}_2(V) = \{v_4, v_5, v_6, v_7\}$. Можно считать, что не существует такой вершины $v_i \in \text{Ch}(V)$, что $|\text{Ch}(V \setminus v_i)| = 5$, поскольку иначе существует крайнее ребро.

Пусть для любой вершины $v_i \in \text{Ch}(V)$ $|\text{Ch}(V \setminus v_i)| = 3$. Обозначим внутренние вершины, как раньше: $\text{Ch}(V \setminus v_i) = \{v_{i+1}, v_{i+2}, v_{i+3}\}$ ($i = 1, 2, 3$) (рис. 2, а).

Снова без ограничения общности можно считать, что в плоском остовном дереве T_1 индуцированного графа $G[\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}]$ лежат три ребра $v_1 v_5, v_2 v_6$ и $v_3 v_4$, а также, по крайней мере, два ребра $\Delta v_4 v_5 v_6$. В плоском остовном дереве T_2 индуцированного графа $G[\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_6, v_7\}]$ должны лежать ребра $v_1 v_7$ и $v_3 v_7$ (см. рис. 2, а), а значит, можно построить плоское остовное дерево графа G .

Покажем, что в графе G нет больше одной вершины $v_i \in \text{Ch}(V)$, такой, что $|\text{Ch}(V \setminus v_i)| = 4$. Действительно, предположим противное, и пусть $v_i \in \text{Ch}(V)$ $|\text{Ch}(V \setminus v_i)| = 4$ ($i = 2, 3$) (рис. 2, б). Тогда в плоском остовном дереве T индуцированного графа $G[\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_6, v_7\}]$ должны лежать ребра $v_1 v_6$ и $v_3 v_4$, а значит, вершина v_2 становится изолированной в T , противоречие.

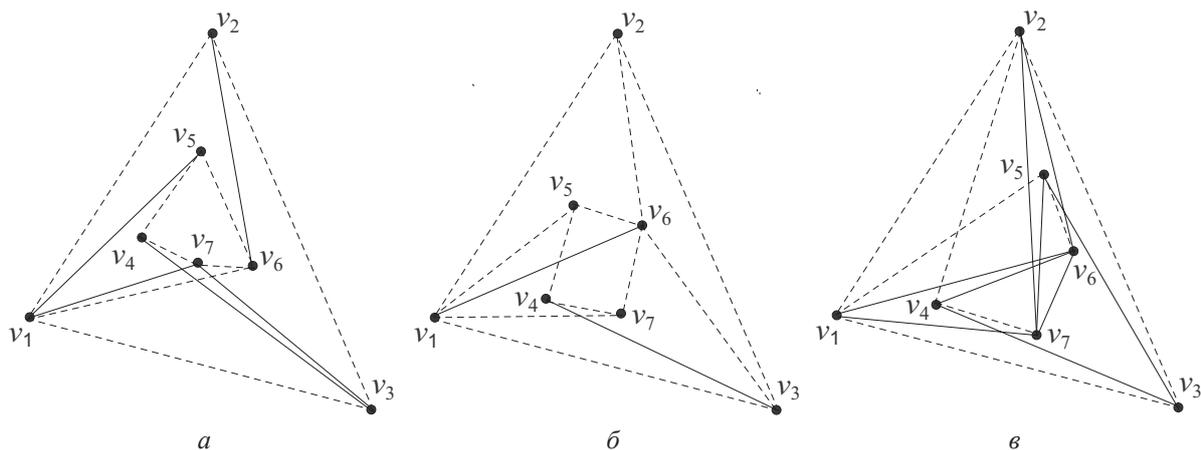


Рис. 2

Осталось рассмотреть случай, когда существует единственная вершина, скажем v_3 , такая, что $|\text{Ch}(I \setminus v_3)| = 4$ (рис. 2, в). Пусть $|\text{Ch}(I \setminus v_3)| = \{v_1, v_2, v_6, v_7\}$. Заметим, что $v_6 \notin \text{Ch}(I \setminus v_2)$ и $v_6 \notin \text{Ch}(I \setminus v_1)$. Тогда в плоском остовном дереве T_1 индуцированного графа $G[\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_6, v_7\}]$ должны лежать ребра v_3v_4, v_1v_6, v_2v_6 и, по крайней мере, два ребра $\Delta v_4v_6v_7$, а в плоском остовном дереве T_2 индуцированного графа $G[\{v_1, v_2, v_3, v_5, v_6, v_7\}]$ должны лежать ребра v_3v_5, v_2v_7, v_1v_7 и, по крайней мере, два ребра $\Delta v_5v_6v_7$. Следовательно, можно считать, что два ребра треугольника $\Delta v_4v_6v_7$, лежащие в дереве T_1 , – это v_4v_6, v_6v_7 , а два ребра треугольника $\Delta v_5v_6v_7$, лежащие в дереве T_2 , – это v_5v_7, v_6v_7 (иначе легко построить плоское остовное дерево T графа G).

Рассмотрим теперь плоское остовное дерево T_3 индуцированного графа $G[\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}]$. В нем должно лежать ребро v_3v_5 (иначе вершина v_1 была бы изолированной). Значит, можно считать, что ребро $v_1v_5 \notin T_3$, так как ребро v_1v_5 вместе с деревом T_1 образует плоское остовное дерево T графа G . Следовательно, $v_1v_6 \in T_3$, откуда $v_2v_6 \in T_3$, и значит, ребро $v_5v_6 \in T_3$, которое вместе с деревом T_1 образует плоское остовное дерево T графа G .

Случаи $n = 8$ и 9 рассматриваются аналогично. Теорема 2 доказана.

Работа профинансирована Институтом математики НАН Беларуси в рамках Государственной программы фундаментальных исследований «Конвергенция» и Белорусским республиканским фондом фундаментальных исследований (договор № Ф12РА-006).

Литература

1. Kratochvil J., Lubiw A., Nešetřil J. // SIAM J. Disc. Math. 1991. Vol. 4, N 2. P. 223–244.
2. Rivera-Campo E. // Proceedings of the Japanese Conference on Discrete and Computational Geometry. Tokyo, Japan. December 1998, LNCS. 2000. Vol. 1763. P. 274–277.
3. Бенедиктович В. И. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2012. № 3. С. 117–122.
4. Benediktovich V. I. // Electronic Notes in Discrete Mathematics. 2006. Vol. 24. P. 31–38.

V. I. BENEDIKTOVITCH

LOCAL FEATURE FOR THE EXISTENCE OF PLANE SPANNING TREE IN A GEOMETRIC GRAPH

Summary

In this article the local features for the existence of plane spanning trees in a geometric graph have been obtained. Thereby Rivera–Campo’s conjecture has been confirmed for almost all geometric graphs.

УДК 517.977

А. Е. ЛЕЩЕВ, Л. И. МИНЧЕНКО

СЛАБО РЕГУЛЯРНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

(Поступила в редакцию 11.04.2014)

Условия регулярности играют важную роль в задачах математического программирования, поскольку гарантируют справедливость необходимых условий оптимальности Куна – Таккера. Среди условий регулярности наиболее известным и широко применяемым является условие Мангасаряна – Фромовица. В то же время, несмотря на сравнительную эффективность условия Мангасаряна – Фромовица, существуют достаточно широкие классы задач оптимизации, в которых это условие не выполняется, но можно указать другие более слабые условия регулярности, гарантирующие справедливость необходимых условий Куна – Таккера. Целью данной работы является исследование некоторых слабых условий регулярности и их взаимосвязи.

Введение. Пусть h_i , $i = 1, \dots, p$, – непрерывно дифференцируемые функции из R^m в R . Рассмотрим непустое множество

$$C = \{y \in R^m \mid h_i(y) \leq 0, \quad i \in I, \quad h_i(y) = 0, \quad i \in I_0\},$$

где $i = \{1, \dots, s\}$, $I_0 = \{s + 1, \dots, p\}$ или $I_0 = \emptyset$.

Такого рода множества используются для описания допустимых точек задачи нелинейного программирования. При этом большое значение играют условия регулярности (constraint qualifications), обеспечивающие качество ограничений $h_i(y) \leq 0$, $i \in I$, $h_i(y) = 0$, $i \in I_0$, в исследуемой точке и гарантирующие применимость традиционных необходимых условий оптимальности. Наиболее известным из условий регулярности является условие Мангасаряна – Фромовица (MFCQ) [1], выполнение которого в точке $y \in C$ требует, чтобы в этой точке система векторов $\nabla h_i(y)$, $i \in I_0$, была линейно независимой и существовал вектор \bar{y}^0 такой, что

$$\langle \nabla h_i(y), \bar{y}^0 \rangle = 0, \quad i \in I_0, \quad \langle \nabla h_i(y), \bar{y}^0 \rangle < 0, \quad i \in I(y),$$

где $I(y) = \{i \in I \mid h_i(y) = 0\}$.

В литературе известны также условия регулярности, имеющие отличный от MFCQ характер. К ним относятся в первую очередь достаточно известное условие постоянного ранга (CRCQ) [2] и обобщающее его ослабленное условие постоянного ранга (RCRCQ) [3, 4].

Говорят, что в точке $y^0 \in C$ выполняется ослабленное условие постоянного ранга (RCRCQ), если для любого множества индексов $K \subset I(y^0)$ система векторов $\{\nabla h_i(y), \quad i \in K \cup I_0\}$ имеет постоянный ранг в некоторой окрестности точки y^0 .

Известно [2, 3], что данные условия и условие MFCQ независимы друг от друга. Последнее обстоятельство позволяет поставить вопрос о существовании более слабых условий регулярности, обобщающих одновременно и MFCQ, и RCRCQ. На этом пути в работах [5, 6] получено обобщающее MFCQ и CRCQ (но не RCRCQ) условие положительной линейной зависимости (CPLD), а также ослабленное условие положительной линейной зависимости (RCPLD) [7]. Несколько ранее в работе [8] было предложено и обосновано ослабленное (обобщенное) условие регулярности Мангасаряна – Фромовица (RMFCQ), которое обобщает все упомянутые выше условия регулярности.

Позже условие регулярности, повторяющее RMFCQ, было независимо введено в работе [9] под названием CRSC (constant rank of the subspace component condition).

В точке $y \in C$ построим множество

$$\Gamma_C(y) = \{\bar{y} \in R^m \mid \langle \nabla h_i(y), \bar{y} \rangle \leq 0, \quad i \in I(y), \quad \langle \nabla h_i(y), \bar{y} \rangle = 0, \quad i \in I_0\},$$

которое будем называть линейризованным касательным конусом к множеству C в данной точке. Следуя [8], представим множество индексов $I(y)$ в точке $y \in C$ в виде разбиения на два множества $I(y) = I^a(y) \cup I^+(y)$, где $I^a(y) \cap I^+(y) = \emptyset$ и множество $I^a(y)$ состоит из тех и только тех индексов $i \in I(y)$, для которых $\langle \nabla h_i(y), \bar{y} \rangle = 0$ для всех $\bar{y} \in \Gamma_C(y)$, а $I^+(y) = I(y) \setminus I^a(y)$.

О п р е д е л е н и е 1. Будем говорить, что в точке $y^0 \in C$ выполнено ослабленное условие RMFCQ, если система векторов $\{\nabla h_i(y), \quad i \in I_0 \cup I^a(y)\}$ имеет постоянный ранг в некоторой окрестности этой точки.

Пусть $\|y\|$ – евклидова норма вектора y , $d_C(y) = \inf_{v \in C} \|y - v\|$. При исследовании задач оптимизации важную роль играет также следующее условие, являющееся достаточно общим условием регулярности.

О п р е д е л е н и е 2. Будем говорить, что множество C *R-регулярно* [3, 4] в точке $y^0 \in C$ (или в данной точке имеет место *error bound property* [10–12]), если найдутся число $\alpha > 0$ и окрестность $V(y^0)$ точки y^0 такие, что для всех $y \in V(y^0)$ выполнено условие $d_C(y) \leq \alpha \max\{0, h_i(y), i \in I, |h_i(y)|, i \in I_0\}$.

В работе [3] было доказано, что выполнение условий RCRCQ и CPLD влечет за собой *R-регулярность* множества допустимых точек в исследуемой точке. В статье [9] доказано аналогичное утверждение относительно RMFCQ и *R-регулярности*. При этом и в [3], и в [9] был использован один из результатов [3], доказательство которого основано на дополнительном требовании существования непрерывных вторых производных для функций, описывающих множество C . Целью данной работы является доказательство того, что справедливость условия *R-регулярности* следует из RMFCQ без каких-либо дополнительных предположений об ограничениях.

1. Вспомогательные утверждения. Определим касательный конус к множеству C в точке $y \in C$:

$$T_C(y) = \{\bar{y} \in R^m \mid \exists \text{ число } t_0 > 0 \text{ и функция } o(t) \text{ такие,} \\ \text{что } o(t)/t \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow 0 \text{ и } y + t\bar{y} + o(t) \in C \quad \forall t \in [0, t_0]\}.$$

Отметим, что конусы $\Gamma_C(y)$ и $T_C(y)$ замкнуты и $T_C(y) \subset \Gamma_C(y)$.

Л е м м а 1. Пусть $y^0 \in C$. Тогда существует вектор \bar{y}^0 такой, что $\langle \nabla h_i(y^0), \bar{y}^0 \rangle = 0, i \in I_0 \cup I^a(y^0)$, $\langle \nabla h_i(y^0), \bar{y}^0 \rangle < 0, i \in I^+(y^0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В случае, если $I^+(y) = \emptyset$, утверждение леммы будет выполнено тривиально. Пусть $I^+(y) \neq \emptyset$. Пусть $i \in I^+(y)$. Тогда $\langle \nabla h_i(y), \bar{y} \rangle \leq 0$ для всех $\bar{y} \in \Gamma_C(y)$. С другой стороны, $i \notin I^a(y)$, следовательно, найдется вектор $\bar{y}^i \in \Gamma_C(y)$ такой, что $\langle \nabla h_i(y), \bar{y}^i \rangle < 0$. Построим вектор

$$\bar{y}^0 = \sum_{i \in I^+(y)} t_i \bar{y}^i,$$

где все $t_i > 0$. Тогда $\bar{y}^0 \in \Gamma_C(y)$, и для любого $k \in I^+(y)$ получим

$$\langle \nabla h_k(y), \bar{y}^0 \rangle = \sum_{i \in I^+(y)} t_i \langle \nabla h_k(y), \bar{y}^i \rangle = \sum_{i \in I^+(y) \setminus k} t_i \langle \nabla h_k(y), \bar{y}^i \rangle + t_k \langle \nabla h_k(y), \bar{y}^k \rangle < 0.$$

У т в е р ж д е н и е 1. Пусть $y^0 \in C$. Тогда аффинная оболочка и относительная внутренность множества $\Gamma_C(y^0)$ имеют вид

$$\text{aff} \Gamma_C(y^0) = \{\bar{y} \in R^m \mid \langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle = 0, \quad i \in I_0 \cup I^a(y^0)\}, \\ \text{ri} \Gamma_C(y^0) = \{\bar{y} \in R^m \mid \langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle = 0, \quad i \in I_0 \cup I^a(y^0), \langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle < 0, \quad i \in I^+(y^0)\}.$$

Доказательство. В силу определения множества $I^a(y^0)$ и леммы 1 аффинная оболочка множества $\Gamma_C(y^0)$ задается условием $\text{aff}\Gamma_C(y^0) = \{\bar{y} \in R^m \mid \langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle = 0, i \in I_0 \cup I^a(y^0)\}$.

Рассмотрим выпуклую функцию

$$g(\bar{y}) = \begin{cases} \max_{i \in I^+(y^0)} \langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle, & \bar{y} \in \text{aff}\Gamma_C(y^0) \\ +\infty, & \bar{y} \notin \text{aff}\Gamma_C(y^0). \end{cases}$$

Очевидно, $\Gamma_C(y^0) = \{\bar{y} \mid g(\bar{y}) \leq 0\}$. Поскольку в силу условия RMFCQ найдется точка \bar{y}^0 такая, что $g(\bar{y}^0) < 0$, то в силу следствия 7.6.1 [13] относительную внутренность множества $\Gamma_C(y^0)$ можно записать:

$$\begin{aligned} \text{ri}\Gamma_C(y^0) &= \text{ri}\{\bar{y} \mid g(\bar{y}) \leq 0\} = \{\bar{y} \mid g(\bar{y}) < 0\} = \\ &= \{\bar{y} \in R^m \mid \langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle = 0, i \in I_0 \cup I^a(y^0), \langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle < 0, i \in I^+(y^0)\}. \end{aligned}$$

Следуя [14], будем называть ограничения с индексами $i \in I^a(y)$ существенно активными для множества $\Gamma_C(y)$.

Пусть

$$\Lambda_0(y) = \{\lambda \in R^p \mid \sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla h_i(y) = 0, \lambda_i \geq 0, i \in I(y), \lambda_i = 0, i \in I \setminus I(y)\}.$$

Следующая лемма является незначительной модификацией теоремы 17.7 [14].

Лемма 2. Пусть $y \in C$. Для того чтобы $i \in I^a(y)$, достаточно существования вектора $\lambda \in \Lambda_0(y)$ такого, что $\lambda_i > 0$. Если $I^a(y) \neq \emptyset$, то данное условие является и необходимым.

Пусть $y^0 \in C, I^a(y^0) \subset I^\# \subset I(y^0)$. Введем множество

$$C_\# = \{y \in R^m \mid h_i(y) \leq 0, i \in I^\#, h_i(y) = 0, i \in I_0\}$$

и обозначим через $I^{a\#}(y^0)$ множество индексов всех существенно активных ограничений для $\Gamma_{C_\#}(y^0)$.

Лемма 3. Пусть $I^a(y^0) \subset I^\# \subset I(y^0)$. Тогда $I^a(y^0) = I^{a\#}(y^0)$.

Доказательство. Покажем, что $I^a(y^0) \subset I^{a\#}(y^0)$. Действительно, если $I^a(y^0) = \emptyset$, то данное включение выполняется. Пусть $I^a(y^0) \neq \emptyset$ и $i \in I^a(y^0)$. Тогда по лемме 2 существует вектор $\lambda \in \Lambda_0(y^0)$ такой, что $\lambda_i > 0$, при этом $\lambda_j = 0$ как для всех $j \in I \setminus I(y^0)$, так и для $j \in I(y^0) \setminus I^a(y^0)$ (иначе в силу леммы 2 эти ограничения были бы тоже существенно активными для $\Gamma_C(y^0)$, что невозможно ввиду определения множества $I^a(y^0)$). Тогда существует вектор

$$\lambda \in \Lambda_0^\#(y^0) = \{\lambda \in R^p \mid \sum_{j \in I_0 \cup I^\#} \lambda_j \nabla h_j(y) = 0, \lambda_j \geq 0, j \in I^\#\}$$

такой, что $\lambda_i > 0$. В таком случае по лемме 2 $i \in I^{a\#}(y^0)$. Таким образом, $I^a(y^0) \subset I^{a\#}(y^0)$. Обратно, поскольку $\Gamma_{C_\#}(y^0) \supset \Gamma_C(y^0)$, то все существенно активные ограничения для $\Gamma_{C_\#}(y^0)$ останутся существенно активными и для $\Gamma_C(y^0)$. Следовательно, $I^a(y^0) \supset I^{a\#}(y^0)$.

Лемма 4 [8, 9]. Если в точке $y^0 \in C$ выполнено условие RMFCQ, то

1) $T_C(y^0) = \Gamma_C(y^0)$;

2) условие RMFCQ выполняется и в некоторой окрестности этой точки на C ;

3) существует окрестность $V(y^0)$ точки y^0 такая, что $h_i(y) = 0$ при $i \in I^a(y^0)$ для всех точек $y \in C \cap V(y^0)$.

Л е м м а 5. Пусть условие *RMFCQ* выполнено в точке $y^0 \in C$. Тогда для всех $y \in C$ из некоторой окрестности y^0 справедливо включение $I^a(y^0) \subset I^a(y)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть в точке $y^0 \in C$ выполнено условие *RMFCQ*. Тогда в силу леммы 4 оно выполнено и для любой точки $y \in C$ из достаточно малой окрестности точки y^0 , причем $T_C(y) = \Gamma_C(y)$. Принимая во внимание определение касательного конуса $T_C(y)$, получим $y + \bar{y} + o(t) \in C$ при достаточно малых $t > 0$ для любого $\bar{y} \in \Gamma_C(y)$. Отсюда по лемме 4 $h_i(y + \bar{y} + o(t)) = 0$, $h_i(y) = 0$ и, следовательно, $\langle \nabla h_i(y), \bar{y} \rangle = 0$ при всех $i \in I^a(y^0)$. Последнее означает, что $I^a(y^0) \cap I(y) \subset I^a(y)$. Но поскольку $h_i(y) = 0$ для всех $i \in I^a(y^0)$, то $I^a(y^0) \subset I(y)$ и, следовательно, $I^a(y^0) \subset I^a(y)$.

Пусть $X \subset R^n$. Рассмотрим многозначное отображение $G : x \mapsto G(x)$, ставящее в соответствие каждому $x \in X$ множество $G(x) \subset R^m$. Нижним топологическим пределом многозначного отображения G в точке $x^0 \in clX$ на множестве X называется множество

$$\liminf_{x \xrightarrow{X} x^0} G(x) = \{y \in R^m \mid \forall x^k \rightarrow x^0, x^k \in X, \text{ найдется последовательность } y^k \in G(x^k) \text{ } k=1,2,\dots \text{ такая, что } y^k \rightarrow y\}.$$

Верхним топологическим пределом многозначного отображения G в точке $x^0 \in clX$ на множестве X называется множество

$$\limsup_{x \xrightarrow{X} x^0} G(x) = \{y \in R^m \mid \text{существуют последовательность } x^k \rightarrow x^0, x^k \in X, \text{ и последовательность } y^k \in G(x^k), k=1,2,\dots, \text{ такая, что } y^k \rightarrow y\}.$$

Многозначное отображение G называется полунепрерывным снизу (п.н.сн.) в точке $x^0 \in clX$ на множестве X , если $\liminf_{x \xrightarrow{X} x^0} G(x) \supset G(x^0)$. Многозначное отображение G называется полунепрерывным сверху (п.н.св.) в точке $x^0 \in clX$ на множестве X , если $\limsup_{x \xrightarrow{X} x^0} G(x) \subset G(x^0)$.

Пусть $K \subset R^m$ – выпуклый конус. Обозначим $K^* = \{\hat{y} \in R^m \mid \langle \hat{y}, \bar{y} \rangle \leq 0 \quad \forall \bar{y} \in K\}$ конус, двойственный к конусу K .

Рассмотрим многозначное отображение $K(\cdot)$, ставящее в соответствие каждой точке $y \in C$ конус $K(y) \subset R^m$, и многозначное отображение $K^*(\cdot)$, ставящее в соответствие каждой точке $y \in C$ конус $K^*(y)$.

Л е м м а 6. Пусть многозначное отображение $K(\cdot)$ п.н.сн. на множестве $Y \subset C$ в точке $y^0 \in clY \subset C$. Тогда отображение $K^*(\cdot)$ п.н.св. в данной точке на данном множестве.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\hat{y} \in \limsup_{y \xrightarrow{Y} y^0} K^*(y)$. Тогда найдутся последовательности $y^k \rightarrow y^0$ такая, что $y^k \in Y$ при всех $k=1,2,\dots$, и $\hat{y}^k \rightarrow \hat{y}$ такая, что $\hat{y}^k \in K^*(y^k)$ $k=1,2,\dots$. С другой стороны, возьмем любой вектор $\bar{y} \in K(y^0)$. Из полунепрерывности снизу многозначного отображения $K(\cdot)$ в точке $y^0 \in clY$ на множестве Y следует, что для последовательности $y^k \rightarrow y^0$, $y^k \in Y$, существует последовательность $\bar{y}^k \in K(y^k)$, $k=1,2,\dots$, такая, что $\bar{y}^k \rightarrow \bar{y}$. В таком случае $\langle \hat{y}^k, \bar{y}^k \rangle \leq 0$ при всех $k=1,2,\dots$, откуда $\langle \hat{y}, \bar{y} \rangle \leq 0$ для любого $\bar{y} \in K(y^0)$. Следовательно, $\hat{y} \in K^*(y^0)$ и $\limsup_{y \xrightarrow{Y} y^0} K^*(y) \subset K^*(y^0)$.

2. Основной результат. Пусть $v \in R^m$, $v \notin C$. Обозначим $\Pi_C(v)$ – множество точек из C , ближайших к точке v . Очевидно, эти точки являются решениями задачи нелинейного программирования

$$f_v(y) \rightarrow \min, y \in C, \quad (1)$$

где $f_v(y) = |y - v|$.

Т е о р е м а 1. Пусть множество C удовлетворяет в точке $y^0 \in C$ условию *RMFCQ*. Тогда множество C *R*-регулярно в данной точке.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $y^0 \in \text{int} C$, то доказываемое утверждение верно. Пусть $y^0 \in \text{bd} C$. 1) Будем рассуждать от противного и предположим, что множество C не является *R*-регулярным в точке $y^0 \in C$. Тогда существует последовательность $v^k \rightarrow y^0$, $v^k \notin C$, такая, что $d_C(v^k) > k \max\{0, h_i(v^k), i \in I, |h_i(v^k)|, i \in I_0\}$ для всех $k = 1, 2, \dots$.

Пусть

$$y^k = y(v^k) \in \Pi_C(v^k), \quad \bar{v}^k = (v^k - y^k) \left| v^k - y^k \right|^{-1}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Очевидно, $y^k \rightarrow y^0$, $|\bar{v}^k| = 1$.

Ввиду конечности индексного множества I можно извлечь из последовательностей $\{v^k\}$ и $\{y^k\}$ подпоследовательности, на которых множество индексов $I(y^k)$ постоянно. Поэтому, для простоты записи сохранив для этих подпоследовательностей те же обозначения $\{v^k\}$ и $\{y^k\}$, можно положить

$$I(y^k) = I^\# \subset I(y^0),$$

где $I^\#$ не зависит от y^k .

Без потери общности рассуждений мы можем также предположить, что $\bar{v}^k \rightarrow \bar{v}$. Тогда

$$\left| v^k - y^k \right| > k \max\{0, \langle \nabla h_i(\tilde{v}^k), v^k - y^k \rangle, i \in I^\#, \left| \langle \nabla h_i(\tilde{v}^k), v^k - y^k \rangle \right|, i \in I_0\},$$

где $\tilde{v}^k = y^k + \tau_k(v^k - y^k)$, $0 \leq \tau_k \leq 1$. Из данного неравенства следует:

$$\frac{1}{k} > \max\{0, \langle \nabla h_i(\tilde{v}^k), \bar{v}^k \rangle, i \in I^\#, \left| \langle \nabla h_i(\tilde{v}^k), \bar{v}^k \rangle \right|, i \in I_0\}$$

и, следовательно,

$$\max\{0, \langle \nabla h_i(y^0), \bar{v} \rangle, i \in I^\#, \left| \langle \nabla h_i(y^0), \bar{v} \rangle \right|, i \in I_0\} \leq 0.$$

Положив

$$C_\# = \{y \in R^m \mid h_i(y) \leq 0, \quad i \in I^\#, \quad h_i(y) = 0, \quad i \in I_0\},$$

получаем из последнего неравенства

$$\bar{v} \in \Gamma_{C_\#}(y^0),$$

где

$$\Gamma_{C_\#}(y^0) = \{\bar{y} \in R^m \mid \langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle \leq 0, \quad i \in I^\#, \quad \langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle = 0, \quad i \in I_0\}.$$

2) С другой стороны, поскольку условие *RMFCQ* в точке y^0 влечет в силу леммы 4 выполнение условия *RMFCQ* и в некоторой ее окрестности, то, не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что *RMFCQ* выполняется и в точках y^k (2) и, следовательно, для задачи (1) при $v = v_k$ существуют множители Лагранжа $\lambda^k \in R^p$, для которых

$$\frac{v^k - y^k}{|v^k - y^k|} = \sum_{i=1}^p \lambda_i^k \nabla h_i(y^k), \quad \lambda_i^k \geq 0, \quad i \in I, \quad \text{и } \lambda_i^k = 0 \text{ для } i \in (I \setminus I^\#).$$

Последнее условие можно переписать в виде

$$\bar{v}^k = \sum_{i \in I_0 \cup I^\#} \lambda_i^k \nabla h_i(y^k), \quad \lambda_i^k \geq 0, \quad i \in I^\#,$$

откуда $\bar{v}^k \in [\Gamma_{C_\#}(y^k)]^*$, где, согласно определению,

$$\Gamma_{C_\#}(y^k) = \{\bar{y} \in R^m \mid \langle \nabla h_i(y^k), \bar{y} \rangle \leq 0, \quad i \in I^\#, \quad \langle \nabla h_i(y^k), \bar{y} \rangle = 0, \quad i \in I_0\}.$$

В силу леммы 5, $I^a(y^0) \subset I^\#$. Тогда по лемме 3, условия которой выполнены для выбранного множества $I^\#$, имеем $I^a(y^0) = I^{a\#}(y^0)$ и, согласно утверждению 1, получаем

$$ri \Gamma_{C\#}(y^0) = \{\bar{y} \in R^m \mid \langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle < 0, \quad i \in I^\# \setminus I^a(y^0), \quad \langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle = 0, \quad i \in I_0 \cup I^a(y^0)\}.$$

Возьмем произвольный вектор $\bar{y} \in ri \Gamma_{C\#}(y^0)$.

В силу условия RMFCQ для множества C в точке $y^0 \in C$ можно, не ограничивая общности, считать, что

$$\text{rank}\{\nabla h_i(y^k), \quad i \in I_0 \cup I^a(y^0)\} = \text{rank}\{\nabla h_i(y^0), \quad i \in I_0 \cup I^a(y^0)\} = l$$

для всех $k=1,2,\dots$. Следовательно, существует максимальная линейно независимая подсистема $\{\nabla h_i(y^0), \quad i \in J \subset I_0 \cup I^a(y^0)\}$ системы $\{\nabla h_i(y^0), \quad i \in I_0 \cup I^a(y^0)\}$, которая остается максимальной линейно независимой подсистемой $\{\nabla h_i(y^k), \quad i \in J \subset I_0 \cup I^a(y^0)\}$ в системе векторов $\{\nabla h_i(y^k), \quad i \in I_0 \cup I^a(y^0)\}$. Для простоты будем считать, что $J = \{1, \dots, l\}$.

Тогда система уравнений $\langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle = 0, \quad i \in I_0 \cup I^a(y^0)$ равносильна системе

$$\langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle = 0, \quad i \in J. \quad (3)$$

Для определенности считаем, что базисный минор системы уравнений (3) расположен в верхнем левом углу соответствующей матрицы. Тогда систему (3) можно записать в виде

$$B_1(y^0)\bar{y}^1 + B_2(y^0)\bar{y}^2 = 0, \quad \text{где } \bar{y} = (\bar{y}^1, \bar{y}^2), \quad \bar{y}^1 = (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_l), \quad \bar{y}^2 = (\bar{y}_{l+1}, \dots, \bar{y}_m),$$

$$B_1(y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1(y)}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial h_1(y)}{\partial y_l} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial h_l(y)}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial h_l(y)}{\partial y_l} \end{bmatrix}, \quad B_2(y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1(y)}{\partial y_{l+1}} & \dots & \frac{\partial h_1(y)}{\partial y_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial h_l(y)}{\partial y_{l+1}} & \dots & \frac{\partial h_l(y)}{\partial y_m} \end{bmatrix}.$$

Отсюда $\bar{y}^1 = -B_1^{-1}(y^0)B_2(y^0)\bar{y}^2$.

Построим вектор $\bar{y}^k = (\bar{y}^{1k}, \bar{y}^{2k})$ следующим образом:

$$\bar{y}^{1k} = -B_1^{-1}(y^k)B_2(y^k)\bar{y}^2, \quad \bar{y}^{2k} = \bar{y}^2.$$

Тогда

$$\langle \nabla h_i(y^k), \bar{y}^k \rangle = 0, \quad i \in J, \quad \text{и } \bar{y}^k \rightarrow \bar{y} \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

Кроме того, при $i \in I^\# \setminus I^a(y^0)$ справедливо $|\langle \nabla h_i(y^k), \bar{y}^k \rangle - \langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle| \rightarrow 0$ и, следовательно, $|\langle \nabla h_i(y^k), \bar{y}^k \rangle - \langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty, i \in I^\#$. Учитывая это и неравенства $\langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle < 0, \quad i \in I^\# \setminus I^a(y^0)$, получаем, что $\langle \nabla h_i(y^k), \bar{y}^k \rangle < 0, \quad i \in I^\# \setminus I^a(y^0)$. Таким образом, для любого $\bar{y} \in ri \Gamma_{C\#}(y^0)$ существует последовательность $\bar{y}^k \in \Gamma_{C\#}(y^k)$ такая, что $\bar{y}^k \rightarrow \bar{y}$. Последнее означает, что $\liminf_{y \xrightarrow{Y} y^0} \Gamma_{C\#}(y) \supset ri \Gamma_{C\#}(y^0)$ в точке y^0 на последовательности $y^k \rightarrow y^0, Y = \{y^k, k=1,2,\dots\}$. Отсюда с учетом замкнутости множеств $\liminf_{y \xrightarrow{Y} y^0} \Gamma_{C\#}(y)$ и $\Gamma_{C\#}(y^0)$ получаем $\liminf_{y \xrightarrow{Y} y^0} \Gamma_{C\#}(y) \supset \Gamma_{C\#}(y^0)$. Следовательно, многозначное отображение $\Gamma_{C\#}(y)$ полунепрерывно снизу. В таком случае по лемме 6 конус $[\Gamma_{C\#}(y)]^*$, двойственный к $\Gamma_{C\#}(y)$, будет полунепрерывным сверху в точке y^0 на последовательности $y^k \rightarrow y^0$. С учетом этого и доказанного ранее включения $\bar{v}^k \in [\Gamma_{C\#}(y^k)]^*$ и того, что $\bar{v}^k \rightarrow \bar{v}$, следует $\bar{v} \in [\Gamma_{C\#}(y^0)]^*$. Но, с другой стороны, в первой

части доказательства получено включение $\bar{v} \in \Gamma_{C\#}(y^0)$. Поскольку $|\bar{v}| \neq 0$, последнее невозможно. Полученное противоречие говорит о справедливости утверждения теоремы.

Доказанная теорема обобщает результат, полученный в работе [9] при дополнительных предположениях о существовании и непрерывности вторых производных функций, описывающих множество C .

Пример. Пусть $C = \{y \in R^2 \mid h_i(y) \leq 0, \quad i = 1, 2, \quad h_3(y) = 0\}$, где

$$h_1(y) = \begin{cases} y_2 - y_1^2, & \text{если } y_1 \geq 0 \\ y_2 + y_1^3, & \text{если } y_1 \leq 0 \end{cases},$$

$$h_2(y) = -y_2, \quad h_3(y) = y_1.$$

Рассмотрим точку $y^0 = (0, 0)$. Очевидно, что функция $h_1(y)$ непрерывно дифференцируема в точке y^0 и ее окрестности, но не является дважды непрерывно дифференцируемой в этой точке. Нетрудно видеть, что $\Gamma_C(y^0) = \{(0, 0)\}$, $I^a(y^0) = \{1, 2\}$. Далее,

$$\text{rank}\{\nabla h_i(y), \quad i \in I_0 \cup I^a(y^0)\} = \text{rank}\{\nabla h_i(y), \quad i = 1, 2, 3\} = 2,$$

т. е. условие RMFCQ выполнено. Условие R -регулярности также выполняется в силу теоремы 1.

Отметим, что выполнение условия R -регулярности в данном примере можно получить, не привлекая теорему 1. В частности, оно вытекает из условия RCRCQ, которое имеет место в точке y^0 , и теоремы 4 [4].

Отметим, что, как это следует из теоремы ниже, условия регулярности *гарантируют качество ограничений*, дающих описание множества допустимых точек, а не свойства самого этого множества.

Т е о р е м а 2. Пусть условие регулярности RMFCQ выполнено в $y^0 \in C$. Тогда существует окрестность $V(y^0)$ такая, что множество $C \cap V(y^0)$ может быть записано с помощью ограничений, для которых в точке y^0 выполняется условие Мангасаряна – Фромовица.

Доказательство получается применением леммы 4 и теоремы о функциональной зависимости системы функций [15].

Литература

1. Mangasarian O. L., Fromovitz S. // J. Math. Analysis and Appl. 1967. Vol. 17. P. 37–47.
2. Janin R. // Mathematical Programming Study. 1984. Vol. 21. P. 110–126.
3. Minchenko L., Stakhovski S. // Optimization. 2011. Vol. 60, N 4. P. 429–440.
4. Minchenko L., Stakhovski S. // SIAM J. Optimiz. 2011. Vol. 21, N 1. P. 314–332.
5. Qi L., Wei Z. // SIAM J. Optimiz. 2000. Vol. 10. P. 963–981.
6. Andreani R., Martinez J. M., Schuverdt M. L. // J. Optimiz. Theory and Appl. 2005. Vol. 125. P. 473–485.
7. Andreani R., Haeser G., Schuverdt M. L., Silva P. J. S. // Mathematical Programming. Ser. A. 2012. Vol. 135. P. 255–273.
8. Минченко Л. И., Стаховский С. М. // Докл. БГУИР. 2010. № 8. С. 104–109.
9. Andreani R., Haeser G., Schuverdt M. L., Silva P. J. S. // SIAM J. Optimiz. 2012. Vol. 22, N 3. P. 1109–1135.
10. Minchenko L., Tarakanov A. // J. Optimiz. Theory and Appl. 2011. Vol. 148. P. 571–579.
11. Bosch P., Jourani A., Henrion R. // Applied Mathematics and Appl. 2004. Vol. 50. P. 161–181.
12. Henrion R., Jourani A., Outrata J. // SIAM J. Optimiz. 2002. Vol. 13. P. 603–618.
13. Рокафеллар П. Т. Выпуклый анализ. М., 1971.
14. Гороховик В. В. Конечномерные задачи оптимизации. Минск, 2007.
15. Зорич В. А. Математический анализ. М., 1981. Ч. 1.

A. E. LESCHOV, L. I. MINCHENKO

WEAKLY REGULAR MATHEMATICAL PROGRAMMING PROBLEMS

Summary

In this article nonlinear programming problems is considered under the relaxed Mangasarian-Fromovitz constraint qualification. We prove that the relaxed Mangasarian-Fromovitz constraint qualification implies the local error bound property without additional assumptions for constraints.

УДК 517.514

В. С. МУХА

МНОГОМЕРНО-МАТРИЧНЫЙ ЛИНЕЙНЫЙ РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ: РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И СВОЙСТВА ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

(Поступила в редакцию 10.04.2014)

Введение. В настоящее время достаточно хорошо разработана теория множественного (векторно-скалярного) регрессионного анализа, когда регрессия является скалярной функцией векторного аргумента [1, 2]. Теория многомерного (например, векторно-векторного) регрессионного анализа выглядит беднее. В работе [3] дана постановка задачи регрессионного анализа в условиях многомерно-матричных переменных и полиномиальной регрессии, получена система уравнений для отыскания оценок параметров многомерно-матричной эмпирической регрессии, найдены выражения оценок параметров линейной и квадратичной регрессии. Вместе с тем остаются не изученными распределения и свойства оценок параметров многомерно-матричной регрессии, что ограничивает возможности ее практического применения. В данной статье делается попытка устранить указанный пробел для линейной многомерно-матричной регрессии. Применяются обозначения работ [4, 5]. Обозначения $(0,0)$ -свернутого умножения матриц и $(0,0)$ -свернутой степени матрицы в случаях, не приводящих к усложнению восприятия, опускаются.

1. Оценки параметров полиномиальной многомерно-матричной регрессии. Рассмотрим некоторый объект в виде черного ящика с q -мерно-матричной входной переменной $x = (x_j)$, $j = (j_1, j_2, \dots, j_q)$, p -мерно-матричной выходной переменной $\eta = (\eta_i)$, $i = (i_1, i_2, \dots, i_p)$, индексы которых пробегают следующие множества значений: $j_1 = \overline{1, m_1, \dots}$, $j_q = \overline{1, m_q}$, $i_1 = \overline{1, n_1, \dots}$, $i_p = \overline{1, n_p}$. Предположим, что выходная переменная η имеет стохастическую зависимость от входной переменной x , так что существует неизвестная нам условная плотность вероятности $f(\eta|x)$. Функцию регрессии η на x обозначим $y = \varphi(x)$ и предположим, что плотность вероятности $f(\eta|x)$ можно представить в виде

$$\eta = \varphi(x) + \xi,$$

где $\xi = (\xi_i)$, $i = (i_1, i_2, \dots, i_p)$, – p -мерная случайная матрица с нулевым математическим ожиданием. Пусть для некоторых значений $x_1 = (x_{j_1,1})$, $x_2 = (x_{j_2,2})$, ..., $x_n = (x_{j_n,n})$ входной переменной x получены значения $y_{o,1} = (y_{o,i,1})$, $y_{o,2} = (y_{o,i,2})$, ..., $y_{o,n} = (y_{o,i,n})$ выходной переменной η в виде

$$y_{o,\mu} = \varphi(x_\mu) + z_\mu, \mu = \overline{1, n}, \quad (1)$$

где $z_\mu = (z_{i,\mu})$ – значения случайной матрицы $\xi = (\xi_i)$, которые назовем ошибками измерений, и требуется по измерениям $(x_1, y_{o,1})$, $(x_2, y_{o,2})$, ..., $(x_n, y_{o,n})$ получить математическую модель объекта в виде эмпирической функции регрессии $\hat{y} = \hat{\varphi}(x)$.

Предположим, что гипотетическая функция регрессии $y = \varphi(x)$ представляет собой полином степени m переменной x ,

$$y = \varphi(x) = \sum_{k=0}^m {}^{0,kq} C_{(p,kq)} x^k = \sum_{k=0}^m {}^{0,kq} (x^k C_{(kq,p)}), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (2)$$

где $C_{(p,kq)}$ – $(p + kq)$ -мерные матрицы коэффициентов,

$$C_{(p,kq)} = (c_{i,j_1, \dots, j_k}) = (c_{i, \vec{j}_k}), \quad i = (i_1, i_2, \dots, i_p), \quad \vec{j}_k = (j_1, j_2, \dots, j_k),$$

симметричные относительно q -мультииндексов j_1, j_2, \dots, j_k и удовлетворяющие условиям

$$C_{(p,kq)} = (C_{(kq,p)})^{H_{p+kq,kq}}, \quad C_{(kq,p)} = (C_{(p,kq)})^{B_{p+kq,kq}}.$$

Здесь $H_{p+kq,kq}$ и $B_{p+kq,kq}$ – подстановки транспонирования типа «назад» и «вперед» соответственно [4]. Подстановка (2) в (1) дает нам математическую модель измерений в виде

$$y_{o,\mu} = \sum_{k=0}^m {}^{0,kq} C_{(p,kq)} x_{\mu}^k + z_{\mu} = \sum_{k=0}^m {}^{0,kq} (x_{\mu}^k C_{(kq,p)}) + z_{\mu}, \quad \mu = \overline{1, n}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

В предположениях модели измерений (3) требуется по измерениям $(x_1, y_{o,1}), (x_2, y_{o,2}), \dots, (x_n, y_{o,n})$ получить оценки $\widehat{C}_{(p,0)}, \widehat{C}_{(p,q)}, \dots, \widehat{C}_{(p,mq)}$ неизвестных параметров $C_{(p,0)}, C_{(p,q)}, \dots, C_{(p,mq)}$ методом наименьших квадратов:

$$f = \sum_{\mu=1}^n {}^{0,p} (z_{\mu} z_{\mu}) \rightarrow \min_{C_{(p,0)}, C_{(p,q)}, \dots, C_{(p,mq)}},$$

где

$$z_{\mu} = (z_{i,\mu}) = y_{o,\mu} - \sum_{k=0}^m {}^{0,kq} C_{(p,kq)} x_{\mu}^k = y_{o,\mu} - \sum_{k=0}^m {}^{0,kq} (x_{\mu}^k C_{(kq,p)});$$

$$\mu = \overline{1, n}, \quad i = (i_1, i_2, \dots, i_p).$$

Оценки параметров $C_{(p,0)}, C_{(p,q)}, \dots, C_{(p,mq)}$ определяются как решение следующей системы уравнений [3]:

$$\sum_{k=0}^m {}^{0,kq} (C_{(p,kq)} s_{x^{k+\lambda}}) = s_{yx^{\lambda}}, \quad \lambda = \overline{0, m}, \quad (4)$$

где

$$s_{yx^{\lambda}} = \frac{1}{n} \sum_{\mu=1}^n y_{o,\mu} x_{\mu}^{\lambda}, \quad \lambda = \overline{0, m};$$

$$s_{x^{k+\lambda}} = \frac{1}{n} \sum_{\mu=1}^n x_{\mu}^k x_{\mu}^{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{\mu=1}^n x_{\mu}^{k+\lambda}, \quad s_{x^{\lambda}} = \frac{1}{n} \sum_{\mu=1}^n x_{\mu}^{\lambda}, \quad \lambda = \overline{0, m}.$$

Данную задачу целесообразно модифицировать по сравнению с работой [3]. Для этого будем решать систему уравнений (4) методом исключения Гаусса. При этом оценка $\widehat{C}_{(p,0q)}$ определяется на последнем шаге обратного хода метода Гаусса, т. е. из первого уравнения системы (4), и имеет вид

$$\widehat{C}_{(p,0q)} = s_y - \sum_{k=1}^m {}^{0,kq} (\widehat{C}_{(p,kq)} s_{x^k}). \quad (5)$$

Представляя эмпирическую функцию регрессии в виде

$$\hat{y} = \hat{\varphi}(x) = \hat{C}_{(p,0q)} + \sum_{k=1}^m {}^{0,kq}(\hat{C}_{(p,kq)}x^k) = \sum_{k=1}^m {}^{0,kq}(x^k \hat{C}_{(kq,p)}) + \hat{C}_{(0q,p)}, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

и подставляя сюда выражение (5) для $\hat{C}_{(p,0q)}$, получим для эмпирической функции регрессии выражение

$$\hat{y} = \hat{C}_{(p,0q)} + \sum_{k=1}^m {}^{0,kq}(\hat{C}_{(p,kq)}(x^k - s_{x^k})) = \sum_{k=1}^m {}^{0,kq}((x^k - s_{x^k})\hat{C}_{(kq,p)}) + \hat{C}_{(0q,p)},$$

где $\hat{C}_{(p,0q)}$ отличается от (5) и имеет вид

$$\hat{C}_{(p,0q)} = s_y = \frac{1}{n} \sum_{\mu=1}^n y_{o,\mu}. \quad (6)$$

В связи с этим мы можем изначально вместо гипотетической функции регрессии (2) выбрать функцию вида

$$y = \sum_{k=0}^m {}^{0,kq}(C_{(p,kq)}\tilde{x}^k) = \sum_{k=0}^m {}^{0,kq}(\tilde{x}^k C_{(kq,p)}),$$

где $\tilde{x}^k = x^k - s_{x^k}$, и вместо модели измерений (3) рассматривать модель

$$y_{o,\mu} = \sum_{k=0}^m {}^{0,kq}(C_{(p,kq)}\tilde{x}_{\mu}^k) + z_{\mu} = \sum_{k=0}^m {}^{0,kq}(\tilde{x}_{\mu}^k C_{(kq,p)}) + z_{\mu}, \quad \mu = \overline{0, n}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

Оценки параметров модели (7) будут определяться системой уравнений

$$\sum_{k=0}^m {}^{0,kq}(C_{(p,kq)}s_{\tilde{x}^{k+\lambda}}) = s_{y\tilde{x}^{\lambda}}, \quad \lambda = \overline{0, m}; \quad (8)$$

где

$$s_{y\tilde{x}^{\lambda}} = \frac{1}{n} \sum_{\mu=1}^n y_{o,\mu} \tilde{x}_{\mu}^{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{\mu=1}^n y_{o,\mu} (x_{\mu}^{\lambda} - s_{x^{\lambda}}) = s_{yx^{\lambda}} - s_y s_{x^{\lambda}}, \quad \lambda = \overline{0, m},$$

$$s_{\tilde{x}^{k+\lambda}} = \frac{1}{n} \sum_{\mu=1}^n \tilde{x}_{\mu}^k \tilde{x}_{\mu}^{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{\mu=1}^n (x_{\mu}^k - s_{x^k})(x_{\mu}^{\lambda} - s_{x^{\lambda}}) = s_{x^{k+\lambda}} - s_{x^k} s_{x^{\lambda}}, \quad k, \lambda = \overline{0, m}.$$

Анализ последнего выражения показывает, что матрицы $s_{\tilde{x}^{k+\lambda}}$ удовлетворяют условию

$$s_{\tilde{x}^{k+\lambda}} = \begin{cases} 1, & k = 0, \lambda = 0; \\ 0, & k = 0, \lambda \neq 0; \\ 0 & k \neq 0, \lambda = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Это значит, что первое уравнение системы уравнений (8) имеет вид $C_{(p,0q)} = s_y$ и дает оценку (6), а первый столбец остальных уравнений равен нулю. В таком случае оценки параметров $C_{(p,kq)}$ модели измерений (7) при $k > 0$ определяются из системы уравнений

$$\sum_{k=1}^m {}^{0,kq}(C_{(p,kq)}s_{\tilde{x}^{k+\lambda}}) = s_{y\tilde{x}^{\lambda}}, \quad \lambda = \overline{1, m}. \quad (10)$$

В данной работе мы будем исходить из модели измерений (7) и системы уравнений (10) для ее параметров с учетом оценки (6).

2. Линейная многомерно-матричная регрессия. Оценки параметров, их распределения и свойства. Ограничимся в модели измерений (7) двумя слагаемыми, т. е. будем рассматривать модель измерений вида

$$y_{o,\mu} = C_{(p,0q)} + {}^{0,q}(C_{(p,q)}\tilde{x}_\mu) + z_\mu = C_{(0q,p)} + {}^{0,q}(\tilde{x}_\mu C_{(q,p)}) + z_\mu, \mu = \overline{1, n}, \quad (11)$$

где $\tilde{x}_\mu = x_\mu - s_x$, $C_{(p,0q)} = C_{(0q,p)}$, $C_{(q,p)} = (C_{(p,q)})^{B^{p+q,q}}$. Гипотетическая функция регрессии в модели измерений (11) имеет вид

$$y = C_{(p,0q)} + {}^{0,q}(C_{(p,q)}\tilde{x}_\mu) = C_{(0q,p)} + {}^{0,q}(\tilde{x}_\mu C_{(q,p)}). \quad (12)$$

Система уравнений (10) для модели измерений (11) состоит из одного уравнения

$${}^{0,q}(C_{(p,q)}s_{\tilde{x}^2}) = s_{y\tilde{x}},$$

из которого следует оценка $\hat{C}_{(p,q)}$ параметра $C_{(p,q)}$:

$$\hat{C}_{(p,q)} = {}^{0,q}(s_{y\tilde{x}}(s_{\tilde{x}^2})^{-1}); \quad (13)$$

где

$$s_{y\tilde{x}} = \frac{1}{n} \sum_{\mu=1}^n y_{o,\mu} \tilde{x}_\mu, \quad s_{\tilde{x}^2} = s_{\tilde{x}^2+1} = \frac{1}{n} \sum_{\mu=1}^n \tilde{x}_\mu^2, \quad (14)$$

и $(s_{\tilde{x}^2})^{-1}$ – матрица, $(0,q)$ -обратная к матрице $s_{\tilde{x}^2}$. Оценка параметра $C_{(p,0q)}$ имеет вид (6).

Относительно оценок параметров линейной модели (11) справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 1. Если матрицы ошибок измерений z_μ в модели измерений (11) имеют математическое ожидание $E(z_\mu) = 0$, дисперсионную матрицу $D(z_\mu) = D(\xi) = \sigma^2 E(0, p)$, где $E(0, p)$ – $(0, p)$ -единичная $(n_1 \times \dots \times n_p \times n_1 \times \dots \times n_p)$ -матрица, и независимы по μ , то математические ожидания оценок $\hat{C}_{(p,q)}$ и $\hat{C}_{(p,0q)}$ определяются выражениями

$$E(\hat{C}_{(p,q)}) = C_{(p,q)}; \quad (15)$$

$$E(\hat{C}_{(p,0q)}) = C_{(p,0q)}, \quad (16)$$

а их ковариационные и дисперсионные матрицы – выражениями

$$\text{cov}(\hat{C}_{(q,p)}, \hat{C}_{(p,q)}) = \frac{\sigma^2}{n} D^{(2)}, \quad D^{(2)} = (d_{j,i,i',j'}^{(2)}) = \begin{cases} (s_{\tilde{x}^2})^{-1}, & i = i'; \\ 0 & \text{иначе;} \end{cases} \quad (17)$$

$$D(\hat{C}_{(p,q)}) = \frac{\sigma^2}{n} D^{(1)}, \quad D^{(1)} = (d_{i,j,i',j'}^{(1)}) = (D^{(2)})^{(H^{p+q,q} E^{p+q})}; \quad (18)$$

$$D(\hat{C}_{(p,0q)}) = \text{cov}(\hat{C}_{(p,0q)}, \hat{C}_{(p,0q)}) = D^{(0)} = (d_{i,i'}^{(0)}) = \frac{\sigma^2}{n} E(0, p); \quad (19)$$

$$\text{cov}(\hat{C}_{(0q,p)}, \hat{C}_{(p,q)}) = 0; \quad (20)$$

$$i = (i_1, i_2, \dots, i_p), \quad i' = (i'_1, i'_2, \dots, i'_p), \quad j = (j_1, j_2, \dots, j_q), \quad j' = (j'_1, j'_2, \dots, j'_q).$$

Если, кроме того, ошибки измерений z_μ нормально распределены, то оценки $\hat{C}_{(p,q)}$, $\hat{C}_{(p,0q)}$ также нормально распределены с математическими ожиданиями (15), (16) и дисперсионными матрицами (18), (19) соответственно.

Доказательство. Начнем с доказательства равенства (15). Подставляя (14) в (13), получим

$$\widehat{C}_{(p,q)} = {}^{0,q}(s_{y\tilde{x}}(s_{\tilde{x}^2})^{-1}) = {}^{0,q}\left(\frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^n (y_{o,\mu}\tilde{x}_\mu)(s_{\tilde{x}^2})^{-1}\right). \quad (21)$$

Подставляя теперь $y_{o,\mu}$ (11) в (21), будем иметь

$$\begin{aligned} \widehat{C}_{(p,q)} &= {}^{0,q}\left(\frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^n {}^{0,0}\left(\left(C_{(p,0q)} + {}^{0,q}(C_{(p,q)}\tilde{x}_\mu) + z_\mu\right)\tilde{x}_\mu\right)(s_{\tilde{x}^2})^{-1}\right) = \\ &= {}^{0,q}\left({}^{0,0}(C_{(p,0q)}s_{\tilde{x}})(s_{\tilde{x}^2})^{-1}\right) + {}^{0,q}\left(C_{(p,q)} {}^{0,q}(s_{\tilde{x}^2}(s_{\tilde{x}^2})^{-1})\right) + {}^{0,q}(s_{z\tilde{x}}(s_{\tilde{x}^2})^{-1}), \end{aligned}$$

где

$$s_{z\tilde{x}} = \frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^n (z_\mu\tilde{x}_\mu).$$

Учитывая, что, в соответствии с (9), $s_{\tilde{x}} = 0$, получим

$$\widehat{C}_{(p,q)} = C_{(p,q)} + {}^{0,q}(s_{z\tilde{x}}(s_{\tilde{x}^2})^{-1}). \quad (22)$$

Взяв математическое ожидание от левой и правой частей данного равенства, будем иметь $E(\widehat{C}_{(p,q)}) = C_{(p,q)}$ в силу того, что $E(z_\mu) = 0$, $E(s_{z\tilde{x}}) = 0$. Равенство (15) доказано.

На основании выражений (22) и (15) получим выражение центрированной оценки:

$$\overset{\circ}{\widehat{C}}_{(p,q)} = \widehat{C}_{(p,q)} - E(\widehat{C}_{(p,q)}) = {}^{0,q}(s_{z\tilde{x}}(s_{\tilde{x}^2})^{-1}). \quad (23)$$

Для доказательства равенства (16) рассмотрим оценку $\widehat{C}_{(p,0q)}$ (6), подставив в нее $y_{o,\mu}$ из (11). Получим

$$\widehat{C}_{(p,0q)} = \frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^n y_{o,\mu} = \frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^n (C_{(p,0q)} + {}^{0,q}(C_{(p,q)}\tilde{x}_\mu) + z_\mu) = C_{(p,0q)} + {}^{0,q}(C_{(p,q)}s_{\tilde{x}}) + s_z,$$

где $s_z = \frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^n z_\mu$. В силу условия (9) и того, что $E(s_z) = 0$, будем иметь

$$\widehat{C}_{(p,0q)} = C_{(p,0q)} + s_z, \quad E(\widehat{C}_{(p,0q)}) = C_{(p,0q)}$$

Равенство (16) доказано.

Из последних двух равенств следует выражение центрированной оценки:

$$\overset{\circ}{\widehat{C}}_{(p,0q)} = \widehat{C}_{(p,0q)} - E(\widehat{C}_{(p,0q)}) = s_z. \quad (24)$$

Для ковариационной матрицы оценки $\widehat{C}_{(p,q)}$ с учетом выражения (23) получим:

$$\begin{aligned} \text{cov}(\widehat{C}_{(q,p)}, \widehat{C}_{(p,q)}) &= E({}^{0,0}(\overset{\circ}{\widehat{C}}_{(q,p)} \overset{\circ}{\widehat{C}}_{(p,q)})) = E({}^{0,0}({}^{0,q}((s_{\tilde{x}^2})^{-1}s_{z\tilde{x}}){}^{0,q}(s_{z\tilde{x}}(s_{\tilde{x}^2})^{-1}))) = \\ &= {}^{0,q}((s_{\tilde{x}^2})^{-1} {}^{0,q}(E({}^{0,0}(s_{z\tilde{x}}s_{z\tilde{x}}))(s_{\tilde{x}^2})^{-1})). \end{aligned} \quad (25)$$

Найдем $E({}^{0,0}(s_{z\tilde{x}}s_{z\tilde{x}}))$.

$$E({}^{0,0}(s_{z\tilde{x}}s_{z\tilde{x}})) = E\left({}^{0,0}\left(\frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^n \tilde{x}_\mu z_\mu \frac{1}{n}\sum_{l=1}^n z_l \tilde{x}_l\right)\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{\mu=1}^n \sum_{l=1}^n {}^{0,0}\left(\tilde{x}_\mu {}^{0,0}\left(E({}^{0,0}(z_\mu z_l))\right)\tilde{x}_l\right).$$

В силу независимости z_μ по μ имеем $E^{(0,0)}(z_\mu z_l) = 0$ при $\mu \neq l$ и $E^{(0,0)}(z_l z_l) = D(\xi)$. Тогда

$$E^{(0,0)}(s_{\tilde{z}} s_{\tilde{z}}) = \frac{1}{n^2} \sum_{\mu=1}^n {}^{0,0}(\tilde{x}_\mu {}^{0,0}(D(\xi)\tilde{x}_\mu)) = \frac{\sigma^2}{n^2} \sum_{\mu=1}^n {}^{0,0}(\tilde{x}_\mu {}^{0,0}(E(0,p)\tilde{x}_\mu)) = \frac{\sigma^2}{n} D^*,$$

где D^* – $(q+2p+q)$ -мерная диагональная относительно внутренних p -мультииндексов матрица с диагональными элементами $s_{\tilde{x}^2}$. Подставляя это выражение в (25), получим

$$\text{cov}(\widehat{C}_{(q,p)}, \widehat{C}_{(p,q)}) = \frac{\sigma^2}{n} {}^{0,q}((s_{\tilde{x}^2})^{-1}) {}^{0,q}(D^*(s_{\tilde{x}^2})^{-1}) = \frac{\sigma^2}{n} D^{(2)},$$

где $D^{(2)}$ – $(q+2p+q)$ -мерная диагональная относительно внутренних p -мультииндексов матрица с диагональными элементами $(s_{\tilde{x}^2})^{-1}$. Утверждение (17) доказано.

Далее, поскольку $C_{(q,p)} = (C_{(p,q)})^{B_{p+q,q}}$, $(C_{(q,p)})^{H_{p+q,q}} = C_{(p,q)}$, то

$$D(\widehat{C}_{(p,q)}) = E(\overset{\circ}{\widehat{C}}_{(p,q)} \overset{\circ}{\widehat{C}}_{(p,q)}) = E\left(\overset{\circ}{\widehat{C}}_{(q,p)} \overset{\circ}{\widehat{C}}_{(p,q)}\right)^{(H_{p+q,q}, E_{p+q})} = \frac{\sigma^2}{n} (D^{(2)})^{(H_{p+q,q}, E_{p+q})},$$

т. е. выполняется утверждение (18).

Для доказательства утверждения (19) воспользуемся выражением (24):

$$E(\overset{\circ}{\widehat{C}}_{(0q,p)} \overset{\circ}{\widehat{C}}_{(p,0q)}) = E(s_z s_z) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{\mu=1}^n z_\mu \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n z_l\right) = E\left(\frac{1}{n^2} \sum_{\mu=1}^n \sum_{l=1}^n (z_\mu z_l)\right) = \frac{1}{n} D(\xi) = \frac{\sigma^2}{n} E(0,p).$$

Утверждение (20) доказывается на основе равенств (23), (24):

$$\begin{aligned} \text{cov}(\widehat{C}_{(0q,p)}, \widehat{C}_{(p,q)}) &= E(\overset{\circ}{\widehat{C}}_{(0q,p)} \overset{\circ}{\widehat{C}}_{(p,q)}) = E(s_z {}^{0,q}(s_{\tilde{z}}(s_{\tilde{x}^2})^{-1})) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{\mu=1}^n z_\mu {}^{0,q}\left(\left(\frac{1}{n} \sum_{l=1}^n z_l \tilde{x}_l\right)(s_{\tilde{x}^2})^{-1}\right)\right) = \\ &= E\left({}^{0,q}\left(\left(\frac{1}{n^2} \sum_{\mu=1}^n \sum_{l=1}^n z_\mu z_l \tilde{x}_l\right)(s_{\tilde{x}^2})^{-1}\right)\right) = {}^{0,q}\left(\left(\frac{\sigma^2}{n^2} \sum_{l=1}^n E(0,p)\tilde{x}_l\right)(s_{\tilde{x}^2})^{-1}\right) = {}^{0,q}\left(\left(\frac{\sigma^2}{n} E(0,p)s_{\tilde{x}}\right)(s_{\tilde{x}^2})^{-1}\right) = 0 \end{aligned}$$

в силу условия (9).

Нормальность распределений оценок $\widehat{C}_{(p,q)}$, $\widehat{C}_{(p,0q)}$ следует из того, что они являются линейными функциями нормально распределенных случайных матриц $s_{\tilde{x}}$ и z_μ . Теорема 1 доказана.

В задачах регрессионного анализа дисперсия ошибок измерений σ^2 чаще всего неизвестна, и по результатам измерений требуется получить ее оценку $\hat{\sigma}^2$. Обратимся к вопросам получения этой оценки и анализа ее свойств.

В качестве оценки \widehat{D}_ξ дисперсионной матрицы $D_\xi = D(\xi)$ естественно использовать выражение

$$\widehat{D}_\xi = \frac{1}{n} \sum_{\mu=1}^n {}^{0,0}(y_{o,\mu} - \hat{y}_\mu)^2, \quad (26)$$

где $y_{o,\mu} = C_{(p,0q)} + {}^{0,q}(C_{(p,q)}\tilde{x}_\mu) + z_\mu$, $\hat{y}_\mu = \widehat{C}_{(p,0q)} + {}^{0,q}(\widehat{C}_{(p,q)}\tilde{x}_\mu)$. Поскольку $D(\xi) = \sigma^2 E(0,p)$,

$\text{tr}D(\xi) = \sigma^2 \text{tr}E(0,p)$, $\text{tr}E(0,p) = \prod_{i=1}^p n_i$, то оценкой параметра σ^2 может служить статистика

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n \cdot \text{tr}E(0, p)} \text{tr} \left(\sum_{\mu=1}^n (y_{o,\mu} - \hat{y}_\mu)^2 \right). \quad (27)$$

Т е о р е м а 2. В условиях теоремы 1 (кроме условия нормальности ошибок измерений) оценка $\hat{\sigma}^2$ (27) параметра σ^2 является асимптотически несмещенной, а оценка

$$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{n\hat{\sigma}^2}{n-1-\text{tr}(E(0, q))} = \frac{1}{\text{tr}E(0, p)(n-1-\text{tr}E(0, q))} \text{tr} \left(\sum_{\mu=1}^n {}^{0,0} (y_{o,\mu} - \hat{y}_\mu)^2 \right) \quad (28)$$

– несмещенной. Если, кроме того, ошибки измерений z_μ распределены по нормальному закону, то статистика

$$v = \frac{n \text{tr}E(0, p) \hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}^2} = \frac{n \text{tr}E(0, p)(n-1-\text{tr}E(0, q)) \hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma}^2} \quad (29)$$

имеет распределение хи-квадрат с $\text{tr}E(0, p)(n-1-\text{tr}E(0, q))$ степенями свободы, где $\text{tr}E(0, p) = \prod_{i=1}^p n_i$, $\text{tr}E(0, q) = \prod_{j=1}^q m_j$. Оценки $\hat{\sigma}^2$ из (27), $\hat{C}_{(p,0q)}$ из (6) и $\hat{C}_{(p,q)}$ из (13) попарно независимы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вычитая и прибавляя в скобках в (26) $E(y_{o,\mu}) = C_{(p,0q)} + {}^{0,q} (C_{(p,q)} \tilde{x}_\mu)$, получим

$$\begin{aligned} \hat{D}(\xi) &= \frac{1}{n} \sum_{\mu=1}^n {}^{0,0} ((y_{o,\mu} - E(y_{o,\mu})) - (\hat{y}_\mu - E(y_{o,\mu})))^2 = \frac{1}{n} \sum_{\mu=1}^n {}^{0,0} (z_\mu - \hat{C}_{(p,0q)} - {}^{0,q} (\hat{C}_{(p,q)} \tilde{x}_\mu))^2 = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{\mu=1}^n (z_\mu z_\mu) + \frac{1}{n} \sum_{\mu=1}^n (\hat{C}_{(p,0q)} \hat{C}_{(0q,p)}) + \frac{1}{n} \sum_{\mu=1}^n ({}^{0,q} (\hat{C}_{(p,q)} \tilde{x}_\mu) {}^{0,q} (\tilde{x}_\mu \hat{C}_{(q,p)})) - \\ &- \frac{1}{n} \sum_{\mu=1}^n (z_\mu \hat{C}_{(0q,p)}) - \frac{1}{n} \sum_{\mu=1}^n (z_\mu {}^{0,q} (\tilde{x}_\mu \hat{C}_{(q,p)})) - \frac{1}{n} \sum_{\mu=1}^n (\hat{C}_{(p,0q)} z_\mu) - \frac{1}{n} \sum_{\mu=1}^n (\hat{C}_{(p,0q)} {}^{0,q} (\tilde{x}_\mu \hat{C}_{(q,p)})) - \\ &- \frac{1}{n} \sum_{\mu=1}^n ({}^{0,q} (\hat{C}_{(p,q)} \tilde{x}_\mu) z_\mu) - \frac{1}{n} \sum_{\mu=1}^n ({}^{0,q} (\hat{C}_{(p,q)} \tilde{x}_\mu) \hat{C}_{(0q,p)}). \end{aligned} \quad (30)$$

Так как

$$\hat{C}_{(p,0q)} = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n z_l; \quad (31)$$

$$\hat{C}_{(p,q)} = {}^{0,q} (s_{z\tilde{x}} (s_{\tilde{x}z})^{-1}) = \left(\frac{1}{n} \sum_{l=1}^n (z_l \tilde{x}_l) (s_{\tilde{x}z})^{-1} \right);$$

$$\hat{C}_{(q,p)} = {}^{0,q} ((s_{\tilde{x}z})^{-1} s_{z\tilde{x}}) = \left((s_{\tilde{x}z})^{-1} \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n (\tilde{x}_l z_l) \right), \quad (32)$$

то после подстановки этих выражений в (30) и учета выражения (9) получим:

$$\begin{aligned} \hat{D}_\xi &= \frac{1}{n} \sum_{\mu=1}^n \sum_{l=1}^n z_\mu f_{\mu,l} z_\mu - \frac{1}{n} \sum_{\mu=1}^n \sum_{l=1}^n z_\mu g_{\mu,l} z_l - \frac{1}{n} \sum_{\mu=1}^n \sum_{l=1}^n z_\mu h_{\mu,l} z_l = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{\mu=1}^n \sum_{l=1}^n z_\mu f_{\mu,l} z_\mu - \frac{1}{n} \sum_{\mu=1}^n \sum_{l=1}^n z_\mu w_{\mu,l} z_l, \end{aligned} \quad (33)$$

где

$$\begin{aligned} F &= (f_{\mu,l}) = (\delta_{\mu,l}) = E(0,1); \\ G &= (g_{\mu,l}) = \left(\left(\frac{1}{n} \right)_{\mu,l} \right) = \frac{1}{n} E(2,0); \\ H &= (h_{\mu,l}) = \left(\frac{1}{n} {}^{0,q}(\tilde{x}_{\mu} {}^{0,q}((s_{\tilde{x}^2})^{-1} \tilde{x}_l)) \right); \\ W &= (w_{\mu,l}) = (g_{\mu,l} + h_{\mu,l}) = G + H, \end{aligned}$$

$E(0,1)$, $E(2,0)$ – $(0,1)$ - и $(2,0)$ -единичные матрицы n -го порядка соответственно, $\delta_{\mu,l}$ – символ Кронекера. Можно показать, что матрицы F , G и H идемпотентные. Нам понадобятся их ранги. Ранг идемпотентной матрицы равен ее следу [1]. Для матрицы H получим:

$$rH = trH = \sum_{i=1}^n h_{i,i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n ({}^{0,q}(\tilde{x}_i {}^{0,q}((s_{\tilde{x}^2})^{-1} \tilde{x}_i))) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n {}^{0,2q}((s_{\tilde{x}^2})^{-1} \tilde{x}_i^2) = {}^{0,2q}((s_{\tilde{x}^2})^{-1} s_{\tilde{x}^2}).$$

Обозначив $\overset{\circ}{s}_{x^2} = S = (s_{i,j})$, $(s_{x^2})^{-1} = S^{-1} = (s^{i,j})$, i, j – q -мультииндексы, будем иметь

$$rH = trH = {}^{0,2q}((s_{\tilde{x}^2})^{-1} s_{\tilde{x}^2}) = {}^{0,2q}(S^{-1}S) = \sum_{i,j} s^{i,j} s_{i,j} = \sum_i \sum_j s^{i,j} s_{j,i} = \sum_i e_{i,i},$$

где $e_{i,i}$ – диагональные элементы матрицы $E(0,q)$. В итоге получим $rH = trH = trE(0,q)$. Имеем также: $rG = trG = 1$, $rW = trW = tr(G + H) = 1 + trE(0,q)$.

Найдем теперь $tr\hat{D}_{\xi}$. Используя выражение (33), получим

$$tr\hat{D}_{\xi} = \sum_i \frac{1}{n} \sum_{\mu=1}^n \sum_{l=1}^n {}^{0,0}(z_{i,\mu} {}^{0,0}(\delta_{\mu,l} - w_{\mu,l} z_{i,l})) = \sum_i a_i, \quad (34)$$

где

$$a_i = \frac{1}{n} \sum_{\mu=1}^n \sum_{l=1}^n {}^{0,0}(z_{i,\mu} {}^{0,0}(\delta_{\mu,l} - w_{\mu,l} z_{i,l})), \quad (35)$$

и p -мультииндекс $i = (i_1, i_2, \dots, i_p)$ пробегает $trE(0,p)$ значений. Отдельное слагаемое a_i (35) в выражении (34) является квадратичной формой переменных $z_{i,1}, z_{i,2}, \dots, z_{i,n}$ с идемпотентной матрицей $F + W$, имеющей ранг и след $r(F + W) = tr(F + W) = n - 1 - trE(0,q)$. В таком случае случайная величина na_i / σ^2 имеет распределение хи-квадрат с $n - 1 - trE(0,q)$ степенями свободы [1], а случайная величина

$$v = \frac{n tr\hat{D}_{\xi}}{\sigma^2} = \frac{n trE(0,p) \hat{\sigma}^2}{\sigma^2}$$

– распределение хи-квадрат с $trE(0,p)(n - 1 - trE(0,q))$ степенями свободы.

Поскольку математическое ожидание случайной величины v , имеющей распределение хи-квадрат, равно числу степеней свободы этого распределения, то

$$E(v) = E\left(\frac{n \hat{\sigma}^2 trE(0,p)}{\sigma^2} \right) = trE(0,p)(n - 1 - trE(0,q)),$$

откуда

$$E(\hat{\sigma}^2) = \frac{\sigma^2 \text{tr}E(0, p)(n-1 - \text{tr}E(0, q))}{n \text{tr}E(0, p)} = \frac{\sigma^2(n-1 - \text{tr}E(0, q))}{n} = \sigma^2 - \frac{\sigma^2(1 + \text{tr}E(0, q))}{n}.$$

Мы видим, что оценка $\hat{\sigma}^2$ (27) смещенная, но асимптотически несмещенная. Оценка (28), очевидно, является несмещенной.

Докажем утверждения теоремы о независимости. Независимость оценок $\hat{C}_{(p,0q)}$ из (6) и $\hat{C}_{(p,q)}$ из (13) следует из их некоррелированности и нормальности (теорема 1). Далее, на основании (33), (34), (35) случайная величина

$$na_i = \sum_{\mu=1}^n \sum_{l=1}^n {}^{0,0}(z_{i,\mu} {}^{0,0}(\delta_{\mu,l} - g_{\mu,l} - h_{\mu,l})z_{i,l}) = {}^{0,1}(z_i {}^{0,1}((F - G - H)z_i))$$

является квадратичной формой переменных $z_{i,1}, z_{i,2}, \dots, z_{i,n}$ с матрицей $F - G - H$, а элементы

статистик $n\hat{C}_{(p,0q)}$, $n\hat{C}_{(p,q)}$, в соответствии с (31), (32), имеют вид $c_{0,i} = \sum_{\mu=1}^n z_{i,\mu} = {}^{0,1}(B_0 z_i)$,

$c_{1,i} = \sum_{\mu=1}^n {}^{0,0}({}^{0,q}((s_{\tilde{x}^2})^{-1} \tilde{x}_\mu)z_{i,\mu}) = {}^{0,1}(B_1 z_i)$ соответственно и являются линейными формами тех же

переменных $z_{i,1}, z_{i,2}, \dots, z_{i,n}$ с матрицами $B_0 = (b_{0,\mu})$, $B_1 = (b_{1,\mu})$, $b_{0,\mu} = 1$, $b_{1,\mu} = {}^{0,q}((s_{\tilde{x}^2})^{-1} \tilde{x}_\mu)$. Для независимости линейных форм ${}^{0,1}(B_0 z_i)$ и ${}^{0,1}(B_1 z_i)$ от квадратичной формы ${}^{0,1}(z_i {}^{0,1}((F - G - H)z_i))$ достаточно выполнения условий [1]:

$${}^{0,1}(B_0(F - G - H)) = 0, \quad {}^{0,1}(B_1(F - G - H)) = 0. \quad (36)$$

В нашем случае имеем

$$\begin{aligned} {}^{0,1}(B_0 F) &= \left(\sum_{\mu=1}^n b_{0,\mu} f_{\mu,l} \right) = \left(\sum_{\mu=1}^n \delta_{\mu,l} \right) = 1; \\ -{}^{0,1}(B_0 G) &= - \left(\sum_{\mu=1}^n b_{0,\mu} g_{\mu,l} \right) = - \left(\sum_{\mu=1}^n \frac{1}{n} \right) = -1; \\ -{}^{0,1}(B_0 H) &= - \left(\sum_{\mu=1}^n b_{0,\mu} h_{\mu,l} \right) = - \left(\sum_{\mu=1}^n h_{\mu,l} \right) = - \left(\sum_{\mu=1}^n \frac{1}{n} {}^{0,q}(\tilde{x}_\mu {}^{0,q}((s_{\tilde{x}^2})^{-1} \tilde{x}_l)) \right) = 0, \end{aligned}$$

так что первое из равенств (36) выполняется. Далее,

$$\begin{aligned} {}^{0,1}(B_1 F) &= \left(\sum_{\mu=1}^n b_{1,\mu} f_{\mu,l} \right) = \left(\sum_{\mu=1}^n {}^{0,q}((s_{\tilde{x}^2})^{-1} \tilde{x}_\mu) \delta_{\mu,l} \right) = ({}^{0,q}((s_{\tilde{x}^2})^{-1} \tilde{x}_l)); \\ -{}^{0,1}(B_1 G) &= - \left(\sum_{\mu=1}^n b_{1,\mu} g_{\mu,l} \right) = - \left(\sum_{\mu=1}^n {}^{0,q}((s_{\tilde{x}^2})^{-1} \tilde{x}_\mu) \frac{1}{n} \right) = 0; \\ -{}^{0,1}(B_1 H) &= - \left(\sum_{\mu=1}^n b_{1,\mu} h_{\mu,l} \right) = - \left(\sum_{\mu=1}^n {}^{0,q}((s_{\tilde{x}^2})^{-1} \tilde{x}_\mu) \frac{1}{n} {}^{0,q}(\tilde{x}_\mu {}^{0,q}((s_{\tilde{x}^2})^{-1} \tilde{x}_l)) \right) = -({}^{0,q}((s_{\tilde{x}^2})^{-1} \tilde{x}_l)). \end{aligned}$$

Мы видим, что и второе из равенств (36) выполняется. Теорема 2 доказана.

Рассмотрим теперь некоторые статистики, связанные с полученными оценками параметров. Для этого введем более простые обозначения: $C^{(0)} = (c_i^{(0)}) = C_{(p,0q)}$, $\hat{C}^{(0)} = (\hat{c}_i^{(0)}) = \hat{C}_{(p,0q)}$, $C^{(1)} = (c_{i,j}^{(1)}) = C_{(p,q)}$, $\hat{C}^{(1)} = (\hat{c}_{i,j}^{(1)}) = \hat{C}_{(p,q)}$, $i = (i_1, i_2, \dots, i_p)$, $j = (j_1, j_2, \dots, j_q)$. На основании результатов теорем 1 и 2 можно сделать вывод, что статистики

$$u_i^{(0)} = \frac{\hat{c}_i^{(0)} - c_i^{(0)}}{\sigma \sqrt{d_{i,i}^{(0)}}} \sqrt{n}, \quad u_{i,j}^{(1)} = \frac{\hat{c}_{i,j}^{(1)} - c_{i,j}^{(1)}}{\sigma \sqrt{d_{i,j,i,j}^{(1)}}} \sqrt{n}, \quad i = (i_1, i_2, \dots, i_p), \quad j = (j_1, j_2, \dots, j_q), \quad (37)$$

распределены по нормальному закону $N(0,1)$, а статистики

$$t_i^{(0)} = \frac{\hat{c}_i^{(0)} - c_i^{(0)}}{\hat{\sigma}_1 \sqrt{d_{i,i}^{(0)}}}, \quad t_{i,j}^{(1)} = \frac{\hat{c}_{i,j}^{(1)} - c_{i,j}^{(1)}}{\hat{\sigma}_1 \sqrt{d_{i,j,i,j}^{(1)}}}, \quad i = (i_1, i_2, \dots, i_p), \quad j = (j_1, j_2, \dots, j_q), \quad (38)$$

имеют распределение Стьюдента с $trE(0, p)tr(E(0,1) - 1 - E(0, q))$ степенями свободы.

Рассмотрим также статистики, связанные с оценкой отклика

$$\hat{y} = (\hat{y}_i) = \hat{C}_{(p,0q)} + {}^{0,q}(\hat{C}_{(p,q)} \tilde{x}), \quad i = (i_1, i_2, \dots, i_p).$$

Ее математическое ожидание имеет вид

$$E(\hat{y}) = a^{(y)} = (a_i^{(y)}) = C_{(p,0q)} + {}^{0,q}(C_{(p,q)} \tilde{x}), \quad i = (i_1, i_2, \dots, i_p),$$

т. е. оценка \hat{y} несмещенная. Поскольку

$$\hat{y} - E(\hat{y}) = \hat{y} - \hat{C}_{(p,0q)} + {}^{0,q}(\hat{C}_{(p,q)} \tilde{x}),$$

то дисперсионная матрица оценки отклика определяется выражением

$$D(\hat{y}) = E({}^{0,0}(\hat{y})^2) = E({}^{0,0}((\hat{C}_{(0q,p)} + {}^{0,q}(\tilde{x} \hat{C}_{(q,p)}))(\hat{C}_{(p,0q)} + {}^{0,q}(\hat{C}_{(p,q)} \tilde{x}))).$$

С учетом некоррелированности оценок $\hat{C}_{(p,0q)}$ и $\hat{C}_{(p,q)}$ получим

$$D(\hat{y}) = E({}^{0,0}(\hat{C}_{(0q,p)} \hat{C}_{(p,0q)})) + E({}^{0,0}({}^{0,q}(\tilde{x} \hat{C}_{(q,p)}) {}^{0,q}(\hat{C}_{(p,q)} \tilde{x}))),$$

а с учетом (17), (19) будем иметь

$$D(\hat{y}) = \frac{\sigma^2}{n} (E(0, p) + {}^{0,q}(\tilde{x} {}^{0,q}(D^{(2)} \tilde{x}))) = \frac{\sigma^2}{n} D^{(y)} = \frac{\sigma^2}{n} (d_{i,i'}^{(y)}), \quad i = (i_1, i_2, \dots, i_p), \quad i' = (i'_1, i'_2, \dots, i'_p),$$

где $D^{(y)} = (d_{i,i'}^{(y)}) = E(0, p) + {}^{0,q}(\tilde{x} {}^{0,q}(D^{(2)} \tilde{x}))$. В силу линейной зависимости \hat{y} от оценок $\hat{C}_{(p,0q)}$ и $\hat{C}_{(p,q)}$, имеющих нормальные распределения, оценка \hat{y} распределена по нормальному закону со средним значением $a^{(y)} = (a_i^{(y)})$ и дисперсионной матрицей $D^{(y)} = (d_{i,i'}^{(y)})$. Нормированные статистики

$$u_i^{(y)} = \frac{\hat{y}_i - a_i^{(y)}}{\sigma \sqrt{d_{i,i}^{(y)}}} \sqrt{n}, \quad i = (i_1, i_2, \dots, i_p), \quad (39)$$

распределены по нормальному закону $N(0,1)$. В силу независимости $\hat{C}_{(p,0q)}$ и $\hat{C}_{(p,q)}$ от $\hat{\sigma}^2$ статистики \hat{y} и $u_i^{(y)}$ также независимы от $\hat{\sigma}^2$. Тогда статистики

$$t_i^{(y)} = \frac{\hat{y}_i - a_i^{(y)}}{\hat{\sigma}_1 \sqrt{d_{i,i}^{(y)}}}, \quad i = (i_1, i_2, \dots, i_p) \quad (40)$$

имеют распределение Стьюдента с $trE(0, p)(n - 1 - trE(0, q))$ степенями свободы.

Выполним дополнительно k измерений $y_{\partial,1}, y_{\partial,2}, \dots, y_{\partial,k}$ в некоторой точке x . По этим измерениям можно получить независимую оценку $\hat{\sigma}_{\partial,0}^2$ параметра σ^2 , введенного в теореме 1, по формуле

$$\hat{\sigma}_{\partial,0}^2 = \frac{1}{\text{tr}E(0, p)(k-1)} \text{tr} \left(\sum_{\mu=1}^k {}^{0,0} (y_{\partial,\mu} - \hat{y}_{\partial})^2 \right),$$

где

$$\hat{y}_{\partial} = \frac{1}{k} \sum_{\mu=1}^k y_{\partial,\mu}.$$

Можно показать, что оценка $\hat{\sigma}_{\partial,0}^2$ является несмещенной, а статистика

$$w = \frac{(k-1)\text{tr}E(0, p)\hat{\sigma}_{\partial,0}^2}{\sigma^2} \quad (41)$$

имеет распределение хи-квадрат с $(k-1)\text{tr}E(0, p)$ степенями свободы. В силу независимости статистик v и w статистика

$$F = \frac{\hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma}_{\partial,0}^2} \quad (42)$$

имеет распределение Фишера с $\text{tr}E(0, p)(n-1-\text{tr}E(0, q))$, $\text{tr}E(0, p)(k-1)$ степенями свободы.

Заключение. Полученные выше статистики (29), (37), (38)–(41) и их распределения позволяют строить доверительные интервалы и проверять гипотезы для параметров многомерно-матричной линейной эмпирической регрессии, а статистика (42) – проверять гипотезу об адекватности принятой математической модели, аналогично тому, как это делается в классическом множественном регрессионном анализе [1–3].

Следует отметить, что линейная модель регрессии данной статьи имеет иную форму представления по сравнению с классической множественной линейной регрессией. Последняя представляется посредством одного векторного параметра, в то время как линейная регрессия в данной работе представлена посредством двух многомерно-матричных параметров.

Полученные в работе результаты для случая линейной по параметрам и входной переменной x регрессии могут быть применены для нелинейной по входной переменной регрессии. Для этого многомерно-матричную переменную x следует заменить функцией $x = x(v)$ новой входной многомерно-матричной переменной v .

Литература

1. Рао С. Р. Линейные статистические методы и их применение. М., 1968.
2. Вучков И. Н., Бояджиева Л., Солаков Е. Прикладной линейный регрессионный анализ. М., 1987.
3. Муха В. С. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2007. № 1. С. 45–51.
4. Муха В. С. Анализ многомерных данных. Минск, 2004.
5. Соколов Н. П. Введение в теорию многомерных матриц. Киев, 1972.

V. S. MUKHA

MULTIDIMENSIONAL-MATRIX LINEAR REGRESSION ANALYSIS: DISTRIBUTIONS AND PROPERTIES OF THE PARAMETERS

Summary

The distributions and properties of the estimations of the parameters of the multidimensional-matrix linear empirical regression are obtained.

УДК 519.2

Е. Е. ЖУК

СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОТНЕСЕНИЕ МНОГОМЕРНЫХ НАБЛЮДЕНИЙ К КЛАССАМ, ЗАДАНЫМИ ОБУЧАЮЩИМИ ВЫБОРКАМИ

Белорусский государственный университет

(Поступила в редакцию 13.12.2013)

1. Математическая модель и постановка задачи. Пусть в пространстве наблюдений R^N ($N \geq 1$) зафиксировано $L \geq 2$ классов $\{\Omega_i\}_{i \in S}$ ($S = \{1, \dots, L\}$ – множество номеров классов), заданных своими обучающими выборками [1, 2]:

$$X^{(i)} = \{x_t^{(i)}\}_{t=1}^{n_i}, i \in S. \quad (1)$$

Выборка $X^{(i)}$ объема $n_i \geq 1$ образована независимыми в совокупности одинаково распределенными случайными N -векторами-наблюдениями $x_t^{(i)} \in R^N$, $t = \overline{1, n_i}$, имеющими одну и ту же плотность распределения:

$$p_i(x) \geq 0, x \in R^N: \int_{R^N} p_i(x) dx = 1, i \in S. \quad (2)$$

Плотности распределения $\{p_i(\cdot)\}_{i \in S}$ из (2), определяющие классы $\{\Omega_i\}_{i \in S}$, неизвестны. Задача заключается в отнесении вновь поступившего наблюдения $x \in R^N$ к одному из классов $\{\Omega_i\}_{i \in S}$ [3–5]. Причем распределение вероятностей наблюдения x , вообще говоря, не совпадает ни с одним из распределений (2), задающих классы $\{\Omega_i\}_{i \in S}$, и также неизвестно.

В случае известных плотностей $\{p_i(\cdot)\}_{i \in S}$ из (2) для решения поставленной выше задачи в [3] было предложено использовать решающее правило (РП) максимального правдоподобия:

$$d = d(x) = \arg \max_{i \in S} p_i(x), x \in R^N, \quad (3)$$

которое относит наблюдение x к тому классу с номером $d(x) \in S$, появление в котором для него «наиболее правдоподобно» ($p_d(x) \geq p_i(x)$, $i \in S$).

Эффективность РП (3) в [3] было предложено характеризовать риском:

$$r = r(d) = 1 - \min_{i \in I} P^{(i)}, I = \{k : R_k = \min_{j \in S} R_j\}; \quad (4)$$

$$P^{(i)} = P\{d(x) = i\} = \int_{R^N} \prod_{\substack{l \in S \\ l \neq i}} U(p_l(x) - p_i(x)) p(x) dx, i \in S,$$

где $U(z) = \{1, \text{ если } z \geq 0; 0, \text{ если } z < 0\}$ – единичная функция Хэвисайда,

$$p(x) \geq 0, x \in R^N: \int_{R^N} p(x) dx = 1, \quad (5)$$

– плотность распределения вероятностей наблюдения, подлежащего отнесению, а через $\{R_j\}_{j \in S}$ в (4) обозначены межклассовые расстояния [1–5], характеризующие «степень близости» наблюдения x с плотностью (5) к классам $\{\Omega_i\}_{i \in S}$ с плотностями (2). Для определения межклассовых расстояний в работе [5] было предложено использовать направленную дивергенцию Кульбака:

$$R_j = \int_{R^N} \ln \left(\frac{p(x)}{p_j(x)} \right) p(x) dx, \quad j \in S. \quad (6)$$

Риск r из (4), (6) – это максимальная вероятность не отнести при помощи РП (3) наблюдение x к тому классу из $\{\Omega_i\}_{i \in S}$, к которому оно ближе в смысле межклассовых расстояний (6). Чем меньше значение риска r , тем эффективнее решение, принимаемое РП (3).

2. Решающие правила на основе гистограммных оценок плотностей. При неизвестных плотностях $\{p_i(\cdot)\}_{i \in S}$ непосредственно применить РП (3) для решения задачи отнесения не представляется возможным. Воспользуемся в данном случае наличием обучающих выборок (1) и построим РП по подстановочному принципу [1, 2]:

$$\hat{d} = \hat{d}(x) = \arg \max_{i \in S} \hat{p}_i(x), \quad x \in R^N, \quad (7)$$

где $\hat{p}_i(\cdot)$ – статистическая оценка для плотности $p_i(\cdot)$ по выборке $X^{(i)}$ объема n_i ($i \in S$).

Поскольку здесь плотности $\{p_i(\cdot)\}_{i \in S}$, определяющие классы, считаются полностью неизвестными и неизвестен их вид, то в качестве статистических оценок $\{\hat{p}_i(\cdot)\}_{i \in S}$ в подстановочном РП (РПП) (7) будем использовать гистограммные оценки [6, 7], разбив пространство наблюдений R^N на ячейки прямоугольной формы:

$$\hat{p}_i(x) = \frac{1}{n_i \prod_{j=1}^N h_j} \sum_{t=1}^{n_i} I_{\Gamma(x)}(x_t^{(i)}), \quad x \in R^N, \quad i \in S, \quad (8)$$

где $I_A(x) = \{1, \text{если } x \in A; 0, \text{если } x \notin A\}$ – индикатор множества $A \subset R^N$, $\Gamma(x)$ – ячейка, в которую попала точка-наблюдение $x = (\tilde{x}_j)_{j=1}^N \in R^N$:

$$\Gamma(x) = \times_{j=1}^N \left[\left[\frac{\tilde{x}_j}{h_j} \right] h_j, \left(\left[\frac{\tilde{x}_j}{h_j} \right] + 1 \right) h_j \right), \quad (9)$$

$[z]$ – целая часть числа $z \in R$, « \times » – символ декартова произведения, а h_j – коэффициент «размытости» [6, 7] по j -й компоненте N -вектора $x = (\tilde{x}_j)_{j=1}^N$.

Отметим, что все оценки-гистограммы (8) построены по одному и тому же разбиению пространства R^N на ячейки, причем все ячейки (9) имеют один и тот же «объем»: $\mu(\Gamma(x)) = \prod_{j=1}^N h_j$, $\forall x \in R^N$, где $\mu(\cdot)$ – мера Лебега в R^N .

Введем обозначение ($i \in S$, $x \in R^N$):

$$n^{(i)}(x) = \sum_{t=1}^{n_i} I_{\Gamma(x)}(x_t^{(i)}) \geq 0 \quad (10)$$

– число наблюдений из выборки $X^{(i)}$ объема n_i , попавших в ячейку $\Gamma(x)$. Тогда запись оценок (8) упрощается:

$$\hat{p}_i(x) = \frac{n^{(i)}(x)}{n_i \mu(\Gamma(x))}, \quad x \in R^N, \quad i \in S, \quad (11)$$

а ПРП (7) с учетом (11) и того факта, что среди $\{\hat{p}_i(x)\}_{i \in S}$, по построению (11), (10), могут быть совпадающие по значению, примет вид ($x \in R^N$):

$$\hat{d}(x) \in \hat{D}(x), \quad \hat{D}(x) = \left\{ k : \frac{n^{(k)}(x)}{n_k} = \max_{i \in S} \frac{n^{(i)}(x)}{n_i} \right\}. \quad (12)$$

Если среди $\{\hat{p}_i(x)\}_{i \in S}$ нет совпадающих по значению (множество $\hat{D}(x)$ в (12) содержит один элемент: $|\hat{D}(x)| = 1$), то ПРП (12) упрощается и выносит решение относительно x однозначно:

$$\hat{d}(x) = \arg \max_{i \in S} \frac{n^{(i)}(x)}{n_i}. \quad (13)$$

Если вдобавок ко всему объемы выборок из (1) одинаковы: $n_i = n_j$, $i \neq j \in S$, то

$$\hat{d}(x) = \arg \max_{i \in S} n^{(i)}(x), \quad (14)$$

и ПРП (14) имеет простой содержательный смысл: оно относит наблюдение x к тому классу, наблюдений из которого больше в ячейке $\Gamma(x)$.

Отметим также, что возможна ситуация, когда ячейка $\Gamma(x)$ вообще не содержит наблюдений из обучающих выборок (1): $n^{(i)}(x) = 0$, $i \in S$. В этом случае: $|\hat{D}(x)| = L$, и решение «полностью неопределено». Если в (12): $1 < |\hat{D}(x)| \leq L$, $\sum_{i \in S} n^{(i)}(x) \neq 0$, то можно говорить, что наблюдение x «в одинаковой мере» относится к одному из классов с номерами $\hat{D}(x) \subseteq S$.

3. Асимптотическое исследование эффективности. Установим асимптотические свойства ПРП (12) при увеличении объемов обучающих выборок (1): $n_i \rightarrow +\infty$, $i \in S$. Сначала, по аналогии с [6], получим асимптотический результат для оценок плотностей из (8), (9).

Л е м м а. Пусть плотности $\{p_i(x)\}_{i \in S}$ из (2) непрерывны и ограничены ($\forall x \in R^N$), а наблюдения в выборках (1) независимы в совокупности. Тогда в условиях асимптотики:

$$h_j \rightarrow 0, \quad j = \overline{1, N}; \quad n_i \prod_{j=1}^N h_j \rightarrow +\infty, \quad n_i \rightarrow +\infty, \quad i \in S, \quad (15)$$

оценки $\{\hat{p}_i(\cdot)\}_{i \in S}$ из (8), (9) состоятельны по вероятности:

$$\hat{p}_i(x) \xrightarrow{P} p_i(x), \quad n_i \rightarrow +\infty, \quad x \in R^N, \quad i \in S. \quad (16)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем $i \in S$ и $x \in R^N$. Введем в рассмотрение случайные величины ($t = \overline{1, n_i}$):

$$\xi_{t, n_i}^{(i)} = \frac{I_{\Gamma(x)}(x_t^{(i)}) - \gamma^{(i)}(x)}{n_i \prod_{j=1}^N h_j}, \quad (17)$$

где $\gamma^{(i)}(x) = \int_{\Gamma(x)} p_i(y) dy$ – вероятность попадания наблюдений из выборки $X^{(i)} = \{x_t^{(i)}\}_{t=1}^{n_i}$ в ячейку $\Gamma(x)$ из (9) ($\gamma^{(i)}(x) = P\{x_t^{(i)} \in \Gamma(x)\}$).

По аналогии с [6] устанавливаем, что $\{\xi_{t,n_i}^{(i)}\}_{t=1}^{n_i}$ из (17) в условиях леммы удовлетворяют закону больших чисел для серий [6, 8]:

$$\eta_{n_i}^{(i)} = \sum_{t=1}^{n_i} \xi_{t,n_i}^{(i)} \xrightarrow{P} 0, \quad n_i \rightarrow +\infty. \quad (18)$$

Доказательство соотношения (18) полностью копирует аналогичное доказательство из [6] и здесь не приводится.

Далее, преобразовав $\eta_{n_i}^{(i)}$ из (18), имеем:

$$\eta_{n_i}^{(i)} = \hat{p}_i(x) - \frac{\gamma^{(i)}(x)}{\prod_{j=1}^N h_j},$$

где $\hat{p}_i(x)$ – гистограммная оценка (8), (9) плотности $p_i(x)$. По теореме о среднем в асимптотике (15) ($h_j \rightarrow 0, j = \overline{1, N}$) получаем:

$$\frac{\gamma^{(i)}(x)}{\prod_{j=1}^N h_j} = \frac{\int_{\Gamma(x)} p_i(y) dy}{\mu(\Gamma(x))} \rightarrow p_i(x),$$

что, с учетом (18), и доказывает лемму.

Т е о р е м а. Пусть в условиях леммы плотности $\{p_i(x)\}_{i \in S}$ из (2) совпадают между собой по значению разве что на множестве аргумента меры Лебега нуль:

$$\mu\{x : p_i(x) = p_j(x)\} = 0, \quad i \neq j \in S, \quad (19)$$

тогда в условиях асимптотики (15) ($x \in R^N$):

$$\hat{d}(x) \xrightarrow{P} d(x), \quad P\{|\hat{D}(x)| = 1\} \rightarrow 1, \quad (20)$$

где $\hat{d}(x) \in \hat{D}(x)$ – ПРП (12), а $d(x)$ – ПП (3).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся ПРП (12) в виде ($x \in R^N$):

$$\hat{d}(x) \in \hat{D}(x), \quad \hat{D}(x) = \{k : \hat{p}_k(x) = \max_{i \in S} \hat{p}_i(x)\},$$

где $\{\hat{p}_i(x)\}_{i \in S}$ – оценки плотностей из (8), (9). Справедливы очевидные соотношения:

$$\hat{p}_{\hat{d}(x)}(x) = \max_{i \in S} \hat{p}_i(x), \quad \hat{d}(x) \in \hat{D}(x); \quad p_{d(x)}(x) = \max_{j \in S} p_j(x),$$

с учетом которых в асимптотике (15) получаем (использован результат (16) леммы):

$$\left| \hat{p}_{\hat{d}(x)}(x) - p_{d(x)}(x) \right| = \left| \max_{i \in S} \hat{p}_i(x) - \max_{j \in S} p_j(x) \right| \leq \max_{i \in S} |\hat{p}_i(x) - p_i(x)| \xrightarrow{P} 0,$$

откуда устанавливаем, что

$$\hat{p}_{\hat{d}(x)}(x) \xrightarrow{P} p_{d(x)}(x). \quad (21)$$

Справедливость (20) следует из (21), условия (19) на плотности $\{p_i(x)\}_{i \in S}$ и известных теорем непрерывности [7].

Результат (20) теоремы говорит о том, что с ростом объемов $\{n_i\}_{i \in S}$ обучающих выборок (1) решение, выносимое ПРП (12), сходится по вероятности к соответствующему решению РП (3), и эффективность принимаемых ПРП (12) решений в асимптотике (15) можно по-прежнему характеризовать риском (4), (6). Сама асимптотика (15) накладывает ограничения на «скорость» стремления коэффициентов «размытости» $\{h_j\}_{j \in S}$ к нулю с ростом объемов выборок $\{n_i\}_{i \in S}$.

Однако непосредственно воспользоваться риском r из (4), (6) в качестве меры эффективности не представляется возможным, поскольку плотности $\{p_i(\cdot)\}_{i \in S}$ из (2) и плотность $p(\cdot)$ из (5) неизвестны.

4. Статистическое оценивание риска по результатам экспериментов. Пусть имеется выборка $X = \{x_t\}_{t=1}^n$ объема n , составленная из наблюдений $x_t \in R^N$, $t = \overline{1, n}$, относительно которых при помощи ПРП (12) решалась задача отнесения к классам $\{\Omega_i\}_{i \in S}$ на основе обучающих выборок $X^{(i)} = \{x_t^{(i)}\}_{t=1}^{n_i}$, $i \in S$, из (1). И пусть все наблюдения из выборки X имеют одну и ту же плотность (5).

Воспользуемся принятыми ПРП (12) решениями: $\hat{d}(x_t) \in \hat{D}(x_t)$, $t = \overline{1, n}$, и оценим риск r из (4), (6).

Преобразуем межклассовые расстояния $\{R_j\}_{j \in S}$ из (6):

$$R_j = \int_{R^N} \ln(p(x))p(x)dx - \int_{R^N} \ln(p_j(x))p(x)dx = \int_{R^N} \ln(p(x))p(x)dx - E\{\ln(p_j(x_t))\},$$

заменяем математическое ожидание, зависящее от номера класса « j », на его статистическую оценку типа арифметического среднего [2, 7] по выборке $X = \{x_t\}_{t=1}^n$ объема n , а неизвестную плотность $p_j(\cdot)$ – на оценку $\hat{p}_j(\cdot)$ из (11), и для I из (4) получим статистическую оценку:

$$\hat{I} = \arg \max_{j \in S} \frac{1}{n} \sum_{\substack{t=1 \\ n^{(j)}(x_t) \neq 0}}^n \ln \left(\frac{n^{(j)}(x_t)}{n_j} \right) = \arg \max_{j \in S} \sum_{\substack{t=1 \\ n^{(j)}(x_t) \neq 0}}^n \ln \left(\frac{n^{(j)}(x_t)}{n_j} \right). \quad (22)$$

В (22) учтено, что в некоторые ячейки (9) могут не попасть наблюдения из соответствующих классов, а также использован тот факт, что вероятность совпадения по значению непрерывно распределенных случайных величин равна нулю [2, 8].

Далее оценим непосредственно риск r , подставив в (4) вместо I его оценку-число \hat{I} из (22). Но сначала преобразуем (4), считая I одноточечным множеством (числом):

$$r = 1 - P^{(I)} = 1 - P\{d(x_t) = I\} = E\{1 - \delta_{d(x_t) I}\},$$

где $\delta_{k,l} = \{1, \text{ если } k = l; 0, \text{ если } k \neq l\}$ – символ Кронекера, откуда будем иметь следующую оценку типа арифметического среднего:

$$\hat{r} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (1 - I_{\hat{D}(x_t)}(\hat{I})). \quad (23)$$

Оценка риска \hat{r} из (23) на практике имеет простой содержательный смысл, являясь долей решений относительно наблюдений из выборки $X = \{x_t\}_{t=1}^n$ объема n , принимаемых ПРП (12) не в пользу класса с номером \hat{I} из (22), который по результатам проведенного эксперимента считается ближайшим к наблюдениям из X .

Литература

1. Айвазян С. А., Бухштабер В. М., Енюков И. С., Мешалкин Л. Д. Прикладная статистика. Классификация и снижение размерности. М., 1989.

2. Харин Ю. С., Зуев Н. М., Жук Е. Е. Теория вероятностей, математическая и прикладная статистика. Минск, 2011.
3. Жук Е. Е. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2012. № 4. С. 37–41.
4. Жук Е. Е. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2013. № 3. С. 38–42.
5. Жук Е. Е. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2013. № 4. С. 101–106.
6. Жук Е. Е., Храмова Е. В. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физика. Математика. Информатика. 2001. № 2. С. 80–86.
7. Боровков А. А. Математическая статистика. М., 1984.
8. Боровков А. А. Теория вероятностей. М., 1986.

E. E. ZHUK

**STATISTICAL ASSIGNMENT OF MULTIVARIATE OBSERVATIONS
TO THE CLASSES DETERMINED BY TRAINING SAMPLES**

Summary

The problem of statistical assignment of arbitrarily distributed multivariate observations to the classes determined by training samples is considered. The decision rule based on the histogrammic estimators of probability densities is proposed and its efficiency is analytically investigated.

ФІЗІКА

УДК 539.216.2

В. В. ХОРОШКО¹, И. Н. ЦЫРЕЛЬЧУК¹, В. Ф. ГРЕМЕНОК², В. Б. ЗАЛЕССКИЙ³, А. А. ХОДИН³

ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ПОГЛОЩАЮЩЕГО СЛОЯ $\text{Cu}_x\text{In}_x\text{Zn}_{2-2x}\text{Se}_2$ ДЛЯ ТОНКОПЛЕНОЧНЫХ СОЛНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

¹Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

²Научно-практический центр НАН Беларуси по материаловедению

³Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси

(Поступила в редакцию 24.04.2014)

Введение. Прямое преобразование солнечного света признано одним из наиболее перспективных способов использования энергии возобновляемых источников. В год на 1 м² горизонтальной площадки падает около 1200 кВт/ч энергии для центра Беларуси, а для экваториальных районов Земли уровень энергии превышает 2000 кВт/ч [1]. Для прямого преобразования солнечной энергии применяются солнечные элементы (СЭ). Наиболее перспективными СЭ на данный момент являются тонкопленочные солнечные элементы (ТСЭ). КПД промышленных ТСЭ составляет 12–14 % [2], что уступает в КПД производимым кремниевым СЭ, но за счет того, что вся структура ТСЭ по толщине за вычетом подложки составляет 5 мкм, получаемые уже сейчас ТСЭ по стоимостным параметрам ничуть не уступают кремниевым СЭ. При этом, согласно оценкам National Renewable Energy Laboratory и U. S. Photovoltaic Manufacturing Consortium, уже в ближайшее время возможно снижение себестоимости ТСЭ на 30–50 %, в том числе и за счет использования новых материалов в структуре ТСЭ [3]. Одним из таких перспективных материалов является система полупроводниковых твердых растворов $(\text{CuInSe}_2)_x-(2\text{ZnSe})_{1-x}$. Перспективность данной системы $\text{Cu}_x\text{In}_x\text{Zn}_{2-2x}\text{Se}_2$ (CIZS) обусловлена следующими факторами: широкий диапазон ширины запрещенной зоны, регулируемой элементным составом твердого раствора от 1,04 эВ (CuInSe_2) до 2,67 эВ (ZnSe) [4, 5]; высоким значением коэффициента поглощения $\alpha > 10^4\text{см}^{-1}$ в области края фундаментального поглощения, что позволяет выполнять поглощающий слой толщиной всего 1–2 мкм [6]; высокой радиационной стойкостью [7, 8], что увеличивает срок службы ТСЭ по сравнению с кремниевыми СЭ; наличием возможности «исправления» радиационных дефектов путем отжига СЭ при температуре до 500 °С. Применение CIZS дает возможность заменить используемый в поглощающем слое ТСЭ $\text{Cu}(\text{In}_x\text{Ga}_{1-x})\text{Se}_2$ (CIGS) дорогостоящий галлий и уменьшить использование индия. Целью данной работы являлся поиск оптимальных значений основных параметров поглощающего слоя CIZS в ТСЭ.

1. Методика моделирования. Для оптимизации параметров CIZS была использована модель структуры, представленной на рис 1, а. Такая геометрия сейчас является, по сути, «стандартом» при производстве ТСЭ [3]. В качестве подложки служат стеклянные пластины толщиной 1–3 мм. Нижний контакт образует молибден. На него наносится слой CIZS, который поглощает свет и создает фотоэдс. В качестве буферного слоя служит CdS. Структура освещается излучением со стандартным спектром AM1,5 (1000 Вт/м²).

Для моделирования использовалась общепринятая математическая модель СЭ, когда СЭ представляется электрической схемой, состоящей из генератора тока, подключенных параллельно к нему диода и сопротивления утечки R_{sh} (шунтирующего сопротивления), а также последовательно сопротивления R_s [10]. Эквивалентная схема такого СЭ показана на рис. 1, б. Как видно из рис. 1, а, шунтирующие компоненты соответствуют утечке тока по границам зерен пленки CIZS, а также рекомбинации носителей заряда главным образом у тыльной поверхности и на границах зерен.

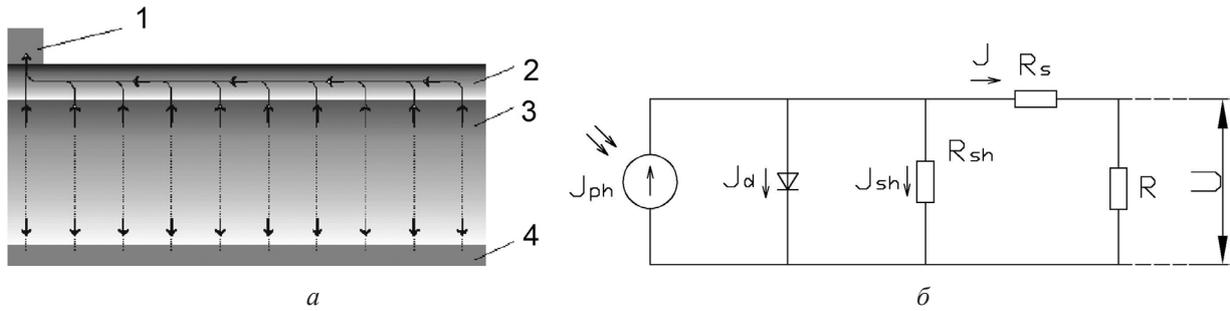


Рис. 1. Схемы ТСЭ: а – структура моделируемого ТСЭ (1 – металлическая гребенка; 2 – оконный слой; 3 – CIZS-слой, 4 – тыльный электрод из молибдена) [3]; б – эквивалентная схема СЭ

Выражение (1) представляет собой общую зависимость плотности тока СЭ от напряжения СЭ [10]:

$$0 = J_{ph} - J_0 \left(\exp \left(\frac{q(U + JR_s)}{m k T} \right) - 1 \right) - \frac{U + JR_s}{R_{sh}} - J, \quad (1)$$

где J_{ph} – плотность фототока; J_0 – плотность тока насыщения; m – показатель идеальности; U – значение напряжения.

Значение U в выражении (1) изменяется от 0 до U_{oc} (напряжение холостого хода), что будет давать значениям плотности тока от J_{sc} (ток короткого замыкания) до 0 соответственно. Наибольший интерес при построении ВАХ ТСЭ представляет точка максимальной мощности. Точка максимальной мощности P_m , при известных U_{oc} и J_{sc} , фактически определяет КПД СЭ. Выражение (2) позволяет вычислить коэффициент заполнения ff , а выражение (3) – получить КПД СЭ при известных P_m , U_{oc} , J_{sc} :

$$ff = \frac{U_m J_m}{U_{oc} J_{sc}}, \quad (2)$$

где U_m , J_m – напряжение и плотность тока в точке максимальной мощности;

$$\eta = \frac{ff U_{oc} J_{sc}}{P}, \quad (3)$$

где η – КПД СЭ; P – мощность излучения, падающая на единицу площади.

Общая выходная вольт-амперная характеристика $J(U)$ получалась путем соответствующего суммирования ВАХ элементарных участков с учетом трех компонент резистивных потерь в целом элементе. Использование выражений (1), (2), (3) позволяет получить зависимости КПД СЭ от температуры, R_{sh} , R_s , ширины запрещенной зоны (E_g).

Освещенность была дискретно задана. Количество падающих фотонов на единицу площади в 1 см^2 за 1 с была задана для длин волн от 0,38 до 1,24 мкм с шагом 0,02 мкм. Был также задан спектр падающего излучения в этом интервале длин волн, близкий к спектру излучения Солнца АМ 1,5. Коэффициенты поглощения были заданы для всех веществ соединения для лучшего соответствия реальным значениям поглощения. Однако спектр поглощения соединения может изменяться с изменением состава вещества, изменения энергии запрещенной зоны. Этот интервал был выбран исходя из того, что CIZS СЭ имеют заметную квантовую эффективность только для диапазона длин волн 0,35–1,2 мкм. Температура для этого случая и для всех остальных расчетов была принята равной 300 К. Были также учтены дефектные состояния донорных и акцепторных уровней, описываемых распределением Гаусса.

Выполнение расчета процессов генерации и рекомбинации носителей требует решения системы уравнений, включающих уравнение Пуассона (4), уравнения непрерывности (5)–(6) и уравнения для плотностей тока (7)–(8):

$$\frac{d}{dx} \left(-\varepsilon(x) \frac{dV}{dx} \right) = q [p(x) - n(x) + Nd^+(x) - Na^-(x)]; \quad (4)$$

$$\frac{d}{dx} J_p = q(G(x) - R(x)); \quad (5)$$

$$\frac{d}{dx} J_n = q(R(x) - G(x)); \quad (6)$$

$$J_p = q\mu_p \left(\frac{dE_{fp}}{dx} \right); \quad (7)$$

$$J_n = q\mu_n n \left(\frac{dE_{fn}}{dx} \right), \quad (8)$$

где x – координата вдоль оси OX ; V – потенциал; ε – диэлектрическая проницаемость вещества; n и p – концентрации свободных электронов и дырок; q – заряд электрона; Nd^+ и Na^- – концентрации ионизированных доноров и акцепторов в веществе; J_p и J_n – плотности дырочного и электронного токов; $R(x)$ – чистая скорость рекомбинации, вытекающая из рекомбинации зона-зона (непосредственная рекомбинация) и рекомбинация типа Шокли – Рида – Холла (непрямая рекомбинация); $G(x)$ – оптическая скорость генерации носителей; μ_n – подвижность электронов; μ_p – подвижность дырок; E_{fp} и E_{fn} – энергия квазиуровней Ферми.

Уравнения (4)–(7) необходимо решить одновременно в каждой точке координаты x . Независимыми переменными в уравнениях являются значения $V(x)$, $E_{fp}(x)$ и $E_{fn}(x)$ или $V(x)$, n и p . Из-за нелинейной связи переменных $V(x)$, $n(x)$ и $p(x)$ невозможно аналитическое решение данной системы уравнений. Для этого необходимо воспользоваться численными методами, такими как метод Ньютона и Ньютона – Рафсона. Решение системы уравнений требует задания граничных условий. Они выражаются, используя уровень вакуума и значения тока на контактах. Их можно выразить в следующем виде:

$$V(0) = V_0 - U; \quad (9)$$

$$V(L) = 0; \quad (10)$$

$$J_p(0) = -qS_{p0}(p_0(0) - p(0)); \quad (11)$$

$$J_p(L) = qS_{pL}(p(L) - p_0(L)); \quad (12)$$

$$J_n(0) = -qS_{n0}(n(0) - n_0(0)); \quad (13)$$

$$J_n(L) = -qS_{nL}(n_0(L) - n(L)); \quad (14)$$

где $x = 0$ относится к стороне структуры, облучаемой излучением, а $x = L$ – к стороне структуры, граничащей с подложкой; V_0 – значение потенциала при термодинамическом равновесии; U – напряжение смещения; $p_0(0)$ и $p_0(L)$ – населенность дырок в валентной зоне при $x = 0$ и $x = L$; $n_0(0)$ и $n_0(L)$ – населенность электронов в зоне проводимости при $x = 0$ и $x = L$ в термодинамическом равновесии; $p(0)$ и $p(L)$ – концентрация дырок в рабочих условиях при $x = 0$ и $x = L$; $n(0)$ и $n(L)$ – концентрация электронов в рабочих условиях при $x = 0$ и $x = L$; S_{p0} , S_{pL} , S_{n0} , S_{nL} – эффективные скорости поверхностной рекомбинации при $x = 0$ и $x = L$ для дырок и электронов соответственно. Для решения системы уравнений область от 0 до L разбивается сеткой с переменным шагом (для учета быстрых изменений). Параметры модели Mo/CIZS/CdS/ZnO приведены в таблице.

Параметры модели Mo/CIZS/CdS/ZnO

| Значения параметров вещества на границах поглощающего слоя | | | |
|--|---------------------------------|--|--|
| | Передний контакт ($x = 0$ мкм) | | Тыльный контакт ($x = 3,1$ мкм) |
| Скорость поверхностной рекомбинации электронов | 10 ⁷ см/с | | 10 ⁷ см/с |
| Скорость поверхностной рекомбинации дырок | 10 ⁷ см/с | | 10 ⁷ см/с |
| Коэффициент отражения | 0,03 | | 0,8 |
| Свойства слоев | | | |
| Слой | i-ZnO | CdS | CIZS |
| Толщина | 50 нм | 30 нм | 3000 нм |
| Диэлектрическая проницаемость | 9 | 10 | 13,6 |
| Подвижность электронов | 18 см ² /(В·с) | 6 см ² /(В·с) | 80 см ² /(В·с) |
| Подвижность дырок | 4,5 см ² /(В·с) | 1,5 см ² /(В·с) | 20 см ² /(В·с) |
| Концентрация носителей | $Nd = 10^{18}$ см ⁻³ | $Nd = 3,54 \cdot 10^{17}$ см ⁻³ | $Na = 3,01 \cdot 10^{16}$ см ⁻³ |

2. Результаты и их обсуждение. Было проведено исследование влияния ширины запрещенной зоны, толщины CIZS-слоя, значения последовательного и шунтирующего сопротивлений на важнейшие параметры СЭ, такие как напряжение холостого хода, ток короткого замыкания, коэффициент заполнения и КПД. Значения параметров варьировались в пределах, исходя из возможности разумного их изменения в реальных элементах. Шаг брался переменный, более частый в точках перегиба и сильного изменения значений. На рис. 2 представлены зависимости основных параметров СЭ от ширины запрещенной зоны. Изменение концентрации цинка в CIZS-пленке позволяет регулировать ширину запрещенной зоны [6, 9], поэтому эти же графики одновременно отображают зависимость основных параметров с изменением концентрации цинка в поглощающем слое.

Из графиков видно, что напряжение холостого хода растет с повышением ширины запрещенной зоны от значения 0,5 В до значений, превышающих 0,9 В при E_g , достигающих значений 1,4 эВ. С увеличением ширины запрещенной зоны плотность тока короткого замыкания уменьшается. Это объясняется уменьшением длины отсечки и меньшим поглощением в длинноволновой области. Коэффициент заполнения увеличивается до $E_g = 1,4$ эВ. Это связано с уменьшением тока короткого замыкания и повышением напряжения холостого хода, что приводит к улучшению формы кривой. КПД зависит от всех перечисленных выше факторов. В результате проведенных расчетов можно оценить оптимум, который для данного материала находится в интервале $E_g = 1,2-1,3$ эВ. Стоит отметить, что рассчитанные значения очень близки к используемым в ТСЭ слоям CIGS с максимальными на данный момент КПД [3, 11].

Было проведено исследование влияния толщины слоя CIZS на работу ТСЭ. Толщина изменялась в диапазоне от 50 до 3000 нм. Толщина слоя является объектом первостепенной важности, поскольку ее изменение сказывается не только на значении поглощенного света, но и, как видно из рис. 1, *а*, на значении R_{sh} , которое в свою очередь, согласно выражению (1), ведет к изменению

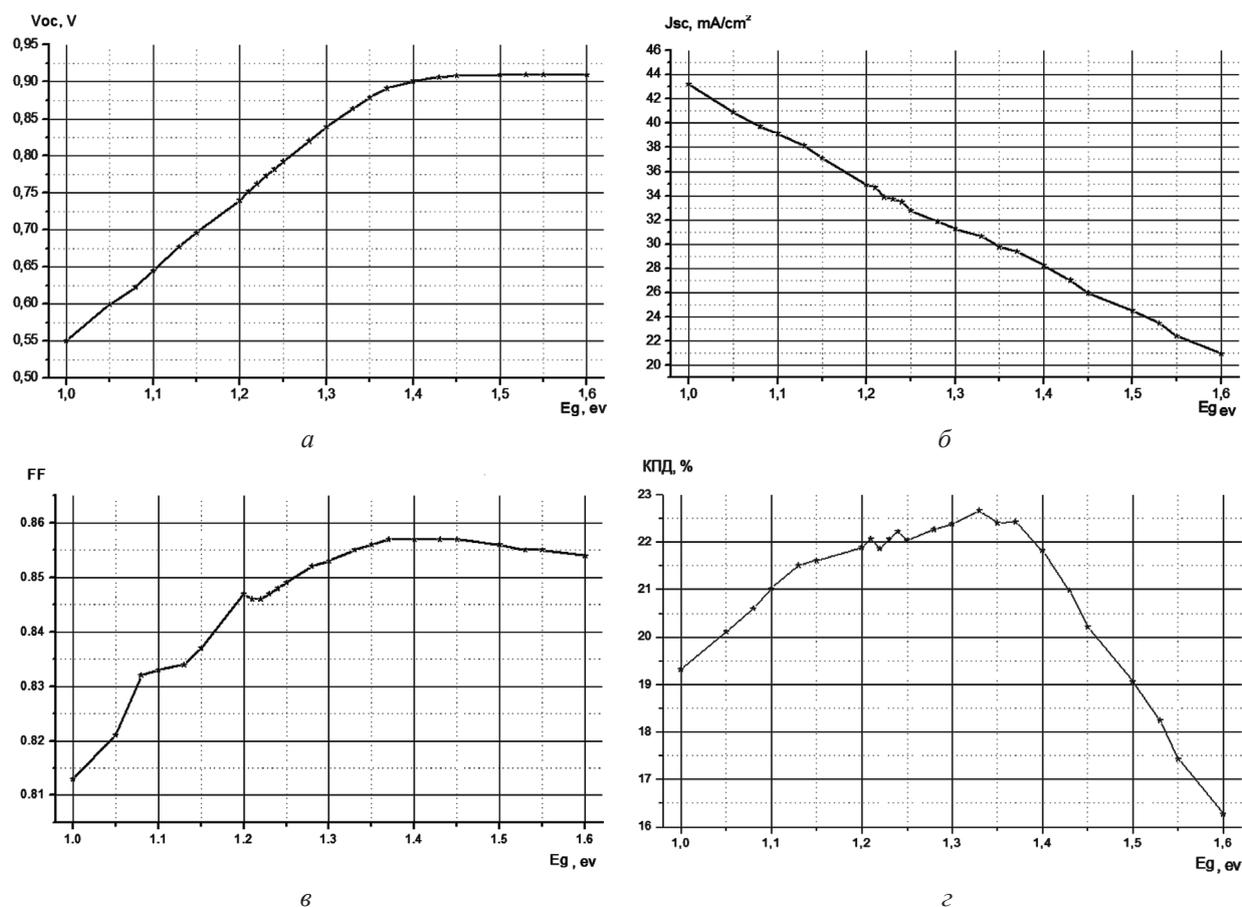


Рис. 2. Зависимости параметров ТСЭ от ширины запрещенной зоны: *а* – напряжения холостого хода; *б* – тока короткого замыкания; *в* – коэффициента заполнения; *г* – КПД СЭ

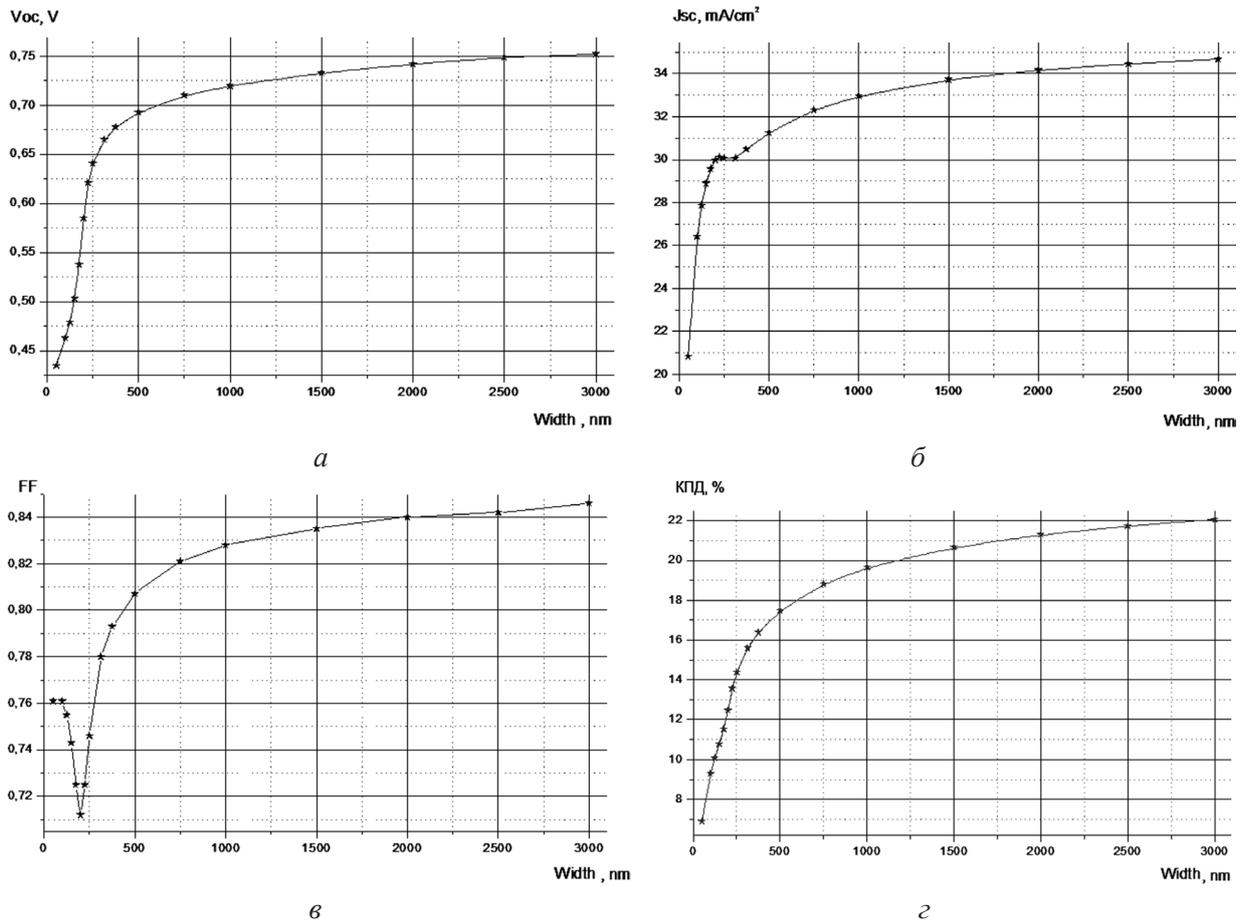


Рис. 3. Зависимости параметров ТСЭ от толщины поглощающего слоя: *а* – напряжения холостого хода; *б* – тока короткого замыкания; *в* – коэффициента заполнения; *г* – КПД СЭ

ВАХ ТСЭ и, как следствие, КПД. Результаты расчетов приведены на рис. 3. КПД резко повышается при увеличении толщины слоя CIZS до значений 1000 нм. Из выражения (3) видно, что общий КПД растет прямо пропорционально увеличению ff , U_{oc} , J_{sc} . Так как все рассмотренные характеристики растут с увеличением толщины поглощающего слоя, то можно сделать вывод о том, что тонкие CIZS менее 1000 нм не могут в достаточной степени эффективно улавливать излучение, что приводит к общей неэффективности работы ТСЭ.

Было проведено исследование влияния последовательного и шунтирующего сопротивления на работу СЭ. На основании полученных ВАХ вычислялись точки максимальной мощности, а далее – значения КПД. Графики зависимости КПД от R_s и R_{sh} приведены на рис. 4.

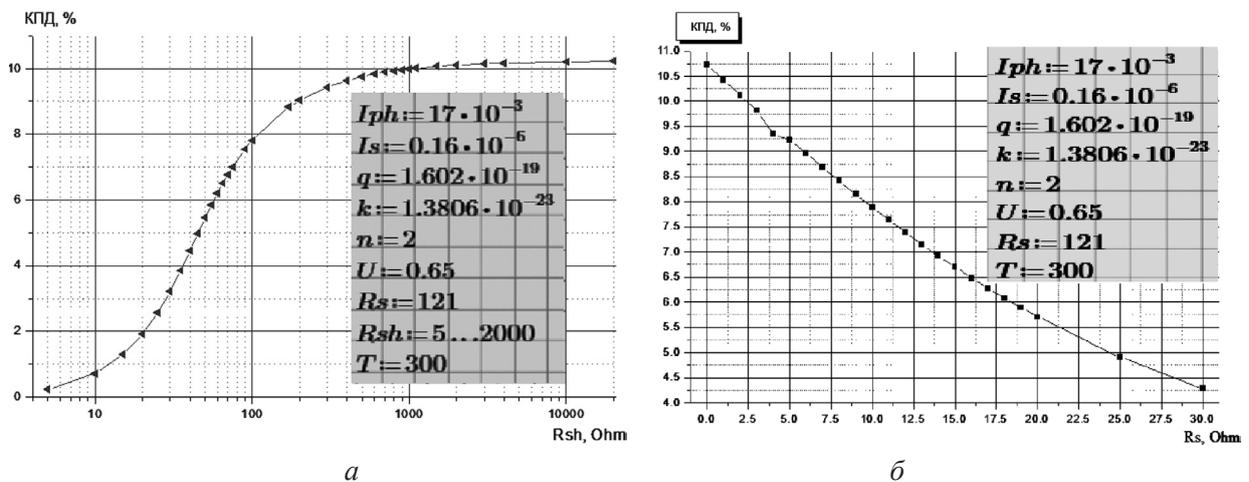


Рис. 4. Зависимости КПД от последовательного (*а*) и параллельного (*б*) сопротивления

Шунтирующее сопротивление оказывает большое влияние на КПД только примерно до 1 кОм. Дальнейшее его увеличение слабо влияет на форму ВАХ и, как следствие, на КПД. Однако сопротивление менее 100 Ом значительно снижает КПД вследствие паразитных утечек через дефекты. Как и ожидалось, последовательное сопротивление сильно уменьшает КПД согласно закону Ома, поэтому для повышения эффективности необходимо его как можно сильнее снижать.

Закключение. Таким образом, исходя из приведенных данных, наиболее оптимальными электрофизическими параметрами CIZS для ТСЭ при прочих заданных являются следующие: E_g – оптимум в интервале 1,2–1,3 эВ; толщина слоя не менее 1 мкм; $R_{sh} > 1$ кОм, до 100 Ом происходит очень значительное снижение эффективности; R_s необходимо снижать и стремиться обеспечивать соотношение параллельного к последовательному сопротивлению не менее чем 30 к 1 из-за сильных омических потерь.

Литература

1. 1997 Annual Report. UNSW Photovoltaic Special Research Centre, University of New South Wales, Sidney, Australia, 1997.
2. Datasheet // Stion Corporation [Electronic resource]. 2013. Mode of access: http://www.stion.com/wp-content/uploads/2013/02/300-003-000-Rev-B_Product-Data-Sheet-STN-Module-125-140-1.pdf. – Date of access: 02.10.2013.
3. Goodrich A., Woodhouse M., Noufi R. et al. // 35rd IEEE Photovoltaic Specialists Conference. San Diego, California, 2011. P. 45–50.
4. Rud Yu. V., Gremenok V. F., Rud V. Yu. et al. // Phys. Stat. Sol (a). 2001. Vol. 188, N 3. P. 1077–1085.
5. Durante C. A., Wasim S. M., Hernandez E. // Cryst. Res. Technol. 1996. Vol. 31, special iss. 2. P. 241–246.
6. Цырельчук И. Н., Хорошко В. В., Гременок В. Ф., Мишутко В. А. // Проблемы физики, математики и техники. 2013. № 1 (14). С. 33–36.
7. Mullan C. A., Yakushev M. V., Kiely C. J. et al. // Phil. Mag. A. 1996. Vol. 73, N 8. P. 1131–1145.
8. Yakushev M. V., Tashlykov I. S., Tomlinson R. D. et al. // Material Science Forum. 1997. Vol. 171. P. 248–249.
9. Рудь В. Ю., Рудь Ю. В., Гременок В. Ф. и др. // Физика и техника полупроводников. 2005. Т. 39, вып. 9. С. 1070–1074.
10. Гременок В. Ф., Тиванов М. С., Залесский В. Б. Солнечные элементы на основе полупроводниковых материалов. Минск, 2007.
11. Ward J. S., Ramanathan K., Hasoon F. S. et al. // Progress in Photovoltaics: Research and Application. 2012. Vol. 10. P. 41–46.

V. V. KHOROSHKO, I. N. TSYRELCHUK, V. F. GREMENOK, V. B. ZALESSKI, A. A. KHODIN

Cu_xIn_xZn_{2-2x}Se₂ ABSORBER LAYER CHARACTERISTICS OPTIMIZATION FOR THIN-FILM SOLAR CELLS

Summary

The influence of the physical parameters of Cu_xIn_xZn_{2-2x}Se₂ films on the characteristics of Mo/Cu_xIn_xZn_{2-2x}Se₂/CdS/ZnO thin-film solar cells were investigated. The model developed is based on one-dimensional drift-diffusion approach using the Poisson's equation and continuity equations for electrons and holes. It taking into accounts the buffer layer effect, zone bending and recombination at grain boundaries and other defects.

УДК 621.315.592

*А. В. МУДРЫЙ¹, Ф. МОФИДНАХАИ¹, В. Д. ЖИВУЛЬКО¹, В. А. ЗИНОВЬЕВ²,
А. В. ДВУРЕЧЕНСКИЙ², П. А. КУЧИНСКАЯ², Ж. В. СМАГИНА²*

СТРУКТУРНЫЕ И ОПТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НАНОСЛОЕВ Ge/Si С ПРОСТРАНСТВЕННО-УПОРЯДОЧЕННЫМИ ГРУППАМИ КВАНТОВЫХ ТОЧЕК

¹Научно-практический центр НАН Беларуси по материаловедению

²Институт физики полупроводников им. А. В. Ржанова (Новосибирск, Россия)

(Поступила в редакцию 23.04.2014)

Введение. На современном этапе развития полупроводниковой оптоэлектроники гетероструктуры германий–кремний (Ge/Si) с квантовыми точками Ge являются перспективными объектами и вызывают повышенный интерес у исследователей в связи с их уникальными физическими свойствами и возможностью создания на их основе светоизлучающих структур и фотоприемников для инфракрасной (ИК) области спектра [1–8]. Многими интересными физическими свойствами обладают самоорганизующиеся кольцевые структуры Ge нанометровых размеров (квантовые кольца Ge), образующиеся в процессе гетероэпитаксии германия на кремнии [1]. Такие структуры можно отнести к новым объектам для фундаментальных исследований и практических применений [1, 7, 8]. На сегодняшний день туннельно-связанные квантовые точки Ge, упорядоченные в пространстве, можно считать одними из перспективных нанообъектов для формирования на их основе приборов нового поколения, работа которых будет базироваться на законах и принципах квантовой механики [1, 9, 10]. Несмотря на значительные успехи при исследовании физических свойств наноструктур Ge/Si с квантовыми точками (кольцами) Ge, остается ряд нерешенных принципиальных проблем. В частности, не выявлено прямой зависимости энергетического смещения, полуширины и спектральной формы полос люминесценции от геометрических параметров (размеров, формы) квантовых точек (колец) Ge. Кроме этого, необходимо установление различия в механизмах излучательной рекомбинации в квантовых точках (кольцах) Ge для расширения представлений об электронной структуре таких нанообъектов в гетероструктурах Ge/Si. В работе приведены новые данные о структуре и процессах излучательной рекомбинации в наноструктурах Ge/Si с упорядоченными группами самоорганизующихся квантовых точек (колец) Ge.

Технология создания наноструктур и методика эксперимента. Технология формирования пространственных групп трехмерных островков (квантовых точек) Ge, упорядоченных в кольца, основывалась на молекулярно-лучевой эпитаксии (МЛЭ) на гетерофазных подложках Si(100) с предварительно созданными на них затравками в виде напряженных нанодисков GeSi и нанокольца GeSi [7, 8]. Идея подхода к формированию пространственно-упорядоченных наноструктур Ge/Si с квантовыми точками (кольцами) Ge состояла в использовании деформации поверхностного слоя над напряженными затравками для управления пространственным расположением растущих островков Ge. Упорядоченные наноструктуры Ge/Si выращивались методом МЛЭ в установке «Riber SiVA-21» Института физики полупроводников СО РАН. Наноструктуры Ge/Si создавались на подложках Si с ориентацией (100) и толщиной ≈ 300 мкм, обладающих *p*-типом проводимости (легирование бором) с удельным сопротивлением $\rho \approx 20$ Ом · см. Для уменьшения влияния внутренних напряжений в наноструктурах Ge/Si на подложке Si методом МЛЭ создавался буферный слой Si толщиной ≈ 150 нм при температуре роста 500 °С. Перед осаждением буферного слоя Si проводилась стандартная очистка и снятие оксидного слоя с подложки Si.

Массив затравочных трехмерных островков GeSi формировался путем осаждения трех слоев Ge при температуре ≈ 700 °С. Количество Ge в каждом из этих слоев составляло семь монослоев (7 МС) Ge. На первые два слоя Ge при температуре 700 °С осаждались разделяющие слои Si толщиной 20 нм, а на третий слой Ge осаждался более тонкий слой Si ~ 5 нм. Таким способом в этих трех затравочных слоях были сформированы большие островки Ge (≈ 150 – 200 нм в диаметре) в форме дисков или колец. Эта трехслойная структура Ge использовалась в качестве затравки для зарождения на них кольцевых цепочек Ge меньшего размера с латеральным размером ≈ 90 – 150 нм в форме hut-кластеров при $T \approx 600$ °С. Поверх затравочных слоев GeSi было сформировано 10 слоев Ge, каждый из которых состоял из 4 МС Ge для образца 1 и 5 МС Ge для образца 2. Десять слоев Ge с островками меньшего размера разделялись слоями Si толщиной ~ 10 нм, которые создавались при температуре ≈ 500 °С. На последней стадии, при температуре осаждения 500 °С, структуры Ge/Si с 13 слоями Ge закрывались слоем Si толщиной 30 нм. Морфология ростовой поверхности исследовалась с помощью атомно-силовой микроскопии (АСМ) и сканирующей туннельной микроскопии (СТМ). Рентгенодифракционные исследования проводились на дифрактометре ДРОН-3 в Cu-K_α излучении с графитовым монохроматором. Рентгенограммы регистрировались в интервале углов дифракции $2\Theta \sim 40$ – 90° при комнатной температуре. Запись проводилась в режиме непрерывного сканирования с шагом $0,02^\circ$ и временем накопления сигнала $t = 3$ с. При такой съемке рентгенограмм дифракционная картина формировалась за счет отражающих плоскостей (hkl), расположенных параллельно поверхности кремниевой подложки Si и структур Ge/Si, т. е. плоскости (400).

Исследование спектров фотолюминесценции наноструктур Ge/Si проводилось при температуре жидкого гелия $\sim 4,2$ К при непосредственном погружении исследуемых образцов в охлаждающую жидкость. Спектры люминесценции регистрировались с использованием дифракционного монохроматора МДР-23У с фокусным расстоянием зеркального объектива $f \sim 60$ см, оснащенного дифракционной решеткой 600 штр/мм. В качестве детектора оптических сигналов использовался InGaAs *p-i-n*-фотодиод с областью спектральной чувствительности 0,5–1,7 мкм (Hamamatsu, Япония). Электрический сигнал с фотодетектора поступал через высокоомный предусилитель на узкополосный низкочастотный (частота модуляции лазерного излучения составляла ~ 20 Гц) усилитель и преобразовывался в постоянный сигнал на основе метода синхронного детектирования с последующим аналого-цифровым преобразованием и автоматической записью спектров на компьютере. Спектры фотолюминесценции наноструктур Ge/Si регистрировались с использованием в качестве источников возбуждения различных лазеров, работающих на длинах волн 405, 457 и 532 нм. Изменение длины волны лазерного излучения позволяло регистрировать сигналы люминесценции, возникающие от различных толщин, что позволило более детально проанализировать процессы излучательной рекомбинации в структурах Ge/Si.

Экспериментальные результаты и их обсуждение. На рис. 1 показана морфология поверхности пространственно-упорядоченных групп наноструктур германия, сформированных на нанодисках GeSi на заключительной стадии при температуре 600 °С. Представленные изображения были получены с использованием метода СТМ на образцах без покрывающего слоя кремния. Как показали исследования, в зависимости от технологических условий роста могут быть получены как упорядоченные компактные группы из отдельных островков Ge (рис. 1, а, образец 1), так и группы островков, сросшиеся в кольца (рис. 1, б, образец 2). На вставках рис. 1 показан трехмерный (3D) вид отдельных упорядоченных наноконечек Ge.

Как видно из рис. 1, в обоих случаях сформированные группы квантовых точек Ge имеют форму «квадратных» колец. Основание таких колец представляет собой структуру, ограниченную с внешней и внутренней стороны двумя вложенными друг в друга квадратами. Формирование упорядоченных в кольца групп 3D островков (квантовых точек) Ge при эпитаксии на гетерофазных подложках Si основывалось на том, что для управления пространственным расположением растущих наноструктур Ge использовался эффект деформации поверхностного слоя Si над напряженными затравками GeSi. Поэтому островки Ge, созданные в первых трех слоях при температуре осаждения ≈ 700 °С, имеют достаточно большой размер ≈ 200 нм и низкую

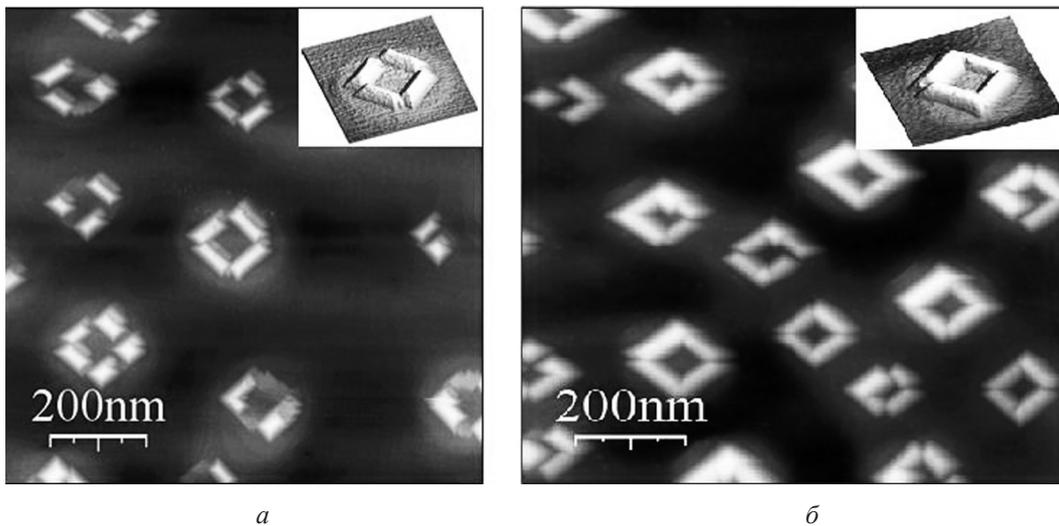


Рис. 1. СТМ-изображение участка поверхности с двумя типами пространственно-упорядоченных эпитаксиальных структур, сформированных на GeSi нанодисках: компактные группы из отдельных наностроек Ge (а) и группы из наностроек, сросшихся в кольца (б). Вставка: трехмерный вид пространственно-упорядоченных наноструктур

плотность. Это необходимо для размещения на них целой группы островков и обеспечения этим группам необходимого отделения друг от друга. Качественно процесс эпитаксии и формирования затравочных островков GeSi может быть объяснен образованием впадин (кратеров) в центре нанокристаллов Ge за счет высокой скорости диффузии Ge из квантовых точек в прилегающие разделяющие слои Si.

Другая модель, объясняющая формирование затравочных островков GeSi, основана на смачивании германием поверхности кремния. Германий, из-за более низкой поверхностной энергии по сравнению с кремнием, стремится закрыть максимально возможную площадь поверхности окружающего кремния. По существу, осаждение Si стимулирует диффузионный массоперенос Ge из вершин трехмерных островков на поверхность смачивающего слоя, что приводит к формированию «вулканоподобных» структур в форме колец. Исследования показали, что на одном затравочном островке Ge подлежащего слоя вырастает целая группа островков меньшего размера с большим содержанием германия. Островки Ge в группах, как правило, были размещены вдоль периметра круговой затравки и обладали преимущественной ориентацией относительно друг друга и кристаллографических направлений типа $\langle 100 \rangle$. При этом их расположение зависело от условий создания подлежащих слоев, а подлежащие островки являлись местом зарождения островков в следующем слое. По данным измерения методом АСМ установлено, что при осаждении 4 МС Ge (толщина одного МС $\approx 0,141$ нм) образовывались островки в форме hut-кластеров с усредненной высотой $\approx 5,2$ нм, шириной ≈ 53 нм, длиной ≈ 92 нм. Дисперсия по размерам не превышала 15 %, а поверхностная плотность кольцевых групп из квантовых точек Ge составляла $\approx 1,1 \cdot 10^9$ см $^{-2}$ (см. рис. 1, а). При осаждении 5 МС Ge островки имели следующие усредненные размеры: высота $\approx 5,6$ нм, ширина ≈ 57 нм, длина ≈ 141 нм (см. рис. 1, б). Поверхностная плотность колец достигала $1,4 \cdot 10^9$ см $^{-2}$. Для выяснения причин упорядоченного расположения островков в группе были проведены расчеты распределения плотности энергии упругой деформации вдоль поверхности напряженного нанодиска GeSi [1]. Они показали, что вблизи периметра круговой затравки имеются 4 локальных минимума плотности упругой энергии, размещенных по направлениям типа $\langle 100 \rangle$ относительно центра затравочного диска GeSi. Установлено, что локальные минимумы энергии обусловлены анизотропией упругих свойств Ge и Si. Исследования начальных стадий роста наностроек методом СТМ в зависимости от количества осажденного Ge показали, что зарождение островков происходит в основном над минимумом упругой энергии, которые соответствуют минимуму химического потенциала на поверхности затравочных нанодисков GeSi. Таким образом, можно считать, что деформация в разделяющем слое Si над напряженными квантовыми кольцами GeSi обеспечивает вертикально-совмещенный коррелированный рост квантовых точек Ge в вышележащих слоях.

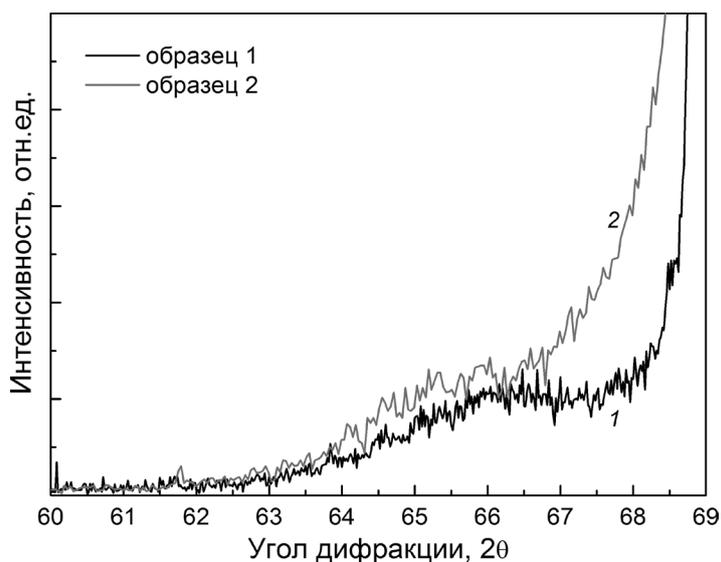


Рис. 2. Рентгенограммы наноструктур Ge/Si с вертикально-совмещенными группами квантовых точек Ge (образец 1) и группами квантовых точек Ge, сросшимися в кольца (образец 2)

На рис. 2 представлены рентгенограммы наноструктур Ge/Si (образцы 1 и 2) с вертикально-совмещенными группами квантовых точек Ge. Исследования показали, что на рентгенограммах в области углов дифракции $2\Theta \approx 69,148^\circ$ присутствует интенсивный рефлекс 400 (на рис. 2, а представлен частично), обусловленный отражением от кремниевой подложки. Наиболее важным является наличие на рентгенограммах дополнительных рефлексов отражения в области меньших значений углов дифракции $2\Theta \approx 66,3^\circ$ и $2\Theta \approx 66^\circ$ для образцов 1 и 2 соответственно. Анализ продемонстрировал, что максимумы отражения в области вышеуказанных углов могут быть отнесены к отражению от плоскости (400) Ge. Определение параметров элементарной ячейки осуществлялось на основании известного условия Брэгга – Вульфа $2d\sin\Theta = \lambda$, (d – межплоскостное расстояние, Θ – брэгговский угол отражения, λ – длина волны падающего рентгеновского излучения) и соотношения $a = d\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}$ для решетки с кубической симметрией (a – параметр элементарной ячейки; h, k, l – кристаллографические индексы). Значение параметров элементарной ячейки, найденные по угловому положению рефлексов (400), для Si с $2\Theta \approx 69,148^\circ$, (400) для Ge с $2\Theta \approx 66,3^\circ$ (образец 1) и $2\Theta \approx 66^\circ$ (образец 2) оказались равными: $a \approx 5,430, \approx 5,634$ и $\approx 5,657 \text{ \AA}$ соответственно. Отметим, что значение параметра $a \approx 5,430 \text{ \AA}$ для Si хорошо согласуется с известными данными картотеки JCPDS (№ 89-5012, № 89-2955, № 26-1481). Важно, что рентгеновская дифракция в условиях измерений, проведенных нами, дает информацию только об изменении межплоскостных расстояний в направлении, перпендикулярном плоскости роста. Несколько большее значение параметра элементарной ячейки в направлении, перпендикулярном плоскости роста, для образца 2 по сравнению со значением этого параметра для образца 1 указывает на более высокий уровень деформаций в области квантовых колец, образовавшихся при срастании квантовых точек GeSi в кольцевых группах. Одной из причин обнаруженного различия может выступать несовпадение объемных концентраций Ge в исследуемых наноструктурах Ge/Si. При анализе рентгенодифракционных данных было принято во внимание то, что квантовые точки (кольца) GeSi упруго сжаты в двух латеральных направлениях (x [100] и y [010]), лежащих в плоскости роста структуры, а в вертикальном направлении z [100] (направление, перпендикулярное плоскости роста структуры) квантовые точки подвергнуты напряжению растяжения. Так как квантовые точки, формируемые в процессе гетероэпитаксии Ge на Si (100) подложке, характеризуются малым отношением высоты к размеру основания $\approx 1:10$ и их можно рассматривать как двумерные объекты. Это означает, что деформация в квантовых точках (кольцах) не сильно отличается по величине от деформации упруго напряженного тонкого слоя GeSi, встроенного в наноструктуры Ge/Si. Базируясь на теории упругости и учитывая нелинейную зависимость параметра элементарной ячейки от содержания Ge в недеформированной решетке твердых

растворов SiGe, а также подход, развитый в работе [11], нами была рассчитана зависимость нормальной составляющей параметра элементарной ячейки a^{\perp} от процентного содержания Ge. На основании сравнения расчетных значений параметра элементарной ячейки a^{\perp} с экспериментальной величиной, рассчитанной по данным рентгеновской деформации, нами оценено среднее содержание Ge и величина деформаций в многослойных наноструктурах Ge/Si с квантовыми точками (кольцами) Ge. Так, для образца 1 подгонка расчетного значения a^{\perp} к экспериментальной величине $a = 5,634 \text{ \AA}$ дает среднее содержание Ge $\approx 53,7 \%$, а для образца 2 подгонка к $a \approx 5,657 \text{ \AA}$ дает концентрацию Ge $\approx 59,2 \%$. В соответствии с оценкой, проведенной для образца 1, нормальная компонента тензора деформации для упруго напряженного слоя GeSi составляет $\varepsilon_{zz} \approx 0,0161$, а латеральные компоненты $\varepsilon_{xx}(\varepsilon_{yy}) \approx 0,0212$. Для образца 2 с GeSi островками, сросшимися в кольца, соответствующие значения составили $\varepsilon_{zz} \approx 0,0178$ и $\varepsilon_{xx}(\varepsilon_{yy}) \approx 0,0235$. Отметим, что более высокий уровень деформации в образце 2 по сравнению с образцом 1 может быть не обязательно связан с более высоким содержанием Ge. Наблюдаемое различие в деформациях может обуславливаться различием в форме созданных квантовых точек (колец) Ge. Недавно проведенные измерения комбинационного рассеяния света (КРС) показали, что образцы 1 и 2 имеют практически идентичные спектры КРС [8]. Сравнительный анализ интегральных интенсивностей пиков от связей Ge–Ge ($\approx 298 \text{ см}^{-1}$) и Si–Ge ($\approx 411 \text{ см}^{-1}$) показал, что среднее содержание Ge в обоих типах многослойных структур Ge/Si составляют около 43 %. В то же время оценка содержания Ge на основании рентгеноструктурного анализа дает усредненную величину $\sim 54 \%$. Несоответствие оценок содержания Ge, сделанное методами КРС и рентгеновской дифракции, может указывать на более высокую чувствительность рентгеновской дифракции к неоднородному распределению деформаций в структурах Ge/Si с квантовыми точками Ge.

Проведенные при 4,2 К исследования люминесцентных свойств многослойных структур Ge/Si с вертикально совмещенными квантовыми точками Ge, упорядоченными в кольца, позволили выявить различие в оптических характеристиках образцов 1 и 2. На рис. 3 приведены спектры фотолюминесценции (ФЛ) образцов 1 и 2, снятые со спектральным разрешением $\approx 4 \text{ мэВ}$ при 4,2 К. Видно, что в спектрах ФЛ образца 2 в области 1,07–1,16 эВ наблюдаются относительно узкие линии, обусловленные рекомбинацией экситонов, связанных на атомах бора, как основной легирующей примеси (материал КДБ-20, $\rho \approx 20 \text{ Ом} \cdot \text{см}$). Линия $BE^{NP} \sim 1,150 \text{ эВ}$ обусловлена бесфононной рекомбинацией экситонов, связанных на атомах бора. Линия $BE^{TA} \sim 1,132 \text{ эВ}$ и $BE^{TO} \sim 1,092 \text{ эВ}$ являются фононными повторениями линии 1,150 эВ с испусканием поперечных акустических фононов TA с энергией 18 мэВ и поперечных оптических фононов TO с энергией 58 мэВ. На рис. 3 в спектральной области 1,07–0,74 эВ наблюдаются полосы ФЛ, которые могут быть отнесены

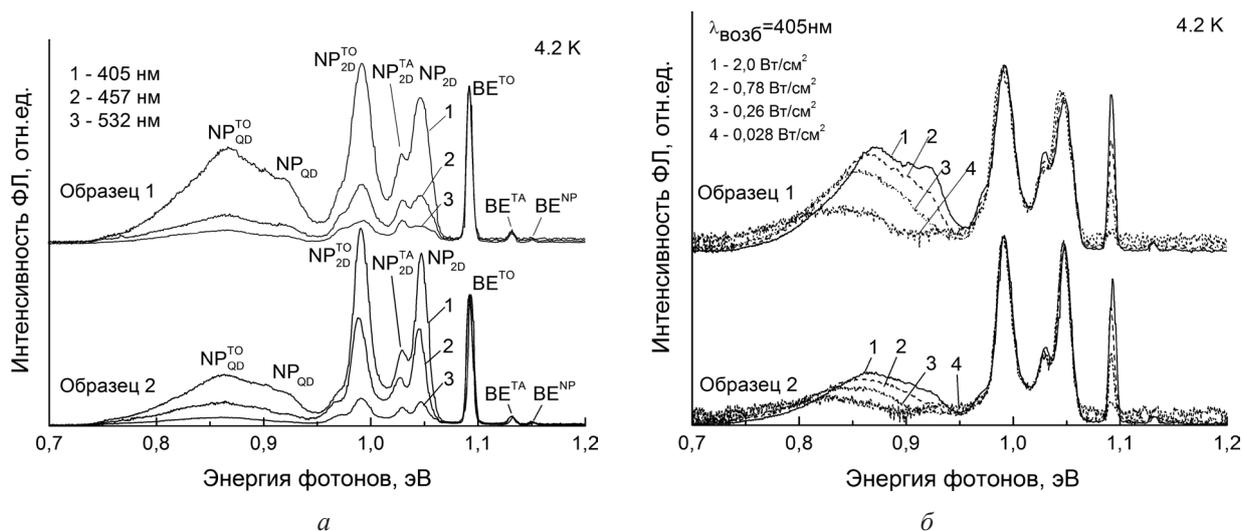


Рис. 3. Спектры фотолюминесценции наноструктур Ge/Si с упорядоченными группами квантовых точек Ge (образец 1) и группами квантовых точек Ge, сросшимися в кольца (образец 2): зависимость спектров фотолюминесценции от длины волны (а) и мощности (б) возбуждающего лазерного излучения

к рекомбинации в квантовых точках Ge и двумерном (2D) смачивающем слое Ge [12]. Полоса $NP_{2D} \approx 1,047$ эВ может быть отнесена к бесфононным переходам при излучательной рекомбинации свободных экситонов в тонком смачивающем слое Ge, а полосы 1,029 и 0,989 эВ являются повторениями этой линии с участием ТА и ТО фононов соответственно. Полоса в области 0,974–0,976 эВ может быть отнесена к фононному повторению линии 1,047 эВ с одновременным испусканием двух фононов ТО и ТА. Появление низкоэнергетических полос $NP_{QD} \approx 0,921$ эВ и $NP_{QD}^{TO} \approx 0,863$ эВ может быть связано с бесфононным процессом излучательной рекомбинации и процессом рекомбинации с участием ТО-фононов на квантовых точках Ge. **Эксперименты по возбуждению неравновесных носителей заряда в структурах Ge/Si лазерным излучением с различной длиной волны показали, что использование коротковолнового лазерного излучения с $\lambda \approx 405$ нм позволяет регистрировать сигналы ФЛ в большей степени от поверхностных слоев GeSi. В этом случае излучение от подложки становится слабее. Как видно на рис. 3, при возбуждении лазерным излучением с $\lambda \approx 532$ нм, интенсивность сигналов от наноструктур Ge/Si в области 1,07–0,74 эВ становится значительно меньше относительно интенсивности ФЛ от подложки кремния. Обращает на себя внимание значительно меньшая полуширина полос в области 1,07–0,95 эВ от смачивающего слоя Ge в образце 2 по сравнению с образцом 1. В частности, полуширина головной бесфононной полосы $NP_{2D} \approx 1,047$ эВ для образца 2 составила ≈ 13 мэВ при 4,2 К, в то время как для аналогичной полосы $NP_{2D} \approx 1,046$ эВ в образце 1 она составила ≈ 23 мэВ. Подобное различие в полуширине может объясняться тем, что при создании массива квантовых точек (колец) в структуре с 5 МС создается более однородное их распределение по поверхности, и это уменьшает внутренние напряжения в смачивающих слоях Ge. С другой стороны, процесс срастания квантовых точек Ge в кольцах может также снижать релаксацию напряжений в смачивающих слоях Ge. Поэтому для образца 2 с 5 МС наблюдается меньшая полуширина линии 1,047 эВ. В образце 1 смачивающие слои Ge находятся в более напряженном состоянии из-за большей неоднородности распределения массива групп квантовых точек Ge и отсутствия срастания квантовых точек Ge в кольца, что и обуславливает большую полуширину линии 1,046 эВ (см. рис. 3). На рис. 3, б представлены изменения спектров ФЛ для квантовых точек Ge в зависимости от мощности лазерного излучения. Как видно, при увеличении мощности возбуждения в спектрах ФЛ от исследуемых структур наблюдается широкая спектральная полоса, которая может быть приписана квантовым точкам GeSi. Установлено, что при увеличении мощности лазерного возбуждения максимум длинноволновой полосы смещается в область более высоких энергий фотонов от 0,82 до 0,86 эВ. Наблюдаемый сдвиг спектральной полосы обусловлен, прежде всего, увеличением степени заполнения квантовых точек GeSi электронами и дырками при возрастании уровня лазерного возбуждения. Отметим, что в первую очередь происходит захват дырок на основное состояние в квантовых точках Ge, а уже затем электроны притягиваются к положительно заряженным квантовым точкам, формируя связанные экситоны. Поскольку в массиве самоорганизующихся квантовых точек Ge существует заметный разброс по размерам ($\sim 15\%$), в первую очередь будут заполняться «большие» квантовые точки, имеющие размер больше среднего по ансамблю, так как они формируют более глубокие потенциальные ямы для дырок. По мере увеличения мощности лазерного возбуждения в процесс рекомбинации экситонов вовлекаются квантовые точки меньшего размера, для которых энергия основного состояния дырок лежит ближе к краю валентной зоны кремния, что и приводит к наблюдаемому сдвигу энергий фотонов в область более высоких энергий.**

Закключение. С использованием метода молекулярно-лучевой эпитаксии созданы наноструктуры Ge/Si с группами квантовых точек Ge, упорядоченными в кольца, которые обладают относительно интенсивной люминесценцией в инфракрасной области спектра 0,74–1,06 эВ. Показано, что в зависимости от количества осажденных слоев Ge (4 МС или 5 МС) и параметров затравочных нанодисков GeSi могут быть сформированы упорядоченные группы квантовых точек Ge, состоящие из изолированных или сросшихся в кольца островков. По данным рентгенодифракционных измерений определена концентрация Ge и проведена оценка величины внутренних напряжений в наноструктурах Ge/Si. Показано, что увеличение количества осаждаемых монослоев Ge от 4 до 5 может приводить к уменьшению полуширины полос, обусловленных излучательной

рекомбинацией на смачивающих слоях Ge. Этот эффект объясняется уменьшением величины напряжений в смачивающих слоях Ge. **Обнаруженное смещение спектральных полос от мощности лазерного излучения в области 0,82–0,92 эВ для квантовых точек Ge объясняется увеличением степени заполнения квантовых точек Ge электронами и дырками.**

Работа выполнена по проектам Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований № Ф12Р-134, Ф14Р-110.

Литература

1. Zinovyev V. A., Dvurechenskii A. V., Kuchinskya P. A., Armbrister V. A. // Phys. Rev. Lett. 2013. Vol. 111, N 26. P. 265501–1–265501–5.
2. Chaisakul P., Marris-Morini D., Issella G. et al. // Appl. Phys. Lett. 2011. Vol. 99, N 14. P. 141106–1–141106–3.
3. Двуреченский А. В., Якимов А. И. // Изв. РАН. Сер. физ. 2009. Т. 73, № 1. С. 71–75.
4. Gatti E., Grilli E., Guzzi M. et al. // Appl. Phys. Lett. 2011. Vol. 93, N 3. P. 031106–1–031106–3.
5. Liang D., Bewers J. E. // Nature Photonics. 2010. Vol. 4, N 8. P. 511–517.
6. Лобанов Д. Н., Новиков А. В., Кудрявцев К. Е. и др. // Физика и техника полупроводников. 2012. Т. 46, вып. 11. С. 1448–1452.
7. Кучинская П. А., Зиновьев В. А., Ненашев А. В. и др. // Изв. вузов. Сер. Материалы электрон. техники. 2011. № 4. С. 42–46.
8. Зиновьев В. А., Двуреченский А. В., Кучинская П. А. и др. // Автометрия. 2013. Т. 49, № 5. С. 6–12.
9. Kiravittaya S., Rastelli A., Schmidt O. G. // Rep. Prog. Phys. 2009. Vol. 72, N 4. P. 046502–1–046502–17.
10. Yakimov A. I., Bloskin A. A., Dvurechenskii A. V. // Phys. Rev. B. 2010. Vol. 81, N 11. P. 115434–1–115434–7.
11. Hartmann J. M., Gallas B., Zhang J., Harris J. J. // Semicond. Sci. Technol. 2000. Vol. 15. P. 370–377.
12. Мудрый А. В., Мофиднахаи Ф., Короткий А. В. и др. // Приборы и методы измерений. 2012. Т. 1, № 4. С. 44–50.

A. V. MUDRYI, F. MOFIDNAKHAJ, V. D. ZHIVULKO, V. A. ZINOVYEV,
A. V. DVURECHENSKII, P. A. KUCHINSKAJA, Zh. V. SMAGINA

STRUCTURAL AND OPTICAL CHARACTERISTICS OF Ge/Si NANOLAYERS WITH SPATIALY ORDERED GROUPS OF QUANTUM DOTS

Summary

Ge/Si nanostructures with closely spaced and interacting Ge quantum dots were grown by molecular beam epitaxy. It was found that the GeSi quantum rings with closely spaced Ge quantum dots can be formed by choosing suitable deposition rate and temperature of Ge. The unit cell parameters and Ge concentration in Ge/Si nanostructures were determined by the X-ray diffraction method. Intense luminescence bands caused by radiative recombination of excitons from both the Ge wetting layers and Ge quantum dots were found in photoluminescence spectra at 4.2 K.

УДК 621.315.592

Е. А. ТОЛКАЧЕВА, Л. И. МУРИН

**ИССЛЕДОВАНИЕ ВАКАНСИОННО-КИСЛОРОДНЫХ КОМПЛЕКСОВ
В ОБЛУЧЕННЫХ БЫСТРЫМИ ЭЛЕКТРОНАМИ И НЕЙТРОНАМИ
КРИСТАЛЛАХ КРЕМНИЯ МЕТОДОМ ИК-ПОГЛОЩЕНИЯ**

Научно-практический центр НАН Беларуси по материаловедению

(Поступила в редакцию 07.02.2013)

Введение. Спектроскопия локальных колебательных мод, как известно, является мощным инструментом в исследованиях кислородосодержащих дефектов в кремнии [1–6]. Однако предыдущие исследования вакансионно-кислородных центров (V_nO , $n \geq 2$) методом ИК-поглощения не привели к ясной и последовательной картине. Одна из главных причин состоит в том, что все дефекты V_nO содержат структуру Si–O–Si, характерную для комплекса вакансия–кислород (VO или A-центр). Колебательные полосы центров V_nO появляются довольно близко к основной полосе VO и они едва различимы в спектрах поглощения.

В данной работе методом ИК-поглощения исследовано поведение кислородосодержащих дефектов в процессе отжига в интервале температур 100–350 °C в образцах кремния, выращенных по методу Чохральского (Cz–Si), облученных различными частицами (быстрыми электронами и нейтронами). Форма полос проанализирована, используя процедуру подгонки, где было принято во внимание влияние кремниевых изотопов ^{29}Si и ^{30}Si [7]. Найдена четкая корреляция между исчезновением дивакансии (V_2), обуславливающей полосу поглощения 2767 cm^{-1} [8], и появлением двух новых полос поглощения, расположенных у 833,4 и 842,4 cm^{-1} при 20 К (у 825,7 и 839,1 cm^{-1} при комнатной температуре). Обе эти полосы ранее приписывались дефекту дивакансия–кислород, образующимся при взаимодействии подвижной V_2 с атомами междоузельного кислорода (O_i) [1, 4]. В настоящей работе показано, что эти две полосы связаны с различными дефектами, так как отношение их интенсивностей зависит от типа облучения. Полоса 842,4 cm^{-1} является более интенсивной в образцах, облученных нейтронами, и, вероятнее всего, она связана с дефектом тривакансия–кислород (V_3O), образующимся при взаимодействии подвижной V_3 с атомами O_i .

Методика эксперимента. Исследовались кристаллы кремния n -типа, полученные методом Чохральского. Концентрации междоузельного кислорода ($[O_i] = 8\text{--}11 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3}$) и углерода замещения ($[C_s] = 0,5\text{--}7 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$) определялись по результатам измерений интенсивности хорошо известных полос поглощения при 1107 и 605 cm^{-1} с использованием калибровочных коэффициентов $3,14 \cdot 10^{17}$ и $0,94 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-2}$ для кислорода и углерода соответственно. Образцы полировались с двух сторон и имели размеры $10 \times 6 \times 3 \text{ mm}^3$ или $10 \times 6 \times 5 \text{ mm}^3$.

Облучение быстрыми нейтронами (5 МэВ) и электронами (10 МэВ) проводилось при комнатной температуре ($\leq 350 \text{ K}$) различными дозами от $1 \cdot 10^{16}$ до $1 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-2}$, и образцы обычно хранились при комнатной температуре в течение нескольких недель перед измерениями. Образцы были подвергнуты 30-минутному изохронному отжигу в диапазоне 75–400 °C с шагом 25 °C. Спектры ИК-поглощения измерялись на Фурье спектрометре «Bruker 113v». Спектральное разрешение составляло 0,5 или 1,0 cm^{-1} , и образцы измерялись при 20 К и при комнатной температуре.

Результаты и их обсуждение. Очевидно, что в процессе облучения при $T \sim 300 \text{ K}$ дефекты V_nO в кремнии могут возникнуть путем последовательного захвата подвижных вакансий ловушками O_i , VO, V_2O и т. д., т. е. через реакции $V+O_i \Rightarrow VO$, $V+VO \Rightarrow V_2O$, $V+V_nO \Rightarrow V_{n+1}O$. Однако в Cz–Si, где

концентрация кислорода $\sim 10^{18} \text{ см}^{-3}$, генерация V_nO ($n \geq 2$) может быть эффективной только при очень больших дозах облучения, когда концентрация VO сопоставима с концентрацией O_i . При небольших дозах, когда концентрация радиационных дефектов намного ниже концентрации O_i , образование V_2O незначительно даже в случае облучения нейтронами [6] и основное формирование комплексов V_nO ($n \geq 2$) имеет место в процессе последующих отжигов облученных кристаллов кремния.

На рис. 1 показано развитие спектров поглощения в интервале волновых чисел $820\text{--}855 \text{ см}^{-1}$, обусловленных комплексами V_nO , в процессе изохронного отжига образца, облученного быстрыми нейтронами. В данном интервале волновых чисел наблюдается формирование и последующий отжиг ряда полос, обусловленных комплексами V_nO_m . Форма полос была проанализирована, используя подгонку с учетом влияния изотопов кремния ^{29}Si и ^{30}Si [7]. После облучения в интервале волновых чисел $820\text{--}855 \text{ см}^{-1}$ наблюдается только полоса А-центра (рис. 1, а). При температурах отжига выше $200 \text{ }^\circ\text{C}$ появляются дополнительные пики, связанные с вакансионно-кислородными комплексами V_nO , $n \geq 2$. Последующий отжиг (рис 1, б) при температурах выше $300 \text{ }^\circ\text{C}$ приводит к снижению интенсивности соответствующих пиков и появлению ряда новых, но уже менее интенсивных пиков, обусловленных, вероятнее всего, комплексами V_nO_m ($n, m \geq 2$).

Дивакансии в кремнии подвижны при температурах выше $200 \text{ }^\circ\text{C}$ и в кристаллах Cz-Si междоузельный кислород является основной ловушкой подвижных V_2 [8], т. е. имеет место преобразование V_2 в V_2O через реакцию $V_2 + O_i \Rightarrow V_2O$. Отметим, что возможность такой реакции была недавно подтверждена в детальных исследованиях отжига дивакансий методом DLTS [9, 10]. Появление новых дефектов после исчезновения V_2 также ясно наблюдалось в наших исследованиях методом ИК-поглощения. На рис. 2 показан фрагмент спектра, измеренного при низких температурах, для образца, спектры которого приведены на рис. 1, после отжига при $275 \text{ }^\circ\text{C}$ в течение 30 мин. Такая обработка привела к сильному уменьшению (90 %) интенсивности полосы поглощения, обусловленной V_2 и расположенной у 2767 см^{-1} , и к появлению сложной структуры вокруг основной полосы VO. Процедура подгонки лоренцианами использовалась снова для анализа данных. В дополнение к основной полосе поглощения, связанной с VO, в спектрах появились четыре относительно интенсивные полосы, расположенные у $833,4$; $837,0$; $842,4$ и $848,7 \text{ см}^{-1}$. Во время подгонки для каждой полосы присутствие всех трех изотопов кремния было принято во внимание [7]. Для наглядности только подгоночные кривые 1–5, соответствующие структуре $^{28}\text{Si}\text{--}^{16}\text{O}\text{--}^{28}\text{S}$, показаны на рис. 2, однако суммарная кривая подгонки учитывает все вклады.

Здесь нужно отметить, что полоса $848,7 \text{ см}^{-1}$ не наблюдалась в спектрах, измеренных при комнатной температуре. Эта полоса исчезает также в спектрах, измеренных при низких температурах, когда оптическое возбуждение от спектрометра было подавлено путем использования германиевого фильтра. При этом интенсивность полосы $842,4 \text{ см}^{-1}$ увеличивалась. Также

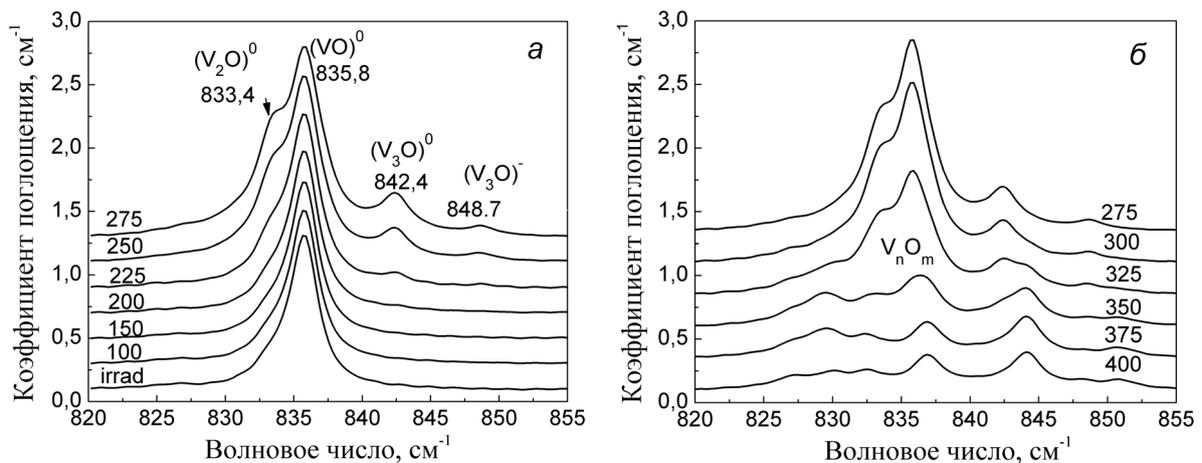


Рис. 1. Развитие спектров поглощения, измеренных при $T = 20 \text{ К}$ для образца Cz-Si ($[O_i] = 8,3 \cdot 10^{17}$, $[C_s] = 7 \cdot 10^{16}$, $[P] = 1 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$), облученного быстрыми нейтронами ($F = 7,5 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-2}$), в процессе изохронного отжига в интервале температур: а – $100\text{--}275 \text{ }^\circ\text{C}$; б – $275\text{--}400 \text{ }^\circ\text{C}$

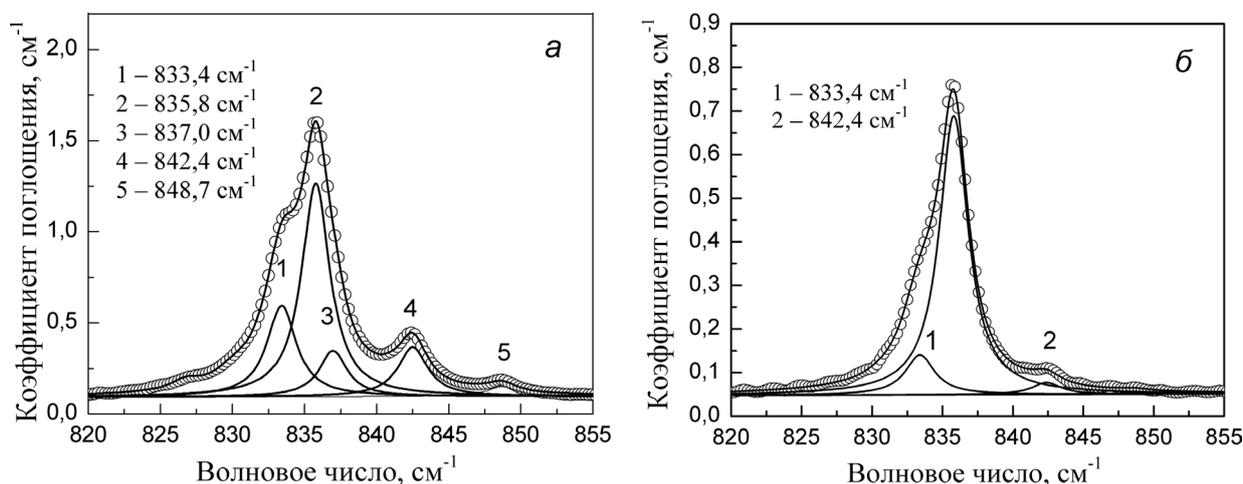


Рис. 2. Фрагмент низкотемпературного спектра поглощения для образца Cz-Si ($[O_i] = 8,3 \cdot 10^{17}$, $[C_s] = 7 \cdot 10^{16}$, $[P] = 1 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$) после отжига при температуре 275 °C в течение 30 мин: а – облученного быстрыми нейтронами; б – облученного быстрыми электронами; сплошные линии – подгонка с использованием функции Лоренца

низкотемпературные измерения с использованием германиевого фильтра показали существенное уменьшение интенсивности полосы 837,0 см^{-1} и соответствующий рост интенсивности полосы 833,4 см^{-1} . Эти факты указывают на то, что полосы 837,0 и 848,7 см^{-1} связаны с оптически возбужденными состояниями (наиболее вероятно, с однократно отрицательно заряженными состояниями) дефектов, ответственных за полосы 833,4 и 842,4 см^{-1} .

Таким образом, наши данные показывают, что отжиг дивакансии в образцах Cz-Si сопровождается появлением новых полос поглощения. Самые интенсивные из них расположены у 833,4 и 842,4 см^{-1} . Исследования изохронного отжига показали, что не только процессы их формирования, но также и кинетика отжига очень подобны. Полосы 833,4 и 842,4 см^{-1} исчезают одновременно после отжига в температурном диапазоне 300–350 °C. На рис. 3 представлены зависимости амплитуд соответствующих полос от температуры изохронного отжига.

Можно предположить, что обе полосы связаны с одним и тем же дефектом, а именно V_2O , находящимся в различных конфигурациях. Однако есть факты, которые не подтверждают такое предположение. Мы обнаружили, что отношение интенсивностей этих полос различно в образцах, облученных быстрыми электронами и нейтронами, т. е. зависит от вида облучения (энергии и массы частиц). Полоса 842,4 см^{-1} является намного более интенсивной в случае нейтронного облучения. Относительная интенсивность полосы 842,4 см^{-1} по отношению к полосе 833,4 см^{-1} составляет $\approx 0,5$ в образцах, облученных нейтронами, а для образцов, облученных электронами, $\approx 0,3$. Это свидетельствует о том, что она возникает из более сложного дефекта, чем полоса 833,4 см^{-1} . Возможный кандидат – дефект V_3O , который может формироваться путем взаимодействия подвижных дивакансий с А-центрами, т. е. через реакцию $V_2 + VO \Rightarrow V_3O$. Однако последняя не может объяснить полное формирование комплексов V_3O , ответственных за полосу поглощения 842,4 см^{-1} , особенно в образцах с относительно низкой концентрацией VO. Вероятнее всего, тривакансии V_3 , образующиеся главным образом как первичные дефекты, обладают такой же миграционной способностью, как и V_2 , и V_3O может образовываться через реакцию $V_3 + O_i \Rightarrow V_3O$. Такое заключение хорошо согласуется как с данными

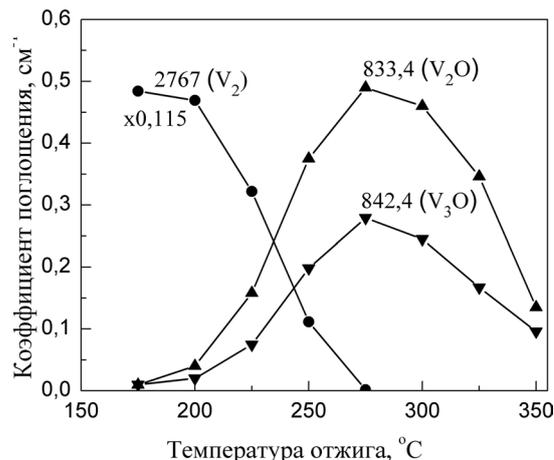


Рис. 3. Зависимости амплитуд полос поглощения при 2767, 833,4 и 842,4 см^{-1} , обусловленных комплексами V_2 , V_2O и V_3O , от температуры изохронного отжига

ЭПР [11] по термической стабильности V_3 , так и с недавними результатами, полученными методом DLTS по отжигу тривакансий и их трансформации в комплексы V_3O [12, 13].

Заключение. Методом ИК-спектроскопии с высокой разрешающей способностью установлено, что в температурном интервале отжига дивакансий (200–275 °С) в облученных кислородосодержащих образцах кремния имеет место формирование двух полос поглощения, расположенных у 833,4 и 842,4 см^{-1} . В отличие от предыдущих исследований, где обе эти полосы были приписаны комплексу дивакансия–кислород V_2O , только полоса 833,4 см^{-1} может быть приписана данному дефекту. Относительная интенсивность полосы 842,4 см^{-1} существенно увеличивается в образцах, облученных нейтронами, по сравнению с образцами, облученными электронами. Сделано заключение, что эта полоса связана с более сложным комплексом по сравнению с центром, ответственным за полосу 833,4 см^{-1} . Наиболее вероятно, что этим центром является комплекс тривакансия–кислород V_3O , образующийся путем захвата подвижных V_3 междоузельными атомами кислорода.

Литература

1. Londos C. A., Fytros L. G., Georgiou G. J. // Defect and Diffusion Forum. 1999. Vol. 273/274. P. 1–32.
2. Lindström J. L., Murin L. I., Hallberg T. et al. // Nuclear Inst. and Methods in Physics Research B. 2002. Vol. 186. P. 121–125.
3. Murin L. I., Lindström J. L., Svensson B. G. et al. // Solid State Phenomena. 2005. Vol. 108/109. P. 267–272.
4. Sarlis N. V., Londos C. A., Fytros L. G. // J. Appl. Phys. 1997. Vol. 81, N 4. P. 1645–1650.
5. Lindström J. L., Murin L. I., Markevich V. P. et al. // Physica B. 1999. Vol. 273–274. P. 291–295.
6. Murin L. I., Svensson B. G., Lindström J. L. et al. // Physica B: Condensed Matter. 2009. Vol. 404, N 23/24. P. 4568–4571.
7. Толкачева Е. А., Мурин Л. И. // Журн. приклад. спектроскопии. 2013. Т. 80, № 4. С. 582–586.
8. Cheng L. J., Corelli J. C., Corbett J. W., Watkins G. D. // Phys. Rev. 1966. Vol. 152, N 2. P. 761–774.
9. Markevich V. P., Peaker A. R., Lastovskii S. B. et al. // J. Phys.: Condensed Matter. 2003. Vol. 15. P. S2779–S2789.
10. Alfieri G., Monakhov E. V., Avset B. S., Svensson B. G. // Phys. Rev. B. 2003. Vol. 68, N 23. P. 3202(1–4).
11. Lee Y.-H., Corbett J. W. // Phys. Rev. B. 1974. Vol. 9, N 10. P. 4351–4361.
12. Markevich V. P., Peaker A. R., Hamilton B. et al. // Phys. Rev. B. 2009. Vol. 80, N 23. P. 5207(1–7).
13. Markevich V. P., Peaker A. R., Hamilton B. et al. // Physica B. 2012. Vol. 407, N 15. P. 2974–2977.

E. A. TOLKACHEVA, L. I. MURIN

IR ABSORPTION STUDIES OF VACANCY-OXYGEN RELATED COMPLEXES IN FAST ELECTRON AND NEUTRON-IRRADIATED SILICON CRYSTALS

Summary

By means of infrared absorption spectroscopy a clear correlation between the disappearance of the divacancy (V_2) in the temperature range 200–275 °С and the appearance of two absorption bands positioned at 833.4 and 842.4 cm^{-1} in irradiated oxygen-rich Si crystals has been found. Both these two emerging bands have previously been assigned to a divacancy-oxygen defect V_2O formed via interaction of mobile V_2 with interstitial oxygen (O_i) atoms. The present study shows, however, that the two bands arise from different defects since the ratio of their intensities depends on the type of irradiation and only the band at 833.4 cm^{-1} can be assigned to V_2O . The 842.4 cm^{-1} band is much more pronounced in neutron irradiated samples as compared to the samples irradiated with electrons. We argue that it is related to a trivacancy-oxygen defect (V_3O) formed via interaction of mobile V_3 with O_i atoms.

УДК 543.42:621.373

С. С. АНУФРИК, В. Ч. БЕЛАШ, С. В. ВАСИЛЬЕВ, А. Ю. ИВАНОВ, А. В. КОПЫЦКИЙ

ТЕРМОДИФУЗИЯ В МЕТАЛЛАХ ПРИ ИМПУЛЬСНОМ НЕРАЗРУШАЮЩЕМ ЛАЗЕРНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы

(Поступила в редакцию 14.02.2014)

В наши дни уже стало традиционным исследование воздействия лазерного излучения на вещество и образование приповерхностной лазерной плазмы. Силовое воздействие на металлы хорошо изучено и основано на явлении тепломассопереноса. В то же время использование низкоэнергетического лазерного излучения весьма перспективно для микро- и нанотехнологий. Как показано в работах [1–3], использование излучения с плотностью мощности, при которой не происходит заметных изменений на поверхности (10^4 – 10^5 Вт/см²), может приводить к изменению морфологии поверхности на микроуровне и микротвердости. Следует, однако, отметить, что механизмы указанного воздействия лазерного излучения еще недостаточно изучены. Раскрытие таких механизмов является актуальной задачей, поскольку позволит направленно модифицировать структуру и изменять физические свойства материалов. Поиск таких механизмов и является целью данной работы.

Экспериментальная установка и экспериментальные результаты. Схема экспериментальной установки, использовавшейся в работе, приведена на рис. 1. Излучение рубинового лазера ГОР-100М 1, работавшего в режиме свободной генерации (длительность импульса $\tau = 1,2$ мс, $\lambda_1 = 0,694$ мкм), пройдя через фокусирующую систему 2, направлялось на исследуемый образец 3. Пятно фокусировки, создаваемое диафрагмой 4 и системой 2, имело диаметр 2 мм. Экспериментально определенный размер фокальной области (области каустики) системы 2 при использовании лазера 1 не превышал 2 мм. Часть лазерного излучения (~ 4 %) направлялась передней гранью стеклянного клина 5 в измеритель энергии ИМО-2Н 6, входной зрачок которого был расположен

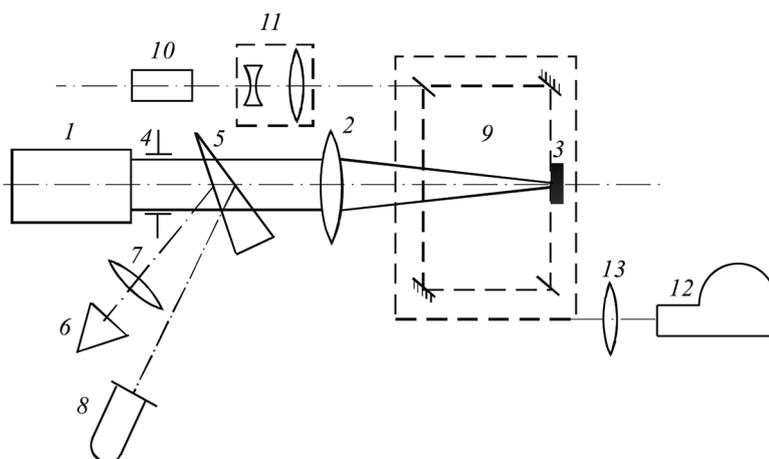


Рис. 1. Схема экспериментальной установки: 1 – рубиновый лазер ГОР-100М; 2 – фокусирующая система; 3 – исследуемый образец; 4 – диафрагма; 5 – светоделительный клин; 6 – измеритель энергии ИМО-2Н; 7 – линза; 8 – коаксиальный фотоэлемент ФЭК-14; 9 – интерферометр Маха – Цендера; 10 – зондирующий рубиновый лазер; 11 – телескопическая система; 12 – камера СФР-1М; 13 – объектив

в фокальной плоскости линзы 7. Плотность потока воздействующего излучения варьировалась от 10^4 до $5 \cdot 10^5$ Вт/см². Отраженное задней гранью клина 5 излучение направлялось на коаксиальный фотоэлемент ФЭК-14 8, сигнал с которого подавался на вход осциллографа С8-13 и использовался для регистрации временной формы лазерного импульса.

Для определения полей плотности газа, окружающего облучаемый образец, и контроля отсутствия плазмообразования (отсутствия области с отрицательной рефракцией [4]) в ходе воздействия лазерного излучения на упомянутый образец помещался в одно из плеч голографического интерферометра Маха – Цендера (9 на рис. 1). Интерферометр освещался излучением рубинового лазера 10 ($\lambda_1 = 0,694$ мкм), работавшего в режиме свободной генерации. Селекция поперечных мод зондирующего лазера осуществлялась диафрагмой, помещенной внутри резонатора, а продольных – эталоном Фабри – Перо, использовавшимся в качестве выходного зеркала. Зондирующее излучение направлялось в коллиматор 11, позволявший получать параллельный световой пучок диаметром от 2 мм до 3 см, превышающим толщину облучаемого образца, что позволило наблюдать за ростом кратера, изменением плотности и температуры вещества в облучаемой зоне, а также за формированием и распространением упругих волн в веществе мишени.

Интерферометр был состыкован со скоростной фоторегистрирующей камерой СФР-1М 12, плоскость фотопленки в которой была сопряжена с меридиональным сечением воздействующего на образец лазерного луча при помощи объектива 13. Скоростная камера работала в режиме лупы времени. Угол голографирования был ограничен конструкцией камеры и составлял примерно 10^{-2} рад, что соответствовало фотографической разрешающей способности около 16 лин/мм. Полученные кадры голограмм сфокусированного изображения имели пространственное разрешение по полю объекта примерно 200 мкм. Временное разрешение составляло ~ 1 мкс. Относительная погрешность измерений показателя преломления и связанных с ним величин определялась точностью регистрации смещения полос на восстановленных интерференционных картинах и не превышала 10 %.

Полученные на основании обработки интерферограмм [4, 5] данные показали, что плотность воздуха у поверхности облучаемого образца изменяется от $1,16 \cdot 10^3$ до $3 \cdot 10^3$ кг/м³.

Объектами исследования являлись титановые и медные образцы с никелевым покрытием. Элементный состав образцов до и после облучения изучался с использованием рентгеновского спектрометра ElvaX. Исследования показали, что содержание некоторых элементов в приповерхностном слое образца после неразрушающей лазерной обработки существенно изменяется.

Таблица 1. Зависимость содержания никеля и титана в поверхностном слое облучаемого образца от величины поглощенной энергии (определялась с учетом значения коэффициента отражения лазерного излучения от мишени $\rho_{от} = 0,8$ [6–8])

| | | | | |
|-------------------------|-------|-------|-------|-------|
| Поглощенная энергия, Дж | 0 | 5 | 10 | 15 |
| Содержание никеля, % | 97,65 | 96,94 | 96,89 | 96,76 |
| Содержание титана, % | 0,98 | 1,22 | 1,28 | 1,40 |

В частности, при фронтальном воздействии на тонкий (несколько микрометров) слой никеля, нанесенный на подложку из титана, после облучения концентрация титана в приповерхностном слое значительно (в 1,5 раза и более) увеличивалась (табл. 1). Содержание других примесей (кобальт, хром, железо и др.), имевшихся в незначительном количестве (десятые доли процента) в приповерхностном слое, практически не изменялось. Схожая картина наблюдалась при воздействии лазерного излучения на тыльную сторону тонкой медной пластины с покрытием из никеля (табл. 2).

Таблица 2. Зависимость содержания никеля и меди в поверхностном слое облучаемого образца от величины поглощенной энергии

| | | | |
|-------------------------|------|------|------|
| Поглощенная энергия, Дж | 0 | 10 | 15 |
| Содержание меди, % | 81,0 | 78,3 | 77,5 |
| Содержание никеля, % | 10,8 | 11,8 | 12,8 |

Существенно, что концентрация титана (в первом случае) и никеля (о втором) монотонно увеличивалась при увеличении плотности потока воздействующего лазерного излучения в указанном интервале. Это свидетельствует об активной диффузии металла из подложки в покрытие в зоне импульсного нагревания образца лазерным излучением. Возможно, происходит и диффузия металла из покрытия в подложку, однако использованная в работе экспериментальная методика позволяет исследовать элементный состав только тонкого приповерхностного слоя.

Обсуждение результатов. Для выяснения причин подобной зависимости содержания элементов в образцах, обработанных лазерным излучением, нами был проведен расчет изменения температуры $T(\vec{r}, t)$ металлического (медного) образца, облучаемого лазерными импульсами с использованными в эксперименте параметрами. Решалось уравнение

$$\frac{\partial T(\vec{r}, t)}{\partial t} = a^2 \Delta T(\vec{r}, t) + f(\vec{r}, t)$$

с начальными условиями

$$T(\vec{r}, 0) = T_0 = 300K$$

и граничным условием

$$(\vec{n} \cdot \text{grad} T(\vec{r})) = 0,$$

которое задавалось на реальной границе облучаемого образца – диска толщиной $l_d = 1$ мм и радиусом $R_{dl} = 3$ см. Функция источника $f(r, t)$ имела в пределах пятна фокусировки радиально симметричный вид

$$f(\vec{r}, t) = \begin{cases} 0, & \theta > \theta_0 \\ b \alpha(t) \delta(r - R_0), & \theta \leq \theta_0 \end{cases}$$

где $b = \frac{E}{d^2} \cdot \frac{1 - \rho_{от}}{c \gamma \sqrt{\alpha \tau}}$; энергия импульса (одного пика импульса рубинового лазера, работающего в режиме свободной генерации) $E = (0,5-2)$ Дж; удельная теплоемкость меди $c = 380$ Дж/кг·К [6]; длительность импульса $\tau \approx 1$ мс; плотность меди $\gamma = 8,96 \cdot 10^3$ кг/м³; $a = 1,15$ см²/с – температуропроводность меди; функция $\alpha(t)$ – нормированная временная зависимость энергии в воздействующем лазерном импульсе; $\rho_{от}$ – коэффициент отражения, который с учетом результатов работ [6–8] равнялся 0,8; $\theta = \arcsin \left(\frac{4dh_0}{(4h_0^2 + l_0^2)} \right)$; $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака.

Подобная модель не учитывает теплообмен с окружающим облучаемый образец газом и ряд других процессов, протекающих как в металлическом образце, так и у его поверхности [9–11]. Тем не менее данная модель может быть использована для качественного описания нагревания металлов.

Рассчитанная в рамках модели плоского теплового источника [12] зависимость изменения температуры $\Delta T(\vec{r}, t) = T(\vec{r}, t) - T_0$ под воздействием лазерного импульса при

$$\alpha(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \tau \\ 0, & t > \tau \end{cases}$$

имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta T(t, z, r) = & b \frac{d^2}{16l} \left(t_1 + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{8}{K_i d} J_1 \left(\frac{K_i d}{2} \right) \cdot \frac{e^{-K_i^2 a^2 t}}{K_i^2 a^2} \left(e^{K_i^2 a^2 t_1} - 1 \right) J_0(K_i r) \right) + \\ & + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\pi^2 n^2 a^2 t}{l^2}}}{\pi^2 n^2 a^2} \left(e^{\frac{\pi^2 n^2 a^2 t_1}{l^2}} - 1 \right) \cos \left(\frac{\pi n}{l} z \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=2}^{\infty} \frac{8}{d \sqrt{K_i^2 - \frac{\pi^2 n^2}{l^2}}} \times \end{aligned}$$

$$\times J_1 \left(\frac{d}{2} \sqrt{K_i^2 - \frac{\pi^2 n^2}{l^2}} \right) \frac{e^{-K_i^2 a^2 t^2}}{K_i a^2} \left(e^{K_i^2 a^2 t_1} - 1 \right) \cos \left(\frac{\pi n}{l} z \right) J_0 \left(\sqrt{K_i^2 - \frac{\pi^2 n^2}{l^2}} r \right),$$

где

$$t_1 = \begin{cases} t, & t < \tau \\ \tau, & t \geq \tau \end{cases}$$

а K_i определяется из уравнений $J_1(K_i R) = 0$ в первой сумме и

$$J_1 \left(\sqrt{K_i^2 - \frac{\pi^2 n^2}{l^2}} R \right) = 0$$

в третьей сумме. Здесь $J_0(x)$, $J_1(x)$ – функции Бесселя; z , r – расстояния до точки, в которой определяется ΔT , вдоль оси системы и в направлении, нормальном к указанной оси соответственно.

На рис. 2 представлены рассчитанные для $E = 1$ Дж временные зависимости ΔT на границе пятна фокусировки лазерного излучения на поверхности медного образца. Видно, что T быстро (до окончания действия лазерного импульса) возрастает до значения ≈ 375 К и довольно быстро убывает (через ~ 10 мкс после подачи импульса $\Delta T < 5$ К). Существенно, что при подаче 2-го лазерного пика временная зависимость ΔT остается такой же – меняется только T_0 . Следовательно, после подачи десятков лазерных импульсов температура мишени может подниматься до ≈ 1000 К, но не достигает температуры плавления меди. Аналогичным образом изменяется температура никелевой мишени при воздействии на ее поверхность лазерного излучения с рассматриваемыми параметрами.

Таким образом, расчеты показывают, что в ходе импульсного воздействия лазерного излучения на металлический образец его температура на короткий промежуток времени существенно возрастает, что не может не приводить к активизации диффузии материала покрытия в подложку и материала подложки в покрытие. Этому также должно способствовать и существенное (не менее чем в 2,5 раза) кратковременное повышение давления воздуха у поверхности мишени, могущее приводить к динамическим процессам (распространению упруго-пластических волн) в облучаемом образце.

Для определения структурных изменений металлических образцов после воздействия лазерного излучения использовался рентгеновский дифрактометр ДРОН-2.0. Как известно, исследованные металлические образцы (сплошные поликристаллические) имеют в равновесном состоянии кубическую гранцентрированную кристаллическую решетку. В дифрактометре использовалось излучение K_α линии от трубки с медным антикатодом, фильтрованное никелевым стандартным фильтром на длине волны 154,050 пм. Для выявления наличия и характера структурных

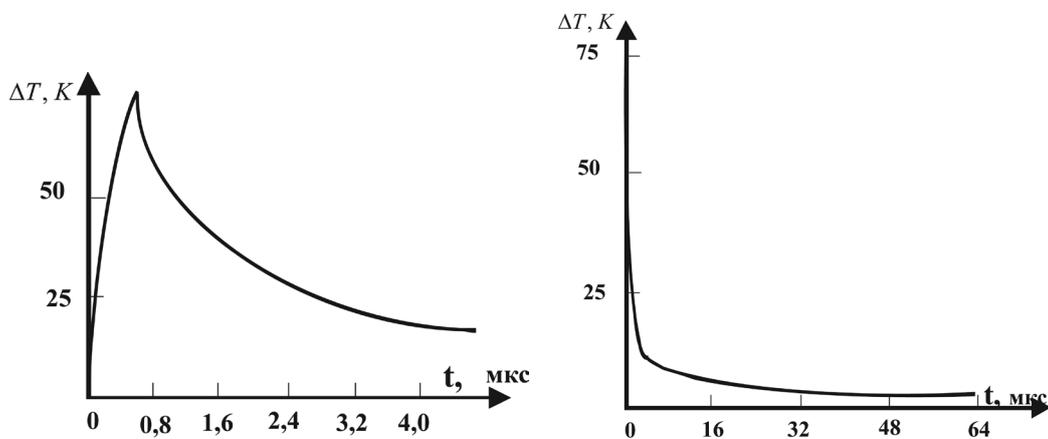


Рис. 2. Временные зависимости ΔT на границе пятна фокусировки излучения на поверхности меди при различном временном разрешении

изменений была использована методика, описанная в [13]. Суть этой методики заключается в вычислении функции Патерсона $P(\vec{u})$, т. е. самосвертки функции относительной электронной плотности [14]:

$$P(\vec{u}) = \frac{1}{V} \int \rho(\vec{r}) \rho(\vec{r} - \vec{u}) d\vec{r},$$

или [14],

$$P(\vec{u}) = \int F^2(\vec{S}) \cos(2\pi \vec{S} \cdot \vec{u}) d\vec{S},$$

где \vec{u} – вектор, связывающий два рассеивающих центра с радиус-векторами \vec{r} и $(\vec{r} - \vec{u})$; V – рассеивающий объем; \vec{S} – вектор обратного пространства; F – рассеивающая способность центра ($I(S) = |F|^2$).

При исследовании поликристаллических объектов необходимо усреднить функцию $P(\vec{u})$ по сфере с радиусом S в обратном пространстве. В этом случае

$$\langle P(\vec{u}) \rangle = \int_S F^2(\vec{S}) \frac{\sin(2\pi \vec{S} \cdot \vec{u})}{2\pi \vec{S} \cdot \vec{u}} d\vec{S}.$$

В соответствии с этим выражением проводился расчет корреляционных составляющих функций радиального распределения атомной плотности [14]. Показано, что для облученных образцов наблюдается не только размытие функции радиального распределения, обусловленное их поликристаллической структурой, но и расщепление распределения. Полученные результаты свидетельствуют, что после воздействия лазерного излучения на металлы в зоне облучения кристаллическая структура характеризуется искажением кубической гранецентрированной решетки, т. е. элементарная ячейка принимает форму параллелепипеда, отличного от куба. Механизм подобной трансформации может быть следующим. Как уже указывалось, каждый пичок лазерного излучения вызывает увеличение в течение ~ 1 мкс температуры на поверхности пятна фокусировки лазерного излучения на несколько десятков кельвинов (для меди около 75 К). Поскольку основная масса металлического образца не нагрета, тепловое расширение облученной зоны происходит в основном в направлении лазерного луча. Остывание нагретой зоны также происходит достаточно быстро (\sim за 1 мкс для меди), т. е. до начала действия на образец следующего пичка лазерного излучения. За это время искаженная форма деформированной зоны облучения не успевает восстановиться, т. е. форма облученной зоны «замораживается». Эффект может усиливаться внутренним напряжением в облученной зоне в ходе формирования в металлическом образце акустических и упруго-пластических волн [15].

Заключение. Проведенные исследования показали, что содержание некоторых элементов в приповерхностном слое исследованных образцов после неразрушающей лазерной обработки существенно изменяется. После лазерного облучения тонкого (несколько микрометров) слоя никеля, нанесенного на подложку из титана, концентрация титана в приповерхностном слое значительно (в 1,5 раза и более) увеличивалась. Содержание других примесей (кобальт, хром, железо и др.), имевшихся в незначительном количестве (десятые доли процента) в приповерхностном слое, практически не изменялось. Существенно, что концентрация титана монотонно увеличивалась при увеличении плотности потока воздействующего лазерного излучения в указанном интервале. Аналогичные явления наблюдались и при воздействии лазерного излучения на тыльную сторону тонкой медной пластины с покрытием из никеля. Это свидетельствует об активной диффузии металла из подложки в покрытие в зоне импульсного нагревания исследованных образцов лазерным излучением.

Литература

1. Мирзоев Ф. Х., Панченко В. Я., Шелепин Л. А. // УФН. 1996. Т. 166, № 1. С. 3–32.
2. Paustovsky A. V., Shelud'ko V. E. // Functional Materials. 1999. Vol. 6, no 5. P. 964–976.
3. Васильев С. В., Иванов А. Ю., Лиопо В. А. // ИФЖ. 2007. Т. 80, № 5. С. 12–18.

4. *Абруков С. А.* Теневые и интерференционные методы исследования оптических неоднородностей. Казань, 1962.
5. *Островский Ю. И., Бутусов М. М., Островская Г. В.* Голографическая интерферометрия. М., 1997.
6. Физические величины: справочник / А. П. Баби́чев и др. М., 1991.
7. *Бонч-Бруевич А. М.* и др. // ЖТФ. 1968. Т. 38, № 8. С. 851–855.
8. *Бойко В. И.* и др. // Докл. АН СССР. 1980. Т. 250, № 1. С. 78–82.
9. *Астапчик С. А., Великевич С. П.* // Весці АН БССР. Сер. фіз.-тэхн. навук. 1988. № 4. С. 18–21.
10. *Евтушенко А. А., Уханская О. М.* // Инженер.-физ. журн. 1994. Т. 66, № 5. С. 627–633.
11. *Бельков С. А., Гаранин С. Г.* // Квантовая электроника. 1992. Т. 19, № 12. С. 1187–1190.
12. *Григорьев Б. А., Нужный В. А., Шибанов Б. В.* Таблицы для расчета нестационарных температур плоских тел при нагреве излучениями. М., 1971.
13. *Лиопо В. А., Война В. В.* Рентгеновская дифрактометрия. Гродно, 2003.
14. *Бюржер М.* Структура кристаллов и векторное пространство. М., 1961.
15. *Лямшев Л. М.* // УФН. 1981. Т. 135, № 4. С. 637–669.

S. S. ANUFRİK, V. Ch. BELASH, S. V. VASILIEV, A. Yu. IVANOV, A. V. KAPYTSKI

METAL THERMODIFFUSION WHEN AFFECTED BY THE NON-DESTRUCTIVE PULSE LASER RADIATION

Summary

The changes in the elemental composition of two-layer target when affected by the radiation of a GOR-100M ruby laser operating in the free oscillation regime were studied. The radiation flux density was varied from 10^4 to $5 \cdot 10^5$ W cm⁻². The elemental composition of the target before and after irradiation was investigated by means of an ElvaX X-ray spectrometer. The investigations showed that affecting a thin layer (several μm) nickel layer covering a titanium sample, the concentration of titanium in the surface stratum considerably (by a factor of 1.5 and more) increased. It is important that the titanium concentration with increasing the flux density of the operating irradiation increased monotonically in the mentioned space. The analogous phenomena on the laser irradiation effect on the back side of the thin copper plate covered with nickel were observed. This testifies to the active metal diffusion from the target into the surface stratum in the zone of pulse heating of the investigated samples by means of laser radiation.

УДК 530.12

А. П. РЯБУШКО¹, Т. А. ЖУР², И. П. БОЯРИНА², О. Л. ЗУБКО¹, В. И. ЮРИНОК¹

О СУЩЕСТВОВАНИИ ТРЕУГОЛЬНЫХ ТОЧЕК ЛИБРАЦИИ В ФОТОГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

¹Белорусский национальный технический университет

²Белорусский государственный аграрный технический университет

(Поступила в редакцию 28.03.2014)

Введение. Постановка задачи. В любой звездной системе (в том числе и в Солнечной) движение тел происходит в *фотогравитационном* поле, так как на тела действуют не только силы гравитации, но также силы светового давления, которые могут в определенных случаях даже превосходить силы гравитации (см. напр., [1–6]).

В эпоху интенсивного освоения космического пространства, когда необходимы более точные прогнозы в движении естественных и искусственных тел в космосе, пренебрежение эффектами светового давления не может быть оправдано. Следует пересмотреть решения ряда задач ньютоновской небесной механики о движении тел при учете светового давления (более точно – электромагнитного излучения звезды).

Данная работа посвящена пересмотру лагранжевого решения для треугольных точек либрации L_4 и L_5 в ограниченной круговой задаче трех тел, когда одно из тяжелых тел A_1 массой m_1 является звездой (источник сильного электромагнитного излучения), другое тяжелое тело A_2 массой m_2 – темное (излучение отсутствует), третье тело A_3 массой m_3 – пробное (частица), которое не оказывает влияния на движения тел A_1 и A_2 .

Так как в нашей задаче прямое световое давление оставляет движение тел *плоским*, то без ограничения общности их движение в неподвижной прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ можно считать происходящим в плоскости xOy , т. е. $z = 0$, а поэтому имеем уравнения движения (УД) в виде следующей системы [7–10]:

$$\frac{d^2 \tilde{x}_1}{dt^2} + \frac{\gamma m_2}{\tilde{r}_{12}^3} (\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2) = 0, \quad \frac{d^2 \tilde{y}_1}{dt^2} + \frac{\gamma m_2}{\tilde{r}_{12}^3} (\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2) = 0; \quad (1)$$

$$\frac{d^2 \tilde{x}_2}{dt^2} + \frac{\gamma m_1}{\tilde{r}_{12}^3} (\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1) = \frac{\gamma A_{12}}{\tilde{r}_{12}^3} (\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1), \quad \frac{d^2 \tilde{y}_2}{dt^2} + \frac{\gamma m_1}{\tilde{r}_{12}^3} (\tilde{y}_2 - \tilde{y}_1) = \frac{\gamma A_{12}}{\tilde{r}_{12}^3} (\tilde{y}_2 - \tilde{y}_1); \quad (2)$$

$$\frac{d^2 \tilde{x}_3}{dt^2} + \frac{\gamma m_2}{\tilde{r}_{23}^3} (\tilde{x}_3 - \tilde{x}_2) + \frac{\gamma m_1}{\tilde{r}_{13}^3} (\tilde{x}_3 - \tilde{x}_1) = \frac{\gamma A_{13}}{\tilde{r}_{13}^3} (\tilde{x}_3 - \tilde{x}_1), \quad \frac{d^2 \tilde{y}_3}{dt^2} + \frac{\gamma m_2}{\tilde{r}_{23}^3} (\tilde{y}_3 - \tilde{y}_2) + \frac{\gamma m_1}{\tilde{r}_{13}^3} (\tilde{y}_3 - \tilde{y}_1) = \frac{\gamma A_{13}}{\tilde{r}_{13}^3} (\tilde{y}_3 - \tilde{y}_1). \quad (3)$$

В отличие от ньютоновских УД в системе (1)–(3), учитывающей световое давление на тела, над x_i, y_i, r_{ij} ставим значок «~» (тильда), так как решения системы (1)–(3) отличаются от лагранжевых решений. В УД (1) – (3) $\tilde{r}_{12}, \tilde{r}_{13}, \tilde{r}_{23}$ – расстояния между телами A_1 и A_2, A_1 и A_3, A_2 и A_3 соответственно; $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-8} \text{ г}^{-1} \cdot \text{см}^3 \cdot \text{с}^{-2}$ – ньютоновская постоянная тяготения; t – время; величины

$$A_{12} = \frac{k_2 \sigma_2 W_1 r^2}{\gamma m_2 c} \text{ г}, \quad A_{13} = \frac{k_3 \sigma_3 W_1 r^2}{\gamma m_3 c} \text{ г} \quad (4)$$

называются *редуцирующими* массами звезды A_1 , соответствующими телам A_2 и A_3 . Структура величин A_{12} и A_{13} обоснована в ряде работ (см., напр., [3–6, 11]): k_2, k_3 – коэффициенты отражения

света телами A_2 и A_3 , которые заключены в границах $1 \leq k_2 \leq 2$, $1 \leq k_3 \leq 2$; σ_1, σ_2 – площади миделевых сечений тел A_2 и A_3 ; $c = 3 \cdot 10^{10} \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$ – скорость света в вакууме; W_1 – звездная постоянная, являющаяся плотностью энергии электромагнитного (светового) излучения звезды A_1 , приходящего за 1 с на 1 см^2 площадки, перпендикулярной направлению на звезду и находящейся на расстоянии r от нее. В уравнениях (2), (3) справа не учтены силовые добавки, возникающие благодаря эффекту Доплера и абберации, так как они малы по сравнению с прямым световым давлением [12].

Если не учитываем световое давление, то в УД (2) и (3) члены с A_{12} и A_{13} заменяем нулями, опускаем значок тильда и получаем классические ньютоновские УД, которые (как показал Лагранж в 1772 г. [13]) имеют следующие точные решения [7–10]:

$$x_i = x_i^0 \cos \omega_0 t - y_i^0 \sin \omega_0 t, \quad y_i = x_i^0 \sin \omega_0 t + y_i^0 \cos \omega_0 t, \quad i = 1, 2, 3, \quad (5)$$

где ω_0 , x_i^0 , y_i^0 – вполне определенные постоянные. Для *треугольного* кругового лагранжевого решения

$$r_{12} = r_{23} = r_{31} = r_0 = \text{const}, \quad \omega_0^2 = \gamma(m_1 + m_2 + m_3)/r_0^3 \quad (6)$$

и выполнены условия барицентричности

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 = 0, \quad m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 = 0. \quad (7)$$

Для ограниченного кругового треугольного лагранжевого решения (когда $m_3 \ll m_1$, $m_3 \ll m_2$ и поэтому в (6) и (7) можно положить $m_3 = 0$) имеем [7–10]:

$$x_1^0 = -\frac{m_2}{m} r_0, \quad x_2^0 = \frac{m_1}{m} r_0, \quad x_3^0 = \frac{m_1 - m_2}{2m} r_0; \quad y_1^0 = y_2^0 = 0, \quad y_3^0 = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} r_0, \quad m = m_1 + m_2. \quad (8)$$

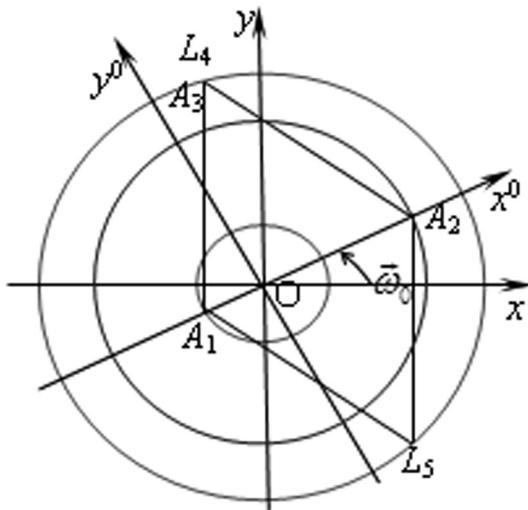


Рис. 1

Здесь y_3^0 имеет двойной знак. Верхний знак «+» определяет (в соответствии с установившейся терминологией) точку либрации L_4 , а нижний «-» – точку либрации L_5 . Таким образом, пробное тело A_3 может находиться в точке L_4 или в точке L_5 (рис. 1). Система $x^0 O y^0$ вращается около центра масс O тел A_1 и A_2 с угловой скоростью $\bar{\omega}_0$ относительно неподвижной системы координат $x O y$. Точки A_1, A_2, A_3, L_5 неподвижны во вращающейся системе координат $x^0 O y^0$ и имеют постоянные координаты, заданные равенствами (8). В неподвижной системе координат $x O y$ эти точки описывают окружности, параметрические уравнения которых задаются равенствами (5). Стороны треугольников $A_1 A_2 A_3$ и $A_1 A_2 L_5$ равны $r_0 = \text{const}$, т. е. эти треугольники являются равносторонними. Решения УД (1)–(3), содержащие редуцирующие массы A_{12}, A_{13} , конечно будут отличаться от

лагранжевых решений (5)–(8). Наша задача – выяснение этих отличий путем интегрирования системы (1)–(3) и обсуждения полученных результатов.

1. Интегрирование системы УД (1)–(3). Будем искать решение системы (1)–(3) в следующем виде:

$$\tilde{x}_i = (x_i^0 + \bar{x}_i) \cos \omega_0 t - (y_i^0 + \bar{y}_i) \sin \omega_0 t, \quad \tilde{y}_i = (x_i^0 + \bar{x}_i) \sin \omega_0 t + (y_i^0 + \bar{y}_i) \cos \omega_0 t, \quad i = 1, 2, 3, \quad (9)$$

где \bar{x}_i, \bar{y}_i – искомые «световые» поправки к лагранжевым решениям x_i^0, y_i^0 из (8). Суммы $x_i^0 + \bar{x}_i$ и $y_i^0 + \bar{y}_i$ являются координатами тел A_i во вращающейся системе координат $x^0 O y^0$, а \tilde{x}_i, \tilde{y}_i – координатами тел A_i в неподвижной системе координат $x O y$.

Подстановка \tilde{x}_i, \tilde{y}_i из (9) в систему (1)–(3) равносильна записи этой системы во вращающейся системе координат $x^0 O y^0$. Найдя с помощью (9) $\ddot{\tilde{x}}_i, \ddot{\tilde{y}}_i, \tilde{r}_{ij} = [(\tilde{x}_j - \tilde{x}_i)^2 + (\tilde{y}_j - \tilde{y}_i)^2]^{1/2}$, частично воспользовавшись лагранжевым решением (5), (8) и подставив найденные $\ddot{\tilde{x}}_i, \ddot{\tilde{y}}_i, \tilde{r}_{ij}$ в УД (1)–(3), получим после достаточно громоздких преобразований систему линейных дифференциальных уравнений относительно световых поправок \bar{x}_i, \bar{y}_i (точки над буквами означают производные по t):

$$\begin{cases} \ddot{\bar{x}}_1 - 2\omega_0 \dot{\bar{y}}_1 - \omega_0^2 \bar{x}_1 - \frac{\gamma m_2}{(r_{12}^0)^3} \left[\bar{x}_2 - \bar{x}_1 + \frac{3}{2} \alpha_{12} (x_1^0 - x_2^0) \right] = 0, \\ \ddot{\bar{y}}_1 + 2\omega_0 \dot{\bar{x}}_1 - \omega_0^2 \bar{y}_1 - \frac{\gamma m_2}{(r_{12}^0)^3} \left[\bar{y}_2 - \bar{y}_1 + \frac{3}{2} \alpha_{12} (y_1^0 - y_2^0) \right] = 0, \\ \ddot{\bar{x}}_2 - 2\omega_0 \dot{\bar{y}}_2 - \omega_0^2 \bar{x}_2 + \frac{\gamma m_1}{(r_{12}^0)^3} \left[\bar{x}_2 - \bar{x}_1 + \frac{3}{2} \alpha_{12} (x_1^0 - x_2^0) \right] + \frac{\gamma A_{12}}{(r_{12}^0)^3} (x_1^0 - x_2^0) = 0, \\ \ddot{\bar{y}}_2 + 2\omega_0 \dot{\bar{x}}_2 - \omega_0^2 \bar{y}_2 + \frac{\gamma m_1}{(r_{12}^0)^3} \left[\bar{y}_2 - \bar{y}_1 + \frac{3}{2} \alpha_{12} (y_1^0 - y_2^0) \right] + \frac{\gamma A_{12}}{(r_{12}^0)^3} (y_1^0 - y_2^0) = 0; \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} \ddot{\bar{x}}_3 - 2\omega_0 \dot{\bar{y}}_3 - \omega_0^2 \bar{x}_3 + \frac{\gamma m_1}{(r_{13}^0)^3} \left[\bar{x}_3 - \bar{x}_1 + \frac{3}{2} \alpha_{13} (x_1^0 - x_3^0) \right] + \frac{\gamma m_2}{(r_{12}^0)^3} \left[\bar{x}_3 - \bar{x}_2 + \frac{3}{2} \alpha_{23} (x_2^0 - x_3^0) \right] + \\ + \frac{\gamma A_{13}}{(r_{12}^0)^3} (x_1^0 - x_3^0) - \frac{\gamma A_{13}}{(r_{12}^0)^3} \left[\bar{x}_3 - \bar{x}_1 + \frac{3}{2} \alpha_{13} (x_1^0 - x_3^0) \right] = 0, \\ \ddot{\bar{y}}_3 + 2\omega_0 \dot{\bar{x}}_3 - \omega_0^2 \bar{y}_3 - \frac{\gamma m_1}{(r_{13}^0)^3} \left[\bar{y}_3 - \bar{y}_1 + \frac{3}{2} \alpha_{13} (y_1^0 - y_3^0) \right] + \frac{\gamma m_2}{(r_{23}^0)^3} \left[\bar{y}_3 - \bar{y}_2 + \frac{3}{2} \alpha_{23} (y_2^0 - y_3^0) \right] + \\ + \frac{\gamma A_{13}}{(r_{13}^0)^3} (y_1^0 - y_3^0) - \frac{\gamma A_{13}}{(r_{13}^0)^3} \left[\bar{y}_3 - \bar{y}_1 + \frac{3}{2} \alpha_{13} (y_1^0 - y_3^0) \right] = 0, \end{cases} \quad (11)$$

где

$$\alpha_{ij} = \frac{2}{(r_{ij}^0)^2} \left[(x_j^0 - x_i^0)(\bar{x}_j - \bar{x}_i) + (y_j^0 - y_i^0)(\bar{y}_j - \bar{y}_i) \right], \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (12)$$

$$r_{ij}^0 = \left[(x_j^0 - x_i^0)^2 + (y_j^0 - y_i^0)^2 \right]^{1/2}, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3; \quad r_{ij}^0 = r_0. \quad (13)$$

Заметим, что преобразуя систему (1)–(3) в систему (10), (11), мы удерживали только первые степени поправочных функций $\bar{x}_i(t), \bar{y}_i(t)$, считая, что

$$|\alpha_{ij}| < 1. \quad (14)$$

Следовательно, исследование системы (1)–(3) мы проводим в линейном приближении по поправкам \bar{x}_i, \bar{y}_i . Опираясь на данные астрономии и астрофизики [2, 5] и формулу для A_{12} из (4), находим, что величина A_{12} для тяжелого темного тела A_2 чрезвычайно мала (образно говоря, у тела A_2 «парусность» ничтожно малая). Поэтому задачу интегрирования системы (10), (11) можно несколько упростить, положив $A_{12} = 0$. Величина же A_{13} , как мы увидим ниже, для некоторых пробных тел может достигать больших значений, сравнимых с массами тяжелых тел, и пренебрегать величиной A_{13} нельзя. Сразу же отметим, что при $A_{12} = 0$ общее решение системы (10) давно найдено (см. [10, § 30]). Но мы решаем задачу Коши при следующих начальных условиях: если $t = 0$, то $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \bar{y}_1 = \bar{y}_2 = 0, \dot{\bar{x}}_1 = \dot{\bar{x}}_2 = \dot{\bar{y}}_1 = \dot{\bar{y}}_2 = 0$. Это приводит к тому, что решение системы (10) при $A_{12} = 0$ и оговоренных начальных условиях будет тривиальным:

$$\bar{x}_1 = 0, \bar{x}_2 = 0, \bar{y}_1 = 0, \bar{y}_2 = 0. \quad (15)$$

Систему (11) при учете решения (15) и лагранжевого решения (8) можно переписать в виде:

$$\begin{cases} \ddot{\bar{x}}_3 - 2\omega_0 \dot{\bar{y}}_3 - \frac{\gamma}{4r_0^3}(3m + A_{13})\bar{x}_3 \mp \frac{3\sqrt{3}\gamma}{4r_0^3}(m_1 - m_2 - A_{13})\bar{y}_3 = \frac{\gamma A_{13}}{2r_0^2}, \\ \ddot{\bar{y}}_3 + 2\omega_0 \dot{\bar{x}}_3 \mp \frac{3\sqrt{3}\gamma}{4r_0^3}(m_1 - m_2 - A_{13})\bar{x}_3 - \frac{9\gamma}{4r_0^3}\left(m - \frac{5}{9}A_{13}\right)\bar{y}_3 = \pm \frac{\sqrt{3}\gamma A_{13}}{2r_0^2}, \end{cases} \quad (16)$$

где в случае двойного знака верхний знак относится к точке либрации L_4 , а нижний – к точке либрации L_5 .

Система (16) является неоднородной линейной системой дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, интегрирование которой не представляет принципиальных трудностей. Используя стандартную процедуру (см., напр., [14–16]), можем найти общее решение системы (16), которое имеет очень громоздкий вид, поэтому не будем его здесь выписывать. Не будем делать этого и по той причине, что нас интересует решение задачи Коши системы (16) при нулевых начальных условиях: $\bar{x}_3 = \bar{y}_3 = 0$, $\dot{\bar{x}}_3 = \dot{\bar{y}}_3 = 0$ при $t = 0$. Это означает, что нас интересует, как поведет себя пробное тело, помещенное в точку либрации с нулевой скоростью во вращающейся системе x^0Oy^0 . Другими словами, существуют ли для пробного тела точки либрации L_4 и L_5 при учете светового давления? Ниже мы покажем, интегрируя систему (16), что L_4 и L_5 не существуют, т. е. в любом физически допустимом случае пробное тело уходит из точки L_4 или L_5 (см. ниже п. 3).

2. Точки фотолибрации. В связи со сказанным выше возникает новый вопрос: если не существуют в фотогравитационном поле лагранжевы треугольные точки либрации, образующие с телами A_1 и A_2 *равносторонние* треугольники, то возможно существуют другие точки L_4^* , L_5^* , образующие с телами A_1 и A_2 неизменные треугольники, но с разными длинами сторон?

Если такие точки L_4^* и L_5^* существуют (их тогда назовем *треугольными точками фотолибрации*), то система (16) должна иметь решения вида: $\bar{x}_3 = \text{const}$, $\bar{y}_3 = \text{const}$. Такое предположение систему дифференциальных уравнений (16) превращает в систему двух алгебраических уравнений с неизвестными \bar{x}_3 , \bar{y}_3 , определитель которой

$$\Delta = 108m_1m_2 + 48A_{13}m_1 - 60A_{13}m_2 - 32A_{13}^2. \quad (17)$$

Если $\Delta \neq 0$, то решением алгебраической системы являются числа

$$\bar{x}_3 = -4A_{13}r_0(2A_{13} + 9m_2) / \Delta, \quad \bar{y}_3 = \mp 4\sqrt{3}A_{13}r_0(2A_{13} + 3m_2) / \Delta. \quad (18)$$

Каждому пробному телу соответствует свое значение A_{13} и, следовательно, своя пара симметричных относительно оси Ox^0 треугольных точек фотолибрации L_4^* , L_5^* . Рассматривая A_{13} как параметр, получаем параметрические уравнения (18) двух симметричных линий, заполненных точками фотолибрации, которые будем называть *линиями фотолибрации*. Эти точки образуют с телами A_1 и A_2 *разносторонние* треугольники с постоянными сторонами и в неподвижной системе координат xOy описывают с угловой скоростью ω_0 окружности с центром в точке O .

Знаменатель (17) в решении (18) в области гипотетически допустимых значений для $A_{13} \in [0, +\infty)$ один раз обращается в нуль при значении

$$A_{13}^0 = \frac{1}{16} \left[12m_1 - 15m_2 + \sqrt{(12m_1 - 15m_2)^2 + 864m_1m_2} \right]. \quad (19)$$

Это значение A_{13}^0 разделяет область $[0, +\infty)$ на две области: $0 \leq A_{13} \leq A_{13}^0$ и $[A_{13}^0, +\infty)$. Так как при $A_{13} \rightarrow A_{13}^0$ значения \bar{x}_3 , \bar{y}_3 стремятся к бесконечности, то следует выбросить B – окрестность точки A_{13}^0 , так как в области $A_{13}^0 - B \leq A_{13} \leq A_{13}^0 + B$ условия (14) нарушаются. Значение B определяется поэтому из условий (14).

Таким образом, остается заведомо допустимая область для значений $A_{13} \in [0, A_{13}^0 - B]$ и, возможно, область $A_{13} \in [A_{13}^0 + B, +\infty]$. Но оказывается, что в последней условия (14) также нарушаются и, следовательно, она запрещена используемой математической процедурой (линейным приближением). Действительно, из (12), (17), (18) следует, что в указанной области

$$\alpha_{13} = \frac{1}{r_0}(\bar{x}_3 \pm \sqrt{3}\bar{y}_3) > 0, \lim_{A_{13} \rightarrow \infty} \alpha_{13} = 1. \quad (20)$$

Далее, как функция параметра A_{13} , величина α_{13} – монотонно убывающая (что нетрудно показать с помощью ее производной по A_{13} , которая отрицательна). Следовательно, согласно (20), в области $A_{13}^0 + B \leq A_{13} < +\infty$ имеем $\alpha_{13} > 1$, т. е. (14) нарушено.

Итак, редуцирующая масса A_{13} для пробного тела A_3 может находиться только в области

$$0 \leq A_{13} \leq A_{13}^0 - B, \quad (21)$$

где A_{13}^0 определяется формулой (19), а $B > 0$ и находится из требования выполнимости неравенства (14). Так как в области (21) $\Delta > 0$, то для L_4^* : $\bar{x}_3 < 0$, $\bar{y}_3 < 0$, а для L_5^* : $\bar{x}_3 < 0$, $\bar{y}_3 > 0$.

Заметим, что

$$\frac{\bar{y}_3}{\bar{x}_3} = \pm \sqrt{3} \frac{2A_{13} + 3m_2}{2A_{13} + 9m_2}. \quad (22)$$

Из (22) следует, что линии фотолибрации (18) при малых A_{13} образуют с осью Ox^0 угол $\approx \pm 30^\circ$, а при A_{13} , значительно больших m_2 , образуют угол $\approx \pm 60^\circ$.

3. Численные оценки для решений системы (16). Как уже отмечалось в п. 2, нас интересуют решения задачи Коши для системы (16) при нулевых начальных условиях:

$$\bar{x}_3(0) = \bar{y}_3(0) = 0, \dot{\bar{x}}_3(0) = \dot{\bar{y}}_3(0) = 0.$$

Для получения численных оценок конкретизируем систему тел: A_1 – Солнце, $m_1 = 2 \cdot 10^{33}$ г; A_2 – Юпитер, $m_2 = 2 \cdot 10^{30}$ г; $A_1 A_2 = r_0 = 7,78 \cdot 10^{13}$ см; $\omega_0 = \sqrt{\gamma m / r_0^3} = 1,68 \cdot 10^{-8} \text{ с}^{-1}$, так как $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-8} \text{ г}^{-1} \cdot \text{см}^3 \cdot \text{с}^{-2}$. Остается выбрать пробное тело A_3 , которому соответствует редуцирующая масса Солнца A_{13} . В Солнечной системе в изобилии существуют частички, для которых A_{13} имеют большие значения. Например, частные варианты: 1) $A_{13} = 0,1m_1$; 2) $A_{13} = 0,2m_1$ (см. [1, 4, 5]). Тогда легко находим с помощью компьютерной программы Mathematica или Mathcad решения задачи Коши для системы (16).

Для варианта 1):

$$\begin{aligned} \bar{x}_3 &= 10^{13} \left[-0,14 + 1,86 \cos(1,10 \cdot 10^{-8} t) + 7,98 \sin(1,10 \cdot 10^{-8} t) - \right. \\ &\quad \left. - 1,72 \cos(1,39 \cdot 10^{-8} t) - 6,32 \sin(1,39 \cdot 10^{-8} t) \right], \\ \bar{y}_3 &= 10^{13} \left[-0,24 + 3,24 \cos(1,10 \cdot 10^{-8} t) - 4,60 \sin(1,10 \cdot 10^{-8} t) - \right. \\ &\quad \left. - 3,01 \cos(1,39 \cdot 10^{-8} t) + 3,64 \sin(1,39 \cdot 10^{-8} t) \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

Для варианта 2):

$$\begin{aligned} \bar{x}_3 &= 10^{13} \left[-0,29 + e^{-4,23 \cdot 10^{-9} t} (3,79 \cos(1,37 \cdot 10^{-8} t) - 0,05 \sin(1,37 \cdot 10^{-8} t)) + \right. \\ &\quad \left. + e^{4,23 \cdot 10^{-9} t} (-3,50 \cos(1,37 \cdot 10^{-8} t) + 2,28 \sin(1,37 \cdot 10^{-8} t)) \right], \\ \bar{y}_3 &= 10^{13} \left[-0,52 + e^{-4,23 \cdot 10^{-9} t} (-1,82 \cos(1,37 \cdot 10^{-8} t) - 2,60 \sin(1,37 \cdot 10^{-8} t)) + \right. \\ &\quad \left. + e^{4,23 \cdot 10^{-9} t} (2,37 \cos(1,37 \cdot 10^{-8} t) + 1,33 \sin(1,37 \cdot 10^{-8} t)) \right]. \end{aligned} \quad (24)$$

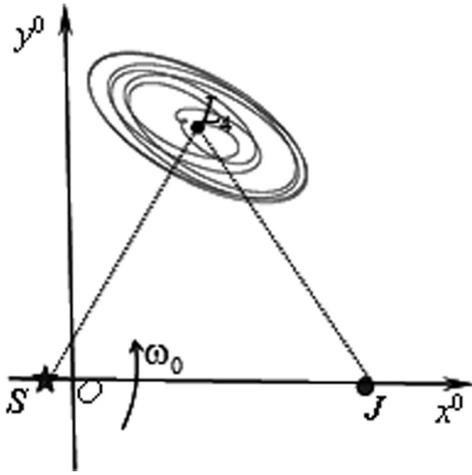


Рис. 2

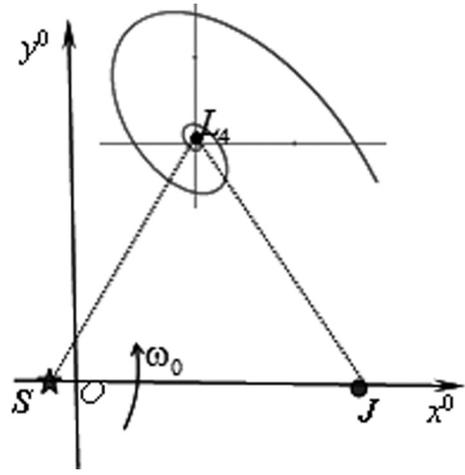


Рис. 3

Траектория движения частицы за 70 лет во вращающейся системе координат для варианта 1) согласно уравнениям (23) представлена на рис. 2, а для варианта 2) – на рис. 3.

Поступательная скорость v_3 частицы на траектории (23) колеблется в пределах $(0-20)$ км·с⁻¹, а на траектории (24) – в пределах $(0-500)$ км·с⁻¹. В первом случае имеем финитную траекторию (23), во втором – инфинитную траекторию (24).

Существуют такие частички, для которых $0,1m_1 < A_{13} < 0,2m_1$, и их траектории являются сепаратрисами, отделяющими финитные траектории от инфинитных.

Следует также помнить, что в силу линейного приближения траектории (23) и (24) (и любые другие) нельзя рассматривать при достаточно больших временах t , так как может нарушиться условие (14), которое можно переписать, используя (8) и (15), в виде:

$$|\alpha_{13}| = \frac{|\bar{x}_3 \pm \sqrt{3}\bar{y}_3|}{r_0} < 1, |\alpha_{23}| = \frac{|-\bar{x}_3 \pm \sqrt{3}\bar{y}_3|}{r_0} < 1, |\alpha_{12}| = 0 < 1. \quad (25)$$

Вычисление \bar{x}_3, \bar{y}_3 по формулам (23), (24) показывает, что (25) будет выполняться только при $t < 70$ лет.

4. Численные оценки для точек и линий фотолибрации (18). Учитывая ограничения (14) и (20), (21), налагаемые на параметр A_{13} , проведем численные оценки в системе Солнце–Юпитер. Тогда A_{13}^0 , входящее в (21) и вычисленное по формуле (19), имеет величину $A_{13}^0 \approx 3 \cdot 10^{33} \text{ г} = 1,5m_1$. Следовательно, параметр A_{13} в параметрических уравнениях линий фотолибрации (18) согласно (21) заключен в пределах $0 \leq A_{13} \leq 3 \cdot 10^{33} - B$.

Требуя, далее, выполнимости неравенств (14), которые представлены в форме (25), находим, вычисляя \bar{x}_3, \bar{y}_3 согласно (18), что выполнимость неравенств (25) обеспечивается при $A_{13} \approx 1,5 \cdot 10^{33} \text{ г}$. Таким образом, определились $B = 1,5 \cdot 10^{33} \text{ г}$ и область допустимых значений (21) для A_{13} :

$$0 \leq A_{13} \leq 1,5 \cdot 10^{33} \text{ г}. \quad (26)$$

Вычислим координаты точек фотолибрации L_4^*, L_5^* , определяемых тремя значениями редуцирующих масс A_{13} : 1) $A_{13}^{(1)} = 0,5 \cdot 10^{33} \text{ г}$; 2) $A_{13}^{(2)} = 1,0 \cdot 10^{33} \text{ г}$; 3) $A_{13}^{(3)} = 1,5 \cdot 10^{33} \text{ г}$, которые принадлежат допустимой области (26). Имеем согласно (18):

$$\begin{aligned} 1) \bar{x}_3 &= -0,39 \cdot 10^{13} \text{ см}, \bar{y}_3 = \mp 0,67 \cdot 10^{13} \text{ см}; & 2) \bar{x}_3 &= -0,98 \cdot 10^{13} \text{ см}, \bar{y}_3 = \mp 1,68 \cdot 10^{13} \text{ см}; \\ 3) \bar{x}_3 &= -1,95 \cdot 10^{13} \text{ см}, \bar{y}_3 = \mp 3,36 \cdot 10^{13} \text{ см}. \end{aligned} \quad (27)$$

Точки (27), обозначенные соответственно буквами $L_4^{*(1)}, L_4^{*(2)}, L_4^{*(3)}$, и симметричные им точки $L_5^{*(1)}, L_5^{*(2)}, L_5^{*(3)}$, нанесены на рис. 4, и через них проходят линии фотолибрации (пунктирные

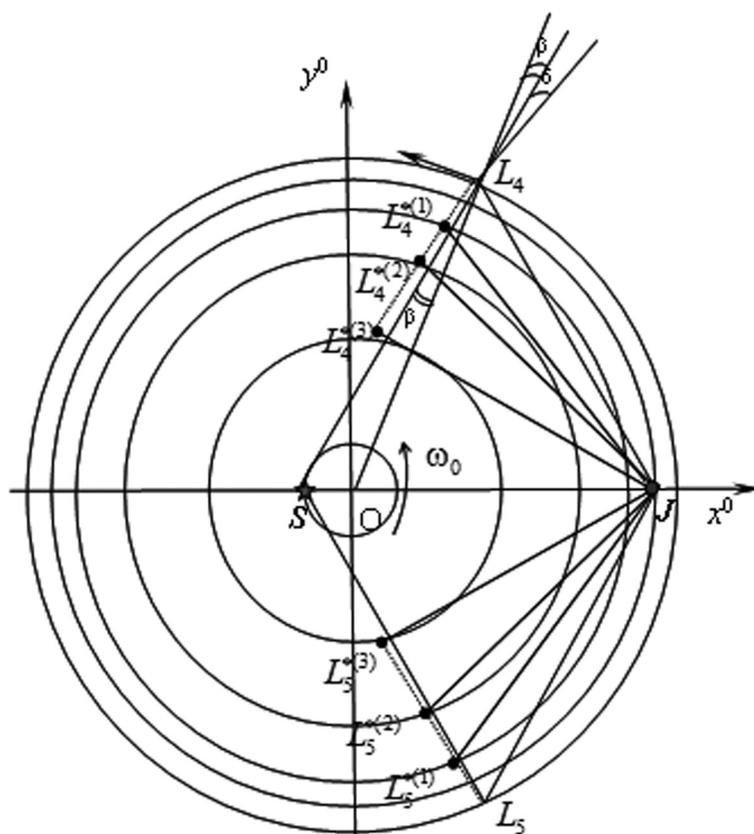


Рис. 4

линии, близкие к прямым SL_4 и SL_5). Так как система x^0Oy^0 вращается вокруг начала координат O с угловой скоростью ω_0 , то все точки линии фотолибрации описывают окружности с центром в точке O , как и Солнце S , и Юпитер J в неподвижной системе координат xOy . На рис. 4 для системы Солнце–Юпитер расстояние $SO = 10^{-3}SJ = 10^{-3}r_0$, но в целях наглядности мы его значительно увеличили.

Заключение. Проведенное исследование показало, что при учете светового давления лагранжевы треугольные точки либрации L_4 и L_5 не существуют, но существуют треугольные точки фотолибрации L_4^* и L_5^* , положение которых зависит от параметра A_{13} , пропорционального «парусности» пробного тела. Треугольники SJL_4^* и SJL_5^* не являются равносторонними, но длины сторон постоянны. При увеличении A_{13} точки фотолибрации приближаются к звезде S . Имеем линии, точки которых являются точками фотолибрации для пробных тел с разной парусностью.

Подчеркнем, что исследование проведено в линейном приближении (11)–(16) и поэтому законы движения пробного тела A_3 можно рассматривать только на конечном и достаточно малом с точки зрения космологии (космогонии) отрезке времени.

В последующих работах планируется рассмотреть проблему пяти точек фотолибрации в точной постановке и полученные результаты использовать в вопросах космогонии планетарных систем.

Литература

1. Фесенков В. Г. Солнце и Солнечная система: избр. тр. М., 1976. С. 353–366.
2. Кононович Э. В., Мороз В. И. Общий курс астрономии. М., 2004.
3. Аксенов Е. П. Теория движения искусственных спутников Земли. М., 1977.
4. Поляхова Е. Н. Космический полет с солнечным парусом. М., 2011.
5. Мартынов Д. Я. Курс общей астрофизики. М., 1971.
6. Рябушко А. П., Жур Т. А., Боярина И. П. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз-мат. навук. 2011. № 3. С. 80–89.
7. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М., 1964.
8. Маркеев А. П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М., 1978.

9. Себехей В. Теория орбит: ограниченная задача трех тел. М., 1978.
10. Рябушко А. П. Движение тел в общей теории относительности. Минск, 1979. Гл. 4.
11. Эльясберг П. Е. Введение в теорию полета искусственных спутников Земли. М., 1965.
12. Рябушко А. П., Жур Т. А., Боярина И. П. // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз-мат. навук. 2012. № 3. С. 77–83.
13. Lagrange J. Essais sur le probleme des trois corps. Paris, 1772.
14. Смирнов В. И. Курс высшей математики. М., 1961.
15. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1965.
16. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1963.

A. P. RYABUSHKO, T. A. ZHUR, I. P. BOYARINA, O. L. ZUBKO, V. I. YURINOK

EXISTENCE OF TRIANGLE POINTS OF LIBRATION IN THE PHOTOGRAVITATION FIELD

Summary

We see that taking into account direct solar pressure lagrangian triangular points of libration L_4 and L_5 do not exist, but for each of the trial body there exist two points of *photolibration* L_4^* and L_5^* which, together with the heavy bodies are the vertices of *scalene* triangles with constant sides. The existence of trial bodies with different «windage» leads to the existence of photolibration lines.

БЕЛАРУСКІЯ ВУЧОНЫЯ

ФЕДОР ПАВЛОВИЧ КОРШУНОВ

(К 80-летию со дня рождения)

15 мая 2014 г. исполнилось 80 лет известному ученому в области радиационной физики твердого тела, полупроводников и твердотельной электроники, члену-корреспонденту Национальной академии наук Беларуси, доктору технических наук, профессору, лауреату Государственной премии БССР Федору Павловичу Коршунову.

Федор Павлович родился в деревне Травна Краснопольского района Могилевской области. С 5 по 10 класс в школу приходилось ходить пешком за 6 километров в городской поселок Краснополье. После окончания школы в 1952 г. поступил в Рижское Краснознаменное Высшее инженерно-авиационное военное училище, электротехнический факультет которого закончил в 1957 г. Работал инженером-испытателем в НИИ МО СССР, принимал участие в испытаниях атомного оружия на острове Новая Земля. С 1962 г. по настоящее время Ф. П. Коршунов работает в Институте физики твердого тела и полупроводников НАН Беларуси

(с 2008 г. – ГНПО «Научно-практический центр Национальной академии наук Беларуси по материаловедению»), где прошел путь от младшего научного сотрудника до заместителя директора института по научной работе; в настоящее время – главный научный сотрудник.

Научная деятельность Ф. П. Коршунова в Академии наук началась под руководством выдающегося ученого – академика Н. Н. Сироты.

С пуском в Академии наук БССР атомного реактора, Ф. П. Коршунов одним из первых начал проводить исследования по воздействию гамма-нейтронного облучения на полупроводники и изделия электронной техники на их основе. Работы эти были актуальны и имели большое научное и практическое значение. По результатам данных исследований Ф. П. Коршунов в 1966 г. в Институте физики АН БССР защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, а в 1973 г. в Москве – диссертацию на соискание степени доктора технических наук по специальности «Физика полупроводников и диэлектриков» (тема специальная), в которой им решены принципиальные вопросы создания целого ряда типов радиационно-стойких полупроводниковых приборов для аппаратуры военного и космического назначения.

С 1968 по 2011 г. Ф. П. Коршунов возглавлял лабораторию радиационных воздействий Института. За это время была создана экспериментальная база для исследований по радиационной физике твердого тела и радиационной технологии изделий электронной техники. Была приобретена гамма-установка «Исследователь» с мощностью дозы на время запуска до 100 р/с и два линейных ускорителя электронов на энергии 4 и 6 МэВ, а также другое оборудование для проведения экспериментов. Постановлением Президиума НАН Беларуси в 2000 г. был создан Радиационный центр коллективного пользования при ИФТТП НАН Беларуси, руководителем которого на общественных началах был назначен Ф. П. Коршунов.

Ф. П. Коршуновым опубликовано около 500 научных работ (отдельно и в соавторстве), в том числе 3 монографии; получено более 70 авторских свидетельств и патентов. Им подготовлено 20 кандидатов наук, один из них защитил докторскую диссертацию.



На протяжении многих лет (1979–1995 гг.) Федор Павлович в качестве профессора читал лекции на кафедре микроэлектроники Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники.

В 1984 г. Ф. П. Коршунов был избран членом-корреспондентом АН БССР по отделению физики, математики и информатики.

Под научным руководством Ф. П. Коршунова и при его непосредственном участии выполнен ряд фундаментальных работ по исследованию влияния различных видов проникающих излучений (нейтронов, быстрых электронов, гамма-квантов) на свойства монокристаллов кремния, арсенида галлия и структур с p - n -переходами на их основе. Определены константы радиационного повреждения этих материалов, необходимые для расчета радиационностойких полупроводниковых приборов и интегральных схем. Определены энергетические уровни некоторых типов радиационных дефектов в запрещенной зоне кремния и арсенида галлия, их термическая устойчивость, сечение захвата и подвижность носителей заряда.

Ф. П. Коршуновым с учениками выполнены исследования радиационных эффектов в структурах металл–диэлектрик–полупроводник (МДП) с различными диэлектриками, которые лежат в основе многих типов полупроводниковых приборов и интегральных схем, разработаны методы повышения радиационной стойкости МДП-приборов, а также впервые (1970 г.) – защищенные авторскими свидетельствами на изобретения эффективные методы использования быстрых электронов и гамма-квантов в технологии изготовления полупроводниковых приборов и интегральных схем, позволяющие исключить из техпроцесса использование золота или платины, улучшить качество изделий, снизить их себестоимость.

Ф. П. Коршуновым совместно с академиком Н. Н. Сиротой и Л. Ю. Райнесом впервые обнаружен эффект малых доз облучения в кремнии, проявляющийся в упорядочении структуры неравновесного кристалла. Затем этот эффект также был обнаружен в сегнетоэлектриках, высокотемпературных сверхпроводниках, сверхтвердых материалах (кубический нитрид бора и др.).

Ф. П. Коршуновым совместно с А. С. Камышаном впервые экспериментально было зарегистрировано и исследовано рентгеновское излучение в кристаллах кремния при каналировании электронов средних энергий (4–6 МэВ) с использованием электронного ускорителя.

Ф. П. Коршунов внес существенный вклад в проблему получения кремния и арсенида галлия методами нейтронного легирования. Им выполнен ряд исследовательских работ по выяснению механизма радиационных нарушений в высокотемпературных сверхпроводниках.

За крупные достижения в области радиационной физики твердого тела и полупроводников Ф. П. Коршунову с сотрудниками в 1980 г. была присуждена Государственная премия БССР в области науки.

Следует отметить, что многие исследования, выполненные Федором Павловичем, непосредственно связаны с практикой и внедрены в производство.

Около 15 лет Ф. П. Коршунов работал заместителем директора по научной работе и сделал многое для развития института и повышения его авторитета. На протяжении многих лет был членом проблемных научных советов АН СССР «Радиационная физика твердого тела», «Физика и химия полупроводников», научных советов НАН Беларуси, членом экспертного совета ВАК Беларуси и экспертного совета Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований. В настоящее время он является членом специализированного совета по защите диссертаций, членом редколлегии журнала «Весті НАН Беларусі. Серія фізіка-матэматычных навук», членом редакционного совета журнала «Доклады БГУИР», был членом редколлегии международного журнала «Crystal Lattice Defects and Amorphous Materials» (США).

Ф. П. Коршунов награжден орденом «Знак Почета» и тремя медалями, почетными грамотами Президиума НАН Беларуси.

Сердечно поздравляем Федора Павловича с 80-летним юбилеем, желаем ему доброго здоровья и новых научных успехов.

*Отделение физики, математики и информатики НАН Беларуси,
Научно-практический центр НАН Беларуси по материаловедению,
Белорусское физическое общество*

ВИТАЛИЙ АНТОНОВИЧ ТОЛКАЧЕВ

(К 80-летию со дня рождения)

28 июня 2014 г. исполнилось 80 лет со дня рождения известного белорусского ученого, крупного специалиста в области молекулярной спектроскопии и квантовой электроники, академика НАН Беларуси, доктора физико-математических наук, главного научного сотрудника Института физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси Виталия Антоновича Толкачева.

Первые работы В. А. Толкачева были посвящены изучению роли статистического механизма формирования наблюдаемых спектральных характеристик молекулярных паров. Им установлена роль энергетической селективности оптических процессов возбуждения и испускания, безызлучательных переходов в формировании спектров и влиянии температуры и длины волны возбуждающего света на квантовый выход флуоресценции. Введены новые фотофизические характеристики – селективные энергии оптических и безызлучательных переходов, эффективная энергия возбуждения, родственная параболам Кондона взаимосвязь средних энергий оптически комбинирующих в вибронных и колебательных переходах состояний, разработаны методы измерения этих характеристик. Это позволило получить новую информацию о свойствах молекулярной антистоксовой люминесценции и решить совместно с Н. А. Борисевичем и В. В. Грузинским проблему ее природы, которая была предметом длительной дискуссии между С. И. Вавиловым и П. Принсгеймом.

Аналитические соотношения между спектрально-люминесцентными характеристиками молекулярных паров, полученные В. А. Толкачевым в этот период, позволили разработать новые методы определения синглет-триплетного интервала, частоты инверсии, длительности люминесценции и других важных оптических характеристик сложных молекул.

В. А. Толкачев активно разрабатывает и проблематику лазерной спектроскопии. Им совместно с Н. А. Борисевичем в 1965 г. еще до обнаружения генерации лазерного излучения на растворах сложных органических соединений были теоретически сформулированы основные требования к спектроскопическим характеристикам сложных молекул, в ансамбле которых может быть получен отрицательный коэффициент поглощения, основные условия для получения максимального коэффициента усиления и указаны факторы, определяющие положение максимума и диапазон перестройки частоты генерируемого излучения. Сделаны также выводы о существенном влиянии на характеристики генерации наведенного поглощения с электронно-возбужденных состояний органической молекулы и показана возможность осуществления многополосной генерации для веществ с выраженной колебательной структурой спектров люминесценции. Предложенная классификация молекул по спектрально-люминесцентным характеристикам позволила установить основные закономерности выбора соединений, наиболее перспективных в отношении генерационной способности. Показано, что генерация излучения может или полностью определяться специфическими взаимодействиями с растворителем, или являться внутренним свойством, присущим изолированным молекулам. Последнее обстоятельство особенно важно при выборе веществ для поиска генерации сложных молекул в газовой фазе. Научный задел в области фотофизики сложных молекул в газовой фазе и генерации растворов красителей позволил В. А. Толкачеву совместно с академиком Н. А. Борисевичем и И. И. Калошей создать лазер на сложномолекулярных парах, опередив все другие научные группы как за рубежом, так и в СССР.



Этот результат открыл десятилетие его активной работы в области лазерной спектроскопии сложномолекулярных газофазных активных сред, когда было найдено более 30 генерирующих в ультрафиолетовой и видимой областях спектра соединений, созданы перестраиваемый лазер на парах с распределенной обратной связью и лазер на парах с самоциркулирующей активной среды. Впервые в сложномолекулярных парах у активной среды лазера обнаружена оптически наведенная анизотропия.

За основополагающий вклад, внесенный в спектроскопию свободных сложных молекул, Н. А. Борисевичу, Б. С. Непоренту, В. В. Грузинскому и В. А. Толкачеву в 1980 г. присуждена Ленинская премия.

Затем основным направлением исследований Виталия Антоновича становится вращательная анизотропия сложномолекулярных паров, ее проявление в оптической анизотропии. Получена и изучена одно- и двухфотонно возбужденная поляризованная люминесценция, исследован ориентационный механизм формирования спектров ее возбуждения и установлена количественная связь степени поляризации с ориентацией возбуждающего и излучающего дипольных моментов переходов в главных осях инерции молекулярного волчка, что позволило создать методы определения этих ориентации и структуры молекулы. Установлены закономерности столкновительной деполяризации оптически наведенной анизотропии и показана возможность определения с ее помощью газокинетических столкновительных сечений больших многоатомных молекул, а также сечений тушения возбужденных состояний. Впервые в сложномолекулярных парах найдена анизотропия, наведенная возбуждением электронным пучком, установлены закономерности ее проявления в поляризованной флуоресценции. Изучены закономерности оптически наведенной анизотропии струйно охлажденных сложных молекул, когда их диффузные в обычных условиях спектры превращаются в линейчатые и приобретают характеристичность атомных. Результаты, достигнутые в этом направлении, отмечены в 1998 г. Государственной премией Республики Беларусь в области науки и техники, присужденной Н. А. Борисевичу, В. А. Толкачеву и их ученикам А. П. Блохину, В. А. Поведайло за цикл работ «Динамика вращательного движения электронно-возбужденных молекул в газовой фазе».

Большое внимание В. А. Толкачев уделял исследованию вращательно-динамического механизма молекулярного вращательного квантового эха, используемого при анализе структуры молекул и их комплексов. Им получены соотношения связи задержки импульсов эха с вращательными постоянными молекулы, радикально упростившие структурный анализ молекул этим методом, установлена принципиальная возможность наблюдать эхо в оптическом вращении, изучено влияние жесткости молекулы на эхо.

В последние годы В. А. Толкачевым разработан метод измерения эффективности тушения электронно-возбужденных состояний свободных многоатомных молекул кислородом, не требующий использования трудно определяемого столкновительного сечения. Показано, что по относительным изменениям квантового выхода и поляризации флуоресценции при добавлении многоатомного тушителя определяется отношение молярных констант тушения и хаотизации. Установлены закономерности влияния внутримолекулярной лабильности и запаса колебательной энергии на анизотропию сечения дипольных оптических переходов в свободных многоатомных молекулах. Разработан метод экономичного аналитического, нематричного расчета квантовых уровней свободного молекулярного волчка, установлен общий характер зависимости средних сечений оптического дипольного перехода отдельных квантовых состояний молекулярного волчка от состояния и конфигурации вращения.

Виталий Антонович проводит большую научно-организационную работу. Он стоял у истоков создания предприятия «Криптотех» Гознака Беларуси. В настоящее время является главным редактором «Журнала прикладной спектроскопии», членом советов по защите докторских диссертаций при Институте физики НАН Беларуси и БГУ. За активное участие в научной и общественной работе В. А. Толкачев награжден Грамотой Верховного Совета БССР, медалью «За доблестный труд».

Сердечно поздравляем Виталия Антоновича с юбилеем и желаем ему крепкого здоровья и дальнейших творческих успехов.

*Отделение физики, математики и информатики НАН Беларуси,
Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси,
Белорусское физическое общество*

АНАТОЛИЙ НИКОЛАЕВИЧ СЕРДЮКОВ

(К 70-летию со дня рождения)

15 мая 2014 г. исполнилось 70 лет со дня рождения известного белорусского физика, члена-корреспондента НАН Беларуси, доктора физико-математических наук, профессора Анатолия Николаевича Сердюкова.

Анатолий Николаевич родился в поселке Герой Буда-Кошелевского района Гомельской области. В 1960 г. окончил с золотой медалью среднюю школу и поступил на физико-математический факультет Гомельского педагогического института. После его окончания Анатолий Николаевич в 1965–1968 гг. учился в аспирантуре Института физики АН БССР, затем работал в этом же институте старшим инженером-конструктором, младшим научным сотрудником.

В 1973 г. А. Н. Сердюков был приглашен на работу в Гомельский государственный университет, где последовательно занимал должности старшего преподавателя, доцента, заведующего кафедрой оптики, а затем проректора по научной работе. В настоящее время Анатолий Николаевич – профессор кафедры оптики, руководство которой еще в 2003 г. передал одному из своих учеников.

Совместная работа с выдающимися учеными Ф. И. Федоровым и Б. В. Бокутем в Институте физики НАН Беларуси определила творческую судьбу Анатолия Николаевича. В этот период им была установлена неправомерность использования теории пространственной дисперсии для решения граничных задач электродинамики гиротропных кристаллов. Предложенная им совместно с Ф. И. Федоровым и Б. В. Бокутем самосогласованная система граничных условий, материальных уравнений и энергетических соотношений электродинамики таких сред составила основу корректной феноменологической теории естественной оптической активности. По результатам этих исследований в 1971 г. он успешно защищает кандидатскую диссертацию. Еще тогда, оппонировав эту диссертацию, замечательный советский физик Р. В. Хохлов в официальном отзыве отметил, что А. Н. Сердюковым «получены первоклассные научные результаты, достойные быть включенными в учебники, в том числе в новые издания курса Ландау и Лифшица».

Однако, они не сразу нашли признание среди заинтересованных специалистов. Обсуждение данной проблемы было даже включено в повестку проходившей в 1972 г. в Минске выездной сессии Отделения общей физики и астрономии АН СССР, где оппонентом новой теории выступил известный советский физик-теоретик академик В. Л. Гинзбург (в последующем – лауреат Нобелевской премии). Во время разгоревшейся публичной дискуссии белорусским физикам удалось убедить противную сторону в ошибочности ее позиции. Таким образом, неприятие нового подхода окончательно было преодолено. Вскоре в своей книге «Теоретическая физика и астрофизика», выдержавшей ряд изданий, В. Л. Гинзбург признал, что он «здесь проявил известное недопонимание».

В последующие годы, работая в Гомеле, Анатолий Николаевич активно занимался развитием феноменологического направления в электродинамике и акустике гиротропных анизотропных



сред, в нелинейной кристаллооптике, решением задач теплопроводности и термоупругости в условиях лазерной обработки материалов. В это время он совместно с Н. В. Максименко и Л. Г. Морозом высказывает идею существования у элементарных частиц нового свойства – магнитоэлектрической поляризуемости, или гирации.

В 1977 г. Анатолий Николаевич опубликовал работу по теории упругих волн в средах с пространственной дисперсией, в которой впервые предсказано существование акустического кругового дихроизма. В 1981 г. он установил в электродинамике естественно гиротропных сред дисперсионные правила сумм, одновременно доказав их универсальность для сред любой природы. Результаты научных исследований А. Н. Сердюкова по электродинамике сплошных сред подытожены в написанной им в соавторстве и вышедшей в 2001 г. в международном издательстве «Gordon and Breach» на английском языке монографии «Электродинамика бианизотропных материалов». В 2007 г. А. Н. Сердюкову и его соавторам Л. М. Барковскому и В. В. Филиппову за цикл работ «Оптика анизотропных и гиротропных сред: физические явления на границе» присуждена премия НАН Беларуси имени Ф. И. Федорова.

Много и плодотворно работает А. Н. Сердюков с молодежью. В Гомеле вместе с Б. В. Бокутем он сформировал из выпускников физического факультета ГГУ и других вузов области мощную группу молодых физиков. Их деятельность была направлена на решение широкого класса задач оптики и акустики кристаллов, лазерной технологии. А. Н. Сердюковым подготовлено 13 кандидатов наук, 5 его учеников стали докторами наук.

Как и большинству представителей старшего поколения научной школы Ф. И. Федорова, А. Н. Сердюкову присущи широкий научный кругозор и высокий уровень профессионализма, творческая неисчерпаемость. Он продолжает развивать предложенную им релятивистскую калибровочно-инвариантную модель гравитационного поля со скалярным потенциалом, разработанную в рамках классической теоретико-полевой концепции и легшую в основу опубликованной им в 2003 г. монографии «Калибровочная теория скалярного гравитационного поля».

В Гомельском государственном университете им Ф. Скорины создан по инициативе А. Н. Сердюкова и работает под его председательством совет по защите кандидатских диссертаций. Анатолий Николаевич является членом международной редколлегии Украинского оптического журнала.

Сердечно поздравляем Анатолия Николаевича с 70-летием и желаем ему новых научных достижений, крепкого здоровья и благополучия.

*Отделение физики, математики и информатики НАН Беларуси,
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины,
Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси,
Белорусское физическое общество*

РЭФЕРАТЫ

УДК 519.6

Соболевский П. И., Лиходед Н. А., Мандрик П. А. **Метод получения границ областей определения функций глобальных зависимостей в задачах распараллеливания вычислений** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2014. № 2. С. 5–11.

Разработан способ получения областей определения функций глобальных зависимостей, основанный на уточненных аппроксимациях множества тайлов. Точное представление границ областей определения функций глобальных зависимостей позволяет избегать избыточных вычислений при выполнении коммуникационных операций и дает больше возможностей для распараллеливания зернистых алгоритмов.

Библиогр. – 7 назв.

УДК 517.948.32:517.544

Зверович Э. И. **Обобщение формулы перестановки Пуанкаре – Бертрана** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2014. № 2. С. 12–14.

Автор обобщает известную формулу

$$\int_L \frac{d\tau}{\tau-t} \int_L \frac{\varphi(\zeta, \tau) d\zeta}{\zeta-\tau} = -\pi^2 \varphi(t, t) + \int_L d\zeta \int_L \frac{\varphi(\zeta, \tau) d\tau}{(\tau-t)(\zeta-\tau)}, \quad t \in L,$$

на интеграл $\int_L \frac{d\tau}{(\tau-t)^{m+1}} \int_L \frac{\varphi(\zeta, \tau) d\zeta}{(\zeta-\tau)^{n+1}}$, понимаемый в смысле конечной части по Адамару.

Библиогр. – 3 назв.

УДК 517.987.4+519.6

Малютин В. Б. **О соотношении между интегралами по спиновым переменным и интегралами по антикоммутирующим переменным** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2014. № 2. С. 15–20.

Получено представление специального класса интегралов по спиновым переменным через интегралы по антикоммутирующим переменным. Также рассматривается вычисление интегралов по спиновым и антикоммутирующим переменным с помощью формул для гауссовых интегралов по антикоммутирующим переменным.

Библиогр. – 14 назв.

УДК 517.987.4+519.216

Айрян Э. А., Егоров А. Д., Севастьянов Л. А. **К вычислению математических ожиданий случайных функционалов** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2014. № 2. С. 21–26.

Исследованы погрешность аппроксимации математического ожидания одного класса случайных функционалов от гауссовского процесса и погрешность аппроксимации решения уравнения Бюргерса, возмущаемого гауссовским случайным процессом, которые основаны на использовании гауссовских хаотических разложений.

Библиогр. – 4 назв.

УДК 517.968

Расолько Г. А. **К решению сингулярного интегрального уравнения первого рода с ядром Коши и специальной правой частью методом ортогональных многочленов** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2014. № 2. С. 27–31.

Предлагается алгоритм численного решения сингулярного интегрального уравнения первого рода с ядром Коши и специальной правой частью вида

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(t) dt}{t-x} = \ln \frac{1-x}{1+x} f(x), \quad -1 < x < 1,$$

в классах $h(1)$ и $h(-1)$, основанный на разложении сингулярного интеграла по многочленам Чебышева. Здесь $f(x)$ – заданная на $[-1, 1]$ функция, непрерывная по Гельдеру, $\varphi(x)$ – искомая функция.

Табл. 1. Библиогр. – 11 назв.

УДК 517.925.7

Грицук Е. В., Громак В. И. **Аналитические свойства решений нелинейных дифференциальных уравнений типа уравнений Пенлеве** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2014. № 2. С. 32–39.

Доказывается теорема об общей структуре уравнений иерархии K_2 . Определяется порядок подвижных полюсов решений. В явном виде строятся резонансные многочлены, определяется характер их корней.

Библиогр. – 15 назв.

УДК 517.587

Трубников Ю. В., Орехова И. А. **Об экстремальных полиномах третьей степени комплексного аргумента** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2014. № 2. С. 40–47.

В статье приведены некоторые факты из истории исследования построения экстремальных полиномов в областях, лежащих в комплексной плоскости. Основным результатом работы является одно из самых естественных обобщений на комплексный случай полиномов Чебышева, т. е. задача нахождения кубического полинома вида

$$z^3 + az^2 + bz + c$$

комплексного аргумента z , заданного на прямоугольнике D с вершинами в точках $w + hi$, $-w + hi$, $-w - hi$, $w - hi$ ($w > 0$, $h > 0$), имеющего минимальную чебышевскую норму (экстремального полинома).

Библиогр. – 7 назв.

УДК 511.42

Берник В. И., Коледа Д. В. **Распределение значений дискриминантов многочленов второй и третьей степени** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2014. № 2. С. 48–51.

В работе установлена связь между количеством целочисленных многочленов второй и третьей степени ограниченной высоты и величиной дискриминантов этих многочленов.

Библиогр. – 8 назв.

УДК 512.542

Семенов М. Г., Воробьев Н. Т. **О характеристике инъекторов конечных групп** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2014. № 2. С. 52–57.

Пусть \mathfrak{F} – непустой класс Фиттинга. Группу G называют \mathfrak{F} -скованной, если $C_G(G_{\mathfrak{F}}) \subseteq G_{\mathfrak{F}}$, где $G_{\mathfrak{F}}$ – наибольшая нормальная \mathfrak{F} -подгруппа G , т. е. \mathfrak{F} -радикал G . Пусть \mathfrak{X} – непустой класс Фиттинга, \mathfrak{H} – класс Хартли вида $\mathfrak{X}\mathfrak{C}_p\mathfrak{R}_p$ и \mathfrak{N}^p – класс всех p -нильпотентных групп. Доказано, что в любой группе G такой, что факторгруппа по ее \mathfrak{X} -радикалу \mathfrak{N}^p -скована, существуют \mathfrak{H} -инъекторы и любые два из них сопряжены. Также в этом случае установлено, что \mathfrak{H} -инъекторы G – это, в точности, те \mathfrak{H} -максимальные подгруппы G , которые содержат \mathfrak{H} -радикал группы G .

Библиогр. – 10 назв.

УДК 519.173

Бенедиктович В. И. **Локальный признак существования плоского остовного дерева в геометрическом графе** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2014. № 2. С. 58–63.

В данной работе получены локальные признаки существования непересекающегося остовного дерева в геометрическом графе. Тем самым подтверждена гипотеза Ривера – Кампо для почти всех геометрических графов.

Ил. 2. Библиогр. – 4 назв.

УДК 517.977

Лещев А. Е., Минченко Л. И. **Слабо регулярные задачи математического программирования** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2014. № 2. С. 64–70.

В данной статье исследуется ослабленное условие регулярности Мангасаряна – Фромова (RMFCQ) и доказывается, что его выполнение влечет выполнение условия R -регулярности (error bound property) без до-

полнительных требований существования непрерывных вторых производных для функций в ограничениях задачи.

Библиогр. – 15 назв.

УДК 517.514

Муха В. С. Многомерно-матричный линейный регрессионный анализ: распределения и свойства оценок параметров // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2014. № 2. С. 71–81.

Получены распределения и установлены свойства оценок параметров многомерно-матричной линейной эмпирической регрессии.

Библиогр. – 5 назв.

УДК 519.2

Жук Е. Е. Статистическое отнесение многомерных наблюдений к классам, заданным обучающими выборками // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2014. № 2. С. 82–87.

Рассматривается задача статистического отнесения произвольно распределенных многомерных наблюдений к классам, заданным своими обучающими выборками. Для принятия решений предложено использовать решающее правило, основанное на гистограммных оценках плотностей распределения вероятностей, описывающих классы. Проведено аналитическое исследование его эффективности, и указан способ статистического оценивания эффективности принимаемых решений по результатам экспериментов.

Библиогр. – 8 назв.

УДК 539.216.2

Хорошко В. В., Цырельчук И. Н., Гременок В. Ф., Залесский В. Б., Ходин А. А. Оптимизация параметров поглощающего слоя $Cu_xIn_xZn_{2-2x}Se_2$ для тонкопленочных солнечных элементов // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2014. № 2. С. 88–93.

В статье проводится моделирование влияния основных параметров поглощающего слоя $Cu_xIn_xZn_{2-2x}Se_2$ на ток короткого замыкания, напряжение холостого хода, коэффициент заполнения и КПД тонкопленочных солнечных элементов. На основании данных, полученных моделированием, сделаны выводы об оптимальных значениях параметров слоев $Cu_xIn_xZn_{2-2x}Se_2$.

Табл. 1. Ил. 4. Библиогр. – 11 назв.

УДК 621.315.592

Мудрый А. В., Мофиднахаи Ф., Живулько В. Д., Зиновьев В. А., Двуреченский А. В., Кучинская П. А., Смагина Ж. В. Структурные и оптические характеристики нанослоев Ge/Si с пространственно-упорядоченными группами квантовых точек // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2014. № 2. С. 94–100.

Методом молекулярно-лучевой эпитаксии были выращены наноструктуры Ge/Si с близкорасположенными и взаимодействующими квантовыми точками Ge. Установлено, что при выборе подходящей скорости и температуры осаждения Ge могут быть образованы квантовые кольца Ge/Si с близкорасположенными квантовыми точками Ge. Рентгенодифракционным методом были определены параметры элементарной ячейки наноструктур Ge/Si. В спектрах фотолюминесценции при 4,2 К были обнаружены интенсивные полосы, обусловленные излучательной рекомбинацией экситонов в смачивающих слоях Ge и в квантовых точках Ge.

Ил. 3. Библиогр. – 12 назв.

УДК 621.315.592

Толкачева Е. А. Мури́н Л. И. Исследование вакансионно-кислородных комплексов в облученных быстрыми электронами и нейтронами кристаллах кремния методом ИК-поглощения // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2014. № 2. С. 101–104.

Методом ИК-спектроскопии установлено, что в температурном интервале отжига дивакансий (200–275 °С) в облученных кислородосодержащих кристаллах кремния имеет место формирование двух полос поглощения, расположенных у 833,4 и 842,4 $см^{-1}$. В отличие от предыдущих исследований, где обе эти полосы были приписаны комплексу дивакансия–кислород V_2O , образуемому путем захвата подвижных V_2 междоузельными атомами кислорода O_i , только полоса у 833,4 $см^{-1}$ может быть приписана данному дефекту. Относительная интенсивность полосы у 842,4 $см^{-1}$ существенно увеличивается в образцах, облученных нейтронами, по сравнению с образцами, облученными электронами. Сделано заключение, что эта полоса связана с комплексом тривакансия–кислород V_3O , образующимся путем захвата подвижных V_3 атомами O_i .

Ил. 3. Библиогр. – 13 назв.

УДК 543.42:621.373

Ануфрик С. С., Белаи В. Ч., Васильев С. В., Иванов А. Ю., Копыцкий А. В. **Термодиффузия в металлах при импульсном неразрушающем лазерном воздействии** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2014. № 2. С. 105–110.

Исследовано изменение элементного состава двухслойных мишеней под действием излучения рубинового лазера ГОР-100М в режиме свободной генерации с плотностью потока излучения от 10^4 до $5 \cdot 10^5$ Вт/см². Элементный состав мишени до и после облучения исследовался с использованием рентгеновского спектрометра ElvaX. Показано, что при воздействии на тонкий (несколько мкм) слой никеля, нанесенный на подложку из титана, после облучения концентрация титана в приповерхностном слое значительно (в 1,5 раза и более) увеличивалась. Существенно, что концентрация титана монотонно увеличивалась с ростом плотности потока воздействующего лазерного излучения в указанном интервале. Аналогичные явления наблюдались и при воздействии лазерного излучения на тыльную сторону тонкой медной пластины с покрытием из никеля. Это свидетельствует об активной диффузии металла из подложки в покрытие в зоне импульсного нагревания исследованных образцов лазерным излучением.

Табл. 2. Ил. 2. Библиогр. – 15 назв.

УДК 530.12

Рябушко А. П., Жур Т. А., Боярина И. П., Зубко О. Л., Юринок В. И. **О существовании треугольных точек либрации в фотогравитационном поле** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2014. № 2. С. 111–118.

Показано, что при учете солнечного давления лагранжевы треугольные точки либрации L_4 и L_5 не существуют, но существуют для каждого пробного тела две точки *фотолибрации* L_4^* и L_5^* , которые вместе с тяжелыми телами являются вершинами *разносторонних* треугольников с постоянными сторонами. Существование пробных тел с разной «парусностью» приводит к существованию линий фотолибрации.

Ил. 4. Библиогр. – 16 назв.