

# ВЕСЦІ

## НАЦЫЯНАЛЬНАЙ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСІ

СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК. 2025. Т. 61, № 4

# ИЗВЕСТИЯ

## НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ

СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК. 2025. Т. 61, № 4

Журнал основан в 1965 г. как «Весці Акадэміі навук БССР. Серыя фізіка-матэматычных навук»,  
с 1992 г. – «Весці Акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук»,  
с 1998 г. – современное название

Выходит четыре раза в год

Учредитель – Национальная академия наук Беларусь

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь,  
свидетельство о регистрации № 392 от 18.05.2009

Издается при поддержке Белорусского физического общества

Журнал входит в Перечень научных изданий Республики Беларусь  
для опубликования результатов докторских исследований, включен в международную  
базу данных Scopus и в базу данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ)

Главный редактор

**Валентин Антонович Орлович** – Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук  
Беларусь, Минск, Беларусь

Редакционная коллегия

**В. Г. Сафонов** – Институт математики Национальной академии наук Беларусь, Минск, Беларусь (заместитель  
главного редактора)

**Т. Е. Янчук** – (ведущий редактор журнала)

**С. В. Абламейко** – Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

**С. М. Абрамов** – Институт программных систем Российской академии наук, Москва, Россия

**М. В. Богданович** – ГНПО «Оптика, оптоэлектроника и лазерная техника», Минск, Беларусь

**С. В. Гапоненко** – Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларусь, Минск,  
Беларусь

**В. В. Гороховик** – Институт математики Национальной академии наук Беларусь, Минск, Беларусь

**Н. А. Изобов** – Институт математики Национальной академии наук Беларусь, Минск, Беларусь

**Н. С. Казак** – Национальная академия наук Беларусь, Минск, Беларусь

**С. Я. Килин** – Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларусь, Минск, Беларусь

**Ф. Ф. Комаров** – Институт прикладных физических проблем имени А. Н. Севченко Белорусского государ-  
ственного университета, Минск, Беларусь

**В. И. Корзюк** – Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь  
**Ю. А. Курочкин** – Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь  
**В. А. Лабунов** – Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь  
**Е. К. Макаров** – Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь  
**С. А. Максименко** – Институт ядерных проблем Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь  
**Д. Б. Мигас** – Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь  
**Д. С. Могилевцев** – Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь  
**Н. А. Поклонский** – Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь  
**И. В. Семченко** – ГНПО «Оптика, оптоэлектроника и лазерная техника», Минск, Беларусь  
**С. А. Тихомиров** – Отделение физики, математики и информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь  
**А. В. Тузиков** – Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь  
**Ю. С. Харин** – Научно-исследовательский институт прикладных проблем математики и информатики Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь

#### Редакционный совет

**С. В. Абламейко** – Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь  
**А. Л. Асеев** – Президиум Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирск, Россия  
**В. Г. Бондур** – Российская академия наук, Москва, Россия  
**Й. Врахтруп** – Институт физики (3) Штутгартского университета, Штутгарт, Германия  
**Ф. Б. Железко** – Институт квантовой оптики Ульма, Ульм, Германия  
**А. М. Желтиков** – Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия  
**С. Я. Килин** – Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь  
**В. В. Козлов** – Математический институт имени В. А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия  
**Г. Лёйхс** – Институт физики света имени М. Планка, Эрланген, Германия  
**Д. С. Могилевцев** – Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь  
**Нгуен Даи Хунг** – Институт физики Вьетнамской академии наук и технологий, Ханой, Вьетнам  
**В. А. Орлович** – Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь  
**Стивен Чу** – Стэнфордский университет, Стэнфорд, Калифорния, США  
**А. Цайлингер** – Институт квантовой оптики и квантовой информатики Австрийской академии наук, Вена, Австрия

#### Адрес редакции:

ул. Академическая, 1, к. 118, 220072, г. Минск, Республика Беларусь.

Тел.: + 375 17 374-02-45; e-mail: [fmvesti@mail.ru](mailto:fmvesti@mail.ru)

[vestifm.belnauka.by](http://vestifm.belnauka.by)

---

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ.

Серия физико-математических наук. 2025. Т. 61, № 4.

Выходит на русском, белорусском и английском языках

---

Редактор Т. Е. Янчук  
Компьютерная верстка И. В. Счеснюк

Подписано в печать 15.12.2025. Выход в свет 29.12.2025. Формат 60×84<sup>1</sup>/<sub>8</sub>. Бумага офсетная.

Печать цифровая. Усл. печ. л. 10,23. Уч.-изд. л. 11,3. Тираж 42 экз. Заказ 248.

Цена: индивидуальная подписка – 15,16 руб., ведомственная подписка – 34,53 руб.

Издатель и полиграфическое исполнение:

Республиканское унитарное предприятие «Издательский дом «Беларуская навука».

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/18 от 02.08.2013. ЛП № 02330/455 от 30.12.2013. Ул. Ф. Скорины, 40, 220084, г. Минск, Республика Беларусь

© РУП «Издательский дом «Беларуская навука»,  
Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук, 2025

# PROCEEDINGS OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF BELARUS

---

PHYSICS AND MATHEMATICS SERIES, 2025, vol. 61, no. 4

---

The Journal was founded in 1956 under the titles “Proceedings of the Academy of Sciences of BSSR. Physics and Mathematics Series”, since 1992 – “Proceedings of the Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series”, since 1998 – it comes under its actual title

Periodicity is 4 issues per annum

Founder is the National Academy of Sciences of Belarus

The journal is registered on May 18, 2009 by the Ministry of Information of the Republic of Belarus  
in the State Registry of Mass Media, reg. no. 392

It is published with support of the Belarusian Physical Society

*The Journal is included in The List of Journals for Publication of the Results of Dissertation Research  
in the Republic of Belarus, in the Scopus international database  
and in the Russian Science Citation Index (RSCI) database*

## Editor-in-Chief

**Valentin A. Orlovich** – B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

## Editorial Board

**Vasily G. Safonov** – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus  
(Associate Editor-in-Chief)

**Tatiana E. Yanchuk** (lead editor)

**Sergey V. Ablameyko** – Belarusian State University, Minsk, Belarus

**Sergei M. Abramov** – Program Systems Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

**Maksim V. Bogdanovich** – SSPA “Optics, Optoelectronics, and Laser Technology”, Minsk, Belarus

**Sergey V. Gaponenko** – B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

**Valentin V. Gorokhovik** – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

**Nikolai A. Izobov** – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

**Nikolai S. Kazak** – National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

**Sergei Ya. Kilin** – B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

**Fadey F. Komarov** – A. N. Sevchenko Institute of Applied Physical Problems of the Belarusian State University, Minsk, Belarus

**Viktor I. Korzyuk** – Belarusian State University, Minsk, Belarus

**Yuriii A. Kurochkin** – B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

**Vladimir A. Labunov** – Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Belarus

**Evgenii K. Makarov** – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

**Sergey A. Maksimenko** – Institute for Nuclear Problems of the Belarusian State University, Minsk, Belarus

**Dmitri B. Migas** – Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Belarus

**Dmitrii S. Mogilevcev** – B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus,  
Minsk, Belarus  
**Nikolai A. Poklonski** – Belarusian State University, Minsk, Belarus  
**Igor V. Semchenko** – SSPA “Optics, Optoelectronics, and Laser Technology”, Minsk, Belarus  
**Sergei A. Tikhomirov** – Department of Physics, Mathematics and Informatics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus  
**Aleksandr V. Tuzikov** – United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus  
**Yuriii S. Kharin** – Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics of the Belarusian State University, Minsk, Belarus

#### Editorial Council

**Sergei V. Ablameyko** – Belarusian State University, Minsk, Belarus  
**Aleksandr L. Aseev** – Presidium of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia  
**Valery G. Bondur** – Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia  
**Jörg Wrachtrup** – Institute of Physics (3) of the University of Stuttgart, Stuttgart, Germany  
**Fedor B. Jelezko** – Institute for Quantum Optics of the Ulm University, Ulm, Germany  
**Aleksei M. Zheltikov** – Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia  
**Sergei Ya. Kilin** – B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus  
**Valery V. Kozlov** – Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia  
**Gerd Leuchs** – Max Planck Institute for the Science of Light, Erlangen, Germany  
**Dmitrii S. Mogilevcev** – B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus  
**Nguyen Dai Hung** – Institute of Physics of the Vietnam Academy of Science and Technology, Hanoi, Vietnam  
**Valentin A. Orlovich** – B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus  
**Steven Chu** – Stanford University, Stanford, California, USA  
**Anton Zeilinger** – Institute for Quantum Optics and Quantum Information of the Austrian Academy of Sciences, Vienna, Austria

#### *Address of the Editorial Office:*

1, Akademicheskaya Str., room 118, 220072, Minsk, Republic of Belarus.  
Tel.: + 375 17 374-02-45; e-mail: [fmvesti@mail.ru](mailto:fmvesti@mail.ru)  
[vestifm.belnauka.by](http://vestifm.belnauka.by)

---

#### PROCEEDING OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF BELARUS.

Physics and Mathematics series, 2025, vol. 61, no. 4.

*Printed in Russian, Belarusian and English languages*

---

Editor *T. E. Yanchuk*  
Computer imposition *I. V. Schasniuk*

It is sent of the press 15.12.2025. Appearance 29.12.2025. Format 60×84<sup>1</sup>/<sub>8</sub>. Offset paper.  
The press digital. Printed pages 10,23. Publisher's signatures 11,3. Circulation 42 copies. Order 248.  
Price: individual subscription – 15,16 byn., departmental subscription – 34,53 byn.

Publisher and printing execution:

Republican unitary enterprise “Publishing House “Belaruskaya Navuka”.  
Certificate on the state registration of the publisher, manufacturer, distributor of printing editions  
No. 1/18 dated August 2, 2013. License for the press no. 02330/455 dated December 30, 2013.  
Address: F. Scorina Str., 40, 220084, Minsk, Republic of Belarus.

## **СОДЕРЖАНИЕ**

### **МАТЕМАТИКА**

<b>Сафонов В. Г., Сафонова И. Н.</b> О $\sigma$ -локальных классах конечных групп .....	271
<b>Столярчук И. И.</b> Классическое решение смешанной задачи для уравнения колебания струны с линейными дифференциальными полиномами в граничных условиях .....	288
<b>Бенедиктович В. И.</b> Сложность распознавания жесткости в классе $(2t+1)$ -регулярных графов .....	299

### **ФИЗИКА**

<b>Ивашкевич А. В., Редьков В. М.</b> Задача о собственных значениях обобщенного оператора спиральности для частицы со спином $3/2$ в магнитном поле и метод проективных операторов .....	307
<b>Григорьев Д. Н., Казанин В. Ф., Иванов В. Л., Шёлковый Д. В. от имени КМД-3 коллаборации.</b> Методика измерения переходного электромагнитного форм-фактора в конверсионном распаде $\omega \rightarrow \pi^0 e^+ e^-$ на детекторе КМД-3 .....	320
<b>Анищенко С. В.</b> Параметрическое рентгеновское излучение в симметричной геометрии Брэгга .....	330
<b>Подалов М. А., Семченко И. В., Самофалов А. Л., Хахомов С. А.</b> Поляризационные свойства метаповерхности на основе прямоугольных $\Omega$ -элементов на подложке из стеклотекстолита .....	343

## CONTENTS

### MATHEMATICS

<b>Safonov V. G., Safonova I. N.</b> On $\sigma$ -local classes of finite groups.....	271
<b>Stolyarchuk I. I.</b> Classical solution of the mixed problem for the string oscillation equation with linear differential polynomials in boundary conditions.....	288
<b>Benediktovich V. I.</b> The complexity of the decision problem of toughness in the class of $(2t + 1)$ -regular graphs ...	299

### PHYSICS

<b>Ivashkevich A. V., Red'kov V. M.</b> Eigenvalues of the generalized helicity operator for spin 3/2 particle in presence of the magnetic field and the projective operators method.....	307
<b>Grigoriev D. N., Kazanin V. F., Ivanov V. L., Shoukavy D. V. on behalf of the CMD-3 Collaboration.</b> Methodology for measuring the transition electromagnetic form factor in the conversion decay $\omega \rightarrow \pi^0 e^+ e^-$ with the CMD-3 detector.....	320
<b>Anishchenko S. V.</b> Parametric X-ray radiation in symmetric Bragg geometry .....	330
<b>Podalov M. A., Semchenko I. V., Samofalov A. L., Khakhomov S. A.</b> Polarization properties of a metasurface based on rectangular $\Omega$ -elements on a glass textolite substrate.....	343

**MATEMATIKA**  
**MATHEMATICS**

УДК 512.542  
<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2025-61-4-271-287>

Поступила в редакцию 23.10.2025  
Received 23.10.2025

**В. Г. Сафонов<sup>1</sup>, И. Н. Сафонова<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Институт математики Национальной академии наук Беларусь, Минск, Республика Беларусь

<sup>2</sup>Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь

**О  $\sigma$ -ЛОКАЛЬНЫХ КЛАССАХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП**

**Аннотация.** Для различных разбиений множества  $\mathbb{P}$  всех простых чисел исследуются свойства обобщенно локальных классов (формаций, классов Фиттинга) конечных групп. Доказаны критерии  $\sigma$ -локальности  $\alpha$ -локального класса групп, где  $\sigma$  и  $\alpha$  – некоторые различные разбиения множества  $\mathbb{P}$ . Изучены свойства произведений обобщенно локальных классов, а также их алгебр. Для  $\sigma$ -разрешимого  $\sigma$ -локального класса получены достаточные условия коммутативности порожденной им  $\sigma$ -алгебры.

**Ключевые слова:** конечная группа,  $\sigma$ -локальная формация,  $\sigma$ -локальный класс Фиттинга,  $\sigma$ -алгебра формаций,  $\sigma$ -алгебра классов Фиттинга, полугруппа классов групп

**Для цитирования.** Сафонов, В. Г. О  $\sigma$ -локальных классах конечных групп / В. Г. Сафонов, И. Н. Сафонова // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. – 2025. – Т. 61, № 4. – С. 271–287. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2025-61-4-271-287>

**Vasily G. Safonov<sup>1</sup>, Inna N. Safonova<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus*

<sup>2</sup>*Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus*

**ON  $\sigma$ -LOCAL CLASSES OF FINITE GROUPS**

**Abstract.** For various partitions of the set  $\mathbb{P}$  of all prime numbers, properties of generalized local classes (formations, Fitting classes) of finite groups are investigated. Criteria for  $\sigma$ -locality of an  $\alpha$ -local class of groups are proved, where  $\sigma$  and  $\alpha$  are some distinct partitions of  $\mathbb{P}$ . Properties of products of generalized local classes, as well as their algebras, are studied. For a  $\sigma$ -soluble  $\sigma$ -local class, sufficient conditions for the commutativity of the  $\sigma$ -algebra generated by it are obtained.

**Keywords:** finite group,  $\sigma$ -local formation,  $\sigma$ -local Fitting class,  $\sigma$ -algebra of formations,  $\sigma$ -algebra of Fitting classes, semigroup of classes of groups

**For citation.** Safonov V. G., Safonova I. N. On  $\sigma$ -local classes of finite groups. *Vestsi Natsyyanl'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematichnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2025, vol. 61, no. 4, pp. 271–287 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2025-61-4-271-287>

**Введение.** Все рассматриваемые группы являются конечными. Мы придерживаемся терминологии и обозначений, принятых в [1–6].

Интенсивное развитие в последнее десятилетие теории  $\sigma$ -свойств групп (т. е. свойств групп, связанных с разбиением  $\sigma$  множества всех простых чисел), заложенной в работах А. Н. Скибы [4, 5], вызвало необходимость изучения классов групп, определяемых разбиением  $\sigma$ . Среди подходов, которые были найдены и развиты на этом пути, весьма полезными оказались некоторые новые аспекты теории формаций, основанные на понятии  $\sigma$ -локальной, или, иначе, обобщенно локальной, формации, впервые предложенном А. Н. Скибой [6]. Так, в работах [6–10] изучен ряд общих свойств  $\sigma$ -локальных формаций, а также даны их приложения при изучении мета- $\sigma$ -нильпотентных и  $\sigma$ -разрешимых классов групп, замкнутых относительно произведений

заданных систем подгрупп. Отметим, что именно  $\sigma$ -локальные формации оказались основным инструментом при решении некоторых старых задач теории групп, одной из которых являлась задача Л. А. Шеметкова [11, с. 47, проблема 7] о расширении теории Крамера [12], о факторизациях разрешимых групп на классы произвольных групп. Решение данной задачи получено З. Чи, А. Н. Скибой [8] методами  $\sigma$ -локальных формаций. Кроме того, в [9, 10] был изучен ряд свойств решеток кратно  $\sigma$ -локальных формаций. В частности, доказано, что множество  $l_n^\sigma$  всех  $n$ -кратно  $\sigma$ -локальных формаций конечных групп является полной алгебраической модулярной решеткой, а также изучены некоторые свойства полугруппы всех формаций такого типа. Позже А. А. Царевым [13] было показано, что каждое тождество решетки всех формаций выполняется в решетке  $l_n^\sigma$ , а также что для любого неотрицательного целого числа  $n$  решетка  $l_n^\sigma$  является модулярной, но не дистрибутивной. В [14] была установлена дистрибутивность решетки всех totally  $\sigma$ -локальных формаций. Н. Н. Воробьевым, И. И. Стаселько и А. О. Ходжагуловым изучены свойства прямых разложений  $n$ -кратно  $\sigma$ -локальных формаций [15], а также доказана  $\mathfrak{G}$ -отделимость решетки таких формаций [16].

Цикл работ И. Н. Сафоновой [17–25] посвящен изучению  $\tau$ -замкнутых кратно  $\sigma$ -локальных формаций, в которых разработаны оригинальные методы исследования и конструирования формаций такого типа и их решеток, позволившие построить теорию функторно замкнутых кратно  $\sigma$ -локальных формаций. В частности, изучить основные свойства  $\tau$ -замкнутых  $n$ -кратно  $\sigma$ -локальных формаций [18]; получить критерии  $\tau$ -замкнутости  $n$ -кратно  $\sigma$ -локальной формации [23] и  $n$ -кратной  $\sigma$ -локальности непустой  $\tau$ -замкнутой формации [19, 25]; установить основные свойства (полнота,  $\sigma$ -индуктивность, модулярность, алгебраичность, отделимость) решетки всех  $\tau$ -замкнутых  $n$ -кратно  $\sigma$ -локальных формаций [20, 22, 24]; решить проблему Л. А. Шеметкова о классификации критических формаций в классе  $\sigma$ -локальных формаций [17, 21]. В недавних работах И. Н. Сафоновой и В. В. Скрунды [26–29] получено описание структурного строения приводимых  $\sigma$ -локальных формаций конечного  $\mathfrak{H}_\sigma$ -дефекта, а также структурного строения приводимых  $\sigma$ -локальных формаций конечной  $l_\sigma$ -длины, изучены свойства наибольшего  $\tau$ -замкнутого подкласса  $n$ -кратно  $\sigma$ -локальной формации, доказан критерий для  $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$ -критических формаций и получено описание минимальных  $\tau$ -замкнутых  $\sigma$ -локальных не  $\sigma$ -разрешимых и не  $\sigma$ -нильпотентных формаций.

В теории классов конечных групп хорошо известен некий параллелизм результатов теории формаций, или корадикальных классов групп, и результатов теории радикальных классов, или, иначе, классов Фиттинга. В. Го, Л. Чжаном и Н. Т. Воробьевым [30] было введено понятие  $\sigma$ -локального класса Фиттинга, изучены основные свойства таких классов, способы их задания с помощью специальных функций (функций Хартли), а также свойства радикальных произведений классов такого типа. В работе Н. Н. Воробьева и И. И. Стаселько [31] исследовались свойства решетки  $\sigma$ -локальных классов Фиттинга. В частности, было установлено, что решетка всех  $\sigma$ -локальных классов Фиттинга является индуктивной.

Отметим также, что  $\sigma$ -локальные формации и классы Фиттинга используются не только как инструмент для изучения  $\sigma$ -свойств групп, алгебры их  $\sigma$ -локальных классов, но и нашли применение в теории формальных языков в работах А. А. Царева и А. В. Кухарева [13, 32].

В настоящей работе нами исследуются свойства обобщенно локальных классов групп (формаций и классов Фиттинга) при различных разбиениях  $\sigma$  и  $\alpha$  множества  $\mathbb{P}$  всех простых чисел. Доказаны критерии  $\sigma$ -локальности  $\alpha$ -локального класса групп, изучены свойства произведений обобщенно локальных классов, а также их алгебр, получены необходимые и достаточные условия коммутативности  $\sigma$ -алгебры, порожденной  $\sigma$ -разрешимым  $\sigma$ -локальным классом.

**Обобщенно локальные формации.** Класс групп  $\mathfrak{F}$  называют *формацией*, если он замкнут относительно гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. Пусть  $\mathfrak{F}$  – непустая формация. Тогда для любой группы  $G$  через  $G^\mathfrak{F}$  обозначают  $\mathfrak{F}$ -корадикал группы  $G$ , т. е. наименьшую нормальную подгруппу  $G$ , факторгруппа по которой принадлежит формации  $\mathfrak{F}$ .

Формация  $\mathfrak{F}$  называется (*нормально*) *наследственной*, если  $H \in \mathfrak{F}$  всякий раз, когда  $G \in \mathfrak{F}$  и  $H$  – (нормальная) подгруппа группы  $G$ .

Пусть  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{H}$  – некоторые классы групп. *Произведение*  $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$  классов групп  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{H}$  определяется условием  $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{H}$  тогда и только тогда, когда в  $G$  имеется такая нормальная подгруппа  $N$ , что  $G/N \in \mathfrak{F}$ . Если при этом  $\mathfrak{H}$  – формация, то *корадикальное произведение*  $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{H}$  классов  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{H}$  определяется следующим образом:  $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{H} = (G \mid G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{F})$ .

Следующая лемма описывает свойства произведений формаций групп, которые мы будем использовать в данной работе, как правило, не ссылаясь явно на данные утверждения.

**Лемма 1** (см., напр., [1, гл. II; 3, гл. IV; 33, 2.2.11]). *Пусть  $\mathfrak{F}$ ,  $\mathfrak{H}$  и  $\mathfrak{M}$  – формации. Тогда справедливы утверждения: (1)  $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{H}$  и  $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F} \circ \mathfrak{H}$ , если  $\mathfrak{F}$  непусто; (2) если формация  $\mathfrak{F}$  нормально наследственная, то  $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{H} = \mathfrak{F}\mathfrak{H}$ , и  $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F} \circ \mathfrak{H}$ , если  $\mathfrak{H}$  непусто; (3)  $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{H}$  – формация; (4)  $G^{\mathfrak{F} \circ \mathfrak{H}} = (G^{\mathfrak{H}})^{\mathfrak{F}}$  для всех  $G \in \mathfrak{G}$ ; (5)  $(\mathfrak{F} \circ \mathfrak{H}) \circ \mathfrak{M} = \mathfrak{F} \circ (\mathfrak{H} \circ \mathfrak{M})$ .*

Напомним некоторые понятия и обозначения теории  $\sigma$ -свойств групп и их классов [4–6].

Пусть  $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$  – некоторое разбиение множества всех простых чисел  $\mathbb{P}$ ,  $G$  – группа,  $\mathfrak{F}$  – класс групп. Тогда  $\sigma(G) = \{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(G) \neq \emptyset\}$ ;  $\sigma(\mathfrak{F}) = \bigcup_{G \in \mathfrak{F}} \sigma(G)$ .

Группу  $G$  называют [4, 5]  $\sigma$ -примарной, если  $G$  является  $\sigma_i$ -группой для некоторого  $i$ ;  $\sigma$ -нильпотентной, если  $G$  – прямое произведение  $\sigma$ -примарных групп;  $\sigma$ -разрешимой, если каждый главный фактор группы  $G$  является  $\sigma$ -примарным.

Символами  $\mathfrak{G}_\sigma$  и  $\mathfrak{N}_\sigma$  обозначают классы всех  $\sigma$ -разрешимых и  $\sigma$ -нильпотентных групп соответственно,  $\mathfrak{G}_\pi$  – класс всех  $\pi$ -групп, где  $\emptyset \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$ .

Всякая функция  $f$  вида  $f: \sigma \rightarrow \{\text{формации групп}\}$  называется [6] *формационной  $\sigma$ -функцией*. Для любой формационной  $\sigma$ -функции  $f$  класс  $LF_\sigma(f)$  определяется следующим образом:

$$LF_\sigma(f) = \left( G \mid G = 1 \text{ либо } G \neq 1 \text{ и } G / O_{\sigma_i, \sigma_i}(G) \in f(\sigma_i) \text{ для всех } \sigma_i \in \sigma(G) \right),$$

где  $O_{\sigma_i, \sigma_i}(G)$  обозначает  $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{G}_{\sigma_i}$ -радикал группы  $G$ .

Если для некоторой формационной  $\sigma$ -функции  $f$  имеет место равенство  $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$ , то класс  $\mathfrak{F}$  называют  $\sigma$ -локальным [6], а  $f$  называют  $\sigma$ -локальным определением  $\mathfrak{F}$ .

Если  $f$  – формационная  $\sigma$ -функция, то  $\text{Supp}(f) = \{\sigma_i \in \sigma \mid f(\sigma_i) \neq \emptyset\}$  – носитель  $f$ .

Формационную  $\sigma$ -функцию  $f$  называют [6] *внутренней*, если  $f(\sigma_i) \subseteq LF_\sigma(f)$  для всех  $i$ ; *полной*, если  $f(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i)$  для всех  $i$ . Полное внутреннее  $\sigma$ -локальное определение формации называют ее *каноническим  $\sigma$ -локальным определением*.

Пусть  $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$  и  $\alpha = \{\alpha_j \mid j \in J\}$  – некоторые разбиения множества  $\mathbb{P}$ . Тогда, если для каждого  $i \in I$  существует  $j = j(i) \in J$  такое, что  $\sigma_i \subseteq \alpha_j$ , пишут [34, р. 1803], что  $\sigma \leq \alpha$ .

Для классических разбиений  $\sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \dots\}$ ,  $\sigma^\pi = \{\pi, \pi'\}$  ( $\pi$  – непустое подмножество  $\mathbb{P}$ ) и  $\sigma^{1\pi} = \{\{p_1\}, \{p_2\}, \dots, \{p_n\}, \pi'\}$  ( $\pi = \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \subseteq \mathbb{P}$ ) имеет место  $\sigma^1 \leq \sigma^{1\pi} \leq \sigma^\pi$ .

**Теорема 1.** Пусть  $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$  и  $\alpha = \{\alpha_j \mid j \in J\}$  – некоторые разбиения множества всех простых чисел. Тогда в том и только в том случае всякая  $\alpha$ -локальная формация является  $\sigma$ -локальной, когда  $\sigma \leq \alpha$ . В частности, поскольку для всякого разбиения  $\sigma$  множества простых чисел имеет место  $\sigma^1 \leq \sigma$ , то всякая  $\sigma$ -локальная формация является локальной.

**Доказательство.** Необходимость. Допустим, что  $\sigma \not\leq \alpha$ , но всякая  $\alpha$ -локальная формация является  $\sigma$ -локальной. Тогда существует такое  $i \in I$ , что  $\sigma_i \not\subseteq \alpha_j$  для любого  $j \in J$ . Пусть  $\alpha_k \in \alpha$  такое, что  $\sigma_i \cap \alpha_k \neq \emptyset$ . Ввиду [10, пример 1.2 (iii)] формация  $\mathfrak{G}_{\alpha_k}$  является  $\alpha$ -локальной. Значит, по условию теоремы формация  $\mathfrak{G}_{\alpha_k}$  является  $\sigma$ -локальной. Тогда  $\mathfrak{G}_{\alpha_k} = LF_\sigma(g)$ , где  $g$  – некоторое  $\sigma$ -локальное определение формации  $\mathfrak{G}_{\alpha_k}$ . Не ограничивая общности, ввиду [35, лемма 2.4] можем считать, что формационная  $\sigma$ -функция  $g$  является внутренней, т. е.  $g(\sigma_i) \subseteq LF_\sigma(g) = \mathfrak{G}_{\alpha_k}$ . Поскольку  $\sigma_i \cap \alpha_k \neq \emptyset$ , то  $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{G}_{\alpha_k})$  и  $g(\sigma_i) \neq \emptyset$  по [35, лемма 2.3 (1)]. Так как формация  $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$  наследственная, то  $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \subseteq \mathfrak{G}_{\sigma_i} g(\sigma_i)$ . Поэтому по [19, теорема 1.1 (ii)] имеем

$$\mathfrak{G}_{\sigma_i} \subseteq \mathfrak{G}_{\sigma_i} g(\sigma_i) \subseteq LF_\sigma(g) = \mathfrak{G}_{\alpha_k}.$$

Отсюда  $\sigma_i \subseteq \alpha_k$ . Противоречие. Поэтому  $\sigma \leq \alpha$ .

**Достаточность.** Пусть теперь  $\sigma \leq \alpha$  и  $\mathfrak{F} = LF_\alpha(f)$  – неединичная  $\alpha$ -локальная формация, где  $f$  – некоторое внутреннее  $\alpha$ -локальное определение формации  $\mathfrak{F}$ . Так как  $\sigma$  и  $\alpha$  – разбиения множества  $\mathbb{P}$  и  $\sigma \leq \alpha$ , то для любого  $\alpha_j$  имеем  $\alpha_j = \bigcup_{\sigma_i \subseteq \alpha_j} \sigma_i$ .

Покажем, что  $\mathfrak{F}$  является  $\sigma$ -локальной формацией. Пусть  $h$  – такая формационная  $\sigma$ -функция, что  $h(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\alpha_j} f(\alpha_j)$  для любого  $\sigma_i \subseteq \alpha_j$ . В силу [19, теорема 1.1 (ii)] имеем  $h(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\alpha_j} f(\alpha_j) \subseteq \mathfrak{F}$ . Пусть  $\mathfrak{H} = LF_\sigma(h)$ . Заметим, что  $\sigma(\mathfrak{H}) = \{\sigma_i \in \sigma \mid \sigma_i \subseteq \alpha_j \in \alpha(\mathfrak{F})\}$ . Действительно, если  $\alpha_j \in \alpha(\mathfrak{F})$ , то в силу [35, лемма 2.3 (1)]  $f(\alpha_j) \neq \emptyset$ . Значит,  $h(\sigma_i) \neq \emptyset$  для любого  $\sigma_i \subseteq \alpha_j \in \alpha(\mathfrak{F})$ . Поэтому  $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{H})$  опять же по [35, лемма 2.3 (1)]. Отсюда  $\{\sigma_i \in \sigma \mid \sigma_i \subseteq \alpha_j \in \alpha(\mathfrak{F})\} \subseteq \sigma(\mathfrak{H})$ . С другой стороны, если  $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{H})$ , то  $h(\sigma_i) \neq \emptyset$  ввиду [35, лемма 2.3 (1)]. Значит,  $f(\alpha_j) \neq \emptyset$  и в силу [35, лемма 2.3(1)]  $\alpha_j \in \alpha(\mathfrak{F})$  для любого  $\alpha_j$  такого, что  $\sigma_i \subseteq \alpha_j$ . Следовательно, имеет место включение  $\sigma(\mathfrak{H}) \subseteq \{\sigma_i \in \sigma \mid \sigma_i \subseteq \alpha_j \in \alpha(\mathfrak{F})\}$ . Таким образом,  $\sigma(\mathfrak{H}) = \{\sigma_i \in \sigma \mid \sigma_i \subseteq \alpha_j \in \alpha(\mathfrak{F})\}$ .

Покажем теперь, что  $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$ . Допустим, что  $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H} \neq \emptyset$ , и пусть  $G$  – группа минимального порядка из  $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$ . Тогда  $G$  – монолитическая группа с монолитом  $P = G^{\mathfrak{H}}$ .

Рассмотрим прежде случай, когда  $P$  –  $\alpha$ -примарная группа. Тогда  $P$  –  $\alpha_j$ -группа для некоторого  $\alpha_j \in \alpha(\mathfrak{F})$  и  $O_{\alpha_j, \alpha_j}(G) = O_{\alpha_j}(G)$ . Поскольку  $G \in \mathfrak{F}$ , то

$$G / O_{\alpha_j}(G) = G / O_{\alpha_j, \alpha_j}(G) \in f(\alpha_j) \subseteq \mathfrak{G}_{\alpha_j} f(\alpha_j) = h(\sigma_i)$$

для всякого  $\sigma_i \subseteq \alpha_j$ . Следовательно,  $G \in h(\sigma_i)$  для всякого  $\sigma_i \in \sigma(P)$ . Поэтому  $G / O_{\sigma_i, \sigma_i}(G) \in h(\sigma_i)$ . Но  $P = G^{\mathfrak{H}}$ . Последнее противоречит [19, лемма 3.4]. Значит, группа  $P$  – не  $\alpha$ -примарна. Тогда  $O_{\alpha_j, \alpha_j}(G) = 1$  для любого  $\alpha_j \in \alpha(P)$ . Следовательно,  $G \simeq G / O_{\alpha_j, \alpha_j}(G) \in f(\alpha_j) \subseteq \mathfrak{G}_{\alpha_j} f(\alpha_j) = h(\sigma_i)$  для всякого  $\sigma_i \subseteq \alpha_j$ . Поэтому  $G \in h(\sigma_i)$  для всех  $\sigma_i \in \sigma(P)$ . Но тогда  $G / O_{\sigma_i, \sigma_i}(G) \in h(\sigma_i)$  для всякого  $\sigma_i \in \sigma(P)$ , что невозможно в силу [19, лемма 3.4]. Полученное противоречие показывает, что данный случай также невозможен. Поэтому  $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$ .

Пусть теперь  $\mathfrak{H} \not\subseteq \mathfrak{F}$  и  $A$  – группа минимального порядка из  $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{F}$ . Тогда  $A$  – монолитическая группа с монолитом  $R = A^{\mathfrak{F}}$ .

Допустим, что  $R$  –  $\sigma$ -примарная группа. Тогда  $R$  –  $\sigma_i$ -группа для некоторого  $i$  и, следовательно,  $O_{\sigma_i}(A) = O_{\sigma_i, \sigma_i}(A)$ . Поскольку  $A \in \mathfrak{H}$ , имеем

$$A / O_{\sigma_i}(A) = A / O_{\sigma_i, \sigma_i}(A) \in h(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\alpha_j} f(\alpha_j),$$

где  $\sigma_i \subseteq \alpha_j \in \alpha(R)$ . Значит,  $A \in \mathfrak{G}_{\sigma_i}(\mathfrak{G}_{\alpha_j} f(\alpha_j)) = (\mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{G}_{\alpha_j}) f(\alpha_j) = \mathfrak{G}_{\alpha_j} f(\alpha_j) \subseteq \mathfrak{F}$ , что противоречит выбору  $A$ . Следовательно,  $R$  – не  $\sigma$ -примарная группа. Тогда  $O_{\sigma_i, \sigma_i}(A) = 1$  для любого  $\sigma_i \in \sigma(R)$ . Поэтому  $A \simeq A / O_{\sigma_i, \sigma_i}(A) \in h(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\alpha_j} f(\alpha_j) \subseteq \mathfrak{F}$ . И мы снова получаем противоречие с выбором группы  $A$ . Значит,  $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ , и поэтому  $\mathfrak{H} = \mathfrak{F}$ .

Вторая часть утверждения теоремы является следствием ее первой части. Теорема доказана.

**Теорема 2.** Пусть  $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$  и  $\alpha = \{\alpha_j \mid j \in J\}$  – некоторые разбиения множества  $\mathbb{P}$ ,  $\mathfrak{F} = LF_\alpha(t)$ , где  $t$  – внутреннее  $\alpha$ -локальное определение  $\mathfrak{F}$ . Тогда:

(1) если  $\sigma \leq \alpha$ , то  $\mathfrak{F}$  –  $\sigma$ -локальна и  $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$ , где  $f$  – каноническое  $\sigma$ -локальное определение формации  $\mathfrak{F}$ , при этом  $f(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\alpha_j} t(\alpha_j)$  для любого  $\sigma_i \subseteq \alpha_j$ ;

(2) если  $\sigma \not\leq \alpha$ , но для всякого  $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})$  найдется  $j = j(i) \in J$  такое, что  $\sigma_i \subseteq \alpha_j$ , то формация  $\mathfrak{F}$  –  $\sigma$ -локальна и  $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$ , где  $f$  – каноническое  $\sigma$ -локальное определение  $\mathfrak{F}$ , при этом  $f(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\alpha_j} t(\alpha_j)$  для всех  $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})$ ,  $\sigma_i \subseteq \alpha_j$  и  $f(\sigma_i) = \emptyset$  для всех  $\sigma_i \notin \sigma(\mathfrak{F})$ .

**Доказательство.** (1) Пусть  $\mathfrak{F} = LF_\alpha(t)$ , где  $t$  – внутреннее  $\alpha$ -локальное определение формации  $\mathfrak{F}$ . Поскольку  $\sigma \leq \alpha$ , то в силу теоремы 1 формация  $\mathfrak{F}$  является  $\sigma$ -локальной. Кроме того (см. доказательство теоремы 1),  $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$ , где  $f$  – такое внутреннее  $\sigma$ -локальное определение  $\mathfrak{F}$ , что  $f(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\alpha_j} t(\alpha_j)$  для любого  $\sigma_i \subseteq \alpha_j$ . Так как при этом для любого  $i$

$$\mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}(\mathfrak{G}_{\alpha_j} t(\alpha_j)) = (\mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{G}_{\alpha_j}) t(\alpha_j) = \mathfrak{G}_{\alpha_j} t(\alpha_j) = f(\sigma_i),$$

то  $f$  – каноническое  $\sigma$ -локальное определение  $\mathfrak{F}$ . Следовательно, утверждение (1) верно.

(2) Пусть  $\sigma \not\leq \alpha$ , но для всякого  $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})$  найдется  $j = j(i) \in J$  такое, что  $\sigma_i \subseteq \alpha_j$ . Тогда  $\sigma(\mathfrak{F}) \subset \sigma$ . Пусть  $f$  – такая формационная  $\sigma$ -функция, что  $f(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\alpha_j} t(\alpha_j)$  для всех  $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})$ ,  $\sigma_i \subseteq \alpha_j$  и  $f(\sigma_i) = \emptyset$  для всех  $\sigma_i \notin \sigma(\mathfrak{F})$ . Пусть  $\mathfrak{H} = LF_\sigma(f)$ . Ввиду [35, лемма 2.3 (1)] имеем  $\sigma(\mathfrak{H}) = \sigma(\mathfrak{F})$ .

Покажем, что  $\mathfrak{H} = \mathfrak{F}$ . Предположим вначале, что  $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H} \neq \emptyset$ , и пусть  $A$  – группа минимального порядка из  $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$ . Тогда  $A$  – монолитическая группа с монолитом  $N = A^{\mathfrak{H}}$ .

Допустим, что  $N$  –  $\alpha$ -примарная группа. Тогда  $N$  –  $\alpha_j$ -группа для некоторого  $\alpha_j \in \alpha(\mathfrak{F})$  и  $O_{\alpha_{j'}, \alpha_j}(A) = O_{\alpha_j}(A)$ . Поскольку  $A \in \mathfrak{F}$ , то  $A / O_{\alpha_j}(A) = A / O_{\alpha_{j'}, \alpha_j}(A) \in t(\alpha_j) \subseteq \mathfrak{G}_{\alpha_j} t(\alpha_j) = f(\sigma_i)$  для всякого  $\sigma_i \subseteq \alpha_j$ . Значит,  $A \in f(\sigma_i)$  для всякого  $\sigma_i \in \sigma(N)$ . Поэтому  $A / O_{\sigma_{i'}, \sigma_i}(A) \in f(\sigma_i)$ . Получили противоречие с [19, лемма 3.4], поскольку  $N = A^{\mathfrak{H}}$ . Следовательно,  $N$  – не  $\alpha$ -примарная группа. Поэтому  $O_{\alpha_{j'}, \alpha_j}(A) = 1$  для любого  $\alpha_j \in \alpha(N)$ . Но тогда имеем

$$A \simeq A / O_{\alpha_{j'}, \alpha_j}(A) \in t(\alpha_j) \subseteq \mathfrak{G}_{\alpha_j} t(\alpha_j) = f(\sigma_i)$$

для всякого  $\sigma_i \subseteq \alpha_j$ . Следовательно,  $A \in f(\sigma_i)$  для всех  $\sigma_i \in \sigma(N)$ , и мы снова получаем, что  $A / O_{\sigma_{i'}, \sigma_i}(A) \in f(\sigma_i)$  для всякого  $\sigma_i \in \sigma(N)$ . Последнее противоречит [19, лемма 3.4]. Поэтому данный случай невозможен и  $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$ .

Пусть теперь  $\mathfrak{H} \not\subseteq \mathfrak{F}$  и  $B$  – группа минимального порядка из  $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{F}$ . Тогда  $B$  – монолитическая группа с монолитом  $R = B^{\mathfrak{H}}$ . Допустим, что  $R$  –  $\sigma$ -примарная группа. Тогда  $R$  –  $\sigma_i$ -группа для некоторого  $i$ , и, следовательно,  $O_{\sigma_i}(B) = O_{\sigma_{i'}, \sigma_i}(B)$ . Поскольку  $B \in \mathfrak{H}$ , то

$$B / O_{\sigma_i}(B) = B / O_{\sigma_{i'}, \sigma_i}(B) \in f(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\alpha_j} t(\alpha_j),$$

где  $\sigma_i \subseteq \alpha_j \in \alpha(R)$ . Значит,  $B \in \mathfrak{G}_{\sigma_i}(\mathfrak{G}_{\alpha_j} t(\alpha_j)) = (\mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{G}_{\alpha_j}) t(\alpha_j) = \mathfrak{G}_{\alpha_j} t(\alpha_j) \subseteq \mathfrak{F}$ , что противоречит выбору группы  $B$ . Следовательно, группа  $R$  – не  $\sigma$ -примарна. Тогда  $O_{\sigma_{i'}, \sigma_i}(B) = 1$  для любого  $\sigma_i \in \sigma(R)$ . Поэтому  $B \simeq B / O_{\sigma_{i'}, \sigma_i}(B) \in f(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\alpha_j} t(\alpha_j) \subseteq \mathfrak{F}$ . И мы снова получаем противоречие с выбором группы  $B$ . Значит,  $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{H} = \mathfrak{F}$ . Поскольку при этом для любого  $i$

$$\mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}(\mathfrak{G}_{\alpha_j} t(\alpha_j)) = (\mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{G}_{\alpha_j}) t(\alpha_j) = \mathfrak{G}_{\alpha_j} t(\alpha_j) = f(\sigma_i),$$

то  $f$  – каноническое  $\sigma$ -локальное определение  $\mathfrak{F}$  и, следовательно, утверждение (2) теоремы верно. Теорема доказана.

**Теорема 3.** Пусть  $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$  и  $\alpha = \{\alpha_j \mid j \in J\}$  – некоторые разбиения множества  $\mathbb{P}$  и пусть  $\mathfrak{M} = LF_\sigma(m)$ ,  $\mathfrak{H} = LF_\sigma(h)$ , где  $m$  – внутреннее  $\sigma$ -локальное определение формаций  $\mathfrak{M}$ ,  $h$  – внутреннее  $\sigma$ -локальное определение  $\mathfrak{H}$ . Тогда, если  $\sigma \leq \alpha$ , произведения  $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \circ \mathfrak{H}$  и  $\mathfrak{L} = \mathfrak{H} \circ \mathfrak{M}$  –  $\sigma$ -локальные формации и  $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$ ,  $\mathfrak{L} = LF_\sigma(l)$ , где  $f$  и  $l$  – такие внутренние формационные  $\sigma$ -функции, что

$$f(\sigma_i) = \begin{cases} \mathfrak{G}_{\alpha_j} m(\alpha_j) \circ \mathfrak{H}, & \text{если } \sigma_i \in \sigma(\mathfrak{M}) \text{ и } \sigma_i \subseteq \alpha_j, \\ h(\sigma_i), & \text{если } \sigma_i \in \sigma \setminus \sigma(\mathfrak{M}), \end{cases}$$

$$l(\sigma_i) = \begin{cases} h(\sigma_i) \circ \mathfrak{M}, & \text{если } \sigma_i \in \sigma(\mathfrak{H}), \\ \mathfrak{G}_{\alpha_j} m(\alpha_j), & \text{если } \sigma_i \in \sigma \setminus \sigma(\mathfrak{H}) \text{ и } \sigma_i \subseteq \alpha_j. \end{cases}$$

**Доказательство.** Пусть  $\sigma \leq \alpha$ . Ввиду теоремы 2 формация  $\mathfrak{M}$  является  $\sigma$ -локальной и  $\mathfrak{M} = LF_\sigma(t)$ , где  $t$  – каноническое  $\sigma$ -локальное определение формации  $\mathfrak{M}$ , при этом  $t(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\alpha_j} m(\alpha_j)$  для любого  $\sigma_i \subseteq \alpha_j$ . Применяя теперь [10, теорема 1.14], имеем  $\mathfrak{M} \circ \mathfrak{H} = LF_\sigma(f)$ ,  $\mathfrak{H} \circ \mathfrak{M} = LF_\sigma(l)$ , где  $f$  и  $l$  – такие формационные  $\sigma$ -функции, что

$$f(\sigma_i) = \begin{cases} t(\sigma_i) \circ \mathfrak{H} = \mathfrak{G}_{\alpha_j} m(\alpha_j) \circ \mathfrak{H}, & \text{если } \sigma_i \in \sigma(\mathfrak{M}) \text{ и } \sigma_i \subseteq \alpha_j, \\ h(\sigma_i), & \text{если } \sigma_i \in \sigma \setminus \sigma(\mathfrak{M}), \end{cases}$$

$$l(\sigma_i) = \begin{cases} h(\sigma_i) \circ \mathfrak{M}, & h(\sigma_i) \circ \mathfrak{M}, \\ t(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\alpha_j} m(\alpha_j), & \text{если } \sigma_i \in \sigma \setminus \sigma(\mathfrak{H}) \text{ и } \sigma_i \subseteq \alpha_j. \end{cases}$$

Поскольку формационные  $\sigma$ -функции  $h$  и  $t$  являются внутренними, то  $f(\sigma_i) = t(\sigma_i) \circ \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M} \circ \mathfrak{H}$  при всех  $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{M})$  и  $\sigma_i \subseteq \alpha_j$ , а также  $f(\sigma_i) = h(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M} \circ \mathfrak{H}$  при всех  $\sigma_i \in \sigma \setminus \sigma(\mathfrak{M})$ . Аналогично,  $l(\sigma_i) = h(\sigma_i) \circ \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H} \circ \mathfrak{M}$  при всех  $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{H})$ , а также  $l(\sigma_i) = t(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H} \circ \mathfrak{M}$

при всех  $\sigma_i \in \sigma \setminus \sigma(\mathfrak{H})$  и  $\sigma_i \subseteq \alpha_j$ . Поэтому внутренними являются и формационные  $\sigma$ -функции  $f$  и  $l$ . Таким образом,  $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$  и  $\mathfrak{L} = LF_\sigma(l)$ , где  $f$  и  $l$  – внутренние формационные  $\sigma$ -функции, удовлетворяющие условию теоремы. Теорема доказана.

**Частичные  $\sigma$ -алгебры формаций.** Пусть  $\theta$  – полная решетка формаций,  $\sigma$  – некоторое разбиение множества простых чисел  $\mathbb{P}$ ,  $\sigma(\theta) = \cup_{\mathfrak{F} \in \theta} \sigma(\mathfrak{F})$ . Формации из  $\theta$  называют  $\theta$ -формациями.

Формационную  $\sigma$ -функцию  $f$  называют  $\theta$ -значной, если  $f(\sigma_i) \in \theta$  для всех  $\sigma_i \in \text{Supp}(f)$ .

Через  $\theta_\sigma$  будем обозначать множество всех  $\sigma$ -локальных формаций, которые имеют хотя бы одно  $\theta$ -значное  $\sigma$ -локальное определение, т. е.  $\theta_\sigma = \{\mathfrak{F} = LF_\sigma(f) \mid f(\sigma_i) \in \theta \text{ для любого } \sigma_i \in \text{Supp}(f)\}$ .

По определению формация всех единичных групп  $(1) = LF_\sigma(n)$ , где  $n(\sigma_i) = \emptyset$  для всех  $i$ , принадлежит  $\theta_\sigma$ .

Следуя [2, с. 12], полную решетку формаций  $\theta$  будем называть: 1) *частичной  $\sigma$ -алгеброй формаций*, если  $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \in \theta$  для любого  $\sigma_i \in \sigma(\theta)$  и для всякой формации  $\mathfrak{F} \in \theta$  имеет место  $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \circ \mathfrak{F} \in \theta$ ; 2)  *$\sigma$ -алгеброй формаций*, если  $\theta$  – такая частичная  $\sigma$ -алгебра формаций, что  $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{H} \in \theta$  для любых  $\mathfrak{F}, \mathfrak{H} \in \theta$ .

**Предложение 1.** Пусть  $\theta$  – такая полная решетка формаций, что  $\theta_\sigma \subseteq \theta$ . Тогда: (1) если  $\theta$  – частичная  $\sigma$ -алгебра формаций, то  $\theta_\sigma$  также является частичной  $\sigma$ -алгеброй формаций; (2) если  $\theta$  –  $\sigma$ -алгебра формаций, то  $\theta_\sigma$  также является  $\sigma$ -алгеброй формаций.

**Доказательство.** (1) Поскольку  $\theta$  – решетка формаций, то в силу [10, лемма 2.2] пересечение любой совокупности формаций из  $\theta_\sigma$  снова принадлежит  $\theta_\sigma$ . Пусть  $\mathfrak{F}$  – такая  $\theta$ -формация, что для любой  $\theta$ -формации  $\mathfrak{M}$  имеет место  $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$ . И пусть  $f$  – такая формационная  $\sigma$ -функция, что  $f(\sigma_i) = \mathfrak{F}$  для любого  $\sigma_i \in \sigma$ . Тогда  $LF_\sigma(f) \in \theta_\sigma$ . Пусть  $\mathfrak{H}$  – произвольная  $\theta_\sigma$ -формация. Тогда, очевидно,  $\mathfrak{H} \subseteq LF_\sigma(f)$ . Следовательно,  $\theta_\sigma$  – полная решетка формаций.

Пусть теперь  $\sigma_i \in \sigma$  и  $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$ , где  $f$  –  $\theta$ -значное  $\sigma$ -локальное определение формации  $\mathfrak{F}$ . Поскольку  $\theta$  – решетка формаций и  $\theta_\sigma \subseteq \theta$  по условию, то ввиду [35, лемма 2.4] мы можем считать, что  $f$  – внутренняя формационная  $\sigma$ -функция. Покажем, что  $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}_{\sigma_i} \circ \mathfrak{F} \in \theta_\sigma$ . Действительно, ввиду [21, лемма 2.1] имеем  $\mathfrak{G}_{\sigma_i} = LF_\sigma(m)$ , где  $m$  – такое  $\sigma$ -локальное определение  $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ , что  $m(\sigma_i) = (1)$  и  $m(\sigma_j) = \emptyset$  для любого  $j \neq i$ . Так как (1)  $\in \theta$ , то  $m$  является  $\theta$ -значным  $\sigma$ -локальным определением  $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ . По [10, теорема 1.14] имеем  $\mathfrak{H} = LF_\sigma(h)$ , где  $h$  – такое  $\sigma$ -локальное определение  $\mathfrak{H}$ , что  $h(\sigma_i) = m(\sigma_i) \circ \mathfrak{F} = (1) \circ \mathfrak{F} \in \theta_\sigma \subseteq \theta$  и  $h(\sigma_j) = f(\sigma_j) \in \theta$  для любого  $\sigma_j \in \sigma(\mathfrak{F}) \setminus \{\sigma_i\}$ . Отсюда  $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}_{\sigma_i} \circ \mathfrak{F} \in \theta_\sigma$ . Таким образом,  $\theta_\sigma$  является частичной  $\sigma$ -алгеброй формаций, т. е. имеет место (1).

(2) Ввиду утверждения (1) достаточно доказать, что для любых формаций  $\mathfrak{M}$  и  $\mathfrak{F}$  из  $\theta_\sigma$  их произведение  $\mathfrak{M} \circ \mathfrak{F}$  принадлежит  $\theta_\sigma$ . Пусть  $\mathfrak{M} = LF_\sigma(m)$  и  $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$ , где  $m$  и  $f$  – внутренние  $\theta$ -значные  $\sigma$ -локальные определения формаций  $\mathfrak{M}$  и  $\mathfrak{F}$  соответственно,  $\mathfrak{H} = \mathfrak{M} \circ \mathfrak{F}$ . Тогда по [10, теорема 1.14] имеем  $\mathfrak{H} = LF_\sigma(h)$ , где  $h$  – такое  $\sigma$ -локальное определение формации  $\mathfrak{H}$ , что  $h(\sigma_i) = m(\sigma_i) \circ \mathfrak{F}$  для любого  $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{M})$  и  $h(\sigma_i) = f(\sigma_i)$  для любого  $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F}) \setminus \sigma(\mathfrak{M})$ . Так как по условию  $\theta_\sigma \subseteq \theta$ , то  $h(\sigma_i) = m(\sigma_i) \circ \mathfrak{F} \in \theta$ . Значит,  $h$  –  $\theta$ -значное  $\sigma$ -локальное определение формации  $\mathfrak{H}$ . Следовательно,  $\mathfrak{H} \in \theta_\sigma$ . Поэтому  $\theta_\sigma$  –  $\sigma$ -алгебра формаций и утверждение (2) верно. Предложение доказано.

**Следствие 1.** При всяком разбиении  $\sigma$  множества  $\mathbb{P}$  полная решетка  $l_\sigma$  всех  $\sigma$ -локальных формаций является  $\sigma$ -алгеброй формаций.

Пусть  $\sigma$  – некоторое разбиение множества  $\mathbb{P}$ ,  $\theta$  –  $\sigma$ -алгебра формаций,  $\mathfrak{M} \in \theta_\sigma$ . Через  $\theta_\sigma(\mathfrak{M})$  будем обозначать множество всех  $\theta_\sigma$ -формаций из  $\mathfrak{M}$ . В частности, если  $\theta$  – решетка всех формаций, то вместо символа  $\theta_\sigma(\mathfrak{M})$  будем использовать символ  $A_\sigma(\mathfrak{M})$ , т. е.  $A_\sigma(\mathfrak{M})$  – множество всех  $\sigma$ -локальных формаций из  $\mathfrak{M} \in l_\sigma$ .

Напомним (см. [36] и [1, с. 57]), что умножение формаций в  $\mathfrak{M}$  определяется следующим образом:  $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{H} = \mathfrak{F} \circ \mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}$ .

**Лемма 2.** Пусть  $\sigma$  – некоторое разбиение множества  $\mathbb{P}$ ,  $\theta$  –  $\sigma$ -алгебра формаций,  $\mathfrak{M} \in \theta_\sigma$ . Тогда справедливы следующие утверждения: (1)  $\theta_\sigma(\mathfrak{M})$  является  $\sigma$ -алгеброй формаций; (2) если  $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$  и  $\mathfrak{H} = LF_\sigma(h)$  – формации из  $\theta_\sigma(\mathfrak{M})$ , где  $f$  и  $h$  – некоторые внутренние  $\theta$ -значные  $\sigma$ -локальные определения формаций  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{H}$  соответственно, то  $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{H} = LF_\sigma(l)$ , где  $l$  – такая внутренняя  $\theta$ -значная формационная  $\sigma$ -функция, что

$$l(\sigma_i) = \begin{cases} (f(\sigma_j) \circ \mathfrak{H}) \cap m(\sigma_i), & \text{если } \sigma_j \in \sigma(\mathfrak{F}), \\ h(\sigma_j) \cap m(\sigma_i), & \text{если } \sigma_j \in \sigma \setminus \sigma(\mathfrak{F}). \end{cases}$$

**Доказательство.** (1) Поскольку формация  $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$  является наследственной, то с учетом [19, теорема 1.1]  $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \subseteq \mathfrak{M}$  для любого  $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{M})$ . Так как при этом формация  $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$   $\sigma$ -локальна [10, пример 1.2 (iii)] и  $\mathfrak{G}_{\sigma_i} = LF_{\sigma}(g)$ , где  $g(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} \in \theta$  и  $g(\sigma_k) = \emptyset$  для любого  $k \neq i$ , то  $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \in \theta_{\sigma}(\mathfrak{M})$ . Ввиду предложения 1(2)  $\theta_{\sigma}$  является  $\sigma$ -алгеброй формаций. Поэтому для любой формации  $\mathfrak{L} \in \theta_{\sigma}(\mathfrak{M})$  имеем  $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{L} \in \theta_{\sigma}$ , и, следовательно,  $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \circ \mathfrak{L} = \mathfrak{G}_{\sigma_i} \circ \mathfrak{L} \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{L} \cap \mathfrak{M} \in \theta_{\sigma}(\mathfrak{M})$ .

Пусть  $\mathfrak{F} = LF_{\sigma}(f)$  и  $\mathfrak{H} = LF_{\sigma}(h)$  – формации из  $\theta_{\sigma}(\mathfrak{M})$ , где  $f$  и  $h$  – некоторые внутренние  $\theta$ -значные  $\sigma$ -локальные определения формаций  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{H}$  соответственно. Тогда в силу [10, теорема 1.14] имеем  $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{H} = LF_{\sigma}(x)$ , где  $x$  – такая формационная  $\sigma$ -функция, что

$$x(\sigma_i) = \begin{cases} f(\sigma_j) \circ \mathfrak{H}, & \text{если } \sigma_j \in \sigma(\mathfrak{F}), \\ h(\sigma_j), & \text{если } \sigma_j \in \sigma \setminus \sigma(\mathfrak{F}). \end{cases}$$

Заметим, что  $x$  является внутренним  $\theta$ -значным  $\sigma$ -локальным определением формации  $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{H}$ . Пусть  $m$  – некоторое внутреннее  $\theta$ -значное  $\sigma$ -локальное определение формации  $\mathfrak{M}$ . И пусть  $\mathfrak{L} = LF_{\sigma}(x) \cap \mathfrak{M}$ . В силу [35, лемма 2.2] имеем  $\mathfrak{L} = LF_{\sigma}(l)$ , где  $l(\sigma_i) = x(\sigma_i) \cap m(\sigma_i)$  для любого  $j$ . Значит,  $l$  – внутреннее  $\theta$ -значное  $\sigma$ -локальное определение формации  $\mathfrak{L}$ , при этом

$$l(\sigma_i) = \begin{cases} (f(\sigma_j) \circ \mathfrak{H}) \cap m(\sigma_i), & \text{если } \sigma_j \in \sigma(\mathfrak{F}), \\ h(\sigma_j) \cap m(\sigma_i), & \text{если } \sigma_j \in \sigma \setminus \sigma(\mathfrak{F}). \end{cases}$$

Следовательно,  $\mathfrak{L} = \mathfrak{F} \circ \mathfrak{H} \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{F} \circ \mathfrak{H} \in \theta_{\sigma}(\mathfrak{M})$ . Таким образом,  $\theta_{\sigma}(\mathfrak{M})$  –  $\sigma$ -алгебра.

(2) См. доказательство (1). Лемма доказана.

**Теорема 4.** Пусть  $\sigma$  и  $\alpha$  – некоторые разбиения множества  $\mathbb{P}$ ,  $\theta - \alpha$ -алгебра формаций,  $\mathfrak{M} \in \theta_{\alpha}$ . Тогда, если  $\theta - \sigma$ -алгебра формаций и  $\sigma \leq \alpha$ , то  $\theta_{\alpha}(\mathfrak{M})$  –  $\sigma$ -подалгебра в  $\theta_{\sigma}(\mathfrak{M})$ .

**Доказательство.** Пусть  $\mathfrak{F}_s = LF_{\alpha}(f_s)$  – формация из  $\theta_{\alpha}(\mathfrak{M})$ , где  $f_s$  – некоторое внутреннее  $\theta$ -значное  $\alpha$ -локальное определение формации  $\mathfrak{F}_s$ ,  $s = 1, 2$ . По теореме 2 (1) формация  $\mathfrak{F}_s$  является  $\sigma$ -локальной и  $\mathfrak{F}_s = LF_{\sigma}(t_s)$ , где  $t_s$  – каноническое  $\sigma$ -локальное определение  $\mathfrak{F}_s$ , при этом  $t_s(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\alpha_j} f_s(\alpha_j)$  для любого  $\sigma_i \subseteq \alpha_j$ . Поскольку по условию теоремы  $\theta - \alpha$ -алгебра формаций, то произведение  $\mathfrak{G}_{\alpha_j} f_s(\alpha_j)$  является  $\theta$ -формацией. Значит,  $t$  –  $\theta$ -значное  $\sigma$ -локальное определение формации  $\mathfrak{F}_s$ . Следовательно,  $\mathfrak{F}_s \in \theta_{\sigma}(\mathfrak{M})$ . Поэтому  $\theta_{\alpha}(\mathfrak{M}) \subseteq \theta_{\sigma}(\mathfrak{M})$ .

В силу леммы 2 (2) имеем  $\mathfrak{F}_1 \circ \mathfrak{F}_2 = LF_{\sigma}(x)$ , где  $x$  – такая внутренняя  $\theta$ -значная формационная  $\sigma$ -функция, что

$$x(\sigma_i) = \begin{cases} (t_1(\sigma_i) \circ \mathfrak{H}) \cap m(\sigma_i), & \text{если } \sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F}), \\ t_2(\sigma_i) \cap m(\sigma_i), & \text{если } \sigma_i \in \sigma \setminus \sigma(\mathfrak{F}). \end{cases}$$

Поэтому  $\mathfrak{F}_1 \circ \mathfrak{F}_2 \in \theta_{\sigma}(\mathfrak{M})$  и  $\theta_{\alpha}(\mathfrak{M})$  –  $\sigma$ -подалгебра в  $\theta_{\sigma}(\mathfrak{M})$ . Теорема доказана.

**Следствие 2.** Пусть  $\sigma$  и  $\alpha$  – некоторые разбиения множества  $\mathbb{P}$ . Тогда, если  $\sigma \leq \alpha$ , полу-группа  $A_{\alpha}(\mathfrak{M})$  всех  $\alpha$ -локальных формаций является подполугруппой полугруппы  $A_{\sigma}(\mathfrak{M})$  всех  $\sigma$ -локальных формаций.

Напомним понятие прямого разложения класса групп (см. [2, с. 171]). Пусть  $\{\mathfrak{F}_j \mid j \in J\}$  – некоторый непустой набор подклассов  $\mathfrak{F}$  такой, что  $\mathfrak{F}_{j_1} \cap \mathfrak{F}_{j_2} = \{1\}$  для любого  $j_1 \neq j_2$  из  $J$ . Если, кроме того, каждая группа  $G \in \mathfrak{F}$  имеет вид  $G = A_{j_1} \times \dots \times A_{j_t}$ , где  $A_{j_1} \in \mathfrak{F}_{j_1}, \dots, A_{j_t} \in \mathfrak{F}_{j_t}$  для некоторого  $j_1, \dots, j_t \in J$ , то пишут, что  $\mathfrak{F} = \bigoplus_{j \in J} \mathfrak{F}_j$  (в частности,  $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{F}_t$ , если  $J = \{1, \dots, t\}$ ).

**Лемма 3.** Пусть  $\mathfrak{F} = LF_{\sigma}(f)$ ,  $\Pi = \sigma(\mathfrak{F})$ . Тогда  $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}_{\sigma} = \mathfrak{N}_{\Pi}$  и  $\Pi = \{\sigma_i \mid f(\sigma_i) \neq \emptyset\}$ .

**Доказательство.** Ввиду [35, лемма 2.3(1)] имеем  $\Pi = \{\sigma_i \mid f(\sigma_i) \neq \emptyset\}$ . Поскольку формация  $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$  является наследственной, то  $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \subseteq \mathfrak{G}_{\sigma_i}(f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F})$  и по [35, лемма 2.3 (5)] имеем

$$\mathfrak{G}_{\sigma_i} \subseteq \mathfrak{G}_{\sigma_i}(f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{F}$$

для всякого  $\sigma_i \in \Pi$ . Поэтому  $\mathfrak{N}_\Pi = \bigoplus_{\sigma_i \in \Pi} \mathfrak{G}_i \subseteq \mathfrak{F}$ . С другой стороны, поскольку  $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}_\sigma \subseteq \mathfrak{N}_\Pi$ , то мы имеем искомое равенство  $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}_\sigma = \mathfrak{N}_\Pi$ . Лемма доказана.

**Теорема 5.** Пусть  $\theta$  –  $\sigma$ -алгебра формаций,  $\mathfrak{M} \in \Theta_\sigma$  – некоторая  $\sigma$ -разрешимая формация. Тогда и только тогда  $\sigma$ -алгебра  $\Theta_\sigma(\mathfrak{M})$  является коммутативной полугруппой, когда  $\mathfrak{M}$   $\sigma$ -нильпотентна.

**Доказательство.** Необходимость. Пусть выполняются условия теоремы и  $\sigma$ -алгебра  $\Theta_\sigma(\mathfrak{M})$  является коммутативной полугруппой. Покажем, что в этом случае формация  $\mathfrak{M}$   $\sigma$ -нильпотентна. Действительно, если  $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{N}_\sigma$ , то по [26, следствие 3.9] в формацию  $\mathfrak{M}$  входит по меньшей мере одна минимальная  $\sigma$ -локальная не  $\sigma$ -нильпотентная подформация  $\mathfrak{L}$ . В силу [21, следствие 2.9] имеем  $\mathfrak{L} = l_\sigma \text{form}(G)$  и выполняется одно из следующих условий: 1)  $G$  – простая не  $\sigma$ -примарная группа; 2)  $G = P \times K$ , где  $P = C_G(P)$  –  $p$ -группа,  $p \in \sigma_i$ , а  $K$  – простая  $\sigma_j$ -группа,  $j \neq i$ . Поскольку формация  $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{M}$ , то  $\mathfrak{L}$  –  $\sigma$ -разрешима. Следовательно, группа  $G$  удовлетворяет условию 2) и  $\sigma(\mathfrak{L}) = \{\sigma_i, \sigma_j\} \subseteq \sigma(\mathfrak{M})$ . Значит,  $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$  и  $\mathfrak{G}_{\sigma_j}$  –  $\sigma$ -локальные подформации из  $\mathfrak{M}$  в силу [10, пример 1.2 (iii)] и, очевидно,  $\mathfrak{G}_{\sigma_i}, \mathfrak{G}_{\sigma_j} \in \Theta_\sigma(\mathfrak{M})$ . Значит, имеет место  $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \circ_{\mathfrak{M}} \mathfrak{G}_{\sigma_j} = \mathfrak{G}_{\sigma_j} \circ_{\mathfrak{M}} \mathfrak{G}_{\sigma_i}$ . Поскольку  $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{G}_{\sigma_j} \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{G}_{\sigma_i} \circ_{\mathfrak{M}} \mathfrak{G}_{\sigma_j}$ , то  $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{G}_{\sigma_j} \circ_{\mathfrak{M}} \mathfrak{G}_{\sigma_i}$ . Следовательно,  $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{G}_{\sigma_j} \mathfrak{G}_{\sigma_i}$ . Поэтому группа  $G$  принадлежит формации  $\mathfrak{G}_{\sigma_j} \mathfrak{G}_{\sigma_i}$ . Значит,  $G^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}} \in \mathfrak{G}_{\sigma_j}$ . Из описания группы  $G$  следует, что  $G^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}} = G$  и  $G \notin \mathfrak{G}_{\sigma_j}$ . Полученное противоречие показывает, что  $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}_\sigma$ .

**Достаточность.** Пусть теперь формация  $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}_\sigma$  и пусть  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{H}$  – некоторые  $\sigma$ -локальные подформации из  $\Theta_\sigma(\mathfrak{M})$ . Полугруппой  $\sigma$ -алгебра  $\Theta_\sigma(\mathfrak{M})$  является в силу [10, теорема 1.13)]. Покажем, что  $\Theta_\sigma(\mathfrak{M})$  коммутативна. Действительно, ввиду леммы 3 имеем

$$\mathfrak{F} \circ \mathfrak{H} \cap \mathfrak{N}_\sigma = \mathfrak{N}_{\sigma(\mathfrak{F} \cup \mathfrak{H})} \text{ и } \mathfrak{H} \circ \mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}_\sigma = \mathfrak{N}_{\sigma(\mathfrak{H} \cup \mathfrak{F})}.$$

Следовательно, поскольку  $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{H} \cap \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}_\sigma$  и  $\mathfrak{H} \circ \mathfrak{F} \cap \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}_\sigma$ , то

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} \circ \mathfrak{H} = \mathfrak{F} \circ \mathfrak{H} \cap \mathfrak{M} &= \mathfrak{F} \circ \mathfrak{H} \cap \mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_\sigma = (\mathfrak{F} \circ \mathfrak{H} \cap \mathfrak{N}_\sigma) \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{N}_{\sigma(\mathfrak{F} \cup \mathfrak{H})} \cap \mathfrak{M} = \\ &= \mathfrak{N}_{\sigma(\mathfrak{H} \cup \mathfrak{F})} \cap \mathfrak{M} = (\mathfrak{H} \circ \mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}_\sigma) \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{H} \circ \mathfrak{F} \cap \mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_\sigma = \mathfrak{H} \circ \mathfrak{F} \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{H} \circ_{\mathfrak{M}} \mathfrak{F}. \end{aligned}$$

Таким образом,  $\mathfrak{F} \circ_{\mathfrak{M}} \mathfrak{H} = \mathfrak{H} \circ_{\mathfrak{M}} \mathfrak{F}$  и  $\Theta_\sigma(\mathfrak{M})$  – коммутативная полугруппа. Теорема доказана.

**Следствие 3** [37, теорема 3.2]. Пусть  $\mathfrak{M}$  – разрешимая локальная формация. Тогда и только тогда  $A_l(\mathfrak{M})$  является коммутативной полугруппой, когда  $\mathfrak{M}$  нильпотентна.

**Обобщенно локальные классы Фиттинга.** Напомним, что класс групп  $\mathfrak{H}$  называется **классом Фиттинга**, если он замкнут относительно взятия нормальных подгрупп и произведения нормальных  $\mathfrak{H}$ -подгрупп. Для непустого класса Фиттинга  $\mathfrak{H}$  каждая группа  $G$  имеет наибольшую нормальную  $\mathfrak{H}$ -подгруппу  $G_{\mathfrak{H}}$ , которая называется  $\mathfrak{H}$ -радикалом группы  $G$ .

Пусть  $\mathfrak{F}$  – класс Фиттинга и  $\mathfrak{H}$  – класс групп. Тогда **радикальное произведение**  $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{H}$  классов  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{H}$  определяется следующим образом:  $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{H} = (G \mid G / G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H})$ .

Свойства радикальных произведений классов групп описывает лемма 4. Используя их в данной работе, мы, как правило, не будем явно ссылаться на утверждения данной леммы.

**Лемма 4** ([3, гл. IX, 1.12; 33, предложение 2.2.11]). Пусть  $\mathfrak{F}$ ,  $\mathfrak{H}$  и  $\mathfrak{M}$  – классы Фиттинга. Тогда справедливы утверждения: (1)  $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F} \mathfrak{H}$  и  $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F} \circ \mathfrak{H}$ , если  $\mathfrak{H}$  непусто; (2) если класс  $\mathfrak{H}$  – гомоморф, то  $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{H} = \mathfrak{F} \mathfrak{H}$  и  $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F} \circ \mathfrak{H}$ , если  $\mathfrak{F}$  непусто; (3)  $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{H}$  – класс Фиттинга; (4) для всех  $G \in \mathfrak{G}$ ,  $\mathfrak{H}$ -радикал группы  $G / G_{\mathfrak{F}}$  равен  $G_{\mathfrak{F} \circ \mathfrak{H}} / G_{\mathfrak{F}}$ ; (5)  $(\mathfrak{F} \circ \mathfrak{H}) \circ \mathfrak{M} = \mathfrak{F} \circ (\mathfrak{H} \circ \mathfrak{M})$ .

Напомним [30], что всякую функцию  $f$  вида  $f: \sigma \rightarrow \{\text{классы Фиттинга}\}$  называют  $\sigma$ -функцией Харти, или  $H_\sigma$ -функцией. Для любой  $H_\sigma$ -функции  $f$  класс  $LR_\sigma(f)$  определяют следующим образом:  $LR_\sigma(f) = (G \mid G = 1 \text{ либо } G \neq 1 \text{ и } G^{\mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{G}_{\sigma_i'}} \in f(\sigma_i) \text{ для всех } \sigma_i \in \sigma(G))$ , где  $G^{\mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{G}_{\sigma_i'}}$  –  $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{G}_{\sigma_i'}$ -корадикал группы  $G$ .

Пусть  $\mathfrak{F}$  – класс Фиттинга. Если найдется такая  $H_\sigma$ -функция  $f$ , что  $\mathfrak{F} = LR_\sigma(f)$ , то говорят [30], что класс Фиттинга  $\mathfrak{F}$  является  $\sigma$ -локальным, а  $f$  –  $\sigma$ -локальное задание класса  $\mathfrak{F}$ .

$H_\sigma$ -функцию  $h$  называют [30, определение 1.3] *внутренней*, если  $h(\sigma_i) \subseteq LR_\sigma(h)$  для всех  $i$ ; *полной*, если  $h(\sigma_i) = h(\sigma_i)\mathfrak{G}_{\sigma_i}$  для всех  $i$ ; *полной внутренней*, если  $h$  является полной и внутренней  $H_\sigma$ -функцией.

Доказательство следующей леммы осуществляется прямой проверкой.

**Лемма 5.** Пусть  $\mathfrak{H} = LR_\sigma(h)$  и  $t$  – такая  $H_\sigma$ -функция, что  $t(\sigma_i) = h(\sigma_i) \cap \mathfrak{H}$  для всех  $i$ . Тогда  $t$  – внутреннее  $\sigma$ -локальное задание класса Фиттинга  $\mathfrak{H}$ .

**Лемма 6.** Пусть  $\mathfrak{H} = LR_\sigma(h)$  –  $\sigma$ -локальный класс Фиттинга,  $G$  – группа и  $G_{\mathfrak{H}} \neq G$ . Тогда найдется такое  $\sigma_i \in \sigma(G/G_{\mathfrak{H}})$ , что  $G^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{G}_{\sigma_i'}} \notin h(\sigma_i)$ .

**Доказательство.** Пусть  $\sigma_i \in \sigma(G)$  такое, что  $G^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{G}_{\sigma_i'}} \notin h(\sigma_i)$  и  $H = G_{\mathfrak{H}}$ . Тогда, поскольку  $H \in \mathfrak{H}$ , то  $H^{\mathfrak{G}_{\sigma_j}\mathfrak{G}_{\sigma_j'}} \in h(\sigma_j)$  при всяком  $\sigma_j \in \sigma(H)$ . Пусть  $\sigma_j \in \sigma(H) \setminus \sigma(G/H)$ . Тогда в силу [30, лемма 2.9] имеет место  $G^{\mathfrak{G}_{\sigma_j}\mathfrak{G}_{\sigma_j'}} = H^{\mathfrak{G}_{\sigma_j}\mathfrak{G}_{\sigma_j'}}$ . Значит,  $G^{\mathfrak{G}_{\sigma_j}\mathfrak{G}_{\sigma_j'}} \in h(\sigma_j)$  для любого  $\sigma_j \in \sigma(H) \setminus \sigma(G/H)$ . Поэтому  $\sigma_i \in \sigma(G/H)$ . Лемма доказана.

**Теорема 6.** Пусть  $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$  и  $\alpha = \{\alpha_j \mid j \in J\}$  – некоторые разбиения множества  $\mathbb{P}$ . Тогда в том и только в том случае всякий  $\alpha$ -локальный класс Фиттинга является  $\sigma$ -локальным, когда  $\sigma \leq \alpha$ . В частности, поскольку для всякого разбиения  $\sigma$  имеет место  $\sigma^1 \leq \sigma$ , то любой  $\sigma$ -локальный класс Фиттинга является локальным.

**Доказательство.** Необходимость. Допустим, что  $\sigma \not\leq \alpha$ , но всякий  $\alpha$ -локальный класс Фиттинга является  $\sigma$ -локальным. Тогда найдется такое  $i \in I$ , что  $\sigma_i \not\subseteq \alpha_j$  для любого  $j \in J$ . Пусть  $\alpha_k \in \alpha$  такое, что  $\sigma_i \cap \alpha_k \neq \emptyset$ . Ввиду [30, пример 1.2] класс Фиттинга  $\mathfrak{G}_{\alpha_k}$  является  $\alpha$ -локальным. Поэтому по условию теоремы класс Фиттинга  $\mathfrak{G}_{\alpha_k}$  является также и  $\sigma$ -локальным. Тогда  $\mathfrak{G}_{\alpha_k} = LR_\sigma(g)$ , где  $g$  – некоторое  $\sigma$ -локальное задание класса Фиттинга  $\mathfrak{G}_{\alpha_k}$ . Учитывая лемму 5, мы можем считать, что  $H_\sigma$ -функция  $g$  является внутренней, т. е.  $g(\sigma_i) \subseteq LR_\sigma(g) = \mathfrak{G}_{\alpha_k}$ . Поскольку  $\sigma_i \cap \alpha_k \neq \emptyset$ , то  $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{G}_{\alpha_k})$  и  $g(\sigma_i) \neq \emptyset$  по [30, лемма 3.1 (a)]. Так как класс Фиттинга  $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$  является наследственным, то  $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \subseteq g(\sigma_i)\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ . Тогда, в силу [30, лемма 3.2], имеем

$$\mathfrak{G}_{\sigma_i} \subseteq g(\sigma_i)\mathfrak{G}_{\sigma_i} \subseteq LR_\sigma(g) = \mathfrak{G}_{\alpha_k}.$$

Отсюда  $\sigma_i \subseteq \alpha_k$ . Противоречие. Следовательно,  $\sigma \leq \alpha$ .

**Достаточность.** Пусть  $\sigma \leq \alpha$  и  $\mathfrak{F} = LR_\alpha(f)$  – неединичный  $\alpha$ -локальный класс Фиттинга, где  $f$  – некоторое внутреннее  $\alpha$ -локальное задание  $\mathfrak{F}$ . Покажем, что класс Фиттинга  $\mathfrak{F}$   $\sigma$ -локален. Пусть  $h$  – такая  $H_\sigma$ -функция, что  $h(\sigma_i) = f(\alpha_j)\mathfrak{G}_{\alpha_j}$  для любого  $\sigma_i \subseteq \alpha_j$ . Ввиду [30, лемма 3.2] имеем  $h(\sigma_i) = f(\alpha_j)\mathfrak{G}_{\alpha_j} \subseteq \mathfrak{F}$ . Так как  $\sigma$  и  $\alpha$  – разбиения множества  $\mathbb{P}$  и  $\sigma \leq \alpha$ , то для любого  $\alpha_j$  имеем  $\alpha_j = \cup_{\sigma_i \subseteq \alpha_j} \sigma_i$ .

Пусть  $\mathfrak{H} = LR_\sigma(h)$ . Заметим, что  $\sigma(\mathfrak{H}) = \{\sigma_i \in \sigma \mid \sigma_i \subseteq \alpha_j \in \alpha(\mathfrak{F})\}$ . Действительно, если  $\alpha_j \in \alpha(\mathfrak{F})$ , то в силу [30, лемма 3.1 (a)] имеем  $f(\alpha_j) \neq \emptyset$ . Следовательно,  $h(\sigma_i) \neq \emptyset$  для любого  $\sigma_i \subseteq \alpha_j \in \alpha(\mathfrak{F})$ . Тогда  $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{H})$  по [30, лемма 3.1 (a)]. Значит,  $\{\sigma_i \in \sigma \mid \sigma_i \subseteq \alpha_j \in \alpha(\mathfrak{F})\} \subseteq \sigma(\mathfrak{H})$ . Обратно, если  $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{H})$ , то, применяя [30, лемма 3.1 (a)], имеем  $h(\sigma_i) \neq \emptyset$ . Следовательно,  $f(\alpha_j) \neq \emptyset$  для всякого  $\alpha_j$  такого, что  $\sigma_i \subseteq \alpha_j$ . Тогда  $\alpha_j \in \alpha(\mathfrak{F})$  в силу [30, лемма 3.1 (a)]. Поэтому  $\sigma(\mathfrak{H}) \subseteq \{\sigma_i \in \sigma \mid \sigma_i \subseteq \alpha_j \in \alpha(\mathfrak{F})\}$ . Таким образом,  $\sigma(\mathfrak{H}) = \{\sigma_i \in \sigma \mid \sigma_i \subseteq \alpha_j \in \alpha(\mathfrak{F})\}$ .

Докажем, что  $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$ . Допустим, что  $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H} \neq \emptyset$  и пусть  $G$  – группа минимального порядка из  $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$ . Тогда  $G$  – комонолитическая группа с комонолитом  $P = G_{\mathfrak{H}}$ .

Пусть  $G/P$  –  $\alpha$ -примарная группа. Тогда  $G/P$  –  $\alpha_j$ -группа для некоторого  $\alpha_j \in \alpha(\mathfrak{F})$  и  $G^{\mathfrak{G}_{\alpha_j}\mathfrak{G}_{\alpha_j'}} = G^{\mathfrak{G}_{\alpha_j}}$ . Поскольку  $G \in \mathfrak{F}$ , то  $G^{\mathfrak{G}_{\alpha_j}} = G^{\mathfrak{G}_{\alpha_j}\mathfrak{G}_{\alpha_j'}} \in f(\alpha_j) \subseteq f(\alpha_j)\mathfrak{G}_{\alpha_j} = h(\sigma_i)$  для всякого  $\sigma_i \subseteq \alpha_j$ . Значит,  $G \in h(\sigma_i)$  для всякого  $\sigma_i \in \sigma(G/P)$ . Поэтому  $G^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{G}_{\sigma_i'}} \in h(\sigma_i)$ . Но  $P = G_{\mathfrak{H}}$ . Последнее противоречит лемме 6. Значит, группа  $G/P$  – не  $\alpha$ -примарна. Тогда  $G^{\mathfrak{G}_{\alpha_j}\mathfrak{G}_{\alpha_j'}} = G$  для любого  $\alpha_j \in \alpha(G/P)$ . Следовательно,  $G = G^{\mathfrak{G}_{\alpha_j}\mathfrak{G}_{\alpha_j'}} \in f(\alpha_j) \subseteq f(\alpha_j)\mathfrak{G}_{\alpha_j} = h(\sigma_i)$  для всяко-

го  $\sigma_i \subseteq \alpha_j$ . Поэтому  $G \in h(\sigma_i)$  для всех  $\sigma_i \in \sigma(G / P)$ . Но тогда  $G^{\mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{G}_{\sigma_i'}} \in h(\sigma_i)$  для всякого  $\sigma_i \in \sigma(G / P)$ , и мы снова получаем противоречие с леммой 6. Поэтому  $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$ .

Предположим теперь  $\mathfrak{H} \not\subseteq \mathfrak{F}$  и  $A$  – группа минимального порядка из  $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{F}$ . Тогда  $A$  – комонолитическая группа с комонолитом  $R = A_{\mathfrak{F}}$ . Допустим, что  $A/R$  –  $\sigma$ -примарная группа. Тогда  $A/R$  –  $\sigma_i$ -группа для некоторого  $i$  и, следовательно,  $A^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}} = A^{\mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{G}_{\sigma_i'}}$ . Поскольку  $A \in \mathfrak{H}$ , то  $A^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}} = A^{\mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{G}_{\sigma_i'}} \in h(\sigma_i) = f(\alpha_j) \mathfrak{G}_{\alpha_j}$ , где  $\sigma_i \subseteq \alpha_j \in \alpha(A / R)$ . Следовательно,  $A \in (f(\alpha_j) \mathfrak{G}_{\alpha_j}) \mathfrak{G}_{\sigma_i} = f(\alpha_j) (\mathfrak{G}_{\alpha_j} \mathfrak{G}_{\sigma_i}) = f(\alpha_j) \mathfrak{G}_{\alpha_j} \subseteq \mathfrak{F}$ , что противоречит выбору  $A$ . Значит,  $A/R$  – не  $\sigma$ -примарная группа. Тогда  $A^{\mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{G}_{\sigma_i'}} = A$  для любого  $\sigma_i \in \sigma(A / R)$ . Поэтому  $A = A^{\mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{G}_{\sigma_i'}} \in h(\sigma_i) = f(\alpha_j) \mathfrak{G}_{\alpha_j} \subseteq \mathfrak{F}$ . И мы снова получаем противоречие с выбором группы  $A$ . Поэтому  $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{H} = \mathfrak{F}$ .

Вторая часть утверждения теоремы является следствием первой ее части. Теорема доказана.

**Теорема 7.** Пусть  $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$  и  $\alpha = \{\alpha_j \mid j \in J\}$  – некоторые разбиения  $\mathbb{P}$ ,  $\mathfrak{F} = LR_{\alpha}(t)$ , где  $t$  – внутреннее  $\alpha$ -локальное задание  $\mathfrak{F}$ . Тогда: (1) если  $\sigma \leq \alpha$ , то класс Фиттинга  $\mathfrak{F}$  –  $\sigma$ -локален и  $\mathfrak{F} = LR_{\sigma}(f)$ , где  $f$  – полное внутреннее  $\sigma$ -локальное задание  $\mathfrak{F}$ , при этом  $f(\sigma_i) = t(\alpha_j) \mathfrak{G}_{\alpha_j}$  для любого  $\sigma_i \subseteq \alpha_j$ ; (2) если  $\sigma \not\leq \alpha$ , но для всякого  $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})$  найдется  $j = j(i) \in J$  такое, что  $\sigma_i \subseteq \alpha_j$ , то класс Фиттинга  $\mathfrak{F}$  –  $\sigma$ -локален и  $\mathfrak{F} = LR_{\sigma}(f)$ , где  $f$  – полное внутреннее  $\sigma$ -локальное задание  $\mathfrak{F}$ , при этом  $f(\sigma_i) = t(\alpha_j) \mathfrak{G}_{\alpha_j}$  для всех  $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})$ ,  $\sigma_i \subseteq \alpha_j$  и  $f(\sigma_i) = \emptyset$  для всех  $\sigma_i \notin \sigma(\mathfrak{F})$ .

**Доказательство.** (1) Пусть  $\mathfrak{F} = LR_{\alpha}(t)$ , где  $t$  – внутреннее  $\alpha$ -локальное задание класса Фиттинга  $\mathfrak{F}$ . Поскольку  $\sigma \leq \alpha$ , то в силу теоремы 6 класс Фиттинга  $\mathfrak{F}$  является  $\sigma$ -локальным. Кроме того (см. доказательство теоремы 6),  $\mathfrak{F} = LR_{\sigma}(f)$ , где  $f$  – такая внутренняя  $H_{\sigma}$ -функция, что  $f(\sigma_i) = t(\alpha_j) \mathfrak{G}_{\alpha_j}$  для любого  $\sigma_i \subseteq \alpha_j$ . Так как при этом для любого  $i$

$$f(\sigma_i) \mathfrak{G}_{\sigma_i} = (t(\alpha_j) \mathfrak{G}_{\alpha_j}) \mathfrak{G}_{\sigma_i} = t(\alpha_j) (\mathfrak{G}_{\alpha_j} \mathfrak{G}_{\sigma_i}) = t(\alpha_j) \mathfrak{G}_{\alpha_j} = f(\sigma_i),$$

то  $f$  – полное внутреннее  $\sigma$ -локальное задание  $\mathfrak{F}$ . Значит, утверждение (1) верно.

(2) Пусть  $\sigma \not\leq \alpha$ , но для всякого  $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})$  найдется  $j = j(i) \in J$  такое, что  $\sigma_i \subseteq \alpha_j$ . Тогда  $\sigma(\mathfrak{F}) \subset \sigma$ . Пусть  $f$  – такая  $H_{\sigma}$ -функция, что  $f(\sigma_i) = t(\alpha_j) \mathfrak{G}_{\alpha_j}$  для всех  $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})$ ,  $\sigma_i \subseteq \alpha_j$  и  $f(\sigma_i) = \emptyset$  для всех  $\sigma_i \notin \sigma(\mathfrak{F})$ . Пусть  $\mathfrak{H} = LR_{\sigma}(f)$ . Ввиду [30, лемма 3.1 (а)] имеем  $\sigma(\mathfrak{H}) = \sigma(\mathfrak{F})$ .

Покажем, что  $\mathfrak{H} = \mathfrak{F}$ . Предположим вначале, что  $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H} \neq \emptyset$  и пусть  $A$  – группа минимального порядка из  $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$ . Тогда  $A$  – комонолитическая группа с комонолитом  $N = A_{\mathfrak{H}}$ .

Допустим, что  $A/N$  –  $\alpha$ -примарная группа. Тогда  $A/N$  –  $\alpha_j$ -группа для некоторого  $\alpha_j \in \alpha(\mathfrak{F})$  и  $A^{\mathfrak{G}_{\alpha_j} \mathfrak{G}_{\alpha_j'}} = A^{\mathfrak{G}_{\alpha_j}}$ . Поскольку  $A \in \mathfrak{F}$ , то  $A^{\mathfrak{G}_{\alpha_j} \mathfrak{G}_{\alpha_j'}} \in t(\alpha_j) \subseteq t(\alpha_j) \mathfrak{G}_{\alpha_j} = f(\sigma_i)$  для всякого  $\sigma_i \subseteq \alpha_j$ . Значит,  $A \in f(\sigma_i)$  для всякого  $\sigma_i \in \sigma(A / N)$ . Поэтому  $A^{\mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{G}_{\sigma_i'}} \in f(\sigma_i)$ . Но поскольку  $N = A_{\mathfrak{H}}$ , то последнее противоречит лемме 6. Следовательно,  $A/N$  – не  $\alpha$ -примарная группа. Поэтому  $A^{\mathfrak{G}_{\alpha_j} \mathfrak{G}_{\alpha_j'}} = A$  для любого  $\alpha_j \in \alpha(A / N)$ . Значит,

$$A = A^{\mathfrak{G}_{\alpha_j} \mathfrak{G}_{\alpha_j'}} \in t(\alpha_j) \subseteq t(\alpha_j) \mathfrak{G}_{\alpha_j} = f(\sigma_i)$$

для всякого  $\sigma_i \subseteq \alpha_j$ . Поэтому  $A \in f(\sigma_i)$  для всех  $\sigma_i \in \sigma(A / N)$ , и мы снова получаем, что  $A^{\mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{G}_{\sigma_i'}} \in f(\sigma_i)$  для всякого  $\sigma_i \in \sigma(A / N)$ . Последнее противоречит лемме 6. Поэтому данный случай невозможен и  $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$ .

Пусть теперь  $\mathfrak{H} \not\subseteq \mathfrak{F}$  и  $B$  – группа минимального порядка из  $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{F}$ . Тогда  $B$  – комонолитическая группа с комонолитом  $R = B_{\mathfrak{F}}$ . Допустим, что  $B/R$  –  $\sigma$ -примарная группа. Тогда  $B/R$  –  $\sigma_i$ -группа для некоторого  $i$  и, следовательно,  $B^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}} = B^{\mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{G}_{\sigma_i'}}$ . Поскольку  $B \in \mathfrak{H}$ , то

$$B^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}} = B^{\mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{G}_{\sigma_i'}} \in f(\sigma_i) = t(\alpha_j) \mathfrak{G}_{\alpha_j},$$

где  $\sigma_i \subseteq \alpha_j \in \alpha(B / R)$ . Значит,  $B \in (t(\alpha_j) \mathfrak{G}_{\alpha_j}) \mathfrak{G}_{\sigma_i} = t(\alpha_j) (\mathfrak{G}_{\alpha_j} \mathfrak{G}_{\sigma_i}) = t(\alpha_j) \mathfrak{G}_{\alpha_j} \subseteq \mathfrak{F}$ , что противоречит выбору группы  $B$ . Следовательно, группа  $B/R$  – не  $\sigma$ -примарна. Тогда  $B^{\mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{G}_{\sigma_i'}} = B$  для

любого  $\sigma_i \in \sigma(B / R)$ . Поэтому  $B = B^{\mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{G}_{\sigma_i'}} \in f(\sigma_i) = t(\alpha_j) \mathfrak{G}_{\alpha_j} \subseteq \mathfrak{F}$ . И мы снова получаем противоречие с выбором группы  $B$ . Значит,  $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{H} = \mathfrak{F}$ . Поскольку при этом для любого  $i$

$$f(\sigma_i) \mathfrak{G}_{\sigma_i} = (t(\alpha_j) \mathfrak{G}_{\alpha_j}) \mathfrak{G}_{\sigma_i} = t(\alpha_j) (\mathfrak{G}_{\alpha_j} \mathfrak{G}_{\sigma_i}) = t(\alpha_j) \mathfrak{G}_{\alpha_j} = f(\sigma_i),$$

то  $f$  – полное внутреннее  $\sigma$ -локальное задание  $\mathfrak{F}$ . Следовательно, утверждение (2) теоремы верно. Теорема доказана.

**Теорема 8.** Пусть  $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$  и  $\alpha = \{\alpha_j \mid j \in J\}$  – некоторые разбиения множества всех простых чисел  $\mathbb{P}$  и пусть  $\mathfrak{X} = LR_\sigma(x)$ ,  $\mathfrak{H} = LR_\sigma(h)$ , где  $x$  – внутренняя  $H_\sigma$ -функция класса Фиттинга  $\mathfrak{X}$ ,  $h$  – внутренняя  $H_\sigma$ -функция класса Фиттинга  $\mathfrak{H}$ . Тогда, если  $\sigma \leq \alpha$ , то произведения  $\mathfrak{F} = \mathfrak{X} \diamond \mathfrak{H}$  и  $\mathfrak{M} = \mathfrak{H} \diamond \mathfrak{X}$  являются  $\sigma$ -локальными классами Фиттинга и  $\mathfrak{M} = LR_\sigma(m)$ ,  $\mathfrak{F} = LR_\sigma(f)$ , где  $f$  и  $m$  – такие внутренние  $H_\sigma$ -функции, что

$$f(\sigma_i) = \begin{cases} \mathfrak{X} \diamond h(\sigma_i), & \text{если } \sigma_i \in \sigma(\mathfrak{H}), \\ x(\alpha_j) \mathfrak{G}_{\alpha_j}, & \text{если } \sigma_i \in \sigma \setminus \sigma(\mathfrak{H}) \text{ и } \sigma_i \subseteq \alpha_j, \end{cases}$$

$$m(\sigma_i) = \begin{cases} \mathfrak{H} \diamond x(\alpha_j) \mathfrak{G}_{\alpha_j}, & \text{если } \sigma_i \in \sigma(\mathfrak{X}) \text{ и } \sigma_i \subseteq \alpha_j, \\ h(\sigma_i), & \text{если } \sigma_i \in \sigma \setminus \sigma(\mathfrak{X}). \end{cases}$$

**Доказательство.** Пусть  $\sigma \leq \alpha$ . Ввиду теоремы 7 (1) класс Фиттинга  $\mathfrak{X}$  является  $\sigma$ -локальным и  $\mathfrak{X} = LR_\sigma(t)$ , где  $t$  – полное внутреннее  $\sigma$ -локальное задание класса Фиттинга  $\mathfrak{X}$ , при этом  $t(\sigma_i) = x(\alpha_j) \mathfrak{G}_{\alpha_j}$  для любого  $\sigma_i \subseteq \alpha_j$ . Применяя теперь [30, теорема 1.2], имеем  $\mathfrak{F} = LR_\sigma(f)$ ,  $\mathfrak{M} = LR_\sigma(m)$ , где  $f$  и  $m$  – такие  $H_\sigma$ -функции, что

$$f(\sigma_i) = \begin{cases} \mathfrak{X} \diamond h(\sigma_i), & \text{если } \sigma_i \in \sigma(\mathfrak{H}), \\ t(\sigma_i) = x(\alpha_j) \mathfrak{G}_{\alpha_j}, & \text{если } \sigma_i \in \sigma \setminus \sigma(\mathfrak{H}) \text{ и } \sigma_i \subseteq \alpha_j, \end{cases}$$

$$m(\sigma_i) = \begin{cases} \mathfrak{H} \diamond t(\sigma_i) = \mathfrak{H} \diamond x(\alpha_j) \mathfrak{G}_{\alpha_j}, & \text{если } \sigma_i \in \sigma(\mathfrak{X}) \text{ и } \sigma_i \subseteq \alpha_j, \\ h(\sigma_i), & \text{если } \sigma_i \in \sigma \setminus \sigma(\mathfrak{X}). \end{cases}$$

Поскольку  $H_\sigma$ -функции  $h$  и  $t$  являются внутренними, то, очевидно, внутренними являются и  $H_\sigma$ -функции  $f$  и  $m$ . Теорема доказана.

**Частичные  $\sigma$ -алгебры классов Фиттинга.** Пусть  $\theta$  – полная решетка классов Фиттинга и пусть  $\sigma$  – некоторое разбиение множества простых чисел  $\mathbb{P}$ . Классы Фиттинга из  $\theta$  будем называть  $\theta$ -классами Фиттинга.

Для всякой  $H_\sigma$ -функции  $h$  символ  $\text{Supp}(h)$  обозначает носитель  $h$ , т. е.  $\text{Supp}(h) = \{\sigma_i \in \sigma \mid h(\sigma_i) \neq \emptyset\}$ .  $H_\sigma$ -функцию  $h$  называют  $\theta$ -значной, если  $h(\sigma_i) \in \theta$  для всех  $\sigma_i \in \text{Supp}(h)$ .

Через  $\theta^\sigma$  будем обозначать множество всех  $\sigma$ -локальных классов Фиттинга, которые имеют хотя бы одно  $\theta$ -значное  $\sigma$ -локальное задание, т. е.

$$\theta^\sigma = \{\mathfrak{H} = LR_\sigma(h) \mid h(\sigma_i) \in \theta \text{ для любого } \sigma_i \in \text{Supp}(h)\}.$$

Класс (1) всех единичных групп является  $\sigma$ -локальным классом Фиттинга [30, пример 1.2 (i)] и  $(1) = LR_\sigma(n)$ , где  $n(\sigma_i) = \emptyset$  для всех  $i$ . По определению класс (1) принадлежит  $\theta^\sigma$ .

Полную решетку классов Фиттинга  $\theta$  будем называть: 1) частичной  $\sigma$ -алгеброй классов Фиттинга, если  $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \in \theta$  для любого  $\sigma_i \in \sigma(\theta)$  и для любого класса Фиттинга  $\mathfrak{H} \in \theta$  имеет место  $\mathfrak{H} \diamond \mathfrak{G}_{\sigma_i} \in \theta$ ; 2)  $\sigma$ -алгеброй классов Фиттинга, если  $\theta$  – такая частичная  $\sigma$ -алгебра классов Фиттинга, что  $\mathfrak{H} \diamond \mathfrak{X} \in \theta$  для любых  $\mathfrak{H}, \mathfrak{X} \in \theta$ .

**Лемма 7.** Пусть  $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}_{\sigma_i}$  – класс всех  $\sigma_i$ -групп. Тогда  $\mathfrak{H} = LR_\sigma(h)$ , где  $h$  – такая  $H_\sigma$ -функция, что  $m(\sigma_i) = (1)$  и  $m(\sigma_j) = \emptyset$  для любого  $j \neq i$ .

**Доказательство** осуществляется прямой проверкой.

**Предложение 2.** Пусть  $\theta$  – такая полная решетка классов Фиттинга, что  $\theta^\sigma \subseteq \theta$ . Тогда имеют место утверждения: (1) если  $\theta$  – частичная  $\sigma$ -алгебра классов Фиттинга, то  $\theta^\sigma$  также является частичной  $\sigma$ -алгеброй классов Фиттинга; (2) если  $\theta$  –  $\sigma$ -алгебра классов Фиттинга, то  $\theta^\sigma$  также является  $\sigma$ -алгеброй классов Фиттинга.

**Доказательство.** Поскольку  $\theta$  – решетка классов Фиттинга, то в силу [30, предложение 7.3] пересечение любой совокупности классов Фиттинга из  $\theta^\sigma$  снова принадлежит  $\theta^\sigma$ . Пусть  $\mathfrak{F}$  – такой класс Фиттинга из  $\theta$ , что для любого  $\theta$ -класса Фиттинга  $\mathfrak{M}$  имеет место  $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$ . И пусть  $f$  – такая  $H_\sigma$ -функция, что  $f(\sigma_i) = \mathfrak{F}$  для любого  $\sigma_i \in \sigma$ . Тогда  $LR_\sigma(f) \in \theta^\sigma$ . Пусть  $\mathfrak{H}$  – произвольный  $\theta^\sigma$ -класс Фиттинга. Тогда, очевидно,  $\mathfrak{H} \subseteq LR_\sigma(f)$ . Значит,  $\theta^\sigma$  – полная решетка классов Фиттинга.

Пусть  $\sigma_i \in \sigma$  и  $\mathfrak{F} \in \theta^\sigma$ . Пусть  $\mathfrak{F} = LR_\sigma(f)$ , где  $f$  –  $\theta$ -значное  $\sigma$ -локальное задание класса Фиттинга  $\mathfrak{F}$ . Поскольку  $\theta$  – решетка классов Фиттинга, то ввиду леммы 5 мы можем считать, что  $f$  – внутренняя  $H_\sigma$ -функция. Покажем, что  $\mathfrak{H} = \mathfrak{F}\mathfrak{G}_{\sigma_i} \in \theta^\sigma$ . Действительно, ввиду леммы 7 имеем  $\mathfrak{G}_{\sigma_i} = LR_\sigma(m)$ , где  $m$  – такое  $\sigma$ -локальное задание  $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ , что  $m(\sigma_i) = (1)$  и  $m(\sigma_j) = \emptyset$  для любого  $j \neq i$ . Так как  $(1) \in \theta$ , то  $m$  является  $\theta$ -значным  $\sigma$ -локальным заданием  $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ . По [30, теорема 1.2] имеем  $\mathfrak{H} = LR_\sigma(h)$ , где  $h$  – такое  $\sigma$ -локальное задание  $\mathfrak{H}$ , что  $h(\sigma_i) = \mathfrak{F}\mathfrak{G}_{\sigma_i} = \mathfrak{F}\mathfrak{G}(1) = \mathfrak{F} \in \theta$  и  $h(\sigma_j) = f(\sigma_j) \in \theta$  для любого  $\sigma_j \in \sigma(\mathfrak{F}) \setminus \{\sigma_i\}$ . Отсюда  $\mathfrak{H} = \mathfrak{F}\mathfrak{G}_{\sigma_i} \in \theta^\sigma$ . Таким образом,  $\theta^\sigma$  является частичной  $\sigma$ -алгеброй формаций, т. е. имеет место утверждение (1).

(2) Ввиду утверждения (1)  $\theta^\sigma$  является частичной  $\sigma$ -алгеброй классов Фиттинга. Пусть  $\mathfrak{M} = LR_\sigma(m)$  и  $\mathfrak{F} = LR_\sigma(f)$ , где  $m$  и  $f$  – внутренние  $\theta$ -значные  $\sigma$ -локальные задания классов Фиттинга  $\mathfrak{M}$  и  $\mathfrak{F}$  соответственно,  $\mathfrak{H} = \mathfrak{M}\mathfrak{F}$ . По [30, теорема 1.14] имеем  $\mathfrak{H} = LR_\sigma(h)$ , где  $h$  – такое  $\sigma$ -локальное задание класса Фиттинга  $\mathfrak{H}$ , что  $h(\sigma_i) = \mathfrak{M}\mathfrak{F}(\sigma_i)$  для любого  $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})$  и  $h(\sigma_i) = m(\sigma_i)$  для любого  $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{M}) \setminus \sigma(\mathfrak{F})$ . Так как по условию  $\theta^\sigma \subseteq \theta$ , то  $h(\sigma_i) = \mathfrak{M}\mathfrak{F}(\sigma_i) \in \theta$ . Значит,  $h$  –  $\theta$ -значное  $\sigma$ -локальное задание класса Фиттинга  $\mathfrak{H}$ . Следовательно,  $\mathfrak{H} \in \theta^\sigma$ . Поэтому  $\theta^\sigma$  является  $\sigma$ -алгеброй классов Фиттинга и утверждение (2) верно. Предложение доказано.

Пусть  $\sigma$  – некоторое разбиение множества  $\mathbb{P}$ ,  $\theta$  –  $\sigma$ -алгебра классов Фиттинга,  $\mathfrak{M} \in \theta^\sigma$ . Через  $\theta^\sigma(\mathfrak{M})$  будем обозначать множество всех  $\theta^\sigma$ -классов Фиттинга из  $\mathfrak{M}$ . В частности, если  $\theta$  – решетка всех классов Фиттинга, то вместо символа  $\theta^\sigma(\mathfrak{M})$  будем использовать символ  $A^\sigma(\mathfrak{M})$ , т. е.  $A^\sigma(\mathfrak{M})$  – множество всех  $\sigma$ -локальных классов Фиттинга из  $\mathfrak{M} \in \theta^\sigma$ .

Умножение классов Фиттинга в  $\mathfrak{M}$  определим следующим образом:  $\mathfrak{F} \mathop{\diamond}_{\mathfrak{M}} \mathfrak{H} = \mathfrak{F}\mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}$ .

**Лемма 8.** Пусть  $\sigma$  – некоторое разбиение множества  $\mathbb{P}$ ,  $\theta$  –  $\sigma$ -алгебра классов Фиттинга,  $\mathfrak{M} \in \theta^\sigma$ . Тогда: (1)  $\theta^\sigma(\mathfrak{M})$  является  $\sigma$ -алгеброй классов Фиттинга; (2) если  $\mathfrak{F} = LR_\sigma(f)$  и  $\mathfrak{H} = LR_\sigma(h)$  – классы Фиттинга из  $\theta^\sigma(\mathfrak{M})$ , где  $f$  и  $h$  – некоторые внутренние  $\theta$ -значные  $\sigma$ -локальные задания классов Фиттинга  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{H}$  соответственно, то  $\mathfrak{F} \mathop{\diamond}_{\mathfrak{M}} \mathfrak{H} = LR_\sigma(l)$ , где  $l$  – такая внутренняя  $\theta$ -значная  $H_\sigma$ -функция, что

$$l(\sigma_j) = \begin{cases} (\mathfrak{F}\mathfrak{H}(\sigma_i)) \cap m(\sigma_i), & \text{если } \sigma_i \in \sigma(\mathfrak{H}), \\ f(\sigma_i) \cap m(\sigma_i), & \text{если } \sigma_i \in \sigma \setminus \sigma(\mathfrak{H}). \end{cases}$$

**Доказательство.** (1) Поскольку для любого  $\sigma_i$  класс Фиттинга  $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$  является наследственным, то ввиду [30, лемма 3.2] для любого  $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{M})$  имеем  $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \subseteq \mathfrak{M}$ . Так как при этом класс Фиттинга  $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$   $\sigma$ -локален и ввиду [30, пример 1.2 (ii)]  $\mathfrak{G}_{\sigma_i} = LR_\sigma(g)$ , где  $g(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} \in \theta$  и  $g(\sigma_k) = \emptyset$  для любого  $k \neq i$ , то  $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \in \theta^\sigma(\mathfrak{M})$ . В силу предложения 2 (2)  $\theta^\sigma$  является  $\sigma$ -алгеброй классов Фиттинга. Поэтому для любого класса Фиттинга  $\mathfrak{L} \in \theta^\sigma(\mathfrak{M})$  имеем  $\mathfrak{L}\mathfrak{G}_{\sigma_i} \in \theta^\sigma$  и, следовательно,  $\mathfrak{L} \mathop{\diamond}_{\mathfrak{M}} \mathfrak{G}_{\sigma_i} = \mathfrak{L}\mathfrak{G}_{\sigma_i} \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{L}\mathfrak{G}_{\sigma_i} \cap \mathfrak{M} \in \theta^\sigma(\mathfrak{M})$ . Пусть  $\mathfrak{F} = LR_\sigma(f)$  и  $\mathfrak{H} = LR_\sigma(h)$  – классы Фиттинга из  $\theta^\sigma(\mathfrak{M})$ , где  $f$  и  $h$  – некоторые внутренние  $\theta$ -значные  $\sigma$ -локальные задания классов Фиттинга  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{H}$  соответственно. Тогда в силу [30, теорема 1.2] имеем  $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = LR_\sigma(x)$ , где  $x$  – такая  $H_\sigma$ -функция, что

$$x(\sigma_i) = \begin{cases} \mathfrak{F}\mathfrak{H}(\sigma_i), & \text{если } \sigma_i \in \sigma(\mathfrak{H}), \\ f(\sigma_i), & \text{если } \sigma_i \in \sigma \setminus \sigma(\mathfrak{H}). \end{cases}$$

Заметим, что  $x$  является внутренним  $\theta$ -значным  $\sigma$ -локальным заданием класса Фиттинга  $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ . Пусть  $m$  – некоторое внутреннее  $\theta$ -значное  $\sigma$ -локальное задание класса Фиттинга  $\mathfrak{M}$ . И пусть

$\mathfrak{L} = LR_\sigma(x) \cap \mathfrak{M}$ . Ввиду [30, предложение 7.3] имеем  $\mathfrak{L} = LR_\sigma(l)$ , где  $l(\sigma_i) = x(\sigma_i) \cap m(\sigma_i)$  для любого  $i$ . Значит,  $l$  – внутреннее  $\theta$ -значное  $\sigma$ -локальное задание класса  $\mathfrak{L}$ , при этом

$$l(\sigma_i) = \begin{cases} (\mathfrak{F} \diamond h(\sigma_i)) \cap m(\sigma_i), & \text{если } \sigma_i \in \sigma(\mathfrak{H}), \\ f(\sigma_i) \cap m(\sigma_i), & \text{если } \sigma_i \in \sigma \setminus \sigma(\mathfrak{H}). \end{cases}$$

Следовательно,  $\mathfrak{L} = \mathfrak{F} \diamond \mathfrak{H} \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{F} \diamond \mathfrak{H} \in \theta^\sigma(\mathfrak{M})$ . Таким образом,  $\theta^\sigma(\mathfrak{M})$  –  $\sigma$ -алгебра.

(2) См. доказательство (1). Лемма доказана.

**Теорема 9.** Пусть  $\sigma$  и  $\alpha$  – некоторые разбиения множества  $\mathbb{P}$ ,  $\theta$  –  $\alpha$ -алгебра классов Фиттинга,  $\mathfrak{M} \in \theta^\alpha$ . Тогда если  $\theta$  –  $\sigma$ -алгебра классов Фиттинга и  $\sigma \leq \alpha$ , то  $\theta^\alpha(\mathfrak{M})$  –  $\sigma$ -подалгебра в  $\theta^\sigma(\mathfrak{M})$ .

**Доказательство.** Пусть  $\mathfrak{F}_s = LR_\alpha(f_s)$  – класс Фиттинга из  $\theta^\alpha(\mathfrak{M})$ , где  $f_s$  – некоторое внутреннее  $\theta$ -значное  $\alpha$ -локальное задание класса Фиттинга  $\mathfrak{F}_s$ ,  $s = 1, 2$ . По теореме 2 (1) класс Фиттинга  $\mathfrak{F}_s$  является  $\sigma$ -локальным и  $\mathfrak{F}_s = LR_\sigma(t_s)$ , где  $t_s$  – полное внутреннее  $\sigma$ -локальное задание класса Фиттинга  $\mathfrak{F}_s$ , при этом  $t_s(\sigma_i) = f_s(\alpha_j) \mathfrak{G}_{\alpha_j}$  для любого  $\sigma_i \subseteq \alpha_j$ . Поскольку по условию теоремы  $\theta$  –  $\alpha$ -алгебра классов Фиттинга, то произведение  $f_s(\alpha_j) \mathfrak{G}_{\alpha_j}$  является  $\theta$ -классом Фиттинга. Значит,  $t$  –  $\theta$ -значное  $\sigma$ -локальное задание класса Фиттинга  $\mathfrak{F}_s$ . Следовательно,  $\mathfrak{F}_s \in \theta^\sigma(\mathfrak{M})$ . Поэтому  $\theta^\alpha(\mathfrak{M}) \subseteq \theta^\sigma(\mathfrak{M})$ .

Пусть  $m$  – некоторое внутреннее  $\theta$ -значное  $\sigma$ -локальное задание класса Фиттинга  $\mathfrak{M}$ . В силу леммы 8(2) имеем  $\mathfrak{F}_1 \diamond \mathfrak{F}_2 = LR_\sigma(x)$ , где  $x$  – такая внутренняя  $\theta$ -значная  $H_\sigma$ -функция, что

$$x(\sigma_i) = \begin{cases} (\mathfrak{F}_1 \diamond f_2(\sigma_i)) \cap m(\sigma_i), & \text{если } \sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F}_2), \\ f_1(\sigma_i) \cap m(\sigma_i), & \text{если } \sigma_i \in \sigma \setminus \sigma(\mathfrak{F}_2). \end{cases}$$

Поэтому  $\mathfrak{F}_1 \diamond \mathfrak{F}_2 \in \theta^\sigma(\mathfrak{M})$  и  $\theta^\alpha(\mathfrak{M})$  –  $\sigma$ -подалгебра в  $\theta^\sigma(\mathfrak{M})$ . Теорема доказана.

**Следствие 4.** Пусть  $\sigma$  и  $\alpha$  – некоторые разбиения множества  $\mathbb{P}$ . Тогда, если  $\sigma \leq \alpha$ , то полугруппа  $A^\alpha(\mathfrak{M})$  всех  $\alpha$ -локальных классов Фиттинга является подполугруппой полугруппы  $A^\sigma(\mathfrak{M})$  всех  $\sigma$ -локальных классов Фиттинга.

**Лемма 9.** Пусть  $\mathfrak{H} = LR_\sigma(h)$ . Если  $G^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}} \in h(\sigma_i) \cap \mathfrak{H}$  для некоторого  $\sigma_i \in \sigma(G)$ , то  $G \in \mathfrak{H}$ .

**Доказательство.** Поскольку  $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \subseteq \mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{G}_{\sigma_{i'}}$ , то  $G^{\mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{G}_{\sigma_{i'}}} \subseteq G^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}}$ . Значит,  $G^{\mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{G}_{\sigma_{i'}}} \in h(\sigma_i)$ . Далее, так как  $G/G^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}}$  –  $\sigma_j$ -группа для любого  $j \neq i$ , то в силу [30, лемма 2.9] имеем  $(G^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}})^{\mathfrak{G}_{\sigma_j} \mathfrak{G}_{\sigma_{j'}}} = G^{\mathfrak{G}_{\sigma_j} \mathfrak{G}_{\sigma_{j'}}}$ . Теперь поскольку  $G^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}} \in \mathfrak{H}$ , то  $G^{\mathfrak{G}_{\sigma_j} \mathfrak{G}_{\sigma_{j'}}} \in h(\sigma_j)$  для любого  $j \neq i$ . Поэтому  $G \in \mathfrak{H}$ . Лемма доказана.

**Лемма 10.** Пусть  $\mathfrak{F} = LR_\sigma(f)$ ,  $\Pi = \sigma(\mathfrak{F})$ . Тогда  $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}_\sigma = \mathfrak{N}_\Pi$  и  $\Pi = \{\sigma_i \mid f(\sigma_i) \neq \emptyset\}$ .

**Доказательство.** Ввиду [30, лемма 3.1 (a)] имеем  $\Pi = \{\sigma_i \mid f(\sigma_i) \neq \emptyset\}$ . Поскольку  $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$  – наследственный класс Фиттинга, то  $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \subseteq (f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}) \mathfrak{G}_{\sigma_i}$  и с учетом [30, лемма 3.2] имеем

$$\mathfrak{G}_{\sigma_i} \subseteq (f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}) \mathfrak{G}_{\sigma_i} \subseteq \mathfrak{F}$$

для всякого  $\sigma_i \in \Pi$ . Поэтому  $\mathfrak{N}_\Pi = \bigoplus_{\sigma_i \in \Pi} \mathfrak{G}_{\sigma_i} \subseteq \mathfrak{F}$ . С другой стороны, поскольку  $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}_\sigma \subseteq \mathfrak{N}_\Pi$ , то  $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}_\sigma = \mathfrak{N}_\Pi$ . Лемма доказана.

**Теорема 10.** Пусть  $\mathfrak{M}$  – некоторый  $\sigma$ -локальный класс Фиттинга  $\sigma$ -разрешимых групп. Тогда и только тогда  $\sigma$ -алгебра  $\theta^\sigma(\mathfrak{M})$  является коммутативной полугруппой  $\sigma$ -локальных классов Фиттинга, когда  $\mathfrak{M}$  содержится в классе всех  $\sigma$ -нильпотентных групп.

**Доказательство.** Необходимость. Пусть  $\sigma$ -алгебра  $\theta^\sigma(\mathfrak{M})$  является коммутативной полугруппой. Покажем, что тогда класс Фиттинга  $\mathfrak{M}$   $\sigma$ -нильпотентен.

Пусть  $m$  – некоторое внутреннее  $\theta$ -значное  $\sigma$ -локальное задание класса Фиттинга  $\mathfrak{M}$ . Допустим, что  $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{N}_\sigma$  и пусть  $G$  – группа минимального порядка из  $\mathfrak{M} \setminus \mathfrak{N}_\sigma$ . Тогда  $G$  – комонолитическая группа с комонолитом  $R = G_{\mathfrak{N}_\sigma}$ . Поскольку  $\mathfrak{M}$  –  $\sigma$ -разрешимый класс, то

$G/R$  –  $\sigma$ -примарная группа, т. е.  $G/R$  –  $\sigma_i$ -группа для некоторого  $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{M})$ . Понятно, что  $1 \neq R \supseteq H := G^{\mathfrak{G}\sigma_i} = G^{\mathfrak{G}\sigma_i \mathfrak{G}\sigma_i'}$ . Пусть  $\sigma_j \in \sigma(H)$ , где  $j \neq i$ , и  $X$  – холлова  $\sigma_j$ -подгруппа группы  $H$ . Поскольку  $G \in \mathfrak{M}$ , то  $H = G^{\mathfrak{G}\sigma_i \mathfrak{G}\sigma_i'} \in m(\sigma_i)$ . Ввиду  $\sigma$ -нильпотентности  $H$  подгруппа  $X$  нормальна в  $H$ , следовательно,  $X \in m(\sigma_i)$ .

Пусть  $P$  – неединичная  $\sigma_i$ -группа и  $B = X \wr P = K \rtimes P$  – регулярное сплетение групп  $X$  и  $P$ , где  $K$  – база сплетения  $B$ . Тогда, очевидно,  $K = B^{\mathfrak{G}\sigma_i \mathfrak{G}\sigma_i'} = B^{\mathfrak{G}\sigma_i}$ . Поскольку  $X \in m(\sigma_i)$ , то  $K \in m(\sigma_i)$  как прямое произведение групп, изоморфных  $X$ . Поэтому  $B^{\mathfrak{G}\sigma_i} = K \in m(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{M}$ . Применяя теперь лемму 9 заключаем, что  $B \in \mathfrak{M}$ . Кроме того, в силу [30, лемма 3.1] имеем  $\sigma_i, \sigma_j \in \sigma(\mathfrak{M})$  и, значит,  $\mathfrak{G}_{\sigma_i}, \mathfrak{G}_{\sigma_j} \in \theta^\sigma(\mathfrak{M})$ . По условию теоремы имеем  $\mathfrak{G}_{\sigma_j} \mathfrak{G}_{\sigma_i} = \mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{G}_{\sigma_j}$ . Поскольку  $B \in \mathfrak{G}_{\sigma_j} \mathfrak{G}_{\sigma_i} \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{G}_{\sigma_j} \mathfrak{G}_{\sigma_i}$ , то  $B \in \mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{G}_{\sigma_j}$ . Поэтому группа  $B$  принадлежит классу Фитtingа  $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{G}_{\sigma_j}$ . Значит,  $B / B_{\mathfrak{G}_{\sigma_i}} \in \mathfrak{G}_{\sigma_j}$ . Из построения группы  $B$  следует, что  $B_{\mathfrak{G}_{\sigma_i}} = 1$  и  $B \simeq B / B_{\mathfrak{G}_{\sigma_i}} \in \mathfrak{G}_{\sigma_j}$ . Полученное противоречие показывает, что  $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}_\sigma$ .

**Достаточность.** Пусть теперь класс Фитtingа  $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}_\sigma$  и пусть  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{H}$  – некоторые  $\sigma$ -локальные классы Фитtingа из  $\theta^\sigma(\mathfrak{M})$ . Понятно, что  $\sigma$ -алгебра  $\theta^\sigma(\mathfrak{M})$  является полугруппой. Покажем, что  $\theta^\sigma(\mathfrak{M})$  коммутативна. Действительно, ввиду леммы 10 имеем  $\mathfrak{F} \mathfrak{H} \cap \mathfrak{N}_\sigma = \mathfrak{N}_{\sigma(\mathfrak{F} \cup \mathfrak{H})}$  и  $\mathfrak{H} \mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}_\sigma = \mathfrak{N}_{\sigma(\mathfrak{H} \cup \mathfrak{F})}$ . Значит, поскольку  $\mathfrak{F} \mathfrak{H} \cap \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}_\sigma$  и  $\mathfrak{H} \mathfrak{F} \cap \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}_\sigma$ , то

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} \mathfrak{H} \cap \mathfrak{M} &= \mathfrak{F} \mathfrak{H} \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{F} \mathfrak{H} \cap \mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_\sigma = (\mathfrak{F} \mathfrak{H} \cap \mathfrak{N}_\sigma) \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{N}_{\sigma(\mathfrak{F} \cup \mathfrak{H})} \cap \mathfrak{M} = \\ &= \mathfrak{N}_{\sigma(\mathfrak{H} \cup \mathfrak{F})} \cap \mathfrak{M} = (\mathfrak{H} \mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}_\sigma) \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{H} \mathfrak{F} \cap \mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_\sigma = \mathfrak{H} \mathfrak{F} \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{H} \mathfrak{F} \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{H} \mathfrak{F}. \end{aligned}$$

Поэтому  $\mathfrak{F} \mathfrak{H} \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{H} \mathfrak{F} \cap \mathfrak{M}$  и  $\theta^\sigma(\mathfrak{M})$  – коммутативная полугруппа. Теорема доказана.

**Следствие 5** [37, теорема 3.2]. *Пусть  $\mathfrak{M}$  – разрешимый локальный класс Фитtingа. Тогда и только тогда  $A^l(\mathfrak{M})$  является коммутативной полугруппой, когда  $\mathfrak{M}$  нильпотентна.*

**Благодарности.** Исследования выполнены при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф23РНФ-237).

**Acknowledgements.** The research was carried out with the financial support of the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (project no. Ф23РНФ-237).

## Список использованных источников

1. Шеметков, Л. А. Формации алгебраических систем / Л. А. Шеметков, А. Н. Скиба. – М.: Наука, 1989. – 255 с.
2. Скиба, А. Н. Алгебра формаций / А. Н. Скиба. – Мин.: Бел. наука, 1997. – 240 с.
3. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p. <https://doi.org/10.1515/9783110870138>
4. Skiba, A. N. On  $\sigma$ -properties of finite groups I / A. N. Skiba // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 4. – С. 89–96.
5. Skiba, A. N. On  $\sigma$ -subnormal and  $\sigma$ -permutable subgroups of finite groups / A. N. Skiba // Journal of Algebra. – 2015. – Vol. 436. – P. 1–16. <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2015.04.010>
6. Skiba, A. N. On one generalization of the local formations / A. N. Skiba // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 1. – P. 79–82.
7. Чи, З. О  $\Sigma_t^\sigma$ -замкнутых классах конечных групп / З. Чи, А. Н. Скиба // Украинский математический журнал. – 2018. – Т. 70, № 12. – С. 1707–1716. <https://doi.org/10.1007/s11253-019-01619-6>
8. Chi, Z. A generalization of Kramer's theory / Z. Chi, A. N. Skiba // Acta Mathematica Hungarica. – 2019. – Vol. 158, № 1. – P. 87–99. <https://doi.org/10.1007/s10474-018-00902-5>
9. Chi, Z. On one application of the theory of  $n$ -multiply  $\sigma$ -local formations of finite groups / Z. Chi, V. G. Safonov, A. N. Skiba // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 2. – С. 85–88.
10. Chi, Z. On  $n$ -multiply  $\sigma$ -local formations of finite groups / Z. Chi, V. G. Safonov, A. N. Skiba // Communications in Algebra. – 2019. – Vol. 47, № 3. – P. 957–968. <https://doi.org/10.1080/00927872.2018.1498875>
11. Шеметков, Л. А. Формации конечных групп / Л. А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 271 с.
12. Kramer, O. U. Endliche Gruppen mit Untergruppen mit paarweise teilerfremden Indizes / O. U. Kramer // Mathematische Zeitschrift. – 1974. – Vol. 139. – P. 63–68. <https://doi.org/10.1007/bf01194145>

13. Tsarev, A. Laws of the lattices of  $\sigma$ -local formations of finite groups / A. Tsarev // Mediterranean Journal of Mathematics. – 2020. – Vol. 17, № 3. – Art. ID 75. <https://doi.org/10.1007/s00009-020-01510-w>
14. Safonova, I. N. On some properties of the lattice of totally  $\sigma$ -local formations of finite groups / I. N. Safonova, V. G. Safonov // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. – 2020. – № 3. – С. 6–16. <https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-3-6-16>
15. Воробьев, Н. Н. О прямых разложениях кратно  $\sigma$ -локальных формаций / Н. Н. Воробьев, И. И. Стаселько, А. О. Ходжагулыев // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2020. – № 3. – С. 10–13.
16. Воробьев, Н. Н. Отделимые решетки кратно  $\sigma$ -локальных формаций / Н. Н. Воробьев, И. И. Стаселько, А. О. Ходжагулыев // Сибирский математический журнал. – 2021. – Т. 62, № 4. – С. 721–735. <https://doi.org/10.33048/smzh.2021.62.402>
17. Сафонова, И. Н. О минимальных  $\sigma$ -локальных не- $\mathfrak{H}$ -формациях конечных групп / И. Н. Сафонова // Проблемы физики, математики и техники. – 2020. – № 4 (45). – С. 105–112.
18. Safonova, I. N. Some properties of  $n$ -multiply  $\sigma$ -local formations of finite groups / I. N. Safonova // Asian-European Journal of Mathematics. – 2022. – Vol. 15, № 7. – Art. ID 2250138. <https://doi.org/10.1142/S1793557122501388>
19. Safonova, I. N. A criterion for  $\sigma$ -locality of a non-empty formation / I. N. Safonova // Communications in Algebra. – 2022. – Vol. 50, № 6. – Р. 2366–2376. <https://doi.org/10.1080/00927872.2021.2006210>
20. Safonova, I. N. On properties of the lattice of all  $\tau$ -closed  $n$ -multiply  $\sigma$ -local formations / I. N. Safonova // Communications in Algebra. – 2023. – Vol. 51, № 10. – Р. 4454–4461. <https://doi.org/10.1080/00927872.2023.2210678>
21. Сафонова, И. Н. О критических  $\sigma$ -локальных формациях конечных групп / И. Н. Сафонова // Труды Института математики. – 2023. – Т. 31, № 2. – С. 63–80.
22. Safonova, I. N. On  $\sigma$ -inductive lattices of  $n$ -multiply  $\sigma$ -local formations of finite groups / I. N. Safonova // Journal of Algebra and Its Applications. – 2024. – Vol. 23, № 1. – Art. ID 2450017. <https://doi.org/10.1142/S0219498824500178>
23. Safonova, I. N. On the  $\tau$ -closedness of  $n$ -multiply  $\sigma$ -local formation / I. N. Safonova // Advances in Group Theory and Applications. – 2024. – Vol. 18. – Р. 123–136. <https://doi.org/10.32037/agta-2024-005>
24. Safonova, I. N. On separability of the lattice of  $\tau$ -closed  $n$ -multiply  $\sigma$ -local formations / I. N. Safonova // Communications in Algebra. – 2024. – Vol. 52, № 2. – Р. 3309–3318. <https://doi.org/10.1080/00927872.2024.2317458>
25. Сафонова, И. Н. О  $n$ -кратной  $\sigma$ -локальности непустой  $\tau$ -замкнутой формации конечных групп / И. Н. Сафонова // Труды Института математики НАН Беларуси. – 2024. – Т. 32, № 1. – С. 32–38.
26. Сафонова, И. Н. О  $\sigma$ -локальных формациях конечных групп с ограниченным  $\mathfrak{H}_\sigma$ -дефектом / И. Н. Сафонова, В. В. Скрундель // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 1 (62). – С. 87–101.
27. Safonova, I. N. On the largest  $\tau$ -closed subclass of an  $n$ -multiply  $\sigma$ -local formation / I. N. Safonova, V. V. Skrundz // Communications in Algebra. – 2025, 28 Aug. (Published online). <https://doi.org/10.1080/00927872.2025.2547696>
28. Сафонова, И. Н. О  $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$ -критических формациях конечных групп / И. Н. Сафонова, В. В. Скрундель // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 3 (64). – С. 99–111.
29. Сафонова, И. Н. Минимальные  $\tau$ -замкнутые  $\sigma$ -локальные не- $\mathfrak{H}$ -формации конечных групп / И. Н. Сафонова, В. В. Скрундель // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2025. – Т. 69, № 5. – С. 359–366. <https://doi.org/10.29235/1561-8323-2025-69-5-359-366>
30. Guo, W. On  $\sigma$ -local Fitting classes / W. Guo, L. Zhang, N. T. Vorob'ev // Journal of Algebra. – 2020. – Vol. 542. – P. 116–129. <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2019.10.009>
31. Воробьев, Н. Н. Об индуктивности решетки  $\sigma$ -локальных классов Фиттинга / Н. Н. Воробьев, И. И. Стаселько // Математические заметки. – 2025. – Т. 117, № 6. – Р. 849–860.
32. Tsarev, A. Classes of monoids with applications: formations of languages and multiply local formations of finite groups / A. Tsarev, A. Kukharev // Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. Series 2. – 2021. – Vol. 70, № 3. – Р. 1257–1268. <https://doi.org/10.1007/s12215-020-00556-9>
33. Ballester-Bolinches, A. Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L. M. Ezquerro. – Dordrecht: Springer, 2006. – 385 p. <https://doi.org/10.1007/1-4020-4719-3>
34. On finite Sylow tower and  $\sigma$ -tower groups / J. Cai, I. N. Safonova, A. N. Skiba, Z. Wang // Quaestiones Mathematicae. – 2023. – Vol. 46, № 9. – Р. 1799–1813. <https://doi.org/10.2989/16073606.2022.2120840>
35. Zhang, Ch. On  $\Sigma_t^\sigma$ -closed classes of finite groups / Ch. Zhang, A. N. Skiba // Ukrainian Mathematical Journal. – 2019. – Vol. 70. – Р. 1966–1977. <https://doi.org/10.1007/s11253-019-01619-6>
36. Мальцев, А. И. Об умножении классов алгебраических систем / А. И. Мальцев // Сибирский математический журнал. – 1967. – Т. 8, № 2. – С. 346–365.
37. Сафонов, В. Г. О коммутативных полугруппах разрешимых totally  $\omega$ -насыщенных формаций / В. Г. Сафонов, И. Н. Сафонова // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 4 (25). – С. 80–86.

## References

1. Shemetkov L. A., Skiba A. N. *Formations of algebraic systems*. Moscow: Nauka Publ., 1989. 255 p. (in Russian).
2. Skiba A. N. *Algebra of formations*. Minsk: Belaruskaya navuka Publ., 1997. 240 p. (in Russian).
3. Doerk K., Hawkes T. *Finite Soluble Groups*. Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1992. 891 p. <https://doi.org/10.1515/9783110870138>
4. Skiba A. N. On  $\sigma$ -properties of finite groups I. *Problemy fiziki, matematiki i tekhniki = Problems of Physics, Mathematics and Technics*, 2014, no. 4, pp. 89–96.

5. Skiba A. N. On  $\sigma$ -subnormal and  $\sigma$ -permutable subgroups of finite groups. *Journal of Algebra*, 2015, vol. 436, pp. 1–16. <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2015.04.010>
6. Skiba A. N. On one generalization of the local formations. *Problemy fiziki, matematiki i tekhniki = Problems of Physics, Mathematics and Technics*, 2018, no. 1, pp. 79–82.
7. Chi Z., Skiba A. N. On  $\Sigma_t^\sigma$ -closed classes of finite groups. *Ukrainian Mathematical Journal*, 2018, vol. 70, no. 12, pp. 1966–1977. <https://doi.org/10.1007/s11253-019-01619-6>
8. Chi Z., Skiba A. N. A generalization of Kramer's theory. *Acta Mathematica Hungarica*, 2019, vol. 158, no. 1, pp. 87–99. <https://doi.org/10.1007/s10474-018-00902-5>
9. Chi Z., Safonov V. G., Skiba A. N. On one application of the theory of  $n$ -multiply  $\sigma$ -local formations of finite groups. *Problemy fiziki, matematiki i tekhniki = Problems of Physics, Mathematics and Technics*, 2018, no. 2, pp. 85–88.
10. Chi Z., Safonov V. G., Skiba A. N. On  $n$ -multiply  $\sigma$ -local formations of finite. *Communications in Algebra*, 2019, vol. 47, no. 3, pp. 957–968. <https://doi.org/10.1080/00927872.2018.1498875>
11. Shemetkov L. A. *Formations of Finite Groups*. Moscow, Nauka Publ., 1978. 271 p. (in Russian).
12. Kramer O. U. Endliche Gruppen mit Untergruppen mit paarweise teilerfremden Indizes. *Mathematische Zeitschrift*, 1974, vol. 139, pp. 63–68. <https://doi.org/10.1007/bf01194145>
13. Tsarev A. Laws of the lattices of  $\sigma$ -local formations of finite groups. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 2020, vol. 17, no. 3, art. ID 75. <https://doi.org/10.1007/s00009-020-01510-w>
14. Safonova I. N., Safonov V. G. On some properties of the lattice of totally  $\sigma$ -local formations of finite groups. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*, 2020, no. 3, pp. 6–16. <https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-3-6-16>
15. Vorob'ev N. N., Staselko I. I., Hojagulyyev A. O. On direct decompositions of multiply  $\sigma$ -local formations. *Vesnik Vitsebskaga Dzyarzhaynaga Universiteta*, 2020, vol. 3, no. 108, pp. 10–13 (in Russian).
16. Vorob'ev N. N., Stasel'ko I. I., Hojagulyyev A. O. Separated lattices of multiply  $\sigma$ -local formations. *Siberian Mathematical Journal*, 2021, vol. 62, no. 4, pp. 586–597. <https://doi.org/10.1134/S0037446621040029>
17. Safonova I. N. On minimal  $\sigma$ -local non- $\mathfrak{H}$ -formations of finite groups. *Problemy fiziki, matematiki i tekhniki = Problems of Physics, Mathematics and Technics*, 2020, no. 4 (45), pp. 105–112 (in Russian).
18. Safonova I. N. Some properties of  $n$ -multiply  $\sigma$ -local formations of finite groups. *Asian-European Journal of Mathematics*, 2022, vol. 15, no. 7, art. ID 2250138. <https://doi.org/10.1142/S1793557122501388>
19. Safonova I. N. A criterion for  $\sigma$ -locality of a non-empty formation. *Communications in Algebra*, 2022, vol. 50, no. 6, pp. 2366–2376. <https://doi.org/10.1080/00927872.2021.2006210>
20. Safonova I. N. On properties of the lattice of all  $\tau$ -closed  $n$ -multiply  $\sigma$ -local formations. *Communications in Algebra*, 2023, vol. 51, no. 10, pp. 4454–4461. <https://doi.org/10.1080/00927872.2023.2210678>
21. Safonova I. N. On critical  $\sigma$ -local formations of finite groups. *Trudy Instituta matematiki = Proceedings of the Institute of Mathematics*, 2023, vol. 31, no. 2, pp. 63–80 (in Russian).
22. Safonova I. N. On  $\sigma$ -inductive lattices of  $n$ -multiply  $\sigma$ -local formations of finite groups. *Journal of Algebra and Its Applications*, 2024, vol. 23, no. 1, art. ID 2450017. <https://doi.org/10.1142/S0219498824500178>
23. Safonova I. N. On the  $\tau$ -closedness of  $n$ -multiply  $\sigma$ -local formation. *Advances in Group Theory and Applications*, 2024, vol. 18, pp. 123–136. <https://doi.org/10.32037/agta-2024-005>
24. Safonova I. N. On separability of the lattice of  $\tau$ -closed  $n$ -multiply  $\sigma$ -local formations. *Communications in Algebra*, 2024, vol. 52, no. 2, pp. 3309–3318. <https://doi.org/10.1080/00927872.2024.2317458>
25. Safonova I. N. On  $n$ -multiply  $\sigma$ -locality of a nonempty  $\tau$ -closed formation of finite groups. *Trudy Instituta matematiki Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Proceedings of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2024, vol. 32, no. 1, pp. 32–38 (in Russian).
26. Safonova I. N., Skrundz V. V. On  $\sigma$ -local formations of finite groups with bounded  $\mathfrak{H}_\sigma$ -defect. *Problemy fiziki, matematiki i tekhniki = Problems of Physics, Mathematics and Technics*, 2025, no. 1 (62), pp. 87–101 (in Russian).
27. Safonova I. N., Skrundz V. V. On the largest  $\tau$ -closed subclass of an  $n$ -multiply  $\sigma$ -local formation. *Communications in Algebra*. Published online: 28 Aug 2025. <https://doi.org/10.1080/00927872.2025.2547696>
28. Safonova I. N., Skrundz V. V. On  $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$ -critical formations of finite groups. *Problemy fiziki, matematiki i tekhniki = Problems of Physics, Mathematics and Technics*, 2025, no. 3 (64), pp. 99–111 (in Russian).
29. Safonova I. N., Skrundz V. V. Minimal  $\tau$ -closed  $\sigma$ -local non- $\mathfrak{H}$ -formations of finite groups. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2025, vol. 69, no. 5, pp. 359–366 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-8323-2025-69-5-359-366>
30. Guo W., Zhang L., Vorob'ev N. T. On  $\sigma$ -local Fitting classes. *Journal of Algebra*, 2020, vol. 542, pp. 116–129. <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2019.10.009>
31. Vorob'ev N. N., Staselko I. I. Inductivity of the Lattice of  $\sigma$ -Local Fitting Classes. *Mathematical Notes*, 2025, vol. 117, no. 6, pp. 939–949. <https://doi.org/10.1134/S0001434625602965>
32. Tsarev A., Kukharev A. Classes of monoids with applications: formations of languages and multiply local formations of finite groups. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. Series 2*, 2021, vol. 70, no. 3, pp. 1257–1268. <https://doi.org/10.1007/s12215-020-00556-9>
33. Ballester-Bolinches A., Ezquerro L. M. *Classes of Finite Groups*. Dordrecht, Springer, 2006. 385 p. <https://doi.org/10.1007/1-4020-4719-3>
34. Cai J., Safonova I. N., Skiba A. N., Wang Z. On finite Sylow tower and  $\sigma$ -tower groups. *Quaestiones Mathematicae*, 2023, vol. 46, no. 9, pp. 1799–1813. <https://doi.org/10.2989/16073606.2022.2120840>

35. Zhang Ch., Skiba A. N. On  $\Sigma_t^0$ -closed classes of finite groups. *Ukrainian Mathematical Journal*, 2019, vol. 70, pp. 1966–1977. <https://doi.org/10.1007/s11253-019-01619-6>
36. Mal'tsev A. I. On the multiplication of classes of algebraic systems. *Sibirskii matematicheskii zhurnal* [Siberian Mathematical Journal], 1967, vol. 8, no. 2, pp. 346–365 (in Russian).
37. Safonov V. G. Safonova I. N. On commutative semigroups of soluble totally  $\omega$ -saturated formations. *Problemy fiziki, matematiki i tekhniki = Problems of Physics, Mathematics and Technics*, 2015, no. 4 (25), pp. 80–86 (in Russian).

### Інформація об авторах

**Сафонов Васілій Григор'євіч** – доктор фізико-математичних наук, професор, Інститут математики Національної академії наук Беларусі (ул. Сурганова, 11, 220072, Мінськ, Республіка Беларусь). E-mail: vgsafonov@im.bas-net.by. <https://orcid.org/0000-0003-0682-3107>

**Сафонова Інна Ніколаевна** – кандидат фізико-математичних наук, доцент, Белоруський державний університет (пр. Незалежності, 4, 220030, Мінськ, Республіка Беларусь). E-mail: in.safonova@mail.ru. <https://orcid.org/0000-0001-6896-7208>

### Information about the authors

**Vasily G. Safonov** – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganova Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: vgsafonov@im.bas-net.by/ <https://orcid.org/0000-0003-0682-3107>

**Inna N. Safonova** – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: in.safonova@mail.ru. <https://orcid.org/0000-0001-6896-7208>

ISSN 1561-2430 (print)

ISSN 2524-2415 (Online)

УДК 517.958

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2025-61-4-288-298>

Поступила в редакцию 20.05.2025

Received 20.05.2025

И. И. Столлярчук

ООО «Нэкстсофт», Минск, Республика Беларусь

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ  
ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ С ЛИНЕЙНЫМИ  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ ПОЛИНОМАМИ В ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

**Аннотация.** Исследовано доказательство корректности постановки смешанной задачи для уравнения колебания струны в полуполосе с дифференциальными полиномами в граничных условиях. Для данной задачи выводятся условия существования единственного достаточно гладкого решения в полуполосе в целом. Показано, что она сводится к решению задач Коши для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Изучены случаи, когда гладкость решения задачи с ростом времени ухудшается и когда этого не происходит. Для обоих случаев выведены достаточные условия ухудшения (сохранения) гладкости, основанные на коэффициентах граничных условий. Также с помощью метода характеристик выведены необходимые и достаточные условия согласования на исходные данные при заданной гладкости исходных функций, при которых существует единственное классическое решение поставленной задачи. Полученные результаты приведены как для однородного исходного уравнения, так и для случая, когда исходное уравнение является неоднородным.

**Ключевые слова:** уравнение колебания струны, метод характеристик, дифференциальный полином, классическое решение, смешанная задача, условия согласования

**Для цитирования.** Столлярчук, И. И. Классическое решение смешанной задачи для уравнения колебания струны с линейными дифференциальными полиномами в граничных условиях / И. И. Столлярчук // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. – 2025. – Т. 61, № 4. – С. 288–298. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2025-61-4-288-298>

Ivan I. Stolyarchuk

Nextsoft Ltd., Minsk, Republic of Belarus

CLASSICAL SOLUTION OF THE MIXED PROBLEM FOR THE STRING OSCILLATION EQUATION  
WITH LINEAR DIFFERENTIAL POLYNOMIALS IN BOUNDARY CONDITIONS

**Abstract.** The proof of the well-posedness of the mixed problem for the string oscillation equation in the half-strip with differential polynomials in the boundary conditions. The conditions of the existence of the unique and smooth enough solution are obtained in the half strip in general. It is shown that it is reduced to the solution of the initial-value problems for the ordinary linear differential equations with variable coefficients. The case when the solution smoothness is reduced during the increasing of the time and the case when it doesn't happen are studied. For both cases the sufficient conditions for smooth reduction (conservation) are obtained. These conditions are based on the coefficients in boundary conditions. Also, with the help of the characteristics method the necessary and sufficient matching conditions are obtained. These conditions guarantee the existence and uniqueness of the classical solution of the given problem when given functions are smooth enough. The obtained results are given for both homogeneous initial equation and inhomogeneous one.

**Keywords:** string oscillation equation, characteristics method, differential polynomials, classical solution, mixed problem, matching conditions

**For citation.** Stolyarchuk I. I. Classical solution of the mixed problem for the string oscillation equation with linear differential polynomials in boundary conditions. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2025, vol. 61, no. 4, pp. 288–298 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2025-61-4-288-298>

**Введение.** При построении математических моделей большого числа процессов окружающего мира получаются смешанные задачи для гиперболических уравнений второго порядка с разного типа условиями. Гладкие условия Коши рассматривались, например, в работе [1], негладкие условия Коши – в [2]. Условия первого рода типа Дирихле изучались в [3], а в [4, 5] исследовалась смешанная задача для уравнения типа Клейна – Гордона – Фока с косыми производными в гра-

ничных условиях. В [6] была рассмотрена задача с производными высоких порядков в граничных условиях для гиперболического уравнения, которое может быть факторизовано на композицию операторов первого порядка. В [7] авторы изучали смешанную задачу для волнового уравнения с производными высоких порядков в условии на левой границе и с условием типа Дирихле на правой границе. Во всех этих задачах были получены необходимые и достаточные условия согласования для существования единственного гладкого решения при выполнении некоторых требований на гладкость исходных функций.

Возникает вопрос о возможности изучения еще более общей смешанной задачи, а именно: смешанной задачи для уравнения колебания струны, где граничные условия представляют собой дифференциальные полиномы. Введение данных полиномов в граничные условия существенно усложняет исследование смешанной задачи в сравнении со смешанной задачей с условиями первого рода или с косыми производными в граничных условиях. Особенность рассматриваемой задачи состоит в том, что обыкновенные дифференциальные уравнения, которые возникают в процессе исследования граничных условий, в общем случае не имеют явного решения. Однако, несмотря на это, нам удалось доказать существование и единственность решения. В данной работе используется метод характеристик, с помощью которого доказывается существование и единственность классического решения поставленной задачи, выводятся условия согласования на заданные функции, а также показывается, что гладкость решения может убывать с ростом временной переменной.

**Постановка задачи.** Задача рассматривается на плоскости двух независимых переменных  $\mathbf{x} = (x_0, x_1)$ .

В области  $Q = (0; T) \times (0; l), l \in (0; +\infty)$  задается уравнение колебания струны

$$Lw = \partial_{x_0}^2 w - a^2 \partial_{x_1}^2 w = f, \quad (1)$$

где  $f$  – некоторая заданная функция,  $T = (s+1)l/a, s \in \mathbb{N}_0$ . К уравнению (1) присоединяются условия Коши

$$w(0, x_1) = \phi(x_1), \quad \partial_{x_0} w(0, x_1) = \psi(x_1), \quad x_1 \in [0; l], \quad (2)$$

и граничные условия с дифференциальными полиномами

$$\sum_{|\alpha| \leq n} r_j^{(\alpha)}(x_0) \frac{\partial^{|\alpha|} w}{\partial^{\alpha_0} x_0 \partial^{\alpha_1} x_1}(x_0, j) = \widetilde{\mu^{(j)}}(x_0), \quad j \in \{0, l\}, \quad (3)$$

где  $r_j^{(\alpha)}$ ,  $\widetilde{\mu^{(j)}}$  – заданные функции,  $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1)$  – мультииндекс,  $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$ ,  $i \in \{0, 1\}$  и  $|\alpha| = \alpha_0 + \alpha_1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ . Условия на функции  $f$ ,  $\phi$ ,  $\psi$ ,  $r_j^{(\alpha)}$ ,  $\widetilde{\mu^{(j)}}$  будут уточнены в дальнейшем. Пусть для функций  $r_j^{(\alpha)}$  существуют такие  $v_j \in \mathbb{N}_0$ , что  $v_j \leq n, j = \overline{1, 4}$ , для которых справедливы следующие условия:

$$\begin{aligned} v_1 &= \max_{0 \leq v \leq n, |\alpha|=v} (-a)^{\alpha_0} r_0^{(\alpha)}(x_0) \neq 0, & v_2 &= \max_{0 \leq v \leq n, |\alpha|=v} (a)^{\alpha_0} r_l^{(\alpha)}(x_0) \neq 0, \\ v_3 &= \max_{0 \leq v \leq n, |\alpha|=v} (a)^{\alpha_0} r_0^{(\alpha)}(x_0) \neq 0, & v_4 &= \max_{0 \leq v \leq n, |\alpha|=v} (-a)^{\alpha_0} r_l^{(\alpha)}(x_0) \neq 0. \end{aligned} \quad (4)$$

**Общее решение неоднородного уравнения.** Следуя [8; 9, с. 136–138], общее решение уравнения (1) представимо в виде

$$w(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) + w_p(\mathbf{x}), \quad (5)$$

где  $u(\mathbf{x})$  – общее решение однородного уравнения  $Lu = \partial_{x_0}^2 u - a^2 \partial_{x_1}^2 u = 0$ , а  $w_p(\mathbf{x})$  – некоторое частное решение уравнения (1). В работе [8] доказано утверждение о существовании решения задачи (1) с однородными начальными условиями без продолжения функции  $f$  за границу области  $Q$ . Сформулируем его в виде леммы.

**Лемма 1.** Пусть  $f(\mathbf{x}) \in C^{n-1}(\overline{Q})$ . Тогда решение задачи (1)–(3) существует в классе  $C^n(\overline{Q})$ .

Исходя из вида (5), задача (1)–(3) сводится к решению задачи для однородного уравнения  $Lu = 0$ , т. е. задачи

$$\partial_{x_0}^2 u - a^2 \partial_{x_1}^2 u = 0, \quad (6)$$

с начальными условиями

$$u(0, x_1) = \varphi(x_1), \partial_{x_0} u(0, x_1) = \psi(x_1), \quad x_1 \in [0; l] \quad (7)$$

и граничными условиями

$$\sum_{|\alpha| \leq n} r_j^{(\alpha)}(x_0) \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial^{\alpha_0} x_0 \partial^{\alpha_1} x_1}(x_0, j) = \mu^{(j)}(x_0), \quad j \in \{0, l\}, \quad (8)$$

где

$$\mu^{(j)}(x_0) = \widetilde{\mu^{(j)}}(x_0) - \sum_{|\alpha| \leq n} r_j^{(\alpha)}(x_0) \frac{\partial^{|\alpha|} w_p}{\partial^{\alpha_0} x_0 \partial^{\alpha_1} x_1}(x_0, j), \quad j \in \{0, l\}.$$

Общее решение уравнения (6) записывается как

$$u(\mathbf{x}) = p(x_1 - ax_0) + g(x_1 + ax_0), \quad (9)$$

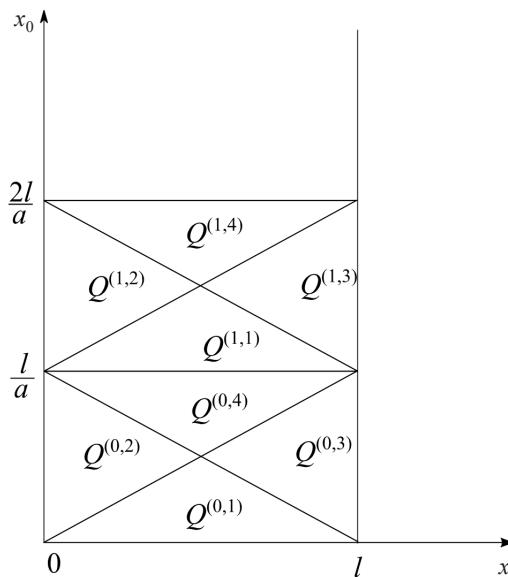
где  $p, g$  – некоторые произвольные достаточно гладкие функции. Суть метода характеристик заключается в их нахождении на каждом из подмножеств  $\overline{Q^{(k,j)}}$ ,  $j = \overline{1, 4}$ , где  $\overline{Q} = \bigcup_{k=0}^s \bigcup_{j=1}^4 \overline{Q^{(k,j)}}$ .

Разбиение множества  $\overline{Q}$  приведено на рисунке.

Решение на множестве  $\overline{Q^{(k)}}$  будем обозначать  $u^{(k)}(\mathbf{x})$ , и  $u^{(k)}(\mathbf{x}) = p^{(k)}(x_1 - ax_0) + g^{(k)}(x_1 + ax_0)$ , где  $p^{(k)}, g^{(k)}$  – некоторые произвольные достаточно гладкие функции.

**Определение.** Кусочно-заданную функцию  $u(\mathbf{x}) = \bigcup_{k=0}^s u^{(k)}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \overline{Q^{(k)}}$ , из класса  $C^m(\overline{Q})$ ,  $m \geq n$ , будем называть решением задачи (6)–(8), если при ее подстановке в уравнение (6) и условия (7), (8) они обращаются в тождества.

В дальнейшем смысл термина «решение» будем понимать в смысле данного определения.



Разбиение множества  $\overline{Q}$

Splitting of  $\overline{Q}$  set

**Задача (6)–(8) на  $\overline{Q^{(k)}}$ .** Рассмотрим условия Коши в области  $\overline{Q^{(k)}}$ :

$$u(\mathbf{x})|_{x_0=kl/a} = \varphi^{(k)}(x_1), \quad \partial_{x_0} u(\mathbf{x})|_{x_0=kl/a} = \psi^{(k)}(x_1), \quad x_1 \in [0; l]. \quad (10)$$

Изначально заданы только  $\varphi^{(0)} = \varphi$  и  $\psi^{(0)} = \psi$ , остальные функции мы получаем из решения в области  $Q^{(k-1,4)}$  для  $k = 1, 2, \dots$ .

**Лемма 2.** Решение  $u^{(k)}(\mathbf{x})$  задачи (6), (10) существует единственно в классе  $C^n(\overline{Q^{(k,1)}})$ , непрерывно зависит от функций  $\varphi^{(k)}(x_1)$ ,  $\psi^{(k)}(x_1)$  и задается формулой Даламбера

$$u^{(k)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left( \varphi^{(k)}(x_1 - ax_0 + kl) + \varphi^{(k)}(x_1 + ax_0 - kl) \right) + \frac{1}{2a} \int_{x_1 - ax_0 + kl}^{x_1 + ax_0 - kl} \psi^{(k)}(z) dz \quad (11)$$

тогда и только тогда, когда  $\varphi^{(k)} \in C^n([0; l])$ ,  $\psi^{(k)} \in C^{n-1}([0; l])$ .

**Доказательство.** Необходимость. Пусть  $u^{(k)}(\mathbf{x})$  из класса  $C^n(\overline{Q^{(k,1)}})$ . Тогда в силу первого из условий (10) справедливо, что  $u^{(k)}(kl/a, x_1) = \varphi^{(k)}(x_1)$ , откуда следует, что  $\varphi^{(k)} \in C^n([0; l])$ . Аналогично показывается, что  $\psi^{(k)} \in C^{n-1}([0; l])$ .

Достаточность. Пусть  $\varphi^{(k)} \in C^n([0; l])$ ,  $\psi^{(k)} \in C^{n-1}([0; l])$ . Найдем решение задачи (6), (10) в области  $Q^{(k,1)}$ . Функции  $p^{(k)}(z)$  и  $g^{(k)}(y)$ , где  $z \in [-kl; -(k-1)l]$ ,  $y \in [kl; (k+1)l]$ , имеют вид

$$p^{(k)}(z) = \frac{1}{2} \left( \varphi^{(k)}(z + kl) - \Psi^{(k)}(z + kl) - C \right), \quad (12)$$

$$g^{(k)}(y) = \frac{1}{2} \left( \varphi^{(k)}(y - kl) + \Psi^{(k)}(y - kl) + C \right), \quad (13)$$

где  $\Psi^{(k)}(z) = \frac{1}{a} \int_l^z \psi^{(k)}(y) dy$ .

Исходя из формул (12), (13), получаем решение задачи на множестве  $\overline{Q^{(k,1)}}$ , задаваемое формулой (10) (хорошо известная формула Даламбера [9, с. 138–140]). Принадлежность решения  $u^{(k)}(\mathbf{x})$  классу  $C^n(\overline{Q^{(k,1)}})$  следует из того, что сумма двух функций из класса  $C^n(\overline{Q^{(k,1)}})$  будет также функцией из класса  $C^n(\overline{Q^{(k,1)}})$ . Непрерывная зависимость  $u^{(k)}(\mathbf{x})$  от начальных функций следует из формулы Даламбера как сумма непрерывных на компакте функций. Лемма доказана.

Рассмотрим решение задачи (6)–(8) в области  $Q^{(k,2)}$ . В области  $Q^{(k,2)}$  функция  $g^{(k)}$  будет определяться по формуле (13), а функция  $p^{(k)}$  будет неопределенна на  $z \in [-(k+1)l, -kl]$ . Воспользуемся условием на левой границе:

$$\sum_{|\alpha| \leq n} r_0^{(\alpha)}(x_0) \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial^{\alpha_0} x_0 \partial^{\alpha_1} x_1}(x_0, 0) = \mu^{(0)}(x_0). \quad (14)$$

С учетом того, что  $u^{(k)}(\mathbf{x}) = p^{(k)}(x_1 - ax_0) + g^{(k)}(x_1 + ax_0)$ , данное условие можно переписать в виде

$$\sum_{|\alpha| \leq n} r_0^{(\alpha)}(x_0) \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_0} x_0 \partial^{\alpha_1} x_1} \left( p^{(k)}(x_1 - ax_0) + g^{(k)}(x_1 + ax_0) \right) |_{x_1=0} = \mu^{(0)}(x_0).$$

Перенесем известные слагаемые в одну сторону, и заметим, что

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_0} x_0 \partial^{\alpha_1} x_1} p^{(k)}(x_1 - ax_0) = (-a)^{\alpha_0} d^{|\alpha|} p^{(k)}(x_1 - ax_0).$$

Вводя замену  $-ax_0 = z$ , получим

$$\sum_{v=0}^n R_0^v(z) d^v p^{(k)}(z) = P^{(k)}(z), z \in [-(k+1)l, -kl], \quad (15)$$

где

$$P^{(k)}(z) = \mu^{(0)}\left(-\frac{z}{a}\right) - \sum_{|\alpha| \leq n} (-a)^{\alpha_0} r_0^{(\alpha)}\left(-\frac{z}{a}\right) \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_0} z \partial^{\alpha_1} x_1} \left(g^{(k)}(x_1 - z)\right) \Big|_{x_1=0}, \quad (16)$$

$$R_0^v(z) = \sum_{|\alpha|=v} (-a)^{\alpha_0} r_0^{(\alpha)}\left(-\frac{z}{a}\right), \quad (17)$$

$\bar{n} \in \mathbb{N}_0$  – максимальный порядок производной функции  $p^{(k)}$  в уравнении такой, что  $\bar{n} \leq n$ .

**Лемма 3.** Пусть выполняются условия (4) и  $\mu^{(0)} \in C^{n-\bar{n}}([0; T])$ ,  $r_0^{(\alpha)} \in C^n([0; T])$ . Тогда решение задачи (6), (14) существует и единственно в классе  $C^n(Q^{(k,1)} \cup Q^{(k,2)})$  тогда и только тогда, когда  $\varphi^{(k)} \in C^{n+\Delta_n}([0; l])$ ,  $\psi^{(k)} \in C^{n-1+\Delta_n}([0; l])$  и выполнены условия согласования

$$\begin{aligned} & \sum_{v=0}^{\bar{n}-1} C_v^{(0)} d^j \beta_v^{(0)}(-kl) + d^j \int_{-kl}^z P^{(k)}(\tau) \gamma(z-\tau) d\tau \Big|_{z=-kl} = \\ & = \frac{1}{2} \left( \left( (-1)^{j+1} - 1 \right) d^j \varphi^{(k)}(0) + \left( (-1)^{j+1} + 1 \right) d^j \psi^{(k)}(0) \right), \end{aligned} \quad (18)$$

где  $j = \overline{\bar{n}, n}$ ,  $\Delta_n = \text{ReLU}(\underline{n} - \bar{n})$ , где

$$\text{ReLU}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x, & x \geq 0, \end{cases}$$

а  $\underline{n}$  – максимальный порядок производной функции  $g^{(k)}$ , которая входит в правую часть  $P^{(k)}$ , а константы  $C_v^{(0)}$  выбираются из условий

$$\begin{aligned} & \sum_{v=0}^{\bar{n}-1} \beta_v^{(0)}(-kl) C_v^{(0)} = \frac{1}{2} \left( \varphi^{(k)}(0) - \psi^{(k)}(0) - C \right), \\ & \sum_{v=0}^{\bar{n}-1} C_v^{(0)} d^j \beta_v^{(0)}(-kl) = \frac{1}{2} \left( \left( (-1)^{j+1} - 1 \right) d^j \varphi^{(k)}(0) - \left( (-1)^{j+1} + 1 \right) d^j \psi^{(k)}(0) \right), \quad j = \overline{1, \bar{n}-1}, \end{aligned} \quad (19)$$

а  $\beta_0^{(0)}(z), \dots, \beta_{\bar{n}-1}^{(0)}(z)$  – фундаментальная система решений уравнения (15).

**Доказательство.** Достаточность. Уравнение (15) является обыкновенным линейным дифференциальным уравнением относительно неизвестной функции  $p^{(k)}(z)$ . Пусть коэффициенты  $R_0^v(z)$  этого уравнения достаточно гладкие, тогда справедлива теорема о существовании фундаментальной системы решений:

$$\beta^{(0)}(z) = \left( \beta_0^{(0)}(z), \dots, \beta_{\bar{n}-1}^{(0)}(z) \right). \quad (20)$$

Общее решение уравнения (15) записывается в виде [10, с. 367]

$$p^{(k)}(z) = \sum_{v=0}^{\bar{n}-1} C_v^{(0)} \beta_v^{(0)}(z) + \int_{-kl}^z P^{(k)}(\tau) \gamma(z-\tau) d\tau, \quad (21)$$

где  $\gamma(z)$  – решение специальной задачи Коши для уравнения (15) при нулевой правой части с условиями

$$d^i \gamma(0) = 0, \quad i = \overline{0, \bar{n}-2}, \quad d^{\bar{n}-1} \gamma(0) = 1, \quad (22)$$

$C_v^{(0)}$  – некоторые константы. В силу условий (4) порядок уравнения (21) постоянен на всем отрезке  $z \in [-(k+1)l, -kl]$ . Для нахождения свободных переменных  $C_v^{(0)}$  потребуем выполнения условий гладкости функции  $p^{(k)}$  в точке  $z = -kl$ , которая определена по формулам (12) и (21), а также их производных. Данные условия задаются формулой (19). Более того, только при таком выборе констант  $C_v^{(0)}$  полученная функция  $p^{(k)}$  будет из класса  $C^n([-(k+1)l; -(k-1)l])$ . Отметим, что при

$\bar{n} = 1$  будет только первое условие. Задача Коши (15), (19) имеет единственное решение, если выполнены условия на непрерывность коэффициентов уравнения (15).

Докажем, что  $p^{(k)} = \tilde{p}^{(k)} - \frac{C}{2}$ , где функция  $\tilde{p}^{(k)}$  не содержит свободной постоянной  $C$ . Заметим, что в функции  $p^{(k)}(z)$  из выражения (16) свободная константа  $C$  содержится только в одном слагаемом при  $|\alpha|=0$ , тогда  $P^{(k)}(z) = \widetilde{P^{(k)}}(z) - r_0^{(0,0)}(z) \frac{C}{2}$ , где функция  $\widetilde{P^{(k)}}(z)$  не содержит свободной постоянной  $C$ .

Задачу Коши (15), (19) можно представить в виде суммы следующих двух задач:

$$\sum_{v=0}^{\bar{n}} R_0^v(z) d^v \tilde{p}^{(k)}(z) = \widetilde{P^{(k)}}(z), \quad z \in [-(k+1)l, -kl], \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \tilde{p}^{(k)}(-kl) &= \frac{1}{2} (\varphi^{(k)}(0) - \Psi^{(k)}(0)), \\ d^j \tilde{p}^{(k)}(-kl) &= \frac{1}{2} \left( (-1)^{j+1} - 1 \right) d^j \varphi^{(k)}(0) - \left( (-1)^{j+1} + 1 \right) d^j \Psi^{(k)}(0), \\ j &= \overline{1, \bar{n}-1}. \end{aligned} \quad (24)$$

Отметим, что  $\tilde{p}^{(k)}(z)$  не содержит свободной константы  $C$ , так как она отсутствует в правой части и в начальных условиях задачи (23), (24).

И вторая задача:

$$\sum_{v=0}^{\bar{n}} R_0^v(z) d^v p_1^{(k)}(z) = -r_0^{(0,0)}(z) \frac{C}{2}, \quad z \in [-(k+1)l, -kl], \quad (25)$$

$$\begin{aligned} p_1^{(k)}(-kl) &= -\frac{C}{2}, \\ d^j p_1^{(k)}(-kl) &= 0, \quad j = \overline{1, \bar{n}-1}. \end{aligned} \quad (26)$$

Решение задачи (25), (26) существует и единственno, с другой стороны, легко проверить, что  $p_1^{(k)}(z) = -\frac{C}{2}$ . Таким образом, действительно,  $p^{(k)} = \tilde{p}^{(k)} - \frac{C}{2}$ . Заметим, что приведенные выше рассуждения верны и при  $r_0^{(0,0)}(z) \equiv 0$ .

Рассмотрим поведение гладкости функции  $p^{(k)}$  в зависимости от правой части  $P^{(k)}$ . Заметим, что гладкость решения  $p^{(k)}$  уравнения (15) на единицу выше гладкости коэффициентов уравнения и его правой части [10, с. 153–154]. В функции  $P^{(k)}(z)$  фигурируют функция  $g^{(k)}$  и ее производные, которые определяются из начальных условий по формуле (13). В формуле (16) могут фигурировать производные функции  $g^{(k)}$  до порядка  $n$  включительно. Пусть

$$\underline{n} = \max \left( v \mid \sum_{|\alpha|=v} a^{\alpha_0} r_0^{(\alpha)} \left( -\frac{z}{a} \right) \neq 0, 0 \leq v \leq n \right)$$

– максимальный порядок производной функции  $g^{(k)}$ , которая входит в правую часть  $P^{(k)}$ . В силу условий (4) значение  $\underline{n}$  постоянно на всем отрезке  $z \in [-(k+1)l, -kl]$ . При таких условиях функция  $p^{(k)}$ , которая определяется по формуле (21), будет  $C^{n-\underline{n}}$  гладкости. Для повышения гладкости данной функции требуется повысить требования на гладкость функции  $g^{(k)}$ , а следовательно, и  $\varphi^{(k)}, \Psi^{(k)}$ . Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) известно, что если  $r_0^{(\alpha)} \in C^n, P^k \in C^n$ , то его решение класса  $C^n$ . Таким образом, чтобы функция  $P^{(k)}$  была из класса  $C^n$ , усилим требования на гладкость заданных функций:

$$\varphi^{(k)} \in C^{n+\Delta_n}([0; l]), \quad \Psi^{(k)} \in C^{n-1+\Delta_n}([0; l]), \quad \mu^{(0)} \in C^{n-\bar{n}}([0; T]), \quad r_0^{(\alpha)} \in C^n([0; T]).$$

Осталось решить вопрос с условиями согласования. Условия Коши дают гладкость в точке  $z = -kl$  только до порядка  $0 \leq \bar{n} \leq n-1$ . Для того чтобы функция  $p^{(k)}$  была из класса

$C^n([-(k+1)l; -(k-1)l])$ , потребуем выполнения условий согласования в точке  $z = -kl$  для производных функции  $p^{(k)}$  от порядка  $\bar{n}$  до  $n$  по формуле (18).

Заметим, что если  $\underline{n} > \bar{n}$ , то для решения смешанной задачи требуется повышенная гладкость на  $\varphi^{(k)}, \psi^{(k)}$ , а также на  $\mu, r$  при меньших значениях  $x_0$ .

Необходимость. Пусть  $u^{(k)}(\mathbf{x})$  принадлежит классу  $C^n(\overline{Q^{(k,1)} \cup Q^{(k,2)}})$ . Тогда в силу леммы 2 функции  $\varphi^{(k)} \in C^{n+\Delta_n}([0; l])$ ,  $\psi^{(k)} \in C^{n-1+\Delta_n}([0; l])$ . При этом, так как функция  $u^{(k)}(\mathbf{x})$  гладкая до порядка  $n$  на всем множестве  $Q^{(k,1)} \cup Q^{(k,2)}$ , то она гладкая в каждой точке, в том числе и на  $Q^{(k,1)} \cap Q^{(k,2)}$ , а гладкость на этом пересечении обеспечивается условиями согласования (18) и выбором констант по формуле (19). Лемма доказана.

Заметим, что при  $\bar{n} = 0$  уравнение (15) превращается в обычное функциональное уравнение, которое решается, как в случае первой смешанной задачи. Условия Коши (19) исчезают, в формуле (18)  $j = \overline{0, n}$ , при этом  $p^{(k)}(z) = P^{(k)}(z) / r_0^{(0,0)}(z)$ . Утверждение леммы 2 при этом остается в силе.

Задача в области  $Q^{(k,3)}$  решается аналогично. Из граничного условия на правой границе получается дифференциальное уравнение

$$\sum_{v=0}^{\bar{m}} R_l^v(y) d^v g^{(k)}(y) = G^{(k)}(y), \quad y \in [(k+1)l, (k+2)l], \quad (27)$$

где

$$G^{(k)}(y) = \mu^{(l)} \left( \frac{y-l}{a} \right) - \sum_{|\alpha| \leq n} (a)^{\alpha_0} r_0^{(\alpha)} \left( -\frac{y-l}{a} \right) \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_0} y \partial^{\alpha_1} x_1} (p^{(k)}(x_1 + l - y))|_{x_1=l}, \quad (28)$$

$$R_l^v(y) = \sum_{|\alpha|=v} (a)^{\alpha_0} r_l^{(\alpha)} \left( \frac{y-l}{a} \right), \quad (29)$$

$\bar{m} \in \mathbb{N}_0$  – максимальный порядок производной функции  $g^{(k)}$  в уравнении такой, что  $\bar{m} \leq n$ . Его общее решение записывается как

$$g^{(k)}(y) = \sum_{v=0}^{\bar{m}-1} C_v^{(l)} \beta_v^{(l)}(y) + \int_{(k+1)l}^y G^{(k)}(\tau) \gamma(y-\tau) d\tau, \quad (30)$$

где  $\beta^{(l)}(y) = (\beta_0^{(l)}(y), \dots, \beta_{\bar{m}-1}^{(l)}(y))$  – фундаментальная система решений;  $\gamma(y)$  – решение специальной задачи Коши для однородного уравнения (27) с условиями

$$d^i \gamma(0) = 0, \quad i = \overline{0, \bar{m}-2}, \quad d^{\bar{m}-1} \gamma(0) = 1. \quad (31)$$

Для задачи в области  $Q^{(k,3)}$  справедлива следующая

Лемма 4. Пусть выполняются условия (4) и  $\mu^{(l)} \in C^{n-\bar{m}}([0; T])$ ,  $r_l^{(\alpha)} \in C^n([0; T])$ . Тогда решение задачи (6), (27) существует и единственно в классе  $C^n(\overline{Q^{(k,1)} \cup Q^{(k,3)}})$  тогда и только тогда, когда  $\varphi^{(k)} \in C^{n+\Delta_m}([0; l])$ ,  $\psi^{(k)} \in C^{n-1+\Delta_m}([0; l])$  и выполнены условия согласования

$$\begin{aligned} \sum_{v=0}^{\bar{m}-1} C_v^{(l)} d^j \beta_v^{(l)} ((k+1)l) + d^j \int_{(k+1)l}^y G^{(k)}(\tau) \gamma(y-\tau) d\tau|_{y=(k+1)l} = \\ = \frac{1}{2} \left( \left( (-1)^{j+1} - 1 \right) d^j \varphi^{(k)}(l) - \left( (-1)^{j+1} - 1 \right) d^j \Psi^{(k)}(l) \right), \end{aligned} \quad (32)$$

где  $j = \overline{\bar{m}, n}$ ;  $\Delta_m = \text{ReLU}(\underline{m} - \bar{m})$ ; а  $\underline{m}$  – максимальный порядок производной функции  $p^{(k)}$ , которая входит в правую часть  $G^{(k)}$ , а константы  $C_v^{(l)}$  выбираются из условий

$$\begin{aligned} \sum_{v=0}^{\bar{m}-1} \beta_v^{(l)} ((k+1)l) C_v^{(l)} &= \frac{1}{2} \left( \varphi^{(k)}(l) - \Psi^{(k)}(l) - C \right), \\ \sum_{v=0}^{\bar{m}-1} C_v^{(l)} d^j \beta_v^{(l)} ((k+1)l) &= \frac{1}{2} \left( \left( (-1)^{j+1} - 1 \right) d^j \varphi^{(k)}(l) - \left( (-1)^{j+1} + 1 \right) d^j \Psi^{(k)}(l) \right), \quad j = \overline{1, \bar{n}-1}. \end{aligned} \quad (33)$$

Доказательство повторяет доказательство леммы 3.

Аналогично случаю с условием на левой границе, утверждение данной леммы справедливо при  $\bar{m} = 0$ .

В области  $Q^{(k,4)}$  решение строится с помощью суммы функций  $p^{(k)}(z)$ , определенной по формуле (21) и  $g^{(k)}(y)$ , определенной по формуле (30). Пусть  $\Delta = \max(\Delta_m, \Delta_n)$ .

**Лемма 5.** Пусть выполняются условия (4) и  $\mu^{(0)} \in C^{n-\bar{n}}([0;T])$ ,  $\mu^{(l)} \in C^{n-m}([0;T])$ ,  $r_0^{(\alpha)} \in C^n([0;T])$ ,  $r_l^{(\alpha)} \in C^n([0;T])$ ,  $\varphi^{(k)} \in C^{n+\Delta}([0;I])$ ,  $\psi^{(k)} \in C^{n-1+\Delta}([0;I])$ . Тогда решение задачи (6)–(8) существует и единствено в классе  $C^n(Q^{(k,4)})$ .

Доказательство данной леммы следует из вида общего решения уравнения (9) и существования единственной функции  $p^{(k)}(z)$  из граничного условия на левой границе и существования единственной функции  $g^{(k)}(y)$  из граничного условия на правой границе.

Леммы 2–5 дают условия на существование единственного решения на отдельных частях множества  $\overline{Q^{(k)}}$ . Для получения условий существования единственного решения на всем множестве  $\overline{Q^{(k)}}$  объединим результаты лемм 2–5 в виде утверждения.

**Утверждение.** Пусть выполняются условия (4) и функции  $\mu^{(0)} \in C^{n-\bar{n}}([0;T])$ ,  $\mu^{(l)} \in C^{n-\bar{m}}([0;T])$ ,  $r_0^{(\alpha)} \in C^n([0;T])$ ,  $r_l^{(\alpha)} \in C^n([0;T])$ . Решение задачи (6)–(8) существует и единствено в классе  $C^n(\overline{Q^{(k)}})$  тогда и только тогда, когда  $\varphi^{(k)} \in C^{n+\Delta}([0;I])$ ,  $\psi^{(k)} \in C^{n-1+\Delta}([0;I])$  и выполняются условия согласования (18), (23), а константы  $C_v^{(0)}$ ,  $C_v^{(l)}$  выбираются из условий (19) и (33) соответственно.

**Доказательство.** Необходимость. Пусть решение  $u^{(k)}(\mathbf{x})$  задачи (6)–(8) существует и единствено в классе  $C^n(\overline{Q^{(k)}})$ , тогда в силу леммы 2 будут выполняться условия  $\varphi^{(k)} \in C^{n+\Delta}([0;I])$ ,  $\psi^{(k)} \in C^{n-1+\Delta}([0;I])$ , а в силу лемм 3, 4 – условия согласования (18) и (32).

Достаточность. При выполнении условий на функции из граничных условий утверждения, а также условий  $\varphi^{(k)} \in C^{n+\Delta}([0;I])$ ,  $\psi^{(k)} \in C^{n-1+\Delta}([0;I])$  и условий согласования (18) и (32) получим, что решение  $u^{(k)}(\mathbf{x})$  задачи (6)–(8) существует и единствено в классе  $C^n(\overline{Q^{(k)}})$ . Утверждение доказано.

**Решение задачи в полуполосе.** В предыдущем пункте была решена задача (6)–(8) в каждой из подобластей  $\overline{Q^{(k)}}$ . Выведем теперь условия принадлежности решения  $u(\mathbf{x})$  задачи (6)–(8) классу  $C^n(\overline{Q^{(k)}} \cup \overline{Q^{(k-1)}})$ .

**Лемма 6.** Пусть выполняются условия (4) и  $u^{(k-1)}(\mathbf{x})$  – решение задачи (6)–(8) на множестве  $\overline{Q^{(k-1)}}$ , и выполнены условия  $\mu^{(0)} \in C^{n-\bar{n}+\Delta}([0;T])$ ,  $\mu^{(l)} \in C^{n-\bar{m}+\Delta}([0;T])$ ,  $r_l^{(\alpha)} \in C^{n+\Delta}([0;T])$ ,  $r_0^{(\alpha)} \in C^{n+\Delta}([0;T])$ . Тогда функция

$$u^{(k,k-1)}(\mathbf{x}) = \begin{cases} u^{(k)}(\mathbf{x}), & (\mathbf{x}) \in \overline{Q^{(k)}}, \\ u^{(k-1)}(\mathbf{x}), & (\mathbf{x}) \in \overline{Q^{(k-1)}} \end{cases} \quad (34)$$

будет  $n + \Delta$  раз непрерывно дифференцируемой на  $\overline{Q^{(k,1)} \cup Q^{(k-1)}}$  и будет решением задачи (6)–(8) на этом же множестве тогда и только тогда, когда  $\varphi^{(k-1)} \in C^{n+2\Delta}([0;I])$ ,  $\psi^{(k-1)} \in C^{n-1+2\Delta}([0;I])$  и начальные условия на слое  $k$  определены как

$$\begin{aligned}\varphi^{(k)}(x_1) &= u^{(k-1)}\left(\frac{kl}{a}, x_1\right) = p^{(k-1)}(x_1 - kl) + g^{(k-1)}(x_1 + kl), \\ \psi^{(k)}(x_1) &= \partial_{x_0} u^{(k-1)}\left(\frac{kl}{a}, x_1\right) = -adp^{(k-1)}(x_1 - kl) + adg^{(k-1)}(x_1 + kl), \quad x_1 \in [0; l].\end{aligned}\tag{35}$$

**Доказательство.** Необходимость. Пусть решение  $u^{(k-1,k)}(\mathbf{x}) \in C^{n+\Delta}(\overline{Q^{(k,1)} \cup Q^{(k-1)}})$ . Тогда выполняются условие на гладкость  $u^{(k-1)}(kl/a, x_1) = u^{(k)}(kl/a, x_1)$  и на производные этих функций до порядка  $n + \Delta$  включительно. Отсюда следует определение начальных функций по формуле (35). А из лемм 2–5 следует условие на гладкость функций  $\varphi^{(k-1)} \in C^{n+2\Delta}([0; l])$ ,  $\psi^{(k-1)} \in C^{n-1+2\Delta}([0; l])$ .

**Достаточность.** Пусть выполнены условия  $\varphi^{(k-1)} \in C^{n+2\Delta}([0; l])$ ,  $\psi^{(k-1)} \in C^{n-1+2\Delta}([0; l])$ , тогда  $u^{(k-1)}(\mathbf{x})$  – решение задачи (6)–(8) на множестве  $\overline{Q^{(k-1)}}$  принадлежит классу  $C^{n+\Delta}(\overline{Q^{(k-1)}})$ . С учетом леммы 2 и определения начальных условий по формуле (34) функция  $u^{(k)}(\mathbf{x}) \in C^{n+\Delta}(\overline{Q^{(k,1)}})$ . Также условий (35) оказывается достаточно для того, чтобы решение  $u^{(k-1,k)}(\mathbf{x})$  было из класса  $C^{n+\Delta}(\overline{Q^{(k,1)} \cup Q^{(k-1)}})$ . Лемма доказана.

**Замечание.** Условия согласования (18), (32) для некоторого  $k$  выполняются, если выполняются условия согласования (18), (32) для  $k - 1$ .

Сформулируем лемму о существовании и единственности решения смешанной задачи (6)–(8) на всем множестве  $\overline{Q}$ .

**Лемма 7.** Пусть выполняются условия (4) и  $\mu^{(0)} \in C^{n-\bar{n}+s\Delta}([0; T])$ ,  $\mu^{(l)} \in C^{n-\bar{m}+s\Delta}([0; T])$ ,  $r_l^{(\alpha)} \in C^{n+s\Delta}([0; T])$ ,  $r_0^{(\alpha)} \in C^{n+s\Delta}([0; T])$ . Тогда решение задачи (6)–(8) в классе  $C^n(\overline{Q})$  существует и единствено тогда и только тогда, когда  $\varphi \in C^{n+(s+1)\Delta}([0; l])$ ,  $\psi \in C^{n-1+(s+1)\Delta}([0; l])$  и выполняются условия согласования (18), где  $j = \overline{\bar{n}, n+s\Delta}$ , и условия (32), где  $j = \overline{\bar{m}, n+s\Delta}$  при  $k = 0$ , а константы  $C_v^{(0)}$ ,  $C_v^{(l)}$  выбираются из условий (19) и (33) соответственно.

**Доказательство.** Напомним, что  $T = (s+1)l/a$ ,  $s \in \mathbb{N}_0$ . Доказательство данной леммы проводится по индукции по номеру области  $k$ , исходя из леммы 6 и утверждения. Процедура начинается с множества  $\overline{Q^{(0)}}$ , в котором с использованием начальных условий (7) строится решение по формуле Даламбера. Далее из граничных условий (8) и лемм 3, 4 показывается, что решения граничных задач существуют и единственны. Из леммы 5 находится решение в области  $\overline{Q^{(0,4)}}$ . Лемма 6 позволяет выбрать новые начальные условия на множестве  $\overline{Q^{(1)}}$ , и далее процесс будет продолжаться до номера области  $s$ .

В работах [4] и [5] были доказаны теоремы о разрешимости смешанной задачи для уравнения типа Клейна – Гордона – Фока с косыми производными в граничных условиях. При этом полученные результаты существенно зависели от коэффициентов граничных условий. Покажем, что результаты упомянутых работ следуют из доказанной леммы 7. В случае характеристических производных, рассмотренных в [5], выполняется  $n = 1$ ,  $\bar{n} = \bar{m} = 0$ ,  $\underline{n} = \underline{m} = 1$ , откуда  $\Delta_n = \Delta_m = 1$ , а следовательно, значение  $\Delta = 1$  и скорость, с которой ухудшается гладкость решения, также равна единице. Для случая нехарактеристической первой производной, рассмотренной в [4], справедливы соотношения  $n = 1$ ,  $\bar{n} = \underline{n} = \bar{m} = \underline{m} = 1$ , следовательно,  $\Delta = 0$  и ухудшения гладкости не происходит.

Используя результаты леммы 7, можно доказать теорему о разрешимости задачи (1)–(3) для неоднородного уравнения.

**Теорема.** Пусть выполняются условия (4) и  $f \in C^{n-1+s\Delta}(\overline{Q})$ ,  $\mu^{(0)} \in C^{n-\bar{n}+s\Delta}([0; T])$ ,  $\mu^{(l)} \in C^{n-\bar{m}+s\Delta}([0; T])$ ,  $r_l^{(\alpha)} \in C^{n+s\Delta}([0; T])$ ,  $r_0^{(\alpha)} \in C^{n+s\Delta}([0; T])$ . Тогда решение задачи (1)–(3) в классе  $C^n(\overline{Q})$  существует и единствено тогда и только тогда, когда  $\varphi \in C^{n+(s+1)\Delta}([0; l])$ ,  $\psi \in C^{n-1+(s+1)\Delta}([0; l])$ , и выполняются условия согласования (18), где  $j = \overline{\bar{n}, n+s\Delta}$ , и условия (32),

где  $j = \overline{m, n+s\Delta}$  при  $k = 0$ , а константы  $C_v^{(0)}, C_v^{(l)}$  выбираются из условий (19) и (33) соответственно, где выражение  $\mu^{(j)}(x_0)$  и его производные заменяются на

$$\widetilde{\mu^{(j)}}(x_0) = \sum_{|\alpha| \leq n} r_j^{(\alpha)}(x_0) \frac{\partial^{|\alpha|} w_p}{\partial^{\alpha_0} x_0 \partial^{\alpha_1} x_1}(x_0, j), \quad j \in \{0, l\}.$$

**Доказательство** данного утверждения следует из лемм 1 и 7, так как условие  $f \in C^{n-1+s\Delta}(\bar{Q})$  гарантирует выполнение условий существования гладкого решения  $w_p$ . В силу условий (4),  $\Delta_m, \Delta_n$ , а следовательно, и  $\Delta = \max(\Delta_m, \Delta_n)$ , определены и постоянны для всех  $x_0 \in [0; T]$ .

**Заключение.** Рассмотрена смешанная задача для волнового уравнения с дифференциальными полиномами в граничных условиях. Доказано существование единственного решения в полуполосе при достаточных условиях гладкости на исходные функции задачи при выполнении необходимых и достаточных условий согласования на заданные функции задачи и специального выбора произвольных констант, которые возникают при разрешении граничных условий.

### Список использованных источников

1. Корзюк, В. И. Решение задачи Коши гиперболического уравнения для однородного дифференциального оператора в случае двух независимых переменных / В. И. Корзюк, И. С. Козловская // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2011. – Т. 55, № 5. – С. 9–13.
2. Корзюк, В. И. Классическое решение смешанных задач для одномерного волнового уравнения с негладкими условиями Коши / В. И. Корзюк, С. И. Пузирный // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. – 2016. – Т. 52, № 2. – С. 22–31.
3. Корзюк, В. И. Классическое решение первой смешанной задачи в полуполосе для линейного гиперболического уравнения второго порядка / В. И. Корзюк, Е. С. Чеб, А. А. Карпичина // Труды Института математики. – 2012. – Т. 20, № 2. – С. 64–74.
4. Корзюк, В. И. Классическое решение смешанной задачи для уравнения типа Клейна – Гордона – Фока в полуполосе с косыми производными в граничных условиях / В. И. Корзюк, И. И. Столлярчук // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. – 2018. – Т. 54, № 4. – С. 391–403. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-391-403>
5. Корзюк, В. И. Классическое решение смешанной задачи для уравнения типа Клейна – Гордона – Фока с характеристическими косыми производными в граничных условиях / В. И. Корзюк, И. И. Столлярчук // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. – 2019. – Т. 55, № 1. – С. 7–21. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-1-7-21>
6. Staliarchuk, I. The classical solution of the mixed problem for the second-order hyperbolic equation with high order derivatives in boundary conditions / I. Staliarchuk // Global and Stochastic Analysis. – 2018. – Vol. 5, № 1. – P. 57–65.
7. Корзюк, В. И. Классическое решение смешанной задачи для одномерного волнового уравнения с производными высокого порядка в граничных условиях / В. И. Корзюк, С. Н. Наумовец // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2016. – Т. 60, № 3. – С. 11–17.
8. Корзюк, В. И. Классическое решение смешанных задач для уравнения Клейна – Гордона – Фока с нелокальными условиями / В. И. Корзюк, И. И. Столлярчук // Труды Института математики. – 2018. – Т. 26, № 1. – С. 54–70.
9. Корзюк, В. И. Уравнения математической физики / В. И. Корзюк. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Ленанд, 2021. – 479 с.
10. Матвеев, Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений / Н. М. Матвеев. – М.: Вышш. шк., 1967. – 565 с.

### References

1. Korzyuk V. I., Kozlovskay I. S. Solution of the Cauchy problem of a hyperbolic equation with a homogeneous differential operator in the case of two independent variables. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2011, vol. 55, no. 5, pp. 9–13 (in Russian).
2. Korzyuk V. I., Pyzirnii S. I. Classical solution of mixed problems for one-dimensional wave equation with non-smooth Cauchy conditions. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2016, vol. 52, no. 2, pp. 22–31 (in Russian).
3. Korzyuk V. I., Cheb E. S., Karpovich A. A. Classical solution of the first mixed problem in a half-strip for a second order linear hyperbolic equation *Trudy Instituta matematiki = Proceedings of the Institute of Mathematics*, 2012, vol. 20, no. 2, pp. 64–74 (in Russian).
4. Korzyuk V. I., Stolyarchuk I. I. Classical solution of the mixed problem for the Klein – Gordon – Fock type equation in the half-strip with curve derivatives at boundary conditions. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, vol. 54, no. 4, pp. 391–403 (in Russian).

- ka-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, vol. 54, no. 4, pp. 391–403 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-391-403>
5. Korzyuk V. I., Stolyarchuk I. I. Classical solution of the mixed problem for the Klein – Gordon – Fock type equation with characteristic oblique derivatives at boundary conditions. *Vestsi Natsional'noi akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2019, vol. 55, no. 1, pp. 7–21 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-1-7-21>
6. Staliarchuk I. The classical solution of the mixed problem for the second-order hyperbolic equation with high order derivatives in boundary conditions. *Global and Stochastic Analysis*, 2018, vol. 5, no. 1, pp. 57–65.
7. Korzyuk V. I., Naumavets S. N. Classical solution of a mixed problem for a one-dimensional wave equation with high-order derivatives in the boundary conditions. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2016, vol. 60, no. 3, pp. 11–17 (in Russian).
8. Korzyuk V. I. Stolyarchuk I. I. Classical solution to the mixed problem for the Klein-Gordon-Fock equation with the unlocal conditions. *Trudy Instituta matematiki = Proceedings of the Institute of Mathematics*, 2018, vol. 26, no. 1, pp. 56–72 (in Russian).
9. Korzyuk V. I. *Equations of Mathematical Physics. 2<sup>nd</sup> ed.* Moscow: Lenand Publ., 2021. 479 p. (in Russian).
10. Matveev N. M. *Methods of Integration of Ordinary Differential Equations.* Moscow: Vysshaya shkola Publ., 1967. 565 p. (in Russian).

### Информация об авторе

**Столярчук Иван Игоревич** – кандидат физико-математических наук, ООО «Нэкстсофт» (ул. Кульман, 9, 220100, Минск, Республика Беларусь). E-mail: stolyarchuk.ivan.i@gmail.com. <https://orcid.org/0000-0001-6839-7997>

### Information about the author

**Ivan I. Stolyarchuk** – Ph. D. (Physics and Mathematics), Nextsoft Ltd. (9, Kulman Str., 220100, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: stolyarchuk.ivan.i@gmail.com. <https://orcid.org/0000-0001-6839-7997>

ISSN 1561-2430 (Print)

ISSN 2524-2415 (Online)

УДК 519.177

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2025-61-4-299-306>

Поступила в редакцию 12.06.2025

Received 12.06.2025

## В. И. Бенедиктович

*Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь*

### СЛОЖНОСТЬ РАСПОЗНАВАНИЯ ЖЕСТКОСТИ В КЛАССЕ $(2t + 1)$ -РЕГУЛЯРНЫХ ГРАФОВ

**Аннотация.** Известно, что в общем случае проблема распознавания  $t$ -ЖЕСТКОСТИ графа является coNP-полной. Кроме того, для многих подклассов графов задача распознавания  $t$ -ЖЕСТКОСТИ остается NP-трудной, в частности, в классе  $r$ -регулярных графов, где  $r \geq 3t$  для любого целого числа  $t \geq 1$ . Сложность распознавания  $t$ -ЖЕСТКОСТИ  $r$ -регулярных графов остается открытой, когда  $2t \leq r < 3t$ , а когда  $r = 2t + 1$  сложность распознавания является особенно интригующей. В последнем случае была выдвинута гипотеза, что она остается NP-трудной. В данной статье мы устанавливаем справедливость этой гипотезы.

**Ключевые слова:** вершинный разрез графа,  $t$ -ЖЕСТКОСТЬ графа, coNP-полнота проблемы распознавания

**Для цитирования.** Бенедиктович, В. И. Сложность распознавания жесткости в классе  $(2t + 1)$ -регулярных графов / В. И. Бенедиктович // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. – 2025. – Т. 61, № 4. – С. 299–306. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2025-61-4-299-306>

Vladimir I. Benediktovich

*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus*

### THE COMPLEXITY OF THE DECISION PROBLEM OF TOUGHNESS IN THE CLASS OF $(2t + 1)$ -REGULAR GRAPHS

**Abstract.** It is known that the decision problem of  $t$ -TOUGHNESS of a graph is coNP-complete in general. Moreover, in many subclasses of graphs, the decision problem of  $t$ -TOUGHNESS remains NP-hard, in particular, in the class of  $r$ -regular graphs, where  $r \geq 3t$  for any integer number  $t \geq 1$ . The complexity of the decision problem of  $t$ -TOUGHNESS for  $r$ -regular graphs remains open when  $2t \leq r < 3t$ , and when  $r = 2t + 1$  the complexity of the decision problem is particularly intriguing. In the latter case it has been conjectured, that it remains NP-hard. In this paper, we establish the validity of this conjecture.

**Keywords:** vertex cut of a graph,  $t$ -toughness of a graph, coNP-completeness of the decision problem

**For citation.** Benediktovich V. I. The complexity of the decision problem of toughness in the class of  $(2t + 1)$ -regular graphs. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematichnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2025, vol. 61, no. 4, pp. 299–306 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2025-61-4-299-306>

Мы будем рассматривать всюду простые конечные неориентированные графы. Через  $c(G)$  будем обозначать число компонент связности графа  $G$ . В 1973 г. В. Хватал ввел новый инвариант графа, который в отличие от связности графа учитывает, как удаление любого вершинного разреза влияет на количество полученных компонент связности. Он обнаружил некоторые взаимосвязи между этим параметром и существованием гамильтонова цикла в графе, а также получил несколько результатов относительно этого нового инварианта. Жесткость графа является критической мерой его устойчивости к удалению вершин, отражающей, сколько компонент остается после таких удалений, количественно определяет уязвимость графа и имеет важное значение для понимания его структурных свойств и при анализе уязвимости коммуникационной сети к сбоям.

Происхождение этого понятия было вызвано следующим наблюдением: если граф  $G$  имеет гамильтонов цикл, то при удалении из графа произвольного множества  $S$  мощности  $s$ , полученный граф  $G - S$  имеет не более  $s$  связных компонент. Результатом похожего характера является известный критерий Татта о 1-факторе, который утверждает, что граф  $G$  четного порядка имеет совершенное паросочетание тогда и только тогда, когда для каждого подмножества  $S \subseteq V(G)$

мощности  $s$  число компонентов  $G - S$  нечетного порядка не превышает  $s$ . В обеих этих ситуациях число компонент  $G - S$  является критическим.

Напомним, что подмножество  $S \subset V(G)$  называется *вершинным разрезом* графа  $G$ , если выполняется условие  $c(G - S) > 1$ .

Определение. Для рационального числа  $t$  неполный граф  $G$  называется *t-жестким*, если для любого вершинного разреза  $S \subset V(G)$  выполняется неравенство  $|S| \geq t \cdot c(G - S)$ .

*Жесткостью* неполного графа  $G$  является максимальное  $t \in \mathbb{Q}$ , такое, что  $G$  является *t-жестким* и обозначается через  $\tau(G)$ . Следовательно, для неполного графа  $G$

$$\tau(G) = \min \left\{ \frac{|S|}{c(G - S)} : S \subset V(G), c(G - S) > 1 \right\}.$$

Поскольку полный граф  $K_n$  порядка  $n \geq 1$  не имеет вершинного разреза, то для него полагают  $\tau(K_n) = +\infty$ .

На практике проще применять альтернативное определение жесткости графа. Пусть  $G$  – граф порядка  $n$  и вершинной связности  $\kappa(G)$ , отличный от полного графа. Положим  $c_p = \max_{|S|=p} c(G - S)$  и  $t_p = \frac{p}{c_p}$ . Тогда  $G$  является *t-жестким* для  $0 \leq t \leq \min_{\kappa(G) \leq p} t_p$  и его *жесткость* равна  $\tau(G) = \min_{\kappa(G) \leq p} t_p$ . Заметим, что при этом нет необходимости рассматривать значения  $p$ , которые больше  $n - \alpha(G)$ , где  $\alpha(G)$  – число независимости графа  $G$ , поскольку иначе имеем  $t_p > t_{n-\alpha(G)}$ , что вытекает из того, что для любого вершинного разреза  $S$  графа  $G$  справедливо неравенство  $c(G - S) \leq \alpha(G)$ .

Согласно Пламеру, вершинный разрез  $S \subset V$  графа  $G$ , на котором достигается минимум  $\tau(G) = |S| / c(G - S)$ , называется *жестким множеством*. Иногда 1-жесткий граф называют просто жестким графом. Например, граф Петерсена является 4/3-жестким графом, цикл длины не меньше 4 является 1-жестким.

Из определения немедленно следует, что для неполного графа  $G$  справедливо неравенство

$$\tau(G) \leq \frac{\kappa(G)}{2}.$$

Исторически сложилось, что большая часть исследований в области изучения жесткости графов основывалась на ряде гипотез, выдвинутых В. Хваталом. Самая сложная из них все еще остается открытой – существует ли конечная константа  $t_0$ , такая, что каждый  $t_0$ -жесткий граф является гамильтоновым. Последние 50 лет исследования по нахождению жесткости графов также были сосредоточены на вопросах ее вычислительной сложности. Сложность проблемы распознавания жесткости графа впервые также была поднята В. Хваталом. Проблема распознавания жесткости формулируется следующим образом.

### Проблема *t-ЖЕСТКОСТЬ* графа.

Условие: дан граф  $G$  и положительное рациональное число  $t$ .

Вопрос: справедливо ли неравенство  $\tau(G) \geq t$ ?

Ответ на него дает следующее утверждение.

Теорема 1 [1]. Проблема *t-ЖЕСТКОСТЬ* графа является *coNP-полной*.

Отметим, что доказательство этой теоремы разбивается на 2 этапа: сначала к задаче НЕ-1-ЖЕСТКОСТЬ полиномиально сводится задача *k-НЕЗАВИСИМОЕ МНОЖЕСТВО*, которая, как известно, является NP-полной, т. е. для заданного графа  $G$  строится граф  $G'$  такой, что число независимости  $\alpha(G) \geq k$  тогда и только тогда, когда  $\tau(G') < 1$ . Затем задача НЕ-1-ЖЕСТКОСТЬ полиномиально сводится к задаче НЕ-*t-ЖЕСТКОСТЬ*, т. е. для графа  $G'$  строится граф  $G''$  такой, что  $\tau(G') < 1$  тогда и только тогда, когда  $\tau(G'') < t$ .

Оказывается, что для многих подклассов графов задача распознавания *t-ЖЕСТКОСТЬ* графа остается NP-трудной. Например, распознать *t*-жесткость графа является NP-трудной задачей даже в классе графов, имеющих достаточно высокую минимальную степень, чтобы гарантировать свойство *t*-жесткости графа в следующем смысле.

**Теорема 2** [2]. *Пусть  $t \geq 1$  – рациональное число. Если минимальная степень  $\delta \geq \left(\frac{t}{t+1}\right)n$ , то  $G$  является  $t$ -жестким. С другой стороны, для любого фиксированного  $\varepsilon > 0$  проблема  $t$ -ЖЕСТКОСТЬ для графа  $G$  с  $\delta \geq \left(\frac{t}{t+1} - \varepsilon\right)n$  является уже  $\text{coNP}$ -полной.*

Другим интересным классом графов является класс двудольных графов. Нетрудно заметить, что  $\tau(G) \leq 1$  для любого двудольного графа  $G$  – достаточно в качестве вершинного разреза  $S$  выбрать долю меньшей мощности. Тем не менее проблема 1-ЖЕСТКОСТЬ не становится легче для двудольных графов. В 1996 г. Д. Кратч и другие смогли свести проблему 1-ЖЕСТКОСТЬ для произвольного графа к проблеме 1-ЖЕСТКОСТЬ для двудольных графов, используя классическую конструкцию Нэш-Вильямса.

**Теорема 3** [3]. *Проблема  $t$ -ЖЕСТКОСТЬ остается  $\text{coNP}$ -полной в классе двудольных графов.*

Как следствие получается, что проблема 1-ЖЕСТКОСТЬ графа также является NP-трудной в классе  $K_3$ -свободных графов.

Еще одним важным классом графов, который исследовался на нахождение жесткости, является класс регулярных графов. Отметим, что жесткость  $r$ -регулярного графа  $G$  не превосходит  $r/2$ , поскольку справедливо неравенство  $\tau(G) \leq \frac{\kappa(G)}{2} \leq \frac{r}{2}$ . Сначала проблема 1-ЖЕСТКОСТЬ изучалась для кубических графов [4], а затем результаты исследований были обобщены в виде следующего утверждения.

**Теорема 4** [5]. *Для любого целого числа  $t \geq 1$  и любого целого  $r \geq 3t$  проблема  $t$ -ЖЕСТКОСТЬ является  $\text{coNP}$ -полной в классе  $r$ -регулярных графов.*

Сложность распознавания  $t$ -жесткости  $r$ -регулярных графов остается открытой, когда  $2t \leq r < 3t$ , а сложность распознавания в случае  $r = 2t + 1$  является особенно интригующей. Там же [5] была выдвинута следующая гипотеза.

**Гипотеза.** Для любого целого числа  $t \geq 1$  проблема  $t$ -ЖЕСТКОСТЬ остается NP-трудной для  $(2t + 1)$ -регулярных графов.

В данной статье мы устанавливаем справедливость этой гипотезы.

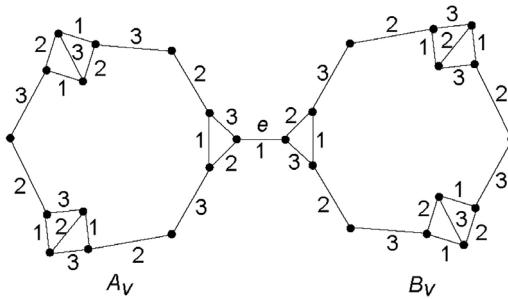
Напомним, что  $t$ -регулярный оставной подграф называется  $t$ -фактором. Связный 2-регулярный оставной подграф является гамильтоновым циклом, а 1-фактор графа  $G$  также называется его *совершенным паросочетанием*.

Реберная  $k$ -раскраска графа – это такое разбиение его ребер на  $k$  (цветных) классов, что никакие смежные ребра не принадлежат одному и тому же классу. Наименьшее возможное количество цветов в раскраске ребер графа называется его *хроматическим индексом*. Так как ребра  $k$ -регулярного графа не могут быть раскрашены менее чем в  $k$  цветов, хроматический индекс  $k$ -регулярного реберно  $k$ -раскрашенного графа равен  $k$ . Очевидно, что дополнение 1-фактора кубического графа является его 2-фактором. В общем случае такой 2-фактор может иметь циклы произвольной длины, но особый интерес представляют 2 случая – когда все циклы имеют четную длину и когда существует в точности один (т. е. гамильтонов) цикл. Оказывается, первый случай тесно связан с раскраской его ребер. При этом 2-фактор, в котором все циклы имеют четную длину, называется *четным 2-фактором*.

Если  $\Delta$  – максимальная степень вершин графа, то по теореме Визинга хроматический индекс равен либо  $\Delta$ , либо  $\Delta + 1$ . Этот факт разбивает графы на два класса: класс 1 и класс 2 соответственно. В [6] было обнаружено, что хорошо известная проблема четырех красок эквивалентна тому, что простые связные планарные кубические графы без мостов относятся к классу 1, т. е. имеют хроматический индекс 3. Простые связные кубические графы без мостов могут относиться и к классу 2, т. е. иметь хроматический индекс 4.

**Теорема 5** [7]. *Кубический граф  $G$  реберно 3-раскрашиваем тогда и только тогда, когда он имеет четный 2-фактор.*

**Теорема 6.** *Задача 1-ЖЕСТКОСТЬ остается  $\text{coNP}$ -полной для 2-связных реберно 3-раскрашиваемых кубических графов.*

Рис. 1. Граф  $H_v$  с правильной реберной 3-раскраскойFig. 1. Graph  $H_v$  with a regular edge 3-coloring

**Доказательство.** Как было уже сказано, задача 1-ЖЕСТКОСТЬ остается соNP-полной для кубических графов (теорема 1.8 [4]). Поэтому мы полиномиально сведем задачу 1-ЖЕСТКОСТЬ для кубического графа  $G$  к задаче 1-ЖЕСТКОСТЬ для 2-связного реберно 3-раскрашиваемого кубического графа  $H = H(G)$  с помощью аналогичного метода, который использовался в доказательстве теоремы 1.8 [4]. А именно: каждой вершине  $v \in V(G)$  мы ставим в соответствие в графе  $H$  граф  $H_v$ , изображенный на рис. 1, который состоит из двух подграфов  $A_v$  и  $B_v$ , соединенных ребром  $e$ , с указанной на рис. 1 раскраской его ребер в цвета 1, 2 и 3.

Каждому ребру  $vw$  графа  $G$  мы ставим в соответствие в графе  $H$  два ребра, которые соединяют вершину степени 2 в  $A_v$  с вершиной степени 2 в  $B_w$ , а также вершину степени 2 в  $A_w$  с вершиной степени 2 в  $B_v$ . Эти добавленные ребра мы раскрасим в графе  $H$  в цвет 1. В результате, очевидно, получим 2-связный реберный 3-раскрашиваемый кубический граф  $H = H(G)$ . Поскольку такое соответствие является частным случаем соответствия, предложенного в доказательстве теоремы 1.8 [4], то будет справедливо следующее

**Утверждение.**  $G$  является 1-жестким тогда и только тогда, когда  $H(G)$  является 1-жестким.

Таким образом, задача 1-ЖЕСТКОСТЬ остается соNP-полной для 2-связных реберно 3-раскрашиваемых кубических графов. Теорема доказана.

**Теорема 7.** Для любого целого числа  $t \geq 1$  проблема  $t$ -ЖЕСТКОСТЬ остается соNP-полной для  $(2t + 1)$ -регулярных графов.

**Доказательство.** Сведем задачу 1-ЖЕСТКОСТЬ для 2-связных реберно 3-раскрашиваемых кубических графов к задаче  $t$ -ЖЕСТКОСТЬ для  $(2t + 1)$ -регулярных графов, где  $t \geq 1$  – целое число.

Пусть  $G$  – любой 1-жесткий 2-связный 3-реберно-раскрашиваемый кубический граф. Согласно теореме 5 ребра графа  $G$  можно разбить на 1-фактор и четный 2-фактор, состоящий из четных циклов.

Построим  $H = H(G)$  следующим образом. Каждая вершина  $v \in V(G)$  в графе  $G$  заменяется на полный граф  $K_t$  в графе  $H$ . Такой граф будем обозначать через  $K_t^v$ . Для смежных вершин  $u$  и  $v$  в графе  $G$   $t$ -соединением графов  $K_t^v$  и  $K_t^w$  в графе  $H$  будем называть ребра паросочетания  $P_{vw}$  между вершинами графов  $K_t^v$  и  $K_t^w$ . При этом ребро  $uv$  графа  $G$  назовем  $t$ -ребром. Аналогично, для смежных вершин  $u$  и  $v$  в графе  $G$   $c$ -соединением графов  $K_t^v$  и  $K_t^w$  в графе  $H$  будем называть ребра полного двудольного графа  $K_{t,t}^{vw} = K(V(K_t^v), V(K_t^w))$  в графе  $H$  между вершинами графов  $K_t^v$  и  $K_t^w$ . При этом ребро  $uv$  графа  $G$  назовем  $c$ -ребром. Тогда в 1-факторе графа  $G$  каждое ребро  $vw$  мы заменим  $t$ -соединением в графе  $H$ , а в четном 2-факторе графа  $G$  мы *попеременно* заменим каждое ребро  $vw$  на  $c$ -соединение и  $t$ -соединение в графе  $H$ . Таким образом,  $c$ -соединение представляет собой совокупность  $t^2$  ребер, а  $t$ -соединение представляет собой совокупность  $t$  независимых ребер, и каждый подграф  $K_t^v$  в графе  $H$  имеет одно  $c$ -соединение и два  $t$ -соединения с тремя различными подграфами  $K_t^u$  графа  $H$ , где  $u \sim v$ . Следовательно, построенный граф  $H$  является  $(2t + 1)$ -регулярным.

Покажем, что из 2-связности исходного графа  $G$  следует, что построенный граф  $H$  является  $2t$ -связным. Для этого по теореме Уитни достаточно показать, что любая пара различных вершин графа  $H$  может быть соединена по крайней мере  $2t$  непересекающимися цепями. Возможны следующие случаи.

Случай 1. Пара различных вершин  $x, y$  графа  $H$  лежит в одном и том же графе  $K_t^v$ . Тогда в самом графе  $K_t^v$  имеется  $t - 1$   $xy$ -цепь плюс для  $c$ -ребра  $vw$   $t$   $xy$ -цепей вида  $\{\langle xzy \rangle \mid z \in K_t^w\}$  и для двух  $m$ -ребер  $vu$  две  $xy$ -цепи вида  $\{\langle xzsy \rangle \mid z, s \in K_t^u, xz, sy \in P_{vu}\}$ , всего  $2t + 1$  цепь.

Случай 2. Пара вершин  $x$  и  $y$  графа  $H$  лежит в разных графах  $K_t^v$  и  $K_t^w$ , причем вершины  $v$  и  $w$  графа  $G$  лежат на одном и том же четном цикле  $C$  2-фактора графа  $G$ .

Подслучай 2.1. Вершины  $v$  и  $w$  несмежны в графе  $G$ . Пусть  $vu, wg$  –  $m$ -ребра, а  $vf, wh$  –  $c$ -ребра цикла  $C$ . Тогда можно построить  $t$  непересекающихся  $xy$ -цепей вида

$$\{\langle xzs \cdots ry \rangle \mid z \in K_t^v, s \in K_t^u, zs \in P_{vu}, r \in K_t^h\}$$

и  $t$  непересекающихся  $xy$ -цепей вида

$$\{\langle yzs \cdots rx \rangle \mid z \in K_t^w, s \in K_t^g, zs \in P_{wg}, r \in K_t^f\},$$

всего получаем  $2t$  непересекающихся  $xy$ -цепей (рис. 2).

Подслучай 2.2. Вершины  $v$  и  $w$  графа  $G$  смежны, причем ребро  $vw$  графа  $G$  является  $c$ -ребром, а ребра  $vu, wh$  –  $m$ -ребра цикла  $C$ . В этом случае построим  $2t - 1$  непересекающихся  $xy$ -цепей вида

$$xy; \{\langle xzy \rangle \mid z \in K_t^v\}, \{\langle xzy \rangle \mid z \in K_t^w\}$$

и одну цепь вида

$$\langle xz \cdots ry \rangle \mid z \in K_t^u, r \in K_t^h, xz \in P_{vu}, ry \in P_{wh},$$

всего получаем  $2t$  непересекающихся  $xy$ -цепей (рис. 3, а).

Подслучай 2.3. Вершины  $v$  и  $w$  графа  $G$  смежны, причем ребро  $vw$  графа  $G$  является  $m$ -ребром, а ребра  $vu, wh$  –  $c$ -ребра цикла  $C$ . В этом случае построим  $t$  непересекающихся  $xy$ -цепей вида

$$\{\langle xzsy \rangle \mid z \in K_t^v, s \in K_t^w, zs \in P_{vw}\}$$

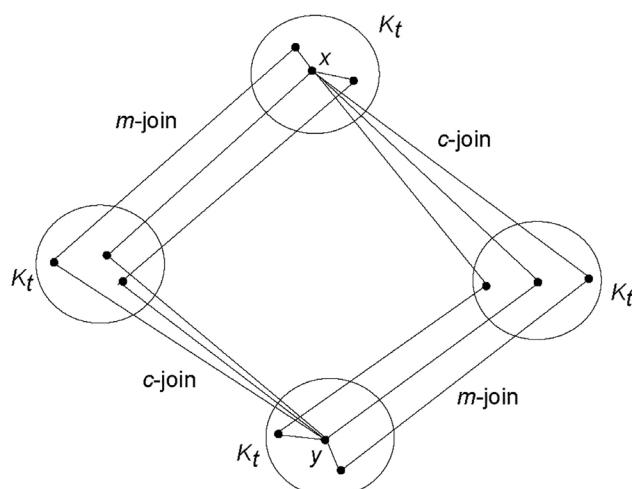
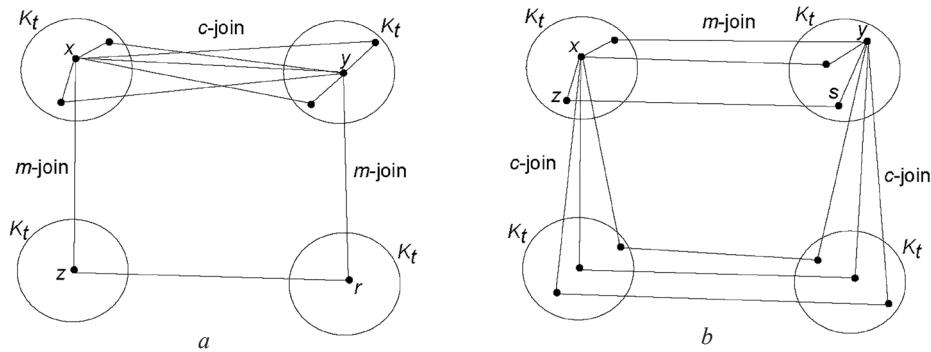


Рис. 2.  $2t$  непересекающихся  $xy$ -цепей ( $v$  и  $w$  несмежны)

Fig. 2.  $2t$  disjoint  $xy$ -paths ( $v$  and  $w$  are not adjacent)

Рис. 3.  $2t$  непересекающихся  $xy$ -цепей ( $v$  и  $w$  смежны)Fig. 3.  $2t$  disjoint  $xy$ -paths ( $v$  and  $w$  are adjacent)

и  $t$  непересекающихся  $xy$ -цепей вида

$$\left\{ \langle xz \cdots sy \rangle \mid z \in K_t^u, s \in K_t^h \right\},$$

всего получаем  $2t$  непересекающихся  $xy$ -цепей (рис. 3, б).

Случай 3. Пара вершин  $x$  и  $y$  графа  $H$  лежит в разных графах  $K_t^v$  и  $K_t^w$ , причем вершины  $v \in C_1$ ,  $w \in C_2$ ,  $C_1 \neq C_2$ , где  $C_1$ ,  $C_2$  – различные четные циклы 2-фактора графа  $G$ . Поскольку исходный граф  $G$  2-связен, то, согласно теореме Уитни, существуют две непересекающиеся  $vw$ -цепи. Нетрудно видеть, что (если нужно, взяв дополнение цепей в циклах  $C_1$  и  $C_2$ ) можно построить две  $vw$ -цепи таким образом, чтобы каждой концевой вершине  $v$  и  $w$  было инцидентно одно  $c$ -ребро, принадлежащее одной из двух  $vw$ -цепей. Причем эти два конечных  $c$ -ребра могут принадлежать только одной  $vw$ -цепи, а у второй  $vw$ -цепи конечными ребрами могут быть оба  $m$ -ребра. Тогда так же, как и выше, для каждой пары  $m$ - и  $c$ -ребер, инцидентных вершинам  $v$  и  $w$  в графе  $G$ , можно построить  $2t$  непересекающихся  $xy$ -цепей в графе  $H$ .

Таким образом,  $H$  является  $2t$ -связным.

Чтобы завершить доказательство, теперь покажем, что  $G$  является 1-жестким тогда и только тогда, когда  $H$  является  $t$ -жестким.

Предположим, что  $G$  не является 1-жестким, т. е. существует вершинный разрез  $X \subseteq V(G)$ , удовлетворяющий неравенству  $c(G - X) > |X|$ . Пусть  $Y \subseteq V(H)$  состоит из полных графов  $K_t^x$ ,  $x \in X$ , соответствующих вершинам из  $X$ . Легко видеть, что  $Y$  также является вершинным разрезом, причем  $c(H - Y) = c(G - X) > |X| = \frac{|Y|}{t}$ , и, следовательно,  $H$  не является  $t$ -жестким, противоречие.

Обратно, предположим, что граф  $H$  не является  $t$ -жестким. Тогда существует вершинный разрез  $Y \subseteq V(H)$ , удовлетворяющий неравенству  $c(H - Y) > \frac{|Y|}{t}$ . Будем говорить, что граф  $K_t^v$  в  $H$  не расщепляется разрезом  $Y$ , если он не пересекается с  $Y$ .

Покажем, что без ограничения общности можно считать, что каждый полный граф  $K_t^v$  в графе  $H$  полностью содержится в разрезе  $Y$  или не расщепляется им.

Действительно, выберем разрез  $Y \subseteq V(H)$ , такой, что  $c(H - Y) > \frac{|Y|}{t}$  и разрез  $Y$  расщепляет наименьшее число графов  $K_t^v$ , входящих в граф  $H$ . Если разрез  $Y$  не расщепляет ни один граф  $K_t^v$ , то доказывать нечего, поэтому предположим, что  $A$  является некоторым графом  $K_t^v$ , который расщепляется разрезом  $Y$ , и пусть  $B_1$  и  $B_2$  обозначают графы  $K_t^w$ , которые  $m$ -соединены с  $A$ . Возможны следующие случаи.

Случай 1.  $B_1$  и  $B_2$  не расщепляются разрезом  $Y$ . Пусть  $Y' = Y - (A \cap Y)$ . Тогда  $|Y'| < |Y|$ , в то время как  $c(H - Y') = c(H - Y)$ , поскольку граф  $A$  по-прежнему  $c$ -соединен с теми же графами  $K_t^u$ , что и  $A - Y$ . Таким образом, мы имеем

$$\frac{|Y'|}{c(H-Y')} < \frac{|Y|}{c(H-Y)} < t, \text{ или } c(H-Y') > \frac{|Y'|}{t}.$$

Поскольку  $Y$  является разрезом и  $c(H-Y') = c(H-Y)$ , то  $Y'$  также является разрезом в  $H$ . Поскольку  $Y'$  расщепляет меньшее количество графов  $K_t$ , чем  $Y$ , то это нарушает условие выбора  $Y$ .

Случай 2.1.  $B_1$  и  $B_2$  расщепляются  $Y$  и  $|A \cap Y| + |B_1 \cap Y| + |B_2 \cap Y| < t$ . Положим  $Y' = Y - (A \cap Y) - (B_1 \cap Y) - (B_2 \cap Y)$ .

Тогда  $|Y'| < |Y|$  и  $c(H-Y') = c(H-Y)$ , поскольку  $A - Y$ ,  $B_1 - Y$  и  $B_2 - Y$  принадлежат одной и той же компоненте связности графа  $H - Y$ , и  $A$  (соответственно,  $B_1$  и  $B_2$ )  $c$ -соединен со своими смежными графами  $K_t$ , кроме  $B_1$  и  $B_2$  (соответственно,  $A$ ). Таким образом, мы получа-

ем  $\frac{|Y'|}{c(H-Y')} < \frac{|Y|}{c(H-Y)} < t$ , или  $c(H-Y') > \frac{|Y'|}{t}$ . Поскольку  $Y$  является вершинным разрезом и  $c(H-Y') = c(H-Y)$ , то  $Y'$  также является вершинным разрезом в  $H$ . Снова  $Y'$  расщепляет меньшее число графов  $K_t$ , чем  $Y$ , что нарушает условие выбора  $Y$ .

Случай 2.2.  $B_1$  и  $B_2$  расщепляются  $Y$  и  $|A \cap Y| + |B_1 \cap Y| + |B_2 \cap Y| \geq t$ . Положим  $Y' = Y - (A \cap Y) - Z$ , где  $Z \subseteq (B_1 \cap Y) \cup (B_2 \cap Y)$  – любое подмножество мощности  $|Z| = t - |A \cap Y| > 0$ . Поскольку  $H$  является  $2t$ -связным и  $Y$  является вершинным разрезом в  $H$ , имеем  $|Y'| = |Y| - t \geq 2t - t = t$ . Заметим, что  $c(H-Y') \geq c(H-Y) - 1$ , так как стягивая две компоненты, содержащие  $A - Y$ ,  $B_1 - Y$  и  $B_2 - Y$ , мы можем потерять не более одной компоненты. Поскольку

$c(H-Y) > \frac{|Y|}{t}$ , получаем  $\frac{|Y'|}{c(H-Y')} \leq \frac{|Y| - t}{c(H-Y) - 1} < t$ , или  $c(H-Y') > \frac{|Y'|}{t} \geq 1$ . Таким образом,

$Y'$  является вершинным разрезом в  $H$ . Поскольку  $Y'$  расщепляет меньшее количество графов  $K_t$ , чем  $Y$ , то это нарушает условие выбора  $Y$ .

Чтобы закончить доказательство теоремы 7, предположим, что  $X \subseteq V(G)$  обозначает подмножество вершин в  $G$ , которые соответствуют графам  $K_t^x$ , входящим в  $Y$ . Тогда  $X$  является вершинным разрезом в  $G$  и имеет место  $c(G-X) = c(H-Y) > \frac{|Y|}{t} = |X|$ , и, следовательно,  $G$  не является 1-жестким графом, противоречие. Это доказывает теорему 7.

**Благодарности.** Работа выполнена в рамках Государственной программы фундаментальных исследований «Конвергенция – 2025» при финансовой поддержке НАН Беларуси.

**Acknowledgements.** The work was carried out in the framework of the State Program for Fundamental Research “Convergence – 2025” with the financial support of the National Academy of Sciences of Belarus.

## Список использованных источников

1. Bauer, D. Recognizing tough graphs is NP-hard / D. Bauer, S. L. Hakimi, E. Schmeichel // Discrete Applied Mathematics. – 1990. – Vol. 28, № 3. – P. 191–195. [https://doi.org/10.1016/0166-218x\(90\)90001-s](https://doi.org/10.1016/0166-218x(90)90001-s)
2. Bauer, D. On the complexity of recognizing tough graphs / D. Bauer, A. Morgana, E. Schmeichel // Discrete Mathematics. – 1994. – Vol. 124, № 1–3. – P. 13–17. [https://doi.org/10.1016/0012-365x\(92\)00047-u](https://doi.org/10.1016/0012-365x(92)00047-u)
3. Kratsch, D. Toughness, hamiltonicity and split graphs / D. Kratsch, J. Lehel, H. Müller // Discrete Mathematics. – 1996. – Vol. 150, № 1–3. – P. 231–245. [https://doi.org/10.1016/0012-365x\(95\)00190-8](https://doi.org/10.1016/0012-365x(95)00190-8)
4. The complexity of recognizing tough cubic graphs / D. Bauer, J. van den Heuvel, A. Morgana, E. Schmeichel // Discrete Applied Mathematics. – 1997. – Vol. 79, № 1–3. – P. 35–44. [https://doi.org/10.1016/s0166-218x\(97\)00030-9](https://doi.org/10.1016/s0166-218x(97)00030-9)
5. The complexity of toughness in regular graphs / D. Bauer, J. van den Heuvel, A. Morgana, E. Schmeichel // Congressus Numerantium. – 1998. – Vol. 130. – P. 47–61.
6. Tait, P. G. On the colouring of maps / P. G. Tait // Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. – 1880. – Vol. 10, № 4. – P. 501–503. <https://doi.org/10.1017/S0370164600044229>
7. Isaacs, R. Infinite families of nontrivial trivalent graphs which are not Tait colorable / R. Isaacs // The American Mathematical Monthly. – 1975. – Vol. 82, № 3. – P. 221–239. <https://doi.org/10.1080/00029890.1975.11993805>

## References

1. Bauer D., Hakimi S. L., Schmeichel E. Recognizing tough graphs is NP-hard. *Discrete Applied Mathematics*, 1990, vol. 28, no. 3, pp. 191–195. [https://doi.org/10.1016/0166-218x\(90\)90001-s](https://doi.org/10.1016/0166-218x(90)90001-s)

2. Bauer D., Morgana A., Schmeichel E. On the complexity of recognizing tough graphs. *Discrete Mathematics*, 1994, vol. 124, no. 1–3, pp. 13–17. [https://doi.org/10.1016/0012-365x\(92\)00047-u](https://doi.org/10.1016/0012-365x(92)00047-u)
3. Kratsch D., Lehel J., Müller H. Toughness, hamiltonicity and split graphs *Discrete Mathematics*, 1996, vol. 150, no. 1–3, pp. 231–245. [https://doi.org/10.1016/0012-365x\(95\)00190-8](https://doi.org/10.1016/0012-365x(95)00190-8)
4. Bauer D., Heuvel J. van den, Morgana A., Schmeichel E. The complexity of recognizing tough cubic graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 1997, vol. 79, no. 1–3, pp. 35–44. [https://doi.org/10.1016/s0166-218x\(97\)00030-9](https://doi.org/10.1016/s0166-218x(97)00030-9)
5. Bauer D., Heuvel J. van den, Morgana A., Schmeichel E. The complexity of toughness in regular graphs. *Congressus Numerantium*, 1998, vol. 130, pp. 47–61.
6. Tait P. G. On the colouring of maps. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 1880, vol. 10, no. 4, pp. 501–503. <https://doi.org/10.1017/S0370164600044229>
7. Isaacs R. Infinite families of nontrivial trivalent graphs which are not Tait colorable. *The American Mathematical Monthly*, 1975, vol. 82, no. 3, pp. 221–239. <https://doi.org/10.1080/00029890.1975.11993805>

### Информация об авторе

**Бенедиктович Владимир Иванович** – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт математики Национальной академии наук Беларусь (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: [vbened@im.bas-net.by](mailto:vbened@im.bas-net.by)

### Information about the author

**Vladimir I. Benediktovich** – Ph. D. (Physics and Mathematics), Leading Researcher, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: [vbened@im.bas-net.by](mailto:vbened@im.bas-net.by)

**ФІЗИКА**  
**PHYSICS**

UDC 539.1  
<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2025-61-4-307-319>

Received 31.07.2023  
Поступила в редакцию 31.07.2023

**Alina V. Ivashkevich, Viktor V. Red'kov**

*B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus*

**EIGENVALUES OF THE GENERALIZED HELICITY OPERATOR  
FOR SPIN 3/2 PARTICLE IN THE PRESENCE OF THE MAGNETIC FIELD  
AND THE PROJECTIVE OPERATORS METHOD**

**Abstract.** The eigenvalue problem for generalized helicity operator for a spin 3/2 particle in presence of the uniform magnetic field is solved. After separating the variables in the basis of cylindrical coordinates  $(r, \phi, z)$  and the tetrad, the system of 16 first-order differential equations in the variable  $r$  is derived. This system is studied with the use of the method of projective operators, constructed with the use of the third projection of the spin for the particle. In accordance with the method by Fedorov – Gronskiy, all 16 variables may be expressed in terms of only 4 distinguished functions, which are constructed in terms of confluent hypergeometric functions. Further the problem reduces to studying the linear algebraic homogeneous system for 16 algebraic variables. In the end, we derive algebraic equations of the second and the fourth order, their roots determine the possible eigenvalues of the helicity operator.

**Keywords:** spin 3/2 particle, external magnetic field, generalized helicity operator, cylindric symmetry, projective operators, eigenvalue problem, exact solutions

**For citation.** Ivashkevich A. V., Red'kov V. M. Eigenvalues of the generalized helicity operator for spin 3/2 particle in presence of the magnetic field and the projective operators method. *Vesti Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2025, vol. 61, no. 4, pp. 307–319. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2025-61-4-307-319>

**А. В. Ивашкевич, В. М. Ред'ков**

*Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь*

**ЗАДАЧА О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ОБОБЩЕННОГО ОПЕРАТОРА СПИРАЛЬНОСТИ  
ДЛЯ ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ 3/2 В МАГНИТНОМ ПОЛЕ  
И МЕТОД ПРОЕКТИВНЫХ ОПЕРАТОРОВ**

**Аннотация.** Решена задача о собственных значениях обобщенного оператора спиральности для частицы со спином 3/2 во внешнем однородном магнитном поле. После разделения переменных в уравнении на собственные значения в цилиндрической системе координат  $(r, \phi, z)$  и соответствующей тетраде найдена система дифференциальных уравнений первого порядка в переменной  $r$  для 16 функций. Эта система решена на основе применения метода проективных операторов, построенных на основе третьей проекции оператора спина частицы. В соответствии с методом Федорова – Гронского все 16 переменных могут быть выражены только через 4 различающиеся функции, удовлетворяющие уравнениям вырожденного гипергеометрического типа. Дальнейшая задача сводится к анализу однородной алгебраической системы уравнений для 16 неизвестных величин. В итоге найдены уравнения 2-го и 4-го порядков, корни которых определяют собственные значения оператора спиральности.

**Ключевые слова:** частица со спином 3/2, внешнее магнитное поле, обобщенный оператор спиральности, цилиндрическая симметрия, проективные операторы, задача на собственные значения, точные решения

**Для цитирования.** Ивашкевич, А. В. Задача о собственных значениях обобщенного оператора спиральности для частицы со спином 3/2 в магнитном поле и метод проективных операторов / А. В. Ивашкевич, В. М. Ред'ков // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. – 2025. – Т. 61, № 4. – С. 307–319. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2025-61-4-307-319>

**Helicity operator, the basic formulas.** As it is known, in presence of the external magnetic field, it is useful to use the possibilities to diagonalize additionally the helicity operator. In Cartesian basis, this operator for a spin 3/2 particle is determined by the formula [1–9] (the presence of the external magnetic field will be taken into account below)

$$i\left[\left(\partial_1\sigma^{23} + \partial_2\sigma^{31} + \partial_3\sigma^{12}\right)\otimes I + I\otimes\left(\partial_1j^{23} + \partial_2j^{31} + \partial_3j^{12}\right)\right] = (S_1\partial_1 + S_2\partial_2 + S_3\partial_3), \quad \Sigma\Psi_{\text{cart}} = \sigma\Psi_{\text{cart}}. \quad (1)$$

Taking in mind expressions for matrices in Cartesian basis, from the formula (1) we derive<sup>1</sup>:

$$\Sigma = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \partial_3 & \partial_1 - i\partial_2 & 0 & 0 \\ \partial_1 + i\partial_2 & -\partial_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_3 & \partial_1 - i\partial_2 \\ 0 & 0 & \partial_1 + i\partial_2 & -\partial_3 \end{vmatrix} \otimes I + I \otimes \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i\partial_3 & i\partial_2 \\ 0 & i\partial_3 & 0 & -i\partial_1 \\ 0 & -i\partial_2 & i\partial_1 & 0 \end{vmatrix}. \quad (2)$$

After the transition to cylindric coordinates we get

$$\Sigma_{\text{cart}} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \partial_3 & e^{-i\phi}\left(\partial_r - \frac{i}{r}\partial_\phi\right) & 0 & 0 \\ e^{i\phi}\left(\partial_r + \frac{i}{r}\partial_\phi\right) & -\partial_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_3 & e^{-i\phi}\left(\partial_r - \frac{i}{r}\partial_\phi\right) \\ 0 & 0 & e^{i\phi}\left(\partial_r + \frac{i}{r}\partial_\phi\right) & -\partial_3 \end{vmatrix} \otimes I + \\ + I \otimes \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i\partial_3 & i\left(\sin\phi\partial_r + \frac{\cos\phi}{r}\partial_\phi\right) \\ 0 & i\partial_3 & 0 & -i\left(\cos\phi\partial_r - \frac{\sin\phi}{r}\partial_\phi\right) \\ 0 & -i\left(\sin\phi\partial_r + \frac{\cos\phi}{r}\partial_\phi\right) & i\left(\cos\phi\partial_r - \frac{\sin\phi}{r}\partial_\phi\right) & 0 \end{vmatrix}.$$

**Transition to 16-dimensional form.** Let us start with the transformation relating Cartesian basis with cylindrical one

$$\Psi_{\text{cyl}} = (B \otimes L)\Psi_{\text{cart}} = \begin{vmatrix} e^{i\phi/2} & e^{i\phi/2}(\cos\phi f_1 + \sin\phi f_2) & e^{i\phi/2}(-\sin\phi f_1 + \cos\phi f_2) & e^{i\phi/2}f_3 \\ e^{-i\phi/2} & e^{-i\phi/2}(\cos\phi g_1 + \sin\phi g_2) & e^{-i\phi/2}(-\sin\phi g_1 + \cos\phi g_2) & e^{-i\phi/2}g_3 \\ e^{i\phi/2} & e^{i\phi/2}(\cos\phi h_1 + \sin\phi h_2) & e^{i\phi/2}(-\sin\phi h_1 + \cos\phi h_2) & e^{i\phi/2}h_3 \\ e^{-i\phi/2} & e^{-i\phi/2}(\cos\phi d_1 + \sin\phi d_2) & e^{-i\phi/2}(-\sin\phi d_1 + \cos\phi d_2) & e^{-i\phi/2}d_3 \end{vmatrix}. \quad (3)$$

We turn to the helicity equation in Cartesian basis; after performing needed calculations we arrive at the system (in Cartesian basis)

$$+\partial_3f_0^c + e^{-i\phi}\left(\partial_r - \frac{i\partial_\phi}{r}\right)g_0^c = 2\sigma f_0^c, \quad -\partial_3g_0^c + e^{+i\phi}\left(\partial_r + \frac{i\partial_\phi}{r}\right)f_0^c = 2\sigma g_0^c, \\ +\partial_3h_0^c + e^{-i\phi}\left(\partial_r - \frac{i\partial_\phi}{r}\right)d_0^c = 2\sigma h_0^c, \quad \partial_3d_0^c + e^{+i\phi}\left(\partial_r + \frac{i\partial_\phi}{r}\right)h_0^c = 2\sigma d_0^c;$$

<sup>1</sup> The use of anti-Hermitian generators means that the eigenvalues of the introduced helicity operator will be purely imaginary.

$$\begin{aligned}
 & +\partial_3 f_1^c - 2i\partial_3 f_2^c + e^{-i\phi} \left( \partial_r - \frac{i\partial_\phi}{r} \right) g_1^c + 2i \left( \sin \phi \partial_r + \frac{\cos \phi}{r} \partial_\phi \right) f_3^c = 2\sigma f_1^c, \\
 & \partial_3 g_1^c - 2i\partial_3 g_2^c + e^{+i\phi} \left( \partial_r + \frac{i\partial_\phi}{r} \right) f_1^c + 2i \left( \sin \phi \partial_r + \frac{\cos \phi}{r} \partial_\phi \right) g_3^c = 2\sigma g_1^c, \\
 & +\partial_3 h_1^c - 2i\partial_3 h_2^c + e^{-i\phi} \left( \partial_r - \frac{i\partial_\phi}{r} \right) d_1^c + 2i \left( \sin \phi \partial_r + \frac{\cos \phi}{r} \partial_\phi \right) h_3^c = 2\sigma h_1^c, \\
 & -\partial_3 d_1^c - 2i\partial_3 d_2^c + e^{+i\phi} \left( \partial_r + \frac{i\partial_\phi}{r} \right) h_1^c + 2i \left( \sin \phi \partial_r + \frac{\cos \phi}{r} \partial_\phi \right) d_3^c = 2\sigma d_1^c; \\
 & +\partial_3 f_2^c + 2i\partial_3 f_1^c + e^{-i\phi} \left( \partial_r - \frac{i\partial_\phi}{r} \right) g_2^c - 2i \left( \cos \phi \partial_r - \frac{\sin \phi}{r} \partial_\phi \right) f_3^c = 2\sigma f_2^c, \\
 & -\partial_3 g_2^c + 2i\partial_3 g_1^c + e^{+i\phi} \left( \partial_r + \frac{i\partial_\phi}{r} \right) f_2^c - 2i \left( \cos \phi \partial_r - \frac{\sin \phi}{r} \partial_\phi \right) g_3^c = 2\sigma g_2^c, \\
 & +\partial_3 h_2^c + 2i\partial_3 h_1^c + e^{-i\phi} \left( \partial_r - \frac{i\partial_\phi}{r} \right) d_2^c - 2i \left( \cos \phi \partial_r - \frac{\sin \phi}{r} \partial_\phi \right) h_3^c = 2\sigma h_2^c, \\
 & -\partial_3 d_2^c + 2i\partial_3 d_1^c + e^{+i\phi} \left( \partial_r + \frac{i\partial_\phi}{r} \right) h_2^c - 2i \left( \cos \phi \partial_r - \frac{\sin \phi}{r} \partial_\phi \right) d_3^c = 2\sigma d_2^c; \\
 & +\partial_3 f_3^c + e^{-i\phi} \left( \partial_r - \frac{i\partial_\phi}{r} \right) g_3^c - 2 \left( \sin \phi \partial_r + \frac{\cos \phi}{r} \partial_\phi \right) f_1^c + 2i \left( \cos \phi \partial_r - \frac{\sin \phi}{r} \partial_\phi \right) f_2^c = 2\sigma f_3^c, \\
 & -\partial_3 g_3^c + e^{+i\phi} \left( \partial_r + \frac{i\partial_\phi}{r} \right) f_3^c - 2 \left( \sin \phi \partial_r + \frac{\cos \phi}{r} \partial_\phi \right) g_1^c + 2i \left( \cos \phi \partial_r - \frac{\sin \phi}{r} \partial_\phi \right) g_2^c = 2\sigma g_3^c, \\
 & +\partial_3 h_3^c + e^{-i\phi} \left( \partial_r - \frac{i\partial_\phi}{r} \right) d_3^c - 2 \left( \sin \phi \partial_r + \frac{\cos \phi}{r} \partial_\phi \right) h_1^c + 2i \left( \cos \phi \partial_r - \frac{\sin \phi}{r} \partial_\phi \right) h_2^c = 2\sigma h_3^c, \\
 & -\partial_3 d_3^c + e^{+i\phi} \left( \partial_r + \frac{i\partial_\phi}{r} \right) h_3^c - 2 \left( \sin \phi \partial_r + \frac{\cos \phi}{r} \partial_\phi \right) d_1^c + 2i \left( \cos \phi \partial_r - \frac{\sin \phi}{r} \partial_\phi \right) d_2^c = 2\sigma d_3^c.
 \end{aligned}$$

We can see that it is enough to study only the system for the variables  $f_a, g_a$ :

$$\begin{aligned}
 & +\partial_3 f_0^c + e^{-i\phi} \left( \partial_r - \frac{i\partial_\phi}{r} \right) g_0^c = 2\sigma f_0^c, \quad -\partial_3 g_0^c + e^{+i\phi} \left( \partial_r + \frac{i\partial_\phi}{r} \right) f_0^c = 2\sigma g_0^c, \\
 & +\partial_3 f_1^c - 2i\partial_3 f_2^c + e^{-i\phi} \left( \partial_r - \frac{i\partial_\phi}{r} \right) g_1^c + 2i \left( \sin \phi \partial_r + \frac{\cos \phi}{r} \partial_\phi \right) f_3^c = 2\sigma f_1^c, \\
 & \partial_3 g_1^c - 2i\partial_3 g_2^c + e^{+i\phi} \left( \partial_r + \frac{i\partial_\phi}{r} \right) f_1^c + 2i \left( \sin \phi \partial_r + \frac{\cos \phi}{r} \partial_\phi \right) g_3^c = 2\sigma g_1^c, \\
 & +\partial_3 f_2^c + 2i\partial_3 f_1^c + e^{-i\phi} \left( \partial_r - \frac{i\partial_\phi}{r} \right) g_2^c - 2i \left( \cos \phi \partial_r - \frac{\sin \phi}{r} \partial_\phi \right) f_3^c = 2\sigma f_2^c, \quad (4) \\
 & -\partial_3 g_2^c + 2i\partial_3 g_1^c + e^{+i\phi} \left( \partial_r + \frac{i\partial_\phi}{r} \right) f_2^c - 2i \left( \cos \phi \partial_r - \frac{\sin \phi}{r} \partial_\phi \right) g_3^c = 2\sigma g_2^c, \\
 & +\partial_3 f_3^c + e^{-i\phi} \left( \partial_r - \frac{i\partial_\phi}{r} \right) g_3^c - 2 \left( \sin \phi \partial_r + \frac{\cos \phi}{r} \partial_\phi \right) f_1^c + 2i \left( \cos \phi \partial_r - \frac{\sin \phi}{r} \partial_\phi \right) f_2^c = 2\sigma f_3^c, \\
 & -\partial_3 g_3^c + e^{+i\phi} \left( \partial_r + \frac{i\partial_\phi}{r} \right) f_3^c - 2 \left( \sin \phi \partial_r + \frac{\cos \phi}{r} \partial_\phi \right) g_1^c + 2i \left( \cos \phi \partial_r - \frac{\sin \phi}{r} \partial_\phi \right) g_2^c = 2\sigma g_3^c.
 \end{aligned}$$

Now we should take into account the transformation between Cartesian and cylindrical tetrad bases; we will follow only transformations on the variables  $f_a, g_a$ :

$$\begin{aligned} f_0^c &= e^{i(-1/2)\phi} f_0, & f_1^c &= e^{i(-1/2)\phi} (\cos \phi f_1 - \sin \phi f_2), \\ g_0^c &= e^{i(+1/2)\phi} g_0, & g_1^c &= e^{i(+1/2)\phi} (\cos \phi g_1 - \sin \phi g_2), \\ f_2^c &= e^{i(-1/2)\phi} (\sin \phi f_1 + \cos \phi f_2), & f_3^c &= e^{i(-1/2)\phi} f_3, \\ g_2^c &= e^{i(+1/2)\phi} (\sin \phi g_1 + \cos \phi g_2), & g_3^c &= e^{i(+1/2)\phi} g_3, \end{aligned} \quad (5)$$

and inverse ones

$$\begin{aligned} f_0 &= e^{i(+1/2)\phi} f_0^c, & f_1 &= e^{i(+1/2)\phi} (\cos \phi f_1^c + \sin \phi f_2^c), \\ g_0 &= e^{i(-1/2)\phi} g_0^c, & g_1 &= e^{i(-1/2)\phi} (\cos \phi g_1^c + \sin \phi g_2^c), \\ f_2 &= e^{i(+1/2)\phi} (-\sin \phi f_1^c + \cos \phi f_2^c), & f_3 &= e^{i(+1/2)\phi} f_3^c, \\ g_2 &= e^{i(-1/2)\phi} (-\sin \phi g_1^c + \cos \phi g_2^c), & g_3 &= e^{i(-1/2)\phi} g_3^c. \end{aligned} \quad (6)$$

With the use of (5) and (6) we can transform the subsystem (4) to the other form (we will omit technical details and write down the final system of 8 equations; besides, we have taken into account that factors  $e^{ikz} e^{im\phi}$  are in the field function)

$$\begin{aligned} g'_0 + \frac{m+1/2}{r} g_0 + f_0(-2\sigma + ik) &= 0, & f'_0 - \frac{m-1/2}{r} f_0 + g_0(-2\sigma - ik) &= 0, \\ f_1(-2\sigma + ik) + 2kf_2 + \frac{(1-2m)f_3}{r} + \frac{(2m+1)g_1}{2r} + g'_1 + \frac{ig_2}{r} &= 0, \\ f_2(-2\sigma + ik) - 2kf_1 - 2if'_3 + \frac{(2m+1)g_2}{2r} + g'_2 - \frac{ig_1}{r} &= 0, \\ \frac{(1-2m)f_1}{2r} + f'_1 - \frac{if_2}{r} + g_1(-2\sigma - ik) + 2kg_2 - \frac{(2m+1)g_3}{r} &= 0, \\ \frac{(1-2m)f_2}{2r} + f'_2 + \frac{if_1}{r} + g_2(-2\sigma - ik) - 2kg_1 - 2ig'_3 &= 0, \\ (-2\sigma + ik)f_3 + \frac{2m-1}{r} f_1 + 2if'_2 + \frac{2i}{r} f_2 + \frac{2m+1}{2r} g_3 + g'_3 &= 0, \\ \frac{(1-2m)}{2r} f_3 + f'_3 + (-2\sigma - ik)g_3 + \frac{2m+1}{r} g_1 + 2ig'_2 + \frac{2i}{r} g_2 &= 0. \end{aligned}$$

Thus we arrive at the system of 8 equations. Further we will present this system in the matrix form, applying the truncated column  $\Psi_{\text{cyl}}$ :

$$A\Psi_{\text{cyl}} = 2\sigma\Psi_{\text{cyl}}, \quad \Psi_{\text{cyl}} = \begin{vmatrix} f_0 \\ g_0 \\ f_1 \\ g_1 \\ f_2 \\ g_2 \\ f_3 \\ g_3 \end{vmatrix}, \quad (7)$$

where (let  $d/dr = R$ )

$$A = \begin{vmatrix} ik & \frac{2m+1}{2r} + R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1-2m}{2r} + R & -ik & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ik & \frac{2m+1}{2r} + R & 2k & \frac{i}{r} & \frac{1-2m}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2m}{2r} + R & -ik & -\frac{i}{r} & 2k & 0 & -\frac{2m+1}{r} \\ 0 & 0 & -2k & -\frac{i}{r} & ik & \frac{2m+1}{2r} + R & -2iR & 0 \\ 0 & 0 & \frac{i}{r} & -2k & \frac{1-2m}{2r} + R & -ik & 0 & -2iR \\ 0 & 0 & \frac{2m-1}{r} & 0 & 2iR + \frac{2i}{r} & 0 & ik & \frac{2m+1}{2r} + R \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2m+1}{r} & 0 & 2iR + \frac{2i}{r} & \frac{1-2m}{2r} + R & -ik \end{vmatrix}. \quad (8)$$

Let us transform this system to the cyclic basis [7–9]. Starting with the relations

$$\Psi_{\text{cycl}} = U \Psi_{\text{cyl}}, \quad \bar{\Psi}_{kB} = U_{BA} \Psi_{kA} = \Psi_{kA} \tilde{U}_{AB}, \quad \bar{\Psi} = \Psi \tilde{U}, \quad \Psi = \bar{\Psi} \tilde{U}^{-1}, \quad (9)$$

in 16-dimensional form  $\bar{\Psi} = T_{16 \times 16} \Psi$  we have the needed representation; we use its truncated 8-form

$$T = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/\sqrt{2} & 0 & i/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/\sqrt{2} & 0 & i/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & i/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & i/\sqrt{2} & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (10)$$

Transition of the system to the cyclic basis is done by the rule

$$\bar{\Psi} = T \Psi, \quad (TAT^{-1}) \bar{\Psi} = 2\sigma \bar{\Psi}, \quad \bar{A} = TAT^{-1}; \quad (11)$$

for the matrix  $\bar{A}$  we obtain an explicit expression: then we get new equations

$$\begin{aligned} ikf_0 + \left( \frac{d}{dr} + \frac{m+1/2}{r} \right) g_0 &= 2\sigma f_0, \quad \left( \frac{d}{dr} - \frac{m-1/2}{r} \right) f_0 - ik g_0 &= 2\sigma g_0, \\ 3ikf_1 + \sqrt{2} \left( \frac{d}{dr} + \frac{m-1/2}{r} \right) f_2 + \left( \frac{d}{dr} + \frac{m-1/2}{r} \right) g_1 &= 2\sigma f_1, \\ \left( \frac{d}{dr} - \frac{m-3/2}{r} \right) f_1 + ik g_1 + \sqrt{2} \left( \frac{d}{dr} + \frac{m+1/2}{r} \right) g_2 &= 2\sigma g_1, \\ \sqrt{2} \left( \frac{d}{dr} - \frac{m-3/2}{r} \right) f_1 + ik f_2 + \sqrt{2} \left( \frac{d}{dr} + \frac{m+1/2}{r} \right) f_3 + \left( \frac{d}{dr} + \frac{m+1/2}{r} \right) g_2 &= 2\sigma f_2, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{d}{dr} - \frac{m-1/2}{r} \right) f_2 + \sqrt{2} \left( \frac{d}{dr} - \frac{m-1/2}{r} \right) g_1 - ik g_2 + \sqrt{2} \left( \frac{d}{dr} + \frac{m+3/2}{r} \right) g_3 &= 2\sigma g_2, \\ \sqrt{2} \left( \frac{d}{dr} - \frac{m-1/2}{r} \right) f_2 - ik f_3 + \left( \frac{d}{dr} + \frac{m+3/2}{r} \right) g_3 &= 2\sigma f_3, \\ \left( \frac{d}{dr} - \frac{m+1/2}{r} \right) f_3 + \sqrt{2} \left( \frac{d}{dr} - \frac{m+1/2}{r} \right) g_2 - 3ik g_3 &= 2\sigma g_3. \end{aligned}$$

With the use of shortening notations

$$\begin{aligned} a_{m-1/2} &= \frac{d}{dr} + \frac{m-1/2}{r}, & a_{m+1/2} &= \frac{d}{dr} + \frac{m+1/2}{r}, & a_{m+3/2} &= \frac{d}{dr} + \frac{m+3/2}{r}, \\ b_{m-1/2} &= \frac{d}{dr} - \frac{m-1/2}{r}, & b_{m+1/2} &= \frac{d}{dr} - \frac{m+1/2}{r}, & b_{m+3/2} &= \frac{d}{dr} - \frac{m+3/2}{r}, \end{aligned}$$

we reduce the last system to the form

$$\begin{aligned} a_{m+1/2} g_0 &= (2\sigma - ik) f_0, & b_{m-1/2} f_0 &= (2\sigma + ik) g_0, \\ \sqrt{2} a_{m-1/2} f_2 + a_{m-1/2} g_1 &= (2\sigma - 3ik) f_1, \\ b_{m-3/2} f_1 + \sqrt{2} a_{m+1/2} g_2 &= (2\sigma - ik) g_1, \\ \sqrt{2} b_{m-3/2} f_1 + \sqrt{2} a_{m+1/2} f_3 + a_{m+1/2} g_2 &= (2\sigma - ik) f_2, \\ b_{m-1/2} f_2 + \sqrt{2} b_{m-1/2} g_1 + \sqrt{2} a_{m+3/2} g_3 &= (2\sigma + ik) g_2, \\ \sqrt{2} b_{m-1/2} f_2 + a_{m+3/2} g_3 &= (2\sigma + ik) f_3, \\ b_{m+1/2} f_3 + \sqrt{2} b_{m+1/2} g_2 &= (2\sigma + 3ik) g_3. \end{aligned} \tag{13}$$

**Method of projective operators.** In order to solve the system (13) we will apply the method of projective operators [10]. To this end, let us start with the matrix (in the cyclic basis)  $Y = \bar{J}^{12} = \sigma^{12} \otimes I + I \otimes \bar{j}^{12}$ , whence it follows

$$Y \Psi_{\text{cycl}} = \begin{vmatrix} -\frac{i}{2} f_0 & -\frac{3i}{2} f_1 & -\frac{i}{2} f_2 & \frac{i}{2} f_3 \\ \frac{i}{2} g_0 & -\frac{i}{2} g_1 & \frac{i}{2} g_2 & \frac{3i}{2} g_3 \\ -\frac{i}{2} h_0 & -\frac{3i}{2} h_1 & -\frac{i}{2} h_2 & \frac{i}{2} h_3 \\ \frac{i}{2} d_0 & -\frac{i}{2} d_1 & \frac{i}{2} d_2 & \frac{3i}{2} d_3 \end{vmatrix}. \tag{14}$$

It is more convenient to have a 16-dimensional form of generator  $Y$

$$\Psi = \Psi_{A(n)} = \begin{vmatrix} \Psi_{A(0)} \\ \Psi_{A(1)} \\ \Psi_{A(2)} \\ \Psi_{A(3)} \end{vmatrix}, \quad \Psi_{A(0)} = \begin{vmatrix} f_0 \\ g_0 \\ h_0 \\ d_0 \end{vmatrix}, \quad \Psi_{A(1)} = \begin{vmatrix} f_1 \\ g_1 \\ h_1 \\ d_1 \end{vmatrix}, \quad \Psi_{A(2)} = \begin{vmatrix} f_2 \\ g_2 \\ h_2 \\ d_2 \end{vmatrix}, \quad \Psi_{A(3)} = \begin{vmatrix} f_3 \\ g_3 \\ h_3 \\ d_3 \end{vmatrix}; \tag{15}$$

for the relevant matrix  $Y$  we get the explicit expression. In which we can separate two similar 8-dimensional structures with respect to the variables:

$$f_0, g_0, \quad f_1, g_1, \quad f_2, g_2, \quad f_3, g_3, \quad h_0, d_0, \quad h_1, d_1, \quad h_2, d_2, \quad h_3, d_3; \quad (16)$$

so the truncated matrix  $Y$  is defined by

$$Y\Psi = \begin{vmatrix} -i/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_0 \\ 0 & i/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_0 \\ 0 & 0 & -3i/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_1 \\ 0 & 0 & 0 & -i/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i/2 & 0 & 0 & 0 & f_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i/2 & 0 & 0 & h_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i/2 & 0 & f_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3i/2 & h_3 \end{vmatrix}. \quad (17)$$

We verify that the minimal equation is valid [10]

$$(Y^2 + 1/4)(Y^2 + 9/4) = (Y + i/2)(Y - i/2)(Y + 3i/2)(Y - 3i/2) = 0, \quad (18)$$

which permits us to introduce four projective operators

$$\begin{aligned} P_1 &= +\frac{i}{2} \left( Y - \frac{i}{2} \right) \left( Y^2 + \frac{9}{4} \right), & P_2 &= -\frac{i}{2} \left( Y + \frac{i}{2} \right) \left( Y^2 + \frac{9}{4} \right), \\ P_3 &= +\frac{i}{6} \left( Y^2 + \frac{1}{4} \right) \left( Y + \frac{3i}{2} \right), & P_4 &= -\frac{i}{6} \left( Y^2 + \frac{1}{4} \right) \left( Y - \frac{3i}{2} \right), \end{aligned}$$

with the properties  $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = I$ ,  $P_i^2 = P_i$ ; correspondingly, the wave function can be decomposed into the sum of 4 parts,  $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 + \Psi_4$ . Their explicit form is readily found. Correspondingly, the truncated projective constituents are determined by the relations

$$\Psi_1 = \begin{vmatrix} f_0(r) \\ 0 \\ 0 \\ g_1(r) \\ f_2(r) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \Psi_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ g_0(r) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ g_2(r) \\ f_3(r) \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \Psi_3 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ g_3(r) \end{vmatrix}, \quad \Psi_4 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ f_1(r) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}. \quad (19)$$

We divide 8 equations into 4 groups:

$$\begin{aligned} P_1, \quad a_{m+1/2}g_0 &= (2\sigma - ik)f_0, \quad b_{m-3/2}f_1 + \sqrt{2}a_{m+1/2}g_2 = (2\sigma - ik)g_1, \\ &\sqrt{2}b_{m-3/2}f_1 + \sqrt{2}a_{m+1/2}f_3 + a_{m+1/2}g_2 = (2\sigma - ik)f_2; \\ P_2, \quad b_{m-1/2}f_0 &= (2\sigma + ik)g_0, \quad b_{m-1/2}f_2 + \sqrt{2}b_{m-1/2}g_1 + \sqrt{2}a_{m+3/2}g_3 = (2\sigma + ik)g_2, \\ &\sqrt{2}b_{m-1/2}f_2 + a_{m+3/2}g_3 = (2\sigma + ik)f_3; \\ P_3, \quad b_{m+1/2}f_3 + \sqrt{2}b_{m+1/2}g_2 &= (2\sigma + 3ik)g_3; \quad P_4, \quad \sqrt{2}a_{m-1/2}f_2 + a_{m-1/2}g_1 = (2\sigma - 3ik)f_1. \end{aligned}$$

According to the method by Fedorov – Gronskiy [10], each projective constituent is determined only by one function of the variable  $r$ :

$$\Psi_1 = \begin{vmatrix} f_0 \\ 0 \\ 0 \\ g_1 \\ f_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \varphi_1(r), \quad \Psi_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ g_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ g_2 \\ f_3 \\ 0 \end{vmatrix} \varphi_2(r), \quad \Psi_3 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ g_3 \end{vmatrix} \varphi_3(r), \quad \Psi_4 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ f_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \varphi_4(r); \quad (20)$$

inside the columns some numerical coefficients stay. Besides, near each equation we have to impose additional differential constraints which permit us to transform the equations to the algebraic form:

$$\begin{aligned} P_1, \quad a_{m+1/2}\varphi_2 g_0 &= (2\sigma - ik)\varphi_1 f_0 \Rightarrow a_{m+1/2}\varphi_2 = c_1\varphi_1, \\ b_{m-3/2}\varphi_4 f_1 + \sqrt{2}a_{m+1/2}\varphi_2 g_2 &= (2\sigma - ik)\varphi_1 g_1 \Rightarrow b_{m-3/2}\varphi_4 = c_2\varphi_1, \quad a_{m+1/2}\varphi_2 = c_1\varphi_1, \\ \sqrt{2}b_{m-3/2}\varphi_4 f_1 + \sqrt{2}a_{m+1/2}\varphi_2 f_3 + a_{m+1/2}\varphi_2 g_2 &= (2\sigma - ik)\varphi_1 f_2 \Rightarrow b_{m-3/2}\varphi_4 = c_2\varphi_1, \quad a_{m+1/2}\varphi_2 = c_1\varphi_1; \\ P_2, \quad b_{m-1/2}\varphi_1 f_0 &= (2\sigma + ik)\varphi_2 g_0 \Rightarrow b_{m-1/2}\varphi_1 = c_3\varphi_2, \\ b_{m-1/2}\varphi_1 f_2 + \sqrt{2}b_{m-1/2}\varphi_1 g_1 + \sqrt{2}a_{m+3/2}\varphi_3 g_3 &= (2\sigma + ik)\varphi_2 g_2 \Rightarrow b_{m-1/2}\varphi_1 = c_3\varphi_2, \quad a_{m+3/2}\varphi_3 = c_4\varphi_2, \\ \sqrt{2}b_{m-1/2}\varphi_1 f_2 + a_{m+3/2}\varphi_3 g_3 &= (2\sigma + ik)\varphi_2 f_3 \Rightarrow b_{m-1/2}\varphi_1 = c_3\varphi_2, \quad a_{m+3/2}\varphi_3 = c_4\varphi_2; \\ P_3, \quad b_{m+1/2}\varphi_2 f_3 + \sqrt{2}b_{m+1/2}\varphi_2 g_2 &= (2\sigma + 3ik)\varphi_3 g_3 \Rightarrow b_{m+1/2}\varphi_2 = c_5\varphi_3; \\ P_4, \quad \sqrt{2}a_{m-1/2}\varphi_1 f_2 + a_{m-1/2}\varphi_1 g_1 &= (2\sigma - 3ik)\varphi_4 f_1 \Rightarrow a_{m-1/2}\varphi_1 = c_6\varphi_4. \end{aligned}$$

In this way, from the above we arrive at the following algebraic system

$$\begin{aligned} c_1 g_0 &= (2\sigma - ik) f_0, \quad c_2 f_1 + \sqrt{2}c_1 g_2 = (2\sigma - ik) g_1, \\ \sqrt{2}c_2 f_1 + \sqrt{2}c_1 f_3 + c_1 g_2 &= (2\sigma - ik) f_2, \quad c_3 f_0 = (2\sigma + ik) g_0, \\ c_3 f_2 + \sqrt{2}c_3 g_1 + \sqrt{2}c_4 g_3 &= (2\sigma + ik) g_2, \quad \sqrt{2}c_3 f_2 + c_4 g_3 = (2\sigma + ik) f_3, \\ c_5 f_3 + \sqrt{2}c_5 g_2 &= (2\sigma + 3ik) g_3, \quad \sqrt{2}c_6 f_2 + c_6 g_1 = (2\sigma - 3ik) f_1, \end{aligned} \quad (21)$$

and at the first-order constraints

$$\begin{aligned} a_{m+1/2}\varphi_2 &= c_1\varphi_1, \quad b_{m-1/2}\varphi_1 = c_3\varphi_2, \quad \text{let } c_3 = c_1; \\ a_{m-1/2}\varphi_1 &= c_6\varphi_4, \quad b_{m-3/2}\varphi_4 = c_2\varphi_1, \quad \text{let } c_6 = c_2; \\ a_{m+3/2}\varphi_3 &= c_4\varphi_2, \quad b_{m+1/2}\varphi_2 = c_5\varphi_3, \quad \text{let } c_5 = c_4. \end{aligned} \quad (22)$$

Whence we derive the 2-nd-order equations for separate functions

$$\begin{aligned} \left( a_{m+1/2}b_{m-1/2} - c_1^2 \right) \varphi_1 &= 0, \quad \left( b_{m-3/2}a_{m-1/2} - c_2^2 \right) \varphi_1 = 0, \\ \left( b_{m-1/2}a_{m+1/2} - c_1^2 \right) \varphi_2 &= 0, \quad \left( a_{m+3/2}b_{m+1/2} - c_4^2 \right) \varphi_2 = 0, \\ \left( b_{m+1/2}a_{m+3/2} - c_4^2 \right) \varphi_3 &= 0, \quad \left( a_{m-1/2}b_{m-3/2} - c_2^2 \right) \varphi_4 = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Explicitly they read

$$\begin{aligned} \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{(1-2m)^2}{4r^2} - c_1^2 \right) \varphi_1 &= 0, \quad \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{(1-2m)^2}{4r^2} - c_2^2 \right) \varphi_1 = 0 \Rightarrow c_1^2 = c_2^2, \\ \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{(1+2m)^2}{4r^2} - c_1^2 \right) \varphi_2 &= 0, \quad \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{(1+2m)^2}{4r^2} - c_4^2 \right) \varphi_2 = 0 \Rightarrow c_1^2 = c_4^2, \end{aligned}$$

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{(3+2m)^2}{4r^2} - c_4^2 \right) \varphi_3 = 0, \quad \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{(3-2m)^2}{4r^2} - c_2^2 \right) \varphi_4 = 0.$$

Therefore, there exists only one independent parameter  $c_2^2 = c_4^2 = c_1^2$ ; and the above equations take the form

$$\begin{aligned} \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{(m-1/2)^2}{r^2} - c_1^2 \right) \varphi_1 = 0, \quad & \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{(m+1/2)^2}{r^2} - c_1^2 \right) \varphi_2 = 0, \\ \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{(m+3/2)^2}{r^2} - c_1^2 \right) \varphi_3 = 0, \quad & \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{(m-3/2)^2}{r^2} - c_1^2 \right) \varphi_4 = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

In the variable  $x = ic_1 r$ , they turn to a Bessel form

$$\begin{aligned} \left( \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} + 1 - \frac{(m-1/2)^2}{x^2} \right) \varphi_1 = 0, \quad & \varphi_1 = J_{\pm(m-1/2)}(x); \\ \left( \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} + 1 - \frac{(m+1/2)^2}{x^2} \right) \varphi_2 = 0, \quad & \varphi_2 = J_{\pm(m+1/2)}(x); \\ \left( \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} + 1 - \frac{(m+3/2)^2}{x^2} \right) \varphi_3 = 0, \quad & \varphi_3 = J_{\pm(m+3/2)}(x); \\ \left( \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} + 1 - \frac{(m-3/2)^2}{x^2} \right) \varphi_4 = 0, \quad & \varphi_4 = J_{\pm(m-3/2)}(x). \end{aligned} \quad (25)$$

This analysis can be readily extended to the case of the presence of the external magnetic field. In fact, we should make one formal change field  $m \Rightarrow m + eBr^2/2$  (let  $eB \Rightarrow B$ ); so we get operators

$$\begin{aligned} a_{\mu-1/2} &= \frac{d}{dr} + \frac{m-1/2 + Br^2/2}{r}, & a_{\mu+1/2} &= \frac{d}{dr} + \frac{m+1/2 + Br^2/2}{r}, \\ a_{\mu+3/2} &= \frac{d}{dr} + \frac{m+3/2 + Br^2/2}{r}, & b_{\mu-1/2} &= \frac{d}{dr} - \frac{m-1/2 + Br^2/2}{r}, \\ b_{\mu+1/2} &= \frac{d}{dr} - \frac{m+1/2 + Br^2/2}{r}, & b_{\mu-3/2} &= \frac{d}{dr} - \frac{m-3/2 + Br^2/2}{r}. \end{aligned} \quad (26)$$

Correspondingly, the equations (25) become more complicated; at this there arise the constraints

$$c_2^2 = c_1^2 + 2B, \quad c_4^2 = c_1^2 - 2B, \quad (27)$$

therefore we have four 2-nd-order equations (let  $c_1^2 = X$ ):

$$\begin{aligned} \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{4} B^2 r^2 - \frac{(m-1/2)^2}{r^2} - B(m+1/2) - X \right) \varphi_1 &= 0, \\ \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{4} B^2 r^2 - \frac{(m+1/2)^2}{r^2} - B(m-1/2) - X \right) \varphi_2 &= 0, \\ \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{4} B^2 r^2 - \frac{(m+3/2)^2}{r^2} - B(m-3/2) - X \right) \varphi_3 &= 0, \\ \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{4} B^2 r^2 - \frac{(m-3/2)^2}{r^2} - B(m+3/2) - X \right) \varphi_4 &= 0. \end{aligned} \quad (28)$$

They have one and the same structure. Let us consider in detail the last equation. In the variable  $r^2 = x$ , we get

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} - \frac{B^2}{16} - \frac{(m-3/2)^2}{4x^2} - \frac{B(m+3/2)+X}{4x} \right] \varphi_4 = 0,$$

which belongs to a hypergeometric type. In the vicinity of  $x = 0$  and  $x \rightarrow \infty$  their solutions behave

$$\varphi_4 = x^A, \quad A = \pm |m-3/2|/2; \quad \varphi_4 = e^{Dx}, \quad D = \pm B/4;$$

for the bound states we are to use positive values of  $A$  and (assuming that  $B > 0$ ) a negative value of  $D$ . General solutions are searched in the form  $\varphi_4 = x^A e^{Dx} F_4(x)$ ; further we derive

$$\left\{ x \frac{d^2}{dx^2} + [(2A+1) + 2Dx] \frac{d}{dx} - \frac{B(m+3/2)+X-4D(2A+1)}{4} \right\} F_4 = 0.$$

In the variable  $2Dx = -z$ , we obtain equation

$$z \frac{d^2}{dz^2} F_4 + (|m-3/2|+1-z) \frac{d}{dz} F_4 - \left( \frac{(m+3/2)+|m-3/2|+1}{2} + \frac{X}{2B} \right) F_4 = 0 \quad (29)$$

of hypergeometric type. The polynomial condition  $\alpha = -n_4$  leads to

$$\frac{(m+3/2)+|m-3/2|+1}{2} + n_4 + \frac{X}{2B} = 0, \quad n_4 = 0, 1, 2, \dots; \quad (30)$$

with notation

$$N_4 = \frac{(m+3/2)+|m-3/2|+1}{2} + n_4,$$

the quantization rule reads  $X = -2BN_4 < 0$ . Three remaining equations are studied similarly. Thus we get the following results

$$\begin{aligned} F_1, \quad N_1 &= \frac{(m+1/2)+|m-1/2|+1}{2} + n_1, \quad X = -2BN_1 < 0; \\ F_2, \quad N_2 &= \frac{(m-1/2)+|m+1/2|+1}{2} + n_2, \quad X = -2BN_2 < 0; \\ F_3, \quad N_3 &= \frac{(m-3/2)+|m+3/2|+1}{2} + n_3, \quad X = -2BN_3 < 0; \\ F_4, \quad N_4 &= \frac{(m+3/2)+|m-3/2|+1}{2} + n_4, \quad X = -2BN_4 < 0. \end{aligned} \quad (31)$$

**Solving the algebraic system for the case of a free particle.** For a free particle, we have one parameter,  $c_1, \dots, c_6 = C$ ; and the matrix form of the system is  $A\Phi = 0$ ,

$$A = \begin{vmatrix} -(2\sigma - ik) & C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C & -(2\sigma + ik) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(2\sigma - 3ik) & C & \sqrt{2}C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & -(2\sigma - ik) & 0 & \sqrt{2}C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}C & 0 & -(2\sigma - ik) & C & \sqrt{2}C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}C & C & -(2\sigma + ik) & 0 & \sqrt{2}C \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}C & 0 & -(2\sigma + ik) & C \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}C & C & -(2\sigma + 3ik) \end{vmatrix}.$$

The equation  $\det A = 0$  leads to  $(9C^2 - 9k^2 - 4\sigma^2)(C^2 - k^2 - 4\sigma^2)^3 = 0$ . The roots are as follows

$$\sigma_1 = -\frac{3}{2}\sqrt{C^2 - k^2}, \quad \sigma_2 = +\frac{3}{2}\sqrt{C^2 - k^2}, \quad \sigma_3 = -\frac{1}{2}\sqrt{C^2 - k^2}, \quad \sigma_4 = \frac{1}{2}\sqrt{C^2 - k^2}. \quad (32)$$

Solutions of the algebraic system at these four values can be readily found.

**Solving the algebraic system in the presence of the magnetic field.** In the presence of the magnetic field, taking in mind the identities  $c_3 = c_1$ ,  $c_6 = c_2 = \sqrt{X+2B}$ ,  $c_5 = c_4 = \sqrt{X-2B}$ ,  $c_1 = \sqrt{X}$ , in dimensionless quantities  $\sigma/\sqrt{X} = \Sigma$ ,  $k/\sqrt{X} = K$ ,  $B/X = b < 0$ ,  $X = -2BN < 0$ , we get

$$\begin{aligned} g_0 &= (2\Sigma - iK)f_0, \quad f_0 = (2\Sigma + iK)g_0, \\ \sqrt{2}\sqrt{1+2b}f_2 + \sqrt{1+2b}g_1 &= (2\Sigma - 3iK)f_1, \\ \sqrt{1+2b}f_1 + \sqrt{2}g_2 &= (2\Sigma - iK)g_1, \\ \sqrt{2}\sqrt{1+2b}f_1 + \sqrt{2}f_3 + g_2 &= (2\Sigma - iK)f_2, \\ f_2 + \sqrt{2}g_1 + \sqrt{2}\sqrt{1-2b}g_3 &= (2\Sigma + iK)g_2, \\ \sqrt{2}f_2 + \sqrt{1-2b}g_3 &= (2\Sigma + iK)f_3, \\ \sqrt{1-2b}f_3 + \sqrt{2}\sqrt{1-2b}g_2 &= (2\Sigma + 3iK)g_3. \end{aligned}$$

It can be presented in the matrix form  $A\Phi = 0$ ; from the equation  $\det A = 0$  we obtain

$$(K^2 + 4\Sigma^2 - 1)^2 \left( -36b^2 - 96ibK\Sigma + (K^2 + 4\Sigma^2 - 1)(9K^2 + 4\Sigma^2 - 9) \right) = 0; \quad (33)$$

this equation is factorized. The roots for the simple equation are

$$\Sigma_1 = +\frac{1}{2}\sqrt{1-K^2}, \quad \Sigma_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{1-K^2}, \quad \text{multiplicity 2.}$$

Let us transform the equation  $K^2 + 4\Sigma^2 - 1 = 0$  to initial parameters:

$$\Sigma = \frac{\sigma}{i\sqrt{2BN}}, \quad K = \frac{k}{i\sqrt{2BN}},$$

then we obtain  $2BN + k^2 + 4\sigma^2 = 0$ . In the variable  $Z = i\sigma$ , this equation reads  $2BN + k^2 - 4Z^2 = 0$ . The numerical study at two sets of parameters gives

$B = 1, k = 1, N = 1, \dots, 10$ ,	-0.866025,	0.866025,	-2.29129,	2.29129,
	-1.11803,	1.11803,	-3.20156,	3.20156,
	-1.32288,	1.32288,	-3.90512,	3.90512,
	-1.5,	1.5,	-4.5,	4.5,
	-1.65831,	1.65831,	-5.02494,	5.02494,
	-1.80278,	1.80278,	$B = 10, k = 1, N = 1, \dots, 10$ ,	-5.5,
	-1.93649,	1.93649,		5.5,
	-2.06155,	2.06155,		-5.93717,
	-2.17945,	2.17945,		5.93717,
	-2.29129,	2.29129;		-6.34429,

The second equation is

$$16\Sigma^4 + 40(K^2 - 1)\Sigma^2 - 96ibK\Sigma + 9((K^2 - 1)^2 - 4b^2) = 0;$$

its solutions are readily found in the analytical form. However, the numerical study will be more convenient. To this end let us turn back to initial variables; which give (it is convenient to use the new variable  $Z = i\sigma$ ):

$$16Z^4 - 40(2BN + k^2)Z^2 - 96BkZ + 9(2B(N-1) + k^2)(2B(N+1) + k^2) = 0. \quad (34)$$

The numerical example study gives

$B = 1, \quad k = 1, \quad N = 1, \dots, 10,$	-1.86147, -3.04142, -3.75612, -4.33759, -4.84306, -5.29713, -5.71326, -6.09982, -6.46245, -6.80517,	-1.5, -1.37523, -1.63742, -1.77134, -1.89911, -2.0206, -2.13628, -2.24675, -2.35254,	0.332551, 0.775656, 1.07434, 1.30616, 1.66928, 1.82126, 1.9603, 2.08921, 2.20996,	3.02892, 3.641, 4.18178, 4.66885, 5.1144, 5.52696, 5.9126, 6.27581, 6.61998, 6.94775.
---	---	--	---	---

**Conclusions.** The eigenvalue problem for the generalized helicity operator for a spin 3/2 particle in the presence of the uniform magnetic field has been solved. After separating the variables in the basis of cylindrical coordinates, the system of 16 differential equations in the variable  $r$  is derived. This system is solved with the use of the method of projective operators. All 16 variables were expressed in terms of only 4 distinguished functions, which are constructed in terms of confluent hypergeometric functions. Further the problem reduces to studying the linear algebraic system for 16 algebraic variables. In the end, we derive equations of the second and the fourth order, their roots determine the possible eigenvalues of the helicity operator. The developed method can be extended to the field with spin 2.

## References

1. Pauli W., Fierz M. Über relativistische Feldleichungen von Teilchen mit beliebigem Spin im elektromagnetischen Feld. Enz C. P., v. Meyenn K. (eds). *Wolfgang Pauli. Das Gewissen der Physik*. Vieweg+Teubner Verlag, 1988, S. 484–490 (in German). [https://doi.org/10.1007/978-3-322-90270-2\\_45](https://doi.org/10.1007/978-3-322-90270-2_45)
2. Fierz M., Pauli W. On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 1939, vol. 173, pp. 211–232. <https://doi.org/10.1098/rspa.1939.0140>
3. Rarita W., Schwinger J. On a theory of particles with half-integral spin. *Physical Review*, 1941, vol. 60, no. 1, pp. 61–64. <https://doi.org/10.1103/physrev.60.61>
4. Ginzburg V. L. To the theory of particles of spin 3/2. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 1942, vol. 12, pp. 425–442 (in Russian).
5. Fradkin E. S. To the theory of particles with higher spins. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 1950, vol. 20, no. 1, pp. 27–38 (in Russian).
6. Red'kov V. M. *Particle fields in the Riemann space and the Lorentz group*. Minsk, Belaruskaya navuka Publ., 2009. 486 p. (in Russian).
7. Ivashkevich A. V., Ovsyuk E. M., Red'kov V. M. Zero mass field with the spin 3/2: solutions of the wave equation and the helicity operator. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2019, vol. 55, no. 3, pp. 338–354 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-3-338-354>
8. Ivashkevich A. V., Ovsyuk E. M., Kisel V. V., Red'kov V. M. Spherical solutions of the wave equation for a spin 3/2 particle. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2019, vol. 63, no. 3, pp. 282–290 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-8323-2019-63-3-282-290>
9. Ivashkevich A. V., Voynova Ya. A., Ovsyuk E. M., Kisel V. V., Red'kov V. M. Spin 3/2 particle: Pauli – Fierz theory, non-relativistic approximation. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2020, vol. 56, no. 3, pp. 335–349. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-3-335-349>
10. Gronskiy V. K., Fedorov F. I. Magnetic properties of a particle with spin 3/2. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 1960, vol. 4, no. 7, pp. 278–283 (in Russian).

### Information about the authors

**Alina V. Ivashkevich** – Researcher, B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (68-2, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: ivashkevich.alina@yandex.by

**Viktor V. Red'kov** – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Chief Researcher of the Center for Fundamental Interactions and Astrophysics, B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (68-2, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: v.redkov@ifanbel.bas-net.by

### Информация об авторах

**Ивашкевич Алина Валентиновна** – научный сотрудник, Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси (пр. Независимости, 68-2, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: ivashkevich.alina@yandex.by

**Виктор Михайлович Редьков** – доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Центра фундаментальных взаимодействий и астрофизики, Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси (пр. Независимости, 68-2, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: v.redkov@ifanbel.bas-net.by

ISSN 1561-2430 (Print)

ISSN 2524-2415 (Online)

UDC 539.1

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2025-61-4-320-329>

Received 22.09.2025

Поступила в редакцию 22.09.2025

**Dmitry N. Grigoriev<sup>1,2</sup>, Vasily F. Kazanin<sup>1,3</sup>, Vyacheslav L. Ivanov<sup>1</sup>,  
Dzmitry V. Shoukavy<sup>4</sup> on behalf of the CMD-3 Collaboration**

<sup>1</sup>*Budker Institute of Nuclear Physics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences,  
Novosibirsk, Russian Federation*

<sup>2</sup>*Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russian Federation*

<sup>3</sup>*Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation*

<sup>4</sup>*B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus*

## **METHODOLOGY FOR MEASURING THE TRANSITION ELECTROMAGNETIC FORM FACTOR IN THE CONVERSION DECAY $\omega \rightarrow \pi^0 e^+ e^-$ WITH THE CMD-3 DETECTOR**

**Abstract.** This paper presents an improved methodology for measuring the transition electromagnetic form factor in the conversion decay  $\omega \rightarrow \pi^0 e^+ e^-$  using data collected by the CMD-3 detector at the VEPP-2000  $e^+ e^-$  collider. The key improvement involves the application of a kinematic reconstruction technique under two distinct hypotheses: the signal hypothesis ( $\omega \rightarrow \pi^0 e^+ e^-$ ) and the dominant background hypothesis ( $\omega \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$ ). This approach allows for a powerful suppression of  $3\pi$  background, virtually eliminating it, and significantly narrows the invariant mass distribution of two photons from  $\pi^0$  decay in signal events. The refined  $\pi^0$  mass peak enhances the separation of the signal process from the remaining QED background ( $e^+ e^- \rightarrow e^+ e^- \gamma\gamma$ ). To demonstrate the effectiveness of the method, it was applied to a subset of the data with an integrated luminosity of  $13 \text{ pb}^{-1}$ , accumulated near  $\omega$ -meson mass. The analysis shows a significant improvement in the precision of the form factor  $F(q)$  measurement. The developed methodology paves the way for a more precise determination of the form factor slope parameter  $\Lambda_\omega^{-2}$  when applied to the full dataset, which has an integrated luminosity of approximately  $50 \text{ pb}^{-1}$ .

**Keywords:** conversion decay,  $\omega$ -meson, transition electromagnetic form factor, background subtraction, CMD-3 detector

**For citation.** Grigoriev D. N., Kazanin V. F., Ivanov V. L., Shoukavy D. V. on behalf of the CMD-3 Collaboration. Methodology for measuring the transition electromagnetic form factor in the conversion decay  $\omega \rightarrow \pi^0 e^+ e^-$  with the CMD-3 detector. *Vestsi Natsyyanl'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2025, vol. 61, no. 4, pp. 320–329. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2025-61-4-320-329>

**Д. Н. Григорьев<sup>1,2</sup>, В. Ф. Казанин<sup>1,3</sup>, В. Л. Иванов<sup>1</sup>, Д. В. Шёлковый<sup>4</sup> от имени КМД-3 коллаборации**

<sup>1</sup>*Институт ядерной физики имени Г. И. Будкера Сибирского отделения Российской академии наук,  
Новосибирск, Российская Федерация*

<sup>2</sup>*Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Российская Федерация*

<sup>3</sup>*Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Российская Федерация*

<sup>4</sup>*Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларусь,  
Минск, Республика Беларусь*

## **МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЯ ПЕРЕХОДНОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ФОРМ-ФАКТОРА В КОНВЕРСИОННОМ РАСПАДЕ $\omega \rightarrow \pi^0 e^+ e^-$ НА ДЕТЕКТОРЕ КМД-3**

**Аннотация.** Представлена усовершенствованная методика измерения переходного электромагнитного форм-фактора в конверсионном распаде  $\omega \rightarrow \pi^0 e^+ e^-$  с использованием данных, накопленных детектором КМД-3 на  $e^+ e^-$ -коллайдере ВЭПП-2000. Ключевое нововведение метода заключается в применении метода кинематической реконструкции в рамках двух различных гипотез: для сигнального канала ( $\omega \rightarrow \pi^0 e^+ e^-$ ) и основного фонового процесса ( $\omega \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$ ). Данный подход позволяет эффективно подавлять фон от  $3\pi$  событий, практически полностью его устранивая, а также приводит к существенному сужению распределения инвариантной массы двух фотонов от распада  $\pi^0$  в сигнальных событиях. Более узкий пик массы  $\pi^0$  значительно улучшает разделение сигнала от оставшегося квантово-электродинамического фона ( $e^+ e^- \rightarrow e^+ e^- \gamma\gamma$ ). Для демонстрации эффективности методика была применена к части данных с интегральной светимостью  $13 \text{ pb}^{-1}$ , накопленной в области массы  $\omega$ -мезона. Проведенный анализ свидетельствует о существенном повышении точности измерения форм-фактора  $F(q)$ . Разработанная методика позволяет рассчитывать на более точное определение параметра наклона форм-фактора  $\Lambda_\omega^{-2}$  после применения к полному массиву данных с интегральной светимостью около  $50 \text{ pb}^{-1}$ .

**Ключевые слова:** конверсионный распад,  $\omega$ -мезон, переходный электромагнитный форм-фактор, подавление фона, детектор КМД-3

**Для цитирования.** Методика измерения переходного электромагнитного форм-фактора в конверсионном распаде  $\omega \rightarrow \pi^0 e^+ e^-$  на детекторе КМД-3 / Д. Н. Григорьев, В. Ф. Казанин, В. Л. Иванов, Д. В. Шёлковый от имени КМД-3 коллаборации // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. – 2025. – Т. 61, № 4. – С. 320–329. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2025-61-4-320-329>

**Introduction.** The study of transition electromagnetic form factors in conversion decays provides crucial insight into the electromagnetic structure of light mesons. These form factors,  $F(q)$ , describe the deviation of the decay amplitude from that of a point-like particle and are studied as a function of the squared four-momentum transfer  $q^2$ , which is measured via the invariant mass of the lepton-antilepton pair born from a virtual photon, so that  $q = m(l^+ l^-)$ . In the low-energy region, the experimental data on the properties of light mesons are generally well described by the Vector Dominance Model (VDM) [1].

One of the most significant potential deviations from VDM predictions was reported for the conversion decay ( $\omega \rightarrow \pi^0 e^+ e^-$ ). An initial indication was presented in [2], and a later measurement by the NA60 collaboration [3] reported a discrepancy with VDM exceeding 4 standard deviations, primarily at high momentum transfers. Interestingly, a good agreement with VDM was observed in the similar process  $\eta \rightarrow \pi^0 \mu^+ \mu^-$  [3]. Conversely, a result from the A2 collaboration at MAMI for ( $\omega \rightarrow \pi^0 e^+ e^-$ ) decay [4] was closer to the VDM prediction, highlighting the need for further independent studies with different experimental setups and systematic uncertainties.

This work is performed at the VEPP-2000  $e^+ e^-$  collider [5] with the CMD-3 detector [6]. The unique round beam technique developed at BINP has allowed VEPP-2000 to achieve record luminosity in the center-of-mass energy region up to 2 GeV. By the end of 2024 data-taking period, the CMD-3 detector had collected an integrated luminosity of approximately  $50 \text{ pb}^{-1}$  in the vicinity of  $\omega$ -meson mass, significantly surpassing the statistics of all previous experiments in this energy range.

Our previous preliminary analysis [7], based on  $13 \text{ pb}^{-1}$ , utilized machine learning techniques, specifically Boosted Decision Trees (BDT), to suppress the dominant  $\omega \rightarrow \pi^0 e^+ e^- (3\pi)$  background by exploiting the longitudinal segmentation of the CMD-3 liquid xenon (LXe) calorimeter for  $e/\pi$  separation [8]. The result, a form factor slope parameter  $\Lambda_\omega^{-2} = 1.0 \pm 0.4 \text{ (GeV/c}^2\text{)}^{-2}$ , was consistent with VDM but limited by statistical and systematic uncertainties. A significant remaining background, especially at large track opening angles (high  $q$ ), originated from QED processes ( $e^+ e^- \rightarrow e^+ e^- \gamma\gamma$ ), which were suppressed by a cut on the spatial angle between the  $e^+ e^-$  pair and the most energetic photon and subsequently subtracted using fits to the diphoton invariant mass spectrum.

This paper describes a refined methodology designed to overcome these limitations. The core improvement is the implementation of a kinematic reconstruction procedure under two explicit hypotheses: the signal hypothesis ( $2\gamma$  from  $\pi^0$  and  $e^+ e^-$ ) and  $3\pi$  background hypothesis ( $\pi^+, \pi^-, \pi^0 \rightarrow 2\gamma$ ). This technique provides a more powerful suppression of  $3\pi$  background and, crucially, yields a much narrower and more precisely reconstructed invariant mass distribution for  $\pi^0$  candidate in signal events. The enhanced resolution of  $\pi^0$  peak is instrumental in cleanly separating the signal from the QED background, where two photons do not necessarily originate from a  $\pi^0$  decay and thus exhibit a broad invariant mass distribution. This methodological advance, applied to the full  $50 \text{ pb}^{-1}$  dataset, allows for a more accurate and precise measurement of the transition form factor across the entire physically accessible  $q$  range.

**Event Selection.** The response of the CMD-3 detector to both signal and background processes was simulated using a detailed GEANT4-based Monte Carlo (MC) simulation. The generator of signal events takes into account initial state radiation.

Events for the study of the  $\omega \rightarrow \pi^0 e^+ e^-$  decay were selected with the following criteria, designed to identify the final state with two oppositely charged tracks and at least two photons:

- two tracks with zero total charge, originating from the beam interaction region;
- each track must have at least 10 hits in the drift chamber (DC);
- the transverse momentum of each track must be greater than  $40 \text{ MeV}/c$  to avoid particles making multiple loops in the DC and ensure reliable reconstruction;
- the polar angle of tracks is restricted to the range of  $\pi/2 - 0.85 < \pi/2 + 0.85 \text{ rad}$  to ensure they pass through the regions of high DC efficiency;

– the distance from the track vertex to the beam interaction point must be less than 1 cm in the radial direction and less than 8 cm along the beam axis.

– the tracks must be non-collinear in the  $r - \phi$  plane:  $|\pi - |\phi_1 - \phi_2|| > 0.15$  rad.

Photon candidates are defined as clusters in the electromagnetic calorimeters with energies greater than 30 MeV and with polar angle in the range of  $0.5 < \theta < \pi - 0.5$ . To suppress spurious clusters from interactions of charged particles in the calorimeters, the spatial angle between a photon and the extrapolated entry point of any charged track into the calorimeter must be greater than 0.4 rad.

To further isolate the signal mostly from QED events, several kinematic criteria are applied:

– the angle between two selected photons is required to be between 0.6 and 1.5 rad, which is typical for photons from a  $\pi^0$  decay in the experiment;

– the spatial angle between  $e^+e^-$  pair direction and most energetic photon  $\Psi(e^+e^-, \gamma_0) < 3.05$  rad.

This selection strategy is based on the kinematic features of the signal process and effectively suppresses a significant portion of the background while preserving the signal efficiency. A detailed description of the selection criteria can be found in [9].

**Background Suppression.** The primary challenge in isolating the rare conversion decay  $\omega \rightarrow \pi^0 e^+ e^-$  is the overwhelming background from the dominant decay channel  $\omega \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$  ( $3\pi$ ), which has a branching fraction approximately three orders of magnitude larger. The kinematic signature of the signal decay is characterized by a low-mass  $e^+e^-$  pair, which often results in a small opening angle between the charged tracks. Consequently, a powerful cut on the track opening angle  $\Delta\psi < 1.0$  rad was traditionally applied to suppress  $3\pi$  background, where pions have a significantly larger average opening angle.

However, this approach inherently limits the analysis to the low  $q$  region. The most interesting physics, potentially revealing deviations from the Vector Dominance Model, is expected at high  $q$  values, which correspond to events with a large invariant mass of the  $e^+e^-$  pair and, consequently, a large opening angle between the tracks. Therefore, an alternative method for suppressing  $3\pi$  background across the entire angular range is required.

The first step in our background rejection strategy utilizes the well-established technique of particle identification based on the analysis of energy deposition patterns in the longitudinally segmented liquid xenon (LXe) calorimeter. The distinct electromagnetic showers produced by electrons and positrons differ markedly from the hadronic showers produced by pions. A Boosted Decision Tree (BDT) classifier was trained using the energy deposition in all 12 cathode gaps of the LXe calorimeter, the total energy deposition, and the energy deposition in the CsI calorimeter. The output of this classifier, BDT ( $e, \pi$ ) provides powerful separation between electrons and pions, as it is described in detail in [8]. The distribution of this classifier for both data and simulation is shown in Fig. 1. A selection criterion on this parameter effectively suppresses a significant fraction of  $3\pi$  background.

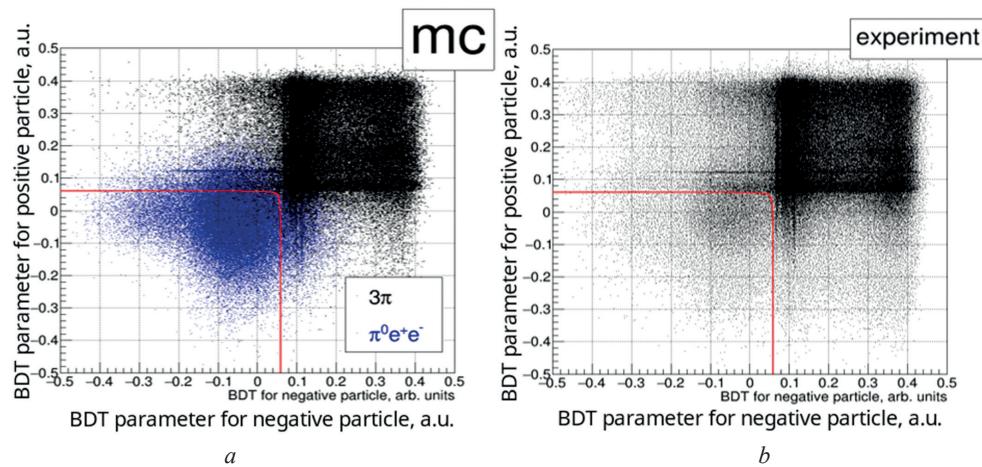


Fig. 1. Distribution of the BDT ( $e, \pi$ ) classifier output for charged tracks in selected events. The simulation (a) shows the separation between signal  $e^{\pm}$  (blue) and background  $\pi^{\pm}$  from  $\omega \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$  (black). The distribution for experimental data (b) is overlaid with the selection cut applied

Another source of background is the radiative decay  $\omega \rightarrow \pi^0\gamma$  with subsequent conversion of the monochromatic photon into an  $e^+e^-$  pair in the detector material before the sensitive volume. The kinematics of this background is nearly identical to those of the signal process. The resolution of the drift chamber is insufficient to reliably distinguish the conversion vertex. The contribution of this background was estimated from a dedicated data-driven analysis using events of quantum electrodynamics (QED) at beam energies of 680 and 750 MeV, where the  $\omega$ -meson production cross-section is negligible, and was found to be  $48 \pm 1$  % (syst.) relative to the signal [9]. The vast majority of this type of events has  $q < 50$  MeV/c<sup>2</sup>. This contribution was statistically subtracted in the analysis.

Despite the effectiveness of the BDT-based selection, the remaining  $3\pi$  background and the unexpectedly large QED background ( $e^+e^- \rightarrow e^+e^-\gamma\gamma$ ) at large opening angles ( $\Delta\psi > 2.3$  rad) remained significant limitations in our previous analysis, preventing the use of the full angular range.

To further suppress the background from the  $\omega \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$  ( $3\pi$ ) decay, we applied a kinematic reconstruction method. Unlike traditional approaches, we did not apply a strict constraint on the invariant mass of two photons during this procedure. This allowed us to preserve statistics and use this variable later for effective separation between signal events and QED background.

To enhance the selection power, the kinematic reconstruction was performed under two alternative hypotheses. The first hypothesis assumes that the final state consists of two photons and an electron-positron pair (the signal hypothesis). The second hypothesis assumes that the final state contains two photons and two charged pions (the background hypothesis).

In events with more than two reconstructed photons, the pair that yielded the smallest  $\chi^2$  value in the kinematic fit was selected for the analysis. This approach automatically identifies the most likely photon pair from the  $\pi^0$  decay and minimizes the contribution from accidental combinatorial backgrounds.

The kinematic reconstruction was performed using a dedicated software package developed by the CMD-3 collaboration and described in [10]. This package efficiently varies the measured particle parameters (momenta, angles, cluster energies) within their errors to achieve the best fulfillment of conservation laws with minimal  $\chi^2$ .

The distributions of  $\chi^2$  for the signal and background hypotheses after the full event selection show clear separation (Fig. 2). It is markable that the good agreement between MC and data there is not only for the halo of the distributions but also for long tails as well. Events for which the reconstruction under the signal hypothesis provides a better description ( $\chi^2_{sig} < \chi^2_{bkg}$ ) are retained for further analysis. Namely, the selection of signal events requires the conditions for successful kinematic reconstruction in both hypotheses and the following criteria:  $\chi^2_{sig} < 50$  and  $\chi^2_{bkg} > 100$ . This method provides an additional order of magnitude suppression of the  $\omega \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$  background, effectively eliminating this background source.

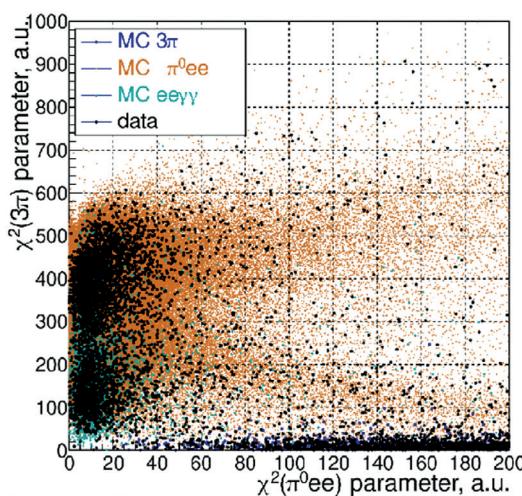


Fig. 2. 2D distribution of  $\chi^2_{sig}$  from the kinematic reconstruction under the signal vs  $\chi^2_{bkg}$  from the kinematic reconstruction under background. Blue dots correspond to  $3\pi$  events, cyan dots correspond to QED events, orange dots correspond to signal events, with black dots the experimental data is shown

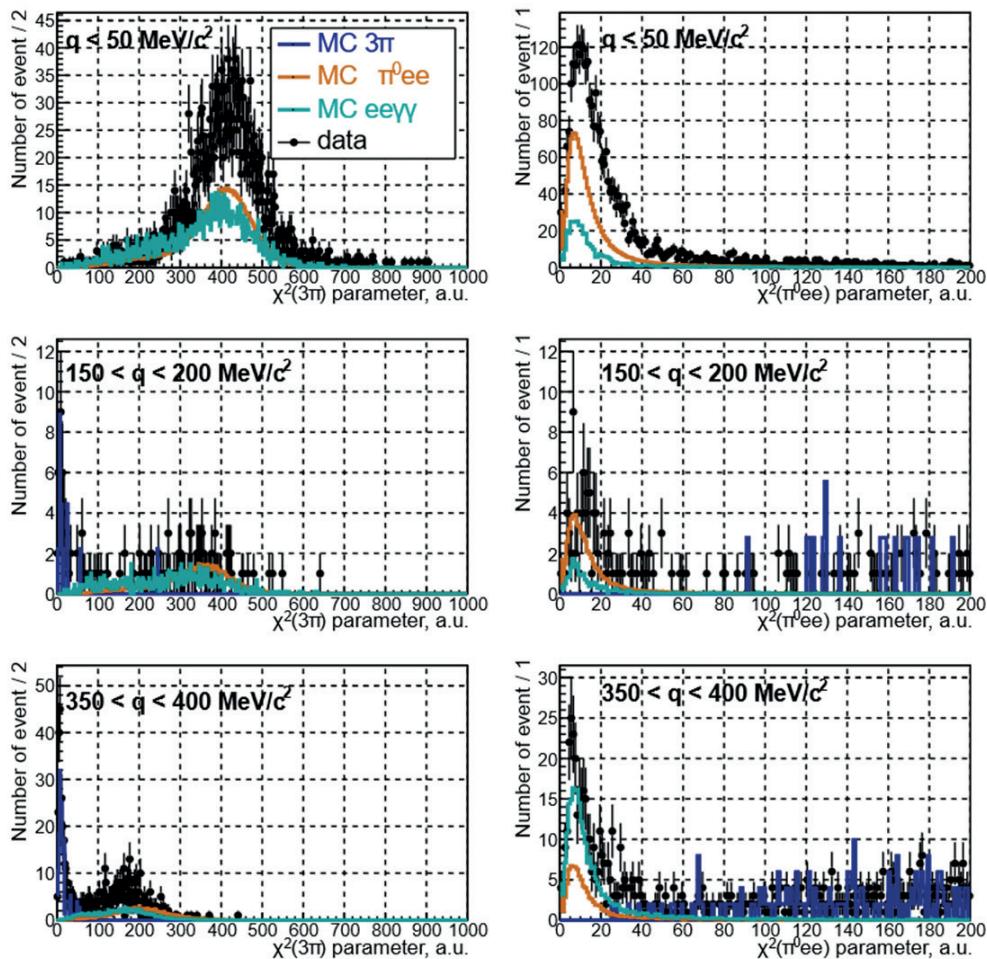


Fig. 3. Distributions of  $\chi^2$  under the background hypothesis ( $\chi^2_{bg}$  are left plots) and under the signal one ( $\chi^2_{sig}$  are right plots) for events passing the full selection (excluding the final  $\chi^2$  cut) in three intervals of the transferred momentum  $q$ :  $q < 50 \text{ MeV}/c^2$  (top),  $150 < q < 200 \text{ MeV}/c^2$  (middle), and  $350 < q < 400 \text{ MeV}/c^2$  (bottom). The distributions from signal simulation (orange),  $3\pi$  background simulation (blue), QED background simulation (cyan), and experimental data (black points) are compared. The plots demonstrate good agreement between data and the sum of MC distributions (signal + two backgrounds) for both kinematic reconstruction hypotheses and all  $q$ -intervals, validating the simulation

To further validate the performance of the kinematic reconstruction, a detailed study of the  $\chi^2$  distributions was performed on both simulated and experimental events. Events passing all selection criteria, except for the final  $\chi^2$  requirements, were divided into intervals of the transferred momentum  $q$ . In each interval, distributions of the  $\chi^2$  value under both hypothesis were examined, as these quantities exhibit a significant dependence on  $q$ . The distributions from signal Monte Carlo simulation,  $3\pi$  background simulation, and QED background simulation were compared to the distribution from experimental data. As it is shown in Fig. 3, which presents  $\chi^2_{bg}$  at the left column and  $\chi^2_{sig}$  at the right column distributions for three representative  $q$  intervals (top to bottom:  $q < 50 \text{ MeV}/c^2$ ,  $150 < q < 200 \text{ MeV}/c^2$ , and  $350 < q < 400 \text{ MeV}/c^2$ ), excellent agreement is observed between the simulation and data across all intervals. This consistency provides strong confidence that the simulation accurately describes the behavior of the experimental events.

This powerful suppression of  $3\pi$  background means that the dominant remaining background originates from the QED process  $e^+e^- \rightarrow e^+e^-\gamma\gamma$ , which has an identical final state to the signal. To confirm this,  $m_{\gamma\gamma}$  distribution from data at the beam energy of 360 MeV, which is below the  $\omega$ -meson mass and thus free from resonant contributions was compared to a pure QED simulation. As it is shown in Fig. 4, the good agreement between two distributions demonstrates that the remaining background is indeed dominated by QED events.

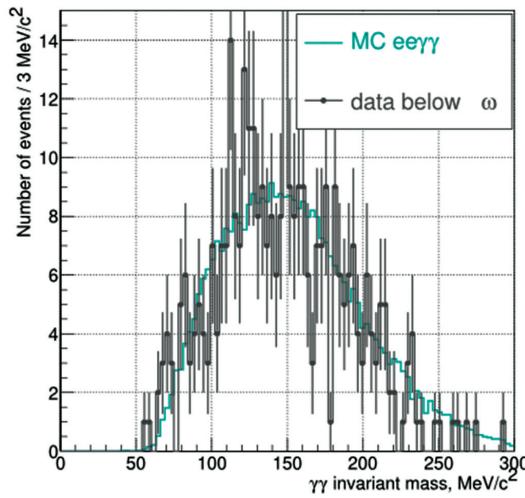


Fig. 4. Comparison of two-photon invariant mass distribution from experimental data (points) and simulated QED events (histogram) at the center-of-mass energy of 360 MeV. The agreement confirms that the background after all selections is dominated by the QED process  $e^+e^- \rightarrow e^+e^-\gamma\gamma$

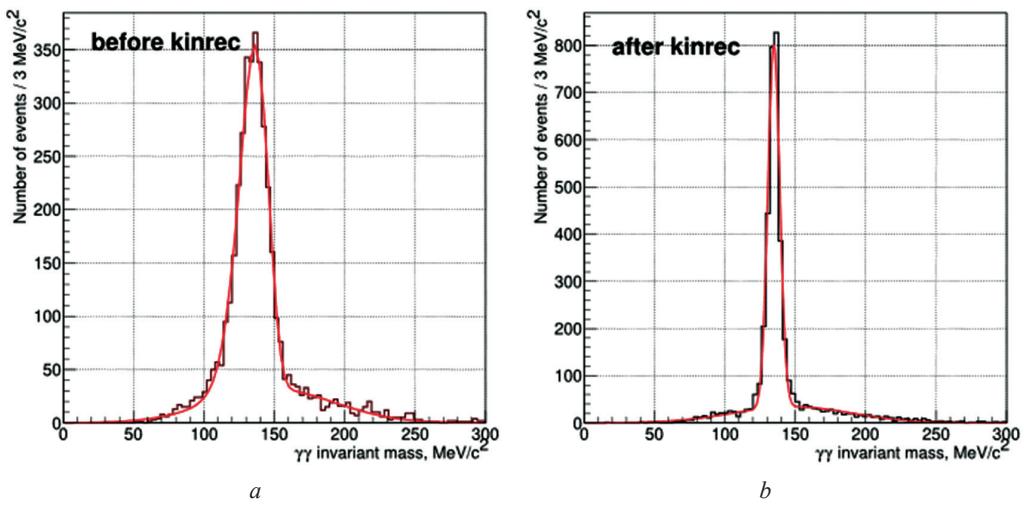


Fig. 5.  $m_{\gamma\gamma}$  distribution over all selected events for experimental data before the kinematic reconstruction procedure (a) and after it (b). Red lines show the fit of distributions

Subsequent analysis of two-photon invariant mass provides the primary tool for separating the signal from the non-resonant QED background ( $e^+e^- \rightarrow e^+e^-\gamma\gamma$ ). It is important to note that the kinematic reconstruction technique does not directly suppress this particular QED background, as the final state contains  $e^+e^-$  pair as the signal. However, by constraining the event kinematics under the signal hypothesis, the reconstruction significantly narrows the invariant mass distribution ( $m_{\gamma\gamma}$ ) for the photon pairs originating from a true  $\pi^0$  decay. This results in a much sharper peak at  $\pi^0$  mass for signal events, as it is shown in Fig. 5, decreasing the width of the peak from 10.3 to 4.2 MeV. In contrast, the  $m_{\gamma\gamma}$  distribution for QED background events remains smooth and featureless, as the photons are not from  $\pi^0$  decay. The enhanced contrast between the narrow signal peak and the smooth background distribution substantially improves the statistical separation and allows for a more precise extraction of the signal yield through fitting procedures in each  $q$  interval.

**Results.** The analysis methodology described above was applied to the same dataset used in our previous work [7] to enable a direct comparison of results. After applying all selection criteria, the accepted events were divided into intervals of  $q$  value. For each  $q$  interval, the invariant mass spectrum of two

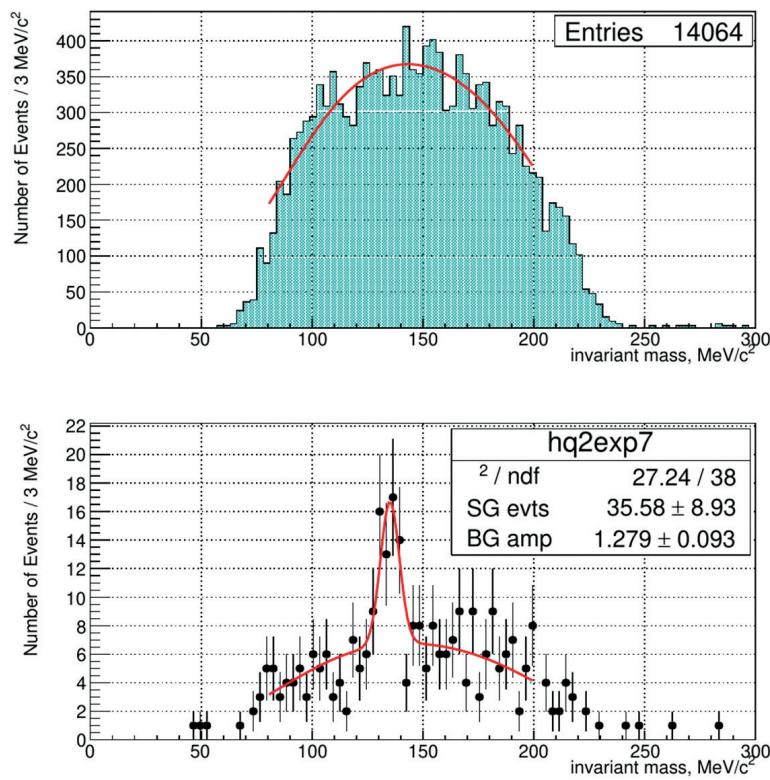


Fig. 6. Invariant mass distribution of two photons for events in  $q$  interval of  $350 - 400 \text{ MeV}/c^2$ . On the top plot is the QED background component from simulation. Bottom plot represent experimental data, the solid curve shows the total fit. The background shape is taken from simulation

photons was constructed. This distribution was fitted with a sum of two components: a narrow Gaussian peak centered at  $\pi^0$  mass for signal events, and a smooth polynomial function for the QED background ( $e^+e^- \rightarrow e^+e^-\gamma\gamma$ ). The QED background becomes dominant after suppressing  $3\pi$  events, making the invariant mass analysis the primary tool for signal extraction.

Figure 6 shows the invariant mass distribution of two photons for events in  $q$  interval of  $350 - 400 \text{ MeV}/c^2$ , comparing data and simulation. The background shape was determined from simulation and fixed during the fit to experimental data. The number of signal events was determined by integrating the fitted Gaussian peak in  $\pi^0$  mass region (Fig. 6).

The number of signal events extracted in each  $q$  interval is presented in Table. The statistical errors were calculated from the fit uncertainties.

#### Number of signal events in different $q$ intervals

$q$ interval ( $\text{MeV}/c^2$ )	$N_{sig} \pm \Delta N_{sig}$ (stat.)	Form factor, $F(q)$
0–50	$1257.8 \pm 59.5$	$1.02 \pm 0.06$
50–100	$155.5 \pm 12.8$	$1.03 \pm 0.09$
100–150	$96.7 \pm 9.9$	$1.17 \pm 0.12$
150–200	$55.9 \pm 7.9$	$0.99 \pm 0.14$
200–250	$47.6 \pm 7.3$	$1.01 \pm 0.15$
250–300	$40.3 \pm 7.0$	$1.16 \pm 0.20$
300–350	$38.2 \pm 8.1$	$1.71 \pm 0.36$
350–400	$35.6 \pm 8.9$	$3.11 \pm 0.78$
450–500	$0.6 \pm 3.1$	$3.57 \pm 18.49$

To determine the transition electromagnetic form factor, the number of signal events was normalized using the following expression from [1]:

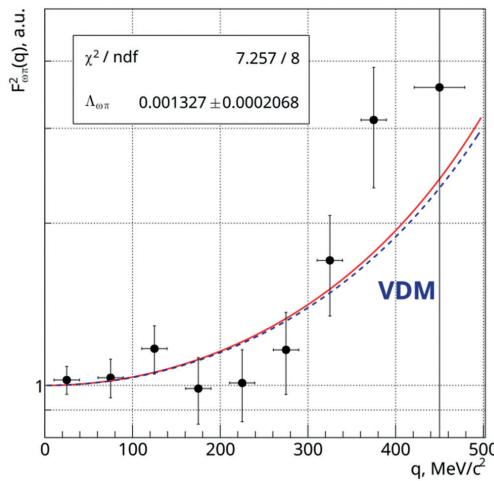


Fig. 7. The squared transition form factor as a function of  $e^+e^-$  pair invariant mass. Points represent measured values with statistical errors, the solid curve shows the fit with pole parameterization, and the dashed curve represents the Vector Dominance Model prediction

$$\frac{dN}{dq} = 2qA \frac{\alpha}{3\pi} \left(1 - \frac{4m_e^2}{q^2}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{2m_e^2}{q^2}\right) \frac{1}{q^2} \times \\ \times \left[ \left(1 + \frac{q^2}{(m_\omega^2 - m_\pi^2)^2}\right)^2 - \frac{4m_\omega^2 q^2}{(m_\omega^2 - m_\pi^2)^2} \right]^{3/2} |F_{\omega\pi}(q^2)|^2, \quad (1)$$

where  $A$  is a normalization constant;  $\alpha$  is the fine structure constant;  $m_e$ ,  $m_\omega$ , and  $m_\pi$  are the masses of electron,  $\omega$ -meson, and  $\pi^0$ -meson, respectively;  $F_{\omega\pi}(q^2)$  is the transition form factor.

The resulting values of the transition form factor as a function of  $e^+e^-$  pair invariant mass are shown in Fig. 7. Vertical error bars represent statistical uncertainties, while horizontal bars indicate the bin widths. The distribution was fitted with the pole parameterization:

$$F_{\omega\pi}(q^2) = \left(1 - \frac{q^2}{\Lambda_{\omega\pi}^2}\right)^{-1}. \quad (2)$$

From this fit, we obtained the slope parameter  $\Lambda_{\omega\pi}^{-2} = 1.3 \pm 0.2 \text{ (GeV/c}^2)^{-2}$ , which is consistent with the Vector Dominance Model prediction. The improved analysis technique has reduced systematic uncertainties associated with the background subtraction, particularly from  $3\pi$  channel.

**Summary.** In summary, we have developed and demonstrated a novel methodology for the analysis of the conversion decay  $\omega \rightarrow \pi^0 e^+ e^-$ . The core of this approach is the application of a kinematic reconstruction procedure under two exclusive hypotheses, which provides a powerful suppression of the dominant  $\omega \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$  background by an additional order of magnitude, virtually eliminating it across the entire physical range of the momentum transfer  $q$ .

After this suppression, the QED process  $e^+e^- \rightarrow e^+e^- \gamma\gamma$  becomes the dominant background source. Its kinematics is identical to the signal, making its rejection without severe loss of signal efficiency impossible. The key to separating the signal from this irreducible background lies in the analysis of two-photon invariant mass spectrum. The kinematic reconstruction under the signal hypothesis drastically improves the resolution of  $\pi^0$  peak, enhancing the contrast between the narrow signal distribution and the smooth QED background. This, in turn, enables a more precise statistical extraction of the signal yield through fitting procedures in each  $q$  bin, a task that requires a large dataset for sufficient precision.

The result for the form factor slope parameter  $\Lambda_{\omega}^{-2}$  presented herein, based on a partial dataset of  $13 \text{ pb}^{-1}$ , serves primarily to illustrate the effectiveness of the method and should be considered preliminary. The application of this refined methodology to the full CMD-3 dataset of approximately  $50 \text{ pb}^{-1}$  will allow for a significantly more precise measurement of the transition form factor  $F(q)$  over the entire  $q^2$  range.

**Acknowledgement.** The authors express their sincere gratitude to the VEPP-2000 operation team for maintaining the superb performance of the collider throughout the data-taking period. We also extend our heartfelt thanks to all members of the CMD-3 collaboration for their essential contribution, unwavering support, and stimulating discussions, which made this study possible.

The investigation was conducted with financial support of the grant of Russian Science Foundation no. 23-42-10025 (<https://rscf.ru/project/23-42-10025/>) and Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research no. Ф23РНФ-118.

**Благодарности.** Авторы выражают искреннюю благодарность коллективу ВЭПП-2000 за безупречную работу коллайдера в период набора данных. Мы также признательны всем членам коллаборации КМД-3 за их существенный вклад, постоянную поддержку и плодотворные обсуждения, без которых данное исследование было бы невозможным.

Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда № 23-42-10025 (<https://rscf.ru/project/23-42-10025/>) и Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований № Ф23РНФ-118.

## References

1. Landsberg L. G. Electromagnetic leptonic decays and structure of light mesons. *Soviet Physics Uspekhi*, 1985, vol. 28, art. ID 435. <https://doi.org/10.1070/pu1985v028n06abeh003830>
2. Dzhelyadin R. I., Golovkin S. V., Konstantinov A. S., Konstantinov V. F., Kubarovski V. P., Landsberg L. G., Mukhin V. A. [et al.]. Study of the electromagnetic transition form-factor in  $\omega \rightarrow \pi^0 \mu^+ \mu^-$  decay. *Physics Letters B*, 1981, vol. 102, no. 4, pp. 296–298. [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(81\)90879-0](https://doi.org/10.1016/0370-2693(81)90879-0)
3. Arnaldi R., Banicz K., Borer K., Castor J., Chaurand B., Chen W., Cicalò C. [et al.] (NA60 Collaboration). Precision study of the  $\eta \rightarrow \mu^+ \mu^- \gamma$  and  $\omega \rightarrow \mu^+ \mu^- \pi^0$  electromagnetic transition form-factors and of the  $\rho \rightarrow \mu^+ \mu^-$  line shape in NA60. *Physics Letters B*, 2016, vol. 757, pp. 437–444. <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2016.04.013>
4. Adlarson P., Afzal F., Aguar-Bartolomé P., Ahmed Z., Annand J. R. M., Arends H. J., Bantawa K. [et al.]. Measurement of the  $\omega \rightarrow \pi^0 e^+ e^-$  and  $\eta \rightarrow e^+ e^- \gamma$  Dalitz decays with the A2 setup at the Mainz Microtron. *Physical Review C*, 2017, vol. 95, art. ID 035208. <https://doi.org/10.1103/physrevc.95.035208>
5. Timoshenko M. V., Borin V. M., Zharinov Yu. M., Zemlyansky I. M., Kasaev A. S., Karpov G. V., Kirpotin A. N. [et al.]. Status of Vepp-2000 BINP Electron–Positron Collider. *Physics of Particles and Nuclei Letters*, 2020, vol. 17, pp. 419–424. <https://doi.org/10.1134/s1547477120040457>
6. Khazin B. I. Physics and Detectors for VEPP-2000. *Nuclear Physics B – Proceedings Supplements*, 2008, vol. 181–182, pp. 376–380. <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysbps.2008.09.068>
7. Grigoriev D. N., Vasilevskaya D. S., Ivanov V. L., Kazanin V. F., Kutsenko B. D., Shoukova D. V. Preliminary result of studying the transition electromagnetic form factor in the conversion decay  $\omega \rightarrow \pi^0 e^+ e^-$  on the CMD-3 detector. *Physics of Particles and Nuclei*, 2025, vol. 56, pp. 736–742. <https://doi.org/10.1134/s1063779624702216>
8. Ivanov V. L., Fedotovich G. V., Akhmetshin R. R., Amirkhanov A. N., Anisenkov A. V., Aulchenko V. M., Bashtovoy N. S. [et al.] (CMD-3 Collaboration). Charged particle identification with the liquid xenon calorimeter of the CMD-3 detector. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, 2021, vol. 1015, art. ID 165761. <https://doi.org/10.1016/j.nima.2021.165761>
9. Amirkhanov A. N., Anisenkov A. V., Aulchenko V. M., Akhmetshin R. R., Bashtovoy N. S., Berkaev D. E., Bondar A. E. [et al.]. The first measurement of the conversion decay of the omega meson into a neutral pion and an electron-positron pair at the CMD-3 detector. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematichnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2024, vol. 60, no. 1, pp. 52–71 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2024-60-1-52-71>
10. Gribanov S. S., Popov A. S. Kinematic and vertex fitting package for the CMD-3 experiment. *Journal of Instrumentation*, 2024, vol. 18, art. ID P05030. <https://doi.org/10.1088/1748-0221/18/05/p05030>

## Information about the authors

**Dmitry N. Grigoriev** – Ph. D. (Physics and Mathematics), Leading Researcher, Budker Institute of Nuclear Physics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences (11, Academician Lavrent'ev Ave., 630090, Novosibirsk, Russian Federation); Associate Professor, Novosibirsk State Technical University, (20, K. Marks Ave., 630073, Novosibirsk, Russian Federation). E-mail: d.n.grigoriev@inp.nsk.su

## Информация об авторах

**Григорьев Дмитрий Николаевич** – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт ядерной физики имени Г. И. Будкера Сибирского отделения Российской академии наук (пр. Академика Лаврентьева, 11, 630090, Новосибирск, Российская Федерация); доцент, Новосибирский государственный технический университет (пр. К. Маркса, 20, 630073, Новосибирск, Российская Федерация). E-mail: d.n.grigoriev@inp.nsk.su

**Vasily F. Kazanin** – Ph. D. (Physics and Mathematics), Leading Researcher, Budker Institute of Nuclear Physics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences (11, Academician Lavrent'ev Ave., 630090, Novosibirsk, Russian Federation); Senior Lecturer in the Department of Physics, Specialized Education-Scientific Center of Novosibirsk State University (2, Pirogov Str., 630090, Novosibirsk, Russian Federation). E-mail: V.F.Kazanin@inp.nsk.su

**Vyacheslav L. Ivanov** – Ph. D. (Physics and Mathematics), Researcher, Budker Institute of Nuclear Physics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences (11, Academician Lavrent'ev Ave., 630090, Novosibirsk, Russian Federation). E-mail: vyacheslav\_lvovich\_ivanov@mail.ru

**Dzmitry V. Shoukavy** – Ph. D. (Physics and Mathematics), Head of the Center, B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (68-2, Nезависимости Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: shoukavy@ifanbel.bas-net.by

**Казанин Васілій Федоровіч** – кандидат фізико-математичних наук, ведучий научный сотрудник, Институт ядерной физики имени Г. И. Будкера Сибирского отделения Российской академии наук (пр. Академика Лаврентьева, 11, 630090, Новосибирск, Российская Федерация); старший преподаватель кафедры физики, Специализированный учебно-научный центр Новосибирского государственного университета (ул. Пирогова, 2, 630090, Новосибирск, Российская Федерация). E-mail: V.F.Kazanin@inp.nsk.su

**Іванов Вячеслав Львович** – кандидат фізико-математичних наук, научный сотрудник, Институт ядерной физики имени Г. И. Будкера Сибирского отделения Российской академии наук (пр. Академика Лаврентьева, 11, 630090, Новосибирск, Российская Федерация). E-mail: vyacheslav\_lvovich\_ivanov@mail.ru

**Шэлковый Дмитрий Вікторович** – кандидат фізико-математичных наук, заведующий центром, Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси (пр. Независимости, 68-2, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: shoukavy@ifanbel.bas-net.by

ISSN 1561-2430 (Print)

ISSN 2524-2415 (Online)

УДК 537.533.7

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2025-61-4-330-342>

Поступила в редакцию 13.06.2025

Received 13.06.2025

С. В. Анищенко

Институт ядерных проблем Белорусского государственного университета,  
Минск, Республика Беларусь

## ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ РЕНТГЕНОВСКОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ В СИММЕТРИЧНОЙ ГЕОМЕТРИИ БРЭГГА

**Аннотация.** Проведен детальный анализ теоретических моделей, используемых для интерпретации экспериментов по генерации параметрического рентгеновского излучения (ПРИ) релятивистскими заряженными частицами в симметричной геометрии Брэгга. Продемонстрировано, что динамическая теория ПРИ находится в хорошем согласии с экспериментальными результатами, полученными в области энергий электронов 900 МэВ на синхротропе «Сириус». Важнейшим преимуществом динамической теории ПРИ перед кинематической оказалось правильное описание первичной экстинкции и интерференции между двумя типами волн (быстрой и медленной), генерируемых в процессе параметрического рентгеновского излучения в кристалле. В ультрарелятивистской области энергий получено аналитическое выражение для полного числа квантов, испускаемых электроном в телесный угол, где интенсивность ПРИ оказывается максимальной.

**Ключевые слова:** параметрическое рентгеновское излучение, динамическая дифракция, кинематическая дифракция, геометрия Брэгга

**Для цитирования.** Анищенко, С. В. Параметрическое рентгеновское излучение в симметричной геометрии Брэгга / С. В. Анищенко // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. – 2025. – Т. 61, № 4. – С. 330–342. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2025-61-4-330-342>

Sergei V. Anishchenko

Institute for Nuclear Problems of Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus

## PARAMETRIC X-RAY RADIATION IN SYMMETRIC BRAGG GEOMETRY

**Abstract.** A detailed analysis of theoretical models used to interpret experiments with parametric X-ray radiation (PXR) emitted by relativistic charged particles in symmetric Bragg geometry is carried out. It is shown that the dynamical theory of PXR is in good agreement with the experimental results obtained at the Sirius synchrotron for 900 MeV electrons. The most important advantage of the PXR dynamical theory over the kinematical one is the correct description of the primary extinction and interference between two types of waves (fast and slow), generated within parametric X-ray radiation in a crystal. At ultrarelativistic energies, an analytical expression is obtained for the total number of quanta emitted by an electron into the solid angle where PXR intensity has a maximum.

**Keywords:** parametric X-ray radiation, dynamical diffraction, kinematical diffraction, Bragg geometry

**For citation.** Anishchenko S. V. Parametric X-ray radiation in symmetric Bragg geometry. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematichnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2025, vol. 61, no. 4, pp. 330–342 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2025-61-4-330-342>

**Введение.** Одной из важнейших задач современной физики является создание источников рентгеновского излучения для фундаментальных и прикладных исследований [1]. В этой связи становится актуальной разработка источников параметрического рентгеновского излучения (ПРИ), генерируемого при прохождении равномерно движущихся заряженных частиц через кристалл [2, 3]. Несомненным преимуществом указанных источников перед многими другими является плавная перестройка частоты генерации, осуществляемая поворотом кристалла.

Известно, что в рентгеновском диапазоне частот много больших характерных атомных, диэлектрическая проницаемость вещества имеет универсальный вид  $\epsilon(\omega) = 1 - \omega_p^2 / \omega^2$  ( $\omega_p$  – плазменная частота). Как следствие, показатель преломления в рассматриваемом диапазоне меньше единицы. По этой причине эффект Вавилова – Черенкова в рентгеновском диапазоне отсутству-

ет. Тем не менее в работе [4] впервые было показано, что при релятивистском движении заряженной частицы в кристалле возможно образование спонтанного и индуцированного излучения Вавилова – Черенкова. Эффект обусловлен тем, что в кристалле вследствие дифракции показатель преломления может стать больше единицы. Более детальная теория эффекта была дана в работах [5, 6]. Причем в [5] рассмотрение проводилось для кристаллической пластики конечной толщины, что позволило правильно учесть переходные эффекты, которые, как известно [7], присутствуют в излучении Вавилова – Черенкова при наличии границ раздела (подробнее см. в [8]).

Рентгеновское излучение, испускаемое равномерно движущейся заряженной частицей в кристалле, получило название параметрического [4–6]. Отметим, что механизм генерации параметрического излучения во многом аналогичен тому, который имеет место в приборах микроволновой электроники: лампах бегущей и обратной волны [9]. В возникновении ПРИ важнейшую роль играют эффекты, обусловленные динамической дифракцией электромагнитных волн в кристалле [10]. Согласно [8] динамическая дифракция приводит к сильному непертурбативному взаимодействию электромагнитных волн, испускаемых под малыми и большими углами к скорости частицы и связанных друг с другом условием Брэгга – Вульфа. Указанное взаимодействие в узких спектрально-угловых диапазонах приводит к существенному изменению электродинамических свойств периодической среды по сравнению с аморфным веществом. В результате становятся возможными явление первичной экстинкции (бездиссипативное затухание электромагнитных волн в кристалле в геометрии Брэгга) и изменение показателей преломления [4], часть из которых становится больше единицы. Благодаря первичной экстинкции происходит эффективное отражение псевдофотонов от кристалла в геометрии Брэгга. Превышение показателями преломления единицы делает возможным черенковский синхронизм между частицей и электромагнитными волнами, испускаемыми не только под большими, но и малыми углами к скоростям частиц [11].

Несмотря на то что важнейшую роль в генерации параметрического рентгеновского излучения играет динамическая дифракция, в литературе можно встретить и другой подход к описанию ПРИ, получивший название кинематического [12, 13]. В рамках этого подхода дифракционное взаимодействие между волнами описывается в соответствии с теорией возмущений. Однако если толщина кристалла становится сравнимой с глубиной экстинкции, на которой амплитуды волн, участвующих в дифракции, становятся сравнимыми по амплитуде, то указанный подход перестает быть применимым. В этом случае для корректного описания экспериментов необходимо применять динамическую теорию. Кроме того, в кинематической теории отсутствует компонента ПРИ, испускаемая под малыми углами к скорости частицы, предсказанная динамической теорией [11] и надежно обнаруженная экспериментально [14, 15].

Еще одно приближение, часто встречающееся в литературе, связано с независимым рассмотрением двух вкладов в ПРИ: дифрагированного переходного, связанного с пересечением границы кристалл – вакуум, и квазичеренковского, обусловленного движением частицы в кристалле [16, 17]. Такое разделение было бы оправдано в отсутствие интерференционных эффектов. В общем случае, однако, интерференция между двумя вкладами имеет место, и для корректной интерпретации экспериментов нужно использовать общие формулы динамической теории [2, 8, 11].

В этой связи представляется важным провести детальное сравнение предсказаний различных теорий с результатами экспериментов, в частности проведенных на синхротроне «Сириус» и посвященных измерению полного числа квантов ПРИ в симметричной геометрии Брэгга [18]. (Подробные обзоры экспериментальных работ по генерации параметрического рентгеновского излучения в различных геометриях можно найти в монографии [19] и статье [20].) Привлекательность именно этого эксперимента для проверки различных теорий ПРИ неслучайна. Во-первых, полное число зарегистрированных квантов в нем значительно отклонилось от предсказаний кинематической теории. Во-вторых, многократное рассеяние в этом эксперименте несущественно, что позволяет избежать дополнительных усложнений, обусловленных взаимодействием релятивистских заряженных частиц с атомами среды. И, в-третьих, использование в эксперименте [18] толстой кристаллической пластинки существенно упрощает интерпретацию

экспериментальных данных – вследствие поглощения рентгеновских лучей их многократные переотражения от границ кристалл – вакуум не играют роли.

**Динамическая теория.** В пренебрежении квантово-механической отдачей спектрально-угловое распределение фотонов, испускаемых заряженной частицей, дается следующей формулой:

$$\frac{\partial^2 N_s}{\partial \Omega \partial \omega} = \frac{\alpha_e \omega^2}{4\pi^2} \iint \left[ \vec{E}_{-\vec{k}}^{(+s)}(\vec{r}(t_1)) \vec{v}(t_1) \right] \left[ \vec{E}_{-\vec{k}}^{(+s)*}(\vec{r}(t_2)) \vec{v}(t_2) \right] e^{i\omega(t_1-t_2)} dt_1 dt_2, \quad (1)$$

где  $\vec{E}_{-\vec{k}}^{(+s)}$  – решение однородных уравнений Максвелла ( $\vec{E}_{-\vec{k}}^{(+s)}$  равны величинам  $\vec{E}_{\vec{k}}^{(-s)*}$ , участвующим в разложении функции Грина уравнений Максвелла [8]), описывающее рассеяние фотона с волновым вектором  $-\vec{k}$  и поляризацией  $\vec{e}_s$  на мишени;  $\vec{r}(t)$  и  $\vec{v}(t)$  – радиус-вектор и скорость частицы;  $\alpha_e \approx 1/137$  – постоянная тонкой структуры. А значит, чтобы найти спектрально-угловое распределение ПРИ, нам фактически необходимо решить задачу о дифракции электромагнитных волн на кристалле (рис. 1). Отметим, что задача о рассеянии рентгеновского излучения на кристаллической пластинке как в геометрии Лауз, так и Брэгга рассмотрена, например, в [10].

Рассмотрим в рамках двухвольновой динамической теории дифракцию плоской монохроматической волны с волновым вектором  $-\vec{k}$ , частотой  $\omega = ck$  и единичным вектором поляризации  $\vec{e}_s$  на кристаллической пластинке толщины  $L$  в геометрии Брэгга. Вследствие малости диэлектрической восприимчивости мы можем пренебречь отраженными волнами от границ кристалл – вакуум и рассматривать только 7 волн. Падающая  $-\vec{k}$ , дифрагированная  $-\vec{k}_{\tau}$  и прошедшая сквозь пластинку волны распространяются в вакууме. (Волновой вектор, прошедшей сквозь кристалл волны, совпадает с вектором  $-\vec{k}$ .) Четыре волны распространяются в среде: двум из них соответствуют волновые векторы  $-\vec{k}_{\mu s} \approx -\vec{k}$ , а двум другим  $-\vec{k}_{\tau\mu s} = -\vec{k}_{\mu s} - \vec{\tau} \approx -\vec{k} - \vec{\tau}$  ( $\vec{\tau}$  – вектор обратной решетки,  $\mu = 1, 2$ ). Расщепление падающей из вакуума волны  $-\vec{k}$  на две  $-\vec{k}_{\mu s}$  обусловлено сильной связью между электромагнитными волнами в кристалле [10].

Волновой вектор  $-\vec{k}_{\tau}$  дифрагированной волны, колеблющейся с той же частотой  $\omega$ , что и падающая, дается выражением  $-\vec{k}_{\tau} = -\vec{k}_{\parallel} - \vec{\tau}_{\parallel} - \sqrt{k^2 - (\vec{k}_{\parallel} + \vec{\tau}_{\parallel})^2} \vec{N}$  (символом  $\parallel$  обозначаются компоненты векторов, параллельные пластинке;  $\vec{N}$  – нормальный к пластинке единичный вектор). В частном случае симметричной дифракции  $\vec{\tau}_{\parallel} = 0$  и  $-\vec{k}_{\tau} = -\vec{k}_{\parallel} - \sqrt{k^2 - k_{\parallel}^2} \vec{N}$ .

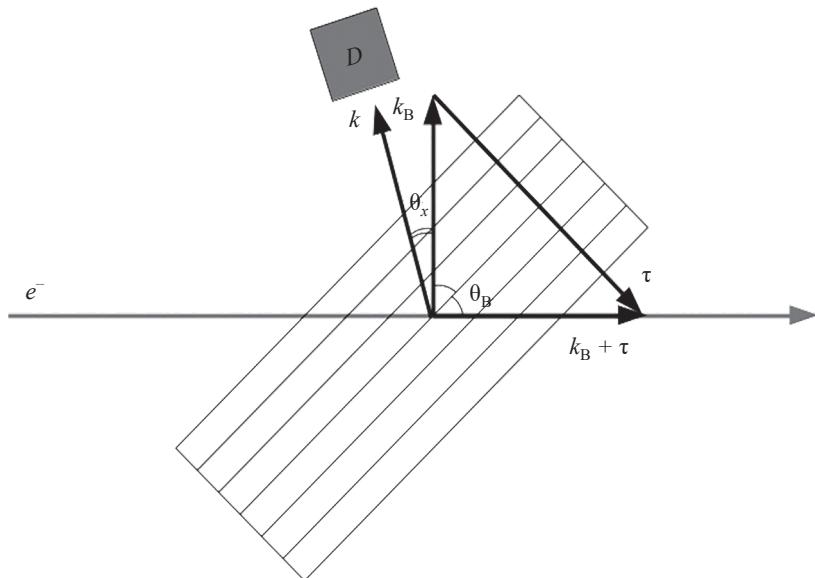


Рис. 1. Параметрическое рентгеновское излучение под большими углами к скорости заряженной частицы в геометрии Брэгга

Fig. 1. Parametric X-ray radiation at large angles to the particle velocity in Bragg geometry

Приступим к установлению явного вида волновых векторов в среде. Величина связи между волнами, распространяющимися в кристалле, определяется зависящей от частоты диэлектрической восприимчивостью  $\chi(\omega, \vec{r}) = \sum_{\vec{\tau}} \chi_{\vec{\tau}}(\omega) e^{i\vec{\tau}\vec{r}}$ . Явный вид векторов  $-\vec{k}_{\mu s}$  и  $-\vec{k}_{\bar{\tau}\mu s}$  в среде можно установить, отыскав решения однородных уравнений Максвелла в пространстве Фурье:

$$\begin{aligned} \left( \frac{k_{\mu s}^2}{\omega^2} - 1 - \chi_0 \right) \vec{E}_{-\vec{k}\mu s} - C_s \chi_{\vec{\tau}} \vec{E}_{-\vec{k}\bar{\tau}\mu s} &= 0, \\ \left( \frac{k_{\bar{\tau}\mu s}^2}{\omega^2} - 1 - \chi_0 \right) \vec{E}_{-\vec{k}\bar{\tau}\mu s} - C_s \chi_{-\vec{\tau}} \vec{E}_{-\vec{k}\mu s} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $\vec{E}_{-\vec{k}\mu s}$  и  $\vec{E}_{-\vec{k}\bar{\tau}\mu s}$  – амплитуды волн, соответствующие волновым векторам  $-\vec{k}_{\mu s}$  и  $-\vec{k}_{\bar{\tau}\mu s}$ . Параметр  $C_s$  равен единице, если векторы  $\vec{e}_s$  и  $\vec{e}_{\bar{\tau}s}$ , являющиеся единичными векторами поляризации падающей волны и дифрагированной, направлены перпендикулярно плоскости дифракции, образованной векторами  $\vec{k}$  и  $\vec{k}_{\bar{\tau}}$  (случай  $\sigma$ -поляризации). Если векторы  $\vec{e}_s$  и  $\vec{e}_{\bar{\tau}s}$  лежат в плоскости дифракции, то  $C_s = \vec{e}_s \vec{e}_{\bar{\tau}s} = \cos(2\theta_B)$ , где  $\theta_B$  – угол Брэгга (случай  $\pi$ -поляризации). Для обозначения двух поляризаций будем использовать следующие обозначения:  $s = \sigma$  ( $\sigma$ -поляризация) и  $s = \pi$  ( $\pi$ -поляризация).

Система уравнений (2) разрешима, если ее детерминант равен нулю, а волновые векторы  $-\vec{k}_{\mu s}$ , как следствие, имеют следующий вид [2, 8, 11]:

$$-\vec{k}_{\mu s} = -\vec{k} + \frac{\omega \epsilon_{\mu s}}{c \gamma_0} \vec{N}, \quad (3)$$

где

$$\epsilon_{\mu s} = \frac{1}{4} [(1 + \beta_1) \chi_0 - \beta_1 \alpha_B] \pm \frac{1}{4} \sqrt{[(\beta_1 - 1) \chi_0 - \beta_1 \alpha_B]^2 + 4 \beta_1 C_s^2 \chi_{\bar{\tau}} \chi_{-\bar{\tau}}}. \quad (4)$$

Здесь  $\alpha_B = (2\vec{k}\vec{\tau} + \tau^2) / k^2$  – параметр, который характеризует условия выполнения дифракции Брэгга (при точном выполнении условий брэгговской дифракции  $\alpha_B = 0$ );  $\beta_1 = \gamma_0 / \gamma_1$ ,  $\gamma_0 = -\vec{k}\vec{N} / k > 0$ ,  $\gamma_1 = -\vec{k}_{\bar{\tau}}\vec{N}_s / k < 0$ . Знак «+» соответствует  $\mu = 1$ , а знак «-» –  $\mu = 2$ . В частном случае симметричной дифракции ( $\beta_1 = -1$ )

$$\epsilon_{\mu s} = \frac{1}{4} \alpha_B \pm \frac{1}{4} \left( (\alpha_B - 2\chi_0)^2 - 4C_s^2 \chi_{\bar{\tau}} \chi_{-\bar{\tau}} \right)^{1/2}. \quad (5)$$

Обратим внимание, что закон распространения электромагнитных волн в кристалле существенно меняется при  $\alpha_B \approx (\beta_1 - 1) \chi_0 / \beta_1$  (см. (4)): поправка к волновому вектору (3) приобретает большую мнимую часть ( $\text{Im} \epsilon_{\mu s} \approx \pm |C_s \chi_{\bar{\tau}}| \sqrt{|\beta_1|} / 2$ ), что приводит к быстрому бездиссипативному затуханию (дифракционному отражению) падающей волны в кристалле в узкой области ширины  $\Delta \alpha_B \approx 4|C_s \chi_{\bar{\tau}}| / \sqrt{|\beta_1|}$ . Глубина экстинкции, на которой происходит затухание интенсивности в  $e$  раз, равна  $L_e = \frac{2c}{|C_s \chi_{\bar{\tau}}| \omega_B}$ . Вдали от указанной области величины  $\epsilon_{\mu s}$  имеют следующие асимптотики:

$$\begin{aligned} \epsilon_{1s} &\approx \frac{-\beta_1 \alpha_B - \chi_0}{2}, \\ \epsilon_{2s} &\approx \frac{\chi_0}{2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Причем вторая ветвь электромагнитных колебаний в асимптотической области совпадает с электромагнитными колебаниями в аморфной среде.

Для иллюстрации сказанного рассмотрим дифракцию, соответствующую геометрии Брэгга,  $\sigma$ -поляризованного рентгеновского излучения с энергией квантов, равной  $\hbar\omega \approx 6,46$  кэВ, падающего под углом  $\pi/4$  на поверхность кремниевой пластинки. Пусть кристаллографические плоско-

сти кремния с индексами Миллера (4,0,0) параллельны поверхности пластинки, что при указанной энергии квантов соответствует симметричной дифракции и углу Брэгга  $\theta_B = \pi/4$ . Выбор описанной симметричной схемы дифракции не случаен. Именно она была реализована в одном из экспериментов по генерации ПРИ, проведенных на томском синхротроне «Сириус» [18]. При указанной схеме дифракции диэлектрические восприимчивости равны  $\chi_0 \approx -2,36 \cdot 10^{-5} + 8,25 \cdot 10^{-7}i$  и  $|\chi_{\bar{\tau}}| = 1,03 \cdot 10^{-5}$ , а глубины экстинкции  $L_e$  и поглощения ( $L_a = 2c / \text{Im} \chi_{\bar{\tau}} \omega_b$ ) – 5 и 74 мкм соответственно. (Значение  $\chi_{\bar{\tau}}$  получено путем умножения модуля диэлектрической восприимчивости  $|\chi_{\bar{\tau}}| = 1,21 \cdot 10^{-5}$  [21] при 0 К на температурный фактор Дебая – Уолера  $e^{-W} \approx 0,85$ , рассчитанного для 293 К.)

Однородные уравнения Максвелла (2) позволяют найти отношение амплитуд  $\vec{E}_{-\vec{k}\mu s}$  и  $\vec{E}_{-\vec{k}\bar{\tau}\mu s}$  в среде. Однако для построения решения  $\vec{E}_{-\vec{k}}^{(+)}$  этого недостаточно: нужно еще задать граничные условия [2, 8, 11]. В геометрии Брэгга на границе кристалл – ваккум со стороны влета заряженной частицы амплитуда падающей волны  $-\vec{k}$  равняется сумме амплитуд двух волн  $-\vec{k}_{\mu s}$ , а амплитуда дифрагированной волны  $-\vec{k}_{\bar{\tau}}$  – сумме амплитуд двух волн  $-\vec{k}_{\bar{\tau}\mu s}$ . На противоположной стороне пластиинки сумма амплитуд двух волн  $-\vec{k}_{\mu s}$  равна амплитуде проходящей волны, а сумма амплитуд двух волн  $-\vec{k}_{\bar{\tau}\mu s}$  равна нулю. Указанные граничные условия дают возможность записать решение однородных уравнений Максвелла, описывающее рассеяние волны  $\vec{e}_s e^{-i\vec{k}\vec{r}}$  на кристалле в геометрии Брэгга:

$$\begin{aligned} E_{-\vec{k}}^{(+)} = & \sum_{\mu} \gamma_{\mu s}^0 \left[ \Theta(-z) e^{-i\vec{k}\vec{r}} + \Theta(z) \Theta(L-z) e^{-i\vec{k}_{\mu s}\vec{r}} + \Theta(z-L) e^{i\omega\epsilon_{\mu s}L/c\gamma_0} e^{-i\vec{k}\vec{r}} \right] + \\ & + \sum_{\mu} \gamma_{\mu s}^{\bar{\tau}} \left[ \Theta(-z) e^{-i\vec{k}_{\bar{\tau}}\vec{r}} + \Theta(z) \Theta(L-z) e^{-i\vec{k}_{\bar{\tau}\mu s}\vec{r}} \right], \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_{1(2)s}^0 = & \frac{2\epsilon_{2(1)s} - \chi_0}{(2\epsilon_{2(1)s} - \chi_0) - (2\epsilon_{1(2)s} - \chi_0) \exp \left( -i \frac{\omega L}{c\gamma_0} (\epsilon_{2(1)s} - \epsilon_{1(2)s}) \right)}, \\ \gamma_{1(2)s}^{\bar{\tau}} = & \frac{-\beta_1 C_s \chi_{\bar{\tau}}}{(2\epsilon_{2(1)s} - \chi_0) - (2\epsilon_{1(2)s} - \chi_0) \exp \left( -i \frac{\omega L}{c\gamma_0} (\epsilon_{2(1)s} - \epsilon_{1(2)s}) \right)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Подставляя  $E_{-\vec{k}}^{(+)} s$  в (1), получим спектрально-угловое распределение фотонов, испущенных под большим углом к скорости частицы в геометрии Брэгга [2, 8, 11]:

$$\frac{\partial^2 N_s}{\partial \Omega \partial \omega} = \frac{\alpha_e \omega}{4\pi^2 c^2} (\vec{e}_{\bar{\tau}s} \vec{v})^2 \left| \sum_{\mu} \gamma_{\mu s}^{\bar{\tau}} \left( \frac{1}{\omega - \vec{k}_{\bar{\tau}} \vec{v}} - \frac{1}{\omega - \vec{k}_{\bar{\tau}\mu s} \vec{v}} \right) \left( e^{i(\omega - \vec{k}_{\bar{\tau}\mu s} \vec{v})T} - 1 \right) \right|^2. \quad (9)$$

Для толстых кристаллов ( $L \gg L_a$ ) коэффициент  $\gamma_{1s}^{\bar{\tau}}$  и экспонента  $e^{i(\omega - \vec{k}_{\bar{\tau}2s} \vec{v})T}$  стремятся к нулю, а  $\gamma_{2s}^{\bar{\tau}} = -\frac{\beta_1 C_s \chi_{\bar{\tau}}}{2\epsilon_{1s} - \chi_0}$ . Как следствие, спектрально-угловое распределение принимает следующий вид:

$$\frac{\partial^2 N_s}{\partial \Omega \partial \omega} = \frac{\alpha_e \omega}{4\pi^2 c^2} (\vec{e}_{\bar{\tau}s} \vec{v})^2 \left| \gamma_{2s}^{\bar{\tau}} \left( \frac{1}{\omega - \vec{k}_{\bar{\tau}} \vec{v}} - \frac{1}{\omega - \vec{k}_{\bar{\tau}2s} \vec{v}} \right) \right|^2, \quad (10)$$

где

$$\gamma_{2s}^{\bar{\tau}} = \frac{-\beta_1 C_s \chi_{\bar{\tau}}}{2\epsilon_{2s} - \chi_0}. \quad (11)$$

Обратим внимание, что в выражении (10) присутствуют 2 вклада. Первый вклад, пропорциональный  $\frac{1}{\omega - \vec{k}_{\vec{\tau}} \vec{v}}$ , обусловлен движением частицы вне кристалла. Именно он ассоциируется с дифрагированной переходной компонентой в излучении (в кинематической теории дифрагированная переходная компонента отсутствует). Второй вклад  $\sim \frac{1}{\omega - \vec{k}_{\vec{\tau}2s} \vec{v}}$  связан с движением частицы в среде. Благодаря ему становится возможным черенковский синхронизм.

Более глубокий анализ спектрально-углового распределения ПРИ можно провести, если в явном виде задать угловые и частотные зависимости входящих в (10) величин. Пусть отклонение от точного условия Брэгга задается с помощью разности  $\Delta\omega = \omega - \omega_B$  и двух углов  $\theta_x$  и  $\theta_y$ . Причем  $\theta_y$  – угол между плоскостью, образованной векторами  $\vec{v}$  и  $\vec{\tau}$  и вектором  $\vec{k}$ , а  $\theta_x$  – угол, характеризующий угловое отклонение вектора  $\vec{k}$  от  $\vec{k}_B$  в плоскости дифракции (см. рис. 1). Тогда, раскладывая по малым величинам  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  и  $\Delta\omega/\omega_B$ , найдем

$$\begin{aligned} \alpha_B &\approx -2\theta_x \sin 2\theta_B + 2(\theta_x^2 + \theta_y^2) \sin^2 \theta_B - \frac{4\Delta\omega}{\omega_B} \sin^2 \theta_B, \\ \omega - \vec{k}_{\vec{\tau}} &\approx \frac{\omega_B}{2} \left( \theta_x^2 + \theta_y^2 + 1/\gamma_e^2 \right), \\ \omega - \vec{k}_{\vec{\tau}\mu s} \vec{v} &\approx \frac{\omega_B}{2} \left( \frac{1}{\gamma_e^2} + 2\theta_x \sin 2\theta_B + (\theta_x^2 + \theta_y^2) \cos 2\theta_B + \frac{4\Delta\omega}{\omega_B} \sin^2 \theta_B + 2\epsilon_{\mu s} \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Подстановка  $\alpha_B$  в коэффициент  $\gamma_{2s}^{\vec{\tau}}$  (см. (10)), зависящий от  $\epsilon_{1s} = \epsilon_{1s}(\alpha_B)$ , показывает, что существует узкая спектральная область, именуемая столиком Дарвина, шириной  $\Delta\omega_D \sim \frac{\omega_B \chi_{\vec{\tau}}}{\omega_B 2 \sin^2 \theta_B \sqrt{|\beta_1|}}$ . В этой области  $|\gamma_{2s}^{\vec{\tau}}| \sim 1$  и наблюдается интенсивное отражение псевдогенонов.

**Кинематическая теория.** В настоящем разделе выведем формулы кинематической теории ПРИ из формул динамической. Для этого в выражении (10) сделаем ряд упрощений. Во-первых, отбросим член, ответственный за дифрагированную переходную компоненту ПРИ. Во-вторых, заменим  $\epsilon_{\mu s}$  (4) асимптотическими выражениями (6). И, в-третьих, положим коэффициент  $\gamma_{2s}^{\vec{\tau}}$  медленно меняющимся с частотой по сравнению с резонансным множителем  $\frac{1}{\omega - \vec{k}_{\vec{\tau}\mu s} \vec{v}}$ , резко возрастающим в условиях черенковского синхронизма

$$\omega - \vec{k}_{\vec{\tau}\mu s} \vec{v} \approx 0, \quad (13)$$

наступающего при

$$\frac{\Delta\omega_0}{\omega_B} \approx -\frac{1}{4 \sin^2 \theta_B} \left( \frac{1}{\gamma_e^2} + 2\theta_x \sin 2\theta_B + (\theta_x^2 + \theta_y^2) \cos 2\theta_B + \chi_0 \right). \quad (14)$$

Последнее позволяет пренебречь изменением частоты в  $\gamma_{2s}^{\vec{\tau}}$ , заменив  $\Delta\omega$  на  $\Delta\omega_0$ :

$$\gamma_{2s}^{\vec{\tau}} = \frac{-C_s \chi_{\vec{\tau}}}{2\epsilon_{1s} - \chi_0} \approx \frac{-2C_s \chi_{\vec{\tau}}}{1/\gamma_e^2 + \theta_x^2 + \theta_y^2 - \chi_0}. \quad (15)$$

Заметим, что резонансный множитель  $\frac{1}{\omega - \vec{k}_{\vec{\tau}\mu s} \vec{v}}$  не обращается в бесконечность вследствие наличия мнимой части у диэлектрической восприимчивости  $\chi_0$ .

Интегрирование (10) с учетом сделанных приближений и суммирование по двум поляризациям приводят к хорошо известной кинематической формуле для углового распределения ПРИ в толстом кристалле [12, 13]:

$$\frac{dN_{\text{kin}}}{d\Omega} = \frac{\alpha_e}{4\pi c} \omega_B \tilde{L}_a \frac{|\chi_{\vec{\tau}}|^2}{\sin^2 \theta_B} \frac{\theta_x^2 \cos^2 2\theta_B + \theta_y^2}{(\theta_x^2 + \theta_y^2 + \theta_{\text{ph}}^2)^2}. \quad (16)$$

Здесь  $\theta_{\text{ph}}^2 = |\chi_0| + \gamma^{-2}$  – параметр, определяющий угловую ширину ПРИ в рамках кинематической теории;  $\tilde{L}_a$  – характерная глубина поглощения фотонов с учетом их косого падения. В условиях уже рассмотренной выше симметричной дифракции на кристаллографических плоскостях кремния с индексами Миллера  $(4,0,0)$   $\tilde{L}_a = L_a \sin \theta_B \approx 52$  мкм.

Отметим, что учет многократного рассеяния в рамках кинематической теории приводит к появлению в выражении для  $\theta_{\text{ph}}^2$  небольшой поправки [12, 13]:  $\theta_{\text{ph}}^2 = |\chi_0| + \gamma^{-2} + \theta_{\text{ms}}^2$ , определяемой среднеквадратичным углом многократного рассеяния  $\theta_{\text{ms}}$  на длине поглощения  $L_a$ . При энергии электронов, равной 900 МэВ, что соответствует условиям проведения экспериментов на синхротроне «Сириус»,  $\theta_{\text{ms}} \sim 0,4$  мрад. В то же время  $\theta_{\text{ph}} \approx 4,9$  мрад, т. е.  $\theta_{\text{ms}} \ll \theta_{\text{ph}}$ , а значит, многократное рассеяние в данном случае не играет никакой роли.

Интегрируя угловое распределение по области, ограниченной угловым радиусом  $\theta_d$ , находим полное число испущенных квантов, совпадающее с выражением, полученным ранее [12, 13]:

$$N_{\text{kin}} = \frac{\alpha_e \omega_B (1 + \cos^2 2\theta_B)}{32\pi c \sin^2 \theta_B} |\chi_\tau|^2 \tilde{L}_a Y(\theta_d / \theta_{\text{ph}}), \quad (17)$$

где

$$Y(x) = 4\pi \left( -1 + \frac{1}{1+x^2} + \ln(1+x^2) \right) \quad (18)$$

– вспомогательная функция.

**Сравнение динамической и кинематической теорий с экспериментом.** Воспользуемся динамической и кинематической теориями для интерпретации экспериментов, проведенных на синхротроне «Сириус» [18], в которых регистрировалось полное число квантов в симметричной геометрии Брэгга, испущенных под большим углом к скорости частиц (рис. 1). (Следует отметить, что ранее подробное сравнение предсказаний динамической и кинематической теорий проводилось при интерпретации экспериментальных результатов, полученных на микротроне в Майнце [22].) Энергия электронов, ускоренных в синхротроне и падающих под углом  $\pi/4$ , совпадающим с  $\theta_B$ , на толстую кремниевую пластинку ( $L = 400$  мкм), составляла 900 МэВ. Кристаллографические плоскости с индексами Миллера  $(4,0,0)$ , на которых происходила дифракция, располагались параллельно поверхности пластинки. Как следствие, при падении электронов на мишень возникали две связанные волны с энергией квантов  $\hbar\omega \approx 6,5$  кэВ. Одна распространялась под малыми углами к скоростям частиц, другая – в направлении, определяемом вектором обратной решетки. Последняя компонента и регистрировалась детектором с угловым радиусом  $\theta_d = 27$  мрад. Полное число зарегистрированных квантов, испущенных одним электроном, с учетом ослабления их потока в системе вывода в 2,4 раза оказалось равным  $N_{\text{exp}} = (2,3 \pm 0,4) \cdot 10^{-7}$  [18].

Численное интегрирование спектрально-углового распределения (10), полученного в рамках динамической теории дифракции с учетом ослабления излучения в 2,4 раза, приводит к  $N_{\text{dyn}} \approx 2,6 \cdot 10^{-7}$  квантам на один электрон. В то же время кинематическая теория дает значение  $N_{\text{kin}} \approx 3,2 \cdot 10^{-7}$ , превышающее экспериментальное на 2,3 стандартных отклонений.

Различие в предсказаниях кинематической и динамической теорий не исчерпывается разницей в полном числе квантов, которая, как показывают расчеты, имеет место во всем диапазоне энергий (рис. 2). (Экстраполяция результатов расчетов, выполненных в рамках двух теорий, в область больших значений фактора Лоренца ( $\gamma_e > 10^4$ ) показывает, что предсказываемые значения полного числа квантов сравниваются только при  $\gamma_e \approx 7 \cdot 10^4$ . Ниже указанной величины  $N_{\text{kin}} > N_{\text{dyn}}$ , выше –  $N_{\text{kin}} < N_{\text{dyn}}$ ) Благодаря наличию дифрагированного переходного вклада в излучение, динамическая теория предсказывает существенное возрастание распределения в области малых углов  $\theta_{x,y} \sim 1/\gamma_e$  (рис. 3). Напомним, что в кинематической теории указанная компонента в излучении отсутствует.

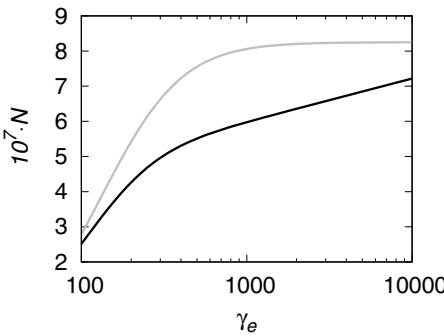


Рис. 2. Зависимость числа испущенных квантов от фактора Лоренца.  
Черная кривая соответствует динамической, серая – кинематической теории

Fig. 2. Dependence of the number of emitted quanta on Lorentz factor.  
Black curve corresponds to the dynamical theory, gray curve corresponds to the kinematical theory

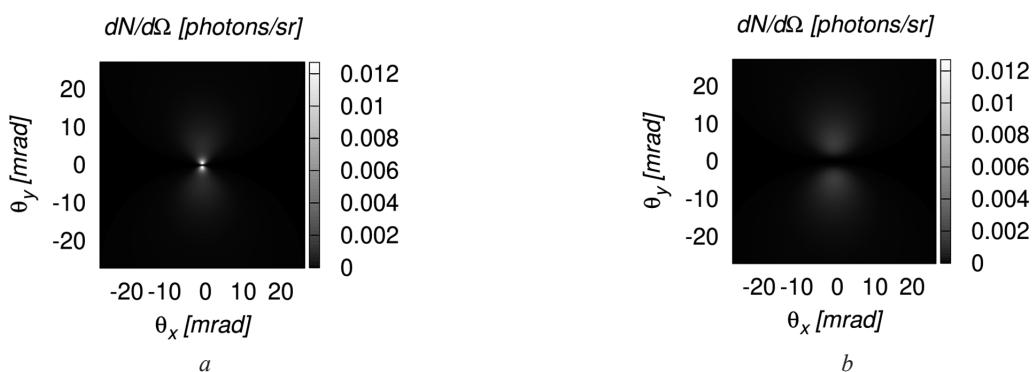


Рис. 3. Угловые распределения ПРИ, рассчитанные в рамках динамической (a) и кинематической (b) теорий

Fig. 3. Angular distributions of PXR calculated in the framework of dynamical (a) and kinematical (b) theories

Рассчитаем полное число фотонов, испускаемых в малый угол  $\theta_d \sim 1/\gamma_e \ll \theta_{\text{ph}}$ , отбросив квазичеренковский вклад в излучение. Оказывается, в этом случае спектрально-угловое распределение (10) допускает интегрирование в явном виде как по углам, так и по частотам, что позволяет найти полное число испущенных  $\sigma$ -поляризованных

$$N_{\sigma} = \frac{\alpha_e |\chi_{\bar{\tau}}|}{6\pi^2 \sin^2(\theta_B)} X\left(\frac{\text{Im}\chi_0}{|\chi_{\bar{\tau}}|}\right) Y(\gamma_e \theta_d) \quad (19)$$

и  $\pi$ -поляризованных

$$N_{\pi} = \frac{\alpha_e |\chi_{\bar{\tau}}| \cos^2(2\theta_B)}{6\pi^2 \sin^2(\theta_B)} X\left(\frac{\text{Im}\chi_0}{|\chi_{\bar{\tau}}|}\right) Y(\gamma_e \theta_d) \quad (20)$$

квантов. В полученных выражениях  $Y(x)$  и

$$X(x) = \frac{1}{4} x \left( -3\pi - 4(-1+x^2)E(-1/x^2) + 4(1+x^2)K(-1/x^2) \right) \quad (21)$$

– вспомогательные функции. Причем  $X(x)$ , зависящая от эллиптических интегралов 1-го ( $E$ ) и 2-го ( $K$ ) рода, отвечает за подавление излучения с ростом  $\text{Im}\chi_0$ , а функция  $Y(\gamma_e \theta_d)$ , логарифмически возрастающая при  $\gamma_e \theta_d \gg 1$ , описывает зависимость числа квантов от фактора Лоренца  $\gamma_e$ .

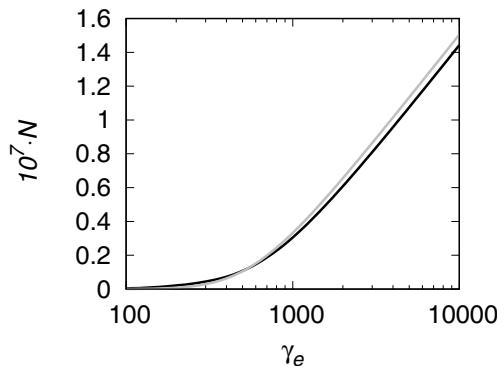


Рис. 4. Зависимость числа квантов, испущенных электроном в малый угловой конус ( $\theta_d = 2,7$  мрад), от фактора Лоренца. Чёрная кривая соответствует результатам моделирования, серая – аналитическому выражению, полученному в рамках динамической теории

Fig. 4. Dependence of the number of quanta emitted by an electron into a small angular cone ( $\theta_d = 2.7$  mrad) on Lorenz factor. Black curve corresponds to the simulation results, gray curve corresponds to the analytical expression obtained in the framework of dynamical theory

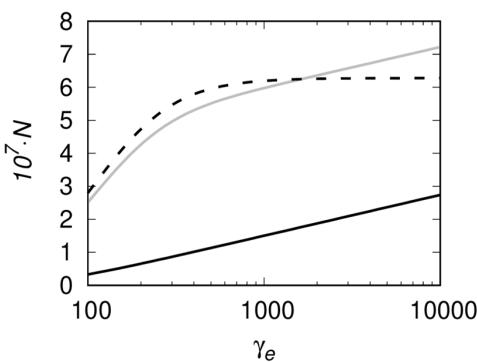


Рис. 5. Зависимость числа испущенных квантов, вычисленная в рамках динамической теории, от фактора Лоренца. Серая кривая соответствует полному числу квантов, черная сплошная – дифрагированному переходному вкладу, черная пунктирная – квазичеренковскому

Fig. 5. Dependence of the number of emitted quanta calculated in the framework of dynamical theory on Lorenz factor. Gray curve corresponds to the total number of quanta, solid black curve corresponds to the diffracted transition contribution, dotted black curve corresponds to the quasi-Cherenkov contribution

На рис. 4 представлены зависимости числа квантов, испускаемых в малый угол  $\theta_d = 2,7$  мрад от энергии частиц, полученные в результате численного интегрирования спектрально-углового распределения (10). При больших энергиях отчетливо прослеживается логарифмическая зависимость числа испущенных квантов от фактора Лоренца. Небольшое расхождение между результатами моделирования и теоретической кривой связаны с наличием в (10) квазичеренковского вклада, которым мы пренебрегли при выводе выражения (19).

Как следует из кривых, изображенных на рис. 4, при энергии электронов, равной 900 МэВ ( $\gamma_e \approx 1760$ ), число испущенных квантов с учетом их поглощения в системе вывода излучения составляет  $N_{tr} \approx 2,5 \cdot 10^8$  на одну частицу, что примерно в 10 раз меньше числа квантов, зарегистрированного на эксперименте [18] в угле  $\theta_d = 27$  мрад. Учитывая, что при переходе от  $\theta_d = 27$  мрад к  $\theta_d = 2,7$  мрад телесный угол уменьшился в 100 раз, мы можем заключить, что средняя угловая плотность испущенных квантов при  $\theta_d \sim 2,7$  мрад в 10 раз больше, чем при  $\theta_d = 27$  мрад.

Рассмотрим теперь, какую роль играет интерференция дифрагированной переходной и квазичеренковской компонент. Для этого обратимся к рис. 5, на котором кроме зависимости полного числа испущенных квантов от фактора Лоренца приведены кривые для каждого из двух вкладов. Если бы интерференция между отдельными компонентами отсутствовала, то полное

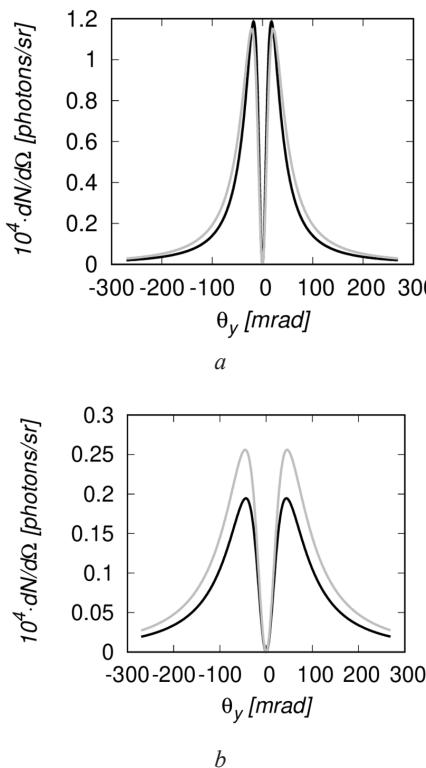


Рис. 6. Угловые распределения ПРИ, рассчитанные в рамках динамической (черные кривые) и кинематической (серые кривые) теорий: *a* – кривые, соответствующие  $\theta_x = 0$  мрад; *b* –  $\theta_x = 40$  мрад

Fig. 6. Angular distributions of PXR calculated in the framework of the dynamical (black curves) and kinematical (gray curves) theories: *a* are the curves corresponding to  $\theta_x = 0$  mrad; *b* are the curves corresponding to  $\theta_x = 40$  mrad

число испущенных квантов равнялось бы сумме двух вкладов. Однако, как это особенно видно при  $\gamma_e \sim 1 \cdot 10^3 - 2 \cdot 10^3$ , указанное простое соотношение несправедливо: сумма двух вкладов превышает полное число квантов на 30 %. Таким образом, интерференция между дифрагированной переходной и квазичеренковской компонентами делает в общем случае проблематичным независимое рассмотрение двух вкладов в ПРИ, иногда встречающееся в литературе [16, 17]. Обратим внимание также на поведение отдельных вкладов в излучение. В области малых энергий доминирует квазичеренковская компонента. Но с увеличением энергии квазичеренковский вклад перестает расти. Вклад дифрагированной переходной компоненты продолжает увеличиваться. Поскольку дифрагированная переходная компонента в кинематической теории не учитывается, то и соответствующий рост в кинематической теории отсутствует (см. рис. 2).

Обратим внимание еще на одно обстоятельство, касающееся применимости кинематической теории. В работе [13] подчеркивалось, что кинематическая теория применима, если  $\gamma_e^{-1} \gg |\chi_{\bar{\tau}}|$ . Действительно, если говорить о качественном совпадении угловых распределений, рассчитанных в рамках более общей динамической и приближенной кинематической теорий, то согласие имеется, о чем свидетельствуют результаты расчетов (рис. 6), выполненные для вышеописанной геометрии и энергии электронов 30 МэВ ( $1/\gamma_e \approx 1,7 \cdot 10^{-3} \gg |\chi_{\bar{\tau}}| \approx 1,03 \cdot 10^{-5}$ ). Тем не менее при отклонении  $\theta_x$  от нуля динамическая теория приводит к более низким значениям углового распределения квантов, чем кинематическая. Разница же в полном числе квантов, испущенных заряженной частицей в конус с угловым радиусом  $\theta_d = 270$  мрад составляет 30 %:  $N_{\text{kin}} = 1,35 \cdot 10^{-6}$  и  $N_{\text{dyn}} = 1,04 \cdot 10^{-6}$ .

**Заключение.** При количественном анализе экспериментов по генерации ПРИ в симметричной геометрии Брэгга чрезвычайно важным оказывается учет двух интерферирующих друг

с другом вкладов в излучение: дифрагированного переходного и квазичеренковского, рассчитанных в рамках теории динамической дифракции. Использование кинематического приближения и пренебрежение интерференцией между двумя вкладами приводит к значительному расхождению с экспериментальными данными. Последнее продемонстрировано путем сравнения теорий с экспериментальными результатами, полученными на синхротроне «Сириус». Только динамическая теория правильно описывает первичную экстинкцию электромагнитных волн в кристалле и учитывает интерференцию между дифрагированным переходным и квазичеренковским вкладами в параметрическое излучение.

Проведенный в настоящей работе анализ позволил получить аналитическое выражение для полного числа испущенных квантов в случае, когда дифрагированная переходная компонента ПРИ значительно превышает квазичеренковскую. Данное условие реализуется при больших значениях фактора Лоренца  $\gamma_e$  в конусе с угловым радиусом порядка  $\sim 1/\gamma_e$ .

**Благодарности.** Автор выражает благодарность профессору В. Г. Барышевскому за ценные замечания и обсуждение полученных результатов.

**Acknowledgements.** The author is grateful to Professor V. G. Baryshevsky for valuable comments and discussion of the obtained results.

### Список использованных источников

1. Fetisov, G. V. X-ray diffraction methods for structural diagnostics of materials: progress and achievements / G. V. Fetisov // Physics-Uspokhi. – 2020. – Vol. 63. – P. 2–32. <https://doi.org/10.3367/ufne.2018.10.038435>
2. Baryshevsky, V. Parametric X-ray Radiation in Crystals. Theory, Experiment and Applications / V. Baryshevsky, I. Feranchuk, A. Ulyanenkov. – Berlin: Springer, 2005. – 182 p. <https://doi.org/10.1007/b95327>
3. Free-electron interactions with van der Waals heterostructures: a source of focused X-ray radiation / X. Shi, Y. Kurman, M. Shentcis [et al.] // Light: Science & Applications. – 2023. – Vol. 12. – Art. ID 148. <https://doi.org/10.1038/s41377-023-01141-2>
4. Барышевский, В. Г. О рассеянии света потоком электронов, проходящих через кристалл / В. Г. Барышевский // Доклады Академии наук БССР. – 1971. – Т. 15, № 4. – С. 306–308.
5. Baryshevsky, V. G. Transition radiation of  $\gamma$ -rays in crystal / V. G. Baryshevsky, I. D. Feranchuk // Soviet Physics JETP. – 1972. – Vol. 34, № 3. – P. 502–504.
6. Garibyan, G. M. Quantum microscopic theory of radiation by a charged particle moving uniformly in a crystal / G. M. Garibyan, C. Yang // Soviet Physics JETP. – 1972. – Vol. 34, № 3. – P. 495–501.
7. Пафомов, В. Е. Излучение заряженной частицы при наличии границ раздела / В. Е. Пафомов // Труды ФИАН. – М.: Наука, 1969. – Т. 44: Ядерная физика и взаимодействие частиц с веществом. – С. 28–167.
8. Барышевский, В. Г. Канализование, излучение и реакции в кристаллах при высоких энергиях / В. Г. Барышевский. – Мн.: БГУ, 1982. – 256 с.
9. Трубецков, Д. И. Лекции по высокочастотной электронике для физиков: в 2 т. / Д. И. Трубецков, А. Е. Храмов. – М.: Физматлит, 2003. – Т. 1. – 493 с.
10. Пинскер, З. Р. Рентгеновская кристаллооптика / З. Р. Пинскер. – М.: Наука, 1982. – 392 с.
11. Baryshevsky, V. G. Parametric X-ray radiation at a small angle near the velocity direction of the relativistic particle / V. G. Baryshevsky // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms. – 1997. – Vol. 122, № 1. – P. 13–18. [https://doi.org/10.1016/s0168-583x\(96\)00686-6](https://doi.org/10.1016/s0168-583x(96)00686-6)
12. Feranchuk, I. D. Theoretical investigation of the parametric X-ray features / I. D. Feranchuk, A. V. Ivashin // Journal de Physique. – 1985. – Vol. 46, № 11. – P. 1981–1986. <https://doi.org/10.1051/jphys:0198500460110198100>
13. Nitta, H. Theoretical notes on parametric X-ray radiation / H. Nitta // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms. – 1996. – Vol. 115, № 1–4. – P. 401–404. [https://doi.org/10.1016/0168-583x\(96\)00163-2](https://doi.org/10.1016/0168-583x(96)00163-2)
14. Forward diffracted parametric X radiation from a silicon single crystal / H. Backe, A. Rueda, W. Lauth [et al.] // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms. – 2005. – Vol. 234, № 1–2. – P. 138–147. <https://doi.org/10.1016/j.nimb.2005.01.014>
15. Experimental observation of parametric X-ray radiation directed along the propagation velocity of relativistic electrons in a tungsten crystal / N. Aleinik, A. N. Baldin, E. A. Bogomazova [et al.] // Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters. – 2004. – Vol. 80, № 6. – P. 393–397. <https://doi.org/10.1134/1.1830655>
16. Caticha, A. Transition-diffracted radiation and the Cerenkov emission of x rays / A. Caticha // Physical Review A. – 1989. – Vol. 40, № 8. – P. 4322–4329. <https://doi.org/10.1103/physreva.40.4322>
17. Angular distribution of X-ray radiation by 500 MeV electrons in a tungsten crystal / Y. N. Adischev, S. N. Arishev, A. V. Vnukov [et al.] // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms. – 2003. – Vol. 201, № 1. – P. 114–122. [https://doi.org/10.1016/s0168-583x\(02\)01310-1](https://doi.org/10.1016/s0168-583x(02)01310-1)
18. Experimental study of the influence of multiple scattering on the parametric X-rays characteristics / V. P. Afanasenko, V. G. Baryshevsky, A. S. Lobko [et al.] // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators,

Spectrometers, Detectors and Associated Equipment 1993. – Vol. 334, № 2–3. – P. 631–637. [https://doi.org/10.1016/0168-9002\(93\)90831-2](https://doi.org/10.1016/0168-9002(93)90831-2)

19. Лобко, А. С. Экспериментальные исследования параметрического рентгеновского излучения / А. С. Лобко. – Мн.: БГУ, 2006. – 211 с.

20. Coherent interactions of free electrons and matter: toward tunable compact x-ray sources / A. Balanov, A. Gorlach, V. Baryshevsky [et al.] // Advances in Optics and Photonics. – 2025. – Vol. 17, № 4. – P. 726–788. <https://doi.org/10.1364/aop.559742>

21. X-ray Server. – URL: <https://x-server.gmca.aps.anl.gov/x0h.html> (date of access: 01.02.2025).

22. Baryshevsky, V. G. On parametric x-ray radiation / V. G. Baryshevsky, O. M. Lugovskaya // Physics of Atomic Nuclei. – 2023. – Vol. 66. – P. 409–415. <https://doi.org/10.1134/1.1553515>

## References

1. Fetisov G. V. X-ray diffraction methods for structural diagnostics of materials: progress and achievements. *Physics-Uspekhi*, 2020, vol. 63, pp. 2–32. <https://doi.org/10.3367/ufne.2018.10.038435>
2. Baryshevsky V., Feranchuk I., Ulyanenkov A. *Parametric X-ray Radiation in Crystals. Theory, Experiment and Applications*. Berlin, Springer, 2005. 182 p. <https://doi.org/10.1007/b95327>
3. Xihang Shi, Kurman Y., Shentcis M., Liang Jie Wong, García de Abajo F. J., Kaminer I. Free-electron interactions with van der Waals heterostructures: a source of focused X-ray radiation. *Light: Science & Applications*, 2023, vol. 12, art. ID 148. <https://doi.org/10.1038/s41377-023-01141-2>
4. Baryshevsky V. G. Scattering of light by the electron flux passing through a crystal. *Doklady Akademii nauk BSSR* [Doklady of the Academy of Sciences of BSSR], 1971, vol. 15, no. 4, pp. 306–308 (in Russian).
5. Baryshevsky V. G., Feranchuk I. D. Transition radiation of  $\gamma$ -rays in crystal. *Soviet Physics JETP*, 1972, vol. 34, no. 3, pp. 502–504.
6. Garibyan G. M., Yang C. Quantum microscopic theory of radiation by a charged particle moving uniformly in a crystal. *Soviet Physics JETP*, 1972, vol. 34, no. 3, pp. 495–501.
7. Pafomov V. E. Radiation produced by a charged particle in the presence of boundaries. *Trudy FIAN* [Proceedings of the Lebedev Physical Institute]. Vol. 44. *Nuclear Physics and Particle-Matter Interactions*. Moscow, Nauka Publ., 1969, pp. 28–167 (in Russian).
8. Baryshevsky V. G. *Channeling, Radiation and Reactions in Crystals at High Energies*. Minsk, Belarusian State University, 1982. 256 p. (in Russian).
9. Trubeckov D. I., Hramov A. E. *Lectures on High-Frequency Electronics for Physicists. Vol. 1*. Moscow, Fizmatlit Publ., 2003. 493 p. (in Russian).
10. Pinsker Z. K. *X-ray Crystal Optics*. Moscow, Nauka Publ., 1982. 392 p. (in Russian).
11. Baryshevsky V. G. Parametric X-ray radiation at a small angle near the velocity direction of the relativistic particle. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms*, 1997, vol. 122, no. 1, pp. 13–18. [https://doi.org/10.1016/s0168-583x\(96\)00686-6](https://doi.org/10.1016/s0168-583x(96)00686-6)
12. Feranchuk I. D., Ivashin A. V. Theoretical investigation of the parametric X-ray features. *Journal de Physique*, 1985, vol. 46, no. 11, pp. 1981–1986. <https://doi.org/10.1051/jphys:0198500460110198100>
13. Nitta H. Theoretical notes on parametric X-ray radiation. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms*, 1996, vol. 115, no. 1–4, pp. 401–404. [https://doi.org/10.1016/0168-583x\(96\)00163-2](https://doi.org/10.1016/0168-583x(96)00163-2)
14. Backe H., Rueda A., Lauth W., Clawiter N., El-Ghazaly M., Kunz P., Weber T. Forward diffracted parametric X radiation from a silicon single crystal. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms*, 2005, vol. 234, no. 1–2, pp. 138–147. <https://doi.org/10.1016/j.nimb.2005.01.014>
15. Aleinik N., Baldin A. N., Bogomazova E. A., Vnukov I. E., Kalinin B. N., Kubankin A. S., Nasonov N. N. [et al.]. Experimental observation of parametric X-ray radiation directed along the propagation velocity of relativistic electrons in a tungsten crystal. *Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*, 2004, vol. 80, no. 6. pp. 393–397. <https://doi.org/10.1134/1.1830655>
16. Caticha A. Transition-diffracted radiation and the Čerenkov emission of x rays. *Physical Review A*, 1989, vol. 40, no. 8, pp. 4322–4329. <https://doi.org/10.1103/physreva.40.4322>
17. Adishev Y. N., Arishev S. N., Vnukov A. V., Vukolov A. V., Potylitsyn A. P., Kuznetsov S. I., Zabaev V. N. [et al.]. Angular distribution of X-ray radiation by 500 MeV electrons in a tungsten crystal. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms*, 2003, vol. 201, no. 1, pp. 114–122. [https://doi.org/10.1016/s0168-583x\(02\)01310-1](https://doi.org/10.1016/s0168-583x(02)01310-1)
18. Afanasenko V. P., Baryshevsky V. G., Lobko A. S., Panov V. V., Zuevsky R. F. Experimental study of the influence of multiple scattering on the parametric X-rays characteristics. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, 1993, vol. 334, no. 1–2, pp. 631–637. [https://doi.org/10.1016/0168-9002\(93\)90831-2](https://doi.org/10.1016/0168-9002(93)90831-2)
19. Lobko A. S. *Experimental Investigations of Parametric X-ray Radiation*. Minsk, Belarusian State University, 2006. 211 p. (in Russian).

20. Balanov A., Gorlach A., Baryshevsky V., Feranchuk I., Nitta H., Hayakawa Y., Shchagin A. [et al.]. Coherent interactions of free electrons and matter: toward tunable compact x-ray sources. *Advances in Optics and Photonics*, 2025, vol. 17, no. 4, pp. 726–788. <https://doi.org/10.1364/aop.559742>
21. *X-ray server*. Available at: <https://x-server.gmca.aps.anl.gov/x0h.html> (accessed 01.02.2025).
22. Baryshevsky V. G., Lugovskaya O. M. On parametric x-ray radiation. *Physics of Atomic Nuclei*, 2023, vol. 66, pp. 409–415. <https://doi.org/10.1134/1.1553515>

### Информация об авторе

**Анищенко Сергей Владимирович** – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории физики высоких плотностей энергии, Институт ядерных проблем Белорусского государственного университета (ул. Бобруйская, 11, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: sanishchenko@mail.ru

### Information about the author

**Sergei V. Anishchenko** – Ph. D. (Physics and Mathematics), Senior Researcher, High energy density physics laboratory, Institute for Nuclear Problems of Belarusian State University (11, Bobruiskaya Str., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: sanishchenko@mail.ru

ISSN 1561-2430 (Print)

ISSN 2524-2415 (Online)

УДК 537.86,621.396.67

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2025-61-4-343-352>

Поступила в редакцию 20.10.2025

Received 20.10.2025

**М. А. Подалов<sup>1</sup>, И. В. Семченко<sup>2</sup>, А. Л. Самофалов<sup>1</sup>, С. А. Хахомов<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>*Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины,  
Гомель, Республика Беларусь*

<sup>2</sup>*ГНПО «Оптика, оптоэлектроника и лазерная техника»,  
Минск, Республика Беларусь*

## **ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА МЕТАПОВЕРХНОСТИ НА ОСНОВЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ $\Omega$ -ЭЛЕМЕНТОВ НА ПОДЛОЖКЕ ИЗ СТЕКЛОТЕКСТОЛИТА**

**Аннотация.** Целью работы является создание с использованием технологий печатных плат нового типа поляризаторов в СВЧ-диапазоне для преобразования падающей линейно поляризованной волны в отраженную циркулярно поляризованную. Преобразователь поляризации представляет собой метаповерхность, состоящую из массива плоских медных прямоугольных  $\Omega$ -элементов, на подложке из стеклотекстолита. Найдена оптимальная форма  $\Omega$ -элементов, при которой в каждом из них под действием падающей волны индуцируются одинаково значимые электрический дипольный момент и магнитный момент. Эти оптимальные геометрические параметры  $\Omega$ -элементов позволяют использовать их в поглотителях СВЧ-волн. Показано, что такая форма  $\Omega$ -резонаторов, образующих метаповерхность, также универсальна для их применения в ТГц-поляризаторах. Исследованы поляризационно-селективные свойства метаматериала на основе стандартного фольгированного медью стеклотекстолита. Метаматериал, образованный прямоугольными  $\Omega$ -элементами, проявил поляризационно-селективные свойства вблизи резонансной частоты в СВЧ-диапазоне и может использоваться как эффективный преобразователь поляризации СВЧ-волн.

**Ключевые слова:** метаматериал, метаповерхность, прямоугольный омега-элемент,  $\Omega$ -элемент, циркулярная поляризация электромагнитной волны, печатные платы

**Для цитирования.** Поляризационные свойства метаповерхности на основе прямоугольных  $\Omega$ -элементов на подложке из стеклотекстолита / М. А. Подалов, И. В. Семченко, А. Л. Самофалов, С. А. Хахомов // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. – 2025. – Т. 61, № 4. – С. 343–352. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2025-61-4-343-352>

**Maxim A. Podalov<sup>1</sup>, Igor V. Semchenko<sup>2</sup>, Andrey L. Samofalov<sup>1</sup>, Sergei A. Khahomov<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>*Francisk Skorina Gomel State University, Gomel, Republic of Belarus*

<sup>2</sup>*SSPA “Optics, Optoelectronics, and Laser Technology”, Minsk, Republic of Belarus*

## **POLARIZATION PROPERTIES OF A METASURFACE BASED ON RECTANGULAR $\Omega$ -ELEMENTS ON A GLASS TEXTOLITE SUBSTRATE**

**Annotation.** The goal of this project is to create a new type of polarizer using printed circuit boards that can convert an incident linearly polarized wave into a reflected circularly polarized wave in the microwave range. This device represents a metamaterial surface consisting of a metal plate array made up of flat copper rectangular  $\Omega$ -elements on a glass fiber substrate. By optimizing the shape of these elements, we found that they can also be used as absorbers for microwaves in addition to their ability to transform polarization. We showed that this form of  $\Omega$ -resonators, which make up the metamaterial surface, are universal for use in THz polarizers. Finally, we investigated the polarization-selective properties of a metamaterial based on standard copper-coated fiberglass. This material exhibited polarization-selective properties near the resonant frequency in the microwave range and can be used as an effective polarization converter for microwaves.

**Keywords:** metamaterial, metasurface, rectangular omega element,  $\Omega$ -element, circular polarization of an electromagnetic wave, printed circuit boards

**For citation.** Podalov M. A., Semchenko I. V., Samofalov A. L., Khahomov S. A. Polarization properties of a metasurface based on rectangular  $\Omega$ -elements on a glass textolite substrate. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2025, vol. 61, no. 4, pp. 343–352 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2025-61-4-343-352>

**Введение.** В настоящее время развитие технологий изготовления метаматериалов переживает бурный рост, в первую очередь в направлении создания метаповерхностей. При этом, несмотря на успешные исследования, широкополосный преобразователь поляризации волны из линейной в циркулярную (круговую) при отражении волны в СВЧ-диапазоне до настоящего времени реализован в недостаточной степени. Поэтому задача создания такого поляризатора остается новой и актуальной, особенно с использованием методов и стандартов современной фотолитографии и технологий печатных плат.

Поляризаторы электромагнитных волн на основе метаматериалов и метаповерхностей в различных областях спектра могут иметь элементы различной формы, например, это спирали с различным числом витков, разомкнутые кольца, ориентированные в разных положениях, а также  $\Omega$ -элементы классической или прямоугольной формы [1–9]. Основной диапазон такого рода поляризаторов составляет СВЧ- и в меньшей степени ТГц-полоса спектра.

Стоит отметить, что  $\Omega$ -элементы и разомкнутые кольца имеют планарную геометрию и сравнительно легко могут быть изготовлены с помощью методов современной фотолитографии.

Ранее было сформулировано и экспериментально исследовано условие оптимальности  $\Omega$ -элемента в составе двумерного массива, в первую очередь для создания поглотителя СВЧ- и ТГц-волн. Это условие оптимальности определяется одинаковой значимостью индуцируемых электрических дипольных моментов и магнитных моментов. В оптимальном элементе эти моменты равны между собой по модулю либо, в зависимости от выбора системы единиц, имеют коэффициент пропорциональности, равный скорости света в вакууме. Длина металлизированной полоски, образующей поляризующий элемент, приблизительно равна половине длины волны падающего излучения, что соответствует условию главного частотного резонанса [10–13].

Целью данной статьи является получение, исследование и создание метаматериала (метаповерхности), образованного массивом прямоугольных  $\Omega$ -элементов, с помощью методов современной фотолитографии на базе стандартного фольгированного медью стеклотекстолита, к примеру FR4 ( $T_g$  135). Использование прямоугольных  $\Omega$ -элементов взамен классических элементов в форме греческой буквы  $\Omega$  упрощает изготовление метаматериала в рамках технологий печатных плат и позволяет достичь более плотного расположения элементов на метаповерхности. Такая метаповерхность может быть использована в СВЧ-диапазоне для частотной фильтрации и преобразования поляризации волны из линейной в циркулярную, при отражении волны от метаматериала. Возникновение циркулярно поляризованной отраженной волны обусловлено одновременным активированием электрического дипольного момента и магнитного момента в каждом прямоугольном  $\Omega$ -элементе. При этом электрический дипольный и магнитный моменты играют одинаково важную роль и вносят равные по абсолютной величине вклады в отраженную волну.

**Границные условия и моделирование.** Ранее в работах [10, 11] нами были рассчитаны и экспериментально исследованы  $\Omega$ -элементы в СВЧ-диапазоне (2,55–3,8 ГГц). Такие частицы рассматривались также для терагерцового диапазона в качестве элементов эффективных поляризаторов либо поглотителей электромагнитных волн [12–15]. На данном этапе исследований разрабатывается метаповерхность на базе массива прямоугольных  $\Omega$ -элементов, параметры которых оптимизированы для СВЧ-диапазона и стандартизированы для производства с помощью методов современной фотолитографии. Показано, что метаматериал на основе массива  $\Omega$ -элементов может выполнять функции эффективного преобразователя поляризации электромагнитной волны в СВЧ-диапазоне.

Проектирование отдельного прямоугольного  $\Omega$ -элемента и массива на его основе для СВЧ-диапазона сопряжено с изменением параметров элемента в соответствии с изменением длины волны падающего излучения. В частности, длина волны для резонансной частоты 3 ГГц составляет 10 см, а длина металлизированной полоски, образующей  $\Omega$ -элемент, будет приблизительно равна 5 см.

После построения объекта моделирования были введены граничные условия и заданы параметры падающей электромагнитной волны. При решении поставленной задачи использовалась падающая плоская волна. Согласно общепринятым обозначениям для  $s$ -поляризованной волны

(TE-волны) вектор  $\vec{E}$  колеблется ортогонально плоскости падения и параллельно поверхности метаматериала. Для р-поляризованной волны (TM-волны) вектор  $\vec{E}$  колеблется в плоскости падения и в нашем эксперименте под углом  $45^\circ$  к поверхности метаматериала. Поскольку плоскость падения волны параллельна плечам  $\Omega$ -элементов, то р-поляризованная волна наиболее эффективно индуцирует электрические дипольные моменты  $\Omega$ -элементов. В другом случае для s-поляризованной волны наиболее эффективно возбуждаются магнитные моменты  $\Omega$ -элементов, это происходит под действием вектора магнитного поля  $\vec{B}$  падающей волны, который создает магнитный поток сквозь прямоугольные  $\Omega$ -элементы.

Методика исследования заключается в численном моделировании с помощью метода конечных элементов электрического тока, возникающего в массиве прямоугольных  $\Omega$ -элементов под действием падающей электромагнитной волны. Рассчитаны электрический дипольный момент и магнитный момент  $\Omega$ -элемента, имеющие взаимно перпендикулярное направление. Учтено влияние геометрических параметров  $\Omega$ -элемента на возможность получения круговой поляризации отраженной волны при падении линейно поляризованной волны.

В исследовании использовалась традиционная бианизотропная частица с  $\Omega$ -связью – металлическая полоска в форме стилизованной греческой буквы  $\Omega$ , которая в рассматриваемом случае в результате приобрела прямоугольную форму, более удобную для изготовления в рамках технологий печатных плат и позволяющую более плотно располагать микрорезонаторы на метаповерхности.

Параметры  $\Omega$ -элемента как классической, так и стилизованной прямоугольной формы могут быть приближенно рассчитаны с учетом модели квазистационарного тока. При этом предполагается, что сила тока не изменяется в зависимости от координаты, отсчитываемой вдоль  $\Omega$ -элемента, а электромагнитные и магнитоэлектрические поляризуемости для оптимального (сбалансированного)  $\Omega$ -элемента должны быть равны друг другу.

Используя массив оптимальных резонаторов на метаповерхности, можно усилить поляризационные свойства метаматериала в целом. Однако требуется дополнительная оптимизация расположения частиц в массиве, поскольку их взаимодействие здесь также значительно влияет на свойства поляризатора. На рис. 1 показан дизайн отдельного  $\Omega$ -резонатора со структурными параметрами (a) и дизайн метаповерхности на основе прямоугольного  $\Omega$ -резонатора со структурными параметрами (b).

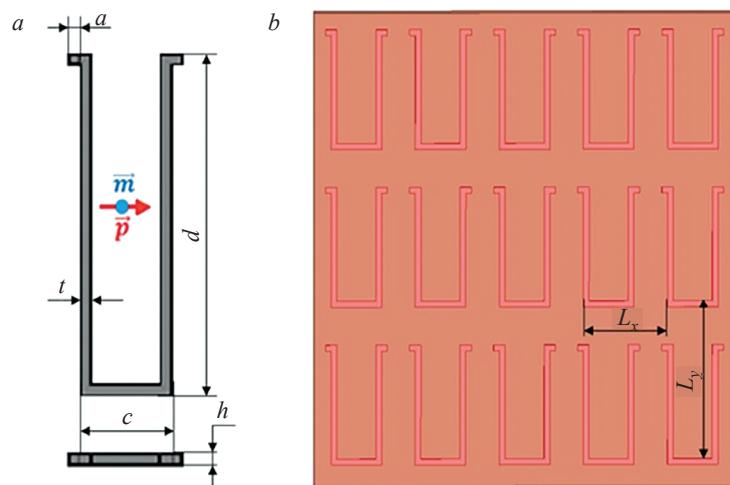


Рис. 1. Дизайн отдельного  $\Omega$ -резонатора со структурными параметрами (a) и дизайн метаповерхности на основе прямоугольных  $\Omega$ -резонаторов со структурными параметрами (b)

Здесь  $\vec{p}$  и  $\vec{m}$  – векторы электрического дипольного момента и магнитного момента прямоугольного  $\Omega$ -резонатора

Fig. 1. Design of a single  $\Omega$ -resonator with structural parameters (a) and design of a metasurface based on rectangular  $\Omega$ -resonators with structural parameters (b). Here  $\vec{p}$  and  $\vec{m}$  are the manifestation designations of the dipole moment and magnetic moment of a rectangular  $\Omega$ -resonator

Основные структурные параметры прямоугольного  $\Omega$ -резонатора указаны на рис. 1, *a*. Ширина элемента равна  $c$ , ширина металлизированной полоски –  $t$ , длина элемента –  $d$ , толщина медной металлизированной полоски  $h = 35$  мкм (в нашем случае она всегда одинакова, так как соответствует технологическим требованиям к толщине фольги), длина плеча –  $a$  (в принципе, плечо может отсутствовать). На рис. 1, *b* приведены параметры массива прямоугольных  $\Omega$ -резонаторов. Период массива по горизонтали равен  $L_x$ , период массива по вертикали –  $L_y$ . Модель массива метаповерхности образована 15 прямоугольными  $\Omega$ -элементами. Подложка выполнена из стеклотекстолита FR4 толщиной 0,51 мм. Параметры толщины медной фольги и стеклотекстолита FR4 подобраны в соответствии со стандартами, принятыми при производстве серийных односторонних печатных плат.

**Результаты моделирования и их анализ.** В работе рассмотрен случай с наклонным падением электромагнитной волны, вектор  $\vec{k}$  падающей волны направлен под углом  $45^\circ$  к нормали к метаповерхности.

Наклонное падение СВЧ-волны (при ориентации вектора  $\vec{k}$  под углом  $45^\circ$  к плоскости  $\Omega$ -элемента) позволяет активировать и электрический дипольный момент, и магнитный момент  $\Omega$ -элементов, поэтому коэффициент эллиптичности отраженной волны будет достигать максимальных значений на расчетной частоте. При этом выполняется условие полуволнового резонанса, поэтому коэффициент отражения также принимает максимальное значение.

Рассмотрим первый случай, соответствующий *p*-поляризации. Параметрическое моделирование проводилось с использованием в основном пяти параметров элемента: ширина элемента, ширина металлизированной полоски, длина плеча, расстояние между элементами по горизонтали и по вертикали. Из всех изученных параметров наиболее хорошим поляризатором для получения циркулярно поляризованной отраженной волны оказался массив  $\Omega$ -элементов с параметрами:  $c = 9$  мм,  $t = 1$  мм,  $d = 20,5$  мм,  $a = 1$  мм,  $L_x = 15$  мм и  $L_y = 27$  мм. Метаповерхность с такими параметрами показала коэффициент эллиптичности отраженной волны  $k_1 = 0,999$  на расчетной частоте, равной 3 ГГц (рис. 2). Также на кривой есть второй пик на частоте 2,35 ГГц со значением  $k_2 = 0,975$ . При этом  $\Omega$ -элемент достаточно хорошо преобразует поляризацию электромагнитной

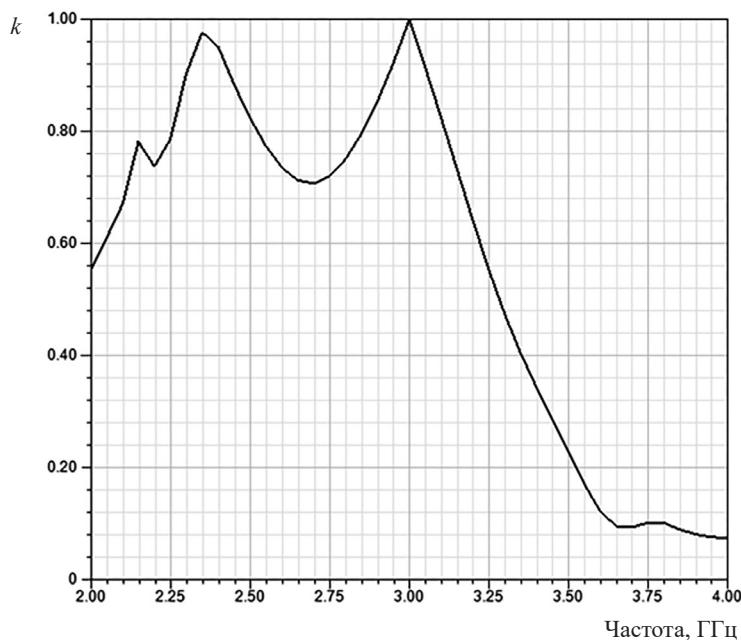


Рис. 2. График частотной зависимости коэффициента эллиптичности  $k$  отраженной волны для метаповерхности с параметрами:  $L_x = 15$  мм,  $L_y = 27$  мм, падающая волна *p*-поляризована

Fig. 2. Graph of the frequency dependence of the ellipticity coefficient  $k$  of the reflected wave for a metasurface with the parameters:  $L_x = 15$  mm,  $L_y = 27$  mm, the incident wave is *p*-polarized

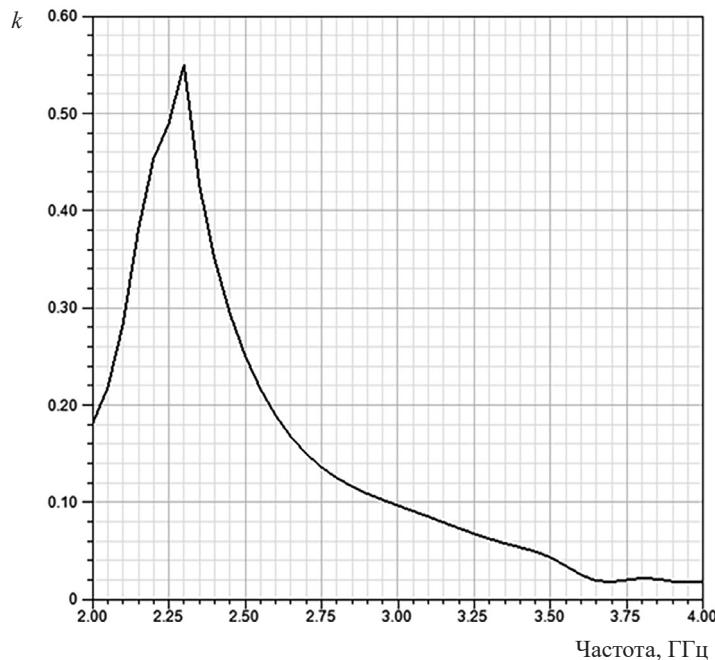


Рис. 3. Графік частотной зависимости коэффициента эллиптичности  $k$  отраженной волны для метаповерхности с параметрами:  $L_x = 15$  мм,  $L_y = 28$  мм, падающая волна s-поляризована

Fig. 3. Graph of the frequency dependence of the ellipticity coefficient  $k$  of the reflected wave for a metasurface with the parameters:  $L_x = 15$  mm,  $L_y = 28$  mm, the incident wave is s-polarized

волны при ее отражении от плоско поляризованной падающей волны к циркулярно поляризованной отраженной волне в достаточно широком частотном интервале. Максимальные значения напряженности электрического поля отраженной волны наблюдаются на диапазоне частот 2,1–2,3 ГГц, что свидетельствует о достаточно хорошем возбуждении электромагнитной волной  $\Omega$ -элемента в районе второго пика коэффициента эллиптичности.

При анализе второго случая, при s-поляризации, можно заключить, что лучшими поляризационными свойствами обладает массив  $\Omega$ -элементов с параметрами  $c = 9$  мм,  $t = 1$  мм,  $d = 20,5$  мм,  $a = 1$  мм,  $L_x = 15$  мм и  $L_y = 28$  мм. Фактически, по сравнению с первым случаем, изменился только параметр массива  $L_y$ . Метаповерхность на основе  $\Omega$ -элементов с такими параметрами показала коэффициент эллиптичности отраженной волны  $k_{\max} = 0,549$  на частоте, равной 2,3 ГГц, что соответствует эллиптически-поляризованной отраженной волне (рис. 3). В этом случае «виток»  $\Omega$ -элемента пронизывается вектором магнитного поля падающей волны, т. е. активируется вектором  $\vec{B}$ . Сравнительно небольшой коэффициент эллиптичности объясняется недостаточно эффективно работающей электрической составляющей падающей волны.

**Экспериментальное исследование.** Для подтверждения результатов моделирования был изготовлен образец метаматериала, состоящего из  $\Omega$ -элементов прямоугольной формы, изготовленных на основе стеклотекстолита (рис. 4). С образцами были проведены экспериментальные исследования в СВЧ-диапазоне, частотный диапазон составил 2–4 ГГц [16]. Схема эксперимента показана на рис. 5.

Анализ графиков на рис. 6 показал достаточно хорошую степень соответствия результатов экспериментального исследования взаимодействия электромагнитных СВЧ-волн с образцами двумерного метаматериала с результатами моделирования. В случае р-поляризации падающей волны (a) коэффициент эллиптичности отраженной волны равен  $k = 0,92$  на частоте 3,479 ГГц. В случае s-поляризации падающей волны (b) коэффициент эллиптичности отраженной волны равен  $k = 0,55$  на частоте 2,437 ГГц.

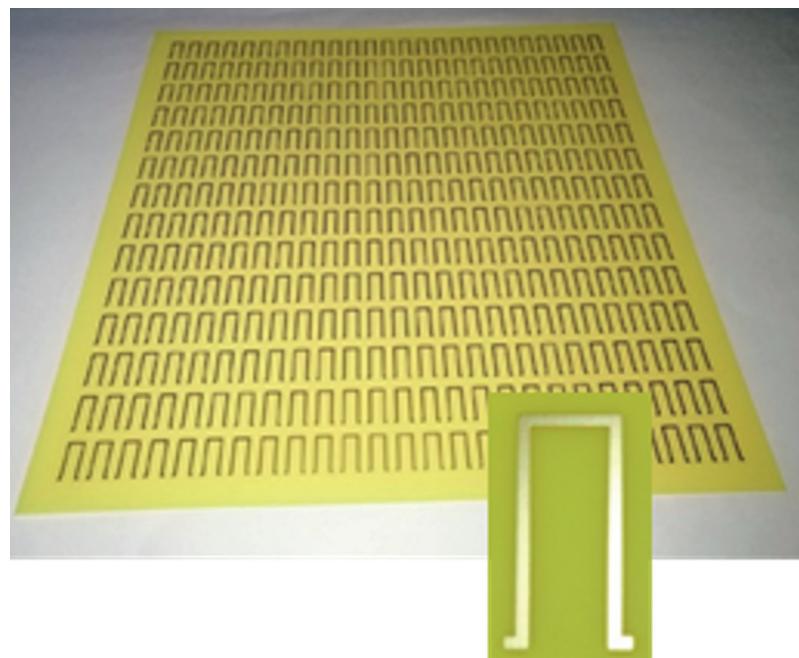


Рис. 4. Экспериментальный образец метаматериала на основе стеклотекстолита

Fig. 4. Photo of an experimental sample of a metamaterial based on fiberglass

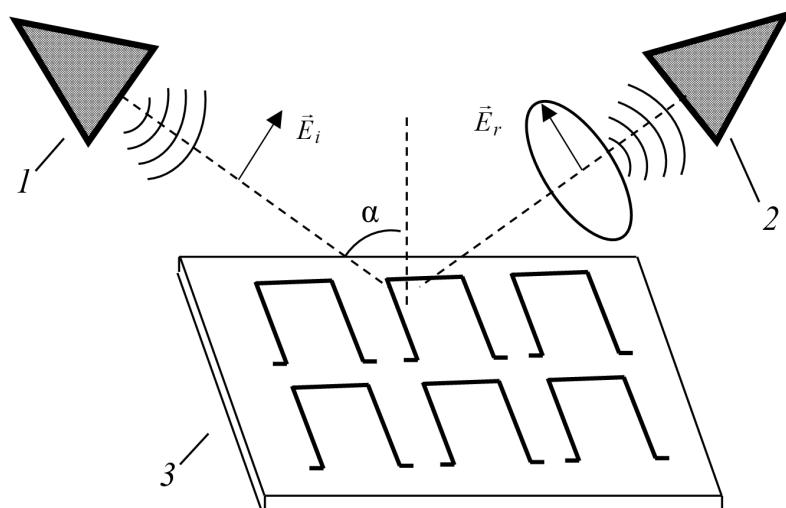


Рис. 5. Схема эксперимента: показан случай р-поляризации падающей волны; при s-поляризации вектор  $\vec{E}_i$  ориентирован перпендикулярно плоскости падения; отраженная волна имеет эллиптическую поляризацию, близкую к циркулярной (1 – излучающая антенна; 2 – приемная антенна; 3 – образец метаматериала;  $\alpha = 45^\circ$  – угол падения;  $\vec{E}_r$  – вектор напряженности электрического поля отраженной волны)

Fig. 5. Experimental setup: the case of p-polarization of the incident wave is shown; for s-polarized incident waves, the vector  $\vec{E}_i$  is oriented perpendicular to the plane of incidence; the reflected wave has an elliptical polarization, close to circular one (1 is an emitting antenna; 2 is a receiving antenna; 3 is a metamaterial sample;  $\alpha = 45^\circ$  is the angle of incidence;  $\vec{E}_r$  is the electric field strength vector of the reflected wave)

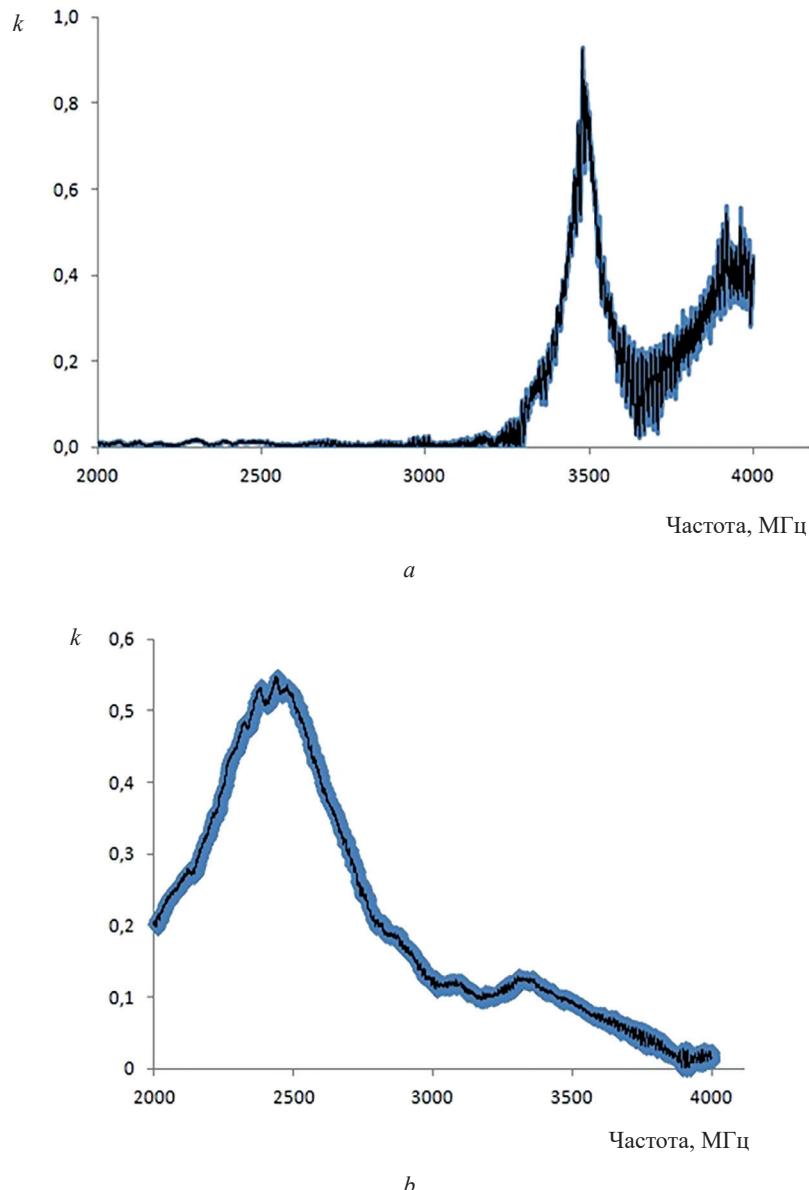


Рис. 6. Графики результатов экспериментального исследования коэффициента эллиптичности отраженной волны  $k$  при взаимодействии падающей линейно поляризованной электромагнитной волны с образцом двумерного метаматериала, состоящего из  $\Omega$ -элементов прямоугольной формы, изготовленных на основе стеклотекстолита:  
*a* –  $p$ -поляризация падающей волны; *b* –  $s$ -поляризация падающей волны

Fig. 6. Graphs of the results of an experimental study of the ellipticity coefficient of the reflected wave  $k$  during the interaction of an incident linearly polarized electromagnetic wave with a sample of a two-dimensional metamaterial consisting of rectangular  $\Omega$ -elements made on the basis of fiberglass: *a* is  $p$ -polarization of the incident wave; *b* is  $s$ -polarization of the incident wave

**Заключение.** По результатам моделирования отдельного прямоугольного  $\Omega$ -элемента и определения его оптимальной формы сделан вывод о том, что метаповерхность на основе прямоугольных  $\Omega$ -элементов обладает хорошими поляризующими свойствами, рассчитанными для СВЧ-диапазона. Такая метаповерхность является эффективным поляризатором электромагнитных волн с коэффициентом эллиптичности отраженной волны, близким к единице, при наклонном падении линейно поляризованной электромагнитной волны под углом  $45^\circ$  к плоскости метаповерхности.

Возникновение циркулярно поляризованной отраженной волны является результатом одновременного возбуждения электрического дипольного момента и магнитного момента в каждом прямоугольном  $\Omega$ -элементе. При этом электрический дипольный момент и ортогональный ему магнитный момент имеют одинаково важное значение и вносят вклады в отраженную волну, одинаковые по абсолютной величине.

Одним из преимуществ рассматриваемого прямоугольного  $\Omega$ -элемента является то, что преобразование поляризации СВЧ-волны из падающей линейно поляризованной в циркулярно поляризованную в исследуемом метаматериале будет возможно для отраженной волны, а не для волны, проходящей через метаматериал. Это позволит использовать поглощающие метаматериалы и снизить потери в интенсивности волн с преобразованной поляризацией.

Максимальное значение коэффициента эллиптичности, близкое к единице, наблюдается у массива прямоугольных  $\Omega$ -элементов с параметрами:  $c = 9$  мм,  $t = 1$  мм,  $d = 20,5$  мм,  $a = 1$  мм,  $L_x = 15$  мм и  $L_y = 27$  мм. Метаповерхность на основе  $\Omega$ -элементов с такими параметрами показала коэффициент эллиптичности отраженной волны  $k_1 = 0,999$  на расчетной частоте, равной 3 ГГц, и  $k_2 = 0,975$  на частоте 2,35 ГГц в случае р-поляризации падающей волны. По результатам параметрического моделирования метаповерхности изготовлен экспериментальный образец.

Показано, что для создания поляризатора в СВЧ-диапазоне вблизи резонансной частоты может быть использован двумерный метаматериал на основе  $\Omega$ -элементов прямоугольной формы на базе стеклотекстолита. Этот вывод подтверждается результатами моделирования и эксперимента. Для создания метаматериалов и метаповерхностей на основе прямоугольных элементов, обладающих стилизованной прямоугольной формой, могут быть использованы методы печатных плат. Вакуумно-плазменные технологии также могут быть применены для получения  $\Omega$ -структурных метаматериалов и метаповерхностей, содержащих прямоугольные элементы.

**Благодарности.** Работа выполнена в рамках Государственной программы научных исследований «Фотоника, опто- и микроэлектроника» подпрограммы «Фотоника».

**Acknowledgments.** This work was carried out in the framework of the State Scientific Research Program “Photonics, Opto- and Microelectronics”, subprogram “Photonics”.

## Список использованных источников

1. Cheng, Z. A multi-functional polarization convertor based on chiral metamaterial for terahertz waves / Z. Cheng, Y. Cheng // Optics Communications. – 2019. – Vol. 435. – P. 178–182. <https://doi.org/10.1016/j.optcom.2018.11.038>
2. Sun, B. Optical refractive index sensor based on the conjugated bilayer  $\Gamma$ -shaped chiral metamaterials / B. Sun, Y. Yingying // Optik. – 2019. – Vol. 182. – P. 587–593. <https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2019.01.028>
3. Yu, Y. Analysis of giant circular dichroism metamaterial based on conductive coupling / Y. Yu, B. Sun // Optik. – 2019. – Vol. 182. – P. 1046–1052. <https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2019.02.019>
4. A bi-layered chiral metamaterial with high-performance broadband asymmetric transmission of linearly polarized wave / F. Mirzamohammadi, J. Nourinia, C. Ghobadi, M. Majidzadeh // AEU – International Journal of Electronics and Communications. – 2019. – Vol. 98. – P. 58–67. <https://doi.org/10.1016/j.aeue.2018.11.008>
5. Asymmetric chiral metamaterial circular polarizer based on twisted split-ring resonator / Y. Z. Cheng, Y. Nie, Z. Z. Cheng [et al.] // Applied Physics B. – 2014. – Vol. 116. – P. 129–134. <https://doi.org/10.1007/s00340-013-5659-z>
6. 3D chiral plasmonic metamaterials fabricated by direct laser writing: the twisted omega particle / I. Sakellari, X. Yin, M. L. Nesterov [et al.] // Advanced Optical Materials. – 2017. – Vol. 5, № 16. – Art. ID 1700200. <https://doi.org/10.1002/adom.201700200>
7. Numerical parametric study of chiral effects and group delays in  $\Omega$  element based terahertz metamaterial / D. B. Stojanović, P. P. Belić, J. Radovanović, V. Milanović // Physics Letters A. – 2019. – Vol. 383, № 15. – P. 1816–1820. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2019.02.035>
8. Broadband asymmetric transmission and polarization conversion of a linearly polarized wave based on chiral metamaterial in terahertz region / D. Liu, Z. Y. Xiao, X. L. Ma [et al.] // Wave Motion. – 2016. – Vol. 66. – P. 1–9. <https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2016.05.003>
9. Broadband asymmetric transmission and multi-band 90° polarization rotator of linearly polarized wave based on multi-layered metamaterial / D. Liu, Z. Y. Xiao, X. L. Ma, Z. H. Wang // Optics Communications. – 2015. – Vol. 354. – P. 272–276. <https://doi.org/10.1016/j.optcom.2015.04.043>
10. Radiation of circularly polarized microwaves by a plane periodic structure of  $\Omega$  elements / I. V. Semchenko, S. A. Khakhomov, M. A. Podalov, S. A. Tret'yakov // Journal of Communications Technology and Electronics. – 2007. – Vol. 52, № 9. – P. 1002–1005. <https://doi.org/10.1134/S1064226907090082>

11. The effective optimal parameters of metamaterial on the base of omega-elements / I. V. Semchenko, S. A. Khakhomov, A. L. Samofalov [et al.] // Recent Global Research and Education: Technological Challenges: Proceedings of the 15th International Conference on Global Research and Education Inter-Academia 2016 / eds: R. Jabłoński, R. Szewczyk. – Springer, Cham, 2017. – P. 3–9. – (Advances in Intelligent Systems and Computing; vol. 519). [https://doi.org/10.1007/978-3-319-46490-9\\_1](https://doi.org/10.1007/978-3-319-46490-9_1)
12. Omega-structured substrate-supported metamaterial for the transformation of wave polarization in THz frequency range / I. Semchenko, S. Khakhomov, A. Samofalov [et al.] // Recent Advances in Technology Research and Education: Proceedings of the 16th International Conference on Global Research and Education Inter-Academia 2017 / eds: D. Luca, L. Sirghi, C. Costin. – Springer International Publishing, 2017. – P. 72–80. – (Advances in Intelligent Systems and Computing; vol. 660). [https://doi.org/10.1007/978-3-319-67459-9\\_10](https://doi.org/10.1007/978-3-319-67459-9_10)
13. Ground-plane-less bidirectional terahertz absorber based on omega resonators / A. Balmakou, M. Podalov, S. Khakhomov [et al.] // Optics Letters. – 2015. – Vol. 40, № 9. – P. 2084–2084. <https://doi.org/10.1364/OL.40.002084>
14. Polarization Properties of a Rectangular Balanced Omega Element in the THz Range / I. V. Semchenko, S. A. Khakhomov, M. A. Podalov, A. L. Samofalov // Engineering for Sustainable Future. INTER-ACADEMIA 2019 / ed. A. Várkonyi-Kóczy. – Springer, 2020. – P. 84–93. – (Lecture Notes in Networks and Systems; vol 101). [https://doi.org/10.1007/978-3-030-36841-8\\_8](https://doi.org/10.1007/978-3-030-36841-8_8)
15. Terahertz Polarization-Resolved Spectra of the Metamaterial Formed by Optimally Shaped Omega Elements on a Silicon Substrate at Oblique Incidence of Waves / A. V. Lyakhovich, I. V. Semchenko, A. L. Samofalov [et al.] // Photonics. – 2024. – Vol. 11, № 2. – Art. ID 163. <https://doi.org/10.3390/photonics11020163>
16. Microwave polarization converter consisting of rectangular omega resonators located on a dielectric substrate / I. Semchenko, S. Khakhomov, M. Podalov, A. Samofalov // 2021 Fifteenth International Congress on Artificial Materials for Novel Wave Phenomena (Metamaterials), NYC. – New York, 2021. – P. 386–388. <https://doi.org/10.1109/metamaterials52332.2021.9577110>

## References

1. Cheng Z., Cheng Y. A multi-functional polarization convertor based on chiral metamaterial for terahertz waves. *Optics Communications*, 2019, vol. 435, pp. 178–182. <https://doi.org/10.1016/j.optcom.2018.11.038>
2. Sun B., Yingying Y. Optical refractive index sensor based on the conjugated bilayer Γ-shaped chiral metamaterials. *Optik*, 2019, vol. 182, pp. 587–593. <https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2019.01.028>
3. Yu Y., Sun B. Analysis of giant circular dichroism metamaterial based on conductive coupling. *Optik*, 2019, vol. 182, pp. 1046–1052. <https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2019.02.019>
4. Mirzamohammadi F., Nourinia J., Ghobadi C., Majidzadeh M. A bi-layered chiral metamaterial with high-performance broadband asymmetric transmission of linearly polarized wave. *AEU – International Journal of Electronics and Communications*, 2019, vol. 98, pp. 58–67. <https://doi.org/10.1016/j.aeue.2018.11.008>
5. Cheng Y. Z., Nie Y., Cheng Z. Z., Wang X., Gong R. Z. Asymmetric chiral metamaterial circular polarizer based on twisted split-ring resonator. *Applied Physics B*, 2014, vol. 116, pp. 129–134. <https://doi.org/10.1007/s00340-013-5659-z>
6. Sakellari I., Yin X., Nesterov M. L., Terzaki K., Xomalis A., Farsari M. 3D chiral plasmonic metamaterials fabricated by direct laser writing: the twisted omega particle. *Advanced Optical Materials*, 2017, vol. 5, no. 16, art. ID 1700200. <https://doi.org/10.1002/adom.201700200>
7. Stojanović D. B., Belićev P. P., Radovanović J., Milanović V. Numerical parametric study of chiral effects and group delays in Ω element based terahertz metamaterial. *Physics Letters A*, 2019, vol. 383, no. 15, pp. 1816–1820. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2019.02.035>
8. Liu D. J., Xiao Z. Y., Ma X. L., Xu K. K., Tang J. Y., Wang Z. H. Broadband asymmetric transmission and polarization conversion of a linearly polarized wave based on chiral metamaterial in terahertz region. *Wave Motion*, 2016, vol. 66, pp. 1–9. <https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2016.05.003>
9. Liu D. J., Xiao Z. Y., Ma X. L., Wang Z. H. Broadband asymmetric transmission and multi-band 90° polarization rotator of linearly polarized wave based on multi-layered metamaterial. *Optics Communications*, 2015, vol. 354, pp. 272–276. <https://doi.org/10.1016/j.optcom.2015.04.043>
10. Semchenko I. V., Khakhomov S. A., Podalov M. A., Tretyakov S. A. Radiation of circularly polarized microwaves by a plane periodic structure of Ω elements. *Journal of Communications Technology and Electronics*, 2007, vol. 52, no. 9, pp. 1002–1005. <https://doi.org/10.1134/S1064226907090082>
11. Semchenko I. V., Khakhomov S. A., Samofalov A. L., Podalov M. A., Songsong Q. The effective optimal parameters of metamaterial on the base of omega-elements. Jabłoński R., Szewczyk R. (eds). *Recent Global Research and Education: Technological Challenges: Proceedings of the 15th International Conference on Global Research and Education Inter-Academia 2016. Advances in Intelligent Systems and Computing*, vol. 519. Springer, Cham, 2017, pp. 3–9. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-46490-9\\_1](https://doi.org/10.1007/978-3-319-46490-9_1)
12. Semchenko I., Khakhomov S., Samofalov A., Podalov M., Solodukha V., Pyatlitski A., Kovalchuk N. Omega-structured substrate-supported metamaterial for the transformation of wave polarization in THz frequency range. Luca D., Sirghi L., Costin C. (eds). *Recent Advances in Technology Research and Education: Proceedings of the 16th International Conference on Global Research and Education Inter-Academia 2017. Advances in Intelligent Systems and Computing*, vol. 660. Springer International Publishing, 2017, pp. 72–80. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-67459-9\\_10](https://doi.org/10.1007/978-3-319-67459-9_10)

13. Balmakou A., Podalov M., Khakhomov S., Stavenga D., Semchenko I. Ground-plane-less bidirectional terahertz absorber based on omega resonators. *Optics Letters*, 2015, vol. 40, no. 9, pp. 2084–2087. <https://doi.org/10.1364/OL.40.002084>
14. Semchenko I., Khakhomov S., Podalov M., Samofalov A. Polarization Properties of a Rectangular Balanced Omega Element in the THz Range. Várkonyi-Kóczy A. (eds). *Engineering for Sustainable Future. INTER-ACADEMIA 2019. Lecture Notes in Networks and Systems, vol. 101*. Springer, 2020, pp. 84–93. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-36841-8\\_8](https://doi.org/10.1007/978-3-030-36841-8_8)
15. Lyakhovich A. V., Semchenko I. V., Samofalov A. L., Podalov M. A., Sinitsyn G. V., Kravchenko A. Y., Khakhomov S. A. Terahertz Polarization-Resolved Spectra of the Metamaterial Formed by Optimally Shaped Omega Elements on a Silicon Substrate at Oblique Incidence of Waves. *Photonics*, 2024, vol. 11, no. 2, art. ID 163. <https://doi.org/10.3390/photonics11020163>
16. Semchenko I., Khakhomov S., Podalov M., Samofalov A. Microwave polarization converter consisting of rectangular omega resonators located on a dielectric substrate. *2021 Fifteenth International Congress on Artificial Materials for Novel Wave Phenomena (Metamaterials)*, NYC. New York, 2021, pp. 386–388. <https://doi.org/10.1109/metamaterials52332.2021.9577110>

## Информация об авторах

**Подалов Максим Александрович** – старший преподаватель кафедры общей физики, Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины (ул. Советская, 104, 246028, Гомель, Республика Беларусь). E-mail: [podalov@gsu.by](mailto:podalov@gsu.by). <https://orcid.org/0000-0001-9387-7853>

**Семченко Игорь Валентинович** – член-корреспондент Национальной академии наук Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор, заместитель генерального директора по научной деятельности, ГНПО «Оптика, оптоэлектроника и лазерная техника» (пр. Независимости, 68-1, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: [igor.semchenko@internet.ru](mailto:igor.semchenko@internet.ru) <https://orcid.org/0000-0002-2438-0330>

**Самофалов Андрей Леонидович** – кандидат физико-математических наук, доцент, декан факультета физики и информационных технологий, Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины (ул. Советская, 104, 246028, Гомель, Республика Беларусь). E-mail: [samofalov@gsu.by](mailto:samofalov@gsu.by). <https://orcid.org/0000-0002-6691-9189>

**Хахомов Сергей Анатольевич** – доктор физико-математических наук, доцент, ректор, Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины (ул. Советская, 104, 246028, Гомель, Республика Беларусь). E-mail: [khakh@gsu.by](mailto:khakh@gsu.by). <https://orcid.org/0000-0001-7068-7061>

## Information about the authors

**Maxim A. Podalov** – Senior Lecturer of the Department of General Physics, Francisk Skorina Gomel State University (104, Sovetskaya Str., 246028, Gomel, Republic of Belarus). E-mail: [podalov@gsu.by](mailto:podalov@gsu.by). <https://orcid.org/0000-0001-9387-7853>

**Igor V. Semchenko** – Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Belarus, Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Deputy Director General for Research, SSPA “Optics, Optoelectronics and Laser Technology” (68-1, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: [igor.semchenko@internet.ru](mailto:igor.semchenko@internet.ru). <https://orcid.org/0000-0002-2438-0330>

**Andrey L. Samofalov** – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Dean of the Faculty of Physics and Information Technology, Francisk Skorina Gomel State University (104, Sovetskaya Str., 246028, Gomel, Republic of Belarus). E-mail: [samofalov@gsu.by](mailto:samofalov@gsu.by). <https://orcid.org/0000-0002-6691-9189>

**Sergei A. Khakhomov** – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Rector, Francisk Skorina Gomel State University (104, Sovetskaya Str., 246028, Gomel, Republic of Belarus). E-mail: [khakh@gsu.by](mailto:khakh@gsu.by). <https://orcid.org/0000-0001-7068-7061>