

ВЕСЦІ НАЦЫЯНАЛЬнай АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСІ

СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК. 2026. Т. 62, № 1

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ

СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК. 2026. Т. 62, № 1

Журнал основан в 1965 г. как «Весці Акадэміі навук БССР. Серыя фізіка-матэматычных навук»,
с 1992 г. – «Весці Акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук»,
с 1998 г. – современное название

Выходит четыре раза в год

Учредитель – Национальная академия наук Беларуси

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь,
свидетельство о регистрации № 392 от 18.05.2009

Издается при поддержке Белорусского физического общества

*Журнал входит в Перечень научных изданий Республики Беларусь
для опубликования результатов диссертационных исследований, включен в международную
базу данных Scopus и в базу данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ)*

Главный редактор

Валентин Антонович Орлович – Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук
Беларуси, Минск, Беларусь

Редакционная коллегия

В. Г. Сафонов – Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь (*заместитель
главного редактора*)

Т. Е. Янчук – (*ведущий редактор журнала*)

С. В. Абламейко – Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

С. М. Абрамов – Институт программных систем Российской академии наук, Москва, Россия

М. В. Богданович – ГНПО «Оптика, оптоэлектроника и лазерная техника», Минск, Беларусь

А. Ф. Васильев – Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины, Гомель, Беларусь

С. В. Гапоненко – Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск,
Беларусь

В. В. Гороховик – Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

Н. А. Изобов – Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

Н. С. Казак – Национальная академия наук Беларуси, Минск, Беларусь

С. Я. Килин – Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

Ф. Ф. Комаров – Институт прикладных физических проблем имени А. Н. Севченко Белорусского государ-
ственного университета, Минск, Беларусь

- В. И. Корзюк** – Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
Ю. А. Курочкин – Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
В. А. Лабунов – Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь
Е. К. Макаров – Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
С. А. Максименко – Институт ядерных проблем Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь
Д. Б. Мигас – Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь
Д. С. Могилевцев – Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
Н. А. Поклонский – Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
И. В. Семченко – ГНПО «Оптика, оптоэлектроника и лазерная техника», Минск, Беларусь
С. А. Тихомиров – Отделение физики, математики и информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
А. В. Тузиков – Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
Ю. С. Харин – Научно-исследовательский институт прикладных проблем математики и информатики Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь

Редакционный совет

- С. В. Абламейко** – Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
А. Л. Асеев – Президиум Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирск, Россия
В. Г. Бондур – Российская академия наук, Москва, Россия
Й. Врахтруп – Институт физики (3) Штутгартского университета, Штутгарт, Германия
А. М. Желтиков – Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия
С. Я. Килин – Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
В. В. Козлов – Математический институт имени В. А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия
Г. Лёйхс – Институт физики света имени М. Планка, Эрланген, Германия
Д. С. Могилевцев – Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
Нгуен Дай Хунг – Институт физики Вьетнамской академии наук и технологий, Ханой, Вьетнам
В. А. Орлович – Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
Стивен Чу – Стэнфордский университет, Стэнфорд, Калифорния, США
А. Цайлингер – Институт квантовой оптики и квантовой информатики Австрийской академии наук, Вена, Австрия

Адрес редакции:

ул. Академическая, 1, к. 118, 220072, г. Минск, Республика Беларусь.
Тел.: + 375 17 374-02-45; e-mail: fmvesti@mail.ru
vestifm.belnauka.by

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ.

Серия физико-математических наук. 2026. Т. 62, № 1.

Выходит на русском, белорусском и английском языках

Редактор *Т. Е. Янчук*

Компьютерная верстка *И. В. Счеснюк*

Подписано в печать 18.03.2026. Выход в свет 26.03.2026. Формат 60×84¹/₈. Бумага офсетная.

Печать цифровая. Усл. печ. л. 10,23. Уч.-изд. л. 11,3. Тираж 42 экз. Заказ 48.

Цена: индивидуальная подписка – 15,16 руб., ведомственная подписка – 34,53 руб.

Издатель и полиграфическое исполнение:

Республиканское унитарное предприятие «Издательский дом «Беларуская навука».

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/18 от 02.08.2013. ЛП № 02330/455 от 30.12.2013. Ул. Ф. Скорины, 40, 220084, г. Минск, Республика Беларусь

© РУП «Издательский дом «Беларуская навука»,

Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук, 2026

PROCEEDINGS OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF BELARUS

PHYSICS AND MATHEMATICS SERIES, 2026, vol. 62, no. 1

The Journal was founded in 1956 under the titles “Proceedings of the Academy of Sciences of BSSR. Physics and Mathematics Series”, since 1992 – “Proceedings of the Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series”, since 1998 – it comes under its actual title

Periodicity is 4 issues per annum

Founder is the National Academy of Sciences of Belarus

The journal is registered on May 18, 2009 by the Ministry of Information of the Republic of Belarus in the State Registry of Mass Media, reg. no. 392

It is published with support of the Belarusian Physical Society

The Journal is included in The List of Journals for Publication of the Results of Dissertation Research in the Republic of Belarus, in the Scopus international database and in the Russian Science Citation Index (RSCI) database

Editor-in-Chief

Valentin A. Orlovich – B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

Editorial Board

Vasily G. Safonov – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
(Associate Editor-in-Chief)

Tatiana E. Yanchuk (lead editor)

Sergey V. Ablameyko – Belarusian State University, Minsk, Belarus

Sergei M. Abramov – Program Systems Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Maksim V. Bogdanovich – SSPA “Optics, Optoelectronics, and Laser Technology”, Minsk, Belarus

Alexander F. Vasil’ev – Francisk Skorina Gomel State University, Gomel, Belarus

Sergey V. Gaponenko – B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

Valentin V. Gorokhovik – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

Nikolai A. Izobov – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

Nikolai S. Kazak – National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

Sergei Ya. Kilin – B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

Fadey F. Komarov – A. N. Sevchenko Institute of Applied Physical Problems of the Belarusian State University, Minsk, Belarus

Viktor I. Korzyuk – Belarusian State University, Minsk, Belarus

Yurii A. Kurochkin – B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

Vladimir A. Labunov – Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Belarus

Evgenii K. Makarov – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

Sergey A. Maksimenko – Institute for Nuclear Problems of the Belarusian State University, Minsk, Belarus

Dmitri B. Migas – Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Belarus
Dmitrii S. Mogilevcev – B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
Nikolai A. Poklonski – Belarusian State University, Minsk, Belarus
Igor V. Semchenko – SSPA “Optics, Optoelectronics, and Laser Technology”, Minsk, Belarus
Sergei A. Tikhomirov – Department of Physics, Mathematics and Informatics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
Aleksandr V. Tuzikov – United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
Yurii S. Kharin – Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics of the Belarusian State University, Minsk, Belarus

Editorial Council

Sergei V. Ablameyko – Belarusian State University, Minsk, Belarus
Aleksandr L. Aseev – Presidium of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia
Valery G. Bondur – Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
Jörg Wrachtrup – Institute of Physics (3) of the University of Stuttgart, Stuttgart, Germany
Aleksei M. Zheltikov – Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
Sergei Ya. Kilin – B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
Valery V. Kozlov – Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
Gerd Leuchs – Max Planck Institute for the Science of Light, Erlangen, Germany
Dmitrii S. Mogilevcev – B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
Nguyen Dai Hung – Institute of Physics of the Vietnam Academy of Science and Technology, Hanoi, Vietnam
Valentin A. Orlovich – B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
Steven Chu – Stanford University, Stanford, California, USA
Anton Zeilinger – Institute for Quantum Optics and Quantum Information of the Austrian Academy of Sciences, Vienna, Austria

Address of the Editorial Office:
1, Akademicheskaya Str., room 118, 220072, Minsk, Republic of Belarus.
Tel.: +375 17 374-02-45; e-mail: fmvesti@mail.ru
vestifm.belnauka.by

PROCEEDING OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF BELARUS.

Physics and Mathematics series, 2026, vol. 62, no. 1.

Printed in Russian, Belarusian and English languages

Editor *T. E. Yanchuk*
Computer imposition *I. V. Schasniuk*

It is sent of the press 18.03.2026. Appearance 26.03.2026. Format 60×84¹/₈. Offset paper.
The press digital. Printed pages 10,23. Publisher's signatures 11,3. Circulation 42 copies. Order 48.
Price: individual subscription – 15,16 byn., departmental subscription – 34,53 byn.

Publisher and printing execution:

Republican unitary enterprise “Publishing House “Belaruskaya Navuka”.
Certificate on the state registration of the publisher, manufacturer, distributor of printing editions
No. 1/18 dated August 2, 2013. License for the press no. 02330/455 dated December 30, 2013.
Address: F. Scorina Str., 40, 220084, Minsk, Republic of Belarus.

© RUE “Publishing House “Belaruskaya Navuka”,
Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series, 2026

ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Скрундь В. В., Сафонова И. Н. О существовании $\mathfrak{H}_\sigma^5$ -критических формаций конечных групп.....	7
Расолько Г. А., Волков В. М., Игнатенко М. В. Прямой спектральный метод Чебышева для решения обобщенного уравнения крыла	15
Жалукевич Д. С. Преобразования эквивалентности семейств квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка функции двух переменных.....	27
Авлас А. Н., Деменчук А. К., Макаров Е. К. Упрощенная идентификация модели эпидемического процесса	38

ФИЗИКА

Кузьмич А. М., Ивашкевич А. В., Редьков В. М. Нерелятивистское описание частицы со спином $3/2$ в магнитном поле, тетрадные калибровочные преобразования	48
Петров П. К. Структурный подход к решению томографической задачи адаптивной оптики: реконструкция турбулентности в объеме.....	59
Кокоулина Е. С., Левчук М. И., Невмержицкий М. Н., Шуляковский Р. Г. О компоненте тензорной анализирующей способности T_{20} в реакции $\gamma d \rightarrow \pi^0 d$	73

ИНФОРМАТИКА

Шалькевич П. К., Ероминок Е. С. Алгоритмы и программное обеспечение для определения взаимосвязей элементарных участков разных туров агрохимического обследования сельскохозяйственных земель	78
---	----

ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)

CONTENTS

MATHEMATICS

Skrundz V. V., Safonova I. N. On the existence of $\mathfrak{H}_\sigma^{\mathbb{F}}$ -critical formations of finite groups	7
Rasolko G. A., Volkov V. M., Ignatenko M. V. Direct spectral Chebyshev method for solving the generalized wing equation	15
Zhalukevich D. S. Equivalence transformations of families of quasi-linear elliptic equations of the second order of a function of two variables	27
Avlas A. N., Demenchuk A. K., Makarov E. K. Simplified identification of the epidemic process model	38

PHYSICS

Kuzmich A. M., Ivashkevich A. V., Red'kov V. M. The non-relativistic problem for a spin 3/2 particle in magnetic field, and tetrad gauge transformations	48
Piatrou P. K. Structural approach to the Adaptive Optics tomography problem: the volume turbulence reconstruction	59
Kokoulina E. S., Levchuk M. I., Nevmerzhitsky M. N., Shulyakovsky R. G. On the tensor analyzing power component T_{20} in the reaction $\gamma d \rightarrow \pi^0 d$	73

INFORMATICS

Shalkevich P. K., Yeraminok E. S. Algorithms and software for determining interrelations between agricultural management zones in different tours of agrochemical surveys	78
--	----

ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)

МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

UDC 512.542
<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2026-62-1-7-14>

Received 09.11.2025
Поступила в редакцию 09.11.2025

Valentina V. Skrundz, Inna N. Safonova

Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus

ON THE EXISTENCE OF $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$ -CRITICAL FORMATIONS OF FINITE GROUPS

Abstract. The τ -closed σ -local formations of finite groups are studied, where σ is some partition of the set of all primes, τ is an arbitrary subgroup functor. The question of the existence of $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$ -critical formations is investigated, i. e., such τ -closed σ -local formations $\mathfrak{L} \not\leq \mathfrak{H}$ for which all proper τ -closed σ -local subformations are contained in the class of groups $\mathfrak{H}$. It is proved that if $\mathfrak{H}$ is a σ -local formation of classical type, then every τ -closed σ -local formation $\mathfrak{F} \not\leq \mathfrak{H}$ has at least one $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$ -critical subformation.

Keyword: finite group, subgroup functor, τ -closed formation, formation σ -function, σ -local formation, critical σ -local formation, formation of classical type

For citation. Skrundz V. V., Safonova I. N. On the existence of $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$ -critical formations of finite groups. *Vestsi Natsyional'noi akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2026, vol. 62, no. 1, pp. 7–14. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2026-62-1-7-14>

В. В. Скрундз, И. Н. Сафонова

Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь

О СУЩЕСТВОВАНИИ $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$ -КРИТИЧЕСКИХ ФОРМАЦИЙ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Аннотация. Изучены τ -замкнутые σ -локальные формации конечных групп, где σ – некоторое разбиение множества всех простых чисел, τ – произвольный подгрупповой функтор. Исследован вопрос существования $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$ -критических формаций, т. е. таких τ -замкнутых σ -локальных формаций $\mathfrak{L} \not\leq \mathfrak{H}$, у которых все собственные τ -замкнутые σ -локальные подформации содержатся в классе групп $\mathfrak{H}$. Доказано, что если $\mathfrak{H}$ – σ -локальная формация классического типа, то у всякой τ -замкнутой σ -локальной формации $\mathfrak{F} \not\leq \mathfrak{H}$ существует по меньшей мере одна $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$ -критическая подформация.

Ключевые слова: конечная группа, подгрупповой функтор, τ -замкнутая формация, формационная σ -функция, σ -локальная формация, критическая σ -локальная формация, формация классического типа

Для цитирования. Скрундз, В. В. О существовании $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$ -критических формаций конечных групп / В. В. Скрундз, И. Н. Сафонова // Весті Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. – 2026. – Т. 62, № 1. – С. 7–14. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2026-62-1-7-14>

Introduction. The study and classification of formations are inextricably linked with the investigation of questions concerning the existence of subformations of a particular kind in the studied formation and their mutual arrangement in the structure of the subformations of the given formation. Since the lattice of subformations of any non-identity local formation has the cardinality of the continuum, the application of inductive reasoning in studying the structure of subformations of a local formation is rather difficult. This circumstance led to the necessity of developing special methods for investigating local formations, associated with the concept of a critical formation. The special role of minimal local non- $\mathfrak{H}$ -formations [1] or, equivalently, $\mathfrak{H}_\tau$ -critical formations [2] (i. e., such local formations

$\mathfrak{F} \not\leq \mathfrak{H}$ all of whose proper local subformations are contained in the class of groups $\mathfrak{H}$) was first noted by L. A. Shemetkov at the VI All-Union Symposium on Group Theory [1]. There, he also set the general problem of studying critical formations. The solution to this problem in the class of local formations was obtained by A. N. Skiba in a series of works from 1980–1993. The main result of this series of works was the construction of a theory of minimal local non- $\mathfrak{H}$ -formations, central to which are the theorem describing $\mathfrak{H}_f$ -critical formations for the case when $\mathfrak{H}$ is an arbitrary formation of a classical type [3] (a formation is called a *formation of the classical type* [2] if it has a local screen such that all its non-abelian values are local), as well as the theorem on the existence of $\mathfrak{H}_f$ -critical formations in every local formation $\mathfrak{F} \not\leq \mathfrak{H}$. The results of the theory of minimal local non- $\mathfrak{H}$ -formations have been widely used in questions of classification and investigation of the structure of local formations, as well as in the study of irreducible factorizations of bounded and one-generated local formations [4].

Subsequently, during the development of the theory of τ -closed local formations [5], A. N. Skiba developed the theory of $\mathfrak{H}_f^\tau$ -critical formations (a τ -closed local formation $\mathfrak{F} \not\leq \mathfrak{H}$ is called $\mathfrak{H}_f^\tau$ -critical [5] or *minimal τ -closed local non- $\mathfrak{H}$ -formation* if all proper τ -closed local subformations of $\mathfrak{F}$ are contained in the class of groups $\mathfrak{H}$), where τ is an arbitrary subgroup functor in the sense of the following definition.

Suppose that to each group G , a certain system of its subgroups $\tau(G)$ is assigned. Then τ is called a *subgroup functor* [5, p. 16] if $G \in \tau(G)$ and for any epimorphism $\varphi: A \rightarrow B$ and for any groups $H \in \tau(A)$ and $T \in \tau(B)$, we have $H^\varphi \in \tau(B)$ and $T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$. A formation $\mathfrak{F}$ is called τ -closed if $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$ for any group $G \in \mathfrak{F}$.

The development of the theory of σ -properties of groups [6, 7] and their classes, in particular, the theory of σ -local formations [8–15], has led to the necessity of studying and classifying σ -local formations, including the development of a theory of critical σ -local formations. The solution to L. A. Shemetkov's problem [1] in the class of σ -local formations is given in the works [13, 14], where a description of $\mathfrak{H}_\sigma$ -critical formations is obtained for an arbitrary σ -local formation $\mathfrak{H}$ of the classical type (a formation $\mathfrak{H}$ is called a σ -local formation of the classical type if $\mathfrak{H}$ has a σ -local definition such that all its non-abelian values are σ -local). Note that the results on critical σ -local formations have been successfully used by the authors [16] in the study of σ -local formations with bounded $\mathfrak{H}_\sigma$ -defect.

The study of minimal τ -closed σ -local non- $\mathfrak{H}$ -formations, or $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$ -critical formations, is the subject of the authors' works [17, 18], where a description of minimal τ -closed σ -local non- $\mathfrak{H}$ -formations is obtained for an arbitrary σ -local formation $\mathfrak{H}$ of the classical type.

Theorem A [18, Theorem]. *Let $\mathfrak{H}$ be a σ -local formation of the classical type and h be its canonical σ -local definition. Then $\mathfrak{F}$ is an $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$ -critical formation if and only if $\mathfrak{F} = l_\sigma^\tau \text{form} G$, where G is a monolithic $\bar{\tau}$ -minimal non- $\mathfrak{H}$ -group with monolith $P = G^{\mathfrak{H}}$, and one of the following conditions hold:*

- 1) $G = P$ is a simple σ_i -group such that $\sigma_i \notin \sigma(\mathfrak{H})$ and $\tau(G) \subseteq \{1, G\}$;
- 2) P is a non- σ -primary group and G is a $\bar{\tau}$ -minimal non- $h(\sigma_i)$ -group with $P = G^{h(\sigma_i)}$ for all $\sigma_i \in \sigma(P)$;
- 3) $G = P \rtimes K$, where $P = C_G(P)$ is a p -group, $p \in \sigma_i$, and K is either a monolithic $\bar{\tau}$ -minimal non- $h(\sigma_i)$ -group with monolith $Q = K^{h(\sigma_i)} \not\leq \Phi(K)$, where $\sigma_i \notin \sigma(Q)$, or a minimal non- $h(\sigma_i)$ -group of one of the following types:

- a) a quaternion group of order 8, if $2 \notin \sigma_i$;
- b) an extraspecial group of order q^3 of prime odd exponent $q \notin \sigma_i$;
- c) a cyclic q -group, $q \notin \sigma_i$.

In this work, in the framework of the general problem posed by L. A. Shemetkov [1], we study the question of the existence of minimal τ -closed σ -local non- $\mathfrak{H}$ -formations in every τ -closed σ -local formation $\mathfrak{F} \not\leq \mathfrak{H}$. The main result of the work is the following theorem.

Theorem B. *Let $\mathfrak{F}$ be a τ -closed σ -local formation, and $\mathfrak{H}$ be an arbitrary σ -local formation of the classical type. If $\mathfrak{F} \not\leq \mathfrak{H}$, then $\mathfrak{F}$ contains at least one minimal τ -closed σ -local non- $\mathfrak{H}$ -subformation.*

We will prove Theorem B in Section 2 and also consider some of its most interesting corollaries.

1. Basic concepts and auxiliary results. All groups under consideration are assumed to be finite. The main definitions, notation, and a number of properties of σ -local formations are presented in the works [8–18].

Let $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ be some partition of the set of all primes $\mathbb{P}$, i. e., $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$, where $\mathbb{P} = \bigcup_{i \in I} \sigma_i$ and $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ for all $i \neq j$, G be a group, $\mathfrak{F}$ be a class of groups. Then $\sigma(G) = \{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(G) \neq \emptyset\}$; $\sigma(\mathfrak{F}) = \bigcup_{G \in \mathfrak{F}} \sigma(G)$.

A group G is called [7]: σ -primary if G is a σ_i -group for some i ; σ -nilpotent if $G = G_1 \times \dots \times G_t$ for some σ -primary groups $G_1, \dots, G_t$; σ -soluble if $G = 1$ or $G \neq 1$ and every chief factor of G is σ -primary.

The classes of all σ -soluble, σ -nilpotent, σ_i -groups, and identity groups are denoted by $\mathfrak{S}_\sigma$, $\mathfrak{N}_\sigma$, $\mathfrak{S}_{\sigma_i}$, and (1) , respectively.

Let $\mathfrak{F}$ be a nonempty formation. Then for any group G , $G^\mathfrak{F}$ denotes $\mathfrak{F}$ -residual of G , i. e., the smallest normal subgroup of G such that the quotient group belongs to $\mathfrak{F}$.

A formation $\mathfrak{F}$ is called (normally) hereditary if $H \in \mathfrak{F}$ whenever $G \in \mathfrak{F}$ and H is a (normal) subgroup of G .

Let $\mathfrak{F}$ and $\mathfrak{H}$ be some classes of groups. The product $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ of the classes of groups $\mathfrak{F}$ and $\mathfrak{H}$ is defined by the condition: $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{H}$ if and only if there exists a normal subgroup N in G such that $G/N \in \mathfrak{F}$. If, in addition, $\mathfrak{H}$ is a formation, then the residual product $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{H}$ of the classes $\mathfrak{F}$ and $\mathfrak{H}$ is defined as follows: $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{H} = (G \mid G^\mathfrak{H} \in \mathfrak{F})$.

The symbol $O_{\sigma_i', \sigma_i}(G)$ denotes $(\mathfrak{S}_{\sigma_i'} \mathfrak{S}_{\sigma_i})$ -radical of the group G (the largest normal $(\mathfrak{S}_{\sigma_i'} \mathfrak{S}_{\sigma_i})$ -subgroup of G), i. e., $O_{\sigma_i', \sigma_i}(G) = G_{\mathfrak{S}_{\sigma_i'} \mathfrak{S}_{\sigma_i}}$.

A function f of the form $f: \sigma \rightarrow \{\text{formations of groups}\}$ is called a formation σ -function. For every formation σ -function f , the class $LF_\sigma(f)$ is defined as follows:

$$LF_\sigma(f) = (G \mid G = 1 \text{ or } G \neq 1 \text{ and } G/O_{\sigma_i', \sigma_i}(G) \in f(\sigma_i) \text{ for all } \sigma_i \in \sigma(G)).$$

If for some formation σ -function f we have $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$, then the formation $\mathfrak{F}$ is said to be σ -local, and f is called a σ -local definition of $\mathfrak{F}$.

If f is a formation σ -function, then $\text{Supp}(f)$ denotes the support of f , i. e., the set of all σ_i such that $f(\sigma_i) \neq \emptyset$.

A formation σ -function f is called: τ -valued if $f(\sigma_i)$ is a τ -closed formation for all $\sigma_i \in \text{Supp}(f)$; integrated if $f(\sigma_i) \subseteq LF_\sigma(f)$ for all i ; full if $f(\sigma_i) = \mathfrak{S}_{\sigma_i} f(\sigma_i)$ for all i . If f is a full integrated formation σ -function and $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$, then f is called the canonical σ -local definition of $\mathfrak{F}$. The smallest σ -local definition of $\mathfrak{F}$ is its σ -local definition f such that $f(\sigma_i) \subseteq h(\sigma_i)$ for any σ -local definition h of the formation $\mathfrak{F}$ and all i .

A subgroup functor τ is called [5, p. 16]: closed if for any two groups G and $H \in \tau(G)$ we have $\tau(H) \subseteq \tau(G)$; trivial if for any group G we have $\tau(G) = \{G\}$; identity if for any group G we have $\tau(G)$ being the set of all subgroups of G .

A partial order $\leq$ is introduced on the set of all subgroup functors [5, p. 19] by defining $\tau_1 \leq \tau_2$ if and only if for any group G we have $\tau_1(G) \subseteq \tau_2(G)$. For any collection of subgroup functors $\{\tau_i \mid i \in I\}$, their intersection $\tau = \bigcap_{i \in I} \tau_i$ is defined by: $\tau(G) = \bigcap_{i \in I} \tau_i(G)$ for any group G .

If τ is an arbitrary subgroup functor, then $\bar{\tau}$ denotes the intersection of all closed subgroup functors τ_i for which $\tau \leq \tau_i$. The functor $\bar{\tau}$ is called the closure of the functor τ [5, p. 20].

Let $\mathfrak{H}$ be a class of groups. A group G is called [5, p. 38] a τ -minimal non- $\mathfrak{H}$ -group if $G \notin \mathfrak{H}$, but every proper τ -subgroup of G belongs to the class $\mathfrak{H}$.

For an arbitrary set of groups $\mathfrak{X}$ and any $\sigma_i \in \sigma$, the symbol $\mathfrak{X}(\sigma_i)$ [11, p. 962] denotes the class of groups defined as follows: $\mathfrak{X}(\sigma_i) = (G/O_{\sigma_i', \sigma_i}(G) \mid G \in \mathfrak{X})$, if $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{X})$, and $\mathfrak{X}(\sigma_i) = \emptyset$, if $\sigma_i \notin \sigma(\mathfrak{X})$.

The set of all τ -closed σ -local formations is denoted by I_σ^τ . Formations from I_σ^τ are called I_σ^τ -formations. For any collection of groups $\mathfrak{M}$, $I_\sigma^\tau \text{ form } \mathfrak{M}$ denotes a τ -closed σ -local formation generated by $\mathfrak{M}$, i. e., the intersection of all I_σ^τ -formations containing $\mathfrak{M}$. In the case when $\mathfrak{M} = \{G\}$, the formation $I_\sigma^\tau \text{ form } G$ is called a one-generated I_σ^τ -formation.

To prove the main result of the work, we will need some known facts from the formation theory.

Lemma 1 [11, Lemma 2.1]. Let f and h be formation σ -functions and let $\Pi = \text{Supp}(f)$. Suppose that $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f) = LF_\sigma(h)$. Then:

- (1) $\Pi = \sigma(\mathfrak{F})$;

- (2) $\mathfrak{F} = (\bigcap_{\sigma_i \in \Pi} \mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i)) \cap \mathfrak{G}_{\Pi}$. Consequently, $\mathfrak{F}$ is a saturated formation;
 (3) If every group in $\mathfrak{F}$ is σ -soluble, then $\mathfrak{F} = (\bigcap_{\sigma_i \in \Pi} \mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i)) \cap \mathfrak{G}_{\Pi}$;
 (4) If $\sigma_i \in \Pi$, then $\mathfrak{G}_{\sigma_i}(f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}(h(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{F}$;
 (5) $\mathfrak{F} = LF_{\sigma}(F)$, where F is the unique formation σ -function such that $F(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} F(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}$ for all $\sigma_i \in \Pi$ and $F(\sigma_i) = \emptyset$ for all $\sigma_i \in \Pi'$. Moreover, $F(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}(f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F})$ for all i .

Lemma 2 [4, Ch. II; 20, Ch. IV; 21, 2.2.11]. Let $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$ and $\mathfrak{M}$ be formations. Then the following statements hold:

- (1) $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{H}$, and $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F} \circ \mathfrak{H}$, if $\mathfrak{F}$ is nonempty;
 (2) if $\mathfrak{F}$ is normally hereditary, then $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{H} = \mathfrak{F}\mathfrak{H}$, and $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F} \circ \mathfrak{H}$, if $\mathfrak{H}$ is nonempty;
 (3) $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{H}$ is a formation;
 (4) $G^{\mathfrak{F} \circ \mathfrak{H}} = (G^{\mathfrak{H}})^{\mathfrak{F}}$ for all $G \in \mathfrak{G}$;
 (5) $(\mathfrak{F} \circ \mathfrak{H}) \circ \mathfrak{M} = \mathfrak{F} \circ (\mathfrak{H} \circ \mathfrak{M})$.

Lemma 3 [10, Lemma 2.4]. If $\mathfrak{F} = LF_{\sigma}(f)$, then $\mathfrak{F} = LF_{\sigma}(t)$, where $t(\sigma_i) = f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}$ for all $\sigma_i \in \sigma$.

Lemma 4 [11, Theorem 1.13]. The set $\mathcal{S}_n^{\sigma}$ of all n -multiply σ -local formations forms a subsemigroup of the semigroup of all formations $G\mathfrak{G}$. Moreover, $|\mathcal{S}_n^{\sigma}| = 2^{N_0}$ for each σ with $|\sigma| > 1$ and $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ is a minimal idempotent in $\mathcal{S}_n^{\sigma}$ for all $n > 0$ and $i \in I$.

Lemma 5 [4, Lemma 18.8]. If a group G has only one minimal normal subgroup and $O_p(G) = 1$ (p is a prime number), then there exists a faithful irreducible $F_p G$ -module, where F_p is the field of p elements.

Lemma 6 [12, Lemma 11]. If $\mathfrak{H} = LF_{\sigma}(f)$ and $G / O_{\sigma_i}(G) \in f(\sigma_i) \cap \mathfrak{H}$ for some $\sigma_i \in \sigma(G)$, then $G \in \mathfrak{H}$.

Recall that the group G is called π -closed if it has a normal Hall π -subgroup.

Lemma 7 [19, Lemma 4.4]. Let $K \subseteq N \trianglelefteq G$, $K \trianglelefteq G$, $K \subseteq \Phi(G)$. Then the following statements hold:

- 1) if N/K is π -closed, then N is π -closed;
 2) $F_p(N/K) = F_p(N)/K$.

Lemma 8 [3, Lemma 8] Every non-abelian τ -closed formation contains at least one minimal τ -closed non-abelian subformation.

Recall that $\tau\text{form } \mathfrak{X}$ denotes the τ -closed formation generated by the class of groups $\mathfrak{X}$, i. e., the intersection of all τ -closed formations containing $\mathfrak{X}$.

Lemma 9 [5, Lemma 2.2.4]. A formation $\mathfrak{F}$ is a minimal τ -closed non-abelian formation if and only if $\mathfrak{F} = \tau\text{form } A$, where A is a τ -minimal non-abelian group and one of the following conditions hold:

- 1) A is a monolithic group with a non-Frattini monolith $R = A'$;
 2) A is a quaternion group of order 8;
 3) A is a nilpotent group of class 2 and its exponent is 4;
 4) A is an extraspecial p -group of order p^3 and its exponent is $p > 2$;
 5) A is a nilpotent group of class 2 with a prime odd exponent.

Lemma 10 [4, Corollary 19.14]. A group is nilpotent if and only if all subformations of the formation it generates are hereditary.

2. Main result. Recall the concept of a direct decomposition of a formation (see [5, p. 171]). Let $\{\mathfrak{F}_j \mid j \in J\}$ be a non-empty set of subclasses $\mathfrak{F}_j \subseteq \mathfrak{F}$ such that $\mathfrak{F}_{j_1} \cap \mathfrak{F}_{j_2} = (1)$ for any $j_1 \neq j_2$ from J . If, moreover, every group $G \in \mathfrak{F}$ has the form $G = A_{j_1} \times \dots \times A_{j_t}$, where $A_{j_1} \in \mathfrak{F}_{j_1}, \dots, A_{j_t} \in \mathfrak{F}_{j_t}$ for some $j_1, \dots, j_t \in J$, then we write $\mathfrak{F} = \bigoplus_{j \in J} \mathfrak{F}_j$ (in particular, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{F}_t$, if $J = \{1, \dots, t\}$).

Lemma 11. Let $\mathfrak{F} = LF_{\sigma}(f)$, $\Pi = \sigma(\mathfrak{F})$. Then $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}_{\sigma} = \mathfrak{N}_{\Pi}$ and $\Pi = \{\sigma_i \mid f(\sigma_i) \neq \emptyset\}$.

Proof. According to Lemma 1(1), we have $\Pi = \{\sigma_i \mid f(\sigma_i) \neq \emptyset\}$. Since the formation $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ is hereditary, it follows that $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \subseteq \mathfrak{G}_{\sigma_i}(f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F})$ by Lemma 2. Therefore, by Lemma 1(5), we have

$$\mathfrak{G}_{\sigma_i} \subseteq \mathfrak{G}_{\sigma_i}(f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{F}$$

for every $\sigma_i \in \Pi$. Hence, $\mathfrak{N}_{\Pi} = \bigoplus_{\sigma_i \in \Pi} \mathfrak{G}_{\sigma_i} \subseteq \mathfrak{F}$.

On the other hand, it is obvious that $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}_{\sigma} \subseteq \mathfrak{N}_{\Pi}$. Therefore, $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}_{\sigma} = \mathfrak{N}_{\Pi}$. The lemma is proved.

Lemma 12. *Let h be the canonical definition of $\mathfrak{H}$ and $G = P \rtimes K$ be a monolithic group with the monolith $P = C_G(P) = G^{\mathfrak{H}}$ being a p -group, $p \in \sigma_i \in \sigma$, $O_{\sigma_i}(K) = 1$. Then G is a $\bar{\tau}$ -minimal non- $\mathfrak{H}$ -group if and only if K is a $\bar{\tau}$ -minimal non- $h(\sigma_i)$ -group.*

Proof. *Necessity.* Let G be a $\bar{\tau}$ -minimal non- $\mathfrak{H}$ -group and $M \in \bar{\tau}(K) \setminus \{K\}$. If under the isomorphism $G/P \simeq K$ the subgroup M corresponds to the subgroup D/P in G/P , then $D \in \bar{\tau}(G) \setminus \{G\}$. Consequently, $D \in \mathfrak{H}$. Therefore, $D/O_{\sigma_i', \sigma_i}(D) \in h(\sigma_i)$. Then since

$$D = D \cap G = D \cap PK = P \rtimes (D \cap K), \quad P = C_G(P) \text{ and } O_{\sigma_i}(K) = 1,$$

it follows that $O_{\sigma_i', \sigma_i}(D) = O_{\sigma_i}(D)$. It is also clear that $O_{\sigma_i}(D)/P = O_{\sigma_i}(D/P)$. Hence, since $D/O_{\sigma_i', \sigma_i}(D) \in h(\sigma_i)$, we have $M/O_{\sigma_i}(M) \in h(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}h(\sigma_i)$. Therefore, $M \in h(\sigma_i)$. Thus, every proper $\bar{\tau}$ -subgroup of K belongs to $h(\sigma_i)$. If, moreover, the group $K \in h(\sigma_i)$, then $G \in \mathfrak{H}$ by Lemma 6, which is impossible. Hence, K is a $\bar{\tau}$ -minimal non- $h(\sigma_i)$ -group.

Sufficiency. Let K be a $\bar{\tau}$ -minimal non- $h(\sigma_i)$ -group and $M \in \bar{\tau}(G) \setminus \{G\}$. Let us show that $M \in \mathfrak{H}$. If $G = PM$, then obviously $M \cap P = 1$. Hence, $M \simeq M/P \cap M \simeq MP/P = G/P \in \mathfrak{H}$. Suppose $PM \neq G$. Then $PM/P \in \bar{\tau}(G/P) \setminus \{G/P\}$. But $G/P \simeq K$. Consequently, there exists a proper $\bar{\tau}$ -subgroup D in K such that $MP/P \simeq D \in h(\sigma_i)$. Thus,

$$M/M \cap P \simeq MP/P \in h(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}h(\sigma_i).$$

Therefore, $M \in h(\sigma_i)$. Hence, every proper $\bar{\tau}$ -subgroup of G belongs to $\mathfrak{H}$. Since by condition $P = G^{\mathfrak{H}}$, it follows that G is a $\bar{\tau}$ -minimal non- $\mathfrak{H}$ -group. The lemma is proved.

Proof of Theorem B. Assume first that $\sigma(\mathfrak{F}) \not\subseteq \sigma(\mathfrak{H})$ and let $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F}) \setminus \sigma(\mathfrak{H})$. Then by Lemma 1(1)(4), we have $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \not\subseteq \mathfrak{H}$ and $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \subseteq \mathfrak{F}$. Since, moreover, $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ is a hereditary σ -local formation, it follows that $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ is a τ -closed σ -local formation for any subgroup functor τ . Since the formation (1) of all identity groups is the only proper τ -closed σ -local subformation of the formation $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$, and $(1) \subseteq \mathfrak{H} \neq \emptyset$, it follows that $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ is the desired $\mathfrak{H}_{\sigma}^{\tau}$ -critical formation contained in $\mathfrak{F}$.

Henceforth, we assume that $\sigma(\mathfrak{F}) \subseteq \sigma(\mathfrak{H})$. Let f be the smallest τ -valued σ -local definition of $\mathfrak{F}$, and h be the canonical σ -local definition of $\mathfrak{H}$. Set $\mathcal{S} := \{\sigma_j \in \sigma(\mathfrak{F}) \mid f(\sigma_j) \not\subseteq h(\sigma_j)\}$. Since $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, it follows that $\mathcal{S} \neq \emptyset$. Associate with each $\sigma_j \in \mathcal{S}$ a group H_j , which is a group of minimal order from $f(\sigma_j) \setminus h(\sigma_j)$. Let $\mathcal{H} := \{H_j \mid \sigma_j \in \mathcal{S}\}$ and $H = H_i$ be a group of the smallest order among the groups in the set $\mathcal{H}$. Denote by D the monolith of H . By condition, $\mathfrak{H}$ has a σ -local definition k such that every nonempty value of it is either an abelian or a σ -local formation. By Lemma 3, we may assume that the σ -local definition k is integrated. By Lemma 1(5), we have $h(\sigma_r) = \mathfrak{G}_{\sigma_r}k(\sigma_r)$ for any σ_r . Since $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F}) \subseteq \sigma(\mathfrak{H})$, it follows that $h(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}k(\sigma_i) \neq \emptyset$ by Lemma 1(1). Therefore, $k(\sigma_i) \neq \emptyset$.

First, consider the case when $k(\sigma_i)$ is a σ -local formation. Then by Lemma 4, $h(\sigma_i)$ is also σ -local. Since by Lemma 1(2) the formation $h(\sigma_i)$ is saturated, it follows that $D \not\subseteq \Phi(H)$.

Assume that D is a non- σ -primary group. Then $O_{\sigma_j', \sigma_j}(H) = 1$ for all $\sigma_j \in \sigma(D)$. Suppose that $\sigma_i \notin \sigma(D)$ and let $p \in \sigma_i$. Then since H is monolithic and $O_p(H) = 1$, by Lemma 5 there exists a faithful irreducible $F_p H$ -module K . Let $G = K \rtimes H$. Clearly, $K \subseteq O_{\sigma_i}(G)$. Since $O_{\sigma_i}(H) = 1$, we have

$$O_{\sigma_i}(G) = O_{\sigma_i}(G) \cap G = O_{\sigma_i}(G) \cap KH = K(O_{\sigma_i}(G) \cap H) = K.$$

Since, moreover, $G/O_{\sigma_i}(G) = G/K \simeq H \in f(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}$, it follows that $G \in \mathfrak{F}$ by Lemma 6. Hence, $\mathfrak{D} = l_{\sigma}^{\tau} \text{form} G \subseteq \mathfrak{F}$. By the choice of H , we have $D = H^{h(\sigma_i)}$ and H is a $\bar{\tau}$ -minimal non- $h(\sigma_i)$ -group. Therefore, G is a $\bar{\tau}$ -minimal non- $\mathfrak{H}$ -group by Lemma 12.

If $K = G^{\mathfrak{H}}$, then $\mathfrak{D}$ is the desired $\mathfrak{H}_{\sigma}^{\tau}$ -critical formation contained in $\mathfrak{F}$ by Theorem A(3).

Suppose $G/K \notin \mathfrak{H}$. Then since $H \simeq G/K$, it follows that $H \notin \mathfrak{H}$. Consider the formation $\mathcal{L} = l_{\sigma}^{\tau} \text{form} H$. By our assumption, $H^{\mathfrak{H}} = D$. Assume that there exists $\sigma_s \in \sigma(D)$ such that $H/D \notin h(\sigma_s)$. Since $H \in \mathfrak{F}$ and $O_{\sigma_s', \sigma_s}(H) = 1$, we have $H \in f(\sigma_s)$. Thus, $H/D \in f(\sigma_s) \setminus h(\sigma_s)$. Since $|H/D| < |H|$, this contradicts the definition of H . Therefore, $H^{h(\sigma_s)} = D$ for every $\sigma_s \in \sigma(D)$.

Let us show that H is a $\bar{\tau}$ -minimal non- $h(\sigma_s)$ -group for any $\sigma_s \in \sigma(D)$. Indeed, suppose that there exist $\sigma_r \in \sigma(D)$ and a proper $\bar{\tau}$ -subgroup M of H such that $M \notin h(\sigma_r)$. Then since $H \in f(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}$ and $O_{\sigma_r', \sigma_r}(H) = 1$, we have

$$H \simeq H / O_{\sigma_r', \sigma_r}(H) \in f(\sigma_r) = \tau \text{form}(A / O_{\sigma_r', \sigma_r}(A) \mid A \in \mathfrak{F}).$$

Hence, $M \in f(\sigma_r) \setminus h(\sigma_r)$ and $|M| < |H|$. The resulting contradiction shows that H is a $\bar{\tau}$ -minimal non- $h(\sigma_s)$ -group for every $\sigma_s \in \sigma(D)$. But then $\mathcal{L}$ is the desired minimal τ -closed σ -local non- $\mathfrak{H}$ -formation contained in $\mathfrak{F}$ by Theorem A(2).

Suppose now that $\sigma_i \in \sigma(D)$. Let $\mathfrak{D} = l_{\sigma}^{\tau} \text{form} H$. Clearly, $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{F}$. Since $H^{h(\sigma_i)} = D$, it follows that $H/D \in \mathfrak{H}$. If we assume that $H \in \mathfrak{H}$, then $H \simeq H / O_{\sigma_i', \sigma_i}(H) \in h(\sigma_i)$. This contradicts the definition of H . Therefore, $D = H^{\mathfrak{H}}$. As above, it can be shown that $H^{h(\sigma_r)} = D$ and H is a $\bar{\tau}$ -minimal non- $h(\sigma_r)$ -group for every $\sigma_r \in \sigma(D)$. Hence, by Theorem A(2), the formation $\mathfrak{D}$ is the desired $\mathfrak{H}_{\sigma}^{\tau}$ -critical formation contained in $\mathfrak{F}$.

Suppose D is a σ -primary group, i. e., a σ_j -group for some j . Then, due to the monolithicity of H , we have $O_{\sigma_j', \sigma_j}(H) = O_{\sigma_j}(H)$. Since $D = H^{h(\sigma_i)}$ and $h(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} k(\sigma_i)$, it follows that $j \neq i$. Let $p \in \sigma_i$. Then by Lemma 5, there exists a faithful irreducible $F_p H$ -module K . Let $G = K \rtimes H$. Clearly, $K \subseteq O_{\sigma_i}(G)$. Now since $O_{\sigma_i}(H) = 1$, we have

$$O_{\sigma_i}(G) = O_{\sigma_i}(G) \cap G = O_{\sigma_i}(G) \cap KH = K(O_{\sigma_i}(G) \cap H) = K.$$

Hence, since $G/K = G/O_{\sigma_i}(G) \simeq H \in f(\sigma_i)$ and f is an integrated σ -local definition of $\mathfrak{F}$, it follows that $G \in \mathfrak{F}$ by Lemma 6. Therefore, $\mathfrak{R} = l_{\sigma}^{\tau} \text{form} G \subseteq \mathfrak{F}$.

Let us show that G satisfies the condition (3) of Theorem A. Assume that $G \in \mathfrak{H}$. Then

$$H \simeq G/K = G/O_{\sigma_i', \sigma_i}(G) \in h(\sigma_i),$$

which contradicts the definition of H . Therefore, $G \notin \mathfrak{H}$. If $H \notin \mathfrak{H}$, then by Lemma 6, we have $H/O_{\sigma_j}(H) \notin h(\sigma_j) \subseteq \mathfrak{H}$. Since $D \subseteq O_{\sigma_j}(H)$, it follows that $|H/O_{\sigma_j}(H)| < |H|$. Since the formation σ -function f is integrated, $H \in \mathfrak{H}$ and $H/O_{\sigma_j', \sigma_j}(H) \in f(\sigma_j)$. Hence, for some $j \neq i$, we have

$$H/O_{\sigma_j', \sigma_j}(H) \in f(\sigma_j) \setminus h(\sigma_j).$$

Thus, in $\mathcal{H}$ there exists a group of an order smaller than $|H|$. This contradicts the choice of H . Therefore, $H \in \mathfrak{H}$ and hence, $K = G^{\mathfrak{H}}$. Moreover, by choice, H is a $\bar{\tau}$ -minimal non- $h(\sigma_j)$ -group and $D = H^{h(\sigma_i)}$. Consequently, G is a $\bar{\tau}$ -minimal non- $\mathfrak{H}$ -group according to Lemma 12. Thus, G satisfies the condition (3) of Theorem A. Therefore, $\mathfrak{R}$ is the desired minimal τ -closed σ -local non- $\mathfrak{H}$ -formation contained in $\mathfrak{F}$.

Now consider the case when $k(\sigma_j)$ is an abelian formation. If $D \not\subseteq \Phi(H)$, then by reasoning similarly to the case when $k(\sigma_j)$ is a σ -local formation, we can show that there exists a minimal τ -closed σ -local non- $\mathfrak{H}$ -formation in $\mathfrak{F}$.

Suppose $D \subseteq \Phi(H)$. Since $H/D \in h(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} k(\sigma_i)$ and H is a group of the minimal order from $f(\sigma_i) \setminus h(\sigma_i)$, it follows that $T/D := (H/D)^{k(\sigma_i)} \in \mathfrak{G}_{\sigma_i}$. Since $D \subseteq \Phi(H)$, T is σ_i -closed by Lemma 7. Hence, if $|T/D| \neq 1$, then $O_{\sigma_i}(T) \neq 1$. Since $O_{\sigma_i}(T)$ is a characteristic subgroup of T and T is normal in H , $O_{\sigma_i}(T)$ is a normal subgroup of H . But H is a monolithic group with the monolith D . Therefore, $D \subseteq O_{\sigma_i}(T)$, i. e., D is a σ_i -group. The latter is impossible, since D is a σ_j -group and $j \neq i$. Thus, $|T/D| = 1$. But then $H/D \in k(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{R}$. Since the formation $\mathfrak{R}$ of all nilpotent groups is saturated and $D \subseteq \Phi(H)$, it follows that H is a nilpotent q -group, where $q \notin \sigma_i$.

Suppose H is a non-abelian group and $\mathfrak{D} = \text{form} H$. Then $\mathfrak{D}$ is a non-abelian formation. Hence, by Lemma 8, there exists a minimal non-abelian subformation $\mathfrak{X}$ in $\mathfrak{D}$. Since $D \subseteq \Phi(H)$, by Lemma 9 we have $\mathfrak{X} = \text{form} X$, where X is either a quaternion group of order 8, or an extraspecial group of order q^3 of the prime odd exponent q .

By Lemma 5, in each of these cases there exists a faithful irreducible $F_p X$ -module R , where $p \in \sigma_i$. Let $G = R \rtimes X$. Then $O_{\sigma_i', \sigma_i}(G) = O_{\sigma_i}(G) = R$. Since

$$G/O_{\sigma_i}(G) = G/R \simeq X \in \text{form} H \subseteq f(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F},$$

it follows that $G \in \mathfrak{F}$ by Lemma 6. Therefore, $\mathcal{L} = l_{\sigma}^{\tau} \text{form} G \subseteq \mathfrak{F}$. Let us show that $\mathcal{L}$ is the desired $\mathfrak{H}_{\sigma}^{\tau}$ -critical formation. In view of Theorem A(3) and Lemma 12, it suffices to prove that $R = G^{\mathfrak{H}}$ and X is

a τ -minimal non- $h(\sigma_i)$ -group. Let us show that $X \in \mathfrak{H}$. Since $\sigma(\mathfrak{F}) \subseteq \sigma(\mathfrak{H})$, by Lemma 11 we have $\mathfrak{N}_{\sigma(\mathfrak{F})} \subseteq \mathfrak{N}_{\sigma(\mathfrak{H})} \subseteq \mathfrak{H}$. Since X is nilpotent, and hence σ -nilpotent, it follows that $G/R \simeq X \in \mathfrak{N}_{\sigma(\mathfrak{F})} \subseteq \mathfrak{H}$. Assume that $G \in \mathfrak{H}$. Then

$$X \simeq G/R = G/O_{\sigma_i', \sigma_i}(G) \in h(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} k(\sigma_i).$$

Since X is a q -group and $q \notin \sigma_i$, we have $X \in k(\sigma_i)$. But in the case under consideration, the formation $k(\sigma_i)$ is abelian. The resulting contradiction shows that $G \notin \mathfrak{H}$. Therefore, $R = G^{\mathfrak{H}}$.

By Lemma 10, the formation $\text{form}H$ is hereditary. Therefore, $\tau \text{form}H = \text{form}H$. By the choice made, H is a minimal non- $h(\sigma_i)$ -group. Consequently, all proper subgroups of H belong to the abelian formation $k(\sigma_i)$.

Let X be a quaternion group of order 8. All proper subgroups of X are abelian groups of the exponent dividing 4. Since $X \in \text{form}H$, the exponent of X divides the exponent of H . Hence, X is a minimal non- $h(\sigma_i)$ -group. Therefore, H is a minimal non- $\mathfrak{H}$ -group by Lemma 12. Thus, $\mathfrak{L}$ is the desired minimal τ -closed σ -local non- $\mathfrak{H}$ -formation contained in $\mathfrak{F}$ by Theorem A(3).

Let X be an extraspecial group of order q^3 of prime odd exponent q . Then all proper subgroups of X are abelian groups of exponent q . Since $X \in \text{form}H$, the exponent of X divides the exponent of H . Consequently, X is a minimal non- $h(\sigma_i)$ -group. Hence, H is a minimal non- $\mathfrak{H}$ -group by Lemma 12. Therefore, by Theorem A(3), $\mathfrak{L}$ is the desired $\mathfrak{H}_{\sigma}^{\tau}$ -critical formation contained in $\mathfrak{F}$.

Suppose now that H is an abelian group. Then H is a cyclic q -group, where $q \in \sigma_j$. Let $p \in \sigma_i$. By Lemma 5, there exists a faithful irreducible $F_p H$ -module R . Let $G = R \rtimes H$. Then $O_{\sigma_i', \sigma_i}(G) = O_{\sigma_i}(G) = R$. Since $G/O_{\sigma_i}(G) = G/R \simeq H \in f(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}$, it follows that $G \in \mathfrak{F}$ by Lemma 6. Hence, $\mathfrak{M} = I_{\sigma}^{\tau} \text{form}G \subseteq \mathfrak{F}$. Note that $R = G^{\mathfrak{H}}$. Indeed, if $G \in \mathfrak{H}$, then $H \simeq G/R = G/O_{\sigma_i', \sigma_i}(G) \in h(\sigma_i)$, which contradicts the choice of H . Therefore, $R = G^{\mathfrak{H}}$. Moreover, since, by choice, H is a minimal non- $h(\sigma_i)$ -group, the group G is a minimal non- $\mathfrak{H}$ -group by Lemma 12. Therefore, $\mathfrak{M}$ is the desired minimal τ -closed σ -local non- $\mathfrak{H}$ -formation contained in $\mathfrak{F}$ by Theorem A(3). The theorem is proved.

In the case when τ is the identity subgroup functor, from Theorem B we obtain

Corollary 1. *Let $\mathfrak{F}$ be a hereditary σ -local formation, $\mathfrak{H}$ be an arbitrary σ -local formation of the classical type. If $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$ then $\mathfrak{F}$ contains a minimal hereditary σ -local non- $\mathfrak{H}$ -subformation.*

Let $\tau(G) = s_n(G)$ be the set of all normal subgroups of the group G for any group G . Then the following holds:

Corollary 2. *Let $\mathfrak{F}$ be a normally hereditary σ -local formation, $\mathfrak{H}$ be an arbitrary σ -local formation of the classical type. If $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, then $\mathfrak{F}$ contains a minimal normally hereditary σ -local non- $\mathfrak{H}$ -subformation.*

In particular, if τ is the trivial subgroup functor, we have

Corollary 3. *Let $\mathfrak{F}$ be a σ -local formation, $\mathfrak{H}$ be an arbitrary σ -local formation of the classical type. If $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, then $\mathfrak{F}$ contains a minimal σ -local non- $\mathfrak{H}$ -subformation.*

In the classical case, when $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \dots\}$, from Theorem B we obtain

Corollary 4 [5, Theorem 2.3.2]. *Let $\mathfrak{F}$ be a τ -closed local formation, $\mathfrak{H}$ be an arbitrary formation of the classical type. If $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, then $\mathfrak{F}$ contains a minimal τ -closed local non- $\mathfrak{H}$ -subformation.*

If, in addition, τ is the trivial subgroup functor, we have

Corollary 5 [3, Corollary 1]. *Let the formations $\mathfrak{F}$ and $\mathfrak{H}$ be local and $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$. If $\mathfrak{H}$ is a formation of the classical type, then $\mathfrak{F}$ contains at least one $\mathfrak{H}_{\tau}$ -critical subformation.*

Acknowledgements. The research was carried out in the framework of the State Program of Scientific Research “Convergence – 2025” with financial support of the Ministry of Education of the Republic of Belarus (project 20211328).

Благодарности. Исследования выполнены в рамках задания Государственной программы научных исследований «Конвергенция-2025» при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь (проект 20211328).

References

1. Shemetkov L. A. *Screens of Step Formations. Proceedings of the VI All-Union Symposium on Group Theory*. Kiev, Naukova Dumka, 1980, pp. 37–50 (in Russian).

2. Skiba A. N. On critical formations. *Vestsi Akademii navuk BSSR. Seryya fizika-matematichnykh navuk = Proceedings of the Academy of Sciences of BSSR. Physics and Mathematics series*, 1980, vol. 4, pp. 27–33 (in Russian).
3. Skiba A. N. On critical formations. *Infinite Groups and Related Algebraic Structures*. Kiev, Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of Ukraine, 1993, pp. 258–268 (in Russian).
4. Shemetkov L. A., Skiba A. N. *Formations of Algebraic Systems*. Moscow, Nauka Publ., 1989. 256 p. (in Russian).
5. Skiba A. N. *Algebra of Formations*. Minsk, Belaruskaya navuka Publ., 1997. 240 p. (in Russian).
6. Skiba A. N. On σ -properties of finite groups I. *Problems of Physics, Mathematics and Technics*, 2014, no. 34 (4), pp. 89–96.
7. Skiba A. N. On σ -subnormal and σ -permutable subgroups of finite groups. *Journal of Algebra*, 2015, vol. 436, pp. 1–16. <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2015.04.010>
8. Skiba A. N. On one generalization of the local formations. *Problems of Physics, Mathematics and Technics*, 2018, no. 34 (1), pp. 79–82.
9. Chi Z., Safonov V. G., Skiba A. N. On one application of the theory of n -multiply σ -local formations of finite groups. *Problems of Physics, Mathematics and Technics*, 2018, no. 34 (2), pp. 85–88.
10. Zhang Ch., Skiba A. N. On Σ_i^σ -closed classes of finite groups. *Ukrainian Mathematical Journal*, 2019, vol. 70, no. 12, pp. 1966–1977. <https://doi.org/10.1007/s11253-019-01619-6>
11. Chi Z., Safonov V. G., Skiba A. N. On n -multiply σ -local formations of finite groups. *Communications in Algebra*, 2019, vol. 47, no. 3, pp. 957–968. <https://doi.org/10.1080/00927872.2018.1498875>
12. Safonova I. N., Safonov V. G. On some properties of the lattice of totally σ -local formations of finite groups *Zhurnal Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika. Informatika = Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*, 2020, no. 3, pp. 1–14. <https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-3-6-16>
13. Safonova I. N. On minimal σ -local non- $\mathfrak{H}$ -formations of finite groups. *Problems of Physics, Mathematics and Technics*, 2020, no. 4 (45), pp. 105–112.
14. Safonova I. N. On critical σ -local formations of finite groups. *Trudy Instituta matematiki NAN Belarusi = Proceedings of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2023, vol. 31, no. 2, pp. 63–80.
15. Safonova I. N. On n -multiply σ -locality of a non-empty τ -closed formation of finite groups. *Trudy Instituta matematiki NAN Belarusi = Proceedings of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2024, vol. 32, no. 1, pp. 32–38.
16. Safonova I. N., Skrundz V. V. On σ -local formations of finite groups with bounded $\mathfrak{H}_\sigma$ -defect. *Problems of Physics, Mathematics and Technics*, 2025, no. 1 (62), pp. 41–62.
17. Safonova I. N., Skrundz V. V. On $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$ -critical formations of finite groups. *Problems of Physics, Mathematics and Technics*, 2025, no. 3 (64), pp. 99–111.
18. Safonova I. N., Skrundz V. V. Minimal τ -closed σ -local non- $\mathfrak{H}$ -formation of finite groups. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2025, vol. 69, no. 5, pp. 359–366. <https://doi.org/10.29235/1561-8323-2025-69-5-359-366>
19. Shemetkov L. A. *Formations of finite groups*. Moscow, Nauka Publ., 1978. 272 p. (in Russian).
20. Doerk K., Hawkes T. *Finite Soluble Groups*. Berlin, New York, Walter de Gruyter, 1992. 891 p. <https://doi.org/10.1515/9783110870138>
21. Ballester-Bolinches A. L., Ezquerro M. *Classes of Finite Groups. Mathematics and Its Applications*. Dordrecht, Springer, 2006. 385 p. <https://doi.org/10.1007/1-4020-4719-3>

Information about the authors

Valentina V. Skrundz – Postgraduate Student of the Department of Higher Algebra and Information Security, Belarusian State University (Nezavisimosti Ave., 4, 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: vallik@mail.ru

Inna N. Safonova – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Professor of the Department of Higher Algebra and Information Security, Belarusian State University (Nezavisimosti Ave., 4, 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: safonova@bsu.by. <https://orcid.org/0000-0001-6896-7208>

Информация об авторах

Скрудзь Валентина Викторовна – аспирант кафедры высшей алгебры и защиты информации, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: vallik@mail.ru

Сафонова Инна Николаевна – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры высшей алгебры и защиты информации, Белорусский государственный университет, (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: safonova@bsu.by. <https://orcid.org/0000-0001-6896-7208>

ISSN 1561-2430 (Print)

ISSN 2524-2415 (Online)

УДК 517.968.73

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2026-62-1-15-26>

Поступила в редакцию 12.10.2025

Received 12.10.2025

Г. А. Расолько¹, В. М. Волков², М. В. Игнатенко¹¹Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь²Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь

ПРЯМОЙ СПЕКТРАЛЬНЫЙ МЕТОД ЧЕБЫШЕВА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ КРЫЛА

Аннотация. Рассмотрено обобщенное интегро-дифференциальное уравнение Прандтля, в котором сингулярные интегралы содержат как искомое решение, так и его производную. Для решения данной задачи построены прямые численные методы, основанные на представлении решения и переменных коэффициентов уравнения в виде интерполяционных многочленов Чебышева. Разработанный подход, использующий известные спектральные соотношения, позволяет получить аналитические выражения для сингулярной составляющей задачи и сводит ее решение к системе линейных алгебраических уравнений для коэффициентов интерполяционного многочлена. Построены две вычислительные схемы решения с использованием полиномов Чебышева первого и второго рода соответственно. На примере модельной задачи показано, что обе схемы обеспечивают хорошую обусловленность алгебраической задачи и обладают высокой точностью, демонстрируя экспоненциальную скорость сходимости погрешности.

Ключевые слова: сингулярное уравнение, интегро-дифференциальное уравнение, ортогональный базис полиномов Чебышева, спектральный метод Чебышева, обобщенное уравнение Прандтля

Для цитирования. Расолько, Г. А. Прямой спектральный метод Чебышева для решения обобщенного уравнения крыла / Г. А. Расолько, В. М. Волков, М. В. Игнатенко // Весті Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. – 2026. – Т. 62, № 1. – С. 15–26. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2026-62-1-15-26>

Galina A. Rasolka¹, Vasily M. Volkov², Marina V. Ignatenko¹¹Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus²Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus

DIRECT SPECTRAL CHEBYSHEV METHOD FOR SOLVING THE GENERALIZED WING EQUATION

Abstract. The generalized Prandtl integro-differential equation is considered, in which the singular integrals contain both the unknown solution and its derivative. Direct numerical methods for solving this problem are constructed, based on representing the solution and the variable coefficients of the equation in the form of Chebyshev interpolation polynomials. The developed approach, which utilizes known spectral relations, makes it possible to obtain analytical expressions for the singular component of the problem and reduces its solution to a system of linear algebraic equations for the coefficients of the interpolation polynomial. Two computational schemes for the solution are constructed using Chebyshev polynomials of the first and second kind, respectively. Using a model problem as an example, it is shown that both schemes ensure good conditioning of the algebraic problem and possess high accuracy, demonstrating an exponential convergence rate of the error.

Keywords: singular equation, integro-differential equation, orthogonal basis of Chebyshev polynomials, spectral Chebyshev method, generalized Prandtl equation

For citation. Rasolko G. A., Volkov V. M., Ignatenko M. V. Direct spectral Chebyshev method for solving the generalized wing equation. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2026, vol. 62, no. 1, pp. 15–26 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2026-62-1-15-26>

Введение. Рассмотрим разрешимое полное обобщенное уравнение крыла [1, 2]

$$\frac{\Gamma(x)}{B(x)} - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma'(t)}{t-x} dt + \int_{-1}^1 \frac{s(x,t)}{t-x} \Gamma(t) dt + \int_{-1}^1 g(x,t) \Gamma'(t) dt = f(x), \quad -1 < x < 1. \quad (1)$$

Здесь $B(x)$, $s(x,t)$, $g(x,t)$ и $f(x)$ – известные функции ($s(x,t)$ удовлетворяет условию Гельдера по обоим переменным); $\Gamma(x)$ – искомая функция, удовлетворяющая краевым условиям на границе интервала; $\Gamma(\pm 1) = 0$.

Важно отметить, что ядро обобщенного уравнения крыла – уравнения Прандтля – имеет сингулярность, что порождает существенные трудности при численном решении подобных задач. Весьма эффективный способ обработки подобного рода сингулярностей состоит не в использовании квадратурных формул [3], а в представлении решения задачи и коэффициентов уравнения в виде интерполяционных многочленов с использованием многочленов Чебышева (см., напр., [2, 4–8]). Данный прием с учетом известных спектральных соотношений [9, с. 188],

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}} \frac{dt}{t-x} &= U_{n-1}(x), \\ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} U_{n-1}(t) \frac{dt}{t-x} &= -T_n(x), \quad -1 < x < 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned} \quad (2)$$

где $T_n(x)$, $U_n(x)$ – многочлены Чебышева степени n первого и второго рода соответственно, позволяет вычислить аналитически сингулярную составляющую входящих в уравнение интегралов и получить высокую скорость сходимости приближенного решения задачи [5]. Спектральные методы на основе многочленов Чебышева для некоторых частных случаев уравнения Прандтля построены в работах [6–8], где показана их высокая эффективность.

Постановка задачи и некоторые предварительные сведения. Предварительно в (1) выполним преобразование сингулярного интеграла $\int_{-1}^1 \frac{s(x,t)}{t-x} \Gamma(t) dt$ в соответствии с [10, с. 315]:

$$\int_{-1}^1 \frac{s(x,t)}{t-x} \Gamma(t) dt = \int_{-1}^1 \frac{s(x,t) - s(x,x) + s(x,x)}{t-x} \Gamma(t) dt = \frac{b(x)}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma(t)}{t-x} dt + \int_{-1}^1 v(x,t) \Gamma(t) dt,$$

где $b(x) = \pi s(x,x)$, $v(x,t) = \frac{s(x,t) - s(x,x)}{t-x}$.

Далее будем рассматривать уравнение (1) в виде

$$\frac{\Gamma(x)}{B(x)} - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma'(t)}{t-x} dt + \frac{b(x)}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma(t)}{t-x} dt + \int_{-1}^1 g(x,t) \Gamma'(t) dt + \int_{-1}^1 v(x,t) \Gamma(t) dt = f(x), \quad |x| < 1. \quad (3)$$

Здесь $B(x)$, $b(x)$, $g(x,t)$, $v(x,t)$ и $f(x)$ – известные функции; $\Gamma(x)$ – искомая функция, удовлетворяющая краевым условиям

$$\Gamma(\pm 1) = 0. \quad (4)$$

Полагаем, что производная решения задачи принадлежит классу функций $h(0)$ по Мусхелишвили – классу функций с интегрируемой особенностью в окрестности точек $x = \pm 1$ [10, с. 31], т. е. $\psi(x) \in h(0)$, если на отрезке $[-1 + \varepsilon_1, 1 - \varepsilon_2]$ $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, $\psi(x)$ удовлетворяет условию Гельдера и в окрестности точек ± 1 допускает интегрируемую особенность.

Относительно условий разрешимости задачи (3), (4) имеет место

Теорема. Пусть функции $B(x)$, $b(x)$, $v(x,t)$, $g(x,t)$, входящие в уравнение (3), удовлетворяют условию

$$\rho = \max_{|x| \leq 1} \left| \sqrt{1-x^2} / B(x) \right| + \|b\|_C + \frac{\pi}{2} \|v\|_C + \frac{2}{\pi} \|g\|_C < 1.$$

Тогда граничная задача (3), (4) имеет единственное решение в классе функций $\Gamma'(x) \in h(0)$ при любой $f(x) \in C[-1, 1]$.

Доказательство теоремы проводится по аналогии с [11].

Построение вычислительных схем. Для построения приближенной схемы решения задачи (3), (4) используем интерполяционный многочлен для функции $f(x)$ по узлам Чебышева первого рода [12, с. 89]:

$$f(x) \approx f_n(x) = \sum_{j=0}^n {}^0 c_j T_j(x), \quad (5)$$

где

$$c_j = \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^n f(x_k) T_j(x_k), \quad j=0, 1, \dots, n, \quad x_k = \cos \frac{2k+1}{2n+2} \pi, \quad k=0, 1, \dots, n.$$

Здесь и далее $\sum_{j=0}^n {}^0 a_j = \frac{1}{2} a_0 + a_1 + \dots + a_n$.

Используя известные свойства многочленов Чебышева (см. [12, с. 23])

$$T_0(x) = U_0(x), \quad 2T_1(x) = U_1(x), \quad 2T_j(x) = U_j(x) - U_{j-2}(x), \quad j \geq 2,$$

несложно получить аналогичное приближенное представление функции $f(x)$ в виде разложения по многочленам Чебышева второго рода:

$$f_n(x) = \sum_{j=0}^n f_j U_j(x), \quad (6)$$

где

$$x_k = \cos \frac{2k+1}{2n+2} \pi, \quad k=0, 1, \dots, n, \quad G_j = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f(x_k) T_j(x_k), \quad j=0, 1, \dots, n;$$

$$f_j = G_j - G_{j+2}, \quad j=0, 1, \dots, n-2, \quad f_{n-1} = G_{n-1}, \quad f_n = G_n.$$

При построении вычислительных схем используем интерполяционные многочлены функции двух переменных в виде разложения по многочленам Чебышева, полученные на основании (5) и (6):

$$g_{n,n}(x, t) = \sum_{m=0}^n T_m(x) \sum_{j=0}^n \sigma_{m,j} T_j(t),$$

$$\sigma_{m,j} = \frac{\delta_j}{n+1} \sum_{r=1}^{n+1} T_j(x_r) \frac{\delta_m}{n+1} \sum_{l=1}^{n+1} T_m(x_l) g(x_l, x_r), \quad (7)$$

$$\delta_i = \begin{cases} 1, & i=0, \\ 2, & i>0, \end{cases} \quad x_p = \cos \frac{2p-1}{2n+2} \pi, \quad p=1, 2, \dots, n+1,$$

и

$$v_{n,n}(x, t) = \sum_{m=0}^n T_m(x) \sum_{j=0}^n \eta_{m,j} U_j(t),$$

$$\eta_{m,j} = \frac{\delta_j}{(n+1)^2} \sum_{r=1}^{n+1} T_m(x_r) \sum_{l=1}^{n+1} T_j((x_l) - \beta_j T_{j+2}(x_l)) v(x_l, x_r),$$

$$\delta_j = \begin{cases} 1, & j=0, \\ 2, & j>0, \end{cases} \quad \beta_j = \begin{cases} 1, & 0 \leq j \leq n-2, \\ 0, & j=n-1, n, \end{cases}$$

$$x_k = \cos \frac{2k-1}{2n+2} \pi, \quad k=1, 2, \dots, n+1. \quad (8)$$

В дальнейшем нам понадобится

Утверждение 1. Для $|x| < 1$ имеет место равенство

$$J_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left(\sqrt{1-t^2} T_k(t) \right)' \frac{dt}{t-x} = \begin{cases} -U_0(x), & k=0, \\ -U_1(x), & k=1, \\ -(k+1)T_k(x) - U_{k-2}(x), & k \geq 2, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -U_0(x), & k=0, \\ -U_1(x), & k=1, \\ \frac{k-1}{2} U_{k-2}(x) - \frac{k+1}{2} U_k(x), & k \geq 2. \end{cases} \quad (9)$$

Доказательство. При $k = 0$ формула (9) очевидно верна на основании (2) и того факта, что $U_{-1}(x) = 0$.

Пусть $k \geq 1$. Вычислим производную от подынтегральной функции и используем соотношение [12]: $x T_k(x) = (1 - x^2)U_{k-1}(x) - T_{k-1}(x)$. Тогда

$$J_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left((k+1)\sqrt{1-t^2}U_{k-1}(t) - \frac{T_{k-1}(t)}{\sqrt{1-t^2}} \right) \frac{dt}{t-x}.$$

Применим (2), учтем соотношение $2T_k(x) = U_k(x) - U_{k-2}(x)$ и получим, что

$$J_k(x) = -(k+1)T_k(x) - U_{k-2}(x) = \frac{k-1}{2}U_{k-2}(x) - \frac{k+1}{2}U_k(x).$$

Утверждение доказано.

По аналогии можно доказать следующее

Утверждение 2. Для $x \in (-1, 1)$ справедливы формулы

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} T_k(t) \frac{dt}{t-x} = \begin{cases} -T_1(x), & k=0, \\ -\frac{1}{2}T_2(x), & k=1, \\ \frac{1}{2}T_{k-1}(x) - \frac{1}{2}T_{k+1}(x), & k \geq 2. \end{cases} \quad (10)$$

Приближенное решение задачи (3), (4). Приближенное решение задачи (3), (4) будем искать как решение следующего уравнения:

$$\begin{aligned} K(\Gamma_n; x) \equiv & \frac{\Gamma_n(x)}{B(x)} - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma'_n(t)}{t-x} dt + \frac{b(x)}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma_n(t)}{t-x} dt + \int_{-1}^1 g_{n,n}(x, t) \Gamma'_n(t) dt + \\ & + \int_{-1}^1 v_{n,n}(x, t) \Gamma_n(t) dt = F_n(x), \quad -1 < x < 1, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\Gamma_n(x)$ – искомая функция, удовлетворяющая краевым условиям $\Gamma_n(\pm 1) = 0$, $g_{n,n}(x, t)$; $v_{n,n}(x, t)$ – интерполяционные многочлены (7), (8) для функций $g(x, t)$, $v(x, t)$ соответственно; $F_n(x)$ – некоторая функция из класса $C[-1, 1]$ такая, что $F_n(x_j) = f(x_j)$, $x_j = \cos \frac{j+1}{n+2}$, $j = 0, 1, \dots, n$.

Схема 1. Пусть

$$\Gamma_n(x) = \sqrt{1-x^2} \sum_{k=0}^n c_k U_k(x), \quad (12)$$

где c_k , $k = 0, 1, \dots, n$, – неизвестные постоянные.

Отсюда далее получим

$$\Gamma'_n(x) = \left(\sqrt{1-x^2} \sum_{k=0}^n c_k U_k(x) \right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sum_{k=0}^n c_k (k+1) T_{k+1}(x). \quad (13)$$

Интегралы, входящие в (11), вычисляются явно. Рассмотрим первые два. Имеем

$$I_1(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma'_n(t)}{t-x} dt = \sum_{k=0}^n c_k (k+1) \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_{k+1}(t)}{\sqrt{1-t^2}} \frac{dt}{t-x} = \sum_{k=0}^n c_k (k+1) U_k(x). \quad (14)$$

Аналогично подсчитаем

$$I_2(x) = \frac{b(x)}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma_n(t)}{t-x} dt = b(x) \sum_{k=0}^n c_k \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} U_k(t) \frac{dt}{t-x} = -b(x) \sum_{k=0}^n c_k T_{k+1}(x). \quad (15)$$

Вычислим последовательно регулярные интегралы

$$I_3(x) = \int_{-1}^1 g_{n,n}(x,t) \Gamma'_n(t) dt, \quad I_4(x) = \int_{-1}^1 v_{n,n}(x,t) \Gamma_n(t) dt.$$

При вычислении интеграла $I_3(x)$ используем (13), интерполяционный многочлен (7), учтем [12] свойство $2T_m(x)T_n(x) = T_{m+n}(x) + T_{m-n}(x)$, а также свойства ортогональности многочленов Чебышева:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_j(t)T_p(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \begin{cases} 0, & j \neq p, \\ 1, & j = p = 0, \\ \frac{1}{2}, & j = p \neq 0, \end{cases} \quad \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} U_p(t) dt = \begin{cases} \frac{1}{2}, & p = 0, \\ -\frac{1}{2}, & p = -2, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

и получим

$$\begin{aligned} I_3(x) &= \int_{-1}^1 \left(\sum_{m=0}^n T_m(x) \sum_{j=0}^n \sigma_{m,j} T_j(t) \left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \sum_{k=0}^n c_k(k+1) T_{k+1}(t) \right) \right) dt = \\ &= \sum_{k=0}^n c_k(k+1) \sum_{m=0}^n T_m(x) \sum_{j=0}^n \sigma_{m,j} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} T_{k+1}(t) T_j(t) dt = \\ &= \frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^{n-1} c_k(k+1) \sum_{m=0}^n T_m(x) \sigma_{m,k+1}, \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_{m,j} &= \frac{\delta_j}{n+1} \sum_{r=1}^{n+1} T_j(x_r) \frac{\delta_m}{n+1} \sum_{l=1}^{n+1} T_m(x_l) g(x_l, x_r), \\ \delta_i &= \begin{cases} 1, & i = 0, \\ 2, & i > 0, \end{cases} \quad x_p = \cos \frac{2p-1}{2n+2} \pi, \quad p = 1, 2, \dots, n+1. \end{aligned}$$

Аналогично вычислим $I_4(x)$, используя (12), интерполяционный многочлен (8) и свойство [12] $2(1-x^2)U_m(x)U_n(x) = T_{m-n}(x) - T_{m+n+2}(x)$:

$$\begin{aligned} I_4(x) &= \int_{-1}^1 \left(\sum_{m=0}^n T_m(x) \sum_{j=0}^n \eta_{m,j} U_j(t) \right) \left(\sqrt{1-t^2} \sum_{k=0}^n c_k U_k(t) \right) dt = \\ &= \sum_{k=0}^n c_k \sum_{m=0}^n T_m(x) \sum_{j=0}^n \eta_{m,j} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{(T_{k-j}(t) - T_{k+j+2}(t))}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^n c_k \sum_{m=0}^n T_m(x) \eta_{m,k}, \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} \eta_{m,j} &= \frac{\delta_j}{(n+1)^2} \sum_{r=1}^{n+1} T_m(x_r) \sum_{l=1}^{n+1} T_j((x_l) - \beta_j T_{j+2}(x_l)) v(x_l, x_r), \\ \delta_j &= \begin{cases} 1, & j = 0, \\ 2, & j > 0, \end{cases} \quad \beta_j = \begin{cases} 1, & 0 \leq j \leq n-2, \\ 0, & j = n-1, n, \end{cases} \quad x_k = \cos \frac{2k-1}{2n+2} \pi, \quad k = 1, 2, \dots, n+1. \end{aligned}$$

Таким образом, собирая вместе (14)–(17), имеем

$$\begin{aligned} K(\Gamma_n; x) &= \sum_{k=0}^n c_k \frac{\sqrt{1-x^2}}{B(x)} U_k(x) + \sum_{k=0}^n c_k(k+1) U_k(x) - b(x) \sum_{k=0}^n c_k T_{k+1}(x) + \\ &+ \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{\pi(k+1)}{2} \sum_{m=0}^n T_m(x) \sigma_{m,k+1} + \frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^n c_k \sum_{m=0}^n T_m(x) \eta_{m,k} = F_n(x), \quad -1 < x < 1. \end{aligned} \quad (18)$$

Из уравнения (18) следует система линейных алгебраических уравнений для вычисления $c_0, c_1, \dots, c_n$, которая получается путем последовательной подстановки в (18) вместо x нулей многочлена Чебышева второго рода $x_i = \cos \frac{i+1}{n+2}$, $i = 0, 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n c_k \left(\frac{\sqrt{1-x_i^2}}{B(x_i)} U_k(x_i) + (k+1)U_k(x_i) - b(x_i)T_{k+1}(x_i) \right) + \\ & + \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{\pi(k+1)}{2} \sum_{m=0}^n T_m(x_i) \sigma_{m,k+1} + \frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^n c_k \sum_{m=0}^n T_m(x_i) \eta_{m,k} = F_n(x_i), \\ & i = 0, 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (19)$$

Уравнение (11) и эквивалентное ему уравнение (18) равносильны, так как, выполняя действия, приводящие (11) к (18) в обратном порядке, из (18) получим уравнение (11) (см., напр., [13, с. 535]). Следовательно, система (19), полученная из (18), разрешима и имеет единственное решение c_k , $k = 0, 1, \dots, n$.

Приближенное решение задачи (3), (4) – функция $\Gamma_n(x)$ – вычисляется по (12) в произвольной точке $x \in [-1, 1]$.

З а м е ч а н и е 1. При вычислении интеграла $I_4(x)$ был использован интерполяционный многочлен (8), однако можно воспользоваться и многочленом (7). Тогда интеграл

$$\begin{aligned} I_4(x) &= \int_{-1}^1 \left(\sum_{m=0}^n T_m(x) \sum_{j=0}^n \vartheta_{m,j} T_j(t) \right) \left(\sqrt{1-t^2} \sum_{k=0}^n c_k U_k(t) \right) dt = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n c_k \sum_{m=0}^n T_m(x) \sum_{j=0}^n \vartheta_{m,j} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} (U_{k-j}(t) + U_{k+j}(t)) dt = \\ &= c_0 \frac{\pi}{2} \sum_{m=0}^n T_m(x) \vartheta_{m,0} + \frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^n c_k \sum_{m=0}^n T_m(x) \vartheta_{m,k}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \vartheta_{m,j} &= \frac{\delta_j}{n+1} \sum_{r=1}^{n+1} T_j(x_r) \frac{\delta_m}{n+1} \sum_{l=1}^{n+1} T_m(x_l) v(x_l, x_r), \\ \delta_i &= \begin{cases} 1, & i = 0, \\ 2, & i > 0, \end{cases} \quad x_p = \cos \frac{2p-1}{2n+2} \pi, \quad p = 1, 2, \dots, n+1. \end{aligned}$$

Таким образом, подобно предыдущему, имеем

$$\begin{aligned} K(\Gamma_n; x) &= \sum_{k=0}^n c_k \frac{\sqrt{1-x^2}}{B(x)} U_k(x) + \sum_{k=0}^n c_k (k+1) U_k(x) - b(x) \sum_{k=0}^n c_k T_{k+1}(x) + \\ &+ \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{\pi(k+1)}{2} \sum_{m=0}^n T_m(x) \sigma_{m,k+1} + c_0 \frac{\pi}{2} \sum_{m=0}^n T_m(x) \vartheta_{m,0} + \\ &+ \frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^n c_k \sum_{m=0}^n T_m(x) \vartheta_{m,k} = F_n(x), \quad -1 < x < 1. \end{aligned} \quad (20)$$

Из уравнения (20) следует система линейных алгебраических уравнений для вычисления $c_0, c_1, \dots, c_n$, которая получается путем последовательной подстановки в (20) вместо x нулей многочлена Чебышева второго рода $x_i = \cos \frac{i+1}{n+2}$, $i = 0, 1, \dots, n$:

$$c_0 \left(\frac{\sqrt{1-x_i^2}}{B(x_i)} + 1 - b(x_i)x_i + \frac{\pi}{2} \sum_{m=0}^n T_m(x_i) (\sigma_{m,1} + \vartheta_{m,0}) \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=1}^{n-1} c_k \left(\left(\frac{\sqrt{1-x_i^2}}{B(x_i)} + k + 1 \right) U_k(x_i) - b(x_i) T_{k+1}(x_i) + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{m=0}^n T_m(x_i) \left(\frac{\pi(k+1)}{2} \sigma_{m,k+1} + \frac{\pi}{4} \vartheta_{m,k} \right) \right) + \\
& + c_n \left(\left(\frac{\sqrt{1-x_i^2}}{B(x_i)} + n + 1 \right) U_n(x_i) - b(x_i) T_{n+1}(x_i) + \frac{\pi}{4} \sum_{m=0}^n T_m(x_i) \vartheta_{m,n} \right) = F_n(x_i), \\
& i = 0, 1, \dots, n.
\end{aligned} \tag{21}$$

С х е м а 2. Пусть

$$\Gamma_n(x) = \sqrt{1-x^2} \sum_{k=0}^n c_k T_k(x), \tag{22}$$

где c_k , $k = 0, 1, \dots, n$, – неизвестные постоянные.

Интегралы, входящие в (11), и в данном случае вычисляются явно. В первом интеграле применим (9):

$$\begin{aligned}
I_1(x) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma'_n(t)}{t-x} dt = -\sum_{k=0}^n c_k \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left(\sqrt{1-t^2} T_k(t) \right)' \frac{dt}{t-x} = \\
&= c_0 + c_1 U_1(x) + \sum_{k=2}^n c_k ((k+1) T_k(x) + U_{k-2}(x)).
\end{aligned} \tag{23}$$

На основании (10) с учетом свойства [12] $T_{n+2}(x) - T_n(x) = 2(x^2 - 1)U_n(x)$ получаем

$$I_2(x) = \frac{b(x)}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma_n(t)}{t-x} dt = -b(x) \left(c_0 T_1(x) + \frac{1}{2} c_1 T_2(x) + (x^2 - 1) \sum_{k=2}^n c_k U_{k-1}(x) \right). \tag{24}$$

Вычислим последовательно регулярные интегралы

$$I_3(x) = \int_{-1}^1 g_{n,n}(x, t) \Gamma'_n(t) dt, \quad I_4(x) = \int_{-1}^1 v_{n,n}(x, t) \Gamma_n(t) dt.$$

Так как, согласно [12], имеет место $-x T_k(x) = (1 - x^2) U_{k-1}(x) - T_{k-1}(x)$, то

$$\Gamma'_n(x) = \sum_{k=1}^n c_k (k+1) \sqrt{1-x^2} U_{k-1}(x) - \sum_{k=0}^n c_k \frac{T_{k-1}(x)}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{25}$$

Используя интерполяционный многочлен (7) для функции $g(x, t)$, представление (25) и выполняя некоторые элементарные вычисления с учетом свойств [12] $2 U_m(x) T_n(x) = U_{m-n}(x) + U_{m+n}(x)$ и ортогональности многочленов Чебышева, получим

$$\begin{aligned}
I_3(x) &= \int_{-1}^1 g_{n,n}(x, t) \Gamma'_n(t) dt = -c_0 \frac{\pi}{2} \sum_{m=0}^n T_m(x) \sigma_{m,1} - \\
&- c_1 \frac{\pi}{2} \sum_{m=0}^n T_m(x) \sigma_{m,2} + c_n \frac{\pi}{4} (n-1) \sum_{m=0}^n T_m(x) \sigma_{m,n-1} + \\
&+ \sum_{k=2}^{n-1} c_k \frac{\pi}{4} \left((k-1) \sum_{m=0}^n T_m(x) \sigma_{m,k-1} - (k+1) \sum_{m=0}^n T_m(x) \sigma_{m,k+1} \right),
\end{aligned} \tag{26}$$

где

$$\sigma_{m,j} = \frac{\delta_j}{n+1} \sum_{r=1}^{n+1} T_j(x_r) \frac{\delta_m}{n+1} \sum_{l=1}^{n+1} T_m(x_l) g(x_l, x_r),$$

$$\delta_i = \begin{cases} 1, & i = 0, \\ 2, & i > 0, \end{cases} \quad x_p = \cos \frac{2p-1}{2n+2} \pi, \quad p = 1, 2, \dots, n+1.$$

Аналогично, используя интерполяционный многочлен (8) для функции $v(x, t)$, вычислим

$$\begin{aligned} I_4(x) &= \int_{-1}^1 v_{n,n}(x, t) \Gamma_n(t) dt = \\ &= \int_{-1}^1 \left(\sum_{m=0}^n T_m(x) \sum_{j=0}^n \eta_{m,j} U_j(t) \right) \left(\sqrt{1-t^2} \sum_{k=0}^n c_k T_k(t) \right) dt = \\ &= \sum_{k=0}^n c_k \sum_{m=0}^n T_m(x) \sum_{j=0}^n \eta_{m,j} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} (U_{j-k}(t) + U_{j+k}(t)) dt = \\ &= c_0 \frac{\pi}{2} \sum_{m=0}^n T_m(x) \eta_{m,0} + c_1 \frac{\pi}{4} \sum_{m=0}^n T_m(x) \eta_{m,1} + \\ &\quad + \frac{\pi}{4} \sum_{k=2}^n c_k \sum_{m=0}^n T_m(x) (\eta_{m,k} - \eta_{m,k-2}), \end{aligned} \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned} \eta_{m,j} &= \frac{\delta_j}{(n+1)^2} \sum_{r=1}^{n+1} T_m(x_r) \sum_{l=1}^{n+1} (T_j(x_l) - \beta_j T_{j+2}(x_l)) v(x_l, x_r), \\ \delta_j &= \begin{cases} 1, & j = 0, \\ 2, & j > 0, \end{cases} \quad \beta_j = \begin{cases} 1, & 0 \leq j \leq n-2, \\ 0, & j = n-1, n, \end{cases} \\ x_k &= \cos \frac{2k-1}{2n+2} \pi, \quad k = 1, 2, \dots, n+1. \end{aligned}$$

Таким образом, на основании (22)–(27) получаем, что

$$\begin{aligned} K(\Gamma_n; x) &= \sum_{k=0}^n c_k \frac{\sqrt{1-x^2}}{B(x)} T_k(x) + c_0 + c_1 U_1(x) + \sum_{k=2}^n c_k ((k+1)T_k(x) + U_{k-2}(x)) - \\ &\quad - b(x) \left(c_0 T_1(x) + \frac{1}{2} c_1 T_2(x) + (x^2 - 1) \sum_{k=2}^n c_k U_{k-1}(x) \right) - \\ &\quad - c_0 \frac{\pi}{2} \sum_{m=0}^n T_m(x) \sigma_{m,1} - c_1 \frac{\pi}{2} \sum_{m=0}^n T_m(x) \sigma_{m,2} + c_n \frac{\pi}{4} (n-1) \sum_{m=0}^n T_m(x) \sigma_{m,n-1} + \\ &\quad + \sum_{k=2}^{n-1} c_k \frac{\pi}{4} \left((k-1) \sum_{m=0}^n T_m(x) \sigma_{m,k-1} - (k+1) \sum_{m=0}^n T_m(x) \sigma_{m,k+1} \right) + \\ &\quad + c_0 \frac{\pi}{2} \sum_{m=0}^n T_m(x) \eta_{m,0} + c_1 \frac{\pi}{4} \sum_{m=0}^n T_m(x) \eta_{m,1} + \frac{\pi}{4} \sum_{k=2}^n c_k \sum_{m=0}^n T_m(x) (\eta_{m,k} - \eta_{m,k-2}) = \\ &= F_n(x), \quad -1 < x < 1. \end{aligned} \quad (28)$$

Из уравнения (28) следует система линейных алгебраических уравнений для вычисления $c_0, c_1, \dots, c_n$, которая получается путем последовательной подстановки в (28) вместо x нулей многочлена Чебышева второго рода $x_i = \cos \frac{i+1}{n+2}$, $i = 0, 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n c_k \frac{\sqrt{1-x_i^2}}{B(x_i)} T_k(x_i) + c_0 \left(1 - b(x_i) x_i + \frac{\pi}{2} \sum_{m=0}^n T_m(x_i) (\eta_{m,0} - \sigma_{m,1}) \right) + \\ + c_1 \left(-\frac{b(x_i)}{2} T_2(x_i) + \frac{\pi}{4} \sum_{m=0}^n T_m(x_i) (\eta_{m,1} - 2\sigma_{m,2}) \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + c_2 \left(3T_2(x_i) + 1 - b(x_i)(x_i^2 - 1)U_1(x_i) + \frac{\pi}{4} \sum_{m=0}^n T_m(x_i)(\eta_{m,2} + \sigma_{m,1} - 3\sigma_{m,3}) \right) + \\
& + \sum_{k=3}^{n-1} c_k \left((k+1)T_k(x_i) + U_{k-2}(x_i) - b(x_i)(x_i^2 - 1)U_{k-1}(x_i) \right) + \\
& + \frac{\pi}{4} \left(\sum_{m=0}^n T_m(x_i)(\eta_{m,k} - \eta_{m,k-2} + (k-1)\sigma_{m,k-1} - (k+1)\sigma_{m,k+1}) \right) + \\
& + c_n \left((n+1)T_n(x_i) + U_{n-2}(x_i) - b(x_i)(x_i^2 - 1)U_{n-1}(x_i) + \right. \\
& \left. + \frac{\pi}{4} \sum_{m=0}^n T_m(x_i)[\eta_{m,n} - \eta_{m,n-2} + (n-1)\sigma_{m,n-1}] \right) = F_n(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n.
\end{aligned} \tag{29}$$

Уравнение (11) и эквивалентное ему уравнение (28) равносильны, так как, выполняя действия, приводящие (11) к (28) в обратном порядке, из (28) получим уравнение (11) [13]. Следовательно, система (29), полученная из (28), разрешима и имеет единственное решение c_k , $k = 0, 1, \dots, n$.

Приближенное решение задачи (3), (4) – функция $\Gamma_n(x)$ – вычисляется по (22) в произвольной точке $x \in [-1, 1]$.

З а м е ч а н и е 2. При вычислении интеграла $I_4(x)$ был использован интерполяционный многочлен (8), однако можно воспользоваться и многочленом (7). Тогда интеграл

$$\begin{aligned}
I_4(x) &= \int_{-1}^1 v_{n,n}(x, t) \Gamma_n(t) dt = \int_{-1}^1 \left(\sum_{m=0}^n T_m(x) \sum_{j=0}^n \rho_{m,j} T_j(t) \right) \left(\sqrt{1-t^2} \sum_{k=0}^n c_k T_k(t) \right) dt = \\
&= \sum_{k=0}^n c_k \sum_{m=0}^n T_m(x) \sum_{j=0}^n \rho_{m,j} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} (T_{j-k}(t) + T_{j+k}(t)) dt,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\rho_{m,j} &= \frac{\delta_j}{n+1} \sum_{r=1}^n T_j(x_r) \frac{\delta_m}{n+1} \sum_{l=1}^{n+1} T_m(x_l) v(x_l, x_r), \\
\delta_i &= \begin{cases} 1, & i = 0, \\ 2, & i > 0, \end{cases} \quad x_p = \cos \frac{2p-1}{2n+2} \pi, \quad p = 1, 2, \dots, n+1.
\end{aligned}$$

Следовательно, с учетом (10) получаем

$$\begin{aligned}
I_4(x) &= c_0 \frac{\pi}{4} \sum_{m=0}^n T_m(x) [2\rho_{m,0} - \rho_{m,2}] + c_1 \frac{\pi}{8} \sum_{m=0}^n T_m(x) (\rho_{m,1} - \rho_{m,3}) + \\
&+ c_2 \frac{\pi}{4} \sum_{m=0}^n T_m(x) (\rho_{m,2} - \rho_{m,0}) + \sum_{k=3}^n c_k \frac{\pi}{8} \sum_{m=0}^n T_m(x) [2\rho_{m,k} - \rho_{m,k-2}].
\end{aligned}$$

Таким образом, подобно предыдущему, имеем

$$\begin{aligned}
K(\Gamma_n; x) &= \sum_{k=0}^n c_k \frac{\sqrt{1-x^2}}{B(x)} T_k(x) + c_0 + c_1 U_1(x) + \sum_{k=2}^n c_k \left((k+1)T_k(x) + U_{k-2}(x) \right) - \\
&- b(x) \left(c_0 x + \frac{c_1}{2} T_2(x) + (x^2 - 1) \sum_{k=2}^n c_k U_{k-1}(x) \right) - c_0 \frac{\pi}{2} \sum_{m=0}^n T_m(x) \sigma_{m,1} - c_1 \frac{\pi}{2} \sum_{m=0}^n T_m(x) \sigma_{m,2} + \\
&+ c_n \frac{\pi}{4} (n-1) \sum_{m=0}^n T_m(x) \sigma_{m,n-1} + \sum_{k=2}^{n-1} c_k \frac{\pi}{4} \left((k-1) \sum_{m=0}^n T_m(x) \sigma_{m,k-1} - (k+1) \sum_{m=0}^n T_m(x) \sigma_{m,k+1} \right) + \\
&+ c_0 \frac{\pi}{4} \sum_{m=0}^n T_m(x) [2\rho_{m,0} - \rho_{m,2}] + c_1 \frac{\pi}{8} \sum_{m=0}^n T_m(x) (\rho_{m,1} - \rho_{m,3}) + \\
&+ c_2 \frac{\pi}{4} \sum_{m=0}^n T_m(x) (\rho_{m,2} - \rho_{m,0}) + \sum_{k=3}^n c_k \frac{\pi}{8} \sum_{m=0}^n T_m(x) [2\rho_{m,k} - \rho_{m,k-2}] = F_n(x), \quad -1 < x < 1.
\end{aligned}$$

Отсюда следует система линейных алгебраических уравнений для вычисления $c_0, c_1, \dots, c_n$, которая получается путем последовательной подстановки вместо x нулей многочлена Чебышева

первого рода $x_i = \cos \frac{i+1}{n+2}$, $i = 0, 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n c_k \frac{\sqrt{1-x_i^2}}{B(x_i)} T_k(x_i) + c_0 \left(1 - b(x_i)x_i + \frac{\pi}{4} \sum_{m=0}^n T_m(x_i)(2\rho_{m,0} - 2\sigma_{m,1} - \rho_{m,2}) \right) + \\ & + c_1 \left(-\frac{b(x_i)}{2} T_2(x_i) + U_1(x_i) + \frac{\pi}{8} \sum_{m=0}^n T_m(x_i)(\rho_{m,1} - \rho_{m,3} - 4\sigma_{m,2}) \right) + \\ & + c_2 \left(3T_2(x_i) + 1 - b(x_i)(x_i^2 - 1)U_1(x_i) + \frac{\pi}{4} \sum_{m=0}^n T_m(x_i)(\rho_{m,2} - \rho_{m,0} + \sigma_{m,1} - 3\sigma_{m,3}) \right) + \\ & + \sum_{k=3}^{n-1} c_k \left((k+1)T_k(x_i) + U_{k-2}(x_i) - b(x_i)(x_i^2 - 1)U_{k-1}(x_i) \right) + \\ & + \frac{\pi}{8} \left(\sum_{m=0}^n T_m(x_i)(2(k-1)\sigma_{m,k-1} - 2(k+1)\sigma_{m,k+1} + 2\rho_{m,k} - \rho_{m,k-2}) \right) + \\ & + c_n \left((n+1)T_n(x_i) + U_{n-2}(x_i) - b(x_i)(x_i^2 - 1)U_{n-1}(x_i) + \right. \\ & \left. + \frac{\pi}{8} \sum_{m=0}^n T_m(x_i)[2\rho_{m,n} - \rho_{m,n-2} + 2(n-1)\sigma_{m,n-1}] \right) = F_n(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (30)$$

Результаты численного эксперимента. Приведем результаты численного эксперимента, проведенного согласно построенным численным схемам. Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(x)}{B(x)} - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma'(t)}{t-x} dt + \frac{b(x)}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma(t)}{t-x} dt + \int_{-1}^1 g(x,t)\Gamma'(t)dt + \int_{-1}^1 v(x,t)\Gamma(t)dt = f(x), \quad |x| < 1, \\ & B(x) = \sqrt{1-x^2} \frac{1+4x^2}{1+2x^2}, \quad b(x) = \frac{x^2}{x+2}, \\ & v(x,t) = \frac{x}{20x+40} \frac{1}{t^2+1}, \quad g(x,t) = \frac{1}{20x-40} \frac{t}{t^2+2}, \\ & f(x) = \frac{(32x^5 - 32x^3 + 6x)(2x^2 + 1)}{4x^2 + 1} - \frac{x^2(32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1)}{x+2} + \\ & + 192x^5 - 192x^3 + 36x. \end{aligned} \quad (31)$$

Известно, что решением задачи (31), (4) является функция

$$\Gamma(x) = \sqrt{1-x^2} (32x^5 - 32x^3 + 6x) = \sqrt{1-x^2} U_5(x).$$

Несложно убедиться, что производная данной функции $\Gamma'(x) \in h(0)$.

Как показывают расчеты, уже при сравнительно небольших значениях n (начиная с 5) достигается предельная точность приближенного решения, погрешность которого ограничена снизу лишь с вычислительной погрешностью.

Решая системы уравнений (19), (21), (29) или (30) при $n = 5$ и $n = 35$, приближенное решение $\Gamma_n(x)$ отличается от точного решения $\Gamma(x)$ в точках $x = -0,99, -0,98, \dots, 0,99$ не более чем на $1,5 \cdot 10^{-15}$. Число обусловленности матрицы систем при размерности n равной 5 и 35 соответственно $\text{cond}(C_5) \leq 11$ и $\text{cond}(C_{35}) \leq 290$, что позволяет грубо оценить зависимость числа обусловленности от размерности как $\text{cond}(C_n) \cong O(n)$.

Представленные результаты численных экспериментов позволяют оценить эмпирически скорость сходимости построенных численных алгоритмов как линейную. Естественно, что это весьма частный пример, не претендующий на сколь-нибудь значимые обобщения. Вместе с тем

априорные оценки погрешности численных методов решения подобных задач, полученные, например, в работах [2, 14], представляются весьма осторожными и указывают на необходимость дальнейших исследований в направлении их оптимизации.

Таким образом, развитая в данной работе приближенная методика обладает высокой эффективностью в классе сингулярных интегро-дифференциальных уравнений прандтлевского типа. На примере тестовой задачи продемонстрировано, что дискретная модель, основанная на представлении решения в виде разложения по многочленам Чебышева, приводит к хорошо обусловленной системе линейных алгебраических уравнений для коэффициентов разложения, а сходимость погрешности приближенного решения может достигать линейной скорости относительно степени интерполяционного многочлена.

В заключение отметим, что представленные результаты могут быть использованы как в теоретических научных исследованиях, так и в инженерных расчетах, а также в образовательных программах по вычислительной математике. Итоги работы создают основу для дальнейшего развития спектральных методов, их адаптации к новым постановкам и интеграции в современные вычислительные комплексы.

Благодарности. Работа выполнена в рамках Государственной программы научных исследований «Конвергенция-2025», подпрограмма «Математические модели и методы», задание 1.4.01.2.

Acknowledgments. This work was supported by the State Program of Scientific Research “Convergence-2025”, subprogram “Mathematical models and methods”, task 1.4.01.2.

Список использованных источников

1. Голубев, В. В. Лекции по теории крыла / В. В. Голубев. – М.: Наука, 1949. – 480 с.
2. Габдулхаев, Б. Г. Прямые методы решения уравнения теории крыла / Б. Г. Габдулхаев // Известия высших учебных заведений. Математика. – 1974. – № 2. – С. 29–44.
3. Иванов, В. В. Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений / В. В. Иванов. – Киев: Наукова думка, 1968. – 287 с.
4. Elliott, D. A comprehensive approach to the approximate solution of singular integral equations over the arc $(-1,1)$ / D. Elliott // The Journal of Integral Equations and Applications. – 1989. – Vol. 2, № 1. – P. 59–94. <https://doi.org/10.1216/jie-1989-2-1-59>
5. Sahlan, M. N. Operational matrices of Chebyshev polynomials for solving singular Volterra integral equations / M. N. Sahlan, H. Feyzollahzadeh // Mathematical Sciences. – 2017. – Vol. 11, № 2. – P. 165–171. <https://doi.org/10.1007/s40096-017-0222-4>
6. Расолько, Г. А. Численное решение сингулярного интегро-дифференциального уравнения Прандтля методом ортогональных многочленов / Г. А. Расолько // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. – 2018. – № 3. – С. 68–74.
7. Расолько, Г. А. К численному решению сингулярного интегро-дифференциального уравнения Прандтля методом ортогональных многочленов / Г. А. Расолько // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. – 2019. – № 1. – С. 58–68. <https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-1-58-68>
8. Расолько, Г. А. Об одном методе численного решения некоторых сингулярных интегро-дифференциальных уравнений / Г. А. Расолько, С. М. Шешко, М. А. Шешко // Дифференциальные уравнения. – 2019. – Т. 55, № 9. – С. 1285–1292. <https://doi.org/10.1134/S0374064119090115>
9. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М.: Наука, 1973. – 297 с.
10. Мусхелишвили, Н. И. Сингулярные интегральные уравнения / Н. И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1968. – 513 с.
11. Rasolko, G. A. Chebyshev spectral method for one class of singular integro-differential equations / G. A. Rasolko, V. M. Volkov // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2025. – Vol. 65, № 2. – P. 339–348. <https://doi.org/10.1134/s0965542524701963>
12. Пашковский, С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева / С. Пашковский. – М.: Наука, 1983. – 384 с.
13. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – М.: Наука, 1989. – 543 с.
14. Ожегова, А. В. О сходимости в интегральной метрике приближенных решений обобщенного уравнения теории крыла / А. В. Ожегова, Л. А. Сурай // Вестник КГТУ им. А. Н. Туполева. – 2014. – № 1. – С. 64–67.

References

1. Golubev V. V. *Lectures on Wing Theory*. Moscow, Nauka Publ., 1949. 480 p. (in Russian).
2. Gabdulkaev B. G. Direct methods for solving the equation of wing theory. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Matematika = Russian Mathematics*, 1974, no. 2, pp. 29–44 (in Russian).

3. Ivanov V. V. *Theory of Approximate Methods and its Application to the Numerical Solution of Singular Integral Equations*. Kyiv, Naukova dumka Publ., 1968. 287 p. (in Russian).
4. Elliott D. A comprehensive approach to the approximate solution of singular integral equations over the arc $(-1,1)$. *The Journal of Integral Equations and Applications*, 1989, vol. 2, no. 1, pp. 59–94. <https://doi.org/10.1216/jie-1989-2-1-59>
5. Sahlan M. N., Feyzollahzadeh H. Operational matrices of Chebyshev polynomials for solving singular Volterra integral equations. *Mathematical Sciences*, 2017, vol. 11, no. 2, pp. 165–171. <https://doi.org/10.1007/s40096-017-0222-4>
6. Rasolko G. A. Numerical solution of singular integro-differential Prandtl equation by the method of orthogonal polynomials. *Zhurnal Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika. Informatika = Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*, 2018, no. 3, pp. 68–74 (in Russian).
7. Rasolko G. A. To the numerical solution of singular integro-differential Prandtl equation by the method of orthogonal polynomials. *Zhurnal Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika. Informatika = Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*, 2019, no. 1, pp. 58–68 (in Russian). <https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-1-58-68>
8. Rasolko G. A., Sheshko S. M., Sheshko M. A. Numerical Method for Some Singular Integro-Differential Equations. *Differential Equations*, 2019. vol. 55, no. 9, pp. 1242–1249. <https://doi.org/10.1134/S0012266119090118>
9. Bateman G., Erdelyi A. *Higher Transcendental Functions*. Moscow, Nauka Publ., 1973. 297 p. (in Russian).
10. Muskhelishvili N. I. *Singular Integral Equations*. Moscow, Nauka Publ., 1968. 513 p. (in Russian).
11. Rasolko G. A., Volkov V. M. Chebyshev spectral method for one class of singular integro-differential equations. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2025, vol. 65, no. 2, pp. 339–348. <https://doi.org/10.1134/s0965542524701963>
12. Pashkovsky S. *Computational Applications of Chebyshev Polynomials and Series*. Moscow, Nauka Publ., 1983. 384 p. (in Russian).
13. Kolmogorov A. N., Fomin S. V. *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*. Moscow, Nauka Publ., 1989. 543 p. (in Russian).
14. Ozhegova A. V., Surai L. A. On the convergence in the integral metric of approximate solutions of the generalized equation of wing theory. *Vestnik KGTU im. A. N. Tupoleva = Bulletin of KSTU named after A. N. Tupolev*, 2014. no. 1, pp. 64–67.

Информация об авторах

Расолько Галина Алексеевна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: rasolka@bsu.by. <https://orcid.org/0000-0002-4055-7343>

Волков Василий Михайлович – доктор физико-математических наук, доцент, главный научный сотрудник, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: volkov@tut.by. <https://orcid.org/0000-0003-0350-4186>

Игнатенко Марина Викторовна – кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой веб-технологий и компьютерного моделирования, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: ignatenkomv@bsu.by. <https://orcid.org/0000-0002-8029-1842>

Information about the authors

Galina A. Rasolka – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Associate Professor of Web-Technologies and Computer Simulation Department, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: rasolka@bsu.by. <https://orcid.org/0000-0002-4055-7343>

Vasily M. Volkov – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Chief Researcher, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Sarganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: volkov@tut.by. <https://orcid.org/0000-0003-0350-4186>

Marina V. Ignatenko – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Head of Web-Technologies and Computer Simulation Department, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: ignatenkomv@bsu.by. <https://orcid.org/0000-0002-8029-1842>

ISSN 1561-2430 (Print)

ISSN 2524-2415 (Online)

УДК 517.956.25

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2026-62-1-27-37>

Поступила в редакцию 29.01.2026

Received 29.01.2026

Д. С. Жалукевич

Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ СЕМЕЙСТВ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Аннотация. Исследованы инфинитезимальные преобразования эквивалентности 16 семейств квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка функции двух переменных. Для семейств уравнений $u_{tt} + u_{xx} = f(t, x, u)$, $u_{tt} + u_{xx} = f(x, u)$ проведена симметричная редукция.

Ключевые слова: эллиптическое уравнение Клейна – Гордона, уравнение Брату, квазилинейные уравнения, преобразования эквивалентности, редукция дифференциальных уравнений

Для цитирования. Жалукевич, Д. С. Преобразования эквивалентности семейств квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка функции двух переменных / Д. С. Жалукевич // Весті Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. – 2026. – Т. 62, № 1. – С. 27–37. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2026-62-1-27-37>

Dzianis S. Zhalukevich

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus

EQUIVALENCE TRANSFORMATIONS OF FAMILIES OF QUASI-LINEAR ELLIPTIC EQUATIONS OF THE SECOND ORDER OF A FUNCTION OF TWO VARIABLES

Abstract. In this work, we search for infinitesimal equivalence transformations of 16 families of quasi-linear elliptic equations of the second order in two variables. A symmetry reduction has been performed for the families of equations $u_{tt} + u_{xx} = f(t, x, u)$, $u_{tt} + u_{xx} = f(x, u)$.

Keywords: elliptic Klein – Gordon equation, Bratu equation, quasi-linear equations, equivalence transformations, reduction of differential equations

For citation. Zhalukevich D. S. Equivalence transformations of families of quasi-linear elliptic equations of the second order of a function of two variables. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2026, vol. 62, no. 1, pp. 27–37 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2026-62-1-27-37>

Введение. В данной работе ищутся преобразования эквивалентности 16 семейств квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка функции двух переменных методом, рассмотренным в публикациях [1, 2].

Запишем общий вид квазилинейного эллиптического уравнения второго порядка функции двух переменных

$$u_{tt} + u_{xx} = f(t, x, u, u_t, u_x). \quad (1)$$

Среди эллиптических уравнений Клейна – Гордона (1) можно выделить следующие частные виды уравнений: уравнение Пуассона, уравнение Гельмгольца (стационарное уравнение Шредингера), нелинейное уравнение Гельмгольца, уравнение Брату, эллиптическое уравнение синус-Гордона, эллиптическое уравнение шинус-Гордона, стационарные гиперболические и параболические уравнения на плоскости (t, x) . Эти уравнения описывают стационарные процессы и применяются в науке и технике, на пример в таких областях, как дифференциальная геометрия, теория волн, квантовая теория поля, космология, гидро- и газодинамика, сверхпроводимость, дислокация кристаллов, волны в ферромагнитных материалах, нелинейная оптика, физика плазмы, физика низких температур и многих других.

Групповая классификация уравнений (1) была проведена в [3, 4], в данном же исследовании методом из работ [1, 2] изучены преобразования эквивалентности семейства 16 уравнений:

$$\begin{aligned} u_{tt} + u_{xx} &= f(t, x, u, u_t, u_x), & u_{tt} + u_{xx} &= f(x, u, u_t, u_x), & u_{tt} + u_{xx} &= f(t, x, u_t, u_x), \\ u_{tt} + u_{xx} &= f(t, x, u, u_x), & u_{tt} + u_{xx} &= f(u, u_t, u_x), & u_{tt} + u_{xx} &= f(x, u_t, u_x), \\ u_{tt} + u_{xx} &= f(x, u, u_x), & u_{tt} + u_{xx} &= f(x, u, u_t), & u_{tt} + u_{xx} &= f(t, x, u_x), \\ u_{tt} + u_{xx} &= f(t, x, u), & u_{tt} + u_{xx} &= f(u_t, u_x), & u_{tt} + u_{xx} &= f(u, u_x), \\ u_{tt} + u_{xx} &= f(x, u_x), & u_{tt} + u_{xx} &= f(x, u_t), & u_{tt} + u_{xx} &= f(x, u), & u_{tt} + u_{xx} &= f(u), \end{aligned}$$

а также проведена редукция для семейств уравнений

$$u_{tt} + u_{xx} = f(t, x, u), \quad u_{tt} + u_{xx} = f(x, u).$$

В [5–7] был выполнен симметричный анализ преобразований эквивалентности для нелинейных волновых уравнений $u_{tt} - u_{xx} = f(u, u_t, u_x)$. Групповая классификация семейств квазилинейных гиперболических уравнений $u_{tt} - u_{xx} = f(t, x, u, u_t, u_x)$ и их подклассов была решена в [8–15].

Вычисление инфинитезимальных точечных симметрий. Преобразования эквивалентности для семейства уравнения (1) имеют вид

$$\tilde{t} = T(t, x, u, \varepsilon), \quad \tilde{x} = X(t, x, u, \varepsilon), \quad \tilde{u} = U(t, x, u, \varepsilon), \quad \tilde{f} = F(t, x, u, u_t, u_x, f, \varepsilon), \quad (2)$$

где $\varepsilon \in \mathbb{R}$.

Построение группы преобразований эквивалентности сводится к определению ее инфинитезимальных преобразований

$$\tilde{t} = t + \varepsilon \tau(t, x, u) + o(\varepsilon), \quad (3)$$

$$\tilde{x} = x + \varepsilon \xi(t, x, u) + o(\varepsilon), \quad (4)$$

$$\tilde{u} = u + \varepsilon \eta(t, x, u) + o(\varepsilon), \quad (5)$$

$$\tilde{f}(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{u}_{\tilde{t}}, \tilde{u}_{\tilde{x}}) = f(t, x, u, u_t, u_x) + \varepsilon \Phi(t, x, u, u_t, u_x, f) + o(\varepsilon). \quad (6)$$

Инфинитезимальные преобразования для производных u_t, u_x, u_{tx} имеют вид

$$\tilde{u}_{\tilde{t}} = u_t + \varepsilon \Gamma_0 + o(\varepsilon), \quad (7)$$

$$\tilde{u}_{\tilde{x}} = u_x + \varepsilon \Gamma_1 + o(\varepsilon), \quad (8)$$

$$\tilde{u}_{\tilde{t}\tilde{t}} = u_{tt} + \varepsilon \Gamma_{00} + o(\varepsilon), \quad (9)$$

$$\tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}} = u_{xx} + \varepsilon \Gamma_{11} + o(\varepsilon). \quad (10)$$

Явные формулы продолжения для инфинитезимальных преобразований производных (7)–(10) имеют вид

$$\Gamma_0 = D_t(\eta) - D_t(\tau)u_t - D_t(\xi)u_x, \quad (11)$$

$$\Gamma_1 = D_x(\eta) - D_x(\tau)u_t - D_x(\xi)u_x, \quad (12)$$

$$\Gamma_{00} = D_{tt}(\eta) - D_{tt}(\tau)u_t - 2D_t(\tau)u_{tt} - D_{tt}(\xi)u_x - 2D_t(\xi)u_{tx}, \quad (13)$$

$$\Gamma_{11} = D_{xx}(\eta) - D_{xx}(\tau)u_t - 2D_x(\tau)u_{tx} - D_{xx}(\xi)u_x - 2D_x(\xi)u_{xx}, \quad (14)$$

где

$$D_t = \partial_t + u_t \partial_u, \quad (15)$$

$$D_x = \partial_x + u_x \partial_u, \quad (16)$$

$$D_{tt} = \partial_t^2 + 2u_t \partial_{tu} + u_{tt} \partial_u + u_t^2 \partial_u^2, \quad (17)$$

$$D_{xx} = \partial_x^2 + 2u_x \partial_{xu} + u_{xx} \partial_u + u_x^2 \partial_u^2. \quad (18)$$

Лемма 1. *Инфинитезимальные преобразования эквивалентности семейств уравнений $u_{tt} + u_{xx} = f(t, x, u, u_t, u_x)$ принадлежат следующей (бесконечномерной) алгебре Ли векторных полей:*

$$X = \tau(t, x) \frac{\partial}{\partial t} + \xi(t, x) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(t, x, u) \frac{\partial}{\partial u},$$

где $\tau_t = \xi_x$, $\tau_x = -\xi_t$, а функция $\eta(t, x, u)$ является произвольной.

Доказательство. В выражениях (13) и (14) коэффициент равен нулю при u_{tx} , т. е. $D_t(\xi) + D_x(\tau) = \xi_t + \xi_u u_t + \tau_x + \tau_u u_x = 0$. Значит, $\tau_x + \xi_t = 0$, $\tau_u = \xi_u = 0$. Следовательно, $\tau(t, x)$, $\xi(t, x)$, $\eta(t, x, u)$.

Исходя из леммы 1, выражения (11)–(14) для уравнения (1) имеют вид

$$\Gamma_0 = D_t(\eta) - \tau_t u_t - \xi_t u_x, \quad (19)$$

$$\Gamma_1 = D_x(\eta) - \tau_x u_t - \xi_x u_x, \quad (20)$$

$$\Gamma_{00} = D_{tt}(\eta) - \tau_{tt} u_t - 2\tau_{t u_t} - \xi_{tt} u_x, \quad (21)$$

$$\Gamma_{11} = D_{xx}(\eta) - \tau_{xx} u_t - \xi_{xx} u_x - 2\xi_{x u_{xx}}. \quad (22)$$

Первое и второе продолжения векторного поля X для уравнений (1) имеют вид

$$X^{(1)} = X + \Gamma_0 \frac{\partial}{\partial u_t} + \Gamma_1 \frac{\partial}{\partial u_x}, \quad (23)$$

$$X^{(2)} = X^{(1)} + \Gamma_{00} \frac{\partial}{\partial u_{tt}} + \Gamma_{11} \frac{\partial}{\partial u_{xx}}. \quad (24)$$

Поддействовав оператором (24) на уравнение $J = u_{tt} + u_{xx} - f(t, x, u, u_t, u_x)$, т. е. $X^{(2)}(J) = 0$, получим определяющее уравнение для точечных симметрий

$$\Gamma_{00} + \Gamma_{11} = \tau f_t + \xi f_x + \eta f_u + \Gamma_0 f_{u_t} + \Gamma_1 f_{u_x}. \quad (25)$$

Подставив (19)–(22) в определяющее уравнение (25), получим

$$\begin{aligned} & D_{tt}(\eta) + D_{xx}(\eta) - \Delta \tau u_t - \Delta \xi u_x - 2\tau_{t u_{tt}} - 2\xi_{x u_{xx}} = \\ & = \tau f_t + \xi f_x + \eta f_u + (D_t(\eta) - \tau_t u_t - \xi_t u_x) f_{u_t} + (D_x(\eta) - \tau_x u_t - \xi_x u_x) f_{u_x}, \end{aligned} \quad (26)$$

где $\Delta = \partial_t^2 + \partial_x^2$.

Подставив (15)–(18), (1) в (26), получим

$$\begin{aligned} & \Delta \eta + 2\eta_{tu_t} + 2\eta_{xu_x} + \eta_{uu} (u_t^2 + u_x^2) + (\eta_u - 2\tau_t) f = \\ & = \tau f_t + \xi f_x + \eta f_u + (\eta_t + (\eta_u - \tau_t) u_t - \xi_t u_x) f_{u_t} + (\eta_x - \tau_x u_t + (\eta_u - \xi_x) u_x) f_{u_x}, \end{aligned} \quad (27)$$

где функции τ и ξ удовлетворяют условиям Коши – Римана

$$\tau_t = \xi_x, \tau_x = -\xi_t. \quad (28)$$

Лемма доказана.

Используя лемму 1 и выражения (27), (28), можно вычислять точечные симметрии для подклассов уравнений (1). Однако в данной работе мы не будем этого делать, а далее перейдем к вычислению преобразований эквивалентности.

Вычисление инфинитезимальных преобразований эквивалентности семейств уравнений. Перейдем к описанию инфинитезимальных преобразований эквивалентности семейств уравнений (1) и его подклассов, рассмотренных в [1, 2]. На основании леммы 1 и выражений (19)–(23) запишем векторное поле для преобразования эквивалентности семейств уравнений (1) в виде

$$Y = X^{(1)} + \Phi \frac{\partial}{\partial f}, \quad (29)$$

где векторное поле X определено в лемме 1, а

$$\Phi = \Delta\eta + 2\eta_{tu}u_t + 2\eta_{xu}u_x + \eta_{uu}(u_t^2 + u_x^2) + (\eta_u - 2\tau_t)f, \quad (30)$$

где $\Delta = \partial_t^2 + \partial_x^2$.

Тогда можно переформулировать лемму 1 следующим образом.

Лемма 2. *Инфинитезимальные преобразования эквивалентности семейств уравнений $u_{tt} + u_{xx} = f(t, x, u, u_t, u_x)$ порождаются векторными полями*

$$Y = \tau(t, x) \frac{\partial}{\partial t} + \xi(t, x) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(t, x, u) \frac{\partial}{\partial u} + \left(\Delta\eta + 2\eta_{tu}u_t + 2\eta_{xu}u_x + \eta_{uu}(u_t^2 + u_x^2) + \right. \\ \left. + (\eta_u - 2\tau_t)f \right) \frac{\partial}{\partial f} + (\eta_t + (\eta_u - \tau_t)u_t - \xi_t u_x) \frac{\partial}{\partial u_t} + (\eta_x - \tau_x u_t + (\eta_u - \xi_x)u_x) \frac{\partial}{\partial u_x},$$

где $\tau_t = \xi_x$, $\tau_x = -\xi_t$, а функция $\eta(t, x, u)$ является произвольной.

Продолжение векторного поля Y на пространство 1-струй функции $f(t, x, u, u_t, u_x)$ имеет вид

$$Y^{(1)} = Y + \Phi_1 \frac{\partial}{\partial f_t} + \Phi_2 \frac{\partial}{\partial f_x} + \Phi_3 \frac{\partial}{\partial f_u} + \Phi_4 \frac{\partial}{\partial f_{u_t}} + \Phi_5 \frac{\partial}{\partial f_{u_x}}, \quad (31)$$

где

$$\Phi_1 = \Delta\eta_t + 2\eta_{tuu}u_t + 2\eta_{txu}u_x + \eta_{tuu}(u_t^2 + u_x^2) + (\eta_{tu} - 2\tau_{tt})f + (2\eta_u - 5\tau_t)f_t - \\ - \xi_t f_x - \eta_t f_u - (\eta_{tt} + (\eta_{tu} - \tau_{tt})u_t - \xi_{tt}u_x)f_{u_t} - (\eta_{tx} - \tau_{tx}u_t + (\eta_{tu} - \xi_{tx})u_x)f_{u_x}, \quad (32)$$

$$\Phi_2 = \Delta\eta_x + 2\eta_{txu}u_t + 2\eta_{xxu}u_x + \eta_{xuu}(u_t^2 + u_x^2) + (\eta_{xu} - 2\tau_{tx})f - \tau_x f_t + (2\eta_u - 4\tau_t - \xi_x)f_x - \\ - \eta_x f_u - (\eta_{tx} + (\eta_{xu} - \tau_{tx})u_t - \xi_{tx}u_x)f_{u_t} - (\eta_{xx} - \tau_{xx}u_t + (\eta_{xu} - \xi_{xx})u_x)f_{u_x}, \quad (33)$$

$$\Phi_3 = \Delta\eta_u + 2\eta_{uuu}u_t + 2\eta_{xuu}u_x + \eta_{uuu}(u_t^2 + u_x^2) + \eta_{uu}f + \\ + (\eta_u - 4\tau_t)f_u - (\eta_{tu} + \eta_{uu}u_t)f_{u_t} - (\eta_{xu} + \eta_{uu}u_x)f_{u_x}, \quad (34)$$

$$\Phi_4 = 2\eta_{tu} + 2\eta_{uu}u_t - \tau_t f_{u_t} + \tau_x f_{u_x}, \quad (35)$$

$$\Phi_5 = 2\eta_{xu} + 2\eta_{uu}u_x + \xi_t f_{u_t} + (\xi_x - 2\tau_t)f_{u_x}. \quad (36)$$

Рассмотрим для семейств уравнений (1) те же классы уравнений, что и в [1, 2], а результат вычислений векторных полей занесем в табл. 1.

Таблица 1. Векторные поля преобразований эквивалентности

Table 1. Vector fields of equivalence transformations

№	$u_{tt} + u_{xx} = f(t, x, u, u_t, u_x)$	$Y = \sum_i \mu_i Y_i$
1	$f = f(x, u, u_t, u_x)$	$Y_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y_3 = t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} - 2f \frac{\partial}{\partial f} - u_t \frac{\partial}{\partial u_t} - u_x \frac{\partial}{\partial u_x},$ $Y_\infty = \eta(x, u) \frac{\partial}{\partial u} + \left(\eta_{xx} + 2\eta_{xu}u_x + \eta_{uu}(u_t^2 + u_x^2) + \eta_u f \right) \frac{\partial}{\partial f} + \eta_u u_t \frac{\partial}{\partial u_t} + (\eta_x + \eta_u u_x) \frac{\partial}{\partial u_x}$
2	$f = f(t, x, u_t, u_x),$ $f = f(t, x, u)$	$Y_1 = u \frac{\partial}{\partial u} + f \frac{\partial}{\partial f} + u_t \frac{\partial}{\partial u_t} + u_x \frac{\partial}{\partial u_x},$ $Y_\infty = \tau(t, x) \frac{\partial}{\partial t} + \xi(t, x) \frac{\partial}{\partial x} + \beta(t, x) \frac{\partial}{\partial u} + (\Delta\beta - 2\tau_t f) \frac{\partial}{\partial f} +$ $+ (\beta_t - \tau_t u_t - \xi_t u_x) \frac{\partial}{\partial u_t} + (\beta_x - \tau_x u_t - \xi_x u_x) \frac{\partial}{\partial u_x}, \quad \tau_t = \xi_x, \quad \tau_x = -\xi_t$

Продолжение табл. 1

№	$u_{tt} + u_{xx} = f(t, x, u, u_t, u_x)$	$Y = \sum_i u_i Y_i$
3	$f = f(t, x, u, u_x)$	$Y_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y_3 = t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} - 2f \frac{\partial}{\partial f} - u_t \frac{\partial}{\partial u_t} - u_x \frac{\partial}{\partial u_x},$ $Y_\infty = (\alpha(x)u + \beta(t, x)) \frac{\partial}{\partial u} + (\Delta\beta + \alpha''u + 2\alpha'u_x + \alpha f) \frac{\partial}{\partial f} + (\beta_t + \alpha u_t) \frac{\partial}{\partial u_t} + (\alpha'u + \beta_x + \alpha u_x) \frac{\partial}{\partial u_x}$
4	$f = f(u, u_t, u_x)$	$Y_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y_3 = t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} - 2f \frac{\partial}{\partial f} - u_t \frac{\partial}{\partial u_t} - u_x \frac{\partial}{\partial u_x}, \quad Y_4 = x \frac{\partial}{\partial t} - t \frac{\partial}{\partial x} + u_x \frac{\partial}{\partial u_t} - u_t \frac{\partial}{\partial u_x},$ $Y_\infty = \eta(u) \frac{\partial}{\partial u} + \left(\eta^{(2)}(u_t^2 + u_x^2) + \eta^{(1)}f \right) \frac{\partial}{\partial f} + \eta^{(1)}u_t \frac{\partial}{\partial u_t} + \eta^{(1)}u_x \frac{\partial}{\partial u_x}$
5	$f = f(x, u_t, u_x)$	$Y_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y_3 = \frac{\partial}{\partial u}, \quad Y_4 = t \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u_t}, \quad Y_5 = t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} - 2f \frac{\partial}{\partial f} - u_t \frac{\partial}{\partial u_t} - u_x \frac{\partial}{\partial u_x},$ $Y = u \frac{\partial}{\partial u} + f \frac{\partial}{\partial f} + u_t \frac{\partial}{\partial u_t} + u_x \frac{\partial}{\partial u_x}, \quad Y_\infty = \beta(x) \frac{\partial}{\partial u} + \beta'' \frac{\partial}{\partial f} + \beta' \frac{\partial}{\partial u_x}$
6	$f = f(x, u, u_x)$	$Y_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y_3 = t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} - 2f \frac{\partial}{\partial f} - u_t \frac{\partial}{\partial u_t} - u_x \frac{\partial}{\partial u_x},$ $Y_\infty = (\alpha(x)u + \beta(x)) \frac{\partial}{\partial u} + (\alpha''u + \beta'' + 2\alpha'u_x + \alpha f) \frac{\partial}{\partial f} + \alpha u_t \frac{\partial}{\partial u_t} + (\alpha'u + \beta' + \alpha u_x) \frac{\partial}{\partial u_x}$
7	$f = f(x, u, u_t),$ $f = f(x, u)$	$Y_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y_3 = t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} - 2f \frac{\partial}{\partial f} - u_t \frac{\partial}{\partial u_t} - u_x \frac{\partial}{\partial u_x},$ $Y_4 = u \frac{\partial}{\partial u} + f \frac{\partial}{\partial f} + u_t \frac{\partial}{\partial u_t} + u_x \frac{\partial}{\partial u_x}, \quad Y_\infty = \beta(x) \frac{\partial}{\partial u} + \beta'' \frac{\partial}{\partial f} + \beta' \frac{\partial}{\partial u_x}$
8	$f = f(t, x, u_x)$	$Y_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y_3 = t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} - 2f \frac{\partial}{\partial f} - u_t \frac{\partial}{\partial u_t} - u_x \frac{\partial}{\partial u_x},$ $Y_4 = u \frac{\partial}{\partial u} + f \frac{\partial}{\partial f} + u_t \frac{\partial}{\partial u_t} + u_x \frac{\partial}{\partial u_x}, \quad Y_\infty = \beta(t, x) \frac{\partial}{\partial u} + \Delta\beta \frac{\partial}{\partial f} + \beta_t \frac{\partial}{\partial u_t} + \beta_x \frac{\partial}{\partial u_x}$
9	$f = f(u_t, u_x)$	$Y_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y_3 = t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} - 2f \frac{\partial}{\partial f} - u_t \frac{\partial}{\partial u_t} - u_x \frac{\partial}{\partial u_x}, \quad Y_4 = x \frac{\partial}{\partial t} - t \frac{\partial}{\partial x} + u_x \frac{\partial}{\partial u_t} - u_t \frac{\partial}{\partial u_x},$ $Y_5 = \frac{\partial}{\partial u}, \quad Y_6 = t \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u_t}, \quad Y_7 = x \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u_x}, \quad Y_8 = u \frac{\partial}{\partial u} + f \frac{\partial}{\partial f} + u_t \frac{\partial}{\partial u_t} + u_x \frac{\partial}{\partial u_x}$
10	$f = f(u, u_x)$	$Y_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y_3 = t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} - 2f \frac{\partial}{\partial f} - u_t \frac{\partial}{\partial u_t} - u_x \frac{\partial}{\partial u_x}, \quad Y_4 = \frac{\partial}{\partial u},$ $Y_5 = u \frac{\partial}{\partial u} + f \frac{\partial}{\partial f} + u_t \frac{\partial}{\partial u_t} + u_x \frac{\partial}{\partial u_x}$
11	$f = f(x, u_x)$	$Y_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y_3 = t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} - 2f \frac{\partial}{\partial f} - u_t \frac{\partial}{\partial u_t} - u_x \frac{\partial}{\partial u_x}, \quad Y_4 = \frac{\partial}{\partial u},$ $Y_5 = u \frac{\partial}{\partial u} + f \frac{\partial}{\partial f} + u_t \frac{\partial}{\partial u_t} + u_x \frac{\partial}{\partial u_x}, \quad Y_6 = t \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u_t}, \quad Y_7 = t^2 \frac{\partial}{\partial u} + 2 \frac{\partial}{\partial f} + 2t \frac{\partial}{\partial u_t},$ $Y_\infty = \beta(x) \frac{\partial}{\partial u} + \beta'' \frac{\partial}{\partial f} + \beta' \frac{\partial}{\partial u_x}$
12	$f = f(x, u_t)$	$Y_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y_3 = t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} - 2f \frac{\partial}{\partial f} - u_t \frac{\partial}{\partial u_t} - u_x \frac{\partial}{\partial u_x}, \quad Y_4 = u \frac{\partial}{\partial u} + f \frac{\partial}{\partial f} + u_t \frac{\partial}{\partial u_t} + u_x \frac{\partial}{\partial u_x},$ $Y_5 = t \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u_t}, \quad Y_6 = tx \frac{\partial}{\partial u} + x \frac{\partial}{\partial u_t} + t \frac{\partial}{\partial u_x}, \quad Y_\infty = \beta(x) \frac{\partial}{\partial u} + \beta'' \frac{\partial}{\partial f} + \beta' \frac{\partial}{\partial u_x}$

Окончание табл. 1

№	$u_{tt} + u_{xx} = f(t, x, u, u_t, u_x)$	$Y = \sum_i \mu_i Y_i$
13	$f = f(u)$	$Y_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y_3 = t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} - 2f \frac{\partial}{\partial f} - u_t \frac{\partial}{\partial u_t} - u_x \frac{\partial}{\partial u_x}, \quad Y_4 = \frac{\partial}{\partial u},$ $Y_5 = x \frac{\partial}{\partial t} - t \frac{\partial}{\partial x} + u_x \frac{\partial}{\partial u_t} - u_t \frac{\partial}{\partial u_x}, \quad Y_6 = u \frac{\partial}{\partial u} + f \frac{\partial}{\partial f} + u_t \frac{\partial}{\partial u_t} + u_x \frac{\partial}{\partial u_x}$

Вычисление специальных инфинитезимальных преобразований эквивалентности семейств уравнений. Предположим теперь, что $\Phi(t, x, u, u_t, u_x, f)$ в выражении (6) не зависит от f , т. е. перейдем к вычислению специальных преобразований эквивалентности. Тогда на основании леммы 2 и условия $\eta_u = 2\tau_t$ получим следующую лемму.

Лемма 3. Инфинитезимальные специальные преобразования эквивалентности семейств уравнений $u_{tt} + u_{xx} = f(t, x, u, u_t, u_x)$ порождаются векторными полями

$$Y = \tau(t, x) \frac{\partial}{\partial t} + \xi(t, x) \frac{\partial}{\partial x} + (2\tau_t u + \beta(t, x)) \frac{\partial}{\partial u} + (2\Delta\tau_t u + \Delta\beta + 4\tau_{tt} u_t + 4\tau_{tx} u_x) \frac{\partial}{\partial f} +$$

$$+ (2\tau_{tt} u + \beta_t + \tau_t u_t - \xi_t u_x) \frac{\partial}{\partial u_t} + (2\tau_{tx} u + \beta_x - \tau_x u_t + \xi_x u_x) \frac{\partial}{\partial u_x},$$

где $\tau_t = \xi_x$, $\tau_x = -\xi_t$, а функция $\beta(t, x)$ является произвольной.

Рассмотрим частные случаи семейств уравнений (1), что и в пункте 3, результат занесем в табл. 2.

Таблица 2. Векторные поля специальных преобразований эквивалентности

Table 2. Vector fields of special equivalence transformations

№	$u_{tt} + u_{xx} = f(t, x, u, u_t, u_x)$	$Y = \sum_i \mu_i Y_i$
1	$f = f(x, u, u_t, u_x),$ $f = f(x, u, u_x),$ $f = f(x, u, u_t),$ $f = f(x, u)$	$Y_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y_3 = t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} + 2u \frac{\partial}{\partial u} + u_t \frac{\partial}{\partial u_t} + u_x \frac{\partial}{\partial u_x},$ $Y_\infty = \beta(x) \frac{\partial}{\partial u} + \beta'' \frac{\partial}{\partial f} + \beta' \frac{\partial}{\partial u_x}$
2	$f = f(t, x, u_t, u_x),$ $f = f(t, x, u)$	$Y_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y_3 = t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} + 2u \frac{\partial}{\partial u} + u_t \frac{\partial}{\partial u_t} + u_x \frac{\partial}{\partial u_x},$ $Y_4 = x \frac{\partial}{\partial t} - t \frac{\partial}{\partial x} + u_x \frac{\partial}{\partial u_t} - u_t \frac{\partial}{\partial u_x}, \quad Y_\infty = \beta(t, x) \frac{\partial}{\partial u} + \Delta\beta \frac{\partial}{\partial f} + \beta_t \frac{\partial}{\partial u_t} + \beta_x \frac{\partial}{\partial u_x}$
3	$f = f(t, x, u, u_x),$ $f = f(t, x, u_x)$	$Y_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y_3 = t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} + 2u \frac{\partial}{\partial u} + u_t \frac{\partial}{\partial u_t} + u_x \frac{\partial}{\partial u_x},$ $Y_\infty = \beta(t, x) \frac{\partial}{\partial u} + \Delta\beta \frac{\partial}{\partial f} + \beta_t \frac{\partial}{\partial u_t} + \beta_x \frac{\partial}{\partial u_x}$
4	$f = f(u, u_t, u_x),$ $f = f(u)$	$Y_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y_3 = t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} + 2u \frac{\partial}{\partial u} + u_t \frac{\partial}{\partial u_t} + u_x \frac{\partial}{\partial u_x},$ $Y_4 = x \frac{\partial}{\partial t} - t \frac{\partial}{\partial x} + u_x \frac{\partial}{\partial u_t} - u_t \frac{\partial}{\partial u_x}, \quad Y_5 = \frac{\partial}{\partial u}$
5	$f = f(x, u_t, u_x)$	$Y_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y_3 = t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} + 2u \frac{\partial}{\partial u} + u_t \frac{\partial}{\partial u_t} + u_x \frac{\partial}{\partial u_x},$ $Y_4 = \frac{\partial}{\partial u}, \quad Y_5 = t \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u_t}, \quad Y_\infty = \beta(x) \frac{\partial}{\partial u} + \beta'' \frac{\partial}{\partial f} + \beta' \frac{\partial}{\partial u_x}$

Окончание табл. 2

№	$u_{tt} + u_{xx} = f(t, x, u, u_t, u_x)$	$Y = \sum_i \mu_i Y_i$
6	$f = f(u_t, u_x)$	$Y_1 = \frac{\partial}{\partial t}, Y_2 = \frac{\partial}{\partial x}, Y_3 = t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} + 2u \frac{\partial}{\partial u} + u_t \frac{\partial}{\partial u_t} + u_x \frac{\partial}{\partial u_x},$ $Y_4 = x \frac{\partial}{\partial t} - t \frac{\partial}{\partial x} + u_x \frac{\partial}{\partial u_t} - u_t \frac{\partial}{\partial u_x}, Y_5 = \frac{\partial}{\partial u}, Y_6 = t \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u_t}, Y_7 = x \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u_x}$
7	$f = f(u, u_x)$	$Y_1 = \frac{\partial}{\partial t}, Y_2 = \frac{\partial}{\partial x}, Y_3 = t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} + 2u \frac{\partial}{\partial u} + u_t \frac{\partial}{\partial u_t} + u_x \frac{\partial}{\partial u_x}, Y_4 = \frac{\partial}{\partial u}$
8	$f = f(x, u_x)$	$Y_1 = \frac{\partial}{\partial t}, Y_2 = \frac{\partial}{\partial x}, Y_3 = t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} + 2u \frac{\partial}{\partial u} + u_t \frac{\partial}{\partial u_t} + u_x \frac{\partial}{\partial u_x}, Y_4 = \frac{\partial}{\partial u},$ $Y_5 = t \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u_t}, Y_6 = t^2 \frac{\partial}{\partial u} + 2 \frac{\partial}{\partial f} + 2t \frac{\partial}{\partial u_t}, Y_\infty = \beta(x) \frac{\partial}{\partial u} + \beta'' \frac{\partial}{\partial f} + \beta' \frac{\partial}{\partial u_x}$
9	$f = f(x, u_t)$	$Y_1 = \frac{\partial}{\partial t}, Y_2 = \frac{\partial}{\partial x}, Y_3 = t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} + 2u \frac{\partial}{\partial u} + u_t \frac{\partial}{\partial u_t} + u_x \frac{\partial}{\partial u_x},$ $Y_4 = t \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u_t}, Y_5 = tx \frac{\partial}{\partial u} + x \frac{\partial}{\partial u_t} + t \frac{\partial}{\partial u_x}, Y_\infty = \beta(x) \frac{\partial}{\partial u} + \beta'' \frac{\partial}{\partial f} + \beta' \frac{\partial}{\partial u_x}$

Симметричная редукция преобразований эквивалентности. Из табл. 1 видно, что уравнение $u_{tt} + u_{xx} = f(x, u)$ обладает бесконечномерной алгеброй эквивалентности. Эта бесконечномерная алгебра эквивалентности является подалгеброй эквивалентности для уравнения $u_{tt} + u_{xx} = f(t, x, u)$. Исходя из табл. 1, для уравнения $u_{tt} + u_{xx} = f(x, u)$ выберем следующую пятимерную подалгебру:

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y_3 = \frac{\partial}{\partial u},$$

$$Y_4 = u \frac{\partial}{\partial u} + f \frac{\partial}{\partial f} + u_t \frac{\partial}{\partial u_t} + u_x \frac{\partial}{\partial u_x}, \quad Y_5 = t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} - 2f \frac{\partial}{\partial f} - u_t \frac{\partial}{\partial u_t} - u_x \frac{\partial}{\partial u_x}.$$

На основании этого проведем редукцию для следующего уравнения:

$$u_{tt} + u_{xx} = f(t, x, u). \quad (37)$$

Общая симметрия уравнения (37) запишется в виде

$$Y = (\mu_1 + \mu_5 t) \frac{\partial}{\partial t} + (\mu_2 + \mu_5 x) \frac{\partial}{\partial x} + (\mu_3 + \mu_4 u) \frac{\partial}{\partial u} + (\mu_4 - 2\mu_5) f \frac{\partial}{\partial f} +$$

$$+ (\mu_4 - \mu_5) u_t \frac{\partial}{\partial u_t} + (\mu_4 - \mu_5) u_x \frac{\partial}{\partial u_x},$$

где $\mu_i = \text{const}$, $i = \overline{1, 5}$. Таким образом, инвариантные относительно Y решения задаются следующим уравнением характеристик:

$$\frac{dt}{\mu_1 + \mu_5 t} = \frac{dx}{\mu_2 + \mu_5 x} = \frac{du}{\mu_3 + \mu_4 u} = \frac{df}{(\mu_4 - 2\mu_5) f} = \frac{du_t}{(\mu_4 - \mu_5) u_t} = \frac{du_x}{(\mu_4 - \mu_5) u_x}. \quad (38)$$

Приведем примеры симметричных редукций, определяя при этом для заданной одномерной подалгебры в алгебре симметрий уравнения, допускающие эту одномерную подалгебру в качестве симметрий, а также соответствующее редуцированное уравнение, которое в одном случае является обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка.

1. Рассмотрим генератор $Y = Y_1 + \nu Y_4$, $\nu = \text{const}$, $\nu \neq 0$. Решая уравнения характеристик (38) для Y , получим следующие инварианты: $I_1 = x$, $I_2 = e^{-\nu t} u$, $I_3 = e^{-\nu t} f$. Положим $I_3 = g(I_1, I_2)$, тогда для функции f получим условие $f = e^{\nu t} g(x, e^{-\nu t} u)$, а уравнение (37) примет вид

$$u_{tt} + u_{xx} = e^{\upsilon t} g(x, e^{-\upsilon t} u). \quad (39)$$

Далее положим, что $I_2 = y(I_1)$, и получим замену вида

$$u = e^{\upsilon t} y(x). \quad (40)$$

Подставив (40) в уравнение (39), получим

$$y'' = -\upsilon^2 y + g(x, y). \quad (41)$$

2. Рассмотрим генератор $Y = \upsilon Y_3 + Y_5$, $\upsilon = \text{const}$. Решая уравнения характеристик (38) для Y , получим следующие инварианты: $I_1 = \frac{x}{t}$, $I_2 = u - \upsilon \ln t$, $I_3 = t^2 f$. Положим $I_3 = g(I_1, I_2)$, тогда для функции f получим условие $f = t^{-2} g\left(\frac{x}{t}, u - \upsilon \ln t\right)$, а уравнение (37) примет вид

$$u_{tt} + u_{xx} = t^{-2} g\left(\frac{x}{t}, u - \upsilon \ln t\right). \quad (42)$$

Далее положим, что $I_2 = y(I_1)$, и получим замену вида

$$u = \upsilon \ln t + y(z), \quad z = \frac{x}{t}. \quad (43)$$

Подставив (43) в уравнение (42), получим

$$y^{(2)} = -\frac{2z}{1+z^2} y^{(1)} + \frac{g(z, y) + \upsilon}{1+z^2}. \quad (44)$$

3. Рассмотрим генератор $Y = \upsilon Y_4 + Y_5$, $\upsilon = \text{const}$. Решая уравнения характеристик (38) для Y , получим следующие инварианты: $I_1 = \frac{x}{t}$, $I_2 = t^{-\upsilon} u$, $I_3 = t^{2-\upsilon} f$. Положим $I_3 = g(I_1, I_2)$, тогда для функции f получим условие $f = t^{\upsilon-2} g\left(\frac{x}{t}, t^{-\upsilon} u\right)$, а уравнение (37) примет вид

$$u_{tt} + u_{xx} = t^{\upsilon-2} g\left(\frac{x}{t}, t^{-\upsilon} u\right). \quad (45)$$

Далее положим, что $I_2 = y(I_1)$, и получим замену вида

$$u = t^{\upsilon} y(z), \quad z = \frac{x}{t}. \quad (46)$$

Подставив (46) в уравнение (45), получим

$$y^{(2)} = \frac{2(\upsilon-1)z}{1+z^2} y^{(1)} + \frac{g(z, y) - \upsilon(\upsilon-1)y}{1+z^2}. \quad (47)$$

4. Рассмотрим генератор $Y = Y_1 + \upsilon Y_2 + \mu Y_3$, $\upsilon = \text{const}$, $\upsilon \neq 0$, $\mu = \text{const}$. Решая уравнения характеристик (38) для Y , получим следующие инварианты: $I_1 = x - \upsilon t$, $I_2 = u - \mu t$, $I_3 = f$. Положим $I_3 = g(I_1, I_2)$, тогда для функции f получим условие $f = g(x - \upsilon t, u - \mu t)$, а уравнение (37) примет вид

$$u_{tt} + u_{xx} = g(x - \upsilon t, u - \mu t). \quad (48)$$

Далее положим, что $I_2 = y(I_1)$, и получим замену вида

$$u = \mu t + y(z), \quad z = x - \upsilon t. \quad (49)$$

Подставив (49) в уравнение (48), получим

$$y^{(2)} = \frac{g(z, y)}{1+\upsilon^2}. \quad (50)$$

5. Рассмотрим генератор $Y = Y_1 + \upsilon Y_2 + \mu Y_4$, $\upsilon = \text{const}$, $\upsilon \neq 0$, $\mu = \text{const}$. Решая уравнения характеристик (38) для Y , получим следующие инварианты: $I_1 = x - \upsilon t$, $I_2 = e^{-\mu t} u$, $I_3 = e^{-\mu t} f$. Положим $I_3 = g(I_1, I_2)$, тогда для функции f получим условие $f = e^{\mu t} g(x - \upsilon t, e^{-\mu t} u)$, а уравнение (37) примет вид

$$u_{tt} + u_{xx} = e^{\mu t} g(x - \upsilon t, e^{-\mu t} u). \quad (51)$$

Далее положим, что $I_2 = y(I_1)$, и получим замену вида

$$u = e^{\mu t} y(z), \quad z = x - \upsilon t. \quad (52)$$

Подставив (52) в уравнение (51), получим уравнение

$$y^{(2)} = \frac{2\mu\upsilon}{1+\upsilon^2} y^{(1)} + \frac{g(z, y) - \mu^2 y}{1+\upsilon^2}. \quad (53)$$

Вышеизложенный результат вычислений (39)–(53) занесем в табл. 3.

Таблица 3. Редукция уравнений $u_{tt} + u_{xx} = f(t, x, u)$

Table 3. Reduction of equations $u_{tt} + u_{xx} = f(t, x, u)$

№	$Y = \sum_{i=1}^5 \mu_i Y_i$, $u_{tt} + u_{xx} = f(t, x, u)$	$u = \alpha y(z) + \beta$	$y^{(2)} = F(z, y, y^{(1)})$
1	$Y = Y_1 + \upsilon Y_4$, $\upsilon = \text{const}$, $\upsilon \neq 0$, $u_{tt} + u_{xx} = e^{\upsilon t} g(x, e^{-\upsilon t} u)$	$u = e^{\upsilon t} y(x)$	$y'' = -\upsilon^2 y + g(x, y)$
2	$Y = \upsilon Y_3 + Y_5$, $\upsilon = \text{const}$, $u_{tt} + u_{xx} = t^{-2} g\left(\frac{x}{t}, u - \upsilon \ln t\right)$	$u = \upsilon \ln t + y(z)$, $z = \frac{x}{t}$	$y^{(2)} = -\frac{2z}{1+z^2} y^{(1)} + \frac{g(z, y) + \upsilon}{1+z^2}$
3	$Y = \upsilon Y_4 + Y_5$, $\upsilon = \text{const}$, $u_{tt} + u_{xx} = t^{\upsilon-2} g\left(\frac{x}{t}, t^{-\upsilon} u\right)$	$u = t^\upsilon y(z)$, $z = \frac{x}{t}$	$y^{(2)} = \frac{2(\upsilon-1)z}{1+z^2} y^{(1)} + \frac{g(z, y) - \upsilon(\upsilon-1)y}{1+z^2}$
4	$Y = Y_1 + \upsilon Y_2 + \mu Y_3$, $\upsilon = \text{const}$, $\upsilon \neq 0$, $\mu = \text{const}$, $u_{tt} + u_{xx} = g(x - \upsilon t, u - \mu t)$	$u = \mu t + y(z)$, $z = x - \upsilon t$	$y^{(2)} = \frac{g(z, y)}{1+\upsilon^2}$
5	$Y = Y_1 + \upsilon Y_2 + \mu Y_4$, $\upsilon = \text{const}$, $\upsilon \neq 0$, $\mu = \text{const}$, $u_{tt} + u_{xx} = e^{\mu t} g(x - \upsilon t, e^{-\mu t} u)$	$u = e^{\mu t} y(z)$, $z = x - \upsilon t$	$y^{(2)} = \frac{2\mu\upsilon}{1+\upsilon^2} y^{(1)} + \frac{g(z, y) - \mu^2 y}{1+\upsilon^2}$

Используя данные табл. 3, запишем табл. 4 редукций для уравнения $u_{tt} + u_{xx} = f(x, u)$, учитывая тот факт, что уравнение (37) симметрично относительно замены t на x .

Таблица 4. Редукция уравнений $u_{tt} + u_{xx} = f(t, u)$

Table 4. Reduction of equations $u_{tt} + u_{xx} = f(t, u)$

№	$Y = \sum_{i=1}^5 \mu_i Y_i$, $u_{tt} + u_{xx} = f(t, u)$	$u = \alpha y(z) + \beta$	$y^{(2)} = F(z, y, y^{(1)})$
1	$Y = Y_1 + \upsilon Y_4$, $\upsilon = \text{const}$, $\upsilon \neq 0$, $u_{tt} + u_{xx} = e^{\upsilon t} g(e^{-\upsilon t} u)$	$u = e^{\upsilon t} y(x)$	$y'' = -\upsilon^2 y + g(y)$
2	$Y = \upsilon Y_3 + Y_5$, $\upsilon = \text{const}$, $u_{tt} + u_{xx} = t^{-2} g(u - \upsilon \ln t)$	$u = \upsilon \ln t + y(z)$, $z = \frac{x}{t}$	$y^{(2)} = -\frac{2z}{1+z^2} y^{(1)} + \frac{g(y) + \upsilon}{1+z^2}$
3	$Y = \upsilon Y_4 + Y_5$, $\upsilon = \text{const}$, $u_{tt} + u_{xx} = t^{\upsilon-2} g(t^{-\upsilon} u)$	$u = t^\upsilon y(z)$, $z = \frac{x}{t}$	$y^{(2)} = \frac{2(\upsilon-1)z}{1+z^2} y^{(1)} + \frac{g(y) - \upsilon(\upsilon-1)y}{1+z^2}$

Окончание табл. 4

№	$Y = \sum_{i=1}^5 \mu_i Y_i, \quad u_{tt} + u_{xx} = f(t, u)$	$u = \alpha y(z) + \beta$	$y^{(2)} = F(z, y, y^{(1)})$
4	$Y = Y_1 + \nu Y_2 + \mu Y_3, \quad \nu = \text{const}, \quad \nu \neq 0, \quad \mu = \text{const},$ $u_{tt} + u_{xx} = g(u - \mu t)$	$u = \mu t + y(z),$ $z = x - \nu t$	$y^{(2)} = \frac{g(y)}{1 + \nu^2}$
5	$Y = Y_1 + \nu Y_2 + \mu Y_4, \quad \nu = \text{const}, \quad \nu \neq 0, \quad \mu = \text{const},$ $u_{tt} + u_{xx} = e^{\mu t} g(e^{-\mu t} u)$	$u = e^{\mu t} y(z),$ $z = x - \nu t$	$y^{(2)} = \frac{2\mu\nu}{1 + \nu^2} y^{(1)} + \frac{g(y) - \mu^2 y}{1 + \nu^2}$

Заключение. Найдены алгебры преобразований эквивалентности и алгебры специальных преобразований эквивалентности для следующих 16 семейств уравнений:

$$\begin{aligned}
 u_{tt} + u_{xx} &= f(t, x, u, u_t, u_x), & u_{tt} + u_{xx} &= f(x, u, u_t, u_x), & u_{tt} + u_{xx} &= f(t, x, u_t, u_x), \\
 u_{tt} + u_{xx} &= f(t, x, u, u_x), & u_{tt} + u_{xx} &= f(u, u_t, u_x), & u_{tt} + u_{xx} &= f(x, u_t, u_x), \\
 u_{tt} + u_{xx} &= f(x, u, u_x), & u_{tt} + u_{xx} &= f(x, u, u_t), & u_{tt} + u_{xx} &= f(t, x, u_x), \\
 u_{tt} + u_{xx} &= f(t, x, u), & u_{tt} + u_{xx} &= f(u_t, u_x), & u_{tt} + u_{xx} &= f(u, u_x), \\
 u_{tt} + u_{xx} &= f(x, u_x), & u_{tt} + u_{xx} &= f(x, u_t), & u_{tt} + u_{xx} &= f(x, u), & u_{tt} + u_{xx} &= f(u).
 \end{aligned}$$

В итоге было определено, что для преобразований эквивалентности конечномерными алгебрами обладают уравнения $u_{tt} + u_{xx} = f(u_t, u_x)$, $u_{tt} + u_{xx} = f(u, u_x)$, $u_{tt} + u_{xx} = f(u)$, а для специальных преобразований эквивалентности конечномерными алгебрами обладают уравнения $u_{tt} + u_{xx} = f(u, u_t, u_x)$, $u_{tt} + u_{xx} = f(u_t, u_x)$, $u_{tt} + u_{xx} = f(u, u_x)$, $u_{tt} + u_{xx} = f(u)$, причем максимальная алгебра эквивалентности восьмимерная, но есть также и алгебры семимерные, шестимерные, пятимерные и четырехмерные. Также была проведена редукция для семейств уравнений $u_{tt} + u_{xx} = f(t, x, u)$, $u_{tt} + u_{xx} = f(x, u)$, результаты которой приведены в табл. 3 и 4.

Следует отметить, что алгебры преобразований эквивалентности совпадают для семейств уравнений $u_{tt} + u_{xx} = f(t, x, u)$, $u_{tt} + u_{xx} = f(t, x, u_t, u_x)$, $u_{tt} + u_{xx} = f(x, u)$, $u_{tt} + u_{xx} = f(x, u, u_t)$. Для специальных преобразований эквивалентности алгебры совпадают для семейств уравнений $u_{tt} + u_{xx} = f(t, x, u)$, $u_{tt} + u_{xx} = f(t, x, u_t, u_x)$, $u_{tt} + u_{xx} = f(t, x, u_x)$, $u_{tt} + u_{xx} = f(t, x, u, u_x)$, $u_{tt} + u_{xx} = f(u)$, $u_{tt} + u_{xx} = f(u, u_t, u_x)$, $u_{tt} + u_{xx} = f(x, u)$, $u_{tt} + u_{xx} = f(x, u, u_t)$, $u_{tt} + u_{xx} = f(x, u, u_x)$, $u_{tt} + u_{xx} = f(x, u, u_t, u_x)$.

Список использованных источников

1. Zhalukevich, D. S. Equivalence transformations of families of second-order quasi-linear hyperbolic equations of two variables / D. S. Zhalukevich // Arxiv [Preprint] – 2025. – URL: https://www.researchgate.net/publication/398918025_Equivalence_transformations_of_families_of_second-order_quasi-linear_hyperbolic_equations_of_two_variables.
2. Zhalukevich, D. S. Reduction of nonlinear Klein-Gordon equations for a function of two variables / D. S. Zhalukevich // Arxiv [Preprint] – 2025. – URL: https://www.researchgate.net/publication/399149445_Reduction_of_nonlinear_Klein-Gordon_equations_for_a_function_of_two_variables.
3. Lahno, V. Group classification of quasilinear elliptic-type equations. I. Invariance with respect to Lie algebras with nontrivial Levi decomposition / V. Lahno, S. V. Spichak // Ukrainian Mathematical Journal. – 2007. – Vol. 59. – P. 1719–1736. <https://doi.org/10.1007/s11253-008-0021-z>
4. Lahno, V. Group classification of quasilinear elliptic-type equations. II. Invariance under solvable Lie algebras / V. Lahno, S. V. Spichak // Ukrainian Mathematical Journal. – 2011. – Vol. 63. – P. 236–253. <https://doi.org/10.1007/s11253-011-0501-4>
5. Torrisi, M. On equivalence transformations applied to a non-linear wave equation / M. Torrisi, R. Tracina, A. Valenti // Modern Group Analysis: Advanced Analytical and Computational Methods in Mathematical Physics. – Netherlands, Kluwer Academic Publishers, 1993. – P. 367–375. https://doi.org/10.1007/978-94-011-2050-0_39
6. Tracina, R. Invariants of a family of nonlinear wave equations / R. Tracina // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2004. – Vol. 9, № 1. – P. 127–133. [https://doi.org/10.1016/S1007-5704\(03\)00021-2](https://doi.org/10.1016/S1007-5704(03)00021-2)
7. Torrisi, M. On the linearization of semilinear wave equations / M. Torrisi, R. Tracina, A. Valenti // Nonlinear Dynamics. – 2004. – Vol. 36. – P. 97–106. <https://doi.org/10.1023/b:nody.0000034649.74389.09>
8. Boyko, V. M. Realizations of Lie algebras on the line and the new group classification of $(1 + 1)$ -dimensional generalized nonlinear Klein – Gordon equations / V. M. Boyko, O. V. Lokaziuk, R. O. Popovych // Journal of Mathematical Physics. – 2021. – Vol. 11. – Art. ID 127. <https://doi.org/10.1007/s13324-021-00550-z>

9. Lahno, V. The Group Classification of One Class of Nonlinear Wave Equations / V. Lahno, O. Magda // *Arxiv* [Preprint]. – 2003. – URL: <https://arxiv.org/abs/math-ph/0310049>; <https://doi.org/10.48550/arXiv.math-ph/0310049>
10. Lahno, V. Group classification of nonlinear wave equations / V. Lahno, R. Zhdanov // *Journal of Mathematical Physics*. – 2005. – Vol. 46, № 5. – Art. 053301. <https://doi.org/10.1063/1.1884886>
11. Lahno, V. Group classification and exact solutions of nonlinear wave equations / V. Lahno, R. Zhdanov, O. Magda // *Acta Applicandae Mathematicae*. – 2006. – Vol. 91. – P. 253–313 <https://doi.org/10.1007/s10440-006-9039-0>
12. Popovych, R. O. Point and contact equivalence groupoids of two-dimensional quasilinear hyperbolic equations / R. O. Popovych // *Applied Mathematics Letters*. – 2021. – Vol. 116. – Art. ID 107068. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2021.107068>
13. Lie, S. Diskussion der Differentialgleichung $d^2z/dxdy = F(z)$ / S. Lie // *Archiv for Mathematik og Naturvidenskab*. – 1881. – Vol. 5. – P. 282–306.
14. Pucci, E. Group properties of a class of semilinear hyperbolic equations / E. Pucci, M. C. Salvatori // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. – 1986. – Vol. 21, № 2. – P. 147–155. [https://doi.org/10.1016/0020-7462\(86\)90027-2](https://doi.org/10.1016/0020-7462(86)90027-2)
15. Azad, H. Group classification, optimal system and optimal reductions of a class of Klein Gordon equations / H. Azad, M. T. Mustafa, M. Ziad // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. – 2010. – Vol. 15, № 5. – P. 1132–1147. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2009.05.045>

References

1. Zhalukevich D. S. Equivalence transformations of families of second-order quasi-linear hyperbolic equations of two variables. *Arxiv* [Preprint], 2025. Available at: https://www.researchgate.net/publication/398918025_Equivalence_transformations_of_families_of_second-order_quasi-linear_hyperbolic_equations_of_two_variables.
2. Zhalukevich D. S. Reduction of nonlinear Klein-Gordon equations for a function of two variables. *Arxiv* [Preprint], 2025. Available at: https://www.researchgate.net/publication/399149445_Reduction_of_nonlinear_Klein-Gordon_equations_for_a_function_of_two_variables.
3. Lahno V., Spichak S. V. Group classification of quasilinear elliptic-type equations. I. Invariance with respect to Lie algebras with nontrivial Levi decomposition. *Ukrainian Mathematical Journal*, 2007, vol. 59, pp. 1719–1736. <https://doi.org/10.1007/s11253-008-0021-z>
4. Lahno V., Spichak S. V. Group classification of quasilinear elliptic-type equations. II. Invariance under solvable Lie algebras. *Ukrainian Mathematical Journal*, 2011, vol. 63, pp. 236–253. <https://doi.org/10.1007/s11253-011-0501-4>
5. Torrisi M., Tracina R., Valenti A. On equivalence transformations applied to a non-linear wave equation. *Modern Group Analysis: Advanced Analytical and Computational Methods in Mathematical Physics*. Netherlands. Kluwer Academic Publ., 1993, pp. 367–375 https://doi.org/10.1007/978-94-011-2050-0_39
6. Tracina R. Invariants of a family of nonlinear wave equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2004, vol. 9, no. 1, pp. 127–133. [https://doi.org/10.1016/S1007-5704\(03\)00021-2](https://doi.org/10.1016/S1007-5704(03)00021-2)
7. Torrisi M., Tracina R., Valenti A. On the linearization of semilinear wave equations. *Nonlinear Dynamics*, 2004, vol. 36, pp. 97–106. <https://doi.org/10.1023/b:nody.0000034649.74389.09>
8. Boyko V. M., Lokaziuk O. V., Popovych R. O. Realizations of Lie algebras on the line and the new group classification of $(1 + 1)$ -dimensional generalized nonlinear Klein – Gordon equations. *Journal of Mathematical Physics*, 2021, vol. 11, art. ID 127. <https://doi.org/10.1007/s13324-021-00550-z>
9. Lahno V., Magda O. The Group Classification of One Class of Nonlinear Wave Equations. *Arxiv* [Preprint], 2003. Available at: <https://arxiv.org/abs/math-ph/0310049>; <https://doi.org/10.48550/arXiv.math-ph/0310049>
10. Lahno V., Zhdanov R. Group classification of nonlinear wave equations. *Journal of Mathematical Physics*, 2005, vol. 46, no. 5, art. ID 053301. <https://doi.org/10.1063/1.1884886>
11. Lahno V., Zhdanov R., Magda O. Group classification and exact solutions of nonlinear wave equations. *Acta Applicandae Mathematicae*, 2006, vol. 91, pp. 253–313. <https://doi.org/10.1007/s10440-006-9039-0>
12. Popovych R. O. Point and contact equivalence groupoids of two-dimensional quasilinear hyperbolic equations. *Applied Mathematics Letters*, 2021, vol. 116, art. ID 107068. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2021.107068>
13. Lie S. Diskussion der Differentialgleichung $d^2z/dxdy = F(z)$. *Archiv for Mathematik og Naturvidenskab*, 1881, vol. 5, pp. 282–306.
14. Pucci E., Salvatori M. C. Group properties of a class of semilinear hyperbolic equations. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1986, vol. 21, no. 2, pp. 147–155. [https://doi.org/10.1016/0020-7462\(86\)90027-2](https://doi.org/10.1016/0020-7462(86)90027-2)
15. Azad H., Mustafa M. T., Ziad M. Group classification, optimal system and optimal reductions of a class of Klein Gordon equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2010, vol. 15, no. 5, pp. 1132–1147. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2009.05.045>

Информация об авторе

Жалукевич Денис Станиславович – соискатель, отдел дифференциальных уравнений, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: den.zhal@yandex.by. <https://orcid.org/0000-0001-5021-550X>

Information about the author

Dzianis S. Zhalukevich – Applicant, Department of Differential Equations, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: den.zhal@yandex.by. <https://orcid.org/0000-0001-5021-550X>

ISSN 1561-2430 (Print)

ISSN 2524-2415 (Online)

УДК 519.8:51-76

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2026-62-1-38-47>

Поступила в редакцию 17.12.2025

Received 17.12.2025

А. Н. Авлас, А. К. Деменчук, Е. К. Макаров*Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь***УПРОЩЕННАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ МОДЕЛИ ЭПИДЕМИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА**

Аннотация. Базовой моделью эпидемического процесса в настоящее время остается модель SIR. Она и ее многочисленные обобщения (SEIR, SEIRD и др.), а также некоторые аналогичные модели относятся к классу компартментальных моделей, описывающих динамику эпидемического процесса как взаимодействие «компарментов», т. е. различных групп, на которые, в соответствии с их ролью в передаче инфекции (восприимчивые, инфицированные, выздоровевшие и др.) разбивается вся совокупность людей, среди которых распространяется эпидемия. Идентификация параметров этих моделей зачастую представляет собой довольно сложную задачу. Эта задача несколько облегчается при проведении ретроанализа эпидемий, когда полностью доступны данные о заболеваемости на всех этапах процесса. В работе предлагается упрощенная методика идентификации стационарной модели SIR с использованием минимального набора наблюдаемых данных, допускающих относительно надежное определение. На основе разработанной методики показана неприменимость стационарной модели SIR для описания первой волны пандемии COVID-19 в Германии и Италии.

Ключевые слова: математическая эпидемиология, компартмент, модель SIR, COVID-19, идентификация параметров

Для цитирования. Авлас, А. Н. Упрощенная идентификация модели эпидемического процесса / А. Н. Авлас, А. К. Деменчук, Е. К. Макаров // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Сэрыя фізіка-матэматычных навук. – 2026. – Т. 62, № 1. – С. 38–47. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2026-62-1-38-47>

Artsiom N. Avlas, Aleksandr K. Demenchuk, Evgenii K. Makarov*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus***SIMPLIFIED IDENTIFICATION OF THE EPIDEMIC PROCESS MODEL**

Abstract. The SIR model currently remains the basic model of the epidemic process. This model and its numerous generalizations (SEIR, SEIRD, etc.), as well as some similar models, belong to the class of compartmental models, that describe the dynamics of the epidemic process as the interaction of “compartments”, i. e., various groups into which, according to their role in transmission infections (susceptible, infected, recovered, etc.) break up the entire population of people among whom the epidemic is spreading. Identifying the parameters of these models is often a challenging task. This task is somewhat simplified when conducting retrospective analyses of epidemics, where full incidence data are available at all stages of the process. We propose a simplified method for identifying a stationary SIR model using a minimal set of observed data that allows for relatively reliable determination. Based on the proposed methodology, the inapplicability of the stationary SIR model to describe the first wave of the COVID-19 pandemic in Germany and Italy is shown.

Keywords: mathematical epidemiology, compartment, SIR model, COVID-19, parameter identification

For citation. Avlas A. N., Demenchuk A. K., Makarov E. K. Simplified identification of the epidemic process model. *Vestsi Natsyonal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2026, vol. 62, no. 1, pp. 38–47 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2026-62-1-38-47>

Введение. Модели эпидемических процессов, разрабатываемые в математической эпидемиологии, многочисленны и многообразны, что обусловлено разнообразием условий, в которых эти процессы протекают [1]. Набор используемых в этой области науки моделей постоянно пополняется по мере выявления новых инфекционных заболеваний или возникновения их новых вариантов. Тем не менее базовой моделью эпидемического процесса в настоящее время остается модель SIR (susceptible–infected–recovered, т. е. восприимчивые – инфицированные – выздоровевшие), сформулированная в 1927 г. А. Г. МакКендриком и У. О. Кермаком [2, 3]. Эта модель и ее многочисленные обобщения (SEIR, SEIRD и др.), а также некоторые аналогичные модели относят-

ся к классу компартментальных моделей [3], описывающих динамику эпидемического процесса как взаимодействие «компарментов», т. е. различных групп, на которые, в соответствии с их ролью в передаче инфекции: восприимчивые, инфицированные (с возможным подразделением на находящихся в инкубационном периоде заболевания и уже заболевших), выздоровевшие, умершие и др. – разбивается вся совокупность людей, среди которых распространяется эпидемия. Практика использования модели SIR и ее модификаций показывает, что при правильном выборе параметров и типа модели возможно получение достаточно адекватных прогнозов развития эпидемий некоторых инфекционных заболеваний. В то же время, как отмечается в ряде публикаций (см. напр., [4, 5] и др.) вопрос идентификации параметров этих моделей зачастую представляет собой довольно сложную задачу. Эта задача несколько облегчается при проведении ретроанализа эпидемий, когда полностью доступны данные о заболеваемости на всех этапах процесса.

Одной из существенных причин сложностей, возникающих при определении значений параметров стационарной модели SIR, состоит в отсутствии явного представления решений входящих в нее дифференциальных уравнений. Это не позволяет определить искомые значения непосредственно путем аппроксимации натурных данных с помощью фиксированного параметрического семейства функций. Использование же для идентификации модели самих дифференциальных уравнений требует аппроксимации приращений наблюдаемых величин, что, в связи с высокой степенью зашумленности реальных данных о заболеваемости практически невозможно без применения достаточно агрессивного их сглаживания, неизбежно приводящего к большим неконтролируемым искажениям.

В настоящей работе мы предлагаем упрощенную методику идентификации стационарной модели SIR с использованием минимального набора наблюдаемых данных, допускающего относительно надежное определение.

Свойства стационарной модели SIR. Модель SIR основана на следующей системе трех дифференциальных уравнений:

$$\frac{dS}{dt} = -\alpha SI, \quad (1)$$

$$\frac{dI}{dt} = \alpha SI - \gamma I, \quad (2)$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I. \quad (3)$$

Здесь S – число восприимчивых к заболеванию; I – число инфицированных; R – число выздоровевших. Положительные коэффициенты α и γ определяют интенсивность инфицирования и скорость выздоровления соответственно. Мы будем считать их постоянными, т. е. будем рассматривать стационарную систему (1)–(3).

З а м е ч а н и е 1. Коэффициент α обычно записывается в виде $\alpha = \beta/N_0$, где параметр N_0 принимается равным общей численности населения региона, охваченного эпидемией и, соответственно, $\beta = \alpha N_0$. При такой записи коэффициенты α и γ , как правило, будут являться величинами одного порядка, что имеет некоторые преимущества при практическом использовании модели.

Несмотря на сильную зашумленность, данные о заболеваемости позволяют с определенной степенью надежности определить такие величины, как общее число переболевших $M = R(+\infty)$ и число вовлеченных в эпидемический процесс на его пике $X_p = R(t_p) + I(t_p)$, где t_p – момент наступления пика заболеваемости, а также оценить скорость разрастания эпидемии в ее начальной стадии λ_- и скорость ее затухания на стадии завершения λ_+ . Оценка этих величин может быть осуществлена либо с помощью известных методик [6, 7], либо непосредственно по данным о заболеваемости.

Если перечисленные величины известны, то в предположении представимости процесса развития эпидемии принятым вариантом модели SIR коэффициенты системы уравнений (1)–(3) и параметры ее решения, описывающего наблюдаемый эпидемический процесс, могут быть явно вычислены. Для получения соответствующих расчетных формул нам понадобится несколько вспомогательных утверждений.

Утверждение 1. Любое решение системы (1), (2) с положительными начальными данными $S(t_0) > 0$, $I(t_0) > 0$ продолжимо на всю числовую ось. При этом для всех $t \in \mathbb{R}$ выполнены неравенства $S(t) > 0$, $I(t) > 0$ и существуют конечные пределы $+\infty > S(-\infty) > S(+\infty) \geq 0$, $I(-\infty) = I(+\infty) = 0$.

Доказательство. Рассматривая уравнения (1) и (2) как линейные однородные уравнения, получим соотношения

$$\begin{aligned} S(t) &= S(t_0) \exp \int_{t_0}^t (-\alpha) I(t) dt, \\ I(t) &= I(t_0) \exp \int_{t_0}^t (\alpha S(t) - \gamma) dt, \end{aligned} \quad (4)$$

гарантирующие положительность величин $S(t)$ и $I(t)$ на всей области их определения. Отсюда в силу (1) следует, что функция $S(t)$ является строго монотонно убывающей.

Уравнение траекторий на плоскости (S, I) для системы уравнений (1), (2) имеет вид

$$\frac{dI}{dS} = -1 + \frac{\gamma}{\alpha S}. \quad (5)$$

Интегрируя уравнение (5) с учетом начальных условий рассматриваемого решения, получим уравнение кривой, содержащей его траекторию:

$$I = I(t_0) + S(t_0) - S + \frac{\gamma}{\alpha} \ln \frac{S}{S(t_0)}. \quad (6)$$

Дважды дифференцируя равенство (6), получим соотношение

$$\frac{\partial^2 I}{\partial S^2} = -\frac{\gamma}{\alpha S^2} < 0.$$

Кроме того, в силу (6) имеет место стремление $I \rightarrow -\infty$ как при $S \rightarrow 0$, так и при $S \rightarrow +\infty$. Это означает, что при любых положительных значениях параметров α , γ , $S(t_0)$, $I(t_0)$ кривая, определяемая уравнением (6), пересекает координатную ось $I = 0$ в двух точках с координатами $(S_1, 0)$ и $(S_2, 0)$, где $0 < S_1 < S_2 < +\infty$, оставаясь при $S \in]S_1, S_2[$ в верхней полуплоскости $I > 0$.

При любом $S^* \in \mathbb{R}$ точка $(S^*, 0)$ на плоскости (S, I) , является положением равновесия для системы уравнений (1), (2). Такие точки заполняют всю координатную ось $I = 0$. Поскольку для системы (1), (2) имеет место единственность решений, то решение, проходящее через внутреннюю точку положительного квадранта плоскости (S, I) , не может за конечное время войти в какую бы то ни было точку равновесия. Поэтому траекторией рассматриваемого решения является часть кривой (6) между точками ее пересечения с осью $I = 0$. Направление движения по ней определяется монотонным убыванием функции $S(t)$. Эта траектория с двух сторон примыкает к точкам равновесия $(S_1, 0)$ и $(S_2, 0)$, поэтому время движения по ней не может быть конечным. Это обеспечивает двустороннюю бесконечную продолжимость рассматриваемого решения и существование конечных пределов $I(-\infty) = I(+\infty) = 0$, $S(-\infty) = S_2$, $S(+\infty) = S_1$.

Следствие 1. Для любого решения системы (1)–(3) с положительными начальными данными $S(t_0) > 0$, $I(t_0) > 0$, $R(t_0) > 0$ существуют конечные пределы $R(-\infty) < R(+\infty)$.

Доказательство. В силу (3) для компоненты R имеем представление

$$R(t) = R(t_0) + \gamma \int_{t_0}^t I(s) ds,$$

обеспечивающее монотонное возрастание функции $R(t)$ при всех $t \in \mathbb{R}$ и, следовательно, существование пределов $R(-\infty) < R(+\infty)$, конечных или бесконечных.

Система уравнений (1)–(3) имеет очевидный первый интеграл $S(t) + I(t) + R(t) = \text{const}$. Для рассматриваемого решения он дает соотношение $S(t) + I(t) + R(t) = S(t_0) + I(t_0) + R(t_0)$. Отсюда, используя утверждение 1, получаем равенства

$$R(-\infty) = S(t_0) + I(t_0) + R(t_0) - S(-\infty), \quad R(+\infty) = S(t_0) + I(t_0) + R(t_0) - S(+\infty),$$

означающие конечность пределов $R(-\infty)$ и $R(+\infty)$.

З а м е ч а н и е 2. Мы предполагаем, что до начала эпидемии случаи заболевания отсутствуют. Поэтому принимаем, что для любого решения, описывающего процесс развития эпидемии, должно выполняться условие $R(-\infty) = 0$. В этом случае первый интеграл системы уравнений (1)–(3) имеет вид

$$S(t) + I(t) + R(t) = S(-\infty). \quad (7)$$

Величина $S(-\infty)$ имеет смысл начального (до начала распространения инфекции) количества восприимчивых и является одним из основных параметров модели эпидемического процесса. В дальнейшем мы используем для нее обозначение $N := S(-\infty)$.

Таким образом, любые решения системы уравнений (1)–(3) с положительными начальными данными описывают необратимо затухающую изолированную волну эпидемического процесса. Для этой волны имеет место жесткая зависимость между начальным количеством восприимчивых $N := S(-\infty)$ и общим числом переболевших $M = R(+\infty)$. Эта зависимость устанавливается следующим хорошо известным [3] утверждением.

С л е д с т в и е 2. Для любого решения системы (1), (2) с положительными начальными данными справедливо равенство

$$S(-\infty) \exp\left(-\frac{\alpha}{\gamma} S(-\infty)\right) = S(+\infty) \exp\left(-\frac{\alpha}{\gamma} S(+\infty)\right).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Полагая в (6) $t_0 = -\infty$ и учитывая, что $I = I(t)$ и $S = S(t)$, при $t \rightarrow +\infty$ получим соотношение

$$S(-\infty) - S(+\infty) + \frac{\gamma}{\alpha} \ln \frac{S(+\infty)}{S(-\infty)} = 0, \quad (8)$$

эквивалентное требуемому.

Имеют место также следующие утверждения.

С л е д с т в и е 3. Для любого решения системы (1), (2) с положительными начальными данными справедливо равенство $M = \frac{\gamma}{\alpha} \ln \frac{N}{N-M}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (7) имеем равенство

$$M = R(+\infty) = N - I(+\infty) - S(+\infty) = S(-\infty) - S(+\infty).$$

Отсюда и из (8) получаем соотношения

$$M = \frac{\gamma}{\alpha} \ln \frac{S(-\infty)}{S(+\infty)} = \frac{\gamma}{\alpha} \ln \frac{N}{N-M}.$$

С л е д с т в и е 4. Для любого решения системы (1), (2) с положительными начальными данными справедливы равенства

$$\lambda_- = \alpha N - \gamma, \quad \lambda_+ = \alpha(N - M) - \gamma.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Требуемые равенства вытекают непосредственно из представления (4):

$$\lambda_- = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{t} \ln I(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t (\alpha S(t) - \gamma) dt = \alpha S(-\infty) - \gamma = \alpha N - \gamma,$$

$$\lambda_+ = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln I(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t (\alpha S(t) - \gamma) dt = \alpha S(+\infty) - \gamma = \alpha(N - M) - \gamma.$$

С л е д с т в и е 5. Для любого решения системы (1), (2) с положительными начальными данными справедливо равенство

$$\frac{\gamma}{\alpha} = N - X_p.$$

Доказательство. При $t = t_p$ величина $I(t)$ достигает максимума, поэтому выполнено равенство $\frac{dI}{dt} = 0$, которое в силу уравнения (2) эквивалентно условию $\alpha S(t_p)I(t_p) - \gamma I(t_p) = 0$. Так как $I(t_p) \neq 0$, имеем соотношения

$$\frac{\gamma}{\alpha} = S(t_p) = N - R(t_p) - I(t_p) = N - X_p.$$

Сформулированные утверждения позволяют как определить возможность представления наблюдаемого процесса моделью SIR, так и оценить ее параметры. Для этого необходимо из каждого из приведенных условий выразить величину α/γ и приравнять между собой полученные выражения. В результате получим соотношения, связывающие наблюдаемые параметры процесса:

$$\frac{1}{M} \ln \frac{N}{N-M} = \frac{1}{N-X_p} = \frac{\lambda_- - \lambda_+}{N(\lambda_- - \lambda_+) - M\lambda_-}. \quad (9)$$

Среди равенств (9) только первое является уравнением, позволяющим определить значение величины N . Условие его разрешимости дает необходимое условие применимости модели SIR, т. е. возможности представления (фактически, аппроксимации) наблюдаемого эпидемического процесса с помощью какого-либо решения системы уравнений (1)–(3).

Утверждение 2. Уравнение

$$\ln \frac{N}{N-M} = \frac{M}{N-X_p} \quad (10)$$

как уравнение относительно N имеет положительное решение, удовлетворяющее условию $N > M$, тогда и только тогда, когда $M > X_p > M/2$.

Доказательство. Для удобства введем новые переменные $x = N/M$ и $a = X_p/M$. В этих переменных после простых преобразований уравнение (10) примет вид

$$F(x) := x - \frac{1}{\ln \left(1 + \frac{1}{x-1} \right)} = a.$$

Функция F определена и непрерывна при всех $x > 1$ и является убывающей, при этом существуют конечные пределы $F(1+0) = 1$, $F(+\infty) = 1/2$. Поэтому $F(]1, +\infty[) =]1/2, 1[$, а это и означает, что уравнение $F(x) = a$ разрешимо и имеет решение, удовлетворяющее условию $x > 1$, тогда и только тогда, когда $a \in]1/2, 1[$. Возвращаясь к исходным переменным, имеем требуемое.

Следствие 6. Выполнение неравенства $X_p > M/2$ является необходимым условием представимости наблюдаемого эпидемического процесса с помощью стационарной модели SIR.

Утверждение 3. Выполнение соотношения

$$M = \frac{\lambda_- - \lambda_+}{\lambda_-} X_p \quad (11)$$

является необходимым условием представимости наблюдаемого эпидемического процесса с помощью стационарной модели SIR.

Доказательство. Второе из равенств (9) эквивалентно доказываемому соотношению.

Замечание 3. При выполнении условия (11) третье из возможных парных равенств (9) эквивалентно уравнению (10) и не накладывает никаких дополнительных условий на параметры процесса.

Замечание 4. При выполнении условия (11) неравенство $X_p > M/2$ эквивалентно условию $\lambda_- > -\lambda_+$.

Используя приведенные выше условия, можно сформулировать методику идентификации стационарной модели SIR по натурным данным следующим образом.

Шаг 1. Определить величины M , X_p , λ_+ , λ_- непосредственно либо путем аппроксимации данных по методике, приведенной в [6].

Шаг 2. Проверить применимость модели SIR на основании следствия 5 путем проверки условия $X_p > M/2$ или условия (11).

Шаг 3. Решая уравнение (10) относительно N , определить начальную численность восприимчивых.

Шаг 4. С помощью следствия 4 определить параметры α и γ по формулам

$$\alpha = \frac{\lambda_- - \lambda_+}{M}, \quad \gamma = \frac{\lambda_- - \lambda_+}{M} N - \lambda_- \quad (12)$$

Применение данной методики к модельным примерам данных, соответствующих решениям системы (1)–(3), позволяет восстанавливать коэффициенты системы с любой требуемой точностью. Влияние случайных искажений на процесс применения предлагаемой методики требует отдельного исследования.

Пример. Для системы уравнений (1)–(3) при $\alpha = 10^{-7}$, $\gamma = 10^{-1}$ с начальными условиями $S(0) = 2000000$, $I(0) = 10$, $R(0) = 0$ пик заболеваемости наступает при $t_p = 120,7$. Он характеризуется следующими значениями переменных: $S(t_p) = 999725,76$; $I(t_p) = 306862,78$; $R(t_p) = 693421,46$; $X_p = I(t_p) + R(t_p) = 1000284,24$. Эпидемическая волна в основном затухает при $t > 300$, так как при $t = 250$ имеем $I(250) = 394,87$, а уже при $t = 300$ имеем $I(300) = 20,3$. Поэтому принимаем следующие оценки величин, необходимых для восстановления параметров системы:

$$M = X(300) = I(300) + R(300) = 1593627,21;$$

$$\lambda_+ = \ln(I(300) / I(250)) / 50 = -0,059354478;$$

$$\lambda_- = \ln(I(10) / I(0)) / 10 = 0,999985.$$

Для этих оценочных величин условие (11) выполнено, так как

$$\frac{\lambda_- - \lambda_+}{\lambda_-} X_p = 1594080,183,$$

что достаточно близко к оценке величины M . Решение уравнения (10) дает достаточно точную оценку величины $N = 1998780,01$, а по формулам (12) получаем значения $\alpha = 0,999939 \cdot 10^{-7}$, $\gamma = 0,099989$, почти совпадающие с истинными.

Замечание 5. Если величины λ_+ и λ_- известны, но оценка величины M по каким-либо причинам невозможна (например, из-за быстрого начала следующей волны эпидемии), ее предполагаемое значение может быть вычислено по формуле (11), после чего можно будет восстановить остальные параметры в общем порядке. В этом случае проверка применимости стационарной модели SIR должна производиться путем сравнения решения системы уравнений (1)–(3) с совокупностью натурных данных.

Результаты применения метода к реальным данным. Для проверки применимости приведенных выше условий для реальных эпидемических процессов нами были использованы общедоступные опубликованные данные о заболеваемости COVID-19 в Италии и Германии, размещенные на сайте Университета Джонса Хопкинса (<https://coronavirus.jhu.edu>). С целью исключения влияния таких значимых факторов, как массовая вакцинация и перекрестный иммунитет к более ранним вариантам вируса SARS-CoV-2, мы ограничиваемся лишь данными о ходе первой волны пандемии, протекавшей в этих странах в первой половине 2020 г. Выбор именно этих стран в качестве источника проверочных данных обусловлен также характером протекания в них эпидемического процесса в форме, близкой к теоретической, – в виде хорошо оформленной изолированной волны с крутым подъемом и более пологим спадом.

Во всех случаях оценки величин M , λ_- и λ_+ осуществлены с помощью методики, предложенной в [6], без применения дополнительного сглаживания для данных по Германии и с дополнительным сглаживанием данных по Италии.

Первые пациенты с COVID-19 были зарегистрированы в Германии 2 февраля 2020 г. Через 137 дней после указанной даты данные о ежедневном приросте числа инфицированных показали

прекращение спада первой волны и начало нового подъема заболеваемости. На этом отрезке времени для величины $X(t)$ получена следующая аппроксимирующая функция (рис. 1):

$$X(t) = \frac{190119}{1 + 12 \exp(-0,045t) + 270603 \exp(-0,2t)}.$$

Из нее получаем следующие оценочные значения для требуемых величин: $M = 190119$; $\lambda_- = 0,2$; $\lambda_+ = -0,045$. Исходя из данных о величине ежедневных приростов числа инфицированных, для момента достижения пика заболеваемости имеем интервал $t_p = 57 \div 63$. Отсюда для величины X_p получаем оценку $X_p \leq 79698$, что намного меньше, чем $M/2 = 95059,5$. Это позволяет сделать вывод о неприменимости стационарной модели SIR для описания первой волны COVID-19 в Германии.

Вычисляя согласно замечанию 4 предполагаемое количество переболевших за весь период первой волны эпидемии с помощью формулы (11), получаем оценку $M = 97196,92$. Соответствующее этому значению начальное количество восприимчивых получаем, решая уравнение (10): $N = 97629,16$. Эти значения очень близки, что означает быстрое завершение эпидемического процесса, описываемого моделью SIR, после достижения максимальной скорости распространения. Восстанавливая коэффициенты системы (1)–(3) по формулам (12), получаем значения $\alpha = 0,258 \cdot 10^{-5}$, $\gamma = 0,046$. Соотношение динамики реального эпидемического процесса и его модели показано на рис. 2 и 3.

Первые пациенты с COVID-19 были зарегистрированы в Италии 7 февраля 2020 г. Через 120 дней данные о ежедневном приросте числа инфицированных показали прекращение спада первой волны и начало нового подъема заболеваемости. На этом отрезке времени для величины $X(t)$ получена следующая аппроксимирующая функция (рис. 4):

$$X(t) = \frac{238540}{1 + 50 \exp(-0,0635t) + 88216 \exp(-0,223t)}.$$

Исходя из этой аппроксимации, можно получить следующие оценочные значения для требуемых величин: $M = 238540$; $\lambda_- = 0,223$; $\lambda_+ = -0,0635$. Исходя из данных о величине ежедневных приростов числа инфицированных, для момента достижения пика заболеваемости имеем интервал $t_p = 50 \div 55$. Отсюда для величины X_p получаем оценку $X_p \leq 80589$, что намного меньше, чем $M/2 = 119270$. Это позволяет сделать вывод о неприменимости стационарной модели SIR для описания первой волны COVID-19 в Италии.

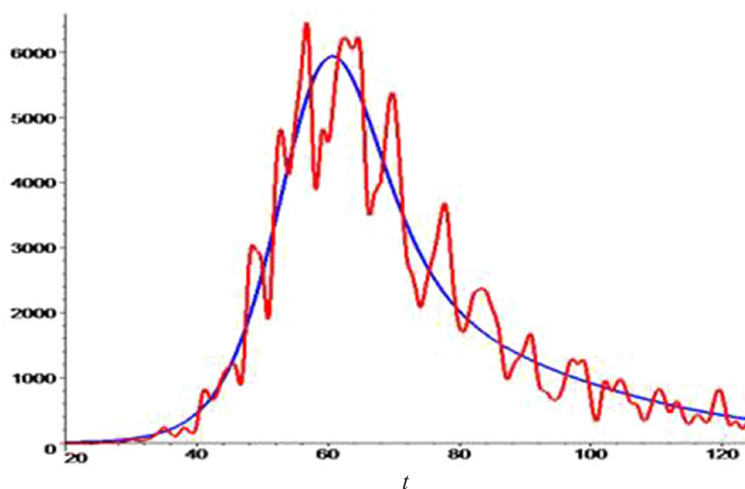


Рис. 1. Ежедневный прирост выявленных заражений COVID-19 в Германии в феврале – июле 2020 г. и график приращений аппроксимирующей функции

Fig. 1. Daily increase in detected COVID-19 infections in Germany in February – July 2020 and the graph of the increments of the approximating function

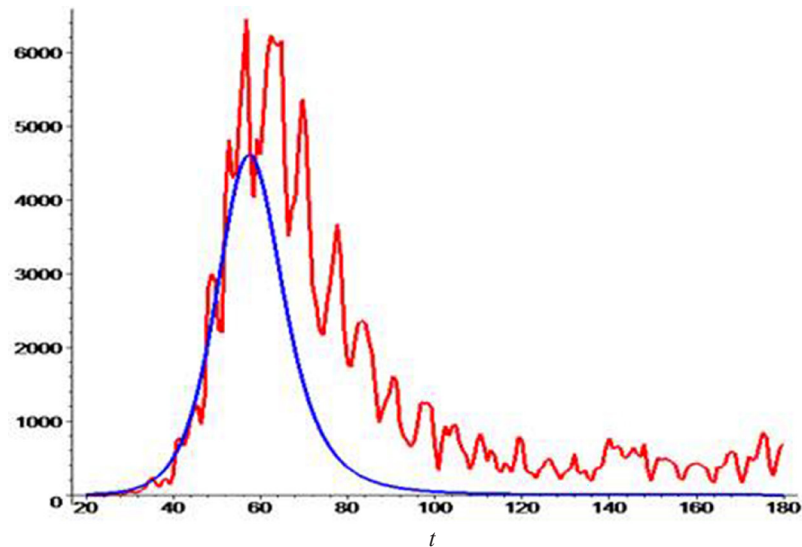


Рис. 2. Ежедневный прирост выявленных заражений COVID-19 в Германии в феврале – июле 2020 г. и соответствующее решение системы (1)–(3)

Fig. 2. Daily increase in detected COVID-19 infections in Germany in February – July 2020 and the corresponding solution of the system (1)–(3)

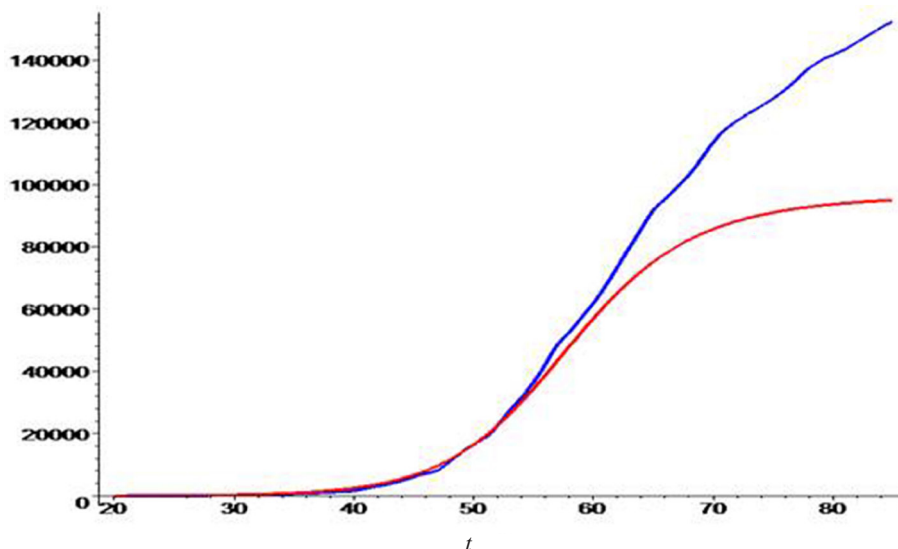


Рис. 3. Общее количество выявленных заражений COVID-19 в Германии в феврале – июле 2020 г. и соответствующее решение системы (1)–(3)

Fig. 3. Total number of detected COVID-19 infections in Germany in February – July 2020 and the corresponding solution of the system (1)–(3)

Вычисляя согласно замечанию 4 предполагаемое количество переболевших за весь период первой волны эпидемии с помощью формулы (11), получаем оценку $M = 103555$. Соответствующее этому значению начальное количество восприимчивых получаем, решая уравнение (10): $N = 105089$. Эти значения также очень близки, что, как и в случае данных по Германии, означает быстрое завершение эпидемического процесса, описываемого моделью SIR, после достижения максимальной скорости распространения. Восстанавливая коэффициенты системы (1)–(3) по формулам (12), получаем значения $\alpha = 0,292 \cdot 10^{-5}$, $\gamma = 0,076$. Соотношение динамики реального эпидемического процесса и его модели показано на рис. 5.

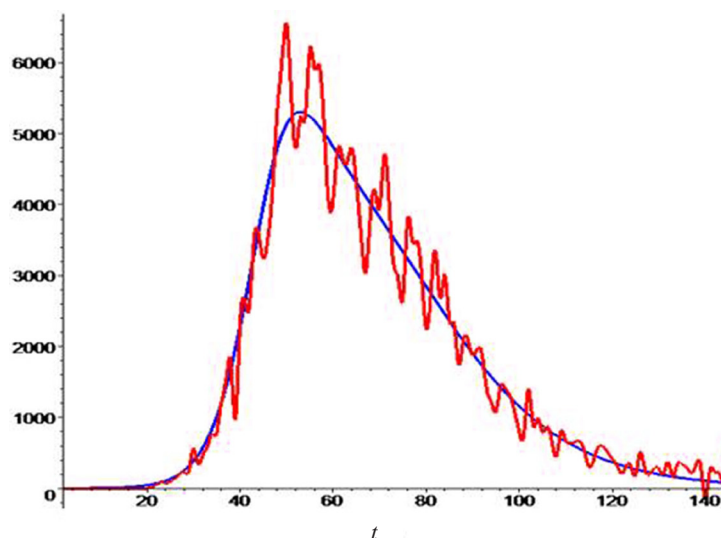


Рис. 4. Ежедневный прирост выявленных заражений COVID-19 в Италии в феврале – июле 2020 г. и график приращений аппроксимирующей функции

Fig. 4. Daily increase in detected COVID-19 infections in Italy in February – July 2020 and the graph of the increments of the approximating function

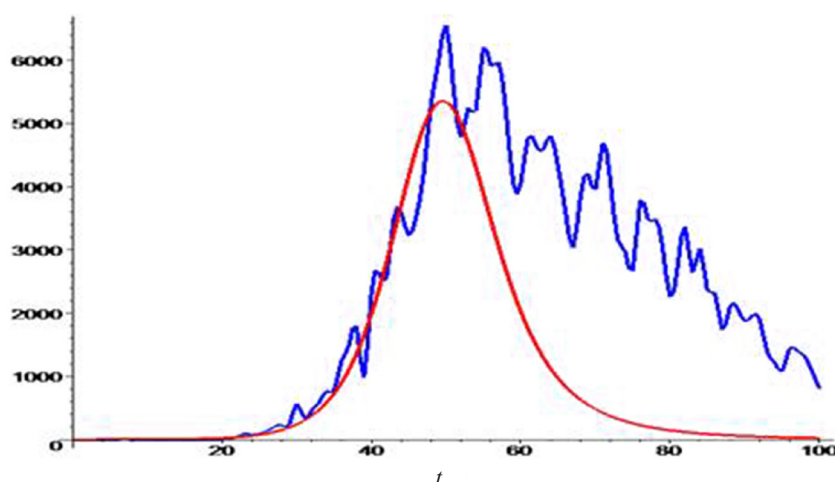


Рис. 5. Ежедневный прирост выявленных заражений COVID-19 в Италии в феврале – июле 2020 г. и соответствующее решение системы (1)–(3)

Fig. 5. Daily increase in detected COVID-19 infections in Italy in February – July 2020 and the corresponding solution of the system (1)–(3)

Выводы. На основе предложенной методики возможна эффективная проверка применимости стационарной модели SIR в каждом конкретном случае, а также оценка ее параметров в случае применимости.

Для моделирования первых волн COVID-19 в Италии и Германии, теоретически наиболее соответствующих условиям применимости стационарной модели SIR благодаря отсутствию значимых внешних воздействий, стационарная модель SIR неприменима.

Благодарности. Работа выполнена в Институте математики НАН Беларуси при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований, проект № Ф25КИ-015 «Асимптотическое поведение периодических эпидемических динамических моделей».

Acknowledgements. The work was carried out at the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus in the framework of Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research, project no. Ф25КИ-015 “Asymptotic behavior of periodic epidemic dynamic models”.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Mathematical Epidemiology / eds.: F. Brauer, P. van den Driessche, Jianhong Wu. – Berlin; Heidelberg: Springer, 2008. – 355 p. – (Lecture Notes in Mathematics, vol. 1945). <https://doi.org/10.1007/978-3-540-78911-6>
2. Kermack, W. O. A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics / W. O. Kermack, A. G. McKendrick // Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character. – 1927. – Vol. 115, № 772. – P. 700–721. <https://doi.org/10.1098/rspa.1927.0118>
3. Brauer, F. Compartmental Models in Epidemiology / F. Brauer // Mathematical Epidemiology / eds.: F. Brauer, P. van den Driessche, Jianhong Wu. – Berlin; Heidelberg: Springer, 2008. – P. 19–79. – (Lecture Notes in Mathematics, vol. 1945). https://doi.org/10.1007/978-3-540-78911-6_2
4. Математическое моделирование эпидемических процессов и оценка их статистических характеристик / Б. М. Десятков, А. И. Бородулин, С. С. Котлярова [и др.] // Химическая и биологическая безопасность. – 2009. – № 1–3 (43–45). – С. 15–20.
5. Моделирование эпидемической ситуации с учетом внешних рисков / Ю. Б. Гришунина, Н. А. Контаров, Г. В. Архарова, Н. В. Юминова // Эпидемиология и вакцинопрофилактика. – 2014. – № 5 (78). – С. 61–66.
6. Аппроксимация изолированной волны эпидемического процесса с помощью комбинации экспонент / А. Н. Авлас, А. К. Деменчук, С. В. Лемешевский, Е. К. Макаров // Весті Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. – 2021. – Т. 57, № 4. – С. 391–400. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-4-391-400>
7. Семенычев, В. К. Анализ и предложения моделей экономической динамики с кумулятивным логистическим трендом / В. К. Семенычев, В. Н. Кожухова. – Самара: СамНЦ РАН, 2013. – 156 с.

References

1. Brauer F., van den Driessche P., Wu J. (eds). *Mathematical Epidemiology. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1945*. Berlin, Heidelberg, Springer, 2008. 355 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-78911-6>
2. Kermack W. O., McKendrick A. G. A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 1927, vol. 115, no. 772, pp. 700–721. <https://doi.org/10.1098/rspa.1927.0118>
3. Brauer F. Compartmental Models in Epidemiology. Brauer F., van den Driessche P., Wu J. (eds). *Mathematical Epidemiology. Lecture Notes in Mathematics, vol 1945*. Berlin, Heidelberg, Springer, 2008, pp. 19–79. https://doi.org/10.1007/978-3-540-78911-6_2
4. Desyatkov B. M., Borodulin A. I., Kotlyarova S. S., Lapteva N. A., Marchenko M. Yu., Shabanov A. N. Mathematical modeling of epidemic processes and assessment of their statistical characteristics. *Khimicheskaya i biologicheskaya bezopasnost' = Chemical and Biological Safety*, 2009, no. 1–3 (43–45), pp. 15–20 (in Russian).
5. Grishunina Yu. B., Kontarov N. A., Arkharova G. V., Yuminova N. V. Modeling the epidemic situation taking into account external risks. *Epidemiologiya i vaksino profilaktika = Epidemiology and Vaccine Prevention*, 2014, no. 5 (78), pp. 61–66 (in Russian).
6. Avlas A. N., Demenchuk A. K., Lemeshevskii S. V., Makarov E. K. The approximation of an isolated epidemic process wave using a combination of exponents. *Vesti Natsyional'noi akademii nauk Belarusi. Seriya fizika-matematichnykh nauk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2021, vol. 57, no. 4, pp. 391–400 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-4-391-400>
7. Semenychev, V. K., Kozhukhova V. N. *Analysis and Proposals of Models of Economic Dynamics with a Cumulative Logistic Trend*. Samara, SamNTs RAN, 2013. 156 p. (in Russian).

Информация об авторах

Авлас Артем Николаевич – младший научный сотрудник отдела вычислительной математики, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: aulas@im.bas-net.by

Деменчук Александр Константинович – доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник отдела дифференциальных уравнений, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: demenchuk@im.bas-net.by

Макаров Евгений Константинович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий отделом дифференциальных уравнений, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: jcm@im.bas-net.by

Information about the authors

Artsiom N. Avlas – Junior Researcher of the Department of Computational Mathematics, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: aulas@im.bas-net.by

Aleksandr K. Demenchuk – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Chief Researcher of the Department of Differential Equations, Institute of Mathematics of the National Academy of Science of Belarus (11, Surganov Str., Minsk, 220072, Republic of Belarus). E-mail: demenchuk@im.bas-net.by

Evgenii K. Makarov – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Department of the Differential Equations, Institute of Mathematics of the National Academy of Science of Belarus (11, Surganov Str., Minsk, 220072, Republic of Belarus). E-mail: jcm@im.bas-net.by

ФИЗИКА
PHYSICSUDC 539.1
<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2026-62-1-48-58>Received 05.01.2026
Поступила в редакцию 05.01.2026**Anastasia M. Kuzmich, Alina V. Ivashkevich, Viktor M. Red'kov***B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus***THE NON-RELATIVISTIC PROBLEM FOR A SPIN 3/2 PARTICLE
IN MAGNETIC FIELD, AND TETRAD GAUGE TRANSFORMATIONS**

Abstract. In the present paper, we will focus on the non-relativistic problem for a spin 3/2 particle in magnetic field, applying cylindrical coordinates and two tetrads: Cartesian and cylindrical. Here appear six different presentations for 4-component wave functions: three Cartesian ones $L^{\text{cart}}, \Psi^{\text{cart}}, \bar{\Psi}^{\text{cart}}$ and provided by using the relevant gauge transformation $L^{\text{cyl}} = S(\phi)L^{\text{cart}}$ three different presentations in cylindrical tetrad $L^{\text{cyl}}, \Psi^{\text{cyl}}, \bar{\Psi}^{\text{cyl}}$. First, we specify the non-relativistic equation for a spin 3/2 particle in magnetic field for Cartesian tetrad in bases with non-diagonal and diagonal matrix of the third spin projection. Solutions of two types are found: the first one is associated with the operator of the orbital angular momentum; the second solution relates to the third projection of the total angular momentum. Equations arising here are solved in terms of the confluent hypergeometric functions, and the corresponding energy spectra are found. The gauge transformation is introduced which relates two tetrads: Cartesian and cylindrical; it permits us to transform the system of equations in polar coordinate from Cartesian tetrad to cylindrical one. The rules for gauge transformations of diagonalized operators of the total angular and orbital momentums are found.

Keywords: spin 3/2, non-relativistic approximation, tetrad formalism, gauge symmetry, external magnetic field, exact solutions

For citation. Kuzmich A. M., Ivashkevich A. V., Red'kov V. M. The non-relativistic problem for a spin 3/2 particle in magnetic field, and tetrad gauge transformations. *Vestsi Natsyonal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk* = *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2026, vol. 62, no. 1, pp. 48–58. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2026-62-1-48-58>

А. М. Кузьмич, А. В. Ивашкевич, В. М. Редьков*Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь***НЕРЕЛЯТИВИСТСКОЕ ОПИСАНИЕ ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ 3/2 В МАГНИТНОМ ПОЛЕ,
ТЕТРАДНЫЕ КАЛИБРОВОЧНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ**

Аннотация. Рассмотрена задача о нерелятивистской частице со спином 3/2 в магнитном поле с использованием цилиндрических координат и двух тетрад – декартовой и цилиндрической. Здесь возникают различные представления для 4-компонентной волновой функции: три декартовых $L^{\text{cart}}, \Psi^{\text{cart}}, \bar{\Psi}^{\text{cart}}$ и получаемых с использованием калибровочного преобразования $L^{\text{cyl}} = S(\phi)L^{\text{cart}}$ три цилиндрических $L^{\text{cyl}}, \Psi^{\text{cyl}}, \bar{\Psi}^{\text{cyl}}$. Сначала вводится нерелятивистское уравнение для частицы со спином 3/2 в базисах с недиагональной и диагональной третьей проекцией спина. Найдены решения двух типов, первый соотносится с диагонализацией оператора орбитального момента, а второй – с диагонализацией оператора третьей проекции полного углового момента. Возникающие при этом дифференциальные уравнения решены в терминах вырожденных гипергеометрических функций, найдены соответствующие спектры энергии. Вводится калибровочное преобразование, которое связывает декартову и цилиндрическую тетрады и позволяет преобразовать систему уравнений в полярной координате от декартовой тетрады к цилиндрической. Определены правила калибровочных преобразований для диагонализующихся операторов полного и орбитально-углового момента.

Ключевые слова: спин 3/2, нерелятивистское приближение, тетрадный формализм, калибровочная симметрия, внешнее магнитное поле, точные решения

Для цитирования. Кузьмич, А. М. Нерелятивистское описание частицы со спином 3/2 в магнитном поле, тетрадные калибровочные преобразования / А. М. Кузьмич, А. В. Ивашкевич, В. М. Редьков // Весті Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. – 2026. – Т. 62, № 1. – С. 48–58. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2026-62-1-48-58>

Introduction. Spin 3/2 particle, after seminal papers [1–3], attracts steady attention of scientific community. For instance, see the recent papers [4–13]. In particular, a special attention was given to the non-relativistic approximation for this theory in electromagnetic and gravitational fields [11, 13].

In Minkowski space-time, one may apply the usual Cartesian coordinates, but in curved space-time models we should use curvilinear coordinates and tetrad formalism [13]. In Minkowski space, one also may apply the tetrad approach, when this a substantial role play the local Lorentz gauge transformations related to freedom in choosing tetrads. In the present paper, we will consider the problem of a spin 3/2 particle in the external magnetic field, applying cylindrical coordinates and two tetrads: Cartesian and cylindrical. In the non-relativistic problem appear six different types of 4-component waves functions [12]:

$$L^{\text{cart}} \Rightarrow \Psi^{\text{cart}} \Rightarrow \bar{\Psi}^{\text{cart}}; \quad L^{\text{cyl}} = [B(\phi) \otimes O(\phi)] L^{\text{cart}}; \quad L^{\text{cyl}} \Rightarrow \Psi^{\text{cyl}} \Rightarrow \bar{\Psi}^{\text{cyl}},$$

where $B(\phi) \otimes O(\phi)$ stands for the relevant spin-vector gauge transformation, and bar-symbol is associated with the so-called cyclic basis in which the third spin projection is given by a diagonal matrix.

Equation in Cartesian tetrad basis. The uniform magnetic field along the axis z is described by relations $A = (1/2)B \times r, F_{12} = B$; whence after recalculating to cylindrical coordinates we obtain $A_\phi = -Br^2/2$. We start with a 4-component for a spin 3/2 particle (in Cartesian tetrad basis)

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi^c = -\frac{\hbar^2}{2M} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial \phi} + i \frac{e}{\hbar c} A_\phi \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \Psi^c - \frac{e\hbar}{2M} B S_3 \Psi^c; \quad (1)$$

in this basis, the spin matrix S_3 is not diagonal:

$$S_3 = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & +1/2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & +3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3/2 \end{pmatrix}, \quad \Psi^c = \begin{pmatrix} \Psi_1^c \\ \Psi_2^c \\ \Psi_3^c \\ \Psi_4^c \end{pmatrix}. \quad (2)$$

We can find a transformation $\bar{\Psi}^c = S \Psi^c$ to a basis in which a new matrix $\bar{S}_3$ becomes diagonal:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{S}_3 = \begin{pmatrix} -3/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}; \quad (3)$$

the new components of the wave function are given by the formulas

$$\bar{\Psi}_1^c = \Psi_4^c, \quad \bar{\Psi}_2^c = -2\Psi_1^c + \Psi_3^c, \quad \bar{\Psi}_3^c = -2\Psi_2^c + \Psi_4^c, \quad \bar{\Psi}_4^c = \Psi_3^c. \quad (4)$$

In this diagonal (or cyclic) presentation, the main equation reads as

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \bar{\Psi}^c = -\frac{\hbar^2}{2M} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial \phi} + i \frac{e}{\hbar c} A_\phi \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \bar{\Psi}^c - \frac{e\hbar}{2M} B \bar{S}_3 \bar{\Psi}^c, \quad (5)$$

and here we have four separated equations.

Quantum numbers m and j , Cartesian tetrad basis. One can search for solutions of two types. The first variant is associated with the operator of the orbital angular momentum $\hat{l}_3 = -i\partial_\phi$:

$$\Psi_m^c = e^{-i\epsilon t} e^{ikz} e^{im\phi} \begin{pmatrix} f_1(r) \\ f_2(r) \\ f_3(r) \\ f_4(r) \end{pmatrix}, \quad \hat{l}_3 \Psi_m^c = m \Psi_m^c, \quad m = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \dots \quad (6)$$

In accordance with (5), equations for four components in cyclic basis are not linked to each other, and four independent solutions exist; all four solutions satisfy the eigenvalue equation $-i\partial_\phi \Psi_{(n)m}^c = m \Psi_{(n)m}^c$; these solutions $\Psi_{(n)}^c$ relate to different values of the third spin projection: $s_3 = -3/2, -1/2, +1/2, +3/2$.

The second variant is associated with the third projection of the total angular momentum, $\hat{J}_3^c = -i\partial_\phi + \bar{S}_3$. First, we will consider the eigenvalue problem in cyclic basis

$$\hat{J}_3^c \bar{\Phi}_j^c = j \bar{\Phi}_j^c, \quad \bar{\Psi}_j^c = e^{-i\epsilon t} e^{ikz} \begin{pmatrix} e^{i\sigma_1\phi} g_1 \\ e^{i\sigma_2\phi} g_2 \\ e^{i\sigma_3\phi} g_3 \\ e^{i\sigma_4\phi} g_4 \end{pmatrix} \quad (j \equiv j_3). \quad (7)$$

The function $\bar{\Psi}_j^c$ from (7) is eigenvalue one for the operator $\hat{J}_3^c$, only if

$$\begin{aligned} \sigma_1 - 3/2 = j &\Rightarrow \sigma_1 = j + 3/2, \\ \sigma_2 - 1/2 = j &\Rightarrow \sigma_2 = j + 1/2, \\ \sigma_3 + 1/2 = j &\Rightarrow \sigma_3 = j - 1/2, \\ \sigma_4 + 3/2 = j &\Rightarrow \sigma_4 = j - 3/2; \end{aligned} \quad \bar{\Psi}_j^c = e^{-i\epsilon t} e^{ikz} \begin{pmatrix} e^{i(j+3/2)\phi} g_1(r) \\ e^{i(j+1/2)\phi} g_2(r) \\ e^{i(j-1/2)\phi} g_3(r) \\ e^{i(j-3/2)\phi} g_4(r) \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Let us make inverse transformation to a non-cyclic presentation, $\Phi_j^c = S^{-1} \bar{\Phi}_j^c$:

$$\Psi_j^c = e^{-i\epsilon t} e^{ikz} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left(-e^{i/2\phi} e^{ij\phi} g_2 + e^{-i3/2\phi} e^{ij\phi} g_4 \right) \\ \frac{1}{2} \left(e^{+i3/2\phi} e^{ij\phi} g_1 - e^{-i/2\phi} e^{ij\phi} g_3 \right) \\ e^{-i3/2\phi} e^{ij\phi} g_4 \\ e^{+i3/2\phi} e^{ij\phi} g_1 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Let us find four equations corresponding to the equation in non-diagonal basis:

$$\left[2M\epsilon + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial \phi} + ieA_\phi \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + eBS_3 \right] \Psi_j^c = 0;$$

making the formal replacements $eB \Rightarrow B$, $eA \Rightarrow A$, $\partial^2 / \partial z^2 \Rightarrow -k^2$, $2M\epsilon - k^2 \Rightarrow E$, we get

$$\left[E + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial \phi} + iA_\phi \right)^2 + B \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & +1/2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & +3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3/2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} (-e^{i\sigma_2\phi} g_2 + e^{i\sigma_4\phi} g_4) / 2 \\ (e^{i\sigma_1\phi} g_1 - e^{i\sigma_3\phi} g_3) / 2 \\ e^{i\sigma_4\phi} g_4 \\ e^{i\sigma_1\phi} g_1 \end{pmatrix} = 0;$$

whence 4 separate equations follow (let us apply the shortening notation $\Delta = E + \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}$):

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}\left[\Delta - \frac{1}{r^2}(\sigma_2 + A_\phi)^2 - \frac{1}{2}B\right]e^{i\sigma_2\phi}g_2 + \frac{1}{2}\left[\Delta - \frac{1}{r^2}(\sigma_4 + A_\phi)^2 + \frac{3}{2}B\right]e^{i\sigma_4\phi}g_4 = 0, \\
& \frac{1}{2}\left[\Delta - \frac{1}{r^2}(\sigma_1 + A_\phi)^2 - \frac{3}{2}B\right]e^{i\sigma_1\phi}g_1 - \frac{1}{2}\left[\Delta - \frac{1}{r^2}(\sigma_3 + A_\phi)^2 - \frac{1}{2}B\right]e^{i\sigma_3\phi}g_3 = 0, \\
& \left[\Delta - \frac{1}{r^2}(\sigma_4 + A_\phi)^2 + \frac{3}{2}B\right]e^{i\sigma_4\phi}g_4 = 0, \quad \left[\Delta - \frac{1}{r^2}(\sigma_1 + A_\phi)^2 - \frac{3}{2}B\right]e^{i\sigma_1\phi}g_1 = 0.
\end{aligned} \tag{10}$$

Let us take into account $\sigma_1 = j + 3/2, \sigma_2 = j + 1/2, \sigma_3 = j - 1/2, \sigma_4 = j - 3/2$, then we get

$$\begin{aligned}
& -\left[\Delta - \frac{1}{r^2}(j + 1/2 + A_\phi)^2 - \frac{1}{2}B\right]e^{i(j+1/2)\phi}g_2 + \left[\Delta - \frac{1}{r^2}(j - 3/2 + A_\phi)^2 + \frac{3}{2}B\right]e^{i(j-3/2)\phi}g_4 = 0, \\
& \left[\Delta - \frac{1}{r^2}(j + 3/2 + A_\phi)^2 - \frac{3}{2}B\right]e^{i(j+3/2)\phi}g_1 - \left[\Delta - \frac{1}{r^2}(j - 1/2 + A_\phi)^2 - \frac{1}{2}B\right]e^{i(j-1/2)\phi}g_3 = 0, \\
& \left[\Delta - \frac{1}{r^2}(j - 3/2 + A_\phi)^2 + \frac{3}{2}B\right]e^{i(j-3/2)\phi}g_4 = 0, \quad \left[\Delta - \frac{1}{r^2}(j + 3/2 + A_\phi)^2 - \frac{3}{2}B\right]e^{i(j+3/2)\phi}g_1 = 0;
\end{aligned} \tag{11}$$

in each equation, we can eliminate the total multiplier $e^{ij\phi}$, so obtaining

$$\begin{aligned}
& -\left[\Delta - \frac{1}{r^2}(j + 1/2 + A_\phi)^2 - \frac{1}{2}B\right]e^{i(1/2)\phi}g_2 + \left[\Delta - \frac{1}{r^2}(j - 3/2 + A_\phi)^2 + \frac{3}{2}B\right]e^{i(-3/2)\phi}g_4 = 0, \\
& \left[\Delta - \frac{1}{r^2}(j + 3/2 + A_\phi)^2 - \frac{3}{2}B\right]e^{i(+3/2)\phi}g_1 - \left[\Delta - \frac{1}{r^2}(j - 1/2 + A_\phi)^2 - \frac{1}{2}B\right]e^{i(-1/2)\phi}g_3 = 0, \\
& \left[\Delta - \frac{1}{r^2}(j - 3/2 + A_\phi)^2 + \frac{3}{2}B\right]e^{i(-3/2)\phi}g_4 = 0, \quad \left[\Delta - \frac{1}{r^2}((j + 3/2) + A_\phi)^2 - \frac{3}{2}B\right]e^{i(+3/2)\phi}g_1 = 0.
\end{aligned} \tag{12}$$

Allowing for the 3-rd and 4-th equations, we can derive 4 unlinked equations (in all equations, we can eliminate the ϕ -dependent multipliers):

$$\begin{aligned}
& \left[\Delta - \frac{1}{r^2}(j + 3/2 + A_\phi)^2 - \frac{3}{2}B\right]g_1 = 0, \quad \left[\Delta - \frac{1}{r^2}(j + 1/2 + A_\phi)^2 - \frac{1}{2}B\right]g_2 = 0, \\
& \left[\Delta - \frac{1}{r^2}(j + 3/2 + A_\phi)^2 - \frac{3}{2}B\right]g_3 = 0, \quad \left[\Delta - \frac{1}{r^2}(j - 3/2 + A_\phi)^2 + \frac{3}{2}B\right]g_4 = 0.
\end{aligned} \tag{13}$$

This simple system refers to solutions Ψ_j^c in Cartesian tetrad basis and in the non-cyclic presentation of the spin matrix S_3 ; however, the corresponding substitution is not simple – see (8). In the cyclic presentation, we get the same four equations, but with the use of a more simple substitution (7).

Solving the 2nd order equations. We start with the equation in cyclic basis for states $\bar{\Psi}_j^c$:

$$\bar{\Psi}^c = e^{-i\epsilon t} e^{ikz} \begin{pmatrix} e^{im\phi} g_1(r) \\ e^{im\phi} g_2(r) \\ e^{im\phi} g_3(r) \\ e^{im\phi} g_4(r) \end{pmatrix}, \quad j = j_3 \equiv m, \tag{14}$$

setting $c \Rightarrow 1, \hbar \Rightarrow 1, eB \Rightarrow B$, we arrive at 4 unlinked equations:

$$\begin{aligned}
\epsilon g_1 &= -\frac{1}{2M} \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} \left(m - \frac{Br^2}{2} \right)^2 - k^2 \right] g_1 + \frac{B}{2M} \sigma_1 g_1, \\
\epsilon g_2 &= -\frac{1}{2M} \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} \left(m - \frac{Br^2}{2} \right)^2 - k^2 \right] g_2 + \frac{B}{2M} \sigma_2 g_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\epsilon g_3 &= -\frac{1}{2M} \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} \left(m - \frac{Br^2}{2} \right)^2 - k^2 \right] g_3 + \frac{B}{2M} \sigma_3 g_3, \\ \epsilon g_4 &= -\frac{1}{2M} \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} \left(m - \frac{Br^2}{2} \right)^2 - k^2 \right] g_4 + \frac{B}{2M} \sigma_4 g_4.\end{aligned}\quad (15)$$

In the vicinity of the point $r = 0$, we get $g_k = r^{a_k}$, $a_k = +|m|, -|m|$; to describe bound states, we should use the following asymptotic $r = r^{+|m|}$. For dimensionless variable $x = Br^2/2$, equations take the form

$$\begin{aligned}\left[2M\epsilon + 2Bx \frac{d^2}{dx^2} + 2B \frac{d}{dx} - \frac{B}{2x} (m-x)^2 - k^2 + \frac{3B}{2} \right] g_1 &= 0, \\ \left[2M\epsilon + 2Bx \frac{d^2}{dx^2} + 2B \frac{d}{dx} - \frac{B}{2x} (m-x)^2 - k^2 + \frac{B}{2} \right] g_2 &= 0, \\ \left[2M\epsilon + 2Bx \frac{d^2}{dx^2} + 2B \frac{d}{dx} - \frac{B}{2x} (m-x)^2 - k^2 - \frac{B}{2} \right] g_3 &= 0, \\ \left[2M\epsilon + 2Bx \frac{d^2}{dx^2} + 2B \frac{d}{dx} - \frac{B}{2x} (m-x)^2 - k^2 - \frac{3B}{2} \right] g_4 &= 0;\end{aligned}$$

they have the same general structure

$$\left[x \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx} - \frac{1}{4} \left(\frac{m^2}{x} + x - 2m \right) + \left(\frac{2M\epsilon - k^2}{2B} - \frac{\sigma}{2} \right) \right] g = 0; \quad (16)$$

note the physical dimensions of the quantities:

$$[x] = 1, \quad [M] = \frac{1}{L}, \quad [k^2] = \frac{1}{L^2}, \quad [2M\epsilon] = \frac{1}{L^2}, \quad [B] = \frac{1}{L^2}.$$

Let us apply the shortening notations

$$\frac{2M\epsilon - k^2}{2B} - \frac{\sigma}{2} = \beta, \quad \left[x \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx} - \frac{1}{4} \left(\frac{m^2}{x} + x - 2m \right) + \beta \right] g = 0. \quad (17)$$

In the vicinity of the point $x = 0$, the above equation gives $g = x^\alpha$, $\alpha = +|m|/2, -|m|/2$; at $x \rightarrow \infty$ we get $g = e^{\lambda x}$, $\lambda = +1/2, -1/2$. Because $x = Br^2/2$, where $B > 0$, at r -infinity, the variable $x \rightarrow +\infty$; so the needed asymptotic is $g_\infty \sim e^{-x/2}$. Thus, searching for solutions in the form $g = x^\alpha e^{-x/2} G(x)$, we derive

$$xG'' + (|m| + 1 - x)G' + \left(\frac{m - |m|}{2} - \frac{1}{2} + \beta \right) G = 0.$$

This is an equation of hypergeometric type

$$x \frac{d^2 G}{dx^2} + (c - x) \frac{dG}{dx} - aG = 0, \quad c = |m| + 1, \quad a = -\left(\frac{m - |m|}{2} - \frac{1}{2} + \beta \right).$$

Imposing the polynomial condition $a = -n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, we get

$$\frac{m - |m|}{2} - \frac{1}{2} + \frac{2M\epsilon - k^2}{2B} - \frac{\sigma}{2} = n \Rightarrow \frac{2M\epsilon - k^2}{2B} = n + \frac{1}{2} + \frac{\sigma}{2} + \frac{|m| - m}{2}.$$

Thus, the transverse motion of the particle is quantized according to the rule

$$2M\epsilon - k^2 = 2B \left(n_s + \frac{\sigma_s + 1}{2} + \frac{|m| - m}{2} \right), \quad \sigma_s = -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}. \quad (18)$$

In order to describe the energy level degeneration, we should use other notations (recall that $m = j_3 = j$)

$$2M\epsilon_N - k^2 = 2B \left(N + \frac{|m| - m}{2} \right), \quad N = n_s + \frac{\sigma_s + 1}{2}. \quad (19)$$

Now let us turn to solutions with fixed quantum numbers σ_n , $-i\partial_\phi \bar{\Phi}_n^c = \sigma_n \bar{\Phi}_n^c$. For this case, we have the substitution

$$\bar{\Phi}^c = e^{-i\epsilon t} e^{ikz} \begin{vmatrix} e^{i\sigma_1\phi} f_1(r) \\ e^{i\sigma_2\phi} f_2(r) \\ e^{i\sigma_3\phi} f_3(r) \\ e^{i\sigma_4\phi} f_4(r) \end{vmatrix}, \quad -i\partial_\phi \begin{vmatrix} e^{i\sigma_1\phi} f_1(r) \\ e^{i\sigma_2\phi} f_2(r) \\ e^{i\sigma_3\phi} f_3(r) \\ e^{i\sigma_4\phi} f_4(r) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_1 e^{i\sigma_1\phi} f_1(r) \\ \sigma_2 e^{i\sigma_2\phi} f_2(r) \\ \sigma_3 e^{i\sigma_3\phi} f_3(r) \\ \sigma_4 e^{i\sigma_4\phi} f_4(r) \end{vmatrix}, \quad (20)$$

correspondingly, from the main equation we get 4 similar equations

$$\left[2M\epsilon - k^2 + \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} \left(\sigma_n - \frac{Br^2}{2} \right)^2 - B\sigma_n \right] g_n = 0, \quad \sigma = -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}. \quad (21)$$

These equations belong to the above examined type, the difference consists only in the replacement of the parameter m by σ_n . Therefore, we derive the needed spectra by formal changes:

$$2M\epsilon_n - k^2 = 2B \left(n + \frac{1}{2} + \frac{\sigma_n}{2} + \frac{|\sigma_n| - \sigma_n}{2} \right), \quad \sigma = -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{3}{2}. \quad (22)$$

Cylindrical tetrad basis, the gauge transformation. The task under consideration by means of a relevant gauge matrix may be transformed to cylindrical tetrad. To this end, let us recall some details from [11, 13], where the non-relativistic approximation for a spin 3/2 particle was studied. It was shown that if in the relativistic 16-component wave function for a spin 3/2 particle we preserve only the large components, as the result we obtain the function with a simpler structure; besides, in the paper [12] the relevant gauge transformation for six large components from Cartesian to cylindrical tetrad was derived:

$$\Phi^c = \begin{vmatrix} 0 & L_1^c & L_3^c & L_5^c \\ 0 & L_2^c & L_4^c & L_6^c \\ 0 & L_1^c & L_3^c & L_5^c \\ 0 & L_2^c & L_4^c & L_6^c \end{vmatrix}, \quad \Phi^c = \begin{vmatrix} L_1^c & L_3^c & L_5^c \\ L_2^c & L_4^c & L_6^c \end{vmatrix}, \quad \Phi^{\text{cyl}} = (B \otimes O) \Phi^c, \quad (23)$$

where the 2-spinor and 3-vector transformations are determined by the formulas

$$B = \begin{vmatrix} e^{+i\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi/2} \end{vmatrix}, \quad O = \begin{vmatrix} \cos \phi & +\sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (24)$$

Therefore, the needed gauge transformation is defined according to the rule

$$\begin{aligned} \Phi^{\text{cyl}} &= (B \otimes O) \Phi^c = B \begin{vmatrix} L_1^c & L_3^c & L_5^c \\ L_2^c & L_4^c & L_6^c \end{vmatrix} \tilde{O} = \\ &= \begin{vmatrix} e^{i\phi/2} \left(\cos \phi L_1^c + \sin \phi L_3^c \right) & e^{i\phi/2} \left(-\sin \phi L_1^c + \cos \phi L_3^c \right) & e^{i\phi/2} L_5^c \\ e^{-i\phi/2} \left(\cos \phi L_2^c + \sin \phi L_4^c \right) & e^{-i\phi/2} \left(-\sin \phi L_2^c + \cos \phi L_4^c \right) & e^{-i\phi/2} L_6^c \end{vmatrix}, \end{aligned} \quad (25)$$

whence it follows

$$\begin{aligned}
 L_1^{\text{cyl}} &= e^{i\phi/2} \left(\frac{1}{2}(e^{i\phi} + e^{-i\phi})L_1^c - \frac{i}{2}(e^{i\phi} - e^{-i\phi})L_3^c \right), \\
 L_2^{\text{cyl}} &= e^{-i\phi/2} \left(\frac{1}{2}(e^{i\phi} + e^{-i\phi})L_2^c - \frac{i}{2}(e^{i\phi} - e^{-i\phi})L_4^c \right), \\
 L_3^{\text{cyl}} &= e^{i\phi/2} \left(\frac{i}{2}(e^{i\phi} - e^{-i\phi})L_1^c + \frac{1}{2}(e^{i\phi} + e^{-i\phi})L_3^c \right), \\
 L_4^{\text{cyl}} &= e^{-i\phi/2} \left(\frac{i}{2}(e^{i\phi} - e^{-i\phi})L_2^c + \frac{1}{2}(e^{i\phi} + e^{-i\phi})L_4^c \right), \\
 L_5^{\text{cyl}} &= e^{i\phi/2} L_5^c, \quad L_6^{\text{cyl}} = e^{-i\phi/2} L_6^c.
 \end{aligned} \tag{26}$$

According to [11, 13], only 4 large components L_1, L_2, L_5, L_6 are independent; two remaining are determined by the formulas $L_3^c = i(L_1^c - L_6^c)$, $L_4^c = -i(L_2^c + L_5^c)$. After eliminating the variables L_3^c, L_4^c , we obtain the transformation rule for 4 independent variables:

$$\begin{aligned}
 L_1^{\text{cyl}} &= \frac{1}{2}(e^{3i\phi/2} + e^{-i\phi/2})L_1^c + \frac{1}{2}(e^{3i\phi/2} - e^{-i\phi/2})(L_1^c - L_6^c), \\
 L_2^{\text{cyl}} &= \frac{1}{2}(e^{i\phi/2} + e^{-3i\phi/2})L_2^c + \frac{1}{2}(e^{i\phi/2} - e^{-3i\phi/2})(L_2^c + L_5^c), \\
 L_5^{\text{cyl}} &= e^{i\phi/2} L_5^c, \quad L_6^{\text{cyl}} = e^{-i\phi/2} L_6^c.
 \end{aligned} \tag{27}$$

Instead of L_k^c , let us introduce more convenient variables Ψ^c , for which the structure of Pauli-like equation is given with the use of the third spin projection [8–10]:

$$\begin{aligned}
 \Psi^c = SL^c &= \begin{vmatrix} \Psi_1^c \\ \Psi_2^c \\ \Psi_3^c \\ \Psi_4^c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} L_1^c \\ L_2^c \\ L_5^c \\ L_6^c \end{vmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{vmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & -2/3 & 0 & 1/3 \\ 2/3 & 0 & -1/3 & 0 \end{vmatrix}, \\
 \Psi_1^c &= L_1^c + L_6^c, \quad \Psi_2^c = L_2^c - L_5^c, \quad \Psi_3^c = 2L_1^c - L_6^c, \quad \Psi_4^c = 2L_2^c + L_5^c;
 \end{aligned} \tag{28}$$

the inverse transformation reads as

$$L_1^c = \frac{1}{3}\Psi_1^c + \frac{1}{3}\Psi_3^c, \quad L_2^c = \frac{1}{3}\Psi_2^c + \frac{1}{3}\Psi_4^c, \quad L_5^c = -\frac{2}{3}\Psi_2^c + \frac{1}{3}\Psi_4^c, \quad L_6^c = \frac{2}{3}\Psi_1^c - \frac{1}{3}\Psi_3^c. \tag{29}$$

For the variables Ψ_k^c , the formulas (27) take other form

$$\begin{aligned}
 L_1^{\text{cyl}} &= \frac{1}{3}\Psi_1^c e^{-\frac{i\phi}{2}} - \frac{1}{6}\Psi_3^c e^{-\frac{i\phi}{2}} + \frac{1}{2}\Psi_3^c e^{\frac{3i\phi}{2}}, \quad L_2^{\text{cyl}} = \frac{1}{3}\Psi_2^c e^{\frac{i\phi}{2}} - \frac{1}{6}\Psi_4^c e^{\frac{i\phi}{2}} + \frac{1}{2}\Psi_4^c e^{-\frac{3i\phi}{2}}, \\
 L_5^{\text{cyl}} &= \frac{1}{3}\Psi_4^c e^{\frac{i\phi}{2}} - \frac{2}{3}\Psi_2^c e^{\frac{i\phi}{2}}, \quad L_6^{\text{cyl}} = \frac{2}{3}\Psi_1^c e^{-\frac{i\phi}{2}} - \frac{1}{3}\Psi_3^c e^{-\frac{i\phi}{2}}.
 \end{aligned} \tag{30}$$

Taking into account (9) – where the multiplier $e^{-i\epsilon t} e^{ikz}$ is omitted – we can rewrite the relations (30) differently

$$\begin{aligned}
 L_1^{\text{cyl}}(r, \phi) &= e^{ij\phi} \left[\frac{1}{2}g_4(r) - \frac{1}{6}g_2(r) \right], \quad L_2^{\text{cyl}}(r, \phi) = e^{ij\phi} \left[\frac{1}{2}g_1(r) - \frac{1}{6}g_3(r) \right], \\
 L_5^{\text{cyl}}(r, \phi) &= \frac{1}{3}g_3(r)e^{ij\phi}, \quad L_6^{\text{cyl}}(r, \phi) = -\frac{1}{3}g_2(r)e^{ij\phi},
 \end{aligned} \tag{31}$$

the corresponding inverse transformation reads as

$$\begin{aligned} g_1(r) &= \left[2L_2^{\text{cyl}}(r, \phi) + L_5^{\text{cyl}}(r, \phi) \right] e^{-ij\phi}, & g_2(r) &= -3L_6^{\text{cyl}}(r, \phi) e^{-ij\phi}, \\ g_3(r) &= 3L_5^{\text{cyl}}(r, \phi) e^{-ij\phi}, & g_4(r) &= \left[2L_1^{\text{cyl}}(r, \phi) - L_6^{\text{cyl}}(r, \phi) \right] e^{-ij\phi}. \end{aligned} \quad (32)$$

In the cylindrical tetrad basis, the transformation to more convenient variables was performed:

$$\begin{aligned} L_1^{\text{cyl}}(r, \phi) &= \frac{1}{3} \left[\Psi_1^{\text{cyl}}(r, \phi) + \Psi_3^{\text{cyl}}(r, \phi) \right], & L_6^{\text{cyl}}(r, \phi) &= \frac{1}{3} \left[2\Psi_1^{\text{cyl}}(r, \phi) - \Psi_3^{\text{cyl}}(r, \phi) \right], \\ L_2^{\text{cyl}}(r, \phi) &= \frac{1}{3} \left[\Psi_2^{\text{cyl}}(r, \phi) + \Psi_4^{\text{cyl}}(r, \phi) \right], & L_5^{\text{cyl}}(r, \phi) &= \frac{1}{3} \left[\Psi_4^{\text{cyl}}(r, \phi) - 2\Psi_2^{\text{cyl}}(r, \phi) \right] \end{aligned} \quad (33)$$

and inverse formulas read as

$$\begin{aligned} \Psi_1^{\text{cyl}}(r, \phi) &= L_1^{\text{cyl}}(r, \phi) + L_6^{\text{cyl}}(r, \phi), & \Psi_2^{\text{cyl}}(r, \phi) &= L_2^{\text{cyl}}(r, \phi) - L_5^{\text{cyl}}(r, \phi), \\ \Psi_3^{\text{cyl}}(r, \phi) &= 2L_1^{\text{cyl}}(r, \phi) - L_6^{\text{cyl}}(r, \phi), & \Psi_4^{\text{cyl}}(r, \phi) &= 2L_2^{\text{cyl}}(r, \phi) + L_5^{\text{cyl}}(r, \phi). \end{aligned} \quad (34)$$

So we find the substitution for Ψ_j^{cyl}

$$\begin{aligned} e^{-ij\phi} \Psi_1^{\text{cyl}}(r) &= \frac{1}{2} g_4(r) - \frac{1}{6} g_2(r) - \frac{1}{3} g_2(r) = \frac{1}{2} g_4(r) - \frac{1}{2} g_2(r), \\ e^{-ij\phi} \Psi_2^{\text{cyl}}(r) &= \frac{1}{2} g_1(r) - \frac{1}{6} g_3(r) - \frac{1}{3} g_3(r) = \frac{1}{2} g_1(r) - \frac{1}{2} g_3(r), \\ e^{-ij\phi} \Psi_3^{\text{cyl}}(r) &= g_4(r) - \frac{1}{3} g_2(r) + \frac{1}{3} g_2(r) = g_4(r), \\ e^{-ij\phi} \Psi_4^{\text{cyl}}(r) &= g_1(r) - \frac{1}{3} g_3(r) + \frac{1}{3} g_3(r) = g_1(r); \end{aligned} \quad (35)$$

the inverse formulas are

$$\begin{aligned} g_1(r) &= \Psi_4^{\text{cyl}}(r) = F_4 \equiv G_1, & g_2(r) &= +\Psi_3^{\text{cyl}}(r) - 2\Psi_1^{\text{cyl}}(r) = F_3 - 2F_1 \equiv G_2, \\ g_3(r) &= \Psi_4^{\text{cyl}}(r) - 2\Psi_2^{\text{cyl}}(r) = F_4 - 2F_2 \equiv G_3, & g_4(r) &= \Psi_3^{\text{cyl}}(r) = F_3 \equiv G_4. \end{aligned} \quad (36)$$

We can transform the main equation from Cartesian tetrad basis

$$\left[2M\epsilon\Psi_c + \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial\phi} + iBr^2/2 \right)^2 - k^2 + BS_3 \right] \Psi_j^c = 0; \quad (37)$$

to the cylindrical variables Ψ_j^{cyl} (see (36)):

$$\Psi_j^c = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}e^{i(j+1/2)\phi}g_2 + \frac{1}{2}e^{i(j-3/2)\phi}g_4 \\ \frac{1}{2}e^{i(j+3/2)\phi}g_1 - \frac{1}{2}e^{i(j-1/2)\phi}g_3 \\ e^{i(j-3/2)\phi}g_4 \\ e^{i(j+3/2)\phi}g_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}e^{i(j+1/2)\phi}G_2 + \frac{1}{2}e^{i(j-3/2)\phi}G_4 \\ \frac{1}{2}e^{i(j+3/2)\phi}G_1 - \frac{1}{2}e^{i(j-1/2)\phi}G_3 \\ e^{i(j-3/2)\phi}G_4 \\ e^{i(j+3/2)\phi}G_1 \end{vmatrix} = \Psi_j^{\text{cyl}}. \quad (38)$$

In fact, the structures in (38) coincides with each other, up to the formal replacement $g_i(r) \Rightarrow G_i(r)$. Therefore, the above resulting equations must be the same:

$$\begin{aligned} -\left[\Delta - \frac{1}{r^2}(j+1/2 + A_\phi)^2 - \frac{1}{2}B \right] e^{i(1/2)\phi}G_2 + \left[\Delta - \frac{1}{r^2}(j-3/2 + A_\phi)^2 + \frac{3}{2}B \right] e^{i(-3/2)\phi}G_4 &= 0, \\ \left[\Delta - \frac{1}{r^2}(j+3/2 + A_\phi)^2 - \frac{3}{2}B \right] e^{i(+3/2)\phi}G_1 - \left[\Delta - \frac{1}{r^2}(j-1/2 + A_\phi)^2 - \frac{1}{2}B \right] e^{i(-1/2)\phi}G_3 &= 0, \end{aligned}$$

$$\left[\Delta - \frac{1}{r^2} (j - 3/2 + A_\phi)^2 + \frac{3}{2} B \right] e^{i(-3/2)\phi} G_4 = 0, \quad \left[\Delta - \frac{1}{r^2} ((j + 3/2) + A_\phi)^2 - \frac{3}{2} B \right] e^{i(+3/2)\phi} G_1 = 0. \quad (39)$$

Allowing for the 3-rd and 4-th equations, we can derive 4 unlinked equations:

$$\begin{aligned} \left[\Delta - \frac{1}{r^2} (j + 3/2 + A_\phi)^2 - \frac{3}{2} B \right] G_1 &= 0, & \left[\Delta - \frac{1}{r^2} (j + 1/2 + A_\phi)^2 - \frac{1}{2} B \right] G_2 &= 0, \\ \left[\Delta - \frac{1}{r^2} (j + 3/2 + A_\phi)^2 - \frac{3}{2} B \right] G_3 &= 0, & \left[\Delta - \frac{1}{r^2} (j - 3/2 + A_\phi)^2 + \frac{3}{2} B \right] G_4 &= 0. \end{aligned} \quad (40)$$

These equations refer to cylindrical tetrad basis (38) according to the rules:

$$\begin{aligned} G_1(r) &= \Psi_4^{\text{cyl}}(r), \quad G_2(r) = [\Psi_3^{\text{cyl}}(r) - 2\Psi_1^{\text{cyl}}(r)], \\ G_3(r) &= [\Psi_4^{\text{cyl}}(r) - 2\Psi_2^{\text{cyl}}(r)], \quad G_4(r) = \Psi_3^{\text{cyl}}(r), \\ \Psi_j^{\text{cyl}} &= \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} e^{i(j+1/2)\phi} [\Psi_3^{\text{cyl}} - 2\Psi_1^{\text{cyl}}] + \frac{1}{2} e^{i(j-3/2)\phi} \Psi_3^{\text{cyl}} \\ \frac{1}{2} e^{i(j+3/2)\phi} \Psi_4^{\text{cyl}} - \frac{1}{2} e^{i(j-1/2)\phi} [\Psi_4^{\text{cyl}} - 2\Psi_2^{\text{cyl}}] \\ e^{i(j-3/2)\phi} \Psi_3^{\text{cyl}} \\ e^{i(j+3/2)\phi} \Psi_4^{\text{cyl}} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (41)$$

Transition to cyclic basis (in cylindrical tetrad) is reached as follows

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_1^{\text{cyl}} &= e^{i(j+3/2)\phi} \Psi_4^{\text{cyl}}, \quad \bar{\Psi}_2^{\text{cyl}} = e^{i(j+1/2)\phi} [\Psi_3^{\text{cyl}} - 2\Psi_1^{\text{cyl}}], \\ \bar{\Psi}_3^{\text{cyl}} &= e^{i(j-1/2)\phi} [\Psi_4^{\text{cyl}} - 2\Psi_2^{\text{cyl}}], \quad \bar{\Psi}_4^{\text{cyl}} = e^{i(j-3/2)\phi} \Psi_3^{\text{cyl}}. \end{aligned} \quad (42)$$

Operator $\hat{J}_3^\epsilon$ and the gauge transformation to cylindrical tetrad. Starting with the formulas

$$\hat{J}^c = -i\partial_\phi + S_3, \quad S_3 = \begin{vmatrix} -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & +1/2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & +3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3/2 \end{vmatrix}, \quad \Psi = \begin{vmatrix} \Psi_1^c \\ \Psi_2^c \\ \Psi_3^c \\ \Psi_4^c \end{vmatrix} \quad (43)$$

and taking into account relationships (30)

$$\begin{aligned} L_1^{\text{cyl}}(r, \phi) &= \frac{1}{3} \Psi_1^c(r, \phi) e^{\frac{i\phi}{2}} - \frac{1}{6} \Psi_3^c(r, \phi) e^{-\frac{i\phi}{2}} + \frac{1}{2} \Psi_3^c(r, \phi) e^{\frac{3i\phi}{2}}, \\ L_2^{\text{cyl}}(r, \phi) &= \frac{1}{3} \Psi_2^c(r, \phi) e^{\frac{i\phi}{2}} - \frac{1}{6} \Psi_4^c(r, \phi) e^{\frac{i\phi}{2}} + \frac{1}{2} \Psi_4^c(r, \phi) e^{-\frac{3i\phi}{2}}, \\ L_5^{\text{cyl}}(r, \phi) &= \frac{1}{3} \Psi_4^c(r, \phi) e^{\frac{i\phi}{2}} - \frac{2}{3} \Psi_2^c(r, \phi) e^{\frac{i\phi}{2}}, \\ L_6^{\text{cyl}}(r, \phi) &= \frac{2}{3} \Psi_1^c(r, \phi) e^{-\frac{i\phi}{2}} - \frac{1}{3} \Psi_3^c(r, \phi) e^{-\frac{i\phi}{2}}, \end{aligned} \quad (44)$$

we should examine the following relations

$$\begin{aligned} (-i\partial_\phi + S_3) \Psi^c(r, \phi) &= j \Psi^c(r, \phi), \quad L^{\text{cyl}}(r, \phi) = S(\phi) \Psi^c(r, \phi), \\ [S(-i\partial_\phi + S_3) S^{-1}] L^{\text{cyl}}(r, \phi) &= j L^{\text{cyl}}(r, \phi); \end{aligned}$$

whence it follows $S(\phi)(-i\partial_\phi + S_3)S^{-1}(\phi) = \hat{J}_3^{\text{cyl}}$, so we get the transformation rule

$$\hat{J}_3^{\text{cyl}} = -i\partial_\phi - iS\left(\frac{\partial}{\partial\phi}S^{-1}\right) + SS_3S^{-1}, \quad (45)$$

where the matrix $S(\phi)$ is determined by (44), so that

$$S = \begin{vmatrix} \frac{1}{3}e^{-\frac{i\phi}{2}} & 0 & \left(-\frac{1}{6}e^{-\frac{i\phi}{2}} + \frac{1}{2}e^{\frac{3i\phi}{2}}\right) & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}e^{\frac{i\phi}{2}} & 0 & \left(-\frac{1}{6}e^{\frac{i\phi}{2}} + \frac{1}{2}e^{-\frac{3i\phi}{2}}\right) \\ 0 & -\frac{2}{3}e^{\frac{i\phi}{2}} & 0 & \frac{1}{3}e^{\frac{i\phi}{2}}\Psi_4^c \\ \frac{2}{3}e^{-\frac{i\phi}{2}} & 0 & -\frac{1}{3}e^{-\frac{i\phi}{2}} & 0 \end{vmatrix}.$$

After performing the needed calculation, from (45) we get

$$\hat{J}_3^{\text{cyl}} = -i\partial_\phi + \begin{vmatrix} -3/2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3/2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -3/2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{vmatrix} = -i\partial_\phi.$$

Therefore, we arrive at the equation

$$-i\partial_\phi L_j^{\text{cyl}}(r, \phi) = j L_j^{\text{cyl}}(r, \phi) \Rightarrow -i\partial_\phi \Psi_j^{\text{cyl}}(r, \phi) = j \Psi_j^{\text{cyl}}(r, \phi). \quad (46)$$

Without additional calculation one can find the tetrad gauge transformation for orbital momentum $\hat{l}_3^c = -i\partial_\phi$ in the non-diagonal presentation:

$$\Psi, \quad \hat{l}_3^{\text{cyl}} = -i\partial_\phi - iS\left(\frac{\partial}{\partial\phi}S^{-1}\right) = -i\partial_\phi + \begin{vmatrix} -3/2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{vmatrix}; \quad (47)$$

correspondingly, in the cyclic (diagonal) basis $\bar{\Psi}$ we get

$$\bar{\Psi}, \quad \hat{l}_3^{\text{cyl}} = -i\partial_\phi + \begin{vmatrix} -3/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +3/2 \end{vmatrix}. \quad (48)$$

Conclusion. In the present paper, we have examined the non-relativistic problem of a spin 3/2 particle in the external magnetic field, applying two tetrads: Cartesian and cylindrical, following the concomitant local spin-vector gauge transformation $B(\phi) \otimes O(\phi)$. We have detailed the tetrad gauge transformations for diagonalized operators of the total angular momentum and the orbital momentum $\hat{J}_3^{\text{cart}}, \hat{l}_3^{\text{cart}} \Rightarrow \hat{J}_3^{\text{cyl}}, \hat{l}_3^{\text{cyl}}$. Equivalent substitutions for the wave functions in Cartesian and cylindrical tetrads are found, for diagonal and non-diagonal bases. The second order equations arising in the non-relativistic problem are solved in terms of the confluent hypergeometric functions, and the corresponding energy spectra are found.

References

1. Fierz M. Über die relativistische theorie Kraftfreier Teilchen mit beliebigem Spin. *Helvetica Physica Acta*, 1939, vol. 12, pp. 3–37.
2. Pauli W. Über relativistische Feldgleichungen von Teilchen mit beliebigem Spin im elektromagnetischen Feld. *Helvetica Physica Acta*, 1939, vol. 12, pp. 297–300.
3. Rarita W., Schwinger J. S. On a theory of particles with half-integral spin. *Physical Review*, 1941, vol. 60, no. 1, pp. 61–64. <https://doi.org/10.1103/physrev.60.61>
4. Feinberg V. Ya. On the theory of interaction of particles with higher spins with electromagnetic and meson fields. *Proceedings of the Lebedev Physics Institute of the Academy of Sciences of the USSR*, 1955, vol. 6, pp. 269–332 (in Russian).
5. Johnson K., Sudarshan E. C. G. Inconsistency of the local field theory of charged spin 3/2 particles. *Annals of Physics*, 1961, vol. 13, no. 1, pp. 121–145. [https://doi.org/10.1016/0003-4916\(61\)90030-6](https://doi.org/10.1016/0003-4916(61)90030-6)
6. Shelepin L. A. Covariant theory of relativistic wave equations. *Nuclear Physics*, 1962, vol. 33, pp. 580–593. [https://doi.org/10.1016/0029-5582\(62\)90550-3](https://doi.org/10.1016/0029-5582(62)90550-3)
7. Mathews P. M., Govindarajan T. R., Seetharaman M., Prabhakaran J. Relativistic wave equations coupled to external fields: an algebraic study of the problem of constraints. *Journal of Mathematical Physics*, 1980, vol. 21, no. 6, pp. 1495–1505. <https://doi.org/10.1063/1.524588>
8. Hagen C. R., Singh L. P. S. Search for consistent interactions of the Rarita-Schwinger field. *Physical Review D*, 1982, vol. 26, pp. 393–398. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.26.393>
9. Loide R. K. On conformally covariant spin-3/2 and spin-2 equations. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1986, vol. 19, no. 5, pp. 827–829. <https://doi.org/10.1088/0305-4470/19/5/037>
10. Masafumi Fukuma, Hikaru Kawai, Katsuta Sakai, Junji Yamamoto. Massive higher spin fields in curved space-time and necessity of non-minimal couplings. *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, 2016, vol. 2016, no. 7, art. ID 073B02. <https://doi.org/10.1093/ptep/ptw080>
11. Ivashkevich A. V., Red'kov V. M., Ishkhanyan A. M. Non-relativistic approximation in the Pauli – Fierz theory for a spin 3/2 particle in the presence of external fields. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2024, vol. 68, no. 1, pp. 18–27. <https://doi.org/10.29235/1561-8323-2024-68-1-18-27>
12. Ivashkevich A. V., Red'kov V. M. Eigenvalues of the generalized helicity operator for spin 3/2 particle in presence of the magnetic field and the projective operators method. *Vestsi Natsyanyal'nei akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2025, vol. 61, no. 4, pp. 307–319. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2025-61-4-307-319>
13. Ivashkevich A., Red'kov V. M., Margaryan M. K., Ishkhanyan A. M. Non-relativistic Approximation for a Spin 3/2 Particle, in Presence of Electromagnetic and Gravitational Fields. *Journal of Contemporary Physics. Armenian Academy of Sciences. Publisher: Pleiades Publishing, Ltd.*, 2025, vol. 60, pp. 243–250. <https://doi.org/10.1134/S1068337225700653>

Information about the authors

Anastasia M. Kuzmich – Postgraduate Student, Junior Researcher of the Center of Fundamental Interactions and Astrophysics, B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (68-2, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: miss.nastya.01@list.ru

Alina V. Ivashkevich – Researcher of the Center of Fundamental Interactions and Astrophysics, B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (68-2, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: ivashkevich.alina@yandex.by.

Viktor M. Red'kov – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Chief Researcher of the Center of Fundamental Interactions and Astrophysics, B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (68-2, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: v.redkov@ifanbel.bas-net.by

Информация об авторах

Кузьмич Анастасия Михайловна – аспирант, младший научный сотрудник Центра фундаментальных взаимодействий и астрофизики, Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси (пр. Независимости, 68-2, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: miss.nastya.01@list.ru

Ивашкевич Алина Валентиновна – научный сотрудник Центра фундаментальных взаимодействий и астрофизики, Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси (пр. Независимости, 68-2, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: ivashkevich.alina@yandex.by

Редьков Виктор Михайлович – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Центра фундаментальных взаимодействий и астрофизики, Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси (пр. Независимости, 68-2, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: v.redkov@ifanbel.bas-net.by

ISSN 1561-2430 (Print)

ISSN 2524-2415 (Online)

UDC 535.317.612

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2026-62-1-59-72>

Received 18.08.2025

Поступила в редакцию 18.08.2025

Piotr K. Piatrou*B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus***STRUCTURAL APPROACH TO THE ADAPTIVE OPTICS TOMOGRAPHY PROBLEM:
THE VOLUME TURBULENCE RECONSTRUCTION**

Abstract. Adaptive Optics as a relatively new trend in the modern optical systems allows correcting the perturbations related to light propagation in the turbulent atmosphere obtaining the diffraction-limited images. Because it requires computer processing of large information flow in real time, a key problem lays in finding the mathematical algorithms with reduced computational complexity. The paper proposes the approach, which takes into account structural properties of both atmospheric turbulence and the most active optical system. The possibility was demonstrated of one-dimensional accounting of sparse and convolution-like (Toeplitz) structure of adaptive correction in one algorithm. The analysis is made of Multi-Conjugate Adaptive Optics and the comparison was conducted of the nature complexity of the algorithm induced by this structure with the complexity of sparse algorithm. It was demonstrated how the structural approach can be applied to the quite laborious tomographic turbulence volume reconstruction phase with obtaining due to this a significant computational speed-up.

Keywords: Multi-Conjugate Adaptive Optics, tomographic phase reconstruction, structured matrices, real-time signal processing

For citation. Piatrou P. K. Structural approach to the Adaptive Optics tomography problem: the volume turbulence reconstruction. *Vesti Natsyynal'nai akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2026, vol. 62, no. 1, pp. 59–72. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2026-62-1-59-72>

П. К. Петров*Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь***СТРУКТУРНЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ТОМОГРАФИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ АДАПТИВНОЙ ОПТИКИ:
РЕКОНСТРУКЦИЯ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В ОБЪЕМЕ**

Аннотация. Адаптивная оптика как относительно новое направление развития современных оптических систем позволяет корректировать искажения, связанные с распространением света в турбулентной атмосфере и получать изображения дифракционного качества. Поскольку это требует компьютерной обработки больших потоков информации в реальном времени, ключевой проблемой является снижение вычислительной сложности соответствующих математических алгоритмов. В статье предложен подход, учитывающий структурные свойства как атмосферной турбулентности, так и самой активной оптической системы. Продемонстрирована возможность одновременного учета разреженной и сверточной (теплицевой) структуры адаптивной коррекции в одном алгоритме. Дан анализ многосопряженной адаптивной оптической системы и сравнение естественной сложности алгоритма, индуцированного его структурой, со сложностью разреженного алгоритма. Показано применение структурного подхода к достаточно трудоемкому алгоритму томографической объемной реконструкции турбулентной фазы с получением благодаря этому существенного ускорения вычислений.

Ключевые слова: многосопряженная адаптивная оптика, томографическое фазовое восстановление, структурированные матрицы, обработка сигналов в реальном времени

Для цитирования. Петров, П. К. Структурный подход к решению томографической задачи адаптивной оптики: реконструкция турбулентности в объеме / П. К. Петров // Весті Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. – 2026. – Т. 62, № 1. – С. 59–72. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2026-62-1-59-72>

Introduction. Adaptive Optics (AO) being quite a powerful technology allows overcoming the *dynamic perturbations* caused by the *atmospheric turbulence* and obtaining diffraction quality images suffers from a serious problem often called in the signal processing literature the *curse of dimensionality* [1]: *computational complexity grows too fast with the controlled system scale*. The *system scale* is usually understood as a number of the system's *degrees of freedom* (DoF), i. e. the free parameters under optimization. For Adaptive Optics systems, which represent a classical example of the automatic control

systems with *Multiple Inputs and Multiple Outputs* (MIMO), such a set of the DoF is the number of observation and correction channels, which is normally proportional to the entrance aperture area, in other words, to the square of the aperture diameter. The problem is also complicated by the fact that, for tracking the changes in atmosphere on the way of light to the optical system with a characteristic time on the order of 0.01 second, computer signal processing in *hard real time* is required, that is, not only fast but also with stable *timing*. Owing to this, a key problem in the adaptive optics system design is to find mathematical algorithms with reduced computational complexity. Because of quite good linearity the control of MIMO-system can be reduced to a sequence of multiplications of the sensor measurements vector by some *control matrix*. Such an approach, however, looks too straightforward because it completely ignores the *internal structure* of both atmospheric turbulence and the active optical system itself.

On the other hand, a few structural properties of AO systems leading to complexity reduction are already known. In a limiting case, taking AO system structural properties into full consideration will enable to see the *natural complexity* of the problem, which is expected to be much less than the complexity of a straightforward solution. The mathematical problem of finding the natural complexity has not been completely solved at the moment, though even partial solutions taking into account the internal structure already lead to significant complexity reduction. We can mention the following most important findings related to the AO system structure.

- That turbulence active compensation can be efficiently performed by *linear* control follows from the fact that the turbulence optical effects are described to a good approximation [2] by the *stationary Gaussian random process*.

- The most significant complexity reduction from $\mathcal{O}(D^4)$ to $\mathcal{O}(D^2)$, where D is the telescope aperture diameter, was achieved when it had been proven [3] that the control matrix is approximately reducible to a *sparse + low rank* form, but it was overlooked that the control matrix is not only sparse but also *Toeplitz*.

- Convolutional structure of the *turbulence-to-image interaction operator* following from the atmospheric turbulence statistical *shift invariance* was demonstrated in [4, 5], which allows to transfer the AO system analysis into Fourier Domain and use the Fast Fourier Transform resulting in computational complexity $\mathcal{O}(D^2 \log D^2)$.

- The natural discretization of the convolutional turbulence-to-image interaction operator by a finite resolution *Wave Front Sensor* leads to the *Toeplitz* structure of the control matrix [6], which not only results in complexity $\mathcal{O}(D^2 \log D^2)$ but also allows presenting the control matrix in an extremely compact form.

As the findings mentioned above and taken by one at a time already lead to notable complexity reduction, it appears to be overlooked that the AO system structural properties can be used all together inside one algorithm resulting in some minimal achievable complexity what we will call *natural* within the frame of this work. In particular, it will be shown that taking into account both sparse and Toeplitz structure of the control matrix in one algorithm allows to achieve unexpectedly significant computational speed-up, which is demonstrated on the most important and laborious case of an AO system, the *Multi-Conjugate Adaptive Optics* (MCAO). We however warn that the research on finding the *natural complexity* is a work in progress and the results reported here may be improved in the future.

1. MCAO overview. A classical AO system aims to dynamically correct the electromagnetic wave *distortions* caused by atmospheric turbulence on the light path through the Earth atmosphere to an astronomical telescope. It is done by measuring the distorted wavefront phase in the telescope pupil by some or other type of a *Wave Front Sensor* (WFS), processing the WFS data by a *Real Time Computer* (RTC) to generate commands for the phase-correcting *Deformable Mirror* (DM) in order to *flatten* the wavefront in the telescope pupil. The more advanced concept of Multi-Conjugate Adaptive Optics was suggested in [7] to address the main limitation of the classical AO: very narrow correctable *Field of View* (FoV) in case of correction by a single DM located in (conjugated to) the pupil. It can be shown [8] that correction by multiple DMs distributed in several conjugated positions within the atmospheric turbulence volume above the telescope extends the corrected FoV from several arcseconds to a few arcminutes at the price of lower average image quality. The MCAO system optical design together with its brief principle of operation explanation are presented in Fig. 1.

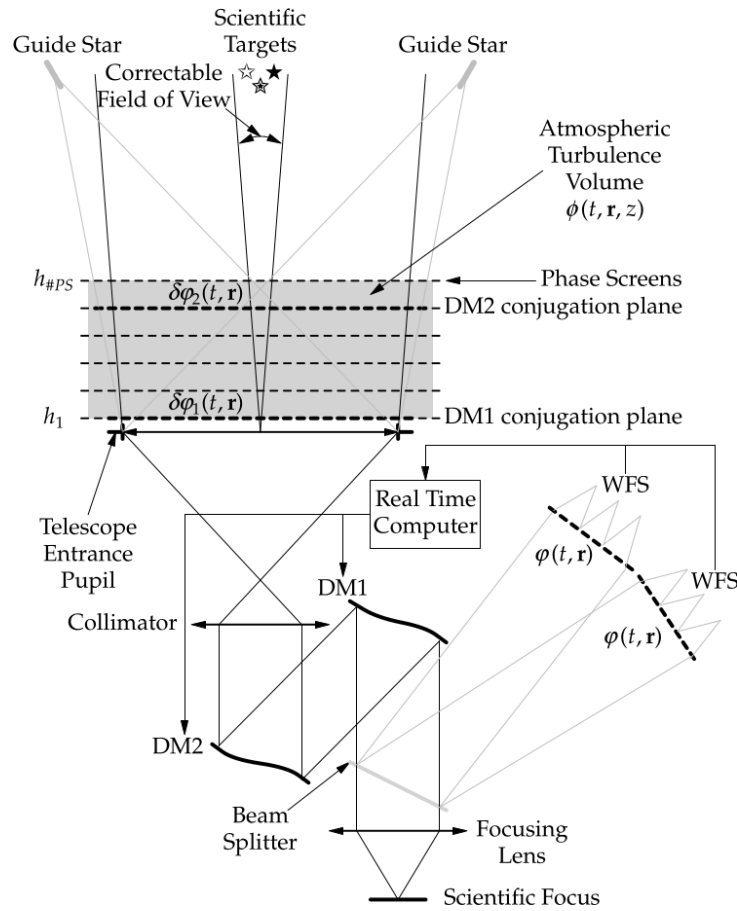


Fig. 1. Optical scheme of a Multi-Conjugate AO system with (at least) two *Deformable Mirrors*. Dynamic 3D *phase distortion* $\phi(t, \mathbf{r}, z)$ is probed by passing through the *turbulence volume* the light from multiple light sources, the *Guide Stars* (GS), natural or artificial. The *Wave Front Sensors* measure a set of the 2D *wavefronts* $\phi_g(t, \mathbf{r})|_{g=1}^{\#GS}$ accumulated along the paths from multiple *Guide Stars* to the telescope pupil, which provides information allowing to *tomographically reconstruct* $\phi(t, \mathbf{r}, z)$ in the volume of turbulent air above the telescope. Multiple *Deformable Mirrors* optically conjugated over several altitudes within the turbulence volume generate the *phase corrections* $\delta\phi_d(t, \mathbf{r})|_{d=1}^{\#DM}$ in an attempt to compensate the phase distortion not in a plane but in the entire volume, which helps to achieve the turbulence compensation over a broader FoV containing the *Scientific Targets* of interest. Phase distortion reconstruction from the WFS measurements and generation of DM correction commands are performed by the *Real Time Computer*. Light from the *Scientific Targets* is drawn in black, from *Guide Stars* in grey. Vector $\mathbf{r}$ stands for x, y -coordinates in either phase screen, DM or WFS plane

The most difficult part of the MCAO method is an extremely high computational complexity of the underlying algorithms that need to be run by the RTC. In what follows, mathematical description of the MCAO *tomographic problem* is given.

Assume that an object imaged by an optical system is a point source located at infinity. Then, ideally, the electromagnetic wave or *wavefront* reaching the telescope *entrance pupil* without any distortion induced by some obstacles on the *propagation path*, such as atmospheric turbulence, should be a *plane wave* $E(\mathbf{r}) = A \exp[ik(\mathbf{t}^T \mathbf{r} + p)]$, where A is the constant *amplitude*, $\mathbf{t} = (t_x, t_y)$ is the wavefront direction vector or *tilt*, p is the constant phase called *piston*. Note that neither tilt, nor piston induces any image corruption [2]. The plane wave results in the ideal *diffraction-limited* point source image in the telescope *focal plane*. In the case of propagation path distortion, the wavefront entering the telescope aperture is $E(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r}) \exp[ik\phi(\mathbf{r})]$, i. e. $A(\mathbf{r}) \neq \text{const.}$ (*scintillation*), $\phi(\mathbf{r}) \neq \mathbf{t}^T \mathbf{r} + p$ (*aberration*). In the case of weak turbulence the scintillation effects are negligible [9], so the main goal of the *adaptive correction* is to *flatten* the wavefront phase, i. e. to minimize $\|\phi(\mathbf{r})\|$, where $\|\cdot\|$ is some *function norm* defined on the telescope pupil. In the context of the MCAO correction this minimization problem can be written as (we drop the time dependence for clarity)

$$\widehat{\mathcal{R}} = \arg \min_{\mathcal{R}} \left\langle \|H_{\phi} \phi(\mathbf{r}, z) - H_a \mathcal{R} \mathbf{s}\|^2 \right\rangle, \quad (1)$$

where $\mathbf{s} = [\mathbf{s}_1 \dots \mathbf{s}_{\#GS}]^T$ is the concatenated vector of the WFS measurements from all Guide Stars, $\mathcal{H}_{\phi}$ the *Propagation Operator* mapping the 3D phase distortion $\phi(\mathbf{r}, z)$ to the 2D wavefronts $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{r}) = [\phi_1(\mathbf{r}) \dots \phi_{\#ST}(\mathbf{r})]^T$ accumulated in the telescope pupil, H_a the propagation operator mapping the DM phase corrections $\delta\boldsymbol{\phi}(\mathbf{r}) = [\delta\phi_1(\mathbf{r}) \dots \delta\phi_{\#DM}(\mathbf{r})]^T$ to the pupil, $\mathcal{R}$ is the *Reconstruction Operator* $\mathcal{R}\mathbf{s} = \delta\boldsymbol{\phi}(\mathbf{r})$. The $\langle \cdot \rangle$ brackets stand for averaging over the turbulence phase statistics as turbulence is a *random process*.

In the *linear approximation*, the minimization problem (1) can be presented in a matrix form. Following [10] the Tomographic Problem can be discretized by approximating all functions involved by certain *basis function sets*. In particular, the turbulence-corrupted phase in the pupil can have a finite-dimensional approximation

$$\varphi(r) \approx \sum_{i=1}^N \varphi_i \phi_i(r) = \boldsymbol{\Phi}^T(\mathbf{r}) \boldsymbol{\varphi}, \quad (2)$$

where $\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}) = \phi_i(\mathbf{r})|_{i=1}^{N \rightarrow \infty}$ is a basis, not necessarily orthogonal, which approximates efficiently enough the turbulence phase in the sense of small *approximation error*

$$\varepsilon^2 = \|\varphi(r) - \boldsymbol{\Phi}^T(\mathbf{r}) \boldsymbol{\varphi}\|^2, \quad (3)$$

where the norm $\|f\|^2 = (f, f)$ is defined via a *vector function space scalar product* (a, b) , for instance,

$$(a, b) = \int_p a(\mathbf{r}) b(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (4)$$

for L^2 space. Note that the very possibility of finite-dimensional approximation (2) follows from the fact that the turbulence phase $\phi(\mathbf{r}, z)$ belongs to a *compact subset* of functions in a certain function space, which by itself is an important *structural property*. The approximation weights $\boldsymbol{\varphi} = \varphi_i|_{i=1}^N$ are found as

$$\boldsymbol{\varphi} = (\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}), \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r})^T)^{-1} (\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}), \varphi(\mathbf{r})). \quad (5)$$

This way a continuous function $\varphi(r)$ can be replaced with a vector of its *basis approximation weights* $\boldsymbol{\varphi}$ from (2), (5). Analogously, the 3D *volume phase function* $\phi(\mathbf{r}, z)$ can be transformed into a vector form in two steps:

1) $\phi(\mathbf{r}, z)$ is replaced with a set of 2D *turbulence layers* (see Fig. 1)

$$\phi(\mathbf{r}, z) \approx \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}) = [\phi(\mathbf{r}, h_1) \dots \phi(\mathbf{r}, h_{\#PS})]^T, \quad \phi(\mathbf{r}, h_p) = \int_{h_{p-1}}^{h_p} \phi(\mathbf{r}, z) dz; \quad (6)$$

2) given a basis on each layer, $\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r})$ is replaced by its approximation weights $\boldsymbol{\Phi} = [\boldsymbol{\phi}_1 \dots \boldsymbol{\phi}_{\#PS}]^T$ such as $\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}) \approx [\boldsymbol{\phi}_1^T(\mathbf{r}) \boldsymbol{\phi}_1 \dots \boldsymbol{\phi}_{\#PS}^T(\mathbf{r}) \boldsymbol{\phi}_{\#PS}]^T$.

The DM phase correction in linear approximation is expressed the same way with a difference that the arbitrary basis functions for phase screens are replaced with a finite set of *Actuator Influence Functions* $\mathbf{f}(\mathbf{r}) = f_i(\mathbf{r})|_{i=1}^{\#A}$ for DMs that are *fixed by design*. Thus, the DM phase correction is

$$\delta\boldsymbol{\phi}(\mathbf{r}) = \mathbf{f}^T(\mathbf{r}) \mathbf{a}, \quad (7)$$

where $\mathbf{a} = a_i|_{i=1}^{\#A}$ is a vector of *actuator commands*. Assuming that $\mathbf{a} = [\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{\#DM}]^T$ and $\mathbf{f}(\mathbf{r}) = [\mathbf{f}_1(\mathbf{r}) \dots \mathbf{f}_{\#DM}(\mathbf{r})]^T$ are concatenations of commands and influence functions from all DMs, the Reconstruction Operator $\mathcal{R}$ from (1) can be written as

$$\mathcal{R}\mathbf{s} = \delta\boldsymbol{\phi}(\mathbf{r}) = \mathbf{f}^T(\mathbf{r}) \mathbf{a} = \mathbf{f}^T(\mathbf{r}) \mathbb{R} \mathbf{s}, \quad (8)$$

where $\mathbb{R}$ is just a matrix. It is this MCAO *control matrix* mentioned above, which will be called the *Recostructor*, that is to be found from (1).

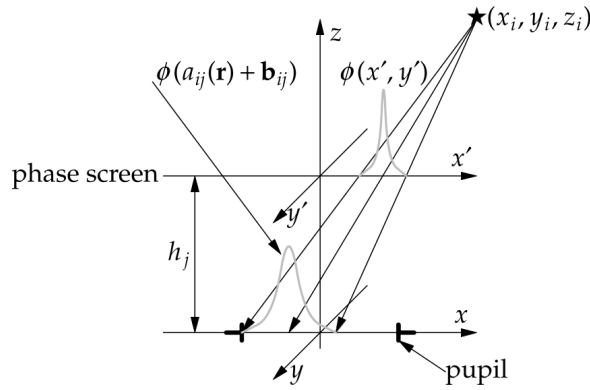


Fig. 2. Geometrical optics propagation from a phase screen (or DM) to the telescope pupil. Function $\phi_j(x', y')$ defined in a coordinate frame (x', y', z') on the j th phase screen is central-projected along the rays emitted from the i th point source with coordinates (x_i, y_i, z_i) to the telescope pupil to become $\phi_j(a_{ij}(\mathbf{r}) + \mathbf{b}_{ij})$ in the pupil coordinate frame $(\mathbf{r}, z)$

The Propagation Operators $\mathcal{H}_{\phi, a}$ from (1) can also be easily presented in a matrix form with a certain reservation: with an assumption of *weak* atmospheric turbulence one can accept the *Rytov Approximation* [9] for the light propagation through the turbulence layers to the telescope pupil, which states that the results of light diffraction by each phase screen $\phi_p(\mathbf{r})|_{p=1}^{\#PS}$ can be *summed independently* on the pupil. Thus, the *Propagation Matrices* $\mathbb{H}_{\phi, a}$ equivalent to $H_{\phi, a}$ have the block structure

$$\mathbb{H}_{\phi} = \begin{bmatrix} w_1 & \mathbb{H}_{11} & \dots & w_1 & \mathbb{H}_{1\#PS} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \\ w_{\#ST} & \mathbb{H}_{\#ST1} & \dots & w_{\#ST} & \mathbb{H}_{\#ST\#PS} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{H}_a = \begin{bmatrix} w_1 & \mathbb{H}_{11} & \dots & w_1 & \mathbb{H}_{1\#DM} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \\ w_{\#ST} & \mathbb{H}_{\#ST1} & \dots & w_{\#ST} & \mathbb{H}_{\#ST\#DM} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

where $w_s|_{s=1}^{\#ST}$ are the weighting coefficients for each Scientific Target, each block $\mathbb{H}_{sp}$ in the *geometrical optics approximation* (see Fig. 2) can be computed using (5) as

$$\mathbb{H}_{sp} = (\mathbf{h}(\mathbf{r}), \mathbf{h}^T(\mathbf{r}))^{-1} (\mathbf{h}(\mathbf{r}), \phi_p^T(a_{sp}\mathbf{r} + \mathbf{b}_{sp})), \quad a_{sp} = 1 - h_p / z_s, \quad \mathbf{b}_{sp} = h_p(x_s, y_s) / z_s, \quad (10)$$

where $\phi_j(x', y')$ is a basis defined on j th screen, $\mathbf{h}(\mathbf{r})$ is a basis defined on the telescope pupil. Product $\mathbb{H}_{sp}\phi_p$ maps the p th screen's phase function $\phi_p(x', y')$ approximation weights $\phi_p(x', y') \approx \phi_p^T(x', y')\phi_p$ to approximation weights of the same function projected on the pupil: $\phi_p(a_{sp}\mathbf{r} + \mathbf{b}_{sp}) \approx \mathbf{h}(\mathbf{r})^T(\mathbb{H}_{sp}\phi_p)$. For $\mathbb{H}_a$ basis $\phi_p(\cdot)$ is replaced in (10) with the Influence Function set $\mathbf{f}_p(\cdot)$ for p th DM, and products $\mathbb{H}_{sp}\phi_p$ are replaced with $\mathbb{H}_{sp}\mathbf{a}_p$, where $\mathbf{a}_p$ is the p th DM actuator command vector. Substitution (8)–(10) into (1) gives

$$\sigma^2 = \left\langle \left\| H_{\phi}\phi(\mathbf{r}, z) - H_a\mathbf{R}\mathbf{s} \right\|^2 \right\rangle \approx \left\langle (\mathbb{H}_{\phi}\phi - \mathbb{H}_a\mathbf{R}\mathbf{s})^T \mathbb{W} (\mathbb{H}_{\phi}\phi - \mathbb{H}_a\mathbf{R}\mathbf{s}) \right\rangle, \quad (11)$$

where $\mathbb{W}$ is a block-diagonal matrix with blocks $w_s^2(\mathbf{h}(\mathbf{r}), \mathbf{h}^T(\mathbf{r}))|_{s=1}^{\#ST}$. Since (11) presents a *quadratic function*, finding its minimum w.r.t. elements of $\mathbb{R}$ is done by setting its first derivative to zero as

$$\frac{\partial}{\partial \mathbb{R}} \sigma^2 = 0, \quad (12)$$

which, after applying the standard matrix derivative relations [11], gives for the optimal *Reconstructor Matrix*

$$\hat{\mathbb{R}} = (\mathbb{H}_a^T \mathbb{W} \mathbb{H}_a + \mathbb{N} \mathbb{N}^T + \alpha \mathbb{I})^{-1} \mathbb{H}_a^T \mathbb{W} \mathbb{H}_{\phi} \cdot \left\langle \phi \mathbf{s}^T \right\rangle \left\langle \mathbf{s} \mathbf{s}^T \right\rangle^{-1 \Delta} = \mathbb{F} \cdot \mathbb{E}, \quad (13)$$

where $\mathbb{N} \mathbb{N}^T + \alpha \mathbb{I}$ is a *Regularization Term* added because, in general, the MCAO Tomography Problem is *ill-posed* [12]. Matrix $\mathbb{N}$ is usually *low-rank*. Eq. (13) formally solves the MCAO Tomographic

Problem. The solution gets separated into two independent parts: the *Phase Estimation* presented by matrix $\mathbb{F}$ and *DM Fitting* presented by matrix $\mathbb{F}$. Such a *Separation Principle* is yet another structural property. In what follows we concentrate on the efficient solution of the Estimation problem letting the Fitting problem be a subject for the future work. At this point it should be noted that the Fitting problem, being nearly the same laborious mathematically, is less demanding *computationally*. For the same reason we, for the time being, put aside the problem of *temporal control* involving *optimal time filtering* and *prediction*.

Computing the *Estimation Matrix* $\mathbb{E}$ requires further detalization. In particular, a *linearized model* for the WFS needs to be introduced:

$$\mathbf{s} \approx \mathbb{G}\boldsymbol{\phi} + \mathbf{n}, \quad (14)$$

where $\mathbb{G}$ is a *Sensor Matrix* mapping the 3D turbulence phase to the WFS measurements, $\mathbf{n}$ is the *Measurement Noise*. Substitution of (14) into (13) gives

$$\mathbb{E} = \langle \boldsymbol{\phi}\boldsymbol{\phi}^T \rangle \mathbb{G}^T \left(\mathbb{G} \langle \boldsymbol{\phi}\boldsymbol{\phi}^T \rangle \mathbb{G}^T + \langle \mathbf{n}\mathbf{n}^T \rangle + \alpha \mathbb{I} \right)^{-1} \quad (15)$$

where we used the fact that the turbulence and measurement noise random processes are statistically independent and thus $\langle \boldsymbol{\phi}\mathbf{n}^T \rangle = \mathbf{0}$ and added the formal *regularization term*. The WFS *noise covariance matrix* $\mathbf{n}\mathbf{n}^T$ is known *by design*.

Computation of the *turbulence covariance matrix* requires a special attention to the *internal structure* of the turbulence phase statistics, as the turbulence theory is well established [2, 13, 14]. For computation of $\langle \boldsymbol{\phi}\boldsymbol{\phi}^T \rangle$ the following statistical properties are useful.

– The turbulence-induced phase perturbation is approximately a Gaussian random process with zero mean and covariance function

$$C\phi(\rho) = 0.033 C_n^2 (2\pi)^2 \frac{(L_0 / 2\pi)^{5/6} K_{5/6}(2\pi\rho / L_0) \rho^{5/6}}{2^{5/6} \Gamma(11/6)}, \quad \rho = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|, \quad (16)$$

where $C_n^2[m^{-2/3}]$ is the turbulence-induced refractive index fluctuation strength, $L_0[m]$ the turbulence outer scale varying from 5 to 100 m, $K_{5/6}(\cdot)$ the modified Bessel function of second kind and order 5/6, $\Gamma(\cdot)$ is a Gamma-function.

– The turbulence strength profiles $C_n^2(h)$ are measureable with specialized instruments and well documented [2, 14].

– The turbulence correlation length is on the order of the outer scale L_0 , which implies that the turbulence layers separated by a few hundred meters are statistically independent.

The Sensor Matrix has a block structure similar to that of the Propagation Matrices $\mathbb{H}$:

$$\mathbb{G} = \begin{bmatrix} \mathbb{G}_{11} & \dots & \mathbb{G}_{1\#PS} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{G}_{\#GS1} & \dots & \mathbb{G}_{\#GS\#PS} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{G}_{sp} = \mathcal{G}_s \boldsymbol{\phi}_p^T (a_{sp} \mathbf{r} + \mathbf{b}_{sp}), \quad (17)$$

where $\mathcal{G}_s = [\mathcal{G}_{s1} \dots \mathcal{G}_{s\#S}]^T$ is the WFS *measurement operator* that maps the phase in the telescope pupil to an *sth* WFS measurement vector $\mathbf{s}_s$. The form of this operator depends on the WFS type, for the most popular Shack-Hartmann WFS [15] it is quite simple

$$\begin{bmatrix} s_{ix} \\ s_{iy} \end{bmatrix} = \mathcal{G}_i \boldsymbol{\phi}(\mathbf{r}) = \int_s ds \nabla \phi(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \quad i = 1, \dots, \#S, \quad (18)$$

where S is the sensor *subaperture* shape, $\mathbf{r}_i$ is the subaperture center position.

The equations presented to the moment give enough information for what we will consider the *straightforward* MCAO Tomographic Problem practical implementation, both Estimation and Fitting parts, with minimal employment of the problem's internal structure, for instance, the fact that matrix

$\langle \Phi \Phi^T \rangle$ is block-diagonal. It is assumed that all the involved matrices are *full*. By computing the matrix elements and the subsequent matrix multiplication one can get $\mathbb{E}, \mathbb{F}$ and $\mathbb{R} = \mathbb{F} \cdot \mathbb{E}$. Obviously, complexity of the full matrix application is proportional to the product of its dimensions, i. e. $\mathcal{O}(D^4)$. It is informative to estimate the MCAO algorithm complexity for an example of a large-scale AO system. For this purpose we can take the MCAO system for the Thirty Meter Telescope (TMT) [16]. As our attention will be concentrated on the $\mathbb{E}$ -matrix, its dimension for the 30-meter telescope using, for instance, a 6-layer turbulence profile approximation taken from [14] is expected to be about 18000×33600 , which needs to be applied within 1 ms. This well illustrates the difficulty of the problem. It also should be mentioned that the $\mathbb{E}$ -matrix has to be recomputed regularly to adjust to the changing atmospheric conditions, so not only the complexity of $\mathbb{E}$ s-multiplication is of interest, but also the complexity of $\mathbb{E}$ -recomputation, which in case of full matrix is $\mathcal{O}(D^6)$.

2. MCAO internal structure. It is clear that the straightforward full-matrix approach described above has unacceptable complexity and is barely suitable for use with the large-scale AO systems of the prospective giant telescopes like TMT. The true complexity of the problem is expected however to be *much smaller* thanks to the *amenable internal structure* the straightforward approach completely ignores. In what follows, two the most significant facts will be mentioned, which, if used together, give the dramatic complexity reduction.

Zonal approximation. The computational complexity depends strongly on the choice of the *basis set* for the turbulence phase approximation. First of all, it is important to find a basis *optimal* for the specific turbulence statistics in the sense of the fastest convergence, a problem that still has no good solution. A second, more constructive approach, is to use the basis sets that are less computationally demanding. In particular [17], the basis options get split into two big classes: the *global* ones such as Zernike Polynomials [18], when each basis function $\phi_i(\mathbf{r})$ covers the entire phase screen, and the *zonal* ones, when the basis functions have *limited support* much smaller than the entire phase screen. The last option immediately makes the matrices in (13) *strongly sparse*. The prominent example of zonal basis functions are *B-splines* [19], the extremely computationally simple finite-support functions with an additional critical property: in the case of *Cardinal B-spline* they are also *shift-invariant*, which is the second structural property to be deeply analysed below. It was experimentally discovered [17] that atmospheric phase can be approximated with the same accuracy by a comparable number of the splines and Zernike Polynomials resulting, therefore, in the matrices of approximately the same dimensions but *full* in the latter and *sparse* in the former case.

Based on this observation the MCAO Tomographic Problem was completely reformulated in the *sparse form* [3] using the simplest, 1st-order *bi-linear, shift-invariant* spline approximation

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &\approx \sum_{ij} \phi_{ij} Bi(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{ij}), \quad \mathbf{r} = (x, y), \quad \mathbf{r}_{ij} = d(i, j), \\ Bi(r) &= \begin{cases} (1 - |x/d|)(1 - |y/d|), & |x|, |y| \leq d, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \end{aligned} \quad (19)$$

where, $\phi_{ij} = \phi(\mathbf{r}_{ij})$, which corresponds to a simple *bi-linear interpolation*. With the latter property Eq. (17) for $\langle \Phi \Phi^T \rangle$ takes the especially simple form

$$\langle \Phi \Phi^T \rangle_{ij, i', j'} = C_\phi (|\mathbf{r}_{ij} - \mathbf{r}_{i'j'}|). \quad (20)$$

In Eq. (15) for the *Estimation Matrix* in the case of *bi-linear interpolation* the Sensor Matrix becomes sparse, the regularization term $\mathbf{N}\mathbf{N}^T + \alpha \mathbb{I}$ is low-rank and only $\langle \Phi \Phi^T \rangle$ is block-diagonal due to statistical independence of turbulence layers but with full blocks. This difficulty gets eliminated by application to (15) *Sherman-Morrison Formula (Inversion Lemma)* [20] to get (we skip the regularization term for clarity)

$$\mathbb{E} = \langle \phi\phi^T \rangle \mathbb{G}^T \left(\mathbb{G} \langle \phi\phi^T \rangle \mathbb{G}^T + \langle \mathbf{n}\mathbf{n}^T \rangle \right)^{-1} = \left(\mathbb{G} \langle \mathbf{n}\mathbf{n}^T \rangle^{-1} \mathbb{G} + \langle \phi\phi \rangle^{-1} \right)^{-1} \mathbb{G}^T \langle \mathbf{n}\mathbf{n}^T \rangle^{-1}, \quad (21)$$

where each block $\langle \phi\phi \rangle_p^{-1} \approx c W_p^{-1} \mathbb{L} \mathbb{L}$, $p=1 \dots \#PS$, $\mathbb{L}$ is the *Laplacian Matrix* computed via finite differences on the $\mathbf{r}_{ij}$ -grid, W_p is the layer's relative weight, c is the normalization constant. Since $\mathbb{L}$ is strongly sparse, the entire Estimation Matrix becomes presented as a combination of sparse and low-rank matrices. To stay within the sparse structure, the inversion of $\left(\mathbb{G}^T \langle \mathbf{n}\mathbf{n}^T \rangle^{-1} \mathbb{G} + \langle \phi\phi \rangle^{-1} \right)$ is rejected and solving iteratively the equivalent linear equation system

$$\left(\mathbb{G} \langle \mathbf{n}\mathbf{n}^T \rangle^{-1} \mathbb{G}^T + \langle \phi\phi^T \rangle^{-1} \right) \mathbf{x} = \mathbf{v}, \quad (22)$$

by the *Preconditioned Conjugate Gradient Iteration* [17] done instead, which, unlike the inversion, preserves the sparsity. It was shown in [3] that the sparse approach results in about 40× speed-up in comparison to the *straightforward* full-matrix approach on a TMT-scale MCAO system even taking into account that the iterative linear equation system solution is required for each new $\mathbb{E}\mathbf{s}$ -product computation.

Shift-invariance and Toeplitz structure. The sparse reformulation [3] of the MCAO Tomographic Problem had a significant impact and is currently considered a baseline solution for the practical AO systems. It is quite surprising that another obvious and well-known structural property, the *shift-invariance*, manifesting itself:

- 1) in the *turbulence covariance function* (16);
- 2) in the *spline basis* (in case of a uniform grid);
- 3) in the *subaperture pattern* of the standard Shack-Hartmann WFS,

was not seriously considered for the purpose of further complexity reduction. It was explicitly used only recently in, for instance [6, 21] where it was noticed that the shift-invariance results in the *convolutional type* Propagation Operators with the *Toeplitz* matrix representation [22]. That shift-invariance mathematically results in the Toeplitz matrix structure is the most obvious on an example of the $\langle \phi\phi^T \rangle$ -matrix, which, according to (20), is constructed from the shift-invariant turbulence covariance function $C_\phi(\rho)$. To see the Toeplitz structure, it is enough to consider just the matrix of distances between the grid points $\rho_{ii',jj'} = |\mathbf{r}_{ij} - \mathbf{r}_{i'j'}|$. In the case of two 1D grids we can write directly from Fig. 3:

$$\begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{21} & \rho_{31} \\ \rho_{12} & \rho_{22} & \rho_{32} \\ \rho_{13} & \rho_{23} & \rho_{33} \\ \rho_{14} & \rho_{24} & \rho_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{12} & \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{13} & \rho_{12} & \rho_{11} \\ \rho_{14} & \rho_{13} & \rho_{12} \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \rho_{ii'} &= \rho_{i'j} \text{ (symmetric)}, \\ \rho_{ii'} &= \rho_{kk'}, \text{ if } i - i' = k - k' \text{ (Toeplitz)}. \end{aligned} \quad (23)$$

The case of two 2D grids is analogous with the difference that $\rho_{ij,i',j'}$ has additional block structure with equal blocks repeating the Toeplitz pattern (*Block-Toeplitz with Toeplitz Blocks* or BTTB).

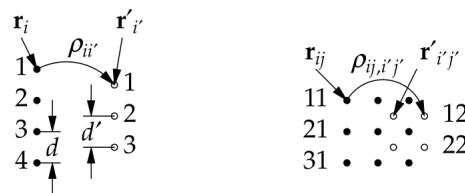


Fig. 3. Left: 1D grid point distances leading to the Toeplitz matrix. Right: 2D grid point distances leading to the BTTB matrix. Important limitations: 1) grid spacings should be equal: $d_x = d'_x$, $d_y = d'_y$; 2) the grids should be *parallel* (no grid-to-grid rotation!)

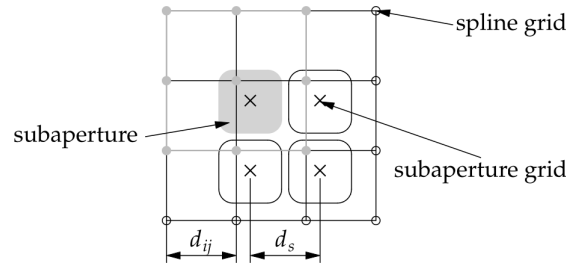


Fig. 4. The Matched Projection of the phase screen bi-linear spline basis grid to the Shack-Hartmann subaperture grid. The locations of splines affecting one subaperture marked in grey are also shown in grey. The grey contour shows the single bi-linear spline support border. The d_s is the subaperture grid spacing, d_{ij} is the j th phase screen spacing center-projected to the telescope pupil along the rays emitted from the i th Guide Star position as on Fig. 2

$$\begin{bmatrix} \rho_{11,11}\rho_{11,21} & \rho_{11,12}\rho_{11,22} \\ \rho_{21,11}\rho_{21,21} & \rho_{21,12}\rho_{21,22} \\ \rho_{31,11}\rho_{31,21} & \rho_{31,12}\rho_{31,22} \\ \\ \rho_{12,11}\rho_{12,21} & \rho_{12,12}\rho_{12,22} \\ \rho_{22,11}\rho_{22,21} & \rho_{22,12}\rho_{22,22} \\ \rho_{32,11}\rho_{32,21} & \rho_{32,12}\rho_{32,22} \\ \\ \rho_{13,11}\rho_{13,21} & \rho_{13,12}\rho_{13,22} \\ \rho_{23,11}\rho_{23,21} & \rho_{23,12}\rho_{23,22} \\ \rho_{33,11}\rho_{33,21} & \rho_{33,12}\rho_{33,22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_{11,11}\rho_{11,21} & \rho_{11,12}\rho_{11,22} \\ \rho_{11,21}\rho_{11,11} & \rho_{11,22}\rho_{11,12} \\ \rho_{31,11}\rho_{11,21} & \rho_{31,12}\rho_{11,22} \\ \\ \rho_{12,11}\rho_{12,21} & \rho_{11,11}\rho_{11,21} \\ \rho_{12,21}\rho_{12,11} & \rho_{11,21}\rho_{11,11} \\ \rho_{32,11}\rho_{12,21} & \rho_{31,11}\rho_{11,21} \\ \\ \rho_{13,11}\rho_{13,21} & \rho_{12,11}\rho_{12,21} \\ \rho_{13,21}\rho_{13,11} & \rho_{12,21}\rho_{12,11} \\ \rho_{33,11}\rho_{13,21} & \rho_{32,11}\rho_{12,21} \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \rho_{ij,i',j'} &= \rho_{i'j',ij'} \text{ (symmetric),} \\ \rho_{ii',jj'} &= \rho_{kk',ll'}, \text{ if} \\ i - j &= k - l, i' - j' = k' - l' \end{aligned} \quad (24)$$

(Block-Toeplitz with Toeplitz Blocks or BTTB).

It is less obvious, but the Sensor Matrix $\mathbb{G}$ from (17), (18) is also BTTB at least for the Shack-Hartmann WFS. It can be seen from Fig. 4 that the pattern of 9 bi-linear splines projected on the subaperture grid in the telescope pupil *repeats itself* while being shifted from one subaperture to another, which is a consequence of the *shift-invariance* inherent in both basis splines and WFS subapertures.

The same two conditions need to be met as in the case of the covariance matrix:

- 1) the spline and subaperture grids should be *parallel*;
- 2) the spline and subaperture grid spacings should be *equal*:

$$d_s = d_{ij} = d_j / a_{ij}, \quad a_{ij} = 1 - h_j / z_i, \quad (25)$$

where h_j , z_i are the j th phase screen and i th Guide Star altitudes, d_j is the spline grid spacing right on the screen, which *has to be chosen* as $d_j = a_{ij}d_s$. Because d_j should not depend on i , one more requirement is necessary:

- 3) all Guide Star *altitudes should be the same*, i. e. $z_i = \text{const.}$, which is not very strict and can be technically met.

Sparse Toeplitz matrices. As a result, all matrices making the Estimation Matrix in (21) can be made either block-diagonal with (2×2) -blocks like the $\langle \mathbf{nn}^T \rangle^{-1}$ -matrix, low-rank like the regularization term $\mathbf{NN}^T$, or Toeplitz/BTTB like $\mathbb{G}$ and $\langle \phi\phi^T \rangle^{-1} \approx c\mathbf{LL}$ (the Laplacian Matrix is also BTTB [3]). At the same time, because of the *Zonal Approximation*, these matrices are also sparse. This combination of sparsity and Toeplitz structure seems to have been overlooked.

An important property of the Toeplitz/BTTB-matrices is their *compact representation*: to define an $n \times m$ Toeplitz matrix $\mathbb{T}$, because of many equal elements, it is enough to store the values of non-equal

elements only, for instance, the ones along the first row and the first column (see e.g. Eq. (23)), which are convenient to keep as a single vector

$$t(\mathbb{T}) = [\mathbb{T}_{n1} \dots \mathbb{T}_{11} \mathbb{T}_{12} \dots \mathbb{T}_{1m-1} \mathbb{T}_{1m}]^T. \quad (26)$$

Analogously, the compact representation of the BTTB-matrix with $N \times M$ blocks of $n \times m$ size is a 2D array, columns of which are ordered as

$$k(\mathbb{T}) = [\mathbf{t}_{M1} \mathbf{t}_{N-11} \dots \mathbf{t}_{11} \mathbf{t}_{12} \dots \mathbf{t}_{1M-1} \mathbf{t}_{1M}]^T, \quad (27)$$

where each column is the representation (26) of the corresponding block.

Moreover, as the product $\mathbb{T}\mathbf{v}$ of the Toeplitz/BTTB-matrix by a vector is a *discrete convolution*, the key property of the compact representation is that it is exactly the *convolution kernel*.

In the case of a sparse Toeplitz/BTTB-matrix, the compact representation (or the convolution kernel) becomes also sparse, i. e. even more compact. For instance, the Laplacian compact representation is [3]

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \dots 0 \ 1 \ 0 \dots \\ 1 \ -4 \ 1 \\ \dots 0 \ 1 \ 0 \dots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \quad (28)$$

where “...” means zero padding to the necessary matrix size. Analogously, compact representation of the Sensor $\mathbb{G}$ -matrix block, as it is seen from Fig. 4, has only 3×3 non-zero values. These non-zero parts are the actual amount of data defining the $\mathbb{L}$ - and $\mathbb{G}$ -matrices regardless the actual matrix size. Thus, in a great contrast with the full matrices requiring a long computation of all their elements, in a *compact Toeplitz* case it is necessary to calculate only a hand-full number of values. Returning to the TMT MCAO System matrix sizes one can make a comparison. Dimensions of one block of the $\mathbb{G}$ -matrix are:

2800×3000 in the full representation vs;

$\approx 2800 \times 3$ non-zeros in just sparse representation [3] vs;

3×3 non-zeros in the sparse BTTB compact representation,

and there is approximately the same picture for the $\mathbb{L}$ -matrix. Such a dramatic complexity reduction allows to think that the described above structural observations approach is very close to the manifested *natural complexity* of the MCAO Tomography Problem. This, in particular, completely solves the $\mathbb{E}$ -recomputation problem mentioned in Introduction: it takes virtually no time to recompute all matrices that make the $\mathbb{E}$ -matrix, even in comparison with the $\mathbb{E}\mathbf{s}$ -multiplication operation, which in turn requires some additional attention.

Another important property of the Toeplitz/BTTB-matrices is that the matrix-vector product being a convolution can be performed in the Fourier Space. This fact was explicitly used in [5] to reduce the complexity of the Tomography Problem to $\mathcal{O}(D^2 \log D^2)$. This approach, however, does not employ the existing matrix sparsity. Moreover, in the Fourier Space full and sparse Toeplitz matrices are indistinguishable w.r.t. computational complexity.

If the matrices are both Toeplitz/BTTB and strongly sparse, as it is the case for the ones in Eq. (21), the direct matrix-vector multiplication in the Coordinate Space appears to be more efficient, with complexity $NZ \cdot \mathcal{O}(D^2)$, where NZ is the (quite small) number of non-zero elements in the matrix compact representation. Consider a BTTB-matrix $\mathbb{T}$ with the *sparse compact representation* (non-zeros only) $\mathbf{k}(\mathbb{T})$ given as a 2D $(-d : u, -l : r)$ -array. Since this array is a convolution kernel, the matrix-vector product $\mathbb{T}\mathbf{v}$ can be interpreted as a direct *2D convolution* of the $\mathbf{k}(\mathbb{T})$ -kernel with a 2D $(1 - d : n + u, 1 - l : M + r)$ -array presenting vector $\mathbf{v}$ to get a 2D $(1 : n, 1 : N)$ -array presenting vector $\mathbb{T}\mathbf{v}$:

$$(\mathbb{T}\mathbf{v})(i, I) = \sum_{\beta=-l}^r \sum_{\alpha=-d}^u \mathbf{k}(\alpha, \beta) \mathbf{v}(di + i + \alpha, dI + I + \beta), \quad i = 1 \dots n, \quad I = 1 \dots N. \quad (29)$$

Note the extended limits of the array $\mathbf{v}$. This is what can be called the *Minimal Embedding* of $\mathbb{T}\mathbf{v}$ into $\mathbf{v}$: the array $\mathbf{v}$ gets broadened to such a minimal extent that the index $(i + \alpha, I + \beta)$ never falls out

the array borders. The actual size of the $\mathbf{v}$ -array cannot be smaller than the minimal embedding but can be larger. For instance, for computing $\mathbb{G}_{sp}\phi_p$, it is necessary to additionally compute the shift of the subaperture grid projection (10) onto the p th Phase Screen along the s th Guide Star:

$$(dI, di)_{sp} = \left\lceil \frac{\mathbf{b}_{sp}}{a_{sp}d_s} \right\rceil, \quad (30)$$

where $\lceil \cdot \rceil$ stands for rounding to the nearest integer. There exists another sort of *embedding*: because the telescope aperture is never rectangular, both left and right parts of (29) need to be *masked* by exclusion the iI -indexes of non-active phase/subaperture grid points.

The $\mathbb{E}\mathbf{s}$ operation also requires the *transpose matrix-vector* multiplication. For a BTTB matrix this has a form of the *reverse convolution*, which cannot be written as a single formula but can be expressed as a recursion

$$\begin{aligned} T^T \mathbf{v} &= 0, \\ (T^T \mathbf{v})(di+1+\alpha, dI+1+\beta) &= \mathbf{k}(\alpha, \beta) \mathbf{v}(1, 1), \quad \alpha = -d \dots u, \quad \beta = -l \dots r, \\ (T^T \mathbf{v})(di+i+\alpha, dI+I+\beta) &= \mathbf{k}(\alpha, \beta) \mathbf{v}(i, I) + (T^T \mathbf{v})(di+i-1+\alpha, dI+I-1+\beta), \\ \alpha &= -d \dots u, \quad \beta = -l \dots r, \quad i = 2 \dots n, \quad I = 2 \dots N, \end{aligned} \quad (31)$$

which looks clumsy in comparison to (29) but is easy to implement as a computer code.

The complete set of actions needed to compute $\mathbb{E}\mathbf{s}$ contains:

1. Eqs. (29) and (31) for multiplication by $\mathbb{G}$ - and $\mathbb{L}$ -matrices.
2. Multiplications by the block-diagonal $\langle \mathbf{nn}^T \rangle^{-1}$ and the full but low-rank $\mathbf{NN}^T$.
3. Iterative solving Eq. (22), which reduces mostly to matrix-vector multiplications.

With the low-rank, sparse or sparse + BTTB structure of the involved matrices all the listed operations become extremely fast. A deep difference between the full and even just sparse $\mathbb{E}$ -matrix and its *natural complexity* representation and *natural* operations is that neither *explicit* matrix allocation in memory nor *explicit* matrix operations are involved but replaced by specialized algorithms, which allows to talk about the *matrix-free* approach, a term that was firstly introduced, at least in the AO context, in [23].

3. Large scale AO simulations. In this section we present a demonstration of the complexity reduction effect comparing real practical computer implementation of the *Sparse Toeplitz MCAO Estimator* (21) with its classical implementations. Attention is focused on a single-step, open-loop, noiseless calculation, that is, on testing the

- 1) correctness of the computer code and
- 2) computational speedup,

ignoring estimation of an AO system performance as such. A 30-meter telescope AO system with the following parameters was taken as a *large-scale* testing case:

- a simple round annular 30-meter pupil;
- 6 *Sodium Layer Laser Guide Stars* located at finite altitude ≈ 90 km above ground, with central launch at $30''$ off-axis;
- 5 *Scientific Natural Stars* at infinite distance, 1 on-axis and 4 at $20''$ off-axis as it is shown in Fig. 5.

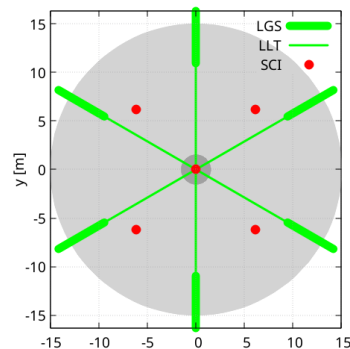


Fig. 5. 30-meter telescope pupil and the star constellation for the tested AO system. LGS is the Laser Guide Star, SCI is the Scientific Direction, LLT is the Laser Launch Telescope

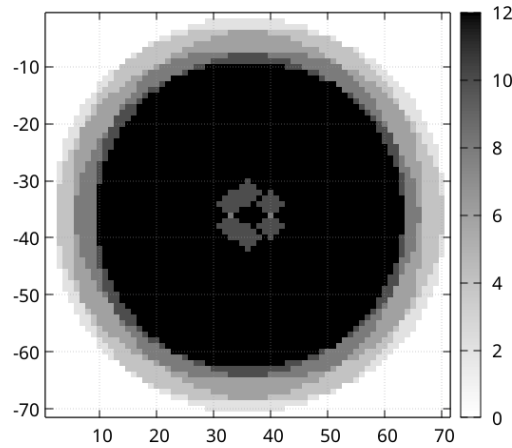


Fig. 6. The active point mask on the highest estimation phase screen obtained by projection of all sensor subaperture grids along the Guide Stars

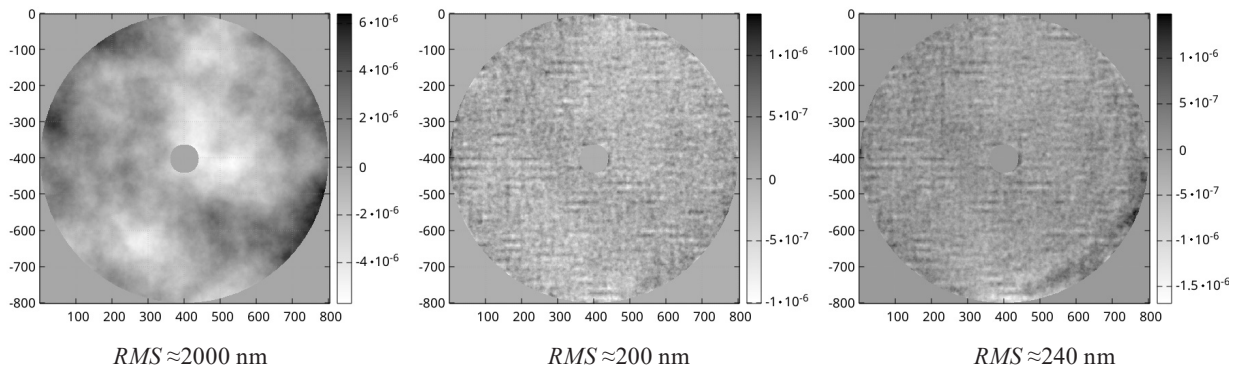


Fig. 7. The *Piston, Tip, Tilt*-removed turbulent phase in the entrance pupil before and after AO correction. Left: phase on-axis before correction, the total $C_n^2 = 7 \cdot 10^{-13} \text{ m}^{-2/3}$. Center: phase on-axis after correction. Right: phase $20''$ off-axis after correction. The *Root Mean Square* error (RMS) is given in units of the *Optical Path Difference* (OPD)

– The atmospheric turbulence is presented as a Cerro Tololo 6-layer model [14], with random-generated high resolution phase screens.

– The AO system is presented as 6 LGS-illuminated Shack-Hartmann WFSs with square subapertures, the subaperture spacing is 0.5 m. Number of active subapertures per sensor is ≈ 2800 .

– The low-resolution estimation phase screens ϕ_p coincide with the model ones (the simplest model), have the same spacing as the sensor subapertures up to the *Guide Star Projection* (25), which is exactly the requirement to obtain the *Toeplitz Structure*. The number of active points on each estimation phase screen is slightly larger than the number of sensor subapertures to ensure the 1) *Minimal Embedding* (see Eqs. (29), (31)), 2) projection center shifts (30). Active points corresponding to the sensor subaperture grid onto the highest estimation phase screen are shown in Fig. 6. The number of active grid points on average is ≈ 3600 . These numbers are important for computational complexity comparison.

The computation results on the described AO system that use the *Sparse Toeplitz* approach by iteratively solving the linear system (22) employing the BTTB representations of the corresponding matrices and fast matrix-vector multiplications via Eqs. (29), (31) are presented in Fig. 7.

The most simple non-predicted *Conjugate Gradient* iteration without additional regularization was used, which led to the large number of 100 iterations for acceptable convergence (Fig. 8), a separate difficult problem attempted to be solved elsewhere [12, 17] but not a key issue for this work.

Figs. 7, 8 demonstrate correctness of the *MCAO Estimation* algorithm in its *Sparse Toeplitz* implementation. As to its efficiency, it can be compared with two other key implementations of the same algorithm: the *Full Matrix* and *Sparse Matrix* ones. We need to take into account that in case of full matrix iterative solving of Eq. (22) is not necessary. Instead, Eq. (15) is computed as a single $\mathbb{E}$ -matrix.

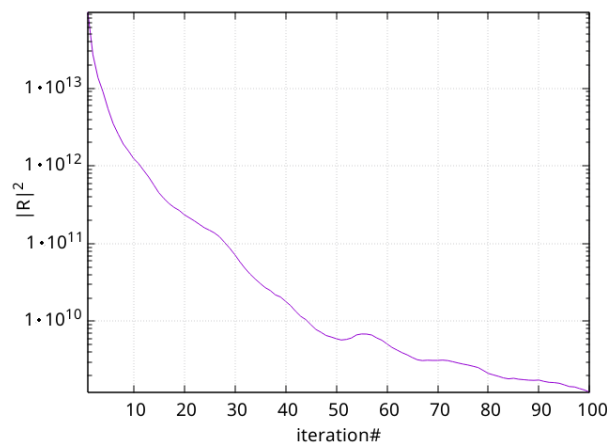


Fig. 8. Conjugate Gradients residual error evolution over iterations

Its size is $(6 \times 3600) \times (12 \times 2800) = 21600 \times 33600$. The time for direct multiplication of this matrix by a vector should be compared with the time of iterative solution of Eq. (22). In the just sparse matrix case the iterative solution is used, thus it is enough to compare the time needed for one iteration. Given below are the factual computation timing results obtained on the 64-bit Intel Core i3 2500 MHz processor on a single core without parallelization:

100 iterations of Sparse Toeplitz Algorithm	100 iterations of Sparse Algorithm	Direct matrix- vector multiplication
0.2 s	0.6 s	0.3 s

For the direct multiplication a standard BLAS library subroutine SGEMV() was used. For the sparse matrix-vector multiplication because each block of the involved matrices can be represented as a sparse band matrix the BLAS SGBMV() was used.

The comparison results are quite interesting. Obvious is that just Sparse approach is slower than the Sparse Toeplitz one. It is quite surprising that the difference with the full-matrix approach is not very profound. The explanation is in the fact that the convergence of the iterative algorithm, which is driven entirely by the involved matrix *condition number*, is too slow. If for convergence just ONE iteration was enough, the Sparse Toeplitz algorithm would be more than two orders of magnitude faster, but slow convergence of the iteration process eliminates this advantage. Apparently, the future work needs to be concentrated on finding the efficient *preconditioner* for the Conjugate Gradients and, possibly, some optimized AO system configuration resulting in lower condition number. It should also be mentioned that the $\mathbb{E}$ -matrix *recomputation* in the case of full matrix takes about an hour, whereas recomputation of BTTB-kernels for the matrices involved in (22) by numerical evaluating the integrals in Eq. (18) takes less than 0.1 second, thus solving the recomputation problem completely.

References

1. Trunk G. V. A Problem of Dimensionality: A Simple Example. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1979, vol. PAMI-1, no. 3, pp. 306–307. <https://doi.org/10.1109/TPAMI.1979.4766926>
2. Roggemann M. C., Welsh B. M. *Imaging Through Turbulence*. Boca Raton, CRC Press, 1996. 320 p.
3. Ellerbroek B. Efficient computation of minimum-variance wave-front reconstructors with sparse matrix techniques. *Journal of the Optical Society of America A*, 2002, vol. 19, pp. 1803–1816. <https://doi.org/10.1364/JOSAA.19.001803>
4. Poyneer L. A., Gavel D. T., Brase J. M. Fast Wavefront Reconstruction in large adaptive optics systems with use of the Fourier transform. *Journal of the Optical Society of America A*, 2002, vol. 19, pp. 2100–2111. <https://doi.org/10.1364/JOSAA.19.002100>
5. Massioni P., Kulcsar C., Raynaud H.-F., Conan G.-M. Fast computation of an optimal controller for large-scale adaptive optics. *Journal of the Optical Society of America A*, 2011, vol. 28, pp. 2298–2309. <https://doi.org/10.1364/JOSAA.28.002298>
6. Ono X., Correia C., Conan R., Blanco L., Benoit N., Fusco T. Fast iterative tomographic wavefront estimator with recursive Toeplitz reconstructor structure for large-scale systems. *Journal of the Optical Society of America A*, 2018, vol. 35, pp. 1330–1345. <https://doi.org/10.1364/JOSAA.35.001330>

7. Beckers J. M. Increasing the size of isoplanatic path with multi-conjugate adaptive optics. *Very Large Telescopes and their Instrumentation, ESO Conference and Workshop Proceedings, Proceedings of a ESO Conference on Very Large Telescopes and their Instrumentation, held in Garching, March 21–24, 1988*. Garching, European Southern Observatory (ESO), 1988, pp. 693.
8. Tokovinin A., Le Luarn M., Sarazin M. Isoplanatism in a multi-conjugate adaptive optics. *Journal of the Optical Society of America A*, 2000, vol. 17, pp. 1819–1827. <https://doi.org/10.1364/JOSAA.17.001819>
9. Roddier F. The effects of atmospheric turbulence in optical astronomy. *Progress in Optics*, 1981, vol. 19, pp. 281–376. [https://doi.org/10.1016/S0079-6638\(08\)70204-X](https://doi.org/10.1016/S0079-6638(08)70204-X)
10. Gavel D. T., Wiberg D. M. Towards strehl-optimizing a aptive optics controllers. *SPIE Proceedings*, 2003, vol. 4839, pp. 890–901. <https://doi.org/10.1117/12.459684>
11. *Matrix calculus*. Available at: https://en.wikipedia.org/wiki/Matrix_calculus (accessed at 23.07.2025).
12. Ellerbroek B. L., Vogel C. R. Inverse Problems in Astronomical Adaptive Optics. *Inverse Problems*, 2009, vol. 25, no. 6, pp. 063001. <https://doi.org/10.1088/0266-5611/25/6/063001>
13. Tatarski V. I. *Wave Propagation in a Turbulent Medium*. Courier Dover Publications, 2016. 288 p.
14. Hardy J. W. *Adaptive Optics for Astronomical Telescopes*. London, Oxford University Press, 1998. 448 p. <https://doi.org/10.1093/oso/9780195090192.001.0001>
15. Vernin J., Agabi A., Avila R., Azouit M., Conan R., Martin F., Masciadri, Sanchez I., Ziad A. 1998 *Gemini site testing campaign: Cerro Pachon and Cerro Tololo*. Gemini Doc. RTP-AO-G0094. Gemini Observatory, Hilo, 2000.
16. *Shack-Hartmann wavefront sensor*. Available at: https://en.wikipedia.org/wiki/Shack-Hartmann_wavefront_sensor (accessed at 23.07.2025).
17. Crane J., Herriot G., Andersen D., Atwood J., Byrnes P., Densmore A., Dunn J. [et al.]. NFIRAOS adaptive optics for the Thirty Meter Telescope. *Adaptive Optics Systems VI*, 2018, vol. 10703, pp. 107033V. <https://doi.org/10.1117/12.2314341>
18. Gilles L., Ellerbroek B. L., Vogel C. R. Preconditioned conjugate gradient wave-front reconstructors for multiconjugate adaptive optics. *Applied Optics*, 2003, vol. 42, no. 26, pp. 5233–5250. <https://doi.org/10.1364/ao.42.005233>
19. Noll R. J. Zernike polynomials and atmospheric turbulence. *Journal of the Optical Society of America*, 1976, vol. 66, no. 3, pp. 207–211. <https://doi.org/10.1364/josa.66.000207>
20. Golub G., VanLoan C. *Matrix Computations*. Baltimore John Hopkins University Press, 1989. 780 p.
21. Cranney J., Piatrou P., De Dona J., Rigaut F., Korkiakoski V. Evaluation of statistical turbulence models for use in the Distributed Kalman Filter. *Proceedings of the Adaptive Optics for Extremely Large Telescopes 5*, 2017, vol. 5. <https://doi.org/10.26698/ao4elt5.0087>
22. *Toeplitz matrix*. Available at: https://en.wikipedia.org/wiki/Toeplitz_matrix (accessed at 23.07.2025).
23. Ramlau R., Stadtler B. An augmented wavelet reconstructor for atmospheric tomography. *Arxiv [Preprint]*, 2020. Available at: [arXiv:2011.06842v1](https://arxiv.org/abs/2011.06842v1); <https://doi.org/10.48550/arXiv.2011.06842>

Information about the author

Piotr K. Piatrou – Ph. D. (Physics and Mathematics), Leading Researcher, B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (68-2, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: p.piatrou@dragon.bas-net.by. <https://orcid.org/0000-0001-9215-3570>

Информация об авторе

Петров Петр Казимирович – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь (пр. Независимости, 68-2, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: p.piatrou@dragon.bas-net.by. <https://orcid.org/0000-0001-9215-3570>

ISSN 1561-2430 (Print)

ISSN 2524-2415 (Online)

UDC 539.12...17

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2026-62-1-73-77>

Received 03.10.2025

Поступила в редакцию 03.10.2025

Elena S. Kokoulina¹, Michael I. Levchuk^{2,3},
Maxim N. Nevmerzhitsky³, Roman G. Shulyakovsky^{3,4}

¹Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russian Federation²B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus³Institute of Applied Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus⁴Institute for Nuclear Research of the Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus

ON THE TENSOR ANALYZING POWER COMPONENT T_{20} IN THE REACTION $\gamma d \rightarrow \pi^0 d$

Abstract. We calculate the tensor analyzing power component T_{20} for coherent photoproduction of pions on the deuteron in the framework of the impulse approximation. The sensitivity of the results to the choice of the deuteron wave function is investigated. We compare the obtained values with the predictions of other models and with experimental data. The noticeable discrepancy between the theory and experiment was found at the photon energy $E_\gamma = 400$ MeV.

Keywords: meson production, photoproduction reactions, few-body systems, deuteron, polarization phenomena in reactions, spin observables, polarized targets

For citation. Kokoulina E. S., Levchuk M. I., Nevmerzhitsky M. N., Shulyakovsky R. G. On the tensor analyzing power component T_{20} in the reaction $\gamma d \rightarrow \pi^0 d$. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk* = *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2026, vol. 62, no. 1, pp. 73–77. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2026-62-1-73-77>

Е. С. Кокорулина¹, М. И. Левчук^{2,3}, М. Н. Невмержицкий³, Р. Г. Шуляковский^{3,4}

¹Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Российская Федерация²Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь³Институт прикладной физики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь⁴Институт ядерных проблем Белорусского государственного университета, Минск, Республика Беларусь

О КОМПОНЕНТЕ ТЕНЗОРНОЙ АНАЛИЗИРУЮЩЕЙ СПОСОБНОСТИ T_{20} В РЕАКЦИИ $\gamma d \rightarrow \pi^0 d$

Аннотация. В рамках плосковолнового импульсного приближения рассчитана компонента тензорной анализирующей способности T_{20} в реакции когерентного фоторождения пионов на дейтроне. Исследована чувствительность результатов к выбору дейтронной волновой функции. Проведено сравнение полученных результатов с предсказаниями других моделей и с экспериментальными данными. Наблюдается заметное расхождение между теорией и экспериментом при энергии фотона $E_\gamma = 400$ МэВ.

Ключевые слова: рождение мезонов, реакции фоторождения, системы нескольких тел, дейтрон, поляризационные явления в реакциях, спиновые наблюдаемые, поляризованные мишени

Для цитирования. О компоненте тензорной анализирующей способности T_{20} в реакции $\gamma d \rightarrow \pi^0 d$ / Е. С. Кокорулина, М. И. Левчук, М. Н. Невмержицкий, Р. Г. Шуляковский // Весті Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. – 2026. – Т. 62, № 1. – С. 73–77. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2026-62-1-73-77>

Introduction. Experiments on the pion photoproduction on nucleons and nuclei provide a unique tool for understanding the internal structure of the nucleons and other strongly interacting systems. The deuteron is the simplest nucleus that contains the neutron. Its low binding energy and well-known structure in comparison with heavier nuclei gives great opportunity to study the neutron that is absent for the study as a free target. In this context, the deuteron researches are of particular interest.

The history of theoretical investigation of the coherent reaction on the deuteron began with the works [1, 2], where an approximate treatment of Fermi motion was used. Many theoretical studies using more delicate approaches have been carried out later. Among them are: studies of factorization approximation to treat the Fermi motion in impulse approximation (IA) [3], different approaches with the final state rescattering [4–11], dynamical models for nucleon interactions with resonances [12].

In 2020, the data for unique measurements of the tensor analyzing power component T_{20} were published in Ref. [13]. The measurements were performed at VEPP-3 electron storage ring at the Budker Institute of Nuclear Physics in Novosibirsk, Russia.

In the present paper we investigate the capabilities of various models in reproducing experimental data [13]. Tests on polarization observables impose even more stringent requirements than data on unpolarized reaction. We construct our approach to calculate the tensor analyzing power component T_{20} in the reaction $\gamma d \rightarrow \pi^0 d$. We use a realistic pion photoproduction operator, based on unitary isobar model MAID07 [14], and parameterizations of the deuteron wave function (DWF) obtained from high-precision NN potentials. Note that in Ref. [13] our results on T_{20} were already shown but they were cited as a private communication by M. Levchuk dated on 2013. In the present paper we give some details of the calculations.

1. Kinematics and observables. In the present work, we consider the reaction $\gamma d \rightarrow \pi^0 d$ in the photon-deuteron (γd) center-of-mass (c.m.) frame. Let us denote by $k = (\omega, \mathbf{k})$, $p = (E, -\mathbf{k})$, $q = (\varepsilon_\pi, \mathbf{q})$, and $p' = (E', -\mathbf{q})$ the four-momenta of the initial photon, initial deuteron, final pion, and final deuteron, respectively. We use a coordinate system in which z -axis is directed along the photon momentum $\mathbf{k}$ and y -axis is parallel to $\mathbf{k} \times \mathbf{q}$. A symbol E_γ stands for the photon energy in the laboratory frame: $\omega = E_\gamma M/W$ with $W = \sqrt{M^2 + 2ME_\gamma} = \omega + \sqrt{M^2 + \omega^2}$ and M being the deuteron mass. Note, that with the π^0 mass $\mu = 135.0$ MeV the reaction threshold is given by

$$E_\gamma^{th} = \mu + \frac{\mu^2}{2M} = 139.9 \text{ MeV}. \quad (1)$$

The pion c.m. momentum is

$$q = \frac{1}{2W} \sqrt{[W^2 - (M + \mu)^2][W^2 - (M - \mu)^2]}. \quad (2)$$

The c.m. emission angle for the pion is θ . Let m_d , m'_d , and λ be spin states of the initial deuteron, final deuteron, and photon, respectively. In practice, we calculated only a half of 18 amplitudes $\langle m'_d | T | \lambda m_d \rangle$, namely those for $\lambda = 1$. One has due to the parity conservation [6] that

$$\langle -m'_d | T | -\lambda - m_d \rangle = (-1)^{+m_d + m'_d + \lambda} \langle m'_d | T | \lambda m_d \rangle. \quad (3)$$

In principle, in the case of real photons ($\lambda = \pm 1$) this relation can be rewritten in a simpler form

$$\langle -m'_d | T | -\lambda - m_d \rangle = (-1)^{m_d + m'_d} \langle m'_d | T | \lambda m_d \rangle. \quad (4)$$

The tensor analyzing power component T_{20} is defined as

$$T_{20} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m_d} \left(|\langle m_d | T | +1 +1 \rangle|^2 + |\langle m_d | T | +1 -1 \rangle|^2 - 2 |\langle m_d | T | +1 0 \rangle|^2 \right) / \sum_{m'_d m_d} |\langle m'_d | T | +1 m_d \rangle|^2. \quad (5)$$

2. The T -Matrix. We restrict ourselves in the present work to the impulse approximation (IA). The corresponding diagram is shown in Fig. 1.

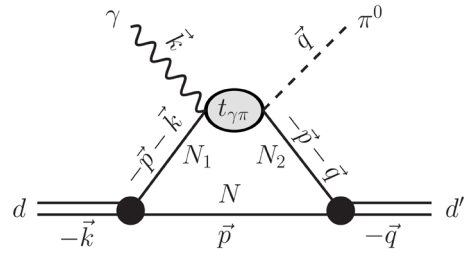
The reaction amplitude in the IA is given by

$$\langle m'_d | \mathcal{M}(\mathbf{q}, \mathbf{k}) | 1 m_d \rangle = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sum_{m_2 m_1 m} \Psi_{m_2 m}^{m'_d \dagger} \left(\mathbf{p} + \frac{\mathbf{q}}{2} \right) \langle m_2 | t_{\gamma\pi} | 1 m_1 \rangle \Psi_{m_1 m}^{m_d} \left(\mathbf{p} + \frac{\mathbf{k}}{2} \right), \quad (6)$$

where $t_{\gamma\pi}$ is the amplitude of π^0 photoproduction on the nucleon and Ψ^{m_d} denotes DWF. The scattering matrix $\mathcal{M}_{m'_d 1 m_d}$ is given by isolating the azimuthal dependence as follows

$$\mathcal{M}_{m'_d 1 m_d}(\Theta, \phi) = e^{i(1+m_d)\phi} T_{m'_d 1 m_d}(\Theta), \quad (7)$$

where the reduced T -matrix elements are defined by separating the ϕ -dependence from the $\mathcal{M}$ -matrix elements and it is used in Eq. (5) to calculate T_{20} .

Fig. 1. Diagrammatic representation of the $\gamma d \rightarrow \pi^0 d$ amplitude in IA

The pion photoproduction operator $t_{\gamma\pi}$ in the photon-nucleon c.m. frame has the well-known form [15]

$$\begin{aligned} \langle m_2 | t_{\gamma\pi} | \lambda m_1 \rangle = & \frac{4\pi W_{\gamma N_1}}{m} \langle m_2 | i(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_\lambda) F_1 + (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{q}}) (\boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\mathbf{k}} \times \boldsymbol{\epsilon}_\lambda)) F_2 + \\ & + i(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{k}}) (\hat{\mathbf{q}} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_\lambda) F_3 + i(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{q}}) (\hat{\mathbf{q}} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_\lambda) F_4 | m_1 \rangle. \end{aligned} \quad (8)$$

The amplitudes $F_i (i=1-4)$ are taken from the MAID07 model for pion photoproduction on the nucleon [14]. Before using Eq. (8) one has to transform the unit vectors $\hat{\mathbf{q}}$ and $\hat{\mathbf{k}}$ and the polarization vector $\boldsymbol{\epsilon}_\lambda$ to the γN_1 c.m. frame. This can be done making the use of a boost with the velocity $\mathbf{v} = \mathbf{p} / (E - \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2})$ with m being the nucleon mass.

3. Results and discussion. Figure 2 shows a comparison of results for the angular dependencies of T_{20} at three photon energies using different parameterizations of DWF. Black, blue and red curves are the results obtained using the wave functions corresponding to the potentials CD-Bonn [16], V18 [17] and Nijm93 [18], respectively. The results obtained for the potential NijmII [18] coincide with those for V18 and are not shown in the Figure. As one can see, the difference between the predictions is small. This is due to the fact that realistic nucleon-nucleon potentials are used in calculations. Yet we consider CD-Bonn NN potential as the main potential in this work. The χ^2/N_{dof} values are equal to 12.2, 13.8, 12.8, 13.8 for CD-Bonn, V18, Nijm93 and NijmII, respectively. If the data for $E_\gamma = 400$ MeV are not taken into account, the χ^2/N_{dof} values are equal to 8.6, 4.4, 4.8, 4.3.

Figure 3 shows the predictions for the angular dependencies of T_{20} at three photon energies made with the use of various theoretical models. Black curves as in Figure 2 are obtained in the framework of the model described in Section 1. Blue curves are the full calculation from work [7]. Red curves are obtained from a model similar to ours [8, 9]. Cyan lines are the predictions from work [6]. One can see that our model successfully describes the experimental data for the energies 260 and 340 MeV, but there is a large discrepancy for photon energy 400 MeV. Moreover, it follows from Figures 2 and 3 that none of the considered models describes the experimental data at the energy of 400 MeV. It should be noted that the discrepancy between our calculation and calculations [8, 9] is a separate important issue, since the models within which the calculations were carried out are identical.

Figures 4 and 5 show energy dependencies of T_{20} for fixed angles. Notations as in Figures 2 and 3. Green lines are calculations from Refs. [13]. One can see that our predictions have some small discrepancies with the experimental data at $\theta = 110^\circ$. For $\theta = 130^\circ$ we have good agreement with the experiment up to 325 MeV, but our model does not describe the experimental data for higher energies.

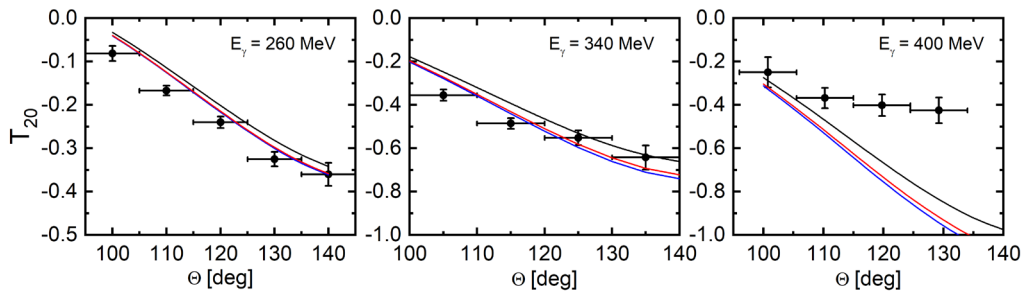


Fig. 2. The tensor analyzing power component T_{20} for various parameterizations of the deuteron wave function. Blue, red, and black lines correspond to DWF from Refs. [17, 18], and [16], respectively. Data are from Ref. [13]

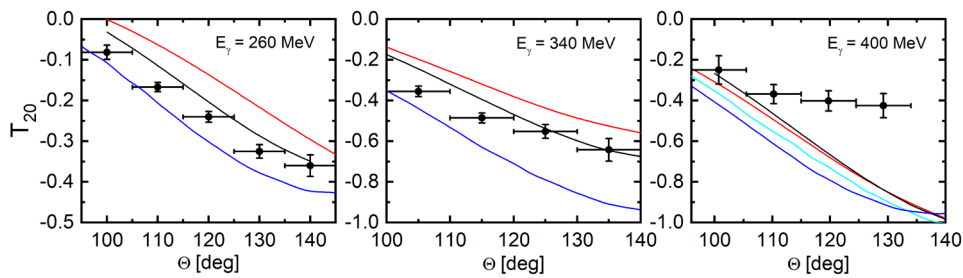


Fig. 3. Predictions of different models for the tensor analyzing power component T_{20} . Cyan, blue, red and black lines are the results from Refs. [6–9], and the present work, respectively. Data are from Ref. [13]

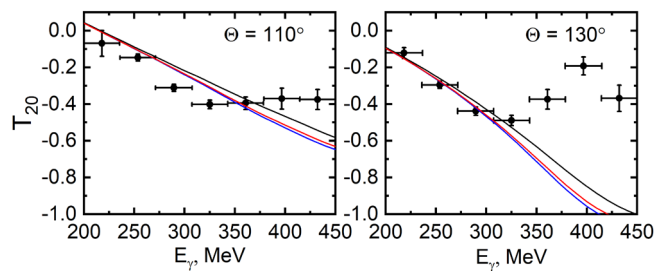


Fig. 4. The tensor analyzing power component T_{20} for various parameterizations of the deuteron wave function. Blue, red, and black lines correspond to DWF from Refs. [17, 18] and [16], respectively. Data are from Ref. [13]

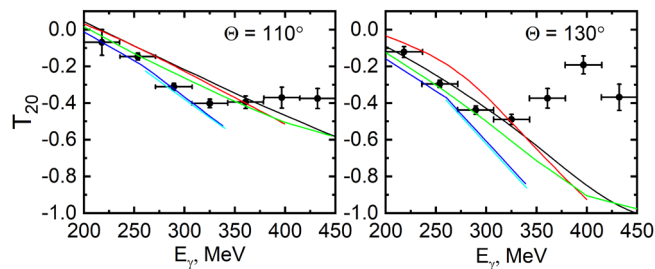


Fig. 5. Predictions of different models for the tensor analyzing power component T_{20} . Cyan, blue, red, green, and black lines are the results from Refs. [6–9, 13], and the present work, respectively. Data are from Ref. [13]

Conclusions. In the framework of the plane-wave impulse approximation using the unitary isobaric model MAID07 and various parameterizations of the deuteron wave function based on realistic nucleon-nucleon potentials, the tensor asymmetry component T_{20} in the reaction of coherent photoproduction of neutral pions on the deuteron in the framework of the impulse approximation is obtained. We have shown that the difference between predictions based on different NN potentials is small. Comparison of our model's predictions with experimental data shows that our model adequately describes the data for photon energies of 260 MeV and 340 MeV, but fails for energies of 400 MeV. It should be noted that all models presented in the literature have predictions close to ours at 400 MeV and, accordingly, the same problems. We do not have yet an explanation for this discrepancy.

Acknowledgments. Valuable discussions with V. V. Gauzshtein are highly appreciated. This work was supported by the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research under contract Ф24М-045.

Благодарности. Авторы выражают глубокую признательность В. В. Гаузштейну за ценные обсуждения. Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант № Ф24М-045).

References

1. Osland P., Rej A. K. Coherent pion photoproduction from deuterium at intermediate energies. *Nuovo Cimento A*, 1976, vol. 32, no. 4, pp. 469–483. <https://doi.org/10.1007/BF02730211>
2. Lazard C., Lombard R. J., Maric Z. Theoretical study of coherent pion photoproduction on the deuteron. *Nuclear Physics A*, 1976, vol. 271, no. 2, pp. 317–341. [https://doi.org/10.1016/0375-9474\(76\)90247-5](https://doi.org/10.1016/0375-9474(76)90247-5)

3. Rekalov M. P., Stoletnii I. V. Neutral pion photoproduction on deuterons in the resonance energy region. *Journal of Physics G*, 1991, vol. 17, no. 11, pp. 1643–1656. <https://doi.org/10.1088/0954-3899/17/11/011>
4. Blaazer E., Bakker B. L. G., Boersma H. J. Coherent pion production on the deuteron spin observables. *Nuclear Physics A*, 1994, vol. 568, no. 4, pp. 681–702. [https://doi.org/10.1016/0375-9474\(94\)90355-7](https://doi.org/10.1016/0375-9474(94)90355-7)
5. Garcilazo H., Guerra E. M. Pion photoproduction of the deuteron: the reaction $\gamma d \rightarrow \pi^0 d$. *Physical Review C*, 1995, vol. 52, no. 1, pp. 49–60. <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.52.49>
6. Wilhelm P., Arenhövel H. Coherent pion photoproduction on the deuteron in the Δ resonance region. *Nuclear Physics A*, 1995, vol. 593, no. 4, pp. 435–462. [https://doi.org/10.1016/0375-9474\(95\)00348-5](https://doi.org/10.1016/0375-9474(95)00348-5)
7. Kamalov S. S., Tiator L., Bennhold C. Coherent π^0 and η photoproduction on the deuteron. *Physical Review C*, 1997, vol. 55, no. 1, pp. 98–110. <https://doi.org/https://doi.org/10.1103/PhysRevC.55.98>
8. Darwish E. M., Saleh Yousef M. Coherent π^0 -photoproduction on the deuteron near threshold and the role of D -wave component of the deuteron wave function. *Moscow University Physics Bulletin*, 2019, vol. 74, no. 6, pp. 595–607. <https://doi.org/10.3103/S0027134919060122>
9. Al-Ghamdi H., Almogait E. S., Darwish E. M., Abdel-Khalek S. Tensor analyzing power component T_{20} of the $\gamma d \rightarrow \pi^0 d$ process in the photon energy range from 200 to 400 MeV. *Results in Physics*, 2020, vol. 18, art. ID 103238 (8). <https://doi.org/10.1016/j.rinp.2020.103238>
10. Bosted P., Laget J. M. Electromagnetic properties of the πNN system: (II). The $\gamma D \rightarrow \pi^0 D$ reaction. *Nuclear Physics A*, 1978, vol. 296, no. 3, pp. 413–430. [https://doi.org/10.1016/0375-9474\(78\)90082-9](https://doi.org/10.1016/0375-9474(78)90082-9)
11. Koch J. H., Woloshyn R. M. Near threshold photoproduction of neutral pions from the deuteron. *Physical Review C*, 1977, vol. 16, no. 5, pp. 1968–1975. <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.16.1968>
12. Peña M. T., Garcilazo H., Oelfke U., Sauer P. U. Effect of the $N\Delta$ interaction on observables of the πNN and γNN systems. *Physical Review C*, 1992, vol. 45, no. 4, pp. 1487–1511. <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.45.1487>
13. Gauzshtein V. V., Darwish E. M., Kuzin M. Ya. [et al.] Measurement of the tensor analyzing power T_{20} for the reaction $\gamma d \rightarrow \pi^0 d$. *European Physical Journal A*, 2020, vol. 56, no. 6, art. ID 169 (7). <https://doi.org/10.1140/epja/s10050-020-00175-z>
14. Drechsel D., Kamalov S. S., Tiator L. Unitary isobar model – MAID2007. *European Physical Journal A*, 2007, vol. 34, pp. 69–97. <https://doi.org/10.1140/epja/i2007-10490-6>
15. Chew G. F., Goldberger M. L., Low F. E., Nambu Y. Relativistic Dispersion Relation Approach to Photomeson Production. *Physical Review*, 1957, vol. 106, no. 6, pp. 1345–1355. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.106.1345>
16. Machleidt R. High-precision, charge-dependent Bonn nucleon-nucleon potential. *Physical Review C*, 2001, vol. 63, no. 2, pp. 024001 (32). <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.63.024001>
17. Wiringa R. B., Stoks V. G. J., Schiavilla R. Accurate nucleon-nucleon potential with charge-independence breaking. *Physical Review C*, 1995, vol. 38, no. 1, pp. 38–51. <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.51.38>
18. Stoks V. G. J., Klomp R. A. M., Terheggen C. P. F., de Swart J. J. Construction of high-quality NN potential models. *Physical Review C*, 1994, vol. 49, no. 6, pp. 2950–2963. <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.49.2950>

Information about the authors

Elena S. Kokoulina – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Head of the Sector, Joint Institute for Nuclear Research (6, Joliot-Curie Str., 141980, Dubna, Russian Federation). E-mail: kokoulina@jinr.ru

Michael I. Levchuk – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Chief Researcher, B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (68-2, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus); Chief Researcher, Institute of Applied Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (16, Akademicheskaya Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: mlevchuk@yandex.by

Maxim N. Nevmerzhitsky – Researcher, Institute of Applied Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (16, Akademicheskaya Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: nevmerzhhn@iaph.bas-net.by

Roman G. Shulyakovsky – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Leading Researcher, Institute of Applied Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (16, Akademicheskaya Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus); Leading Researcher, Institute for Nuclear Research of the Belarusian State University (11, Bobruiskaya Str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: shulyakovsky@iaph.bas-net.by

Информация об авторах

Елена Сергеевна Кокоулина – доктор физико-математических наук, доцент, начальник сектора лаборатории физики высоких энергий, Объединенный институт ядерных исследований (ул. Жолио-Кюри, 6, 141980, Дубна, Российская федерация). E-mail: kokoulina@jinr.ru

Михаил Иванович Левчук – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси (пр. Независимости, 68-2, 220072, Минск, Республика Беларусь); главный научный сотрудник, Институт прикладной физики Национальной академии наук Беларуси (ул. Академическая, 16, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: mlevchuk@yandex.ru

Максим Николаевич Невмержицкий – научный сотрудник, Институт прикладной физики Национальной академии наук Беларуси (ул. Академическая, 16, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: nevmerzhhn@iaph.bas-net.by

Роман Георгиевич Шуляковский – кандидат физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник, Институт прикладной физики Национальной академии наук Беларуси (ул. Академическая, 16, 220072, Минск, Республика Беларусь); ведущий научный сотрудник, Институт ядерных проблем Белорусского государственного университета (ул. Бобруйская, 11, 220006, Минск, Республика Беларусь). shulyakovsky@iaph.bas-net.by

ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)

ИНФОРМАТИКА INFORMATICS

УДК 519.852.6,004.925
<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2026-62-1-78-88>

Поступила в редакцию 25.09.2025
Received 25.09.2025

П. К. Шалькевич^{1,2}, Е. С. Ероминон²

¹*Институт системных исследований в АПК Национальной академии наук Беларуси,
Минск, Республика Беларусь*

²*Международный государственный экологический институт имени А. Д. Сахарова
Белорусского государственного университета, Республика Беларусь*

АЛГОРИТМЫ И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЗАИМОСВЯЗЕЙ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ УЧАСТКОВ РАЗНЫХ ТУРОВ АГРОХИМИЧЕСКОГО ОБСЛЕДОВАНИЯ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫХ ЗЕМЕЛЬ

Аннотация. Рассмотрено решение задачи определения географической взаимосвязи элементарных участков (ЭУ) различных туров агрохимического обследования сельскохозяйственных земель Республики Беларусь. Предложен вычислительный алгоритм для определения взаимосвязей ЭУ разных туров агрохимического обследования земель, основанный на применении алгоритма Уайлера – Атертона, который позволяет находить области пересечения границ элементарных участков и выполнять расчет процентного вхождения площадей ЭУ предыдущего тура в ЭУ текущего тура, что делает возможным установление между ними связей типа «родитель – потомок». Разработанное на основе предложенного алгоритма программное обеспечение реализовано с использованием современных веб-технологий (PHP, Drupal, MySQL, Bootstrap, Leaflet), что обеспечивает пакетную обработку больших массивов геоданных, визуализацию границ ЭУ на интерактивной карте и создание удаленного доступа к получаемым результатам. Апробация метода на материалах предполагаемых 15-го и 16-го туров агрохимического обследования показала его эффективность для выявления пространственных соответствий между ЭУ. Разработанные вычислительный алгоритм и программное обеспечение открывают новые возможности для ведения истории полей, расчета доз удобрений и оценки их эффективности, а также для решения инновационных задач точного земледелия и комплексной оценки состояния биосферы.

Ключевые слова: элементарный участок, алгоритмы пересечения многоугольников, алгоритм Уайлера – Атертона, анализ геоданных, история поля, геоинформационная система, ГИС, агрохимическое обследование, мониторинг окружающей среды

Для цитирования. Шалькевич, П. К. Алгоритмы и программное обеспечение для определения взаимосвязей элементарных участков разных туров агрохимического обследования сельскохозяйственных земель / П. К. Шалькевич, Е. С. Ероминон // Весті Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Сэрыя фізіка-матэматычных навук. – 2026. – Т. 62, № 1. – С. 78–88. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2026-62-1-78-88>

Pavel K. Shalkevich¹, Evgeniy S. Yeraminok²

¹*Institute of System Researches in Agro-Industrial Complex of the National Academy of Sciences of Belarus,
Minsk, Republic of Belarus*

²*International Sakharov Environmental Institute of Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus*

ALGORITHMS AND SOFTWARE FOR DETERMINING INTERRELATIONS BETWEEN AGRICULTURAL MANAGEMENT ZONES IN DIFFERENT TOURS OF AGROCHEMICAL SURVEYS

Abstract. The study considers the problem of determining geographical relationships between agricultural management zones (MZs) across different rounds of agrochemical surveys of agricultural lands in the Republic of Belarus. A computational algorithm is proposed for identifying relationships between MZs from successive survey rounds, based on the application of the Weiler – Atherton polygon clipping algorithm. The algorithm enables the detection of intersection areas between MZ

boundaries and the calculation of the percentage of overlap between MZs of the previous and current survey rounds, thereby allowing the establishment of hierarchical “parent – child” relationships among them. Software developed on the basis of the proposed algorithm was implemented using modern web technologies (PHP, Drupal, MySQL, Bootstrap, Leaflet). The system provides batch processing of large volumes of geospatial data, interactive visualization of MZ boundaries on digital maps, and remote access to analytical results. Experimental validation using geodata from the supposed 15th and 16th agrochemical survey rounds demonstrated the effectiveness of the proposed approach in identifying spatial correspondences between MZs. The developed computational algorithm and software offer new opportunities for the field history maintaining, optimization of fertilizer application rates, and evaluation of their agronomic efficiency, as well as for addressing advanced challenges in the precision agriculture and comprehensive biosphere assessment.

Keywords: agricultural management zone, polygon intersection algorithms, Weiler – Atherton algorithm, geospatial data analysis, field management history, geo-information system, GIS, agrochemical survey, environmental monitoring

For citation. Shalkevich P. K., Yeraminok E. S. Algorithms and software for determining interrelations between agricultural management zones in different tours of agrochemical surveys. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk* = *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2026, vol. 62, no. 1, pp. 78–88 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2026-62-1-78-88>

Введение. Данные о результатах проведения мониторинга состояния почвенного покрова и плодородия сельскохозяйственных земель Республики Беларусь накапливаются на различных иерархических уровнях, первым из которых является уровень элементарных участков [1]. ЭУ представляет собой теоретически неделимую часть земли, на основании агрохимического обследования почвы которой рассчитывается количество известкового материала, органических и минеральных удобрений, необходимых для внесения в эту почву, определяется эффективность внесенных удобрений, баланс элементов питания, радиационная обстановка на сельскохозяйственных землях [2]. Агрохимическое обследование сельскохозяйственных земель в нашей стране проводится по элементарным участкам один раз в установленный период, называемый туром [3]. На протяжении более чем 50 лет [4] результаты каждого тура обследования анализируются на уровне районов в сопоставлении с результатами предыдущих туров и публикуются в открытой печати [5]. Эти данные могут быть использованы для создания истории полей, однако на уровне районов они не дают достаточно информации для принятия эффективных решений по развитию сельскохозяйственных земель на уровне полей и хозяйств, что имеет особую значимость в условиях внедрения технологий точного земледелия.

Информация о состоянии агрохимических показателей плодородия почв на уровне полей и хозяйств формируется на основании данных обследования элементарных участков, ретроспективный анализ которых поможет создать наиболее точную версию истории полей в республике. Однако проведение такого анализа требует решения ряда проблем, одна из которых связана с непостоянством границ ЭУ. На практике границы последних могут изменяться в каждом туре обследования [6], к тому же в 2020 г. были изменены диапазоны размеров элементарных участков с 3–20 до 0,5–10 га [3]. Следовательно, количество, границы и площади ЭУ в рамках одного и того же поля в каждом новом туре обследования могут быть разными. Кроме того, соблюдение в проводимом туре обследования такой же нумерации элементарных участков, как и в предыдущем, носит рекомендательный характер [6], из чего следует, что даже при совпадении границ один и тот же ЭУ в каждом новом туре может иметь новый номер. В таких условиях возможна ситуация, когда, например, в текущем туре обследования будет сформировано 3 элементарных участка с номерами 1, 23 и 38 соответственно, тогда как в предыдущем туре на их месте был всего один элементарный участок с номером 17. Получается, что участки текущего тура с номерами 1, 23 и 38 не обследовались в таком же виде в туре предыдущем, однако нельзя сказать, что их территории не были обследованы вовсе – они были обследованы в границах участка 17 предыдущего тура. Значит, данные обследования ЭУ 17 предыдущего тура являются историческими данными для участков 1, 23 и 38 текущего тура. Разумеется, характер учета этих данных еще предстоит выяснить, но очевидно, что задача определения географической взаимосвязи между ЭУ разных туров обследования представляет собой высокую научную и практическую значимость.

Учитывая тот факт, что результаты крупномасштабного агрохимического обследования почв по каждому туру хранятся в виде оцифрованных карт с геоданными по каждому элементарному участку [5], географическая взаимосвязь границ ЭУ различных туров обследования сельскохозяйственных земель может быть определена путем применения к данным этих карт методов

компьютерной графики, используемых для нахождения областей пересечения двумерных многоугольников (которыми являются границы ЭУ). Поэтому наше исследование посвящено решению задачи определения географической взаимосвязи ЭУ разных туров агрохимического обследования сельскохозяйственных земель.

Мировая практика решения задач, связанных с обработкой геоданных элементарных участков. В мировой практике современные исследования с применением геоданных ЭУ в основном посвящены разработке критериев по формированию границ ЭУ для решения задач рационального использования удобрений, повышения урожайности [7–10] и принятия решений в области экологии [7, 11]. Так, в [7–10] были предложены методы по формированию границ ЭУ на основе геоданных, а в [11] – методы коррекции их границ для точной оценки последствий внесения пестицидов. Кроме того, существуют исследования, в которых геоинформационные технологии применяются для решения задач агроэкологического мониторинга и оптимизации землепользования в контексте уже устоявшихся границ ЭУ [12, 13].

Следует также отметить, что элементарные участки в мировой практике используются как основа для ведения точного земледелия [14, 15]. Это объясняет тенденцию к минимизации их размеров. Так, в США, которые считаются мировым лидером в области точного земледелия, площадь ЭУ не превышает 2 га [16], к такому же показателю стремятся и в Китае [17]. В Европе ситуация отличается для каждой страны, но в среднем площадь ЭУ не превышает 4 га (на примере Польши)¹. Очевидно, что и в Беларуси уменьшение площадей ЭУ до 0,5–10 га [3] связано с необходимостью внедрения технологий точного земледелия, так как предыдущих размеров в 20 га было явно для этого недостаточно [18]. Однако уникальный опыт нашей страны заключается в том, что, несмотря на сравнительно большие размеры ЭУ, их агрохимический состав методично отслеживался с 1960-х гг. [4]. Таким образом, решение задачи определения географической взаимосвязи границ ЭУ разных туров агрохимического обследования сельскохозяйственных земель станет первым шагом для создания наиболее достоверной, математически точной истории полей, которая в последующем обеспечит наиболее эффективный переход к технологиям точного земледелия в республике.

Алгоритмы поиска пересечений границ элементарных участков. Более чем за 60-летнюю практику крупномасштабного агрохимического и радиационного обследования почв сельскохозяйственных земель в Республике Беларусь, в каждой области было выполнено не менее, чем 12 туров обследований [3]. При наличии информации о границах ЭУ в каждом из этих туров в виде векторных форматов SHP, GeoJSON, KML или их аналогов и при соблюдении условия о том, что границы каждого отдельно взятого ЭУ будут иметь форму многоугольника, могут быть найдены все области пересечения ЭУ смежных туров. Таким образом, 2 отдельно взятых ЭУ в смежных турах могут быть представлены в виде многоугольников S и P :

$$P = \{p_i, p_{i+1}, \dots, p_n\}, \quad Q = \{q_j, q_{j+1}, \dots, q_m\}, \quad (1)$$

где P – многоугольник, описывающий границы ЭУ в одном туре обследования; Q – многоугольник, описывающий границы ЭУ в другом туре обследования; p_i – i -я вершина многоугольника P ; q_j – j -я вершина многоугольника Q ; n – количество вершин многоугольника P ; m – количество вершин многоугольника Q . Тогда ребра многоугольников P и Q могут быть заданы следующим образом:

$$e_i^P = [p_i, p_{i+1}], \quad p_{n+1} = p_1, \quad e_j^Q = [q_j, q_{j+1}], \quad q_{m+1} = q_1, \quad (2)$$

где e_i^P – i -е ребро многоугольника P , соединяющее вершины p_i и p_{i+1} ; $p_{n+1} = p_1$ – условие замыкания многоугольника P ; e_j^Q – j -е ребро многоугольника Q , соединяющее вершины q_j и q_{j+1} ; $q_{m+1} = q_1$ – условие замыкания многоугольника Q . Следовательно, задача нахождения областей пересечения ЭУ смежных туров сводится к нахождению пересечений ребер многоугольников, описывающих границы этих ЭУ. Для решения данной задачи в современных ГИС могут быть при-

¹ Analiza chemiczno-rolnicza gleby. Pobieranie próbek. PN-R-04031:1997. Warszawa: Polski Komitet Normalizacyjny, 1997. 5 s.

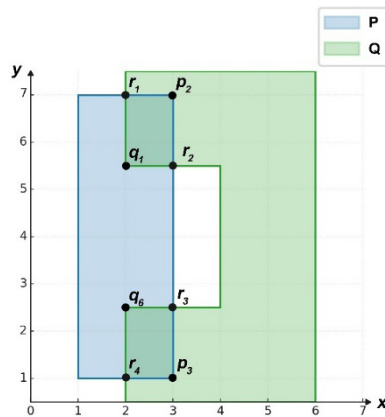


Рис. 1. Пример применения алгоритма Уайлера – Атертона для решения задачи нахождения областей пересечения ЭУ с границами P и Q

Fig. 1. An example of the Weiler – Atherton algorithm application to solve the task of detecting the intersection of managing zones with the boundaries of P and Q

менены специальные алгоритмы, наибольшую популярность из которых получили следующие [19, 20]: алгоритм Уайлера – Атертона [21], алгоритм Ватти [22] и алгоритм Грайнера – Хорманна [23]. Известно, что для компьютерной реализации два последних алгоритма требуют применения двусвязных списков, что обусловлено большими затратами памяти при выполнении вычислительных операций [20]. Учитывая, что земли сельскохозяйственного назначения в Беларуси занимают 9050,0 тыс. га [24], а площадь ЭУ составляет 0,5–10 га [3], количество ЭУ в каждом туре обследования начиная с 2020 г. будет превышать 900 тыс. Следовательно, применение алгоритмов, реализация которых требует высоких затрат памяти, нежелательно для решения задачи нахождения областей пересечения ЭУ смежных туров агрохимического обследования сельскохозяйственных земель Республики Беларусь, что обосновывает выбор алгоритма Уайлера – Атертона в качестве наиболее предпочтительного.

Применение алгоритма Уайлера – Атертона [21] для решения поставленной задачи требует решения следующих подзадач: поиск пересечений ребер многоугольников P и Q (осуществляется по часовой стрелке); классификация найденных пересечений на входные и выходные; формирование областей пересечения по найденным точкам пересечения. Вычисление пересечений ребер многоугольников P и Q для каждого ребра e_i^P и e_j^Q может быть описано следующим уравнением:

$$p_i + \lambda(p_{i+1} - p_i) = q_j + \mu(q_{j+1} - q_j), \quad \lambda, \mu \in [0, 1], \quad (3)$$

где λ – параметр, определяющий положение точки пересечения на ребре e_i^P ; μ – параметр, определяющий положение точки пересечения на ребре e_j^Q . Решение уравнения (3) позволит получить множество R точек пересечения границ многоугольников P и Q :

$$R = \{r_k, r_{k+1}, \dots, r_l\}, \quad (4)$$

где R – множество точек пересечения границ многоугольников P и Q ; r_k – k -я точка множества R ; l – количество точек множества R . Далее, найденные точки необходимо классифицировать на входные и выходные. Например, точки r_1 и r_3 , показанные на рис. 1, являются входными, а точки r_2 и r_4 – выходными.

После того как точки пересечения найдены, они должны быть добавлены в списки вершин каждого из рассматриваемых многоугольников. Затем необходимо произвести обход по ребрам многоугольников P и Q от входной точки до выходной и обратно. Учитывая, что каждой входной точке будет всегда соответствовать выходная [21] и что количество пар точек входа и выхода во множестве R будет в 2 раза меньше количества точек в этом множестве, результатом выполнения алгоритма Уайлера – Атертона для ЭУ будет s многоугольников S :

$$S_s = \bigcup_s G_s, \quad (5)$$

где S – многоугольник, описывающий границы пересечения многоугольников P и Q ; G_s – замкнутый маршрут (цикл) по ребрам e_i^P и e_j^Q , построенный от точки входа r_k и соответствующей ей точки выхода r_{k+l} ; s – количество пар точек входа и выхода.

Разработка вычислительного алгоритма определения взаимосвязей элементарных участков разных туров агрохимического обследования сельскохозяйственных земель. Для решения задачи определения географической взаимосвязи элементарных участков разных туров агрохимического обследования сельскохозяйственных земель, кроме поиска пересечений их границ, необходимо установить процент вхождения ЭУ предыдущего тура в ЭУ текущего. Учитывая, что границы отдельно взятого ЭУ текущего тура могут иметь пересечения с несколькими ЭУ предыдущего тура, предлагается устанавливать между такими ЭУ связь типа «родитель – потомок». Так, ЭУ предыдущего тура обследования, границы которых пересекаются с ЭУ текущего тура обследования, будут родителями последнего. А зная площади пересечения границ, будет несложно установить процент совпадения площадей родителей с потомком. Следовательно, сравнив ЭУ всех смежных туров обследования сельскохозяйственных земель, мы получим иерархические связи между ЭУ, начиная с первого тура обследования. Эти связи и сделают возможным формирование достоверной истории полей, необходимой для целей точного земледелия [25, 26].

Таким образом, после определения пересечений границ ЭУ различных туров агрохимического обследования необходимо выполнить количественную оценку степени их родства, что позволит установить логическую преемственность между ЭУ, которые не имеют явной идентификационной связи, но границы которых совпадают или частично накладываются. Для этого, при наличии геометрического пересечения границ двух ЭУ (предыдущего и текущего туров обследования), предлагается выполнять расчет отношения площади пересечения к общей площади ЭУ текущего (более нового) тура обследования. Рассчитанное значение предлагается выражать в процентах и обозначать как процент вхождения площади родительского элемента в площадь дочернего. Такой подход позволит выявить полное или частичное совпадение ЭУ, зафиксировать случаи деления одного ЭУ на несколько и объединения нескольких ЭУ в один.

Для последующей программной реализации вычислительного алгоритма определения взаимосвязей ЭУ разных туров агрохимического обследования сельскохозяйственных земель предлагается ввести для обозначения ЭУ программные сущности, в которых будет указываться информация о туре обследования ЭУ и геоданные ЭУ. Полученный вычислительный алгоритм показан на рис. 2.

Программная реализация алгоритма определения взаимосвязей ЭУ разных туров агрохимического обследования сельскохозяйственных земель. Для программной реализации разработанного алгоритма были выбраны хорошо зарекомендовавшие себя технологии веб-разработки, применяемые в ГИС комплексной оценки состояния биосферы [27]: язык программирования PHP, система управления содержимым Drupal и СУБД MySQL. Выбор СУБД MySQL обусловлен также тем, что в ней для реализации функций ГИС используется библиотека Boost.Geometry¹, в которой для выполнения операций поиска пересечений используется алгоритм Уайлера – Атертона². Графический пользовательский интерфейс (ГПИ) программного обеспечения для определения взаимосвязей ЭУ разных туров агрохимического обследования сельскохозяйственных земель был разработан при помощи фреймворка Bootstrap 5. Для отображения границ ЭУ на интерактивной карте были использованы библиотеки Leaflet и OpenStreetMap.

Для импорта геоданных была разработана форма, которая поддерживает загрузку геоданных в форматах SHP, DBF или SHX (рис. 3). После нажатия кнопки «Поиск родителей участков»

¹ MySQL: Making Use of Boost Geometry in MySQL GIS. Cambridge, 2025. URL: <https://dev.mysql.com/blog-archive/making-use-of-boost-geometry-in-mysql-gis/> (date of access: 14.09.2025).

² Barend's Blog: Intersections (1) / Barend Gehrels // Barend's Blog. 2010. URL: <https://barendgehrrels.blogspot.com/2010/12/intersections-1.html> (date of access: 14.09.2025).

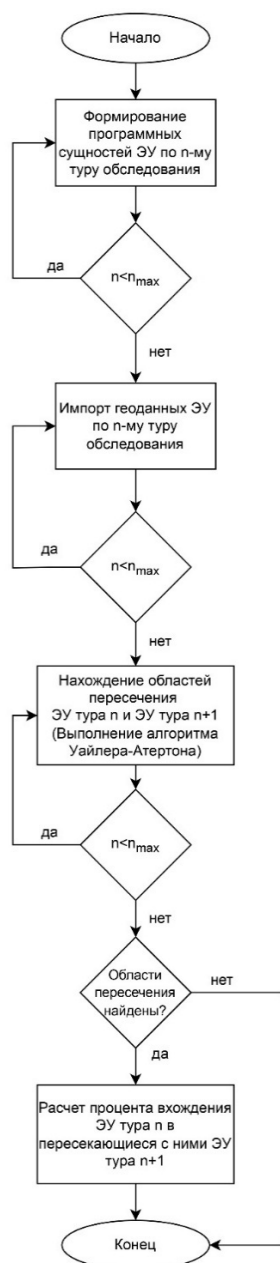


Рис. 2. Вычислительный алгоритм определения взаимосвязей ЭУ разных туров агрохимического обследования сельскохозяйственных земель

Fig. 2. Computational algorithm for determining interrelations between agricultural management zones in different tours of agrochemical surveys

начинается выполнение вычислительного алгоритма, представленного на рис. 2. Пакетная обработка данных выполняется при помощи Drupal Batch API. В качестве сервера был использован персональный компьютер на базе процессора Intel Core i3-9100 3.60GHz, объем оперативной памяти составил 16 Гб.

Были импортированы геоданные ЭУ по предполагаемым 15-му и 16-му турам обследования тестового хозяйства, относящегося к Минскому району Минской области. Количество ЭУ в 15-м туре составило 100 тыс., в 16-м – 80 тыс. Поиск пересечений выполнялся 38 мин 49 с. Отображение ЭУ 15-го и 16-го туров в разработанном программном обеспечении для определения взаимосвязей ЭУ разных туров агрохимического обследования сельскохозяйственных земель показано на рис. 4.

Рис. 3. Форма импорта геоданных ЭУ в программном обеспечении для определения взаимосвязей ЭУ разных туров агрохимического обследования сельскохозяйственных земель

Fig. 3. Agricultural management zones geodata import form in the software for linking agricultural management zones across different tours of agrochemical surveys

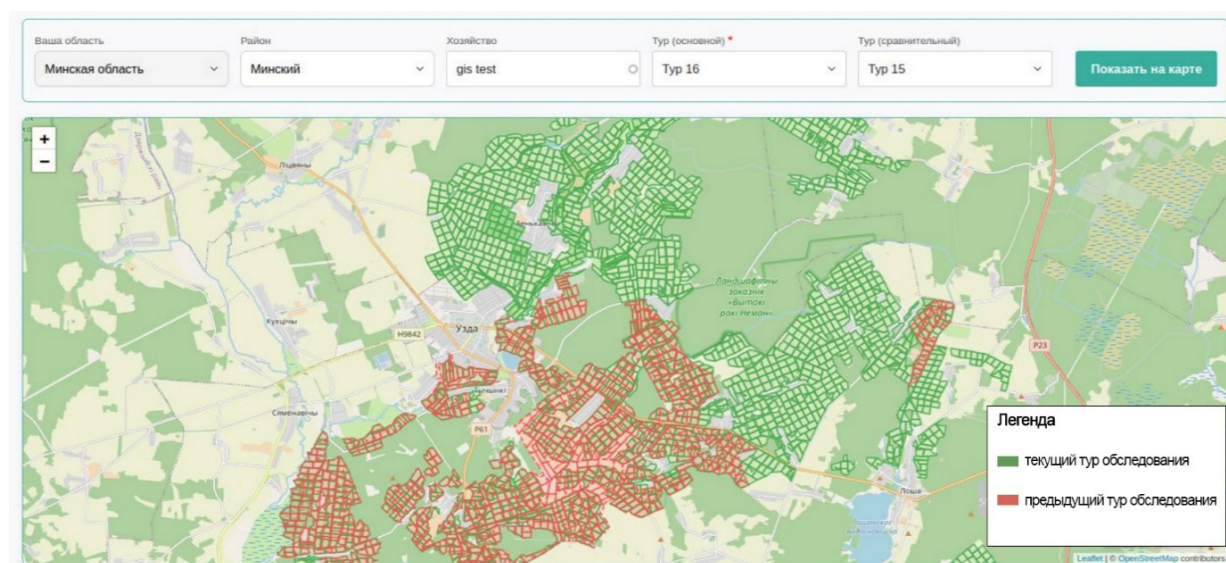


Рис. 4. Отображение ЭУ 15-го и 16-го туров в программном обеспечении для определения взаимосвязей ЭУ разных туров агрохимического обследования сельскохозяйственных земель

Fig. 4. Visualization of agricultural management zones from the 15th and 16th tours in the software for linking agricultural management zones across different tours of agrochemical surveys

Результаты и их обсуждение. В результате выполнения разработанного вычислительного алгоритма определения взаимосвязей ЭУ разных туров агрохимического обследования сельскохозяйственных земель для предполагаемых 15-го и 16-го туров обследования тестового хозяйства Минского района Минской области были установлены проценты вхождения границ ЭУ 15-го тура в ЭУ 16-го тура. Созданное на основе предложенного вычислительного алгоритма программное обеспечение позволяет через ГПИ выделить участок и мгновенно отобразить его границы и границы его пересечений с участками предыдущего тура, получив визуальное подтверждение степени пространственного сходства между ЭУ различных туров (рис. 5, а–с). Кроме того, через специальную форму пользователь может увидеть всех родителей выбранного ЭУ (рис. 5, d).

Результаты определения взаимосвязей ЭУ разных туров агрохимического обследования сельскохозяйственных земель для предполагаемых 15-го и 16-го туров обследования, показанные на примере ЭУ 533 15-го тура и ЭУ 922 и 390 16-го тура (см. рис. 5), свидетельствуют о том, что разработанное программное обеспечение представляет собой аналитический инструмент с гибкими возможностями визуализации. Кроме того, созданные в процессе реализации вычислительного алгоритма определения взаимосвязей ЭУ разных туров обследования программные сущности ЭУ могут быть легко расширены любыми атрибутивными и метаданными, что позволит решать не только стандартные задачи в сельском хозяйстве, связанные с расчетом доз

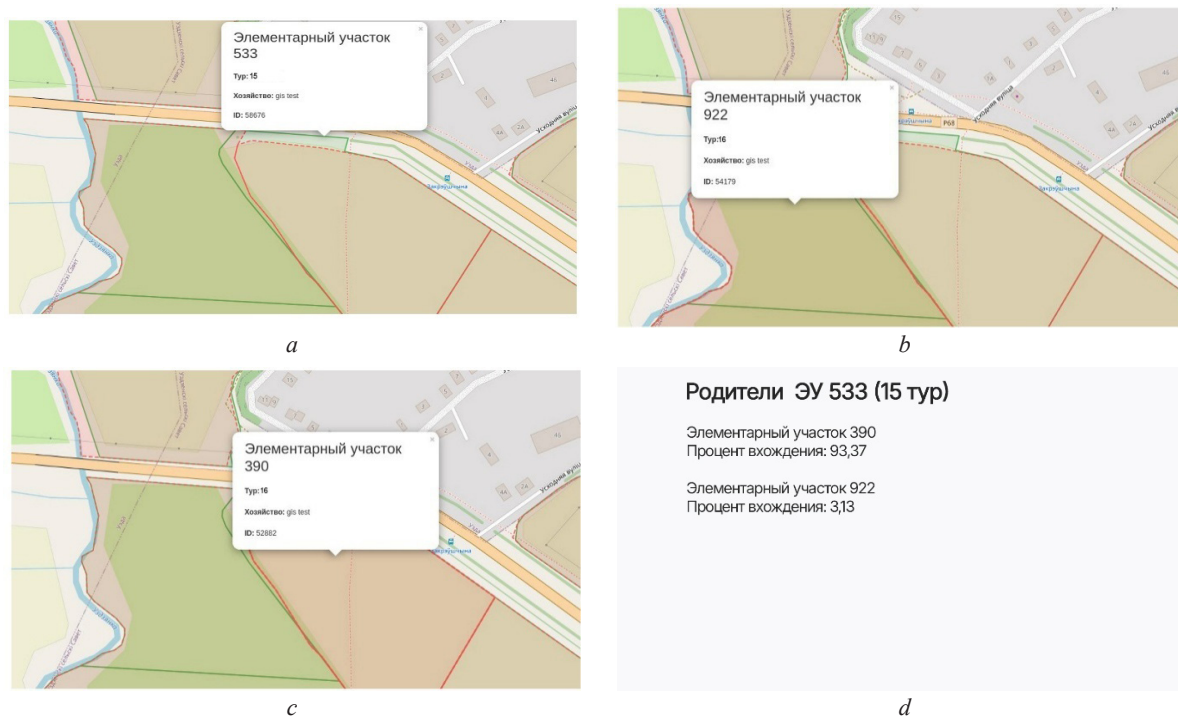


Рис. 5. Отображение на карте ЭУ 533 15-го тура обследования (а), ЭУ 922 16-го тура обследования (б), ЭУ 390 16-го тура обследования (с) и результаты расчетов их взаимосвязей (д)

Fig. 5. Visualization of agricultural management zone 533 from the 15th tour of agrochemical survey (a), agricultural management zone 922 from the 16th tour of agrochemical survey (b), agricultural management zone 390 from the 16th tour of agrochemical survey (c) and the calculation results for linking these management zones

внесения удобрений и оценкой их эффективности, но и инновационные аналитические задачи, обеспечивающие эффективное внедрение технологий точного земледелия. Также полученные результаты позволят использовать данные крупномасштабных агрохимических обследований в составе ГИС комплексной оценки состояния биосферы.

Важно отметить, что технологии, примененные для программной реализации алгоритма определения взаимосвязей ЭУ разных туров агрохимического обследования сельскохозяйственных земель, предоставляют возможность удаленного доступа к реализованному интерфейсу и полученным результатам. Следовательно, в отличие от стационарных ГИС, хотя и обеспечивающих широкие возможности по работе с геоданными на локальном персональном компьютере, разработанное программное обеспечение может быть адаптировано для работы онлайн аналитических, агрохимических и проектно-сметных отделов различных организаций, как научно-исследовательских институтов (Институт почвоведения и агрохимии НАН Беларуси, Институт системных исследований в АПК НАН Беларуси и др.) или областных проектно-изыскательских станций химизации сельского хозяйства, так и любого сельскохозяйственного предприятия Республики Беларусь. Кроме того, доступ к различной функциональности программного обеспечения может быть разграничен по ролям: аналитический отдел может работать только с геоданными, агрохимический – давать информацию об агрохимических обследованиях и анализировать результаты, полученные после обработки геоданных, проектный – формировать план внесения удобрений и сметы на основе данных, внесенных двумя другими отделами.

В качестве перспектив по развитию разработанных алгоритма и программного обеспечения может быть рассмотрено применение технологий параллельных вычислений [28] или использование древовидных структур данных [29] для ускорения вычислений пересечений границ ЭУ.

Заключение. Впервые разработаны вычислительный алгоритм и программное обеспечение для определения взаимосвязей элементарных участков разных туров агрохимического обследования сельскохозяйственных земель Республики Беларусь. Предложенный алгоритм основан на

применении алгоритма Уайлера – Атертона для нахождения областей пересечения ЭУ и на расчете процентов вхождения площадей ЭУ предыдущего тура в ЭУ текущего тура обследования, что делает возможным установление связей типа «родитель – потомок» между ЭУ разных туров обследования. Программная реализация разработанного алгоритма выполнена на базе современных веб-технологий, обеспечивающих применение пакетной обработки больших массивов геоданных и создание ГПИ с функциями визуализации и анализа результатов. Разработанные вычислительный алгоритм и программное обеспечение открывают новые возможности для ведения истории полей, расчета доз удобрений и оценки их эффективности, а также для решения инновационных задач точного земледелия и комплексной оценки состояния биосферы. Кроме того, полученные результаты свидетельствуют о перспективности применения данных многолетних агрохимических обследований на уровне элементарных участков для повышения качества агроэкологического мониторинга и эффективности управления земельными ресурсами.

Список использованных источников

1. Основные мероприятия по повышению плодородия почв сельскохозяйственных земель Республики Беларусь на 2021–2025 годы / В. В. Лапа, Н. Н. Цыбулько, М. В. Рак [и др.] // Почвоведение и агрохимия. – 2020. – № 2. – С. 7–25.
2. Справочник агрохимика / В. В. Лапа, Н. Н. Цыбулько, М. В. Рак [и др.]; Ин-т почвоведения и агрохимии; под ред. акад. В. В. Лапа. – 2-е изд. – Минск: ИВЦ Минфина, 2022. – 260 с.
3. Методика крупномасштабного агрохимического и радиационного обследования почв сельскохозяйственных земель Республики Беларусь / И. М. Богдевич, В. В. Лапа, Н. Н. Цыбулько [и др.]; Нац. акад. наук Беларуси, Ин-т почвоведения и агрохимии. – Минск: Ин-т почвоведения и агрохимии НАН Беларуси, 2020. – 45 с.
4. Богдевич, И. М. Полвека формирования и оптимизации агрохимических показателей плодородия пахотных и луговых почв Беларуси / И. М. Богдевич, Ю. В. Путятин, И. С. Станилевич // Почвенные и земельные ресурсы: традиционные и инновационные подходы к изучению и управлению: материалы Междунар. науч.-практ. конф., посвящ. 90-летию образования каф. почвоведения и геоинформ. систем БГУ и 85-летию со дня рождения д-ра геогр. наук, проф. В. С. Аношко, Минск, 21–24 сент. 2023 г. / Белорус. гос. ун-т ; редкол.: А. Н. Червань (гл. ред.) [и др.]. – Минск, 2023. – С. 20–24.
5. Агрохимическая характеристика почв сельскохозяйственных земель Республики Беларусь (2017–2020 гг.) / И. М. Богдевич, В. В. Лапа, М. В. Рак [и др.]. – Минск: Ин-т систем. исслед. в АПК НАН Беларуси, 2022. – 275 с.
6. Черныш, А. Ф. Мониторинг земель: учеб. пособие / А. Ф. Черныш. – Минск: БГУ, 2010. – 248 с.
7. Management zone delineation: utilizing multiple data sources to minimize soil spatial variability in commercial potato fields under Prince Edward Island pedoclimatic conditions / B. Javed, A. N. Cambouris, M. Duchemin [et al.] // Canadian Journal of Soil Science. – 2025. – Vol. 105. – P. 1–18. <https://doi.org/10.1139/cjss-2024-0019>
8. Management zone delineation strategies for phosphorus fertilizer recommendations under a no-till field in Eastern Canada / J. D. Nze Memiaghe, A. N. Cambouris, M. Duchemin [et al.] // Canadian Journal of Soil Science. – 2025. – Vol. 105. – P. 1–21. <https://doi.org/10.1139/cjss-2023-0088>
9. Development and evaluation approach of soil quality in agricultural soils: Integrated system for a more reliable delineation of homogeneous management zones / V. Perović, D. Čakmak, D. Jakšić [et al.] // Applied Soil Ecology. – 2025. – Vol. 206. – Art. ID 105860. <https://doi.org/10.1016/j.apsoil.2024.105860>
10. Delineation of field management zones based on soil properties in the Sudan and Sahel savannas of northern Nigeria / A. E. Eneji, V. Otie, A. Isong [et al.] // Journal of Agriculture and Food Research. – 2025. – Vol. 21. – Art. ID 101812. <https://doi.org/10.1016/j.jafr.2025.101812>
11. Paulukonis, E. A. Spatiotemporally derived agricultural field delineations for species effects assessments and environmental decision support / E. A. Paulukonis, S. T. Purucker // Science of The Total Environment. – 2025. – Vol. 958. – Art. ID 177967. <https://doi.org/10.1016/j.scitotenv.2024.177967>
12. Киндеев, А. Л. Методика учета почвенно-агрохимического потенциала для оптимизации структуры землепользования Воложинского района Республики Беларусь / А. Л. Киндеев, Н. В. Клебанович // Вестник Московского университета. Серия 17, Почвоведение. – 2024. – Т. 79, № 2. – С. 63–72.
13. Лукин, С. В. Применение геоинформационных систем для агроэкологического мониторинга сельскохозяйственных земель / С. В. Лукин, И. Г. Костин, Е. С. Малышева // Агрохимический вестник. – 2019. – № 4. – С. 8–13.
14. Shannon, D. K. Precision Agriculture Basics / D. K. Shannon, D. E. Clay, N. R. Kitchen. – American Society of Agronomy, Crop Science Society of America, and Soil Science Society of America, 2018. – 272 p. – (ASA, CSSA, and SSSA Books). <https://doi.org/10.2134/precisionagbasics>
15. An improved method of delineating rectangular management zones using a semivariogram-based technique / Xiaohu Zhang, Li Jiang, Xiaolei Qiu [et al.] // Computers and Electronics in Agriculture. – 2016. – Vol. 121. – P. 74–83. <https://doi.org/10.1016/j.compag.2015.11.016>
16. Мыслыва, Т. Прецизионные технологии: мировой опыт и перспективы для Беларуси / Т. Мыслыва, М. Шелюто, О. Куцаева // Наука и инновации. – 2021. – № 3. – С. 4–10.
17. Optimization of management zone delineation for precision crop management in an intensive farming system / Y. Yuan, B. Shi, R. Yost [et al.] // Plants. – 2022. – Vol. 11, № 19. – Art. ID 2611. <https://doi.org/10.3390/plants11192611>

18. Васьчула, А. В. Точное земледелие в Республике Беларусь: состояние и перспективы / А. В. Васьчула, С. А. Антошук // *Механизация и электрификация сельского хозяйства*. – 2019. – № 52. – С. 19–24.
19. An algorithm for polygon clipping, and for determining polygon intersections and unions / Y. K. Liu, X. Q. Wang, S. Z. Bao, M. [et al.] // *Computers & Geosciences*. – 2007. – Vol. 33, № 5. – P. 589–598. <https://doi.org/10.1016/j.cageo.2006.08.008>
20. Foster, E. L. Clipping simple polygons with degenerate intersections / E. L. Foster, K. Hormann, R. T. Pota // *Computers & Graphics*: X. – 2019. – Vol. 2. – P. 1–8. <https://doi.org/10.1016/j.cagx.2019.100007>
21. Weiler, K. Hidden surface removal using polygon area sorting / K. Weiler, P. Atherton // *Proceedings of the 4th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques (SIGGRAPH '77)*. – 1977. – P. 214–222.
22. Vatti, R. B. A generic solution to polygon clipping / R. B. Vatti // *Communications of the ACM*. – 1992. – Vol. 35, № 7. – P. 56–63. <https://doi.org/10.1145/129902.129906>
23. Greiner, G. Efficient clipping of arbitrary polygons / G. Greiner, K. Hormann // *ACM Transactions on Graphics*. – 1998. – Vol. 17, № 2. – P. 71–83. <https://doi.org/10.1145/274363.274364>
24. Колмыков, А. В. Основные тенденции динамики земельных ресурсов и планирование землепользования в Республике Беларусь / А. В. Колмыков, А. Н. Авдеев // *Вестник Белорусской государственной сельскохозяйственной академии*. – 2025. – № 1. – С. 152–161.
25. In pursuit of responsible innovation for precision agriculture technologies / M. Gardezi, D. T. Adereti, R. Stock, A. Ogunyiola // *Journal of Responsible Innovation*. – 2022. – Vol. 9, № 2. – P. 224–247. <https://doi.org/10.1080/23299460.2022.2071668>
26. Mgendi, G. Unlocking the potential of precision agriculture for sustainable farming / G. Mgendi // *Discover Agriculture*. – 2024. – Vol. 2. – Art. ID 87. <https://doi.org/10.1007/s44279-024-00078-3>
27. Система управления данными и программное обеспечение для комплексной оценки состояния биосферы / П. К. Шалькевич, Д. С. Лавникович, Ю. С. Городная, А. В. Чепенцова // *Доклады БГУИР*. – 2024. – Т. 22, № 4. – С. 92–99. <https://doi.org/10.35596/1729-7648-2024-22-4-92-99>
28. Shoja, E. GPU-based parallel algorithm for computing point visibility inside simple polygons / E. Shoja, M. Ghodsi // *Computers & Graphics*. – 2015. – Vol. 49. – P. 1–9. <https://doi.org/10.1016/j.cag.2015.02.010>
29. Zhou, C. Performance evaluation of spatial indexing to identify polygon intersection / C. Zhou, M. Li // *Geocarto International*. – 2019. – Vol. 35. – P. 1–18. <https://doi.org/10.1080/10106049.2019.1624987>

References

1. Lapa V. V., Tsybulka N. N., Rak M. V., Putyatin Y. V., Pirogovskaya G. V., Azarenok T. N., Seraya T. M. [et al.]. Basic measures to increase soil fertility of agricultural lands of the Republic of Belarus for 2021–2025 years. *Pochvovedenie i agrokhimiia = Soil Science and Agrochemistry*, 2020, no. 2, pp. 7–25 (in Russian).
2. Lapa V. V., Smeyan N. I., Bogdevich I. M., Chernysh A. F., Rak M. V., Tsyganov A. R. [et al.] *Agrochemist Handbook*. Minsk, IVC Minfina, 2022. 260 p. (in Russian).
3. Bogdevich I. M., Lapa V. V., Tsybulka N. N., Rak M. V., Putyatin Y. V., Azarenok T. N. [et al.]. *Methodology of Large-Scale Agrochemical and Radiological Survey of Soils of Agricultural Lands of the Republic of Belarus*. Minsk, Institute of Soil Science and Agrochemistry, 2020. 45 p.
4. Bogdevich I. M., Putyatin Y. V., Stanilevich I. S. Half a century of formation and optimization of agrochemical fertility indicators of arable and meadow soils of Belarus. *Pochvennye i zemel'nye resursy: traditsionnye i innovatsionnye podkhody k izucheniiu i upravleniiu: materialy Mezhdunarodnaya nauchno-prakticheskaya konferentsiya, posvyashchennaya 90-letiiu obrazovaniia kafedry pochvovedeniia i geoinformatsionnykh sistem BGU i 85-letiiu so dnia rozhdeniia d-ra geogr. nauk, prof. V. S. Anoshko* [Soil and land resources: traditional and innovative approaches to study and management: Proc. of the International scientific and practical conference dedicated to the 90th anniversary of the Department of Soil Science and Geoinformation Systems of BSU and the 85th anniversary of the birth of Doctor of Geogr. Sciences, Professor V. S. Anoshko]. Minsk, 2023, pp. 20–24 (in Russian).
5. Bogdevich I. M., Lapa V. V., Rak M. V., Putyatin Yu. V., Stanilevich I. S., Mikhailovskaya N. A. [et al.]. *Agrochemical Characteristics of Soils of Agricultural Lands of the Republic of Belarus (2017–2020)*. Minsk, Institute of System Researches in Agro-Industrial Complex of the National Academy of Sciences of Belarus, 2022. 275 p. (in Russian).
6. Chernysh A. F. *Land Monitoring*. Minsk, Belarusian State University, 2010. 248 p. (in Russian).
7. Javed B., Cambouris A. N., Duchemin M., Ziadi N., Karam A. Management zone delineation: utilizing multiple data sources to minimize soil spatial variability in commercial potato fields under Prince Edward Island pedoclimatic conditions. *Canadian Journal of Soil Science*, 2025, vol. 105, pp. 1–18. <https://doi.org/10.1139/cjss-2024-0019>
8. Nze Memiaghe J. D., Cambouris A. N., Duchemin M., Ziadi N., Karam A. Management zone delineation strategies for phosphorus fertilizer recommendations under a no-till field in Eastern Canada. *Canadian Journal of Soil Science*, 2025, vol. 105, pp. 1–21. <https://doi.org/10.1139/cjss-2023-0088>
9. Perović V., Čakmak D., Jakšić D., Milanović M., Matić M., Pavlović D., Mitrović M., Pavlović P. Development and evaluation approach of soil quality in agricultural soils: Integrated system for a more reliable delineation of homogeneous management zones. *Applied Soil Ecology*, 2025, vol. 206, art. ID 105860. <https://doi.org/10.1016/j.apsoil.2024.105860>
10. Eneji A. E., Otie V., Isong A., Aki E., Akpan J., Adamu M., Offiong R., An P. Delineation of field management zones based on soil properties in the Sudan and Sahel savannas of northern Nigeria. *Journal of Agriculture and Food Research*, 2025, vol. 21, art. ID 101812. <https://doi.org/10.1016/j.jafr.2025.101812>
11. Paulukonis E. A., Purucker S. T. Spatiotemporally derived agricultural field delineations for species effects assessments and environmental decision support. *Science of The Total Environment*, 2025, vol. 958, art. ID 177967. <https://doi.org/10.1016/j.scitotenv.2024.177967>

12. Kindeev A. L., Klebanovich N. V. Method of accounting soil-agrochemical potential for optimizing the structure of land use of the Volozhinsk district of the Republic of Belarus. *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya 17. Pochvovedenie = Lomonosov Soil Science Journal*, 2024, vol. 79. no. 2, pp. 63–72 (in Russian). <https://doi.org/10.55959/msu0137-0944-17-2024-79-2-63-72>
13. Lukin S. V., Kostin I. G., Malysheva E. S. Application of gis for agroecological monitoring of agricultural lands. *Agrokhimicheskii vestnik = Agrochemical Herald*, 2019, no. 4, pp. 8–13 (in Russian).
14. Shannon D. K., Clay D. E., Kitchen N. R. *Precision Agriculture Basics. ASA, CSSA, and SSSA Books*. American Society of Agronomy, Crop Science Society of America, and Soil Science Society of America, 2018. 272 p. <https://doi.org/10.2134/precisionagbasics>
15. Xiaohu Zhang, Li Jiang, Xiaolei Qiu, Jianxiu Qiu, Juan Wang, Yan Zhu. An improved method of delineating rectangular management zones using a semivariogram-based technique. *Computers and Electronics in Agriculture*, 2016, vol. 121, pp. 74–83. <https://doi.org/10.1016/j.compag.2015.11.016>
16. Myslyva T., Sheliuta B., Kutsayeva A. Precision technologies: World experience and prospects for Belarus. *Nauka i innovacii = Science and Innovations*, 2021, no. 3, pp. 4–10 (in Russian).
17. Yuan Y., Shi B., Yost R., Liu X., Tian Y., Zhu Y., Cao W., Cao Q. Optimization of management zone delineation for precision crop management in an intensive farming system. *Plants*, 2022, vol. 11, no. 19, art. ID 2611. <https://doi.org/10.3390/plants11192611>
18. Vashchula A. V., Antoshuk S. A. Precision agriculture in the Republic of Belarus: current state and prospects. *Mekhanizatsiia i elektrifikatsiia sel'skogo khoziaistva = Mechanization and Electrification of Agriculture*, 2019, no. 52, pp. 19–24 (in Russian).
19. Liu Y. K., Wang X. Q., Bao S. Z., Gomboši M., Žalik B. An algorithm for polygon clipping, and for determining polygon intersections and unions. *Computers & Geosciences*, 2007, vol. 33, no. 5, pp. 589–598. <https://doi.org/10.1016/j.cageo.2006.08.008>
20. Foster E. L., Hormann K., Pota R. T. Clipping simple polygons with degenerate intersections. *Computers & Graphics*, 2019, vol. 2, pp. 1–8. <https://doi.org/10.1016/j.cagx.2019.100007>
21. Weiler K., Atherton P. Hidden surface removal using polygon area sorting. *Proceedings of the 4th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques (SIGGRAPH '77)*, 1977, pp. 214–222.
22. Vatti R. B. A generic solution to polygon clipping. *Communications of the ACM*, 1992, vol. 35, no. 7, pp. 56–63. <https://doi.org/10.1145/129902.129906>
23. Greiner G., Hormann K. Efficient clipping of arbitrary polygons. *ACM Transactions on Graphics*, 1998, vol. 17, no. 2, pp. 71–83. <https://doi.org/10.1145/274363.274364>
24. Kolmykov A. V., Avdeev A. N. Main trends in land resource dynamics and land-use planning in the Republic of Belarus. *Vestnik Belorusskoi gosudarstvennoi sel'skokhoziaistvennoi akademii = Bulletin of the Belarusian State Agricultural Academy*, 2025, no. 1, pp. 152–161 (in Russian).
25. Gardezi M., Adereti D. T., Stock R., Ogunyola A. In pursuit of responsible innovation for precision agriculture technologies. *Journal of Responsible Innovation*, 2022, vol. 9, no. 2, pp. 224–247. <https://doi.org/10.1080/23299460.2022.2071668>
26. Mgendi G. Unlocking the potential of precision agriculture for sustainable farming. *Discover Agriculture*, 2024, vol. 2, art. ID 87. <https://doi.org/10.1007/s44279-024-00078-3>
27. Shalkevich P. K., Lavnikov D. S., Gorodnaya Yu. S., Chementsova A. V. Data Management System and Software for Comprehensive Assessment of the State of the Biosphere. *Doklady BGUIR*, 2024, vol. 22, no. 4, pp. 92–99 (in Russian). <https://doi.org/10.35596/1729-7648-2024-22-4-92-99>
28. Shoja E., Ghodsi M. GPU-based parallel algorithm for computing point visibility inside simple polygons. *Computers & Graphics*, 2015, vol. 49, pp. 1–9. <https://doi.org/10.1016/j.cag.2015.02.010>
29. Zhou C., Li M. Performance evaluation of spatial indexing to identify polygon intersection. *Geocarto International*, 2019, vol. 35, pp. 1–18. <https://doi.org/10.1080/10106049.2019.1624987>

Информация об авторах

Шалькевич Павел Константинович – кандидат технических наук, доцент, ведущий научный сотрудник, Институт системных исследований в АПК Национальной академии наук Беларуси (ул. Казинца, 103, 220108, Минск, Республика Беларусь); доцент, Международный государственный экологический институт имени А. Д. Сахарова Белорусского государственного университета (ул. Долгобродская, 23/1, 220070, Минск, Республика Беларусь). E-mail: p.k.shalkevich@gmail.com. <https://orcid.org/0000-0002-9212-2683>

Ероминоков Евгений Сергеевич – студент, Международный государственный экологический институт имени А. Д. Сахарова Белорусского государственного университета (ул. Долгобродская, 23/1, 220070, Минск, Республика Беларусь). E-mail: erominok@3soft.by

Information about the authors

Pavel K. Shalkevich – Ph. D. (Engineering), Associate Professor, Leading Researcher, Institute of System Researches in Agro-Industrial Complex of the National Academy of Sciences of Belarus (103, Kazintsa Str., 220108, Minsk, Republic of Belarus); Associate Professor, Sakharov Environmental Institute of Belarusian State University (23/1, Dolgobrodskaya Str., Minsk, 220070, Republic of Belarus). E-mail: p.k.shalkevich@gmail.com. <https://orcid.org/0000-0002-9212-2683>

Evgeniy S. Yeraminok – Student, International Sakharov Environmental Institute of Belarusian State University (23/1, Dolgobrodskaya Str., Minsk, 220070, Republic of Belarus). E-mail: erominok@3soft.by