

# ВЕСЦІ

## НАЦЫЯНАЛЬНАЯ АКАДЭМІЯ НАВУК БЕЛАРУСІ

СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК 2015 № 4

# ИЗВЕСТИЯ

## НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ

СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК 2015 № 4

ЗАСНАВАЛЬНІК – НАЦЫЯНАЛЬНАЯ АКАДЭМІЯ НАВУК БЕЛАРУСІ

Часопіс выдаецца са студзеня 1965 г.

Выходзіць чатыры разы ў год

### ЗМЕСТ

Гражданин, ученый, государственный деятель. Памяти академика Николая Александровича Борисевича 5

### МАТЭМАТЫКА

- Корзюк В. И., Мандрик А. А.** Первая смешанная задача в полуполосе для неоднородного нестрого гиперболического уравнения третьего порядка ..... 10
- Матысик О. В.** Неявный метод решения самосопряженной некорректной задачи с приближенным оператором и апостериорным выбором параметра регуляризации ..... 18
- Ровба Е. А., Дирвук Е. В.** О константе Лебега интерполяционных рациональных процессов Лагранжа по узлам Чебышева – Маркова ..... 25
- Малютин В. Б.** Вычисление матричнозначных функциональных интегралов, основанное на аппроксимации хронологически упорядоченной экспоненты ..... 32
- Муха В. С., Кузьков А. Н.** Линейное пропорциональное Прокрустово преобразование в распознавании рукописных букв ..... 38
- Гальмак А. М.** Единицы и их аналоги в  $l$ -арных группах ..... 46

### ФІЗІКА

- Курочкин Ю. А., Шелковый Д. В., Боярина И. П.** О переменных центра масс и относительного движения в трехмерных пространствах с радиусом кривизны, зависящим от времени ..... 56
- Овсюк Е. М., Редько А. Н., Редьков В. М.** Частица Дирака – Кэлера в пространстве Лобачевского, нерелятивистское приближение, бозонная интерпретация ..... 61

<b>Кулак Г. В., Крох Г. В., Ропот П. И., Шакин О. В.</b> Коллинеарное акустооптическое взаимодействие бес- селевых световых пучков в двуосных кристаллах .....	71
<b>Батище С. А., Бушук С. Б., Кузьмук А. А., Савич А. В., Татур Г. А., Грабнер Г., Котэк В.</b> Лазерная абляционная обработка роговицы глаза комбинированным излучением 213+1440 нм .....	77
<b>Коршунов Ф. П., Жданович Н. Е., Гуринович В. А., Лукша С. В.</b> Влияние электронного облучения на электрические характеристики <i>p-n</i> -структур на ядерно-легированном кремнии .....	82
<b>Гончаренко И. А., Рябцев В. Н.</b> Метод расчета изогнутых микроструктурированных волноводов с не- сколькими сердцевинами .....	87

#### ІНФАРМАТЫКА

<b>Залесский Б. А., Середин Э. Н.</b> Метод нечеткой кластеризации <i>k</i> -средних со штрафной функцией и про- извольными степенями вектора принадлежности .....	96
<b>Сотсков Ю. Н., Егорова Н. Г., Вернер Ф.</b> Многогранник оптимальности расписания, минимизирующего сумму взвешенных моментов завершения обслуживания требований .....	103
<b>Войтикова М. В., Хурса Р. В.</b> Интеллектуальный анализ данных для диагностики латентных нарушений гемодинамики: условия практического применения .....	112

#### КАРОТКІЯ ПАВЕДАМЛЕННІ

<b>Гончаренко А. М.</b> О распространении солитонов в отрицательных селфоках .....	119
--	-----

#### ВУЧОНЫЯ БЕЛАРУСІ

<b>Николай Станиславович Казак</b> (К 70-летию со дня рождения) .....	121
<b>Паказальнік артыкулаў, змешчаных у часопісе «Весці НАН Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных наук» у 2015 годзе</b> .....	123

---

ІЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ 2015 № 4

Серия физико-математических наук

*На русском, белорусском и английском языках*

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь,  
свидетельство о регистрации № 392 от 18.05.2009

---

Камп'ютарная вёрстка *В. Л. Смольскай*

Здадзена ў набор 23.11.2015. Падпісана да друку 18.12.2015. Выхад у свет 29.12.2015. Фармат 60×84<sup>1</sup>/<sub>8</sub>. Папера афсетная.

Друк лічбавы. Ум. друк. арк. 14,88. Ул.-выд. арк. 16,4. Тыраж 70 экз. Заказ 246.

Кошт нумару: індывідуальная падпіска – 83 600 руб.; ведамасная падпіска – 203 287 руб.

Выдавец і паліграфічнае выкананне:

Рэспубліканскае ўнітарнае прадпрыемства «Выдавецкі дом «Беларуская навука». Пасведчанне аб дзяржаўнай  
рэгістрацыі выдаўца, вытворцы, распаўсюджвальніка друкаваных выданняў № 1/18 ад 02.08.2013.

ЛП 02330/455 ад 30.12.2013. Вул. Ф. Скарыны, 40, 220141, г. Мінск.

© Выдавецкі дом «Беларуская навука».  
Весці НАН Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук, 2015

# PROCEEDINGS

## OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF BELARUS

---

PHYSIC AND MATHEMATICS SERIES 2015 N 4

---

FOUNDED IS THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF BELARUS

The Journal has been published since January 1965

Issued four times a year

### CONTENTS

**Citizen, scientist, statesman.** In memory of Academician Nikolai Aleksandrovich Borisevich ..... 5

#### MATHEMATICS

- Korzyuk V. I., Mandryk A. A.** First mixed problem in the half-band for the third-order nonhomogeneous non-strictly hyperbolic equation ..... 10
- Matysik O. V.** Implicit method for solving a self-adjoint ill-posed problem with an approximate operator and an a posteriori choice of the regularization parameter ..... 18
- Rovba Y. A., Dirvuk Y. V.** Estimation of the Lebesgue constant for the rational Lagrange interpolation processes through the Chebyshev – Markov nodes ..... 25
- Malyutin V. B.** Evaluation of matrix valued functional integrals based on the approximation of a chronologically ordered exponent ..... 32
- Mukha V. S., Kuzkou A. N.** Linear proportional Procrustes transformation in recognition of handwritten letters ..... 38
- Gal'mak A. M.** Identities and their analogues in  $n$ -ary groups ..... 46

#### PHYSICS

- Kurochkin Yu. A., Shoukovy Dz. V., Boyurina I. P.** Mass center and relative motion variables in three-dimensional spaces with a time-dependent curvature radius ..... 56
- Ovsyuk E. M., Red'ko A. N., Red'kov V. M.** Dirac – Kahler particle in the Lobachevsky space, non-relativistic approximation, boson interpretation ..... 61
- Kulak G. V., Krokh G. V., Ropot P. I., Shakin O. V.** Collinear acousto-optic interaction of Bessel light beams in biaxial crystals ..... 71
- Batishche S. A., Bushuk S. B., Kouzmouk A. A., Savitch A. V., Tatur H. A., Grabner G., Kautek W.** Combined 213 nm+1444 nm laser ablation treatment of bovine cornea ..... 77
- Korshunov F. P., Zhdanovich N. E., Gurinovich V. A., Luksha S. V.** Effect of electron radiation on the electrical characteristics of the  $p$ - $n$ -structures based on nuclear-doped silicon ..... 82
- Goncharenko I. A., Reabtsev V. N.** Method of calculation of bent multi-core microstructured fibers ..... 87

## INFORMATICS

<b>Zalesky B. A., Seredin E. N.</b> Fuzzy C-means clustering method with the Gibbs penalty function and arbitrary powers of the vector accessories .....	96
<b>Sotskov Yu. N., Egorova N. G., Werner F.</b> Optimality box of the schedule minimizing the sum of the weighted completion times of the job .....	103
<b>Voitikova M. V., Khursa R. V.</b> Diagnostics of latent hemodynamics by data mining: conditions of practical use .....	112

## SHORT COMMUNICATIONS

<b>Goncharenko A. M.</b> Propagation of solitons in negative selfocs .....	119
--	-----

## SCIENTISTS OF BELARUS

<b>Kazak Nicolai Stanislavovich</b> (On the 70 <sup>th</sup> anniversary of his birthday) .....	121
<b>List of Publications for 2015 in “Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series”</b> .....	126

## ГРАЖДАНИН, УЧЕНЫЙ, ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ДЕЯТЕЛЬ

*Памяти академика Николая Александровича Борисевича*

25 октября 2015 г. окончил свой жизненный путь выдающийся ученый в области молекулярной спектроскопии, люминесценции, лазерной физики и инфракрасной техники, доктор физико-математических наук, профессор, академик Национальной академии наук Беларуси, Академии наук СССР и Российской академии наук, иностранный член ряда зарубежных академий, видный государственный и общественный деятель, организатор советской и белорусской науки, участник Великой Отечественной войны, Герой Социалистического Труда Николай Александрович Борисевич.

Николай Александрович родился 21 сентября 1923 г. в поселке Лучной Мост Березинского района Минской области. В 1941 г. с отличием окончил среднюю школу и твердо решил поступать на физико-математический факультет Белорусского государственного университета. Выпускной вечер состоялся 18 июня 1941 г., а через три дня началась долгая и страшная война.

В составе подпольной группы Н. А. Борисевич вместе со сверстниками участвует в сопротивлении германским оккупантам. В июне 1942 г. он уходит в 152-й партизанский отряд, где становится подрывником, затем – командиром взвода. С февраля 1944 г. – солдат действующей Красной Армии. В составе 539-го гаубичного артиллерийского полка корпуса прорыва 1-го Белорусского фронта старший топовычислитель Н. А. Борисевич прошел Беларусь, Польшу, через Хельм, Люблин, Лодзь, Познань, Пулавский плацдарм на Висле, Франкфуртский и Кюстринский – на Одере, дошел до Берлина. За отвагу, проявленную в боях, был награжден двумя орденами Красной Звезды, медалью «Партизану Отечественной войны» I степени, орденом Отечественной войны I степени, медалями «За взятие Берлина», «За победу над Германией в Великой Отечественной войне 1941–1945 гг.»

В ноябре 1945 г. он был демобилизован и в этом же году, несмотря на то, что первый семестр уже заканчивался, стал студентом физического факультета БГУ. Непросто было наверстывать упущенное вчерашнему солдату и не отставать от однокурсников – годы, прошедшие после окончания средней школы, давали о себе знать. После лекций, обложившись учебниками, он старательно учил, наверстывая упущенное. Практические занятия в лабораториях, научные семинары и нескончаемые дискуссии с товарищами по общежитию все глубже вовлекали его в мир науки. Вскоре Николая Борисевича стали считать одним из наиболее перспективных студентов-физиков.

В 1950 г. Николай Александрович окончил Белорусский государственный университет и поступил в аспирантуру, а для продолжения обучения сразу был направлен в Ленинград в Государственный оптический институт, являвшийся в то время ведущим в СССР институтом оптического профиля.

Кандидатскую диссертацию молодой исследователь выполнял в лаборатории академика А. Н. Теренина под руководством профессора Б. С. Непорента. Через четыре года упорного творческого труда, наполненного сложными и кропотливыми экспериментальными исследованиями, Николай Александрович блестяще защитил свою кандидатскую работу, посвященную исследованию люминесценции паров сложных молекул.



В 1954 г. кандидат физико-математических наук Н. А. Борисевич возвратился в Минск и стал одним из организаторов Института физики и математики АН БССР. Свою работу новый институт начал в январе 1955 г. Его физическая часть на момент образования состояла из восьми научных сотрудников и пяти аспирантов. Директором института (с 1959 г. – Институт физики) был назначен академик А. Н. Севченко, заместителем директора по научной работе – Н. А. Борисевич. В этой должности он проработал до избрания в январе 1969 г. вице-президентом АН БССР.

Институт развивался чрезвычайно активно. Быстро рос численный состав, формировалась разветвленная тематика исследований, устанавливались творческие связи с научными и производственными организациями Москвы и Ленинграда. Этот период и определил во многом дальнейшую деятельность данного научного учреждения, которое с 1957 г. возглавил Б. И. Степанов. Быстрому развитию института в немалой степени благоприятствовало и то, что его создание совпало по времени с периодом, когда в Советском Союзе развитию науки, и особенно физической, уделялось очень большое внимание и в науку вкладывались значительные финансовые средства. В тесном контакте с Государственным оптическим институтом и другими организациями СССР, осуществлявшими исследования и разработки в области оптики и спектроскопии, в институте успешно выполнялся ряд ответственных проектов. Скоро Институт физики АН БССР по ряду направлений занял ведущее место среди научно-исследовательских организаций СССР оптического профиля. К концу 1960-х гг. он стал одним из крупнейших институтов АН БССР. За большие достижения в развитии физической науки и подготовке научных кадров в 1967 г. Институт физики первым среди учреждений АН БССР был награжден орденом Трудового Красного Знамени.

В мае 1969 г. сессия Общего собрания АН БССР избирает академика Н. А. Борисевича президентом АН БССР. Во главе Академии наук он работал 18 лет, до марта 1987 г. С его именем связано бурное развитие в БССР физики, математики, информатики, химии, наук о Земле, фотобиологии и др. Он был инициатором создания в АН БССР конструкторских бюро, опытно-промышленных производств, региональных научных центров, развития работ по оборонной тематике. Под руководством Николая Александровича Борисевича АН БССР стала одной из лучших академий Советского Союза и вошла в число крупнейших центров науки. Выросли научные школы мирового уровня по теоретической физике, физической оптике и квантовой электронике, математике и информатике, физиологии, генетике и др. За короткий период численность сотрудников академии возросла более чем в 2 раза, в 2,7 раза выросло количество кандидатов и докторов наук, почти в 4 раза увеличилось финансирование, были открыты новые институты и научные подразделения. В эти годы созданы центры коллективного пользования уникальными приборами и оборудованием, разветвленная опытно-конструкторская и экспериментальная база, а также сеть учреждений социальной сферы. Всего за 1970–1980-е гг. Академией наук было введено в строй 46 зданий производственного и социального назначения общей площадью 287 тыс. м<sup>2</sup>, открыты санаторий-профилакторий «Ислочь», детский оздоровительный лагерь «Фотон» и др.

Многое было сделано президентом Н. А. Борисевичем для развития региональной науки. Научные центры создавались в областных городах: в Гомеле – Институт механики металлополимерных систем и отделение Института математики, в Гродно – Отдел регуляции обмена веществ, преобразованный затем в Институт биохимии, в Могилеве – отделения институтов физики и физико-технического, в Витебске – отделение Института физики твердого тела и полупроводников. Вновь создаваемые центры приближали научные исследования к практике, давали возможность привлечения выпускников местных вузов к научно-исследовательской работе.

За успехи в развитии советской науки, экономики и культуры, подготовке высококвалифицированных научных кадров Академия наук БССР была награждена орденом Ленина (1978 г.) и орденом Дружбы народов (1975 г.). Высоких государственных наград в этот период были удостоены и многие ученые Академии наук.

Высокую гражданскую ответственность, оперативность и научный профессионализм проявил президент АН БССР при организации мероприятий по ликвидации последствий аварии на Чернобыльской АЭС. В Академии наук уже через четыре дня после аварии, 30 апреля 1986 г., была налажена регулярная работа по изучению ее последствий, а вскоре под руководством Н. А. Борисевича создана рабочая группа по оперативному решению вопросов, связанных с аварией. Президиумом АН БССР была разработана и 1 августа 1986 г. утверждена «Программа

комплексных исследований по проблемам, связанным с результатами аварии на Чернобыльской АЭС, на 1986–1990 гг. научными учреждениями Белорусской ССР и Украинской ССР».

Предметом особой заботы президента АН БССР Н. А. Борисевича, а теперь уже особой национальной гордости стала реконструкция главного корпуса Академии наук. Этот объект имел сложную архитектурно-строительную судьбу. Он возводился по проектам архитекторов Г. Л. Лаврова и И. Г. Лангбарда и был закончен в 1940 г. Во время жестоких боев за освобождение Минска здание полностью выгорело и было восстановлено после войны с применением простейших строительных конструкций и отделочных материалов. К началу 1970-х гг. требовалась капитальная (и очень дорогостоящая) реконструкция главного корпуса, который к этому времени стал одним из символов не только Минска, но и всей Беларуси. Сегодня – это уникальный памятник архитектуры государственного значения.

Учитывая исключительно большой вклад в развитие Академии наук, огромный опыт научно-организационной деятельности, высокий научный авторитет академика Н. А. Борисевича, Президиум Академии наук Беларуси 21 мая 1992 г. принял решение о назначении его Почетным президентом АН Беларуси.

При всей своей занятости научно-организационной работой на всех этапах жизненного пути Н. А. Борисевич оставался прежде всего активным исследователем. Он вел большую научную работу в Институте физики Академии наук Беларуси, где с 1957 по 2012 г. руководил созданной им лабораторией физики инфракрасных лучей. С 1987 г. в течение почти двух десятилетий он одновременно возглавлял также лабораторию фотоники молекул Физического института им. П. Н. Лебедева Российской академии наук. В своей научной деятельности Николай Александрович добился впечатляющих успехов. Главное направление его исследований – спектроскопия и люминесценция многоатомных молекул в газовой фазе. Им совместно с учениками создана теория физических явлений с участием возбужденных состояний сложных молекул, в молекулярную спектроскопию введены новые понятия и спектральные характеристики сложных молекул (в частности, эффективная энергия, селективная энергия, точка инверсии), разработаны экспериментальные методы их определения. Обнаружено явление стабилизации – лабилизации электронно-возбужденных многоатомных молекул, зарегистрированное в Государственном реестре открытий СССР (диплом № 186, 1977 г.). Большую роль в развитии этого научного направления сыграла монография Н. А. Борисевича «Возбужденные состояния сложных молекул в газовой фазе» (1967 г.). Фундаментальные исследования ученого в области спектроскопии и люминесценции многоатомных молекул в газовой фазе получили широкое признание научной общественности. За создание нового научного направления – спектроскопии свободных сложных молекул – Н. А. Борисевичу, Б. С. Непоренту, а также ученикам Николая Александровича – В. В. Грузинскому и В. А. Толкачеву в 1980 г. присуждена Ленинская премия.

К числу важнейших научных достижений Н. А. Борисевича и его школы относится и цикл работ по обнаружению и исследованию поляризованной люминесценции свободных сложных молекул, позволивших установить основные закономерности динамики вращательного движения электронно-возбужденных сложных молекул в газовой фазе. Исследования проводились при оптическом возбуждении молекул в высокотемпературных парах и охлажденных в сверхзвуковой струе до температур порядка единиц градусов Кельвина, в стационарном режиме и при фемтосекундном временном разрешении, а также при возбуждении сложных молекул пучками электронов. Результаты, достигнутые в этом направлении, отмечены в 1998 г. Государственной премией Республики Беларусь, присужденной Николаю Александровичу и его ученикам В. А. Толкачеву, А. П. Блохину, В. А. Поводайло за цикл работ «Динамика вращательного движения электронно-возбужденных многоатомных молекул в газовой фазе».

Чрезвычайно плодотворными оказались исследования Н. А. Борисевича в области инфракрасной спектроскопии и техники. Детальное изучение рассеяния излучения плотно упакованными дисперсными системами позволило создать новые классы инфракрасных фильтров – дисперсионных и дисперсионно-интерференционных, перекрывающих область спектра от 4 до 100 мкм. Было организовано серийное производство как фильтров, так и приборов на их основе. За исследование процессов рассеяния излучения и создание нового класса оптических фильтров для широкой области инфракрасного спектра Н. А. Борисевичу совместно с В. Г. Верещагиным

присуждена Государственная премия СССР (1973 г.). Результаты этих работ обобщены в монографии «Инфракрасные фильтры» (1971; соавт. В. Г. Верещагин, М. А. Валидов). Оригинальные результаты получены Н. А. Борисевичем и Г. А. Залеской при изучении процессов, протекающих в многоатомных молекулах при лазерном инфракрасном многофотонном возбуждении.

Важные исследования выполнены Николаем Александровичем в области лазерной физики. Еще до обнаружения генерации лазерного излучения на растворах сложных органических соединений Н. А. Борисевичем и В. А. Толкачевым были теоретически сформулированы основные требования к спектроскопическим характеристикам сложных молекул, для которых может быть получен отрицательный коэффициент поглощения, а также основные условия для получения максимального коэффициента усиления. Указаны факторы, определяющие положение максимума и диапазон перестройки частоты генерируемого излучения. В 1973 г. Н. А. Борисевичем совместно с В. А. Толкачевым и И. И. Калошей впервые в мире получена генерация излучения на парах сложных органических соединений. Для управления частотой и мощностью этого типа лазеров использовано открытое ранее явление стабилизации – лабильности возбужденных многоатомных молекул. Получение генерации излучения наносекундной и пикосекундной длительности сложными молекулами в газовой фазе открыло новые возможности для исследования спектроскопических свойств таких молекул, их взаимодействий со средой.

Большое внимание Н. А. Борисевич уделял исследованию быстропротекающих фото процессов в сложных атомно-молекулярных системах различного типа на основе развития техники сверхскоростной лазерной спектроскопии. Обнаруженные совместно с учениками Г. Б. Толсторожевым и С. А. Тихомировым новые закономерности в динамике и механизмах первичных фотофизических (электронно-колебательная и вращательная релаксации, внутренняя и интеркомбинационная конверсия) и фотохимических (фотовосстановление и фотодиссоциация, релаксационные процессы в свободных радикалах и др.) процессов в сложных органических молекулах в пико- и фемтосекундном временных диапазонах внесли существенный вклад в развитие науки о строении и оптико-физических свойствах сложных молекул. Николай Александрович всегда чутко реагировал на новые перспективные направления, постоянно возникающие в науке. По его инициативе в свое время в лаборатории были начаты работы по созданию фемтосекундной лазерной техники и разработке методов сверхскоростной кинетической спектроскопии, создана аппаратура и освоены методы тонкоструктурной спектроскопии с использованием струйного охлаждения молекул до температур в единицы градусов Кельвина, что и сейчас позволяет его ученикам проводить экспериментальные исследования на высоком мировом уровне.

С 1999 г. при непосредственном участии Н. А. Борисевича в лаборатории с использованием созданной экспериментальной базы и в кооперации с известными учеными академиком А. А. Ахремом, член-корреспондентами В. М. Мажулем, В. А. Хрипачем и их сотрудниками проводились комплексные исследования биологически активных соединений (гетероциклических аналогов стероидов, индолов, брасиностероидов и др.). Был получен ряд важных научных результатов по установлению электронной структуры, конформационной динамики и спектроскопических характеристик исследованных систем.

Чуткий, внимательный и требовательный учитель Н. А. Борисевич создал широко известную в мире научную школу. Им подготовлено более 30 кандидатов наук, 12 его учеников – доктора наук, среди них 3 академика НАН Беларуси и член-корреспондент. Можно только представить, насколько трудно было Николаю Александровичу, будучи президентом Академии наук, найти время для общения с молодыми исследователями, делавшими свои первые шаги в науке. Однако и тогда, и в дальнейшем они всегда ощущали его внимание, поддержку и помощь.

В течение ряда лет Н. А. Борисевич являлся главным редактором журнала «Доклады Академии наук БССР» и членом редколлегии международных журналов «Optics Communications», «Spectroscopy Letters», «Оптика и спектроскопия» и «Квантовая электроника». С момента создания «Журнала прикладной спектроскопии» (1964 г.) он являлся членом редколлегии, а в 1994–2012 гг. был главным редактором этого авторитетного международного издания.

По инициативе и под руководством Н. А. Борисевича в Академии наук БССР проводились систематические исследования по истории науки Беларуси. В 1979 г. вышла подготовленная при его активном участии книга «Академия наук Белорусской ССР», в которой освещены история

становления и развития Академии наук за 50 лет с момента ее основания. В 1992 г. была создана Комиссия НАН Беларуси по истории науки, председателем которой был избран академик Н. А. Борисевич. Основными направлениями деятельности комиссии стали исследования по истории науки и культуры в Беларуси, изучение истории Академии наук, увековечение памяти выдающихся ученых нашей страны. В 1998 г. вышли приуроченные к 70-летию Национальной академии наук Беларуси книги: «Национальная академия наук Беларуси» и «Национальная академия наук Беларуси: персональный состав, 1928–1998 гг.». К 75-летию и 80-летию НАН Беларуси под руководством Н. А. Борисевича были подготовлены книги «Национальная академия наук Беларуси. Персональный состав, 1928–2003 гг.» и «Национальная академия наук Беларуси: персональный состав, 1928–2008 гг.».

Невозможно переоценить роль Николая Александровича как председателя редакционной коллегии в создании вышедшего в конце 2001 г. уникального по научно-исторической значимости издания «Наука Беларуси в XX столетии». Эта книга является, по существу, своеобразной энциклопедией белорусской науки. В издании прослежен сложный путь становления и развития отечественной науки, показаны важнейшие достижения ученых Беларуси в области гуманитарных, естественных, технических, медицинских и сельскохозяйственных наук.

Н. А. Борисевич был инициатором создания Музея истории Академии наук, научным руководителем которого он являлся до последних дней жизни. Более четверти века музей проводит целенаправленную научно-просветительскую работу, способствующую формированию национального самосознания, чувства гордости и патриотизма. Залы музея рассказывают о зарождении научных знаний в Беларуси, о выдающихся ученых – уроженцах Беларуси, о деятельности Академии наук как высшей государственной научной организации нашей страны. Ежегодно его посещает более двух тысяч человек.

Николай Александрович всегда находился в гуще общественной жизни страны. В 1969–1989 гг. он являлся депутатом пяти созывов Верховного Совета СССР, членом Комиссии по народному образованию, науке и культуре, Комиссии по науке и технике. Неоднократно выезжал за рубеж в составе делегаций Верховного Совета СССР. Он избирался делегатом XXVII–XXX съездов КПБ, являлся членом ЦК КПБ (1971–1991 гг.), входил в состав Совета содействия научно-техническому прогрессу при ЦК КПБ. В своих выступлениях на съездах, пленумах ЦК КПБ и других форумах широко информировал о достижениях белорусских ученых, ставил крупные нерешенные проблемы, предлагал пути их решения. Он также избирался делегатом XXIV–XXVII съездов КПСС. На протяжении ряда лет Н. А. Борисевич являлся членом Комитета по Ленинским и Государственным премиям СССР в области науки и техники при Совете Министров СССР, членом президиума Высшей аттестационной комиссии при Министерстве высшего и среднего специального образования СССР. С 1971 по 1987 г. он возглавлял Комитет по Государственным премиям БССР в области науки и техники.

Большой вклад в науку и самоотверженная научно-организационная деятельность Н. А. Борисевича была высоко оценена государством и научным сообществом. Он удостоен звания Героя Социалистического Труда, награжден четырьмя орденами Ленина, орденами Октябрьской Революции и Трудового Красного Знамени, орденом Франциска Скорины, орденом Дружбы Российской Федерации, золотой медалью Национальной академии наук Беларуси «За большой вклад в развитие науки», медалью Николая Коперника Польской академии наук, золотой медалью Чехословацкой академии наук «За заслуги перед наукой и человечеством», золотой медалью Словацкой академии наук «За исключительные заслуги перед наукой». В 1994 г. ему присвоено звание «Заслуженный деятель науки Республики Беларусь».

Николая Александровича всегда отличали качества настоящего ученого-исследователя и гражданина: стремление к познанию истины и достижению поставленной цели, убежденность, принципиальность, талант ученого и организатора науки. Он всегда умел отличить второстепенное от главного и в главном не уступал никому и никогда. Вызывали глубокое уважение его высокие моральные качества, житейская мудрость, доброжелательность и оптимизм. Всем нам будет очень не хватать Николая Александровича, его доброй и мудрой улыбки, его стремления помочь людям. Он навсегда останется для нас вдохновляющим примером служения науке, Родине и стране.

*Редколлегия журнала*

## МАТЭМАТЫКА

УДК 517.956.32

*В. И. КОРЗЮК<sup>1, 2</sup>, А. А. МАНДРИК<sup>2</sup>*

### ПЕРВАЯ СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА В ПОЛУПОЛОСЕ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО НЕСТРОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

<sup>1</sup>*Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь,  
korzyuk@bsu.by*

<sup>2</sup>*Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь,  
mndkaa@gmail.com*

Изучается классическое решение граничной задачи для неоднородного нестроого гиперболического уравнения третьего порядка. Уравнение задается в полуполосе двух независимых переменных. На нижнем основании области задаются условия Коши, а на боковых границах – условия Дирихле. Методом характеристик выписывается в аналитическом виде решение рассматриваемой задачи. Доказывается единственность решения.

*Ключевые слова:* нестроого гиперболическое уравнение, неоднородное уравнение, смешанная задача, условия согласования.

*V. I. KORZYUK<sup>1, 2</sup>, A. A. MANDRYK<sup>2</sup>*

### FIRST MIXED PROBLEM IN THE HALF-BAND FOR THE THIRD-ORDER NONHOMOGENEOUS NONSTRICTLY HYPERBOLIC EQUATION

<sup>1</sup>*Belarusian State University, Minsk, Belarus,  
korzyuk@bsu.by*

<sup>2</sup>*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus,  
mndkaa@gmail.com*

This article is concerned with studying the classical solution of the boundary problem for the third-order nonhomogeneous nonstrictly hyperbolic equation. The equation is defined in the half-band of two independent variables. There are Cauchy's conditions at the bottom of the domain and Dirichlet's conditions at side boundaries. Using the method of characteristics, the analytic solution of the considered problem is written. The uniqueness of the solution is proved.

*Keywords:* nonstrictly hyperbolic equation, nonhomogeneous equation, mixed problem, matching conditions.

**Введение.** Изучение таких задач продиктовано не только развитием теории дифференциальных уравнений с частными производными. Они возникают при описании конкретных физических явлений. Например, гиперболические уравнения третьего порядка появляются при математическом моделировании распространения линейных акустических волн в среде с дисперсией [1, с. 87]. Свойства этих уравнений и задач изучались в [2, 3].

Большая часть литературы по гиперболическим уравнениям посвящена задаче Коши. В работах [4–6] рассматривались обобщенные решения для смешанных задач гиперболических уравнений третьего порядка, где доказаны теоремы существования и единственности таких решений в подходящих функциональных пространствах. Отметим также работы [7–9], где функциональными методами изучались граничные задачи на плоскости в случае двух независимых переменных.

Исследование или отыскание классических решений задач всегда было актуальным для теории дифференциальных уравнений с частными производными. Это важно и для численных методов решения граничных задач, так как они во многих случаях основаны на классических

решениях. Заметим, что классические решения определяются не только правильным выбором вида граничных условий для дифференциальных уравнений с частными производными, но и условиями согласования для функций, входящих в условия и уравнения. Классическому решению посвящена работа [10], в которой рассмотрена первая смешанная задача для простейшего гиперболического уравнения третьего порядка с разными характеристиками. В настоящей работе исследуется первая смешанная задача в классе бесконечно дифференцируемых функций.

**Постановка задачи.** В области  $Q = (0, +\infty) \times (0, l)$  двух независимых переменных  $(t, x) \in Q \subset \mathbb{R}^2$  рассмотрим нестрогое гиперболическое уравнение третьего порядка

$$(\partial_t - a\partial_x + b_1)(\partial_t + a\partial_x + b)^2 u(t, x) = f(t, x), (t, x) \in \bar{Q} = [0, +\infty) \times [0, l], \quad (1)$$

где  $a, b, b_1, l$  – действительные числа;  $\bar{Q}$  – замыкание области  $Q$ ;  $\partial_t, \partial_x$  – частные производные по  $t$  и  $x$  соответственно. В общем случае  $\partial_t^k \partial_x^p = \frac{\partial^{k+p}}{\partial t^k \partial x^p}$  – частные производные по  $t$  и  $x$  порядка  $k + p$ , где  $k$  и  $p$  – целые неотрицательные числа. Для определенности положим  $a > 0$ . К уравнению (1) на нижнем основании области  $Q$  присоединяются условия Коши

$$\partial_t^i u(0, x) = \varphi_i(x), i = \overline{0, 2}, x \in [0, l], \quad (2)$$

а на боковых частях границы  $\partial Q$  задаются граничные условия вида

$$\begin{aligned} \partial_x^i u(t, 0) &= \psi_i(t), i \in \overline{0, 1}, t \in [0, +\infty), \\ u(t, l) &= \mu(t), t \in [0, +\infty). \end{aligned} \quad (3)$$

**Однородное уравнение.** Начнем исследование задачи (1)–(3) в случае, когда уравнение (1) является однородным:

$$(\partial_t - a\partial_x + b_1)(\partial_t + a\partial_x + b)^2 u(t, x) = 0, (t, x) \in \bar{Q} = [0, +\infty) \times [0, l]. \quad (4)$$

Согласно работе [11], общее решение уравнения (4) представимо в виде линейной комбинации трех произвольных функций

$$u(t, x) = e^{-bt} f_1(x + at) + e^{-bt} [f_2(x - at)t + f_3(x - at)], \quad (5)$$

с соответствующими областями определения  $D(f_i), i = \overline{1, 3}$ . Нетрудно видеть, что  $D(f_1) = [0, +\infty)$  и  $D(f_i) = (-\infty, l], i = \overline{2, 3}$ , если  $(t, x) \in \bar{Q}$ . Обозначим через  $C^\infty(\bar{Q})$  множество бесконечно дифференцируемых функций, заданных на  $\bar{Q}$ , а через  $C^{i,j}(\bar{Q})$  множество функций, заданных на  $\bar{Q}$ , которые  $i$  раз непрерывно дифференцируемы по первому аргументу и  $j$  раз – по второму.

Полученный результат подытожим в виде леммы.

**Л е м м а 1.** *Общее решение уравнения (4) из класса  $C^\infty(\bar{Q})$  представимо в виде (5), где функции  $f_i$  – произвольные бесконечно дифференцируемые на  $D(f_i), i = \overline{1, 3}$ , функции.*

Таким образом, чтобы отыскать решение  $u: \mathbb{R}^2 \supset \bar{Q} \ni (t, x) \rightarrow u(t, x) \in \mathbb{R}$  задачи (2)–(4), необходимо выбрать функции  $f_i, i = \overline{1, 3}$ , такими, чтобы они в сумме вида (5) удовлетворяли еще и условиям (2), (3).

Введем для значений функций и их производных в случае одной независимой переменной следующие обозначения. Пусть  $g: \mathbb{R} \rightarrow g(z)$  – функция переменной  $z$ . Тогда  $d^k g(z) = \frac{d^k}{dz^k} g(z)$  – производная  $k$ -го порядка;  $g(a), d^k g(a)$  – значения функции  $g$  и ее производной  $d^k g$   $k$ -го порядка в точке  $a$  и т. д.

Сформулируем теорему, дающую необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости задачи (2)–(4).

**Т е о р е м а 1.** Если выполняются следующие условия гладкости на заданные функции:  $\varphi_i \in C^\infty([0, l])$ ,  $i = \overline{0, 2}$ ,  $\psi_j \in C^\infty([0, +\infty))$ ,  $j = \overline{0, 1}$ ,  $\mu \in C^\infty([0, +\infty))$ , то задача (2)–(4) однозначно разрешима в классе  $C^\infty(\overline{Q})$ , тогда и только тогда, когда выполняются следующие равенства:

$$\begin{aligned} & \frac{d^k}{dy^k} \left( e^{\frac{(b-b_1)(l-y)}{a}} \left[ (l-y)d\varphi_0(2l-y) + \frac{b(l-y)-a}{a} \varphi_0(2l-y) + \frac{l-y}{a} \varphi_1(2l-y) \right] + \right. \\ & \left. + e^{\frac{b_1(y-l)}{a}} \mu \left( \frac{y-l}{a} \right) + \frac{1}{4a^2} \int_0^{2l-y} \Phi(z) e^{\frac{b_1-b}{2a}(y-z)} (y-z) dz \right) \Big|_{y=l} = \\ & = \frac{d^k}{dy^k} \left( \frac{1}{4a^2} \int_0^y \Phi(z) e^{\frac{b_1-b}{2a}(y-z)} (y-z) dz \right) \Big|_{y=l}, \quad k = \overline{0, \infty}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d^k}{dy^k} \left( e^{\frac{by}{a}} \left[ d\psi_0 \left( -\frac{y}{a} \right) + b\psi_0 \left( -\frac{y}{a} \right) + a\psi_1 \left( -\frac{y}{a} \right) \right] - \frac{1}{2a} \int_0^{-y} \Phi(z) e^{\frac{b_1-b}{2a}(y-z)} dz \right) \Big|_{y=0} = \\ & = \frac{d^k}{dy^k} \left( \varphi_1(y) + b\varphi_0(y) + ad\varphi_0(y) - \frac{1}{2a} \int_0^y \Phi(z) e^{\frac{b_1-b}{2a}(y-z)} dz \right) \Big|_{y=0}, \quad k = \overline{0, \infty}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d^k}{dy^k} \left( e^{\frac{by}{a}} \left[ \frac{y}{a} d\psi_0 \left( -\frac{y}{a} \right) + \frac{by+a}{a} \psi_0 \left( -\frac{y}{a} \right) + y\psi_1 \left( -\frac{y}{a} \right) \right] - \frac{1}{4a^2} \int_0^{-y} \Phi(z) e^{\frac{b_1-b}{2a}(y-z)} (y-z) dz \right) \Big|_{y=0} = \\ & = \frac{d^k}{dy^k} \left( \varphi_0(y) - \frac{1}{4a^2} \int_0^y \Phi(z) e^{\frac{b_1-b}{2a}(y-z)} (y-z) dz \right) \Big|_{y=0}, \quad k = \overline{0, \infty}, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\Phi(y) = \varphi_2(y) + 2b\varphi_1(y) + 2ad\varphi_1(y) + b^2\varphi_0(y) + 2abd\varphi_0(y) + a^2d^2\varphi_0(y)$ ,  $y \in [0, l]$ .

**Неоднородное уравнение.** Рассмотрим теперь следующую задачу с однородными начальными условиями для уравнения (1):

$$(\partial_t - a\partial_x + b_1)(\partial_t + a\partial_x + b)^2 v(t, x) = f(t, x), \quad (t, x) \in \overline{Q}, \quad (9)$$

$$\partial_t^i v(0, x) = 0, \quad i = \overline{0, 2}, \quad x \in [0, l]. \quad (10)$$

**Л е м м а 2.** Если  $f \in C^\infty(\overline{Q})$  и существуют некоторые окрестности точек  $x_1 = 0$  и  $x_2 = l$ , в которых при любом  $t \in [0, +\infty)$  функции  $\partial_t^k f(t, x)$ ,  $k = \overline{0, \infty}$ , представимы в виде абсолютно сходящихся рядов по степеням  $(x - x_i)$ ,  $i = \overline{1, 2}$ , то существует функция  $v(t, x)$  из класса  $C^\infty(\overline{Q})$ , являющаяся решением задачи (9)–(10).

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Рассмотрим граничную задачу для функции  $w(t, x, \tau)$ :

$$(\partial_t - a\partial_x + b_1)(\partial_t + a\partial_x + b)^2 w(t, x, \tau) = 0, \quad (t, x) \in \overline{Q}, \quad \tau \in [0, +\infty), \quad (11)$$

$$\partial_t^i w(0, x, \tau) = 0, \quad i = \overline{0, 1}, \quad \partial_\tau^2 w(0, x, \tau) = f(\tau, x), \quad x \in [0, l], \quad \tau \in [0, +\infty). \quad (12)$$

По условию леммы функция  $f(t, x)$  определена в области  $\overline{Q} = [0, +\infty) \times [0, l]$ . Построим ее продолжение в классе  $C^\infty([0, +\infty) \times R)$ . Вначале продолжим  $f$  в область  $[0, +\infty) \times [l, +\infty)$ . По условию

леммы существует некоторая окрестность  $[l - \varepsilon_l, l]$  точки  $x = l$ , такая, что для любого  $t \in [0, +\infty)$ ,  $f$  представима в виде абсолютно сходящегося ряда

$$f(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial_x^k f(t, l)}{k!} (x-l)^k, \quad t \in [0, +\infty), \quad x \in [l - \varepsilon_l, l], \quad \varepsilon_l \in (0, l),$$

причем производные этого ряда любого порядка по  $t$  также сходятся абсолютно.

Поскольку этот ряд сходится абсолютно для всех  $(t, x) \in Q_l^- = [0, +\infty) \times [l - \varepsilon_l, l]$ , то легко заметить, что он также сходится абсолютно и для  $(t, x) \in Q_l^+ = [0, +\infty) \times [l, l + \varepsilon_l]$ . Таким образом, в  $Q_l^+$  зададим функцию  $\tilde{f}$ , определяющуюся по формуле

$$\tilde{f}(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial_x^k f(t, l)}{k!} (x-l)^k, \quad (t, x) \in Q_l^+.$$

Заданная таким способом функция является непрерывным продолжением  $f$  в  $Q_l^+$ , причем  $\tilde{f} \in C^\infty(Q_l^+)$ , а производные этих функций любого порядка на границе  $x = l$  совпадают. Далее рассмотрим функцию

$$g_l(x) = \begin{cases} \frac{1}{e^{(x-l)(x-(l+\varepsilon_l))}}, & x \in (l, l + \varepsilon_l), \\ 0, & x \in (-\infty, l] \cup [l + \varepsilon_l, +\infty). \end{cases} \quad (13)$$

Несложно видеть, что  $g_l \in C^\infty(\mathbb{R})$ . Воспользуемся ею для построения еще одной функции

$$\delta_l(x) = 1 - \frac{1}{A_l} \int_l^x g_l(\xi) d\xi, \quad A_l = \int_l^{l+\varepsilon_l} g_l(\xi) d\xi > 0, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (14)$$

Функция  $\delta_l(x)$  – бесконечно дифференцируема на всей числовой прямой, также  $\delta_l(x) \equiv 1$ ,  $x \in (-\infty, l]$  и  $\delta_l(x) \equiv 0$ ,  $x \in [l + \varepsilon_l, +\infty)$ . Далее на основе  $\tilde{f}$  и  $\delta_l$  построим продолжение функции  $f$  в область  $[0, +\infty) \times [l, +\infty)$ :

$$f_l(t, x) = \begin{cases} \tilde{f}(t, x) \delta_l(x), & (t, x) \in Q_l^+, \\ 0, & t \in [0, +\infty), \quad x \in (l + \varepsilon_l, +\infty). \end{cases} \quad (15)$$

Легко заметить, что  $f_l \in C^\infty([0, +\infty) \times [l, +\infty))$ . Действительно, она бесконечно дифференцируема в  $Q_l^+$ , как произведение двух бесконечно дифференцируемых функций, и в  $[0, +\infty) \times (l + \varepsilon_l, +\infty)$ , поскольку тождественно равна нулю в этой области. Покажем теперь, что левые и правые производные всех порядков на границе  $x = l + \varepsilon_l$  совпадают. Очевидно, что все правые производные равны нулю, покажем, что левые также обращаются в нуль

$$\partial_x^k f_l(t, x) \Big|_{x=(l+\varepsilon_l)-0} = \partial_x^k (\tilde{f}(t, x) \delta_l(x)) \Big|_{x=(l+\varepsilon_l)-0} = \sum_{i=0}^k C_k^i \partial_x^i \tilde{f}(t, x) \frac{d^{k-i} \delta_l(x)}{dx^{k-i}} \Big|_{x=(l+\varepsilon_l)-0}, \quad k = \overline{0, \infty}.$$

Однако для любого  $k = \overline{0, \infty}$ , имеют место равенства

$$\frac{d^k \delta_l(x)}{dx^k} \Big|_{x=l+\varepsilon_l} = 0,$$

в этом легко убедиться, непосредственно вычислив производные функции  $\delta_l$  по формулам (13)–(14). Таким образом,  $f_l \in C^\infty([0, +\infty) \times [l, +\infty))$ , покажем теперь, что  $f$  и  $f_l$  совпадают вместе со всеми своими производными вдоль прямой  $x = l$

$$\partial_x^k f_l(t, x) \Big|_{x=l} = \sum_{i=0}^k C_k^i \partial_x^i \tilde{f}(t, x) \frac{d^{k-i} \delta_l(x)}{dx^{k-i}} \Big|_{x=l}, \quad k = \overline{0, \infty}.$$

Однако имеют место равенства

$$\delta_l(l) = 1, \left. \frac{d^k \delta_l(x)}{dx^k} \right|_{x=l} = 0, \quad k = \overline{1, \infty},$$

из которых получим

$$\partial_x^k f_l(t, x)|_{x=l} = \partial_x^k \tilde{f}(t, x)|_{x=l} = \partial_x^k f(t, l), \quad k = \overline{0, \infty}.$$

Таким образом, доказано, что  $f$  и  $f_l$  совпадают вместе со всеми своими производными вдоль прямой  $x = l$ . Аналогичным образом строится продолжение  $f$  относительно прямой  $x = 0$ . По условию леммы существует такая окрестность  $[0, \varepsilon_0]$ , на которой функция представима в виде абсолютно сходящегося ряда. Построение функции  $f_0$ , являющейся продолжением  $f$  в область  $[0, +\infty) \times (-\infty, 0]$ , проводится аналогично с использованием вместо  $g_l$  и  $\delta_l$  новых функций

$$g_0(x) = \begin{cases} \frac{1}{e^{x(x+\varepsilon_0)}}, & x \in (-\varepsilon_0, 0), \\ 0, & x \in (-\infty, -\varepsilon_0] \cup [0, +\infty), \end{cases}$$

$$\delta_0(x) = \frac{1}{A_0} \int_{-\varepsilon_0}^x g_0(\xi) d\xi, \quad A_0 = \int_{-\varepsilon_0}^0 g_0(\xi) d\xi > 0, \quad x \in R.$$

Следовательно, мы получим продолжение  $f$ , определяющееся формулой

$$F(t, x) = \begin{cases} f_0(t, x), & t \in [0, +\infty), \quad x \in (-\infty, 0), \\ f(t, x), & t \in [0, +\infty), \quad x \in [0, l], \\ f_l(t, x), & t \in [0, +\infty), \quad x \in (l, +\infty), \end{cases} \quad (16)$$

причем  $F \in C^\infty([0, +\infty) \times R)$ .

Общее решение уравнения (11) имеет вид

$$w(t, x, \tau) = e^{-bt} W_1(x + at, \tau) + e^{-bt} [W_2(x - at, \tau)t + W_3(x - at, \tau)].$$

Определим функции  $W_i, i = \overline{1, 3}$ , следующим образом:

$$W_1(y, \tau) = \frac{1}{4a^2} \int_0^y F(\tau, z) e^{\frac{b_1-b}{2a}(y-z)} (y-z) dz, \quad y \in [0, +\infty), \quad \tau \in [0, +\infty),$$

$$W_2(y, \tau) = -\frac{1}{2a} \int_0^y F(\tau, z) e^{\frac{b_1-b}{2a}(y-z)} dz, \quad y \in (-\infty, l], \quad \tau \in [0, +\infty), \quad (17)$$

$$W_3(y, \tau) = -\frac{1}{4a^2} \int_0^y F(\tau, z) e^{\frac{b_1-b}{2a}(y-z)} (y-z) dz, \quad y \in (-\infty, l], \quad \tau \in [0, +\infty).$$

Таким образом, функция  $w(t, x, \tau)$  в области  $\tilde{Q} = \overline{Q} \times [0, +\infty)$  будет определяться формулой

$$w(t, x, \tau) = \frac{1}{4a^2} e^{\frac{-b_1-b}{2} x + at} \int_{x-at}^{x+at} F(\tau, z) e^{\frac{b_1-b}{2a}(x-z)} (x + at - z) dz.$$

Легко проверить непосредственной подстановкой, что определенные таким способом функции  $W_i, i = \overline{1, 3}$ , обеспечивают выполнение начальных условий (12). Заметим также, что

$$W_1(y, \tau) \in C^\infty([0, +\infty) \times [0, +\infty)),$$

$$W_j(y, \tau) \in C^\infty((-\infty, l] \times [0, +\infty)), \quad j = \overline{2, 3},$$

отсюда следует, что

$$w(t, x, \tau) \in C^\infty(\tilde{Q}).$$

В результате получено решение задачи Коши в классе  $C^\infty(\bar{Q})$ .

Определим функцию  $v(t, x)$  по формуле

$$v(t, x) = \int_0^t w(t - \tau, x, \tau) d\tau, \quad (t, x) \in \bar{Q}. \quad (18)$$

Функция  $v$ , определенная таким образом, принадлежит классу  $C^\infty(\bar{Q})$  и удовлетворяет начальным условиям (10). Действительно,

$$\begin{aligned} v(0, x) &= 0, \quad \partial_t v(0, x) = w(0, x, t) + \int_0^t \partial_{t-\tau} w(t - \tau, x, \tau) d\tau|_{t=0} = 0, \\ \partial_t^2 v(0, x) &= \partial_\tau w(0, x, t) + \partial_t w(0, x, t) + \int_0^t \partial_{t-\tau}^2 w(t - \tau, x, \tau) d\tau|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

Также  $v$  является решением уравнения (9), в чем легко убедиться непосредственной подстановкой. Лемма 2 доказана.

Пусть функция  $v(t, x) \in C^\infty(\bar{Q})$  – решение задачи (9)–(10). Тогда вместе с граничной задачей (1)–(3) рассмотрим также задачу

$$(\partial_t - a\partial_x + b_1)(\partial_t + a\partial_x + b)^2 \bar{u}(t, x) = 0, \quad (t, x) \in Q, \quad (19)$$

$$\partial_t^i \bar{u}(0, x) = \varphi_i(x), \quad i = \overline{0, 2}, \quad x \in [0, l], \quad (20)$$

$$\partial_x^i \bar{u}(t, 0) = \widetilde{\psi}_i(t) = \psi_i(t) - \partial_x^i v(t, 0), \quad i = \overline{0, 1}, \quad t \in [0, +\infty), \quad (21)$$

$$\bar{u}(t, l) = \widetilde{\mu}(t) = \mu(t) - v(t, l), \quad t \in [0, +\infty).$$

Лемма 3. *Задача (1)–(3) однозначно разрешима тогда и только тогда, когда однозначно разрешима задача (19)–(21).*

**Доказательство.** Предположим, задача (1)–(3) имеет единственное решение  $u$ . Тогда, взяв в качестве  $\bar{u} = u - v$ , получим решение задачи (19)–(21). Допустим, что для уравнения (19)–(21) существует другое решение  $\bar{u}_1$ , отличное от  $\bar{u}$ . В этом случае функция  $u_1 = \bar{u}_1 + v$  будет отличаться от функции  $u$  и также будет решением задачи (1)–(3). Получаем противоречие, таким образом, задача (19)–(21) однозначно разрешима.

Теперь докажем достаточность. Пусть задача (19)–(21) однозначно разрешима и функция  $\bar{u}$  – ее решение. Тогда, очевидно, функция  $u = \bar{u} + v$  будет решением задачи (1)–(3). Допустим, что функция  $u_1$ , отличная от  $u$ , также является решением этой задачи. Тогда  $\bar{u}_1 = u_1 - v$ , отлична от  $\bar{u}$ , также является решением задачи (19)–(21). Получено противоречие. Лемма 3 доказана.

Для разрешимости задачи (1)–(3) должны выполняться соответствующие условия согласования на заданную функцию  $f$  уравнения (1), функции  $\varphi_i, i = \overline{0, 2}$ , условий (2) и на функции  $\mu, \psi_i, i = \overline{0, 1}$ , условий (3). В данном случае эти условия выписываются в явном виде следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{d^i}{dy^i} \left( e^{\frac{(b-b_1)(l-y)}{a}} \left[ (l-y) d\varphi_0(2l-y) + \frac{b(l-y)-a}{a} \varphi_0(2l-y) + \frac{l-y}{a} \varphi_1(2l-y) \right] + \right. \\ & \left. + e^{\frac{b_1(y-l)}{a}} \left[ \mu\left(\frac{y-l}{a}\right) - F\left(\frac{y-l}{a}, l\right) \right] + \frac{1}{4a^2} \int_0^{2l-y} \Phi(z) e^{\frac{b_1-b}{2a}(y-z)} (y-z) dz \right) \Bigg|_{y=l} = \\ & = \frac{d^i}{dy^i} \left( \frac{1}{4a^2} \int_0^y \Phi(z) e^{\frac{b_1-b}{2a}(y-z)} (y-z) dz \right) \Bigg|_{y=l}, \quad i = \overline{0, \infty}, \quad (22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d^i}{dy^i} \left( e^{-\frac{by}{a}} \left[ d\psi_0 \left( -\frac{y}{a} \right) + b\psi_0 \left( -\frac{y}{a} \right) + a\psi_1 \left( -\frac{y}{a} \right) \right] - \right. \\
& \left. -e^{-\frac{by}{a}} \left[ \partial_t F(t,0) \Big|_{t=-\frac{y}{a}} + bF \left( -\frac{y}{a}, 0 \right) + a\partial_x F \left( -\frac{y}{a}, x \right) \Big|_{x=0} \right] - \right. \\
& \left. -\frac{1}{2a} \int_0^{-y} \Phi(z) e^{\frac{b_1-b}{2a}(y-z)} dz \right) \Big|_{y=0} = \\
& = \frac{d^i}{dy^i} \left( \varphi_1(y) + b\varphi_0(y) + ad\varphi_0(y) - \frac{1}{2a} \int_0^y \Phi(z) e^{\frac{b_1-b}{2a}(y-z)} dz \right) \Big|_{y=0}, \quad i = \overline{0, \infty}, \quad (23)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d^i}{dy^i} \left( e^{-\frac{by}{a}} \left[ \frac{y}{a} d\psi_0 \left( -\frac{y}{a} \right) + \frac{by+a}{a} \psi_0 \left( -\frac{y}{a} \right) + y\psi_1 \left( -\frac{y}{a} \right) \right] - \right. \\
& \left. -e^{-\frac{by}{a}} \left[ \frac{y}{a} \partial_t F(t,0) \Big|_{t=-\frac{y}{a}} + \frac{by+a}{a} F \left( -\frac{y}{a}, 0 \right) + y\partial_x F \left( -\frac{y}{a}, x \right) \Big|_{x=0} \right] - \right. \\
& \left. -\frac{1}{4a^2} \int_0^{-y} \Phi(z) e^{\frac{b_1-b}{2a}(y-z)} (y-z) dz \right) \Big|_{y=0} = \\
& = \frac{d^i}{dy^i} \left( \varphi_0(y) - \frac{1}{4a^2} \int_0^y \Phi(z) e^{\frac{b_1-b}{2a}(y-z)} (y-z) dz \right) \Big|_{y=0}, \quad i = \overline{0, \infty}, \quad (24)
\end{aligned}$$

где

$$\Phi(y) = \varphi_2(y) + 2b\varphi_1(y) + 2ad\varphi_1(y) + b^2\varphi_0(y) + 2abd\varphi_0(y) + a^2d^2\varphi_0(y), \quad y \in [0, l],$$

$$F(t, x) = \frac{1}{4a^2} \int_0^t e^{-\frac{b_1-b}{2}(t-\tau)} \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau, z) e^{\frac{b_1-b}{2a}(x-z)} (x+a(t-\tau)-z) dz d\tau.$$

**Теорема 2.** Если выполняются следующие условия гладкости на заданные функции:  $\varphi_i \in C^\infty([0, l])$ ,  $i = \overline{0, 2}$ ,  $\psi_j \in C^\infty([0, +\infty))$ ,  $j = \overline{0, 1}$ ,  $\mu \in C^\infty([0, +\infty))$ ,  $f \in C^\infty(\overline{Q})$ , а также  $f$  удовлетворяет условиям леммы 2, то задача (1)–(3) однозначно разрешима в классе  $C^\infty(\overline{Q})$ , тогда и только тогда, когда выполняются равенства (22)–(24).

**Доказательство.** Из лемм 2 и 3 следует, что задача (1)–(3) однозначно разрешима тогда и только тогда, когда однозначно разрешима однородная задача (19)–(21). Из теоремы 1 следует, что эта задача однозначно разрешима, только если выполняются следующие условия согласования:

$$\begin{aligned}
& \frac{d^i}{dy^i} \left( e^{\frac{(b-b_1)(l-y)}{a}} \left[ (l-y)d\varphi_0(2l-y) + \frac{b(l-y)-a}{a} \varphi_0(2l-y) + \frac{l-y}{a} \varphi_1(2l-y) \right] + \right. \\
& \left. + e^{\frac{b_1(y-l)}{a}} \tilde{\mu} \left( \frac{y-l}{a} \right) + \frac{1}{4a^2} \int_0^{2l-y} \Phi(z) e^{\frac{b_1-b}{2a}(y-z)} (y-z) dz \right) \Big|_{y=l} = \\
& = \frac{d^i}{dy^i} \left( \frac{1}{4a^2} \int_0^y \Phi(z) e^{\frac{b_1-b}{2a}(y-z)} (y-z) dz \right) \Big|_{y=l}, \quad i = \overline{0, \infty}, \quad (25)
\end{aligned}$$

$$\frac{d^i}{dy^i} \left( e^{-\frac{by}{a}} \left[ d\tilde{\psi}_0 \left( -\frac{y}{a} \right) + b\tilde{\psi}_0 \left( -\frac{y}{a} \right) + a\tilde{\psi}_1 \left( -\frac{y}{a} \right) \right] - \frac{1}{2a} \int_0^y \Phi(z) e^{\frac{b_1-b}{2a}(y-z)} dz \right) \Big|_{y=0} =$$

$$= \frac{d^i}{dy^i} \left( \varphi_1(y) + b\varphi_0(y) + a d\varphi_0(y) - \frac{1}{2a} \int_0^y \Phi(z) e^{\frac{b_1-b}{2a}(y-z)} dz \right) \Big|_{y=0}, \quad i = \overline{0, \infty}, \quad (26)$$

$$\frac{d^i}{dy^i} \left( e^{-\frac{by}{a}} \left[ \frac{y}{a} d\tilde{\psi}_0 \left( -\frac{y}{a} \right) + \frac{by+a}{a} \tilde{\psi}_0 \left( -\frac{y}{a} \right) + y\tilde{\psi}_1 \left( -\frac{y}{a} \right) \right] - \frac{1}{4a^2} \int_0^y \Phi(z) e^{\frac{b_1-b}{2a}(y-z)} (y-z) dz \right) \Big|_{y=0} =$$

$$= \frac{d^i}{dy^i} \left( \varphi_0(y) - \frac{1}{4a^2} \int_0^y \Phi(z) e^{\frac{b_1-b}{2a}(y-z)} (y-z) dz \right) \Big|_{y=0}, \quad i = \overline{0, \infty}. \quad (27)$$

Заметим, что

$$\tilde{\psi}_i(t) = \psi_i(t) - \partial_x^i v(t, 0), \quad i = \overline{0, 1},$$

$$\tilde{\mu}(t) = \mu(t) - v(t, l).$$

Тогда после подстановки вычисленных значений  $d^j \tilde{\psi}_i$  и  $\tilde{\mu}$  в (25)–(27) получим уравнения (22)–(24). Таким образом, доказано утверждение теоремы 2.

**Выводы.** В данной статье были найдены необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости неоднородной задачи (1)–(3) в классе бесконечно дифференцируемых функций, когда функции из начальных и граничных условий также являются бесконечно дифференцируемыми. Также было получено классическое решение этой задачи, позволяющее находить значение искомой функции и ее производных в каждой точке полуполосы  $Q$ .

### Список использованной литературы

1. Руденко, О. В. Теоретические основы нелинейной акустики / О. В. Руденко, С. И. Соляун. – М.: Наука, 1975.
2. Варламов, В. В. Об одной задаче распространения волн сжатия в вязкой среде / В. В. Варламов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1988. – Т. 25, вып. 10. – С. 1561–1565.
3. Варламов, В. В. Об одной начально-краевой задаче для гиперболического уравнения третьего порядка / В. В. Варламов // Дифференц. уравнения. – 1990. – Т. 26, № 8. – С. 1455–1457.
4. Корзюк, В. И. Задача Коши для гиперболических дифференциально-операторных уравнений третьего порядка / В. И. Корзюк, Н. И. Юрчук // Дифференц. уравнения. – 1991. – Т. 27, № 8. – С. 1448–1450.
5. Корзюк, В. И. Энергетическое неравенство для граничной задачи гиперболического уравнения с волновым оператором третьего порядка / В. И. Корзюк // Дифференц. уравнения. – 1991. – Т. 27, № 6. – С. 1014–1022.
6. Корзюк, В. И. Граничная задача для гиперболического уравнения с волновым оператором 3-го порядка / В. И. Корзюк // Дифференц. уравнения. – 2004. – Т. 40, № 2. – С. 208–215.
7. Thomee, V. Estimates of the Friedrichs–Lewy type for a hyperbolic equation with three characteristics / V. Thomee // Math. Scand. – 1955. – Vol. 3. – P. 115–123.
8. Thomee, V. Estimates of the Friedrichs–Lewy type for mixed problems in the theory of linear hyperbolic differential equation in two independent variables / V. Thomee // Math. Scand. – 1957. – Vol. 5. – P. 93–113.
9. Thomee, V. Existence proofs for mixed problems for hyperbolic differential equations in two independent variables by means of the continuity method / V. Thomee // Math. Scand. – 1958. – Vol. 6. – P. 5–32.
10. Корзюк, В. И. Классическое решение первой смешанной задачи для гиперболического уравнения третьего порядка с волновым оператором / В. И. Корзюк, А. А. Мандрик // Дифференц. уравнения. – 2014. – Т. 50, № 4. – С. 492–504.
11. Корзюк, В. И. Решение задачи Коши для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами в случае двух независимых переменных / В. И. Корзюк, И. С. Козловская // Дифференц. уравнения. – 2012. – Т. 48, № 5. – С. 700–709.

Поступила в редакцию 05.11.2015

УДК 517.983.54+519.6

*О. В. МАТЫСИК*

**НЕЯВНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ САМОСОПРЯЖЕННОЙ НЕКОРРЕКТНОЙ ЗАДАЧИ  
С ПРИБЛИЖЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ И АПОСТЕРИОРНЫМ ВЫБОРОМ  
ПАРАМЕТРА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ**

*Брестский государственный университет им. А. С. Пушкина, Брест, Беларусь,  
e-mail: matysikoleg@mail.ru*

Данная статья ставит своей целью изучение свойств неявного итерационного метода решения некорректных операторных уравнений первого рода, заданных в гильбертовом пространстве, с ограниченным самосопряженным оператором, в предположении, что погрешности имеются не только в правой части уравнения, но и в операторе. Доказана сходимости метода с апостериорным выбором числа итераций, найдены оценка погрешности метода и оценка для апостериорного момента останова. Полученные результаты могут быть использованы в теоретических исследованиях при решении операторных уравнений первого рода, а также прикладных некорректных задач, которые встречаются в динамике и кинетике, математической экономике, геофизике, спектроскопии, системах полной автоматической обработки и интерпретации экспериментов, диагностике плазмы, сейсмике, медицине.

*Ключевые слова:* неявный итерационный метод, некорректная задача, гильбертово пространство, самосопряженный приближенный оператор, правило останова по невязке.

*O. V. MATYSIK*

**IMPLICIT METHOD FOR SOLVING A SELF-ADJOINT ILL-POSED PROBLEM  
WITH AN APPROXIMATE OPERATOR AND AN A POSTERIORI CHOICE  
OF THE REGULARIZATION PARAMETER**

*Brest State University named after A. S. Pushkin, Brest, Belarus,  
e-mail: matysikoleg@mail.ru*

The implicit iteration method for solution of the first-kind operator equations with a non-negative self-adjoint bounded operator in the Hilbert space is proposed. Convergence of the method is proved in the case of an a posteriori choice of the regularization parameter in the usual norm of the Hilbert space, supposing that not only the right hand-side of the equation, but also the operator have errors. The estimates of a method error and an a posteriori stop moment are obtained.

*Keywords:* implicit iteration method, incorrect problem, Hilbert space, self-adjointed approximate operator, discrepancy stopping rule.

**Введение.** В статье предлагается неявный итерационный метод решения некорректно поставленных задач, описываемых операторными уравнениями первого рода. Метод представляет собой семейство итерационных схем, зависящих от параметра  $k$ .

Сравнение предлагаемого неявного метода с хорошо известным явным методом итераций  $x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha(y_\delta - Ax_{n,\delta})$ ,  $x_{0,\delta} = 0$  [1] показывает, что порядки их оптимальных оценок совпадают. Достоинство явных методов заключается в том, что они не требуют обращения оператора, а требуют только вычисления значений оператора на последовательных приближениях. В этом смысле явный метод из работы [1] предпочтительнее предлагаемого неявного метода. Однако предложенный неявный метод обладает следующим важным преимуществом. В явном методе

из [1] на шаг  $\alpha$  накладывается ограничение сверху – неравенство  $0 < \alpha \leq \frac{5}{4\|A\|}$ , что может на практике привести к необходимости большого числа итераций. В рассматриваемом неявном методе никаких ограничений сверху на  $\alpha > 0$  нет, в связи с чем оптимальную оценку для рассматриваемого неявного метода можно получить уже на первых шагах итераций.

Случай приближенной правой части некорректного уравнения и точного оператора для предложенного метода рассмотрен в работе [2, с. 137]. Там исследован априорный и апостериорный выбор параметра регуляризации, изучен случай неединственного решения уравнения, доказана сходимость метода в энергетической норме гильбертова пространства.

В [3] для предлагаемого метода при решении уравнения с приближенным оператором и приближенной правой частью доказана сходимость и получены оценки погрешности в случае априорного выбора числа итераций.

В данной статье продолжено изучение предложенного метода. Доказана его сходимость в случае апостериорного выбора числа итераций для решения уравнения с самосопряженным оператором, получены оценка погрешности метода и оценка для апостериорного момента останова в предположении, что оператор и правая часть уравнения заданы приближенно.

**1. Постановка задачи.** Пусть  $H$  и  $F$  – гильбертовы пространства,  $A \in \mathcal{L}(H, F)$ , т. е.  $A$  – линейный непрерывный оператор, действующий из  $H$  в  $F$ . Решается уравнение

$$Ax = y. \quad (1)$$

Предполагается, что нуль принадлежит спектру оператора  $A$ , но не является его собственным значением. Задача отыскания элемента  $x \in H$  по элементу  $y \in F$  является некорректной, так как сколь угодно малые возмущения в правой части  $y$  могут вызывать большие возмущения решения.

Предположим, что точное решение  $x^* \in H$  уравнения (1) существует и является единственным. Будем искать его с помощью неявного метода итераций

$$(E + \alpha^2 A^{2k})x_{n+1} = (E - \alpha A^k)^2 x_n + 2\alpha A^{k-1}y, \quad x_0 = 0, \quad k \in N, \quad (2)$$

где  $E$  – тождественный оператор,  $\alpha$  – итерационный шаг. Считаем, что оператор  $A$  и правая часть  $y$  уравнения (1) заданы приближенно, т. е. вместо  $y$  известно приближение  $y_\delta$ ,  $\|y - y_\delta\| \leq \delta$ , а вместо оператора  $A$  известен оператор  $A_\eta$ ,  $\|A - A_\eta\| \leq \eta$ . Тогда метод итераций (2) примет вид

$$(E + \alpha^2 A_\eta^{2k})x_{(n+1)(\delta, \eta)} = (E - \alpha A_\eta^k)^2 x_{n(\delta, \eta)} + 2\alpha A_\eta^{k-1}y_\delta, \quad x_{0(\delta, \eta)} = 0, \quad k \in N. \quad (3)$$

Предположим, что  $0 \in Sp(A_\eta)$  и  $Sp(A_\eta) \subseteq [0, M]$ .

Докажем сходимость итерационного метода (3) в случае апостериорного выбора параметра регуляризации при решении некорректного уравнения  $A_\eta x = y_\delta$  и получим оценку погрешности метода и оценку для момента останова. Подобные вопросы изучались в [1, с. 103], но только для других методов. В дальнейшем считаем, что нуль не является собственным значением оператора  $A_\eta$ , но принадлежит его спектру.

**2. Правило останова по невязке.** Зададим уровень останова  $\varepsilon > 0$  и определим момент  $m$  останова итерационного процесса (3) условием

$$\left. \begin{aligned} \|A_\eta x_{n(\delta, \eta)} - y_\delta\| > \varepsilon, \quad (n < m), \\ \|A_\eta x_{m(\delta, \eta)} - y_\delta\| \leq \varepsilon, \end{aligned} \right\} \varepsilon = b(\delta + \|x^*\|\eta), \quad b > 1. \quad (4)$$

Предположим, что при начальном приближении  $x_{0(\delta, \eta)}$  невязка достаточно велика, больше уровня останова  $\varepsilon$ , т. е.  $\|A_\eta x_{0(\delta, \eta)} - y_\delta\| > \varepsilon$ . Покажем возможность применения правила (4) к методу итераций (3).

**3. Случай самосопряженной задачи.** Пусть  $H = F$ ,  $A = A^* \geq 0$ ,  $A_\eta = A_\eta^* \geq 0$ ,  $Sp(A_\eta) \subseteq [0, M]$ ,  $0 < \eta \leq \eta_0$ . Итерационный метод (3) запишется в виде

$$x_{n(\delta, \eta)} = g_n(A_\eta) y_\delta, \quad (5)$$

где  $g_n(\lambda) = \lambda^{-1} \left[ 1 - \frac{(1 - \alpha \lambda^k)^{2n}}{(1 + \alpha^2 \lambda^{2k})^n} \right] \geq 0$ . В монографии [2, с. 139] получены следующие условия для функций  $g_n(\lambda)$  при  $\alpha > 0$ :

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq M} |g_n(\lambda)| \leq \gamma n^{1/k}, \quad (n > 0), \quad \gamma = 2k\alpha^{1/k}; \quad (6)$$

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq M} \lambda^s |1 - \lambda g_n(\lambda)| \leq \gamma_s n^{-s/k}, \quad (n > 0), \quad 0 < s < \infty, \quad \gamma_s = \left( \frac{s}{2k\alpha e} \right)^{s/k} \quad (7)$$

(здесь  $s$  – степень истокорпредставимости точного решения  $x^* = A^s z$ ,  $s > 0$ ,  $\|z\| \leq \rho$ );

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq M} |1 - \lambda g_n(\lambda)| \leq \gamma_0, \quad \gamma_0 = 1, \quad (n > 0). \quad (8)$$

Справедлива

*Лемма 1.* Пусть  $A = A^* \geq 0$ ,  $A_\eta = A_\eta^* \geq 0$ ,  $\|A_\eta - A\| \leq \eta$ ,  $\|A_\eta\| \leq M$ ,  $\alpha > 0$  и выполнено условие (7). Тогда для  $G_{m\eta} = E - A_\eta g_n(A_\eta)$  справедливо соотношение для  $\forall v \in \overline{R(A)}$ :

$$n^{1/k} \|A_\eta G_{m\eta} v\| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty, \eta \rightarrow 0. \quad (9)$$

*Доказательство.* Воспользуемся теоремой Банаха – Штейнгауза [4, с. 151], по которой сходимость  $B_n u \rightarrow B u$  при  $n \rightarrow \infty$  для  $\forall u \in H$  имеет место на некотором плотном в  $H$  подмножестве и  $\|B_n\|$ ,  $n = 1, 2, \dots$  ограничены не зависящей от  $n$  постоянной. Здесь  $\|B_n\| = n^{1/k} \|A_\eta G_{m\eta}\|$  и по условию (7) нормы  $\|B_n\|$  ограничены в совокупности

$$\begin{aligned} n^{1/k} \|A_\eta G_{m\eta}\| &= n^{1/k} \|A_\eta (E - A_\eta g_n(A_\eta))\| = \\ &= n^{1/k} \sup_{0 \leq \lambda \leq M} \lambda |1 - \lambda g_n(\lambda)| \leq n^{1/k} \gamma_1 n^{-1/k} = \gamma_1, \quad (n > 0, \eta > 0). \end{aligned}$$

Для элементов вида  $v = A\omega$ , образующих в  $\overline{R(A)}$  плотное подмножество, в силу (7) имеем

$$\begin{aligned} n^{1/k} \|A_\eta G_{m\eta} v\| &= n^{1/k} \|A_\eta G_{m\eta} A\omega\| = n^{1/k} \|A_\eta G_{m\eta} (A - A_\eta)\omega\| + \\ &+ n^{1/k} \|A_\eta G_{m\eta} A_\eta \omega\| \leq \left( \gamma_1 \eta + n^{1/k} \sup_{0 \leq \lambda \leq M} \lambda^2 |1 - \lambda g_n(\lambda)| \right) \|\omega\| \leq \\ &\leq \left( \gamma_1 \eta + n^{1/k} \gamma_2 n^{-2/k} \right) \|\omega\| = \left( \gamma_1 \eta + \gamma_2 n^{-1/k} \right) \|\omega\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \eta \rightarrow 0. \end{aligned}$$

По теореме Банаха – Штейнгауза  $n^{1/k} \|A_\eta G_{m\eta} v\| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ ,  $\eta \rightarrow 0$ . Лемма 1 доказана.

*Лемма 2.* Пусть  $A = A^* \geq 0$ ,  $A_\eta = A_\eta^* \geq 0$ ,  $\|A_\eta - A\| \leq \eta$ ,  $\|A_\eta\| \leq M$ ,  $\alpha > 0$  и выполнены условия (6) и (8). Если для некоторых  $v_0 \in \overline{R(A)}$ ,  $n_p \leq \bar{n} = \text{const}$  и  $\eta_p \rightarrow 0$  имеем  $A_{\eta_p} G_{n_p \eta_p} v_0 \rightarrow 0$  при  $p \rightarrow \infty$ , то  $G_{n_p \eta_p} v_0 \rightarrow 0$ .

*Доказательство.* В силу неравенства (8) последовательность  $v_p = G_{n_p \eta_p} v_0$  ограничена, т. е.  $\|v_p\| = \|G_{n_p \eta_p} v_0\| \leq \gamma_0 \|v_0\|$ ,  $p \in N = \{1, 2, \dots\}$ . Поэтому в гильбертовом пространстве из этой

последовательности можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность  $\upsilon_p \rightarrow \upsilon$ , ( $p \in N' \subset N$ ). Тогда  $A_{\eta p} \upsilon_p \rightarrow A_{\eta p} \upsilon$ , ( $p \in N'$ ). По условию  $\omega_p = A_{\eta p} \upsilon_p \rightarrow 0$ , значит,  $A_{\eta p} \upsilon = 0$ . Но так как нуль не является собственным значением оператора  $A_{\eta p}$ , то  $\upsilon = 0$ . Теперь

$$\begin{aligned} \|\upsilon_p\|^2 &= (\upsilon_p, G_{n_p \eta_p} \upsilon_0) = (\upsilon_p, (E - A_{\eta_p} g_{n_p}(A_{\eta_p})) \upsilon_0) = (\upsilon_p, \upsilon_0) - \\ &- (A_{\eta_p} \upsilon_p, g_{n_p}(A_{\eta_p}) \upsilon_0) = (\upsilon_p, \upsilon_0) - (\omega_p, g_{n_p}(A_{\eta_p}) \upsilon_0) \rightarrow (\upsilon, \upsilon_0) = (0, \upsilon_0) = 0, \quad (p \in N'), \end{aligned}$$

так как  $\omega_p \rightarrow 0$  и по условию (6)  $\|g_{n_p}(A_{\eta_p})\| \leq \gamma n_p^{1/k} \leq \gamma \bar{n}^{1/k}$ . Итак, любая слабо сходящаяся подпоследовательность ограниченной последовательности  $\upsilon_p$  стремится к нулю по норме. Отсюда следует, что и вся последовательность  $\upsilon_p \rightarrow 0$ ,  $p \rightarrow \infty$  по норме. Лемма 2 доказана.

Используем доказанные леммы при доказательстве следующих теорем.

**Теорема 1.** Пусть  $H = F$ ,  $A = A^* \geq 0$ ,  $A_\eta = A_\eta^* \geq 0$ ,  $\|A_\eta - A\| \leq \eta$ ,  $\|A_\eta\| \leq M$ , ( $0 < \eta \leq \eta_0$ ),  $\alpha > 0$ ,  $y \in R(A)$ ,  $\|y - y_\delta\| \leq \delta$  и выполнены условия (6), (7), (8). Пусть параметр  $m(\delta, \eta)$  выбран по правилу (4). Тогда  $(\delta + \eta)^k m(\delta, \eta) \rightarrow 0$ ,  $x_{m(\delta, \eta)} \rightarrow x^*$  при  $\delta \rightarrow 0$ ,  $\eta \rightarrow 0$ .

**Доказательство.** Из (5) имеем  $x_{n(\delta, \eta)} = g_n(A_\eta) y_\delta$ , тогда

$$\begin{aligned} x_{n(\delta, \eta)} - x^* &= -x^* + g_n(A_\eta) y_\delta = -G_{m\eta} x^* + G_{m\eta} x^* - x^* + g_n(A_\eta) y_\delta = \\ &= -G_{m\eta} x^* + (E - A_\eta g_n(A_\eta)) x^* - x^* + g_n(A_\eta) y_\delta = \\ &= -G_{m\eta} x^* + x^* - A_\eta g_n(A_\eta) x^* - x^* + g_n(A_\eta) y_\delta = \\ &= -G_{m\eta} x^* + g_n(A_\eta) (y_\delta - A_\eta x^*). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$x_{n(\delta, \eta)} - x^* = -G_{m\eta} x^* + g_n(A_\eta) (y_\delta - A_\eta x^*). \quad (10)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} A_\eta x_{n(\delta, \eta)} - A_\eta x^* &= -A_\eta G_{m\eta} x^* + A_\eta g_n(A_\eta) y_\delta - A_\eta g_n(A_\eta) A_\eta x^*; \\ A_\eta x_{n(\delta, \eta)} &= A_\eta x^* - A_\eta G_{m\eta} x^* + A_\eta g_n(A_\eta) y_\delta - A_\eta g_n(A_\eta) A_\eta x^*; \\ A_\eta x_{n(\delta, \eta)} - y_\delta &= -A_\eta G_{m\eta} x^* - y_\delta + (E - A_\eta g_n(A_\eta)) A_\eta x^* + A_\eta g_n(A_\eta) y_\delta = \\ &= -A_\eta G_{m\eta} x^* + G_{m\eta} A_\eta x^* - (E - A_\eta g_n(A_\eta)) y_\delta = \\ &= -A_\eta G_{m\eta} x^* + G_{m\eta} A_\eta x^* - G_{m\eta} y_\delta = -A_\eta G_{m\eta} x^* - G_{m\eta} (y_\delta - A_\eta x^*). \end{aligned}$$

Итак,

$$A_\eta x_{n(\delta, \eta)} - y_\delta = -A_\eta G_{m\eta} x^* - G_{m\eta} (y_\delta - A_\eta x^*). \quad (11)$$

Покажем, что  $\|G_{m\eta} x^*\| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ ,  $\eta \rightarrow 0$ . Действительно,

$$\begin{aligned} \|G_{m\eta} x^*\| &= \|(E - A_\eta g_n(A_\eta)) x^*\| = \left\| \int_0^M (1 - \lambda g_n(\lambda)) dE_\lambda x^* \right\| = \\ &= \left\| \int_0^M \frac{(1 - \alpha \lambda^k)^{2n}}{(1 + \alpha^2 \lambda^{2k})^n} dE_\lambda x^* \right\| \leq \left\| \int_0^\tau \frac{(1 - \alpha \lambda^k)^{2n}}{(1 + \alpha^2 \lambda^{2k})^n} dE_\lambda x^* \right\| + \left\| \int_\tau^M \frac{(1 - \alpha \lambda^k)^{2n}}{(1 + \alpha^2 \lambda^{2k})^n} dE_\lambda x^* \right\|. \\ \left\| \int_\tau^M \frac{(1 - \alpha \lambda^k)^{2n}}{(1 + \alpha^2 \lambda^{2k})^n} dE_\lambda x^* \right\| &\leq q^n(\tau) \left\| \int_\tau^M dE_\lambda x^* \right\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad \text{так как для } \lambda \in [\tau, M] \quad \frac{(1 - \alpha \lambda^k)^2}{1 + \alpha^2 \lambda^{2k}} \leq q(\tau) < 1. \end{aligned}$$

$$\left\| \int_0^\tau \frac{(1 - \alpha \lambda^k)^{2n}}{(1 + \alpha^2 \lambda^{2k})^n} dE_\lambda x^* \right\| \leq \left\| \int_0^\tau dE_\lambda x^* \right\| = \|E_\tau x^*\| \rightarrow 0, \quad \tau \rightarrow 0 \text{ в силу свойств спектральной функции}$$

[5, с. 302]. Таким образом,

$$\|G_{m\eta} x^*\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad \eta \rightarrow 0. \quad (12)$$

Покажем, что

$$\|g_n(A_\eta)(y_\delta - A_\eta x^*)\| \leq \gamma n^{1/k} (\delta + \|x^*\| \eta). \quad (13)$$

По условию (6)  $\|g_n(A_\eta)\| \leq \sup_{0 \leq \lambda \leq M} |g_n(\lambda)| \leq \gamma n^{1/k}$ , а

$$\|y_\delta - A_\eta x^*\| \leq \|y_\delta - y\| + \|y - A_\eta x^*\| = \|y_\delta - y\| + \|Ax^* - A_\eta x^*\| \leq \delta + \|(A - A_\eta)x^*\| \leq \delta + \eta \|x^*\|,$$

поэтому получим  $\|g_n(A_\eta)(y_\delta - A_\eta x^*)\| \leq \gamma n^{1/k} (\delta + \|x^*\| \eta)$ . В силу леммы 1

$$\sigma_{m\eta} = n^{1/k} \|A_\eta G_{m\eta} x^*\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad \eta \rightarrow 0. \quad (14)$$

Применим правило останова (4), тогда  $\|A_\eta x_{m(\delta, \eta)} - y_\delta\| \leq b(\delta + \|x^*\| \eta)$ ,  $b > 1$  и из (8) и (11) получим

$$\|A_\eta G_{m\eta} x^*\| \leq (b+1)(\delta + \|x^*\| \eta). \quad (15)$$

Действительно, из (11)

$$\begin{aligned} \|A_\eta G_{m\eta} x^*\| &\leq \|A_\eta x_{m(\delta, \eta)} - y_\delta\| + \|G_{m\eta}(y_\delta - A_\eta x^*)\| \leq \\ &\leq b(\delta + \|x^*\| \eta) + (\delta + \|x^*\| \eta) = (b+1)(\delta + \|x^*\| \eta). \end{aligned}$$

Для  $\forall n < m$   $\|A_\eta x_{n(\delta, \eta)} - y_\delta\| > \varepsilon$ , поэтому

$$\|A_\eta G_{m\eta} x^*\| \geq \|A_\eta x_{n(\delta, \eta)} - y_\delta\| - \|G_{m\eta}(y_\delta - A_\eta x^*)\| \geq (b-1)(\delta + \|x^*\| \eta).$$

Следовательно, для  $\forall n < m$

$$\|A_\eta G_{m\eta} x^*\| \geq (b-1)(\delta + \|x^*\| \eta). \quad (16)$$

Из (16) и (14) при  $n = m-1$   $\frac{\sigma_{m-1, \eta}}{(m-1)^{1/k}} = \|A_\eta G_{m-1, \eta} x^*\| \geq (b-1)(\delta + \|x^*\| \eta)$  или  $(m-1)^{1/k} (\delta + \|x^*\| \eta) \leq \frac{\sigma_{m-1, \eta}}{b-1} \rightarrow 0$ ,  $\delta \rightarrow 0$ ,  $\eta \rightarrow 0$  (так как из (14)  $\sigma_{m\eta} \rightarrow 0$ ,  $m \rightarrow \infty$ ,  $\eta \rightarrow 0$ ).

Если при этом  $m(\delta, \eta) \rightarrow \infty$  при  $\delta \rightarrow 0$ ,  $\eta \rightarrow 0$ , то, используя (10), (12) и (13), получим

$$\begin{aligned} \|x_{m(\delta, \eta)} - x^*\| &\leq \|G_{m\eta} x^*\| + \|g_m(A_\eta)(y_\delta - A_\eta x^*)\| \leq \\ &\leq \|G_{m\eta} x^*\| + \gamma m^{1/k} (\delta, \eta) (\delta + \|x^*\| \eta) \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty, \quad \delta \rightarrow 0, \quad \eta \rightarrow 0, \end{aligned}$$

т. е. что  $x_{m(\delta, \eta)} \rightarrow x^*$ .

Если же для некоторых  $\delta_n$  и  $\eta_n$  последовательность  $m(\delta_n, \eta_n)$  окажется ограниченной, то и в этом случае  $x_{m(\delta_n, \eta_n)} \rightarrow x^*$ ,  $\delta_n \rightarrow 0$ ,  $\eta_n \rightarrow 0$ . Действительно, из (15)

$$\|A_{\eta_n} G_{m\eta_n} x^*\| \leq (b+1)(\delta_n + \|x^*\| \eta_n) \rightarrow 0, \quad \delta_n \rightarrow 0, \quad \eta_n \rightarrow 0.$$

Следовательно, имеем  $A_{\eta_n} G_{m\eta_n} x^* \rightarrow 0$ ,  $\eta_n \rightarrow 0$ ,  $\delta_n \rightarrow 0$  и по лемме 2 получаем, что при  $\delta_n \rightarrow 0$ ,  $\eta_n \rightarrow 0$  выполняется  $G_{m\eta_n} x^* \rightarrow 0$ . Отсюда

$$\|x_{m(\delta_n, \eta_n)} - x^*\| \leq \|G_{m\eta_n} x^*\| + \gamma m^{1/k} (\delta_n, \eta_n) (\delta_n + \|x^*\| \eta_n) \rightarrow 0, \delta_n \rightarrow 0, \eta_n \rightarrow 0.$$

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Если  $x^* = A^s z$ ,  $s > 0$ ,  $\|z\| \leq \rho$ , то справедливы оценки

$$\begin{aligned} m \leq 1 + \frac{s+1}{2k\alpha e} \left[ \frac{\rho}{(b-1)(\delta + \|x^*\| \eta) - c_s \gamma_1 \eta \rho} \right]^{\frac{k}{s+1}}, \\ \|x_{m(\delta, \eta)} - x^*\| \leq c_s \eta^{\min(1, s)} \rho + \left[ c_s \gamma_1 \eta \rho + (b+1)(\delta + \|x^*\| \eta) \right]^{\frac{s}{s+1}} \rho^{\frac{1}{s+1}} + \\ + 2k\alpha^{1/k} \left\{ 1 + \frac{s+1}{2k\alpha e} \left[ \frac{\rho}{(b-1)(\delta + \|x^*\| \eta) - c_s \gamma_1 \eta \rho} \right]^{\frac{k}{s+1}} \right\}^{1/k} (\delta + \|x^*\| \eta). \end{aligned} \quad (17)$$

Доказательство. Оценим заново элемент  $\|A_{\eta} G_{m-1, \eta} x^*\|$ . В силу неравенства (7) и леммы 1.1 [1, с. 91]

$$\begin{aligned} \|A_{\eta} G_{m-1, \eta} x^*\| &= \|A_{\eta} G_{m-1, \eta} A^s z\| \leq \|A_{\eta} G_{m-1, \eta} (A^s - A_{\eta}^s) z\| + \|A_{\eta}^{s+1} G_{m-1, \eta} z\| \leq \\ &\leq (\beta_{m-1, s} \eta + \gamma_{s+1} (m-1)^{-(s+1)/k}) \rho, \end{aligned}$$

где  $\beta_{m-1, s} = c_s \sup_{0 \leq \lambda \leq M} \lambda(1 - \lambda g_{m-1}(\lambda)) \leq c_s [2k\alpha e(m-1)]^{-1/k} = c_s \gamma_1 (m-1)^{-1/k} \rightarrow 0$ ,  $m \rightarrow \infty$ . Здесь  $c_s = \text{const}$  ( $c_s \leq 2$  при  $0 < s \leq 1$ ). Сопоставляя это с (16), получим

$$(b-1)(\delta + \|x^*\| \eta) \leq (\beta_{m-1, s} \eta + \gamma_{s+1} (m-1)^{-(s+1)/k}) \rho.$$

Отсюда

$$\gamma_{s+1} (m-1)^{-(s+1)/k} \rho \geq (b-1)(\delta + \|x^*\| \eta) - \beta_{m-1, s} \eta \rho,$$

тогда

$$m \leq 1 + \frac{s+1}{2k\alpha e} \left[ \frac{\rho}{(b-1)(\delta + \|x^*\| \eta) - \beta_{m-1, s} \eta \rho} \right]^{\frac{k}{s+1}}.$$

Поскольку  $\beta_{m-1, s} = c_s \gamma_1 \frac{1}{(m-1)^{1/k}} \leq c_s \gamma_1$  (так как при  $m > 1$   $\frac{1}{(m-1)^{1/k}} \leq 1$ ), то

$$(b-1)(\delta + \|x^*\| \eta) - \beta_{m-1, s} \eta \rho \geq (b-1)(\delta + \|x^*\| \eta) - c_s \gamma_1 \eta \rho,$$

и, значит, получим следующую оценку для  $m$ :

$$m \leq 1 + \frac{s+1}{2k\alpha e} \left[ \frac{\rho}{(b-1)(\delta + \|x^*\| \eta) - c_s \gamma_1 \eta \rho} \right]^{\frac{k}{s+1}}.$$

Имеем  $\|G_{m\eta}x^*\| = \|G_{m\eta}A^s z\| \leq \|G_{m\eta}(A^s - A_\eta^s)z\| + \|G_{m\eta}A_\eta^s z\|$ . По лемме 1.1 [1, с. 91]  $\|G_{m\eta}(A^s - A_\eta^s)z\| \leq c_s \eta^{\min(1,s)} \rho$ , что дает в оценку  $\|x_{m(\delta,\eta)} - x^*\|$  вклад  $O((\delta + \eta)^{s/(s+1)})$  [1, с. 111]. Норму  $\|G_{m\eta}A_\eta^s z\|$  оценим с помощью неравенства моментов, леммы 1.1 [1, с. 91] и (15):

$$\begin{aligned} \|G_{m\eta}A_\eta^s z\| &= \|A_\eta^{s+1} G_{m\eta} z\|^{s/(s+1)} \|G_{m\eta} z\|^{1/(s+1)} \leq \|A_\eta G_{m\eta} A_\eta^s z\|^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)} \leq \\ &\leq \left( \|A_\eta G_{m\eta} (A_\eta^s - A^s) z\| + \|A_\eta G_{m\eta} A^s z\| \right)^{s/(s+1)} \rho^{\frac{1}{s+1}} \leq \\ &\leq \left[ \beta_{ms} \eta \rho + (b+1)(\delta + \|x^*\| \eta) \right]^{s/(s+1)} \rho^{\frac{1}{s+1}}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|x_{m(\delta,\eta)} - x^*\| &\leq \|G_{m\eta}x^*\| + \|g_m(A_\eta)(y_\delta - A_\eta x^*)\| \leq \\ &\leq c_s \eta^{\min(1,s)} \rho + \left[ \beta_{ms} \eta \rho + (b+1)(\delta + \|x^*\| \eta) \right]^{s/(s+1)} \rho^{\frac{1}{s+1}} + \gamma m^{\frac{1}{k}} (\delta + \|x^*\| \eta) \leq \\ &\leq c_s \eta^{\min(1,s)} \rho + \left[ c_s \gamma_1 \eta \rho + (b+1)(\delta + \|x^*\| \eta) \right]^{s/(s+1)} \rho^{\frac{1}{s+1}} + \\ &+ 2k\alpha^{1/k} \left\{ 1 + \frac{s+1}{2k\alpha e} \left[ \frac{\rho}{(b-1)(\delta + \|x^*\| \eta) - c_s \gamma_1 \eta \rho} \right]^{\frac{k}{s+1}} \right\}^{1/k} (\delta + \|x^*\| \eta). \end{aligned}$$

Теорема 2 доказана.

**Замечание 1.** Порядок оценки (17) есть  $O((\delta + \eta)^{s/(s+1)})$ , и, как следует из [1, с. 15], он оптимален в классе задач с истокорпредставимыми решениями.

**Замечание 2.** Хотя формулировка теоремы 2 дается с указанием степени истокорпредставимости  $s$  и истокорпредставляющего элемента  $z$ , на практике их значения не потребуются, так как они не содержатся в правиле останова (4).

**Заключение.** В данной работе получены следующие новые результаты: доказана сходимость неявного итерационного метода решения некорректных уравнений первого рода с неотрицательным самосопряженным ограниченным оператором в случае апостериорного выбора параметра регуляризации в исходной норме гильбертова пространства и в предположении, что погрешности имеются не только в правой части уравнения, но и в операторе; получены оценка погрешности метода и оценка апостериорного момента останова.

### Список использованной литературы

1. Вайникко, Г. М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г. М. Вайникко, А. Ю. Веретенников. – М.: Наука, 1986.
2. Матысик, О. В. Явные и неявные итерационные процедуры решения некорректно поставленных задач / О. В. Матысик. – Брест: БрГУ им. А. С. Пушкина, 2014.
3. Matysik, O. V. Implicit iteration method of solving linear equations with approximating right-hand member and approximately specified operator / O. V. Matysik // J. Numer. Appl. Math. – 2014. – N 2 (116). – P. 28–34.
4. Люстерник, Л. А. Элементы функционального анализа / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. – М.: Наука, 1965.
5. Канторович, Л. В. Функциональный анализ в нормированных пространствах / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – М.: Физматгиз, 1959.

Поступила в редакцию 08.10.2015

УДК 513.51

*Е. А. РОВБА, Е. В. ДИРВУК*

**О КОНСТАНТЕ ЛЕБЕГА ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ  
ПРОЦЕССОВ ЛАГРАНЖА ПО УЗЛАМ ЧЕБЫШЕВА – МАРКОВА**

*Гродненский государственный университет им. Янки Купалы, Гродно, Беларусь,  
e-mail: rovba.ea@gmail.com, dirvuk@gmail.com*

В настоящей работе рассматриваются интерполяционные процессы Лагранжа, в которых в качестве узлов интерполирования выбираются нули рациональных функций Чебышева – Маркова первого рода. Получена оценка константы Лебега в случае действительных полюсов.

*Ключевые слова:* интерполяционные процессы Лагранжа, рациональные функции Чебышева – Маркова, оценка константы Лебега.

*Y. A. ROVBA, Y. V. DIRVUK*

**ESTIMATION OF THE LEBESGUE CONSTANT FOR THE RATIONAL  
LAGRANGE INTERPOLATION PROCESSES THROUGH THE CHEBYSHEV – MARKOV NODES**

*Yanka Kupala State University of Grodno, Grodno, Belarus,  
e-mail: rovba.ea@gmail.com, dirvuk@gmail.com*

This article considers the Lagrange interpolation processes, in which as interpolation nodes the zeros of the first-kind rational Chebyshev – Markov functions are chosen. The Lebesgue constant in the case of real poles is estimated.

*Keywords:* Lagrange interpolation process, rational Chebyshev – Markov functions, estimate of the Lebesgue constant.

Исследование функции Лебега интерполяционных процессов Лагранжа на различных множествах – одна из основных задач теории интерполирования (см., напр., [1]). Скорость их роста в зависимости от величины  $n$  определяет как сходимость интерполяционного процесса  $L_n(x)$  к функции  $f(x)$  в равномерной норме, так и оценку вычислительной погрешности интерполяции. В полиномиальном случае интерполирование Лагранжа по нулям многочленов Чебышева изучалось многими авторами. Оценки нормы соответствующих интерполяционных многочленов, рассматриваемых как операторы в пространстве непрерывных функций на отрезке, т. е. констант Лебега, были получены в работах С. Н. Бернштейна [2], В. В. Иванова [3], В. К. Дзядыка [4] и других авторов (см., напр., [5]).

Аналогом для интерполирования рациональными функциями с фиксированными полюсами на отрезке  $[-1,1]$  служит интерполяционный процесс по нулям дробей Чебышева – Маркова, рассмотренный впервые В. Н. Русаком [6]. В этой работе получена оценка константы Лебега в случае, когда полюсы не имеют предельных точек на отрезке  $[-1,1]$ . Подобный результат был повторен в работах П. Борвейна [7] и Г. Мина [8]. А. П. Старовойтов [9] получил оценку константы Лебега интерполяционных рациональных процессов с узлами Чебышева – Маркова в случае стремления полюсов к концам отрезка  $[-1,1]$  по некасательным путям и некоторых дополнительных условиях. А. Л. Лукашов [10] получил подобную оценку констант Лебега интерполяционных рациональных процессов с узлами Чебышева – Маркова на нескольких отрезках. Заметим, что норма интерполяционных операторов в  $L_2$  исследована достаточно полно (см. [11, 12]).

Основная цель предлагаемой статьи – получить оценку константы Лебега для случая интерполяционных рациональных процессов Лагранжа с узлами Чебышева – Маркова на отрезке  $[-1,1]$  в случае действительных плюсов.

Пусть  $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$  – последовательность действительных чисел  $a_0 = 0$ ,  $|a_k| < 1$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Определим косинус-дробь Чебышева – Маркова:

$$M_n(x) = \cos \mu_n(x),$$

где

$$\mu_n(x) = \sum_{k=0}^n \arccos \frac{x + a_k}{1 + a_k x}.$$

Нетрудно проверить, что  $\mu_n'(x) = -\frac{\lambda_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ ,  $\lambda_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\sqrt{1-a_k^2}}{1+a_k x}$ ,  $x \in (-1,1)$ .

Обозначим через  $x_k, k = 0, 1, \dots, n$  нули функции  $M_n(x)$ ,

$$\mu_n(x_k) = \frac{(2k+1)\pi}{2}, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad (1)$$

$$-1 < x_n < x_{n-1} < \dots < x_1 < x_0 < 1.$$

Для всякой функции  $f(x)$ , определенной на отрезке  $[-1,1]$ , можно построить интерполяционную рациональную функцию Лагранжа

$$L_n(x, f) = \sum_{k=0}^n f(x_k) l_k(x), \quad (2)$$

где

$$l_k(x) = \frac{M_n(x)}{(x-x_k)M_n'(x_k)}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Определим функцию Лебега

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n |l_k(x)|, \quad x \in [-1,1]$$

и константу Лебега

$$L_n = \max_{x \in [-1,1]} L_n(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Понятно, что  $L_n = \|L_n\|_{C[-1,1]}$ , т. е. постоянная Лебега, есть норма оператора,  $L_n : C[-1,1] \rightarrow \mathbf{R}_n(a)$ , где  $\mathbf{R}_n(a)$  есть множество рациональных функций вида

$$\frac{p_n(x)}{\prod_{k=1}^n (1 + a_k x)},$$

где  $p_n(x)$  – произвольный алгебраический многочлен степени не выше  $n$ .

Справедлива

**Т е о р е м а.** Пусть  $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$  – последовательность действительных чисел,  $a_0 = 0$ ,  $|a_k| < 1$ ,  $k \in \mathbb{N}$  и  $\{L_n(x, f)\}$  – интерполяционный процесс Лагранжа с узлами Чебышева – Маркова (см. (2)). Тогда для постоянной Лебега этого процесса справедлива оценка

$$L_n(x) < 1 + Cd_n \ln \sum_{k=0}^n \left( \sqrt{\frac{1-a_k}{1+a_k}} + \sqrt{\frac{1+a_k}{1-a_k}} \right), \quad n \in \mathbb{N},$$

где  $C$  – некоторая положительная постоянная,  $d_n = \max_{k=1,2,\dots,n} \left\{ \frac{\lambda_n(x_{k-1})}{\lambda_n(x_k)}, \frac{\lambda_n(x_k)}{\lambda_n(x_{k-1})} \right\}$ .

Доказательство. Прежде всего отметим, что из равенства

$$L_n(x, 1) \equiv 1$$

имеем:

$$\sum_{k=0}^n l_k(x) = 1,$$

и

$$|l_j(x)| \leq 1 + \sum_{\substack{k=0, \\ k \neq j}}^n |l_k(x)|, \quad j = 0, 1, \dots, n. \quad (3)$$

Далее найдем

$$\lambda_n'(x) = -\sum_{k=1}^n \frac{a_k \sqrt{1-a_k^2}}{(1+a_k x)^2}, \quad x \in [-1, 1];$$

и

$$\lambda_n''(x) = \sum_{k=1}^n \frac{2a_k^2 \sqrt{1-a_k^2}}{(1+a_k x)^3}, \quad x \in [-1, 1].$$

Очевидно, функция  $\lambda_n(x)$  является выпуклой вниз на отрезке  $[-1, 1]$  и, следовательно, существует точка  $x = \alpha_n$  такая, что на отрезке  $[-1, \alpha_n]$  эта функция убывает, а на отрезке  $[\alpha_n, 1]$  – возрастает. Причем не исключаем случай, когда  $\alpha_n = 1$  или  $\alpha_n = -1$ . Заметим также, что

$$\lambda_n(-1) = \sum_{k=0}^n \sqrt{\frac{1+a_k}{1-a_k}}, \quad \lambda_n(1) = \sum_{k=0}^n \sqrt{\frac{1-a_k}{1+a_k}}.$$

Если  $x = x_k$ , то функция Лебега  $L_n(x_k) = 1$ . Поэтому предполагаем, что  $x \neq x_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$  и пусть, например,  $x \in [\alpha_n, 1]$ ,  $\alpha_n < 1$ . Тогда существует  $j$  такое, что  $x_j < x < x_{j-1}$ ,  $1 \leq j \leq n$ , либо  $x \in [-1, x_n) \cup (x_0, 1]$ . Подчеркнем, что в этом случае функция  $\lambda_n(x)$  будет возрастающей на промежутке  $[x_{j-1}, 1]$ , а на промежутке  $[-1, x_{j-1}]$  – выпуклой вниз.

Функцию Лебега представим в виде

$$\begin{aligned} L_n(x) = \sum_{k=0}^{j-3} |l_k(x)| + |l_{j-2}(x)| + |l_{j-1}(x)| + |l_j(x)| + |l_{j+1}(x)| + \sum_{k=j+2}^n |l_k(x)| =: S_1(x) + |l_{j-2}(x)| + \\ + |l_{j-1}(x)| + |l_j(x)| + |l_{j+1}(x)| + S_2(x). \end{aligned} \quad (4)$$

Если  $x \in (x_0, 1]$  или  $j = 1, 2$ , то сумма  $S_1(x)$  будет отсутствовать, если же  $x \in [-1, x_n)$  или  $j = n-1, n$ , то будет отсутствовать сумма  $S_2(x)$ . Пусть, например,  $2 < j < n-1$ . Будем оценивать вначале сумму  $S_1(x)$ :

$$S_1(x) = \sum_{k=0}^{j-3} |l_k(x)|.$$

Легко видеть, что в этом случае

$$|l_k(x)| < \frac{\sqrt{1-x_k^2}}{(x_k - x)\lambda_n(x_k)}, \quad k = 0, 1, \dots, j-3.$$

Сделаем замену  $x = \cos \theta$ ,  $x_k = \cos \theta_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ . Тогда

$$|l_k(x)| < \frac{\sin \theta_k}{(\cos \theta_k - \cos \theta) \lambda_n(\cos \theta_k)}, \quad k = 0, 1, \dots, j-3.$$

Функция  $\frac{\sin t}{\cos t - \cos \theta}$  возрастает при  $t \in [0, \theta)$ . Следовательно,

$$\frac{\sin \theta_k}{\cos \theta_k - \cos \theta} < \frac{1}{\theta_{k+1} - \theta_k} \int_{\theta_k}^{\theta_{k+1}} \frac{\sin t dt}{\cos t - \cos \theta}, \quad k = 0, 1, \dots, j-3$$

и

$$|l_k(x)| < \frac{(\theta_{k+1} - \theta_k)^{-1}}{\lambda_n(\cos \theta_k)} \int_{\theta_k}^{\theta_{k+1}} \frac{\sin t dt}{\cos t - \cos \theta}, \quad k = 0, 1, \dots, j-3. \quad (5)$$

Далее заметим, что

$$\begin{aligned} \mu_n(\cos \theta_{k+1}) - \mu_n(\cos \theta_k) &= \pi, \\ \theta_{k+1} - \theta_k &= \frac{\pi}{\lambda_n(\cos \theta_k^*)}, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\theta_k^* \in (\theta_k, \theta_{k+1}).$$

Из свойств функции  $\lambda_n(x)$  следует, что

$$\lambda_n(\cos \theta_k^*) < \lambda_n(\cos \theta_k), \quad k = 0, 1, \dots, j-3,$$

и, следовательно,

$$\theta_{k+1} - \theta_k > \frac{\pi}{\lambda_n(\cos \theta_k)}.$$

Таким образом, из неравенств (5) имеем

$$|l_k(x)| < \frac{1}{\pi} \int_{\theta_k}^{\theta_{k+1}} \frac{\sin t dt}{\cos t - \cos \theta}, \quad k = 0, 1, \dots, j-3,$$

и

$$S_1(x) < \frac{1}{\pi} \int_{\theta_0}^{\theta_{j-2}} \frac{\sin t dt}{\cos t - \cos \theta} = \frac{1}{\pi} \ln \frac{\cos \theta_0 - \cos \theta}{\cos \theta_{j-2} - \cos \theta}.$$

Нетрудно проверить, что при  $\theta \in (\theta_{j-1}, \theta_j)$

$$\begin{aligned} \cos \theta_0 - \cos \theta &< 1 - \cos \theta < 2, \\ \cos \theta_{j-2} - \cos \theta &> \cos \theta_{j-2} - \cos \theta_{j-1} = 2 \sin \frac{\theta_j - \theta_{j-1}}{2} \sin \frac{\theta_j + \theta_{j-1}}{2}. \end{aligned}$$

Из свойств функции  $\lambda_n(x)$  и равенства (6) следует, что

$$\theta_j - \theta_{j-1} > \frac{\pi}{\lambda_n(1)},$$

и

$$\theta_j + \theta_{j-1} > \frac{\pi}{\lambda_n(1)}.$$

В итоге получаем, что

$$S_1(x) < \frac{2}{\pi} \ln \lambda_n(1). \quad (7)$$

Второе и третье слагаемые в сумме правой части (4) будем оценивать следующим образом. Например,

$$\begin{aligned} |l_{j-1}(x)| &= \left| \frac{\sqrt{1-x_{j-1}^2} (M_n(x) - M_n(x_{j-1}))}{(x_{j-1} - x)\lambda_n(x_{j-1})} \right| = \left| \frac{\sin \theta_{j-1} (M_n(\cos \theta) - M_n(\cos \theta_{j-1}))}{(\cos \theta_{j-1} - \cos \theta)\lambda_n(\cos \theta_{j-1})} \right| = \\ &= \left| \frac{\sin \theta_{j-1} \sin \mu_n(\cos \theta^*) \lambda_n(\cos \theta^*) (\theta - \theta_{j-1})}{2 \sin \frac{\theta + \theta_{j-1}}{2} \sin \frac{\theta - \theta_{j-1}}{2} \lambda_n(\cos \theta_{j-1})} \right|, \end{aligned}$$

где  $\theta^* \in (\theta_{j-1}, \theta)$ .

Далее имеем

$$\begin{aligned} \frac{\sin \theta_{j-1}}{2 \sin \frac{\theta + \theta_{j-1}}{2}} \leq 1, \quad \sin \frac{\theta - \theta_{j-1}}{2} \geq \frac{1}{\pi} (\theta - \theta_{j-1}), \\ \lambda_n(\cos \theta^*) < \lambda_n(\cos \theta_{j-1}). \end{aligned}$$

Следовательно, справедлива оценка

$$|l_{j-1}(x)| < \pi. \quad (8)$$

Аналогично получим, что

$$|l_{j-2}(x)| < \pi. \quad (9)$$

Теперь займемся оценкой суммы  $S_2(x)$ :

$$S_2(x) = \sum_{k=j+2}^n |l_k(x)|.$$

В этом случае будем иметь

$$|l_k(x)| < \frac{\sqrt{1-x_k^2}}{(x-x_k)\lambda_n(x_k)} = \frac{\sin \theta_k}{(\cos \theta - \cos \theta_k)\lambda_n(\cos \theta_k)}, \quad k = j+2, j+3, \dots, n.$$

Функция  $\frac{\sin t}{\cos \theta - \cos t}$  будет убывающей при  $\theta < t \leq \pi$ . Следовательно,

$$\frac{\sin \theta_k}{\cos \theta - \cos \theta_k} < \frac{1}{\theta_k - \theta_{k-1}} \int_{\theta_{k-1}}^{\theta_k} \frac{\sin t dt}{\cos \theta - \cos t}, \quad k = j+2, j+3, \dots, n,$$

и

$$|l_k(x)| < \frac{(\theta_k - \theta_{k-1})^{-1}}{\lambda_n(\cos \theta_k)} \int_{\theta_{k-1}}^{\theta_k} \frac{\sin t dt}{\cos \theta - \cos t}, \quad k = j+2, j+3, \dots, n.$$

Ввиду равенства (6) и с учетом поведения функции  $\lambda_n(x)$  на отрезке  $[-1, x_{j-1}]$

$$\frac{(\theta_k - \theta_{k-1})^{-1}}{\lambda_n(\cos \theta_k)} < \frac{d_n}{\pi},$$

где

$$d_n = \max_{k=1,2,\dots,n} \left\{ \frac{\lambda_n(x_{k-1})}{\lambda_n(x_k)}, \frac{\lambda_n(x_k)}{\lambda_n(x_{k-1})} \right\}. \quad (10)$$

Заметим, что  $d_n > 1$ ,  $n > 1$ . Тогда для суммы  $S_2(x)$  будем иметь оценку

$$S_2(x) < \frac{d_n}{\pi} \int_{\theta_{j+1}}^{\theta_j} \frac{\sin t dt}{\cos \theta - \cos t}. \quad (11)$$

Поступая аналогично, как для первой суммы, получим

$$S_2(x) < d_n \frac{2}{\pi} \ln \lambda_n^*, \quad (12)$$

где  $\lambda_n^* = \max\{\lambda_n(1), \lambda_n(-1)\}$ .

Оценку слагаемых  $|l_j(x)|$  и  $|l_{j+1}(x)|$  будем производить следующим образом. По аналогии с оценкой  $|l_{j-1}(x)|$  имеем:

$$|l_{j+1}(x)| \leq \pi d_n. \quad (13)$$

Для оценки  $|l_j(x)|$  воспользуемся неравенством (3). Тогда, учитывая оценки (7)–(9) и (12), (13), найдем

$$|l_j(x)| < 1 + 2\pi + \frac{2}{\pi} \ln \lambda_n^* + \frac{2}{\pi} d_n \ln \lambda_n^* + \pi d_n.$$

Таким образом, на основании равенства (4) получим

$$L_n(x) < 1 + 2 \left( \pi(2 + d_n) + \frac{2}{\pi} (1 + d_n) \ln \lambda_n^* \right), \quad x \in (x_j, x_{j-1}), \quad (14)$$

и, следовательно,

$$L_n(x) < 1 + C d_n \ln \lambda_n^*, \quad x \in [\alpha_n, 1],$$

где  $C$  – некоторая положительная постоянная.

Если же  $x \in [-1, \alpha_n]$ ,  $\alpha_n > -1$ , доказательство проводится аналогично и в этом случае справедлива следующая оценка

$$L_n(x) < 1 + C d_n \ln \lambda_n^*, \quad x \in [-1, \alpha_n],$$

что завершает доказательство теоремы.

**Заключение.** В работе получена оценка константы Лебега для случая интерполяционных рациональных процессов Лагранжа по узлам Чебышева – Маркова в случае действительных плюсов.

Стоит отметить, что скорее всего окончательная оценка постоянной Лебега не должна содержать величины  $d_n$ . Первоначально авторам казалось, что последовательность  $\{d_n\}$  всегда ограничена. А. А. Пекарский привел интересный контрпример и показал, что такое утверждение не является справедливым.

Вычисления, выполненные с помощью программного пакета Maple 18, показывают, что для величины  $d_n$  справедливы следующие соотношения в зависимости от выбора параметров  $a_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$  (см. таблицу).

Авторы выражают благодарность профессору А. А. Пекарскому за полезное обсуждение результатов данной работы.

### Наборы значений величины $d_n$

$n$	$d_n$			
	$a_0 = 0, a_k = 1 - e^{-\frac{k}{\sqrt{n}}},$ $k = 1, 2, \dots, n$	$a_0 = 0, a_k = 1 - \left(\frac{k}{n}\right)^{1/2},$ $k = 1, 2, \dots, n$	$a_0 = 0, a_k = 1 - \frac{k}{n},$ $k = 1, 2, \dots, n$	$a_0 = 0, a_k = 1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2,$ $k = 1, 2, \dots, n$
1	1	1	1	1
2	1,596241482	1,103445257	1,216320419	1,484651283
3	1,597942669	1,128076509	1,238611723	1,543421758
4	1,515797795	1,130709366	1,254759388	1,504209600
5	1,465449967	1,120778009	1,231830691	1,470669166
6	1,430556413	1,114572460	1,213840925	1,418977094
7	1,394340811	1,104012575	1,195624043	1,372180433
8	1,362751766	1,097940438	1,178123644	1,333749017
9	1,343203175	1,090082953	1,164789034	1,302702270
10	1,324090571	1,084588746	1,151260736	1,277464535
20	1,217030255	1,049079572	1,084832927	1,162974196
30	1,172079117	1,034420604	1,058487668	1,124141808
40	1,146562242	1,026447463	1,044585078	1,104697222
50	1,129807134	1,021459162	1,036013178	1,092894531

### Список использованной литературы

1. Привалов, А. А. Теория интерполирования функций: в 2 кн. / А. А. Привалов. – Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1990. – Кн. 1. – 1990. – С. 1–229; кн. 2. – 1990. – С. 231–422.
2. Бернштейн, С. Н. Об ограничении значений многочлена  $P_n(x)$  степени  $n$  на всем отрезке по его значениям в  $n + 1$  точках отрезка / С. Н. Бернштейн // Собр. соч.: в 4 т. – М., 1952. – Т. 2. – С. 107–126.
3. Иванов, В. В. Некоторые новые результаты в теории аппроксимации / В. В. Иванов // Вычислительная математика. Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1966. – С. 30–36.
4. Dzjadyk, V. K. On asymptotics and estimates for the uniform norms of the Lagrange interpolation polynomials corresponding to the Chebyshev nodal points / V. K. Dzjadyk, V. V. Ivanov // Anal. Math. – 1983. – Vol. 9. – P. 85–97.
5. Cheney, E. W. A note on some Lebesgue constants / E. W. Cheney, T. J. Rivlin // Center for numerical analysis (University of Texas at Austin), February 1975, CAN-98. – P. 1–7.
6. Русак, В. Н. Об интерполировании рациональными функциями с фиксированными полюсами / В. Н. Русак // Докл. Акад. наук БССР. – 1962. – Т. 4, № 9. – С. 548–550.
7. Borwein, P. Zeros of Chebyshev polynomials in Markov systems / P. Borwein // J. Approx. Theory. – 1990. – Vol. 63. – P. 56–64.
8. Min, G. Lobatto-type quadrature formula in rational space / G. Min // J. Comput. and Appl. Math. – 1998. – N 94. – P. 1–12.
9. Старовойтов, А. П. О рациональной интерполяции с фиксированными полюсами / А. П. Старовойтов // Изв. Акад. наук БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1983. – № 6. – С. 105–106.
10. Лукашов, А. Л. Рациональные интерполяционные процессы на нескольких отрезках / А. Л. Лукашов // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2005. – Т. 5 (1). – С. 34–48.
11. Ровба, Е. А. Рациональное интерполирование в нулях синус-дробей Чебышева – Маркова / Е. А. Ровба, К. А. Смотрицкий // Докл. Нац. акад. Беларуси. – 2008. – Т. 52, № 5. – С. 11–15.
12. Смотрицкий, К. А. О нормах интерполяционных процессов с фиксированными узлами / К. А. Смотрицкий, Е. В. Дирвук // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2014. – Т. 14, вып. 4 (2). – С. 590–595.

Поступила в редакцию 18.09.2015

УДК 519.6

В. Б. МАЛЮТИН

**ВЫЧИСЛЕНИЕ МАТРИЧНОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛОВ,  
ОСНОВАННОЕ НА АППРОКСИМАЦИИ ХРОНОЛОГИЧЕСКИ  
УПОРЯДОЧЕННОЙ ЭКСПОНЕНТЫ**

*Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь,  
e-mail:malyutin@im.bas-net.by*

Предложен метод приближенного вычисления матричнозначных функциональных интегралов при малых значениях параметра  $b$ , входящего в дифференциальное уравнение для переходной функции. Этот метод основывается на аппроксимации хронологически упорядоченной экспоненты обычными экспонентами.

*Ключевые слова:* функциональные интегралы, хронологически упорядоченная экспонента.

V. B. MALYUTIN

**EVALUATION OF MATRIX VALUED FUNCTIONAL INTEGRALS BASED ON THE APPROXIMATION  
OF A CHRONOLOGICALLY ORDERED EXPONENT**

*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus,  
e-mail:malyutin@im.bas-net.by*

The method for approximate evaluation of matrix valued functional integrals with a small parameter  $b$  in the differential equation for the transition function is proposed. This method is based on the approximation of a chronologically ordered exponent by usual exponents.

*Keywords:* functional integrals, chronologically ordered exponent.

**Введение.** Матричнозначные функциональные интегралы представляют собой один из видов функциональных интегралов. В матричнозначных интегралах интегрирование производится по обычным вещественным переменным, а переходные функции, определяющие меру, принимают матричные значения. Через матричнозначные функциональные интегралы выражаются фундаментальные решения систем дифференциальных уравнений [1, 2]. Матричнозначные интегралы возникают, например, при рассмотрении релятивистских частиц с целым и полуцелым спином [3, 4]. Использование матричнозначных интегралов для представления фундаментального решения задачи Коши для уравнения Дирака, описывающего движение заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле, рассмотрено в работах [5, 6].

Следуя работам [5, 6], матричнозначный функциональный интеграл будем рассматривать на пространстве функций  $x(\tau)$ ,  $s \leq \tau \leq t$ , удовлетворяющих условию  $x(s) = 0$  и условию Липшица с порядком, равным единице, т. е. для любых  $s \leq a < b \leq t$ ,  $|x(b) - x(a)| \leq M |b - a|$ . Интеграл определяется равенством

$$\int F(x(\cdot)) d\mu(x) = \lim_j \int_{R \dots R} \int_{R \dots R} F \left( \sum_{j=1}^n x_j \chi_{[t_{j-1}, t_j]}(\cdot) \right) \prod_{j=n}^1 S(t_j - t_{j-1}, x_j - x_{j-1}) dx_1 \dots dx_n, \quad (1)$$

если этот предел существует для любого разбиения отрезка  $[s, t]$  точками  $s = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$ .

Здесь  $x_j = x(t_j)$ ,  $\chi_{]t_{j-1}, t_j]}(\tau)$  – характеристическая функция интервала  $]t_{j-1}, t_j]$ ;  $S(t_j - t_{j-1}, x_j - x_{j-1})$  – переходная функция, являющаяся фундаментальным решением уравнения

$$\frac{\partial S(t, x)}{\partial t} = a\alpha \frac{\partial S(t, x)}{\partial x} + b\beta S(t, x), \quad (2)$$

где  $a, b$  – вещественные параметры,  $\alpha, \beta$  – антикоммутирующие величины (операторы или матрицы), т. е.  $\alpha\beta + \beta\alpha = 0$ .

Некоторые классы матричнозначных интегралов, которые могут быть вычислены точно, рассмотрены в работах [7, 8]. Один из методов вычисления матричнозначных функциональных интегралов – это аппроксимация матричнозначных интегралов скалярнозначными функциональными интегралами [9–11]. Широкое и детальное исследование методов вычисления скалярнозначных функциональных интегралов проведено в работах [12–14]. Еще один метод – это построение приближенных формул, точных для функциональных многочленов заданной степени [15]. Такие формулы называются формулами заданной степени точности и широко используются для приближенного вычисления скалярнозначных функциональных интегралов. В работах [16, 17] рассмотрен метод приближенного вычисления матричнозначных функциональных интегралов при малых значениях параметра  $a$  и больших значениях параметра  $b$ , который основан на аппроксимации интегрируемого функционала функциональными многочленами.

В данной работе предлагается метод приближенного вычисления матричнозначных функциональных интегралов при малых значениях параметра  $b$ , который основывается на аппроксимации хронологически упорядоченной экспоненты обычными экспонентами.

**1. Аппроксимация матричнозначного функционального интеграла.** Метод приближенного вычисления матричнозначных функциональных интегралов рассмотрим для цилиндрических функционалов, т. е. функционалов вида

$$F\left(\int_s^t f_1(\tau)dx(\tau), \dots, \int_s^t f_d(\tau)dx(\tau)\right). \quad (3)$$

*Теорема.* Пусть функции  $f_j(\tau)$ ,  $1 \leq j \leq d$ , интегрируемы в смысле Римана, пусть  $\int |\hat{F}(z_1, \dots, z_d)| \exp\left((t-s)|a| \cdot \|\alpha\| \sum_{l=1}^d \overline{f}_l |z_l|\right) dz_1 \dots dz_d \leq C$ , где  $\hat{F}$  обозначает обратное преобразование Фурье функции  $F$ ,  $\overline{f}_l = \max_{s \leq \tau \leq t} |f_l(\tau)|$ ,  $1 \leq l \leq d$ . Тогда для матричнозначного интеграла справедливо равенство

$$\begin{aligned} & \int F\left(\int_s^t f_1(\tau)dx(\tau), \dots, \int_s^t f_d(\tau)dx(\tau)\right) d\mu(x) = \\ & = \sum_{k=0}^m \int_s^{\tau_0} \int_s^{\tau_1} \dots \int_s^{\tau_{k-1}} F\left(-a\alpha \int_s^{\tau_1} \xi_{\tau_1, \dots, \tau_k}(\tau) f_1(\tau) d\tau, \dots, -a\alpha \int_s^{\tau_1} \xi_{\tau_1, \dots, \tau_k}(\tau) f_d(\tau) d\tau\right) (b\beta)^k d\tau_k \dots d\tau_2 d\tau_1 + \overline{R}_m, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\xi_{\tau_1, \dots, \tau_k}(\tau) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \chi_{]t_{j+1}, \tau_j]}(\tau)$ ,  $\tau_0 = t$ ,  $\tau_{k+1} = s$ ,  $\lim_{m \rightarrow \infty} \|\overline{R}_m\| = 0$ .

*Доказательство.* Если функции  $f_j(\tau)$ ,  $1 \leq j \leq d$ , интегрируемы в смысле Римана, а функция  $x(\tau)$ ,  $s \leq \tau \leq t$ , удовлетворяет условию Липшица с порядком, равным единице, то интегралы  $\int_s^t f_j(\tau)dx(\tau)$ ,  $1 \leq j \leq d$ , существуют [18].

По определению матричнозначного интеграла имеем

$$I = \int F\left(\int_s^t f_1(\tau)dx(\tau), \dots, \int_s^t f_d(\tau)dx(\tau)\right) d\mu(x) =$$

$$= \lim_j \int (n) \int F \left( \sum_{j=1}^n f_l(t_j)(x_j - x_{j-1}), \dots, \sum_{j=1}^n f_d(t_j)(x_j - x_{j-1}) \right) \prod_{j=n}^1 S(t_j - t_{j-1}, x_j - x_{j-1}) dx_1 \dots dx_n.$$

Используя замену переменных  $x_j - x_{j-1} = y_j$  и то, что преобразование Фурье функции  $S(t_j - t_{j-1}, y_j)$  равно  $\exp((t_j - t_{j-1})(-ia\alpha z_j + b\beta))$ , получим

$$\begin{aligned} I &= \lim_j \int (n) \int F \left( \sum_{j=1}^n f_l(t_j)y_j, \dots, \sum_{j=1}^n f_d(t_j)y_j \right) \prod_{j=n}^1 S(t_j - t_{j-1}, y_j) dy_1 \dots dy_n = \\ &= \lim_j \int (d) \int \hat{F}(z_1, \dots, z_d) \prod_{j=n}^1 \exp \left( (t_j - t_{j-1}) \left( -ia\alpha \sum_{l=1}^d f_l(t_j)z_l + b\beta \right) \right) dz_1 \dots dz_d. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $\hat{F}$  обозначает обратное преобразование Фурье функции  $F$ .

Используя хронологически упорядоченную экспоненту [19–21], определяемую равенством

$$\bar{T} \exp \left( \int_s^t f(\alpha, \beta, \tau) d\tau \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=n}^1 \exp \left( \int_{\frac{t-s}{n}(j-1)}^{\frac{t-s}{n}j} f(\alpha, \beta, \tau) d\tau \right),$$

мы можем записать

$$\prod_{j=n}^1 \exp \left( (t_j - t_{j-1}) \left( -ia\alpha \sum_{l=1}^d f_l(t_j)z_l + b\beta \right) \right)$$

в виде

$$\bar{T} \exp \left( \int_s^t \sum_{j=1}^n \left( -ia\alpha \sum_{l=1}^d f_l(t_j)z_l + b\beta \right) \chi_{[t_{j-1}, t_j]}(\tau) d\tau \right).$$

Рассмотрим равенство, позволяющее перейти от хронологически упорядоченной экспоненты к обычной экспоненте:

$$\begin{aligned} \bar{T} \exp \left( \int_s^t \sum_{j=1}^n \left( -ia\alpha \sum_{l=1}^d f_l(t_j)z_l + b\beta \right) \chi_{[t_{j-1}, t_j]}(\tau) d\tau \right) &= \exp \left( \int_s^t \sum_{j=1}^n \left( -ia\alpha \sum_{l=1}^d f_l(t_j)z_l \right) \chi_{[t_{j-1}, t_j]}(\tau) d\tau \right) + \\ + \int_s^t \frac{d}{d\tau_1} \left[ \exp \left( \int_{\tau_1}^t \sum_{j=1}^n \left( -ia\alpha \sum_{l=1}^d f_l(t_j)z_l \right) \chi_{[t_{j-1}, t_j]}(\tau) d\tau \right) \bar{T} \exp \left( \int_s^{\tau_1} \sum_{j=1}^n \left( -ia\alpha \sum_{l=1}^d f_l(t_j)z_l + b\beta \right) \chi_{[t_{j-1}, t_j]}(\tau) d\tau \right) \right] d\tau_1 &= \\ = \exp \left( \int_s^t \sum_{j=1}^n \left( -ia\alpha \sum_{l=1}^d f_l(t_j)z_l \right) \chi_{[t_{j-1}, t_j]}(\tau) d\tau \right) + \int_s^t \exp \left( \int_{\tau_1}^t \sum_{j=1}^n \left( -ia\alpha \sum_{l=1}^d f_l(t_j)z_l \right) \chi_{[t_{j-1}, t_j]}(\tau) d\tau \right) \times \\ \times b\beta \bar{T} \exp \left( \int_s^{\tau_1} \sum_{j=1}^n \left( -ia\alpha \sum_{l=1}^d f_l(t_j)z_l + b\beta \right) \chi_{[t_{j-1}, t_j]}(\tau) d\tau \right) d\tau_1. \end{aligned}$$

Применяя последовательно это равенство для хронологически упорядоченной экспоненты, получим

$$\begin{aligned} \bar{T} \exp \left( \int_s^t \sum_{j=1}^n \left( -ia\alpha \sum_{l=1}^d f_l(t_j)z_l + b\beta \right) \chi_{[t_{j-1}, t_j]}(\tau) d\tau \right) &= \\ = \sum_{k=0}^m \int_s^{\tau_0} \int_s^{\tau_1} \dots \int_s^{\tau_{k-1}} \exp \left( \int_{\tau_1}^{\tau_0} \sum_{j=1}^n \left( -ia\alpha \sum_{l=1}^d f_l(t_j)z_l \right) \chi_{[t_{j-1}, t_j]}(\tau) d\tau \right) \times \\ \times b\beta \exp \left( \int_{\tau_2}^{\tau_1} \sum_{j=1}^n \left( -ia\alpha \sum_{l=1}^d f_l(t_j)z_l \right) \chi_{[t_{j-1}, t_j]}(\tau) d\tau \right) \times \dots \times \end{aligned}$$

$$\times b\beta \exp\left(\int_{\tau_{k+1}}^{\tau_k} \sum_{j=1}^n \left(-ia\alpha \sum_{l=1}^d f_l(t_j) z_l\right) \chi_{[t_{j-1}, t_j]}(\tau) d\tau\right) d\tau_k \dots d\tau_2 d\tau_1 + R_m, \quad (6)$$

где  $\tau_0 = t$ ,  $\tau_{k+1} = s$ ,

$$\begin{aligned} R_m &= \int_s^{\tau_0} \int_s^{\tau_1} \dots \int_s^{\tau_m} \exp\left(\int_{\tau_1}^{\tau_0} \sum_{j=1}^n \left(-ia\alpha \sum_{l=1}^d f_l(t_j) z_l\right) \chi_{[t_{j-1}, t_j]}(\tau) d\tau\right) \times \\ &\quad \times b\beta \exp\left(\int_{\tau_2}^{\tau_1} \sum_{j=1}^n \left(-ia\alpha \sum_{l=1}^d f_l(t_j) z_l\right) \chi_{[t_{j-1}, t_j]}(\tau) d\tau\right) \times \dots \times \\ &\quad \times b\beta \bar{T} \exp\left(\int_{\tau_{m+2}}^{\tau_{m+1}} \sum_{j=1}^n \left(-ia\alpha \sum_{l=1}^d f_l(t_j) z_l + b\beta\right) \chi_{[t_{j-1}, t_j]}(\tau) d\tau\right) d\tau_{m+1} \dots d\tau_2 d\tau_1, \end{aligned}$$

где  $\tau_{m+2} = s$ .

Из (5), (6) получаем

$$\begin{aligned} I &= \lim_j \sum_{\max \Delta t_j \rightarrow 0}^m \int_s^{\tau_0} \int_s^{\tau_1} \dots \int_s^{\tau_{k-1}} \int_R \dots \int_R \hat{F}(z_1, \dots, z_d) \exp\left(\int_{\tau_1}^{\tau_0} \sum_{j=1}^n \left(-ia\alpha \sum_{l=1}^d f_l(t_j) z_l\right) \chi_{[t_{j-1}, t_j]}(\tau) d\tau\right) \times \\ &\quad \times b\beta \exp\left(\int_{\tau_2}^{\tau_1} \sum_{j=1}^n \left(-ia\alpha \sum_{l=1}^d f_l(t_j) z_l\right) \chi_{[t_{j-1}, t_j]}(\tau) d\tau\right) \times \dots \times \\ &\quad \times b\beta \exp\left(\int_{\tau_{k+1}}^{\tau_k} \sum_{j=1}^n \left(-ia\alpha \sum_{l=1}^d f_l(t_j) z_l\right) \chi_{[t_{j-1}, t_j]}(\tau) d\tau\right) dz_1 \dots dz_d d\tau_k \dots d\tau_2 d\tau_1 + \bar{R}_m, \quad (7) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \bar{R}_m &= \lim_j \sum_{\max \Delta t_j \rightarrow 0}^m \int_s^{\tau_0} \int_s^{\tau_1} \dots \int_s^{\tau_m} \int_R \dots \int_R \hat{F}(z_1, \dots, z_d) \exp\left(\int_{\tau_1}^{\tau_0} \sum_{j=1}^n \left(-ia\alpha \sum_{l=1}^d f_l(t_j) z_l\right) \chi_{[t_{j-1}, t_j]}(\tau) d\tau\right) \times \\ &\quad \times b\beta \exp\left(\int_{\tau_2}^{\tau_1} \sum_{j=1}^n \left(-ia\alpha \sum_{l=1}^d f_l(t_j) z_l\right) \chi_{[t_{j-1}, t_j]}(\tau) d\tau\right) \times \dots \times \\ &\quad \times b\beta \bar{T} \exp\left(\int_{\tau_{m+2}}^{\tau_{m+1}} \sum_{j=1}^n \left(-ia\alpha \sum_{l=1}^d f_l(t_j) z_l + b\beta\right) \chi_{[t_{j-1}, t_j]}(\tau) d\tau\right) dz_1 \dots dz_d d\tau_{m+1} \dots d\tau_2 d\tau_1. \end{aligned}$$

В (7), используя соотношения антикоммутиации для  $\alpha$ ,  $\beta$ , расположим  $b\beta$  справа от экспонент, содержащих  $ia\alpha$ . Получим

$$\begin{aligned} I &= \lim_j \sum_{\max \Delta t_j \rightarrow 0}^m \int_s^{\tau_0} \int_s^{\tau_1} \dots \int_s^{\tau_{k-1}} \int_R \dots \int_R \hat{F}(z_1, \dots, z_d) \times \\ &\quad \times \exp\left(\int_s^t \xi_{\tau_1, \dots, \tau_k}(\tau) \sum_{j=1}^n \left(-ia\alpha \sum_{l=1}^d f_l(t_j) z_l\right) \chi_{[t_{j-1}, t_j]}(\tau) d\tau\right) (b\beta)^k dz_1 \dots dz_d d\tau_k \dots d\tau_2 d\tau_1 + \bar{R}_m, \end{aligned}$$

где  $\xi_{\tau_1, \dots, \tau_k}(\tau) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \chi_{[\tau_{j+1}, \tau_j]}(\tau)$ ,  $\tau_0 = t$ ,  $\tau_{k+1} = s$ .

Под знаком предела  $\lim_j$  интеграл  $\int_s^t \xi_{\tau_1, \dots, \tau_k}(\tau) \sum_{j=1}^n \left(-ia\alpha \sum_{l=1}^d f_l(t_j) z_l\right) \chi_{[t_{j-1}, t_j]}(\tau) d\tau$  можно записать в виде  $\sum_{j=1}^n \xi_{\tau_1, \dots, \tau_k}(t_j) \left(-ia\alpha \sum_{l=1}^d f_l(t_j) z_l\right) (t_j - t_{j-1})$ .

После вычисления интегралов по  $dz_1 \dots dz_d$  выражение для  $I$  примет вид

$$I = \lim_j \sum_{k=0}^m \int_s^{\tau_0} \int_s^{\tau_1} \dots \int_s^{\tau_{k-1}} F \left( \sum_{j=1}^n \xi_{\tau_1, \dots, \tau_k}(t_j) (-\alpha) f_1(t_j) (t_j - t_{j-1}), \dots, \sum_{j=1}^n \xi_{\tau_1, \dots, \tau_k}(t_j) (-\alpha) f_d(t_j) (t_j - t_{j-1}) \right) \times (b\beta)^k d\tau_k \dots d\tau_2 d\tau_1 + \bar{R}_m.$$

Вычисляя предел, получаем следующее равенство для  $I$ :

$$I = \sum_{k=0}^m \int_s^{\tau_0} \int_s^{\tau_1} \dots \int_s^{\tau_{k-1}} F \left( -\alpha \int_s^t \xi_{\tau_1, \dots, \tau_k}(\tau) f_1(\tau) d\tau, \dots, -\alpha \int_s^t \xi_{\tau_1, \dots, \tau_k}(\tau) f_d(\tau) d\tau \right) (b\beta)^k d\tau_k \dots d\tau_2 d\tau_1 + \bar{R}_m,$$

т. е. равенство (4) верно.

Норму остатка  $\bar{R}_m$  можно оценить величиной

$$\begin{aligned} \|\bar{R}_m\| &\leq \int_s^{\tau_0} \int_s^{\tau_1} \dots \int_s^{\tau_m} \int_R \dots \int_R (d) \int \hat{F}(z_1, \dots, z_d) \exp \left( (t-s) |a| \cdot \|\alpha\| \sum_{l=1}^d \bar{f}_l |z_l| \right) |b|^{m+1} \cdot \|\beta\|^{m+1} \times \\ &\quad \times \exp((t-s) |b| \cdot \|\beta\|) dz_1 \dots dz_d d\tau_{m+1} \dots d\tau_2 d\tau_1 \leq \\ &\leq \int_s^{\tau_0} \int_s^{\tau_1} \dots \int_s^{\tau_m} C |b|^{m+1} \cdot \|\beta\|^{m+1} \exp((t-s) |b| \cdot \|\beta\|) d\tau_{m+1} \dots d\tau_2 d\tau_1 \leq \\ &\leq C |b|^{m+1} \cdot \|\beta\|^{m+1} \exp((t-s) |b| \cdot \|\beta\|) \frac{(t-s)^{m+1}}{(m+1)!}. \end{aligned}$$

То есть  $\lim_{m \rightarrow \infty} \|\bar{R}_m\| = 0$ . Теорема доказана.

**2. Численные результаты.** В качестве примера рассмотрим вычисление интеграла

$$I(t) = \int \exp \left( \int_s^t f(\tau) dx(\tau) \right) d\mu(x). \quad (8)$$

Для этого интеграла при некоторых функциях  $f$  можно получить точное значение, так как интеграл  $I(t)$  равен  $\bar{T} \exp \left( \int_s^t (-\alpha f(\tau) + b\beta) d\tau \right)$  и удовлетворяет уравнению

$$\frac{dI(t)}{dt} = (-\alpha f(t) + b\beta) I(t), \quad I(s) = E. \quad (9)$$

При  $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $f(\tau) = -\frac{1}{a\tau}$  решение уравнения (9) имеет вид

$$\begin{aligned} I_{11}(t) &= \frac{bs+1}{2bs} \exp\{b(t-s)\} + \frac{bs-1}{2bs} \exp\{-b(t-s)\}, \\ I_{21}(t) &= \frac{b^2 st + b(t-s) - 1}{2b^2 st} \exp\{b(t-s)\} + \frac{-b^2 st + b(t-s) + 1}{2b^2 st} \exp\{-b(t-s)\}, \\ I_{12}(t) &= \frac{1}{2} \exp\{b(t-s)\} - \frac{1}{2} \exp\{-b(t-s)\}, \\ I_{22}(t) &= \frac{bt-1}{2bt} \exp\{b(t-s)\} + \frac{bt+1}{2bt} \exp\{-b(t-s)\}. \end{aligned}$$

Рассмотрим приближенное вычисление интеграла (8) с помощью формулы (4). При  $m=2$  получим

$$\begin{aligned} I(t) &\approx \exp \left( -\alpha \int_s^t f(\tau) d\tau \right) + \int_s^t \exp \left( -\alpha \left( \int_s^{\tau_1} (-1) f(\tau) d\tau + \int_{\tau_1}^t f(\tau) d\tau \right) \right) d\tau_1 b\beta + \\ &+ \int_s^t \int_s^{\tau_1} \exp \left( -\alpha \left( \int_s^{\tau_2} f(\tau) d\tau + \int_{\tau_2}^{\tau_1} (-1) f(\tau) d\tau + \int_{\tau_1}^t f(\tau) d\tau \right) \right) d\tau_2 d\tau_1 (b\beta)^2. \end{aligned}$$

При  $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $f(\tau) = -\frac{1}{a\tau}$  получаем:

$$I(t) \approx \exp\left(\alpha \ln\left(\frac{t}{s}\right)\right) + \int_s^t \exp\left(\alpha \ln\left(\frac{st}{\tau_1^2}\right)\right) d\tau_1 b\beta + \int_s^t \int_s^{\tau_1} \exp\left(\alpha \ln\left(\frac{t\tau_2^2}{s\tau_1^2}\right)\right) d\tau_2 d\tau_1 (b\beta)^2 =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{t}{s} & 0 \\ 0 & \frac{s}{t} \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & t-s \\ \frac{t^2}{3s} - \frac{s^2}{3t} & 0 \end{pmatrix} + b^2 \begin{pmatrix} \frac{t^3}{6s} - \frac{ts}{2} + \frac{s^2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{t^2}{3} + \frac{s^3}{6t} - \frac{st}{2} \end{pmatrix}.$$

При  $s=1$ ,  $t=2$ ,  $b=0,1$  приближенное значение интеграла  $I(t)$  равно  $\begin{pmatrix} 2,00666 & 0,1 \\ 0,11666 & 0,50416 \end{pmatrix}$ , точное значение равно  $\begin{pmatrix} 2,00670 & 0,10017 \\ 0,11667 & 0,50415 \end{pmatrix}$ .

### Список использованной литературы

1. Далецкий, Ю. Л. Континуальные интегралы, связанные с операторными эволюционными уравнениями / Ю. Л. Далецкий // Успехи мат. наук. – 1962. – Т. 17, № 5 (107). – С. 3–115.
2. Далецкий, Ю. Л. Обобщенные меры в функциональных пространствах / Ю. Л. Далецкий, С. В. Фомин // Теория вероятностей и ее применения. – 1965. – Т. 10, № 2. – С. 329–343.
3. Давыдов, А. С. Квантовая механика / А. С. Давыдов. – М.: Наука, 1973.
4. Шифф, Л. Квантовая механика / Л. Шифф; пер. с англ. Г. А. Зайцева. – М.: Изд-во иностр. лит., 1959.
5. Ichinose, T. Propagation of a Dirac particle. A path integral approach / T. Ichinose, H. Tamura // J. Math. Phys. – 1984. – Vol. 25 (6). – P. 1810–1819.
6. Ichinose, T. The zitterbewegung of a Dirac particle in two-dimensional space-time / T. Ichinose, H. Tamura // J. Math. Phys. – 1988. – Vol. 29 (1). – P. 103–109.
7. Малютин, В. Б. О вычислении некоторых матричнозначных функциональных интегралов / В. Б. Малютин // Тр. Ин-та математики Нац. акад. наук Беларуси. – 2011. – Т. 19, № 1. – С. 92–103.
8. Малютин, В. Б. Вычисление функциональных интегралов, порожденных уравнением Дирака со скалярными и векторными потенциалами специального вида / В. Б. Малютин // Вес. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2013. – № 3. – С. 13–16.
9. Малютин, В. Б. О приближенном вычислении континуальных интегралов по мере, порожденной системой дифференциальных уравнений параболического типа / В. Б. Малютин // Докл. Акад. наук Беларуси. – 1991. – Т. 35, № 3. – С. 202–208.
10. Малютин, В. Б. О вычислении континуальных интегралов по матричнозначной мере / В. Б. Малютин // Вес. Акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 1993. – № 1. – С. 8–14.
11. Малютин, В. Б. Аппроксимации континуальных интегралов по мере, порожденной системой дифференциальных уравнений // Вес. Акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 1992. – № 5/6. – С. 7–13.
12. Егоров, А. Д. Приближенные методы вычисления континуальных интегралов / А. Д. Егоров, П. И. Соболевский, Л. А. Янович. – Минск: Наука и техника, 1985.
13. Egorov, A. D. Functional integrals: Approximate evaluation and Applications / A. D. Egorov, P. I. Sobolevsky, L. A. Yanovich. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993.
14. Егоров, А. Д. Введение в теорию и приложения функционального интегрирования / А. Д. Егоров, Е. П. Жидков, Ю. Ю. Лобанов. – М.: Физматлит, 2006.
15. Malyutin, V. On approximation of matrix valued functional integrals / V. Malyutin // Monte Carlo methods and applications. – 2007. – Vol. 13, N 4. – P. 287–298.
16. Айрян, Э. А. Вычисление матричнозначных функциональных интегралов с помощью функциональных многочленов / Э. А. Айрян, В. Б. Малютин // Вес. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2014. – № 1. – С. 18–25.
17. Аугуан, Е. А. Application of functional polynomials to approximation of matrix-valued functional integrals / Е. А. Аугуан, В. В. Мalyutin // Bull. of Peoples' Friendship University of Russia. Ser. Mathematics. Informatics. Physics. – 2014. – N 1. – P. 55–58.
18. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т / Г. М. Фихтенгольц. – М.: Физматлит, 2003. – Т. 3.
19. Боголюбов, Н. Н. Введение в теорию квантованных полей / Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков. – М., 1976.
20. Карасев, М. В. Бесконечные произведения и Т-произведения экспонент / М. В. Карасев, М. В. Мосолова // Теор. и мат. физика. – 1976. – Т. 28, вып. 2. – С. 189–200.
21. Назайкинский, В. Методы некоммутативного анализа: авт. пер. с англ. / В. Назайкинский, Б. Стернин, В. Шаталов. – М.: Технофера, 2002.

Поступила в редакцию 15.10.2015

УДК 517.514

В. С. МУХА, А. Н. КУЗЬКОВ

**ЛИНЕЙНОЕ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОЕ ПРОКРУСТОВО ПРЕОБРАЗОВАНИЕ  
В РАСПОЗНАВАНИИ РУКОПИСНЫХ БУКВ***Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь,  
e-mail: mukha@bsuir.by*

Разработано линейное пропорциональное преобразование обычных (двумерных) матриц. Преобразование реализовано в виде компьютерной программы и применено для распознавания рукописных букв кириллицы. Предложенное преобразование показало более высокую достоверность распознавания в сравнении с другими преобразованиями.

*Ключевые слова:* Прокрустово преобразование, распознавание рукописных букв, многомерная линейная регрессия, многомерные матрицы.

V. S. MUKHA, A. N. KUZKOU

**LINEAR PROPORTIONAL PROCRUSTES TRANSFORMATION  
IN RECOGNITION OF HANDWRITTEN LETTERS***Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Belarus,  
e-mail: mukha@bsuir.by*

The linear proportional transformation of two-dimensional matrices was developed. This transformation was implemented as a computer program and was applied to recognize handwritten Cyrillic letters. The proposed transformation showed higher recognition accuracy in comparison with other transformations.

*Keywords:* Procrustes transformation, recognition of handwritten letters, multi-variate linear regression, multi-dimensional matrix.

**Введение.** Прокрустово преобразование представляет интерес для решения различных задач распознавания графических представлений объектов, в частности печатных и рукописных букв и цифр. В связи со сложностью программной реализации известного ортогонального Прокрустова преобразования [1] возникает необходимость в поиске и программной реализации альтернативных преобразований для решения задач различных классов. Например, ортогональное Прокрустово преобразование успешно может быть заменено линейным Прокрустовым преобразованием в задаче распознавания печатных букв [2–4]. Однако при распознавании рукописных цифр обнаружены определенные недостатки линейного Прокрустова преобразования, состоящие в неограниченных возможностях масштабирования по каждой координате изображения [5]. Для преодоления этих проблем в [5] предложено пропорциональное Прокрустово преобразование. В настоящей работе дается теоретическое обоснование пропорционального Прокрустова преобразования и выполняется более детальное его исследование при распознавании рукописных букв.

**1. Линейное пропорциональное преобразование случайных векторов.** Дадим сначала постановку и решение задачи линейного пропорционального преобразования двух случайных векторов. Пусть  $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ ,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_k)$  – центрированные случайные векторы (одномерные центрированные случайные матрицы  $k$ -го порядка [6]), и

$$z = {}^{0,1}(\beta x) \quad (1)$$

– линейное преобразование вектора  $x$  в вектор  $z$  с матрицей преобразования  $\beta = (\beta_{i,j})$ ,  $i, j = \overline{1, k}$ . Здесь и ниже мы будем использовать многомерно-матричный математический аппарат работы [6],

так что  $\overset{\circ}{0,1}(\overset{\circ}{\beta}x)$  означает (0,1)-свернутое произведение двумерной матрицы  $\beta$  и одномерной матрицы  $x$ . Сформулируем следующую оптимизационную задачу:

$$f(\beta) = \text{tr}D \rightarrow \min_{\beta}, \quad (2)$$

$$\Psi_m(\beta) = \beta_{m,m} - \beta_{m+1,m+1} = 0 \quad \forall m = \overline{1, k-1}, \quad (3)$$

$$D = E \left( \overset{0,0}{\left( \left( \overset{\circ}{y} - \overset{\circ}{0,1}(\overset{\circ}{\beta}x) \right) \left( \overset{\circ}{y} - \overset{\circ}{0,1}(x\overset{\circ}{\beta}^T) \right) \right) \right), \quad (4)$$

$\text{tr}D$  – след матрицы  $D$ ,  $T = \begin{pmatrix} i, j \\ j, i \end{pmatrix}$  – подстановка транспонирования двумерной матрицы  $\beta$  [6].

Будем считать, что случайный вектор  $z$  как результат преобразования (1) имеет то же среднее значение, что и случайный вектор  $y$ . Тогда искомое преобразование для произвольных (не центрированных) векторов  $x$  и  $y$  будет иметь вид

$$z = v_y + \overset{0,1}{\beta}(x - v_x), \quad (5)$$

где  $v_x = E(x)$ ,  $v_y = E(y)$  – средние значения векторов  $x$  и  $y$  соответственно.

**Теорема 1.** *Элементы  $\beta_{1,1}$  и  $\beta_{i,j}$ ,  $i, j = \overline{1, k}$ ,  $i \neq j$ , матрицы  $\beta$  в (1), обеспечивающие решение задачи (2)–(4), определяются как решение системы  $k^2 - k + 1$  линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) вида*

$$\begin{cases} \beta_{1,1} \sum_{m=1}^k \mu_{x_m x_m} + \sum_{m=1}^k \sum_{\substack{l=1, \\ l \neq m}}^k \beta_{m,l} \mu_{x_l x_m} = \sum_{m=1}^k \mu_{y_m x_m}, \quad (i = j = 1), \\ \beta_{1,1} \mu_{x_i x_j} + \sum_{\substack{l=1, \\ l \neq i}}^k \beta_{i,l} \mu_{x_l x_j} = \mu_{y_i x_j}, \quad i, j = \overline{1, k}, \quad i \neq j, \end{cases} \quad (6)$$

где

$$\mu_{yx} = (\mu_{y_i x_j}) = \left( E(\overset{\circ}{y}_i \overset{\circ}{x}_j) \right), \quad \mu_{x^2} = (\mu_{x_i x_j}) = \left( E(\overset{\circ}{x}_i \overset{\circ}{x}_j) \right), \quad i, j = \overline{1, k}. \quad (7)$$

Для доказательства теоремы введем функцию Лагранжа

$$F(\beta^T, \lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}) = \text{tr}D + \sum_{m=1}^{k-1} \lambda_m (\beta_{m,m} - \beta_{m+1,m+1}),$$

где  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k-1}$  – неопределенные множители Лагранжа. В соответствии с методом множителей Лагранжа решение задачи (2), (3) сводится к системе уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dF(\beta^T, \lambda_1, \dots, \lambda_{k-1})}{d\beta^T} = \frac{d(\text{tr}D)}{d\beta^T} + \frac{d\left(\sum_{m=1}^{k-1} \lambda_m (\beta_{m,m} - \beta_{m+1,m+1})\right)}{d\beta^T} = 0, \\ \frac{dF(\beta^T, \lambda_1, \dots, \lambda_{k-1})}{d\lambda_l} = \frac{d\left(\sum_{m=1}^{k-1} \lambda_m (\beta_{m,m} - \beta_{m+1,m+1})\right)}{d\lambda_l} = \beta_{l,l} - \beta_{l+1,l+1} = 0, \quad l = \overline{1, k-1}, \end{cases}$$

где дифференцирование выполняется в соответствии с теорией многомерно-матричного дифференцирования работы [6]. Для матрицы  $D$  (4) имеем выражение

$$D = E \left( \overset{0,0}{\left( \left( \overset{\circ}{y} - \overset{\circ}{0,1}(\overset{\circ}{\beta}x) \right) \left( \overset{\circ}{y} - \overset{\circ}{0,1}(x\overset{\circ}{\beta}^T) \right) \right) \right) = \mu_{y^2} - 2 \overset{0,1}{\mu_{yx} \beta^T} + \overset{0,1}{\beta} \overset{0,1}{\mu_{x^2} \beta^T},$$

где  $\mu_{x^2} = (\mu_{x_i x_j}) = E^{(0,0)}(\overset{\circ}{x})^2$ ,  $\mu_{y^2} = (\mu_{y_i y_j}) = E^{(0,0)}(\overset{\circ}{y})^2$ ,  $\mu_{yx} = (\mu_{y_i x_j}) = E^{(0,0)}(\overset{\circ}{y} \overset{\circ}{x})$  – моменты векторов  $\overset{\circ}{x}$  и  $\overset{\circ}{y}$ ;  ${}^{0,0}(\overset{\circ}{x})^2 = {}^{0,0}(\overset{\circ}{x} \overset{\circ}{x})$ ,  ${}^{0,0}(\overset{\circ}{y})^2 = {}^{0,0}(\overset{\circ}{y} \overset{\circ}{y})$  –  $(0,0)$ -свернутые квадраты матриц;  ${}^{0,0}(\overset{\circ}{y} \overset{\circ}{x})$  –  $(0,0)$ -свернутое произведение матриц.

Найдем сначала производную  $d(\text{tr}D) / d\beta^T$ . В соответствии с теоремой о производной следа многомерной матрицы (см. приложение), имеем

$$\frac{d(\text{tr}D)}{d\beta^T} = {}^{0,2} \left( \frac{d\text{tr} D}{dD} \frac{dD}{d\beta^T} \right) = {}^{0,2} \left( E(0,1) \frac{dD}{d\beta^T} \right), \quad (8)$$

где  ${}^{0,2} \left( E(0,1) \frac{dD}{d\beta^T} \right)$  –  $(0,2)$ -свернутое произведение матриц,  $E(0,1)$  –  $(0,1)$  – единичная матрица [6].

Будем искать теперь производную  $dD / d\beta^T$  для  $D$  вида (4). Для этого найдем вспомогательные производные. Учитывая, что  $d\beta^T / d\beta^T = E(0,2)$ ,  $E(0,2)$  –  $(0,2)$ -единичная матрица [6], получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\beta^T} {}^{0,1} (\mu_{yx} \beta^T) &= {}^{0,1} (\mu_{yx} E(0,2)), \\ \frac{d}{d\beta^T} {}^{0,1} (\mu_{x^2} \beta^T) &= {}^{0,1} (\mu_{x^2} E(0,2)), \\ \frac{d}{d\beta^T} {}^{0,1} \left( \beta {}^{0,1} (\mu_{x^2} \beta^T) \right) &= \left[ \left( \frac{d\beta}{d\beta^T} \right)^{B_{4,2}} {}^{0,1} (\mu_{x^2} \beta^T) \right]^{B_{4,2}} + {}^{0,1} \left( \beta \left( \frac{d}{d\beta^T} {}^{0,1} (\mu_{x^2} \beta^T) \right) \right), \end{aligned}$$

где  $B_{4,2}$  – подстановка транспонирования на четырех индексах типа «вперед» [6], которая, в соответствии с ее определением, имеет вид  $B_{4,2} = \begin{pmatrix} i, j, k, l \\ k, l, i, j \end{pmatrix}$ . Учитывая, что  $\frac{d\beta}{d\beta^T} = \frac{d(\beta^T)^T}{d\beta^T} = \left( \frac{d\beta^T}{d\beta^T} \right)^{(T, E_2)} = E(0,2)^{(T, E_2)}$ , где  $E_2 = \begin{pmatrix} i, j \\ i, j \end{pmatrix}$  – тождественная подстановка на двух индексах,  $(T, E_2) = \begin{pmatrix} i, j, k, l \\ j, i, k, l \end{pmatrix}$  – составная подстановка, будем иметь

$$\left( \frac{d\beta}{d\beta^T} \right)^{B_{4,2}} = E(0,2)^{(T, E_2) * B_{4,2}} = E(0,2)^{T_1},$$

где  $T_1 = (T, E_2) * B_{4,2}$  – суперпозиция подстановок  $(T, E_2)$  и  $B_{4,2}$ , имеющая вид  $T_1 = \begin{pmatrix} i, j, k, l \\ l, k, i, j \end{pmatrix}$ . Тогда

$$\frac{d}{d\beta^T} {}^{0,1} \left( \beta {}^{0,1} (\mu_{x^2} \beta^T) \right) = {}^{0,1} \left( E(0,2)^{T_1} {}^{0,1} (\mu_{x^2} \beta^T) \right)^{H_{4,2}} + {}^{0,1} \left( \beta {}^{0,1} (\mu_{x^2} E(0,2)) \right).$$

На основании полученных вспомогательных результатов будем иметь

$$\frac{dD}{d\beta^T} = -2 {}^{0,1} (\mu_{yx} E(0,2)) + {}^{0,1} \left( E(0,2)^{T_1} {}^{0,1} (\mu_{x^2} \beta^T) \right)^{H_{4,2}} + {}^{0,1} \left( \beta {}^{0,1} (\mu_{x^2} E(0,2)) \right) = (z_{i,j,k,l}).$$

Можно показать, что с учетом симметричности матрицы  $D$  второе слагаемое данного равенства равно третьему, так что производная матрицы  $D$  приобретает вид

$$\frac{dD}{d\beta^T} = -2 {}^{0,1} (\mu_{yx} E(0,2)) + 2 {}^{0,1} \left( \beta {}^{0,1} (\mu_{x^2} E(0,2)) \right).$$

С учетом выражения (8) будем иметь следующую производную следа матрицы  $D$ :

$$\frac{d(\text{tr } D)}{d\beta^T} = {}^{0,2} \left( E(0,1) \frac{dD}{d\beta^T} \right) = -2\mu_{yx} + 2 {}^{0,1} (\beta \mu_{x^2}).$$

Найдем также производную  $d \left( \sum_{m=1}^{k-1} \lambda_m (\beta_{m,m} - \beta_{m+1,m+1}) \right) / d\beta^T$ . Поскольку

$$\frac{d\beta_{m,m}}{d\beta^T} = A_m = (a_{i,j}) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j = m, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, i, j = \overline{1, k}, m = \overline{1, k-1},$$

$$\frac{d\beta_{m+1,m+1}}{d\beta^T} = B_m = (b_{i,j}) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j = m+1, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, i, j = \overline{1, k}, m = \overline{1, k-1},$$

то

$$\frac{d(\lambda_m (\beta_{m,m} - \beta_{m+1,m+1}))}{d\beta^T} = \lambda_m (A_m - B_m) = C_m,$$

где

$$C_m = (c_{i,j}) = \begin{cases} \lambda_m, & \text{если } i = j = m, \\ -\lambda_m, & \text{если } i = j = m+1, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, m = \overline{1, k-1}.$$

Таким образом,

$$\frac{d \left( \sum_{m=1}^{k-1} \lambda_m (\beta_{m,m} - \beta_{m+1,m+1}) \right)}{d\beta^T} = \sum_{m=1}^{k-1} C_m = G, m = \overline{1, k-1}. \quad (9)$$

В развернутом виде матрица  $G$  (9) имеет следующий вид:

$$G = (g_{i,j}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_1 + \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_2 + \lambda_3 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_{k-2} + \lambda_{k-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_{k-1} \end{pmatrix}, i, j = \overline{1, k}.$$

Элементы этой матрицы определяются формулой

$$g_{i,j} = \begin{cases} \lambda_1, & \text{если } i = j = 1, \\ \lambda_i - \lambda_{i-1}, & \text{если } i = j = \overline{2, k-1}, \\ -\lambda_{k-1}, & \text{если } i = j = k, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Таким образом, для решения поставленной задачи (2), (3) нам необходимо решить систему уравнений

$$\begin{cases} -2\mu_{yx} + 2 {}^{0,1} (\beta \mu_{x^2}) + G = 0, \\ \beta_{m,m} - \beta_{m+1,m+1} = 0, m = \overline{1, k-1}, \end{cases} \quad (10)$$

относительно элементов матриц  $\beta$  и  $G$ . Упростим данную систему уравнений. Для этого в уравнениях первого (матричного) уравнения системы (10) положим  $\beta_{i,i} = \beta_{1,1} \forall i = \overline{1, k}$ . Это приведет

к исключению второго (скалярного) уравнения системы (10). С учетом обозначений (7) второе слагаемое в левой части первого уравнения системы (10) представляется в виде

$$z = {}^{0,1}(\beta \mu_{x^2}) = (z_{i,j}) = \left( \sum_{l=1}^k \beta_{i,l} \mu_{x_l x_j} \right) = \left( \beta_{1,1} \mu_{x_1 x_j} + \sum_{l=1}^{i-1} \beta_{i,l} \mu_{x_l x_j} + \sum_{l=i+1}^k \beta_{i,l} \mu_{x_l x_j} \right).$$

В результате вместо системы уравнений (10) получим следующую систему уравнений:

$$-2\mu_{y_i x_j} \mu_{i,j} + 2\beta_{1,1} \mu_{x_1 x_j} + 2 \sum_{l=1}^{i-1} \beta_{i,l} \mu_{x_l x_j} + 2 \sum_{l=i+1}^k \beta_{i,l} \mu_{x_l x_j} + g_{i,j} = 0, \quad i, j = \overline{1, k}. \quad (11)$$

В развернутом виде система уравнений (11) выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} -2\mu_{y_1 x_1} + 2\beta_{1,1} \mu_{x_1 x_1} + 2 \sum_{l=2}^k \beta_{1,l} \mu_{x_l x_1} + \lambda_1 = 0, \quad (i = j = 1), \\ -2\mu_{y_i x_j} + 2\beta_{1,1} \mu_{x_1 x_j} + 2 \sum_{l=1}^{i-1} \beta_{i,l} \mu_{x_l x_j} + 2 \sum_{l=i+1}^k \beta_{i,l} \mu_{x_l x_j} = 0, \quad i, j = \overline{1, k}, \quad i \neq j, \\ -2\mu_{y_i x_i} + 2\beta_{1,1} \mu_{x_1 x_i} + 2 \sum_{l=1}^{i-1} \beta_{i,l} \mu_{x_l x_i} + 2 \sum_{l=i+1}^k \beta_{i,l} \mu_{x_l x_i} + \lambda_i = \lambda_{i-1}, \quad i = j = \overline{2, k-1}, \\ -2\mu_{y_k x_k} + 2\beta_{1,1} \mu_{x_1 x_k} + 2 \sum_{l=1}^{k-1} \beta_{k,l} \mu_{x_l x_k} = \lambda_{k-1}, \quad (i = j = k). \end{cases} \quad (12)$$

Дальнейших упрощений можно достичь путем реализации следующей схемы: 1) из уравнений, определяемых третьей и четвертой строками системы уравнений (12), находим множители Лагранжа  $\lambda_i, i = \overline{2, k-1}$ ; 2) используя полученные значения множителей Лагранжа, решаем систему уравнений, определяемую первыми тремя строками системы (12), относительно элементов  $\beta_{i,j}$  матрицы  $\beta$ . В соответствии с этой схемой четвертое уравнение из (12) представляет собой выражение для множителя Лагранжа  $\lambda_{k-1}$ , а третье уравнение – формулу, выражающую  $\lambda_{k-1}$  посредством  $\lambda_k$ . Последовательное применение третьего уравнения при старте с четвертого позволяет получить выражение для множителя Лагранжа  $\lambda_1$ ,

$$\lambda_1 = -2 \sum_{m=2}^k \mu_{y_m x_m} + 2\beta_{1,1} \sum_{m=2}^k \mu_{x_m x_m} + 2 \sum_{m=2}^k \sum_{\substack{l=1, \\ l \neq m}}^k \beta_{m,l} \mu_{x_l x_m}, \quad \forall k \geq 2, \quad (13)$$

и исключить тем самым из рассмотрения третье и четвертое уравнения системы уравнений (12). В результате мы получим систему уравнений

$$\begin{cases} -2\mu_{y_1 x_1} + 2\beta_{1,1} \mu_{x_1 x_1} + 2 \sum_{l=2}^k \beta_{1,l} \mu_{x_l x_1} + \lambda_1 = 0, \\ -2\mu_{y_i x_j} + 2\beta_{1,1} \mu_{x_1 x_j} + 2 \sum_{l=1}^{i-1} \beta_{i,l} \mu_{x_l x_j} + 2 \sum_{l=i+1}^k \beta_{i,l} \mu_{x_l x_j} = 0, \quad i, j = \overline{1, k}, \quad i \neq j, \end{cases} \quad (14)$$

которая решается с учетом выражения (13) для  $\lambda_1$ . Подставив  $\lambda_1$  из (13) в первое из уравнений системы (14) и выполнив упрощающие преобразования, получим систему уравнений (6), которая является окончательной для решения поставленной задачи (2), (3). Доказательство теоремы 1 окончено.

Система уравнений (6) может быть решена в два этапа: 1) приведение к стандартной форме  ${}^{0,1}(AX) = B, A = (a_{i,j}), B = (b_j), i, j = \overline{1, k^2 - k + 1}$ , т. е. формирование вектора неизвестных  $X$ , матрицы  $A$  СЛАУ и вектора  $B$  свободных членов; 2) решение сформированной СЛАУ стандартной программой.

Алгоритм приведения СЛАУ (6) к стандартной форме должен основываться на упорядочении неизвестных элементов  $\beta_{i,j}$  матрицы  $\beta$  в виде вектора  $X = (x_m)$ . Для разработки алгоритма приведения заметим, что первое уравнение системы (6), определяемое ее первой строкой, содержит

все неизвестные переменные. Поэтому формирование целесообразно начать с первого уравнения. Предлагаемый алгоритм формирования и решения СЛАУ (6) выглядит следующим образом.

1. Формируется первая строка матрицы коэффициентов  $A$  в следующем порядке: сначала формируется коэффициент  $a_{1,1} = \sum_{m=1}^k \mu_{x_m x_m}$  при  $\beta_{1,1}$ , затем последующие элементы первой строки

$a_{1,j}$ ,  $j = 2, k^2 - k + 1$ , путем выполнения двух вложенных циклов, определяемых суммами  $\sum_{m=1}^k \sum_{\substack{l=1, \\ l \neq m}}^k \beta_{m,l} \mu_{x_l x_m}$  в (6). Эти коэффициенты определяются значениями моментов  $\mu_{x_l x_m}$ . Параллельно

формируется  $(2 \times (k^2 - k + 1))$ -матрица соответствий между элементами  $\beta_{i,j}$  и элементами  $x_m$ . Номер столбца этой матрицы – значение индекса  $m$  элемента  $x_m$ , а содержимое столбца – значения двух индексов  $i, j$  элемента  $\beta_{i,j}$ . Наконец формируется свободный член первого уравнения

$$b_1 = \sum_{m=1}^k \mu_{y_m x_m}.$$

2. Формируются последующие строки матрицы коэффициентов  $A$ . Отдельная  $s$ -я строка (отдельное уравнение) определяется фиксированными значениями индексов  $i, j$  второй строки системы уравнений (6). Здесь соблюдается тот же порядок, что и в п. 1: сначала формируется коэффициент  $a_{s,1} = \mu_{x_i x_j}$  при  $\beta_{1,1}$ , затем – остальные элементы строки  $a_{s,j}$  путем выполнения цикла

в соответствии с суммой  $\sum_{\substack{l=1, \\ l \neq i}}^k \beta_{i,l} \mu_{x_l x_j}$ . Эти коэффициенты определяются значениями моментов

$\mu_{x_l x_j}$ . Место коэффициента в строке  $a_{s,j}$  определяется с помощью сформированной в п. 1 матрицы соответствий. Остальные места строки заполняются нулями. Формируется также свободный член уравнения  $b_s = \mu_{y_i x_j}$ .

3. Решается сформированная в п. 1, 2 алгоритма СЛАУ, и по полученному вектору решения  $X$  формируется искомая матрица  $\beta = (\beta_{i,j})$ . Диагональные элементы этой матрицы приравниваются к  $x_1$ , а остальные элементы формируются с использованием полученной в п. 1 матрицы соответствий.

**2. Линейное пропорциональное Прокрустово преобразование.** Линейным Прокрустовым преобразованием  $(k \times n)$ -матрицы данных  $X$  к  $(k \times n)$ -матрице данных  $Y$  будем называть преобразование вида

$$Z = A + BX, \quad (15)$$

обеспечивающее определенную близость матриц  $Y$  и  $Z$ . Построенное выше линейное пропорциональное преобразование (5) вектора  $x$  к вектору  $y$  позволяет формально построить линейное пропорциональное Прокрустово преобразование с критерием близости, определяемым постановкой задачи (2)–(4). Для этого первоначально отметим, что преобразование (5) справедливо также для наблюдений  $x_j$  и  $y_j$  векторов  $x$  и  $y$ , а также для матриц  $X = (x_j) = (x_{i,j})$ ,  $Y = (y_j) = (y_{i,j})$ , столбцами которых являются векторы наблюдений  $x_j$ ,  $y_j$ ,  $i = \overline{1, k}$ ,  $j = \overline{1, n}$ , где  $n$  – число наблюдений (объем выборки). В этом случае вместо векторного преобразования (5) мы будем иметь следующее матричное преобразование:

$$Z = \bar{v}_y + {}^{0,1}(\beta(X - \bar{v}_x)),$$

где  $\bar{v}_x = (v_x, v_x, \dots, v_x)$ ,  $\bar{v}_y = (v_y, v_y, \dots, v_y)$  – матрицы, содержащие  $n$  одинаковых столбцов  $v_x$  и  $v_y$  соответственно, и  $\beta$  – матрица, определяемая путем решения СЛАУ (6). Далее, неизвестные теоретические моменты  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $\mu_{x^2} = (\mu_{x_i x_j})$ ,  $\mu_{yx} = (\mu_{y_i x_j})$  заменим их выборочными оценками  $\hat{v}_x$ ,  $\hat{v}_y$ ,  $\hat{\mu}_{x^2} = (\hat{\mu}_{x_i x_j})$ ,  $\hat{\mu}_{yx} = (\hat{\mu}_{y_i x_j})$  соответственно, полученными по матрицам наблюдений  $X = (x_j) = (x_{i,j})$ ,  $Y = (y_j) = (y_{i,j})$ :

$$\hat{v}_x = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j, \hat{v}_y = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_j,$$

$$\hat{\mu}_{x^2} = (\hat{\mu}_{x_i x_j}) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n 0,0 (x_j)^2, \hat{\mu}_{yx} = (\hat{\mu}_{y_i x_j}) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n 0,0 (y_j x_j).$$

В итоге мы получим следующее преобразование матрицы данных  $X = (x_j) = (x_{i,j})$  в матрицу данных  $Z = (z_j) = (z_{i,j})$ :

$$Z = \hat{v}_y + {}^{0,1}(\hat{\beta}(X - \hat{v}_x)), \quad (16)$$

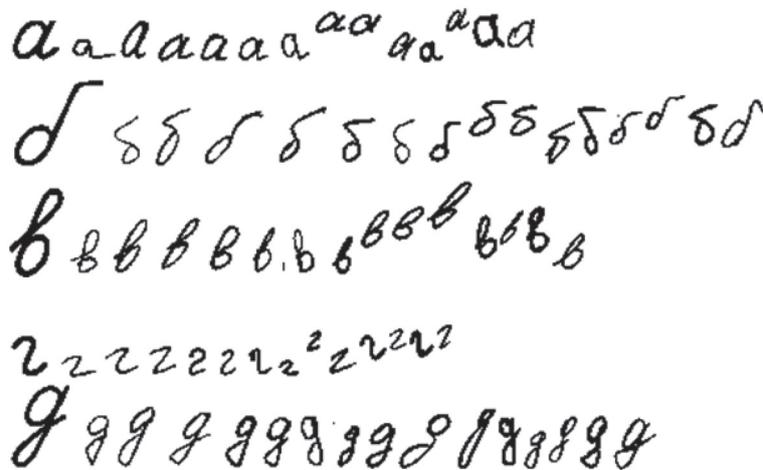
где  $\hat{v}_x = (\hat{v}_x, \hat{v}_x, \dots, \hat{v}_x)$ ,  $\hat{v}_y = (\hat{v}_y, \hat{v}_y, \dots, \hat{v}_y)$  – матрицы, содержащие по  $n$  одинаковых столбцов  $\hat{v}_x$  и  $\hat{v}_y$  соответственно;  $\hat{\beta}$  – матрица, определяемая путем решения СЛАУ (6) при замене  $\mu_{x^2} = (\mu_{x_i x_j})$  на  $\hat{\mu}_{x^2} = (\hat{\mu}_{x_i x_j})$  и  $\mu_{yx} = (\mu_{y_i x_j})$  на  $\hat{\mu}_{yx} = (\hat{\mu}_{y_i x_j})$ . Преобразование (16) будем называть линейным пропорциональным Прокрустовым преобразованием.

**3. Распознавание рукописных букв.** Предложенное линейное пропорциональное Прокрустово преобразование (16) было запрограммировано в виде m-файла-функции Матлаб и использовано при распознавании рукописных букв наряду с другими преобразованиями. Набор распознаваемых букв содержал 478 кириллических рукописных строчных букв (примерно по 15 реализаций каждой), написанных различными людьми. Ниже представлен фрагмент указанного набора букв (рисунок). Он собран из графических файлов букв. Разброс последних по высоте обусловлен тем, что файлы имеют различные размеры. В качестве эталона использовались буквы прописей, представленные первыми в каждой строке. Распознаваемая буква подгонялась к каждой букве эталона с помощью Прокрустова преобразования. Результатом распознавания считался эталон, на котором достигнуто минимальное Прокрустово расстояние. Процесс распознавания был организован так, как описано в работах [3, 7]. Результаты распознавания приведены в таблице.

Результаты распознавания 478 русских рукописных строчных букв кириллицы с помощью различных преобразований при эталонах-прописях

Применяемое при распознавании преобразование	Линейное Прокрустово преобразование [2, 3]	Простое симметричное Прокрустово преобразование [8]	Ортогональное Прокрустово преобразование [1]	Пропорциональное Прокрустово преобразование
Число и процент правильных распознаваний	260 (54,4 %)	285 (59,6 %)	284 (59,4 %)	294 (61,5 %)

Из таблицы видно, что использование предложенного пропорционального Прокрустова преобразования позволяет повысить точность распознавания на 7 % по сравнению с линейным Прокрустовым преобразованием и на 2 % по сравнению с ортогональным Прокрустовым преобразованием.



Фрагмент набора букв для распознавания

Более точным по сравнению с ортогональным в данном случае оказалось также простое симметричное Прокрустово преобразование, предложенное в работе [8].

Таким образом, предложенное пропорциональное Прокрустово преобразование представляет собой реальную альтернативу известному ортогональному Прокрустову преобразованию в задаче распознавания рукописных букв.

**П р и л о ж е н и е.** Следом  $2q$ -мерной матрицы  $V = (v_{i,j})$ ,  $i = (i_1, i_2, \dots, i_q)$ ,  $j = (j_1, j_2, \dots, j_q)$ , индексы мультииндексов  $i$  и  $j$  которой пробегают множества одних и тех же значений, называется скалярная величина вида

$$\text{tr} V = \sum_i v_{i,i}.$$

**Теорема 2** (о производной следа многомерной матрицы). Если  $V = (v_{i,j})$ ,  $i = (i_1, i_2, \dots, i_q)$ ,  $j = (j_1, j_2, \dots, j_q)$ ,  $-2q$ -мерная матрица, имеющая след, то

$$\frac{d}{dV} \text{tr} V = E(0, q). \quad (17)$$

**Доказательство.** По определению многомерно-матричной производной [6] получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dV} \text{tr} V &= \left( \frac{\partial}{\partial v_{k,l}} \sum_i v_{i,i} \right) = \left( \sum_i \frac{\partial v_{i,i}}{\partial v_{k,l}} \right) = \\ &= \left( \sum_i \begin{cases} 1, & i = k = l \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \right) = \left( \begin{cases} 1, & k = l \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \right) = Z = (z_{k,l}) = E(0, q). \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 2 окончено.

### Список использованной литературы

1. *Crosilla, F.* Procrustes Analysis and Geodetic Sciences / Fabio Crosilla // Technical report. – Stuttgart: Univ. of Stuttgart, Dept. of Geodesy and Geoinformatics. – 1999. – Pt. 1. – P. 69–78.
2. *Муха, В. С.* Линейное Прокрустово преобразование двухмерных матриц / В. С. Муха // Информатика. – 2010. – № 3. – С. 97–102.
3. *Муха, В. С.* Линейное Прокрустово преобразование в распознавании букв / В. С. Муха // Автоматика и вычисл. техника. – 2012. – № 3. – С. 36–48.
4. *Муха, В. С.* Распознавание букв на основе Прокрустова преобразования / В. С. Муха // Информационные технологии и системы – 2012 (ИТС 2012): материалы Междунар. науч. конф. (БГУИР, Минск, Беларусь, 24 окт. 2012) / редкол.: Л. Ю. Шилин [и др.]. – Минск, 2012. – С. 266–267.
5. *Муха, В. С.* Пропорциональное Прокрустово преобразование в распознавании рукописных цифр и знаков / В. С. Муха, А. Н. Кузьков // Информационные технологии и системы 2014 (ИТС 2014): материалы Междунар. науч. конф. (БГУИР, Минск, Беларусь, 29 окт. 2014) / редкол.: Л. Ю. Шилин [и др.]. – Минск, 2014. – С. 290–291.
6. *Муха, В. С.* Анализ многомерных данных / В. С. Муха. – Минск: Технопринт, 2004.
7. *Муха, В. С.* Прокрустово преобразование в распознавании рукописных букв / В. С. Муха, А. Н. Кузьков // Информационные технологии и системы – 2013 (ИТС 2013): материалы Междунар. науч. конф. (БГУИР, Минск, Беларусь, 23 окт. 2013) / редкол.: Л. Ю. Шилин [и др.]. – Минск, 2013. – С. 298–299.
8. *Муха, В. С.* Линейное простое симметричное Прокрустово преобразование / В. С. Муха, А. Н. Кузьков // Докл. БГУИР. – 2015. – № 5 (91). – С. 25–28.

Поступила в редакцию 03.09.2015

УДК 512.548

А. М. ГАЛЬМАК

## ЕДИНИЦЫ И ИХ АНАЛОГИ В $n$ -АРНЫХ ГРУППАХ

Могилевский государственный университет продовольствия, Могилев, Беларусь,  
e-mail: halm54@mail.ru

Основным результатом данной работы является теорема, утверждающая, что в универсальной обертывающей группе любой  $n$ -арной группы все классы эквивалентности Поста, определяемые  $m$ -нейтральными последовательностями, образуют  $(k + 1)$ -арную группу, которая при  $m = n$  изоморфна  $n$ -арной подгруппе всех единиц  $n$ -арной группы. Среди следствий этой теоремы находится известный результат, согласно которому в любой  $n$ -арной группе множество всех единиц, если оно не пусто, является характеристической  $n$ -арной подгруппой, лежащей в центре  $n$ -арной группы.

*Ключевые слова:*  $n$ -арная группа, единица, нейтральная последовательность.

A. M. GAL'MAK

## IDENTITIES AND THEIR ANALOGUES IN $n$ -ARY GROUPS

Mogilev State University of Food Technologies, Mogilev, Belarus,  
e-mail: halm54@mail.ru

The main result of the article is the theorem stating that in the universal covering group of any  $n$ -ary group all classes of Post's equivalence determined as  $m$ -neutral sequences form the  $(k + 1)$ -ary group that at  $m = n$  is isomorphic to the  $n$ -ary subgroup of all identities of the  $n$ -ary group. Among the consequences of the theorem is a well-known result, according to which in any  $n$ -ary group the set of all the identities, if it is not empty, is a characteristic  $n$ -ary subgroup lying in the center of the  $n$ -ary group.

*Keywords:*  $n$ -ary group, identity, neutral sequence.

**Введение.** Известно [1, 2], что в любой  $n$ -арной группе множество всех единиц, если оно не пусто, является характеристической  $n$ -арной подгруппой, лежащей в центре  $n$ -арной группы. В бинарном случае ( $n = 2$ ) – это тривиальное утверждение. Содержательным оно становится при  $n > 2$ , так как в этом случае в  $n$ -арной группе, в отличие от бинарного случая, может быть несколько единиц. Более того, существуют неоднородные  $n$ -арные группы, в которых все элементы являются единицами. Разнообразная информация о строении  $n$ -арной подгруппы всех единиц  $n$ -арной группы имеется в работах [3, 4]. В данной статье продолжается изучение полиадических аналогов единицы группы. В частности показано, что сформулированная выше теорема из [1, 2] может быть получена как следствие основного результата статьи.

**1. Предварительные сведения.** Информацию, приведенную в этом разделе, а также иную необходимую информацию об  $n$ -арных группах можно найти в работе [5].

Элемент  $e$   $n$ -арной группы  $\langle A, [ ] \rangle$  называется [6] *единицей* этой  $n$ -арной группы, если для любого  $x \in A$  и любого  $i = 1, 2, \dots, n$  верно

$$[\underbrace{xe \dots e}_{n-1}] = [\underbrace{exe \dots e}_{n-2}] = \dots = [\underbrace{e \dots exe}_{n-2}] = [\underbrace{e \dots ex}_{n-1}] = x.$$

**З а м е ч а н и е 1.** Можно показать, что для того чтобы элемент  $e$   $n$ -арной группы  $\langle A, [ ] \rangle$  являлся ее единицей, достаточно выполнения для любого  $x \in A$  равенств

$$[\underbrace{xe \dots e}_{n-1}] = [\underbrace{exe \dots e}_{n-2}] = x.$$

Еще одним  $n$ -арным обобщением единицы группы является понятие нейтральной последовательности.

Согласно Э. Посту [7], последовательность  $e_1 \dots e_{s(n-1)}$ , где  $s \geq 1$ , элементов  $n$ -арной группы  $\langle A, [ ] \rangle$  называется *нейтральной*, если

$$[e_1 \dots e_{s(n-1)}x] = [xe_1 \dots e_{s(n-1)}] = x$$

для любого  $x \in A$ .

**З а м е ч а н и е 2.** Можно показать, что для того чтобы последовательность  $e_1 \dots e_{s(n-1)}$  являлась нейтральной в  $n$ -арной группе  $\langle A, [ ] \rangle$ , достаточно выполнения для любого  $x \in A$  одного из следующих равенств

$$[e_1 \dots e_{s(n-1)}x] = x, [xe_1 \dots e_{s(n-1)}] = x.$$

Последовательность  $\beta$  элементов  $n$ -арной группы  $\langle A, [ ] \rangle$  называется [7] *обратной* к последовательности  $\alpha$  элементов этой же  $n$ -арной группы, если последовательности  $\alpha\beta$  и  $\beta\alpha$  являются нейтральными.

Пусть  $\langle A, [ ] \rangle$  –  $n$ -арная группа,  $F_A$  – свободная полугруппа над алфавитом  $A$ ,  $\theta_A$  – отношение эквивалентности Поста [7], определенное на  $F_A$  по правилу  $(\alpha, \beta) \in \theta_A$  тогда и только тогда, когда существуют последовательности  $\gamma$  и  $\delta$  из  $F_A$  такие, что  $[\gamma\alpha\delta] = [\gamma\beta\delta]$ . Легко проверяется, что  $\theta_A$  – конгруэнция на полугруппе  $F_A$ , а полугруппа  $A^* = F_A / \theta_A$  является группой, которую называют универсальной обертывающей группой для  $n$ -арной группы  $\langle A, [ ] \rangle$ . Единицей этой  $n$ -арной группы является класс  $\theta_A(\varepsilon)$ , где  $\varepsilon$  – любая нейтральная последовательность, а обратным элементом для класса  $\theta_A(\alpha)$  является класс  $\theta_A(\beta)$ , где  $\beta$  – любая обратная последовательность для последовательности  $\alpha$ .

Далее для сокращения записей вместо символа  $\theta_A$  будем использовать символ  $\theta$  без нижнего индекса.

Для всякого  $i = 1, \dots, n-1$  определим множество

$$A^{(i)} = \{\theta(\alpha) \in A^* \mid l(\alpha) = s(n-1) + i, s \geq 0\},$$

где  $\theta(\alpha)$  – класс конгруэнции  $\theta$ , содержащий последовательность  $\alpha$ ;  $l(\alpha)$  – длина последовательности  $\alpha$ .

Ясно, что  $A^{(i)} = \{\theta(\alpha) \in A^* \mid l(\alpha) = i\}$ . В частности,  $A' = \{\theta(a) \mid a \in A\}$ .

Если зафиксировать элементы  $a_1, \dots, a_{i-1} \in A$ , то

$$A^{(i)} = \{\theta(aa_1 \dots a_{i-1}) \mid a \in A\} = \{\theta(a_1 \dots a_{i-1}a) \mid a \in A\}.$$

Для сокращения записей множество  $A^{(n-1)}$  будем обозначать распространенным в литературе по  $n$ -арным группам символом  $A_0$ , т. е.  $A_0 = A^{(n-1)}$ .

**З а м е ч а н и е 3.** Если  $n = k(m-1) + 1$ , где  $n \geq 3, m \geq 2$ , то легко проверяется, что множество  $A^{(m-1)}$  является  $(k+1)$ -арной группой относительно  $(k+1)$ -арной операции

$$[\theta(\alpha_1)\theta(\alpha_2) \dots \theta(\alpha_{k+1})]_{k+1} = \theta(\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{k+1}).$$

Если  $m = 2$ , то  $k = n-1$  и получаем  $n$ -арную операцию

$$[\theta(a_1)\theta(a_2) \dots \theta(a_n)]_n = \theta(a_1a_2 \dots a_n) = \theta([a_1a_2 \dots a_n]), a_1, a_2, \dots, a_n \in A.$$

При этом, как несложно установить, отображение  $\varphi: a \rightarrow \theta(a)$  является изоморфизмом  $n$ -арной группы  $\langle A, [ ] \rangle$  на  $n$ -арную группу  $\langle A', [ ]_n \rangle$ .

Если  $m = n$ , то  $k = 1$ , и получаем бинарную операцию

$$[\theta(a_1a_2 \dots a_{n-1})\theta(b_1b_2 \dots b_{n-1})]_2 = \theta(a_1a_2 \dots a_{n-1}b_1b_2 \dots b_{n-1}),$$

где  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, b_1, b_2, \dots, b_{n-1} \in A$ .

**2. Вспомогательные результаты.** Понятия нейтральной последовательности и единицы  $n$ -арной группы можно объединить следующим определением из [3].

О п р е д е л е н и е 1. Если  $n = k(m - 1) + 1$ ,  $k \geq 1$ , то последовательность

$$\alpha = e_1 \dots e_{t(n-1)+m-1}$$

элементов  $n$ -арной группы  $\langle A, [ ] \rangle$ , где  $t \geq 0$ , называется  $t$ -нейтральной, если для любого  $x \in A$  и любого  $j = 1, \dots, k + 1$  верно равенство

$$[\underbrace{\alpha \dots \alpha}_{j-1} x \underbrace{\alpha \dots \alpha}_{k-j+1}] = x.$$

Ясно, что  $n$ -нейтральные последовательности элементов  $n$ -арной группы – это в точности ее нейтральные последовательности. Понятно также, что в  $n$ -арной группе любая единица является 2-нейтральной последовательностью, а любая 2-нейтральная последовательность  $e_1 \dots e_{t(n-1)+1}$  либо является ( $t = 0$ ) единицей, либо отождествляется ( $t \geq 1$ ) с единицей  $[e_1 \dots e_{t(n-1)+1}]$ .

Справедливость следующего критерия устанавливается простой проверкой.

П р е д л о ж е н и е 1. Если  $\langle A, [ ] \rangle$  –  $n$ -арная группа,  $n = k(m - 1) + 1$ , то последовательность  $\alpha$  ее элементов является  $t$ -нейтральной тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

1) для любого  $x \in A$  последовательности  $\alpha x$  и  $x \alpha$  эквивалентны, что равносильно равенству  $\theta(\alpha)\theta(x) = \theta(x)\theta(\alpha)$ ;

2) последовательность  $\underbrace{\alpha \dots \alpha}_k$  является нейтральной.

Из предложения 1 вытекает

С л е д с т в и е 1. Для любой  $t$ -нейтральной последовательности  $\alpha$   $n$ -арной группы  $\langle A, [ ] \rangle$  и любой последовательности  $\beta$  элементов из  $A$  последовательности  $\alpha\beta$  и  $\beta\alpha$  эквивалентны, что равносильно равенству  $\theta(\alpha)\theta(\beta) = \theta(\beta)\theta(\alpha)$ .

С л е д с т в и е 2. Если  $\alpha$  –  $t$ -нейтральная последовательность  $n$ -арной группы  $\langle A, [ ] \rangle$ ,  $\gamma$  – любая обратная для  $\alpha$  последовательность,  $\beta$  – любая последовательность элементов из  $A$ , то последовательности  $\gamma\beta$  и  $\beta\gamma$  эквивалентны, что равносильно равенству  $\theta(\gamma)\theta(\beta) = \theta(\beta)\theta(\gamma)$ .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть  $\delta$  – любая обратная последовательность для последовательности  $\beta$ . По следствию 1  $\theta(\alpha)\theta(\delta) = \theta(\delta)\theta(\alpha)$ , откуда, работая в группе  $A^*$ , последовательно получаем

$$(\theta(\alpha)\theta(\delta))^{-1} = (\theta(\delta)\theta(\alpha))^{-1}, (\theta(\delta))^{-1}(\theta(\alpha))^{-1} = (\theta(\alpha))^{-1}(\theta(\delta))^{-1}, \theta(\beta)\theta(\gamma) = \theta(\gamma)\theta(\beta).$$

Следствие доказано.

Л е м м а 1. Для любых  $t$ -нейтральных последовательностей  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k+1}$   $n$ -арной группы  $\langle A, [ ] \rangle$  последовательность  $\alpha = \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{k+1}$  также является  $t$ -нейтральной.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть  $l(\alpha_j) = t_j(n - 1) + m - 1$  – длина последовательности  $\alpha_j$ , где  $j = 1, \dots, k + 1$ . Тогда  $l(\alpha) = t(n - 1) + m - 1$  – длина последовательности  $\alpha$ , где

$$t = (t_1 + \dots + t_{k+1} + 1)(n - 1) + m - 1.$$

Кроме того, для любого  $x \in A$  и любого  $j = 1, \dots, k + 1$ , используя следствие 1 и определение  $t$ -нейтральной последовательности, получим

$$\begin{aligned} [\underbrace{\alpha \dots \alpha}_{j-1} x \underbrace{\alpha \dots \alpha}_{k-j+1}] &= [\underbrace{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k+1}}_{j-1} \dots \underbrace{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k+1}}_{j-1} x \underbrace{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k+1}}_{k-j+1} \dots \underbrace{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k+1}}_{k-j+1}] = \\ &= [\underbrace{\alpha_{k+1} \dots \alpha_{k+1}}_{j-1} \dots \underbrace{\alpha_2 \dots \alpha_2}_{j-1} [\underbrace{\alpha_1 \dots \alpha_1}_{j-1} x \underbrace{\alpha_1 \dots \alpha_1}_{k-j+1}] \underbrace{\alpha_2 \dots \alpha_2}_{k-j+1} \dots \underbrace{\alpha_{k+1} \dots \alpha_{k+1}}_{k-j+1}] = \\ &= [\underbrace{\alpha_{k+1} \dots \alpha_{k+1}}_{j-1} \dots \underbrace{\alpha_2 \dots \alpha_2}_{j-1} x \underbrace{\alpha_2 \dots \alpha_2}_{k-j+1}] \dots \underbrace{\alpha_{k+1} \dots \alpha_{k+1}}_{k-j+1} = \dots \\ &\dots = [\underbrace{\alpha_{k+1} \dots \alpha_{k+1}}_{j-1} x \underbrace{\alpha_{k+1} \dots \alpha_{k+1}}_{k-j+1}] = x, \end{aligned}$$

т. е. верно равенство из определения 1. Следовательно,  $\alpha$  –  $m$ -нейтральная последовательность. Лемма доказана.

**Л е м м а 2.** Если  $\alpha$  –  $m$ -нейтральная последовательность  $n$ -арной группы  $\langle A, [ ] \rangle$ ,  $\gamma$  – любая обратная для нее последовательность, то для любого  $x \in A$  и любого  $j = 1, \dots, k + 1$  верно равенство

$$[\underbrace{\gamma \dots \gamma}_{j-1} x \underbrace{\gamma \dots \gamma}_{k-j+1}] = x.$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Так как, согласно определению 1,

$$[\underbrace{\alpha \dots \alpha}_{j-1} x \underbrace{\alpha \dots \alpha}_{k-j+1}] = x,$$

то

$$[\underbrace{\gamma \dots \gamma}_{j-1} [\underbrace{\alpha \dots \alpha}_{j-1} \underbrace{\alpha x \alpha \dots \alpha}_{k-j+1}] \underbrace{\gamma \dots \gamma}_{k-j+1}] = [\underbrace{\gamma \dots \gamma}_{j-1} x \underbrace{\gamma \dots \gamma}_{k-j+1}],$$

откуда, используя взаимную обратность последовательностей  $\alpha$  и  $\gamma$ , получаем доказываемое равенство. Лемма доказана.

Обозначим через  $\mathbf{N}(A, m)$  множество всех  $m$ -нейтральных последовательностей  $n$ -арной группы  $\langle A, [ ] \rangle$ .

В  $(k + 1)$ -арной группе  $\langle A^{(m-1)}, [ ] \rangle$  выделим подмножество

$$\mathbf{N}(A^{(m-1)}) = \{\theta(\alpha) \mid \alpha \in \mathbf{N}(A, m)\}.$$

Ясно, что  $\mathbf{N}(A') = \mathbf{E}(A')$ .

Так как в любой  $n$ -арной группе существуют нейтральные последовательности, то множество  $\mathbf{N}(A_0)$  не пусто, а так как любые две нейтральные последовательности эквивалентны в смысле Поста, то множество  $\mathbf{N}(A_0)$  состоит из единственного класса  $\theta(\alpha)$ , определяемого любой нейтральной последовательностью  $\alpha$ , который является единицей универсальной обертывающей группы  $A^*$ , т. е. в этом случае  $\mathbf{N}(A_0) = \mathbf{E}(A_0)$ .

Так как для любого элемента  $\theta(\alpha)$  непустого множества  $\mathbf{N}(A^{(m-1)})$  в качестве последовательности  $\alpha$  можно выбрать последовательность длины  $m - 1$ , то

$$\mathbf{N}(A^{(m-1)}) = \{\theta(\alpha) \mid \alpha \in \mathbf{N}(A, m), l(\alpha) = m - 1\}.$$

**Л е м м а 3.** Пусть  $\langle A, [ ] \rangle$  –  $n$ -арная группа,  $U \in \mathbf{N}(A^{(m-1)})$ ,  $V \in A^{(m-1)}$ . Тогда для любого  $j = 1, \dots, k + 1$  верно равенство

$$[\underbrace{U \dots U}_{j-1} \underbrace{V U \dots U}_{k-j+1}]_{k+1} = V.$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Положим  $U = \theta(\alpha)$ ,  $V = \theta(\beta)$ . Так как последовательность  $\alpha$  –  $m$ -нейтральная, то по следствию 1  $\theta(\alpha)\theta(\beta) = \theta(\beta)\theta(\alpha)$ , а согласно утверждению 2) предложения 1, последовательность  $\underbrace{\alpha \dots \alpha}_k$  является нейтральной. Поэтому

$$\begin{aligned} [\underbrace{U \dots U}_{j-1} \underbrace{V U \dots U}_{k-j+1}]_{k+1} &= [\underbrace{\theta(\alpha) \dots \theta(\alpha)}_{j-1} \underbrace{\theta(\beta) \theta(\alpha) \dots \theta(\alpha)}_{k-j+1}]_{k+1} = \underbrace{\theta(\alpha) \dots \theta(\alpha)}_{j-1} \underbrace{\theta(\beta) \theta(\alpha) \dots \theta(\alpha)}_{k-j+1} = \\ &= \underbrace{\theta(\alpha) \dots \theta(\alpha)}_k \theta(\beta) = \theta(\underbrace{\alpha \dots \alpha}_k) \theta(\beta) = \theta(\beta) = V, \end{aligned}$$

т. е. верно равенство из формулировки леммы. Лемма доказана.

Равенство из леммы 3 позволяет сформулировать предложение, устанавливающее связь между  $m$ -нейтральными последовательностями  $n$ -арной группы  $\langle A, [ ] \rangle$  и единицами  $(k + 1)$ -арной группы  $\langle A^{(m-1)}, [ ]_{k+1} \rangle$ .

**Предложение 2.** Если последовательность  $\alpha$  элементов  $n$ -арной группы  $\langle A, [ ] \rangle$  является  $t$ -нейтральной, то класс  $\theta(\alpha)$  является единицей  $(k+1)$ -арной группы  $\langle A^{(m-1)}, [ ]_{k+1} \rangle$  и верно включение  $\mathbf{N}(A^{(m-1)}) \subseteq \mathbf{E}(A^{(m-1)})$ .

Возникает естественный вопрос: верно ли обратное включение?

Следствием положительного ответа на этот вопрос было бы равенство

$$\mathbf{N}(A^{(m-1)}) = \mathbf{E}(A^{(m-1)}).$$

В следующем разделе будет приведен пример, показывающий, что существуют полиадические группы, для которых ответ на сформулированный выше вопрос является отрицательным. Следовательно, указанное равенство в таких полиадических группах невозможно.

**Предложение 3.** Пусть  $\langle A, [ ] \rangle$  –  $n$ -арная группа,  $U \in \mathbf{N}(A^{(m-1)})$ ,  $V \in A^{(m-1)}$ ,  $\varphi$  – автоморфизм  $(k+1)$ -арной группы  $\langle A^{(m-1)}, [ ]_{k+1} \rangle$ . Тогда для любого  $j = 1, \dots, k+1$  справедливо равенство

$$\underbrace{[U^\varphi \dots U^\varphi]_{j-1}}_{j-1} \underbrace{V U^\varphi \dots U^\varphi}_{k-j+1}]_{k+1} = V$$

и верно включение  $\mathbf{N}^\varphi(A^{(m-1)}) \subseteq \mathbf{E}(A^{(m-1)})$ .

**Доказательство.** Так как  $V^{\varphi^{-1}} \in A^{(m-1)}$ , то по лемме 3

$$\underbrace{[U \dots U V^{\varphi^{-1}} U \dots U]_{k+1}}_{j-1} = V^{\varphi^{-1}},$$

откуда последовательно получаем

$$\begin{aligned} & (\underbrace{[U \dots U V^{\varphi^{-1}} U \dots U]_{k+1}}_{j-1})^\varphi = (V^{\varphi^{-1}})^\varphi, \\ & \underbrace{[U^\varphi \dots U^\varphi (V^{\varphi^{-1}})^\varphi U^\varphi \dots U^\varphi]_{k+1}}_{j-1} = V, \\ & \underbrace{[U^\varphi \dots U^\varphi V U^\varphi \dots U^\varphi]_{k+1}}_{j-1} = V. \end{aligned}$$

Последнее равенство означает, что  $U^\varphi$  – единица  $(k+1)$ -арной группы  $\langle A^{(m-1)}, [ ]_{k+1} \rangle$ . Следовательно, верно включение из формулировки предложения. Предложение доказано.

Включение из формулировки предложения 3 можно рассматривать и как следствие включения из формулировки предложения 2, так как любой автоморфизм полиадической группы переводит единицу в единицу.

Покажем, что всякий автоморфизм  $(k+1)$ -арной группы  $\langle A^{(m-1)}, [ ]_{k+1} \rangle$  с непустым центром «переводит» любую  $t$ -нейтральную последовательность  $n$ -арной группы  $\langle A, [ ] \rangle$  в ее же  $t$ -нейтральную последовательность.

**Лемма 4.** Пусть  $\alpha$  –  $t$ -нейтральная последовательность  $n$ -арной группы  $\langle A, [ ] \rangle$  с непустым центром,  $\varphi$  – автоморфизм  $(k+1)$ -арной группы  $\langle A^{(m-1)}, [ ]_{k+1} \rangle$ ,  $U = \theta(\alpha)$ ,  $U^\varphi = \theta(\delta)$ . Тогда  $\delta$  –  $t$ -нейтральная последовательность  $n$ -арной группы  $\langle A, [ ] \rangle$ .

**Доказательство.** Пусть  $x$  – произвольный элемент из  $A$ ,  $c_1, \dots, c_{m-2}$  – фиксированные элементы из центра  $n$ -арной группы  $\langle A, [ ] \rangle$ , и положим  $V = \theta(xc_1 \dots c_{m-2})$ . Так как  $U = \theta(\alpha) \in \mathbf{N}(A^{(m-1)})$ ,  $V \in A^{(m-1)}$ , то, согласно предложению 3, имеем

$$\underbrace{[U^\varphi \dots U^\varphi]_{j-1}}_{j-1} \underbrace{V U^\varphi \dots U^\varphi}_{k-j+1}]_{k+1} = V.$$

Тогда, учитывая принадлежность элементов  $c_1, \dots, c_{m-2}$  центру  $n$ -арной группы  $\langle A, [ ] \rangle$ , последовательно получаем

$$\underbrace{[(\theta(\delta)) \dots (\theta(\delta)) \theta(xc_1 \dots c_{m-2}) (\theta(\delta)) \dots (\theta(\delta))]_{k+1}}_{j-1} = \theta(xc_1 \dots c_{m-2}),$$

$$\begin{aligned}
\theta(\underbrace{\delta \dots \delta}_{j-1} x c_1 \dots c_{m-2} \underbrace{\delta \dots \delta}_{k-j+1}) &= \theta(x c_1 \dots c_{m-2}), \\
\theta(\underbrace{\delta \dots \delta}_{j-1} x \underbrace{\delta \dots \delta}_{k-j+1} c_1 \dots c_{m-2}) &= \theta(x c_1 \dots c_{m-2}), \\
\theta(\underbrace{\delta \dots \delta}_{j-1} x \underbrace{\delta \dots \delta}_{k-j+1}) \theta(c_1 \dots c_{m-2}) &= \theta(x) \theta(c_1 \dots c_{m-2}), \\
\theta(\underbrace{\delta \dots \delta}_{j-1} x \underbrace{\delta \dots \delta}_{k-j+1}) &= \theta(x), \\
\theta([\underbrace{\delta \dots \delta}_{j-1} x \underbrace{\delta \dots \delta}_{k-j+1}]) &= \theta(x), \\
[\underbrace{\delta \dots \delta}_{j-1} x \underbrace{\delta \dots \delta}_{k-j+1}] &= x.
\end{aligned}$$

Следовательно,  $\delta$  –  $m$ -нейтральная последовательность  $n$ -арной группы  $\langle A, [ ] \rangle$ . Лемма доказана.

**3. Основной результат.** Начнем с примеров.

**Пример 1.** Пусть  $\mathbf{B}_3 = \{(12), (13), (23)\}$  – множество всех нечетных подстановок множества  $\{1, 2, 3\}$ ,  $\langle \mathbf{B}_3, [ ] \rangle$  – 7-арная группа с 7-арной операцией, производной от операции в симметрической группе  $\mathbf{S}_3$ .

Равенство  $7 = 3(3 - 1) + 1$  показывает, что в  $\langle \mathbf{B}_3, [ ] \rangle$  можно рассматривать 3-нейтральные последовательности. Кроме того, согласно замечанию 3, существует 4-арная группа  $\langle \mathbf{B}_3^{(2)}, [ ]_4 \rangle$ .

Так как любая последовательность длины 2, составленная из элементов 7-арной группы  $\langle \mathbf{B}_3, [ ] \rangle$ , эквивалентна одной из последовательностей

$$\lambda = (12)(12), \mu = (12)(13), \nu = (12)(23),$$

то

$$\mathbf{B}_3^{(2)} = \{\theta(\lambda), \theta(\mu), \theta(\nu)\}.$$

Проведя соответствующие вычисления, можно убедиться в том, что в 4-арной группе  $\langle \mathbf{B}_3^{(2)}, [ ]_4 \rangle$  все элементы являются единицами, т. е.  $\mathbf{E}(\mathbf{B}_3^{(2)}) = \mathbf{B}_3^{(2)}$ , а также в том, что множество  $\mathbf{N}(\mathbf{B}_3^{(2)})$  является одноэлементным, так как  $\mathbf{N}(\mathbf{B}_3^{(2)}) = \{\theta(\lambda)\}$ . Таким образом,  $\mathbf{N}(\mathbf{B}_3^{(2)}) \neq \mathbf{E}(\mathbf{B}_3^{(2)})$ .

Пример 1 показывает, что равенство  $\mathbf{N}(A^{(m-1)}) = \mathbf{E}(A^{(m-1)})$  возможно не всегда.

**Пример 2.** Пусть  $\langle \mathbf{B}_3, [ ] \rangle$  – та же 7-арная группа, что и в примере 1.

Равенство  $7 = 2(4 - 1) + 1$  показывает, что в  $\langle \mathbf{B}_3, [ ] \rangle$  можно рассматривать 4-нейтральные последовательности. Кроме того, согласно замечанию 3, существует тернарная группа  $\langle \mathbf{B}_3^{(3)}, [ ]_3 \rangle$ .

Так как любая последовательность длины 3, составленная из элементов 7-арной группы  $\langle \mathbf{B}_3, [ ] \rangle$ , эквивалентна одной из последовательностей

$$\lambda = (12)(12)(12), \mu = (12)(12)(13), \nu = (12)(12)(23),$$

то

$$\mathbf{B}_3^{(3)} = \{\theta(\lambda), \theta(\mu), \theta(\nu)\}.$$

Проведя соответствующие вычисления, можно убедиться в том, что в тернарной группе  $\langle \mathbf{B}_3^{(3)}, [ ]_3 \rangle$  нет единиц, пустым является и множество  $\mathbf{N}(\mathbf{B}_3^{(3)})$ . Таким образом,

$$\mathbf{N}(\mathbf{B}_3^{(3)}) = \mathbf{E}(\mathbf{B}_3^{(3)}) = \emptyset.$$

Приведем еще один пример, показывающий, что равенство  $\mathbf{N}(A^{(m-1)}) = \mathbf{E}(A^{(m-1)})$  возможно и для непустых множеств  $\mathbf{N}(A^{(m-1)})$  и  $\mathbf{E}(A^{(m-1)})$ .

**Пример 3.** Пусть  $\mathbf{B}_3$  – то же множество, что и в примере 1,  $\langle \mathbf{B}_3, [ ] \rangle$  – 5-арная группа с 5-арной операцией, производной от операции в симметрической группе  $\mathbf{S}_3$ .

Равенство  $5 = 2(3 - 1) + 1$  показывает, что в  $\langle B_3, [ ] \rangle$  можно рассматривать 3-нейтральные последовательности. Кроме того, согласно замечанию 3, существует тернарная группа  $\langle B_3^{(2)}, [ ]_3 \rangle$ . Как и в примере 1,  $B_3^{(2)} = \{\theta(\lambda), \theta(\mu), \theta(\nu)\}$ .

Соответствующие вычисления убеждают в том, что

$$N(B_3^{(2)}) = E(B_3^{(2)}) = \{\theta(\lambda)\}.$$

Приведенные примеры позволяют предположить, что все элементы множества  $N(A^{(m-1)})$ , если оно не пусто, образуют в  $(k + 1)$ -арной группе  $\langle A^{(m-1)}, [ ]_{k+1} \rangle$   $(k + 1)$ -арную подгруппу, совпадающую в некоторых случаях с  $(k + 1)$ -арной подгруппой  $\langle E(A^{(m-1)}), [ ]_{k+1} \rangle$ . Следующая теорема, являющаяся основным результатом данной статьи, подтверждает это предположение.

**Теорема 1.** Пусть  $\langle A, [ ] \rangle$  –  $n$ -арная группа,  $N(A^{(m-1)}) \neq \emptyset$ . Тогда:

1)  $\langle N(A^{(m-1)}), [ ]_{k+1} \rangle$  –  $(k + 1)$ -арная подгруппа  $(k + 1)$ -арной группы  $\langle A^{(m-1)}, [ ]_{k+1} \rangle$ , лежащая в ее центре;

2) если центр  $n$ -арной группы  $\langle A, [ ] \rangle$  непустой, то  $\langle N(A^{(m-1)}), [ ]_{k+1} \rangle$  – характеристична в  $\langle A^{(m-1)}, [ ]_{k+1} \rangle$  и совпадает с  $\langle E(A^{(m-1)}), [ ]_{k+1} \rangle$ .

**Доказательство.** 1) Пусть  $\theta(\alpha_1), \theta(\alpha_2), \dots, \theta(\alpha_{k+1})$  – любые элементы из  $N(A^{(m-1)})$ . Положим

$$\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k+1}, U = [\theta(\alpha_1) \theta(\alpha_2) \dots \theta(\alpha_{k+1})]_{k+1}.$$

Так как

$$[\theta(\alpha_1) \theta(\alpha_2) \dots \theta(\alpha_{k+1})]_{k+1} = \theta(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k+1}) = \theta(\alpha),$$

то  $U = \theta(\alpha)$ . А так как  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k+1}$  –  $m$ -нейтральные последовательности, то по лемме 1 последовательность  $\alpha$  также является  $m$ -нейтральной. Поэтому  $U = \theta(\alpha) \in N(A^{(m-1)})$ . Следовательно, множество  $N(A^{(m-1)})$  замкнуто относительно  $(k + 1)$ -арной операции  $[ ]_{k+1}$ .

Покажем теперь, что для любого  $i = 1, \dots, k + 1$  в  $N(A^{(m-1)})$  разрешимо уравнение

$$[\theta(\alpha_1) \dots \theta(\alpha_{i-1}) X \theta(\alpha_{i+1}) \dots \theta(\alpha_{k+1})]_{k+1} = \theta(\beta).$$

Для этого положим  $W = \theta_A(\gamma_{i-1} \dots \gamma_1 \beta \gamma_{k+1} \dots \gamma_{i+1})$ , где

$$\theta(\alpha_1), \dots, \theta(\alpha_{i-1}), \theta(\alpha_{i+1}), \dots, \theta(\alpha_{k+1}), \theta(\beta) \in N(A^{(m-1)}),$$

$\gamma_1, \dots, \gamma_{i-1}, \gamma_{i+1}, \dots, \gamma_{k+1}$  – обратные последовательности соответственно для последовательностей  $\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_{k+1}$ . Ясно, что  $W$  – решение указанного уравнения. Осталось доказать, что  $W \in N(A^{(m-1)})$ .

Введя обозначение  $\tau = \gamma_{i-1} \dots \gamma_1 \beta \gamma_{k+1} \dots \gamma_{i+1}$ , и используя вначале следствие 2 для последовательностей  $\gamma_1, \dots, \gamma_{k+1}$ , после этого –  $m$ -нейтральность последовательности  $\beta$ , а затем лемму 2 для тех же последовательностей  $\gamma_1, \dots, \gamma_{k+1}$ , получим для любого  $x \in A$

$$\begin{aligned} & [\underbrace{\tau \dots \tau}_{j-1} x \underbrace{\tau \dots \tau}_{k-j+1}] = \\ & = [\underbrace{\gamma_{i-1} \dots \gamma_1 \beta \gamma_{k+1} \dots \gamma_{i+1}}_{j-1} \underbrace{\gamma_{i-1} \dots \gamma_1 \beta \gamma_{k+1} \dots \gamma_{i+1}}_{k-j+1} x \underbrace{\gamma_{i-1} \dots \gamma_1 \beta \gamma_{k+1} \dots \gamma_{i+1}}_{k-j+1}] = \\ & = [\underbrace{\gamma_{k+1} \dots \gamma_{k+1}}_{j-1} \dots \underbrace{[\gamma_2 \dots \gamma_2 [\gamma_1 \dots \gamma_1 [\beta \dots \beta x \beta \dots \beta] \gamma_1 \dots \gamma_1] \gamma_2 \dots \gamma_2]}_{j-1} \dots \underbrace{\gamma_{k+1} \dots \gamma_{k+1}}_{k-j+1}] = \\ & = [\underbrace{\gamma_{k+1} \dots \gamma_{k+1}}_{j-1} \dots \underbrace{[\gamma_2 \dots \gamma_2 [\gamma_1 \dots \gamma_1 x \gamma_1 \dots \gamma_1] \gamma_2 \dots \gamma_2]}_{j-1} \dots \underbrace{\gamma_{k+1} \dots \gamma_{k+1}}_{k-j+1}] = \\ & = [\underbrace{\gamma_{k+1} \dots \gamma_{k+1}}_{j-1} \dots \underbrace{[\gamma_2 \dots \gamma_2 x \gamma_2 \dots \gamma_2]}_{j-1} \dots \underbrace{\gamma_{k+1} \dots \gamma_{k+1}}_{k-j+1}] = \dots \\ & \dots = [\underbrace{\gamma_{k+1} \dots \gamma_{k+1}}_{j-1} x \underbrace{\gamma_{k+1} \dots \gamma_{k+1}}_{k-j+1}] = x, \end{aligned}$$

т. е.

$$[\underbrace{\tau \dots \tau}_{j-1} x \underbrace{\tau \dots \tau}_{k-j+1}] = x.$$

Следовательно,  $\tau$  –  $m$ -нейтральная последовательность,  $W = \theta(\tau) \in \mathbf{N}(A^{(m-1)})$ , а универсальная алгебра  $\langle \mathbf{N}(A^{(m-1)}), [ ]_{k+1} \rangle$  является  $(k+1)$ -арной подгруппой  $(k+1)$ -арной группы  $\langle A^{(m-1)}, [ ]_{k+1} \rangle$ .

Для любых

$$\theta(\alpha) \in \mathbf{N}(A^{(m-1)}), \theta(\beta_1), \dots, \theta(\beta_k) \in A^{(m-1)},$$

согласно следствию 1, имеем

$$\begin{aligned} [\theta(\alpha)\theta(\beta_1) \dots \theta(\beta_k)]_{k+1} &= \theta(\alpha\beta_1 \dots \beta_k) = \theta(\beta_1\alpha\beta_2 \dots \beta_k) = \\ &= \theta(\beta_1)\theta(\alpha)\theta(\beta_2) \dots \theta(\beta_k)]_{k+1} = \dots = [\theta(\beta_1) \dots \theta(\beta_k)\theta(\alpha)]_{k+1}. \end{aligned}$$

Следовательно,  $\theta(\alpha)$  принадлежит центру  $(k+1)$ -арной группы  $\langle A^{(m-1)}, [ ]_{k+1} \rangle$ , т. е.

$$\mathbf{N}(A^{(m-1)}) \subseteq \mathbf{Z}(A^{(m-1)}).$$

2) Если  $U \in \mathbf{N}(A^{(m-1)})$ , то по лемме 4  $U^\varphi \in \mathbf{N}(A^{(m-1)})$  для любого автоморфизма  $\varphi$   $(k+1)$ -арной группы  $\langle A^{(m-1)}, [ ]_{k+1} \rangle$ . Следовательно,  $\mathbf{N}^\varphi(A^{(m-1)}) \subseteq \mathbf{N}(A^{(m-1)})$ . В частности,

$$\mathbf{N}^{\varphi^{-1}}(A^{(m-1)}) \subseteq \mathbf{N}(A^{(m-1)}),$$

откуда

$$(\mathbf{N}^{\varphi^{-1}}(A^{(m-1)}))^\varphi \subseteq \mathbf{N}^\varphi(A^{(m-1)}), \mathbf{N}(A^{(m-1)}) \subseteq \mathbf{N}^\varphi(A^{(m-1)}).$$

Таким образом,  $\mathbf{N}^\varphi(A^{(m-1)}) = \mathbf{N}(A^{(m-1)})$ , т. е.  $\langle \mathbf{N}(A^{(m-1)}), [ ]_{k+1} \rangle$  – характеристична в  $(k+1)$ -арной группе  $\langle A^{(m-1)}, [ ]_{k+1} \rangle$ .

Пусть  $x$  – произвольный элемент из  $A$ ,  $a_1, \dots, a_{m-1}$  – фиксированные элементы из центра  $n$ -арной группы  $\langle A, [ ] \rangle$ . Если класс  $U = \theta(\alpha)$  является единицей в  $\langle A^{(m-1)}, [ ]_{k+1} \rangle$ , то

$$\underbrace{[U \dots U \theta(xa_1 \dots a_{m-1})]_{j-1}}_{j-1} \underbrace{[U \dots U]_{k-j+1}}_{k-j+1} = \theta(xa_1 \dots a_{m-1})$$

для любого  $j = 1, \dots, k+1$ . Тогда, учитывая принадлежность элементов  $a_1, \dots, a_{m-1}$  центру  $n$ -арной группы  $\langle A, [ ] \rangle$ , последовательно получаем

$$\begin{aligned} \underbrace{[\theta(\alpha) \dots \theta(\alpha) \theta(xa_1 \dots a_{m-1}) \theta(\alpha) \dots \theta(\alpha)]_{k+1}}_{j-1} &= \theta(xa_1 \dots a_{m-1}), \\ \underbrace{\theta(\alpha \dots \alpha x a_1 \dots a_{m-1} \alpha \dots \alpha)}_{j-1} &= \theta(xa_1 \dots a_{m-1}), \\ \underbrace{\theta(\alpha \dots \alpha x \alpha \dots \alpha a_1 \dots a_{m-1})}_{j-1} &= \theta(xa_1 \dots a_{m-1}), \\ \underbrace{\theta(\alpha \dots \alpha x \alpha \dots \alpha)}_{j-1} \theta(a_1 \dots a_{m-1}) &= \theta(x) \theta(a_1 \dots a_{m-1}), \\ \underbrace{\theta(\alpha \dots \alpha x \alpha \dots \alpha)}_{j-1} &= \theta(x), \\ \theta(\underbrace{[\alpha \dots \alpha x \alpha \dots \alpha]_{j-1}}_{j-1}) &= \theta(x), \\ \underbrace{[\alpha \dots \alpha x \alpha \dots \alpha]_{j-1}}_{j-1} &= x. \end{aligned}$$

Следовательно,  $\alpha$  –  $m$ -нейтральная последовательность  $n$ -арной группы  $\langle A, [ ] \rangle$  и доказано включение  $\mathbf{E}(A^{(m-1)}) \subseteq \mathbf{N}(A^{(m-1)})$ , откуда и из предложения 2 следует равенство  $\mathbf{N}(A^{(m-1)}) = \mathbf{E}(A^{(m-1)})$ . Теорема доказана.

Согласно утверждению 2) теоремы 1, если центр  $n$ -арной группы  $\langle A, [ ] \rangle$  непустой, то  $(k+1)$ -арные подгруппы  $\langle \mathbf{N}(A^{(m-1)}), [ ]_{k+1} \rangle$  и  $\langle \mathbf{E}(A^{(m-1)}), [ ]_{k+1} \rangle$  совпадают. Пример 3 показывает, что указанное совпадение возможно и в полиадических группах с пустым центром, так как центр тернарной группы  $\langle \mathbf{B}_3^{(2)}, [ ]_3 \rangle$  пустой.

При  $m = n$  из теоремы 1 вытекает тривиальное утверждение о единичной подгруппе группы  $A_0 = A^{(n-1)}$ .

Полагая в теореме 1  $m = 2$ , получим

С л е д с т в и е 3. Пусть  $\langle A, [ ] \rangle - n$ -арная группа,  $\mathbf{N}(A') \neq \emptyset$ . Тогда:

1)  $\langle \mathbf{N}(A'), [ ]_n \rangle - n$ -арная подгруппа  $n$ -арной группы  $\langle A', [ ]_n \rangle$ , лежащая в ее центре;

2) если центр  $n$ -арной группы  $\langle A, [ ] \rangle$  непустой, то  $\langle \mathbf{N}(A'), [ ]_n \rangle -$  характеристична в  $\langle A', [ ]_n \rangle$  и совпадает с  $\langle \mathbf{E}(A'), [ ]_n \rangle$ .

Так как наличие единицы в  $n$ -арной группе влечет непустоту ее центра, а отображение  $\psi: \theta(a) \rightarrow a$  является изоморфизмом  $n$ -арной группы  $\langle A', [ ]_n \rangle$  на  $n$ -арную группу  $\langle A, [ ] \rangle$ , при котором  $(\mathbf{N}(A'))^\psi = \mathbf{E}(A)$ , то из следствия 3 вытекает следующая теорема из [1, 2], которая отмечалась во введении.

Т е о р е м а 2 [1, 2]. Если  $\mathbf{E}(A) \neq \emptyset$ , то  $\langle \mathbf{E}(A), [ ] \rangle -$  характеристическая  $n$ -арная подгруппа  $n$ -арной группы  $\langle A, [ ] \rangle$ , лежащая в ее центре.

Для полноты изложения приведем изоморфную копию теоремы 1, в формулировке которой присутствует  $(k + 1)$ -арная группа, изоморфная  $(k + 1)$ -арной группе  $\langle A^{(m-1)}, [ ]_{k+1} \rangle$ . Для этого зафиксируем в  $n$ -арной группе  $\langle A, [ ] \rangle$ , где  $n = k(m - 1) + 1$ , элементы  $c_1, \dots, c_{m-2}$  и определим на  $A$   $(k + 1)$ -арную операцию  $[ ]_{k+1, c_1 \dots c_{m-2}}$  следующим образом:

$$[a_1 a_2 \dots a_{k+1}]_{k+1, c_1 \dots c_{m-2}} = [a_1 c_1 \dots c_{m-2} a_2 c_1 \dots c_{m-2} \dots a_k c_1 \dots c_{m-2} a_{k+1}].$$

Проведя несложные вычисления (см., напр., [3]), можно убедиться в том, что  $\langle A, [ ]_{k+1, c_1 \dots c_{m-2}} \rangle -$   $(k + 1)$ -арная группа.

Л е м м а 5 [8]. Пусть  $n = k(m - 1) + 1$ ,  $\langle A, [ ] \rangle - n$ -арная группа,  $c_1, \dots, c_{m-2} \in A$ . Тогда отображение  $\tau: A^{(m-1)} \rightarrow A$  по правилу

$$\tau: \theta(ac_1 \dots c_{m-2}) \rightarrow a$$

является изоморфизмом  $(k + 1)$ -арной группы  $\langle A^{(m-1)}, [ ]_{k+1} \rangle$  на  $(k + 1)$ -арную группу  $\langle A, [ ]_{k+1, c_1 \dots c_{m-2}} \rangle$ .

Для фиксированных элементов  $c_1, \dots, c_{m-2}$   $n$ -арной группы  $\langle A, [ ] \rangle$  выделим в  $A$  подмножество

$$\mathbf{N}(A, c_1 \dots c_{m-2}) = \{a \in A \mid ac_1 \dots c_{m-2} \in \mathbf{N}(A, m)\}.$$

Ясно, что

$$\mathbf{N}(A, c_1 \dots c_{m-2}) = \{a \in A \mid \theta(ac_1 \dots c_{m-2}) \in \mathbf{N}(A^{(m-1)})\},$$

а также

$$\mathbf{N}(A^{(m-1)}) = \{\theta(ac_1 \dots c_{m-2}) \mid ac_1 \dots c_{m-2} \in \mathbf{N}(A, m)\}.$$

Поэтому множество  $\mathbf{N}(A, c_1 \dots c_{m-2})$  является образом множества  $\mathbf{N}(A^{(m-1)})$  при изоморфизме  $\tau$  из леммы 5:

$$\mathbf{N}(A, c_1 \dots c_{m-2}) = \mathbf{N}^\tau(A^{(m-1)}).$$

Обозначим через  $\mathbf{E}(A, c_1 \dots c_{m-2})$  множество всех единиц в  $\langle A^{(m-1)}, [ ]_{k+1} \rangle$ .

Так как при изоморфизме  $n$ -арных групп образом единицы является единица, то образом множества  $\mathbf{E}(A^{(m-1)})$  всех единиц  $(k + 1)$ -арной группы  $\langle A^{(m-1)}, [ ]_{k+1} \rangle$  при изоморфизме  $\tau$  является множество  $\mathbf{E}(A, c_1 \dots c_{m-2})$ :

$$\mathbf{E}(A, c_1 \dots c_{m-2}) = \mathbf{E}^\tau(A^{(m-1)}).$$

Лемма 5 позволяет сформулировать следующую изоморфную копию теоремы 1.

Т е о р е м а 3. Пусть  $\langle A, [ ] \rangle - n$ -арная группа,  $\mathbf{N}(A, c_1 \dots c_{m-2}) \neq \emptyset$ . Тогда:

1)  $\langle \mathbf{N}(A, c_1 \dots c_{m-2}), [ ]_{k+1, c_1 \dots c_{m-2}} \rangle - (k + 1)$ -арная подгруппа  $(k + 1)$ -арной группы  $\langle A, [ ]_{k+1, c_1 \dots c_{m-2}} \rangle$ , лежащая в ее центре;

2) если центр  $n$ -арной группы  $\langle A, [ ] \rangle$  непустой, то  $\langle \mathbf{N}(A, c_1 \dots c_{m-2}), [ ]_{k+1, c_1 \dots c_{m-2}} \rangle$  – характеристична в  $\langle A, [ ]_{k+1, c_1 \dots c_{m-2}} \rangle$  и совпадает с  $\langle \mathbf{E}(A, c_1 \dots c_{m-2}), [ ]_{k+1, c_1 \dots c_{m-2}} \rangle$ .

При  $m = n$  из теоремы 3 вытекает тривиальное утверждение о единичной подгруппе группы  $\langle A, [ ]_{2, c_1 \dots c_{n-2}} \rangle$  с бинарной операцией

$$[a_1 a_2]_{2, c_1 \dots c_{n-2}} = [a_1 c_1 \dots c_{n-2} a_2].$$

Для обозначения операции  $[ ]_{2, c_1 \dots c_{n-2}}$  используется также любой из символов  $\odot$  или  $\circ_c$ , где элемент  $c$  определяется нейтральностью последовательности  $cc_1 \dots c_{n-2}$ . В этом случае полагают

$$a_1 \odot a_2 = a_1 \circ_c a_2 = [a_1 c_1 \dots c_{n-2} a_2].$$

Теорема 2, являющаяся следствием теоремы 1, вытекает также и из теоремы 3, если в последней последовательность  $c_1 \dots c_{m-2}$  – пустая ( $m = 2$ ).

### Список использованной литературы

1. Гальмак, А. М.  $n$ -Арная подгруппа единиц / А. М. Гальмак. – Гомель: ГГУ, 1998. – 23 с. – (Препринт / Гомел. гос. ун-т; № 77).
2. Гальмак, А. М.  $n$ -Арная подгруппа единиц / А. М. Гальмак // Вес. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2003. – № 2. – С. 25–30.
3. Гальмак, А. М.  $n$ -Арные группы: монография / А. М. Гальмак. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2003. – Ч. 1.
4. Гальмак, А. М.  $n$ -Арные группы: монография / А. М. Гальмак. – Минск: Изд. центр БГУ, 2007. – Ч. 2.
5. Русаков, С. А. Алгебраические  $n$ -арные системы: монография / С. А. Русаков. – Минск: Навука і тэхніка, 1992.
6. Dörnte, W. Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegriff / W. Dörnte // Math. Z. – 1928. – Bd. 29. – S. 1–19.
7. Post, E. L. Polyadic groups / E. L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, N 2. – P. 208–350.
8. Гальмак, А. М. К теореме Поста о смежных классах / А. М. Гальмак, Н. А. Щучкин // Чебышев. сб. – 2014. – Т. 15, вып. 2. – С. 6–20.

Поступила в редакцию 19.11.2015

**ФІЗІКА**

УДК 530.12

*Ю. А. КУРОЧКИН<sup>1</sup>, Д. В. ШЕЛКОВЫЙ<sup>1</sup>, И. П. БОЯРИНА<sup>2</sup>*

**О ПЕРЕМЕННЫХ ЦЕНТРА МАСС И ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ  
В ТРЕХМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ С РАДИУСОМ КРИВИЗНЫ,  
ЗАВИСЯЩИМ ОТ ВРЕМЕНИ**

<sup>1</sup>*Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь  
e-mail: yukuroch@dragon.bas-net.by, Shoukavy@dragon.bas-net.by*

<sup>2</sup>*Белорусский государственный аграрный технический университет, Минск, Беларусь,  
e-mail: ipboyarina@mail.ru*

В работе с использованием бикватернионов определены выражения для координат центра масс и относительного движения двух материальных частиц в трехмерном пространстве Лобачевского и на трехмерной сфере. Построено нерелятивистское действие для двух материальных точек в этих пространствах. Показано, что подынтегральное выражение данного действия только слагаемым, представляющим собой квадрат производной радиуса кривизны, по времени отличается от действия для случая пространств с радиусом кривизны, не зависящим от времени. Таким образом, задача разделения переменных центра масс системы двух частиц и их относительного движения сводится к тому же результату, что и в пространствах с постоянным радиусом, т. е. переменные не разделяются.

*Ключевые слова:* координаты центра масс, координаты относительного движения, бикватернионы, трехмерная сфера, трехмерное пространство Лобачевского, действие, разделение переменных.

*Yu. A. KUROCHKIN<sup>1</sup>, Dz. V. SHOUKOVY<sup>1</sup>, I. P. BOYURINA<sup>2</sup>*

**MASS CENTER AND RELATIVE MOTION VARIABLES IN THREE- DIMENSIONAL SPACES  
WITH A TIME-DEPENDENT CURVATURE RADIUS**

<sup>1</sup>*B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus,  
e-mail: yukuroch@dragon.bas-net.by, Shoukavy@dragon.bas-net.by*

<sup>2</sup>*Belarusian State Agrarian Technical University, Minsk, Belarus,  
e-mail: ipboyarina@mail.ru*

Expressions for the variables of the mass center and the relative motion of two material particles in the three-dimensional Lobachevsky space and in the three-dimensional sphere with a time-dependent radius curvature are defined in terms of biquaternions. By using the action of the two particles in the above spaces, we have found that the problem of separation of the mass center and relative motion coordinates of this system reduces to the problem in the spaces of a completely constant curvature.

*Keywords:* mass center coordinates, relative motion coordinates; biquaternions, three-dimensional sphere, Lobachevsky space; action, separation of variables.

**Введение.** Проблема взаимодействия двух частиц в пространствах постоянной кривизны достаточно сложная. Это, в частности, связано с тем, что разделение переменных относительного движения и центра масс, вообще говоря, невозможно ни в классических уравнениях, ни в уравнении Шредингера. Причиной неразделимости переменных в задачах механики нескольких материальных точек в пространствах постоянной кривизны является, в общем случае, невыполнение в них принципа относительности Галилея. Вызывает трудности уже определение самого центра масс в пространствах постоянной кривизны (см. [1–3]).

В работе [4] с использованием методов, предложенных в [5], определены ковариантные выражения для координат центра масс двух материальных частиц и относительные координаты на трехмерной сфере и в трехмерном пространстве Лобачевского. Рассмотрены также некоторые частные случаи, в которых разделение переменных центра масс и относительного движения в упомянутых задачах возможно [6]. В развитие данных результатов (здесь – в терминах бикватернионов) нами введены выражения координат центра масс и относительного движения в трехмерных пространствах Лобачевского и Римана с радиусом кривизны, зависящим от времени, в отличие от случаев, рассмотренных в предыдущих работах. Как известно, такие пространства являются моделями А. А. Фридмана нашей Вселенной. Построено нерелятивистское действие для двух материальных точек в этих пространствах. Показано, что подинтегральное выражение данного действия только слагаемым, представляющим собой квадрат производной радиуса кривизны по времени, отличается от действия для случая пространств с радиусом кривизны, не зависящим от времени. Следовательно, задача разделения переменных центра масс системы двух частиц и их относительного движения сводится к тому же результату, что и в пространствах с постоянным радиусом, т. е. переменные не разделяются.

Отметим, что использование векторов пространств постоянной кривизны, определенных в [7, 8], с законом сложения, совпадающим с законом композиции Ф. И. Федорова групп движений в соответствующих трехмерных пространствах постоянной кривизны (см. [9], связь данных векторов с кватернионами (бикватернионами)), подсказывает возможность введения упомянутых переменных по аналогии с пространством 4-скоростей (4-импульсов) в релятивистской кинематике [5]. Такой подход обнаруживает очевидные методические достоинства и облегчает поиск некоторых частных случаев, в которых разделение переменных центра масс и относительного движения все-таки возможно, что важно в практическом смысле.

**1. Координаты частиц на трехмерной сфере и в трехмерном пространстве Лобачевского.** Реализуем трехмерное риманово и Лобачевского пространства как гиперповерхности, вложенные в четырехмерные евклидово и псевдоевклидово пространства соответственно, которые будем описывать с помощью бикватернионов частного вида

$$X = iX_0 + \underline{X}, \quad (1)$$

определенных над двойными числами  $i^2 = 1$  в случае евклидова и комплексными числами  $i^2 = -1$  в случае псевдоевклидова пространства, для которых согласно стандартным правилам умножения имеет место

$$Y = (iX'_0 + \underline{X}')(iX_0 + \underline{X}) = \pm X'_0 X_0 - (\underline{X}' \underline{X}) + iX'_0 \underline{X} + iX_0 \underline{X}' + [\underline{X}' \underline{X}]. \quad (2)$$

Здесь черточка снизу обозначает трехмерный вектор, в правой части (2) круглые скобки – скалярное произведение трехмерных векторов, а квадратные – их векторное произведение.

Отметим, что использование бикватернионов вида (1), определенных над двойными числами, а не кватернионов, позволит легко перенести результаты, полученные для трехмерного пространства Римана постоянной положительной кривизны, на пространство Лобачевского. При этом уравнения трехмерной сферы  $S_3$ , на которой реализуется риманово пространство постоянной положительной кривизны, и двуполостного гиперboloида, на верхнее поле которого реализуется трехмерное пространство Лобачевского с радиусом кривизны, зависящим от времени  $R(t)$  с помощью бикватернионов (1), запишется как

$$X\bar{X} = R(t)\hat{X}R(t)\bar{\hat{X}} = \pm R(t)^2, \quad \hat{X}\bar{\hat{X}} = \pm 1, \quad (3)$$

где знак «плюс» относится к евклидову пространству и трехмерной сфере, знак минус – к гиперboloиду псевдоевклидова пространства,  $\bar{X} = iX_0 - \underline{X}$  – бикватернион, кватернионно сопряженный бикватерниону  $X$ .

Рассмотрим движение двух невзаимодействующих частиц на трехмерной сфере. Их координаты в объемлющем четырехмерном пространстве будут представлять собой составляющие бикватернионов:

$$X^{(1)} = iX_0^{(1)} + \underline{X}^{(1)}, \quad X^{(2)} = iX_0^{(2)} + \underline{X}^{(2)}. \quad (4)$$

В силу условия (3)

$$X^{(1)}\bar{X}^{(1)} = \pm R(t)]^2, \quad X^{(2)}\bar{X}^{(2)} = \pm R(t)]^2, \quad (5)$$

данные координаты частиц не являются независимыми. В качестве независимых координат, как будет показано ниже, удобно использовать бельтрамиевы координаты, являющиеся составляющими векторов на сфере [5, 7, 8]

$$\underline{q}^{(1)} = \pm i \frac{X^{(1)}}{X_0^{(1)}}, \quad \underline{q}^{(2)} = \pm i \frac{X^{(2)}}{X_0^{(2)}} \quad (6)$$

с законом сложения (вычитания)

$$\underline{q} = \langle \underline{q} \pm \underline{q}' \rangle = \frac{\underline{q} \pm \underline{q}' \pm [\underline{q} \underline{q}']}{1 \mp (\underline{q} \underline{q}')}, \quad (7)$$

совпадающим с законом композиции Ф. И. Федорова [9].

Отметим, что определение векторов (6) автоматически ведет к отождествлению противоположных точек на сфере, и, следовательно, введенные векторы принадлежат эллиптическому пространству и их использование для описания движения на сфере требует учета данного свойства. Использование непосредственно самих бикватернионов (4) позволяет избежать указанных трудностей. Тем не менее параллельно с кватернионными переменными будем применять векторы типа (6), так как задача для эллиптического пространства имеет самостоятельное значение.

**2. Переменные центра масс и относительные координаты для системы двух частиц.** Для двух частиц масс  $m_1$  и  $m_2$  соответственно координаты их центра масс в четырехмерной (бикватернионной) форме определим как

$$X_c = \frac{R(t)(m_1\hat{X}^{(1)} + m_2\hat{X}^{(2)})}{\sqrt{\pm(m_1\hat{X}^{(1)} + m_2\hat{X}^{(2)})(m_1\bar{\hat{X}}^{(1)} + m_2\bar{\hat{X}}^{(2)})}} = R(t)\hat{X}_c, \quad \hat{X}_c\bar{\hat{X}}_c = \pm 1, \quad (8)$$

при этом трехмерными координатами центра масс будут составляющие вектора

$$\underline{q}_c = \pm i \frac{X_c}{X_{0c}} = \pm i \frac{m_1 X^{(1)} + m_2 X^{(2)}}{m_1 X_0^{(1)} + m_2 X_0^{(2)}}. \quad (9)$$

В переменных (6) данное выражение имеет вид

$$\underline{q}_c = \frac{m_1 \underline{q}^{(1)} / \sqrt{1 + (\underline{q}^{(1)})^2} + m_2 \underline{q}^{(2)} / \sqrt{1 + (\underline{q}^{(2)})^2}}{m_1 / \sqrt{1 + (\underline{q}^{(1)})^2} + m_2 / \sqrt{1 + (\underline{q}^{(2)})^2}}. \quad (10)$$

Нетрудно видеть, что выражение (10) для координат центра масс по форме совпадает с аналогичным выражением для координат центра масс в трехмерном плоском пространстве, в котором выражения постоянных масс  $m_1, m_2$  заменяются на выражения масс с зависимостью их от координат  $m_1 / \sqrt{1 + (\underline{q}^{(1)})^2}, m_2 / \sqrt{1 + (\underline{q}^{(2)})^2}$ . В работе [10] вероятно впервые было показано, что модель, предложенная для объяснения проблемы заперения кварков, основанная на пространстве с конформно плоской геометрией, интерпретируемая в терминах геометрии трехмерного плоского пространства, эффективно приводит к зависимости массы от координаты. Квантовомеханическая модель на основе геометрии эллиптического пространства и трехмерной сферы  $S_3$  для описания возбуждений в квантово размерной точке, предложенная в [11] и обеспечивающая заперение квазичастиц, интерпретировалась в терминах геометрии трехмерного плоского евклидова пространства именно в переменных векторов, что также можно, как видно из (10), рассматривать как учет зависимости массы от координат.

Бикватернионным аналогом относительной переменной для двух данных частиц будет оператор

$$Y_{12} = \widehat{X}^{(2)} \overline{\widehat{X}}^{(1)}, \quad (11)$$

вытекающий из определения

$$\widehat{X}^{(2)} = Y_{12} \widehat{X}^{(1)}. \quad (12)$$

Независимые трехмерные координаты относительного движения определяются как составляющие вектора относительного движения

$$q_y = \frac{Y_{12} - \overline{Y}_{12}}{Y_{12} + \overline{Y}_{12}} = \left\langle \pm i \frac{X^{(2)}}{X_0^{(2)}}, \mp i \frac{X^{(1)}}{X_0^{(1)}} \right\rangle = \left\langle \underline{q}^{(2)}, -\underline{q}^{(1)} \right\rangle = \frac{\underline{q}^{(2)} - \underline{q}^{(1)} - \left[ \underline{q}^{(2)} \underline{q}^{(1)} \right]}{1 + \left( \underline{q}^{(2)} \underline{q}^{(1)} \right)}. \quad (13)$$

Введем также четырехмерные  $Y_1, Y_2$  и трехмерные  $q_y^{(1)}, q_y^{(2)}$  координаты точек относительно центра масс, определяемые аналогично (11) и (12), а именно

$$\widehat{X}^{(1)} = Y_1 \widehat{X}_c, \overline{\widehat{X}}^{(1)} = \overline{\widehat{X}}_c \overline{Y}_1, \quad (14)$$

при этом

$$Y_1 = \widehat{X}^{(1)} \overline{\widehat{X}}_c, \quad (15)$$

и соответственно

$$\widehat{X}^{(2)} = Y_2 \widehat{X}_c, \overline{\widehat{X}}^{(2)} = \overline{\widehat{X}}_c \overline{Y}_2, \quad (16)$$

$$Y_2 = \widehat{X}^{(2)} \overline{\widehat{X}}_c. \quad (17)$$

Очевидно также, что

$$Y_{12} = Y_2 \overline{Y}_1. \quad (18)$$

Тогда для первой частицы

$$\underline{q}^{(1)} = \pm i \frac{X^{(1)}}{X_0^{(1)}} = \left\langle \frac{\underline{q}_y}{1 + \frac{m_1}{m_2} \sqrt{1 + \underline{q}_y^2}}, \pm i \frac{X_c}{X_{0c}} \right\rangle = \left\langle \frac{\underline{q}_y}{1 + \frac{m_1}{m_2} \sqrt{1 + \underline{q}_y^2}}, \underline{q}_c \right\rangle = \left\langle \underline{q}^{(1)}, \underline{q}_c \right\rangle, \quad (19)$$

а для второй частицы имеем

$$\underline{q}^{(2)} = \pm i \frac{X^{(2)}}{X_0^{(2)}} = \left\langle \frac{\underline{q}_y}{1 + \frac{m_2}{m_1} \sqrt{1 + \underline{q}_y^2}}, \pm i \frac{X_c}{X_{0c}} \right\rangle = \left\langle \frac{\underline{q}_y}{1 + \frac{m_2}{m_1} \sqrt{1 + \underline{q}_y^2}}, \underline{q}_c \right\rangle = \left\langle \underline{q}^{(2)}, \underline{q}_c \right\rangle, \quad (20)$$

где  $\underline{q}^{(1)}$  и  $\underline{q}^{(2)}$  определяются соответственно через  $Y_1$  и  $Y_2$  аналогично тому, как согласно формулам (13) выражаются через  $Y_{12}$ . В справедливости формул (19) и (20) легко убедиться непосредственным расчетом. Следует обратить внимание, что  $\underline{q}^{(1)}$  и  $\underline{q}^{(2)}$  и  $Y_1, Y_2$  выражаются через относительные переменные  $q_y$  и  $Y_{12}$  соответственно.

Из формулы (18) вытекает

$$\underline{q}_y = \langle q_2, -q_1 \rangle = \left\langle \underline{q}_y^{(2)}, -\underline{q}_y^{(1)} \right\rangle. \quad (21)$$

Введенные переменные подчиняются условиям

$$Y_{12} \overline{Y}_{12} = 1, Y_1 \overline{Y}_1 = 1, Y_2 \overline{Y}_2 = 1. \quad (22)$$

**3. Классическая нерелятивистская задача. Разделение переменных в действии.** Действие для задачи двух материальных точек на сфере  $S_3$ , взаимодействующих с силами, зависящими только от относительной переменной, запишем в виде

$$W_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{1}{2} \left( m_1 \dot{X}^{(1)} \dot{\bar{X}}^{(1)} + m_2 \dot{X}^{(2)} \dot{\bar{X}}^{(2)} \right) - V(Y_{12}) \right] dt. \quad (23)$$

Здесь сразу учтено, что операция дифференцирования и сопряжения перестановочны местами. Точка над буквами обозначает дифференцирование по времени.

Особенностью подхода является то, что в нем используется выражение (23) для действия, записанное в терминах четырехмерных бикватернионных переменных с учетом дополнительных условий (5) и (22).

С учетом определений (3) и (8) получим

$$W_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{R^2(t)}{2} \left( m_1 \dot{X}^{(1)} \dot{\bar{X}}^{(1)} + m_2 \dot{X}^{(2)} \dot{\bar{X}}^{(2)} \right) \right] - V(R(t), Y_{12}) dt + (m_1 + m_2) \int_{t_1}^{t_2} \dot{R}^2(t) dt. \quad (24)$$

Здесь учтено, что  $\dot{X}\dot{\bar{X}} + \dot{\bar{X}}\dot{X} = 0$ .

В настоящей статье мы не выводим, как и в работах [4, 6, 12], уравнения для анализа проблемы, так как они нелинейны и их использование значительно усложняет проблему.

**Выводы.** Представление действия (23) в виде выражения (24) фактически показывает, что случай пространств с радиусом кривизны, зависящим только от времени (параметра), сводится к проблеме в пространствах с радиусом кривизны полностью постоянным, так как первое слагаемое с точностью до скалярного множителя совпадает с соответствующим выражением для действия в этих пространствах. Таким образом, задача разделения переменных центра масс системы двух частиц и их относительного движения приводит к тому же результату, что и в пространствах с постоянным радиусом, т. е. переменные не разделяются. Подробности можно найти в работе [12], где также рассмотрены некоторые приближения, допускающие разделение данных переменных.

Авторы благодарят участников семинара лаборатории теоретической физики Института физики НАН Беларуси за полезное обсуждение работы.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант № Ф14АРМ-029).

### Список использованной литературы

1. Щепетиллов, А. В. Квантово-механическая задача двух тел с центральным взаимодействием на односвязных поверхностях постоянной кривизны / А. В. Щепетиллов // Теорет. и мат. физика. – 1999. – Т. 118, № 2. – С. 248–263
2. Щепетиллов, А. В. Анализ и механика на двухточечно-однородных римановых пространствах: авт. пер. с англ. / А. В. Щепетиллов. – М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»: Ижев. ин-т компьютер. исслед., 2008.
3. Kurochkin, Yu. Two-body problem on a sphere / Yu. Kurochkin, V. Otchik // Proc. of the Intern. Workshop on Quantum Systems: New Trends and Methods, 9–16 June 1999, Minsk, Belarus. – Minsk, 1999. – P. 99–103.
4. Курочкин, Ю. А. Об одном предельном случае разделения переменных в квантовомеханической задаче двух точек на трехмерной сфере  $S_3$  / Ю. А. Курочкин, Д. В. Шёлковский // Ковариантные методы в теоретической физике: сб. тр. – Минск, 2005. – Вып. 6. – С. 91–94.
5. Березин, А. В. Кватернионы в релятивистской физике / А. В. Березин, Ю. А. Курочкин, Е. А. Толкачев. – М.: УРСС, 2003.
6. Курочкин, Ю. А. О частном случае разделения переменных центра масс и относительного движения в задаче двух тел на сфере / Ю. А. Курочкин, Д. В. Шёлковский, И. П. Боярина // Сб. науч. тр. IV конгр. физиков (24–26 апр. 2013 г., Минск). – Минск, 2013. – С. 68, 69.
7. Богуш, А. А. Вектор-параметры Федорова и аксиоматическое описание геометрии пространств постоянной кривизны  $S_3$  и  ${}^1S_3$  / А. А. Богуш, Ю. А. Курочкин // Вес. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 1995. – № 4. – С. 69–76.
8. Богуш, А. А. Кинематические модели трехмерных пространств постоянной кривизны / А. А. Богуш, Ю. А. Курочкин // Гравитация и электромагнетизм: сб. ст. / Бел. гос. ун-т. – Минск: Университетское, 1998. – С. 20–27.
9. Федоров, Ф. И. Группа Лоренца / Ф. И. Федоров. – М.: Едиториал УРСС, 2003.
10. Горбачевич, А. К. Уравнения движения частицы в комформно плоском пространстве и удержание кварков / А. К. Горбачевич, Л. М. Томильчик. – Минск, 1986. – 9 с. – (Препринт / Акад. наук БССР, Ин-т физики; № 415).
11. Gritzev, V. Model of excitations in quantum dots based on quantum mechanics in spaces of constant curvature / V. Gritzev, Yu. Kurochkin // Phys. Rev. B. – 2001. – Vol. 64, N 3. – P. 035308.
12. Kurochkin, Yu. On the separation of variables into relative and center of mass motion for two-bodysystem in three-dimensional spaces of constant curvature [ Electronic resource] / Yu. Kurochkin, Dz. Shoukavy, I. Boyarina. – Mode of access: [http://arXiv:1507.06610 v1 \[math-ph\]](http://arXiv:1507.06610 v1 [math-ph]) 22 Jul. 2015. – Date of access: 23.06.2015.

Поступила в редакцию 28.08.2015

УДК 539.12

*Е. М. ОВСИЮК<sup>1</sup>, А. Н. РЕДЬКО<sup>2</sup>, В. М. РЕДЬКОВ<sup>2</sup>***ЧАСТИЦА ДИРАКА – КЭЛЕРА В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО,  
НЕРЕЛЯТИВИСТСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ, БОЗОННАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ**<sup>1</sup>*Мозырский государственный педагогический университет им. И. П. Шамякина, Мозырь, Беларусь,  
e-mail: e.ovsiyuk@mail.ru*<sup>2</sup>*Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь,  
e-mail: v.redkov@dragon.bas-net.by*

В работе построены точные решения для уравнения Дирака – Кэлера в нерелятивистском приближении для случая простейшей неевклидовой геометрической модели – гиперболического пространства Лобачевского. Для случая минимального значения общего сохраняющегося углового момента,  $j = 0$ , радиальные уравнения приведены к решаемым в элементарных функциях уравнениям. В случае ненулевых значений углового момента,  $j = 1, 2, 3, \dots$ , радиальные уравнения сводятся к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям четвертого порядка. С применением метода факторизации построено общее решение этих уравнений, включающее четыре фундаментальных решения; последние представлены в виде комбинаций из гипергеометрических функций. Найденные решения уравнения Дирака – Кэлера на фоне пространства Лобачевского не раскладываются в линейные функции, отвечающие решениям уравнений Паули в этом пространстве, что указывает на невозможность фермионной интерпретации поля Дирака – Кэлера.

*Ключевые слова:* частица Дирака – Кэлера, уравнение Паули, точные решения, метод факторизации, бозонная интерпретация.

*E. M. OVSIYUK<sup>1</sup>, A. N. RED'KO<sup>2</sup>, V. M. RED'KOV<sup>2</sup>***DIRAC – KAHLER PARTICLE IN THE LOBACHEVSKY SPACE,  
NON-RELATIVISTIC APPROXIMATION, BOSON INTERPRETATION**<sup>1</sup>*Mozyr State Pedagogical University named after I. P. Shamyakin, Mozyr, Belarus,  
e-mail: e.ovsiyuk@mail.ru*<sup>2</sup>*B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus,  
e-mail: v.redkov@dragon.bas-net.by*

The article is concerned with constructing the exact solutions for the Dirac – Kahler wave equation in the non-relativistic approximation for the simplest non-Euclidean geometrical model – hyperbolic Lobachevsky space. For the minimum value of the conserved angular momentum  $j = 0$ , the radial equations reduce to those solved in the elementary function. For greater values  $j = 1, 2, 3, \dots$ , the radial equations reduce to a couple of the four-order differential equations that are solved with the help of the factorization method. The general solution to each four-order order equation, involving four fundamental solutions, is constructed. The obtained solutions of the Dirac – Kahler wave equation cannot be solved in terms of the Pauli solutions on the background of Lobachevsky space, therefore any fermion interpretation for the Dirac – Kahler particle cannot be used.

*Keywords:* Dirac – Kahler particle, Pauli equation, exact solutions, factorization method, boson interpretation.

**Введение.** Частица Дирака – Кэлера является активно исследуемым в научной литературе физическим объектом. Она представляет собой сложный (составной) бозон; описывается 16-компонентным набором полей (скаляр, псевдоскаляр, истинный 4-вектор, псевдо 4-вектор, антисимметричный тензор второго ранга). Частными случаями частицы Дирака – Кэлера являются четыре более простые системы: два типа частиц со спином нуль с противоположными внутренними четностями, два типа частиц со спином единица с противоположными внутренними четностями. Литература по теории поля Дирака – Кэлера обширна (см. библиографию в работах [1–3]). Волновое уравнение для этого поля может быть представлено как формально несвязанные друг с другом четыре уравнения дираковского вида.

Однако упомянутая несвязанность четырех уравнений Дирака, вовлеченных в теорию Дирака – Кэлера, имеет место только в случае плоского пространства-времени Минковского, и это свойство не сохраняется в присутствии внешних гравитационных полей, описываемых с привлечением пространственно-временных моделей с неевклидовой геометрией. Этот аспект тесно связан с вопросом о физической интерпретации поля Дирака – Кэлера: является ли оно сложным бозоном или же эта система эквивалентна набору из четырех фермионов.

В пространстве Минковского частица Дирака – Кэлера описывается 16-компонентной волновой функцией  $U(x)$ , биспинором второго ранга, или эквивалентным набором тензорных полей:  $\{\Phi(x), \Phi_i(x), \tilde{\Phi}(x), \tilde{\Phi}_i(x), \Phi_{mn}(x)\}$ , где  $\Phi(x)$  – скаляр,  $\Phi_i(x)$  – вектор,  $\tilde{\Phi}(x)$  – псевдоскаляр,  $\tilde{\Phi}_i(x)$  – псевдовектор,  $\Phi_{mn}(x)$  – антисимметричный тензор. Связь между этими величинами задается соотношением [3]

$$U = \left( -i\Phi + \gamma^l \Phi_l + i\sigma^{mn} \Phi_{mn} + \gamma^5 \tilde{\Phi} + i\gamma^l \gamma^5 \tilde{\Phi}_l \right) E^{-1}, \quad (1)$$

где  $\gamma^5 = -i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$ ,  $\sigma^{ab} = \frac{1}{4}(\gamma^a \gamma^b - \gamma^b \gamma^a)$ ,  $E$  – биспинорная метрическая матрица [3].

В искривленном пространстве-времени общековариантное тетрадное уравнение Дирака – Кэлера в 4-спинорной форме имеет вид [3]

$$[i\gamma^\alpha(x) (\partial / \partial x^\alpha + B_\alpha(x)) - m] U(x) = 0, \quad (2)$$

где  $B_\alpha = \frac{1}{2} J^{ab} e_{(a)}^\beta \nabla_\alpha (e_{(b)\beta}) - 2$ -биспинорная связность,  $J^{ab} = \sigma^{ab} \otimes I + I \otimes \sigma^{ab}$  – генераторы и тензоры второго ранга относительно группы Лоренца. Это спинорное уравнение эквивалентно общековариантной системе тензорных уравнений [3]:

$$\begin{aligned} \nabla^\alpha \Psi_\alpha + m\Psi &= 0, & \nabla^\alpha \tilde{\Psi}_\alpha + m\tilde{\Psi} &= 0, \\ \nabla_\alpha \Psi + \nabla^\beta \Psi_{\alpha\beta} - m\Psi_\alpha &= 0, \\ \nabla_\alpha \tilde{\Psi} - \frac{1}{2} \varepsilon_\alpha^{\beta\rho\sigma}(x) \nabla_\beta \Psi_{\rho\sigma} - m\tilde{\Psi}_\alpha &= 0, \\ \nabla_\alpha \Psi_\beta - \nabla_\beta \Psi_\alpha + \varepsilon_{\alpha\beta}^{\rho\sigma}(x) \nabla_\rho \tilde{\Psi}_\sigma - m\Psi_{\alpha\beta} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Ковариантные тензорные полевые переменные связаны локальными тетрадными переменными соотношениями

$$\Psi_\alpha = e_\alpha^{(i)} \Psi_i, \quad \tilde{\Psi}_\alpha = e_\alpha^{(i)} \tilde{\Psi}_i, \quad \Psi_{\alpha\beta} = e_\alpha^{(m)} e_\beta^{(n)} \Psi_{mn}, \quad (4)$$

Левы-Чивита тензор определяется равенством

$$\varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma}(x) = \varepsilon^{abcd} e_{(a)}^\alpha e_{(b)}^\beta e_{(c)}^\rho e_{(d)}^\sigma.$$

Поля  $\Psi$ ,  $\Psi_\alpha$ ,  $\Psi_{\alpha\beta}$  являются тетрадными скалярами, поля  $\tilde{\Psi}$ ,  $\tilde{\Psi}_\alpha$  – тетрадными псевдоскалярами, тензор  $\varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma}(x)$  – общековариантным тензором и тетрадным псевдоскаляром.

Большая часть имеющихся работ по теории поля Дирака – Кэлера посвящена в основном исследованию свойств симметрии и других фундаментальных связей с обычными полями Дирака. При этом фактически нет каких-либо нетривиальных рассмотрений вопроса о решениях уравнения Дирака – Кэлера на фоне пространства с неевклидовой геометрией. Однако случаи неевклидовых пространственно-временных моделей являются важными, поскольку искривленный геометрический фон однозначно допускает только бозонную интерпретацию для поля Дирака – Кэлера. Кроме того, до настоящего времени не было работ по исследованию нерелятивистского приближения для частицы Дирака – Кэлера даже в случае плоского пространства Минковского. В настоящей работе мы строим точное общее решение для уравнения Дирака – Кэлера в нерелятивистском приближении для случая простейшей неевклидовой геометрической модели – гиперболического пространства Лобачевского.

Для случая минимального значения общего сохраняющегося углового момента,  $j = 0$ , радиальные уравнения приведены к тривиальным дифференциальным уравнениям второго порядка, которые решаются в элементарных функциях. В случае ненулевых значений углового момента,  $j = 1, 2, 3, \dots$ , радиальные уравнения сводятся к двум сложным обыкновенным дифференциальным уравнениям четвертого порядка. С применением метода факторизации найдено общее решение этих уравнений, включающее четыре фундаментальных решения, последние представлены в виде комбинаций из гипергеометрических функций. Полученные решения нерелятивистского уравнения Дирака – Кэлера не раскладываются в линейные функции, отвечающие решениям уравнений Паули.

**1. Разделение переменных, нерелятивистское приближение.** Рассмотрим вопрос о решениях уравнения Дирака – Кэлера в гиперболическом пространстве Лобачевского (спектры всех физических величин в рамках квантовой механики могут быть дискретными только из-за дополнительного присутствия запирающих потенциалов, влияние геометрии Лобачевского ведет, как правило, к конечности числа дискретных уровней энергии).

Выбираем метрику и тетраду в гиперболическом пространстве:

$$\begin{aligned} dS^2 &= dt^2 - dr^2 - \sinh^2 r (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \\ e_{(0)}^\alpha &= (1, 0, 0, 0), \quad e_{(1)}^\alpha = (0, 0, \sinh^{-1} r, 0), \\ e_{(2)}^\alpha &= (0, 0, 0, \sinh^{-1} r \sin^{-1} \theta), \quad e_{(3)}^\alpha = (0, 1, 0, 0); \end{aligned} \quad (5)$$

для уравнения Дирака – Кэлера получим представление

$$\left[ i\gamma^0 \partial_t + i \left( \gamma^3 \partial_r + \frac{\gamma^1 j^{31} + \gamma^2 j^{32}}{\tanh r} \right) + \frac{1}{\sinh r} \Sigma_{\theta, \phi} - m \right] U(x) = 0, \quad (6)$$

где зависящий от угловых переменных оператор имеет вид

$$\Sigma_{\theta, \phi} = i\gamma^1 \partial_\theta + \gamma^2 \frac{i\partial_\phi + iJ^{12} \cos \theta}{\sin \theta}, \quad j^{12} = (\sigma^{12} \otimes I + I \otimes \sigma^{12}). \quad (7)$$

Диагонализируя на решениях уравнения (6) операторы квадрата и третьей проекции полного момента (в базисе сферической тетрады) поля Дирака – Кэлера

$$j_1 = l_1 + \frac{ij^{12} \cos \phi}{\sin \theta}, \quad j_2 = l_2 + \frac{ij^{12} \sin \phi}{\sin \theta}, \quad j_3 = l_3, \quad (8)$$

для волновой функции получаем общую подстановку, зависящую от 16 радиальных функций  $f_{ab} = f_{ab}(r)$ :

$$U_{\epsilon JM}(t, r, \theta, \phi) = \frac{e^{-i\epsilon t}}{r} \begin{vmatrix} f_{11} D_{-1} & f_{12} D_0 & f_{13} D_{-1} & f_{14} D_0 \\ f_{21} D_0 & f_{22} D_{+1} & f_{23} D_0 & f_{24} D_{+1} \\ f_{31} D_{-1} & f_{32} D_0 & f_{33} D_{-1} & f_{34} D_0 \\ f_{41} D_0 & f_{42} D_{+1} & f_{43} D_0 & f_{44} D_{+1} \end{vmatrix}, \quad (9)$$

$D_\sigma = D_{-m, \sigma}^j(\phi, \theta, 0)$  – функции Вигнера [4]; квантовое число  $j$  принимает значения  $0, 1, 2, \dots$ . При вычислении  $\Sigma_{\theta, \phi} U_{\epsilon jm}$  необходимо воспользоваться рекуррентными соотношениями [4]:

$$\begin{aligned} \partial_\theta D_{-1} &= \frac{1}{2}(b D_{-2} - a D_0), & [(-m + \cos \theta) / \sin \theta] D_{-1} &= \frac{1}{2}(-b D_{-2} - a D_0), \\ \partial_\theta D_{+1} &= \frac{1}{2}(a D_0 - b D_{+2}), & [(-m - \cos \theta) / \sin \theta] D_{+1} &= \frac{1}{2}(-a D_0 - b D_{+2}), \\ \partial_\theta D_0 &= \frac{1}{2}(a D_{-1} - a D_{+1}), & [-m / \sin \theta] D_0 &= \frac{1}{2}(-a D_{-1} - a D_{+1}), \\ a &= \sqrt{j(j+1)}, & b &= \sqrt{(j-1)(j+1)}. \end{aligned} \quad (10)$$

Угловой оператор  $\Sigma_{\theta,\phi}$  действует на волновую функцию согласно

$$\Sigma_{\theta,\phi} U = i\sqrt{j(j+1)} \begin{pmatrix} -f_{41} D_{-1} & -f_{42} D_0 & -f_{43} D_{-1} & -f_{44} D_0 \\ f_{31} D_0 & f_{32} D_{+1} & f_{33} D_0 & f_{34} D_{+1} \\ f_{21} D_{-1} & f_{22} D_0 & f_{23} D_{-1} & f_{24} D_0 \\ -f_{11} D_0 & -f_{12} D_{+1} & -f_{13} D_0 & -f_{14} D_{+1} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

После проведения необходимых вычислений находим радиальные уравнения:

$$\begin{aligned} \varepsilon f_{24} - i \frac{d}{dr} f_{24} + \frac{i}{\tanh r} 0 - \frac{ia}{\sinh r} f_{14} - mf_{11} &= 0, \\ \varepsilon f_{23} - i \frac{d}{dr} f_{23} - \frac{i}{\tanh r} f_{14} - \frac{ia}{\sinh r} f_{13} - mf_{12} &= 0, \\ \varepsilon f_{14} + i \frac{d}{dr} f_{14} + \frac{i}{\tanh r} f_{23} + \frac{ia}{\sinh r} f_{24} - mf_{21} &= 0, \\ \varepsilon f_{13} + i \frac{d}{dr} f_{13} + \frac{i}{\tanh r} 0 + \frac{ia}{\sinh r} f_{23} - mf_{22} &= 0, \\ \varepsilon f_{22} - i \frac{d}{dr} f_{22} + \frac{i}{\tanh r} 0 - \frac{ia}{\sinh r} f_{12} - mf_{13} &= 0, \\ \varepsilon f_{21} - i \frac{d}{dr} f_{21} - \frac{i}{\tanh r} f_{12} - \frac{ia}{\sinh r} f_{11} - mf_{14} &= 0, \\ \varepsilon f_{12} + i \frac{d}{dr} f_{12} + \frac{i}{\tanh r} f_{21} + \frac{ia}{\sinh r} f_{22} - mf_{23} &= 0, \\ \varepsilon f_{11} + i \frac{d}{dr} f_{11} + \frac{i}{\tanh r} 0 + \frac{ia}{\sinh r} f_{21} - mf_{24} &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Будем использовать следующие обозначения:

$$\begin{aligned} F_+ &= f_{11} + f_{24}, & G_+ &= f_{22} + f_{13}, & K_+ &= f_{12} + f_{23}, & N_+ &= f_{21} + f_{14}, \\ iF_- &= f_{11} - f_{24}, & iG_- &= f_{22} - f_{13}, & iK_- &= f_{12} - f_{23}, & iN_- &= f_{21} - f_{14}. \end{aligned} \quad (13)$$

Комбинируя уравнения (12), получим:

$$\begin{aligned} \varepsilon F_+ - \frac{d}{dr} F_+ - \frac{a}{\sinh r} N_- - mF_+ &= 0, & -\varepsilon F_- - \frac{d}{dr} F_- - \frac{a}{\sinh r} N_+ - mF_- &= 0; \\ \varepsilon G_+ + \frac{d}{dr} G_+ + \frac{a}{\sinh r} K_- - mG_+ &= 0, & -\varepsilon G_- + \frac{d}{dr} G_- + \frac{a}{\sinh r} K_+ - mG_- &= 0; \\ \varepsilon K_+ - \frac{d}{dr} K_+ - \frac{1}{\tanh r} N_- - \frac{a}{\sinh r} G_- - mK_+ &= 0, \\ -\varepsilon K_- - \frac{d}{dr} K_- - \frac{1}{\tanh r} N_+ - \frac{a}{\sinh r} G_+ - mK_- &= 0; \\ \varepsilon N_+ + \frac{d}{dr} N_+ + \frac{1}{\tanh r} K_- + \frac{a}{\sinh r} F_- - mN_+ &= 0, \\ -\varepsilon N_- + \frac{d}{dr} N_- + \frac{1}{\tanh r} K_+ + \frac{a}{\sinh r} F_+ - mN_- &= 0. \end{aligned}$$

Осуществим в полученных уравнениях нерелятивистское приближение. Формальной заменой  $\varepsilon \Rightarrow m + E$  выделяем энергию покоя. При этом после приведения подобных членов находим

$$\begin{aligned} EF_+ - \frac{d}{dr} F_+ - \frac{a}{\sinh r} N_- &= 0, & -EF_- - \frac{d}{dr} F_- - \frac{a}{\sinh r} N_+ - 2mF_- &= 0; \\ EG_+ + \frac{d}{dr} G_+ + \frac{a}{\sinh r} K_- &= 0, & -EG_- + \frac{d}{dr} G_- + \frac{a}{\sinh r} K_+ - 2mG_- &= 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
EK_+ - \frac{d}{dr}K_- - \frac{1}{\tanh r}N_- - \frac{a}{\sinh r}G_- &= 0, \\
-EK_- - \frac{d}{dr}K_+ - \frac{1}{\tanh r}N_+ - \frac{a}{\sinh r}G_+ - 2mK_- &= 0; \\
EN_+ + \frac{d}{dr}N_- + \frac{1}{\tanh r}K_- + \frac{a}{\sinh r}F_- &= 0, \\
-EN_- + \frac{d}{dr}N_+ + \frac{1}{\tanh r}K_+ + \frac{a}{\sinh r}F_+ - 2mN_- &= 0.
\end{aligned}$$

Будем считать, что нерелятивистская энергия значительно меньше энергии покоя, тогда получаем:

$$\begin{aligned}
EF_+ &= \frac{d}{dr}F_- + \frac{a}{\sinh r}N_-, \quad F_- = -\frac{1}{2m}\left(\frac{d}{dr}F_+ + \frac{a}{\sinh r}N_+\right); \\
EG_+ &= -\frac{d}{dr}G_- - \frac{a}{\sinh r}K_-, \quad G_- = \frac{1}{2m}\left(\frac{d}{dr}G_+ + \frac{a}{\sinh r}K_+\right); \\
EK_+ &= \frac{d}{dr}K_- + \frac{1}{\tanh r}N_- + \frac{a}{\sinh r}G_-, \\
K_- &= -\frac{1}{2m}\left(\frac{d}{dr}K_+ + \frac{1}{\tanh r}N_+ + \frac{a}{\sinh r}G_+\right); \\
EN_+ &= -\frac{d}{dr}N_- - \frac{1}{\tanh r}K_- - \frac{a}{\sinh r}F_-, \\
N_- &= \frac{1}{2m}\left(\frac{d}{dr}N_+ + \frac{1}{\tanh r}K_+ + \frac{a}{\sinh r}F_+\right).
\end{aligned}$$

Исключая малые компоненты (со знаком «минус»), найдем уравнения для больших компонент (со знаком «плюс»):

$$\begin{aligned}
2mEF_+ &= -\frac{d}{dr}\left(\frac{d}{dr}F_+ + \frac{a}{\sinh r}N_+\right) + \frac{a}{\sinh r}\left(\frac{d}{dr}N_+ + \frac{1}{\tanh r}K_+ + \frac{a}{\sinh r}F_+\right), \\
2mEG_+ &= -\frac{d}{dr}\left(\frac{d}{dr}G_+ + \frac{a}{\sinh r}K_+\right) + \frac{a}{\sinh r}\left(\frac{d}{dr}K_+ + \frac{1}{\tanh r}N_+ + \frac{a}{\sinh r}G_+\right), \\
2mEK_+ &= -\frac{d}{dr}\left(\frac{d}{dr}K_+ + \frac{1}{\tanh r}N_+ + \frac{a}{\sinh r}G_+\right) + \\
&+ \frac{1}{\tanh r}\left(\frac{d}{dr}N_+ + \frac{1}{\tanh r}K_+ + \frac{a}{\sinh r}F_+\right) + \frac{a}{\sinh r}\left(\frac{d}{dr}G_+ + \frac{a}{\sinh r}K_+\right), \\
2mEN_+ &= -\frac{d}{dr}\left(\frac{d}{dr}N_+ + \frac{1}{\tanh r}K_+ + \frac{a}{\sinh r}F_+\right) + \\
&+ \frac{1}{\tanh r}\left(\frac{d}{dr}K_+ + \frac{1}{\tanh r}N_+ + \frac{a}{\sinh r}G_+\right) + \frac{a}{\sinh r}\left(\frac{d}{dr}F_+ + \frac{a}{\sinh r}N_+\right).
\end{aligned}$$

После упрощений система уравнений примет вид

$$\begin{aligned}
\hat{\Delta}F_+ &= +a\frac{\cosh r}{\sinh^2 r}N_+ + a\frac{\cosh r}{\sinh^2 r}K_+, \\
\hat{\Delta}G_+ &= +a\frac{\cosh r}{\sinh^2 r}K_+ + a\frac{\cosh r}{\sinh^2 r}N_+, \\
\hat{\Delta}K_+ &= +\frac{1}{\sinh^2 r}N_+ + \frac{\cosh^2 r}{\sinh^2 r}K_+ + a\frac{\cosh r}{\sinh^2 r}F_+ + a\frac{\cosh r}{\sinh^2 r}G_+, \\
\hat{\Delta}N_+ &= +\frac{1}{\sinh^2 r}K_+ + \frac{\cosh^2 r}{\sinh^2 r}N_+ + a\frac{\cosh r}{\sinh^2 r}F_+ + a\frac{\cosh r}{\sinh^2 r}G_+;
\end{aligned} \tag{14}$$

здесь символ  $\hat{\Delta}$  представляет оператор второго порядка

$$\hat{\Delta} = \left( \frac{d^2}{dr^2} + 2mE - \frac{a^2}{\sinh^2 r} \right).$$

Введем обозначения

$$F_+ + G_+ = f_+, \quad F_+ - G_+ = f_-, \quad K_+ + N_+ = g_+, \quad K_+ - N_+ = g_-,$$

тогда предыдущая система представляется короче:

$$\hat{\Delta}f_- = 0, \quad (\hat{\Delta} + 1)g_- = 0, \quad (15)$$

$$\hat{\Delta}f_+ = 2a \frac{\cosh r}{\sinh^2 r} g_+, \quad \hat{\Delta}g_+ = \frac{1 + \cosh^2 r}{\sinh^2 r} g_+ + 2a \frac{\cosh r}{\sinh^2 r} f_+. \quad (16)$$

Рассмотрим отдельно нерелятивистское приближение для состояний с минимальным значением квантового числа  $j = 0$ . Для этого достаточно учесть, что  $a = \sqrt{j(j+1)} = 0$  и что среди нерелятивистских компонент волновой функции Дирака – Кэлера часть составляющих обращается в нуль:  $F_+ = 0, G_+ = 0$ . Так что вместо системы (15)–(16) получаем только два уравнения:

$$\hat{\Delta}f_- = 0, \quad (\hat{\Delta} + 1)g_- = 0, \quad \hat{\Delta} = \frac{d^2}{dr^2} + 2mE. \quad (17)$$

Уравнения (17) решаются очевидным образом.

Заметим, что выведенные системы нерелятивистских уравнений являются корректными при включении дополнительного сферически симметричного поля – это осуществляется формальной заменой  $E \Rightarrow E + U(r)$ .

**2. Решение радиальных уравнений.** Уравнения (15) решаются в терминах гипергеометрических функций. Обратимся к анализу связанных между собой уравнений (16). С использованием более простых обозначений

$$f_+(r) = K(r), \quad g_+(r) = M(r), \quad 2mE = p^2$$

они могут быть переписаны как

$$\begin{aligned} \left( \frac{d^2}{dr^2} + p^2 - \frac{a^2}{\sinh^2 r} \right) K &= \frac{2a \cosh r}{\sinh^2 r} M, \\ \left( \frac{d^2}{dr^2} + p^2 - 1 - \frac{a^2 + 2}{\sinh^2 r} \right) M &= \frac{2a \cosh r}{\sinh^2 r} K. \end{aligned} \quad (18)$$

Уравнения (18) преобразуем к переменной  $x = \cosh^2 r$ :

$$\left[ (1-x)4x \frac{d^2}{dx^2} + 2(1-2x) \frac{d}{dx} - p^2 - \frac{a^2}{1-x} \right] K = \frac{2a\sqrt{x}}{1-x} M, \quad (19)$$

$$\left[ (1-x)4x \frac{d^2}{dx^2} + 2(1-2x) \frac{d}{dx} - p^2 + 1 - \frac{a^2 + 2}{1-x} \right] M = \frac{2a\sqrt{x}}{1-x} K. \quad (20)$$

Исключая  $M(x)$ , найдем уравнение 4-го порядка для функции  $K(x)$ :

$$\frac{d^4 K}{dx^4} + \left[ \frac{2}{x} - \frac{5}{1-x} \right] \frac{d^3 K}{dx^3} +$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ -\frac{1}{4x^2} - \frac{a^2 + p^2 + 13}{2x} + \frac{-2a^2 + 15}{4(1-x)^2} - \frac{a^2 + p^2 + 13}{2(1-x)} \right] \frac{d^2K}{dx^2} + \\
& + \left[ \frac{1}{4x^3} + \frac{1}{2x^2} + \frac{a^2 + 3p^2 + 11}{4x} - \frac{a^2}{4(x-1)^3} + \frac{a^2 + 3p^2 + 9}{4(1-x)^2} + \frac{a^2 + 3p^2 + 11}{4(1-x)} \right] \frac{dK}{dx} + \\
& + \left[ -\frac{a^2 + p^2}{8x^3} + \frac{(a^2 + p^2)(a^2 + p^2 - 4)}{16x^2} + \frac{2a^4 + 3a^2p^2 + p^4 - 4a^2 - 3p^2}{8x} + \frac{a^2(a^2 - 2)}{16(1-x)^4} + \right. \\
& \left. + \frac{a^2(a^2 + p^2 - 1)}{8(1-x)^3} + \frac{3a^4 + 4a^2p^2 + p^4 - 4a^2 - 2p^2}{16(1-x)^2} + \frac{2a^4 + 3a^2p^2 + p^4 - 4a^2 - 3p^2}{8(1-x)} \right] K = 0. \quad (21)
\end{aligned}$$

Аналогично, исключая  $K(x)$ , получим уравнение для  $M(x)$ :

$$\begin{aligned}
& \frac{d^4M}{dx^4} + \left[ \frac{2}{x} - \frac{5}{1-x} \right] \frac{d^3M}{dx^3} + \\
& + \left[ -\frac{1}{4x^2} - \frac{a^2 + p^2 + 13}{2x} + \frac{-2a^2 + 15}{4(1-x)^2} - \frac{a^2 + p^2 + 13}{2(1-x)} \right] \frac{d^2M}{dx^2} + \\
& + \left[ \frac{1}{4x^3} + \frac{3}{4x^2} + \frac{a^2 + 3p^2 + 12}{4x} + \frac{a^2}{4(1-x)^3} + \frac{a^2 + 3p^2 + 9}{4(1-x)^2} + \frac{a^2 + 3p^2 + 12}{4(1-x)} \right] \frac{dM}{dx} + \\
& + \left[ -\frac{a^2 + p^2 + 1}{8x^3} + \frac{(a^2 + p^2 + 1)(a^2 + p^2 - 5)}{16x^2} + \frac{2a^4 + 3a^2p^2 + p^4 - 4a^2 - 3p^2 - 4}{8x} + \right. \\
& + \frac{a^2(a^2 - 2)}{16(1-x)^4} + \frac{a^2(a^2 + p^2 - 1)}{8(1-x)^3} + \frac{3a^4 + 4a^2p^2 + p^4 - 4a^2 - 2p^2 - 3}{16(1-x)^2} + \\
& \left. + \frac{2a^4 + 3a^2p^2 + p^4 - 4a^2 - 3p^2 - 4}{8(1-x)} \right] M = 0. \quad (22)
\end{aligned}$$

Полученные уравнения 4-го порядка можно решить, применив метод факторизации. Оба дифференциальных оператора 4-го порядка можно единственным способом разложить в произведения двух операторов 2-го порядка.

Уравнение для  $K(x)$  факторизуется следующим образом:

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{3}{x} - \frac{7}{1-x} \right) \frac{d}{dx} + \frac{1}{4} \left( -\frac{p^2 + a^2 + 10}{x} - \frac{p^2 + a^2 + 10}{1-x} - \frac{a^2 - 6}{(1-x)^2} \right) \right] f(x) = 0, \quad (23)$$

где

$$f(x) = \left[ \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x} - \frac{3}{1-x} \right) \frac{d}{dx} + \frac{1}{4} \left( -\frac{p^2 + a^2}{x} - \frac{p^2 + a^2}{1-x} - \frac{a^2}{(1-x)^2} \right) \right] K. \quad (24)$$

Решим уравнение  $f(x) = 0$ . Выполним подстановку  $K(x) = x^A(1-x)^B F(x)$ :

$$\begin{aligned}
& x(1-x) \frac{d^2F}{dx^2} + \left[ \frac{1}{2} + 2A - (2A + 2B + 2)x \right] \frac{dF}{dx} + \\
& + \left[ -\frac{p^2}{4} - (A+B)(A+B+1) + \frac{A(2A-1)}{2x} - \frac{a^2 - 2B(1+2B)}{4(1-x)} \right] F = 0. \quad (25)
\end{aligned}$$

При  $A, B$ , выбранных согласно

$$A = 0, \quad \frac{1}{2}, \quad B = -\frac{1}{4} \pm \frac{1}{4} \sqrt{4a^2 + 1} = \frac{-1 \pm (2j+1)}{4} = +\frac{j}{2}, \quad -\frac{j+1}{2},$$

уравнение (25) упрощается

$$x(1-x)\frac{d^2F}{dx^2} + \left[ \frac{1}{2} + 2A - (2A + 2B + 2)x \right] \frac{dF}{dx} - \left[ \frac{p^2}{4} + (A+B)(A+B+1) \right] F = 0$$

и является уравнением для гипергеометрической функции с параметрами

$$a = A + B + \frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{p^2 - 1}, \quad b = A + B + \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{p^2 - 1}, \quad c = \frac{1}{2} + 2A.$$

Полученные две функции  $K(x) = x^A(1-x)^B F(x)$  являются решениями уравнения 4-го порядка (21) для  $K(x)$ . Выберем

$$A = 0, \quad B = +\frac{j}{2}, \quad a = \frac{j - i\sqrt{p^2 - 1}}{2}, \quad b = \frac{j + i\sqrt{p^2 - 1}}{2}, \quad c = \frac{1}{2}.$$

Введем стандартные обозначения для двух линейно независимых решений Куммера

$$U_1(x) = F(a, b, c; x), \quad U_5(x) = z^{1-c} F(a+1-c, b+1-c, 2-c; x), \\ a = \frac{j+1-i\sqrt{2M\varepsilon-1}}{2}, \quad b = \frac{j+1+i\sqrt{2M\varepsilon-1}}{2}, \quad c = \frac{1}{2},$$

тогда линейно независимые решения уравнения (25) представляются как

$$\Psi_1^I(x) = (1-x)^{(j-1)/2} U_1(x), \quad \Psi_1^{II}(x) = (1-x)^{(j-1)/2} U_5(x). \quad (26)$$

Чтобы выделить решения с известным поведением около точки  $r = 0$  ( $x = 1$ ), нужно использовать два линейно независимых решения, зависящих от аргумента  $(1-x)$ :

$$U_2(x) = F(a, b, a+b+1-c; 1-x), \\ U_6(x) = (1-x)^{c-a-b} F(c-a, c-b, c+1-a-b; 1-x). \quad (27)$$

В свою очередь уравнение для  $M(x)$  факторизуется следующим образом:

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{3}{x} - \frac{7}{1-x} \right) \frac{d}{dx} + \frac{1}{4} \left( \frac{-p^2 - a^2 - 9}{x} + \frac{-p^2 - a^2 - 9}{1-x} - \frac{a^2 - 6}{(1-x)^2} \right) \right] g(x) = 0, \quad (28)$$

где

$$g(x) = \left[ \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x} - \frac{3}{1-x} \right) \frac{d}{dx} + \frac{1}{4} \left( \frac{-p^2 - a^2 - 1}{x} + \frac{-p^2 - a^2 - 1}{1-x} - \frac{a^2}{(1-x)^2} \right) \right] M(x). \quad (29)$$

Уравнение  $g(x) = 0$  также решается в гипергеометрических функциях. С использованием подстановки  $M(x) = x^C(1-x)^D F(x)$  получаем:

$$x(1-x)\frac{d^2F}{dx^2} + \left[ \frac{1}{2} + 2C - (2C + 2D + 2)x \right] \frac{dF}{dx} + \\ + \left[ -\frac{p^2}{4} - \frac{1}{4}(1+2C+2D)^2 + \frac{C(2C-1)}{2x} - \frac{a^2 - 2D(1+2D)}{4(1-x)} \right] F = 0. \quad (30)$$

При  $C, D$ , выбранных согласно

$$C = 0, \frac{1}{2}, \quad D = -\frac{1}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{4a^2 + 1},$$

уравнение (30) упрощается

$$x(1-x)\frac{d^2F}{dx^2} + \left[ \frac{1}{2} + 2C - (2C + 2D + 2)x \right] \frac{dF}{dx} + \left[ -\frac{p^2}{4} - \frac{1}{4}(1 + 2C + 2D)^2 \right] F = 0$$

и является уравнением для гипергеометрической функции с параметрами

$$\alpha = C + D + \frac{1}{2} - \frac{ip}{2}, \quad \beta = C + D + \frac{1}{2} + \frac{ip}{2}, \quad \gamma = \frac{1}{2} + 2C;$$

выберем

$$C = 0, \quad D = +\frac{j}{2}, \quad \alpha = \frac{j+1-ip}{2}, \quad \beta = \frac{j+1+ip}{2}, \quad \gamma = \frac{1}{2}.$$

Введем стандартные обозначения для двух линейно независимых решений Куммера

$$U_1(x) = F(\alpha, \beta, \gamma; x), \quad U_5(x) = z^{1-\gamma} F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma; x).$$

Тогда два линейно независимых решения уравнения (30) представляются как

$$\Psi_2^{\text{III}}(x) = (1-x)^{j/2} U_1(x), \quad \Psi_2^{\text{IV}}(x) = (1-x)^{j/2} U_5(x); \quad (31)$$

выбирая любую другую пару независимых решений Куммера, также будем получать линейно независимые решения уравнения (30). Чтобы выделить решения с известным поведением около точки  $r=0$  ( $x=1$ ), нужно использовать решения гипергеометрического уравнения, зависящие от аргумента  $(1-x)$ :

$$U_2(x) = F(\alpha, \beta, \alpha + \beta + 1 - \gamma; 1-x), \\ U_6(x) = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma+1-\alpha-\beta; 1-x), \quad (32)$$

при этом получаем решения с регулярным и сингулярным поведением в точке  $x=1$  ( $r=0$ ).

Используя уравнения (19)–(20), можно найти явный вид сопутствующих функций в виде комбинаций гипергеометрических функций

$$\Psi_2^{\text{I}}(x), \quad \Psi_2^{\text{II}}(x), \quad \Psi_1^{\text{III}}(x), \quad \Psi_1^{\text{IV}}(x). \quad (33)$$

Далее можно убедиться, что вронскиан для четверки решений

$$\Psi_1^{\text{I}}(x), \quad \Psi_1^{\text{II}}(x), \quad \Psi_1^{\text{III}}(x), \quad \Psi_1^{\text{IV}}(x) \quad (34)$$

отличен от нуля. То же самое справедливо для решений

$$\Psi_2^{\text{I}}(x), \quad \Psi_2^{\text{II}}(x), \quad \Psi_2^{\text{III}}(x), \quad \Psi_2^{\text{IV}}(x). \quad (35)$$

Это означает, что найденные четверки функций являются линейно независимыми решениями уравнений 4-го порядка (21) и (22).

**Заключение.** Уравнение Дирака – Кэлера в нерелятивистском пределе решено точно на фоне пространства с геометрией Лобачевского. Для случая минимального значения общего сохраняющегося углового момента,  $j=0$ , радиальные уравнения приведены к тривиальным дифференциальным уравнениям второго порядка, которые решаются в элементарных функциях. В случае ненулевых значений углового момента,  $j=1, 2, 3, \dots$ , радиальные уравнения сводятся к двум сложным обыкновенным дифференциальным уравнениям четвертого порядка. С применением метода факторизации найдено общее решение этих уравнений, включающее четыре фундаментальных решения, последние представлены в виде комбинаций из гипергеометрических функций.

Найденные решения нерелятивистского уравнения Дирака – Кэлера на фоне пространства Лобачевского не раскладываются в линейные комбинации функций, отвечающих решениям уравнений Паули в пространстве Лобачевского, что указывает на невозможность фермионной интерпретации поля Дирака – Кэлера.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант № Ф14АРМ-021).

### Список использованной литературы

1. *Стражев, В. И.* Уравнение Дирака – Кэлера, классическое поле / В. И. Стражев, И. А. Сатиков, В. А. Ционенко. – Минск: БГУ, 2007.
2. *Плетюхов, В. А.* Группа Лоренца и теория релятивистских волновых уравнений / В. А. Плетюхов, В. М. Редьков, В. И. Стражев. – Минск: Беларус. навука, 2015.
3. *Редьков, В. М.* Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В. М. Редьков. – Минск: Беларус. навука, 2009.
4. *Варшалович, Д. А.* Квантовая теория углового момента / Д. А. Варшалович, А. Н. Москалев, В. К. Херсонский. – Л.: Наука и техника, 1975.
5. *Red'kov, V. M.* Quantum mechanics in spaces of constant curvature / V. M. Red'kov, E. M. Ovsyuk. – New York: Nova Science Publ, 2012.

*Поступила в редакцию 08.08.2015*

УДК 534.535

Г. В. КУЛАК<sup>1</sup>, Г. В. КРОХ<sup>1</sup>, П. И. РОПОТ<sup>2</sup>, О. В. ШАКИН<sup>3</sup>

### КОЛЛИНЕАРНОЕ АКУСТООПТИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ БЕССЕЛЕВЫХ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ В ДВУОСНЫХ КРИСТАЛЛАХ

<sup>1</sup>Мозырский государственный педагогический университет им. И. П. Шамякина, Мозырь, Беларусь,  
e-mail: g.kulak57@mail.ru

<sup>2</sup>Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь,  
e-mail: p.ropot@dragon.bas-net.by

<sup>3</sup>Государственный университет аэрокосмического приборостроения, Санкт-Петербург, Россия,  
e-mail: oshakin@mail.ru

Рассмотрено коллинеарное акустооптическое преобразование бесселевых световых пучков в два кольцевых пучка внутренней конической рефракции. С использованием метода преобразования Фурье найдены выражения для потоков мощности дифрагированных кольцевых пучков внутренней конической рефракции в замкнутой форме. Для кристалла бифталата калия произведен расчет зависимости эффективности дифракции от интенсивности ультразвука и длины взаимодействия. На основе данного взаимодействия предложено создание коллинеарных перестраиваемых АО фильтров с узкой шириной полосы пропускания, достигающей 0,1 Å.

*Ключевые слова:* коллинеарное акустооптическое взаимодействие, бесселевы световые пучки, внутренняя коническая рефракция, двuosный кристалл, эффективность дифракции.

G. V. KULAK<sup>1</sup>, G. V. KROKH<sup>1</sup>, P. I. ROPOT<sup>2</sup>, O. V. SHAKIN<sup>3</sup>

### COLLINEAR ACOUSTO-OPTIC INTERACTION OF BESSEL LIGHT BEAMS IN BIAxIAL CRYSTALS

<sup>1</sup>Mozyr State Pedagogical University named after I. P. Shamyakin, Mozyr, Belarus,  
e-mail: g.kulak57@mail.ru

<sup>2</sup>B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus,  
e-mail: p.ropot@dragon.bas-net.by

<sup>3</sup>State University of Aerospace Instrumentation, Saint-Petersburg, Russia, e-mail: oshakin@mail.ru

The collinear acousto-optic transformation of Bessel light beams into two ring beams of internal conical refraction has been considered. Using the Fourier transformation method, the expressions for power flows of ring diffracted beams of internal conical refraction are found in closed form. For a potassium biftalate crystal, the dependence of the diffraction efficiency on the ultrasound intensity and interaction durability is calculated. Based on this interaction, the creation of collinear convertible AO filters with a narrow width of a transmission band of about 0.1 is proposed.

*Keywords:* collinear acousto-optic interaction, Bessel light beams, internal conical refraction, biaxial crystal, diffraction efficiency.

**Введение.** Эффективное коллинеарное акустооптическое (АО) преобразование бесселевых световых пучков (БСП) вблизи оптической оси одноосного кристалла исследовано в работе [1]. Известно [2], что сечения поверхностей волновых векторов двuosного негиротропного кристалла плоскостью  $X_1X_3$  представляют собой окружность с радиусом  $k_0\sqrt{\epsilon_{22}}$  для световой волны, поляризованной перпендикулярно плоскости (010), и эллипс с полуосями  $k_0\sqrt{\epsilon_{33}}$  и  $k_0\sqrt{\epsilon_{11}}$  для света, поляризованного в главной плоскости кристалла (здесь  $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ ,  $\lambda_0$  – длина световой волны в вакууме,  $\epsilon_{11}$ ,  $\epsilon_{22}$ ,  $\epsilon_{33}$  – главные диэлектрические проницаемости кристалла). При распространении ограниченных световых пучков вдоль бинормали в двuosных кристаллах наблюдается внутренняя коническая рефракция [3–7]. Пространственное распределение световых пучков в кольце конической рефракции определяется отношением радиуса основания конуса кониче-

ской рефракции  $\rho_0$  к радиусу падающего светового пучка  $w$ . В работе [5] приведены выражения, описывающие распределение световых полей в кольце внутренней конической рефракции. Показано, что при условии  $\bar{\rho}_0 = \rho_0 / w \geq 2\sqrt{2}$  для прошедшего светового пучка отчетливо наблюдается два светлых кольца. Особенности распространения световых пучков и импульсов в окрестности оптических осей одноосных и двуосных кристаллов (включая гиротропные), связанные со сложной формой волновых поверхностей кристаллов вблизи бинормалей, исследованы в [6, 7]. Особенности преобразования гауссовых световых пучков в БСП различных порядков в двуосных гиротропных кристаллах при слабом АО взаимодействии исследованы в работе [8]. В [9] показано, что учет гиротропии при объяснении явления внутренней конической рефракции можно произвести, вводя в рассмотрение вместо собственных векторов линейной поляризации собственные векторы эллиптической поляризации. При этом эллиптичность собственных волн вблизи бинормали определяется гиротропией кристалла, линейной анизотропией и углом отклонения от бинормали плосковолновых компонент кольцевого пучка.

В настоящей работе рассмотрен режим коллинеарного АО взаимодействия бesselовых световых пучков в условиях внутренней конической рефракции. Такой режим перспективен для создания перестраиваемых коллинеарных АО фильтров на основе БСП. Произведен учет сложного пространственного распределения поляризации света в кольцевых пучках при таком взаимодействии. При этом особое внимание уделяется изучению особенностей коллинеарного АО взаимодействия БСП в двуосных негиротропных кристаллах в условиях внутренней конической рефракции при их преобразовании из нулевого дифракционного порядка в первый.

**Теоретические результаты и их обсуждение.** Предполагается, что БСП, распространяющийся вдоль бинормали  $N$  двуосного кристалла, формирует световые пучки с конической структурой пространственного спектра, дифрагирующие на ультразвуковой (продольной или сдвиговой) волне. В случае негиротропного кристалла азимутально однородное распределение интенсивности кольцевых пучков достигается для циркулярно поляризованных БСП [9]. Амплитудное распределение и поляризация БСП рассматриваются в цилиндрической системе координат  $\rho, \varphi, z$  с осью симметрии, направленной вдоль бинормали ( $N \parallel OZ$ ), причем азимутальный угол  $\varphi$  отсчитывается от оси  $OX$  (рис. 1).

Ультразвуковой (УЗ) пучок с круговой частотой  $\Omega$  и волновым вектором  $\mathbf{K}$  также распространяется вдоль бинормали  $N$  и индуцирует периодическую в пространстве и времени решетку диэлектрической проницаемости:  $\hat{\epsilon}(\mathbf{r}, t) = \hat{\epsilon}^0 + \Delta \hat{\epsilon} \cos(\mathbf{K}\mathbf{r} - \Omega t)$ , где  $\hat{\epsilon}^0$  – тензор диэлектрической проницаемости невозмущенного кристалла,  $\Delta \hat{\epsilon}_{ik} = -\hat{\epsilon}_{il}^0 \hat{\epsilon}_{jk}^0 \hat{p}_{ljmn} \hat{U}_{mn}$ ,  $\hat{p}_{ljmn}$  – компоненты тензора фотоупругих постоянных,  $\hat{U}_{mn}$  – компоненты тензора деформаций.

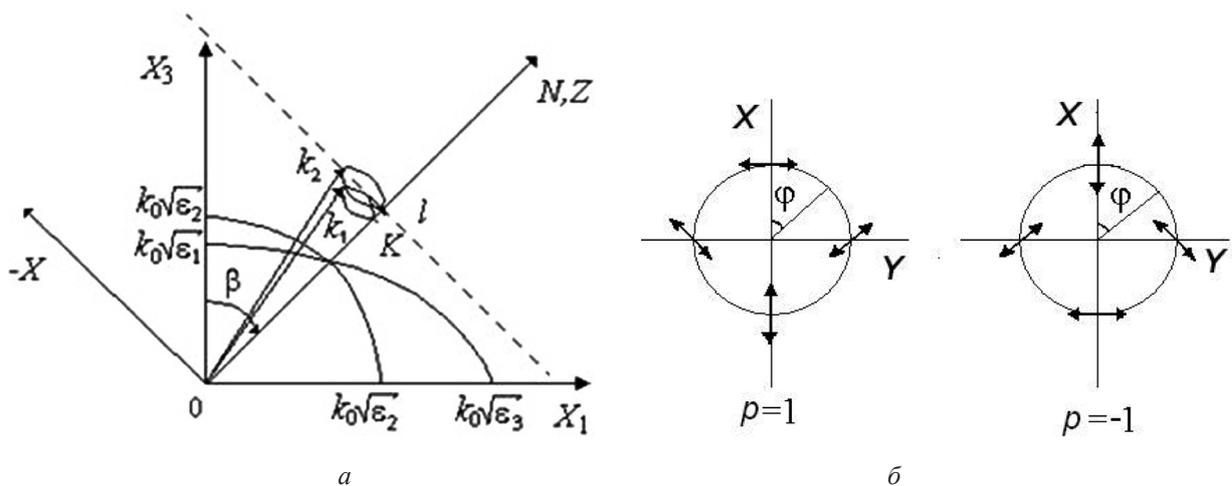


Рис. 1. Геометрия АО взаимодействия в окрестности оптической оси двуосного кристалла (а) и поляризация ортогонально-поляризованных кольцевых пучков (б):  $N$  – бинормаль;  $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$  и  $\mathbf{K}$  – волновые векторы преломленной, дифрагированной волн и ультразвука соответственно;  $k_0 = 2\pi / \lambda_0$ ;  $X_1 X_3$  – плоскость главного сечения кристалла

В области, занятой ультразвуком, напряженность  $\mathbf{E}$  и индукция  $\mathbf{D}$  светового поля удовлетворяют волновому уравнению, следующему из уравнений Максвелла:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \nabla(\nabla \mathbf{E}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

где  $c$  – скорость света в вакууме,  $\mathbf{E} = \hat{\varepsilon}^{-1} \mathbf{D}$ .

Положим, что падающий световой пучок на границе  $z = 0$  области АО взаимодействия имеет бесселево распределение амплитуды для компоненты поля с правой циркулярной поляризацией  $\mathbf{D}(\rho, z = 0) = \mathbf{e}_+ D_i J_0(k\gamma_0 \rho)$ , где  $D_i$  – амплитуда падающего БСП,  $J_0(k\gamma\rho)$  – функция Бесселя нулевого порядка,  $k = 2\pi n / \lambda_0$ ,  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\gamma_0$  – угол конусности БСП,  $\mathbf{e}_+$  – единичный вектор правой циркулярной поляризации.

В квадратичном приближении с учетом малого угла отклонения от бинормали плоскостолновых компонент кольцевых пучков волновые векторы  $\mathbf{k}_{1,2}$  и векторы поляризации  $\mathbf{e}^\pm$  двух собственных мод можно представить в следующем виде [6, 10]:

$$\mathbf{k}_{1,2} = k_x \mathbf{e}_1 + k_y \mathbf{e}_2 + (k - \gamma k_x + p\gamma k_\perp - k_\perp^2 / 2k) \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_+ \mp e^{i\varphi} \mathbf{e}_-), \quad (2)$$

где  $\cos \varphi = k_x / k_\perp$ ,  $\sin \varphi = k_y / k_\perp$ ;  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  – единичные векторы, направленные вдоль осей  $X, Y, Z$  соответственно;  $\gamma = \arctg \left[ \sqrt{(\varepsilon_3^{-1} - \varepsilon_2^{-1})(\varepsilon_2^{-1} - \varepsilon_1^{-1})} / 2n^2 \right]$ ,  $k_\perp = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ ;  $k_x, k_y$  – проекции волнового вектора на оси  $\mathbf{e}_1 \parallel X, \mathbf{e}_2 \parallel Y$ ;  $n$  – показатель преломления кристалла в направлении бинормали;  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  – главные диэлектрические проницаемости;  $p = \pm 1$ . Сечение поверхностей волновых векторов плоскостью  $X_1 X_3$  двусосного негиротропного кристалла показано на рис. 1, а. В окрестности бинормали оно представляет собой два соосных конуса. «Быстрый» и «медленный» кольцевые пучки внутренней конической рефракции эффективно взаимодействуют в области УЗ-возмущения при выполнении условий пространственного и временного синхронизма:  $\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{K}$ ,  $\omega_d = \omega + \Omega$  ( $\omega$  и  $\omega_d$  – циклическая частота падающей и дифрагированной световых волн). Частота  $f = \Omega / 2\pi$ , при которой происходит эффективное АО преобразование кольцевых пучков, определяется параметром  $\gamma$ , распространяющегося в кристалле БСП, причем  $f = 2\gamma^2 n \nu / \lambda_0$  ( $\nu$  – фазовая скорость УЗ-волны).

В соответствии с методом медленно изменяющихся амплитуд и с учетом геометрии АО взаимодействия, решение волнового уравнения (см. [8, 10]) для определения фурье-компонент дифрагированных пучков следует искать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{D} = & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{e}_\tau^+ U_t^+(k_x, k_y, z) \exp[i(k_2 r - \omega t)] dk_x dk_y + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{e}_\tau^- U_t^-(k_x, k_y, z) \exp[i(k_1 r - \omega t)] dk_x dk_y + \\ & + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{e}_\tau^+ U_d^+(k_x, k_y, z) \exp[i(k_2 r - \omega_d t)] dk_x dk_y + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{e}_\tau^- U_d^-(k_x, k_y, z) \exp[i(k_1 r - \omega_d t)] dk_x dk_y, \quad (3) \end{aligned}$$

где  $U_{t,d}^\pm$  – фурье-спектры прошедшего ( $t$ ) и дифрагированного ( $d$ ) световых пучков.

Предположим, что распределение амплитуды в поперечном сечении УЗ-пучка имеет гауссов профиль. При этом вектор смещений УЗ-волны определяется в соответствии с выражением  $\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 \exp[(-\rho^2 / 2w_a^2) + i(Kr - \Omega t)]$ , где  $\mathbf{U}_0$  – амплитуда смещений,  $w_a$  – радиус поперечного сечения УЗ-пучка. При малой расходимости УЗ-пучка (когда  $\theta_a \leq \gamma$ ) эффективно дифрагируют лишь те компоненты светового пучка, для которых выполняются условия фазового синхронизма. При этом происходит преобразование светового пучка с правой циркулярной поляризацией в левую и наоборот. Положив, что исходно на кристалл падает световой пучок с правой циркулярной поляризацией ( $\mathbf{D}(\rho, z = 0) = \mathbf{e}_+ D_i J_0(k\gamma_0 \rho)$ ), для упрощения записи опустим в амплитудах индек-

сы  $\pm$ , т. е.  $U_t^+ \equiv U_t, U_d^- \equiv U_d$ . При расходимости УЗ-волны  $\theta_a > \gamma$  могут наблюдаться значительные искажения кольцевой структуры световых пучков вследствие других АО процессов, не связанных с АО преобразованием кольцевых пучков. При этом в (3) и системе уравнении связанных волн следует рассматривать все четыре комплексные амплитуды ( $U_{t,d}^{\pm}$ ) с соответствующей расстройкой [10].

Подставляя выражение (3) в волновое уравнение (1) и используя приближения [11]

$$(\varepsilon_{ij} - \bar{\varepsilon}), \Delta\varepsilon_{ij} \ll \bar{\varepsilon}, \quad \left| \frac{dD_m}{dz} \right| (\varepsilon_{ij} - \bar{\varepsilon}) \approx 0, \quad (k^2 \gamma^2 l / (k_{\pm z})) \ll 1, \quad \theta_a \leq \gamma,$$

(здесь  $\bar{\varepsilon} = Sp\hat{\varepsilon} / 3$ ,  $m = x, y, z$ ;  $l$  – длина области АО взаимодействия), получим систему уравнений для фурье-спектров  $U_p, U_d$  дифрагированных пучков [12]:

$$\begin{aligned} \frac{dU_t}{dz} &= \left( \frac{k_x^2 + k_y^2}{2ik_1} \right) U_t - i\chi_- \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U_d(k_x - K_x, k_y - K_y) U_a(K_x, K_y) dK_x dK_y, \\ \frac{dU_d}{dz} &= \left( \frac{k_x^2 + k_y^2}{2ik_2} \right) U_d + i\chi_+ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U_t(k_x + K_x, k_y + K_y) U_a(K_x, K_y) dK_x dK_y, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\chi_{\mp} = \frac{\pi n^3 p_{\text{эф}} \sin \varphi \sqrt{2I_a / \sigma v^3}}{2\lambda_0 (1 - \gamma k_{\perp} \cos \varphi / k + p\gamma k_{\perp} / k - k_{\perp}^2 / 2k)},$$

$U_a(K_x, K_y)$  – фурье-спектр УЗ-пучка,  $I_a$  – интенсивность ультразвука,  $K_x, K_y$  – проекции волнового вектора УЗ-волны на соответствующие оси,  $\sigma$  – плотность кристалла;  $p_{\text{эф}}$  – эффективная фотоупругая постоянная кристалла.

Решение системы уравнений связанных волн находим с привлечением граничных условий

$$\begin{aligned} U_t(z=0) &= D_i F(k_{\perp}, \varphi), \\ U_d(z=0) &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$F(k_{\perp}, \varphi) = \frac{k_{\perp} (\cos \varphi \sqrt{k_{\perp}^2 \cos^2 \varphi - k^2 \gamma_0^2} + \sin \varphi \sqrt{k_{\perp}^2 \sin^2 \varphi - k^2 \gamma_0^2})}{(k^2 \gamma_0^2 - k_{\perp}^2) \sqrt{(k_{\perp}^2 \cos^2 \varphi - k^2 \gamma_0^2)(k_{\perp}^2 \sin^2 \varphi - k^2 \gamma_0^2)}}.$$

При записи выражения (5) учитывался фурье-спектр падающего бесселевого светового пучка [13].

Окончательно потоки мощностей дифрагированных волн  $P_t$  и  $P_d$  находим в виде

$$\begin{aligned} P_t &= P_0 D_i^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \cos^2(z\sqrt{\chi_+ \chi_-}) F^2(k_{\perp}, \varphi) k_{\perp} d\varphi dk_{\perp}, \\ P_d &= P_0 D_i^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \sin^2(z\sqrt{\chi_+ \chi_-}) F^2(k_{\perp}, \varphi) k_{\perp} d\varphi dk_{\perp}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $P_0 = c / 8(\bar{\varepsilon})^{3/2}$ . При этом эффективность АО взаимодействия находится из соотношения  $\eta = P_d(z=l) / P_t(z=0)$ .

Численные расчеты были сделаны для кристалла бифталата калия (БФК). На рис. 2 представлены зависимости эффективности дифракции  $\eta$  от интенсивности продольной УЗ-волны  $I_a$ , рассчитанные при разных значениях длины  $l$  области АО взаимодействия. Из рис. 2 следует, что при увеличении интенсивности УЗ-волны дифракционная эффективность достигает максимального значения, близкого к 67 % при малых интенсивностях ультразвука  $\sim 0,001$  Вт/см<sup>2</sup>. Достижение

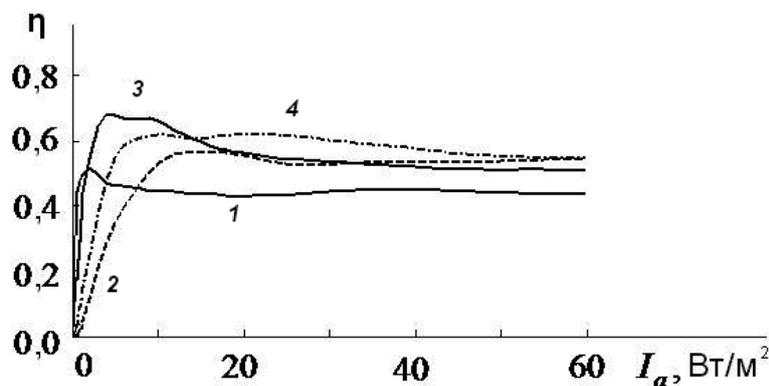


Рис. 2. Зависимость эффективности дифракции  $\eta$  от интенсивности УЗ-волны  $I_a$  при различных длинах АО взаимодействия  $l$ : 1 – 2 мм; 2 – 4 мм; 3 – 6 мм; 4 – 8 мм ( $\gamma = 0,01$  рад,  $\gamma_0 = 0,03$  рад,  $f = 1,71$  МГц,  $\lambda_0 = 0,6328$  мкм,  $n = 1,603$ ,  $p_{эф} = 0,226$ , кристалл БФК)

высокой эффективности дифракции при столь малой интенсивности ультразвука объясняется кольцевой структурой бесселевого светового пучка, преобразующегося в кольцевые же пучки внутренней конической рефракции. Для гауссовых световых пучков такой эффект достигается при значительно больших интенсивностях ультразвука [10]. Увеличение длины АО взаимодействия приводит к значительному изменению эффективности дифракции лишь при малых интенсивностях ультразвука. При этом кольцевые пучки внутренней конической рефракции имеют существенно отличающуюся интенсивность света. При больших интенсивностях ультразвука  $\sim 0,1$  Вт/см<sup>2</sup> эффективность дифракции достигает  $\sim 50$  % и практически не изменяется при увеличении УЗ-интенсивности и длины АО взаимодействия. Данная особенность АО дифракции объясняется эффективным преобразованием БСП в два кольцевых пучка внутренней конической рефракции, достигающих примерно одинаковой интенсивности света.

При коллинеарной АО фильтрации БСП в условиях внутренней конической рефракции, при геометрии взаимодействия, представленной на рис. 1, ширина полосы пропускания устройства определяется дисперсией двулучепреломления кристалла и находится из соотношения  $\Delta\lambda = 0,8\lambda / (\partial\Delta n / \partial\lambda)$ . Для кристалла БФК ширина полосы пропускания АО фильтра на длине волны  $\lambda_0 = 0,6328$  мкм составляет  $0,1-1,0$  Å. При малой длине АО взаимодействия, когда  $l \approx 6$  мм, в кристаллах БФК реализуется узкополосное преобразование бесселевых световых пучков с малым значением ширины полосы пропускания.

**Заключение.** Рассмотрено коллинеарное акустооптическое преобразование бесселевых световых пучков в условиях внутренней конической рефракции. Установлено, что в двуосных негиротропных кристаллах в условиях внутренней конической рефракции возможно эффективное низкочастотное коллинеарное АО преобразование бесселевых световых пучков нулевого порядка. Для кристалла бифталата калия произведен численный расчет зависимости эффективности дифракции от интенсивности ультразвука и длины взаимодействия. Показано, что эффективность дифракции в этом случае остается неизменной в широком диапазоне изменений интенсивности УЗ-волны и длины АО взаимодействия. При этом для малых длин АО взаимодействия достигается узкополосное преобразование световых бесселевых пучков. На основе таких преобразований предложено создание коллинеарных перестраиваемых АО фильтров с узкой шириной полосы пропускания, достигающей  $0,1$  Å.

#### Список использованной литературы

1. Generation of TH- and TE – polarized Bessel light beams at acoustooptic interaction in anisotropic crystals / V. N. Belyi [et al.] // Opt. Commun. – 2014. – Vol. 325. – P. 84–91.
2. Ярив, А. Оптические волны в кристаллах / А. Ярив. – М.: Мир, 1987.
3. Бельский, А. М. Внутренняя коническая рефракция на границе светового пучка в двуосных кристаллах / А. М. Бельский, А. П. Хапалюк // Оптика и спектроскопия. – 1978. – Т. 44, № 4. – С. 746–751.
4. Fève, J. P. Experimental study of internal and external conical refractions in KTP / J. P. Fève, B. Boulanger, G. Marnier // Opt. Commun. – 1994. – Vol. 105, N 3/4. – P. 243–252.

5. Бельский, А. М. Внутренняя коническая рефракция когерентных световых пучков / А. М. Бельский, М. А. Степанов // Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер. физика. – 1999. – № 1. – С. 3–7.
6. Хаткевич, А. Г. Внутренняя коническая рефракция световых пучков / А. Г. Хаткевич // Оптика и спектроскопия. – 1979. – Т. 46, № 3. – С. 505–510.
7. Хаткевич, А. Г. Коническая рефракция и преобразование излучения вблизи оптических осей / А. Г. Хаткевич // Журн. прикладной спектроскопии. – 1996. – Т. 63, № 6. – С. 1017–1025.
8. Kulak, G. V. Transformation of Gaussian light beam into Bessel one for control systems / G. V. Kulak, A. E. Anisimova, P. I. Ropot // Optical Techniques and Nanotools for Material and Life Sciences: Intern. Conf., Minsk, June, 18, 2010. – Minsk, 2010. – P. 104–109.
9. Schell, A. J. Laser studies of internal conical diffraction. II. Intensity patterns in an optically active crystal,  $\alpha$ -iodic acid / A. J. Schell, N. Blombergen // J. Opt. Soc. Am. – 1978. – Vol. 68, N 8. – P. 1093–1098.
10. Кулак, Г. В. Акустооптическое взаимодействие световых пучков в условиях внутренней конической рефракции / Г. В. Кулак // Оптика и спектроскопия. – 2001. – Т. 90, № 3. – С. 464–467.
11. Vachss, F. Holographic beam coupling in anisotropic photorefractive media / F. Vachss, I. Hesselink // J. Opt. Soc. Am. – 1987. – Vol. 4, N 2. – P. 325–339.
12. Парыгин, В. Н. Коллинеарная дифракция гауссова пучка на акустическом цуге / В. Н. Парыгин, А. В. Вершубский, Ю. Г. Резвов // Оптика и спектроскопия. – 1998. – Т. 84, № 6. – С. 1005–1011.
13. Прудников, А. П. Интегралы и ряды. Специальные функции / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. – М.: Наука, 1983.

Поступила в редакцию 23.07.2015

УДК 535.21;535.3

S. A. BATISHCHE<sup>1</sup>, S. B. BUSHUK<sup>1</sup>, A. A. KOUZMOUK<sup>1</sup>, A. V. SAVITCH<sup>1</sup>,  
H. A. TATUR<sup>1</sup>, G. GRABNER<sup>2</sup>, W. KAUTEK<sup>3</sup>

**COMBINED 213 nm+1444 nm LASER ABLATION TREATMENT OF BOVINE CORNEA**

<sup>1</sup>*B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus,  
e-mail: batis@dragon.bas-net.by*

<sup>2</sup>*Paracelsus Medical University, University Eye Clinic, Salzburg, Austria,  
e-mail: G.Grabner@salk.at*

<sup>3</sup>*University of Vienna, Department of Physical Chemistry, Vienna, Austria,  
e-mail: wolfgang.kautek@univie.ac.at*

The laser ablation efficiency of eye cornea for UV (213 nm) and combined IR+UV (213 nm + 1444 nm) ablation treatment in safe conditions, preventing laser coagulation at 1444 nm, was investigated. It is shown that the IR+UV combination, when, at the first stage of cornea treatment, an IR laser pulse at 1444 nm, falling into a water absorption band with an absorption coefficient of about  $31 \text{ cm}^{-1}$ , dehydrates a superficial corneal layer and at the second stage, in about 100  $\mu\text{s}$ , a UV laser pulse at 213 nm ablates a thin (about 1–3  $\mu\text{m}$ ) collagen layer, gives promising results. Due to the controlled dehydration of the corneal surface, the process of 213 nm + 1444 nm laser ablation ensures a better reproducibility and a higher productivity.

*Keywords:* cornea, ablation, Nd:YAG laser, absorption, threshold.

С. А. БАТИЩЕ<sup>1</sup>, С. Б. БУШУК<sup>1</sup>, А. А. КУЗЬМУК<sup>1</sup>, А. В. САВИЧ<sup>1</sup>, Г. А. ТАТУР<sup>1</sup>, Г. ГРАБНЕР<sup>2</sup>, В. КОТЭК<sup>3</sup>

**ЛАЗЕРНАЯ АБЛЯЦИОННАЯ ОБРАБОТКА РОГОВИЦЫ ГЛАЗА  
КОМБИНИРОВАННЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ 213+1440 НМ**

<sup>1</sup>*Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь,  
e-mail: batis@dragon.bas-net.by*

<sup>2</sup>*Глазная клиника медицинского университета им. Парацельса, Зальцбург, Австрия,  
e-mail: G.Grabner@salk.at*

<sup>3</sup>*Венский университет, Вена, Австрия  
e-mail: wolfgang.kautek@univie.ac.at*

Исследована эффективность лазерной абляции роговицы глаза УФ-излучением (213 нм) и комбинированным УФ+ИК-излучением (213 нм + 1444 нм) в условиях обработки, когда лазерная коагуляция на длине волны 1444 нм не происходит. Показано, что комбинированное УФ+ИК-воздействие, когда сначала ИК-лазерный импульс (1440 нм), попадающий в полосу поглощения воды с коэффициентом поглощения около  $31 \text{ см}^{-1}$ , обезвоживает поверхностный слой роговицы и следующий через  $\sim 100 \text{ мкс}$  УФ-лазерный импульс (213 нм) удаляет тонкий поверхностный слой (1–3 мкм) коллагена, дает многообещающие результаты. Благодаря контролируемому обезвоживанию поверхности роговицы процесс лазерной абляции комбинированным (213 нм + 1444 нм) излучением обеспечивает лучшую воспроизводимость и более высокую производительность.

*Ключевые слова:* роговица, абляция, Nd:YAG-лазер, поглощение, порог.

**Introduction.** In recent years, femtosecond lasers found great attention and first clinical applications in refractive and corneal surgery [1–3] after much work had already been done with far UV excimer lasers at 193 nm, e.g. in photorefractive keratectomy (PRK), Laser Epithelial Keratomileusis (LASEK), and Laser in Situ Keratomileusis (LASIK).

Due to the complexity and the cost of these-type lasers, attention has also been paid to solid state lasers in the far UV range [4–7]. Currently, the 5th harmonic (213 nm) of Nd:YAG laser is also used for LASIK and PRK.

During UV laser ablation cornea treatment for purposes of eye vision correction a big spatially profiled volume of stroma is removed in accordance with a program taking into account cornea features.

For improvement of UV laser ablation cornea treatment technology for purposes of eye vision correction an idea of combined laser UV+IR cornea treatment [8] seems to be perspective. The key idea of combined UV (213 nm) and IR radiation cornea ablation treatment in the nanosecond technology consists in organizing conditions of “dry” or “dehydrated” ablation of human tissues (e.g. cornea) in naturally wet environment by taking a special succession of used laser beams of different wavelengths, in which at the first stage of cornea treatment a surface of cornea tissue is treated with IR radiation, which falls in one of IR strong bands of water absorption and dehydrates a superficial layer of tissue, and at the second stage a thin (about 1-3  $\mu\text{m}$ ) layer of cornea collagen is ablated with UV (for example, 213 nm) radiation. As a sequence, an improvement of medical results of cornea ablation treatment should take place, as it goes under controlled superficial cornea layer wetness conditions.

The present study is focused on comparing the ablation efficiency and reproducibility of 213 nm and combined 213 nm + 1444 nm laser radiation treatment of cornea. 1444 nm laser radiation is taken as an example to show a positive potential of the combined UV-IR laser treatment.

**Experimental.** The ablation investigations were carried out on a number of freshly enucleated calf’s eye cuts at a constant depth of 260  $\mu\text{m}$  to provide a flat surface of cornea with diameters of 6–8 mm.

Water represents about 80 % of cornea content, as additional measurements show. For the physiological solution (0.9 % NaCl in water) and water, in the 1360–1600 nm spectral range absorptance reaches  $31 \text{ cm}^{-1}$  at 1444 nm, which is an effective laser line for the Nd:YAG laser, and well complies to the idea of a combined laser wavelengths cornea treatment. Usage of 1444 nm laser line allows one to increase a temperature of a surface corneal layer due to water absorptance and to dehydrate the corneal surface.

In fig. 1 the scheme for combined cornea treatment with UV 213 nm and IR 1444 nm radiation is shown. The optical scheme of the 213 nm laser setup is detailed in [9]. The 1444 nm laser is described in [10].

The approximate laser ablation pits topology for an eye is shown in fig. 2. Ablation pits were regularly done on the periphery of the round flat surface to guarantee identical cornea ablation properties.

At the flat surface of each eye, an even number of pits, treated only with 213 nm and with combination of 213 nm and 1444 nm, were done. Each pit was treated in air at room temperature (20–25  $^{\circ}\text{C}$ ) by  $N$  focused pulses on one spot of the fifth-harmonic Nd:YAG laser (213 nm, pulse duration of about 10 ns) or with a combination of 213 nm and 1444 nm at a 1 Hz repetition rate.

To guarantee safe conditions of 1444 nm laser treatment, it was preliminarily controlled in the real experimental condition of no cornea coagulation. At a 1 Hz repetition rate of 1444 nm radiation, which was used during the experimental investigation, the appearance of small pits, without some damage of cornea, which disappeared in several minutes after finishing the experiment, was tolerated. The appearance

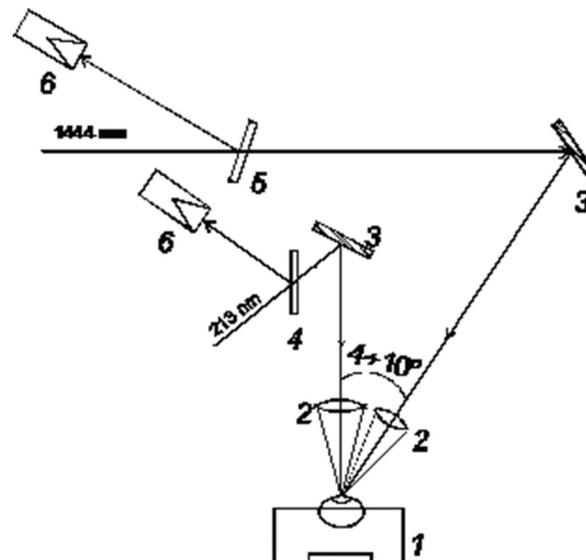


Fig. 1. Optical scheme of the laser ablation research setup:

1 – eye in a holder; 2 – focusing lens; 3 – deflecting mirrors; 4, 5 – reflecting glass (quartz) plates; 6 – energy meters

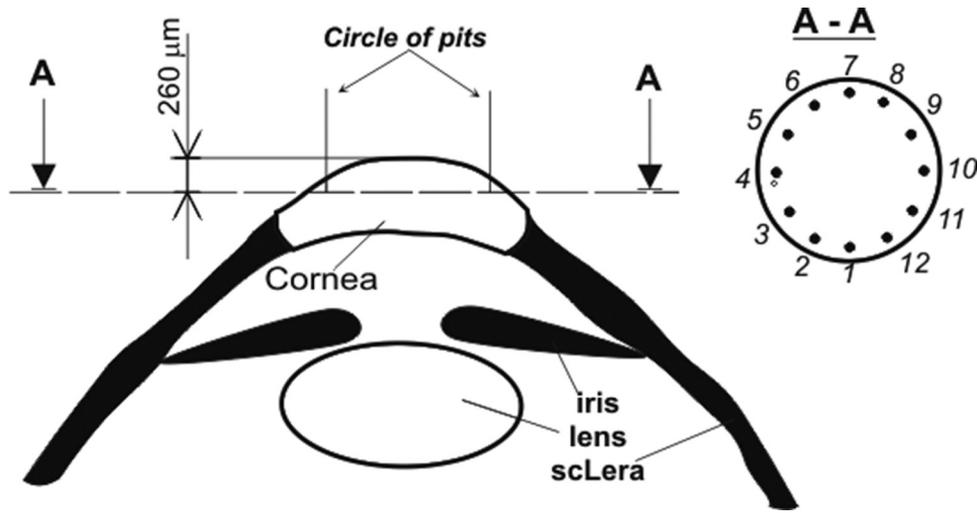


Fig. 2. Approximate pits topology for an eye

of such pits signalizes the dehydration of the corneal layer due to 1444 laser radiation heating. It is necessary to emphasize that the mechanism of dehydration may be rather complicated and include, for example, direct water vaporization from corneal surface and/or water micro circulation in inner heated corneal layers. The establishment of an exact mechanism of cornea dehydration requires further study.

A confocal Zeiss LSM 510 laser scanning microscope was used to determine the maximum pit depth  $H$ . A laser depth ablation rate  $h = H/N$ .

At each pit center, the 213 nm laser pulse fluence  $F_{213,\max}$  and 1444 nm laser pulse fluence  $F_{1444,\max}$  were determined from the experimentally measured energies  $E_{213}$  and  $E_{1444}$  and the real laser beam distributions that were close to Gaussian distributions. In the experiment, the Gaussian radius  $w_0 = 347 \mu\text{m}$  for the 213 nm laser beam. (For  $w_0 F(w_0) = 1/e^2$ ). Cross-sectional fluence distributions for laser beams were made in such a manner that the 1444 nm cross-sectional fluence distribution well overlapped the 213 nm one.

At the pit center, the 213 nm laser pulse fluence  $F_{213,\max} = 0.65 \text{ J/cm}^2$  and the 1444 nm laser pulse fluence  $F_{1444,\max} = 4 \text{ J/cm}^2$ . The 1444 nm pulse duration was about 70 microseconds (“pike” regime of generation). During a combined 213 nm + 1444 nm treatment, first, 1444 nm radiation occurs and then, with a delay of about 100  $\mu\text{s}$  213 nm radiation.

For reproducibility, the enucleated eye was kept pressed at 26 mmHg in a special holder, which allowed the flat corneal surface to be practically normal to the 213 nm laser beam (at an angle of not more than  $5^\circ$ ).

A number of eyes were investigated under various conditions.

For a combined 213 nm + 1444 nm laser radiation treatment of the cornea, the cornea temperature rise  $\Delta T_L$  at a depth  $L$  for 1444 nm radiation was approximately estimated using the Bouger law for laser fluencies and neglecting thermal conductivity during a short laser pulse by the expression:

$$\Delta T_L = k F_{1444,\max} \cdot \Delta t \exp(-kL) / \rho C,$$

where  $F_{1444,\max}$  is the laser fluence at the corneal surface;  $\Delta t$  the laser pulse duration;  $k$  the corneal absorptance for IR (1444 nm) radiation;  $c$  the specific heat of the cornea taken approximately equal to that of water  $4.18 \text{ J/g } ^\circ\text{C}$ ,  $\rho$  the cornea density taken approximately equal to that of water,  $1 \text{ g/cm}^3$ .

Estimations show that  $\Delta T_L$  reaches approximately  $30^\circ\text{C}$  at the corneal surface and 90 % of 1444 nm radiation energy is absorbed at a depth of  $700 \mu\text{m}$ , and at a depth of  $220 \mu\text{m}$  the laser fluence decreases approximately by 50 %. It is necessary to keep in mind that the IR (1444 nm) radiation fluence yields a corneal surface temperature of about  $50\text{--}55^\circ\text{C}$ , which is lower than the cornea proteins temperature coagulation threshold. Experimental investigations of the cornea coagulation threshold showed that for 1444 nm radiation single pulses with an approximately 70  $\mu\text{s}$  duration the coagulation threshold corresponds to about  $7\text{--}9 \text{ J/cm}^2$ .

**Results and discussion.** Table contains the data for 213 nm and combined 213 nm + 1440 nm treatment. For each eye, 4–6 pits were done with 213 nm and the same number of pits was done with combined 213 nm + 1440 nm. Statistics was investigated at approximately constant 213 nm ( $F_{213,\max} = 0.65 \text{ J/cm}^2$ , which is close to optimal) and at 1444 nm ( $F_{1444,\max} = 4 \text{ J/cm}^2$ , which does not provide cornea coagulation during the treatment) pulse energy and  $N = 50$ . Table contains the experimental and calculated data only for a group of 8 eyes that were treated in one day.

**Experimental and calculated data for 213 nm and combined 213 nm + 1440 nm laser treatment**

Number	$h\text{-ave}, \mu\text{m}$	$h\text{-std}, \%$	$F_{1444,\max}, \text{J/cm}^2$
eye 1	1.43	6.3	4
	1.29	10.7	0
eye 2	1.90	10.9	4
	1.75	9.4	0
eye 3	1.94	4.6	4
	1.54	25.2	0
eye 4	1.90	14.4	4
	1.42	11.4	0
eye 5	1.56	12.4	4
	1.55	12.2	0
eye 6	1.53	7.5	4
	1.51	14.3	0
eye 7	1.92	11.3	4
	1.79	11.8	0
eye 8	1.93	9.1	4
	1.57	10.1	0

Separately, for the 213 nm and 213+1444 nm treatment, for each eye, the simple mean for  $h$ ,  $h\text{-ave}$  and the standard deviation  $h\text{-std}$  are calculated and are shown in Table.

In all cases, for the average depth  $h\text{-ave}$ , the combined 213 nm + 1444 nm treatment gives a more productive removal of the cornea than the pure 213 nm treatment, which is, most of all, connected with less specific heat of the dehydrated cornea. It is supposed that it would be rather difficult to substantially increase  $h\text{-ave}$  due to additional dehydration at higher  $F_{1444,\max}$  over a risk of cornea coagulation. A standard deviation  $h\text{-std}$  for the combined 213 nm + 1444 nm treatment substantially decreases in most of the cases. In some cases, the standard deviation  $h\text{-std}$  is the same or a little higher than the one the for 213 nm treatment.

Investigations showed that the IR-UV combination, when, at the first stage of cornea treatment, an IR laser pulse at 1444 nm, falling into a water absorption band with an absorption coefficient of about  $31 \text{ cm}^{-1}$ , dehydrates the superficial layer of cornea and at the second stage, in about 100  $\mu\text{s}$ , a UV laser pulse at 213 nm ablates a thin (about 1–3  $\mu\text{m}$ ) layer of collagen, gives promising results. Due to the controlled dehydration of the corneal surface, the process of 213 nm laser ablation ensures a better reproducibility of results and a higher productivity.

It is safe to assume that the effect is much more pronounced for the combination of UV and IR laser radiation at 1930 nm corresponding to a water absorptance of  $130 \text{ cm}^{-1}$ . And most interesting and intriguing would be the combination of UV and IR laser radiation taken from the 2750–3000 nm range where the water absorption coefficient reaches  $10\,000 \text{ cm}^{-1}$ .

**Conclusions.** The laser ablation efficiency of the cornea for UV (213 nm) and combined IR+UV (213 nm + 1444 nm) ablation treatment in safe conditions, preventing the laser coagulation at 1444 nm, was investigated. Investigations showed that the IR-UV combination, when, at the first stage of cornea treatment, an IR laser pulse at 1444 nm, falling into a water absorption band with an absorption coefficient

of about  $31 \text{ cm}^{-1}$ , dehydrates the superficial layer of the cornea and at the second stage, in about  $100 \mu\text{s}$ , a UV laser pulse at 213 nm ablates a thin (about 1-3  $\mu\text{m}$ ) layer of collagen, gives promising results. Due to the controlled dehydration of the corneal surface, the process of 213 nm + 1444 nm laser ablation ensures a better reproducibility and a higher productivity. It is shown that in the case of combined 213 nm + 1444 nm treatment the reproducibility of results is better twice or more than in the case of 213 nm ablation for some eyes.

### References

1. Femtosecond-pulse laser ablation of human corneas / W. Kautek [et al.] // *Appl. Phys. A.* – 1994. – Vol. 58. – P. 513–518.
2. *Krüger, J.* Ultrashort Pulse Laser Interaction with Dielectrics and Polymers / J. Krüger, W. Kautek // *Advances in Polymer Science.* – Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag. 2004. – Vol. 168. – P. 247–289.
3. *Lubatschowski, H.* Ophthalmic Applications / H. Lubatschowski, A Heisterka // *Femtosecond Technology for Technical and Medical Applications. Topics in Applied Physics* / Eds: F. Dausinger, F. Lichtner, H. Lubatschowski. – Heidelberg: Springer-Verlag, 2004. – Vol. 96. – P. 187–201.
4. *Fisher, B. T.* Measurement of small-signal absorption coefficient and absorption cross section of collagen for 193-nm excimer laser light and the role of collagen in tissue ablation / B. T. Fisher, D. W. Hahn // *Appl. Optics.* – 2004. – Vol. 43. – P. 5443–5451.
5. *Pettit, G. H.* Corneal-tissue absorption coefficients for 193- and 213-nm ultraviolet radiation / G. H. Pettit, M. N. Ediger // *Appl. Opt.* – 1996. – Vol. 35. – P. 3386–3391.
6. UV Solid State Laser (213nm) Photo-Refractive Keratectomy / Q. Ren [et al.] // *Ophthalmology.* – 1994. – Vol. 101. – P. 883–889.
7. Solid state lasers for ocular surgery: preclinical stud / R. Cubeddu [et al.] // *Proc. SPIE.* – 1994. – Vol. 2079. – P. 177–182.
8. Comparing 213 nm and combined 213 nm + 1440 nm laser ablation treatment of bovine cornea / S. Batische [et al.] // *Plasma physics and plasma technology: VII Intern. Conf., Minsk, Belarus, Sept. 17–21, 2012.* – Minsk, 2012. – Vol. 1. – P. 392–395.
9. Mechanistic comparison of pulse laser induced phase separation of particulates from cellulose paper at 213 nm and 532 nm / S. Arif [et al.] // *Appl. Phys. A.* – 2013. – Vol. 110. – P. 501–509.
10. A powerful, repetitively pulsed 1444-nm Nd:YAG laser / S. A Batische [et al.] // *Quantum Electronics.* – 2000. – Vol. 30. – P. 673–674.

*Поступила в редакцию 01.10.2015*

УДК 621.315.592

Ф. П. КОРШУНОВ, Н. Е. ЖДАНОВИЧ, В. А. ГУРИНОВИЧ, С. В. ЛУКША

### ВЛИЯНИЕ ЭЛЕКТРОННОГО ОБЛУЧЕНИЯ НА ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ $p$ - $n$ -СТРУКТУР НА ЯДЕРНО-ЛЕГИРОВАННОМ КРЕМНИИ

Научно-практический центр Национальной академии наук Беларуси по материаловедению, Минск, Беларусь,  
e-mail: korshunov@ifftp.bas-net.by, jdan@ifftp.bas-net.by, gurinovich@ifftp.bas-net.by

В работе проведены исследования влияния электронного облучения с энергией 4 МэВ на характеристики высоковольтных (до 4,5 кВ) диодных кремниевых  $p$ - $n$ -структур, изготовленных на ядерно-легированном кремнии. Получены дозовые зависимости статических и динамических характеристик  $p$ - $n$ -структур, определен коэффициент радиационных повреждений времени жизни неосновных носителей заряда  $K_{\tau}$ . С помощью метода DLTS-спектроскопии определено образование в запрещенной зоне базового  $n$ -Si шести энергетических уровней радиационных дефектов, влияющих на характеристики облученных  $p$ - $n$ -структур.

*Ключевые слова:* электронное облучение, высоковольтные диодные  $p$ - $n$ -структуры, статические и динамические характеристики, энергетические уровни.

F. P. KORSHUNOV, N. E. ZHDANOVICH, V. A. GURINOVICH, S. V. LUKSHA

### EFFECT OF ELECTRON RADIATION ON THE ELECTRICAL CHARACTERISTICS OF THE $p$ - $n$ -STRUCTURES BASED ON NUCLEAR-DOPED SILICON

Scientific-Practical Materials Research Centre of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus,  
e-mail: korshunov@ifftp.bas-net.by, jdan@ifftp.bas-net.by, gurinovich@ifftp.bas-net.by

The article studies the effect of electron radiation with energy of 4 MeV on the characteristics of high-voltage (4.5 kV) silicon diode  $p$ - $n$ -structures based on nuclear-doped silicon. During the research the dose dependences of the correlations between the static and dynamic characteristics of the  $p$ - $n$  structures were built, and the radiation damage coefficient of minority carrier lifetime  $K_{\tau}$  was determined. Using the DLTS-spectroscopy method, the formation in the band-gap of basic  $n$ -Si of six energy levels of radiation defects affecting the characteristics of irradiated  $p$ - $n$ -structures was determined.

*Keywords:* electron irradiation, high-voltage diode  $p$ - $n$ -structure, static and dynamic characteristics, energy levels.

**Введение.** При облучении электронами с  $E = 4$  МэВ мощных эпитаксиальных диодных  $p$ - $n$ -структур значение времени жизни неосновных носителей заряда  $\tau$  в  $n$ -базе уменьшается в 15–19 раз без существенного изменения величины прямого падения напряжения [1]. Данный экспериментальный факт объясняется оптимизацией толщины базовой области  $W$  низковольтных ( $\leq 600$  В) диодных  $p$ - $n$ -структур. Для изготовления высоковольтных диодов с обратным напряжением  $U_{\text{обр}} \geq 1500$  В используется высокоомный Si, полученный методом легирования в ядерном реакторе [2], при этом значения  $W$  указанных  $p$ - $n$ -структур существенно больше эпитаксиальных. В этой связи остается актуальным вопрос о возможности регулирования значения  $\tau$  таких диодных  $p$ - $n$ -структур радиационными методами [3].

Целью данной работы является исследование влияния облучения электронами с энергией  $E = 4$  МэВ на статические и динамические параметры высоковольтных диодных  $p$ - $n$ -структур, изготовленных на ядерно-легированном кремнии (ЯЛК).

**Методика эксперимента.** Исследуемые диодные  $p$ - $n$ -структуры были изготовлены на ЯЛК  $n$ -типа проводимости с удельным сопротивлением  $\rho = 300$  Ом·см по стандартной диффузионной технологии. Здесь следует отметить, что характеристики  $p$ - $n$ -структур на кремнии, полученном

ядерным легированием, близки к теоретическим, поскольку легирующая примесь распределяется равномерно по кристаллу. При обычном легировании неравномерность распределения примеси составляет до 15–20 %, а нужно, чтобы она была как можно меньше, тогда характеристики, особенно силовых приборов, будут ближе к расчетным. Кремний – наиболее широко используемый материал в производстве полупроводниковых приборов – в результате ядерных реакций можно равномерно пролегировать фосфором. Выращенный чистый кристалл кремния состоит в основном из трех его изотопов, а именно  $\text{Si}^{28}$  (92,21 %),  $\text{Si}^{29}$  (4,7 %) и  $\text{Si}^{30}$  (3,09 %). Теперь, если проанализировать все типы ядерных реакций, происходящих с изотопами кремния при облучении, оказывается, что изотоп  $\text{Si}^{30}$ , захватив нейтрон, может превращаться в стабильный изотоп фосфора  $\text{P}^{31}$ , который является донором для кремния. Кристалл кремния, легированный фосфором, имеет электронный тип проводимости ( $n$ -тип). Ядерная реакция превращения атома кремния в атом фосфора записывается следующим образом:  $\text{Si}^{30} + n \rightarrow \text{Si}^{31} \rightarrow \text{P}^{31} + \beta^-$ . Изотоп кремния  $\text{Si}^{30}$  захватывает медленный нейтрон и переходит в изотоп  $\text{Si}^{31}$ , который является нестабильным и через 2,6 ч переходит в изотоп фосфора с испусканием отрицательно заряженной  $\beta^-$ -частицы. Изотопы  $\text{Si}^{28}$  и  $\text{Si}^{29}$  при ядерных реакциях не дают других химических элементов, поэтому не изменяют свойства кремния. Надо отметить, что ядерные реакции очень эффективно протекают на медленных нейтронах ядерного реактора ( $E_n < 200$  кэВ). Если такой кристалл нагреть до температуры порядка 1070 К, то все атомы, смещенные облучением, возвратятся на прежние места за исключением  $\text{Si}^{30}$ , перешедшего в фосфор. То есть произойдет отжиг радиационных дефектов, и кристалл станет пригодным для изготовления приборов с равномерным распределением примеси.

Площадь структуры составляла  $10 \text{ мм}^2$ , ширина высокоомной  $n$ -базы – порядка 200 мкм. Облучение осуществлялось электронами с энергией 4 МэВ при плотности потока электронов  $2 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-2} \text{ с}^{-1}$ . Температура облучения не превышала 300 К.

Измерялись основные характеристики диодов с точки зрения энергосбережения: прямое падение напряжения  $U_{\text{пр}}$  при разных значениях прямого тока в импульсном режиме (длительность импульса 400 мкс) и время жизни неосновных носителей заряда (ННЗ) методом Локса [3].

Определение параметров радиационных дефектов (концентрация, энергия активации, сечение захвата носителей заряда) в базовой области  $p$ - $n$ -структур осуществлялось методом нестационарной емкостной спектроскопии глубоких уровней (Deep Level Transient Spectroscopy — DLTS). При этом напряжение обратного смещения на образцах составляло  $-10$  В, длительность импульса заполнения ловушек носителями заряда — 0,01 с. Измерялись спектры в режимах заполнения ловушек как основными, так и неосновными носителями заряда. В первом случае напряжение импульса заполнения было 0 В, а во втором — +2 В. Установка рассчитана на измерение спектров в диапазоне температур  $78 \div 400$  К.

**Результаты и их обсуждение.** На рис. 1 показано изменение прямой ВАХ диодных  $p$ - $n$ -структур в результате электронного облучения. Измерения проводились в импульсном режиме. Дли-

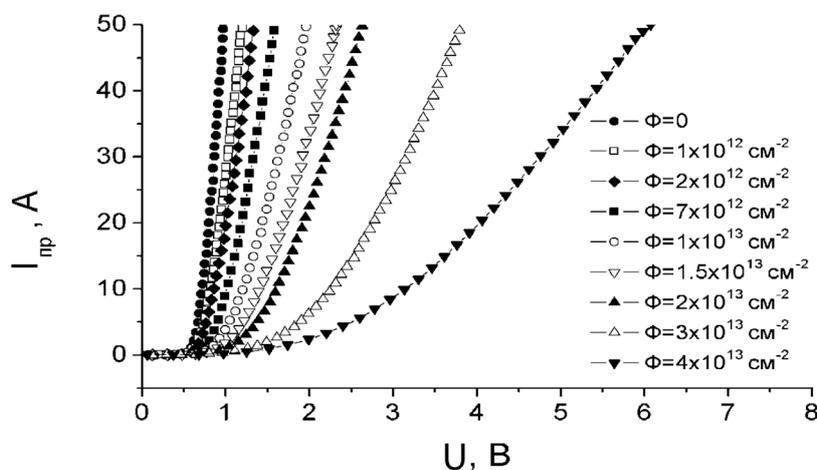


Рис. 1. Изменение прямой ВАХ диодных  $p$ - $n$ -структур в результате облучения электронами с энергией 4 МэВ

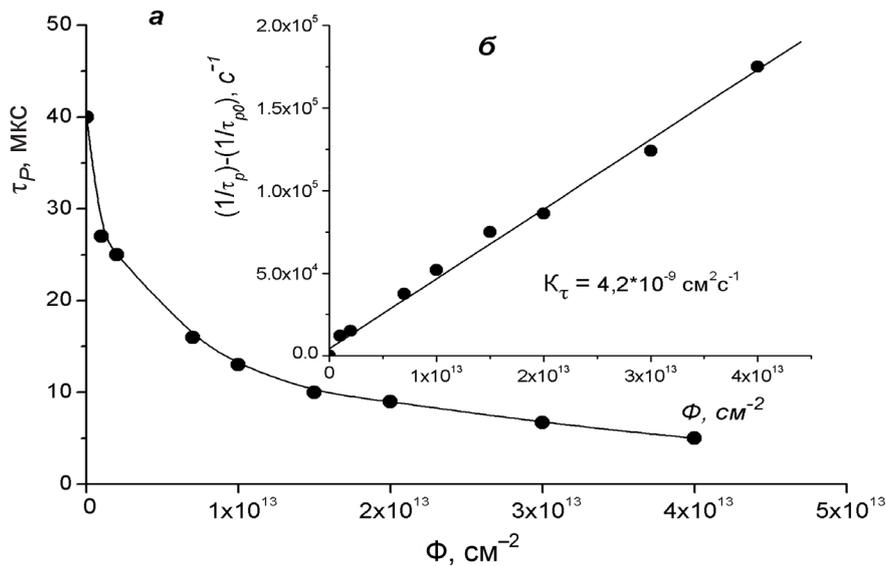


Рис. 2. Зависимость времени жизни ННЗ в *n*-базе диодных *p-n*-структур от флюенса электронного облучения с энергией 4 МэВ

тельность импульсов составляла 400 мкс с задержкой между ними 200 мс. Из полученных результатов следует, что с ростом флюенса электронов характеристика монотонно смещается в сторону больших значений прямого падения напряжения с одновременным уменьшением крутизны. Данный процесс становится особенно выраженным при значениях флюенса  $\Phi \geq 10^{13} \text{ см}^{-2}$ . Так, уже при  $\Phi = 2 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-2}$  прямое падение напряжения увеличивается в 2 раза при значениях прямого тока  $I_{\text{пр}} \geq 20 \text{ А}$ .

На рис. 2 приведена зависимость времени жизни неосновных носителей заряда  $\tau_p$  в высокоомной *n*-базе диодных *p-n*-структур в зависимости от флюенса электронного облучения. Во всем исследуемом диапазоне флюенсов электронов наблюдается монотонное уменьшение значения  $\tau_p$ . Наиболее активно этот процесс происходит на начальном этапе облучения.

Так, при  $\Phi = 1,5 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-2}$  значение времени жизни уменьшается в 3–4 раза. При дальнейшем увеличении значения  $\Phi$  скорость изменения  $\tau_p$  значительно меньше. Такой характер изменения  $\tau_p$  с ростом дозы можно связать с насыщением основного канала рекомбинации электронов и дырок в *n*-базе, обусловленным радиационными дефектами. Здесь хорошо выполняется следующая зависимость  $\tau_p(\Phi)$  (рис. 2, б):

$$1/\tau_p = 1/\tau_{p0} + K_\tau \Phi, \quad (1)$$

где  $\tau_{p0}$  – время жизни неосновных носителей заряда до облучения;  $K_\tau$  – константа радиационного изменения времени жизни неосновных носителей заряда;  $\Phi$  – флюенс электронов. Определенное значение константы оказалось равным  $K_\tau = 4,2 \cdot 10^{-9} \text{ см}^2 \text{ с}^{-1}$ .

На рис. 3 показано соотношение между величинами времени жизни неосновных носителей заряда и прямого падения напряжения при  $I_{\text{пр}} = 20 \text{ А}$ . Из полученной зависимости  $U_{\text{пр}}(\tau)$  видно, что при значениях  $\tau > 13 \text{ мкс}$  величина  $U_{\text{пр}}$  не превышает 1,4 В.

При облучении электронами исследуемых диодных *p-n*-структур в их объеме генерируются радиационные дефекты, обладающие высокой рекомбинационной способностью. Увеличение концентрации рекомбинационных центров ведет к снижению времени жизни неосновных носителей заряда в *n*-базе *p-n*-структур и увеличению падения прямого напряжения [2]. Значение  $U_{\text{пр}}$  промышленных диодов ограничивается нормами ТУ, что соответственно лимитирует минимальные величины  $\tau_p$ , достигаемые путем радиационной обработки.

Высокая чувствительность исследуемых характеристик к проникающей радиации *p-n*-структур характерна для высоковольтных диодов, изготовленных на высокоомном материале и имеющих, как правило, большие толщины базовых областей ( $> 100 \text{ мкм}$ ). Оценим значение диффузионной длины дырок  $L_p$  в *n*-базе до и после облучения образцов флюенсом электронов  $\Phi = 1 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-2}$ .

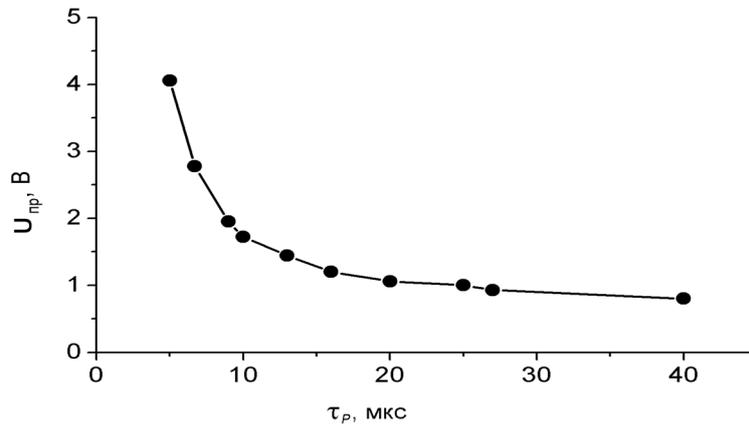


Рис. 3. Зависимость  $U_{пр}(\tau_p)$  для диодных  $p$ - $n$ -структур, облученных электронами с энергией  $E = 4$  МэВ

Для этого воспользуемся известным соотношением между коэффициентом диффузии дырок  $D_p = 12,5 \text{ см}^2 \cdot \text{с}^{-1}$ ,  $\tau_p$  и  $L_p$  [4]:

$$L_p = \sqrt{D_p \tau_p}. \quad (2)$$

До облучения  $\tau = 40$  мкс (см. рис. 2). Ему соответствует значение  $L_p = 223$  мкм, что больше толщины базовой области  $W \sim 200$  мкм диодных  $p$ - $n$ -структур. При высоких уровнях инжекции проводимость  $n$ -базы полностью модулируется дырками, что обеспечивает относительно небольшие значения прямого падения напряжения [5]. Это условие примерно выполняется и для исследуемых образцов, облученных флюенсами электронов  $\Phi < (1\div 2) \cdot 10^{13} \text{ см}^{-2}$ .

После облучения образцов флюенсом электронов  $\Phi = 1 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-2}$   $\tau = 13$  мкс (см. рис. 2),  $L_p = 127$  мкм. Для кремниевых  $p$ - $n$ -структур при таком соотношении между  $L_p$  и  $W$  проводимость базовой области уже не полностью модулируется дырками [6]. Вследствие этого дальнейшее уменьшение  $L_p$  с ростом  $\Phi$  ведет к резкому увеличению прямого падения напряжения, что и наблюдается в эксперименте (см. рис. 1).

На рис. 4 приведены DLTS-спектры исследуемой структуры, облученной электронами с энергией 4 МэВ флюенсом  $3 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-2}$ . Как видно, в исследуемый образец вводится пять уровней дефектов в верхней половине запрещенной зоны ( $E1$ – $E5$ ) и один уровень в нижней половине запрещенной зоны ( $H1$ ):

$$\begin{aligned} E1 - E_c & -0,18 \text{ эВ и } \sigma_n = 1,86 \cdot 10^{-14} \text{ см}^2; \\ E2 - E_c & -0,25 \text{ эВ и } \sigma_n = 4,73 \cdot 10^{-15} \text{ см}^2; \\ E3 - E_c & -0,36 \text{ эВ и } \sigma_n = 2,5 \cdot 10^{-15} \text{ см}^2; \\ E4 - E_c & -0,41 \text{ эВ и } \sigma_n = 8,2 \cdot 10^{-16} \text{ см}^2; \\ E5 - E_c & -0,53 \text{ эВ и } \sigma_n = 1,55 \cdot 10^{-15} \text{ см}^2; \\ H1 - E_v & +0,36 \text{ эВ и } \sigma_n = 2,5 \cdot 10^{-15} \text{ см}^2. \end{aligned}$$

Сравнение параметров ловушек с известными значениями для радиационных дефектов в кристаллах  $\text{Cz-Si}$  позволило сделать вывод, что ловушка  $E1$  соответствует акцепторному уровню комплекса вакансия–кислород ( $V$ – $O$ ) ( $A$ -центр), ловушки  $E2$  и  $E4$  – двум акцепторным уровням дивакансии, ловушка  $H1$  – комплексу углерод внедрения–кислород внедрения  $C_i$ – $O_i$ . Природа дефектов с уровнями  $E3$  и  $E5$  пока не установлена. Что касается уровня  $E5 - E_c - 0,53$  эВ,  $\sigma_n = 1,55 \cdot 10^{-15} \text{ см}^2$ , то он, по всей видимости, является остаточным дефектом трансмутационного легирования. Следует заметить, что основные радиационные дефекты термостабильны, что позволяет использовать их вместо золота для увеличения быстродействия кремниевых приборов.

**Заключение.** В статье исследовано влияние облучения электронами с энергией 4 МэВ на статические и динамические параметры высоковольтных (до 4,5 кВ) кремниевых диодных  $p$ - $n$ -структур, изготовленных на ядерно-легированном кремнии с удельным сопротивлением  $\rho = 300 \text{ Ом} \cdot \text{см}$ . Установлено, что при флюенсах электронов  $\Phi = 1,5 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-2}$  значение времени

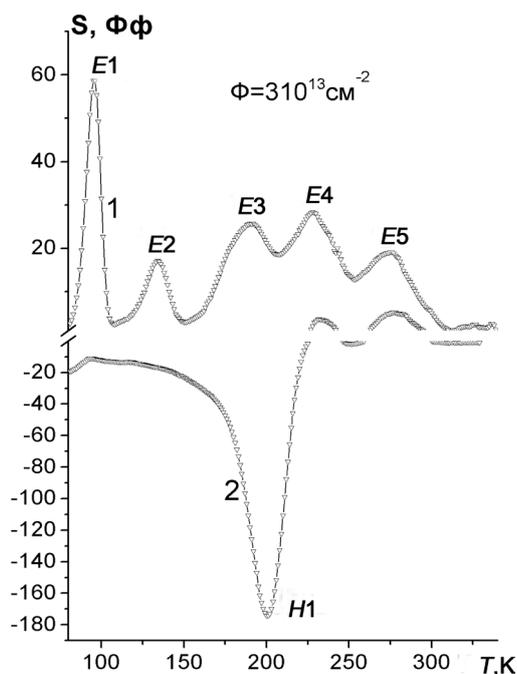


Рис. 4. DLTS-спектры облученной быстрыми электронами высоковольтной структуры в режиме обратного смещения  $U_{обр} = -10$  В (1) и инжекции  $I_{пр} = 5$  мА (2)

жизни неосновных носителей заряда в  $n$ -базе уменьшается в 3–4 раза, а величина прямого падения напряжения при токе  $I_{пр} = 20$  А не превышает 1,4 В. Константа радиационного изменения времени жизни дырок в  $n$ -базе  $K_t = 4,2 \cdot 10^{-9}$  см<sup>2</sup>с<sup>-1</sup>. Полученные результаты позволяют использовать электронное облучение с энергией 4 МэВ для увеличения быстродействия высоковольтных силовых диодов на ядерно-легированном кремнии.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф14-124).

### Список использованной литературы

1. Коршунов, Ф. П. Влияние электронного облучения на характеристики эпитаксиальных кремниевых  $p$ - $n$ -структур / Ф. П. Коршунов, Ю. В. Богатырев, П. М. Гурин // Вес. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. фіз.-мат. навук. – 2007. – № 3. – С. 92–95.
2. Коршунов, Ф. П. Воздействие радиации на интегральные микросхемы / Ф. П. Коршунов, Ю. В. Богатырев, В. А. Вавилов. – Минск: Наука и техника, 1986.
3. Lox, B. Transient response of  $p$ - $n$ -junction / B. Lox, S. T. Newstadter // J. Appl. Phys. – 1954. – Vol. 25. – P. 1148–1154.
4. Епифанов, Г. И. Физические основы микроэлектроники / Г. И. Епифанов. – М.: Сов. радио, 1971.
5. Гаман, В. И. Физика полупроводниковых приборов / В. И. Гаман. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 1989.
6. Коршунов, Ф. П. Радиационные эффекты в полупроводниковых приборах / Ф. П. Коршунов, Г. В. Гатальский, Г. М. Иванов. – Минск: Наука и техника, 1978.

Поступила в редакцию 13.11.2015

УДК 621.372.8.029.7:681.586.36

*И. А. ГОНЧАРЕНКО, В. Н. РЯБЦЕВ*

## **МЕТОД РАСЧЕТА ИЗОГНУТЫХ МИКРОСТРУКТУРИРОВАННЫХ ВОЛНОВОДОВ С НЕСКОЛЬКИМИ СЕРДЦЕВИНАМИ**

*Командно-инженерный институт МЧС Республики Беларусь, Минск, Беларусь,  
e-mail: igor02@tut.by, v.reabtsev@gmail.com*

В работе представлена модификация метода линий для расчета параметров направляемых мод прямых и изогнутых микроструктурированных волокон с тремя сердцевинами. Проанализированы эффективные показатели преломления, коэффициент потерь на излучение, а также поперечное распределение полей основных мод таких волокон в зависимости от их структурных параметров (диаметра и разнесения воздушных отверстий, разнесения сердцевин) и величины изгиба.

*Ключевые слова:* микроструктурированное волокно, волокно с несколькими сердцевинами, метод линий, изгиб волокна, эффективный показатель преломления моды, распределение полей мод.

*I. A. GONCHARENKO, V. N. REABTSEV*

## **METHOD OF CALCULATION OF BENT MULTI-CORE MICRO-STRUCTURED FIBERS**

*Institute for Command Engineers of the Ministry for Emergency Situations of the Republic of Belarus, Minsk, Belarus,  
e-mail: igor02@tut.by, v.reabtsev@gmail.com*

We present the modification of the line method for calculation of the parameters of guided modes of straight and bent three-core microstructured fibers. On the basis of the method proposed, we analyzed the effective indices, radiation loss coefficients and a transverse field distribution of the fundamental modes in such fibers as a function of their structure (air holes diameter and separation, core separation) and bend value.

*Keywords:* microstructured fiber, multi-core fiber, line method, bent fiber, effective mode index, mode field distribution.

**Введение.** Высокая чувствительность характеристик распространения микроструктурированных оптических волокон (МОВ) к параметрам структуры волокна открывает возможности создания датчиков на их основе. Такие волоконно-оптические системы могут с успехом применяться для контроля температуры, механических напряжений, давления и других параметров.

Деформации наблюдаемых объектов и сооружений приводят к изгибам микроструктурированных волокон, являющихся чувствительными элементами датчиков. В области изгиба возникают потери на излучение, которые влияют на направляющие свойства МОВ. Таким образом, для оценки величины внешних воздействий следует изучить поведение мод микроструктурированных волокон с несколькими сердцевинами в области изгиба.

Для расчета направляющих свойств микроструктурированных волноводов необходимы полностью векторные модели, которые учитывают комплексную структуру профиля поперечного сечения. Они могут быть использованы для анализа микроструктурированных волноводов различной структуры с механизмами локализации излучения как на основе полного внутреннего отражения, так и с более сложным механизмом на основе фотонных запрещенных зон. Однако полностью численные методы требуют больших вычислительных и временных затрат. Кроме того, при их применении помимо корректных могут появляться и случайные решения. Поэтому на определение корректного решения из множества полученных должны быть затрачены дополнительные усилия.

Для уменьшения затрат при расчете параметров и распределении полей направляемых мод в микроструктурированных волокнах можно использовать метод линий [1, 2] – специальный метод конечных разностей, позволяющий анализировать распространение волн в многослойных диэлектрических структурах [3]. В данном методе применяется полуаналитический подход, что позволяет получать результаты с меньшими вычислительными затратами по сравнению с другими методами; автоматически учитывается связь мод; при решении не возникают нефизические или случайные моды, поэтому не имеется проблем со сходимостью [4, 5]. Недостатком метода линий является отсутствие гибкости: для каждой структуры требуется свой алгоритм.

В настоящей работе предлагается модификация метода линий для расчета параметров и распределения полей направляемых мод прямых и изогнутых микроструктурированных волокон с тремя сердцевинами. Три сердцевины соответствуют симметрии гексагональной структуры микроструктурированного волокна и дают возможность по наиболее простому алгоритму производить расчет направления изгиба.

**Основные уравнения.** Поперечное сечение микроструктурированных волокон гексагональной структуры с тремя сердцевинами и система координат показаны на рис. 1.

Мы используем цилиндрическую систему координат, где угловая координата  $\varphi$  соответствует изгибу. Согласно методу линий, исследуемая структура делится на слои в направлении оси  $z$ . В каждом слое диэлектрическая проницаемость считается функцией только радиальной координаты:  $\varepsilon = \varepsilon(r)$ . Распространение волны в  $+\varphi$  направлении описывается как

$$\exp(-jk_\varphi \varphi) = \exp(-j\sqrt{\varepsilon_{re}} \varphi r_0), \quad (1)$$

где  $\varepsilon_{re}$  – эффективная постоянная распространения моды.

Следовательно, производную по координате  $\varphi$  можно записать

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = -jk_\varphi = -j\sqrt{\varepsilon_{re}} r_0, \quad (2)$$

где  $r_0 = k_0 r_0$ ;  $k_0$  – волновое число;  $r_0$  – радиус изгиба.

Из уравнений Максвелла для каждого слоя выводятся два связанных обобщенных уравнения передающей линии относительно координаты  $z$  [6]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} -\tilde{H}_r \\ j\bar{r}_n \tilde{H}_\varphi \end{bmatrix} &= -[R_E] \begin{bmatrix} j\bar{r}_n E_\varphi \\ E_r \end{bmatrix}, \\ \frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} j\bar{r}_n E_\varphi \\ E_r \end{bmatrix} &= -[R_H] \begin{bmatrix} -\tilde{H}_r \\ j\bar{r}_n \tilde{H}_\varphi \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3)$$

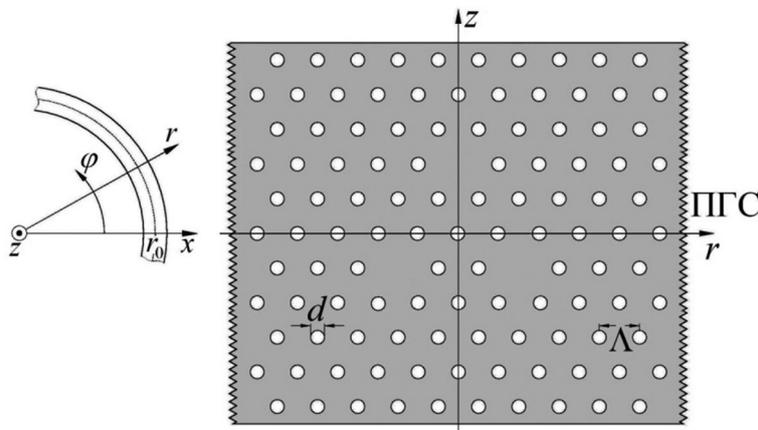


Рис. 1. Поперечное сечение микроструктурированного волокна и система координат, используемая при расчетах

$$\begin{aligned}
[R_E] &= \begin{bmatrix} D_{\bar{r}} \mu^{-1} \bar{r}_n^{-1} D_{\bar{r}} + \varepsilon_{\phi} \bar{r}_n^{-1} & -\sqrt{\varepsilon_{re}} D_{\bar{r}} \mu^{-1} \bar{r}_n^{-1} \\ -\sqrt{\varepsilon_{re}} \mu^{-1} \bar{r}_n^{-1} D_{\bar{r}} & \varepsilon_{re} \bar{r}_n^{-1} \mu^{-1} - \bar{r}_n \varepsilon_r \end{bmatrix}, \\
[R_H] &= \begin{bmatrix} \varepsilon_{re} \bar{r}_n^{-1} \varepsilon_z^{-1} - \bar{r}_n \mu & \sqrt{\varepsilon_{re}} \bar{r}_n^{-1} \varepsilon_z^{-1} D_{\bar{r}} \\ \sqrt{\varepsilon_{re}} D_{\bar{r}} \varepsilon_z^{-1} \bar{r}_n^{-1} & D_{\bar{r}} \varepsilon_z^{-1} \bar{r}_n^{-1} D_{\bar{r}} + \mu \bar{r}_n^{-1} \end{bmatrix}, \\
E_z &= \varepsilon_z^{-1} \begin{bmatrix} \sqrt{\varepsilon_{re}} \bar{r}_n^{-1}; & -\bar{r}_n^{-1} D_{\bar{r}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\tilde{H}_r \\ j \bar{r}_n \tilde{H}_{\phi} \end{bmatrix}, \\
\tilde{H}_z &= \mu^{-1} \begin{bmatrix} \bar{r}_n^{-1} D_{\bar{r}}; & -\sqrt{\varepsilon_{re}} \bar{r}_n^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j \bar{r}_n E_{\phi} \\ E_r \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{4}$$

где  $\tilde{H}_{r,\phi,z} = \sqrt{\varepsilon_0/\mu_0} H_{r,\phi,z}$ ;  $E_{r,\phi,z}$  и  $H_{r,\phi,z}$  – составляющие электрического и магнитного полей;  $D_{\bar{r}}$  – обозначение  $\partial/\partial \bar{r}$ .

Все координаты и размерности нормированы относительно волнового числа  $k_0$  в свободном пространстве:  $\bar{z} = k_0 z$ ,  $\bar{r} = k_0 r$ ,  $\bar{r}_n = \bar{r}/\bar{r}_0$ . Комбинация двух уравнений (3) дает волновые уравнения для электрических и магнитных полей, которые полностью эквивалентны:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \begin{bmatrix} \bar{r}_n E_{\phi} \\ E_r \end{bmatrix} - [R_H][R_E] \begin{bmatrix} \bar{r}_n E_{\phi} \\ E_r \end{bmatrix} &= 0, \\
\frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \begin{bmatrix} -H_r \\ \bar{r}_n H_{\phi} \end{bmatrix} - [R_E][R_H] \begin{bmatrix} -H_r \\ \bar{r}_n H_{\phi} \end{bmatrix} &= 0.
\end{aligned} \tag{5}$$

Например, для произведения  $[Q_H] = [R_E][R_H]$  мы получаем четыре подматрицы:

$$\begin{aligned}
Q_{H11} &= -D_{\bar{r}} \mu^{-1} \bar{r}_n^{-1} D_{\bar{r}} \mu \bar{r}_n + \varepsilon_{re} \varepsilon_{\phi} \varepsilon_z^{-1} \bar{r}_n^{-2} - \varepsilon_{\phi} \mu, \\
Q_{H12} &= \sqrt{\varepsilon_{re}} \left( \bar{r}_n^{-2} \varepsilon_{\phi} \varepsilon_z^{-1} D_{\bar{r}} - D_{\bar{r}} \bar{r}_n^{-2} \right), \\
Q_{H21} &= \sqrt{\varepsilon_{re}} \left( \bar{r}_n^{-1} D_{\bar{r}} \bar{r}_n - \bar{r}_n \varepsilon_r D_{\bar{r}} \varepsilon_z^{-1} \bar{r}_n^{-1} \right), \\
Q_{H22} &= -\varepsilon_r \bar{r}_n D_{\bar{r}} \varepsilon_z^{-1} \bar{r}_n^{-1} D_{\bar{r}} + \varepsilon_{re} \bar{r}_n^{-2} - \varepsilon_r \mu.
\end{aligned} \tag{6}$$

Произведение  $[R_H][R_E]$  дает матрицу  $[Q_E]$ , также состоящую из четырех подматриц.

**Дискретизация дифференциальных уравнений.** Проведем дискретизацию дифференциальных уравнений в частных производных (5) по координате  $r$  для получения обыкновенных дифференциальных уравнений, которые можно решить аналитически. При этом необходимо дискретизировать не только компоненты полей, но и диэлектрическую проницаемость и координату  $r$ .

Дискретизация проводится по двум различным системам линий:

$$\begin{aligned}
E_r, H_{\phi}, H_z &\rightarrow \mathbf{E}_r, \mathbf{H}_{\phi}, \mathbf{H}_z, & H_r, E_{\phi}, E_z &\rightarrow \mathbf{H}_r, \mathbf{E}_{\phi}, \mathbf{E}_z, \\
\varepsilon_r &\rightarrow \mathbf{e}_r, & \varepsilon_{\phi}, \varepsilon_z &\rightarrow \mathbf{e}_{\phi}, \mathbf{e}_z, \\
\bar{r}_n &\rightarrow \bar{\mathbf{r}}_0, & \bar{r}_n &\rightarrow \bar{\mathbf{r}}_0, \\
D_{\bar{r}} &\rightarrow \bar{h}^{-1} \mathbf{D}_r^{\circ} = \bar{\mathbf{D}}_r^{\circ}, & D_{\bar{r}} &\rightarrow \bar{h}^{-1} \mathbf{D}_r^{\bullet} = \bar{\mathbf{D}}_r^{\bullet},
\end{aligned} \tag{7}$$

где  $\bar{h} = k_0 h$  – нормализованный шаг дискретизации;  $\mathbf{e}$  и  $\bar{\mathbf{r}}$  – диагональные матрицы, и приводит к преобразованию скалярных величин в набор значений.

Символы  $\circ$  и  $\bullet$  обозначают систему линий дискретизации, к которой принадлежат величины. Системы линий смещены относительно друг друга на величину  $h/2$ . Для учета потерь на излучение из-за локализации и изгиба на внешних границах структуры вводятся поглощающие граничные условия (ПГС) [7]. В результате уравнение (5) переписывается в виде

$$\frac{d^2}{d\bar{z}^2} \mathbf{F} - \mathbf{Q} \mathbf{F} = 0, \tag{8}$$

где  $\mathbf{F}$  означает либо электрическое, либо магнитное поле, т. е.  $\mathbf{F} = \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} j\bar{\mathbf{r}}_0 \mathbf{E}_\varphi \\ \mathbf{E}_r \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_r \\ j\bar{\mathbf{r}}_0 \mathbf{H}_\varphi \end{bmatrix}$   
и, например,

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{H11} &= -\bar{\mathbf{D}}_r^\circ \bar{\mathbf{r}}_0^{-1} \bar{\mathbf{D}}_r^\circ \bar{\mathbf{r}}_0 + \varepsilon_{re} \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_z^{-1} \bar{\mathbf{r}}_0^{-2} - \mathbf{e}_{\varphi\mu}, \\ \mathbf{Q}_{H12} &= \sqrt{\varepsilon_{re}} \left( \bar{\mathbf{r}}_0^{-2} \mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_z^{-1} \bar{\mathbf{D}}_r^\circ - \bar{\mathbf{D}}_r^\circ \bar{\mathbf{r}}_0^{-2} \right), \\ \mathbf{Q}_{H21} &= \sqrt{\varepsilon_{re}} \left( \bar{\mathbf{r}}_0^{-1} \bar{\mathbf{D}}_r^\circ \bar{\mathbf{r}}_0 - \bar{\mathbf{r}}_0 \mathbf{e}_r \bar{\mathbf{D}}_r^\circ \mathbf{e}_z^{-1} \bar{\mathbf{r}}_0^{-1} \right), \\ \mathbf{Q}_{H22} &= -\mathbf{e}_r \bar{\mathbf{r}}_0 \bar{\mathbf{D}}_r^\circ \mathbf{e}_z^{-1} \bar{\mathbf{r}}_0^{-1} \bar{\mathbf{D}}_r^\circ + \varepsilon_{re} \bar{\mathbf{r}}_0^{-2} - \mathbf{e}_r \mu. \end{aligned} \quad (9)$$

С помощью преобразования к главным осям (диагонализации)

$$\mathbf{T}_H^{-1} \mathbf{Q}_H \mathbf{T}_H = \Gamma^2, \quad \mathbf{T}_E = j\mathbf{R}_H \mathbf{T}_H \Gamma^{-1}, \quad (10)$$

или

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_E^{-1} \mathbf{Q}_E \mathbf{T}_E &= \Gamma^2, \quad \mathbf{T}_H = j\mathbf{R}_E \mathbf{T}_E \Gamma^{-1}, \\ \mathbf{E} &= \mathbf{T}_E \bar{\mathbf{E}}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{T}_H \bar{\mathbf{H}}, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\mathbf{T}_{E,H}$  – собственные матрицы, т. е. матрицы, столбцы которых состоят из собственных векторов, а  $\Gamma$  – собственные значения, из (9) получим несвязанные уравнения в преобразованном пространстве

$$\frac{d^2}{d\bar{z}^2} \bar{\mathbf{F}} - \Gamma^2 \bar{\mathbf{F}} = 0, \quad (12)$$

общее решение которых имеет вид

$$\bar{\mathbf{F}} = \exp(-\Gamma \bar{z}) \bar{\mathbf{F}}^f + \exp(\Gamma \bar{z}) \bar{\mathbf{F}}^b. \quad (13)$$

**Формулировка и решение детерминантного уравнения.** Решив задачу на собственные значения (11), можно получить матрицы преобразования  $\mathbf{T}_{E,H}$  и собственные векторы  $\Gamma$  для каждого слоя структуры. Для того чтобы выявить соотношение между полями на границе двух слоев в плоскостях  $z = z_0$  и  $z = z_0 + b$ , введем коэффициент отражения  $\mathbf{p}$  как отношение между волнами, распространяющимися в прямом и обратном направлениях [8]:

$$\mathbf{p} \bar{\mathbf{F}}^b(\bar{z}) = \mathbf{p}(\bar{z}) \bar{\mathbf{F}}^f. \quad (14)$$

Внутри слоя поля и коэффициент отражения меняются в соответствии с выражениями

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{F}}^f(\bar{z}_0 + \bar{b}) &= \exp(-\Gamma \bar{b}) \bar{\mathbf{F}}^f(\bar{z}_0), \\ \bar{\mathbf{F}}^b(\bar{z}_0) &= \exp(-\Gamma \bar{b}) \bar{\mathbf{F}}^b(\bar{z}_0 + \bar{b}), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\mathbf{p}(\bar{z}_0) = \exp(-\Gamma \bar{b}) \mathbf{r}(\bar{z}_0 + \bar{b}) \exp(-\Gamma \bar{b}), \quad (16)$$

где  $\bar{b} = k_0 b$ ,  $b$  – толщина слоя.

Преобразование коэффициента отражения на границе слоев II и I, где компоненты поля равны в исходном пространстве, можно получить, используя выражение

$$\mathbf{p}_I = (\mathbf{e}_{II} - \mathbf{h}_{II})(\mathbf{e}_{II} + \mathbf{h}_{II})^{-1}, \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{II} &= (\mathbf{T}_E^I)^{-1} \mathbf{T}_E^{II} (\mathbf{I} + \mathbf{p}_{II}), \\ \mathbf{h}_{II} &= (\mathbf{T}_H^I)^{-1} \mathbf{T}_H^{II} (\mathbf{I} - \mathbf{p}_{II}), \end{aligned} \quad (18)$$

$\mathbf{I}$  обозначает единичную матрицу.

Используя этот алгоритм, коэффициент отражения последовательно переносится с верхнего и нижнего слоев структуры (где  $\mathbf{p} = 0$ ) на плоскость согласования, которая расположена в середине центрального слоя (см. рис. 1).

Учитывая направление распространения мод, получим однородную систему уравнений относительно компонент полей мод:

$$[\mathbf{I} - \mathbf{p}_l(\varepsilon_{re}) \mathbf{p}_u(\varepsilon_{re})] \bar{\mathbf{F}}^f = 0. \quad (19)$$

Для существования нетривиального решения определитель системы (19) должен обращаться в нуль. В результате получаем детерминантное уравнение

$$\det[\mathbf{I} - \mathbf{p}_l(\varepsilon_{re}) \mathbf{p}_u(\varepsilon_{re})] = 0. \quad (20)$$

Уравнение (20) относительно  $\varepsilon_{re}$  имеет два решения. Одно из них соответствует моде, поляризованной в направлении оси  $r$ . Другой корень описывает моды, поляризованные в ортогональном  $z$ -направлении. В результате решения детерминантного уравнения (20) получим нормализованную постоянную распространения  $\sqrt{\varepsilon_{re}}$ , которая из-за наличия потерь на излучение является комплексной величиной. Действительная часть  $\sqrt{\varepsilon_{re}}$  является эффективным (волноводным) показателем преломления  $n_{эф}$ , а мнимая – определяет коэффициент потерь на излучение  $\alpha = 4,343 \cdot k_0 \text{Im}(\sqrt{\varepsilon_{re}})$  дБ/м. Влияние потерь на поглощение при распространении излучения в диэлектрике можно учитывать, используя при построении уравнения комплексную диэлектрическую проницаемость  $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon' + i\varepsilon''$ . Определив  $\sqrt{\varepsilon_{re}}$ , с помощью выражения (19) можно рассчитать распределение полей мод в плоскости согласования, а затем, путем обратного переноса, – распределение полей во всей структуре изогнутого микроструктурированного волокна с тремя сердцевинами.

С применением разработанного алгоритма на основе метода линий были рассчитаны эффективные показатели распространения, потери и поперечное распределение полей распространяющихся по волокну мод при различных величинах изгиба, параметрах волокна (отношения диаметра отверстия  $d$  к расстоянию между отверстиями  $\Lambda$ , разнесения сердцевин), длин волн излучения  $\lambda$ .

**Анализ распределения полей мод в поперечном сечении волокна.** Как следует из теории связанных волокон (см., напр., [9]), в волокне с несколькими сердцевинами распространяются две супермоды. Первая формируется сложением фундаментальных решений (мод) для отдельных волокон (сердцевин), и ее постоянная распространения больше постоянной распространения отдельного волокна на величину коэффициента связи. Такую супермоду называют четной. Вторая (нечетная) формируется вычитанием общих решений и имеет постоянную распространения меньше, чем у отдельного волокна на величину коэффициента связи.

Поперечное распределение полей основной моды микроструктурированных волокон с тремя сердцевинами представлено на рис. 2 и 3. Расстояние между отверстиями (период структуры)  $\Lambda = 3,2$  мкм, оптическое излучение длиной волны  $\lambda = 1,5$  мкм. За внешние границы брались размеры фотонно-кристаллической оболочки, состоящей из 10 отверстий. Отношение размеров отверстий к расстоянию между ними варьировалось от 0,2 до 0,4. Таким образом, размеры оболочки составляли от 33,6 до 67,2 мкм. В качестве материала волновода рассматривался плавный кварц с эффективным показателем преломления 1,45.

На рис. 2 представлены контурные изображения поперечного распределения интенсивности оптического излучения в сердцевинах изогнутого микроструктурированного волокна с различными параметрами. Здесь и на рис. 3 первые 10 и последние 5 контурных линий разделены на 0,01 части максимальной величины поля, остальные – на 0,025. Разнесение сердцевин в два (пять) отверстия означает, что по линии, соединяющей две соседних сердцевин, расположены два (пять) отверстия.

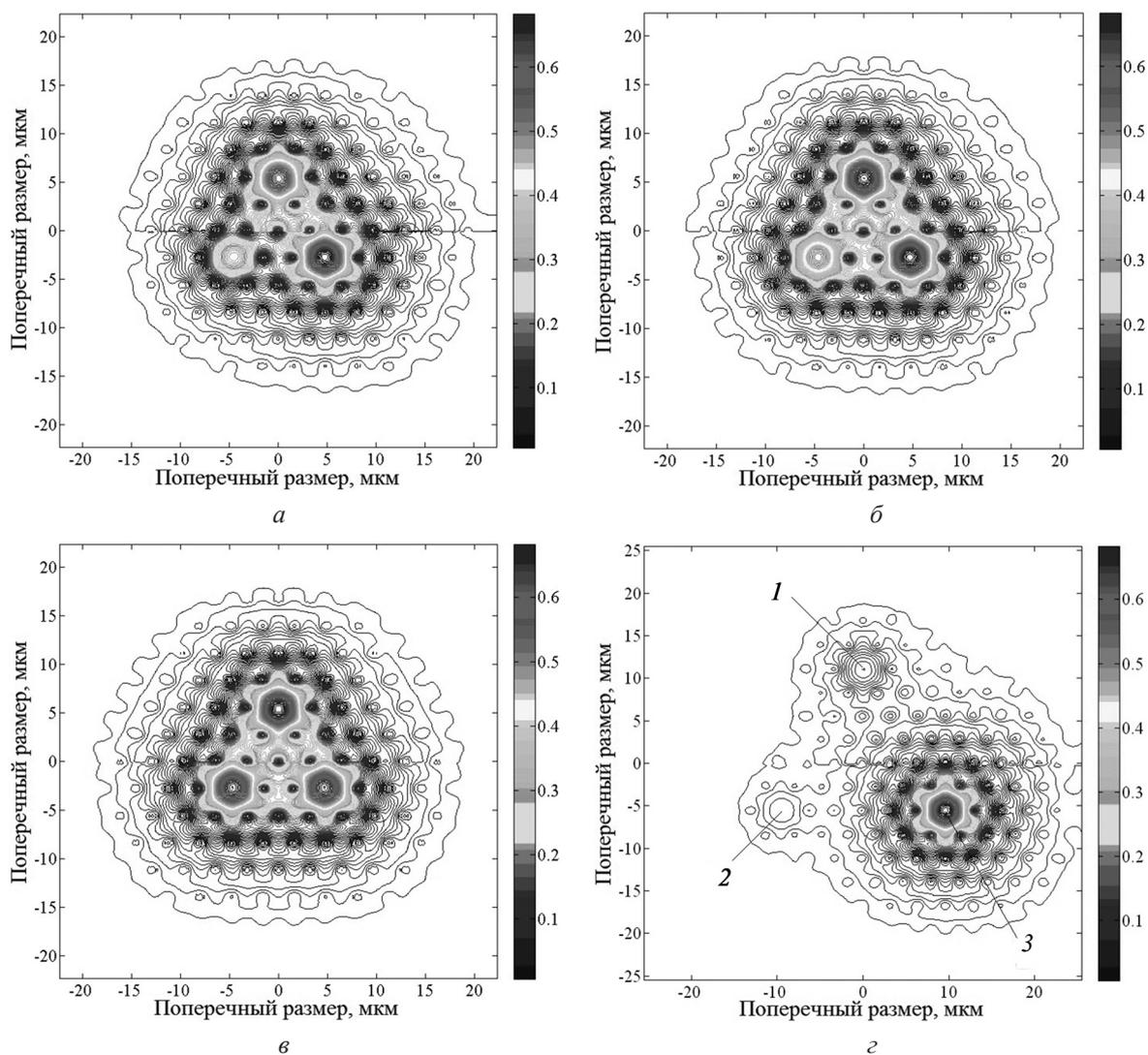


Рис. 2. Контурные изображения распределения интенсивности оптического излучения длиной волны  $\lambda = 1,5$  мкм в сердцевинах изогнутого микроструктурированного волокна периодом структуры  $\Lambda = 3,2$  мкм: *а* – разнесение сердцевин в два отверстия,  $d/\Lambda = 0,2$ , радиус изгиба  $R = 4$  см; *б* – разнесение сердцевин в два отверстия,  $d/\Lambda = 0,2$ , радиус изгиба  $R = 10$  см; *в* – разнесение сердцевин в два отверстия,  $d/\Lambda = 0,4$ , радиус изгиба  $R = 10$  см; *г* – разнесение сердцевин в пять отверстий,  $d/\Lambda = 0,2$ , радиус изгиба  $R = 10$  см

Как следует из рис. 2, при изгибе волокна происходит перераспределение энергии моды между сердцевинами. При этом отношение оптических мощностей, которые распространяются по двум сердцевинам, расположенным на направлении изгиба, определяет его величину, а относительная доля оптической энергии в каждой из трех сердцевин зависит от направления изгиба. Таким образом, по соотношению интенсивностей оптического излучения в трех сердцевинах волокна можно определить как направление, так и величину его изгиба.

Например, на рис. 2, *г* направление изгиба соответствует линии, соединяющей сердцевин 2 и 3, и перераспределение оптической энергии вследствие изгиба происходит в основном между этими сердцевинами. При изменении направления изгиба на  $60^\circ$  перераспределение энергии происходит преимущественно между сердцевинами 1 и 2. Дальнейшие изменения направления изгиба дают похожие распределения полей, но перекачка оптической мощности в этих случаях происходит между сердцевинами 1, 3 и 2, 3 при изменении направления изгиба соответственно на  $120^\circ$  и  $180^\circ$ .

Эффективность перераспределения оптической мощности между сердцевинами зависит от параметров волокна и длины волны излучения.

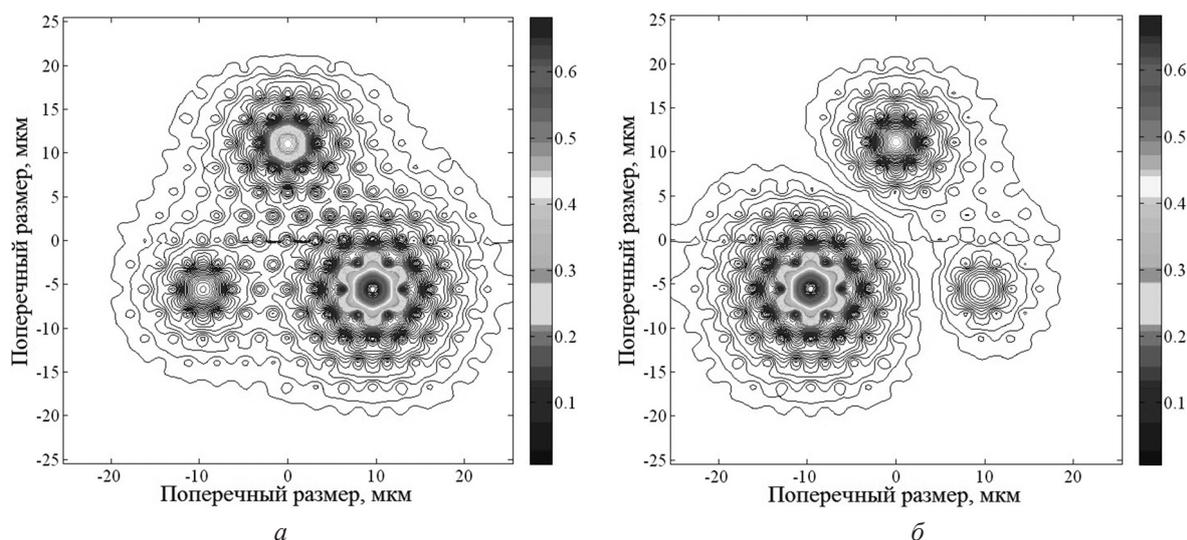


Рис. 3. Контурное изображение распределения интенсивности оптического излучения длиной волны  $\lambda = 1,5$  мкм в сердцевинах изогнутого микроструктурированного волокна с разнесением сердцевин в пять отверстий,  $d/\Lambda = 0,2$  и радиусом изгиба  $R = 40$  см: *a* – первая супермода; *б* – вторая супермода

На рис. 3 представлены контурные изображения распределения интенсивности оптического излучения в первой (*a*) и второй (*б*) супермодах изогнутого микроструктурированного волокна с тремя сердцевинами при равных прочих параметрах ( $\lambda = 1,5$  мкм;  $d/\Lambda = 0,2$ ;  $R = 40$  см; разнесение сердцевин в пять отверстий). Распределения полей первой и второй супермод схожи в области высокой интенсивности, но в области между сердцевинами интенсивность излучения гораздо ниже для второй супермоды. Также следует отметить, что при изгибе волокна для первой супермоды максимум интенсивности наблюдается в дальней от точки изгиба сердцевине, в то время как для второй – в ближней.

#### Расчет дисперсионных характеристик изогнутого микроструктурированного волокна.

На рис. 4 представлены эффективные показатели распространения (*a*) и потери на излучение (*б*) основных мод микроструктурированных волокон с разными параметрами в зависимости от радиуса их изгиба. Кривые 1–4 получены при  $\lambda = 1,5$  мкм для волокон с  $d/\Lambda = 0,2$  и разнесением сердцевин в 2 отверстия (кривая 1),  $d/\Lambda = 0,4$  и разнесением сердцевин в 2 отверстия (кривая 2),  $d/\Lambda = 0,2$  и разнесением сердцевин в 5 отверстий (кривые 3, 4). Кривая 4 соответствует второй супермоды. Кривая 5 построена для волокна с  $d/\Lambda = 0,2$  и разнесением сердцевин в 2 отверстия для  $\lambda = 1,3$  мкм.

Как следует из рис. 4, *a*, для волокон с большим отношением  $d/\Lambda$  (кривая 2), т. е. с большим воздушным заполнением, характерен наименьший среди исследуемых волокон эффективный показатель распространения  $n_{эф}$ . В таких волокнах  $n_{эф}$  остается практически неизменным вплоть до радиуса изгиба порядка 60 см. Значительные изменения  $n_{эф}$  в таких волокнах наступают при величине изгиба порядка  $R = 15$  см. Для волокон с большим разнесением сердцевин (кривая 3) заметные изменения  $n_{эф}$  начинаются при радиусах изгиба волокна порядка 100 см и значительно увеличиваются при  $R$  порядка 30 см. Эффективный показатель распространения второй супермоды при тех же параметрах волокна, напротив, уменьшается с изгибом (кривая 4). В волокнах с малым воздушным заполнением и малым разнесением сердцевин (кривая 1)  $n_{эф}$  изменяется лишь при больших изгибах волокна ( $R < 10$  см). Уменьшение длины волны оптического излучения (кривая 5) приводит к увеличению эффективного показателя распространения.

При малых изгибах потери практически постоянны и определяются потерями на локализацию мод в волокне (рис. 4, *б*). При уменьшении радиуса изгиба локализация мод в волокне уменьшается, и потери на излучение увеличиваются. При больших изгибах волокна нарушаются его волноведущие свойства, и потери на излучение резко возрастают.

В волокнах с большим значением  $d/\Lambda$  излучение сильнее сконцентрировано в сердцевинах и практически равно нулю на границах волокна (это видно из сравнения рис. 2, *б* и 2, *в*), поэтому

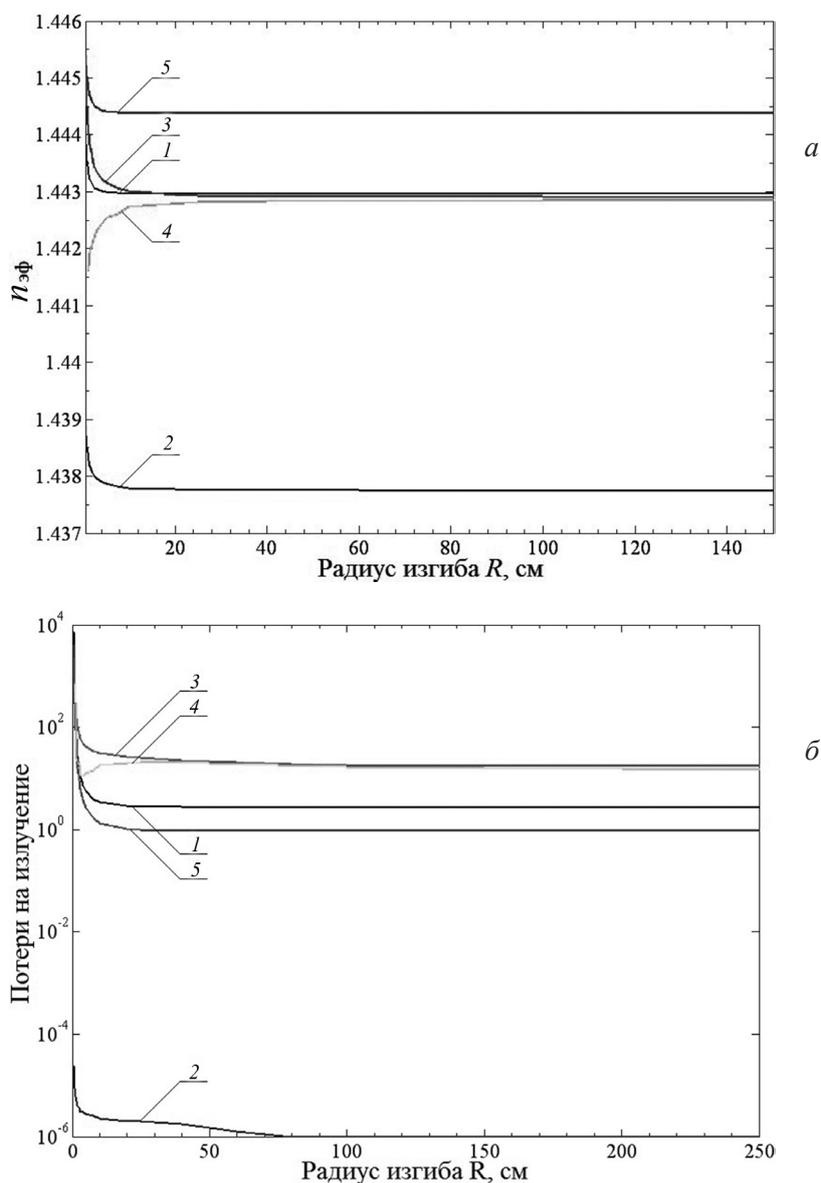


Рис. 4. Зависимость эффективного показателя преломления (а) и потерь на излучение (б) основных мод микроструктурированных волокон с различными параметрами от величины их изгиба

такие волокна обладают наименьшими потерями на локализацию (кривая 2). Заметное увеличение потерь при  $d/\Lambda = 0,4$  происходит при  $R$  порядка 5 см, а для волокна с  $d/\Lambda = 0,2$  – при  $R$  порядка 10 см (кривая 1).

При увеличении разнесения сердцевин уменьшается расстояние от сердцевины до внешней границы волокна (толщина оболочки). В результате поля мод на границе волокна спадают недостаточно. Этим объясняется возрастание рассчитанных потерь на излучение для таких волокон (кривые 3, 4). Потери для двух супермод при небольших изгибах совпадают с графической точностью. Различия наблюдаются лишь в области больших изгибов (радиусом более 15 см), когда локализация излучения нарушается.

При уменьшении длины волны оптического излучения основная мода расположена вдали от режима отсечки, и ее поле сильнее концентрируется в сердцевине, что объясняет меньшие потери на излучение (кривая 5). Заметное увеличение потерь происходит при  $R$  порядка 8 см.

**Заключение.** Разработана методика расчета параметров и поперечного распределения полей направляемых мод прямых и изогнутых микроструктурированных волокон с тремя сердцевинами на основе метода линий. Для расчета изогнутых волноводов использовалась цилиндрическая

система координат, где угловая координата соответствует изгибу. Для учета потерь на излучение на изгибе на внешних границах структуры применялись граничные условия с поглощением.

На основе представленной методики были рассчитаны распределение полей мод, эффективные показатели преломления и потери на излучение двух супермод с ортогональными поляризациями, которые распространяются в микроструктурированном волокне с тремя сердцевинами с различными параметрами. Показано, что при изгибе волокна происходит перераспределение энергии моды между сердцевинами, причем отношение интенсивностей оптического излучения, распространяющегося по двум сердцевинам, расположенным в направлении изгиба, определяет его величину, а относительная доля оптической энергии в каждой из трех сердцевинок зависит от направления изгиба. Проведен анализ дисперсии и коэффициента потерь супермод в зависимости от параметров волокна, длины волны распространяющегося излучения и изгиба волокна. Анализ показал, что эффективные показатели преломления супермод уменьшаются при увеличении воздушного заполнения волокна или уменьшении длины волны излучения. Волокна с большим значением  $d/\lambda$  и/или большим разнесением сердцевинок более чувствительны к изгибу, поэтому их целесообразнее использовать для измерения малых изгибов и отклонений. При этом волокна с большим воздушным заполнением, а также волокна с меньшим разнесением сердцевинок обладают наименьшими потерями на локализацию.

### Список использованной литературы

1. *Goncharenko, I. A.* Photonic crystal fibre characterization with the method of lines / I. A. Goncharenko, M. Marciniak // J. Telecommunications and Information Technology. – 2004. – No. 1. – P. 106–111.
2. *Goncharenko, I. A.* Radiation loss and mode field distribution in curved holey fibers / I. A. Goncharenko, S. F. Helfert, R. Pregla // Intern. J. Electronics and Communications (AEÜ). – 2005. – Vol. 59, no. 3. – P. 185–191.
3. *Pregla, R.* About the nature of the Method of Lines / R. Pregla // Intern. J. Electronics Communications (AEÜ). – 1987. – Vol. 41. – P. 369–370.
4. *Pregla, R.* The method of lines as generalized transmission line technique for the analysis of multilayered structures / R. Pregla // Intern. J. Electronics Communications (AEÜ). – 1996. – Vol. 50, no. 3. – P. 293–300.
5. *Pregla, R.* The method of lines. Numerical techniques for microwave and millimeter wave passive structures / R. Pregla, W. Pascher; ed. T. Itoh. – New York: J. Wiley Press, 1989. – P. 381–446.
6. *Pregla, R.* Novel algorithms for the analysis of optical fiber structures with anisotropic materials / R. Pregla // Proc. of the Intern. Conf. on Transparent Optical Networks (ICTON'99), June, 1999. – Kielce, Poland, 1999. – P. 49–52.
7. *Pregla, R.* MoL-BPM Method of Lines based beam propagation method / R. Pregla // Methods for modelling and simulation of guided-wave optoelectronic devices / ed. W. P. Huang. – Cambridge, Massachusetts: EMW Publishing, 1995. – No. 11. – P. 65–70.
8. *Helfert, S. F.* The method of lines: a versatile tool for the analysis of waveguide structures / S. F. Helfert, R. Pregla // Electromagnetics. – 2002. – Vol. 22. – P. 615–637.
9. *Снайдер, А.* Теория оптических волноводов / А. Снайдер, Дж. Лав; пер. А. Б. Грудинин [и др.]. – М.: Радио и связь, 1987.

Поступила в редакцию 22.10.2015

## ИНФОРМАТИКА

УДК 004

Б. А. ЗАЛЕСКИЙ, Э. Н. СЕРЕДИН

### МЕТОД НЕЧЕТКОЙ КЛАСТЕРИЗАЦИИ $k$ -СРЕДНИХ СО ШТРАФНОЙ ФУНКЦИЕЙ И ПРОИЗВОЛЬНЫМИ СТЕПЕНЯМИ ВЕКТОРА ПРИНАДЛЕЖНОСТИ

*Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь,  
e-mail: zalesky@newman.bas-net.by, eduard.seredin@tut.by*

Представлена новая версия метода нечеткой кластеризации  $k$ -средних, названная методом нечеткой кластеризации  $k$ -средних со штрафной функцией. Разработан алгоритм кластеризации полутоновых, цветных и мультисканальных изображений. Особенностью алгоритма является использование аддитивной штрафной функции гиббсовского типа для контроля локальной гладкости на однородных областях кластерного представления изображений. Локальная гладкость получаемых решений зависит от значений коэффициентов штрафной функции. Эти коэффициенты могут быть взяты как функции величины и направления градиента изображения. В отличие от известного алгоритма нечеткой кластеризации  $k$ -средних, который неустойчив по отношению к шумам и искажениям, присутствующим на изображении, предлагаемый алгоритм позволяет строить устойчивые кластерные представления на зашумленных и поврежденных изображениях. Свойства алгоритма проиллюстрированы на тестах с реальными изображениями. Эксперименты показали, что алгоритм, с одной стороны, корректно объединяет однородные области изображений в отдельные кластеры, а с другой – предотвращает слияние разнородных областей.

*Ключевые слова:* нечеткая кластеризация,  $k$ -средних, штрафная функция, вектор принадлежности, множители Лагранжа, EM-алгоритм, GPFCM, CUDA.

B. A. ZALESKY, E. N. SEREDIN

### FUZZY C-MEANS CLUSTERING METHOD WITH THE GIBBS PENALTY FUNCTION AND ARBITRARY POWERS OF THE VECTOR ACCESSORIES

*United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus,  
e-mail: zalesky@newman.bas-net.by, eduard.seredin@tut.by*

A new version of the Fuzzy C-means clustering method, which we have called the Fuzzy C-means with the Gibbs Penalty (GPFCM), is introduced. The algorithm is designed to cluster gray scale, color and multichannel images. The specificity of the algorithm is to use the additive Gibbs penalty function in order to control the local smoothness of cluster representations of images in the regions of image homogeneity. The local smoothness of the solutions found by the GPFCM depends on the values of the coefficients of the penalty function. In turn, these coefficients can be taken as functions of magnitude and direction of the image gradient. Unlike the standard Fuzzy C-means clustering algorithm, which is unstable with respect to image noise and distortions, the proposed GPFCM allows building robust cluster approximations of noisy and corrupted pictures. Algorithm properties are illustrated on real images. Experiments have shown that on the one hand, the algorithm properly represents the homogeneous image regions as separate clusters and, on the other hand, it prevents the merging of different homogeneous areas.

*Keywords:* fuzzy clustering, C-means, penalty function, vector accessories, Lagrange multipliers, EM algorithm, GPFCM, CUDA.

**Введение.** В настоящее время различные версии методов кластеризации  $k$ -средних являются популярным инструментом для обработки многомерных числовых данных и изображений различной природы и модальности. Особенно это относится к методу нечеткой кластеризации  $k$ -средних, который избавлен от некоторых недостатков его предшественника – классического метода  $k$ -средних.

Метод кластеризации  $k$ -средних (KM), предложенный в 1950-х гг. Г. Штейнгаузом [1] и С. Ллойдом [2], был развит рядом авторов, среди которых Дж. Данн, Э. Распини, Дж. Бездек и др.

Последний, основываясь на введенном понятии, построил новый метод, который в дальнейшем стал называться методом нечеткой кластеризации  $k$ -средних (FCM). Подробная историческая справка по данному вопросу приведена, например, в работе [3].

При использовании КМ изначально фиксируется число кластеров  $k$  и предполагается, что каждый вектор данных (или пиксел изображения) может принадлежать ровно одному кластеру [1, 4]. Действие алгоритма состоит в минимизации среднеквадратичного отклонения (или отклонения в другой метрике) векторов кластера от его центра масс. Первоначально в качестве центров выбираются произвольные  $k$  векторов данных, например случайным образом. Каждое наблюдение относится к ближайшему центру, затем центры получившихся кластеров пересчитываются. Векторы данных разбиваются на кластеры вновь в соответствии с тем, какой из новых центров оказался ближе к вектору в выбранной метрике. Итерации повторяются до момента выполнения выбранного критерия завершения работы алгоритма.

Недостатком КМ является его сходимость (в общем случае) к локальному экстремуму. На практике это приводит, например, к тому, что при кластеризации изображений метод может объединить несколько неоднородных областей в один кластер, даже если их число меньше разрешенного максимального значения  $k$ . Помимо этого, из-за сходимости к локальному экстремуму целевой функции нередко результаты кластеризации методом КМ оказываются зависимыми от выбора первого набора центров кластеров.

Одним из основных отличий FCM от классического КМ является то, что первый метод, основанный на понятиях нечеткой кластеризации, ставит в соответствие каждому вектору данных не одно число – номер кластера, а вектор принадлежности, который характеризует «степень» принадлежности вектора данных каждому классу. Такой подход позволяет независимо от начальных значений центров кластеров достигать глобального экстремума целевой функции. Часто вектор принадлежности каждого элемента выборки понимается как набор вероятностей, задающих шансы элемента выборки принадлежать каждому из кластеров.

Известно большое количество публикаций, посвященных различным модификациям FCM [5–7]. Многообразие версий метода объясняется тем, что они приспособлены к кластеризации данных, обладающих определенными свойствами, т. е. не существует версии FCM, которая работала бы одинаково эффективно для всех типов данных.

Кластеризация изображений имеет свою специфику. Дело в том, что изображения характеризуются не только значениями яркости или цвета, но и их расположением в пространстве. Иными словами, с помощью одного и того же набора цветов можно «нарисовать» совершенно разные сцены. Естественно, что в таком случае имеет смысл учитывать пространственные характеристики изображений.

Ранее одним из авторов [8] был разработан метод нечеткой кластеризации  $k$ -средних с аддитивной штрафной функцией гиббсовского типа GPFCM, который позволил улучшить качество и надежность кластеризации изображений, особенно при наличии на них шумов и искажений. Однако в указанном методе GPFCM степень, в которую возводились компоненты функции принадлежности пикселов изображений кластерам, была равна 2. Оказалось, что при других значениях степени разработанный алгоритм вычисления оптимального решения в общем случае к нему не сходится.

В данной статье рассмотрен метод GPFCM с произвольными степенями  $\gamma > 1$  функций принадлежности. Построен алгоритм, который гарантированно сходится к оптимальному решению. Приведены результаты сравнения GPFCM с методом FCM Бездека. Описана зависимость свойств кластерных представлений изображений от значений степени  $\gamma$ , в которую возводятся координаты функций принадлежности. Показано, что GPFCM, в отличие от КМ и FCM, позволяет получить удовлетворительные кластерные представления зашумленных изображений, более того, что указанный метод может быть использован не только для кластеризации, но и для фильтрации зашумленных изображений.

Процесс построения кластерных представлений с помощью GPFCM требует большего объема вычислений по сравнению с КМ и FCM, однако разработанные параллельные программные реализации метода с помощью технологии программирования CUDA дают возможность получать решения за несколько секунд.

Свойства алгоритма проиллюстрированы с помощью реальных изображений и космических снимков.

**1. Описание метода GPFCM со степенями компонент вектора принадлежности  $\gamma > 1$ .** Так как наши результаты связаны с кластеризацией изображений, введем обозначения их элементов. Пусть  $I$  –  $d$ -канальное изображение (причем число каналов может быть равным 1) размера  $m \times n$ , которое индексируется пикселями  $p = (x, y)$ . Каждый элемент изображения  $I_p$  представляет собой вектор  $I_p = (I_{1,p}, \dots, I_{d,p})^T$  (здесь  $T$  – символ транспонирования), координаты которого  $I_{i,p}$  равны яркостям  $i$ -го канала ( $1 \leq i \leq d$ ).

Предположим, что заранее заданное число кластеров равно  $k$ . Центры кластеров обозначим через  $c_j = (c_{1,j}, \dots, c_{d,j})^T$ , ( $1 \leq j \leq k$ ), а множество всех центров – через  $C$ . Буква  $U$  будет использоваться для множества  $U = \{u_p\}$  векторов принадлежности  $u_p = (u_{p,1}, \dots, u_{p,k})$  пикселей  $p$  кластерам. Векторы принадлежности должны удовлетворять двум следующим условиям:

$$u_{p,j} \geq 0, \sum_{j=1}^k u_{p,j} = 1 \quad (1)$$

для всех пикселей  $p$ . В принятых обозначениях целевая функция метода FCM Бездека может быть записана в виде

$$F(U, C) = \sum_{j=1}^k \sum_p u_{p,j}^\gamma \|I_p - c_j\|^2,$$

где значение степени  $\gamma$ ,  $\gamma > 1$ , выбрано заранее, а  $\|\cdot\|$  обозначает выбранную норму, которая в данной работе будет считаться евклидовой.

Ранее в работе [8] функция  $F(U, C)$  была модифицирована с целью получения возможности контроля локальной гладкости кластерных представлений изображений. К ней была добавлена штрафная функция гиббсовского типа так, что усовершенствованная целевая функция приобрела вид

$$Q(U, C) = F(U, C) + \sum_{j=1}^k \sum_p \left( \mu_{p,x} (u_{p,j} - u_{p+(1,0),j})^2 + \mu_{p,y} (u_{p,j} - u_{p+(0,1),j})^2 \right), \quad (2)$$

где  $\mu_{p,x}$ ,  $\mu_{p,y}$  – неотрицательные коэффициенты, отвечающие за локальную гладкость кластерных представлений, пиксел  $p + (0,1)$  – нижний сосед пикселя  $p$ , а  $p + (1,0)$  – его правый сосед. Коэффициенты  $\mu_{p,x}$ ,  $\mu_{p,y}$  могут выбираться в зависимости от градиента  $G_p = (G_{p,x}, G_{p,y})$  изображения, например в виде

$$\mu_{p,x} = \begin{cases} \mu, & \text{если } |G_{p,x}| \leq \tau \\ \frac{\mu}{|G_{p,x}| + 1}, & \text{иначе} \end{cases} \quad \text{и} \quad \mu_{p,y} = \begin{cases} \mu, & \text{если } |G_{p,y}| \leq \tau \\ \frac{\mu}{|G_{p,y}| + 1}, & \text{иначе} \end{cases}, \quad (3)$$

где константа  $\mu \geq 0$  задает степень гладкости кластерного представления, а порог  $\tau$  уменьшает зависимость от градиента, образованного шумом. В некоторых случаях применения GPFCM выбор постоянных значений коэффициентов  $\mu_{p,x} = \mu_{p,y} = \text{const}$  может дать лучший результат по сравнению с использованием (3). Для задания градиента можно брать операторы Собеля, Превитт или иные [4].

Метод FCM строит кластерное представление на основе условной минимизации целевой функции  $F(U, C)$  при условии (1). Традиционно условная минимизация  $F(U, C)$  выполняется с помощью градиентного алгоритма пошаговой минимизации [7], который дает хорошие результаты за приемлемое время. Задача условной минимизации  $Q(U, C)$  несколько сложнее. Присутствие штрафной функции в целевой функции  $Q(U, C)$  приводит к невозможности использования упомянутой схемы, поэтому некоторые шаги алгоритма приходится реализовывать иным способом.

**2. Алгоритм нахождения условного минимума целевой функции.** Напомним, что кластерное представление в методе GPFCM строится путем условной минимизации целевой функции (2) при условии (3).

С помощью метода множителей Лагранжа задача условной минимизации сводится к безусловной минимизации функции

$$\begin{aligned} \varphi_\gamma(U, C, \Lambda) = & \sum_{j=1}^k \sum_p u_{p,j}^\gamma \|I_p - c_j\|^2 + \\ & + \sum_{j=1}^k \sum_p \left( \mu_{p,x} (u_{p,j} - u_{p+(1,0),j})^2 + \mu_{p,y} (u_{p,j} - u_{p+(0,1),j})^2 \right) + \sum_p \lambda_p \left( 1 - \sum_{j=1}^k u_{p,j} \right), \end{aligned}$$

в которой векторная переменная  $\Lambda$  образована множителями Лагранжа  $\lambda_p$ . При  $\gamma = 2$  условие  $0 \leq u_{p,j} \leq 1$  выполняется автоматически. При других  $\gamma > 1$  предлагается использовать измененный градиентный алгоритм, в котором решение вычисляется с соблюдением условия неотрицательности функций принадлежности  $u_{p,j}$ , так как традиционная схема дает неудовлетворительные результаты. Ниже приведено его пошаговое описание, позволяющее вычислять решения для  $\gamma = 2$ , а после него представлены изменения вычислений, которые нужно сделать, чтобы алгоритм работал при всех  $\gamma > 1$ .

*Шаг 1.* Присвоить начальные значения функциям принадлежности  $U = \{u_{p,j}\}$  для всех пикселей  $p$  и всех кластеров  $1 \leq j \leq k$  с помощью датчика псевдослучайных чисел, равномерно распределенных на отрезке  $[0,1]$  так, чтобы было выполнено условие  $\sum_{j=1}^k u_{p,j} = 1$ .

*Шаг 2.* Вычислить центры кластеров по формуле

$$c_j = \frac{\sum_p u_{p,j}^\gamma I_p}{\sum_p u_{p,j}^\gamma}, \quad j = 1, \dots, k.$$

*Шаг 3.* Вычислить значения множителей Лагранжа для всех  $p$ :

$$\lambda_p = \frac{\gamma}{k} \sum_{j=1}^k u_{p,j}^{\gamma-1} \|I_p - c_j\|^2,$$

которые получаются дифференцированием целевой функции  $\varphi_\gamma$  по переменным  $u_{p,j}$  для нахождения минимума  $\varphi_\gamma(U, C, \Lambda)$  по  $\Lambda$  при фиксированных значениях  $U$  и  $C$  с учетом условия

$$\sum_{j=1}^k u_{p,j} = 1.$$

*Шаг 4.* Обновить значения целевой функции  $u_{p,j}$  по формуле

$$u_{p,j} = \frac{\frac{1}{2} \lambda_p + \mu_{p,x} u_{p+(1,0),j} + \mu_{p,y} u_{p+(0,1),j} + \mu_{p-(1,0),x} u_{p-(1,0),j} + \mu_{p-(0,1),y} u_{p-(0,1),j}}{\|I_p - c_j\|^2 + \mu_{p,x} + \mu_{p,y} + \mu_{p-(1,0),x} + \mu_{p-(0,1),y}}. \quad (4)$$

*Шаг 5.* Повторять шаги 2–4 до момента первого выполнения условия останова.

В качестве условий останова алгоритма используются: а) выполнение заданного числа итераций; б) малые изменения значений функций  $U$  принадлежности, оцененные в какой либо норме, например  $\ell_q$ , где  $1 \leq q \leq \infty$  или иной норме; в) отсутствие изменений в нескольких полученных последовательных кластерных представлениях или другие.

Предлагаемое пошаговое описание разработанного алгоритма для вычисления кластерного представления изображений (условной минимизации  $\varphi_\gamma$ ) при  $\gamma = 2$  не позволяет получать решения для  $\gamma \neq 2$ , однако после внесения изменений в шаг 4 алгоритм становится применим для любых  $\gamma > 1$ . Поэтому в шаге 4 вместо точной формулы (4) нужно использовать неградиентный метод минимизации  $\varphi_\gamma$  по  $u_{p,j}$ , например дихотомии или золотого сечения, для нахождения минимума  $\varphi_\gamma$  по  $u_{p,j}$  на интервале  $[0,1]$ .

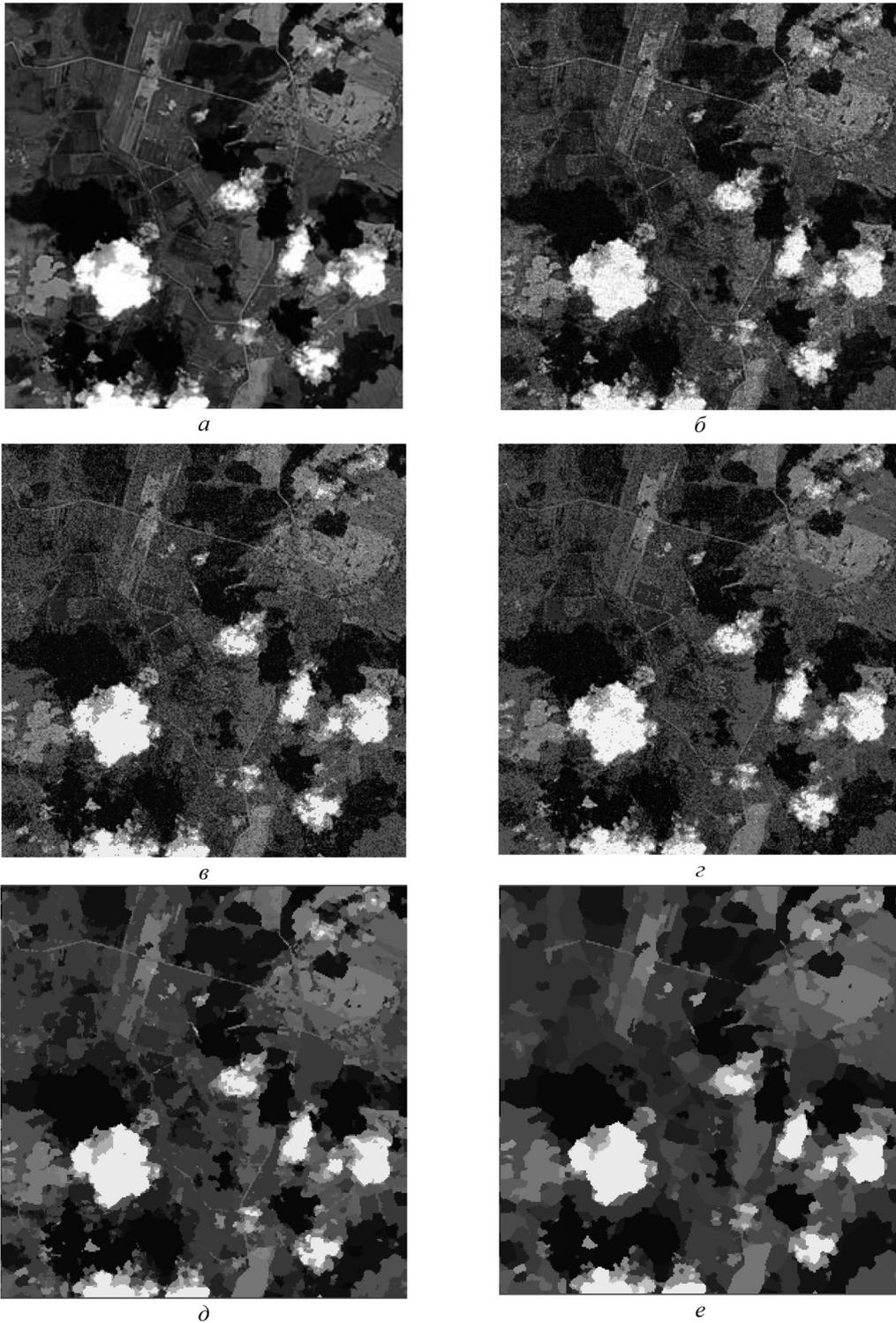


Рис. 1. Оригинальное спутниковое изображение, полученное с помощью алгоритма повышения разрешения (паншарпенинга) (*а*); оригинальное изображение, искаженное гауссовским случайным шумом (*б*); результаты кластеризации зашумленного изображения: методом КМ (*в*); методом FCM (*з*); методом GPFCSM с параметром  $\mu = 1000$  (*д*); методом GPFCSM с параметром  $\mu = 5000$  (число классов = 20, гамма = 1,5) (*е*)

Непосредственное вычисление измененной версии алгоритма занимает в несколько раз больше времени, чем вычисление решения методом FCM Бездека, так как вместо точной формулы (4) применяется итерационный метод минимизации  $\varphi_\gamma$  по  $u_{p,j}$ . Непосредственное вычисление кластерных представлений больших изображений на CPU может занимать минуты или даже часы,



Рис. 2. Оригинальное изображение с пейзажем (*a*); оригинальное изображение, искаженное гауссовским случайным шумом (*б*); результаты кластеризации зашумленного изображения: методом КМ (*в*); методом FCM (*г*); методом GPFCM с параметром  $\mu = 1000$  (*д*); методом GPFCM с параметром  $\mu = 5000$  (число классов = 20, гамма = 1,5) (*е*)

однако GPFCM тоже может быть распараллелен как КМ и FCM. Разработанные параллельные программные версии метода на CUDA выполняются всего за несколько секунд. Ниже представлены результаты численных экспериментов.

**3. Результаты экспериментов.** Для исследования свойств предложенного метода GPFCM были выполнены несколько серий экспериментов на изображениях со спутника Landsat 8 и на фотографиях с пейзажем, искаженных шумами разных типов.

Эксперименты с выбранными изображениями позволили исследовать свойства кластерных представлений, получаемых с помощью GPFCM, и сравнить их со свойствами кластерных представлений, получаемых методами КМ и FCM. Результаты экспериментов подтвердили неустойчивость КМ и FCM к шумам и искажениям, которые разбивали однородные области зашумленных изображений на множество мелких кластеров. Помимо этого проявились известные недостатки КМ, нередко объединяющего разные однородные области изображения в один кластер, а также зависимость от первоначально задаваемых центров кластеров.

На рис. 1 и 2 приведены результаты сравнения GPFCM с КМ и FCM. Предложенный метод GPFCM демонстрирует гораздо большую устойчивость к шуму. Он может быть использован не только для кластеризации изображений, но и как вполне адекватный фильтр.

**Заключение.** Разработана новая версия метода нечеткой кластеризации  $k$ -средних с аддитивной штрафной функцией гиббсовского типа. Показано, что использование метода GPFCM дает более точные кластерные представления спутниковых изображений, чем известные методы KM и FCM. Результаты экспериментов продемонстрировали значительное превосходство GPFCM над KM и FCM при обработке зашумленных или искаженных изображений. Настройка параметров локальной гладкости с помощью аддитивной штрафной функции гиббсовского типа позволяет контролировать свойства кластеров для получения адекватных результатов. При нулевых значениях параметров метод GPFCM превращается в метод FCM. В будущем планируется провести более детальное исследование свойств GPFCM с применением различных значений показателей функций принадлежности и типов связей между пикселями изображений.

### Список использованной литературы

1. *Steinhaus, H.* Sur la division des corps materiels en parties / H. Steinhaus // Bull. Acad. Polon. – 1956. – Vol. 4 (12). – P. 801–804.
2. *Lloyd, S.* Least square quantization in PCM's / S. Lloyd. – Bell Telephone Laboratories Paper, 1957.
3. *Bezdek, J. C.* Pattern Recognition with Fuzzy Objective Function Algorithms / J. C. Bezdek. – [S. l.]: Kluwer Academic Publishers Norwell, 1981.
4. *Гонсалес, Р.* Цифровая обработка изображений / Р. Гонсалес, Р. Вудс. – М.: Техносфера, 2005.
5. *Fuzzy Cluster Analysis: Methods for Classification, Data Analysis and Image Recognition* / F. Höppner [et al.]. – New York: John Wiley & Sons, 1999.
6. *MacQueen, J. B.* Methods for classification and Analysis of Multivariate Observations / J. B. MacQueen // Proc. 5th Berkeley Symp. on Math. Statistics and Probability. – Berkeley, 1967. – P. 281–297.
7. *Cenitha, C. H.* Classification of satellite images using new fuzzy cluster centroid for unsupervised classification algorithm // С. Н. Cenitha, Dr. K. Vani // Proc. IEEE Conf. on Inform. and Commun. Technologies ICT, 2013. – [S. l.], 2013. – P. 203–207.
8. *Залесский, Б. А.* Метод нечеткой кластеризации  $k$ -средних со сглаживающей штрафной функцией / Б. А. Залесский // Информатика. – 2014. – № 43. – С. 14–20.

Поступила в редакцию 29.10.2015

УДК 519.8

Ю. Н. СОТСКОВ<sup>1</sup>, Н. Г. ЕГОРОВА<sup>1</sup>, Ф. ВЕРНЕР<sup>2</sup>

**МНОГОГРАННИК ОПТИМАЛЬНОСТИ РАСПИСАНИЯ,  
МИНИМИЗИРУЮЩЕГО СУММУ ВЗВЕШЕННЫХ МОМЕНТОВ ЗАВЕРШЕНИЯ  
ОБСЛУЖИВАНИЯ ТРЕБОВАНИЙ**

<sup>1</sup>Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь,  
e-mail: sotskov@newman.bas-net.by, egorovanatalja@bk.ru

<sup>2</sup>Университет им. Отто фон Герике, Магдебург, Германия,  
e-mail: frank.werner@mathematik.uni-magdeburg.de

В качестве меры устойчивости оптимальной перестановки  $\pi$  обслуживания в одностадийной обслуживающей системе множества требований к изменениям длительностей обслуживания требований предлагается использовать размерность и относительный объем многогранника оптимальности перестановки  $\pi$ . Для случайно сгенерированных задач проведено экспериментальное сравнение размерностей и относительных объемов многогранников оптимальности расписаний обслуживания требований и относительных погрешностей целевых функций с оптимальными значениями целевых функций, вычисленными для фактических длительностей обслуживания требований.

*Ключевые слова:* планирование, одностадийное обслуживание требований, взвешенные моменты завершения обслуживания требований, устойчивость, неопределенность, интервальные длительности обслуживания требований.

Yu. N. SOTSKOV<sup>1</sup>, N. G. EGOROVA<sup>1</sup>, F. WERNER<sup>2</sup>

**OPTIMALITY BOX OF THE SCHEDULE MINIMIZING THE SUM  
OF THE WEIGHTED COMPLETION TIMES OF THE JOB**

<sup>1</sup>United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus,  
e-mail: sotskov@newman.bas-net.by, egorovanatalja@bk.ru

<sup>2</sup>Otto-von-Guericke-University, Magdeburg, Germany,  
e-mail: frank.werner@mathematik.uni-magdeburg.de

It is proposed to use an optimality box of the job permutation  $\pi$  as a measure of the stability of an optimal permutation  $\pi$  for processing a set of jobs in the single-stage processing system respecting to variations of the processing times of the jobs. For randomly generated problems, experimental comparison is made of the relative dimensions and the volumes of the optimality box for permutation and relative errors of the objective function with the optimal value of the objective function calculated for the actual processing jobs.

*Keywords:* scheduling, single machine problems, total weighted completion times, stability, uncertainty, interval processing times.

**Введение.** Множество требований  $J = \{J_1, J_2, \dots, J_n\}$ ,  $n \geq 2$ , необходимо обслужить одним прибором. Каждому требованию  $J_i \in J$  приписан вес  $w_i > 0$ , характеризующий важность более раннего завершения обслуживания требования  $J_i$ . Все требования множества  $J$  доступны для обслуживания в момент времени  $t = 0$ . Фактическая длительность  $p_i$  обслуживания требования  $J_i \in J$  может равняться любому вещественному числу, заключенному между фиксированными нижней и верхней границами:  $p_i^U \geq p_i^L > 0$ . Требование  $J_i \in J$  должно быть обслужено прибором без прерываний в течение времени  $p_i \in [p_i^L, p_i^U]$ . Законы распределения вероятностей случайных длительностей  $p_i$ ,  $J_i \in J$ , не известны к моменту построения расписания. При реализации расписания длительность  $p_i$  обслуживания требования  $J_i$  остается неопределенной до момента завершения обслуживания требования  $J_i$ , если  $p_i^L < p_i^U$ .

Для задач теории расписаний используется трехпозиционное обозначение  $\alpha|\beta|\gamma$ , где  $\alpha$  определяет обслуживаемую систему,  $\beta$  – свойства обслуживаемой системы, а  $\gamma$  – критерий оптимальности [1]. Обозначение  $1|p_i^L \leq p_i \leq p_i^U|\sum w_i C_i$  вводится для *неопределенной* задачи поиска оптимального расписания обслуживания одним прибором множества требований  $J$ , при котором взвешенная сумма  $\sum_{i=1}^n w_i C_i$  моментов  $C_i$  завершения обслуживания требований  $J_i \in J$  принимает наименьшее значение. Если границы  $p_i^L$  и  $p_i^U \geq p_i^L$  длительностей обслуживания каждого требования совпадают,  $p_i^L = p_i^U$ , то неопределенная задача  $1|p_i^L \leq p_i \leq p_i^U|\sum w_i C_i$  превращается в *детерминированную* задачу  $1|\sum w_i C_i$ , которая решается за полиномиальное время [2].

Множество допустимых векторов длительностей обслуживания требований  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  обозначим  $T = \{p \mid p \in R_+^n, p_i^L \leq p_i \leq p_i^U, i \in \{1, \dots, n\}\} = \times_{i=1}^n [p_i^L, p_i^U]$ , где  $R_+^n$  – векторное пространство неотрицательных действительных векторов размерности  $n$ , а  $\times_{i=1}^n [p_i^L, p_i^U]$  – декартово произведение заданных интервалов возможных длительностей обслуживания требований. Фиксированный вектор  $p \in T$  длительностей обслуживания требований будем называть *сценарием*. Детерминированную задачу  $1|\sum w_i C_i$  со сценарием  $p \in T$  будем обозначать  $1|p|\sum w_i C_i$ . Для задачи с неопределенными длительностями обслуживания требований  $1|p_i^L \leq p_i \leq p_i^U|\gamma$ , как правило, не существует перестановки обслуживания требований множества  $J$ , которая оставалась бы оптимальной при всех сценариях из множества  $T$ . Для описания предлагаемого подхода к оценке качества эвристического решения неопределенной задачи  $1|p_i^L \leq p_i \leq p_i^U|\sum w_i C_i$  потребуются определения и результаты, представленные в п. 1.

**1. Метод, основанный на устойчивости оптимального расписания.** Пусть  $S = \{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n\}$  – множество всех перестановок  $\pi_k \in S$ , определяющих порядок обслуживания требований из множества  $J$ :  $\pi_k = (J_{k_1}, J_{k_2}, \dots, J_{k_n})$ , где  $\{k_1, k_2, \dots, k_n\} = \{1, 2, \dots, n\}$ . Множество перестановок  $S$  имеет мощность  $|S| = n!$ .

В работе [2] было установлено, что для решения детерминированной задачи  $1|\sum w_i C_i$  требуется выполнить  $O(n \log n)$  элементарных операций, если использовать следующее необходимое и достаточное условие оптимальности перестановки  $\pi_k = (J_{k_1}, J_{k_2}, \dots, J_{k_n}) \in S$ :  $\frac{w_{k_1}}{p_{k_1}} \geq \frac{w_{k_2}}{p_{k_2}} \geq \dots \geq \frac{w_{k_n}}{p_{k_n}}$ .

Под *решением* неопределенной задачи  $1|p_i^L \leq p_i \leq p_i^U|\sum w_i C_i$  будем подразумевать минимальное (по включению) множество перестановок  $S(T) \subseteq S$  согласно следующему определению [3].

**Определение 1.** Множество перестановок  $S(T) \subseteq S$  называется *минимальным доминирующим множеством* для задачи  $\alpha|p_i^L \leq p_i \leq p_i^U|\gamma$ , если выполняются условия *a* и *b*: *a* – для каждого сценария  $p \in T$  множество  $S(T)$  содержит хотя бы одну перестановку обслуживания требований, которая является оптимальной для детерминированной задачи  $\alpha|p|\gamma$ ; *b* – свойством *a* не обладает ни одно собственное подмножество множества  $S(T)$ .

Мощность  $|S(T)|$  минимального доминирующего множества  $S(T)$  можно рассматривать как меру неопределенности задачи  $1|p_i^L \leq p_i \leq p_i^U|\sum w_i C_i$ . В случае наименьшего значения  $|S(T)| = 1$  минимальное доминирующее множество для задачи  $1|p_i^L \leq p_i \leq p_i^U|\sum w_i C_i$  является одноэлементным множеством:  $\{\pi_k\} = S(T)$ , которое и есть *решение* (оптимальное расписание) детерминированного аналога  $1|p|\sum w_i C_i$  неопределенной задачи  $1|p_i^L \leq p_i \leq p_i^U|\sum w_i C_i$  при любом сценарии  $p \in T$ . Минимальное доминирующее множество  $S(T)$  может быть построено для неопределенной задачи  $1|p_i^L \leq p_i \leq p_i^U|\sum w_i C_i$  на основе следующего отношения доминирования, которое можно эффективно (полиномиально) задать на множестве требований  $J$  [3].

Определение 2. Требование  $J_u \in J$  доминирует требование  $J_v \in J$  относительно  $T$ , если существует минимальное доминирующее множество  $S(T)$  для задачи  $1 | p_i^L \leq p_i \leq p_i^U | \sum w_i C_i$  такое, что требование  $J_u$  предшествует требованию  $J_v$  в каждой перестановке требований из множества  $S(T)$ .

В статье [4] доказаны следующие утверждения для задачи  $1 | p_i^L \leq p_i \leq p_i^U | \sum w_i C_i$ .

Теорема 1. Для задачи  $1 | p_i^L \leq p_i \leq p_i^U | \sum w_i C_i$  требование  $J_u$  доминирует требование  $J_v$  относительно  $T$  тогда и только тогда, когда  $\frac{w_u}{p_u^U} \geq \frac{w_v}{p_v^L}$ .

Теорема 2. Для того чтобы перестановка  $\pi_k = (J_{k_1}, J_{k_2}, \dots, J_{k_n})$  определяла одноэлементное доминирующее множество  $S(T) = \{\pi_k\} = \{(J_{k_1}, J_{k_2}, \dots, J_{k_n})\}$  для задачи  $1 | p_i^L \leq p_i \leq p_i^U | \sum w_i C_i$ , необходимо и достаточно выполнение следующих соотношений:

$$\frac{w_{k_1}}{p_{k_1}^U} \geq \frac{w_{k_2}}{p_{k_2}^L}; \quad \frac{w_{k_2}}{p_{k_2}^U} \geq \frac{w_{k_3}}{p_{k_3}^L}; \quad \dots \quad \frac{w_{k_{n-1}}}{p_{k_{n-1}}^U} \geq \frac{w_{k_n}}{p_{k_n}^L}. \quad (1)$$

Теорема 3. Пусть  $p_i^L < p_i^U$ ,  $J_i \in J$ . Для существования минимального доминирующего множества  $S(T)$  максимальной мощности  $|S(T)| = n!$  для задачи  $1 | p_i^L \leq p_i \leq p_i^U | \sum w_i C_i$  необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\max \left\{ \frac{w_i}{p_i^U} \mid J_i \in J \right\} < \min \left\{ \frac{w_i}{p_i^L} \mid J_i \in J \right\}.$$

При применении метода, основанного на устойчивости оптимального расписания, для решения неопределенной задачи  $1 | p_i^L \leq p_i \leq p_i^U | \sum w_i C_i$  остается открытым вопрос, какую перестановку следует выбирать из минимального доминирующего множества  $S(T)$  для практической реализации в случае, когда условие (1) теоремы 2 не выполняется. Поскольку точное решение неопределенной задачи  $1 | p_i^L \leq p_i \leq p_i^U | \sum w_i C_i$  в общем случае невозможно, то предлагается использовать эвристический алгоритм для построения перестановки  $\pi_k = (J_{k_1}, J_{k_2}, \dots, J_{k_n}) \in S(T)$ .

В п. 2 показано, как можно оценить качество эвристического решения задачи  $1 | p_i^L \leq p_i \leq p_i^U | \sum w_i C_i$  до реализации расписания на примере построенной перестановки  $\pi_r \in S(T)$ . Минимальную среднюю погрешность по сравнению с оптимальной перестановкой, полученной для случайного сгенерированного сценария задачи  $1 | p_i^L \leq p_i \leq p_i^U | \sum w_i C_i$ , дают перестановки  $\pi_r \in S(T)$ , в которых требования отсортированы в порядке невозрастания отношений весов к серединам интервалов длительностей обслуживания требований. Алгоритм сортировки требований в порядке невозрастания отношений весов к серединам интервалов длительностей обслуживания можно представить следующим образом.

*Алгоритм ЭВРИСТИКА*

*Вход:* Отрезки  $[p_i^L, p_i^U]$  и веса  $w_i$  требований  $J_i \in J$ .

*Выход:* Перестановка  $\pi_r = (J_{r_1}, J_{r_2}, \dots, J_{r_n}) \in S(T)$  обслуживания требований  $J$ .

*Шаг 1.* Для каждого требования  $J_i \in J$  вычислить значение  $w_i / ((p_i^L + p_i^U) / 2)$ .

*Шаг 2.* Построить перестановку  $\pi_r = (J_{r_1}, J_{r_2}, \dots, J_{r_n}) \in S(T)$ , упорядочив требования множества  $J$  в порядке невозрастания значений  $w_i / ((p_i^L + p_i^U) / 2)$ .

Очевидно, для реализации алгоритма ЭВРИСТИКА требуется  $O(n \log n)$  элементарных операций. В качестве меры устойчивости оптимальной перестановки  $\pi_k \in S(T)$  к изменениям длительностей обслуживания требований множества  $J$  будем использовать многогранник оптимальности этой перестановки.

**2. Многогранник оптимальности перестановки обслуживания требований.** В статье [5] рассматривается многогранник (параллелепипед) оптимальности перестановки  $\pi_k$ , который содержится в области устойчивости перестановки  $\pi_k$ . Пусть  $N_k$  – подмножество множества индексов  $i$  всех требований  $J_i \in J$ .

**Определение 3.** Максимальный замкнутый параллелепипед  $OB(\pi_k, T) = \times_{k_i \in N_k} [\hat{l}_{k_i}, \hat{u}_{k_i}] \subseteq T$  называется многогранником оптимальности перестановки  $\pi_k = (J_{k_1}, J_{k_2}, \dots, J_{k_n}) \in S$  относительно  $T$ , если при любом сценарии  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in T$ , при котором перестановка  $\pi_k$  оптимальна для задачи  $1 | p | \sum w_i C_i$ , эта перестановка остается оптимальной и для задачи  $1 | p' | \sum w_i C_i$  при сценарии  $p' \in OB(\pi_k, T) \times \{ \times_{k_j \in N \setminus N_k} [p_{k_j}, p_{k_j}] \}$ . Если не существует сценария  $p \in T$ , при котором перестановка  $\pi_k$  оптимальна для задачи  $1 | p | \sum w_i C_i$ , то полагаем  $OB(\pi_k, T) = \emptyset$ .

Для построения многогранника оптимальности  $OB(\pi_k, T)$  для перестановки  $\pi_k$  предлагается использовать алгоритм построения многогранника оптимальности  $OB(\pi_k, T)$  для той же перестановки для соответствующей задачи  $1 | \hat{p}_i^L \leq p_i \leq \hat{p}_i^U | \sum w_i C_i$  с редуцированными интервалами длительностей обслуживания требований (рис. 1)  $[\hat{p}_i^L, \hat{p}_i^U] \subseteq [p_i^L, p_i^U]$  для всех  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , полученными по следующим формулам:

$$\frac{w_i}{\hat{p}_i^L} = \min_{1 \leq j \leq i} \left\{ \frac{w_j}{p_j^L} \right\}, \quad \frac{w_i}{\hat{p}_i^U} = \max_{i \leq j \leq n} \left\{ \frac{w_j}{p_j^U} \right\}.$$

Задачу  $1 | \hat{p}_i^L \leq p_i \leq \hat{p}_i^U | \sum w_i C_i$  с редуцированными интервалами возможных длительностей обслуживания требований будем называть *редуцированной задачей*.

В статье [5] разработан алгоритм сложности  $O(n)$  построения многогранника оптимальности  $OB(\pi_k, T)$ , основанный на следующей теореме.

**Теорема 4.** Многогранник оптимальности перестановки  $\pi_k$  обслуживания требований  $J$  для неопределенной задачи  $1 | p_i^L \leq p_i \leq p_i^U | \sum w_i C_i$  совпадает с многогранником оптимальности перестановки  $\pi_k$  обслуживания требований  $J$  для редуцированной задачи  $1 | \hat{p}_i^L \leq p_i \leq \hat{p}_i^U | \sum w_i C_i$ .

Нетрудно доказать, что если выполняется условие (1) теоремы 2, то многогранник оптимальности перестановки  $\pi_k = (J_{k_1}, J_{k_2}, \dots, J_{k_n})$ , для которой  $S(T) = \{\pi_k\}$ , совпадает с множеством  $T = \{p \mid p \in R_+^n, p_i^L \leq p_i \leq p_i^U, i \in \{1, 2, \dots, n\}\} = \times_{i=1}^n [p_i^L, p_i^U]$  возможных сценариев. В этом случае для любого сценария  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in T$  оптимальная перестановка для задачи  $1 | p | \sum w_i C_i$  совпадает с перестановкой  $\pi_r = (J_{r_1}, J_{r_2}, \dots, J_{r_n})$ , построенной по алгоритму ЭВРИСТИКА. В п. 3 многогранники оптимальности перестановок, полученных с помощью алгоритма ЭВРИСТИКА, оцениваются экспериментально.

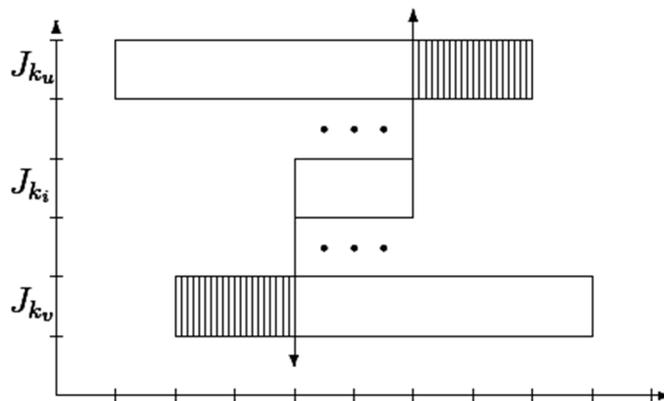


Рис. 1. Отсекаемые в редуцированной задаче интервалы изменений отношения весов к длительностям обслуживания требований (отсекаемые интервалы заштрихованы прямыми вертикальными линиями)

**3. Результаты вычислительного эксперимента.** В проведенном на компьютере вычислительном эксперименте каждая серия задач состояла из 100 случайно сгенерированных задач с одинаковыми количествами требований  $n$  и заданными максимальными погрешностями  $\delta$  длительностей обслуживания требований. Целочисленные значения нижней границы  $p_i^L$  и верхней границы  $p_i^U$  для возможных значений  $p_i \in R_+^1$  длительностей обслуживания требований  $[p_i^L, p_i^U]$  были получены следующим образом. Вначале на числовом отрезке  $[L, U]: L \leq C \leq U$ ,  $[L, U] = [10, 100]$  случайно выбирался центр  $C$  искомого отрезка  $[p_i^L, p_i^U]$  с использованием равномерного закона распределения случайных величин. Нижняя граница  $p_i^L$  возможной длительности обслуживания требования определялась по формуле  $p_i^L = C \left(1 - \frac{\delta}{100}\right)$ , а верхняя граница  $p_i^U$  – по формуле  $p_i^U = C \left(1 + \frac{\delta}{100}\right)$ . Случайно выбранные веса  $w_i \in R_+^1$  каждого требования  $J_i \in J$  были равномерно распределены на отрезке  $[1, 50]$ . Полученные значения весов  $w_i$  считались известными на момент построения расписания.

Все алгоритмы для проведенного эксперимента были реализованы на алгоритмическом языке C++. Эксперименты проводились на компьютере с процессором Intel Pentium (R) с частотой (CPU) 3.00 GHz и оперативной памятью (RAM) 1024 MB.

Для каждой рассмотренной в эксперименте задачи  $1 | p_i^L \leq p_i \leq p_i^U | \sum w_i C_i$  строилась перестановка требований  $\pi_r = (J_{r_1}, J_{r_2}, \dots, J_{r_n})$  по алгоритму ЭВРИСТИКА и определялся многогранник оптимальности для построенной перестановки. Затем случайным образом выбирался фактический сценарий  $p^* = (p_1^*, p_2^*, \dots, p_n^*)$  из множества  $T$  возможных сценариев. Для выбранного сценария  $p^* = (p_1^*, p_2^*, \dots, p_n^*)$  строилась оптимальная для задачи  $1 | p^* | \sum w_i C_i$  перестановка по алгоритму Смита [2]. Пусть  $\Phi^0 = \sum_{i=1}^n w_i C_i^0$  обозначает значение целевой функции для перестановки  $\pi_r = (J_{r_1}, J_{r_2}, \dots, J_{r_n})$ , построенной по алгоритму ЭВРИСТИКА, а  $\Phi^* = \sum_{i=1}^n w_i C_i^*$  – оптимальное

значение целевой функции для случайно сгенерированной задачи  $1 | p^* | \sum w_i C_i$  с фактическими длительностями  $p^* = (p_1^*, p_2^*, \dots, p_n^*)$  обслуживания требований. Относительная погрешность целевой функции может быть вычислена по формуле  $\Delta = [(\Phi^0 - \Phi^*) / \Phi^*] \cdot 100 \%$ . Основная цель вычислительного эксперимента состояла в сравнении многогранников оптимальности с относительными погрешностями перестановок  $\pi_r = (J_{r_1}, J_{r_2}, \dots, J_{r_n})$ , построенных по алгоритму ЭВРИСТИКА. В таблице представлены результаты вычислительных экспериментов для случайно сгенерированных задач  $1 | p_i^L \leq p_i \leq p_i^U | \sum w_i C_i$  с количеством требований  $n \in \{200, 400, \dots, 1000\}$  и максимальной погрешностью  $\delta \% \in \{1 \%, 5 \%, 10 \%, 15 \%, 40 \%\}$  заданных длительностей обслуживания требований.

В столбце 1 таблицы указано количество требований  $n$  в рассмотренных в эксперименте задачах, в столбце 2 – погрешности  $\delta$  случайно сгенерированных интервалов длительностей обслуживания требований (в процентах). В столбце 3 приведены средние значения размерностей  $|N_k|$  многогранников оптимальности  $OB(\pi_r, T)$  перестановок  $\pi_r$ . В столбце 4 даны средние относительные объемы  $\text{Vol}OB(\pi_r, T)$  многогранников оптимальности, полученные по следующей формуле:  $\text{Vol}SB(\pi_r, T) = \prod_{\hat{r}_i < \hat{u}_{r_i}} \frac{\hat{u}_{r_i} - \hat{r}_i}{p_{r_i}^U - p_{r_i}^L}$ . В столбце 5 указаны средние значения относительных погрешностей  $\Delta = [(\Phi^0 - \Phi^*) / \Phi^*] \cdot 100 \%$  для каждой серии решенных в эксперименте задач, в столбце 6 приведено суммарное время решения всей серии из 100 задач.

Для перестановки  $\pi_r \in S(T)$ , построенной по алгоритму ЭВРИСТИКА, относительная погрешность  $\Delta = [(\Phi^0 - \Phi^*) / \Phi^*] \cdot 100 \%$  полученных решений для серии задач имеет максимальное

значение 3,3056 %, среднее значение 0,8177 % и минимальное значение 0,0126 %. Минимальные (по сериям задач) средние значения  $\Delta = \{0,0130; 0,0126; 0,0128; 0,0126; 0,0128\}$  получены для серии задач с  $\delta \% = 1 \%$ , которым соответствуют максимальные средние значения  $\{75,44; 67,4; 62,92; 60,31; 58,43\}$  размерностей многогранников оптимальности. Максимальные (по сериям задач) средние значения  $\Delta = \{3,2684; 3,2368; 3,2860; 3,3056; 3,2887\}$  получены для серии задач с  $\delta \% = 40 \%$ , которым соответствуют минимальные средние значения  $\{2,21; 1,98; 2,01; 1,97; 1,95\}$  размерностей многогранников оптимальности.

**Результаты решения случайно сгенерированных задач для  $w_i \in [1, 50]$  и  $n \in \{200, 400, \dots, 1000\}$**

Число требований $n$	Максимальная погрешность $\delta \%$ длительностей $p_i, J_i \in J$	Средняя размерность многогранника $OB(\pi_r, T)$	Относительный объем многогранника оптимальности $VolOB(\pi_r, T)$	Относительная погрешность $\Delta = \frac{(\Phi^0 - \Phi^*)}{\Phi^*} \cdot 100 \%$ полученных решений	Время работы процессора для серии задач, с
1	2	3	4	5	6
200	1 %	75,44	8,26E-19	0,0130 %	0
200	5 %	19,53	6,90E-06	0,0706 %	1
200	10 %	8,69	5,00E-03	0,2295 %	0
200	15 %	5,19	4,78E-02	0,4973 %	0
200	40 %	2,21	2,04E-01	3,2684 %	1
400	1 %	67,4	3,01E-17	0,0126 %	1
400	5 %	16,08	3,01E-04	0,0711 %	1
400	10 %	6,58	3,87E-02	0,2336 %	1
400	15 %	3,93	8,33E-02	0,4942 %	1
400	40 %	1,98	1,65E-01	3,2368 %	1
600	1 %	62,92	7,46E-08	0,0128 %	2
600	5 %	12,7	1,37E-03	0,0718 %	3
600	10 %	5,91	2,46E-02	0,2339 %	2
600	15 %	3,83	7,73E-02	0,4945 %	3
600	40 %	2,01	1,24E-01	3,2860 %	3
800	1 %	60,31	4,51E-12	0,0126 %	4
800	5 %	11,78	3,73E-03	0,0708 %	4
800	10 %	5,38	2,54E-02	0,2306 %	4
800	15 %	3,49	7,99E-02	0,4956 %	5
800	40 %	1,97	1,25E-01	3,3056 %	4
1000	1 %	58,43	1,52E-11	0,0128 %	6
1000	5 %	10,66	4,75E-03	0,0715 %	7
1000	10 %	5,09	3,15E-02	0,2323 %	6
1000	15 %	3,22	6,66E-02	0,4964 %	7
1000	40 %	1,95	7,91E-02	3,2887 %	7

При увеличении максимальной погрешности  $\delta$  длительностей обслуживания требований средняя погрешность  $\Delta$  целевой функции растет для каждой серии задач, а средняя величина размерности многогранника оптимальности уменьшается (рис. 2, а, б). Имеет место корреляция роста погрешности  $\Delta$  и уменьшения размеров многогранника оптимальности  $OB(\pi_r, T)$ . Из результатов эксперимента следует, что погрешность  $\Delta$  целевой функции слабо зависит от количества требований при фиксированной погрешности  $\delta$  длительностей обслуживания требований (рис. 2, в).

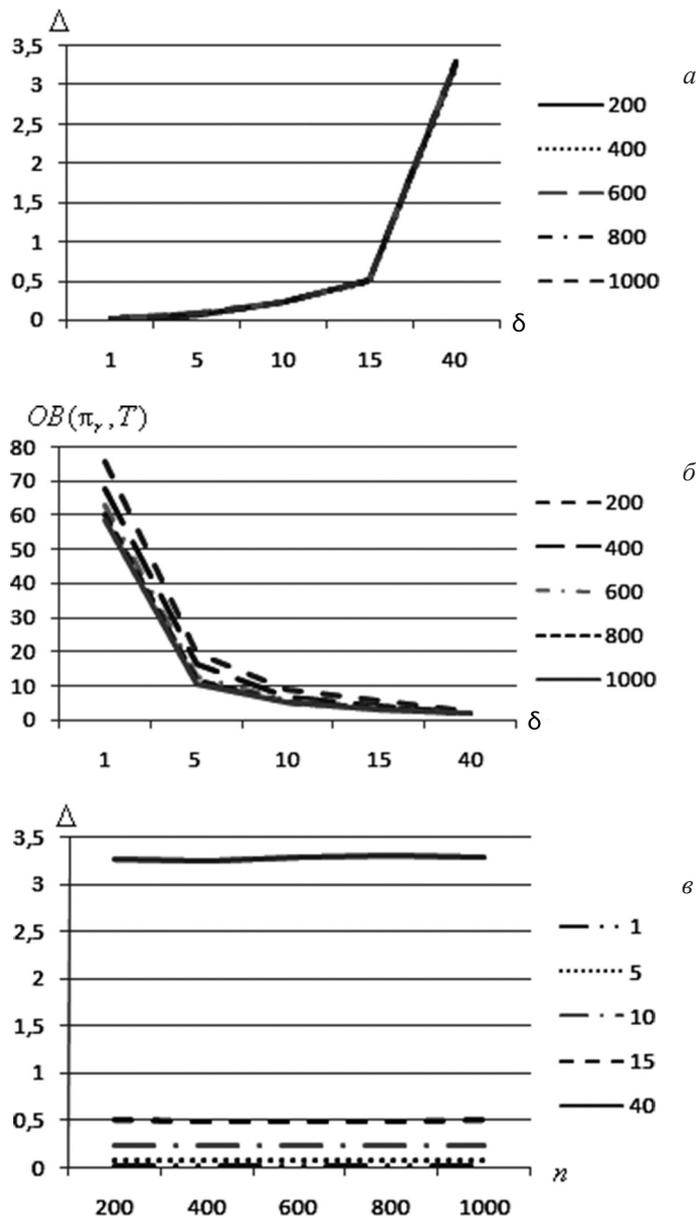


Рис. 2. Зависимость: а – погрешности целевой функции  $\Delta$  от максимальной погрешности  $\delta$  длительностей  $p_i, J_i \in J$ ; б – размерностей многогранников оптимальности перестановки  $\pi_r \in S(T)$  от максимальной погрешности  $\delta$  длительностей  $p_i, J_i \in J$ ; в – погрешности целевой функции от количества требований

Также ставился эксперимент с целью выявления для многогранников оптимальности  $OB(\pi_r, T)$  с одинаковыми размерностями зависимости погрешностей значений целевых функций от количества требований  $J_{r_i}$ , для которых  $\hat{l}_{r_i} < \hat{u}_{r_i}$ . Проводился эксперимент по определению для многогранников оптимальности перестановки  $\pi_r \in S(T)$  с одинаковыми размерностями и одинаковым количеством требований  $J_{r_i}$ , для которых  $\hat{l}_{r_i} < \hat{u}_{r_i}$ , зависимости погрешностей значений целевых функций от объема многогранника оптимальности. При уменьшении количества требований  $J_{r_i}$ , для которых  $\hat{l}_{r_i} < \hat{u}_{r_i}$ , в случае одинаковых размерностей многогранников оптимальности в серии задач относительная погрешность целевой функции, как правило, растет (рис. 3, а). В случае увеличения объема  $VolOB(\pi_k, T)$  многогранников оптимальности при равных значениях размерностей многогранников оптимальности и требований  $J_{r_i}$ , для которых  $\hat{l}_{r_i} < \hat{u}_{r_i}$ , относительная погрешность целевой функции, как правило, убывает (рис. 3, б, в).

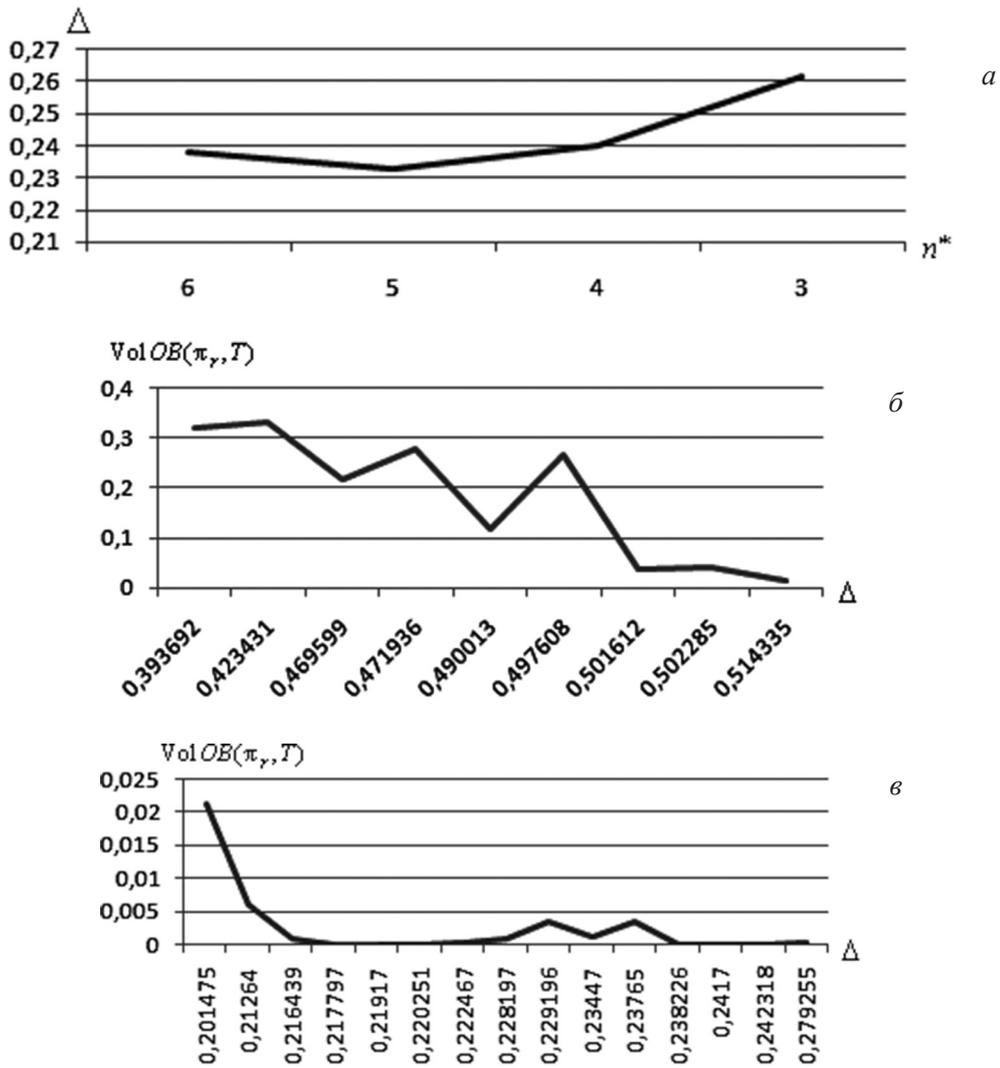


Рис. 3. Зависимость погрешности целевой функции от количества  $n^*$  требований  $J_{r_i}$ , для которых  $\hat{l}_{r_i} < \hat{u}_{r_i}$  при одинаковых размерностях многогранников  $OB(\pi_r, T)$  (а); уменьшение относительного объема многогранника оптимальности  $OB(\pi_r, T)$  при увеличении  $\Delta$  для серии задач А (б) и серии задач Б (в) с одинаковыми размерностями многогранника и одинаковыми количествами  $n^*$  требований  $J_{r_i}$ , для которых  $\hat{l}_{r_i} < \hat{u}_{r_i}$

Таким образом, целесообразно из всех перестановок минимального доминирующего множества  $S(T)$  выбирать для реализации перестановку с наибольшей размерностью многогранника оптимальности. Если таких перестановок несколько, то среди них следует выбирать перестановку, имеющую минимальное количество  $n_k$  требований  $J_{r_i}$ , для которых выполняется равенство  $\hat{l}_{r_i} = \hat{u}_{r_i}$ . Если и таких перестановок несколько, то среди них следует выбирать перестановку  $\pi_k$  с наибольшим относительным объемом  $\text{Vol}OB(\pi_k, T)$  многогранника оптимальности  $OB(\pi_k, T)$ .

**Заключение.** Согласно проведенному эксперименту, для перестановки  $\pi_r \in S(T)$ , построенной по алгоритму ЭВРИСТИКА, относительная погрешность  $\Delta = [(\Phi^0 - \Phi^*) / \Phi^*] \cdot 100\%$  полученных решений для серии случайно сгенерированных задач  $1 | p_i^l \leq p_i \leq p_i^u | \sum w_i C_i$  имела максимальное значение 3,3056 % и среднее значение 0,8177 %. При увеличении максимальной погрешности  $\delta$  длительностей обслуживания требований средние значения относительной погрешности  $\Delta$  целевой функции  $\gamma = \sum_{i=1}^n w_i C_i$  росли для каждой серии решенных задач, а средние значения размерностей и объемов  $\text{Vol}OB(\pi_k, T)$  многогранников оптимальности  $OB(\pi_k, T)$  уменьшались пропорционально росту погрешности  $\Delta$  целевой функции.

Размерность, объем и другие характеристики многогранника оптимальности  $OB(\pi_k, T)$  можно вычислить до реализации расписания обслуживания требований, и поэтому они могут быть использованы для выбора перестановки, оптимальность которой более устойчива к возможным вариациям длительностей обслуживания требований. Таким образом, целесообразно из всех перестановок минимального доминирующего множества  $S(T)$  выбирать для практической реализации перестановку  $\pi_k \in S(T)$  с наибольшим по размерности и объему многогранником оптимальности  $OB(\pi_k, T)$ .

Разработка алгоритмов построения перестановок требований с наибольшим многогранником оптимальности  $OB(\pi_k, T)$  представляет интерес для дальнейших исследований неопределенной задачи  $1 | p_i^L \leq p_i \leq p_i^U | \sum w_i C_i$ .

### Список использованной литературы

1. Optimization and approximation in deterministic sequencing and scheduling: a survey / R. L. Graham [et al.] // Ann. Discrete Math. – 1976. – Vol. 5. – P. 287–326.
2. Smith, W. E. Various optimizers for single-stage production / W. E. Smith // Naval Research Logistics Quarterly. – 1956. – Vol. 3, N 1. – P. 59–66.
3. Scheduling under uncertainty: theory and algorithms / Yu. N. Sotskov [et al.]. – Minsk: Belarus. nauka, 2010.
4. Sotskov, Yu. N. Minimizing total weighted flow time of a set of jobs with interval processing times / Yu. N. Sotskov, N. G. Egorova, T.-C. Lai // Mathematical and Computer Modelling. – 2009. – Vol. 50, N 3/4. – P. 556–573.
5. Сотсков, Ю. Н. Многогранники устойчивости оптимальной перестановки обслуживания требований / Ю. Н. Сотсков, Н. Г. Егорова // Автоматика и телемеханика. – 2014. – № 7. – С. 136–154.

Поступила в редакцию 12.03.2015

УДК: 004.89 004.94 612.13

*М. В. ВОЙТИКОВА<sup>1</sup>, Р. В. ХУРСА<sup>2</sup>*

**ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДАННЫХ  
ДЛЯ ДИАГНОСТИКИ ЛАТЕНТНЫХ НАРУШЕНИЙ ГЕМОДИНАМИКИ:  
УСЛОВИЯ ПРАКТИЧЕСКОГО ПРИМЕНЕНИЯ**

<sup>1</sup>*Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь,  
e-mail: voitikova@imaph.bas-net.by*

<sup>2</sup>*Белорусский государственный медицинский университет, Минск, Беларусь,  
e-mail: rvkhursa@tut.by*

Исследовались особенности применения построенной с помощью интеллектуального анализа данных номограммы для классификации гемодинамических состояний по величинам артериального давления (АД) при суточном мониторинговании и случайном измерении АД стандартными измерительными приборами. При нанесении на номограмму вектора характерных особенностей АД, координаты которого есть набор коэффициентов линейной регрессии систолического, диастолического и пульсового давления, гемодинамическое состояние диагностируется по расположению вектора в определенных границах номограммы. Показано, что для практического использования номограммы потребуется получение минимально 10 успешных (исключающих артефакты) измерений АД при малой вариабельности его показателей или 25–30 измерений при высокой.

*Ключевые слова:* интеллектуальный анализ данных, диагностическая номограмма, гемодинамика.

*M. V. VOITIKOVA<sup>1</sup>, R. V. KHURSA<sup>2</sup>*

**DIAGNOSTICS OF LATENT HEMODYNAMICS BY DATA MINING:  
CONDITIONS OF PRACTICAL USE**

<sup>1</sup>*B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus,  
e-mail: voitikova@imaph.bas-net.by*

<sup>2</sup>*Belarusian State Medical University, Minsk, Belarus, e-mail: rvkhursa@tut.by*

We proposed a diagnostic nomogram (map) for hemodynamic state classification, based on linear regression modeling of blood pressure (BP) parameters and Data Mining algorithm. Mapping the vector of the BP characteristics, which coordinates are the coefficients of linear regression of the systolic, diastolic on pulse pressure, the pathological changes of hemodynamics inherent in hypertension, prehypertension or clinically latent hemodynamic disturbances can be diagnosed. The normal physiology of cardiovascular interaction corresponds to the vector location within certain limits on the nomogram. We have investigated the factors influencing the accuracy of the diagnostics in a clinical setting.

*Keywords:* Data Mining, diagnostic nomogram, hemodynamics.

**Введение.** Алгоритмы интеллектуального анализа данных Data Mining в последнее десятилетие широко используются для поддержки принятия решений в различных сферах человеческой деятельности [1], в том числе в медицинской диагностике [2]. Технологии Data Mining основаны на поиске в массиве данных скрытых закономерностей или шаблонов информации, действующих на основе правил, формализующих экспертные знания, что выгодно отличает их от статистических методов анализа, ориентированных на проверку заранее сформулированных гипотез. Так, при помощи обученной на примерах машины опорных векторов, использующей вектор характерных особенностей сигнала артериального давления (АД), представленного набором коэффициентов линейной регрессии систолического, диастолического и пульсового давления, авторами была

разработана диагностическая номограмма для моделирования процессов в гемодинамике – науке, изучающей механизмы движения крови в сердечно-сосудистой системе.

Известно, что установлению клинически явной артериальной гипертензии (АГ) предшествуют латентные нарушения сердечно-сосудистой системы, например повышенная вариабельность АД, увеличение сосудистой жесткости, изменение параметров центральной гемодинамики и др. [3]. Однако диагностика таких отклонений требует дополнительных инструментальных методов, использующихся с данной целью только по обоснованным показаниям.

Целью настоящего исследования является определение условий практического применения оригинальной номограммы гемодинамических состояний для диагностики латентных нарушений кровообращения пациентов при суточном мониторинге артериального давления (СМАД) [4, 5] и случайных измерениях АД стандартными измерительными приборами.

Диагностическая номограмма (карта) гемодинамических состояний создавалась с помощью обученной на примерах машины опорных векторов (алгоритм интеллектуального анализа данных Data Mining). Она представляет собой систему координат коэффициентов линейной регрессии систолического давления по пульсовому давлению, полученных при СМАД (отдельно за дневной, ночной и суточный периоды), на которую наносятся параметры регрессии тестируемого пациента. Нами были определены границы параметров регрессии, соответствующие нормотензивному гармоническому кровообращению пациента, и критерии, указывающие на патологическое изменение сердечно-сосудистой системы, свойственное АГ, вторичной гипотензии или нормотензии с дисфункциональными гемодинамическими нарушениями, включая клинически латентные у практически здоровых людей. Созданная диагностическая номограмма позволяет выделить 9 гемодинамических классов: артериальная гипотензия или артериальная гипертензия гармонического либо дисфункциональных типов (диастолического, систолического); гармонический или дисфункциональные (диастолический, систолический) типы у нормотензивных лиц, а также квази-гипертензия (Квази-АГ) [4–7]. Среди латентных гемодинамических нарушений в когорте нормотензивных пациентов особое внимание привлекает класс, названный нами Квази-АГ, который можно рассматривать как предгипертензию, поскольку по ряду параметров СМАД пациенты этого класса сходны с пациентами АГ до начала лечения. Диагностика данного состояния, переходного к АГ, методами математического анализа временных рядов АД с применением номограммы представляется важным в клинической практике.

**Регрессионное моделирование гемодинамики с применением интеллектуального анализа данных.** Применение диагностической номограммы предполагает регрессионное моделирование гемодинамики по результатам измерений СМАД. Величина АД является интегральной характеристикой сердечно-сосудистой системы, зависит от объема циркулирующей крови, согласованной работы сердца и сосудов, реологических свойств крови и периферического сопротивления сосудов. Артериальное давление характеризуется величинами систолического давления  $S$  (максимальное давление при сокращении сердечной мышцы), диастолического давления  $D$  (минимальное давление между ударами сердца в момент расслабления сердечной мышцы), а также пульсового давления  $W$  (по определению:  $W = S - D$ ). Пульсовое давление  $W$  является барическим эквивалентом пульсового объема крови, включает в себе результат взаимодействия сократительной функции сердца, растяжимости артерий и величины волны отражения.

Линейное регрессионное моделирование параметров АД с пульсовым давлением  $W$  в качестве аргумента использовалось нами для диагностики типа гемодинамики и раннего определения гемодинамических нарушений. Коэффициенты получаемой регрессии характеризуют индивидуальное кровообращение как процесс сердечно-сосудистого взаимодействия в продвижении крови [8]. Регрессионная модель кровообращения в аналитическом виде определяется линейным уравнением  $S = Q + aW$ , где  $a$  и  $Q$  – коэффициенты регрессии. Коэффициент  $Q$  определяет величину давления в области затухающей пульсовой волны, а значения коэффициента  $a$  косвенно задает соотношение систолической и диастолической составляющих процесса кровообращения.

Применение алгоритмов интеллектуального анализа данных [9] к параметрам измерения АД позволило получить новую значимую информацию для классификации гемодинамики пациента.

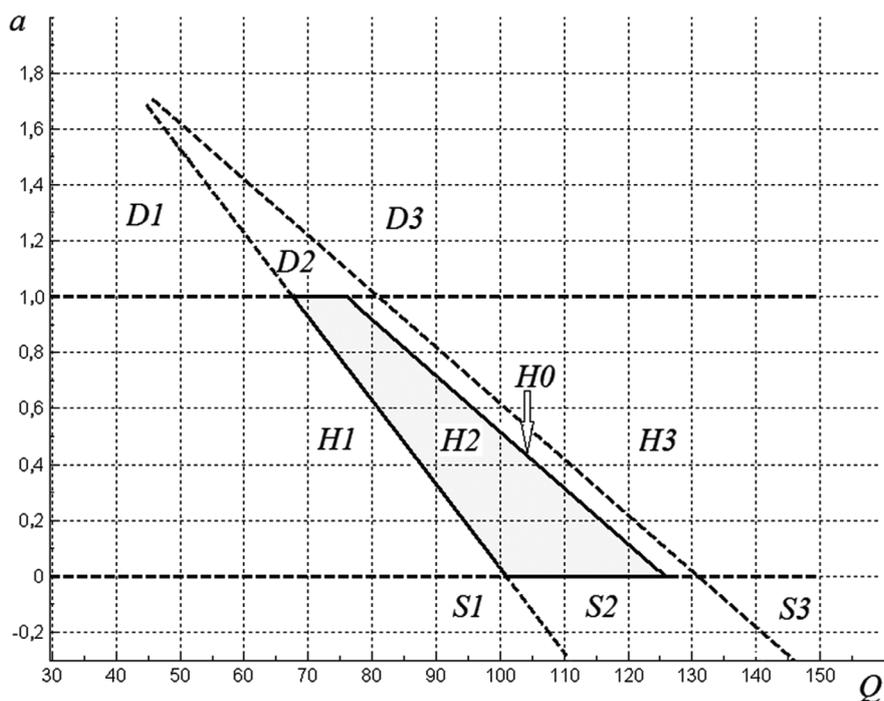


Рис. 1. Номограмма гемодинамических состояний (дневной период СМАД): область  $D$  – диастолический дисфункциональный тип кровообращения; область  $S$  – систолический дисфункциональный тип; область  $H$  – гармонический тип (в том числе  $H1$  – вторичная гипотензия;  $H2$  – нормотензия;  $H0$  – Квази-АГ;  $H3$  – АГ)

Алгоритм Support Vector Machine ( $SVM$ ), или машина опорных векторов, обученный на библиотеке примеров АД пациентов с различной гемодинамикой (гипертензией, нормотензией и эпизодами вторичной гипотензии), был положен в основу диагностической номограммы (рис. 1), на которую наносится 2-мерный вектор характерных признаков (характеристический вектор)  $\{Q, a\}$  для диагностики гемодинамики тестируемого пациента [4, 5]. Гемодинамические классы разделяются прямыми:  $a = -0,03Q + 3,03$ ;  $a = -0,02Q + 2,52$ ;  $a = -0,02Q + 2,62$ ;  $a = 0$ ;  $a = 1$ . Гемодинамический класс пациентов с параметрами в области  $H0$  (см. рис. 1) – Квази-АГ – был выделен классификатором на основе  $SVM$  в той части номограммы, где множество векторов АД нормо- и гипертензивных лиц перекрываются в зоне гармонического типа кровообращения ( $0 < a < 1$ ). Это означает, что гемодинамика лиц, попавших в эту область, характеризуется гармоническим кровообращением, но при этом сходна с гемодинамикой пациентов с АГ (т. е. Квази-АГ обозначает область, где равновероятно представлены регрессионные параметры АД нормо- и гипертензивных пациентов). Было показано, что эта подгруппа представляет пациентов с переходным к АГ гемодинамическим состоянием, которое можно рассматривать как прегипертензию у пациентов, имеющих на момент исследования нормальные показатели АД [5, 6].

Для правильной диагностики гемодинамических состояний по предлагаемой классификации, особенно Квази-АГ (учитывая «узкий» участок области характеристических векторов на номограмме, задающийся неравенством  $-0,02Q + 2,52 < a < -0,02Q + 2,62$  при  $0 < a < 1$ ), задача достоверного определения коэффициентов регрессии  $\{Q, a\}$  является актуальной.

#### **Факторы, влияющие на результаты регрессионного анализа артериального давления.**

Основными факторами, способными негативно влиять на достоверность определения коэффициентов регрессии  $\{Q, a\}$ , могут являться недостаточная продолжительность ряда измерений АД (число точек  $L$ , по которым строится регрессия) и наличие артефактов измерений (несоблюдение правил измерения, недостаточная квалификация измеряющего, техническая неисправность прибора и др.). Поэтому в первую очередь ставилась задача определения минимального числа успешных измерений АД при СМАД, достаточного для достоверного определения коэффициентов регрессии. Для анализа использовались 43 временных ряда АД различных пациентов длиной от 1000 до 10 000 измерений (база данных работы [10]) и собственные данные –

58 образцов СМАД, выполненных аппаратными средствами серии *BPLab* (длительностью не менее 20 ч). Ряды разной длины были получены при «прореживании» исходного ряда измерений СМАД для достижения рядов нужной длины (минимально 6 измерений АД). На рис. 2 и 3 приведены вычисленные коэффициенты регрессии для разной длины ряда величин АД пациентов *c2\_a40551* (из базы данных [10]) и *K40T02* (собственные данные). Как видно, значительные изменения величин регрессионных коэффициентов  $\{Q, a\}$  возникают при уменьшении длины ряда менее 15 измерений АД (для наглядности зависимостей  $\{Q, a\}$  от длины ряда  $L$  на рис. 2–5 использован логарифмический масштаб). Следует отметить, что для рядов СМАД с малым отклонением от кривой суточного ритма допустимо использовать для получения регрессии ряды длиной 6–10 измерений. Отклонения АД от среднего уровня выражаются стандартным отклонением от среднего ( $SD$ ) или производными от  $SD$  индексами [11]. Пример полученных регрессионных коэффициентов для ряда АД с малым отклонением от кривой суточного ритма ( $SD < 10$  мм. рт. ст. для дневных измерений, пациент *K2M01*) показан на рис. 4.

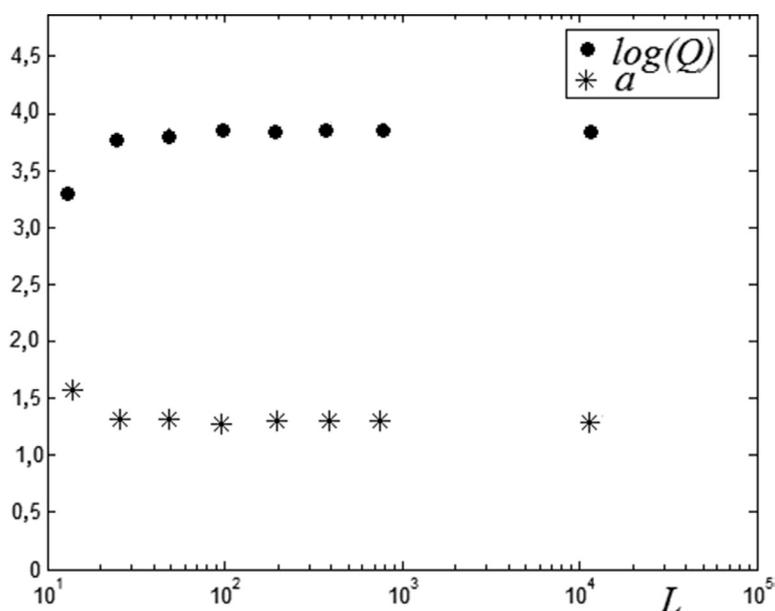


Рис. 2. Зависимость коэффициентов линейной регрессии  $\log(Q)$ ,  $a$  от числа точек измерений  $L$  (пациент *c2\_a40551*)

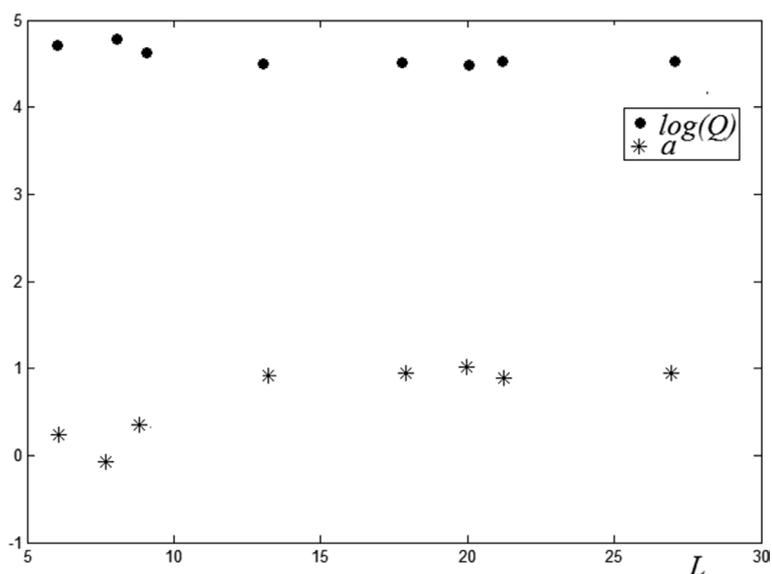


Рис. 3. Зависимость  $\log(Q)$ ,  $a$  от длины ряда  $L$  (пациент *K40T02*)

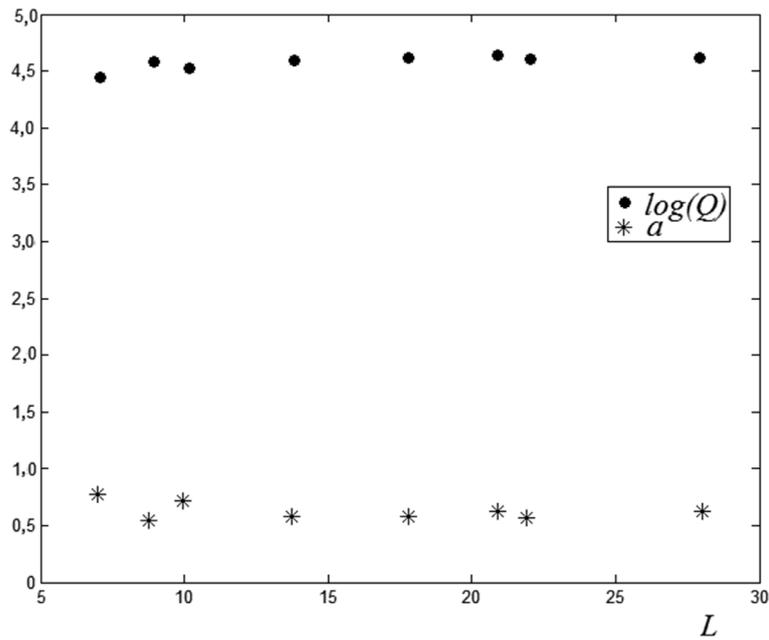


Рис. 4. Зависимость  $\log(Q)$ ,  $a$  от длины ряда  $L$  (пациент K2M01)

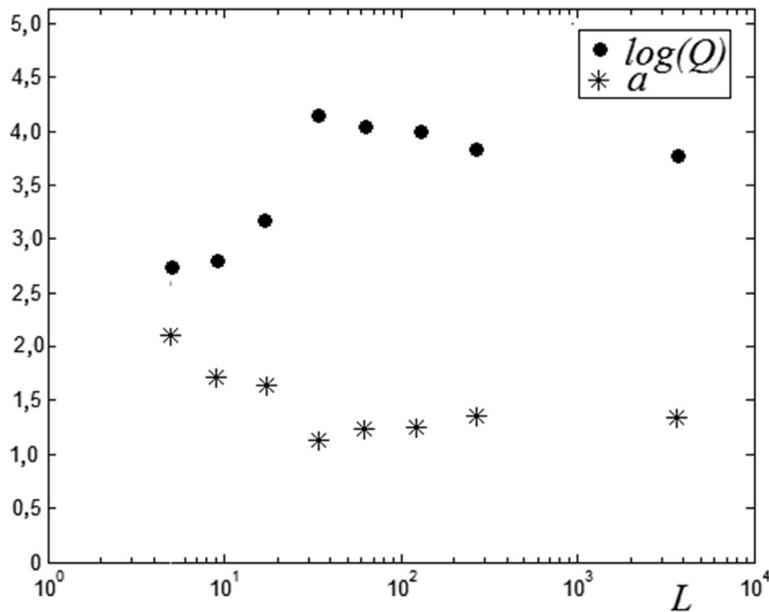


Рис. 5. Зависимость  $\log(Q)$ ,  $a$  от длины ряда  $L$  (пациент c2\_a40473, ряд АД которого содержит артефакт)

Таким образом, можно утверждать, что малая длина ряда АД (менее 15–20 измерений) становится препятствием применения номограммы гемодинамических состояний, если ряд СМАД имеет большие отклонения от кривой суточного ритма ( $SD > 15$  мм. рт. ст. для дневных измерений). Средняя длина ряда величин АД при суточном мониторинговании с интервалом измерений 15–20 мин составляет 30–50 за дневной период, поэтому указанные ограничения не влияют на достоверность диагностики АД при 25 и более успешных измерений.

Рассмотрим также другую возможную причину получения недостоверных результатов при регрессионном моделировании АД. Как правило, при СМАД аппаратными средствами автоматически удаляются грубые артефакты (ошибки измерения, возникающие при двигательной активности пациента, нарушениях сердечного ритма, отсутствии данных АД и др.). В противном случае артефакты приводят к неправильной оценке результатов СМАД, как видно из рис. 5, где

анализировался содержащий кратковременный артефакт (отсутствие сигнала) ряд АД (пациент c2\_a40473, база данных [10]). Действие артефакта нивелируется только при длительности ряда АД, превышающего 100 измерений. Таким образом, для качественного математического анализа временных рядов АД требуется выбраковка медицинским экспертом или аппаратными средствами участков ряда, содержащих артефакты.

**Применение номограммы для данных артериального давления при ручном мониторинге.** Наши исследования показали возможность применения номограммы при регулярных измерениях АД, выполненных пациентами самостоятельно с помощью ручных тонометров в течение периода времени от 2 недель до нескольких месяцев. Было установлено, что для диагностики гемодинамики допустимо использовать ряд АД с достаточным числом измерений для получения минимально шести-семи уровней пульсового давления  $W$  в терминологии работы [8] при точности измерения давления 5 мм. рт. ст. Оказалось, что при низкой вариабельности короткие ряды

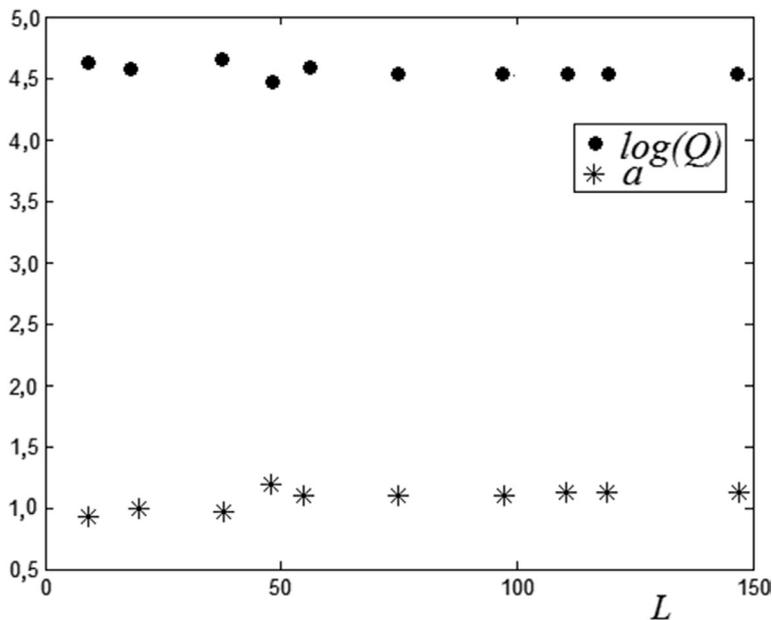


Рис. 6. Зависимость  $\log(Q)$ ,  $a$  от длины ряда  $L$  (пациент X)

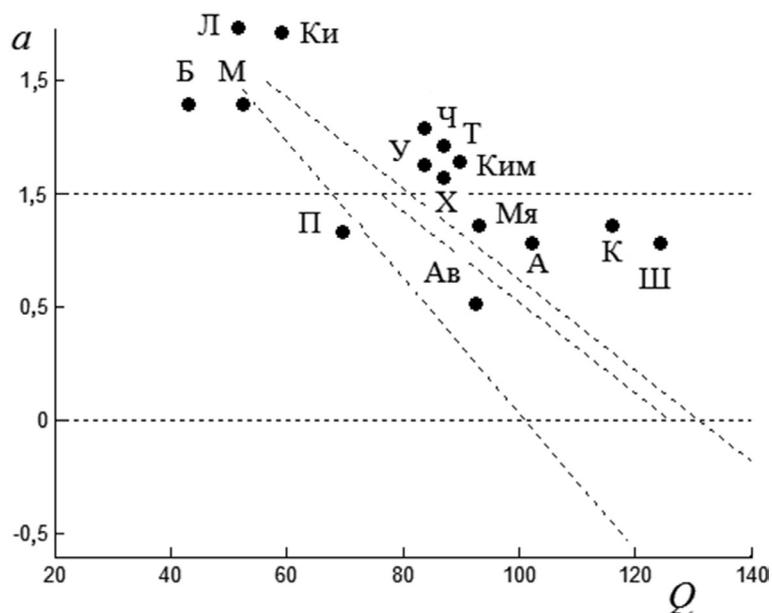


Рис. 7. Положение параметров АД пациентов при измерении давления ручными тонометрами на номограмме  $\{Q, a\}$

АД (6–10 измерений) являются репрезентативными, как и длинные ряды (40–150 измерений). На рис. 6 представлена зависимость коэффициентов линейной регрессии  $\log(Q)$ ,  $a$  от числа точек измерений  $L$ , выполненных ручным тонометром. Однако при высокой вариабельности АД ( $SD > 15$  мм. рт. ст.), как и при СМАД, для анализа необходимы 25–30 измерений.

Применение номограммы для данных АД, полученных при самостоятельном измерении АД (15 пациентов, 18 образцов АД с длиной ряда от 24 до 150 измерений), показало, что параметры пациентов с выраженной артериальной гипертензией 2–3-й степени ассоциируются с областью  $H3$  на номограмме (пациенты А, К, Мя, Ш) либо с областью  $D3$  (пациенты Ким, Т, У, Х), а при высокой вариабельности АД – с областью  $D1$ – $D2$  (пациенты Б, М) (рис. 7). Параметры АД для нормотензивного пациента располагались в области  $H2$  (пациент Ав; см. рис. 7).

**Заключение.** Применение номограммы дополняет и расширяет диагностические возможности СМАД в сомнительных случаях гипотензии или артериальной гипертензии, а также функциональной диагностики клинически латентных нарушений сердечно-сосудистой системы нормотензивных лиц.

В настоящей работе показано, что для практического использования оригинальной номограммы гемодинамических состояний при суточном мониторинге артериального давления и случайных измерениях АД стандартными измерительными приборами потребуется получение минимального числа успешных (исключающих артефакты) измерений АД. Минимальное число подлежащих анализу измерений при малой вариабельности показателей АД ( $SD < 10$  мм. рт. ст.) для дневных измерений систолического давления  $S$  составляет 10 измерений, а при высокой вариабельности АД ( $SD > 15$  мм. рт. ст.) достигает 25–30 измерений. Учитывая, что средняя длина ряда дневных измерений АД при суточном мониторинге составляет 40–50, указанные ограничения не влияют на достоверность диагностики АД при 25 и более успешных измерений.

Все вышеуказанное делает диагностическую номограмму простым и надежным инструментом обследования пациентов в клинической практике для оценки индивидуальной гемодинамики, диагностики латентных гемодинамических нарушений и ранних стадий артериальной гипертензии, а также вероятности развития гипотензивных состояний.

### Список использованной литературы

1. Чубукова, И. А. Data Mining / И. А. Чубукова. – М.: Интернет-университет информационных технологий: Бином. Лаборатория знаний, 2006. – (Серия «Основы информационных технологий»).
2. Кузнецова, А. В. Возможности использования методов Data Mining при медико-лабораторных исследованиях для выявления закономерностей в массивах данных / А. В. Кузнецова, О. В. Сенько // Врач и информ. технологии. – 2005. – № 2. – С. 38–46.
3. 2013 ESH/ESC Guidelines for the management of arterial hypertension / The Task Force for the management of arterial hypertension of the European Society of Hypertension (ESH) and of the European Society of Cardiology (ESC) // J. Hypertens. – 2013. – Vol. 31 (7). – P. 1281–1357.
4. Войтикова, М. В. Применение интеллектуального анализа данных для классификации гемодинамических состояний / М. В. Войтикова, А. П. Войтович, Р. В. Хурса // Врач и информ. технологии. – 2013. – № 1. – С. 32–41.
5. Войтикова, М. В. Номограмма гемодинамических состояний по параметрам артериального давления / М. В. Войтикова, Р. В. Хурса // Технология живых систем. – 2014. – № 2. – С. 45–53.
6. Хурса, Р. В. Суточное мониторирование артериального давления с использованием интеллектуального анализа данных: новые диагностические возможности / Р. В. Хурса, М. В. Войтикова // Артериальная гипертензия. – 2015. – № 2 (40). – С. 34–42.
7. Хурса, Р. В. Новые маркеры прегипертензии: функциональная диагностика гемодинамических классов с помощью интеллектуального анализа данных суточного мониторирования артериального давления / Р. В. Хурса // Артериальная гипертензия и профилактика сердечно-сосудистых заболеваний: материалы VIII Междунар. конф., 21–22 мая 2015 г., Витебск: прил. к журн. Кардиология в Беларуси. – 2015. – С. 263–266.
8. Хурса, Р. В. Пульсовое давление крови: роль в гемодинамике и прикладные возможности в функциональной диагностике / Р. В. Хурса // Мед. новости. – 2013. – № 4. – С. 13–19.
9. Технологии анализа данных. Data Mining, Visual Mining, Text Mining, OLAP: учеб. пособие / А. А. Барсегян [и др.]. – СПб.: БХВ-Петербург, 2007.
10. The MIMIC II Project database: <http://physionet.org/physiobank/database/mimic2db>
11. Горбунов, В. М. Современные представления о вариабельности артериального давления / В. М. Горбунов // Рациональная фармакотерапия в кардиологии. – 2012. – Т. 8 (6). – С. 810–818.

Поступила в редакцию 18.09.2015

## КАРОТКІЯ ПАВЕДАМЛЕННІ

УДК 530.1535.3

А. М. ГОНЧАРЕНКО

### О РАСПРОСТРАНЕНИИ СОЛИТОНОВ В ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ СЕЛФОКАХ

Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь,  
e-mail: a.goncharenko@ifanbel.bas-net.by

Исследованы особенности свойств солитонов в отрицательных селфоках. Показано, что солитон периодически изменяется с проникновением в отрицательную среду.

*Ключевые слова:* солитон, селфок, отрицательная среда, свойства.

A. M. GONCHARENKO

### PROPAGATION OF SOLITONS IN NEGATIVE SELFOCS

B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus,  
e-mail: a.goncharenko@ifanbel.bas-net.by

Some properties of solitons in negative selfocs are considered.

*Keywords:* soliton, selfoc, negative media, properties.

В работах [1, 2] нами частично рассмотрены особенности распространения солитонов в отрицательных однородных средах. В данном сообщении представлены результаты исследования свойств солитонов в отрицательных селфоках.

Постоянная распространения волн в таких средах может быть записана в форме

$$k = -\sigma_0 - \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\sigma_0} \frac{x^2}{x_0^2}, \quad (1)$$

где  $\alpha$  – коэффициент неоднородности среды,  $\sigma_0$  – постоянная распространения среды при  $x = 0$ . При этом уравнение Шредингера для электромагнитного поля  $E = A_0\psi$  может быть представлено в следующем виде:

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{i}{2\sigma_0} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - i\beta_1 |\psi|^2 \psi - i\beta_2 \frac{x^2}{x_0^2} \psi = 0. \quad (2)$$

Здесь  $\beta_1 = \sigma_0 |A_0|^2$ ,  $\beta_2 = \frac{\alpha}{2\sigma_0}$ .

Ищем решение этого уравнения в виде следующего гауссова пучка:

$$\psi = \exp\left(\gamma_1 - \gamma_2 - \frac{x^2}{fx_0^2} + i \frac{x^2}{gx_0^2}\right), \quad (3)$$

где  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $f$ ,  $g$  – функции продольной координаты  $z$ .

Подставляя (3) в уравнение (2), получаем следующую систему уравнений:

$$\gamma'_1 + \frac{1}{x_1 f} - \beta_1 + 2\beta_1 \gamma_2 = 0; \quad (4)$$

$$\gamma'_2 - \frac{1}{\partial_1 g} = 0; \quad (5)$$

$$\frac{f'}{f} - \frac{4}{x_1 g} = 0; \quad (6)$$

$$\frac{1}{x_1 f^2} - \frac{1}{x_1 g^2} + \frac{g'}{2g^2} - \frac{\beta_1}{f} + \beta_2 = 0. \quad (7)$$

Здесь  $x_1 = \sigma_0 x_0^2$ , а штрих означает производную по  $z$ .

Сравнивая уравнение (6) с соответствующим уравнением для обычных сред [3], заключаем, что функция  $g < 0$ . Это означает, что и в отрицательных селфоках фаза солитона распространяется в обратном направлении.

Форма пространственной поверхности солитона определяется функцией  $f(z)$ , для которой получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$2f'' = (f')^2 + \frac{16}{x_1^2} (1 - f\beta_1 x_1 + \beta_2 x_1 f^2). \quad (8)$$

К сожалению, это уравнение не имеет решения в известных функциях. Поэтому ограничимся его приближенным решением, которое можно представить в виде

$$f(z) = \frac{x_1^{-1} + \beta_1 f_0 - \beta_2 f_0^2}{2(\beta_1 - \beta_2)} + \frac{\beta_1 f_0 - \beta_2 f_0^2 - x_1^{-1}}{2(\beta_1 - \beta_2)} \cos \sqrt{\frac{\beta_1 - \beta_2}{x_1 f_0}} 4z. \quad (9)$$

Следовательно, пространственная форма солитона периодически изменяется при распространении его в отрицательной фокусирующей среде.

### Список использованной литературы

1. Гончаренко, А. М. К теории солитонов в отрицательных средах / А. М. Гончаренко // Вес. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2015. – № 1. – С. 123–124.
2. Гончаренко, А. М. О распространении солитонов в отрицательных средах / А. М. Гончаренко // Докл. Нац. акад. наук Беларусі. – 2015. – Т. 59, № 3. – С. 28–29.
3. Гончаренко, А. М. Распространение эллиптических световых пучков в круглом селфоке / А. М. Гончаренко // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2012. – № 2. – С. 119–121.

Поступила в редакцию 12.11.2015

**ВУЧОНЫЯ БЕЛАРУСІ****НИКОЛАЙ СТАНИСЛАВОВИЧ КАЗАК****(К 70-летию со дня рождения)**

29 октября 2015 г. исполнилось 70 лет со дня рождения академика НАН Беларуси Николая Станиславовича Казака – известного ученого в области кристаллооптики, нелинейной оптики и лазерной физики.

Николай Станиславович родился в деревне Дещенка Узденского района Минской области в крестьянской семье. В 1961 г. с отличием окончил среднюю школу и поступил на физический факультет Белорусского государственного университета. После окончания БГУ (1966) был распределен в Институт физики АН БССР. Шестидесятые, семидесятые... Это были годы рождения и становления лазерной физики, годы невиданного научного подъема, вдохновения, давшие миру целую плеяду выдающихся ученых. Институт жил жизнью страны – творил, созидал. В это время Н. С. Казак начинает активно работать в области нелинейной оптики, изучает процессы частотного преобразования лазерного излучения в кристаллах, принимает участие в разработке и создании методов и устройств, позволяющих увеличить эффективность таких процессов. Наиболее важный результат,

который составил фундамент защищенной им в 1975 г. кандидатской диссертации, – создание источников мощного лазерного излучения в области 220–400 нм с плавной перестройкой частоты. За работы в области нелинейно-частотного преобразования в 1978 г. Н. С. Казак был удостоен премии Ленинского комсомола Беларуси и в том же году избран старшим научным сотрудником.

В 1979 г. Н. С. Казак был назначен на должность ученого секретаря, в 1988 г. – заместителя директора по научной работе, в 1998 г. возглавил Институт физики НАН Беларуси. Будучи директором, выдвинул ряд инициатив, направленных на развитие в институте экспериментальных исследований, сближение теории и эксперимента, науки и производства. При его активном участии в Институте была организована метрологическая лаборатория и развернуты работы в области оптической метрологии.

В 2000 г. Николай Станиславович был избран членом-корреспондентом, в 2003 г. – академиком НАН Беларуси. В 2000 г. за исследование нелинейно-оптических явлений и создание на этой основе новых высокоэффективных источников лазерного излучения ученый стал лауреатом Государственной премии Республики Беларусь. В 2002 г. награжден орденом Франциска Скорины.

С 2002 по 2004 г. Н. С. Казак, находясь на посту директора Института физики, одновременно являлся академиком-секретарем Отделения физики, математики и информатики НАН Беларуси. В 2004–2008 гг. был главным ученым секретарем НАН Беларуси; в 2004–2005 гг. – главным редактором журнала «Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук». С 2008 по 2012 г. являлся заместителем председателя Постоянной комиссии по образованию, культуре, науке и научно-техническому прогрессу Палаты представителей Национального собрания Республики Беларусь. На протяжении 2002–2014 гг. был членом Президиума НАН Беларуси. В 2012 г. награжден орденом Почета.

С 2014 г. Николай Станиславович – исполняющий обязанности директора Института физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси и одновременно генерального директора Государственного научно-производственного объединения «Оптика, оптоэлектроника и лазерная техника».



При всей своей занятости научно-организационными делами, Н. С. Казак всегда остается прежде всего активным исследователем. Им получен ряд блестящих результатов. Выполнены исследования нелинейного преобразования излучения лазеров в различных кристаллах и геометриях эксперимента с учетом реальных параметров лазерного излучения. Создан ряд высокоэффективных нелинейно-оптических преобразователей частоты и других параметров излучения лазеров различных типов. С помощью преобразования частоты лазеров на красителях получено мощное плавно перестраиваемое УФ-излучение, предсказан нелинейно-оптический эффект генерации переменного электрического поля. Реализован метод «нелинейного зеркала» для управления спектральными, временными и пространственными параметрами излучения сложных лазерных систем. Разработаны нелинейно-оптические методы измерения параметров лазерного излучения и вещества в УФ- и ИК-диапазонах, метод пассивной абсорбционной спектроскопии, схемы ИК-спектрометров с высокой спектральной яркостью на основе внутрирезонаторной апконверсии, способы управления ультразвуковыми пучками. Изучено распространение световых и ультразвуковых волн вблизи особых направлений в кристалле и созданы способы управления пространственными параметрами этих пучков. Часть этих результатов послужили основой защищенной ученым в 1993 г. докторской диссертации.

В последнее время под руководством Н. С. Казака выполнен ряд приоритетных работ по исследованию закономерностей преобразования бесселевых световых пучков линейными и нелинейными кристаллами. Показана возможность рождения и аннигиляции оптических вихрей при нелинейно-частотном преобразовании этих пучков. Предсказан и экспериментально реализован новый тип фазового синхронизма (полный конический синхронизм) для генерации второй гармоники векторных бесселевых пучков в одноосных кристаллах. Реализован метод формирования бесселевых пучков высших порядков и пучков с дислокацией волнового фронта с использованием двуосных кристаллов. Предсказан и исследован новый тип квази-бездифракционных поверхностных плазмон-поляритонов в многослойных металлodieлектрических структурах. Изучена пространственная динамика спин-орбитального преобразования углового момента бесселевых световых пучков в кристаллах. Под руководством и при непосредственном участии Николая Станиславовича на основе бесселевых пучков разработан и создан ряд новых интерферометрических, спеклометрических и томографических методов и устройств оптической диагностики и неразрушающего контроля различных объектов и материалов. В итоге были разработаны компактные профилометры, отличающиеся высокой виброустойчивостью, что важно для их применения в условиях промышленного производства. Кроме того, разработаны принципиально новые методы оптического неразрушающего контроля, которые позволяют осуществлять оперативную диагностику качества сильно рассеивающих материалов (например, обнаруживать трещины, поры и другие дефекты в керамиках). Созданы уникальные оптические зонды и бесселевы лазерные пинцеты для манипуляции микро- и наночастицами, которые перспективны в нанотехнологиях и используются для получения новых материалов, предложен новый оптический метод измерения и диагностики механических и теплофизических свойств металлических изделий, таких как твердость, усталость и теплопроводность.

Результаты исследовательской деятельности Н. С. Казака отражены более чем в 340 научных статьях. Он является автором более 60 изобретений.

Большое внимание уделяет Николай Станиславович работе с молодежью, подготовке нового поколения исследователей. Под его руководством защищено пять кандидатских и одна докторская диссертации.

Говоря о Н. С. Казаке – ученом, невозможно не сказать о Николае Станиславовиче – человеке. Вызывает глубокое уважение его активная жизненная позиция, высокие моральные качества, житейская мудрость, принципиальность, доброжелательность и оптимизм. Неоценим вклад Николая Станиславовича в дело развития Института физики НАН Беларуси в традициях демократичности и требовательности, что стало залогом поддержания творческой атмосферы в коллективе и основой всех его достижений.

Коллеги и друзья, коллектив Института физики НАН Беларуси, Отделение физики, математики и информатики от всего сердца поздравляют Николая Станиславовича с юбилеем и желают ему крепкого здоровья, успехов во всех начинаниях, большого счастья.

**ПАКАЗАЛЬНІК АРТЫКУЛАЎ, ЗМЕШЧАНЫХ У ЧАСОПІСЕ  
«ВЕСЦІ НАН БЕЛАРУСІ. СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК»  
у 2015 годзе**

Апанасевич П. А., Килин С. Я. Международный год света и оптических технологий .....	№ 1. С. 5–6
Гражданин, ученый, государственный деятель. Памяти академика Николая Александровича Борисевича .....	№ 4. С. 5–9

**МАТЭМАТЫКА**

Барабанов Е. А., Коных А. В. Точные крайние границы показателей Боля решений линейной дифференциальной системы с малыми возмущениями .....	№ 3. С. 36–51
Баркова Е. А., Забрейко П. П. Нелокальная теорема о задаче Коши для дифференциальных уравнений дробных порядков в весовых пространствах непрерывных функций .....	№ 2. С. 48–52
Белокурский М. С. Решение задачи Еругина о существовании нерегулярных решений линейной системы с нулевым средним периодического коэффициента .....	№ 1. С. 35–42
Беняш-Кривец В. В., Говорущко И. О. Многообразия характеров групп Баумслэга – Солитера	№ 2. С. 41–47
Васьковский М. М. Существование слабых решений стохастических дифференциальных уравнений с запаздыванием и стандартным и дробным броуновскими движениями .....	№ 1. С. 22–34
Войделевич А. С. Существование бесконечных всюду разрывных спектров верхних характеристических частот нулей и знаков линейных дифференциальных уравнений .....	№ 3. С. 17–23
Гальмак А. М. Единицы и их аналоги в $n$ -арных группах .....	№ 4. С. 46–55
Егоров А. Д. О порядке сходимости аппроксимаций одного класса функционалов от винеровского процесса .....	№ 3. С. 52–58
Жук Е. Е. Статистическое отнесение реализаций стационарных временных рядов к классам, определенным в пространстве ковариационных функций .....	№ 1. С. 47–51
Зверович Э. И. Алгоритм построения конформного гомеоморфизма конечнолистной римановой поверхности на плоскость .....	№ 3. С. 32–35
Карпук М. В. Полное описание старшего показателя Ляпунова линейной дифференциальной системы с параметром-множителем .....	№ 3. С. 5–16
Каянович С. С. Разрешимость дифференциальной модели стержневого течения .....	№ 1. С. 52–59
Корзюк В. И., Козловская И. С., Наумовец С. Н. Классическое решение первой смешанной задачи одномерного волнового уравнения с условиями типа Коши .....	№ 1. С. 7–21
Корзюк В. И., Мандрик А. А. Первая смешанная задача в полуполосе для неоднородного нестрого гиперболического уравнения третьего порядка .....	№ 4. С. 10–17
Крук Ю. С., Дудовская Ю. Е. Стационарное распределение вероятностей состояний замкнутой сети с неактивными заявками и многорежимными стратегиями обслуживания .....	№ 1. С. 43–46
Кудин А. С., Луневич А. В. Аналог теоремы Хинчина в случае расходимости в трехмерном евклидовом пространстве .....	№ 3. С. 66–81
Кулаженко Ю. И., Селькин М. В. О полуабелевости $n$ -арных групп .....	№ 1. С. 68–75
Лещёв А. Е. К слабым условиям оптимальности второго порядка .....	№ 1. С. 60–67
Малюгин В. И., Новопольцев А. Ю. Анализ многомерных статистических моделей с неоднородной структурой в случае скрытой марковской зависимости состояний .....	№ 2. С. 26–36
Малютин В. Б. Вычисление матричнозначных функциональных интегралов, основанное на аппроксимации хронологически упорядоченной экспоненты .....	№ 4. С. 32–37
Мартынов И. П., Лысюк Е. С. Аналитические свойства решений нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка .....	№ 2. С. 15–25
Матыськ О. В. Неявный метод решения самосопряженной некорректной задачи с приближенным оператором и апостериорным выбором параметра регуляризации .....	№ 4. С. 18–24
Мисюк В. Р., Пекарский А. А. Сопряженные функции на отрезке и соотношения для их наилучших равномерных полиномиальных приближений .....	№ 2. С. 37–40
Муха В. С., Кузьков А. Н. Линейное пропорциональное Прокрустово преобразование в распознавании рукописных букв .....	№ 4. С. 38–45

<b>Ровба Е. А., Дирвук Е. В.</b> О константе Лебега интерполяционных рациональных процессов Лагранжа по узлам Чебышева – Маркова .....	№ 4. С. 25–31
<b>Сазонова А. Т.</b> Аналитические свойства решений задачи о движении четырех тел в плоскости ...	№ 3. С. 24–31
<b>Худяков А. П., Янович Л. А.</b> Обобщенные интерполяционные формулы Эрмита – Биркгофа для случая чебышевских систем функций .....	№ 2. С. 5–14
<b>Чичурин А. В., Швыгчина Е. Н.</b> Моделирование хемостата популяционной динамики бактериальных плазмид .....	№ 3. С. 59–65

## ФІЗІКА

<b>Архипенко В. И., Кириллов А. А., Павлова А. В., Симончик Л. В., Дудчик Н. В., Кураца М. М., Обрадвич Б. М.</b> Бактерицидные компоненты в воздушной плазменной струе при постоянном и импульсно-периодическом токовых режимах .....	№ 3. С. 104–110
<b>Ауфрей Э., Буганов О. В., Коржик М. В., Тихомиров С. А., Федоров А. А., Широканов А. Д.</b> Использование двухфотонного поглощения в неорганических сцинтилляционных материалах для формирования субпикосекундных временных меток взаимодействия с ионизирующим излучением .....	№ 3. С. 91–97
<b>Батище С. А., Бушук С. Б., Кузьмук А. А., Савич А. В., Татур Г. А., Грабнер Г., Котэк В.</b> Лазерная абляционная обработка роговицы глаза комбинированным излучением 213+1440 нм .....	№ 4. С. 77–81
<b>Буй А. А., Дашкевич В. И., Орлович В. А.</b> Непрерывный диодно накачиваемый Nd:KGd(WO <sub>4</sub> ) <sub>2</sub> /КТР-лазер с внутрирезонаторным удвоением частоты .....	№ 1. С. 92–98
<b>Бураков В. С., Буцень А. В., Тарасенко Н. В.</b> Спектроскопическая диагностика двухимпульсной лазерно-абляционной плазмы в жидкости для оптимизации процесса синтеза наночастиц .....	№ 3. С. 98–103
<b>Гончаренко И. А., Рябцев В. Н.</b> Метод расчета изогнутых микроструктурированных волноводов с несколькими сердцевинами .....	№ 4. С. 87–95
<b>Гуртовой В. Г., Шелег А. У., Мустафаева С. Н., Керимова Э. М.</b> Диэлектрические характеристики монокристаллов TlGaS <sub>2</sub> , допированных Со и Yb .....	№ 2. С. 98–102
<b>Каланда Н. А., Ярмолич М. В., Панасевич А. М., Кривченя Д. А.</b> Фазовые превращения при кристаллизации Sr <sub>2</sub> FeMoO <sub>6-8</sub> из простых оксидов .....	№ 2. С. 82–85
<b>Кисель В. В., Овсинок Е. М., Веко О. В., Редьков В. М.</b> Вклад калибровочных степеней свободы в структуру тензора энергии-импульса безмассового поля со спином 2 .....	№ 2. С. 58–63
<b>Князев М. А., Блинкова Н. Г.</b> Связь между односолитонными составляющими двухсолитонного решения уравнения Кортевега-де Фриза .....	№ 2. С. 53–57
<b>Коршунов Ф. П., Жданович Н. Е., Гуринович В. А., Лукша С. В.</b> Влияние электронного облучения на электрические характеристики <i>p-n</i> -структур на ядерно-легированном кремнии .....	№ 4. С. 82–86
<b>Кудряшов В. В., Баран А. В.</b> Влияние спин-орбитальных взаимодействий Рашбы и Дрессельхауса на состояния электрона в круговых квантовых кольцах .....	№ 1. С. 86–91
<b>Кулак Г. В., Крох Г. В., Ропот П. И., Шакин О. В.</b> Коллинеарное акустооптическое взаимодействие бесселевых световых пучков в двуосных кристаллах .....	№ 4. С. 71–76
<b>Курочкин Ю. А., Шелковский Д. В., Боярина И. П.</b> О переменных центра масс и относительного движения в трехмерных пространствах с радиусом кривизны, зависящим от времени .....	№ 4. С. 56–60
<b>Микитчук К. Б., Малышев С. А., Чиж А. Л.</b> Режим одночастотной генерации в оптоэлектронном генераторе СВЧ на линиях задержки с оптическим усилением .....	№ 3. С. 111–118
<b>Мудрый А. В., Живулько В. Д., Гурский А. Л., Якушев М. В., Мартин Р. В., Шафф В. Дж.</b> Радиационные эффекты в тонких гетероэпитаксиальных пленках нитрида индия при электронном облучении .....	№ 2. С. 90–97
<b>Овсинок Е. М., Веко О. В., Редьков В. М.</b> О моделировании среды со свойствами идеального зеркала по отношению к свету и частицам со спином 1/2 .....	№ 1. С. 76–85
<b>Овсинок Е. М., Редько А. Н., Редьков В. М.</b> Частица Дирака – Кэлера в пространстве Лобачевского, нерелятивистское приближение, бозонная интерпретация .....	№ 4. С. 61–70
<b>Павич Т. А., Арабей С. М., Кузнецова Р. Т., Мартъянова Е. Г., Аксенова Ю. В., Майер Г. В., Березин М. Б., Соловьев К. Н.</b> Влияние компонентного состава мицеллярного раствора на спектральные свойства и сольубилизацию плюронином производного бордифторид-дипирролилметена ...	№ 2. С. 64–68
<b>Пашкевич Г. А., Ропот П. И., Лапчук А. С., Крючин А. А., Прыгун А. В.</b> Подавление спеклов квазиспиральным 2D-дифракционным оптическим элементом на основе бинарной псевдослучайной <i>M</i> -последовательности .....	№ 2. С. 69–76
<b>Пилипович В. А., Залесский В. Б., Конойко А. И., Кравченко В. М., Леонова Т. Р.</b> Высокоэффективный амплитудный модулятор неполяризованного излучения с поперечным электрооптическим эффектом .....	№ 2. С. 77–81
<b>Плетюхов В. А.</b> Объединенное поле Максвелла – Кальба – Рамонда и взаимодействие струн .....	№ 3. С. 82–90
<b>Радюш Ю. В., Олехнович Н. М., Пушкарев А. В.</b> Диэлектрические свойства сегнетоэлектрической керамики системы твердых растворов (1- <i>x</i> )(NaBi) <sub>1/2</sub> TiO <sub>3</sub> - <i>x</i> BiCoO <sub>3</sub> .....	№ 2. С. 86–89
<b>Солоневич С. В., Лепарский В. Е., Машенко А. Г., Рыжевич А. А.</b> Метод формирования перестраиваемой световой билушки .....	№ 1. С. 99–105

## ІНФАРМАТЫКА

<b>Войткова М. В., Хурса Р. В.</b> Интеллектуальный анализ данных для диагностики латентных нарушений гемодинамики: условия практического применения .....	№ 4. С. 112–118
<b>Залесский Б. А., Середин Э. Н.</b> Метод нечеткой кластеризации $k$ -средних со штрафной функцией и произвольными степенями вектора принадлежности .....	№ 4. С. 96–102
<b>Кириенко Н. А., Черемисинов Д. И., Черемисинова Л. Д.</b> Оптимизация многоуровневых представлений логических схем для сокращения площади кристалла СБИС и энергопотребления ....	№ 2. С. 103–111
<b>Прокопович Г. А.</b> Адаптивная нейросетевая система управления автономным мобильным роботом на основе метода обучения с учителем в <i>online</i> режиме .....	№ 1. С. 117–122
<b>Середин Э. Н., Залесский Б. А.</b> Фильтрация и корреляционная обработка изображений с помощью технологии CUDA .....	№ 1. С. 106–116
<b>Соболевский П. И., Баханович С. В.</b> Параметризованный тайлинг: определение границ локальных циклов в неполных тайлах .....	№ 2. С. 112–120
<b>Сотсков Ю. Н., Егорова Н. Г., Вернер Ф.</b> Многогранник оптимальности расписания, минимизирующего сумму взвешенных моментов завершения обслуживания требований .....	№ 4. С. 103–111
<b>Черемисинова Л. Д.</b> Поиск кратчайшей установочной последовательности схемы с памятью на D-триггерах .....	№ 3. С. 119–128

## КАРОТКІЯ ПАВЕДАМЛЕННІ

<b>Гончаренко А. М.</b> К теории солитонов в отрицательных средах .....	№ 1. С. 123–124
<b>Гончаренко А. М.</b> О распространении солитонов в отрицательных селфоках .....	№ 4. С. 119–120

## ВУЧОНЫЯ БЕЛАРУСІ

<b>Аляхновіч Мікалай Міхайлавіч</b> (Да 80-годдзя з дня нараджэння) .....	№ 2. С. 123–124
<b>Казак Николай Станиславович</b> (К 70-летию со дня рождения) .....	№ 4. С. 121–122
<b>Корзюк Виктор Иванович</b> (К 70-летию со дня рождения) .....	№ 2. С. 121–122

**LIST OF PUBLICATIONS FOR 2015 IN “PROCEEDINGS OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF BELARUS. PHYSICS AND MATHEMATICS SERIES”**

<b>Apanasevich P. A., Kilin S. Ya.</b> International Light and Optical Technology Year .....	№ 1. P. 5–9
<b>Citizen, scientist, statesman.</b> In memory of Academician Nikolai Aleksandrovich Borisevich .....	№ 4. P. 5–16

**MATHEMATICS**

<b>Barabanov E. A., Konyukh A. V.</b> Exact extreme bounds of the Bohl exponents of solutions to the linear differential system with small perturbations .....	№ 3. P. 36–51
<b>Barkova E. A., Zabreiko P. P.</b> Nonlocal theorems on the Cauchy problem for differential equations of fractional order in weighted spaces of continuous functions .....	№ 2. P. 48–52
<b>Belokurski M. S.</b> Solution of Erugin’s problem on the existence of irregular solutions of the linear system with zero mean of periodic coefficient .....	№ 1. P. 35–42
<b>Beniash-Kryvets V. V., Govorushko I. O.</b> Character varieties of Baumslag – Solitar groups .....	№ 2. P. 41–47
<b>Chichurin A. V., Shvychkina A. N.</b> Computer modeling of chemostat of population dynamics of bacterial plasmids .....	№ 3. P. 59–65
<b>Egorov A. D.</b> Order of convergence of approximations for one class of functionals of the Wiener process .....	№ 3. P. 52–58
<b>Gal’mak A. M.</b> Identities and their analogues in $n$ -ary groups .....	№ 4. P. 46–55
<b>Hudjakov A. P., Yanovich L. A.</b> Generalized interpolation formulas of Hermite – Birkhoff type for the case of Chebyshev systems of functions .....	№ 2. P. 5–14
<b>Karpuk M. V.</b> Description of the largest Lyapunov exponent of linear differential systems with a parameter-multiplier .....	№ 3. P. 5–16
<b>Kayanovich S. S.</b> Solvability of the differential model of pivotal flow .....	№ 1. P. 52–59
<b>Korzyuk V. I., Kozlovskaya I. S., Naumavets S. N.</b> Classical solution to the first mixed problem for the one-dimensional wave equation with the Cauchy-type conditions .....	№ 1. P. 7–21
<b>Korzyuk V. I., Mandryk A. A.</b> First mixed problem in the half-band for the third-order nonhomogeneous nonstrictly hyperbolic equation .....	№ 4. P. 10–17
<b>Kruk J. S., Dudovskaya Yu. E.</b> Stationary distribution of a closed queueing network with non-active customers and multimode service strategies .....	№ 1. P. 43–46
<b>Kudin A. S., Lunevich A. V.</b> Analog of the Khintchine theorem in the case of divergence in the three-dimensional Euclidean space .....	№ 3. P. 66–81
<b>Kulazhenko Yu. I., Selkin M. V.</b> About semiabelian of $n$ -ary groups .....	№ 1. P. 68–75
<b>Leschov A. E.</b> Weak second-order optimality conditions .....	№ 1. P. 60–67
<b>Malugin V. I., Novopoltsev A. Yu.</b> Analysis of multivariate statistical models with heterogeneous structure in the case of hidden Markov dependence of the states .....	№ 2. P. 26–36
<b>Malyutin V. B.</b> Evaluation of matrix valued functional integrals based on the approximation of a chronologically ordered exponent .....	№ 4. P. 32–37
<b>Martynov I. P., Lysiuk A. S.</b> Analytical properties of the solutions of a fourth-order nonlinear ordinary differential equation .....	№ 2. P. 15–25
<b>Matysik O. V.</b> Implicit method for solving a self-adjoint ill-posed problem with an approximate operator and an a posteriori choice of the regularization parameter .....	№ 4. P. 18–24
<b>Misiuk V. R., Pekarskii A. A.</b> Conjugate functions on a segment and relations for their best uniform polynomial approximations .....	№ 2. P. 37–40
<b>Mukha V. S., Kuzkou A. N.</b> Linear proportional Procrustes transformation in recognition of handwritten letters .....	№ 4. P. 38–45
<b>Rovba Y. A., Dirvuk Y. V.</b> Estimation of the Lebesgue constant for the rational Lagrange interpolation processes through the Chebyshev – Markov nodes .....	№ 4. P. 25–31
<b>Sazonova A. T.</b> Analytical properties of solutions of the problem of the motion of four bodies in the plane ...	№ 3. P. 24–31
<b>Vaidzelevich A. S.</b> Existence of the infinite everywhere discontinuous upper spectra of characteristic frequencies of zeros and signs of linear differential equations .....	№ 3. P. 17–23
<b>Vaskouski M. M.</b> Existence of weak solutions of stochastic delay differential equations driven by standard and fractional Brownian motions .....	№ 1. P. 22–34

<b>Zhuk E. E.</b> Statistical assignment of realizations of the stationary time series to the classes determined in a space of covariance functions .....	№ 1. P. 47–51
<b>Zverovich E. I.</b> Construction algorithm of conformal homeomorphism of the finite-sheeted Riemann surface onto the plane .....	№ 3. P. 32–35

## PHYSICS

<b>Arkhipenko V. I., Kirillov A. A., Paulav A. V., Simonchik L. V., Dudchik N. V., Kuraica M. M., Obradović B. M.</b> Bactericidal components in an air plasma jet within dc and ripple current regimes .....	№ 3. P. 104–110
<b>Auffray E., Baganov O. V., Korjik M. V., Tikhomirov S. A., Fedorov A. A., Shirokanov A. D.</b> Use of two-photon absorption in inorganic scintillator materials for forming sub-picosecond time stamps of interaction with ionizing radiation .....	№ 3. P. 91–97
<b>Batishche S. A., Bushuk S. B., Kouzmouk A. A., Savitch A. V., Tatur H. A., Grabner G., Kautek W.</b> Combined 213 nm+1444 nm laser ablation treatment of bovine cornea .....	№ 4. P. 77–81
<b>Bui A. A., Dashkevich U. I., Orlovich V. A.</b> Continuous-wave diode-pumped Nd:KGdW/KTP laser with intracavity frequency doubling .....	№ 1. P. 92–98
<b>Burakov V. S., Butsen A. V., Tarasenko N. V.</b> Spectroscopic diagnostics of double-pulse laser ablation plasma in liquid for nanoparticle synthesis optimization .....	№ 3. P. 98–103
<b>Goncharenko I. A., Reabtsev V. N.</b> Method of calculation of bent multi-core microstructured fibers .....	№ 4. P. 87–95
<b>Hurtavy V. G., Sheleg A. U., Mustafaeva S. N., Kerimova E. M.</b> Dielectric properties of Co- and Yb-doped single crystals of TlGaS <sub>2</sub> .....	№ 2. P. 98–102
<b>Ovsiyuk E. M., Red'ko A. N., Red'kov V. M.</b> Dirac – Kahler particle in the Lobachevsky space, non-relativistic approximation, boson interpretation .....	№ 4. P. 61–70
<b>Ovsiyuk E. M., Veko O. V., Red'kov V. M.</b> Modeling of a medium with the property of a perfect mirror for the light and spin 1/2 particles .....	№ 1. P. 76–85
<b>Kalanda M. A., Yarmolich M. V., Panasevich A. M., Kryuchenia D. A.</b> Phase transformations during crystallization of S <sub>2</sub> FeMoO <sub>6-δ</sub> from simple oxides .....	№ 2. P. 82–85
<b>Kisel V. V., Ovsiyuk E. M., Veko O. V., Red'kov V. M.</b> Contribution of gauge degrees of freedom to the spin 2 field energy-momentum tensor .....	№ 2. P. 58–63
<b>Knyazev M. A., Blinkova N. G.</b> Relation between one-soliton components of two-soliton solution for the Korteweg-de Vries equation .....	№ 2. P. 53–57
<b>Korshunov F. P., Zhdanovich N. E., Gurinovich V. A., Luksha S. V.</b> Effect of electron radiation on the electrical characteristics of the <i>p-n</i> -structures based on nuclear-doped silicon .....	№ 4. P. 82–86
<b>Kudryashov V. V., Baran A. V.</b> Influence of the Rashba and Dresselhaus spin-orbit interactions on the electron states in circular quantum rings .....	№ 1. P. 86–91
<b>Kulak G. V., Krokh G. V., Ropot P. I., Shakin O. V.</b> Collinear acousto-optic interaction of Bessel light beams in biaxial crystals .....	№ 4. P. 71–76
<b>Kurochkin Yu. A., Shoukovy Dz. V., Boyurina I. P.</b> Mass center and relative motion variables in three-dimensional spaces with a time-dependent curvature radius .....	№ 4. P. 56–60
<b>Mikitchuk K. B., Malyshev S. A., Chizh A. L.</b> Single-frequency oscillation in the all-optical gain optoelectronic oscillator based on fiber-optic delay line .....	№ 3. P. 111–118
<b>Mudryi A. V., Zhivulko V. D., Gurskii A. L., Yakushev M. V., Martin R. W., Schaff W. J.</b> Radiation effects in thin heteroepitaxial indium nitride films under electron irradiation .....	№ 2. P. 90–97
<b>Pashkevich G. A., Ropot P. I., Lapchuk A. S., Kryuchin A. A., Prygun A. V.</b> Speckle suppression by a quasi-spiral 2D diffractive optical element based on the binary pseudorandom <i>M</i> -sequence .....	№ 2. P. 69–76
<b>Pavich T. A., Arabe S. M., Kuznetsova R. T., Martianova E. G., Aksenova Y. V., Mayer G. V., Berezin M. B., Solovyov K. N.</b> Influence of component proportions of micellar solutions on the spectral properties and solubilization by Pluronic of a boron difluoride dipyrromethene derivative .....	№ 2. P. 64–68
<b>Pilipovich V. A., Zalessky V. B., Konoiko A. I., Kravchenko V. M., Leonova T. R.</b> High-performance amplitude modulator of non-polarized radiation with the transverse electrooptical effect .....	№ 2. P. 77–81
<b>Pletyukhov V. A.</b> United Maxwell – Kalb – Ramond field and the interaction of strings .....	№ 3. P. 82–90
<b>Radyush Yu. V., Olekhnovich N. M., Pushkarou A. V.</b> Dielectric properties of (1-x)(NaBi) <sub>1/2</sub> TiO <sub>3</sub> -xBiCoO <sub>3</sub> perovskite ferroelectric ceramic .....	№ 2. P. 86–89
<b>Solonevich S. V., Leparskii V. E., Mashchenko A. G., Ryzhevich A. A.</b> Method for tunable light bitrap shaping .....	№ 1. P. 99–105

## INFORMATICS

<b>Cheremisinova L. D.</b> Shortest synchronizing sequence search for a sequential network with memory on D flip-flops .....	№ 3. P. 119–128
<b>Kirienko N. A., Cheremisinov D. I., Cheremisinova L. D.</b> Optimization of multi-level representations of logic circuits to reduce a VLSI chip area and power consumption .....	№ 2. P. 103–111

<b>Prakapovich R. A.</b> Adaptive neural network control system of an autonomous robotic vehicle based on online supervised learning .....	№ 1. P. 117–122
<b>Seredin E. N., Zalesky B. A.</b> Filtration and correlation processing of images by the CUDA technology .....	№ 1. P. 106–116
<b>Sobolevsky P. I., Bakhanovich S. V.</b> Parameterized tiling: the definition of the boundaries of local loops in partial tiles .....	№ 2. P. 112–120
<b>Sotskov Yu. N., Egorova N. G., Werner F.</b> Optimality box of the schedule minimizing the sum of the weighted completion times of the job .....	№ 4. P. 103–111
<b>Voitikova M. V., Khursa R. V.</b> Diagnostics of latent hemodynamics by data mining: conditions of practical use .....	№ 4. P. 112–118
<b>Zalesky B. A., Seredin E. N.</b> Fuzzy C-means clustering method with the Gibbs penalty function and arbitrary powers of the vector accessories .....	№ 4. P. 96–102

#### SHORT COMMUNICATIONS

<b>Goncharenko A. M.</b> Propagation of solitons in negative selfocs .....	№ 4. P. 119–120
<b>Goncharenko A. M.</b> To the theory of solitons in negative media .....	№ 1. P. 123–124

#### SCIENTISTS OF BELARUS

<b>Kazak Nicolai Stanislavovich</b> (On the 70 <sup>th</sup> anniversary of his birthday) .....	№ 4. P. 121–122
<b>Korzyuk Viktor Ivanovich</b> (On the 70 <sup>th</sup> anniversary of his birthday) .....	№ 2. P. 121–122
<b>Olekhovich Nikolai Mikhailovich</b> (On the 80 <sup>th</sup> anniversary of his birthday) .....	№ 2. P. 123–124