

ВЕСЦІ

НАЦЫЯНАЛЬНАЯ АКАДЭМІЯ НАВУК БЕЛАРУСІ

СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК 2015 № 3

ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ

СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК 2015 № 3

ЗАСНАВАЛЬНІК – НАЦЫЯНАЛЬНАЯ АКАДЭМІЯ НАВУК БЕЛАРУСІ

Часопіс выдаецца са студзеня 1965 г.

Выходзіць чатыры разы ў год

ЗМЕСТ

МАТЭМАТЫКА

Карпук М. В. Полное описание старшего показателя Ляпунова линейной дифференциальной системы с параметром-множителем	5
Войделевич А. С. Существование бесконечных всюду разрывных спектров верхних характеристических частот нулей и знаков линейных дифференциальных уравнений	17
Сазонова А. Т. Аналитические свойства решений задачи о движении четырех тел в плоскости	24
Зверович Э. И. Алгоритм построения конформного гомеоморфизма конечнолистной римановой поверхности на плоскость	32
Барабанов Е. А., Колюх А. В. Точные крайние границы показателей Боля решений линейной дифференциальной системы с малыми возмущениями	36
Егоров А. Д. О порядке сходимости аппроксимаций одного класса функционалов от винеровского процесса	52
Чичурин А. В., Швычкина Е. Н. Моделирование хемостата популяционной динамики бактериальных плазмид	59
Кудин А. С., Луневич А. В. Аналог теоремы Хинчина в случае расходимости в трехмерном евклидовом пространстве	66

ФІЗІКА

Плетюхов В. А. Объединенное поле Максвелла – Кальба – Рамонда и взаимодействие струн	82
Ауфрей Э., Буганов О. В., Коржик М. В., Тихомиров С. А., Федоров А. А., Широканов А. Д. Использование двухфотонного поглощения в неорганических сцинтилляционных материалах для формирования субпикосекундных временных меток взаимодействия с ионизирующим излучением	91
Бураков В. С., Буцень А. В., Тарасенко Н. В. Спектроскопическая диагностика двухимпульсной лазерно-абляционной плазмы в жидкости для оптимизации процесса синтеза наночастиц	98
Архипенко В. И., Кириллов А. А., Павлова А. В., Симончик Л. В., Дудчик Н. В., Кураица М. М., Обрадович Б. М. Бактерицидные компоненты в воздушной плазменной струе при постоянном и импульсно-периодическом токовых режимах	104
Микитчук К. Б., Малышев С. А., Чиж А. Л. Режим одночастотной генерации в оптоэлектронном генераторе СВЧ на линиях задержки с оптическим усилением	111

ІНФАРМАТЫКА

Черемисинова Л. Д. Поиск кратчайшей установочной последовательности схемы с памятью на D-триггерах	119
---	-----

ІЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ 2015 № 3

Серия физико-математических наук

На русском, белорусском и английском языках

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь,
свидетельство о регистрации № 392 от 18.05.2009

Комп'ютарная вёрстка *В. Л. Смольскай*

Здадзена ў набор 25.08.2015. Падпісана да друку 17.09.2015. Выхад у свет 28.09.2015. Фармат 60×84¹/₈. Папера афсетная.

Друк лічбавы. Ум. друк. арк. 14,88. Ул.-выд. арк. 16,4. Тыраж 58 экз. Заказ 166.

Кошт нумару: індывідуальная падпіска – 83 600 руб.; ведамасная падпіска – 203 287 руб.

Выдавец і паліграфічнае выкананне:

Рэспубліканскае ўнітарнае прадпрыемства «Выдавецкі дом «Беларуская навука». Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца, вытворцы, распаўсюджвальніка друкаваных выданняў № 1/18 ад 02.08.2013.

ЛП 02330/455 ад 30.12.2013. Вул. Ф. Скарыны, 40, 220141, г. Мінск.

© Выдавецкі дом «Беларуская навука».
Весці НАН Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук, 2015

PROCEEDINGS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF BELARUS

PHYSIC AND MATHEMATICS SERIES 2015 N 3

FOUNDED IS THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF BELARUS

The Journal has been published since January 1965

Issued four times a year

CONTENTS

MATHEMATICS

Karpuk M. V. Description of the largest Lyapunov exponent of linear differential systems with a parameter-multiplier	5
Vaidzelevich A. S. Existence of the infinite everywhere discontinuous upper spectra of characteristic frequencies of zeros and signs of linear differential equations	17
Sazonova A. T. Analytical properties of solutions of the problem of the motion of four bodies in the plane	24
Zverovich E. I. Construction algorithm of conformal homeomorphism of the finite-sheeted Riemann surface onto the plane	32
Barabanov E. A., Konyukh A. V. Exact extreme bounds of the Bohl exponents of solutions to the linear differential system with small perturbations	36
Egorov A. D. Order of convergence of approximations for one class of functionals of the Wiener process	52
Chichurin A. V., Shvychkina A. N. Computer modeling of chemostat of population dynamics of bacterial plasmids	59
Kudin A. S., Lunevich A. V. Analog of the Khintchine theorem in the case of divergence in the three-dimensional Euclidean space	66

PHYSICS

Pletyukhov V. A. United Maxwell – Kalb – Ramond field and the interaction of strings	82
Auffray E., Buganov O. V., Korjik M. V., Tikhomirov S. A., Fedorov A. A., Shirokanov A. D. Use of two-photon absorption in inorganic scintillator materials for forming sub-picosecond time stamps of interaction with ionizing radiation	91
Burakov V. S., Butsen A. V., Tarasenko N. V. Spectroscopic diagnostics of double-pulse laser ablation plasma in liquid for nanoparticle synthesis optimization	98

Arkhipenko V. I., Kirillov A. A., Paulav A. V., Simonchik L. V., Dudchik N. V., Kuraica M. M., Obradović B. M. Bactericidal components in an air plasma jet within dc and ripple current regimes	104
Mikitchuk K. B., Malyshev S. A., Chizh A. L. Single-frequency oscillation in the all-optical gain optoelectronic oscillator based on fiber-optic delay line	111

INFORMATICS

Cheremisinova L. D. Shortest synchronizing sequence search for a sequential network with memory on D flip-flops	119
---	-----

МАТЭМАТЫКА

УДК 517.926.4+517.928.2

М. В. КАРПУК

ПОЛНОЕ ОПИСАНИЕ СТАРШЕГО ПОКАЗАТЕЛЯ ЛЯПУНОВА ЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С ПАРАМЕТРОМ-МНОЖИТЕЛЕМ

*Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь,
e-mail: m.vasilitch@gmail.com*

Для семейства $dx/dt = \mu A(t)x$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$, линейных n -мерных дифференциальных систем с кусочно-непрерывной матрицей $A(t)$, $t \geq 0$, и вещественным параметром μ получено для любого натурального n полное описание старшего показателя Ляпунова его систем, рассматриваемого как функция параметра μ . Доказано, что функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ является старшим показателем Ляпунова некоторого такого семейства, если и только если она удовлетворяет четырем условиям: 1) принадлежит бэровскому классу $(*, G_\delta)$; 2) равна нулю в нуле; 3) неотрицательна на некоторой полуоси; 4) если она не равна тождественно $+\infty$ ни на одной из открытых полуосей, то существует действительное число b такое, что неравенство $f(\mu) \geq b\mu$ выполняется при всех $\mu \in \mathbb{R}$.

Ключевые слова: линейные дифференциальные системы, параметр-множитель, показатели Ляпунова, бэровский класс.

M. V. KARPUK

DESCRIPTION OF THE LARGEST LYAPUNOV EXPONENT OF LINEAR DIFFERENTIAL SYSTEMS WITH A PARAMETER-MULTIPLIER

*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus,
e-mail: m.vasilitch@gmail.com*

The largest Lyapunov exponents of linear differential systems $dx/dt = \mu A(t)x$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$, with the real parameter-multiplier μ are considered. It is proven that a function $f: \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ is the largest Lyapunov exponent of some linear differential system with a real parameter-multiplier if and only if it fits the next four conditions: 1) it belongs to the $(*, G_\delta)$ Baire class; 2) it vanishes at zero; 3) it is nonnegative on some real semi-axis; 4) if it is not identically equal to $+\infty$ on any real semi-axis, then there exists such a real number b that the inequality $f(\mu) \geq b\mu$ holds for all $\mu \in \mathbb{R}$.

Keywords: linear differential systems, parameter-multiplier, Lyapunov exponents, Baire class.

Введение. Рассмотрим n -мерную линейную систему дифференциальных уравнений

$$dx/dt = A(t)x, \quad x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

матрица коэффициентов $A(\cdot): [0, +\infty) \rightarrow \text{End } \mathbb{R}^n$ которой кусочно-непрерывна на временной полуоси $t \geq 0$. Класс всех таких систем обозначим через \mathcal{M}_n^* . Отождествляя систему (1) и ее матрицу коэффициентов, будем писать $A \in \mathcal{M}_n^*$. Наряду с системой (1) рассмотрим порожденное ею однопараметрическое семейство

$$dx/dt = \mu A(t)x, \quad x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

линейных дифференциальных систем со скалярным параметром-множителем $\mu \in \mathbb{R}$. Класс семейств (2), порождаемых системами $A \in \mathcal{M}_n^*$, обозначим через \mathcal{K}_n^* . Фиксируя в семействе (2)

значение параметра μ , получаем линейную дифференциальную систему, которую обозначаем через $\langle \mu \rangle_A$. Через $\lambda_1(\mu A) \leq \dots \leq \lambda_n(\mu A)$ обозначим показатели Ляпунова [1, с. 34; 2, с. 63] системы $\langle \mu \rangle_A$.

Меры множеств $S_\sigma(\mu A)$, составленных из наборов $(\lambda_1(\mu(A+Q)), \dots, \lambda_n(\mu(A+Q)))$ показателей Ляпунова, при отделенных от нуля положительных значениях параметра μ и всех матрицах-возмущениях $Q(\cdot)$, удовлетворяющих оценке $\|Q(t)\| \leq \text{const}_Q \exp(-\sigma t)$, исследовались в работах [3, 4]. В них установлено существование систем (2) с множествами $S_\sigma(\mu A)$ положительной меры Лебега, неограниченной по параметру μ . В работе [5] получено необходимое и достаточное условие на матрицу-возмущение $Q(\cdot)$, при котором наборы показателей Ляпунова исходной ($Q(\cdot) \equiv 0$) и возмущенной систем совпадают.

В. И. Зубов в монографии [6, с. 408; проблема 1] поставил задачу выяснить, как изменяются показатели Ляпунова системы (1) после умножения на постоянную вещественную величину μ всех ее коэффициентов, т. е. как связаны показатели Ляпунова систем (1) и (2). Подчеркнем, что в [6] в постановке задачи ограниченности матрицы коэффициентов системы (1) не предполагается. Поэтому, вообще говоря, показатель $\lambda_i(\mu A)$, $i=1, \dots, n$, может при некоторых или всех значениях μ принимать несобственные значения: $-\infty$ или $+\infty$. Следовательно, функция $\lambda_i(\mu A)$ переменной $\mu \in \mathbb{R}$, которую назовем i -м показателем Ляпунова семейства (2), – это функция $\mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, где $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \sqcup \{-\infty, +\infty\}$.

Задача Зубова равносильным образом может быть сформулирована так: для каждого $i=1, \dots, n$ дать полное описание множества $\mathcal{L}_i^n = \{\lambda_i(\mu A) : A \in \mathcal{M}_n^*\}$ функций $\mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, представляющих собой i -е показатели Ляпунова семейств из \mathcal{K}_n^* . В настоящей работе эта задача решена для старших показателей Ляпунова $\lambda_n(\mu A)$, т. е. для каждого натурального $n \geq 2$ дано полное описание множества \mathcal{L}_n^n .

Отметим, что случай $n=1$ тривиален. Пусть $A(\cdot) : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, а $\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} \int_0^t A(\tau) d\tau = \overline{A}$ и $\underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} \int_0^t A(\tau) d\tau = \underline{A}$. Тогда, очевидно, $\lambda_1(\mu A) = \mu \overline{A}$, если $\mu > 0$, и $\lambda_1(\mu A) = -\mu \underline{A}$, если $\mu < 0$, кроме того, $\lambda_1(0) = 0$. Поскольку для любых значений \underline{A} , $\overline{A} \in \overline{\mathbb{R}}$, таких, что $\underline{A} \leq \overline{A}$, найдется [2, с. 149] функция $A(\cdot) : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, нижние и верхние интегральные средние которой совпадают с этими значениями соответственно, то класс \mathcal{L}_1^1 состоит из всех функций $f(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, равных нулю в нуле, таких, что их сужение на открытую полуось – линейная однородная функция (возможно, равная $-\infty$ или $+\infty$) и $-f(-1) \leq f(1)$.

Необходимые определения и предварительные результаты. Для $q \in \mathbb{R}$ множество Лебега $f^{-1}([q, +\infty))$ вещественнозначной функции f (т. е. прообраз промежутка $[q, +\infty)$ при отображении f), будем, следуя [7, с. 221], обозначать через $[f \geq q]$. Напомним, что вещественнозначная функция f называется [7, с. 223–224] функцией класса $(*, G_\delta)$, если для каждого $q \in \mathbb{R}$ ее множество Лебега $[f \geq q]$ является G_δ -множеством (множество в топологическом пространстве называется G_δ -множеством, если оно представимо в виде счетного пересечения открытых в этом пространстве множеств). Считаем, что на расширенной числовой прямой $\overline{\mathbb{R}}$ задана естественная порядковая топология, т. е. $\overline{\mathbb{R}}$ гомеоморфно отрезку $[-1, 1]$. Введем ограничивающее преобразование $\ell : \overline{\mathbb{R}} \rightarrow [-1, 1]$ стандартным образом:

$$\ell(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|+1} & \text{при } x \in \mathbb{R}, \\ \text{sgn}(x) & \text{при } x = \pm\infty. \end{cases}$$

Поскольку отображение ℓ осуществляет сохраняющий порядок гомеоморфизм между $\overline{\mathbb{R}}$ и отрезком $[-1, 1]$, то скажем, что функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ принадлежит бэровскому классу \mathcal{K} , если этому же классу \mathcal{K} принадлежит и композиция $\ell \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (это определение равносильно определению [8, с. 382, 401] бэровских классов функций для отображений метрических пространств). В частности, ска-

жем, что функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ принадлежит классу $(*, G_\delta)$, если этому классу принадлежит композиция $\ell \circ f$.

В теореме 3 работы [9] доказано, что для каждой системы $A \in \mathcal{M}_n^*$ функция $\lambda_n(\mu A): \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ аргумента μ удовлетворяет следующим трем необходимым условиям: а) она принадлежит классу $(*, G_\delta)$; б) обращается в нуль в нуль; в) принимает на одной из числовых полуосей только неотрицательные значения. Рассмотрим функцию $\lambda_n(\mu A)$ на той открытой полуоси, на которой она неотрицательна. Могут представиться только две возможности: 1) либо функция $\lambda_n(\mu A)$ принимает на этой полуоси хотя бы одно конечное значение; 2) либо на этой полуоси функция $\lambda_n(\mu A)$ тождественно равна $+\infty$. В [9, теорема 3] доказано, что если имеет место случай 1), то функция $\lambda_n(\mu A)$ удовлетворяет еще одному необходимому условию: г) найдется такое число $b \in \mathbb{R}$, что при всех $\mu \in \mathbb{R}$ верно неравенство $\lambda_n(\mu A) \geq b\mu$. В [9, теорема 4] доказано, что в случае 1) необходимые условия а) – г) являются и достаточными, т. е. для любой функции $f(\cdot): \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, удовлетворяющей условиям а) – г), существует такая система $A \in \mathcal{M}_n^*$, что старший показатель Ляпунова семейства (2) совпадает с $f(\mu)$ при всех $\mu \in \mathbb{R}$. Вопрос о полном описании старшего показателя Ляпунова в случае 2) оставался открытым.

В настоящей работе доказано (в этом и состоит ее основной результат), что в случае 2) необходимые условия а) – в) являются также и достаточными. Этим с учетом результатов работы [9] задача Зубова для старшего показателя Ляпунова $\lambda_n(\mu A)$ решена полностью.

Основные результаты. В силу вышесказанного множество старших показателей Ляпунова тех семейств (2), для которых они тождественно равны $+\infty$ на одной из полуосей, полностью описывает

Т е о р е м а 1. Для каждого натурального $n \geq 2$ и любой функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ класса $(*, G_\delta)$, обращающейся в нуль в нуль и тождественно равной $+\infty$ на одной из открытых полуосей, существует такая система $A \in \mathcal{M}_n^*$ с бесконечно дифференцируемой матрицей коэффициентов, что старший показатель Ляпунова $\lambda_n(\mu A)$ системы $\langle \mu \rangle_A$ равен $f(\mu)$ при всех $\mu \in \mathbb{R}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Не ограничивая общности, считаем, что функция f неотрицательна на положительной полуоси, поскольку очевидно, что если $\lambda_n(\mu A) = f(\mu)$, то $\lambda_n(\mu(-A)) = f(-\mu)$, $\mu \in \mathbb{R}$. Для доказательства теоремы нам понадобится ряд дополнительных построений, которые будем выписывать как его отдельные пункты.

1. Построим вначале двумерную систему, удовлетворяющую условиям теоремы. Для ее построения нам понадобится несколько модифицировать конструкцию работ [10, 11]. Опишем эту конструкцию вместе с нужными нам изменениями. Зафиксируем какие-либо кусочно-непрерывные 2×2 -матрицу $B(\cdot)$ и функцию $\omega(\cdot)$ и возьмем матрицу $A(\cdot)$ системы (1), где $n = 2$, в виде:

$$A(t) = U^{-1}(t)B(t)U(t) - U^{-1}(t)dU(t)/dt, \quad t \geq 0, \quad (3)$$

здесь $U(t)$ – матрица поворота на угол $\varphi(t) = \int_0^t \omega(\tau) d\tau$ по ходу часовой стрелки (не нарушая общности, считаем ортонормальную систему координат Ox_1x_2 правой). Сделав в семействе (2) с матрицей $A(\cdot)$, задаваемой равенством (3), линейную замену переменных $y = U(t)x$, придем, как легко убедиться, к следующему семейству:

$$dy/dt = \mu B(t)y + (1 - \mu)\omega(t) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} y \equiv C_{B,\omega}(t,\mu)y, \quad y \in \mathbb{R}^2, \quad t \geq 0. \quad (4)$$

Так как матрица $U(t)$ является при каждом $t \geq 0$ ортогональной, то замена переменных $y = U(t)x$ не изменяет норму решений, а значит, для любого $\mu \in \mathbb{R}$ показатели Ляпунова системы $\langle \mu \rangle_A$ семейства (2) с матрицей (3) и системы $\langle \mu \rangle_C$ семейства (4) совпадают. Таким образом, построение нужной двумерной системы (1) сводится к построению соответствующих матрицы $B(\cdot)$ и функции $\omega(\cdot)$. Эти матрица $B(\cdot)$ и функция $\omega(\cdot)$ будут определены в п. 5 доказательства после некоторых дополнительных вспомогательных построений п. 2 и 3.

2. Матрицу $C_{B,\omega}(\cdot; \mu)$ семейства (4) (т. е. матрицу $B(\cdot)$ и функцию $\omega(\cdot)$) будем строить на временной полуоси $t \geq 0$ как кусочно-постоянную, значения которой составлены из элементов определяемого ниже семейства матриц.

Рассмотрим следующее четырехпараметрическое семейство 2×2 -матриц:

$$D(\mu; p) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \mu a & \mu(b-c) + c \\ \mu(d+c) - c & \mu a \end{pmatrix}, \quad (5)$$

зависящее от четырех вещественных параметров a, b, c, d (обозначим составленный из них вектор $(a, b, c, d)^T$ через p) и переменной $\mu \in \mathbb{R}$. Для матрицы $D(\mu; p)$ ее характеристическое уравнение $\det(vE - D(\mu; p)) = 0$ имеет вид $(v - \mu a)^2 - (\mu(b-c) + c)(\mu(d+c) - c) = 0$. Дискриминант $R(\mu; p)$ этого уравнения равен $R(\mu; p) = 4((b-c)(d+c)\mu^2 + c(2c+d-b)\mu - c^2)$.

Для вещественных чисел r и s ($r < s$) одного знака (в частности, ненулевых) компоненты вектора p выберем удовлетворяющими условиям:

$$a > 0, \quad c \geq 0, \quad b = c(s-1)/s, \quad d = c(1-r)/r. \quad (6)$$

При таком, как в (6), выборе параметров a, b, c, d корнями квадратного относительно μ трехчлена $R(\mu; p)$ являются числа r и s , его старший коэффициент равен $4(b-c)(d+c) = -4c^2/(rs) < 0$, а характеристические числа $v_{1,2}(\mu)$ матрицы $D(\mu; p)$ задаются, как нетрудно найти, равенством $v_{1,2}(\mu) = a\mu \pm c\sqrt{(s-\mu)(\mu-r)/(rs)}$. Поэтому корни $v_{1,2}(\mu)$ вещественны только при $\mu \in [r, s]$, а при всех μ , не принадлежащих отрезку $[r, s]$, вещественная часть обоих характеристических чисел $v_1(\mu)$ и $v_2(\mu)$ равна $a\mu$. Так как $c \geq 0$, то для нахождения большего характеристического числа (пусть это v_2) при $\mu \in [r, s]$ в последнем равенстве нужно взять знак «плюс», т. е. при $\mu \in [r, s]$ имеет место равенство $v_2(\mu) = a\mu + c\sqrt{(s-\mu)(\mu-r)/(rs)}$; в частности, $v_2(\mu) \geq a\mu$ при всех $\mu \in [r, s]$.

Рассмотрим вещественную часть $\text{Re } v_2(\mu)$ большего характеристического числа $v_2(\mu)$ как функцию аргумента $\mu \in \mathbb{R}$ и обозначим эту функцию через $v(\mu)$, т. е.

$$v(\mu) = \begin{cases} a\mu + c\sqrt{(s-\mu)(\mu-r)/(rs)} & \text{при } \mu \in [r, s], \\ a\mu & \text{при } \mu \in \mathbb{R} \setminus [r, s]. \end{cases} \quad (7)$$

Покажем, что максимум этой функции на отрезке $[r, s]$ достигается в точке

$$\mu_{\max} = \xi + L\sqrt{a^2rs/(c^2 + a^2rs)}, \quad (8)$$

где $\xi = (s+r)/2$ и $L = (s-r)/2$. Действительно, сделаем замену переменной (сдвиг) $\mu = \omega + \xi$; тогда, поскольку $\mu \in [r, s]$, переменная $\omega \in [-L, L]$, а функция $v(\mu)$ при такой замене перейдет в функцию $\gamma(\omega) = a\xi + a\omega + c\sqrt{L^2 - \omega^2}/\sqrt{rs}$. Очевидно, что равенство $d\gamma(\omega)/d\omega = 0$ равносильно равенству $\omega/\sqrt{L^2 - \omega^2} = a\sqrt{rs}/c$. Корень последнего уравнения положителен и, как легко убедиться, равен $L\sqrt{a^2rs/(c^2 + a^2rs)}$, откуда обратной заменой получаем равенство (8). Из проведенных вычислений видно, что на отрезке $[r, s]$ функция $v(\mu)$ возрастает при $\mu \in [r, \mu_{\max}]$ и убывает при $\mu \in [\mu_{\max}, s]$.

Обозначим для удобства число $\sqrt{a^2rs/(c^2 + a^2rs)}$ через h ; в этих обозначениях формула (8) примет вид $\mu_{\max} = \xi + Lh$. Учитывая очевидное включение $h \in (0, 1]$, из формулы (8) получаем, что $\mu_{\max} \in (\xi, s]$. Подставив вместо μ значение μ_{\max} в первое выражение из (7), после очевидных преобразований находим, что максимальное значение v_{\max} функции $v(\cdot)$ на отрезке $[r, s]$ равно

$$v_{\max} = a\xi + aL/h. \quad (9)$$

Пусть задано некоторое число $\varepsilon > 0$, удовлетворяющее неравенству

$$\varepsilon < a\xi + aL/h - as = aL(1-h)/h. \quad (10)$$

Обозначим $q = v_{\max} - \varepsilon$. В силу неравенства (10) и того, что на отрезке $[r, s]$ функция $v(\mu)$ возрастает при $\mu \in [r, \mu_{\max}]$ и убывает при $\mu \in [\mu_{\max}, s]$, множество тех $\mu \in [r, s]$, в которых значения функции $v(\cdot)$ отличаются от ее максимального значения v_{\max} не более, чем на ε , является отрезком. Чтобы найти его концы, т. е. те два значения δ , при которых точки $\mu_{\max} + \delta$ принадлежат отрезку $[r, s]$ и выполняется равенство $v(\mu_{\max} + \delta) = q$, подставим в первое выражение из (7), записанное в виде $v(\mu) = a\xi + a(\mu - \xi) + c\sqrt{L^2 - (\mu - \xi)^2} / \sqrt{rs}$, вместо переменной μ значение $\mu_{\max} + \delta$, получим равенство

$$v(\mu_{\max} + \delta) = a\xi + a(\delta + Lh) + c\sqrt{L^2 - (\delta + Lh)^2} / \sqrt{rs}.$$

Приравнивая правые части последнего равенства и равенства (9): $v_{\max} - \varepsilon = a\xi + aL/h - \varepsilon$, получим уравнение $a(\delta + Lh) + c\sqrt{L^2 - (\delta + Lh)^2} / \sqrt{rs} = aL/h - \varepsilon$, или, после преобразований,

$$(L^2 - (\delta + Lh)^2)c^2 / (rs) = (aL/h - aLh - a\delta - \varepsilon)^2.$$

Раскрывая скобки и собирая члены при одинаковых степенях δ , а также учитывая, что $c^2 / (rs) = a^2(1-h^2)/h^2$, придем к квадратному относительно δ уравнению

$$(a^2/h^2)\delta^2 + 2a\varepsilon\delta + \varepsilon^2 - 2\varepsilon aL(1-h^2)/h = 0. \quad (11)$$

Дискриминант D уравнения (11) равен: $D = (4\varepsilon a^2(1-h^2)/h^2)(2aL/h - \varepsilon)$. В силу неравенства (10), поскольку $2aL/h > (aL/h)(1-h)$, дискриминант D положителен. Кроме того, так как $\varepsilon < (aL/h)(1-h) < (2aL/h)(1-h^2)$, то свободный член квадратного трехчлена в (11) отрицателен, а значит, корни $\delta_{1,2}$ уравнения (11) разного знака (не ограничивая общности, считаем $\delta_1 < 0 < \delta_2$). Таким образом, множеством решений неравенства $v(\mu) \geq q$ на отрезке $[r, s]$ является отрезок $[\mu_{\max} + \delta_1, \mu_{\max} + \delta_2]$.

В дальнейшем мы будем применять конструкцию этого пункта следующим образом: по заданным значениям r, s, a, q, ε из равенства $v_{\max} = q + \varepsilon$ найдем вследствие (9) коэффициент c , затем из двух последних равенств в (6) – коэффициенты b и d ; тогда определен вектор $p = (a, b, c, d)^T$, а значит, матрица (5) и функция $v(\cdot)$, про которую будем говорить, что она построена на отрезке $[r, s]$ по числам a, q, ε .

3. В этом пункте определим отрезки, на которых будем строить нужные нам функции $v(\cdot)$ из п. 2.

3.1. Воспользуемся полученным в [12] представлением множеств Лебега функций класса $(*, G_\delta)$. Функция f класса $(*, G_\delta)$, как и любая вещественнозначная функция, однозначно определяется [7, с. 221] своими множествами Лебега $[f \geq q_w]$, где $\{q_w : w \in \mathbb{N}\}$ – множество рациональных чисел, занумерованных каким-либо образом. Так как f – функция класса $(*, G_\delta)$, то для каждого $q \in \mathbb{R}$ ее множество Лебега $[f \geq q]$, являясь G_δ -множеством, представимо в виде счетного пересечения открытых множеств. Для всех $q_w, w \in \mathbb{N}$, выберем это представление таким же, как в работах [9, 12], т. е. таким, чтобы выполнялась

Л е м м а [12]. Для любой функции $f \in (*, G_\delta)$ существует семейство $\{(G_w^i)_{i \in \mathbb{N}} : w \in \mathbb{N}\}$ убывающих последовательностей $(G_w^i)_{i \in \mathbb{N}}$ открытых множеств такое, что при всех $w \in \mathbb{N}$ верно представление $[f \geq q_w] = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} G_w^i$, и каждая точка $\mu \in \mathbb{R}$, не принадлежащая множеству $[f \geq q_w]$, принадлежит не более чем конечному количеству тех множеств $G_w^i, i \in \mathbb{N}$, для нижнего индекса j которых выполнено неравенство $q_j \geq q_w$.

3.2. Поскольку, как сказано в начале доказательства, справедливы равенства $f \equiv +\infty$ на $(0, +\infty)$ и $f(0) = 0$, то далее вместо f достаточно рассматривать ее сужение $f|_{(-\infty, 0)}$ на полуось $(-\infty, 0)$. Так как $[f|_{(-\infty, 0)} \geq q] = [f \geq q] \cap (-\infty, 0)$, то множества G_w^i из леммы, дающие представление множеств Лебега $[f|_{(-\infty, 0)} \geq q]$, являются подмножествами интервала $(-\infty, 0)$ для всех $(w, i) \in \mathbb{N}^2$. Построим теперь нужное в дальнейшем представление самих открытых множеств G_w^i . Каждое множество G_w^i , являясь открытым подмножеством интервала $(-\infty, 0)$, представляет собой не более чем счетное объединение $G_w^i = \sqcup_{k \in \mathbb{N}} I_w^i(k)$ непересекающихся интервалов $I_w^i(k)$, лежащих на полуоси $(-\infty, 0)$.

Зафиксируем какую-либо функцию $\varepsilon(w, i)$ такую, что $\varepsilon(w, i) \rightarrow 0$ при $|w| + |i| \rightarrow +\infty$, например, $\varepsilon(w, i) = (w^2 + i^2)^{-1}$. Рассмотрим отдельно каждый интервал $I_w^i(k)$. Если этот интервал конечен, то определены числа r, s, q, ε , а именно, $I_w^i(k) = (r, s)$, $q = q_w$ и $\varepsilon = \varepsilon(w, i)$, которые до конца этого подпункта 3.2 будем писать, не отмечая их зависимость от w и w, i . Выберем на интервале (r, s) два семейства отрезков

$$\Delta_w^i(k, -l) = [r + 2^{-l-1}L, r + 2^{-l}L] \quad \text{и} \quad \Delta_w^i(k, l) = [s - 2^{-l}L, s - 2^{-l-1}L], \quad l \in \mathbb{N},$$

где, как и выше, $L = (s - r) / 2$. Если интервал $I_w^i(k)$ бесконечен, т. е. $I_w^i(k) = (-\infty, s)$, то в этом случае семейства отрезков зададим так:

$$\Delta_w^i(k, -l) = [s - l - 1, s - l + 1 / 2] \quad \text{и} \quad \Delta_w^i(k, l) = [s - 2^{-l}, s - 2^{-l-1}], \quad l \in \mathbb{N},$$

а число L положим равным $1 / 2$. В дальнейшем случаи конечных и бесконечных интервалов $I_w^i(k)$ различать не будем, так как построения этого подпункта будут верны для обоих случаев. Каждому отрезку $\Delta_w^i(k, l)$, $l \in \mathbb{Z}$, $l \neq 0$, поставим в соответствие число $a = \max(w + i + k + l, [q / s] + 1)$, где $[q / s]$ – целая часть числа q / s (позднее нам понадобится условие $q > as$ для того, чтобы для этого отрезка выполнялось неравенство (10)).

Покажем, что каждая точка μ отрезка $\Delta_w^i(k, l)$, $l \neq 0$, может быть точкой максимума какой-то функции $v(\cdot)$, построенной, как в п. 2, на некотором отрезке $[r', s'] \subset I_w^i(k)$ по числам a, q, ε , причем $v(\mu) = q + \varepsilon$ и расстояния от точек r' и s' до отрезка $\Delta_w^i(k, l)$ не будут превышать $2^{-l-2}L$ (расстояние от точки до множества – инфимум расстояний от нее до точек множества). Будем говорить, что указанный отрезок $[r', s']$ реализует точку μ .

Действительно, выпишем формулы из конструкции п. 2, примененной к какому-то, пока неизвестному, отрезку $[r', s']$ и определенным выше числам a, q, ε и найдем, каким требованиям должны удовлетворять числа r' и s' , чтобы этот отрезок реализовывал точку μ . Ниже во всех выкладках используем аналогичные п. 2 обозначения, отмечая их штрихами: $L' = (s' - r') / 2$, $\xi' = (r' + s') / 2$ и $h' = \sqrt{a^2 r' s' / ((c')^2 + a^2 r' s')}$. В силу формулы (8), условие, что μ – точка максимума функции $v(\cdot)$, запишется как $\mu = \mu_{\max} = \xi' + L'h'$, а равенство $v(\mu) = q + \varepsilon$, с учетом (9), примет вид $q + \varepsilon = a\xi' + aL' / h'$. Исключив из второго условия h' и подставив в первое, получим равенство $\mu = \xi' + a(L')^2 / (q + \varepsilon - a\xi')$, откуда найдем $L' = \sqrt{(\mu - \xi')(q + \varepsilon - a\xi') / a}$. В силу непрерывности L' как функции ξ' можно так выбрать $\xi' < \mu$, достаточно близкое к μ , что L' , найденное из последней формулы, будет достаточно малым, а отрезок с концами $r' = \xi' - L'$ и $s' = \xi' + L'$ будет удовлетворять нашим требованиям.

Для каждой точки μ из отрезка $\Delta_w^i(k, l)$ построим отрезок $\Theta(\mu)$, который ее реализует. В этом отрезке, в свою очередь, выберем подинтервал $\theta(\mu)$, на котором функция $v(\cdot)$ принимает значения из промежутка $(q, q + \varepsilon]$. Совокупность всех подинтервалов $\{\theta(\mu) : \mu \in \Delta_w^i(k, l)\}$ образует открытое покрытие отрезка $\Delta_w^i(k, l)$, из которого по лемме Гейне – Бореля выберем конечное подпокрытие: $\bigcup_{j=1}^J \theta(\mu_j) \supset \Delta_w^i(k, l)$. При этом реализующие отрезки $\Theta(\mu_j)$, $j = 1, \dots, J$, будем называть основными для отрезка $\Delta_w^i(k, l)$.

3.3. Прделав эти построения для всех интервалов $I_w^i(k)$, получим множество основных отрезков, которые занумеруем одним параметром $m \in \mathbb{N}$; при этом основной отрезок, отвечающий номеру m , обозначим через $\Delta(m)$, ту четверку (w, i, k, l) , для которой $\Delta(m)$ является основным (одним из основных) отрезком для $\Delta_w^i(k, l)$ – через $o(m)$, число ε – через $\varepsilon(m)$, функцию $v(\mu)$, построенную, как в подп. 3.2, для $\Delta(m)$ – через $v(\mu, m)$, параметры (6) функции $v(\mu, m)$ – через $a(m), b(m), c(m), d(m)$, а вектор $(a(m), b(m), c(m), d(m))^T$ – через $p(m)$. Компоненты w и i четверки $o(m) = (w, i, k, l)$ будем обозначать $o_1(m)$ и $o_2(m)$ соответственно.

Непосредственно из построений вытекают следующие свойства:

i) для каждой точки $\mu \in I_w^i(k)$ найдется номер $m \in \mathbb{N}$ такой, что $v(\mu, m) \in (q_w, q_w + \varepsilon(w, i)]$, при этом $o(m) = (w, i, k, l)$ для некоторого $l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$;

ii) для каждой точки $\mu \in I_w^i(k)$ найдется не более, чем конечное количество номеров $m \in \mathbb{N}$ таких, что $v(\mu, m) > a(w, i, k, l)\mu$ и $o(m) = (w, i, k, l)$ при некотором $l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ (т. е. $\mu \in \Delta(m)$ лишь для конечного количества тех m , для которых $o(m) = (w, i, k, l)$);

iii) $a(m) \rightarrow +\infty$ при $m \rightarrow +\infty$.

4. Покажем, что из построений п. 3. следует равенство

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow +\infty} v(\mu, m) = f(\mu), \quad \mu \in (-\infty, 0). \quad (12)$$

Рассмотрим сначала те номера m , при которых точка μ не принадлежит отрезку $\Delta(m)$, занумеруем их по возрастанию и обозначим полученную последовательность номеров через $(m_s)_{s \in \mathbb{N}}$.

По построению $v(\mu, m_s) = a(m_s)\mu$, следовательно, $\overline{\lim}_{s \rightarrow +\infty} v(\mu, m_s) = -\infty$, так как $\mu < 0$ и, по свойству iii) предыдущего пункта, имеет место соотношение $\overline{\lim}_{s \rightarrow +\infty} a(m_s) = +\infty$.

Выберем какую-либо последовательность рациональных чисел $(q_{w_j})_{j \in \mathbb{N}} \uparrow f(\mu)$. При всех $j \in \mathbb{N}$ точка μ принадлежит множеству $[f \geq q_{w_j}]$, а значит, к ней применимо свойство i) подп. 3.3. Таким образом, найдется последовательность натуральных чисел $(m_j)_{j \in \mathbb{N}}$, для которой $v(\mu, m_j) > q_{w_j}$ при всех $j \in \mathbb{N}$. Следовательно, верно неравенство $\overline{\lim}_{m \rightarrow +\infty} v(\mu, m) \geq f(\mu)$.

Для завершения доказательства равенства (12) осталось показать, что для любого $\eta > 0$ существует не более, чем конечное количество номеров m таких, что

$$v(\mu, m) \geq f(\mu) + \eta. \quad (13)$$

Оценим сверху количество таких m . Выберем номер $w \in \mathbb{N}$, для которого выполнено двойное неравенство $f(\mu) \leq q_w < f(\mu) + \eta$. Тогда $\mu \notin [f \geq q_w]$, а значит, по лемме из подп. 3.1 точка μ может принадлежать лишь конечному количеству множеств G_j^k , где $k \in \mathbb{N}$, а $q_j > q_w$. Но каждая точка множества G_j^k принадлежит по свойству ii) подп. 3.3 не более, чем конечному количеству интервалов $\Delta(m)$ таких, что $o_1(m) = j$, $o_2(m) = k$. Следовательно, при всех $j \in \mathbb{N}$, при которых $q_j > q_w$, неравенство (13) выполняется не более чем конечное количество раз.

Остались еще номера $j \in \mathbb{N}$, для которых $q_j \leq q_w$. Начиная с некоторого номера N все члены последовательности $(\varepsilon(m))_{m \in \mathbb{N}}$ будут меньше, чем положительное число $f(\mu) + \eta - q_w$, а значит, и максимум функции $v(\cdot, m)$ будет меньше, чем $f(\mu) + \eta$ при всех $m \in \mathbb{N}$, таких, что $o_1(m) = j$, $m \geq N$, $q_j \leq q_w$. И в этом случае получили, что неравенство (13) выполняется не более чем конечное количество раз. Равенство (12) доказано.

5. Построение матрицы системы будем вести индукцией по шагам, на которых будем, согласно п. 1, строить соответствующие 2×2 -матрицу $B(\cdot)$ и функцию $\omega(\cdot)$ семейства (4), т. е. матрицу $S_{B, \omega}(\cdot, \mu)$. Считаем, что фиксирована возрастающая последовательность $(T_m)_{m \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$, которую определим позднее; пока же предполагаем только, что она удовлетворяет следующим условиям: $T_0 = 0$, $\lim_{m \rightarrow +\infty} T_m = +\infty$ и что четыре числа $T_{3m-3}, T_{3m-2}, T_{3m-1}, T_{3m}$ образуют арифметическую

прогрессию при каждом $m \in \mathbb{N}$. На m -м шаге ($m \in \mathbb{N}$) будем строить матрицу $C_{B,\omega}$ на полуинтервале $(T_{3(m-1)}, T_{3m}]$, при этом, если необходимо, будем изменять ее значения на предыдущем полуинтервале $(T_{3(m-2)}, T_{3(m-1)})$. Обозначим $\tau_m = (T_{m-1}, T_m]$, $m \in \mathbb{N}$. Пусть сделан $m-1$ шаг, т. е. матрица $B(t)$ и функция $\omega(t)$ определены при всех $t \in [0, T_{3(m-1)}]$. Сделаем m -й шаг.

Зададим пару $(B(\cdot), \omega(\cdot))$ на полуинтервале $(T_{3(m-1)}, T_{3m}]$ равенствами

$$\begin{aligned} B(t) &= \begin{pmatrix} a(m) & b(m) \\ d(m) & a(m) \end{pmatrix} \text{ и } \omega(t) = c(m) & \text{при } t \in \tau_{3m-2}, \\ B(t) &= \alpha_m E_2 \text{ и } \omega(t) = 0 & \text{при } t \in \tau_{3m-1}, \\ B(t) &= \begin{pmatrix} -a(m) & -b(m) \\ -d(m) & -a(m) \end{pmatrix} \text{ и } \omega(t) = -c(m) & \text{при } t \in \tau_{3m}. \end{aligned} \quad (14)$$

Последовательность $(\alpha_m)_{m \in \mathbb{N}}$ определим позднее. Эти построения задают матрицу $B(\cdot)$ и функцию $\omega(\cdot)$ при всех $t \geq 0$. Матрицу $C_{B,\omega}(t, \mu)$ семейства (4) с построенными матрицей $B(t)$ и функцией $\omega(t)$ обозначим через $C(t, \mu)$, через $\langle \mu \rangle_C$ – систему $\langle \mu \rangle$ этого семейства, а через $X_\mu(\cdot, \cdot)$ – матрицу Коши системы $\langle \mu \rangle_C$. По построению матрица $C(\cdot, \cdot)$ кусочно-постоянна на временной полуоси и при всех $m \in \mathbb{N}$ справедливы равенства $C(t, \mu) = D(\mu; p(m))$, если $t \in \tau_{3m-2}$, $C(t, \mu) = \alpha_m \mu E_2$, если $t \in \tau_{3m-1}$, и $C(t, \mu) = -D(\mu; p(m))$, если $t \in \tau_{3m}$.

До конца доказательства $A(\cdot)$ обозначает матрицу, связанную с построенными матрицей $B(\cdot)$ и функцией $\omega(\cdot)$ равенством (3), в котором матрица $B(\cdot)$ и функция $\omega(\cdot)$ определяются соотношениями (14).

Из определения (14), поскольку на полуинтервалах τ_m матрица $C(\cdot, \cdot)$ постоянна, непосредственно следует, что для матрицы Коши $X_\mu(\cdot, \cdot)$ системы $\langle \mu \rangle_C$ справедливы представления

$$X_\mu(t, T_{3m-i}) = \begin{cases} \exp(D(\mu, p(m))(t - T_{3m-3})) & \text{при } i = 3, t \in \tau_{3m-2}, \\ \exp(\alpha_m \mu (t - T_{3m-2})) E_2 & \text{при } i = 2, t \in \tau_{3m-1}, \\ \exp(-D(\mu, p(m))(t - T_{3m-1})) & \text{при } i = 1, t \in \tau_{3m}. \end{cases} \quad (15)$$

Из этих равенств очевидно вытекает $X_\mu(T_{3m}, T_{3m-3}) = \exp(\alpha_m (T_{3m} - T_{3m-3}) \mu / 3) E_2$. Обозначим сумму $\sum_{i=1}^m \alpha_m (T_{3m} - T_{3m-3}) / 3$ через s_m . Тогда, как нетрудно убедиться, для фундаментальной матрицы $X_\mu(\cdot, 0)$ при всех $m \in \mathbb{N}$ верны равенства

$$\begin{aligned} X_\mu(T_{3m}, 0) &= \exp(s_m \mu) E_2, \\ X_\mu(T_{3m+1}, 0) &= \exp(s_m \mu) \exp(D(\mu, p(m+1))(T_{3m+1} - T_{3m})), \\ X_\mu(T_{3m+2}, 0) &= \exp(s_{m+1} \mu) \exp(D(\mu, p(m+1))(T_{3m+1} - T_{3m})). \end{aligned} \quad (16)$$

6. Покажем, что последовательности $(\alpha_m)_{m \in \mathbb{N}}$ и $(T_m)_{m \in \mathbb{N}}$ можно задать так, чтобы старший показатель Ляпунова построенного семейства совпадал с функцией $f(\mu)$ при всех $\mu \in \mathbb{R}$, т. е. чтобы при всех $\mu \in \mathbb{R}$ выполнялось равенство

$$\lambda_2(\mu A) = \overline{\lim}_{m \rightarrow +\infty} v(\mu, m). \quad (17)$$

Рассмотрим вначале точки $\mu \in (-\infty, 0)$. Как известно [13, с. 170], старший показатель Ляпунова можно вычислять по формуле $\lambda_2(\mu A) = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} \ln \|X_\mu(t, 0)\|$. Фундаментальная матрица $X_\mu(t, 0)$ имеет различный вид на полуинтервалах $\tau_{3m+1}, \tau_{3m+2}, \tau_{3m+3}$ при всех $m \in \mathbb{N}$, поэтому рассмотрим отдельно каждый из них.

1) Пусть $t \in \tau_{3m+1}$. Тогда из соотношений (15) и (16) следует равенство

$$X_\mu(t, 0) = \exp(s_m \mu) \exp(D(\mu, p(m+1))(t - T_{3m})). \quad (18)$$

Оценим норму матрицы $\exp(D(\mu; p(m+1))(t - T_{3m}))$. Согласно [2, с. 131] имеет место неравенство

$$\|\exp(D(\mu; p(m+1))(t - T_{3m}))\| \leq \exp(v(\mu, m+1)(t - T_{3m}))H_{\mu, m+1}(t), \quad (19)$$

где $H_{\mu, m+1}(t) = 1 + 2(t - T_{3m})\|D(\mu; p(m+1))\|$. Воспользовавшись (18) и (19), получим, что

$$t^{-1} \ln \|X_{\mu}(t, 0)\| \leq t^{-1}(s_m \mu + v(\mu, m+1)(t - T_{3m}) + \ln H_{\mu, m+1}(t)),$$

откуда, после преобразований, приходим к оценке

$$t^{-1} \ln \|X_{\mu}(t, 0)\| \leq v(\mu, m+1) + (s_m \mu - v(\mu, m+1)T_{3m} + \ln H_{\mu, m+1}(t)) / t. \quad (20)$$

Функция $(\ln H_{\mu, m+1}(t)) / t$ для каждого μ , начиная с некоторого момента времени (своего для каждого μ), убывает и стремится к нулю. Рассмотрим $\mu \in [-m, -1/m]$, и пусть $t_{m+1}(\mu)$ – то число, начиная с которого $(\ln H_{\mu, m+1}(t)) / t \leq m^{-1}$. Коэффициенты матрицы $D(\mu; p(m+1))$ линейно зависят от μ , следовательно, $\|D(\mu; p(m+1))\|$ непрерывно зависит от μ , поэтому и $t_{m+1}(\mu)$ – непрерывная функция аргумента μ , а значит, величина

$$M(m+1) = \max_{\mu \in [-m, -1/m]} \max_{t \in [T_{3m}, t_{m+1}(\mu)]} \ln H_{\mu, m+1}(t),$$

конечна; без ограничения общности считаем это число неотрицательным. Число α_m , выбранное на предыдущем шаге, увеличим при необходимости так, чтобы выполнялось неравенство $s_m \geq \alpha(m+1) + mM(m+1)$. Тогда при всех $\mu \in [-m, -1/m]$ и $t \in \tau_{3m+1}$ будет верна оценка $t^{-1} \ln \|X_{\mu}(t, 0)\| \leq v(\mu, m+1) + m^{-1}$, так как в правой части (20) либо числитель дроби неположителен, либо сама дробь не больше m^{-1} .

Из представления (18) следует, что $t^{-1} \ln \|X_{\mu}(t, 0)\| = t^{-1}(s_m \mu + \ln \|D(\mu, p(m+1))(t - T_{3m})\|)$. Так как матрица $D(\mu, p(m+1))$ постоянна, то [2, с. 122] $\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} \ln \|D(\mu, p(m+1))(t)\| = v(\mu, m+1)$. Выберем теперь T_{3m+1} настолько большим, чтобы при всех $\mu \in [-m, -1/m]$ на полуинтервале τ_{3m+1} нашлась точка $t'_{3m+1}(\mu)$, для которой верно неравенство

$$(t'_{3m+1}(\mu))^{-1} (-s_m m + \ln \|D(\mu, p(m+1))(t'_{3m+1}(\mu) - T_{3m})\|) > v(\mu, m+1) - m^{-1}$$

(такое T_{3m+1} найдется в силу непрерывности функции $t^{-1} \ln \|D(\mu, p(m+1))(t - T_{3m})\|$ по t и μ , непрерывности $v(\mu, m+1)$ по μ и компактности отрезка $[-m, -1/m]$). При таком выборе при всех $\mu \in [-m, -1/m]$ справедливо неравенство $(t'_{3m+1}(\mu))^{-1} \ln \|X_{\mu}(t'_{3m+1}(\mu), 0)\| > v(\mu, m+1) - m^{-1}$.

Объединяя полученные результаты, получим $\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} \ln \|X(t, 0)\| = \overline{\lim}_{m \rightarrow +\infty} v(\mu, m)$, где верхний предел в левой части вычисляется только по $t \in \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \tau_{3m+1}$.

2) Пусть $t \in \tau_{3m+2}$. Тогда из соотношений (15) и (16) получаем, что

$$X_{\mu}(t, 0) = \exp(D(\mu, p(m+1))(T_{3m+1} - T_{3m})) \exp((s_m + \alpha_{m+1}(t - T_{3m+1}))\mu). \quad (21)$$

Обозначим $(T_{3m+1})^{-1} \ln \|X_{\mu}(T_{3m+1}, 0)\|$ через $N(\mu, m)$, тогда из (21) следует равенство

$$t^{-1} \ln \|X_{\mu}(t, 0)\| = t^{-1}(N(\mu, m)T_{3m+1} + \alpha_{m+1}\mu(t - T_{3m+1})) = \alpha_{m+1}\mu + (N(\mu, m) - \alpha_{m+1}\mu)T_{3m+1} / t.$$

В зависимости от знака величины $N(\mu, m) - \alpha_{m+1}\mu$ это выражение принимает наибольшее значение в одной из крайних точек полуинтервала τ_{3m+2} . Выберем α_{m+1} достаточно большим, чтобы при всех $\mu \in [-m, -1/m]$ выполнялось неравенство $N(\mu, m) \geq \alpha_{m+1}\mu$. Такое положительное α_{m+1}

найдется, так как функция $(T_{3m+1})^{-1} \ln \|X_\mu(T_{3m+1}, 0)\|$ аргумента μ непрерывна на компакте $[-m, -1/m]$, а значит, принимает на нем свое минимальное значение. Тогда максимум функции $t^{-1} \ln \|X_\mu(t, 0)\|$ будет достигаться в точке T_{3m+1} , но, как показано в случае 1), $(T_{3m+1})^{-1} \ln \|X_\mu(T_{3m+1}, 0)\| \leq v(\mu, m+1) + m^{-1}$. Отметим, что, так как в этом случае нам было достаточно только оценки на α_{m+1} снизу, то эти рассуждения останутся верными, если на следующем шаге в случае 1) величина α_{m+1} увеличится.

3) Пусть t принадлежит τ_{3m+3} . Тогда из соотношений (15) и (16) следует, что

$$X_\mu(t, 0) = \exp(s_{m+1}\mu) \exp(D(\mu, p(m+1))(T_{3m+1} - T_{3m})) \exp(-D(\mu, p(m+1))(t - T_{3m+2})).$$

Поскольку матрицы $D(\mu, p(m+1))$ и $-D(\mu, p(m+1))$ перестановочны, то последнее равенство можно переписать в виде

$$X_\mu(t, 0) = \exp(s_{m+1}\mu) \exp(D(\mu, p(m+1))(T_{3m+3} - t)). \quad (22)$$

Как и в случае 1), запишем неравенство, аналогичное неравенству (19):

$$\|\exp(D(\mu; p(m+1))(T_{3m+3} - t))\| \leq \exp(v(\mu, m+1)(T_{3m} - t)) \tilde{H}_{\mu, m+1}(t),$$

где $\tilde{H}_{\mu, m+1}(t) = 1 + 2(T_{3m+3} - t) \|D(\mu; p(m+1))\|$. Следовательно,

$$t^{-1} \ln \|X_\mu(t, 0)\| \leq t^{-1} (s_{m+1}\mu + v(\mu, m+1)(T_{3m+3} - t) + \ln \tilde{H}_{\mu, m+1}(t)),$$

откуда после преобразований получаем оценку

$$t^{-1} \ln \|X_\mu(t, 0)\| \leq -v(\mu, m+1) + (s_{m+1}\mu + v(\mu, m+1)T_{3m+3} + \ln \tilde{H}_{\mu, m+1}(t)) / t. \quad (23)$$

При $\mu \in [-m, -1/m]$, $t \in [T_{3m+2}, T_{3m+3}]$ сумма $v(\mu, m+1)T_{3m+3} + \ln \tilde{H}_{\mu, m+1}(t)$ ограничена, поэтому выберем α_{m+1} настолько большим, чтобы числитель дроби в правой части неравенства (23) был отрицательным, тогда правая часть оценки (23) растёт при увеличении t и достигает своего максимума при $t = T_{3m+3}$, при котором правая часть равна $s_{m+1}\mu / T_{3m+3}$. При необходимости увеличим α_{m+1} так, чтобы $s_{m+1} / T_{3m+3} > m$, тогда $\overline{\lim}_{m \rightarrow +\infty} s_{m+1}\mu / T_{3m+3} = -\infty$, и, следовательно, $\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} \ln \|X_\mu(t, 0)\| = -\infty$, где верхний предел в левой части вычисляется только по $t \in \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \tau_{3m+3}$. Как и в случае 2), при рассмотрении случая 3) мы пользовались только оценками снизу на α_{m+1} и s_{m+1} , а значит, эти рассуждения останутся верным, если на следующем шаге в случае 1) величина α_{m+1} увеличится.

На m -м шаге рассуждения велись для $\mu \in [-m, -1/m]$, но так как $m \rightarrow +\infty$, то для каждого фиксированного μ они будут верны, начиная с номера $m = \max\{[-\mu], [-\mu^{-1}]\} + 1$. Таким образом, равенство (17) доказано для всех $\mu < 0$.

Очевидно, что старший показатель Ляпунова построенного семейства равен нулю при $\mu = 0$, так как в этом случае матрица $C_{B, \omega}(t, 0) \equiv 0$ и матрица Коши $X_0(t, 0) \equiv E_2$. Рассмотрим теперь произвольное $\mu > 0$. Из первого равенства в (16) следует, что $(T_{3m})^{-1} \ln \|X_\mu(T_{3m}, 0)\| = \mu s_m / T_{3m} \rightarrow +\infty$ при $m \rightarrow +\infty$, и, значит, $\lambda_2(\mu A) = +\infty$ при любом $\mu > 0$. Таким образом, равенство $\lambda_2(\mu A) = f(\mu)$ доказано для всех $\mu \in \mathbb{R}$.

7. Отметим, что, как и в работе [9], матрицу системы, удовлетворяющей условиям теоремы 1, можно сделать бесконечно дифференцируемой. Построение бесконечно дифференцируемой системы аналогично построению из [9, п. 3.5]. Необходимо только учесть, что параметров теперь пять, а не три, и взять функцию $g(t)$ из [9] равной $g(t) = \max(|a|, |b - c|, |d + c|, |c|, s_m)$, а все остальные построения оставить без изменений.

Теорема в случае $n = 2$ доказана. Для доказательства ее в случае $n > 2$ достаточно в качестве матрицы коэффициентов системы рассмотреть $n \times n$ -матрицу $\text{diag}[A(t), t, \dots, t]$, где $A(t)$ – построенная выше 2×2 матрица. Теорема 1 доказана.

З а м е ч а н и е. В доказательстве подп. 3.4 теоремы 2 из [9] для того, чтобы показатель $\lambda_2(\mu A)$ равнялся верхнему пределу при $t \rightarrow +\infty$ величин $v_2(\mu; k)(t - T_k)/t$, $t \in [T_k, T_k']$, к условию $T_k' / T_k \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow +\infty$ нужно добавить одно дополнительное условие, аналогично тому, как сделано в настоящей работе. Именно, обозначим через $t_k(\mu)$ такое число, что при всех $t \geq t_k(\mu)$ выполняется неравенство $\ln \|\exp(D(\mu; p(k))t)\| / t \leq v_2(\mu; k) + k^{-1}$ (не ограничивая общности, считаем $t_k(\mu)$ непрерывной функцией переменной μ). Пусть $M_k = \max \{\ln \|\exp(D(\mu; p(k))t)\| / t : \mu \in [k^{-1}, k], t \in (0, t_k(\mu))\}$; эта величина конечна, так как $t_k(\mu)$ непрерывно зависит от μ , норма $\|\exp(D(\mu; p(k))t)\|$ непрерывно зависит от μ и t , а предел $\lim_{t \rightarrow 0} \ln \|\exp(D(\mu; p(k))t)\| / t$ конечен. Осталось выбрать число T_k таким, чтобы выполнялось неравенство $T_k > kM_k \max \{t_k(\mu) : \mu \in [k^{-1}, k]\}$.

Объединяя доказанную теорему 1 с теоремами 3 и 4 работы [9], получаем полное описание старшего показателя Ляпунова линейной дифференциальной системы с параметром-множителем как функции параметра – его дает основная

Т е о р е м а 2. Для каждого натурального $n \geq 2$ функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ тогда и только тогда является старшим показателем Ляпунова некоторого семейства из \mathcal{K}_n^* , когда она удовлетворяет следующим четырем условиям: 1) принадлежит классу $(*, G_\delta)$; 2) обращается в нуль в нуль; 3) принимает на одной из числовых полуосей только неотрицательные значения; 4) если функция f не равна тождественно $+\infty$ ни на одной из открытых полуосей, то существует $b \in \mathbb{R}$, такое, что $f(\mu) \geq b\mu$ при всех $\mu \in \mathbb{R}$.

Следствия из основной теоремы. Напомним, что множеством Se_A экспоненциальной устойчивости семейства (2) называется множество тех μ , при которых система $\langle \mu \rangle_A$ экспоненциально устойчива. В работах [14] и [15] доказано, что множество Se_A экспоненциальной устойчивости семейства (2) с ограниченной на полуоси матрицей коэффициентов $A(\cdot)$ является F_σ -множеством, лежащим на одной из открытых полуосей. В [15] показано также, что для таких семейств множество Se_A удовлетворяет еще и другим необходимым условиям. Вопрос о достаточности полученных в [15] условий остается открытым (в [15] получено лишь частичное их обращение). Вместе с тем для семейств из \mathcal{K}_n^* теоремы 1 и 2 позволяют дать полное описание множеств Se_A , $A \in \mathcal{M}_n^*$.

С л е д с т в и е 1. Для каждого натурального $n \geq 2$ множество $M \subset \mathbb{R}$ тогда и только тогда является множеством экспоненциальной устойчивости Se_A некоторого семейства из \mathcal{K}_n^* , когда оно является F_σ -множеством, лежащим на одной из открытых полуосей.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость следует из теоремы 2, поскольку множество экспоненциальной устойчивости – это множество $[\lambda_n < 0]$, которое, как дополнение к G_δ -множеству $[\lambda_n \geq 0]$, является F_σ -множеством. Множество $[\lambda_n < 0]$ в силу условия 3) теоремы 2 лежит на одной из открытых полуосей. Необходимость доказана. Докажем достаточность. Пусть дано множество M типа F_σ , лежащее на одной из открытых полуосей (обозначим эту полуось через s). Зададим функцию $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{при } x \in M, \\ 0 & \text{при } x \in (s \setminus M) \cup \{0\}, \\ +\infty & \text{при } x \in \mathbb{R} \setminus (s \cup \{0\}). \end{cases}$$

Для завершения доказательства остается применить к функции f теорему 1.

Множество значений старшего показателя Ляпунова $\lambda_n(\mu A)$ семейств из \mathcal{K}_n^* описывает

С л е д с т в и е 2. Множество $M \subset \mathbb{R}$ тогда и только тогда является множеством значений старшего показателя Ляпунова $\lambda_n(\mu A)$ некоторого семейства из \mathcal{K}_n^* , когда оно является суслинским множеством, содержащим нуль.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку, согласно лемме 2, функция $\lambda_n(\mu A)$ переменной $\mu \in \mathbb{R}$ – функция класса $(*, G_\delta)$, то она является бэровской функцией, а значит, множество ее значений – суслинское множество [7, с. 255]. В силу условия 2) теоремы 2 оно содержит нуль. Необходимость

доказана. Докажем достаточность. Так как M – суслинское множество расширенной числовой прямой $\overline{\mathbb{R}}$, а ограничивающее отображение ℓ – гомеоморфизм, то $\ell(M)$ – суслинское множество прямой \mathbb{R} . Поэтому [7, с. 256] существует функция первого бэровского класса $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (и даже полунепрерывная функция [16, 17]), для которой $\varphi(\mathbb{R}) = \ell(M)$. Тогда $\psi = \ell^{-1} \circ \varphi \circ \ln$ – функция первого бэровского класса $(0, +\infty) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, множество значений которой совпадает с множеством M . Следовательно, функция f , определяемая соотношениями

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in (-\infty, 0], \\ \psi(x) & \text{при } x \in (0, +\infty), \end{cases}$$

удовлетворяет всем условиям теоремы 2. Осталось воспользоваться теоремой 2.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю Е. А. Барабанову за постановку задачи и внимание, проявленное к работе.

Список использованной литературы

1. *Ляпунов, А. М.* Собрание сочинений: в 6 т. / А. М. Ляпунов. – М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1954–1959. – Т. 2. – 1956.
2. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости / Б. Ф. Былов [и др.]. – М.: Наука, 1966.
3. *Изобов, Н. А.* О существовании линейной сингулярной системы с неограниченным по мере экспоненциальным характеристическим множеством / Н. А. Изобов, С. Г. Красовский // Дифференц. уравнения. – 1998. – Т. 34, № 8. – С. 1049–1055.
4. *Красовский, С. Г.* О спектральных характеристических сигма-множествах четной размерности и положительной меры / С. Г. Красовский // Дифференц. уравнения. – 2008. – Т. 44, № 6. – С. 856–857.
5. *Красовский, С. Г.* Критерий инвариантности характеристических показателей линейных систем с малым параметром при производной / С. Г. Красовский // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т. 39, № 10. – С. 1315–1324.
6. *Зубов, В. И.* Колебания и волны / В. И. Зубов. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1989.
7. *Хаусдорф, Ф.* Теория множеств / Ф. Хаусдорф. – М.; Л.: ОНТИ, 1937.
8. *Куратовский, К.* Топология: в 2 т. / К. Куратовский. – М.: Мир, 1966–1969. – Т. 1. – 1966.
9. *Карпук, М. В.* О старшем показателе Ляпунова линейной дифференциальной системы с параметром-множителем при производной как функции параметра / М. В. Карпук // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2014. – № 4. – С. 15–24.
10. *Барабанов, Е. А.* О множествах неправильности семейств линейных дифференциальных систем / Е. А. Барабанов // Дифференц. уравнения. – 2009. – Т. 45, № 8. – С. 1067–1084.
11. *Барабанов, Е. А.* Строение множеств устойчивости и асимптотической устойчивости семейств линейных дифференциальных систем с параметром-множителем при производной. I / Е. А. Барабанов // Дифференц. уравнения. – 2010. – Т. 46, № 5. – С. 611–625.
12. *Карпук, М. В.* Показатели Ляпунова семейств метризованных векторных расслоений как функции на базе расслоения / М. В. Карпук // Дифференц. уравнения. – 2014. – Т. 50, № 10. – С. 1332–1338.
13. *Далецкий, Ю. Л.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн. – М.: Мир, 1970.
14. *Барабанов, Е. А.* Множества правильности и устойчивости однопараметрических семейств линейных дифференциальных систем / Е. А. Барабанов, А. Ф. Касабуцкий // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2009. – № 4. – С. 67–75.
15. *Касабуцкий, А. Ф.* О множествах Лебега показателя экспоненциальной устойчивости линейных дифференциальных систем с параметром / А. Ф. Касабуцкий // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2010. – № 4. – С. 58–67.
16. *Барабанов, Е. А.* Структура множества нижних показателей Перрона линейной дифференциальной системы / Е. А. Барабанов // Дифференц. уравнения. – 1986. – Т. 22, № 11. – С. 1843–1853.
17. *Барабанов, Е. А.* Строение множества характеристических показателей Ляпунова экспоненциально устойчивых квазилинейных систем / Е. А. Барабанов, И. А. Волков // Дифференц. уравнения. – 1994. – Т. 30, № 1. – С. 3–19.

Поступила в редакцию 22.07.2015

УДК 517.926.4

А. С. ВОЙДЕЛЕВИЧ

**СУЩЕСТВОВАНИЕ БЕСКОНЕЧНЫХ ВСЮДУ РАЗРЫВНЫХ СПЕКТРОВ
ВЕРХНИХ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ЧАСТОТ НУЛЕЙ И ЗНАКОВ
ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

*Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
e-mail: voidelovich@gmail.com*

Построены примеры двух линейных дифференциальных уравнений с непрерывными на временной полуоси коэффициентами, спектры верхних характеристических частот нулей и знаков одного из которых состоят из множества рациональных чисел отрезка $[0, 1]$, а другого – из множества иррациональных чисел отрезка $[0, 1]$ и числа нуль.

Ключевые слова: однородное дифференциальное уравнение, верхняя характеристическая частота нулей, верхняя характеристическая частота знаков.

A. S. VAIDZELEVICH

**EXISTENCE OF THE INFINITE EVERYWHERE DISCONTINUOUS
UPPER SPECTRA OF CHARACTERISTIC FREQUENCIES OF ZEROS
AND SIGNS OF LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS**

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus, e-mail: voidelovich@gmail.com

Two examples of linear differential equations with continuous coefficients on the time semi-axis were constructed, such that spectra of upper characteristic frequencies of zeros and signs of the first equation are the set of rational numbers from the segment $[0, 1]$ and spectra of upper characteristic frequencies of zeros and signs of solutions of the second equation consist of the set of irrational numbers from the segment $[0, 1]$ and zero.

Keywords: homogeneous differential equation, upper characteristic frequency of zeros, upper characteristic frequency of signs.

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение n -го порядка ($n \in \mathbb{N}$)

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)\dot{y} + a_n(t)y = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \quad (1)$$

с непрерывными коэффициентами $a_i(\cdot): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$. Будем отождествлять уравнение (1) и его строку $a = a(\cdot) = (a_1(\cdot), \dots, a_n(\cdot))$ коэффициентов и вследствие этого обозначать уравнение (1) также через a . Множество всех ненулевых решений уравнения (1) обозначим, следуя [1], через $S_*(a)$. Говорят, что в точке $t > 0$ происходит смена знака функции $y(\cdot): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, если в любой окрестности этой точки функция $y(\cdot)$ принимает как положительные, так и отрицательные значения. Через $v^0(y(\cdot); \alpha, \beta)$ обозначим число нулей, а через $v^-(y(\cdot); \alpha, \beta)$ – число точек смен знака функции $y(\cdot)$ на полуинтервале $(\alpha, \beta]$; если число нулей (соответственно точек смен знака) функции $y(\cdot)$ на промежутке $(\alpha, \beta]$ бесконечно, то считаем $v^0(y(\cdot); \alpha, \beta) = +\infty$ (соответственно $v^-(y(\cdot); \alpha, \beta) = +\infty$).

Следующие два определения даны И. Н. Сергеевым [1–3].

О п р е д е л е н и е 1. Верхней характеристической частотой нулей и верхней характеристической частотой знаков решения $y(\cdot) \in S_*(a)$ уравнения (1) называются, соответственно, величины

$$\hat{v}^0(y) = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} v^0(y(\cdot); 0, t) \quad \text{и} \quad \hat{v}^-(y) = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} v^-(y(\cdot); 0, t). \quad (2)$$

О п р е д е л е н и е 2. Спектром верхней характеристической частоты \hat{v}^0 нулей (\hat{v}^- знаков) уравнения (1) называется множество, состоящее из верхних характеристических частот $\hat{v}^0(y)$ нулей ($\hat{v}^-(y)$ знаков) всех решений $y(\cdot) \in S^*(a)$.

Спектр верхней характеристической частоты \hat{v}^0 нулей (\hat{v}^- знаков) уравнения (1) обозначается через $\hat{v}^0(S^*(a))$ ($\hat{v}^-(S^*(a))$).

Известно [1, 2], что каждый из спектров верхних характеристических частот нулей и знаков произвольного уравнения (1) второго порядка состоит из одного числа, а первого порядка – из числа нуль. В работе [4] установлено, что существует периодическое дифференциальное уравнение (1) третьего порядка, спектры верхних характеристических частот нулей и знаков которого содержат невырожденный отрезок. Кроме этого, для произвольных несоизмеримых положительных действительных чисел $\omega_2 > \omega_1$ существует [5] автономное дифференциальное уравнение (1) четвертого порядка, спектры $\hat{v}^0(S^*(a))$ и $\hat{v}^-(S^*(a))$ которого совпадают с отрезком $[\omega_1, \omega_2]$.

Естественно возникает вопрос, насколько произвольными в общем случае могут быть множества, являющиеся спектрами верхних характеристических частот нулей и знаков уравнений (1). В частности, могут ли спектры верхних характеристических частот нулей и знаков некоторого уравнения (1) быть, в отличие от примеров уравнений указанных выше работ, ограниченными, бесконечными и всюду разрывными? В настоящей работе доказано существование двух линейных дифференциальных уравнений (1) третьего порядка, таких, что спектры верхних характеристических частот нулей и знаков одного из них совпадают с множеством $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$, а другого – с множеством $(\mathbb{I} \cap [0, 1]) \cup \{0\}$, где через \mathbb{Q} и \mathbb{I} обозначены множества, соответственно, рациональных и иррациональных чисел вещественной прямой. Ниже через \mathbb{Z}_+ обозначается множество неотрицательных целых чисел: $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \sqcup \{0\}$.

О п р е д е л е н и е 3. Непрерывную кусочно-линейную функцию $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ назовем регулярной ломаной, если ее производная на соседних участках своего постоянства имеет разные знаки. Вершины ломаной – точки несуществования ее производной.

Другими словами, функция $z(\cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ – регулярная ломаная, если существует неограниченная возрастающая последовательность $(\tau_k)_{k \in \mathbb{Z}_+}$ неотрицательных чисел, такая, что $\tau_0 = 0$ и на каждом интервале (τ_k, τ_{k+1}) , $k \in \mathbb{Z}_+$, функция $z(\cdot)$ имеет постоянную производную r_k , при этом для любого $k \in \mathbb{Z}_+$ справедливо неравенство $r_k \cdot r_{k+1} < 0$. Точки плоскости с координатами $(\tau_k, z(\tau_k))$, $k \in \mathbb{Z}_+$, – вершины регулярной ломаной $z(\cdot)$.

В дальнейшем важную роль играет функция $h(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, определяемая следующим образом:

$$h(t) = \begin{cases} t - 2k, & \text{если } t \in [2k, 2k + 1), \\ 2k + 2 - t, & \text{если } t \in [2k + 1, 2k + 2), \end{cases} \quad \text{где } k \in \mathbb{Z}.$$

Очевидно, что $h(\cdot)$ – непрерывная кусочно-линейная 2-периодическая функция, сужение которой на \mathbb{R}_+ является регулярной ломаной.

Для натурального $m \in \mathbb{N}$ и действительных чисел $\alpha < \gamma$ и $b < d$ определим на отрезке $[\alpha, \gamma]$ функцию $f(\cdot; \alpha, \gamma; b, d; m)$ равенством

$$f(t; \alpha, \gamma; b, d; m) = b + (d - b) \cdot h\left((2m - 1) \frac{t - \alpha}{\gamma - \alpha}\right), \quad t \in [\alpha, \gamma].$$

В дальнейшем при формулировании утверждений, которые справедливы как для величины $v^0(y(\cdot); \alpha, \beta)$, так и для $v^-(y(\cdot); \alpha, \beta)$, верхние индексы у этих величин опускаем и пишем просто $v(y(\cdot); \alpha, \beta)$. Такое же соглашение действует и для множеств $\hat{v}^0(S^*(a))$ и $\hat{v}^-(S^*(a))$.

Из определения функции $f(\cdot) = f(\cdot; \alpha, \gamma; b, d; m)$ вытекает, что для $t \in (\alpha, \gamma]$ и чисел $f_1 \in [b, d]$, $f_2 \in (b, d)$ и $f_3 \notin [b, d]$ справедливы соотношения

$$v(f(\cdot) - f_1; \alpha, t) \leq (2m - 1) \frac{t - \alpha}{\gamma - \alpha} + 1, \quad v(f(\cdot) - f_2; \alpha, \gamma) = 2m - 1, \quad v(f(\cdot) - f_3; \alpha, \gamma) = 0. \quad (3)$$

Зафиксируем какую-либо последовательность $(T_m)_{m \in \mathbb{N}}$ чисел, удовлетворяющих неравенствам

$$T_1 \geq 1, \quad T_{m+1} \geq (m+1)(T_1 + T_2 + \dots + T_m), \quad m \geq 1. \quad (4)$$

Предложение. Для элементов последовательности $(T_m)_{m \in \mathbb{N}}$ выполняются неравенства $T_m \geq m!$ при всех $m \in \mathbb{N}$.

Доказательство проведем методом математической индукции. База индукции ($m = 1$) следует из первого неравенства в (4). Пусть неравенство справедливо для $m = k$, т. е. $T_k \geq k!$. Докажем, что $T_{k+1} \geq (k+1)!$. Действительно, вследствие второго неравенства в (4) и предположения индукции получаем: $T_{k+1} \geq (k+1)(T_1 + T_2 + \dots + T_k) \geq (k+1)T_k \geq (k+1)!$. Предложение доказано.

По последовательности $(T_m)_{m \in \mathbb{N}}$ определим новую последовательность $(t_m)_{m \in \mathbb{Z}_+}$ равенствами:

$$t_0 = 0, \quad t_m = \sum_{i=1}^m T_i, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Лемма 1. 1) Если для функции $y(\cdot): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ существуют постоянные $q \in \mathbb{R}_+$, $d \in \mathbb{R}$ и $m \in \mathbb{N}$, такие, что для всех натуральных $n \geq m$, выполнено неравенство $v(y(\cdot); t_n, t) \leq q(t - t_n) + d$ при $t \in (t_n, t_{n+1}]$, то $\hat{v}(y) \leq q\pi$.

2) Если для функции $y(\cdot): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ существуют постоянные $q \in \mathbb{R}_+$, $d \in \mathbb{R}$ и последовательность натуральных чисел $(k_i)_{i \in \mathbb{N}} \uparrow +\infty$, такие, что $v(y(\cdot); t_{k_i}, t_{k_{i+1}}) \geq qT_{k_{i+1}} + d$ при всех $i \in \mathbb{N}$, то $\hat{v}(y) \geq q\pi$.

Доказательство. 1) Выберем произвольное $t \geq t_{m+1}$. Через k обозначим наибольшее натуральное число, такое, что $t_k \leq t < t_{k+1}$. Оценим сверху количество нулей (точек смен знака) функции $y(\cdot)$ на полуинтервале $(t_m, t]$:

$$\begin{aligned} v(y(\cdot); t_m, t) &\leq \sum_{i=m+1}^k v(y(\cdot); t_{i-1}, t_i) + v(y(\cdot); t_k, t) \leq \sum_{i=m+1}^k (qT_i + d) + q(t - t_k) + d = \\ &= q(t - t_m) + d(k - m + 1) \leq q(t - t_m) + d(k - m + 1) \frac{t - t_m}{T_k} \leq \left(q + \frac{d(k - m + 1)}{k!} \right) (t - t_m). \end{aligned} \quad (5)$$

Умножив это неравенство на π/t и устремляя затем t к $+\infty$, получаем в силу (2), что $\hat{v}(y(\cdot)) \leq q\pi$.

2) Оценим снизу количество нулей (точек смен знака) функции $y(\cdot)$ на полуинтервале $(0, t_{k_{i+1}}]$:

$$\begin{aligned} v(y(\cdot); 0, t_{k_{i+1}}) &\geq v(y(\cdot); t_{k_i}, t_{k_{i+1}}) \geq qT_{k_{i+1}} + d = \\ &= \frac{qT_{k_{i+1}}}{T_1 + \dots + T_{k_i} + T_{k_{i+1}}} t_{k_{i+1}} + d \geq q t_{k_{i+1}} \left(1 + \frac{1}{k_i + 1} \right)^{-1} + d. \end{aligned}$$

Поэтому вследствие (2) получаем $\hat{v}(y) \geq \overline{\lim}_{i \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t_{k_{i+1}}} v(y(\cdot); 0, t_{k_{i+1}}) \geq q\pi$. Лемма доказана.

Лемма 2. Для произвольного не более чем счетного множества S неотрицательных действительных чисел существует регулярная ломаная $z_S(\cdot)$, для которой справедливо соотношение $\{\hat{v}(z_S(\cdot) - c) : c \in \mathbb{R}\} = S \cup \{0\}$.

Доказательство. Занумеруем элементы множества $S \cup \{0\}$ натуральными числами: s_1, s_2, \dots . Зафиксируем какую-либо биекцию $\tau(\cdot) = (\tau_1(\cdot), \tau_2(\cdot)): \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Так как $\tau(\cdot)$ – биекция, то для произвольного $m \in \mathbb{N}$ существует бесконечно много чисел $l \in \mathbb{Z}_+$, таких, что $\tau_1(l) = m$. Определим функцию $z_S(\cdot)$ сначала на отрезках $[t_{2k}, t_{2k+1}]$ для всех $k \in \mathbb{Z}_+$. Для этого построим последовательность натуральных чисел $(n_k)_{k \in \mathbb{Z}_+}$, элементы которой зададим формулой

$$n_k = \max \left\{ 1, \left[(2\pi)^{-1} T_{2k+1} s_{\tau_1(k)} \right] \right\},$$

здесь $[\cdot]$ – целая часть числа. При $t \in [t_{2k}, t_{2k+1}]$ положим $z_S(t) = f(t; t_{2k}, t_{2k+1}; b_k, d_k; n_k)$, где величины $b_k < d_k$ принадлежат отрезку $[1 - (2\tau_1(k) - 1)^{-1}, 1 - (2\tau_1(k))^{-1}]$ и делят его в отношениях $1 : (2^{k+2} - 1)$ и $(2^{k+2} - 1) : 1$ соответственно.

Для всех $k \in \mathbb{Z}_+$ доопределим $z_S(\cdot)$ на интервалах (t_{2k+1}, t_{2k+2}) так, чтобы функция $z_S(\cdot)$ стала регулярной ломаной, а любая прямая, параллельная оси абсцисс, пересекала график функции $z_S(\cdot)$ на каждом интервале (t_{2k+1}, t_{2k+2}) , $k \in \mathbb{Z}_+$, не более двух раз.

Пусть $c \in \mathbb{R}$. Если существует такое $k \in \mathbb{Z}_+$, что $c \in (1 - (2\tau_1(k) - 1)^{-1}, 1 - (2\tau_1(k))^{-1})$, то из соотношений (3) и леммы 1 следует равенство $\hat{v}(z_S(\cdot) - c) = s_{\tau_1(k)}$. В противном случае, при всех натуральных $k \in \mathbb{Z}_+$ функция $z_S(\cdot) - c$ имеет не более двух нулей на отрезке $[t_k, t_{k+1}]$, а значит, $\hat{v}(z_S(\cdot) - c) = 0$. Так как $\tau_1(\mathbb{Z}_+) = \mathbb{N}$, то $\{\hat{v}(z_S(\cdot) - c) : c \in \mathbb{R}\} = S \cup \{0\}$. Лемма доказана.

С л е д с т в и е 1. Существует регулярная ломаная $z_1(\cdot)$, для которой справедливо соотношение $\{\hat{v}(z_1(\cdot) - c) : c \in \mathbb{R}\} = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Существование ломаной $z_1(\cdot)$ вытекает из леммы 2, если в качестве S взять множество рациональных чисел отрезка $[0, 1]$. Следствие доказано.

Л е м м а 3. Существует регулярная ломаная $z_{[0,1]}(\cdot)$, для которой справедливо соотношение $\{\hat{v}(z_{[0,1]}(\cdot) - c) : c \in \mathbb{R}\} = [0, 1]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для $k \in \mathbb{Z}_+$ и $l \in \{0, \dots, 2^k - 1\}$ через Δ_k^l обозначим отрезок $[2^{-k}l, 2^{-k}(l+1)]$. Занумеруем отрезки Δ_k^l натуральными числами: $\Delta(1), \Delta(2), \dots$. Пусть $\Delta(m) = [\xi_m, \eta_m]$, $m \in \mathbb{N}$.

Определим вначале функцию $z_{[0,1]}(\cdot)$ на отрезках $[t_{4k}, t_{4k+1}]$ для всех $k \in \mathbb{Z}_+$. Как и в доказательстве леммы 2, для этого построим последовательность натуральных чисел $(n_k)_{k \in \mathbb{Z}_+}$, элементы которой зададим формулой

$$n_k = \max \left\{ 1, \left[(4\pi)^{-1} T_{2k+1}(\xi_k + \eta_k) \right] \right\}.$$

При $t \in [t_{4k}, t_{4k+1}]$ положим $z_{[0,1]}(t) = f(t; t_{4k}, t_{4k+1}; b_k, d_k; n_k)$, где $b_k = \xi_k - (\eta_k - \xi_k)/4$ и $d_k = \eta_k + (\eta_k - \xi_k)/4$, если $\eta_k \neq 1$, и $d_k = \eta_k - (\eta_k - \xi_k)/4$, в противном случае.

Доопределим $z_{[0,1]}(\cdot)$ на интервалах (t_{4k+1}, t_{4k+4}) , $k \in \mathbb{Z}_+$, так, чтобы функция $z_{[0,1]}(\cdot)$ стала регулярной ломаной, а любая прямая, параллельная оси абсцисс, пересекала график функции $z_{[0,1]}(\cdot)$ на каждом интервале (t_{4k+1}, t_{4k+4}) , $k \in \mathbb{Z}_+$, не более двух раз.

Пусть $c \notin [0, 1]$. Тогда найдется такое натуральное $k_0 \in \mathbb{N}$, что при всех натуральных $k \geq k_0$ функция $z_{[0,1]}(\cdot) - c$ имеет не более двух нулей на отрезке $[t_k, t_{k+1}]$. Из леммы 1 следует, что $\hat{v}(z_{[0,1]}(\cdot) - c) = 0$.

Пусть теперь $c \in [0, 1]$. Тогда из соотношений (3) и леммы 1 следует, что $\hat{v}(z_{[0,1]}(\cdot) - c) = c$. Таким образом, $\{\hat{v}(z_{[0,1]}(\cdot) - c) : c \in \mathbb{R}\} = [0, 1]$. Лемма доказана.

С л е д с т в и е 2. Существует регулярная ломаная $z_2(\cdot)$, для которой справедливо соотношение $\{\hat{v}(z_2(\cdot) - c) : c \in \mathbb{R}\} = ([0, 1] \cap \mathbb{I}) \cup \{0\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $(q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ – занумерованные каким-либо образом рациональные числа полуинтервала $[0, 1]$. Для каждого q_k , $k \in \mathbb{N}$, выберем иррациональное число ζ_k таким, чтобы выполнялась цепочка неравенств

$$1 > \zeta_k > q_k > \zeta_k - k^{-1}. \quad (6)$$

Рассмотрим биекцию $\tau(\cdot) = (\tau_1(\cdot), \tau_2(\cdot)) : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Определим функцию $z_2(\cdot)$ на отрезках $[t_{4k}, t_{4k+1}]$ для всех $k \in \mathbb{Z}_+$, положив $z_2(t) = z_{[0,1]}(t)$ при $t \in [t_{4k}, t_{4k+1}]$. Рассмотрим последовательность натуральных чисел $(n_k)_{k \in \mathbb{Z}_+}$, элементы которой задаются равенством

$$n_k = \max \left\{ 1, \left[(2\pi)^{-1} T_{4k+3} \cdot \zeta_{\tau_1(k)} \right] \right\}.$$

При $t \in [t_{4k+2}, t_{4k+3}]$ положим $z_2(t) = f(t; t_{4k+2}, t_{4k+3}; b_k, d_k; n_k)$, где $b_k = q_{\tau_1(k)} - 2^{-k}$ и $d_k = \min\{(1 + q_{\tau_1(k)})/2, q_{\tau_1(k)} + 2^{-k}\}$. Наконец, для всех $k \in \mathbb{Z}_+$ доопределим $z_2(\cdot)$ на интервалах (t_{4k+1}, t_{4k+2}) и (t_{4k+3}, t_{4k+4}) , аналогично тому, как это сделано в доказательстве леммы 3.

Если $c \notin [0, 1]$, то $\hat{v}(z_2(\cdot) - c) = \hat{v}(z_{[0,1]}(\cdot) - c) = 0$. Если же $c \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$, то существует такой номер $k \in \mathbb{N}$, что $c = q_k$. Тогда из соотношений (3), леммы 1, определения функции $z_{[0,1]}(\cdot)$ и выбора (6) числа ζ_k следует, что $\hat{v}(z_2(\cdot) - c) = \hat{v}(z_2(\cdot) - q_k) = \zeta_k \in [0, 1] \cap \mathbb{I}$. Наконец, если $c \in [0, 1] \cap \mathbb{I}$, то $\hat{v}(z_2(\cdot) - c) = c$. Таким образом, регулярная ломаная $z_2(\cdot)$, удовлетворяющая равенству $\{\hat{v}(z_2(\cdot) - c) : c \in \mathbb{R}\} = ([0, 1] \cap \mathbb{I}) \cup \{0\}$, построена. Следствие доказано.

С л е д с т в и е 3. *Существуют ограниченные на \mathbb{R}_+ функции $x_1(\cdot)$ и $x_2(\cdot) \in C^3(\mathbb{R}_+)$, удовлетворяющие соотношениям*

$$\{\hat{v}(x_i(\cdot) - c) : c \in \mathbb{R}\} = \{\hat{v}(z_i(\cdot) - c) : c \in \mathbb{R}\}, \quad i = 1, 2,$$

где $z_1(\cdot)$ и $z_2(\cdot)$ – регулярные ломаные, построенные в доказательствах следствий 1 и 2 соответственно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\varepsilon, h_1 \neq h_2$ – произвольные действительные числа, отличные от нуля. Рассмотрим многочлен $p(t; h_1, h_2, \varepsilon) = \varepsilon q(t/\varepsilon; h_1, h_2)$, где

$$q(t; h_1, h_2) = h_1 t - \frac{5}{2}(h_1 - h_2)t^4 + 3(h_1 - h_2)t^5 - (h_1 - h_2)t^6, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Нетрудно убедиться, что многочлен $p(\cdot; h_1, h_2, \varepsilon)$ удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} p(0; h_1, h_2, \varepsilon) &= 0, \quad p(\varepsilon; h_1, h_2, \varepsilon) = \varepsilon(h_1 + h_2)/2, \quad \dot{p}(0; h_1, h_2, \varepsilon) = h_1, \\ \dot{p}(\varepsilon; h_1, h_2, \varepsilon) &= h_2 \quad \text{и} \quad \ddot{p}(t; h_1, h_2, \varepsilon) = -30\varepsilon^{-3}(h_1 - h_2)t^2(1 - t/\varepsilon)^2. \end{aligned}$$

Кроме того, точка пересечения касательных к графику функции $p(t; h_1, h_2, \varepsilon)$, проведенных в точках с абсциссами $t = 0$ и $t = \varepsilon$, имеет, как легко убедиться, координаты $(\varepsilon/2, h_1 \varepsilon/2)$.

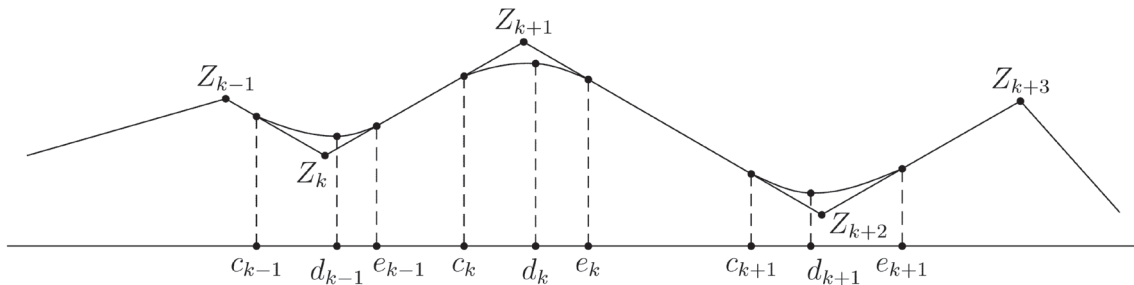
Рассмотрим произвольную регулярную ломаную $z(\cdot)$. Через $Z_k = (\tau_k, z(\tau_k))$, $k \in \mathbb{Z}_+$, обозначим вершины ломаной $z(\cdot)$ (рисунок), $\tau_k < \tau_{k+1}$. Пусть r_k – значение производной функции $z(\cdot)$ на интервале (τ_k, τ_{k+1}) , $k \in \mathbb{Z}_+$. Для каждого $k \in \mathbb{Z}_+$ через ε_k обозначим произвольное положительное число, удовлетворяющее неравенству

$$\varepsilon_k < 3^{-1} \min\{\tau_{k+2} - \tau_{k+1}, \tau_{k+1} - \tau_k\}.$$

Пусть $x(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}_+$ – функция, такая, что для всех $k \in \mathbb{Z}_+$ справедливо равенство

$$x(t) = z(\tau_{k+1} - \varepsilon_k) + p(t - \tau_{k+1} + \varepsilon_k; r_k, r_{k+1}, 2\varepsilon_k),$$

при $t \in [\tau_{k+1} - \varepsilon_k, \tau_{k+1} + \varepsilon_k]$. В силу свойств многочлена $p(\cdot; r_k, r_{k+1}, 2\varepsilon_k)$ справедливы равенства: $x(\tau_{k+1} - \varepsilon_k) = z(\tau_{k+1} - \varepsilon_k)$ и $x(\tau_{k+1} + \varepsilon_k) = z(\tau_{k+1} + \varepsilon_k)$. При всех остальных действительных $t \geq 0$ величина $x(t)$ равна $z(t)$.



Регулярная ломаная

Из определения функции $x(\cdot)$ вытекает, что $x(\cdot)$ – заданная и ограниченная на \mathbb{R}_+ , трижды непрерывно дифференцируемая функция (в нуле рассматриваем ее правостороннюю производную). Из построения регулярных ломаных $z_1(\cdot)$ и $z_2(\cdot)$ следует, что при достаточно малых $\varepsilon_k > 0$, $k \in \mathbb{Z}_+$, для построенных по ним функций $x_1(\cdot)$ и $x_2(\cdot)$, соответственно справедливы соотношения $\{\hat{v}(x_i(\cdot) - c) : c \in \mathbb{R}\} = \{\hat{v}(z_i(\cdot) - c) : c \in \mathbb{R}\}$, $i = 1, 2$. Следствие доказано.

Т е о р е м а. 1) *Существует линейное дифференциальное уравнение (1) третьего порядка, такое, что его спектры верхних характеристических частот нулей и знаков совпадают с множеством $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$.*

2) *Существует линейное дифференциальное уравнение (1) третьего порядка, такое, что его спектры верхних характеристических частот нулей и знаков совпадают с множеством $(\mathbb{I} \cap [0, 1]) \cup \{0\}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $v = v^0, v^-$. Пусть $z(\cdot)$, равная $z_1(\cdot)$ или $z_2(\cdot)$, – регулярная ломаная с вершинами $Z_k = (\tau_k, z(\tau_k))$, где $k \in \mathbb{Z}_+$. Пусть $x(\cdot) \in C^3(\mathbb{R}_+)$ – функция, построенная по ломаной $z(\cdot)$ как в доказательстве следствия 3. Докажем, что существует функция $q(\cdot) \in C^1(\mathbb{R}_+)$, такая, что система функций $\{1, x(\cdot), y(\cdot)\}$, где

$$y(t) = \int_0^t \int_0^\tau q(\xi) d\xi d\tau, \quad t \geq 0,$$

является фундаментальной системой решений некоторого уравнения (1) третьего порядка и $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = +\infty$. Для того чтобы система функций $\{1, x(\cdot), y(\cdot)\}$ представляла собой фундаментальную систему решений некоторого уравнения (1) третьего порядка, необходимо и достаточно (см., напр., [6, с. 26]), чтобы определитель Вронского

$$\delta(t) = W(1, x(\cdot), y(\cdot)) = \begin{vmatrix} \dot{x}(t) & \int_0^t q(\tau) d\tau \\ \ddot{x}(t) & q(t) \end{vmatrix}$$

этой системы функций был отличен от нуля при всех $t \geq 0$.

Пусть числа ε_k , $k \in \mathbb{Z}_+$, те же, что и в доказательстве следствия 3, а $c_k = \tau_{k+1} - \varepsilon_k$, $e_k = \tau_{k+1} + \varepsilon_k$. Пусть d_k – абсцисса локального экстремума функции $x(\cdot)$ на интервале (c_k, e_k) , $k \in \mathbb{N}$; и без нарушения общности считаем, что $e_{-1} = \tau_0 = 0$. Из способа построения функции $x(\cdot)$ следует, что $\dot{x}(d_k) = 0$ и $\ddot{x}(d_k) \neq 0$. Без ограничения общности считаем, что $\dot{x}(e_{-1}) > 0$. Положим $q(e_{-1}) > 0$. Тогда при $t = 0$ справедливы равенства

$$\delta(0) = \delta(e_{-1}) = \begin{vmatrix} \dot{x}(e_{-1}) & 0 \\ \ddot{x}(e_{-1}) & q(e_{-1}) \end{vmatrix} = \dot{x}(e_{-1}) \cdot q(e_{-1}) > 0.$$

Предположим теперь, что для некоторого $k \in \mathbb{Z}_+$ функция $q(t)$ определена при всех моментах времени $t \leq e_{k-1}$ таким образом, что $\delta(t) > 0$ при $t \leq e_{k-1}$ и $\dot{x}(e_{k-1}) > 0$, а также выполнены соотношения

$$q(e_{k-1}) > 0 \quad \text{и} \quad \int_0^{e_{k-1}} q(\tau) d\tau = 0.$$

За 4 шага определим требуемым образом непрерывно дифференцируемую функцию $q(\cdot)$ на полуинтервале $(e_{k-1}, e_{k+1}]$, которая гладко состыковывается в точке e_{k-1} с уже определенной при $t \in [0, e_{k-1}]$ функцией $q(t)$.

Шаг 1. Возьмем $q(t)$ положительной при $t \in (e_{k-1}, d_k)$ и равной нулю при $t = d_k$. Так как $\dot{x}(t) = r_k > 0$ и $\ddot{x}(t) = 0$ при $t \in (e_{k-1}, c_k]$, а $\dot{x}(t) > 0$ и $\ddot{x}(t) < 0$ при $t \in (c_k, d_k)$, то $\delta(t) > 0$ при $t \in (e_{k-1}, d_k)$. Так как $\int_0^{d_k} q(\tau) d\tau > 0$, $\dot{x}(d_k) = 0$ и $\ddot{x}(d_k) < 0$, то $\delta(d_k) > 0$.

Шаг 2. При $t \in (d_k, e_k]$ возьмем функцию $q(t)$ отрицательной и такой, чтобы $\int_0^t q(\tau) d\tau > 0$ при $t \in (d_k, e_k)$ и $\int_0^{e_k} q(\tau) d\tau = 0$. Из определения функции $x(\cdot)$ следует, что $\dot{x}(t) < 0$ и $\ddot{x}(t) < 0$, $t \in (d_k, e_k)$, а также $\dot{x}(e_k) < 0$ и $\ddot{x}(e_k) = 0$, поэтому $\delta(t) > 0$ при $t \in (d_k, e_k]$.

Шаг 3. При $t \in (e_k, d_{k+1}]$ возьмем $q(t)$ отрицательной и равной нулю при $t = d_{k+1}$, тогда $\int_0^t q(\tau) d\tau < 0$ для $t \in (e_k, d_{k+1}]$. Так как $\dot{x}(t) < 0$ и $\ddot{x}(t) \geq 0$ при $t \in (e_k, d_{k+1})$, а $\dot{x}(d_{k+1}) = 0$ и $\ddot{x}(d_{k+1}) > 0$, то $\delta(t) > 0$ при $t \in (e_k, d_{k+1}]$.

Шаг 4. При $t \in (d_{k+1}, e_{k+1}]$ положим $q(t) > 0$ и такой, чтобы выполнялись соотношения $\int_0^t q(\tau) d\tau < 0$ при $t \in (d_{k+1}, e_{k+1})$ и $\int_0^{e_{k+1}} q(\tau) d\tau = 0$. Так как $\dot{x}(t) > 0$ и $\ddot{x}(t) \geq 0$ при $t \in (d_{k+1}, e_{k+1}]$, то $\delta(t) > 0$ при $t \in (d_{k+1}, e_{k+1}]$.

Кроме того, очевидно, что $q(\cdot)$, определяемую в шагах 1–4, можно выбрать еще и такой, чтобы

$$1 - \int_{e_k}^{e_{k+1}} \int_0^\tau q(\xi) d\xi d\tau \leq \int_{e_{k-1}}^{e_k} \int_0^\tau q(\xi) d\xi d\tau. \quad (7)$$

Используя метод математической индукции, определим функцию $q(\cdot)$ на всей положительной полуоси \mathbb{R}_+ . Вследствие (7) выполняется равенство $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = +\infty$.

Таким образом, при $z(\cdot) = z_i(\cdot)$ построена система функций $\{1, x_i(\cdot), y_i(\cdot)\}$, $i = 1, 2$. Согласно доказанному, каждая из систем функций $\{1, x_i(\cdot), y_i(\cdot)\}$, при $i = 1, 2$, является фундаментальной системой решений некоторого уравнения (1) третьего порядка. Покажем, что данные уравнения искомые. Пусть $s_i(\cdot)$ – произвольное ненулевое решение i -го уравнения, при $i = 1, 2$. Тогда $s_i(\cdot) = c_{1,i} + c_{2,i} x_i(\cdot) + c_{3,i} y_i(\cdot)$, для некоторых постоянных $c_{1,i}$, $c_{2,i}$ и $c_{3,i}$. Если $c_{3,i} \neq 0$, то $\hat{v}(s_i(\cdot)) = 0$, в противном случае $\hat{v}(s_i(\cdot)) \in \{\hat{v}(x_i(\cdot) - c) : c \in \mathbb{R}\}$, при этом, как доказано выше, каждый элемент множества $\{\hat{v}(x_i(\cdot) - c) : c \in \mathbb{R}\}$ достигается. Теорема доказана.

Автор выражает благодарность Е. А. Барабанову за постановку задачи и внимание, проявленное к работе.

Список использованной литературы

1. Сергеев, И. Н. Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения / И. Н. Сергеев // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. – М., 2006. – Вып. 25. – С. 249–294.
2. Сергеев, И. Н. Определение характеристических частот линейного уравнения / И. Н. Сергеев // Дифференц. уравнения. – 2004. – Т. 40, № 11. – С. 1573.
3. Сергеев, И. Н. Свойства характеристических частот линейных уравнений произвольного порядка / И. Н. Сергеев // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. – М., 2013. – Вып. 29. – С. 414–442.
4. Смоленцев, М. В. Пример периодического дифференциального уравнения третьего порядка, спектр частот которого содержит отрезок / М. В. Смоленцев // Дифференц. уравнения. – 2014. – Т. 50, № 10. – С. 1413–1417.
5. Горицкий, А. Ю. Характеристические частоты нулей суммы двух гармонических колебаний / А. Ю. Горицкий, Т. Н. Фисенко // Дифференц. уравнения. – 2012. – Т. 48, № 4. – С. 479–485.
6. Богданов, Ю. С. Дифференциальные уравнения / Ю. С. Богданов. – Минск: Выш. шк., 1983.

Поступила в редакцию 21.05.2015

УДК 517.925

A. T. SAZONOVA

**АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ
О ДВИЖЕНИИ ЧЕТЫРЕХ ТЕЛ В ПЛОСКОСТИ**

*Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Беларусь,
e-mail: sazonova@mf.grsu.by*

Целью исследования данной работы является установление аналитических свойств решения системы нелинейных дифференциальных уравнений, описывающей плоское движение четырех тел. Найдено 50 наборов значений констант межчастичного взаимодействия в задаче четырех тел в плоскости, при которых компоненты общего решения являются мероморфными функциями, а также 15 наборов, при которых соответствующие им системы имеют решения с подвижными критическими особенностями. Полученные результаты могут быть применены в аналитической теории дифференциальных уравнений, а также для решения ряда задач космической динамики.

Ключевые слова: движение четырех тел, константа взаимодействия, подвижные критические особенности, мероморфное решение.

A. T. SAZONOVA

**ANALYTICAL PROPERTIES OF SOLUTIONS OF THE PROBLEM OF THE MOTION
OF FOUR BODIES IN THE PLANE**

*Yanka Kupala State University of Grodno, Grodno, Belarus,
e-mail: sazonova@mf.grsu.by*

The purpose of the study is to establish the analytical properties of solutions of nonlinear differential equations describing the planar motion of four bodies. 50 sets of constant values of interparticle interactions in the problem of four bodies in the plane are found, at which the components of the general solution are the meromorphic functions, as well as 15 sets, at which the corresponding systems have no Painlevé property. The results obtained can be applied in the analytic theory of differential equations, as well as for solving the problems of cosmic dynamics.

Keywords: motion of four bodies, the constant interaction, Painleve property, meromorphic solution.

Введение. Работы [1, 2, 3] посвящены исследованиям проблемы движения многих тел в плоскости, которая характеризуется следующими уравнениями движения:

$$\ddot{\vec{r}}_n = \omega \vec{k} \times \dot{\vec{r}}_n + 2 \sum_{\substack{m=1; \\ m \neq n}}^N (\vec{r}_{nm})^{-2} (\alpha_{nm} + \alpha'_{nm} \vec{k} \times) \left[\dot{\vec{r}}_n (\dot{\vec{r}}_m \cdot \vec{r}_{nm}) + \dot{\vec{r}}_m (\dot{\vec{r}}_n \cdot \vec{r}_{nm}) - \vec{r}_{nm} (\dot{\vec{r}}_n \cdot \dot{\vec{r}}_m) \right],$$

где $m = \overline{1, N}$, $N > 0$, $N \in \mathbb{Z}$, векторы $\vec{r}_n \equiv \vec{r}_n(t)$ определяют позиции точек – частиц, движущихся в плоскости, которая для удобства записи представлена погруженной в трехмерное пространство таким образом, чтобы $\vec{r}_n \equiv (x_n, y_n, 0)$.

Прежде всего, для удобства рассмотрения математической модели движения многих тел, физическая плоскость отождествляется с комплексной плоскостью. Тогда уравнения движения в плоскости становятся уравнениями движения N точек в комплексной z -плоскости:

$$\ddot{z}_n = i\omega \dot{z}_n + 2 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N a_{nm} \frac{\dot{z}_n \dot{z}_m}{z_n - z_m}, \quad n = 1, \dots, N \quad (1)$$

с $a_{nm} = \alpha_{nm} + i\alpha'_{nm}$. Независимая переменная t вещественная и интерпретируется как «физическое время».

© Сафонова А. Т., 2015

Введя замену независимой переменной [1–5] $z_n(t) = \xi_n(\tau)$, $\tau = \frac{e^{i\omega t} - 1}{i\omega}$, систему (1) перепишем в виде системы, состоящей из N обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\xi_n'' = 2 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N a_{nm} \frac{\xi_n' \xi_m'}{\xi_n - \xi_m}, \quad n = 1, \dots, N. \quad (2)$$

Зависимые переменные $\xi_n = \xi_n(\tau)$ являются комплексными. Константы межчастичного взаимодействия подчинены требованиям симметрии $a_{nm} = a_{mn}$.

Основная часть. В данной работе рассматривается задача о движении четырех тел в плоскости. Из исходной системы (2) видно, что центр масс $Z \equiv Z(\tau)$,

$$Z = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4}{4},$$

движется равномерно:

$$\begin{aligned} Z'' &= 0, \\ Z(\tau) &= Z(0) + Z'(0)\tau = Z(0) + V\tau. \end{aligned}$$

Положим

$$\begin{aligned} a_{12} = a_{21} = a, \quad a_{13} = a_{31} = c, \quad a_{14} = a_{41} = d, \\ a_{23} = a_{32} = b, \quad a_{24} = a_{42} = e, \quad a_{34} = a_{43} = f. \end{aligned}$$

Введем координаты относительно центра масс $u_n = \xi_n - Z$, $n = 1, 2, 3, 4$, при этом выполняются условия

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0.$$

Для удобства обозначений положим

$$u_1 = x, \quad u_2 = y, \quad u_3 = z, \quad u_4 = -x - y - z.$$

С помощью несложных алгебраических преобразований можно теперь записать уравнения движения в терминах переменных x, y, z :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2a \frac{(\dot{x}+V)(\dot{y}+V)}{x-y} + 2c \frac{(\dot{x}+V)(\dot{z}+V)}{x-z} - 2d \frac{(\dot{x}+V)(\dot{x}+\dot{y}+\dot{z}-V)}{2x+y+z}, \\ \ddot{y} = -2a \frac{(\dot{x}+V)(\dot{y}+V)}{x-y} + 2b \frac{(\dot{y}+V)(\dot{z}+V)}{y-z} - 2e \frac{(\dot{y}+V)(\dot{x}+\dot{y}+\dot{z}-V)}{x+2y+z}, \\ \ddot{z} = -2c \frac{(\dot{x}+V)(\dot{z}+V)}{x-z} - 2b \frac{(\dot{y}+V)(\dot{z}+V)}{y-z} - 2f \frac{(\dot{z}+V)(\dot{x}+\dot{y}+\dot{z}-V)}{x+y+2z}, \end{cases} \quad (3)$$

где $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t = \tau - \tau_0$, $V = Z'(0)$.

Целью исследования данной работы является установление наборов значений констант взаимодействия, при которых все решения соответствующих им систем являются мероморфными функциями.

Путем замены $x = x$, $y = y$, $z = z$, $t = \varepsilon t$, ε – параметр, находим упрощенную для (3) систему вида

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2a \frac{\dot{x}\dot{y}}{x-y} + 2c \frac{\dot{x}\dot{z}}{x-z} - 2d \frac{\dot{x}(\dot{x}+\dot{y}+\dot{z})}{2x+y+z}, \\ \ddot{y} = -2a \frac{\dot{x}\dot{y}}{x-y} + 2b \frac{\dot{y}\dot{z}}{y-z} - 2e \frac{\dot{y}(\dot{x}+\dot{y}+\dot{z})}{x+2y+z}, \\ \ddot{z} = -2c \frac{\dot{x}\dot{z}}{x-z} - 2b \frac{\dot{y}\dot{z}}{y-z} - 2f \frac{\dot{z}(\dot{x}+\dot{y}+\dot{z})}{x+y+2z}. \end{cases} \quad (4)$$

Заметим, что если система (4) имеет решения с подвижными критическими особенностями, то и исследуемая система (3) также будет иметь решения с подвижными критическими особенностями.

Согласно [2], справедливо утверждение: «Для наличия у системы (3) мероморфного решения необходимо, чтобы все показатели $\gamma_n, \beta_n, \Gamma, n = \overline{1,6}$, определяемые через константы a, b, c, d, e, f с помощью соотношений

$$\Gamma = \frac{2}{2+a+b+c+d+e+f},$$

$$\beta_n = -2a_n,$$

$$\gamma_n = \frac{1}{1+a_n},$$

$$a_n \in \{a, b, c, d, e, f\},$$

принимали целочисленные или бесконечные значения».

Нетрудно выделить все значения констант взаимодействия, принадлежащие к определенной выше категории (таблица) [6].

Наборы значений констант взаимодействия a, b, c, d, e, f

Значения констант взаимодействия							Значения констант взаимодействия						
№	a	b	c	d	e	f	№	a	b	c	d	e	f
1	2	-2	0	0	0	0	72	-1	0	0	0	0	-2
2	-2	-1	-1	0	0	0	73	-1	0	0	0	0	-1,5
3	-2	-1	0	0	0	0	74	-1	0	0	0	0	-1
4	-2	0	-2	0	0	0	75	-1	0	0	0	0	0
5	-2	0	-1	0	0	0	76	-0,5	-1,5	-0,5	-0,5	0	0
6	-2	0	0	0	0	-2	77	-0,5	-1	-0,5	-0,5	0	0
7	-2	0	0	0	0	-1	78	-0,5	-1	0	-0,5	-1	-1
8	-2	0	0	0	0	0	79	-0,5	-0,5	-1,5	0	-0,5	0
9	-1,5	-1,5	-1	0	0	0	80	-0,5	-0,5	-1	0	-0,5	0
10	-1,5	-1,5	0	0	0	0	81	-0,5	-0,5	-0,5	-0,5	-0,5	-0,5
11	-1,5	-1	-1,5	0	0	0	82	-0,5	-0,5	-0,5	-0,5	-0,5	0
12	-1,5	-1	0	0	0	0	83	-0,5	-0,5	-0,5	-0,5	0	-0,5
13	-1,5	-0,5	-0,5	0	0	-0,5	84	-0,5	-0,5	-0,5	0	-0,5	-0,5
14	-1,5	0	-1,5	0	0	0	85	-0,5	-0,5	0	-0,5	-1	-1,5
15	-1,5	0	-1	0	0	0	86	-0,5	-0,5	0	-0,5	-0,5	-2
16	-1,5	0	0	0	0	-1,5	87	-0,5	-0,5	0	-0,5	-0,5	-1
17	-1,5	0	0	0	0	-1	88	-0,5	-0,5	0	-0,5	-0,5	-0,5
18	-1,5	0	0	0	0	0	89	-0,5	-0,5	0	-0,5	0	-0,5
19	-1	-2	-1	0	0	0	90	-0,5	-0,5	0	0	-0,5	-1
20	-1	-2	0	0	0	0	91	-0,5	-0,5	0	0	-0,5	0
21	-1	-1,5	-1,5	0	0	0	92	-0,5	0	-0,5	-0,5	-2	-0,5
22	-1	-1,5	0	0	0	0	93	-0,5	0	-0,5	-0,5	-1	0
23	-1	-1	-2	0	0	0	94	-0,5	0	-0,5	-0,5	-0,5	-2
24	-1	-1	-1	0	0	0	95	-0,5	0	-0,5	-0,5	-0,5	-1
25	-1	-1	0	0	0	0	96	-0,5	0	-0,5	-0,5	-0,5	-0,5
26	-1	-0,5	-0,5	0	0	-0,5	97	-0,5	0	-0,5	-0,5	0	-1
27	-1	0	-2	0	0	0	98	-0,5	0	-0,5	-0,5	0	0
28	-1	0	-1,5	0	0	0	99	-0,5	0	-0,5	0	-0,5	-0,5
29	-1	0	-1	0	0	0	100	-0,5	0	0	-1	-1,5	0

Значения констант взаимодействия							Значения констант взаимодействия						
№	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	№	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>
30	-1	0	0	-1	-1	-1	101	-0,5	0	0	-0,5	-1	-2
31	-0,5	0	0	-0,5	-1	-1	102	0	0	-1,5	0	-1	0
32	-0,5	0	0	-0,5	-0,5	-0,5	103	0	0	-1,5	0	0	0
33	-0,5	0	0	-0,5	-0,5	-1	104	0	0	-1	0	-2	0
34	-0,5	0	0	-0,5	-0,5	-0,5	105	0	0	-1	0	-1,5	0
35	-0,5	0	0	-0,5	0	-2	106	0	0	-1	0	-1	0
36	-0,5	0	0	-0,5	0	-1,5	107	0	0	-1	0	0	0
37	-0,5	0	0	-0,5	0	-1	108	0	0	-0,5	-0,5	-2	0
38	-0,5	0	0	0	-0,5	-2	109	0	0	-0,5	-0,5	-1,5	0
39	-0,5	0	0	0	-0,5	-1,5	110	0	0	-0,5	-0,5	-1	-2
40	-0,5	0	0	0	-0,5	-1	111	0	0	-0,5	-0,5	-1	0
41	0	-2	-2	0	0	0	112	0	0	-0,5	-0,5	-0,5	-0,5
42	0	-2	0	-2	0	0	113	0	0	-0,5	0	-2	-0,5
43	0	-2	0	-1	0	0	114	0	0	0	-2	-0,5	-0,5
44	0	-2	0	0	0	0	115	0	0	0	-2	0	0
45	0	-1,5	-1,5	0	0	0	116	0	0	0	-1,5	-1,5	0
46	0	-1,5	-1	0	0	0	117	0	0	0	-1,5	0	-1,5
47	0	-1,5	0	-1,5	0	0	118	0	0	0	-1,5	0	0
48	0	-1,5	0	-1	0	0	119	0	0	0	-1	-2	0
49	0	-1,5	0	0	0	0	120	0	0	0	-1	-1	-2
50	0	-1	-2	0	0	0	121	0	0	0	-1	-1	-1
51	0	-1	-1,5	0	0	0	122	0	0	0	-1	-1	0
52	0	-1	-1	0	0	0	123	0	0	0	-1	0	-2
53	0	-1	0	-2	0	0	124	0	0	0	-1	0	-1
54	0	-1	0	-1,5	0	0	125	0	0	0	-0,5	-2	-0,5
55	0	-1	0	-1	-1	-1	126	0	0	0	-0,5	-1	-1
56	0	-1	0	-1	0	0	127	0	0	0	-0,5	-0,5	-2
57	0	-1	0	0	0	0	128	0	0	0	-0,5	-0,5	-1,5
58	0	-0,5	-0,5	0	0	-0,5	129	0	0	0	-0,5	-0,5	-1
59	0	-0,5	0	-2	-0,5	0	130	0	0	0	-0,5	-0,5	-0,5
60	0	-0,5	0	-2	0	-0,5	131	0	0	0	0	-2	0
61	0	-0,5	0	-0,5	-0,5	-1	132	0	0	0	0	-1,5	-1,5
62	0	-0,5	0	-0,5	-0,5	-0,5	133	0	0	0	0	-1,5	0
63	0	-0,5	0	0	-1	-1,5	134	0	0	0	0	-1	-2
64	0	0	-2	0	-2	0	135	0	0	0	0	-1	-1
65	0	0	-2	0	-1	0	136	0	0	0	0	-1	0
66	0	0	-2	0	0	0	137	0	0	0	0	0	-2
67	0	0	-1,5	0	-1,5	0	138	0	0	0	0	0	-1,5
68	0	0	0	0	0	-1	139	0	-0,5	-0,5	0	0	0
69	0	0	0	0	0	0	140	-0,5	0	0	-0,5	0	0
70	-0,5	-0,5	0	0	0	0	141	0	-0,5	0	-0,5	0	0
71	-0,5	0	-0,5	0	0	0	142	-0,5	0	0	0	-0,5	0

З а м е ч а н и е 1. Заметим, что случаи с номерами 70, 71, 139–142 ранее были рассмотрены в работе [6]. Данные наборы значений констант соответствуют системам, все решения которых являются мероморфными функциями.

Рассмотрим теперь случай 69, когда $a = b = c = d = e = f = 0$. Тогда система (3) примет вид

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0, \\ \ddot{y} = 0, \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

и будет иметь общее решение вида

$$x = A_1 t + A_0, \quad y = B_1 t + B_0, \quad z = C_1 t + C_0,$$

где $C_0, C_1, B_0, B_1, A_1, A_0$ – произвольные постоянные.

Пусть теперь выполняется условие $a \neq 0, b = c = d = e = f = 0$. Система (3) будет иметь вид

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2a \frac{(\dot{x} + V)(\dot{y} + V)}{x - y}, \\ \ddot{y} = -2a \frac{(\dot{x} + V)(\dot{y} + V)}{x - y}, \\ \ddot{z} = 0, \end{cases} \quad (5)$$

где, что легко заметить, $\ddot{x} + \ddot{y} = 0$, значит, $x + y = C_1 t + C_0$. Выражая y из последнего соотношения и подставляя в первое уравнение системы (5) находим

$$\ddot{x} = 2a \frac{(\dot{x} + V)(C_1 + V - \dot{x})}{2x - C_1 t - C_0}.$$

Заменой $u = 2x - C_1 t - C_0$ последнее уравнение приводим к виду $u'' = -a \frac{u'^2}{u} + a \frac{(C_1 + 2V)^2}{u}$. При $u = w^{-1}$ последнее уравнение принимает вид

$$w'' = (2 + a) \frac{w'^2}{w} + (2V + C_1) a w^3. \quad (6)$$

В соответствии с результатами, полученными в работе [7], заключаем, что при $a = -2, a = -1,5, a = -1$ все решения уравнения (6) являются мероморфными функциями. Аналогичными рассуждениями, выражая x из уравнения $x + y = C_1 t + C_0$ и подставляя во второе уравнение системы (5), приходим к уравнению вида (6), все решения которого являются мероморфными функциями. Для компоненты z системы (5) будем иметь общее решение, записанное в виде линейной функции $z = A_1 t + A_0$; A_1, A_0 – произвольные постоянные. Таким образом, имеем, что все компоненты общего решения системы (5) являются мероморфными функциями.

Следовательно, в случаях 8, 18, 75 из таблицы все решения систем, соответствующих данным наборам, являются мероморфными функциями.

При $b \neq 0, a = c = d = e = f = 0$ получим систему, которую легко привести к виду (5) путем замены $y = x, z = y, x = z$. Таким образом, заключаем, что в случаях 44, 49 и 57 будем иметь системы, все решения которых являются мероморфными функциями. Аналогично для наборов 66, 103, 107, когда $c \neq 0, a = b = d = e = f = 0$, делаем вывод, что все решения полученных систем являются мероморфными функциями.

Пусть теперь $d \neq 0, a = b = c = e = f = 0$. Аналогичными рассуждениями приходим к уравнению вида (6). Заметим также, что системы, соответствующие наборам, когда $e \neq 0, a = b = c = d = f = 0$ и $f \neq 0, a = b = c = d = e = 0$ также легко привести к уравнению вида (6). Таким образом, все решения систем, соответствующих наборам 68, 115, 118, 131, 133, 136, 137, 138, являются мероморфными функциями.

Рассмотрим случаи из таблицы, когда $a \neq 0, f \neq 0, b = c = d = e = 0$. Тогда система (3) примет вид

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2a \frac{(\dot{x}+V)(\dot{y}+V)}{x-y}, \\ \ddot{y} = -2a \frac{(\dot{x}+V)(\dot{y}+V)}{x-y}, \\ \ddot{z} = -2f \frac{(\dot{z}+V)(\dot{x}+\dot{y}+\dot{z}-V)}{x+y+2z}. \end{cases} \quad (7)$$

Легко заметить, что $\ddot{x} + \ddot{y} = 0$, значит, $x + y = C_1 t + C_0$, где C_0, C_1 – произвольные постоянные. Следовательно, последнее уравнение системы (7) примет вид

$$\ddot{z} = -2f \frac{(\dot{z}+V)(\dot{z}+C_1-V)}{2z+C_1 t+C_0}.$$

Заменой $u = 2z + C_1 t + C_0$ последнее уравнение приводим к виду

$$u'' = -f \frac{u'^2}{u} + f \frac{(C_1 - 2V)^2}{u}. \quad (8)$$

При $u = w^{-1}$ последнее уравнение принимает вид (6). В соответствии с [7] заключаем, что при $f = -2, f = -1,5, f = -1$ все решения уравнения (8) являются мероморфными функциями. Следовательно, компонента z общего решения системы (7) является мероморфной функцией. Аналогичными рассуждениями, как и в случае 8, 18, 75, приходим к выводу, что компоненты x, y общего решения системы (7) также являются мероморфными функциями. Таким образом, заключаем, что в случаях 6, 7, 16, 17, 72, 73, 74 из таблицы все решения соответствующих им систем являются мероморфными функциями.

Заметим также, что системы, соответствующие наборам, когда $b \neq 0, d \neq 0, a = c = e = f = 0$ и $c \neq 0, e \neq 0, a = b = d = f = 0$, также легко привести к уравнениям вида (8). Таким образом, все решения систем, соответствующих наборам 42, 43, 47, 48, 53, 54, 56, 64, 65, 67, 102, 104, 105, 106, являются мероморфными функциями.

Рассмотрим случаи, когда $a \neq 0, b \neq 0, c = d = e = f = 0$, тогда система (4) примет вид

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2a \frac{\dot{x}\dot{y}}{x-y}, \\ \ddot{y} = -2a \frac{\dot{x}\dot{y}}{x-y} + 2b \frac{\dot{y}\dot{z}}{y-z}, \\ \ddot{z} = -2b \frac{\dot{y}\dot{z}}{y-z}. \end{cases} \quad (9)$$

Будем исследовать систему (9) с помощью метода резонансов [7]. Воспользуемся равенством $\ddot{x} + \ddot{y} + \ddot{z} = 0$ (которое очевидно следует из системы (9)). Посредством замены

$$x = \alpha t^{-s}, \quad y = \beta t^{-s}, \quad z = \gamma t^{-s},$$

находим соотношения для коэффициентов

$$a + b = -\frac{3}{2} \left(1 + \frac{1}{s}\right), \quad \alpha = \left(\frac{2as}{s+1} + 1\right)\beta, \quad \gamma = \left(\frac{2bs}{s+1} + 1\right)\beta, \quad s \neq -1. \quad (10)$$

З а м е ч а н и е 2. При замене $x = \alpha t, y = \beta t, z = \gamma t$ ($s = -1$) из системы (9) получаем соотношения $\ddot{x} = \ddot{y} = \ddot{z} = 0$, откуда следуют равенства $a = b = 0$, что противоречит допущению.

При $a = b = -2$ из первого соотношения системы (10) находим $s = \frac{3}{5}$. Таким образом, система, соответствующая набору значений 1 из таблицы, будет иметь решения с подвижными критическими особенностями.

При $a = -2, b = -1; a = b = -1,5; a = -1, b = -2$ аналогично будем иметь $s = 1$. Таким образом, решение системы (9) с учетом равенств (10) будем искать в виде

$$x = \alpha t^{-1} + \dots + h_1 t^{r-1} + \dots, y = \beta t^{-1} + \dots + h_2 t^{r-1} + \dots, z = \gamma t^{-1} + \dots + h_3 t^{r-1} + \dots,$$

где $b = -a - 3, \frac{\gamma}{\beta} = -a - 2, \frac{\alpha}{\beta} = a + 1$. Тогда для резонансов r [7] получим уравнение

$$r(r+1) \left(r^2 - r + \frac{6(a+1)(a+2)}{a(a+3)} \right) = 0.$$

Решая последнее уравнение, находим, что при $a = -1, r_{1,2} = 0, r_3 = -1, r_4 = 1$, при $a = -2, r_{1,2} = 0, r_3 = -1, r_4 = 1$, а при $a = -1,5, r_1 = 0, r_2 = -1, r_3 = \frac{3+i\sqrt{15}}{6}, r_4 = \frac{3-i\sqrt{15}}{6}$. Таким образом, заключаем, что в случаях 3, 20 из таблицы все решения соответствующих им систем являются мероморфными функциями, а в случае 10 соответствующая система имеет подвижные критические особенности.

При $a = -1,5, b = -1; a = -1, b = -1,5$ будем иметь $s = \frac{3}{2}$. Таким образом, системы, соответствующие наборам значений 1, 22 из таблицы, будут иметь решения с подвижными критическими особенностями.

При $a = -1, b = -1$ будем иметь $s = 3$. Таким образом, решение системы (9) будем искать в виде $x = \alpha t^{-3} + \dots + h_1 t^{r-3} + \dots, y = \beta t^{-3} + \dots + h_2 t^{r-3} + \dots, z = \gamma t^{-3} + \dots + h_3 t^{r-3} + \dots$. Тогда для резонансов r получим уравнение

$$r(r+1)(r^2 - 3r + 4) = 0, \text{ откуда } r_1 = 0, r_2 = -1, r_3 = \frac{3+i\sqrt{7}}{2}, r_4 = \frac{3-i\sqrt{7}}{2}.$$

Таким образом, заключаем, что в случае 25 соответствующая ему система имеет подвижные критические особенности [7].

В случаях $b \neq 0, c \neq 0, a = d = e = f = 0; a \neq 0, c \neq 0, b = d = e = f = 0$ будем иметь системы, которые легко привести к виду системы (9) путем введения замен $x = x, z = y, y = -z$ и $x = y, y = -x, z = z$ соответственно.

Следовательно, справедлива

Т е о р е м а. Если a, b, c, d, e, f принимают значения наборов с номерами 1, 4, 10, 12, 14, 15, 22, 25, 28, 29, 41, 45, 46, 51, 52 из таблицы, то система (3) имеет решения с подвижными критическими особенностями, а значениям 3, 5, 6–8, 16–18, 20, 27, 42–44, 47–49, 50, 53, 54, 56, 57, 64–75, 102–107, 115, 118, 131, 133, 136–142 соответствуют системы, все решения которых являются мероморфными функциями.

З а м е ч а н и е 3. Оставшиеся случаи из таблицы также были исследованы автором. Однако, в силу ограниченности объема статьи, возникла необходимость привести их исследования позднее. Среди них выделены 77 наборов констант, при которых соответствующие им системы имеют решения с подвижными критическими особенностями.

Заключение. Найденные необходимые условия наличия мероморфных решений у системы нелинейных дифференциальных уравнений шестого порядка (3), описывающей плоское движение четырех тел (см. таблицу).

Установлено, что 15 систем трех нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих плоское движение четырех тел, имеют решения с подвижными критическими особенностями.

Рассмотрено 50 наборов значений констант взаимодействия, при которых все решения соответствующих им систем являются мероморфными функциями.

Важность полученного результата заключается в возможности описания траекторий проблемы плоского движения четырех тел при указанных наборах значений констант межчастичного взаимодействия.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант № Ф14М–148).

Список использованной литературы

1. *Calogero, F.* Classical Many-Body Problems amenable to exact treatments: lect. Notes in Phys. Monograph / F. Calogero. – Berlin: Springer, 2001.
2. *Calogero, F.* Periodic solutions of a many-rotator problem in the plane / F. Calogero, J.-P. Francoise // Inverse Problems. – 2001. – Vol. 17. – P. 1–8.
3. *Calogero, F.* Periodic solutions of a many-rotator problem in the plane. II. Analysis of various motions / F. Calogero, J.-P. Francoise, M. Sommacal // J. Nonlinear Math. Phys. – 2003. – Vol. 10. – P. 157–214.
4. *Calogero, F.* Integrable and solvable many-body problems in the plane via complexification / F. Calogero // J. Math. Phys. – 1998. – Vol. 39. – P. 5268–5291.
5. *Calogero, F.* Motion of poles and zeros of special solutions of nonlinear and linear partial differential equations and related «Solvable» Many-Body Problems» / F. Calogero // Nuovo Cimento. – 1978. – Vol. 43 B. – P. 177–241.
6. *Сазонова, А. Т.* Разрешимые случаи в задаче четырех тел / А. Т. Сазонова // Весн. Годзен. дзярж. ун-та им. Я. Ку-палы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, выліч. тэхніка і кіраванне. – 2014. – № 3 (180). – С. 45–53.
7. *Мартынов, И. П.* Аналитическая теория нелинейных уравнений и систем: пособие / И. П. Мартынов, Н. С. Березкина, В. А. Пронько. – Гродно: ГрГУ, 2009.

Поступила в редакцию 17.08.2015

УДК 517.948.32:517.544

Э. И. ЗВЕРОВИЧ

**АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ КОНФОРМНОГО ГОМЕОМОРФИЗМА
КОНЕЧНОЛИСТНОЙ РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ НА ПЛОСКОСТЬ**

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь, e-mail: zverovich@bsu.by

Рассматривается конечнолистная рода нуль поверхность наложения сферы. Дается алгоритм построения конформного гомеоморфизма этой поверхности на сферу по заданным точкам разветвления и подстановкам, описывающим закон склеивания листов.

Ключевые слова: конформный гомеоморфизм, накрывающая поверхность, замкнутая риманова поверхность, род поверхности, индекс разветвления, фундаментальный базис, алгебраическая кривая, особая точка, дискриминант.

E. I. ZVEROVICH

**CONSTRUCTION ALGORITHM OF CONFORMAL HOMEOMORPHISM
OF THE FINITE-SHEETED RIEMAN SURFACE ONTO THE PLANE**

Belarusian State University, Minsk, Belarus, e-mail: zverovich@bsu.by

We consider a finite-sheeted covering surface of the sphere of genus zero. We built the algorithm of construction of the conformal homeomorphism of this surface on the sphere by a given branch point and permutations describing the sheets gluing order.

Keywords: conformal homeomorphism, covering surface, closed Riemannian surface, genus of surface, branch index, fundamental basis, algebraic curve, singular point, discriminant.

Для краткости будем называть *сферой* расширенную комплексную плоскость $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \infty$, которая, как известно, гомеоморфна сфере. Обозначим через R конечнолистную поверхность наложения (накрытие) сферы $\hat{\mathbb{C}}_z$. Это покрытие является замкнутой римановой поверхностью конечного рода ρ . Точками поверхности R можно считать пары $(z, w) \in \hat{\mathbb{C}} \times \hat{\mathbb{C}}$, связанные неприводимым алгебраическим уравнением $f(z, w) = 0$. Поверхность R гомеоморфна сфере только тогда, когда $\rho = 0$ (а по теореме Римана она и конформно эквивалентна сфере). Кроме числа листов накрытия, считаем известными координаты проекций на сферу $\hat{\mathbb{C}}_z$ всех точек ветвления и подстановки, описывающие законы перехода с листа на лист при обходе каждой точки ветвления. По этим данным требуется найти аналитическое выражение для конформного гомеоморфизма $R \rightarrow \hat{\mathbb{C}}_w$, что сводится к нахождению уравнения $f(z, w) = 0$.

Напомним, что конформность в точках ветвления понимается как конформность в обычном смысле после перехода к соответствующим локальным координатам. Конкретизируя постановку, обозначим через n число листов данного накрытия, а через ω_z – его индекс разветвления. Род накрывающей поверхности R вычисляется по известной формуле Римана – Гурвица $\rho = \frac{\omega_z}{2} - n + 1$.

Так как мы рассматриваем только накрытия рода $\rho = 0$, то должно быть $\omega_z = 2(n - 1)$. Над каждой точкой $z \in \hat{\mathbb{C}}_z$ (кроме проекций точек ветвления) лежат n точек поверхности R , а искомое отображение $R \leftrightarrow \hat{\mathbb{C}}_w$ – биективное. Поэтому каждому $z \in \hat{\mathbb{C}}_z$ соответствуют n различных или частично совпадающих значений $w \in \hat{\mathbb{C}}_w$. Отсюда следует, что полученное таким образом отображение

$w \leftrightarrow (z, w) \rightarrow z$ является рациональной функцией степени n от w . Представив его в виде несократимой дроби

$$z = -\frac{P(w)}{Q(w)}, \quad (1)$$

закключаем, что $P(w)$ и $Q(w)$ – полиномы степеней не выше n , причем степень хотя бы одного из них точно равна n . Таким образом, искомая отображающая функция удовлетворяет неприводимому алгебраическому уравнению

$$P(w) + zQ(w) = 0. \quad (2)$$

Зададим проекции всех точек ветвления в виде

$$z_1 = 0, \quad z_2, \dots, z_{n-1}, z_n = \infty.$$

При каждом $k = 1, \dots, n-1$ в качестве подстановки, описывающей закон перехода точки (z, w) с листа на лист при обходе точки z_k , возьмем транспозицию $(k, k+1)$. Это означает, что после однократного обхода точкой z вокруг точки z_k соответствующая точка (z, w) переходит с k -го листа на $(k+1)$ -й (или обратно), а точки (z, w) , лежащие на других листах, остаются на тех же листах. Такое задание гарантирует связность поверхности R , а вклад в индекс разветвления от каждой точки z_k при $k = 1, \dots, n-1$ равен 1. Значит, вклад и индекс разветвления от всех точек z_k при $k = 1, \dots, n-1$ равен $n-1$. Таким образом, над точкой $z = \infty$ имеем полный цикл, т. е. единственную точку римановой поверхности R .

Следующей задачей является составление уравнений, которым должны удовлетворять коэффициенты многочленов $P(w)$ и $Q(w)$. С этой целью сначала потребуем, чтобы искомая отображающая функция удовлетворяла следующим условиям: $(0, 0) \mapsto 0$, $(\infty, \infty) \mapsto \infty$, причем считаем, что точка ветвления $(0, 0)$ лежит на первом и втором листах. Эти условия гарантируют единственность (с точностью до постоянного множителя) отображающей функции. Так как искомое отображение $(z, w) \leftrightarrow w$ – биективное, а $(\infty, \infty) \leftrightarrow \infty$, то z должно быть конечным при конечных значениях w . Поэтому в (1) должно быть $Q(w) \equiv \text{const} \neq 0$. Полагая $Q(w) \equiv 1$, приведем уравнение (2) к виду

$$f(z, w) \equiv P(w) + z = 0. \quad (3)$$

Остается только указать способ вычисления коэффициентов полинома

$$P(w) \equiv w^n + a_1 w^{n-1} + \dots + a_{n-2} w^2.$$

С этой целью обратимся к кольцу целых элементов поля алгебраических функций [1], порожденного уравнением (3). Базис этого кольца называется *фундаментальным базисом*. По исходным данным легко вычисляется его *дискриминант* $z(z - z_2) \dots (z - z_{n-1})$.

Как известно [1], с точностью до постоянного множителя он не зависит от выбора фундаментального базиса поля, а зависит только от *примитивной пары* (z, w) , порождающей это поле. В теории алгебраических функций [1] устанавливается связь между фундаментальным базисом и характером особых точек алгебраической кривой $f(z, w) = 0$: *степенной базис* $[1, w, \dots, w^{n-1}]$ является *фундаментальным*, если и только если кривая не имеет конечных особых точек. Особыми точками алгебраической кривой называются решения следующей системы уравнений:

$$f(z, w) = \frac{\partial f(z, w)}{\partial w} = \frac{\partial f(z, w)}{\partial z} = 0.$$

Так как для кривой (3) $\frac{\partial f}{\partial z} \equiv 1$, то для нее эта система несовместна, и потому степенной базис является фундаментальным. Значит, дискриминант фундаментального базиса можно вычислить

как *результант* полинома (3) и его производной $P'(w) = nw^{n-1} + (n-1)a_1w^{n-2} + \dots + 2a_{n-2}w$. Таким образом, при некотором $\lambda \neq 0$ должно выполняться следующее тождество:

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_{n-2} & 0 & z & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & a_{n-3} & a_{n-2} & 0 & z & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & z & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & 0 & z \\ n & (n-1)a_1 & \dots & 2a_{n-2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & n & \dots & 3a_{n-3} & 2a_{n-2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & n & (n-1)a_1 & (n-2)a_2 & (n-3)a_3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & n & (n-1)a_1 & (n-2)a_2 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv \lambda \cdot z(z-z_2)\dots(z-z_{n-1}).$$

Приравнивая здесь коэффициенты при z^{n-1} , получим $\lambda = n^n$. Сократив затем равенство дискриминантов на z и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях переменного z , получим систему из $(n-2)$ нелинейных алгебраических уравнений для нахождения чисел a_1, \dots, a_{n-2} . Система имеет конечное множество решений, среди которых есть искомое. Посторонние решения могут здесь появляться потому, что система не изменяется при всевозможных перестановках проекций точек ветвления z_2, \dots, z_{n-1} . К тому же нумерация листов римановой поверхности в системе не учитывается, однако на проблеме отделения нужного нам решения от посторонних здесь не останавливаемся.

Построим в качестве примера конформный гомеоморфизм на сферу \hat{C}_w трехлистного накрытия R сферы \hat{C}_z , проекции точек ветвления которого находятся в точках $0, 1$ и ∞ . Пусть при обходе точки $z = 0$ листы переходят друг в друга по закону $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, а при обходе точки $z = 1$ – по закону $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Отображающую функцию подчиним условиям: $(0,0) \mapsto 0$, $(\infty, \infty) \mapsto \infty$. Поверхность R связна, рода нуль, так что искомое отображение существует. Дискриминант фундаментального базиса равен $\lambda z(z-1)$. Уравнение (3) в данном случае имеет вид

$$w^3 + aw^2 + z = 0,$$

где a – неизвестный коэффициент. Для его вычисления приравняем различные выражения для фундаментального базиса

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 0 & z & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 & z \\ 3 & 2a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2a & 0 \end{vmatrix} \equiv \lambda z(z-1). \quad (4)$$

Приравнивая здесь коэффициенты при z^2 , находим $\lambda = 27$. Подставив это в (4) и сократив на z , получим уравнение $a^3 = \frac{27}{4}$, дающее для a три значения $a = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$ и $a_{2,3} = \frac{3}{\sqrt[3]{4}} \exp(\pm 2\pi i / 3)$. Соответственно получаем три уравнения

$$w^3 + \frac{3}{\sqrt[3]{4}}w^2 + z = 0, \quad w^3 + \frac{3}{\sqrt[3]{4}} \exp(\pm 2\pi i / 3)w^2 + z = 0. \quad (5)$$

Если в последних двух уравнениях сделать замену $w = w_1 \exp(\pm 2\pi i / 3)$, то получим $w_1^3 + \frac{3}{\sqrt[3]{4}} w_1^2 + z = 0$. Итак, решения уравнений (5) отличаются друг от друга лишь постоянными множителями. Значит, с точностью до постоянного множителя решение – единственное и дается в виде уравнения $w^3 + \frac{3}{\sqrt[3]{4}} w^2 + z = 0$. Распорядившись произволом в выборе постоянного множителя, преобразуем полученное уравнение к виду, не содержащему иррациональности. С этой целью сделаем замену $w = \sqrt[3]{2}\zeta$, и тогда полученное уравнение преобразуется к виду $2\zeta^3 + 3\zeta^2 + z = 0$.

Список использованной литературы

1. Чеботарев Н. Г. Теория алгебраических функций. М., 2001.

Поступила в редакцию 13.03.2015

УДК 517.926.4

Е. А. БАРАБАНОВ¹, А. В. КОНЮХ²

**ТОЧНЫЕ КРАЙНИЕ ГРАНИЦЫ ПОКАЗАТЕЛЕЙ БОЛЯ
РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ
С МАЛЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ**

¹Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь,
e-mail: bar@im.bas-net.by

²Белорусский государственный экономический университет, Минск, Беларусь,
e-mail: al3128@gmail.com

Получены формулы вычисления по матрице Коши линейной дифференциальной системы точной верхней границы подвижности вверх нижних показателей Боля и точной нижней границы подвижности вниз верхних показателей Боля ее решений при малых возмущениях коэффициентов системы. Доказано, что при малых возмущениях коэффициентов системы первая из указанных границ устойчива вверх, но неустойчива вниз, а вторая – устойчива вниз, но неустойчива вверх.

Ключевые слова: линейная дифференциальная система, верхний и нижний показатели Боля, верхний и нижний генеральные показатели.

Е. А. BARABANOV¹, А. В. KONYUKH²

**EXACT EXTREME BOUNDS OF THE BOHL EXPONENTS OF SOLUTIONS
TO THE LINEAR DIFFERENTIAL SYSTEM WITH SMALL PERTURBATIONS**

¹Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus,
e-mail: bar@im.bas-net.by

²Belarus State Economic University, Minsk, Belarus,
e-mail: al3128@gmail.com

Using the Cauchy matrix, the formulas for calculation of the linear differential system of the exact upper bound of the upward mobility of the lower Bohl exponents and of the exact lower bound of the downward mobility of the upper Bohl exponents of its solutions under small perturbations of the coefficients of the system are obtained. It is proved that under small perturbations of the coefficients, the first of the mentioned bounds is upward stable, but is downward unstable, and the second one is downward stable, but is upward unstable.

Keywords: linear differential system, lower and upper Bohl exponents, lower and upper general exponents.

Введение. Обозначим через \mathcal{M}_n класс линейных дифференциальных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

размерности $n \geq 2$ с равномерно ограниченными ($\sup\{\|A(t)\|: t \geq 0\} < +\infty$) и кусочно-непрерывными на временной полуоси $t \geq 0$ матрицами коэффициентов. Будем отождествлять систему (1) и ее матрицу коэффициентов и вследствие этого писать $A \in \mathcal{M}_n$. Считаем, что на множестве \mathcal{M}_n задана метрика $\text{dist}_u(\cdot, \cdot)$ равномерной сходимости на полуоси коэффициентов, т. е. $\text{dist}_u(A, B) = \sup\{\|A(t) - B(t)\|: t \geq 0\}$. Для системы (1) через $\mathcal{X}(A)$ обозначим совокупность всех ненулевых ее решений, а через $X_A(\cdot, \cdot)$ – ее матрицу (оператор) Коши.

Нижним $\underline{\beta}[x]$ и верхним $\overline{\beta}[x]$ показателями Боля ненулевого решения $x(\cdot)$ системы (1) называются величины

$$\underline{\beta}[x] = \lim_{t-\tau \rightarrow +\infty} \frac{1}{t-\tau} \ln \frac{\|x(t)\|}{\|x(\tau)\|} \quad \text{и} \quad \overline{\beta}[x] = \overline{\lim}_{t-\tau \rightarrow +\infty} \frac{1}{t-\tau} \ln \frac{\|x(t)\|}{\|x(\tau)\|}. \quad (2)$$

Асимптотические характеристики (2) естественно возникают при рассмотрении различных вопросов теории показателей Ляпунова, хотя их применение в этой теории и носит вспомогательный характер. Вследствие эпизодического использования показателей Боля у разных авторов они носили различные названия: нижний (верхний) равномерные показатели [1], нижний (верхний) минимальный (максимальный) показатели [2], нижний (верхний) генеральные показатели [3, с. 171–172]. Называть величины (2) показателями Боля предложено в работе [4], что исторически справедливо, хотя сам П. Г. Болем рассматривал несколько другие, но схожие с (2) асимптотические характеристики (см. определяемый в (3) показатель $\Omega^0(A)$). К настоящему времени такое название для числовых характеристик (2) стало общепринятым.

Показатели Боля как функции начального (при $t = 0$) вектора решений для систем из M_n полностью описаны в работе [5] (см. также [6]). Чтобы сформулировать это описание, определим для системы (1) так называемые [5] ее нижнюю $\underline{\beta}_A(\cdot)$ и верхнюю $\overline{\beta}_A(\cdot)$ функции Боля, действующие из $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ в \mathbb{R} , поставив в соответствие каждому вектору $\alpha \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ соответственно нижний и верхний показатели Боля решения $x(\cdot)$ системы (1) с начальным вектором $x(0) = \alpha$. Для того чтобы функция $f(\cdot): \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ являлась младшей (старшей) функцией Боля некоторой системы из M_n , необходимо и достаточно [5], чтобы она удовлетворяла следующим трем условиям: 1) функция f ограничена; 2) для всех ненулевых вещественных r и любого вектора $\alpha \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ справедливо равенство $f(\alpha) = f(r\alpha)$; 3) для каждого $q \in \mathbb{R}$ прообраз $f^{-1}([q, +\infty))$ полуинтервала $[q, +\infty)$ при отображении f является F_σ -множеством (G_δ -множеством).

К определению показателей Боля решений системы (1) близко определение ее генеральных или, как их еще называют, особых показателей. Верхним $\Omega^0(A)$ и нижним $\omega_0(A)$ генеральными (особыми) показателями системы (1) называются [3, с. 172, 175; 7, с. 109–110] величины

$$\Omega^0(A) = \overline{\lim}_{t-\tau \rightarrow +\infty} \frac{1}{t-\tau} \ln \|X_A(t, \tau)\| \quad \text{и} \quad \omega_0(A) = \underline{\lim}_{t-\tau \rightarrow +\infty} \frac{1}{t-\tau} \ln \|X_A^{-1}(t, \tau)\|^{-1}. \quad (3)$$

Иногда, как, например, в [3, с. 172, 175] или [8, с. 87, 89], при вычислении пределов в соотношениях (3) и/или (2) к условию $t - \tau \rightarrow +\infty$ добавляют еще дополнительное условие $\tau \rightarrow +\infty$. Доказательство того, что это дополнительное условие не изменяет (по меньшей мере для систем из M_n) величин (2) и (3), приведено в доказательстве теоремы 1 работы [5].

Показатели (3) (точнее, первый из них) введены П. Г. Болем [9; 10, с. 461] и независимо и из других соображений К. П. Персидским [11; 12, с. 94] (см. также [3, с. 172; 7, с. 109–111]). Позже, обобщая результаты А. М. Ляпунова по устойчивости движения на системы в банаховом пространстве, к понятию генеральных показателей пришел М. Г. Крейн [3, с. 213; 13; 14]. Основные свойства показателей (3), делающие их одними из главных асимптотических характеристик линейных дифференциальных систем, следующие. Для (нелинейной) системы отрицательность верхнего генерального показателя ее системы первого приближения, если последняя принадлежит классу M_n , является [9] необходимым и достаточным условием устойчивости при постоянно действующих возмущениях, а также [11] необходимым и достаточным условием равномерной устойчивости по первому приближению. Отрицательность верхнего генерального показателя линейной системы – достаточное условие [11] ее равномерной устойчивости и необходимое и достаточное условие равномерной устойчивости всех систем из некоторой ее окрестности (в метрике $\text{dist}_u(\cdot, \cdot)$). Кроме того, точная верхняя грань показателей Ляпунова всех обобщенных решений системы (1) с равномерно непрерывной на полуоси матрицей коэффициентов совпадает с верхним генеральным

показателем этой системы [15]. Ряд результатов о показателях (2) и (3) линейных дифференциальных систем на линейные разностные системы перенесен А. Чорником и М. Незабитовским (см., напр., [16, 17], а также имеющуюся в них библиографию, в которой содержится достаточно полный перечень работ по применению генеральных показателей и показателей Боля к исследованию свойств разностных систем).

Чтобы описать связь между генеральными показателями (3) системы (1) и множеством значений, принимаемых показателями Боля (2) ее решений, удобно ввести две величины – точные нижнюю и верхнюю границы показателей $\underline{\beta}[x]$ и $\bar{\beta}[x]$, $x \in \mathcal{X}(A)$, соответственно:

$$i\underline{\beta}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{x \in \mathcal{X}(A)} \underline{\beta}[x] \text{ и } s\bar{\beta}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in \mathcal{X}(A)} \bar{\beta}[x], \quad (4)$$

которые назовем соответственно младшим нижним и старшим верхним показателями Боля системы (1) (вообще говоря, вследствие приведенного выше результата работы [5] эти показатели могут не реализовываться ни на одном решении системы (1): такой системой является система (1), множество значений нижней (верхней) функции Боля которой не содержит своей точной нижней (верхней) грани). Очевидны неравенства

$$\omega_0(A) \leq i\underline{\beta}(A) \text{ и } s\bar{\beta}(A) \leq \Omega^0(A). \quad (5)$$

Никаких других, кроме (5), соотношений между величинами (3) и (4) на классе \mathcal{M}_n не существует [5]: каковы бы ни были два вещественных числа \underline{b} и $\underline{\quad}$ (числа \bar{b} и \bar{B}), связанных неравенством $\underline{b} \geq \underline{\quad}$ ($\bar{b} \leq \bar{B}$), в классе \mathcal{M}_n существует система (1), для которой $i\underline{\beta}(A) = \underline{b}$ и $\omega_0(A) = \underline{\quad}$ (соответственно $s\bar{\beta}(A) = \bar{b}$ и $\Omega^0(A) = \bar{B}$). В работе [5] получен даже несколько более общий результат, дающий полное описание каждой из пар $(\underline{\beta}_A(\cdot), \omega_0(A))$ и $(\bar{\beta}_A(\cdot), \Omega^0(A))$, $A \in \mathcal{M}_n$, следствием которого является приведенное выше утверждение.

Вместе с тем Р. Э. Виноградом в работе [4] получена следующая важная характеристика генеральных показателей (3) системы (1), устанавливающая их связь с показателями Боля (2) возмущенных систем: верхний (нижний) генеральный показатель $\Omega^0(A)$ ($\omega_0(A)$) системы (1) есть точная верхняя (нижняя) грань верхних (нижних) показателей Боля ненулевых решений системы (1) при сколь угодно малых возмущениях ее матрицы коэффициентов. Другими словами, рассмотрим наряду с системой (1) возмущенные системы

$$\dot{x} = (A(t) + Q(t))x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \quad (6)$$

с кусочно-непрерывной и равномерно ограниченной на полуоси матрицей-возмущением $Q(\cdot)$ (обозначим $\|Q\| = \sup\{\|Q(t)\|: t \geq 0\}$). Тогда имеют место равенства [4]:

$$\omega_0(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \inf_{\|Q\| \leq \varepsilon} i\underline{\beta}(A+Q) \text{ и } \Omega^0(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \sup_{\|Q\| \leq \varepsilon} s\bar{\beta}(A+Q). \quad (7)$$

Постановка задачи. Прежде чем ввести некоторые аналогичные рассмотренным выше асимптотические характеристики системы (1), с которыми связана решаемая в данной статье задача, укажем геометрический смысл показателей (3). Хорошо известно, что для произвольной невырожденной $n \times n$ -матрицы X справедливы соотношения (см., напр., [18, с. 22])

$$\max_{\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|X\xi\|}{\|\xi\|} = \|X\| \text{ и } \min_{\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|X\xi\|}{\|\xi\|} = \|X^{-1}\|^{-1}$$

(норма вектора евклидова, норма матрицы спектральная; первое из этих равенств – определение спектральной нормы, второе равенство – простое следствие первого). Другими словами, $\|X\|$ и $\|X^{-1}\|^{-1}$ – это, соответственно, большая и малая полуоси $(n-1)$ -мерного эллипсоида $\{\xi \in \mathbb{R}^n : \|X^{-1}\xi\| = 1\}$, порожденного линейным отображением X . Поэтому с геометрической точки

зрения верхний $\Omega^0(A)$ и нижний $\omega_0(A)$ генеральные показатели системы (1) – это асимптотически точные при $t - \tau \rightarrow +\infty$ крайние границы изменения в логарифмической шкале полуосей семейства эллипсоидов, порождаемых семейством линейных отображений $X_A(t, \tau)$ (показатель $\Omega^0(A)$ – точная верхняя граница больших полуосей, а показатель $\omega_0(A)$ – точная нижняя граница малых полуосей этого семейства эллипсоидов при $t - \tau \rightarrow +\infty$). С этой точки зрения представляется естественным наряду с величинами (3) рассмотреть [19] также и величины

$$\Omega_0(A) = \lim_{t-\tau \rightarrow +\infty} \frac{1}{t-\tau} \ln \|X_A(t, \tau)\| \text{ и } \omega^0(A) = \overline{\lim}_{t-\tau \rightarrow +\infty} \frac{1}{t-\tau} \ln \|X_A^{-1}(t, \tau)\|^{-1}, \quad (8)$$

дающие асимптотически точные при $t - \tau \rightarrow +\infty$, соответственно, нижнюю границу изменения больших полуосей и верхнюю границу изменения малых полуосей в логарифмической шкале семейства эллипсоидов, порождаемых семейством линейных отображений $X_A(t, \tau)$, $t \geq \tau \geq 0$. Величины (3) и (8) дополняют друг друга и дают асимптотически точные двусторонние оценки изменения норм $\|X_A(t, \tau)\|$ и $\|X_A^{-1}(t, \tau)\|$ при $t - \tau \rightarrow +\infty$. Показатели $\Omega_0(A)$ и $\omega^0(A)$ называются [19] соответственно старшим нижним и младшим верхним генеральными (особыми) показателями; по этой же терминологии показатели $\Omega^0(A)$ и $\omega_0(A)$ – это старший верхний и младший нижний генеральные (особые) показатели. Принятый способ обозначения величин (3) и (8) (как и определяемых ниже величин (11) и (28)) состоит в следующем (мнемоническое правило): прописная Ω и строчная ω буквы указывают, что величина относится соответственно к $\|X_A(t, \tau)\|$ и к $\|X_A^{-1}(t, \tau)\|^{-1}$, $t \geq \tau$, а индекс «0» сверху или внизу – что при этом берутся равномерные верхний или нижний пределы соответственно.

По аналогии с равенствами (4) рассмотрим также точные верхнюю и нижнюю границы показателей $\underline{\beta}[x]$ и $\overline{\beta}[x]$, $x \in \mathcal{X}(A)$:

$$s\underline{\beta}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in \mathcal{X}(A)} \underline{\beta}[x] \text{ и } i\overline{\beta}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{x \in \mathcal{X}(A)} \overline{\beta}[x], \quad (9)$$

которые назовем соответственно старшим нижним и младшим верхним показателями Боля системы (1) (по той же причине, что и для показателей (4), эти показатели, вообще говоря, могут не реализовываться ни на одном решении системы (1)).

Показатели (8) введены в обзорной статье авторов [19], мотивировка рассмотрения этих величин описана выше. В этой же статье [19] авторы, основываясь только на формулах (7) и указанной выше аналогии величин (3) и (8), привели без доказательства, вследствие обзорного характера указанной работы, следующие аналогичные (7) формулы, связывающие показатели (8) системы (1) и показатели (2) возмущенных систем (6):

$$\omega^0(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \inf_{\|Q\| \leq \varepsilon} i\overline{\beta}(A+Q) \text{ и } \Omega_0(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \sup_{\|Q\| \leq \varepsilon} s\underline{\beta}(A+Q), \quad (10)$$

посчитав, что доказательство этих равенств полностью аналогично доказательству равенств (7) из работы [4], и даже приписав такое доказательство работе [4]. Эти же формулы повторены затем во введении к статье [20] и использовались в доказательстве ее теоремы 1. Оказывается, как будет показано ниже в теореме 2 данной работы, равенства (10) в общем случае места не имеют. Поэтому вопрос о справедливости утверждения теоремы 1 из [20] для старшего нижнего и младшего верхнего показателей Боля остается открытым.

Точное представление через матрицу Коши системы (1) правых частей равенств (10) дается теоремой 1 настоящей работы. В теореме 5 изучается поведение показателей $\omega^0(A)$ и $\Omega_0(A)$, а в теоремах 3 и 4 – поведение введенных ниже показателей $\omega_*^0(A)$ и $\Omega_0^*(A)$ под действием малых возмущений матрицы A коэффициентов системы.

Основные результаты. Введем величины:

$$\begin{aligned}\Omega_0^*(A) &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \overline{\lim}_{k-m \rightarrow +\infty} \frac{1}{(k-m)T} \sum_{i=m+1}^k \ln \|X_A(iT, (i-1)T)\|, \\ \omega_*^0(A) &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \underline{\lim}_{k-m \rightarrow +\infty} \frac{1}{(k-m)T} \sum_{i=m+1}^k \ln \|X_A^{-1}(iT, (i-1)T)\|^{-1},\end{aligned}\quad (11)$$

где $k, m \in \mathbb{N}$. Корректность определения величин (11) (т. е. то, что внешний предел в правых частях равенств (11) существует) будет установлена в ходе доказательства теоремы 1. Прямое, не зависящее от доказательства теоремы 1, доказательство корректности можно получить аналогично тому, как это сделано в [21, с. 49–50] для центральных показателей.

Введенные величины и являются искомыми точными границами подвижности нижних (верхних) показателей Боля решений системы (1) вверх (вниз) при малых возмущениях ее матрицы коэффициентов, как это показывает

Т е о р е м а 1. *Имеют место равенства*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \sup_{\|Q\| \leq \varepsilon} s\beta(A+Q) = \Omega_0^*(A) \text{ и } \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \inf_{\|Q\| \leq \varepsilon} i\bar{\beta}(A+Q) = \omega_*^0(A). \quad (12)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как мы не предполагаем доказанным существование внешнего предела в правых частях равенств (11), обозначим через $\overline{\Omega}_0^*(A)$ и $\underline{\Omega}_0^*(A)$ величины, получающиеся заменой в первом из равенств (11) \lim на $\overline{\lim}$ и $\underline{\lim}$ соответственно, а через $\overline{\omega}_*^0(A)$ и $\underline{\omega}_*^0(A)$ – величины, получающиеся такой же заменой во втором из равенств (11).

1. В этой части доказательства установим справедливость неравенств

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \sup_{\|Q\| \leq \varepsilon} s\beta(A+Q) \leq \underline{\Omega}_0^*(A) \text{ и } \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \inf_{\|Q\| \leq \varepsilon} i\bar{\beta}(A+Q) \geq \overline{\omega}_*^0(A). \quad (13)$$

1.1. Для доказательства первого из неравенств (13) обозначим через $R(t)$, $t \geq 0$, какую-либо верхнюю функцию [4; 7, с. 103, 115; 22] системы (1), т. е. ограниченную измеримую функцию $R(t)$, $t \geq 0$, такую, что для всех $t \geq s \geq 0$ выполняется оценка

$$\|X_A(t, s)\| \leq C_R \exp \int_s^t R(\alpha) d\alpha, \quad (14)$$

где C_R – некоторая постоянная (зависящая, вообще говоря, от выбора функции $R(\cdot)$). Запишем решение возмущенной системы (6) по формуле Коши вариации постоянных:

$$y(t) = X_A(t, \tau)y(\tau) + \int_{\tau}^t X_A(t, s)Q(s)y(s)ds, \quad \tau \leq t.$$

Перейдя в этом представлении к нормам и учитывая неравенства $\|Q\| \leq \varepsilon$ и (14), получим

$$\|y(t)\| \leq C_R \|y(\tau)\| \exp \int_{\tau}^t R(\alpha) d\alpha + C_R \int_{\tau}^t \exp \left\{ \int_s^t R(\alpha) d\alpha \right\} \varepsilon \|y(s)\| ds,$$

или, обозначив $u(t) = \|y(t)\| \exp \left\{ -\int_0^t R(\alpha) d\alpha \right\}$, – что $u(t) \leq C_R u(\tau) + \int_{\tau}^t C_R \varepsilon u(s) ds$. Из последнего неравенства по лемме Гронуолла – Беллмана [7, с. 517] $u(t) \leq C_R u(\tau) \exp \{C_R \varepsilon (t - \tau)\}$, или, возвращаясь к исходным обозначениям,

$$\frac{\|y(t)\|}{\|y(\tau)\|} \leq C_R \exp \left\{ \int_{\tau}^t R(s) ds + C_R \varepsilon (t - \tau) \right\} \quad (15)$$

для всех $t \geq \tau \geq 0$. Перейдя в неравенстве (15) к нижнему пределу при $t - \tau \rightarrow +\infty$, получаем для любого решения $y(\cdot) \in \mathcal{X}(A + Q)$ возмущенной системы (6) с $\|Q\| \leq \varepsilon$ оценку сверху его нижнего показателя Боля:

$$\underline{\beta}[y] \leq C_R \varepsilon + \liminf_{t-\tau \rightarrow +\infty} \frac{1}{t-\tau} \int_{\tau}^t R(s) ds. \quad (16)$$

Верхней функцией системы (1) является, например, [4; 7, с. 116; 22] функция

$$R_T(t) = T^{-1} \sum_{i=0}^{[t/T]} \ln \|X_A(iT, (i-1)T)\|, \quad (17)$$

где $T > 0$ – фиксировано и может быть выбрано любым, а $[\cdot]$ – целая часть числа (постоянная $C_{R_T} \equiv e^{2aT}$). Тогда, взяв в неравенстве (16) функцию $R(t) \equiv R_T(t)$ и, считая, что t и τ пробегают последовательности $(kT)_{k \in \mathbb{N}}$ и $(mT)_{m \in \mathbb{N}}$ соответственно, получаем

$$\underline{\beta}[y] \leq e^{2aT} \varepsilon + \liminf_{k-m \rightarrow +\infty} \frac{1}{(k-m)T} \sum_{i=m+1}^k \ln \|X_A(iT, (i-1)T)\|$$

для любого решения $y(\cdot) \in \mathcal{X}(A + Q)$, если $\|Q\| \leq \varepsilon$. Поэтому

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \inf_{\|Q\| \leq \varepsilon} s \underline{\beta}(A + Q) \leq \liminf_{k-m \rightarrow +\infty} \frac{1}{(k-m)T} \sum_{i=m+1}^k \ln \|X_A(iT, (i-1)T)\|$$

для любого фиксированного $T > 0$. Теперь, перейдя в правой части полученного неравенства к нижнему пределу при $T \rightarrow +\infty$, приходим к первому из неравенств (13).

1.2. Второе неравенство в (13) в ситуациях, схожих с рассматриваемой, (например, для нижних центральных показателей) обычно доказывается на основании соответствующего аналога первого неравенства в (13) переходом к системе, сопряженной системе (1). Мы докажем это неравенство непосредственно, независимо от первого неравенства (13). Эти же рассуждения можно использовать также для прямых оценок снизу других асимптотических характеристик (например, нижнего или младшего центральных показателей), без обращения к сопряженной системе.

Пусть $r(t)$, $t \geq 0$, – какая-либо нижняя функция [4; 7, с. 103, 115; 22] системы (1), т. е. ограниченная измеримая на полуоси функция $r(t)$, $t \geq 0$, такая, что для всех $t \geq s \geq 0$ выполняется оценка

$$\|X_A^{-1}(t, s)\| \leq c_r \exp \int_t^s r(\alpha) d\alpha, \quad (18)$$

где c_r – некоторая постоянная (зависящая, вообще говоря, от выбора функции $r(\cdot)$). Запишем решение $y(t)$, $t \geq 0$, возмущенной системы (6) по формуле Коши вариации постоянных:

$$y(\tau) = X_A(\tau, t) y(t) + \int_t^{\tau} X_A(\tau, s) Q(s) y(s) ds, \quad \tau \leq t,$$

и, перейдя в этом представлении к нормам, приходим к неравенству

$$\|y(\tau)\| \leq \|X_A(\tau, t)\| \|y(t)\| + \int_{\tau}^t \|X_A(\tau, s)\| \|Q(s)\| \|y(s)\| ds, \quad \tau \leq t.$$

Теперь, учитывая неравенства $\|Q\| \leq \varepsilon$ и (18), получим

$$\|y(\tau)\| \leq c_r \|y(t)\| \exp \int_t^{\tau} r(\alpha) d\alpha + c_r \int_{\tau}^t \exp \left\{ \int_s^{\tau} r(\alpha) d\alpha \right\} \varepsilon \|y(s)\| ds,$$

или, обозначив $u(t) = \|y(t)\| \exp\left\{\int_t^0 r(\alpha) d\alpha\right\}$, что $u(t) \leq c_r u(t) + \int_\tau^t c_r \varepsilon u(s) ds$. Считая в этом неравенстве t фиксированным, а $\tau \in [0, t]$ переменной и рассуждая так же, как и в доказательстве леммы Гронуолла – Беллмана, получим неравенство $u(\tau) \leq c_r u(t) \exp\{c_r \varepsilon (t - \tau)\}$, или, возвращаясь к исходным обозначениям,

$$\frac{\|y(t)\|}{\|y(\tau)\|} \geq c_r^{-1} \exp\left\{\int_\tau^t r(s) ds - c_r \varepsilon (t - \tau)\right\} \quad (19)$$

для всех $t \geq \tau \geq 0$. Перейдя в неравенстве (19) к верхнему пределу при $t - \tau \rightarrow +\infty$, получаем для любого решения $y(\cdot) \in \mathcal{X}(A + Q)$ возмущенной системы (6) с $\|Q\| \leq \varepsilon$ оценку снизу его верхнего показателя Боля:

$$\bar{\beta}[y] \geq -c_r \varepsilon + \overline{\lim}_{t-\tau \rightarrow +\infty} \frac{1}{t-\tau} \int_\tau^t r(s) ds. \quad (20)$$

Нижней функцией системы (1) является, например, [4; 7, с. 116; 22] функция

$$r_T(t) = T^{-1} \sum_{i=0}^{[t/T]} \ln \|X_A^{-1}(iT, (i-1)T)\|^{-1}, \quad (21)$$

где $T > 0$ – фиксировано и может быть выбрано любым, а $[\cdot]$ – целая часть числа (постоянная $c_{rT} \equiv e^{2aT}$). Тогда, взяв в неравенстве (20) функцию $r(t) \equiv r_T(t)$ и, считая, что t и τ пробегают последовательности $(kT)_{k \in \mathbb{N}}$ и $(mT)_{m \in \mathbb{N}}$ соответственно, получаем

$$\bar{\beta}[y] \geq -e^{2aT} \varepsilon + \overline{\lim}_{k-m \rightarrow +\infty} \frac{1}{(k-m)T} \sum_{i=m+1}^k \ln \|X_A^{-1}(iT, (i-1)T)\|^{-1}$$

для любого решения $y(\cdot) \in \mathcal{X}(A + Q)$, где $\|Q\| \leq \varepsilon$. Поэтому

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \inf_{\|Q\| \leq \varepsilon} i\bar{\beta}(A + Q) \geq \overline{\lim}_{k-m \rightarrow +\infty} \frac{1}{(k-m)T} \sum_{i=m+1}^k \ln \|X_A^{-1}(iT, (i-1)T)\|^{-1}$$

для любого $T > 0$. Перейдя в правой части полученного неравенства к верхнему пределу при $T \rightarrow +\infty$, придем ко второму из неравенств (13).

2. В этой части доказательства установим справедливость неравенств

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \sup_{\|Q\| \leq \varepsilon} s\bar{\beta}(A + Q) \geq \bar{\Omega}_0^*(A) \quad \text{и} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \inf_{\|Q\| \leq \varepsilon} i\bar{\beta}(A + Q) \leq \underline{\omega}_0^*(A). \quad (22)$$

Неравенства (22) докажем методом поворотов Миллионщикова [23, 24] (см. также [25; 26, с. 90–91]). При этом сам метод поворотов Миллионщикова мы непосредственно не применяем, а используем только результаты, полученные с его помощью (подробности можно найти, например, в [25] или [21, с. 78–81; 26, с. 90–91]).

2.1. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Зафиксируем также какое-либо положительное $\delta \leq \varepsilon/(2a+1)$, где $a = \sup\{\|A(t)\| : t \geq 0\}$, а число $T = T_\varepsilon > 1$ выберем столь большим, чтобы выполнялись неравенства

$$\lim_{k-m \rightarrow +\infty} \frac{1}{(k-m)T} \sum_{i=m+1}^k \ln \|X_A(iT, (i-1)T)\| + \frac{\varepsilon}{2} \geq \bar{\Omega}_0^*(A) \quad \text{и} \quad T^{-1} |\ln(2^{-1} \sin \delta)| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (23)$$

Согласно методу поворотов Миллионщикова, существует такая кусочно-непрерывная $n \times n$ -матрица-возмущение $Q_\varepsilon(\cdot)$, отличная от нулевой матрицы разве что на отрезках $[iT-1, iT]$, $i \in \mathbb{N}$,

и удовлетворяющая неравенству $\|Q_\varepsilon\| \leq (2a+1)\delta$ (а значит, $\|Q_\varepsilon\| \leq \varepsilon$ в силу выбора δ), что у возмущенной системы (6) с матрицей $Q(\cdot) \equiv Q_\varepsilon(\cdot)$ найдется решение $y_\varepsilon(\cdot)$, для которого при всех $i \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$\|y_\varepsilon(iT)\| \geq 2^{-1} \sin \delta \|X_A(iT, (i-1)T)\| \|y_\varepsilon((i-1)T)\|. \quad (24)$$

Последовательно воспользовавшись неравенствами (24) при $i = k, \dots, m+1$ ($k > m$), легко получаем оценку

$$\ln \frac{\|y_\varepsilon(kT)\|}{\|y_\varepsilon(mT)\|} \geq (k-m-1) \ln(2^{-1} \sin \delta) + \sum_{i=m+1}^k \ln \|X_A(iT, (i-1)T)\| \quad (25)$$

для всех натуральных $k > m$. Так как при вычислении показателей Боля решений систем из \mathcal{M}_n можно (как это показывается аналогично [7, с. 537]) считать, что t и τ пробегают точки какой-либо арифметической прогрессии, то вследствие этого и неравенства (25) получаем, что

$$\begin{aligned} \underline{\beta}[y_\varepsilon] &= \lim_{k-m \rightarrow +\infty} \frac{1}{(k-m)T} \ln \frac{\|y_\varepsilon(kT)\|}{\|y_\varepsilon(mT)\|} \geq \\ &\stackrel{(25)}{\geq} T^{-1} \ln(2^{-1} \sin \delta) + \lim_{k-m \rightarrow +\infty} \frac{1}{(k-m)T} \sum_{i=m+1}^k \ln \|X_A(iT, (i-1)T)\| \stackrel{(23)}{\geq} \overline{\Omega}_0^*(A) - \varepsilon \end{aligned}$$

для любого $\varepsilon > 0$. Первое неравенство в (22) доказано.

Таким образом, в силу первых неравенств в (13) и (22) имеем: $\overline{\Omega}_0^*(A) \leq \underline{\Omega}_0^*(A)$, а значит, внешний предел в первом равенстве (11) существует и первое равенство в (12) доказано.

2.2. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Выберем число δ таким же, как и выше, а число $T = T_\varepsilon > 1$ столь большим, чтобы выполнялись неравенства

$$\overline{\lim}_{k-m \rightarrow +\infty} \frac{1}{(k-m)T} \sum_{i=m+1}^k \ln \|X_A^{-1}(iT, (i-1)T)\|^{-1} - \frac{\varepsilon}{2} \leq \underline{\omega}_0^*(A) \quad \text{и} \quad T^{-1} |\ln(2^{-1} \sin \delta)| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (26)$$

Согласно методу поворотов Миллионщикова, существует такая кусочно-непрерывная $n \times n$ -матрица-возмущение $\tilde{Q}_\varepsilon(\cdot)$, отличная от нулевой матрицы разве что на отрезках $[iT, iT+1]$, $i \in \mathbb{N}$, и удовлетворяющая неравенству $\|\tilde{Q}_\varepsilon\| \leq (2a+1)\delta$ (а значит, $\|\tilde{Q}_\varepsilon\| \leq \varepsilon$ в силу выбора δ), что у возмущенной системы (6) с матрицей $Q(\cdot) \equiv \tilde{Q}_\varepsilon(\cdot)$ найдется решение $\tilde{y}_\varepsilon(\cdot)$, для которого при всех $i \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$\|\tilde{y}_\varepsilon((i-1)T)\| \geq 2^{-1} \sin \delta \|X_A^{-1}(iT, (i-1)T)\| \|\tilde{y}_\varepsilon(iT)\|.$$

Последовательно воспользовавшись этими неравенствами при $i = m+1, \dots, k$ ($m < k$), легко получаем

$$\ln \frac{\|\tilde{y}_\varepsilon(kT)\|}{\|\tilde{y}_\varepsilon(mT)\|} \leq -(k-m-1) \ln(2^{-1} \sin \delta) + \sum_{i=m+1}^k \ln \|X_A^{-1}(iT, (i-1)T)\|^{-1} \quad (27)$$

для всех натуральных $m < k$. Так как при вычислении показателей Боля решений систем из \mathcal{M}_n можно считать [7, с. 537], что t и τ пробегают точки какой-либо арифметической прогрессии, то вследствие этого и неравенства (27) получаем, что

$$\begin{aligned} \overline{\beta}[\tilde{y}_\varepsilon] &= \overline{\lim}_{k-m \rightarrow +\infty} \frac{1}{(k-m)T} \ln \frac{\|\tilde{y}_\varepsilon(kT)\|}{\|\tilde{y}_\varepsilon(mT)\|} \leq \\ &\stackrel{(27)}{\leq} -T^{-1} \ln(2^{-1} \sin \delta) + \overline{\lim}_{k-m \rightarrow +\infty} \frac{1}{(k-m)T} \sum_{i=m+1}^k \ln \|X_A^{-1}(iT, (i-1)T)\|^{-1} \stackrel{(26)}{\leq} \underline{\omega}_0^*(A) + \varepsilon \end{aligned}$$

для любого $\varepsilon > 0$. Второе неравенство в (22) доказано.

Таким образом, в силу вторых неравенств в (13) и (22) имеем: $\bar{\omega}_*^0(A) \leq \underline{\omega}_*^0(A)$, а значит, внешний предел во втором равенстве (11) существует и второе равенство в (12) доказано. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Если мы введем логически недостающие аналоги показателей (11), получающиеся заменой в определениях (11) соответственно верхнего предела нижним и нижнего верхним:

$$\begin{aligned}\Omega_*^0(A) & \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{T \rightarrow +\infty} \overline{\lim}_{k-m \rightarrow +\infty} \frac{1}{(k-m)T} \sum_{i=m+1}^k \ln \|X_A(iT, (i-1)T)\|, \\ \omega_0^*(A) & \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{T \rightarrow +\infty} \underline{\lim}_{k-m \rightarrow +\infty} \frac{1}{(k-m)T} \sum_{i=m+1}^k \ln \|X_A^{-1}(iT, (i-1)T)\|^{-1},\end{aligned}\quad (28)$$

где $k, m \in \mathbb{N}$, то легко видеть, что мы не получим новых величин, поскольку показатели (28) совпадают с показателями (3) соответственно. Действительно, заменяя в подп. 1.1 и 2.1 доказательства теоремы 1 нижние пределы верхними, а в подп. 1.2. и 2.2 верхние пределы нижними, получим соответственно доказательство равенств

$$\Omega_*^0(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \sup_{\|Q\| \leq \varepsilon} s\bar{\beta}(A+Q) \quad \text{и} \quad \omega_0^*(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \inf_{\|Q\| \leq \varepsilon} i\bar{\beta}(A+Q).$$

Отсюда и равенств (7) вытекает, что $\Omega_*^0(A) = \Omega^0(A)$ и $\omega_0^*(A) = \omega_0(A)$.

Приведем также прямое доказательство двух последних равенств. Пусть верхний предел в первом из равенств (3) реализуется на двойной последовательности $((\tau_l, t_l))_{l \in \mathbb{N}}$, $t_l - \tau_l \rightarrow +\infty$ при $l \rightarrow +\infty$, т. е. $\Omega^0(A) = \lim_{l \rightarrow +\infty} (t_l - \tau_l)^{-1} \ln \|X_A(t_l, \tau_l)\|$. Зафиксируем $T > 0$, и пусть $m_l T, \dots, k_l T$ — члены арифметической прогрессии $(qT)_{q \in \mathbb{N}}$, попадающие в отрезок $[\tau_l, t_l]$. Тогда, поскольку $m_l T - \tau_l < T$ и $t_l - k_l T < T$, очевидно неравенство

$$\|X_A(t_l, \tau_l)\| \leq e^{2aT} \prod_{i=m_l+1}^{k_l} \|X_A(iT, (i-1)T)\|,$$

откуда и следует неравенство $\Omega^0(A) \leq \Omega_*^0(A)$. С другой стороны, из первого равенства в (3) и определения верхнего предела вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $T_\varepsilon > 0$, такое, что для всех $T \geq T_\varepsilon$ и $i \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $\ln \|X_A(iT, (i-1)T)\| \leq (\Omega^0(A) + \varepsilon)T$, а значит, $\Omega_*^0(A) \leq \Omega^0(A)$. Равенство $\Omega_*^0(A) = \Omega^0(A)$ доказано. Доказательство равенства $\omega_0^*(A) = \omega_0(A)$ проводится аналогично.

Таким образом, показатели (3) и (28) совпадают. Вместе с тем, как показывается в теореме 2, равенство их аналогов — показателей (8) и (11) — места не имеет.

Докажем, что показатели (3), (8) и (11) удовлетворяют неравенствам

$$\omega_0(A) \leq \omega_*^0(A) \leq \omega^0(A) \leq \Omega^0(A) \quad \text{и} \quad \omega_0(A) \leq \Omega_0(A) \leq \Omega_*^0(A) \leq \Omega^0(A).\quad (29)$$

Как показано в [21, с. 66], показатели $\Omega^0(A)$ и $\Omega_0(A)$ можно вычислять по формулам:

$$\begin{aligned}\Omega^0(A) & = \lim_{T \rightarrow +\infty} \overline{\lim}_{\mathbb{N} \ni l \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \ln \|X_A(lT, (l-1)T)\|, \\ \Omega_0(A) & = \lim_{T \rightarrow +\infty} \underline{\lim}_{\mathbb{N} \ni l \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \ln \|X_A(lT, (l-1)T)\|\end{aligned}\quad (30)$$

(в [21, с. 66] доказано первое из этих равенств, доказательство второго полностью аналогично). Аналогичные равенства имеют место [21, с. 66] и для показателей $\omega_0(A)$ и $\omega^0(A)$. Тогда, учитывая, что в соотношениях (11) можно без нарушения общности считать [5], что во внутреннем

пределе еще и $m \rightarrow +\infty$, и заменяя в первом равенстве из (11) каждое из $k - m$ слагаемых наибольшим из них, получим вследствие первой формулы в (30) неравенство $\Omega_0^*(A) \leq \Omega^0(A)$, а заменяя в первом равенстве из (11) каждое из $k - m$ слагаемых наименьшим из них – неравенство $\Omega_0(A) \leq \Omega_0^*(A)$. Неравенство $\omega_0(A) \leq \Omega_0(A)$ – непосредственное следствие очевидного неравенства $\|X_A^{-1}(t, \tau)\|^{-1} \leq \|X_A(t, \tau)\|$ для всех $t, \tau \geq 0$. Точно так же устанавливается справедливость первой цепочки неравенств в (29).

Докажем, что существуют системы из \mathcal{M}_n , для которых средние неравенства в каждой из цепочек (29) являются строгими, т. е., другими словами, докажем, что равенства (10) в общем случае места не имеют.

Т е о р е м а 2. *Для любого натурального $n \geq 2$ существуют системы $A \in \mathcal{M}_n$, для которых одновременно выполняются неравенства $\Omega_0^*(A) > \Omega_0(A)$ и $\omega_*^0(A) < \omega^0(A)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что такие системы найдутся уже в классе диагональных систем. Последовательность $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ точек временной полуоси зададим равенствами

$$T_{2j-1} = 2^{j+2} - 2^j \quad \text{и} \quad T_{2j} = 2^{j+2}, \quad j \in \mathbb{N}, \quad (31)$$

а кусочно-постоянную функцию $a(\cdot) : [0, +\infty) \rightarrow \{-1, 1\}$ – условием

$$a(t) \equiv (-1)^i \quad \text{при} \quad t \in [T_i, T_{i+1}), \quad i \in \mathbb{N}, \quad (32)$$

и $a(t) \equiv 1$ при $t \in [0, T_1)$. Пусть диагональная матрица $D(t) = \text{diag}[-a(t), a(t)]$, $t \geq 0$.

Докажем, что для двумерной системы

$$\dot{x} = D(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \geq 0, \quad (33)$$

справедливы неравенства $\Omega_0(D) < \Omega_0^*(D)$ и $\omega_*^0(D) < \omega^0(D)$.

Поскольку система (33) диагональная, то для ее матрицы Коши $X_D(\cdot, \cdot)$ верно равенство

$$\ln \|X_D(t, \tau)\| = \left| \int_{\tau}^t a(s) ds \right|, \quad t, \tau \geq 0. \quad (34)$$

Тогда в силу определений (31) и (32) получаем: $\ln \|X_D(T_{2j}, T_{2j-2})\| = 0$, $j \in \mathbb{N}$. Поэтому, так как $T_{2j} - T_{2j-2} \rightarrow +\infty$ при $j \rightarrow +\infty$, то вследствие первого равенства в (8) верно неравенство $\Omega_0(D) \leq 0$. Хотя этого неравенства достаточно для доказательства теоремы, заметим, что, с другой стороны, в силу (34) $\ln \|X_D(t, \tau)\| \geq 0$. Следовательно, $\Omega_0(D) = 0$.

Вычислим величину $\Omega_0^*(D)$. Фиксируем $T > 0$. В отрезок $[mT, kT]$ длины $(k - m)T$ попадает не более чем $[\log_2((k - m)T)] - 2$ точек $T_{2j} = 2^{j+2}$, $j \in \mathbb{N}$, а значит, не более чем $2[\log_2((k - m)T)]$ точек последовательности $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Если точка T_i не принадлежит отрезку $[(l - 1)T, lT]$, $m \leq l \leq k$, то в силу определений (31) и (32) $\ln \|X_D(lT, (l - 1)T)\| = T$. Если же точка T_i принадлежит отрезку $[(l - 1)T, lT]$, $m \leq l \leq k$, то в силу (34) можно утверждать только, что $\ln \|X_D(lT, (l - 1)T)\| \geq 0$. Поэтому

$$\sum_{i=m+1}^k \ln \|X_D(iT, (i - 1)T)\| \geq (k - m)T - 2T [\log_2((k - m)T)],$$

а значит, для любого $T > 0$ верно неравенство

$$\lim_{k-m \rightarrow +\infty} \frac{1}{(k - m)T} \sum_{i=m+1}^k \ln \|X_D(iT, (i - 1)T)\| \geq 1.$$

Следовательно, $\Omega_0^*(D) \geq 1$. Хотя этого неравенства достаточно для доказательства теоремы, заметим, что, с другой стороны, так как $|a(t)| \leq 1$, то в силу (34) $\ln \|X_D(t, \tau)\| \leq t - \tau$ для всех $t, \tau \geq 0$. Поэтому $\Omega_0^*(D) \leq 1$, а значит, $\Omega_0^*(D) = 1$. Таким образом, $\Omega_0(D) = 0 < 1 = \Omega_0^*(D)$.

Вычислим величины $\omega^0(D)$ и $\omega_*^0(D)$. Поскольку $\ln \|X_D^{-1}(T_{2j}, T_{2j-2})\|^{-1} = 0$, $j \in \mathbb{N}$, и $T_{2j} - T_{2j-2} \rightarrow +\infty$ при $j \rightarrow +\infty$, то $\omega^0(D) \geq 0$. С другой стороны, вследствие (34) имеет место неравенство $\ln \|X_D^{-1}(t, \tau)\|^{-1} \leq 0$, а значит, $\omega^0(D) \leq 0$. Следовательно, $\omega^0(D) = 0$.

Вычислим величину $\omega_*^0(D)$. Фиксируем $T > 0$. Как показано выше, в отрезок $[mT, kT]$ длины $(k - m)T$ попадает не более чем $2[\log_2((k - m)T)]$ точек последовательности $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Если точка T_i не принадлежит отрезку $[(l - 1)T, lT]$, $m \leq l \leq k$, то в силу определений (31) и (32) $\ln \|X_D^{-1}(lT, (l - 1)T)\|^{-1} = -T$. Если же точка T_i принадлежит отрезку $[(l - 1)T, lT]$, $m \leq l \leq k$, то в силу (34) можно утверждать только, что выполнено неравенство $\ln \|X_D^{-1}(lT, (l - 1)T)\|^{-1} \leq 0$. Поэтому

$$\sum_{i=m+1}^k \ln \|X_D^{-1}(iT, (i-1)T)\|^{-1} \leq -(k - m)T + 2T[\log_2((k - m)T)],$$

а значит, для любого $T > 0$ верно неравенство

$$\overline{\lim}_{k-m \rightarrow +\infty} \frac{1}{(k - m)T} \sum_{i=m+1}^k \ln \|X_D^{-1}(iT, (i-1)T)\|^{-1} \leq -1.$$

Следовательно, $\omega_*^0(D) \leq -1$. С другой стороны, так как $|a(t)| \leq 1$, то в силу (34) верно неравенство $\ln \|X_D^{-1}(t, \tau)\|^{-1} \geq -(t - \tau)$ для всех $t, \tau \geq 0$. Поэтому $\omega_*^0(D) \geq -1$, а значит, $\omega_*^0(D) = -1$. Таким образом, $\omega_*^0(D) = -1 < 0 = \omega^0(D)$. Теорема в случае $n = 2$ доказана.

Для доказательства теоремы в случае $n > 2$ достаточно в качестве матрицы $A(\cdot)$ взять $n \times n$ -матрицу, левый верхний 2×2 -блок которой – матрица $D(\cdot)$, а остальные элементы нулевые. Теорема доказана.

Поведение генеральных показателей при малых возмущениях. Приведенная выше теорема Р. Э. Винограда [4] (см. соотношения (7)) и теорема 1 данной работы дают точные крайние границы изменения (подвижности) верхних и нижних показателей Боля решений системы из \mathcal{M}_n под действием малых возмущений ее матрицы коэффициентов. Рассмотрим, как могут изменяться сами эти точные границы $\Omega^0(A)$, $\omega_*^0(A)$ и $\Omega_0^*(A)$, $\omega_0(A)$, а также величины $\Omega_0(A)$ и $\omega^0(A)$ под действием малых возмущений матрицы коэффициентов системы (1). Напомним, что функция $\theta(\cdot): \mathcal{M}_n \rightarrow \mathbb{R}$ называется устойчивой вверх (соответственно вниз), если $\theta(\cdot)$ является полунепрерывной сверху (соответственно снизу) функцией на метрическом пространстве $(\mathcal{M}_n, \text{dist}_u)$, т. е. если $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \sup_{\|Q\| \leq \varepsilon} \theta(A + Q) = \theta(A)$ (соответственно $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \inf_{\|Q\| \leq \varepsilon} \theta(A + Q) = \theta(A)$) для любой точки $A(\cdot)$ из \mathcal{M}_n .

Известно, что показатель $\Omega^0(A)$ устойчив вверх, а показатель $\omega_0(A)$ – вниз [3, с. 180]. В направлениях же, противоположных указанным, эти показатели, если $n \geq 2$, неустойчивы [27], т. е. для всякого натурального $n \geq 2$ существуют такие системы $A \in \mathcal{M}_n$, для которых справедливы соответственно неравенства

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \inf_{\|Q\| \leq \varepsilon} \Omega^0(A + Q) < \Omega^0(A) \quad \text{и} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \sup_{\|Q\| \leq \varepsilon} \omega_0(A + Q) > \omega_0(A).$$

Этими же свойствами, как показывают две следующие теоремы, обладают и показатели $\Omega_0^*(A)$ и $\omega_*^0(A)$ соответственно.

Т е о р е м а 3. Показатель $\Omega_0^*(A)$ устойчив вверх, а показатель $\omega_*^0(A)$ – вниз.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Приведем два доказательства сформулированной теоремы: первое доказательство – следствие равенств (12), а второе – следствие формул вычисления (11).

1. Допустим, что показатель $\Omega_0^*(A)$ не устойчив вверх. Другими словами это означает, что для некоторой матрицы $A \in \mathcal{M}_n$ найдется последовательность $(V_k(\cdot))_{k \in \mathbb{N}}$ кусочно-непрерывных $n \times n$ -матриц такая, что $\|V_k\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow +\infty$ и

$$\Omega_0^*(A + V_k) - \Omega_0^*(A) > \delta \quad (35)$$

для некоторого фиксированного $\delta > 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$.

В силу первого равенства в (12), заменяя в нем A на $A + V_k$, получаем: для каждого $k \in \mathbb{N}$ найдется такое возмущение $W_k(\cdot)$ системы $A + V_k$, что $\|W_k\| \leq \|V_k\|$ и $s\beta(A + V_k + W_k) \geq \Omega_0^*(A + V_k) - \delta/2$. Обозначим $Q_k(\cdot) = V_k(\cdot) + W_k(\cdot)$. Тогда последнее неравенство примет вид $s\beta(A + Q_k) \geq \Omega_0^*(A + V_k) - \delta/2$, а значит, вследствие (35) имеем: $s\beta(A + Q_k) > \Omega_0^*(A) + \delta/2$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Но это неравенство, так как $\|Q_k\| \leq 2\|V_k\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow +\infty$, противоречит первому равенству в (12). Следовательно, показатель $\Omega_0^*(\cdot)$ устойчив вверх.

Аналогично этим способом устанавливается устойчивость вниз показателя $\omega_*^0(\cdot)$.

2. Докажем устойчивость вниз показателя $\omega_*^0(\cdot)$, используя второе представление в (11).

Пусть $r(t)$, $t \geq 0$, – нижняя функция системы (1). Как показано в подп. 1.2 доказательства теоремы 1, для любого ненулевого решения $y(\cdot)$ возмущенной системы (6) с $\|Q\| \leq \varepsilon$ имеет место неравенство (19). Вследствие этого неравенства для нормы матрицы Коши $X_{A+Q}(\cdot, \cdot)$ системы (6), где $\|Q\| \leq \varepsilon$, получаем при всех $t \geq \tau \geq 0$ оценку

$$\|X_{A+Q}^{-1}(t, \tau)\| = \sup_{y(\cdot) \in \mathcal{X}(A+Q)} \frac{\|y(\tau)\|}{\|y(t)\|} \stackrel{(19)}{\leq} c_r \exp \left\{ -\int_{\tau}^t r(s) ds + c_r \varepsilon (t - \tau) \right\}.$$

Поэтому в силу второго равенства в (11) для любой нижней функции $r(\cdot)$ при всех достаточно больших T верно неравенство

$$\begin{aligned} \omega_*^0(A + Q) &\geq \overline{\lim}_{k-m \rightarrow +\infty} \frac{1}{(k-m)T} \sum_{i=m+1}^k \ln \|X_{A+Q}^{-1}(iT, (i-1)T)\|^{-1} \geq \\ &\geq -c_r \varepsilon + \overline{\lim}_{k-m \rightarrow +\infty} \sum_{i=m+1}^k \int_{(i-1)T}^{iT} r(s) ds. \end{aligned}$$

Следовательно, при любой нижней функции $r(\cdot)$ справедлива оценка

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \inf_{\|Q\| \leq \varepsilon} \omega_*^0(A + Q) \geq \overline{\lim}_{k-m \rightarrow +\infty} \sum_{i=m+1}^k \int_{(i-1)T}^{iT} r(s) ds.$$

Взяв в этом неравенстве в качестве нижней функции $r(\cdot)$ функцию $r_T(\cdot)$ (см. определение (21)) и перейдя затем к пределу при $T \rightarrow +\infty$, получим $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \inf_{\|Q\| \leq \varepsilon} \omega_*^0(A + Q) \geq \omega_*^0(A)$. Поскольку обратное неравенство очевидно, устойчивость вниз показателя $\omega_*^0(\cdot)$ доказана.

Точно так же, используя неравенство (15) и верхнюю функцию (17), получаем доказательство устойчивости вверх показателя $\Omega_0^*(\cdot)$. Теорема доказана.

Покажем, что, если $n \geq 2$, показатели $\Omega_0^*(\cdot)$ и $\omega_*^0(\cdot)$ в направлениях, противоположных указанным в теореме 3, неустойчивы.

Теорема 4. Если $n \geq 2$, то показатель $\Omega_0^*(\cdot)$ неустойчив вниз, а показатель $\omega_0^*(\cdot)$ – вверх, т. е. при $n \geq 2$ существуют такие системы $A \in \mathcal{M}_n$, для которых выполнены соответственно неравенства

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \inf_{\|Q\| \leq \varepsilon} \Omega_0^*(A+Q) < \Omega_0^*(A) \quad \text{и} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \sup_{\|Q\| \leq \varepsilon} \omega_0^*(A+Q) > \omega_0^*(A). \quad (36)$$

Доказательство. Для натурального p назовем p -блоком диагональную кусочно-постоянную 2×2 -матрицу $B_p(t)$, $t \in [0, 3p)$, определяемую следующим образом:

$$B_p(t) = \begin{cases} \text{diag}[1, -2], & \text{если } t \in [0, p) \cup (2p, 3p), \\ \text{diag}[1, 1], & \text{если } t \in [p, 2p]. \end{cases} \quad (37)$$

Через $B_p(t; \tau)$ обозначим сдвиг p -блока на $\tau > 0$ единиц вправо, т. е. $B_p(t; \tau) \equiv B_p(t - \tau)$, где $t \in [\tau, \tau + 3p)$.

Отметим на временной полуоси попарно непересекающиеся полуинтервалы Δ_l , $l \in \mathbb{N}$, удовлетворяющие следующим условиям. Полуинтервал Δ_l расположен на полуоси правее полуинтервала Δ_{l-1} , $l \geq 2$, и имеет длину $|\Delta_l|$, равную $3l^2(l+1)/2$. При этом каждый полуинтервал Δ_l точками $\tau_l^1 < \tau_l^2 < \dots < \tau_l^{l+1}$ (точки τ_l^1 и τ_l^{l+1} – соответственно левый и правый концы полуинтервала Δ_l) разбит на l полуинтервалов $\Delta_l^p = [\tau_l^p, \tau_l^{p+1})$, $p = 1, \dots, l$, и длина $|\Delta_l^p|$ полуинтервала Δ_l^p равна $3lp$. Кроме того, для любого $q \in \mathbb{N}$ найдется бесконечно много отрезков Δ_l , для которых число τ_l^q кратно $3q$ (выполнение этого условия легко обеспечить, строя полуинтервалы Δ_l индукцией по $l \in \mathbb{N}$). Для $q \in \mathbb{N}$ множество тех l , для которых $\tau_l^q / (3q) \in \mathbb{N}$, обозначим $L(q)$ и для $l \in L(q)$ натуральное число $\tau_l^q / (3q)$ – через $p_l(q)$.

Построим вначале двумерную систему $A_2 \in \mathcal{M}_2$, для которой выполнено первое из неравенств (36). Зададим ее сначала на каждом полуинтервале Δ_l , $l \in \mathbb{N}$. Для этого, поскольку $\Delta_l = \bigcup_{p=1}^l \Delta_l^p$, достаточно задать ее на каждом полуинтервале Δ_l^p , $l \in \mathbb{N}$, $p = 1, \dots, l$. Так как длина полуинтервала Δ_l^p равна $3lp$, то разобьем полуинтервал Δ_l^p на l равных (длины $3p$) полуинтервалов $\Delta_l^{p,i}$, $i = 1, \dots, l$ (нумерация слева направо), и пусть $T_l^{p,i}$ – левый конец полуинтервала $\Delta_l^{p,i}$ (в частности, $T_l^{p,1} = \tau_l^p$). На полуинтервале $\Delta_l^{p,i}$ положим матрицу $A_2(\cdot)$ совпадающей со сдвигом p -блока на $T_l^{p,i}$ единиц вправо, т. е. в силу (37)

$$A_2(t) = B_p(t; T_l^{p,i}) = \begin{cases} \text{diag}[1, -2], & \text{если } t \in [T_l^{p,i}, T_l^{p,i} + p) \cup (T_l^{p,i} + 2p, T_l^{p,i} + 3p), \\ \text{diag}[1, 1], & \text{если } t \in [T_l^{p,i} + p, T_l^{p,i} + 2p], \end{cases} \quad (38)$$

где $l \in \mathbb{N}$, $p = 1, \dots, l$, $i = 1, \dots, l$. При $t \notin \bigcup_{l \in \mathbb{N}} \Delta_l$ положим $A_2(t) \equiv \text{diag}[1, 1]$. Система A_2 построена. Для упрощения в дальнейшем записи обозначим отрезок $[T_l^{p,i} + p, T_l^{p,i} + 2p]$ через $\delta_l^{p,i}$, $l \in \mathbb{N}$, $p = 1, \dots, l$, $i = 1, \dots, l$.

Поскольку построенная система $A_2 \in \mathcal{M}_2$ диагональная: $A_2(t) = \text{diag}[a_1(t), a_2(t)]$, $t \geq 0$, и $a_1(t) \equiv 1$, а $a_2(t) \leq 1$, то $\Omega_0^*(A_2) = 1$.

Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется 2×2 -матрица-возмущение $Q_\varepsilon(\cdot)$, такая, что $\|Q_\varepsilon\| \leq \varepsilon$ и $\Omega_0^*(A_2 + Q_\varepsilon) = 0$. Зафиксируем какое-либо натуральное $p_\varepsilon \geq \varepsilon^{-1}$. Для каждого $l \geq p_\varepsilon$ и при

каждом таком l для всех $p = p_\varepsilon, \dots, l$ положим $Q_\varepsilon(t) \equiv \begin{pmatrix} 0 & p^{-1} \\ -p^{-1} & 0 \end{pmatrix}$ при $t \in \delta_l^{p,i}$, $i = 1, \dots, l$,

и $Q_\varepsilon(t) \equiv \text{diag}[0, 0]$ при остальных $t \geq 0$.

Вследствие задания матрицы $Q_\varepsilon(\cdot)$ и равенств (38) для матрицы Коши $X_{A_2+Q_\varepsilon}(\cdot, \cdot)$ на тех полуинтервалах $\Delta_l^{p,i}$, на которых $Q_\varepsilon(t) \neq \text{diag}[0, 0]$, справедливы равенства:

$$\begin{aligned} X_{A_2+Q_\varepsilon}(T_l^{p,i} + p, T_l^{p,i}) &= X_{A_2+Q_\varepsilon}(T_l^{p,i} + 3p, T_l^{p,i} + 2p) = \text{diag}[e^p, e^{-2p}], \\ X_{A_2+Q_\varepsilon}(T_l^{p,i} + 2p, T_l^{p,i} + p) &= e^p \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Поэтому, перемножая эти матрицы, получаем

$$X_{A_2+Q_\varepsilon}(T_l^{p,i} + 3p, T_l^{p,i}) = \prod_{j=3}^l X_{A_2+Q_\varepsilon}(T_l^{p,i} + jp, T_l^{p,i} + (j-1)p) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

в частности, $\|X_{A_2+Q_\varepsilon}(T_l^{p,i} + 3p, T_l^{p,i})\| = 1$ при всех $l \geq p_\varepsilon$, $p = p_\varepsilon, \dots, l$ и $i = 1, \dots, l$. Значит, для любого фиксированного $q \in \mathbb{N}$ и $q \geq p_\varepsilon$, если $l \in L(q)$, получаем (ниже $T_q \stackrel{\text{def}}{=} 3q$):

$$\sum_{i=p_l(q)}^{p_l(q)+l} \ln \|X_{A_2+Q_\varepsilon}(iT_q, (i-1)T_q)\| = 0. \quad (39)$$

Следовательно, считая натуральное $q \geq p_\varepsilon$ и взяв в первом равенстве из (11) $T = T_q$ и $m = p_l(q)$, $k = p_l(q) + l$, где $l \in L(q)$, в силу (39) получим:

$$\Omega_0^*(A_2 + Q_\varepsilon) \leq \lim_{T_q \rightarrow +\infty} \lim_{L(q) \ni l \rightarrow +\infty} \sum_{i=p_l(q)}^{p_l(q)+l} \ln \|X_{A_2+Q_\varepsilon}(iT_q, (i-1)T_q)\| = 0.$$

Итак, $\Omega_0^*(A_2 + Q_\varepsilon) \leq 0$ при любом $\varepsilon > 0$. Хотя этого неравенства достаточно для доказательства первого неравенства из (36), несложно показать, что в действительности $\Omega_0^*(A_2 + Q_\varepsilon) = 0$. Первое неравенство в (36) в случае $n = 2$ доказано. Для его доказательства в случае $n > 2$ достаточно в качестве матрицы $A(\cdot)$ коэффициентов и матрицы-возмущения $Q(\cdot)$ взять блочно-диагональные $n \times n$ -матрицы $A(\cdot) \equiv \text{diag}[A_2(\cdot), 0, \dots, 0]$ и $Q(\cdot) \equiv \text{diag}[Q_\varepsilon(\cdot), 0, \dots, 0]$.

Для доказательства второго неравенства в (36) достаточно вместо построенной матрицы $A(\cdot)$ взять матрицу $-A(\cdot)$. Тогда несложно убедиться, что для исходной и возмущенной систем справедливы равенства $\omega_*^0(-A) = -1$ и $\omega_*^0(-A + Q_\varepsilon) = 0$ при любом $\varepsilon > 0$. Теорема доказана.

Т е о р е м а 5. *Каждый из показателей $\Omega_0(\cdot)$ и $\omega^0(\cdot)$ не устойчив ни вверх, ни вниз при малых возмущениях матрицы коэффициентов.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение теоремы легко следует из примеров систем, построенных в доказательстве теорем 2 и 4.

Так как для всех $t, s \geq 0$ верно равенство $\max_{x \in \mathcal{X}(A)} \|x(t)\| / \|x(s)\| = \|X_A(t, s)\|$, то

$$\Omega_0(A) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t - \tau} \ln \max_{x \in \mathcal{X}(A)} \frac{\|x(t)\|}{\|x(s)\|} \geq \sup_{x \in \mathcal{X}(A)} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t - \tau} \ln \frac{\|x(t)\|}{\|x(s)\|} = \underline{s\beta}(A) \quad (40)$$

(см. первые равенства в определениях (2) и (9)). Согласно теореме 2, существует система $A \in \mathcal{M}_n$, для которой $\Omega_0(A) < \Omega_0^*(A)$. Тогда для этой системы в силу этого неравенства, теоремы 1 и неравенства (40) имеем

$$\Omega_0(A) < \Omega_0^*(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \sup_{\|Q\| \leq \varepsilon} \underline{s\beta}(A + Q) \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \sup_{\|Q\| \leq \varepsilon} \Omega_0(A + Q).$$

Следовательно, показатель $\Omega_0(A)$ не устойчив вверх при малых возмущениях матрицы коэффициентов.

Докажем, что показатель $\Omega_0(A)$ не устойчив и вниз при таких возмущениях. Рассмотрим систему A , построенную в доказательстве теоремы 4. Несложно убедиться, что для нее справедливы равенства $\Omega_0(A) = \Omega_0^*(A) = 1$. Но тогда для этой системы получаем:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \inf_{\|Q\| \leq \varepsilon} \Omega_0(A+Q) \leq \lim_{(29) \varepsilon \rightarrow +0} \inf_{\|Q\| \leq \varepsilon} \Omega_0^*(A+Q) < \Omega_0^*(A) = \Omega_0(A).$$

Точно так же доказывается, что показатель $\omega^0(A)$ не устойчив ни вверх, ни вниз при малых возмущениях матрицы коэффициентов. Теорема доказана.

В заключение работы отметим один открытый вопрос: исчерпывают ли на классе \mathcal{M}_n неравенства (29) все возможные соотношения между показателями $\omega_0(A)$, $\omega_*^0(A)$, $\omega^0(A)$, $\Omega_0(A)$, $\Omega_0^*(A)$, $\Omega^0(A)$. Если исключить из этого списка показатели $\omega_*^0(A)$ и $\Omega_0^*(A)$, то ответ на этот вопрос, как показано в работе [28], является утвердительным.

Авторы выражают благодарность профессору А. Чорнику и М. Незабитовскому, высказавшим гипотезу о несправедливости равенств (10), многочисленные обсуждения вопросов, связанных с равномерными асимптотическими характеристиками дифференциальных и разностных систем.

Список использованной литературы

1. Былов, Б. Ф. Почти приводимые системы дифференциальных уравнений / Б. Ф. Былов // Сиб. мат. журн. – 1962. – Т. 3, № 3. – С. 333–359.
2. Миллионщиков, В. М. Структура фундаментальных матриц R-систем с почти периодическими коэффициентами / В. М. Миллионщиков // Докл. АН СССР. – 1966. – Т. 171, № 2. – С. 288–291.
3. Далецкий, Ю. Л. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн. – М.: Наука, 1970.
4. Vinograd, R. E. Simultaneous attainability of central Lyapunov and Bohl exponents for ODE linear systems / R. E. Vinograd // Proc. Am. Math. Soc. – 1983. – Vol. 88, N 4. – P. 595–601.
5. Барабанов, Е. А. Равномерные показатели линейных систем дифференциальных уравнений / Е. А. Барабанов, А. В. Конюх // Дифференц. уравнения. – 1994. – Т. 30, № 10. – С. 1665–1676.
6. Барабанов, Е. А. Генеральные показатели решений линейных дифференциальных систем как функции начального вектора / Е. А. Барабанов, А. В. Конюх // Успехи мат. наук. – 1994. – Т. 49, вып. 4. – С. 94–95.
7. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости / Б. Ф. Былов [и др.]. – М.: Наука, 1966.
8. Розенвассер, Е. Н. Показатели Ляпунова в теории линейных систем управления / Е. Н. Розенвассер. – М.: Наука, 1977.
9. Bohe, P. Über Differentialgleichungen / P. Bohe // J. reine und angew. Math. – 1913. – Bd. 144, Hf 4. – S. 284–318.
10. Боль, П. Собрание трудов / П. Боль. – Рига: Зинатне, 1974.
11. Персидский, К. П. К теории устойчивости интегралов системы дифференциальных уравнений. Часть первая / К. П. Персидский // Изв. физ.-мат. о-ва при Казан. ун-те. 3-я сер. – 1936–1937. – Т. 8. – С. 47–85.
12. Персидский, К. П. Избранные труды: в 2 т. / К. П. Персидский. – Алма-Ата: Наука, 1976. – Т. 1: Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. Теория вероятностей.
13. Крейн, М. Г. О некоторых вопросах, связанных с кругом идей Ляпунова в теории устойчивости / М. Г. Крейн // Успехи мат. наук. – 1948. – Т. 3, вып. 3. – С. 166–169.
14. Крейн, М. Г. Лекции по теории устойчивости решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / М. Г. Крейн. – Киев: Изд-во АН УССР, Ин-т математики, 1964.
15. Миллионщиков, В. М. К спектральной теории неавтономных линейных систем дифференциальных уравнений / В. М. Миллионщиков // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1968. – Т. 18. – С. 147–168.
16. Czornik, A. On the spectrum of discrete time-varying linear systems / A. Czornik, M. Niezabitowski // Nonlinear Analysis: Hybrid Systems. – 2013. – Vol. 9. – P. 27–41.
17. Czornik, A. Alternative formulae for lower general exponent of discrete linear time-varying systems / A. Czornik, M. Niezabitowski // J. of the Franklin Inst. – 2015. – Vol. 352. – P. 399–419.
18. Беклемишев, Д. В. Дополнительные главы линейной алгебры / Д. В. Беклемишев – М.: Наука, 1983.
19. Barabanov, E. A. Bohl exponents of linear differential systems / E. A. Barabanov, A. V. Konyukh // Memoirs on Diff. Eq. and Math. Phys. – 2001. – Vol. 24. – P. 151–158.
20. Барабанов, Е. А. Показатели Боля линейных дифференциальных систем при убывающих возмущениях / Е. А. Барабанов, С. В. Кузнецов // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2001. – Т. 45, № 3. – С. 7–10.
21. Изобов, Н. А. Введение в теорию показателей Ляпунова / Н. А. Изобов. – Минск: БГУ, 2006.
22. Виноград, Р. Э. О центральном характеристическом показателе системы дифференциальных уравнений / Р. Э. Виноград // Мат. сб. – 1957. – Т. 42, вып. 2. – С. 207–222.

23. *Миллионщиков, В. М.* О неустойчивости характеристических показателей статистически правильных систем / В. М. Миллионщиков // *Мат. заметки.* – 1967. – Т. 2, вып. 3. – С. 315–318.
24. *Миллионщиков, В. М.* Доказательство достижимости центральных показателей линейных систем / В. М. Миллионщиков // *Сиб. мат. журн.* – 1969. – Т. 10, № 1. – С. 99–104.
25. *Виноград, Р. Э.* Необходимый и достаточный критерий и точная асимптотика устойчивости по первому приближению / Р. Э. Виноград // *Дифференц. уравнения.* – 1969. – Т. 5, № 5. – С. 800–813.
26. *Изобов, Н. А.* Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений / Н. А. Изобов. // *Итоги науки и техники. Сер. Мат. анализ / ВИНТИ.* – М., 1974. – Т. 12. – С. 71–146.
27. *Миллионщиков, В. М.* О неустойчивости особых показателей и о несимметричности отношения почти приводимости линейных систем дифференциальных уравнений / В. М. Миллионщиков // *Дифференц. уравнения.* – 1969. – Т. 5, № 4. – С. 749–750.
28. *Серебрякова, Н. Г.* Взаимоотношения между генеральными показателями линейных дифференциальных систем / Н. Г. Серебрякова, А. Ф. Касабуцкий // *Вес. Бел. дзярж. пед. ун-та. Сер. 3.* – 2014. – № 4. – С. 34–37.

Поступила в редакцию 22.07.2015

УДК 519.21+519.6

А. Д. ЕГОРОВ

**О ПОРЯДКЕ СХОДИМОСТИ АППРОКСИМАЦИЙ ОДНОГО КЛАССА
ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ ВИНЕРОВСКОГО ПРОЦЕССА**

*Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь,
e-mail: egorov@im.bas-net.by*

Получена теорема о порядке сходимости приближенной формулы для вычисления математического ожидания одного класса функционалов специального вида от винеровского процесса. Формула основана на использовании дискретизации временного интервала и квадратурных формул, точных для функциональных многочленов третьей степени.

Ключевые слова: винеровский процесс, функционал от винеровского процесса, математическое ожидание, приближенное вычисление, порядок сходимости.

A. D. EGOROV

**ORDER OF CONVERGENCE OF APPROXIMATIONS FOR ONE CLASS
OF FUNCTIONALS OF THE WIENER PROCESS**

*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus,
e-mail: egorov@im.bas-net.by*

The result on the order of convergence of the approximate formula is obtained for evaluation of the mathematical expectation of one class of special-type functionals of the Wiener process. The formula is based on the use of sampling the time interval and the quadrature formulas exact for third-degree functional polynomials.

Keywords: Wiener process, functional of the Wiener process, mathematical expectation, approximate evaluation, order of convergence.

В данной работе рассматривается задача приближенного вычисления математического ожидания

$$I \equiv E \left[\int_0^t G(X_s) ds \right], \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

где $G(u)$, $u \in R$, – заданная функция, имеющая ограниченные производные до шестого порядка включительно, X_t – случайный процесс, заданный равенством

$$X_t = x + \int_0^t p(s) dW_s, \quad t \in [0, T],$$

где $x \in R$, $p(t)$ – детерминированная кусочно-непрерывная функция, удовлетворяющая условию $\sup_{[0, T]} |p(t)| \leq p = \text{const}$, $W = \{W_t, t \in [0, T]\}$ – винеровский процесс. Далее будет использоваться представление

$$X_t = X_{t_k} + \int_{t_k}^t p(s) dW_s, \quad t \in [t_k, t_{k+1}], \quad (2)$$

где $t_k = k\Delta$, $\Delta = \frac{t}{n}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$, – фиксированное разбиение отрезка $[0, t]$.

Наряду с соотношением (2) рассматривается равенство

$$\hat{X}_t = x_k + \int_{t_k}^t p(s) dW_s, \quad t \in [t_k, t_{k+1}], \quad (3)$$

где вещественные числа $x_k, k = 0, 1, 2, \dots, N, x_0 = x$, будут выбираться в соответствии с рассматриваемым ниже алгоритмом, предложенным в работе [1] для вычисления ожиданий функционалов от решений стохастических дифференциальных уравнений. Заметим, что из принятых ограничений вытекает возможность перестановки знаков математического ожидания и интеграла в (1) и применения квадратурной формулы трапеций

$$\int_0^t E[G(X_s)] ds \approx \frac{t}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} (E[G(X_{t_k})] + E[G(X_{t_{k+1}})]) \equiv I_n, \quad (4)$$

где

$$|I - I_n| \leq \frac{t}{12} \left(\frac{t}{n}\right)^2 \left| \frac{d^2}{ds^2} (E[G(X_s)]) \Big|_{s=t^*} \right|, \quad t^* \in [0, t]. \quad (5)$$

Так как точные значения ожиданий в правой части равенства (4) не известны, мы должны заменить их приближенными значениями и получить оценку погрешности формулы (4) после этой замены. В данной работе приближенные значения получаются в соответствии с упомянутым выше алгоритмом последовательно, используя функциональные квадратурные формулы для вычисления математических ожиданий, точные для многочленов третьей степени [2, 3]. Алгоритм предполагает также замену в правой части (4) X_{s_k} на \hat{X}_{s_k} из формулы (3), т. е. использование вместо (4) приближенной формулы

$$\int_0^t E[G(X_s)] ds \approx \frac{t}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} (E[G(\hat{X}_{t_k})] + E[G(\hat{X}_{t_{k+1}})]) \equiv \hat{I}_n. \quad (6)$$

Оценим погрешность аппроксимации после такой замены:

$$\hat{R}_n \equiv I - \hat{I}_n = (I - I_n) + (I_n - \hat{I}_n), \quad (7)$$

где первая разность в правой части (7) оценивается по формуле (5), а для второй разности имеем

$$(I_n - \hat{I}_n) = \frac{t}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \left((E[G(X_{t_k})] - E[G(\hat{X}_{t_k})]) + (E[G(X_{t_{k+1}})] - E[G(\hat{X}_{t_{k+1}})]) \right). \quad (8)$$

Поэтому получение оценки предлагаемого алгоритма связано с оценкой разностей

$$r_{k+1} \equiv E[G(X_{t_{k+1}})] - E[G(\hat{X}_{t_{k+1}})], \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

Используя разложение Тейлора

$$\begin{aligned} G(X_{t_{k+1}}) &= G\left(X_{t_k} + \int_{t_k}^{t_{k+1}} p(s) dW_s\right) = G(X_{t_k}) + G'(X_{t_k}) \int_{t_k}^{t_{k+1}} p(s) dW_s + \\ &+ \frac{1}{2} G''(X_{t_k}) \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} p(s) dW_s\right)^2 + \frac{1}{6} G^{(3)}(X_{t_k}) \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} p(s) dW_s\right)^3 + \\ &+ \frac{1}{24} G^{(4)}\left(X_{t_k} + \theta \int_{t_k}^{t_{k+1}} p(s) dW_s\right) \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} p(s) dW_s\right)^4, \quad \theta \in [t_k, t_{k+1}], \end{aligned}$$

и аналогичное разложение $G(\hat{X}_{t_{k+1}}) = G\left(x_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} p(s)dW_s\right)$, получим

$$\begin{aligned}
r_{k+1} &= \left(E[G(X_{t_k})] - G(x_k)\right) + \\
&+ E\left[G'(X_{t_k}) \int_{t_k}^{t_{k+1}} p(s)dW_s - G'(x_k) \int_{t_k}^{t_{k+1}} p(s)dW_s\right] + \\
&+ \frac{1}{2} E\left[G''(X_{t_k}) \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} p(s)dW_s\right)^2 - G''(x_k) \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} p(s)dW_s\right)^2\right] + \\
&+ \frac{1}{6} E\left[G^{(3)}(X_{t_k}) \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} p(s)dW_s\right)^3 - G^{(3)}(x_k) \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} p(s)dW_s\right)^3\right] + \\
&+ \frac{1}{24} E\left[G^{(4)}\left(X_{t_k} + \theta \int_{t_k}^{t_{k+1}} p(s)dW_s\right) \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} p(s)dW_s\right)^4 - \right. \\
&\left. - G^{(4)}\left(x_k + \tilde{\theta} \int_{t_k}^{t_{k+1}} p(s)dW_s\right) \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} p(s)dW_s\right)^4\right] \equiv p_k + \sum_{m=1}^4 p_k^{(m)}, \quad \theta, \tilde{\theta} \in [t_k, t_{k+1}].
\end{aligned}$$

Оценим величины $p_k^{(m)}$, $m=1,2,3,4$:

$$\begin{aligned}
p_k^{(1)} &= E[G'(X_{t_k})] E\left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} p(s)dW_s\right] - G'(x_k) E\left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} p(s)dW_s\right] = 0; \\
|p_k^{(2)}| &= \frac{1}{2} \left| E[G''(X_{t_k})] E\left[\left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} p(s)dW_s\right)^2\right] - G''(x_k) E\left[\left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} p(s)dW_s\right)^2\right] \right| = \\
&= \frac{1}{2} \int_{t_k}^{t_{k+1}} p^2(s) ds |E[G''(X_{t_k})] - G''(x_k)| \leq \frac{1}{2} p^2 \Delta |E[G''(X_{t_k})] - G''(x_k)|; \\
p_k^{(3)} &= \frac{1}{6} \left| E[G^{(3)}(X_{t_k})] E\left[\left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} p(s)dW_s\right)^3\right] - G^{(3)}(x_k) E\left[\left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} p(s)dW_s\right)^3\right] \right| = 0; \\
|p_k^{(4)}| &\leq \frac{1}{12} c^{(4)} E\left[\left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} p(s)dW_s\right)^4\right] \leq \frac{1}{12} c^{(4)} p^4 \Delta^2,
\end{aligned}$$

где $c^{(4)} = \sup_{y \in R} |G^{(4)}(y)|$. Из полученных оценок следует, что

$$|r_{k+1}| \leq |E[G(X_{t_k}) - G(x_k)]| + \frac{1}{2} p^2 \Delta |E[G''(X_{t_k})] - G''(x_k)| + \frac{1}{12} c^{(4)} p^4 \Delta^2. \quad (10)$$

Для оценки $|E[G(X_{t_k}) - G(x_k)]|$ воспользуемся очевидным неравенством

$$\begin{aligned}
|E[G(X_{t_k})] - G(x_k)| &\leq |E[G(X_{t_k})] - E[G(\hat{X}_{t_k})]| + \\
&+ |E[G(\hat{X}_{t_k})] - J(G(\hat{X}_{t_k}))| + |J(G(\hat{X}_{t_k})) - G(x_k)| \equiv |r_k| + q_k + \Delta^2,
\end{aligned} \quad (11)$$

где в соответствии с рассматриваемым здесь алгоритмом мы полагаем, что x_k может быть найдено с точностью, не ниже, чем Δ^2 , из равенства

$$J\left(G\left(\hat{X}_{t_k}\right)\right)-G\left(x_k\right)=0, \quad (12)$$

и используем следующую приближенную формулу для вычисления $E\left[G\left(\hat{X}_{(\cdot)}\right)\right]$, точную для многочленов третьей степени (см. [2]):

$$E\left[G\left(\hat{X}_t\right)\right] \approx J\left(G\left(\hat{X}_{(\cdot)}\right)\right) \equiv \frac{1}{2\Delta} \int_{U_k} G\left(x_k+p(|u|)\rho_{t,k}(u)\right) du, \quad (13)$$

где $\rho_{t,k}(u)=\sqrt{\Delta}1_{[t_k,t]}(|u|)\text{sign}(u)$, $U_k=[-t_k,-t_{k-1}] \cup [t_{k-1},t_k]$.

Таким образом, предлагаемая алгоритмом из [1] приближенная формула может быть записана в виде

$$E\left[\int_0^t G\left(X_s\right) ds\right] \approx \frac{t}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(J\left(G\left(\hat{X}_{t_k}\right)\right)+J\left(G\left(\hat{X}_{t_{k+1}}\right)\right)\right). \quad (14)$$

Из (10)–(11) вытекает рекуррентное соотношение, которое может быть использовано для оценивания r_k :

$$\left|r_{k+1}\right| \leq \left|r_k\right|+q_k+\frac{1}{2} p^2 \Delta\left|E\left[G''\left(X_{t_k}\right)\right]-G''\left(x_k\right)\right|+O\left(\Delta^2\right). \quad (15)$$

Оценим далее q_k при условии (12) и с учетом того, что приближенная формула точна для функциональных многочленов третьей степени от \hat{X}_s , $s \in [t_k, t]$:

$$\begin{aligned} \left|q_k\right| &= \frac{1}{24}\left|E\left[G^{(4)}\left(x_{k-1}+\theta \int_{t_{k-1}}^{t_k} b(s) d W_s\right)\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} b(s) d W_s\right)^4\right]-\right. \\ &\quad \left.-J\left(\left[G^{(4)}\left(x_{k-1}+\theta \int_{t_{k-1}}^{t_k} p(s) d W_s\right)\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} p(s) d W_s\right)^4\right]\right)\right| \leq \\ &\leq \frac{1}{24} c^{(4)}\left|E\left[\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} p(s) d W_s\right)^4\right]+J\left(\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} p(s) d W_s\right)^4\right)\right| \leq \\ &\leq \frac{1}{24} c^{(4)} p^4 \Delta^2+\frac{1}{24} c^{(4)} \frac{1}{\Delta} \int_{t_{k-1}}^{t_k}(\sqrt{\Delta})^4 p^4(u) d u \leq \frac{1}{12} c^{(4)} p^4 \Delta^2. \end{aligned} \quad (16)$$

Оценим теперь множитель $\left|E\left[G''\left(X_{t_k}\right)\right]-G''\left(x_k\right)\right|$ из (15). Для этого сначала вычислим

$$\begin{aligned} J\left(G\left(\hat{X}_{t_k}\right)\right) &= J\left(G\left(x_k+\int_{t_{k-1}}^{t_k} p(s) d W_s\right)\right)=G\left(x_{k-1}\right)+G'\left(x_{k-1}\right) \int_{t_{k-1}}^{t_k} p(s) d W_s+ \\ &\quad +\frac{1}{2} G''\left(x_{k-1}\right)\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} p(s) d W_s\right)^2+\frac{1}{6} G^{(3)}\left(x_{k-1}\right)\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} p(s) d W_s\right)^3+ \\ &\quad +\frac{1}{24} G^{(4)}\left(x_{k-1}+\theta \int_{t_{k-1}}^{t_k} p(s) d W_s\right)\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} p(s) d W_s\right)^4= \\ &= G\left(x_{k-1}\right)+\frac{1}{2} G''\left(x_{k-1}\right) \int_{t_{k-1}}^{t_k} p^2(s) d s+\frac{1}{24} c^{(4)} J\left(\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} p(s) d W_s\right)^4\right) \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq G(x_{k-1}) + \frac{1}{2} G''(x_{k-1}) \int_{t_{k-1}}^{t_k} p^2(s) ds + \frac{1}{24} c^{(4)} \frac{1}{\Delta} \int_{t_{k-1}}^{t_k} p^4(u) du \Delta^2 \leq \\
&\leq G(x_{k-1}) + \frac{1}{2} c^{(2)} p^2 \Delta + \frac{1}{24} c^{(4)} p^4 \Delta^2 = \\
&= G(x_{k-1}) + O(\Delta), (\theta \in [t_k, t_{k+1}]).
\end{aligned} \tag{17}$$

В силу (12) из (17) следует, что

$$G(x_k) = G(x_{k-1}) + O(\Delta). \tag{18}$$

Далее, аналогичным способом вычисляя $J(G''(\hat{X}_{t_k}))$, получаем

$$J(G''(\hat{X}_{t_k})) = G''(x_{k-1}) + O(\Delta). \tag{19}$$

(Единственным отличием от вышеприведенных оценок $J(G(\hat{X}_{t_k}))$ является использование констант $c^{(m+2)}$ при оценке производных $G^{(m+2)}$.)

Из (16) следует, что

$$\begin{aligned}
x_k &= G^{-1}(G(x_{k-1}) + O(\Delta)) = x_{k-1} + (G^{-1})'(G(x_{k-1})) O(\Delta) + O(\Delta^2) = \\
&= x_{k-1} + (G^{-1})'(G(x_{k-1})) O(\Delta) = \\
&= x_{k-1} + \frac{1}{G'(x_{k-1})} O(\Delta) = x_{k-1} + O(\Delta), (G^{-1} - \text{обратная функция})
\end{aligned}$$

с учетом условия $G'(x_{k-1}) \neq 0$. Отсюда получим

$$\begin{aligned}
G''(x_k) &= G''(x_{k-1} + O(\Delta)) = G''(x_{k-1}) + G^{(3)}(x_{k-1}) O(\Delta) + O(\Delta^2) = \\
&= G''(x_{k-1}) + O(\Delta).
\end{aligned} \tag{20}$$

Из (19) и (20) получаем

$$J(G''(\hat{X}_{t_k})) = G''(x_k) + O(\Delta). \tag{21}$$

Далее,

$$\begin{aligned}
&\left| E[G''(\hat{X}_{t_k})] - G''(x_k) \right| \leq \left| E[G''(\hat{X}_{t_k})] - J(G''(\hat{X}_{t_k})) \right| + \\
&+ \left| J(G''(\hat{X}_{t_k})) - G''(x_k) \right| = O(\Delta^2) + O(\Delta) = O(\Delta),
\end{aligned} \tag{22}$$

где использована оценка, аналогичная (16) для случая G'' , и оценка (21). Отсюда получаем, что

$$\begin{aligned}
&\left| E[G''(X_{t_k})] - G''(x_k) \right| \leq \left| E[G''(X_{t_k})] - E[G''(\hat{X}_{t_k})] \right| + \\
&+ \left| E[G''(\hat{X}_{t_k})] - G''(x_k) \right| \equiv |r_k''| + O(\Delta),
\end{aligned} \tag{23}$$

где $r_k'' = E[G''(X_{t_k})] - E[G''(\hat{X}_{t_k})]$ можно найти из рекуррентного соотношения, которое получается подобно тому, как это было сделано для r_k в (9)–(11):

$$\begin{aligned}
&|r_k''| \leq \left| E[G''(X_{t_{k-1}})] - G''(x_{k-1}) \right| + \\
&+ \frac{1}{2} p^2 \Delta \left| E[G^{(4)}(X_{t_{k-1}})] - G^{(4)}(x_{k-1}) \right| + O(\Delta^2) \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \left| E \left[G''(X_{t_{k-1}}) \right] - G''(x_{k-1}) \right| + c^{(4)} p^2 \Delta + O(\Delta^2) \leq \\ &\leq \left| E \left[G''(X_{t_{k-1}}) \right] - G''(x_{k-1}) \right| + O(\Delta) = \end{aligned}$$

(используются (15) и (22))

$$\begin{aligned} &= \left| E \left[G''(X_{t_{k-1}}) \right] - E \left[G''(\hat{X}_{t_{k-1}}) \right] \right| + \left| E \left[G''(\hat{X}_{t_{k-1}}) \right] - J(G''(\hat{X}_{t_{k-1}})) \right| + \\ &\quad + \left| J(G''(\hat{X}_{t_{k-1}})) - G''(x_{k-1}) \right| + O(\Delta) = \\ &= |r_{k-1}''| + \frac{1}{12} c^{(6)} p^4 \Delta^2 + O(\Delta) = |r_{k-1}''| + O(\Delta), \end{aligned}$$

т. е.

$$|r_k''| = |r_{k-1}''| + O(\Delta). \quad (24)$$

Таким образом, получаем из (15), (23):

$$\begin{aligned} |r_{k+1}| &= |r_k| + q_k + O(\Delta^2) + p^2 \Delta (|r_k''| + O(\Delta)) + O(\Delta^2) = \\ &= |r_k| + p^2 |r_k''| \Delta + O(\Delta^2) = |r_k| + |r_k''| O(\Delta) + O(\Delta^2), \end{aligned} \quad (25)$$

и далее, с учетом (24),

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n r_k &= r_1 + (r_1 + O(\Delta^2)) + (r_1 + 2O(\Delta^2)) + \dots + (r_1 + nO(\Delta^2)) = \\ &= nr_1 + O(\Delta^2) \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2} n(n-1) O(\Delta^2) = O(1), \end{aligned}$$

где мы воспользовались тем, что $r_1 \equiv E[G(X_{t_1})] - E[G(\hat{X}_{t_1})] = 0$. Из приведенных оценок вытекает справедливость следующей теоремы.

Т е о р е м а. *Имеет место следующая асимптотическая оценка порядка погрешности приближенной формулы (14):*

$$\left| \int_0^t E[G(X_s)] ds - \frac{t}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(J(G(\hat{X}_{t_k})) + J(G(\hat{X}_{t_{k+1}})) \right) \right| = O(n^{-1}),$$

где $\hat{X}_{t_{k+1}} = x_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} p(s) dW_s$, x_k находится из равенства (12), $J(G(\hat{X}_{t_k}))$ определяется формулой (13).

Рассмотрим пример, иллюстрирующий применение предложенного алгоритма.

Положим в (1): $G(u) = 1 + \cos(1 + 0,5u) \sin(0,5u)$, $p(s) = 1$. Точное значение ожидания (1) в этом случае равно $I = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 1 + \sin 1) \left(1 - e^{-\frac{t}{2}} \right) + (1 - 0,5 \sin 1)t$. Результаты вычислений по приближенной формуле (14) для $x = \frac{\pi}{4}$ приведены в таблице.

t	Точное значение	$n = 50$	$n = 100$	$n = 500$
0,2	0,208833	0,208646	0,208739	0,208814
0,6	0,600795	0,599224	0,600004	0,600636
1,0	0,963708	0,95963	0,961654	0,963295
1,4	1,30284	1,29537	1,29907	1,30208
1,8	1,62249	1,61094	1,61666	1,62132

Примечание. Приведенные численные результаты согласуются с указанным в теореме порядком сходимости.

Список использованной литературы

1. *Zherelo, A. V.* On convergence of the method based on approximately exact formulas for functional polynomials for calculations of expectation of the functionals to solution of stochastic differential equations / A. V. Zherelo // Monte Carlo Methods and Applications. – 2013. – Vol. 19 (4). – P. 183–200.
2. *Egorov, A. D.* Functional integrals: Approximate evaluations and applications / A. D. Egorov, P. I. Sobolevsky, L. A. Yanovich. – [S. l.]: Kluwer Academic Publishers, 1993.
3. *Егоров, А. Д.* Введение в теорию и приложения функционального интегрирования / А. Д. Егоров, Е. П. Жидков, Ю. Ю. Лобанов. – М.: Физматлит, 2006.
4. *Egorov, A. D.* Approximate formulas for expectations of functionals of solutions to stochastic differential equations / A. D. Egorov, K. K. Sabelfeld // Monte Carlo Methods and Applications. – 2010. – Vol. 16, N 2. – P. 95–127.

Поступила в редакцию 13.05.2015

УДК 519.688:004.021

А. В. ЧИЧУРИН¹, Е. Н. ШВЫЧКИНА²**МОДЕЛИРОВАНИЕ ХЕМОСТАТА ПОПУЛЯЦИОННОЙ ДИНАМИКИ
БАКТЕРИАЛЬНЫХ ПЛАЗМИД**¹Брестский государственный университет им. А. С. Пушкина, Брест, Беларусь,
e-mail: achichurin@gmail.com²Брестский государственный технический университет, Брест, Беларусь,
e-mail: shvychkina@yandex.ru

Рассматривается модель Стюарта – Левина, описывающая динамику нестабильных штаммов двух микроорганизмов при условии, когда удельная скорость потребления субстрата плазмидосодержащим и бесплазмидным микроорганизмами задается при помощи функции Моно. Для случая равенства констант полунасыщения приведена редукция дифференциальной системы третьего порядка, описывающей рассматриваемую модель, к нелинейному дифференциальному уравнению первого порядка. Для такой системы построены программные модули, позволяющие моделировать свойства ее решений в зависимости от входящих параметров. Найдены коэффициентные соотношения, при которых дифференциальная система третьего порядка имеет аналитическое решение, и приведена визуализация решений для некоторых наборов параметров.

Ключевые слова: компьютерное моделирование хемостата, конкуренция для одного ограниченного субстрата, плазмидосодержащий микроорганизм, бесплазмидный микроорганизм, дифференциальное уравнение, решение, визуализация решений.

A. V. CHICHURIN¹, A. N. SHVYCHKINA²**COMPUTER MODELING OF CHEMOSTAT OF POPULATION DYNAMICS OF BACTERIAL PLASMIDS**¹Brest State University named after A. S. Pushkin, Brest, Belarus, e-mail: achichurin@gmail.com²Brest State Technical University, Brest, Belarus, e-mail: shvychkina@yandex.ru

The Stewart – Levine model is considered, which describes the dynamics of unstable strains of two micro-organisms, provided that a specific consumption rate of a substrate by both the plasmid-bearing organism and the plasmid-free organism is given by the Mono function. For the case when the half-saturation constants are equal, the reduction of the third-order differential system describing the considered model to a nonlinear differential equation of the first-order is realized. For such a system we built the software modules that allow simulating its solutions properties which depend on the input parameters. The coefficient relations, at which the third-order differential system has an analytical solution, are found, and the visualization of solutions for the certain sets of parameters is given.

Keywords: computer modeling of chemostat, competition for one complementary nutrient, plasmid-bearing organism; plasmid-free organism, differential equation, solution, visualization of solutions.

Введение. Математическое моделирование динамики развития двух видов микроорганизмов, потребляющих один субстрат, является задачей, актуальной для медицинской и пищевой промышленности, микробиологического производства, экологии, а также для производства генетически модифицированных продуктов.

Суть непрерывного процесса культивирования микроорганизмов заключается в постоянной подаче питательной среды в зону развития популяции и одновременном отборе ее избыточной части из рабочего пространства. В лабораторных условиях этот процесс осуществляется с помощью подачи непрерывного потока питательной среды в замкнутый сосуд культиватора (ферментера)

и соответствующего оттока биомассы. Такой режим непрерывного культивирования называется *хеостатом*.

Часто под хеостатом также понимают математическую модель, описывающую биологический процесс для непрерывного культивирования бактерий, обеспечивающий оптимальные температурные условия и постоянное поступление свежей питательной среды при одновременном удалении части бактериальной культуры [1]. В данной работе мы будем придерживаться именно такого определения. Для описания лимитированного роста популяции в хеостате применяют следующую систему уравнений Михаэлиса – Ментен [1, 2]:

$$\begin{cases} \dot{s}(t) = (s_0 - s(t))D - x_1(t)\mu_1(s(t)) - x_2(t)\mu_2(s(t)), \\ \dot{x}_1(t) = (\mu_1(s(t)) - D)x_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = (\mu_2(s(t)) - D)x_2(t), \end{cases} \quad (1)$$

где параметр D называется потоком и численно равен скорости подачи питательного субстрата в ферментер; $s(t)$ обозначает плотность питательного субстрата; $x_1(t)$, $x_2(t)$ – плотности микроорганизмов в момент времени t ; $\mu_i(s(t))$ ($i = 1, 2$) – удельная скорость потребления i -м микроорганизмом субстрата $s(t)$; s_0 – концентрация субстрата в питательном растворе на входе (начальная концентрация).

В работах [1, 3] приведено исследование системы (1) для случая, когда удельная скорость потребления субстрата i -м микроорганизмом задается при помощи функции Моно:

$$\mu_i(s(t)) = \frac{m_i s(t)}{a_i + s(t)} \quad (i = 1, 2), \quad (2)$$

где параметры a_i ($i = 1, 2$) – постоянные, равные концентрации субстрата, при которой удельная скорость роста микроорганизма равна половине максимальной (константы Михаэлиса – Ментен); m_i ($i = 1, 2$) – максимальная скорость роста i -го микроорганизма. В хеостатном культивировании соответствующие параметры m_1, m_2 и a_1, a_2 , которые являются основной характеристикой микроорганизмов, точно определяются при выращивании каждого из них по отдельности в лаборатории. Развитие метода описания хеостатного культивирования [3–5] показало, что, изменяя параметры модели D, a_i, m_i ($i = 1, 2$) и задавая начальные условия s_0, x_{10}, x_{20} , можно добиться требуемой плотности микроорганизмов в определенный момент времени t . А именно, можно выделить действие интересующего параметра и, изменяя его, добиться того, что рост микроорганизмов очень сильно замедлится либо достигнет глубокого стресса, который приведет к гибели одной или более популяций. Перечисленные преимущества описания моделирования конкурентного влияния одной популяции на другую при условии, что обе они потребляют ограниченный субстрат, делают хеостат важным для промышленности. С коммерческой точки зрения такой режим непрерывного культивирования микроорганизмов играет центральную роль в ряде процессов брожения, в частности при промышленном производстве продуктов генетически измененных организмов (например, в производстве инсулина) [1, 2].

Системы вида (1) изучались в многочисленных работах (напр., [1, 5]), где в зависимости от вида функции $\mu_i(s(t))$ ($i = 1, 2$) были проведены исследования с помощью асимптотических и топологических методов, а также методов качественной теории дифференциальных уравнений. Полученные выводы были обоснованы численным моделированием в системах компьютерной алгебры.

В работах [6–8] было показано, что в случае, когда коэффициенты Михаэлиса – Ментен удовлетворяют условию $a_1 = a_2$, интегрирование дифференциальной системы третьего порядка (1) удастся свести к интегрированию одного нелинейного дифференциального уравнения первого порядка. Метод построения решений полученного дифференциального уравнения в виде ряда Тейлора был рассмотрен в [6]. Работы [7, 8] содержат программные модули, которые в зависимости от изменения параметров системы в заданных интервалах моделируют процессы хеостатного куль-

тивирования, а также обеспечивают визуализацию этих процессов для каждого микроорганизма. Там же для моделей хемостата Михаэлиса – Ментен (1)–(2) найдены коэффициентные соотношения, при выполнении которых построены двухпараметрические семейства решений в аналитической форме и приведена визуализация этих решений. Для модели хемостата Михаэлиса – Ментен (1)–(2) с различными параметрами a_1, a_2 в работе [9] приведены метод решения задачи Коши, основанный на редукции к системам Брио и Буке, и комплекс программ, позволяющий осуществить моделирование функций плотностей микроорганизмов в зависимости от времени.

Развитие метода непрерывного культивирования и его различных модификаций содержится в работах [5, 10, 11]. Актуальность изучения этих моделей связана в первую очередь с важностью математических моделей процессов культивирования микроорганизмов для коммерческого производства продукции, производимой генетически модифицированными организмами. Известно [12], что микроорганизмы претерпевают изменения посредством действия *плазмид* – молекул ДНК. В нормальных условиях жизнедеятельности микроорганизмов плазмиды обычно не выполняют каких-либо существенных функций, но в то же время могут обеспечивать клетку рядом полезных качеств, например устойчивостью к антибиотикам определенного вида. В репродуктивном процессе клеток плазмиды могут быть потеряны, что приводит к возникновению в организме плазмидосодержащих и бесплазмидных клеток. Таким образом, возникает конкуренция между количеством клеток двух таких видов и в зависимости от способа культивирования клеток можно предопределить свойство полученного микроорганизма.

1. Предварительные сведения и постановка задачи. Для моделирования непрерывного процесса культивирования генномодифицированных микроорганизмов применим методы, рассмотренные в работах [6–8]. Для описания динамики нестабильных штаммов микроорганизмов наиболее продуктивное развитие получила модель, разработанная и проанализированная Б. Левиным и Ф. Стюартом [13]:

$$\begin{cases} \dot{s}(t) = (s_0 - s(t))D - x_1(t)\mu_1(s(t)) - x_2(t)\mu_2(s(t)), \\ \dot{x}_1(t) = ((1 - q)\mu_1(s(t)) - D)x_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = (\mu_2(s(t)) - D)x_2(t) + q\mu_1(s(t))x_1(t), \end{cases} \quad (3)$$

где $x_1(t)$ – плотность плазмидосодержащего и $x_2(t)$ – плотность бесплазмидного микроорганизма в момент времени t ; $\mu_i(s(t))$ ($i = 1, 2$) – удельные скорости роста; q – вероятность образования бесплазмидных клеток при делении плазмидосодержащих клеток.

При изучении культивирования клеток биологами установлена неустойчивость плазмидосодержащих клеток. Следовательно, можно выделить основную цель при изучении математической модели (3) – создание условий для глобальной асимптотической устойчивости системы и сохранение плазмидосодержащих клеток [5, 10, 11]. При анализе системы (3) в работе [12] использовался параметр, названный «стоимость плазмиды» и показывающий селективное преимущество бесплазмидных клеток:

$$\rho(s) = 1 - \frac{\mu_1(s(t))}{\mu_2(s(t))}. \quad (4)$$

В данной работе решаются следующие задачи.

I. Привести редукцию дифференциальной системы (3) к одному нелинейному дифференциальному уравнению первого порядка.

II. Построить программные модули, позволяющие моделировать свойства решений системы (3) в зависимости от входящих параметров.

III. Найти коэффициентные соотношения, при которых система (3) имеет аналитическое решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$s(0) = s_0 \geq 0, \quad x_1(0) = x_{10} \geq 0, \quad x_2(0) = x_{20} \geq 0 \quad (5)$$

на конечных промежутках времени.

2. Метод решения. Для решения задачи I будем использовать метод, предложенный в работе [8]. Систему (3) рассмотрим в случае, когда функции $\mu_i(s(t))$ ($i=1,2$) задаются равенством (2), а параметры m_1, m_2 и a_1, a_2 имеют тот же биологический смысл, что и для модели (1) и удовлетворяют условию $a_1 = a_2$. При этих условиях постоянные m_1 и m_2 связаны следующим соотношением: $m_1 = (1-\rho)m_2$. Более того, когда удельные скорости роста плазмидных и бесплазмидных клеток, т. е. функции $\mu_i(s(t))$ ($i=1,2$), имеют вид (2) и константы Михаэлиса – Ментен равны между собой ($a_1 = a_2$), тогда параметр ρ («стоимость плазмиды» [12]) будет являться действительным положительным числом, отличным от единицы. При таких предположениях система (3) примет вид:

$$\begin{aligned} s'(t) &= (s_0 - s(t))D - \frac{(1-\rho)m_2 x_1(t)s(t)}{a_2 + s(t)} - \frac{m_2 x_2(t)s(t)}{a_2 + s(t)}, \\ x_1'(t) &= \left(\frac{m_2(1-\rho)(1-q)s(t)}{a_2 + s(t)} - D \right) x_1(t), \quad x_2'(t) = \frac{m_2 s(t)(q(1-\rho)x_1(t) + x_2(t))}{a_2 + s(t)} - D x_2(t). \end{aligned} \quad (6)$$

Для системы (6) будем искать решения, принимающие положительные значения и удовлетворяющие начальным условиям (5). Сведем решение поставленной задачи к решению одного дифференциального уравнения первого порядка относительно функции $x_1(t)$. Для этого складываем все три уравнения системы (6). В результате получим неполное дифференциальное уравнение первого порядка относительно функции $\Delta(t) = s(t) + x_1(t) + x_2(t)$ вида $\Delta'(t) = D(s_0 - \Delta(t))$. Интегрируя это уравнение, находим его общее решение $\Delta(t) = s_0 + e^{-tD} c_1$, где c_1 – произвольная постоянная. Тогда

$$s(t) = s_0 + e^{-tD} c_1 - x_1(t) - x_2(t). \quad (7)$$

Исключим из второго и третьего уравнений системы (6) функцию $s(t)$ и получим линейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно неизвестной функции $x_2(t)$:

$$x_2'(t) - x_2(t) \left(\frac{D(q+\rho-q\rho)}{(1-q)(1-\rho)} + \frac{x_1'(t)}{(1-q)(1-\rho)x_1(t)} \right) = \frac{(q-q\rho)(Dx_1(t) + x_1'(t))}{(1-q)(1-\rho)}.$$

Проинтегрируем это уравнение. После преобразований запишем функцию $x_2(t)$ в виде

$$x_2(t) = c_2 e^{(1/(1-q)(1-\rho)-1)tD} x_1^{1/(1-q)(1-\rho)}(t) - \frac{q(1-\rho)x_1(t)}{q+\rho-q\rho}, \quad (8)$$

где c_2 – произвольная постоянная. Используя найденные функциональные соотношения (6) и (7) между функциями $s(t)$, $x_1(t)$, $x_2(t)$, перепишем второе уравнение системы (6) в виде

$$x_1'(t) = x_1(t) \left(\frac{m_2(1-q)(1-\rho)(c_1 e^{-Dt} + s_0 - \rho \Psi_2 x_1(t) - c_2 e^{-D\Psi_1 t} x_1^{\Psi_1+1}(t))}{c_1 e^{-Dt} + a_2 + s_0 - x_1(t) + q(1-\rho)\Psi_2 x_1(t) - c_2 e^{-D\Psi_1 t} x_1^{\Psi_1+1}(t)} - D \right), \quad (9)$$

где $\Psi_1 = \frac{1}{(1-q)(1-\rho)} - 1$, $\Psi_2 = \frac{1}{q+\rho-q\rho}$.

Имеет место следующая

Т е о р е м а 1. *Решение системы (6) сводится к решению уравнения (9). Более точно, решение системы (6), удовлетворяющее условиям (5), имеет вид (7), (8), (9), где a_2, m_2, ρ, q, D – положительные числа, $\rho \neq 1$, где c_1, c_2 – произвольные постоянные.*

Дифференциальное уравнение (9) является нелинейным уравнением первого порядка не принадлежащим к уравнениям, разрешаемым в квадратурах [14–16], поэтому для его интегрирования будем использовать численные методы. Для численного интегрирования дифференциальных уравнений в системе *Mathematica* используется функция *NDSolve* [17], которая представляет частное решение в виде интерполяционной функции (*InterpolatingFunction*). Отметим, что система

Mathematica выбирает наилучший метод численного интегрирования среди имеющихся в ней численных методов [17, 18].

Проведем теперь численное исследование решений дифференциальной системы (6). Приведем часть программного модуля, позволяющего моделировать возможные состояния динамической системы (6) для различных значений входящих в нее параметров (рис. 1).

```
Manipulate[sol = First[NDSolve[{eq, x1[0] == x10}, x1, {t, 0, tt}, MaxSteps -> 10^6]];
plotx = ParametricPlot[Evaluate[{x1[t], } /. sol], {t, 0, tt},
PlotStyle -> {RGBColor[.33, .6, .6], Thick}, PlotRange -> {{0, 1}, {0, 1}}, Frame -> True,
FrameLabel -> {"x1(t)", "x2(t)"}, AxesStyle -> axes]; Column[{
Plot[(s0 + e^-t d (x10 + x20) - x1[t] - x2[t]) /. sol, {t, 0, tt}, AxesOrigin -> {0, 0},
PlotLabel -> Row[{"субстрат s(t)"}], PlotStyle -> {RGBColor[.30, .25, .5], Thick},
AxesLabel -> {Style[time, 13, Bold], Style[s, 13, Bold, Black]}, AxesStyle -> axes]
.....
Delimiter, Style["начальные концентрации:", Bold], {{s0, 2, "s0"}, 0.11, 4, ap, im},
{{x10, .5, "x10"}, .11, 5, ap, im}, {{x20, .2, "x20"}, .11, 4, ap, im},
{{tt, 15, "время"}, 10, 10^2, ap, im}, Delimiter, Style["фазовая плоскость", Bold],
Dynamic[Show[plotx], SynchronousUpdating -> False], {{plotx, Graphics[]}, ControlType -> None},
TrackedSymbols -> Manipulate, ControlPlacement -> Right]
```

Рис. 1. Листинг части программного модуля

В листинге программного модуля (см. рис. 1) через eq обозначено дифференциальное уравнение (9), а также введены следующие обозначения:

```
ap = Appearance -> "Labeled"; im = ImageSize -> Small;
axes = {{Arrowheads[{0.05}], Thickness[0.006], Directive[Black, 12]},
{Arrowheads[{0.05}], Thickness[0.006], Directive[Black, 12]}};
x2[t] =
```

$$\frac{q(-1+\rho)x_1[t]}{q+\rho-q\rho} + \frac{e^{Dt(-1+\frac{1}{(-1+q)(-1+\rho)})} x_{10}^{-\frac{1}{(-1+q)(-1+\rho)}} (q(-1+\rho)x_{10} + (-q+(-1+q)\rho)x_{20}) x_1[t]^{\frac{1}{(-1+q)(-1+\rho)}}}{q(-1+\rho)-\rho}$$

На рис. 2 показаны графики входящих в систему (6) трех неизвестных функций, а в правом нижнем углу построена фазовая кривая на плоскости (x_1, x_2) .

3. Аналитическое решение системы (3). У системы (6) существуют решения в аналитической форме. Действительно, имеет место

Теорема 2. Система (6) имеет решение вида

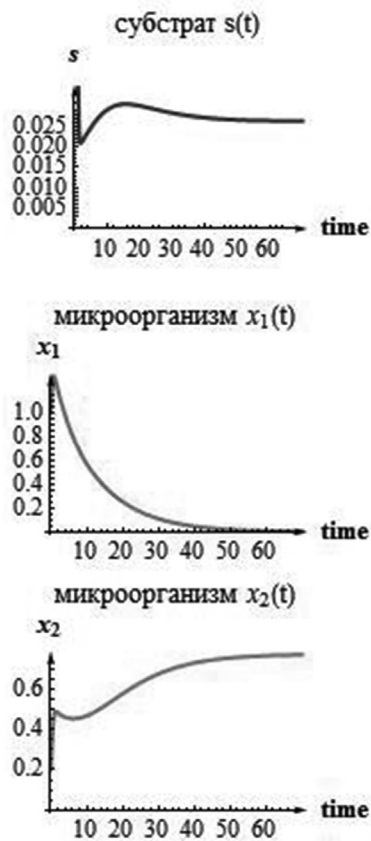
$$s(t) = s_0 - x_1(t) - x_2(t), \quad x_2(t) = \frac{q(\rho-1)x_1(t)}{q+\rho-q\rho},$$

$$(da_2 + vs_0)(tv + \ln x_1(t)) = \zeta\varphi(\ln x_1(t) - \ln((1-\zeta\varphi)(da_2 + vs_0) - v(1+\varphi)x_1(t))) a_2 m_2, \quad (10)$$

где $v \equiv d - \zeta\varphi m_2$, $\varphi \equiv \rho - 1$, $\zeta \equiv q - 1$.

З а м е ч а н и е. Равенства (10) были получены в кодах системы *Mathematica*, причем третье соотношение было записано с помощью команды `InverseFunction[f]`, используемой для представления обратной функции для функции f [19]. Применяя эту команду, мы однозначно вычисляем значения всех трех функций $s(t)$, $x_1(t)$, $x_2(t)$ при заданном значении переменной t и строим их графики (рис. 3).

Отметим, что переменная t в соотношении (10) входит линейно, а функция $x_1(t)$ – под знаком натурального логарифма, причем функция $x_1(t)$ всегда положительна (в силу биологического характера задачи). Доказательство того, что полученные соотношения (10) определяют решение системы (6), проводится непосредственной подстановкой.



Система

$$s'(t) = D s_0 - \frac{s(t)(D(a_2 + s(t)) + m_2(x_2(t) - (\rho - 1)x_1(t)))}{a_2 + s(t)},$$

$$x_1'(t) = x_1(t) \left(\frac{m_2(q-1)(\rho-1)s(t)}{a_2 + s(t)} - D \right),$$

$$x_2'(t) = \frac{m_2 s(t)(q(1-\rho)x_1(t) + x_2(t))}{a_2 + s(t)} - D x_2(t)$$

содержит параметры:

D

a_2

m_2

q

ρ

начальные концентрации:

s_0

x_{10}

x_{20}

время

фазовая плоскость

Рис. 2. Численное решение системы (6)

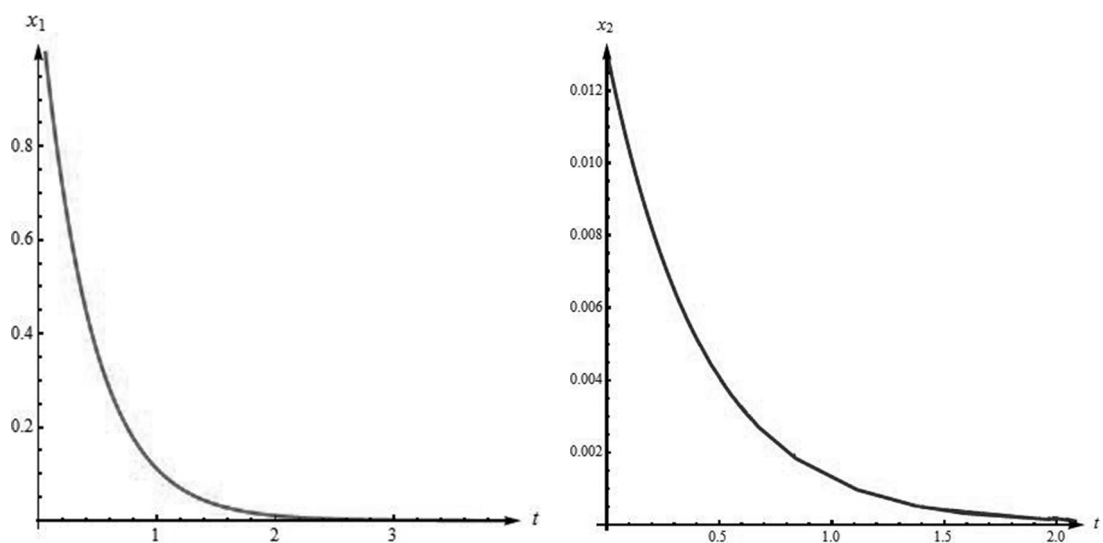


Рис. 3. Графики функций $x_1(t)$, $x_2(t)$

Нарисуем графики (см. рис. 3) найденного решения (10) для положительных значений параметров $s_0 = 8$; $D = 0,7$; $q = 0,03$; $\rho = 1,6$; $m_2 = 3$; $a_2 = 0,5$.

Список использованной литературы

1. *Smith, H. L.* The theory of chemostat: dynamics of microbial competition / H. L. Smith, P. Waltman. – [S. l.]: Cambridge University Press, 1995.
2. *Перт, Д. С.* Основы культивирования микроорганизмов и клеток / Д. С. Перт; под ред. проф. И. Л. Работновой. – М.: Мир, 1978.
3. *Waltman, P.* Coexistence in chemostat-like models / P. Waltman // Rocky Mountain J. of mathematics. – 1990. – Vol. 20, N 4. – P. 777–808.
4. *Butler, G. J.* A mathematical model of the chemostat with periodic washout rate / G. J. Butler, S. B. Hsu, P. Waltman // SIAM J. Appl. Math. – 1985. – Vol. 45, N 3. – P. 435–449.
5. *De Leenheer, P.* Feedback Control for Chemostat Models/ P. De Leenheer, H. Smith // J. Math. Biol. – 2003. – N 46. – P. 48–70.
6. *Chichurin, A.* Numerical research of the chemostat model for the single-nutrient competition / A. Chichurin, H. Shvyckina // Computer Algebra Systems in Teaching and Research: proc. of the 7th Intern. Workshop CASTR'2013, Siedlce, Poland, 22–25 Sep. 2013 / Univ. of Podlasie; eds.: M. Jakubiak [et al.]. – Siedlce, 2013. – Vol. 4, N 1. – P. 130–136.
7. *Чичурин, А. В.* Компьютерное моделирование двух моделей хемостата для одного питательного ресурса / А. В. Чичурин, Е. Н. Швычкина // Вестн. Брест. гос. техн. ун-та. Физика, математика, информатика. – 2013. – Т. 83, № 5. – С. 9–14.
8. *Чичурин, А. В.* Численное исследование решений двух динамических моделей хемостата с равными константами Михаэлиса – Ментен методами компьютерного моделирования / А. В. Чичурин, Е. Н. Швычкина // Материалы VIII Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела: сб. материалов докл. всерос. конф., Чебоксары, 16–21 июня 2014 г.: в 2 ч. / Чуваш. гос. пед. ун-т им. И. Я. Яковлева; под ред. Н. Ф. Морозова, Б. Г. Миронова, А. В. Манжирова. – Чебоксары: ЧГПУ им. И. Я. Яковлева, 2014. – Ч. 2. – С. 250–259.
9. *Чичурин, А. В.* О построении решений с заданными предельными свойствами у систем, описывающих модели хемостата / А. В. Чичурин, Е. Н. Швычкина // Вес. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2014. – № 1. – С. 69–76.
10. *Dimitrova, N. S.* Optimizing the Productivity in a Chemostat Model of Plasmid-bearing Plasmid-free Competition: the Case of General Uptake Functions / N. S. Dimitrova // WSEAS Transactions on Biology and Biomedicine. – 2013. – Vol. 10, iss. 1. – P. 12–21.
11. *Hsu, S. B.* Global analysis of a model of plasmid-bearing, plasmid-free competition in a chemostat / S. B. Hsu, P. Waltman, G. S. K. Wolkowicz // J. Math. Biol. – 1994. – N 32. – P. 731–742.
12. *Ганусов, В. В.* Популяционная динамика бактериальных плазмид / В. В. Ганусов, А. В. Брильков, Н. С. Печуркин // Мат. моделирование. – 2001. – Т. 13, № 1. – С. 77–98.
13. *Levin, B. R.* The Population Biology of Bacterial Plasmids: a priori Conditions for the Existence of Mobilizable Non-conjugative Factors / B. R. Levin, F. M. Stewart // Genetics. – 1980. – Vol. 94, N. 2. – P. 425–443.
14. *Зайцев, В. Ф.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин. – М.: Физматлит, 2001.
15. *Камке, Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – М.: Наука, 1971.
16. <http://mathworld.wolfram.com/topics/OrdinaryDifferentialEquations.html>.
17. *Wagon, S.* Mathematica in action: problem solving through visualization and computation / S. Wagon. – 3rd ed. – New York: Springer, 2010.
18. *Trott, M.* The Mathematica GuideBook for programming / M. Trott. – New York: Springer Verlag, 2006.
19. <http://reference.wolfram.com/language/ref/InverseFunction.html>.

Поступила в редакцию 13.08.2015

УДК 511.42

А. С. КУДИН, А. В. ЛУНЕВИЧ

**АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ХИНЧИНА В СЛУЧАЕ РАСХОДИМОСТИ
В ТРЕХМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ***Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь,
e-mail: kunixd@gmail.com*

Получено доказательство теоремы Хинчина в случае расходимости в трехмерном евклидовом пространстве для множества неприводимых полиномов степени ровно n . В ходе доказательства в трехмерном евклидовом пространстве построена регулярная система троек сопряженных действительных алгебраических чисел степени ровно n . Все результаты получены с помощью методов метрической теории чисел.

Ключевые слова: диофантовы приближения, метрическая теория трансцендентных чисел, теорема типа Хинчина, регулярная система.

A. S. KUDIN, A. V. LUNEVICH

**ANALOG OF THE KHINTCHINE THEOREM IN THE CASE OF DIVERGENCE
IN THE THREE-DIMENSIONAL EUCLIDEAN SPACE***Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus, e-mail: kunixd@gmail.com*

In the article we proved the Khintchine theorem in the case of divergence in the three-dimensional Euclidean space while considering only irreducible polynomials of degree exactly n . In the course of proof we built a regular system of triples of conjugate real algebraic numbers of degree exactly n in the three-dimensional Euclidean space. All results are obtained using the methods of metric number theory.

Keywords: Diophantine approximation, metric theory of transcendental numbers, Khintchine-type theorem, regular system.

Для полинома $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ пусть $H(P) = \max_{0 \leq i \leq n} |a_i|$ – его высота. Если $P(x)$ – полином с корнями $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, то пусть $S(\alpha_i) = \left\{ x \in \mathbb{R} : |x - \alpha_i| = \min_{1 \leq j \leq n} |x - \alpha_j| \right\}$. Для положительного действительного числа Q и натурального числа n обозначим множество целочисленных полиномов степени не более n как \mathcal{P}_n и множество полиномов из \mathcal{P}_n с $H(P) \leq Q$ как $\mathcal{P}_n(Q)$. Если $A \subset \mathbb{R}^k$ ($k \geq 1$) – измеримое по Лебегу множество, то пусть $\mu(A)$ – его мера Лебега в пространстве \mathbb{R}^k , размерность которого k будет ясна из контекста.

В основании многих задач метрической теории диофантовых приближений лежит теорема Хинчина, доказанная в 1924 г. [1]. Пусть $\Psi(H)$ – монотонно убывающая функция, определенная на \mathbb{R}_+ , и $J \subset \mathbb{R}$ – некоторый интервал. Обозначим как $\mathcal{L}_1(\Psi)$ множество тех $x \in J$, для которых существует бесконечно много решений $p, q \in \mathbb{Z}$ неравенства $|qx - p| < \Psi(q)$. В соответствии с теоремой Хинчина, $\mu(\mathcal{L}_1(\Psi)) = 0$ в случае $\sum_{h=1}^{\infty} \Psi(h) < \infty$ и $\mu(\mathcal{L}_1(\Psi)) = \mu(J)$ в случае $\sum_{h=1}^{\infty} \Psi(h) = \infty$.

По аналогии с теоремой Хинчина обозначим как $\mathcal{L}_n(\Psi)$ множество тех $x \in J$, для которых существует бесконечно много решений неравенства $|P(x)| < H(P)^{-n+1} \Psi(H(P))$ в полиномах $P \in \mathcal{P}_n$. При $\Psi(H) = H^{-\lambda}$ ($\lambda \leq 1$), используя принцип ящиков Дирихле, несложно доказать, что $\mu(\mathcal{L}_n(\Psi)) = \mu(J)$. В 1932 г. К. Малер [2] ввел классификацию действительных и комплексных чисел и в связи с этим предположил, что при $\Psi(H) = H^{-\lambda}$ ($\lambda > 1$) выполняется $\mu(\mathcal{L}_n(\Psi)) = 0$. В 1964 г.

гипотеза Малера была доказана В. Г. Спринджуксом [3]. Естественно, возникает вопрос о возможности уточнения правой части в гипотезе Малера. В 1966 г. А. Бейкер [4] доказал, что, если $\sum_{h=1}^{\infty} \Psi(h) < \infty$, то для почти всех (в смысле меры Лебега) $x \in \mathbb{R}$ неравенство $|P(x)| < \Psi^n(H(P))$ имеет не более чем конечное число решений $P \in \mathcal{P}_n$, а также предположил, что для $\mathcal{L}_n(\Psi)$ справедлив аналог теоремы Хинчина, а именно, $\mu(\mathcal{L}_n(\Psi)) = 0$ при $\sum_{h=1}^{\infty} \Psi(h) < \infty$ и $\mu(\mathcal{L}_n(\Psi)) = \mu(J)$ при $\sum_{h=1}^{\infty} \Psi(h) = \infty$. Эта гипотеза в случае сходимости была доказана В. И. Берником [5], а в случае расходимости – В. Бересневичем [6]. Естественным образом возникает задача обобщения теоремы Хинчина на пространства больших размерностей. В данной работе мы рассматриваем аналог теоремы Хинчина в случае расходимости в пространстве \mathbb{R}^3 . Отметим, что в работе [7] получен аналог теоремы Хинчина в случае расходимости в пространстве $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$. Отличительной чертой данной работы является то, что мы доказываем теорему Хинчина в случае расходимости в более сильной формулировке, а именно, для неприводимых полиномов степени ровно n и общего вида правых частей неравенств. Это потребует построения в \mathbb{R}^3 регулярной системы, состоящей из более узкого множества точек, а именно, из троек сопряженных действительных алгебраических чисел степени ровно n .

Пусть $T_0 = (-2^{-1}; 2^{-1})^3$. Пусть $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ и $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – векторы с действительными координатами, удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases} v_i > 0, \lambda_i > 0, i = 1, 2, 3, \\ v_1 + v_2 + v_3 = n - 3, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1. \end{cases}$$

Определим $\mathcal{L}_{\mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}}$ как множество точек $(x_1, x_2, x_3) \in T_0$, для которых имеется бесконечно много неприводимых полиномов $P \in \mathcal{P}_n$, $\deg P = n$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\{|P(x_k)| < H(P)^{-v_k} \Psi^{\lambda_k}(H(P)) \quad (1 \leq k \leq 3)\}. \quad (1)$$

В работе будет доказана следующая теорема.

Теорема 1. Если $n \geq 3$ и $\sum_{h=1}^{\infty} \Psi(h) = \infty$, то $\mu(\mathcal{L}_{\mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}}) = \mu(T_0)$.

Важной частью доказательства теоремы 1 являются данные ниже понятие регулярной системы точек в \mathbb{R}^3 и теорема 2, в которой доказывается регулярность системы троек сопряженных действительных алгебраических чисел степени n .

Определение 1. Пусть даны параллелепипед $T_0 \subset \mathbb{R}^3$, счетное множество Γ точек $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{R}^3$, положительная функция $N: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}_+$ и монотонно убывающие функции $M_1, M_2, M_3: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, которые формируют вектор-функцию $\mathbf{M} = (M_1, M_2, M_3)$. Тройку (Γ, N, \mathbf{M}) будем называть регулярной системой в T_0 , если существует постоянная $C_1 = C_1(\Gamma, N, \mathbf{M}) > 0$ такая, что для любого параллелепипеда $I = I_1 \times I_2 \times I_3 \subset T_0$ найдется достаточно большое число $Q_0(\Gamma, N, \mathbf{M}, I) > 0$ такое, что для любого $Q > Q_0$ можно выбрать набор точек $\boldsymbol{\beta}_1, \dots, \boldsymbol{\beta}_t \in \Gamma$ такой, что

$$N(\boldsymbol{\beta}_i) \leq Q \quad (1 \leq i \leq t),$$

а для параллелепипедов

$$\Pi(\boldsymbol{\beta}_i) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3: |x_k - \beta_k| < M_k(Q) \quad (1 \leq k \leq 3)\}$$

выполняются условия

$$\Pi(\boldsymbol{\beta}_i) \subset I \quad (1 \leq i \leq t), \quad \Pi(\boldsymbol{\beta}_i) \cap \Pi(\boldsymbol{\beta}_j) = \emptyset \quad (1 \leq i < j \leq t), \quad t \geq C_1 \frac{\mu(I)}{\mu(\Pi(\boldsymbol{\beta}_i))}.$$

Теорема 2. Пусть заданы натуральное число $n \geq 3$ и вектор с действительными координатами $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, удовлетворяющими условиям $\omega_1, \omega_2, \omega_3 > 1$, $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = n + 1$. Определим

параллелепипед $T_0 = (-2^{-1}; 2^{-1})^3$ и счетное множество Γ троек $\mathbf{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{R}^3$ сопряженных действительных алгебраических чисел степени ровно n . Определим функцию $N(\mathbf{\beta}) = H(P)$, где $P \in \mathbb{Z}[x]$ – неприводимый и примитивный полином степени n такой, что $P(\beta_1) = P(\beta_2) = P(\beta_3) = 0$. Определим вектор-функцию $\mathbf{M}(Q) = (Q^{-\omega_1}, Q^{-\omega_2}, Q^{-\omega_3})$. Тогда тройка (Γ, N, \mathbf{M}) является регулярной системой в T_0 .

Теорема 2 доказывается с помощью леммы 10 и леммы 11, которые даны ниже.

В лемме 10 мы фиксируем некоторый параллелепипед $I \subset T_0$ и рассматриваем множество B_1 точек I , для которых среди неприводимых полиномов $P \in \mathcal{P}_n(Q)$, $\deg P = n$ имеются решения системы неравенств $|P(x_k)| < b_1 Q^{-\omega_k + 1}$ ($1 \leq k \leq 3$). Мы доказываем, что при некотором $b_1(n)$ меру точек B_1 можно сделать сколь угодно близкой мере I при достаточно большом Q . Доказывается, что при достаточно большом $b_1(n)$ данная система разрешима для всех точек I в ненулевых полиномах $P \in \mathcal{P}_n(Q)$, а также то, что мера точек, для которых данная система разрешима в ненулевых полиномах из $\mathcal{P}_{n-1}(Q)$ и в приводимых ненулевых полиномах из $\mathcal{P}_n(Q)$, может быть сделана сколь угодно меньше меры I при достаточно большом Q , и из этих двух утверждений непосредственно следует утверждение леммы.

В лемме 11 мы фиксируем параллелепипед $I \subset T_0$ и рассматриваем множество B_2 точек из I , для которых среди ненулевых полиномов $P \in \mathcal{P}_n(Q)$ существуют решения системы неравенств $|P(x_k)| < b_1 Q^{-\omega_k + 1}$ ($1 \leq k \leq 3$) и $\min_{1 \leq k \leq 3} (|P'(x_k)|) < \delta_0 Q$. Доказывается, что для любого b_1 можно взять достаточно малое δ_0 так, чтобы для любого параллелепипеда $I \subset T_0$ мера B_2 была сколь угодно мала относительно меры I при достаточно большом Q . Сначала мы рассматриваем случай $n = 3$ и доказываем, что все корни полиномов P достаточно удалены друг от друга, что позволяет получить оценки снизу производной в каждом корне, а также оценить количество полиномов. Для каждого полинома решения системы заключаются в параллелепипеды с центрами в его корнях и суммированием по полиномам получается оценка сверху меры B_2 . На втором этапе доказательства мы рассматриваем случай $n > 3$ и представляем B_2 как объединение двух множеств: B_{21} , для точек которого выполняется $Q^{1/2} \leq \min_{1 \leq k \leq 3} (|P'(x_k)|)$, и B_{22} , для точек которого выполняется противоположное неравенство. Оценка меры B_{21} сводится к случаю $n = 3$ с помощью метода существенных и несущественных областей, введенного В. Г. Спринджукон [3], а оценка меры B_{22} получается аналогично оценке из работы [7, с. 168].

В доказательстве теоремы 2 для параллелепипеда $I \subset T_0$ строятся множества B_1 и B_2 из лемм 10 и 11 так, чтобы мера множества $B_1 \setminus B_2$ была достаточно велика относительно меры I . Из того, что для точек множества $B_1 \setminus B_2$ система $|P(x_k)| < b_1 Q^{-\omega_k + 1}$ ($1 \leq k \leq 3$) и $\min_{1 \leq k \leq 3} (|P'(x_k)|) \geq \delta_0 Q$ разрешима в неприводимых полиномах $P \in \mathcal{P}_n(Q)$, $\deg P = n$, следует близость к точкам корней полиномов P , т. е. троек сопряженных действительных алгебраических чисел степени ровно n (элементов регулярной системы), количество которых оценивается снизу с помощью оценки меры множества $B_1 \setminus B_2$.

В теореме 1 мы фиксируем произвольный параллелепипед $I \subset T_0$ и доказываем, что $\mu(\mathcal{L}_{v,\lambda} \cap I) \geq \lambda \mu(I)$ для некоторого $\lambda < 1$, из чего при помощи леммы 4 следует $\mu(\mathcal{L}_{v,\lambda}) = \mu(T_0)$. Чтобы получить оценки вида $\mu(\mathcal{L}_{v,\lambda} \cap I) \geq \lambda \mu(I)$, мы в первую очередь для троек $\mathbf{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ сопряженных действительных алгебраических чисел степени ровно n вводим параллелепипеды вида

$$\sigma(\mathbf{\beta}) = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : |x_i - \beta_i| < c_{17}(n) H(\mathbf{\beta})^{-v_i - 1} \Psi_0^{\lambda_i}(H(\mathbf{\beta})) \right\}$$

где $\Psi_0(H) = \min(2^{-1} H^{-1}, \Psi(H))$, и доказываем, что из $\mathbf{x} \in \sigma(\mathbf{\beta})$ следует разрешимость для точки \mathbf{x} системы (1) в неприводимых полиномах $P \in \mathcal{P}_n$, $\deg P = n$, тем самым сводя задачу к оценке меры множества точек $\mathbf{x} \in I$, которые попадают в бесконечное число параллелепипедов $\sigma(\mathbf{\beta})$. Далее

при помощи теоремы 2 строим тройки β и параллелепипеды $E_k(\beta)$, вложенные в $\sigma(\beta)$, и оцениваем искомую меру при помощи леммы 7.

В доказательствах теорем и лемм статьи будут использоваться следующие вспомогательные утверждения.

Л е м м а 1. Пусть $P \in \mathcal{P}_n$ и $x \in S(\alpha_1)$. Тогда

$$|x - \alpha_1| \leq n \frac{|P(x)|}{|P'(x)|}, \text{ если } |P'(x)| > 0, \quad (2)$$

$$|x - \alpha_1| \leq 2^{n-1} \frac{|P(x)|}{|P'(\alpha_1)|}, \text{ если } |P'(\alpha_1)| > 0, \quad (3)$$

$$|x - \alpha_1| \leq \min_{2 \leq j \leq n} \left(2^{n-j} \frac{|P(x)|}{|P'(\alpha_1)|} |\alpha_1 - \alpha_2| \cdots |\alpha_1 - \alpha_j| \right)^{1/j}, \text{ если } |P'(\alpha_1)| > 0. \quad (4)$$

Лемма 1 доказана в [8].

Л е м м а 2. Если $P \in \mathcal{P}_n$ – приводимый полином, $P(x) = P_1(x) \cdots P_k(x)$ ($2 \leq k \leq n$, $\deg P_k \geq 1$ ($1 \leq k \leq n$)), то

$$c_1(n)H(P) \leq H(P_1) \cdots H(P_k) \leq c_2(n)H(P). \quad (5)$$

Лемма 2 доказана в [3].

Л е м м а 3. Пусть $I \subset \mathbb{R}$ – некоторый интервал и $B \subset I$ – измеримое множество вещественных чисел с условием $\mu(B) \geq k^{-1}\mu(I)$, где k – натуральное число. Если для всех $x \in B$ выполняется неравенство $|P(x)| < H^{-\omega}$, где $\omega > 0$ и $\deg P \leq n$, то для всех $x \in I$ выполняется неравенство $|P(x)| < (3k)^n (n+1)^{n+1} H^{-\omega}$.

Лемма 3 доказана в [9].

Л е м м а 4. Пусть $T \subset \mathbb{R}^3$ – параллелепипед и $A \subset T$ – измеримое множество. Если существует положительная константа $\lambda < 1$ такая, что $\mu(A \cap I) \geq \lambda\mu(I)$ для любого параллелепипеда $I \subset T$, то $\mu(A) = \mu(T)$.

Л е м м а 5. Пусть $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ – убывающая последовательность положительных чисел и ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ расходится. Пусть $b_i = \min(a_i, i^{-1})$. Тогда $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ тоже убывает и ряд $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ расходится.

Л е м м а 6. Если $\{\Psi(i)\}_{i=1}^{\infty}$ – убывающая последовательность положительных чисел и ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \Psi(i)$ сходится (расходится), то для любого $k \in \mathbb{N}$ ряд $\sum_{i=0}^{\infty} 2^i \Psi(k2^i)$ сходится (расходится). Аналогичное лемме 4 утверждение, а также леммы 5 и 6 доказаны в [6].

Л е м м а 7. Пусть $E_i \subset \mathbb{R}^3$ – последовательность измеримых множеств, объединение которых ограничено, и пусть ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$ расходится. Пусть E – множество точек, попадающих в бесконечное число множеств E_i . Тогда

$$\mu(E) \geq \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \frac{\left(\sum_{i=1}^N \mu(E_i) \right)^2}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mu(E_i \cap E_j)}. \quad (6)$$

Лемма 7 – это частный случай леммы 5 в работе [10, с. 23].

Л е м м а 8. Пусть $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ и $b_2 > 0$. Пусть $\omega_n(\mathbf{x})$ – точная верхняя грань тех $\omega > 0$, для которых неравенство $\prod_{1 \leq i \leq k} |P(x_i)| < b_2 H(P)^{-\omega}$ имеет бесконечное число решений в полиномах $P \in \mathcal{P}_n$. Тогда при $1 \leq k \leq n$ для любого фиксированного b_2 для почти всех (в смысле меры Лебега) $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$ выполняется $\omega_n(\mathbf{x}) = n + 1 - k$.

Лемма 8 является очевидным обобщением теоремы из работы [11].

Перейдем к доказательству теорем и лемм данной статьи. Следующая лемма технического характера используется в доказательстве леммы 10.

Л е м м а 9. Пусть $I \subset \mathbb{R}^3$ – некоторый параллелепипед, $\tau > 0$, $b_3 > 0$, $\mathcal{P} \subset \mathbb{Z}[x]$ – множество полиномов такое, что

$$\forall H_0 \in \mathbb{N} \# \{P \in \mathcal{P} : H(P) = H_0\} < \infty. \quad (7)$$

Пусть $L(I, \mathcal{P}, \tau, b_3)$ – множество точек $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in I$, для которых среди $P \in \mathcal{P}$ существует бесконечно много решений неравенства

$$\prod_{i=1}^3 |P(x_i)| < b_3 H(P)^{-\tau}. \quad (8)$$

Для $Q > 0$ пусть $M(I, \mathcal{P}, \tau, b_3, Q)$ – множество точек $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in I$, для которых разрешима система

$$\begin{cases} \prod_{i=1}^3 |P(x_i)| < b_3 Q^{-\tau}, \\ P \in \mathcal{P}, H(P) \leq Q, P \neq 0. \end{cases} \quad (9)$$

Тогда, если $\mu(L(I, \mathcal{P}, \tau, b_3)) = 0$ для некоторых $I, \mathcal{P}, \tau, b_3$, то для любого $1 > \varepsilon_3 > 0$ найдется такое $Q_0(I, \mathcal{P}, \tau, b_3, \varepsilon_3)$, что для всех $Q > Q_0$ выполняется $\mu(M(I, \mathcal{P}, \tau, b_3, Q)) < \varepsilon_3 \mu(I)$.

Доказательство леммы 9.

Для $H_1, H_2, H_3 \in \mathbb{N}$ таких, что $H_3 \leq H_1 \leq H_2$, введем обозначения

$$\begin{aligned} N(H_1, H_2) &= \left\{ \mathbf{x} \in I : \exists P \in \mathcal{P}, H(P) = H_1, \prod_{i=1}^3 |P(x_i)| < b_3 H_2^{-\tau} \right\}, \\ S(H_3) &= \bigcup_{H_1 \geq H_3} N(H_1, H_1). \end{aligned}$$

Из определения M следует, что при $1 \leq Q' \leq Q$

$$M = \left(\bigcup_{1 \leq H < Q'} N(H, Q) \right) \cup \left(\bigcup_{Q' \leq H \leq Q} N(H, Q) \right) = M_1 \cup M_2.$$

Оценим сверху меру M_2 . Очевидно, что $M \subset S(Q')$. Согласно определению L и (7),

$$L = \bigcap_{H_3=1}^{\infty} \bigcup_{H_1 \geq H_3} N(H_1, H_1) = \bigcap_{H_3=1}^{\infty} S(H_3).$$

Так как $S(1) \subset S(2) \subset \dots$, в соответствии со свойством счетно-аддитивности меры Лебега, из $\mu(L) = 0$ следует, что $\mu(S(H_3)) \xrightarrow{H_3 \rightarrow \infty} 0$. Следовательно, существует Q' такое, что $\mu(M_2) \leq \mu(S(Q')) < 2^{-1} \varepsilon_3 \mu(I)$. Теперь оценим сверху меру M_1 . Очевидно, что из $\prod_{i=1}^3 |P(x_i)| < b_3 Q^{-\tau}$ следует истинность хотя бы одного из неравенств $|P(x_i)| < b_3^{1/3} Q^{-\tau/3}$ ($1 \leq i \leq 3$), поэтому

$$M_1 \subset \bigcup_{P \in \mathcal{P}, 1 \leq H(P) < Q'} \bigcup_{1 \leq i \leq 3} \left\{ \mathbf{x} \in I : |P(x_i)| < b_3^{1/3} Q^{-\tau/3} \right\}.$$

Согласно (7) и так как Q' фиксировано, в объединении участвует не более чем конечное число полиномов, поэтому существует такое Q'' , что при $Q > Q''$ выполняется $\mu(M_1) < 2^{-1} \varepsilon_3 \mu(I)$. Возьмем $Q_0 = \max(Q', Q'')$. Лемма 9 доказана.

Л е м м а 10. Пусть $n, \boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3), T_0$ – такие же, как в теореме 2. Пусть $I = I_1 \times I_2 \times I_3 \subset T_0$ – параллелепипед. Тогда существует такое $b_1(n) > 0$, что для любого $1 > \varepsilon_1 > 0$ найдется

$Q_0(I, \omega, b_1, \varepsilon_1)$ такое, что для всех $Q > Q_0$ выполняется $\mu(B_1) \geq (1 - \varepsilon_1)\mu(I)$, где $B_1 = B_1(I, \omega, b_1, Q)$ – это множество точек $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in I$, для которых среди неприводимых полиномов $P \in \mathcal{P}_n(Q)$ степени ровно n имеются решения системы

$$\{|P(x_1)| < b_1 Q^{-\omega_1+1}, |P(x_2)| < b_1 Q^{-\omega_2+1}, |P(x_3)| < b_1 Q^{-\omega_3+1}\}. \quad (10)$$

Доказательство леммы 10.

Докажем, что при достаточно большом $b_1(n)$ и $Q > Q_1(\omega, b_1)$ для всех точек $\mathbf{x} \in I$ система (10) разрешима в полиномах $P \in \mathcal{P}_n(Q)$, $P \neq 0$. Зафиксируем некоторую точку $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in I$. Очевидно, что для любого $P \in \mathcal{P}_n(Q/2)$ точка $M_P = (|P(x_1)|, |P(x_2)|, |P(x_3)|)$ принадлежит параллелепипеду $J_1 \times J_2 \times J_3 = [-Q, Q]^3$. Покроем интервалы J_i ($1 \leq i \leq 3$) непересекающимися интервалами Δ_{j_i} длиной $b_1 Q^{-\omega_i+1}$. Ясно, что количество интервалов Δ_{j_i} не превосходит $\lceil \mu(J_i) / \mu(\Delta_{j_i}) \rceil$, что для любого b_1 при $Q > Q_2(\omega, b_1)$ не превосходит $2\mu(J_i) / \mu(\Delta_{j_i}) = 4b_1^{-1} Q^{\omega_i}$. Таким образом, набор параллелепипедов $\Delta_{j_1} \times \Delta_{j_2} \times \Delta_{j_3}$ образует покрытие параллелепипеда $J_1 \times J_2 \times J_3$ и количество элементов в покрытии $\#\{\Delta_{j_1} \times \Delta_{j_2} \times \Delta_{j_3}\} \leq 2^6 b_1^{-3} Q^{\omega_1+\omega_2+\omega_3} = 2^6 b_1^{-3} Q^{n+1}$. Если $b_1(n)$ достаточно велико, то $\#\mathcal{P}_n(Q/2) \geq Q^{n+1} > 2^6 b_1^{-3} Q^{n+1} \geq \#\{\Delta_{j_1} \times \Delta_{j_2} \times \Delta_{j_3}\}$, поэтому найдутся два различных полинома $P_1, P_2 \in \mathcal{P}_n(Q/2)$ такие, что $M_{P_1}, M_{P_2} \in \Delta_{j_1} \times \Delta_{j_2} \times \Delta_{j_3}$ для некоторого $\Delta_{j_1} \times \Delta_{j_2} \times \Delta_{j_3}$, тогда для $P = P_2 - P_1 \in \mathcal{P}_n(Q)$, $P \neq 0$ выполняется система (10) в точке \mathbf{x} .

Пусть $\mathcal{P}_R, \mathcal{P}_I$ – множества соответственно приводимых и неприводимых полиномов из \mathcal{P}_n степени ровно n . Также по аналогии определим $\mathcal{P}_R(Q)$ и $\mathcal{P}_I(Q)$. Согласно лемме 8, $\mu(L(I, \mathcal{P}_{n-1}, n-2, b_1^3)) = 0$, так как $\omega_{n-1}(\mathbf{x}) = n-3$ для почти всех (в смысле меры Лебега) $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, что меньше $\tau = n-2$. Следовательно, по лемме 9 при $Q > Q_3$ выполняется $\mu(M(I, \mathcal{P}_{n-1}, n-2, b_1^3, Q)) < 2^{-1} \varepsilon_1 \mu(I)$.

Теперь рассмотрим множество $L(I, \mathcal{P}_R, n-2, b_1^3)$. По определению, для каждой точки $\mathbf{x} \in L(I, \mathcal{P}_R, n-2, b_1^3)$ существует бесконечно много решений неравенства

$$\prod_{i=1}^3 |P(x_i)| < b_1^3 H(P)^{-n+2} \quad (11)$$

в приводимых полиномах $P(x) = P_1(x)P_2(x) \in \mathcal{P}_n$. С помощью леммы 2 из (11) получим

$$\left(\prod_{i=1}^3 |P_1(x_i)|\right) \left(\prod_{i=1}^3 |P_2(x_i)|\right) < b_1^3 c_2(n)^{-n+2} H(P_1)^{-n+2} H(P_2)^{-n+2}, \quad (12)$$

откуда без ограничения общности следует $\prod_{i=1}^3 |P_1(x_i)| < \sqrt{b_1^3 c_2(n)^{-n+2} H(P_1)^{-n+2}}$. Множество точек $\mathbf{x} \in L(I, \mathcal{P}_R, n-2, b_1^3)$, для которых имеется бесконечно много таких $P_1(x)$, обозначим как V_1 , а те точки, для которых имеется лишь конечное число таких $P_1(x)$, обозначим как V_2 . Очевидно, что $V_1 \subset L\left(I, \mathcal{P}_{n-1}, n-2, \sqrt{b_1^3 c_2(n)^{-n+2}}\right)$, и, аналогично предыдущему случаю, $\mu(V_1) = 0$. Для каждой точки из V_2 найдется хотя бы один P_1 , который встречается бесконечно много раз в разложениях $P(x) = P_1(x)P_2(x)$. Обозначим множество точек из V_2 с таким P_1 как $V_2(P_1)$. Также для $\varepsilon > 0$ и $P_1 \in \mathbb{Z}[x]$, $P_1 \neq 0$ введем следующие обозначения:

$$U_\varepsilon(P_1) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \prod_{i=1}^3 |P_1(x_i)| \geq \varepsilon H(P_1)^{-n+2} \right\},$$

$$U_0(P_1) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \prod_{i=1}^3 |P_1(x_i)| = 0 \right\}.$$

Очевидно, что $\mathbb{R}^3 = (\bigcup_{k \in \mathbb{N}} U_{1/k}(P_1)) \cup U_0(P_1)$ и $\mu(U_0(P_1)) = 0$ для любого $P_1 \in \mathbb{Z}[x]$, $P_1 \neq 0$. Из данных выше определений и (12) следует, что для каждой точки $\mathbf{x} \in V_2(P_1) \cap U_{1/k}(P_1)$ ($k \in \mathbb{N}$) найдется бесконечно много $P_2 \in \mathcal{P}_{n-1}$, удовлетворяющих $\prod_{i=1}^3 |P_2(x_i)| < kb_1^3 c_2(n)^{-n+2} H(P_2)^{-n+2}$, и следовательно, $V_2(P_1) \cap U_{1/k}(P_1) \subset L(I, \mathcal{P}_{n-1}, n-2, kb_1^3 c_2(n)^{-n+2})$. Как и ранее, получим, что $\mu(V_2(P_1) \cap U_{1/k}(P_1)) = 0$, откуда следует $\mu(V_2(P_1)) = 0$, так как $V_2(P_1)$ является счетным объединением множеств меры нуль:

$$V_2(P_1) = V_2(P_1) \cap \mathbb{R}^3 = \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} (V_2(P_1) \cap U_{1/k}(P_1)) \right) \cup (V_2(P_1) \cap U_0(P_1)).$$

Аналогично равенство $\mu(V_2) = 0$ следует из $V_2 = \bigcup_{P_1 \in \mathcal{P}_{n-1}, P_1 \neq 0} V_2(P_1)$. Объединяя доказанные выше утверждения, получаем $\mu(L(I, \mathcal{P}_R, n-2, b_1^3)) = \mu(V_1 \cup V_2) = 0$, откуда и из леммы 9 вытекает, что при $Q > Q_4$ выполняется $\mu(M(I, \mathcal{P}_R, n-2, b_1^3, Q)) < 2^{-1} \varepsilon_1 \mu(I)$. Таким образом, доказано, что при $Q > Q_5$ множества $\mathbf{x} \in I$, для которых в ненулевых полиномах $\mathcal{P}_{n-1}(Q)$ и $\mathcal{P}_R(Q)$ разрешима система (10) (включающиеся во множества $M(I, \mathcal{P}_{n-1}, n-2, b_1^3, Q)$ и $M(I, \mathcal{P}_R, n-2, b_1^3, Q)$ соответственно), имеют суммарную меру менее $\varepsilon_1 \mu(I)$. Также ранее доказано, что при $Q > \max(Q_1, Q_2)$ для всех $\mathbf{x} \in I$ система (10) разрешима в ненулевых полиномах $\mathcal{P}_n(Q)$. С учетом того, что $\mathcal{P}_n(Q) = \mathcal{P}_{n-1}(Q) \amalg \mathcal{P}_R(Q) \amalg \mathcal{P}_I(Q)$, мера $\mathbf{x} \in I$, для которых система (10) разрешима в полиномах $\mathcal{P}_I(Q)$, $\mu(B_1) > (1 - \varepsilon_1) \mu(I)$. Лемма 10 доказана.

Л е м м а 11. Пусть $n, \boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, T_0 – такие же, как в теореме 2. Пусть $I = I_1 \times I_2 \times I_3 \subset T_0$ – параллелепипед. Тогда для любого $b_1 > 0$ и любого $1 > \varepsilon_2 > 0$ найдется достаточно малое $\delta_0(\boldsymbol{\omega}, b_1, \varepsilon_2) > 0$ такое, что для всех $Q > Q_0(I, \boldsymbol{\omega}, b_1, \varepsilon_2, \delta_0)$ выполняется $\mu(B_2) \leq \varepsilon_2 \mu(I)$, где $B_2 = B_2(I, \boldsymbol{\omega}, b_1, \delta_0, Q)$ – это множество точек $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in I$, для которых среди полиномов $P \in \mathcal{P}_n(Q)$, $P \neq 0$ имеются решения системы

$$\begin{cases} |P(x_1)| < b_1 Q^{-\omega_1+1}, & |P(x_2)| < b_1 Q^{-\omega_2+1}, & |P(x_3)| < b_1 Q^{-\omega_3+1}, \\ \min(|P'(x_1)|, |P'(x_2)|, |P'(x_3)|) < \delta_0 Q. \end{cases} \quad (13)$$

Доказательство леммы 11.

Для некоторого $\delta_I > 0$ пусть $I_\delta = \{(x_1, x_2, x_3) \in I \mid \exists 1 \leq i < j \leq 3: |x_i - x_j| < \delta_I\}$. Очевидно, что $\mu(I_\delta) < d(I) \delta_I$ для некоторого $d(I)$, которое зависит только от I . В дальнейшем мы будем рассматривать систему (13) на множестве $\bar{I} = I \setminus I_\delta$, для всех точек $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \bar{I}$ которого, очевидно, выполняется $|x_i - x_j| \geq \delta_I$ для любых $1 \leq i < j \leq 3$.

Пусть $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in B_2 \cap \bar{I}$, следовательно, найдется $P \in \mathcal{P}_n(Q)$, $P \neq 0$, удовлетворяющий системе (13) в точке \mathbf{x} . Пусть $P(x) = a_n x^n + \dots + a_0$. В дальнейшем будем считать, что β_i – ближайший к x_i корень полинома P ($i = 1, 2, 3$). Из (13) и (4) следует

$$|x_i - \beta_i| \leq b_1^{1/n} Q^{-(\omega_i-1)/n} = b_1^{1/n} Q^{-\tau_i}, \quad (14)$$

где $\tau_i = (\omega_i - 1)/n > 0$ по определению ω_i . Откуда, так как $|x_i - x_j| \geq \delta_I$ и $|x_i| \leq 1/2$, следует, что при $Q > Q_1(\boldsymbol{\omega}, b_1, \delta_I)$

$$|x_i - \beta_i| < 1 \quad (1 \leq i \leq 3), \quad (15)$$

$$|\beta_i - \beta_j| \geq 2^{-1} \delta_I \quad (1 \leq i < j \leq 3), \quad (16)$$

$$|\beta_i| \leq 1 \quad (1 \leq i \leq 3). \quad (17)$$

В соответствии с системой (13) в формулировке леммы, $|P'(x_i)| < \delta_0 Q$ для некоторого $1 \leq i \leq 3$. Оценим сверху $|P'(\beta_i)|$, для чего разложим P' в ряд Тейлора в окрестности β_i :

$$P'(x_i) = P'(\beta_i) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} P^{(k+1)}(\beta_i)(x_i - \beta_i)^k.$$

Из (14), (15) и (17) следует оценка $|P^{(k+1)}(\beta_i)(x_i - \beta_i)^k| < c_3(n, b_1) Q^{1-\tau_i}$ ($1 \leq k \leq n-1$), при помощи которой получим из ряда Тейлора, что $|P'(\beta_i)| < \delta_0 Q + c_4(n, b_1) Q^{1-\tau_i}$. Так как $\tau_i > 0$, при $Q > Q_2(\omega, b_1, \delta_0)$ последняя оценка дает $|P'(\beta_i)| < 2\delta_0 Q$. Таким образом, доказано, что из системы (13) следует система

$$\begin{cases} |P(x_1)| < b_1 Q^{-\omega_1+1}, & |P(x_2)| < b_1 Q^{-\omega_2+1}, & |P(x_3)| < b_1 Q^{-\omega_3+1}, \\ \min(|P'(\beta_1)|, |P'(\beta_2)|, |P'(\beta_3)|) < 2\delta_0 Q. \end{cases} \quad (18)$$

Рассмотрим случай $n = 3$. В этом случае $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ – это все корни полинома P . Так как все корни полинома P ограничены (формула (17)), получаем

$$H(P) < c_5(n) |a_3|. \quad (19)$$

Также из (16) можно получить оценку снизу для $|P'(\beta_1)|$ и, аналогичным образом, такую же оценку снизу для $|P'(\beta_2)|$ и $|P'(\beta_3)|$:

$$|P'(\beta_1)| = |a_3| |\beta_1 - \beta_2| |\beta_1 - \beta_3| > 2^{-2} \delta_I^2 |a_3| > 2^{-2} \delta_I^2 c_5(n)^{-1} H(P). \quad (20)$$

Из (18) и (20) получим оценку для высоты полинома P :

$$H(P) < 2^3 \delta_I^{-2} \delta_0 c_5(n) Q = \bar{H}.$$

Так как производные во всех корнях ограничены снизу, из (3) следует, что для фиксированного P все решения (18) лежат в параллелепипедах вида

$$\Pi(\gamma) = \left\{ |x_i - \gamma_i| < 2^2 \frac{|P(x_i)|}{|P'(\gamma_i)|} < 2^4 b_1 \delta_I^{-2} c_5(n) Q^{-\omega_i+1} H(P)^{-1} \quad (i=1,2,3) \right\},$$

где $\gamma = \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ – некоторая перестановка корней $\beta_1, \beta_2, \beta_3$. Мера каждого такого параллелепипеда

$$\mu(\Pi(\gamma)) = 2^{15} b_1^3 \delta_I^{-6} c_5(n)^3 Q^{-1} H(P)^{-3}.$$

Из всего вышесказанного следует, что

$$B_2 \cap \bar{I} \subset \bigcup_{1 \leq H_1 < \bar{H}} \bigcup_{P \in \mathcal{P}_3, H(P)=H_1} \bigcup_{\gamma=(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3), P(\gamma_i)=0} \Pi(\gamma),$$

откуда получаем оценку для меры $B_2 \cap \bar{I}$

$$\mu(B_2 \cap \bar{I}) < \sum_{1 \leq H_1 < \bar{H}} (3H_1)^3 \cdot 3! \cdot 2^{15} b_1^3 \delta_I^{-6} c_5(n)^3 Q^{-1} H_1^{-3} < b_1^3 \delta_0 \delta_I^{-8} c_6(n),$$

откуда следует оценка для меры B_2

$$\mu(B_2) < \mu(B_2 \cap \bar{I}) + \mu(I_\delta) < b_1^3 \delta_0 \delta_I^{-8} c_6(n) + d(I) \delta_I.$$

Выберем δ_I достаточно малым, чтобы выполнялось $\mu(I_\delta) < 2^{-1}\varepsilon_2\mu(I)$, а затем выберем δ_0 достаточно малым, чтобы выполнялось $\mu(B_2 \cap \bar{I}) < 2^{-1}\varepsilon_2\mu(I)$. Тогда $\mu(B_2) < \varepsilon_2\mu(I)$ и лемма 11 в случае $n = 3$ доказана.

Теперь перейдем к случаю $n > 3$. Представим B_2 в виде $B_2 = B_{21} \cup B_{22}$, где B_{21} – это множество точек $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in I$, для которых среди полиномов $P \in \mathcal{P}_n(Q)$, $P \neq 0$ имеются решения системы

$$\begin{cases} |P(x_1)| < b_1 Q^{-\omega_1+1}, & |P(x_2)| < b_1 Q^{-\omega_2+1}, & |P(x_3)| < b_1 Q^{-\omega_3+1}, \\ Q^{1/2} \leq \min(|P'(x_1)|, |P'(x_2)|, |P'(x_3)|) < \delta_0 Q, \end{cases} \quad (21)$$

а B_{22} – это множество точек $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in I$, для которых среди полиномов $P \in \mathcal{P}_n(Q)$, $P \neq 0$ имеются решения системы

$$\begin{cases} |P(x_1)| < b_1 Q^{-\omega_1+1}, & |P(x_2)| < b_1 Q^{-\omega_2+1}, & |P(x_3)| < b_1 Q^{-\omega_3+1}, \\ \min(|P'(x_1)|, |P'(x_2)|, |P'(x_3)|) < Q^{1/2}. \end{cases} \quad (22)$$

Рассмотрим множество B_{21} . Из (21) получим оценку снизу для производной в $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, для чего разложим P' в ряд Тейлора в окрестности β_i :

$$P'(x_i) = P'(\beta_i) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} P^{(k+1)}(\beta_i)(x_i - \beta_i)^k = P'(\beta_i) + R_1.$$

Согласно (2), $|x_i - \beta_i| < n|P(x_i)| |P'(x_i)|^{-1} \leq nb_1 Q^{-\omega_i+1/2}$, из чего получим

$$|P^{(k+1)}(\beta_i)(x_i - \beta_i)^k| < c_7(n, b_1) Q^{-\omega_i+3/2} \quad (1 \leq k \leq n-1).$$

Так как $-\omega_i + 3/2 < 1/2$, из последней оценки следует, что $|R_1| < 2^{-1} Q^{1/2}$ при $Q > Q_3(\omega, b_1)$, из чего с помощью ряда Тейлора и (21) получаем $|P'(\beta_i)| \geq 2^{-1} Q^{1/2}$. Таким образом, учитывая (18), мы доказали, что из системы (21) следует система

$$\begin{cases} |P(x_1)| < b_1 Q^{-\omega_1+1}, & |P(x_2)| < b_1 Q^{-\omega_2+1}, & |P(x_3)| < b_1 Q^{-\omega_3+1}, \\ 2^{-1} Q^{1/2} \leq \min(|P'(\beta_1)|, |P'(\beta_2)|, |P'(\beta_3)|) < 2\delta_0 Q. \end{cases} \quad (23)$$

Согласно (3), при фиксированных P и тройке его корней $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ все решения (23) содержатся в параллелепипеде

$$\sigma(P, \boldsymbol{\beta}) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : |x_i - \beta_i| < 2^{n-1} \frac{b_1 Q^{-\omega_i+1}}{|P'(\beta_i)|} \quad (1 \leq i \leq 3) \right\}. \quad (24)$$

Применим метод существенных и несущественных областей, введенный В. Г. Спринджуком [3], для сведения задачи оценки меры B_{21} к полиномам меньшей степени $n' < n$. Выберем ω' так, чтобы они удовлетворяли условиям леммы 11 и при этом $\omega_i > \omega'_i$. Например, можно взять $\omega'_i = \frac{n'-2}{n-2}(\omega_i - 1) + 1$. Для некоторого фиксированного $b_4 > 1$ построим параллелепипеды

$$\sigma_1(P, \boldsymbol{\beta}) = J_1(P, \boldsymbol{\beta}) \times J_2(P, \boldsymbol{\beta}) \times J_3(P, \boldsymbol{\beta}),$$

где

$$J_i(P, \boldsymbol{\beta}) = \left\{ x_i \in \mathbb{R} : |x_i - \beta_i| < b_4 2^{n-1} \frac{b_1 Q^{-\omega'_i+1}}{|P'(\beta_i)|} \leq 2^n b_1 b_4 Q^{-\omega'_i+1/2} \right\} \quad (1 \leq i \leq 3). \quad (25)$$

Очевидно, что $\sigma(P, \beta) \subset \sigma_1(P, \beta)$ и

$$\mu(\sigma(P, \beta)) \leq b_4^{-3} Q^{n'-n} \mu(\sigma_1(P, \beta)). \quad (26)$$

Также важно отметить, что из $-\omega'_i + \frac{1}{2} < -\frac{1}{2}$ в определении $J_i(P, \beta)$ и (14) вытекает, что при $Q > Q_4(I, \omega, b_1, b_4, \varepsilon_2)$ для любого такого $\sigma_1(P, \beta)$ выполняется

$$\sigma_1(P, \beta) \subset I \cup G_1, \quad (27)$$

где G_1 – некоторое множество с мерой $\mu(G_1) < 2^{-2} \varepsilon_2 \mu(I)$.

Пусть $\mathbf{b} = (a_n, a_{n-1}, \dots, a_{n'+1})$ – вектор, состоящий из коэффициентов полинома $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$. Обозначим через $\mathcal{P}_n(Q, \mathbf{b})$ подмножество полиномов из $\mathcal{P}_n(Q)$ с вектором \mathbf{b} . Для каждого $\mathcal{P}_n(Q, \mathbf{b})$ разобьем все возможные пары (P, β) ($P \in \mathcal{P}_n(Q, \mathbf{b})$) на классы $S_n(Q, \mathbf{b}, j)$ ($1 \leq j \leq c_8(n)$) так, чтобы в каждом классе $S_n(Q, \mathbf{b}, j)$ было не более одной пары (P, β) для любого $P \in \mathcal{P}_n(Q, \mathbf{b})$. Пару $(P_1, \beta_1) \in S_n(Q, \mathbf{b}, j)$, порождающую параллелепипед $\sigma_1(P_1, \beta_1)$, будем называть существенной, если для любой другой пары $(P_2, \beta_2) \in S_n(Q, \mathbf{b}, j)$ выполняется неравенство

$$\mu(\sigma_1(P_1, \beta_1) \cap \sigma_1(P_2, \beta_2)) < 2^{-1} \mu(\sigma_1(P_1, \beta_1)). \quad (28)$$

Обозначим как $S_n^A(Q, \mathbf{b}, j)$ множество существенных пар из $S_n(Q, \mathbf{b}, j)$. Если же найдется другая пара $(P_2, \beta_2) \in S_n(Q, \mathbf{b}, j)$ такая, что

$$\mu(\sigma_1(P_1, \beta_1) \cap \sigma_1(P_2, \beta_2)) \geq 2^{-1} \mu(\sigma_1(P_1, \beta_1)), \quad (29)$$

то будем называть пару (P_1, β_1) несущественной. Обозначим как $S_n^B(Q, \mathbf{b}, j)$ множество несущественных пар из $S_n(Q, \mathbf{b}, j)$.

Из всего вышесказанного следует, что

$$B_{21} \subset \left(\bigcup_{\mathbf{b}} \bigcup_{1 \leq j \leq c_8(n)} \bigcup_{(P_1, \beta_1) \in S_n^A(Q, \mathbf{b}, j)} \sigma(P_1, \beta_1) \right) \cup \left(\bigcup_{\mathbf{b}} \bigcup_{1 \leq j \leq c_8(n)} \bigcup_{(P_1, \beta_1) \in S_n^B(Q, \mathbf{b}, j)} \sigma(P_1, \beta_1) \right) = B_{21A} \cup B_{21B}.$$

Получим оценку сверху меры B_{21A} . Для каждого $S_n^A(Q, \mathbf{b}, j)$ для всех $\sigma_1(P_1, \beta_1)$ не менее половины меры свободно от точек других $\sigma_1(P_1, \beta_1)$, поэтому, с учетом (27),

$$\sum_{(P_1, \beta_1) \in S_n^A(Q, \mathbf{b}, j)} \mu(\sigma_1(P_1, \beta_1)) \leq 2\mu(I) + 2\mu(G_1) \leq \left(2 + \frac{\varepsilon_2}{2} \right) \mu(I).$$

Из последнего неравенства, с помощью (26) и так как $\#\{\mathbf{b}\} \leq c_9(n) Q^{n-n'}$, получим

$$\begin{aligned} \mu(B_{21A}) &\leq \sum_{\mathbf{b}} \sum_{1 \leq j \leq c_8(n)} \sum_{(P_1, \beta_1) \in S_n^A(Q, \mathbf{b}, j)} \mu(\sigma(P_1, \beta_1)) \leq \sum_{\mathbf{b}} \sum_{1 \leq j \leq c_8(n)} \sum_{(P_1, \beta_1) \in S_n^A(Q, \mathbf{b}, j)} b_4^{-3} Q^{n'-n} \mu(\sigma_1(P_1, \beta_1)) \leq \\ &\leq \sum_{\mathbf{b}} \sum_{1 \leq j \leq c_8(n)} b_4^{-3} Q^{n'-n} \left(2 + \frac{\varepsilon_2}{2} \right) \mu(I) \leq 3c_9(n) Q^{n-n'} c_8(n) b_4^{-3} Q^{n'-n} \mu(I) \leq 3c_8(n) c_9(n) b_4^{-3} \mu(I). \end{aligned}$$

Задавая достаточно большое значение $b_4 > b_{40}(n, \varepsilon_2)$, добьемся того, чтобы

$$\mu(B_{21A}) \leq 3^{-1} \varepsilon_2 \mu(I). \quad (30)$$

Оценим сверху меру B_{21B} . В дальнейшем нам будут нужны оценки сверху для $|P(x_i)|$ и $|P'(x_i)|$ при $\mathbf{x} \in \sigma_1(P, \boldsymbol{\beta})$. Разложим P в ряд Тейлора в окрестности β_i :

$$P(x_i) = P'(\beta_i)(x_i - \beta_i) + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} P^{(k)}(\beta_i)(x_i - \beta_i)^k.$$

Из (25) при $Q > Q_5(\boldsymbol{\omega}, b_1, b_4)$ получаем оценки

$$\begin{aligned} |P'(\beta_i)(x_i - \beta_i)| &< 2^{n-1} b_1 b_4 Q^{-\omega_i+1}, \\ |P^{(k)}(\beta_i)(x_i - \beta_i)^k| &< c_{10}(n) Q \cdot 2^n b_1 b_4 Q^{-2\omega_i+1} < 2^n b_1 b_4 c_{10}(n) Q^{-2\omega_i+2} \quad (2 \leq k \leq n), \end{aligned}$$

из которых получаем

$$|P(x_i)| < 2^n b_1 b_4 Q^{-\omega_i+1} (1 + n c_{10}(n) Q^{-\omega_i+1}) \leq c_{11}(n) b_1 b_4 Q^{-\omega_i+1} \quad (1 \leq i \leq 3).$$

Разложим P' в ряд Тейлора в окрестности β_i :

$$P'(x_i) = P'(\beta_i) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} P^{(k+1)}(\beta_i)(x_i - \beta_i)^k.$$

Из (25) получаем оценку

$$|P^{(k+1)}(\beta_i)(x_i - \beta_i)^k| < c_{10}(n) Q \left(2^n b_1 b_4 Q^{-\omega_i+1/2} \right)^k \leq 2^n b_1 b_4 c_{10}(n) Q^{1-(\omega_i-1/2)} \quad (1 \leq k \leq n-1),$$

из которой с учетом (23) при $Q > Q_6(\boldsymbol{\omega}, b_1, b_4, \delta_0)$ для некоторого $1 \leq i \leq 3$ следует

$$|P'(x_i)| < 4\delta_0 Q.$$

Таким образом, мы доказали, что для $\mathbf{x} \in \sigma_1(P, \boldsymbol{\beta})$ справедлива система неравенств

$$\begin{cases} |P(x_1)| < c_{11}(n) b_1 b_4 Q^{-\omega_1+1}, & |P(x_2)| < c_{11}(n) b_1 b_4 Q^{-\omega_2+1}, & |P(x_3)| < c_{11}(n) b_1 b_4 Q^{-\omega_3+1}, \\ \min(|P'(x_1)|, |P'(x_2)|, |P'(x_3)|) < 4\delta_0 Q. \end{cases} \quad (31)$$

При фиксированном $S_n^B(Q, \mathbf{b}, j)$ по определению для любой пары $(P_1, \boldsymbol{\beta}_1) \in S_n^B(Q, \mathbf{b}, j)$ найдется пара $(P_2, \boldsymbol{\beta}_2) \in S_n(Q, \mathbf{b}, j)$ такая, что выполняется (29), откуда очевидным образом для $1 \leq i \leq 3$ получаем

$$\mu(J_i(P_1, \boldsymbol{\beta}_1) \cap J_i(P_2, \boldsymbol{\beta}_2)) \geq 2^{-1} \mu(J_i(P_1, \boldsymbol{\beta}_1)). \quad (32)$$

Из (31) получаем, что для ненулевого полинома $R = P_1 - P_2 \in \mathcal{P}_n'(2Q)$ для каждого $\mathbf{x} \in \sigma_1(P_1, \boldsymbol{\beta}_1) \cap \sigma_1(P_2, \boldsymbol{\beta}_2)$ выполняется система неравенств

$$\begin{cases} |R(x_1)| < 2c_{11}(n) b_1 b_4 Q^{-\omega_1+1}, & |R(x_2)| < 2c_{11}(n) b_1 b_4 Q^{-\omega_2+1}, & |R(x_3)| < 2c_{11}(n) b_1 b_4 Q^{-\omega_3+1}, \\ \min(|R'(x_1)|, |R'(x_2)|, |R'(x_3)|) < 8\delta_0 Q. \end{cases}$$

При помощи (32) и леммы 3 получаем, что уже для всех $\mathbf{x} \in \sigma_1(P_1, \boldsymbol{\beta}_1)$ выполняется система неравенств

$$\begin{cases} |R(x_1)| < c_{12}(n) b_1 b_4 Q^{-\omega_1+1}, & |R(x_2)| < c_{12}(n) b_1 b_4 Q^{-\omega_2+1}, & |R(x_3)| < c_{12}(n) b_1 b_4 Q^{-\omega_3+1}, \\ \min(|R'(x_1)|, |R'(x_2)|, |R'(x_3)|) < c_{13}(n) \delta_0 Q. \end{cases}$$

Введем замену переменных $Q' = 2Q$. Таким образом, для некоторого ненулевого $R \in \mathcal{P}_{n'}(Q')$ для всех $\mathbf{x} \in \sigma_1(P_1, \beta_1)$ верно

$$\begin{cases} |R(x_1)| < c_{14}(n)b_1b_4(Q')^{-\omega_1+1}, & |R(x_2)| < c_{14}(n)b_1b_4(Q')^{-\omega_2+1}, & |R(x_3)| < c_{14}(n)b_1b_4(Q')^{-\omega_3+1}, \\ \min(|R'(x_1)|, |R'(x_2)|, |R'(x_3)|) < c_{15}(n)\delta_0 Q'. \end{cases}$$

Следовательно,

$$B_{21B} \cap I = \bigcup_{\mathbf{b}} \bigcup_{1 \leq j \leq c_8(n)} \bigcup_{(P_1, \beta_1) \in S_n^B(Q, \mathbf{b}, j)} (\sigma(P_1, \beta_1) \cap I) \subset B_2(I, \omega', c_{14}(n)b_1b_4(n), c_{15}(n)\delta_0, Q').$$

Пусть теперь $n' = 3$. Используя уже доказанный случай $n = 3$, получим, что при достаточно малом δ_0 при $2Q = Q' > Q'_0(I, \omega', c_{14}(n)b_1b_4(n), 12^{-1}\varepsilon_2, c_{15}(n)\delta_0)$ выполняется

$$\mu(B_{21B} \cap I) \leq \mu(B_2(I, \omega', c_{14}(n)b_1b_4(n), c_{15}(n)\delta_0, Q')) < 12^{-1}\varepsilon_2\mu(I),$$

откуда с учетом (27) получаем

$$\mu(B_{21B}) < 3^{-1}\varepsilon_2\mu(I). \quad (33)$$

Рассмотрим множество B_{22} . По аналогии с доказательством, данным в работе [7, с. 168], получим, что при $Q > Q_7(I, \omega, b_1, 3^{-1}\varepsilon_2)$

$$\mu(B_{22}) < 3^{-1}\varepsilon_2\mu(I). \quad (34)$$

Из (30), (33), (34) получаем, что $\mu(B_2) \leq \varepsilon_2\mu(I)$. Лемма 11 доказана.

Доказательство теоремы 2.

Пусть $I = I_1 \times I_2 \times I_3 = \prod_{1 \leq i \leq 3} (e_i; f_i) \subset (-2^{-1}; 2^{-1})^3$. Для $\varepsilon_4 = 10^{-1}$ определим параллелепипед $I' = \prod_{1 \leq i \leq 3} \left(e_i + \frac{\varepsilon_4}{2}|I_i|; f_i - \frac{\varepsilon_4}{2}|I_i| \right)$. Очевидно, что $\mu(I') = (1 - \varepsilon_4)^3 \mu(I)$.

Для некоторого $\delta > 0$ пусть $I'_\delta = \{(x_1, x_2, x_3) \in I' \mid \exists 1 \leq i < j \leq 3: |x_i - x_j| < \delta\}$. Очевидно, что $\mu(I'_\delta) < d(I')\delta$ для некоторого $d(I')$, которое зависит только от I' . Возьмем достаточно малый $\delta = \delta(I')$ такой, что $\mu(I'_\delta) \leq 6^{-1}\mu(I')$.

Для тройки действительных чисел $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \in \mathbb{R}^3$ и $b_5 > 0$ определим параллелепипеды

$$\Pi(\gamma, b_5) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3: |x_k - \gamma_k| < b_5 Q^{-\omega_k} \quad (1 \leq k \leq 3)\}.$$

Применим леммы 10 и 11 для параллелепипеда I' . По лемме 10 существует $b_1(n)$ такой, что для $\varepsilon_1 = 6^{-1}$ для всех $Q > Q_0(I', \omega)$ выполняется

$$\mu(B_1) \geq \left(\frac{5}{6}\right)\mu(I'). \quad (35)$$

По лемме 11 для $\varepsilon_2 = 6^{-1}$ найдется $\delta_0(\omega)$ такой, что для всех $Q > Q_1(I', \omega)$ выполняется

$$\mu(B_2) \leq \left(\frac{1}{6}\right)\mu(I').$$

Согласно определениям множеств B_1, B_2, I'_δ , для всех точек $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in B_3 = B_1 \cap (I' \setminus B_2) \cap (I' \setminus I'_\delta)$ среди неприводимых полиномов $P \in \mathcal{P}_n(Q)$ степени ровно n существуют решения системы неравенств

$$\begin{cases} |P(x_1)| < b_1 Q^{-\omega_1+1}, & |P(x_2)| < b_1 Q^{-\omega_2+1}, & |P(x_3)| < b_1 Q^{-\omega_3+1}, \\ \min(|P'(x_1)|, |P'(x_2)|, |P'(x_3)|) \geq \delta_0(\omega) Q. \end{cases}$$

При этом $\mu(B_3) \geq 2^{-1} \mu(I')$. Докажем, что существуют попарно различные действительные корни $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ полинома P такие, что

$$|x_i - \beta_i| < 3b_1(n) \delta_0^{-1}(\omega) Q^{-\omega_i}. \quad (36)$$

Разложим P в ряд Тейлора в окрестности точки x_i :

$$P(y_i) = P(x_i) + P'(x_i)(y_i - x_i) + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} P^{(k)}(x_i)(y_i - x_i)^k.$$

Не теряя общности, можно считать, что $P(x_i) > 0$ и $P'(x_i) < 0$. Возьмем $y_i = x_i + 3b_1(n) \delta_0^{-1}(\omega) Q^{-\omega_i}$, тогда при $Q > Q_2(\omega)$ получим

$$\begin{aligned} 0 &\leq P(x_i) < b_1(n) Q^{-\omega_i+1}, \\ P'(x_i)(y_i - x_i) &\leq -3b_1(n) Q^{-\omega_i+1}, \\ \left| P^{(k)}(x_i)(y_i - x_i)^k \right| &< (3b_1(n) \delta_0^{-1}(\omega))^2 c_{16}(n) Q^{-2\omega_i+1} < n^{-1} b_1(n) Q^{-\omega_i+1}, \\ \left| P(x_i) + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} P^{(k)}(x_i)(y_i - x_i)^k \right| &< 2b_1(n) Q^{-\omega_i+1}, \end{aligned}$$

что дает $P(y_i) < 0$. Так как $P(x_i) > 0$, из непрерывности $P(x)$ следует, что P имеет корень $\beta_i \in [x_i; x_i + 3b_1(n) \delta_0^{-1}(\omega) Q^{-\omega_i}]$. Также $\mathbf{x} \in B_3 \subset I' \setminus I'_\delta$, поэтому $|x_i - x_j| \geq \delta$, откуда получаем, что $|\beta_i - \beta_j| > 2^{-1} \delta$ при $Q > Q_3(I', \omega)$, а следовательно, β_i попарно различны. Таким образом, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ – тройка сопряженных действительных алгебраических чисел степени ровно n и высоты не более Q .

Так как множество таких троек $\boldsymbol{\beta}$ не более чем конечно, мы можем выбрать из них максимальный набор $\boldsymbol{\beta}_1, \dots, \boldsymbol{\beta}_t$ таким образом, чтобы параллелепипеды $\Pi(\boldsymbol{\beta}_j, 1)$ ($1 \leq j \leq t$) не пересекались. Согласно (36), для каждого $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in B_3$ найдется тройка $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ такая, что $\mathbf{x} \in \Pi(\boldsymbol{\beta}, 3b_1(n) \delta_0^{-1}(\omega))$. Если $\boldsymbol{\beta} \neq \boldsymbol{\beta}_j$ ($1 \leq j \leq t$), то найдется такое $\boldsymbol{\beta}_j$, что $\Pi(\boldsymbol{\beta}, 1) \cap \Pi(\boldsymbol{\beta}_j, 1) \neq \emptyset$, откуда получаем $\mathbf{x} \in \Pi(\boldsymbol{\beta}_j, 3b_1(n) \delta_0^{-1}(\omega) + 2)$. Следовательно,

$$B_3 \subset \bigcup_{1 \leq j \leq t} \Pi(\boldsymbol{\beta}_j, 3b_1(n) \delta_0^{-1}(\omega) + 2),$$

из чего получаем оценку снизу для t :

$$t \geq \frac{\mu(B_3)}{\mu(\Pi(\boldsymbol{\beta}_j, 3b_1(n) \delta_0^{-1}(\omega) + 2))} \geq \frac{2^{-1} (1 - \varepsilon_4)^3 \mu(I)}{\mu(\Pi(\boldsymbol{\beta}_j, 1)) (3b_1(n) \delta_0^{-1}(\omega) + 2)^3} = C_1 \frac{\mu(I)}{\mu(\Pi(\boldsymbol{\beta}_j, 1))},$$

где $C_1 = C_1(\omega) = 2^{-1} (1 - \varepsilon_4)^3 (3b_1(n) \delta_0^{-1}(\omega) + 2)^{-3}$. Также очевидно, что при $Q > Q_4(I', \omega)$ выполняется $\Pi(\boldsymbol{\beta}_j, 1) \subset I$. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 1.

Зафиксируем некоторый параллелепипед $I = I_1 \times I_2 \times I_3 \subset T_0 = (-2^{-1}; 2^{-1})^3$. Пусть $\Psi_0(H) = \min(2^{-1}H^{-1}, \Psi(H))$, тогда $\sum_{H=1}^{\infty} \Psi_0(H) = \infty$ согласно лемме 5. Далее пусть $\Phi(H) = H\Psi_0(H)$, тогда, согласно лемме 6,

$$\Phi(H) \leq 2^{-1}, \quad (37)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Phi(2^k) = \infty. \quad (38)$$

Пусть $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in T_0$ – тройка сопряженных действительных алгебраических чисел степени ровно n . Это значит, что найдется такой неприводимый и примитивный полином $P \in \mathbb{Z}[x]$, что $P(\beta_i) = 0$. Рассмотрим параллелепипед

$$\sigma(\beta) = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : |x_i - \beta_i| < c_{17}(n) H(\beta)^{-v_i-1} \Psi_0^{\lambda_i}(H(\beta)) \right\}$$

где $H(\beta) = H(P)$. Докажем, что при $c_{17}(n) = (n^2 n!)^{-1}$ из $\mathbf{x} \in \sigma(\beta)$ следует (1), для чего разложим P в ряд Тейлора в окрестности β_i и используем оценку $\left| P^{(k)}(\beta_i) \right| < \frac{n!n}{(n-i)!} H(P)$:

$$\begin{aligned} |P(x_i)| &\leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \left| P^{(k)}(\beta_i) \right| |x_i - \beta_i|^k \leq \sum_{k=1}^n c_{17}(n) \frac{1}{k!} \frac{n!n}{(n-i)!} H(P)^{-v_i} \Psi_0^{\lambda_i}(H(P)) \leq \\ &\leq H(P)^{-v_i} \Psi_0^{\lambda_i}(H(P)) \leq H(P)^{-v_i} \Psi^{\lambda_i}(H(P)). \end{aligned}$$

Таким образом, если $\mathbf{x} \in T_0$ принадлежит бесконечному числу $\sigma(\beta)$, то $\mathbf{x} \in \mathcal{L}_{v,\lambda}$.

Пусть $\omega_i = v_i + 1 + \lambda_i$, ($i=1,2,3$). Согласно теореме 2, найдутся $C_1 = C_1(\omega) > 0$ и $k = k_0(\omega, I)$ такие, что для любого $k \geq k_0$ найдется множество $A_k(I)$, состоящее из троек $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in I$ сопряженных действительных алгебраических чисел степени ровно n , для которого справедливо

$$C_1 2^{k(n+1)} \mu(I) \leq \# A_k(I) \leq 2^{k(n+1)} \mu(I), \quad (39)$$

$$H(\beta) \leq 2^k \quad (\forall \beta \in A_k(I)), \quad (40)$$

и для параллелепипедов

$$\Pi_k(\beta) = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : |x_i - \beta_i| < 2^{-k\omega_i} \right\} \quad (41)$$

выполняются свойства

$$\Pi_k(\beta) \subset I \quad (\forall \beta \in A_k(I)), \quad (42)$$

$$\Pi_k(\beta_1) \cap \Pi_k(\beta_2) = \emptyset \quad (\forall \beta_1, \beta_2 \in A_k(I)). \quad (43)$$

Для всех $\beta \in A_k(I)$ определим параллелепипеды

$$E_k(\beta) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : |x_i - \beta_i| < 2^{-1} c_{17}(n) 2^{-k(v_i+1)} \Psi_0^{\lambda_i}(2^k) = 2^{-1} c_{17}(n) 2^{-k\omega_i} \Phi^{\lambda_i}(2^k) \right\},$$

мера каждого из которых, очевидно,

$$\mu(E_k(\beta)) = c_{17}^3(n) 2^{-k(n+1)} \Phi(2^k).$$

Из (37) и $c_{17}(n) < 1$ вытекает $E_k(\beta) \subset \Pi_k(\beta)$, откуда следует $E_k(\beta_1) \subset I$ и $E_k(\beta_1) \cap E_k(\beta_2) = \emptyset$ ($\forall \beta_1, \beta_2 \in A_k(I)$). Определим

$$E_k = \bigcup_{\beta \in A_k(I)} E_k(\beta), \quad E(I) = \bigcap_{N=k_0}^{\infty} \bigcup_{k=N}^{\infty} E_k.$$

Так как $E_k \subset I$, $E_k(\boldsymbol{\beta}) \subset \sigma(\boldsymbol{\beta})$, и так как фиксированный $\mathbf{x} \in T_0$ может принадлежать лишь конечному числу $E_k(\boldsymbol{\beta})$ для фиксированного $\boldsymbol{\beta}$, очевидно, что множество точек, попадающих в бесконечное число множеств E_k , $E(I) \subset \mathcal{L}_{\mathbf{v}, \lambda}$.

Оценим снизу меру $E(I)$, используя лемму 7. Из (39) получаем

$$C_1 c_{17}^3(n) \Phi(2^k) \mu(I) \leq \mu(E_k) \leq c_{17}^3(n) \Phi(2^k) \mu(I),$$

откуда

$$C_1 c_{17}^3(n) \mu(I) \sum_{k=k_0}^N \Phi(2^k) \leq \sum_{k=k_0}^N \mu(E_k), \quad (44)$$

из чего вместе с (38) получаем $\sum_{k=k_0}^{\infty} \mu(E_k) = \infty$.

Из (38) следует, что существует такое N_0 , что при $N > N_0$

$$\sum_{k=k_0}^N \Phi(2^k) > 1. \quad (45)$$

В дальнейшем будет рассматривать только $N > N_0$. Зафиксируем некоторые $k_0 \leq k < l \leq N$ и оценим сверху $\sum_{k_0 \leq k < l \leq N} \mu(E_k \cap E_l)$. Для любого $E_k(\boldsymbol{\beta}_1)$ ($\boldsymbol{\beta}_1 \in A_k(I)$) количество $E_l(\boldsymbol{\beta}_2)$ ($\boldsymbol{\beta}_2 \in A_l(I)$), имеющих с $E_k(\boldsymbol{\beta}_1)$ непустое пересечение, не более

$$\#\{E_l(\boldsymbol{\beta}_2) : E_k(\boldsymbol{\beta}_1) \cap E_l(\boldsymbol{\beta}_2) \neq \emptyset\} \leq \prod_{i=1}^3 \left(2 + \frac{c_{17}(n) 2^{-k\omega_i} \Phi^{\lambda_i}(2^k)}{2^{-l\omega_i}} \right),$$

откуда

$$\begin{aligned} \mu(E_k(\boldsymbol{\beta}_1) \cap E_l) &\leq \#\{E_l(\boldsymbol{\beta}_2) : E_k(\boldsymbol{\beta}_1) \cap E_l(\boldsymbol{\beta}_2) \neq \emptyset\} \mu(E_l(\boldsymbol{\beta}_2)) \leq \\ &\leq \prod_{i=1}^3 \left(2 + \frac{c_{17}(n) 2^{-k\omega_i} \Phi^{\lambda_i}(2^k)}{2^{-l\omega_i}} \right) (c_{17}(n) 2^{-l\omega_i} \Phi^{\lambda_i}(2^l)) \leq \\ &\leq c_{17}^3(n) \Phi(2^l) \prod_{i=1}^3 (2 \cdot 2^{-l\omega_i} + c_{17}(n) 2^{-k\omega_i} \Phi^{\lambda_i}(2^k)), \end{aligned}$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \mu(E_k \cap E_l) &\leq \#A_k(I) \mu(E_k(\boldsymbol{\beta}_1) \cap E_l) \leq \left(\mu(I) \prod_{i=1}^3 2^{k\omega_i} \right) \mu(E_k(\boldsymbol{\beta}_1) \cap E_l) \leq \\ &\leq c_{17}^3(n) \Phi(2^l) \mu(I) \prod_{i=1}^3 (2 \cdot 2^{(k-l)\omega_i} + c_{17}(n) \Phi^{\lambda_i}(2^k)), \end{aligned}$$

из чего следует

$$\sum_{k_0 \leq k < l \leq N} \mu(E_k \cap E_l) \leq c_{17}^3(n) \mu(I) \sum_{k_0 \leq k < l \leq N} \Phi(2^l) \prod_{i=1}^3 (2 \cdot 2^{(k-l)\omega_i} + c_{17}(n) \Phi^{\lambda_i}(2^k)).$$

Если раскрыть скобки в произведении в правой части, мы получим восемь сумм по индексам $k_0 \leq k < l \leq N$. Обозначим эти суммы S_j ($1 \leq j \leq 8$). Первая сумма

$$\begin{aligned} S_1 &= c_{17}^3(n) \mu(I) \sum_{k_0 \leq k < l \leq N} \Phi(2^l) \prod_{i=1}^3 (c_{17}(n) \Phi^{\lambda_i}(2^k)) = c_{17}^6(n) \mu(I) \sum_{k_0 \leq k < l \leq N} \Phi(2^k) \Phi(2^l) \leq \\ &\leq c_{17}^6(n) \mu(I) \left(\sum_{k=k_0}^N \Phi(2^k) \right)^2, \end{aligned}$$

где последнее неравенство следует из (45). Остальные суммы S_j ($2 \leq j \leq 8$) имеют вид

$$S_j = c_{17}^3(n) \mu(I) \sum_{k_0 \leq k < l \leq N} \Phi(2^l) \left(2^{u_1} 2^{(k-l)u_2} c_{17}^{u_3}(n) \Phi^{u_4}(2^k) \right),$$

где $1 \leq u_1(j) \leq 3$, $u_2(j, \omega) > 0$, $0 \leq u_3(j) \leq 2$, $0 \leq u_4(j, \lambda) \leq 1$. Так как $0 < c_{17}(n) < 1$ и $0 < \Phi(2^k) < 1$, мы можем получить оценку $c_{17}^{u_3}(n) \Phi^{u_4}(2^k) < 1$, из которой следует

$$\begin{aligned} S_j &\leq c_{17}^3(n) \mu(I) \sum_{k_0 \leq k < l \leq N} 2^{u_1} 2^{(k-l)u_2} \Phi(2^l) \leq 2^3 c_{17}^3(n) \mu(I) \sum_{k_0 \leq k < l \leq N} 2^{(k-l)u_2} \Phi(2^l) \leq \\ &\leq 2^3 c_{17}^3(n) \mu(I) \sum_{l=k_0+1}^N \Phi(2^l) \sum_{k=k_0}^{l-1} 2^{(k-l)u_2} \leq 2^3 c_{17}^3(n) \mu(I) \sum_{l=k_0+1}^N \Phi(2^l) \frac{1}{2^{u_2-1}} \leq \\ &\leq c_{18}(\omega) \mu(I) \left(\sum_{k=k_0}^N \Phi(2^k) \right)^2. \end{aligned}$$

Объединим полученные выше оценки

$$\sum_{k_0 \leq k < l \leq N} \mu(E_k \cap E_l) \leq c_{19}(\omega) \mu(I) \left(\sum_{k=k_0}^N \Phi(2^k) \right)^2. \quad (46)$$

При помощи (44), (46) и леммы 7 оценим снизу $\mu(E)$:

$$\mu(E) \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^N \mu(E_i) \right)^2}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mu(E_i \cap E_j)} \geq \frac{\left(c_{17}^3(n) \mu(I) \right)^2 \left(\sum_{k=k_0}^N \Phi(2^k) \right)^2}{c_{19}(\omega) \mu(I) \left(\sum_{k=k_0}^N \Phi(2^k) \right)^2} = \mu(I) \left(c_{17}^3(n) \right)^2 c_{19}^{-1}(\omega).$$

Так как параллелепипед $I \subset T_0$ взят произвольно, из леммы 4 получим $\mu(E(I)) = \mu(T_0)$, откуда, очевидно, следует $\mu(\mathcal{L}_{\nu, \lambda}) = \mu(T_0)$. Теорема 1 доказана.

Список использованной литературы

1. *Khinchine, A.* Continued Fractions / A. Khinchine. – Chicago: University of Chicago Press, 1964.
2. *Mahler, K.* Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus. Teil I / K. Mahler // J. Reine Angew. Math. – 1932. – Vol. 166. – P. 118–150.
3. *Спринджук, В. Г.* Проблема Малера в метрической теории чисел / В. Г. Спринджук. – Минск: Наука и техника, 1967.
4. *Baker, A.* On a theorem of Sprindzuk / A. Baker // Proc. R. Soc. London, Ser. A. – 1966. – Vol. 292, iss. 1428. – P. 92–104.
5. *Берник, В. И.* О точном порядке приближения нуля значениями целочисленных многочленов / В. И. Берник // Acta Arith. – 1989. – Vol. 53. – P. 17–28.
6. *Beresnevich, V.* On approximation of real numbers by real algebraic numbers / V. Beresnevich // Acta Arith. – 1999. – Vol. 90, N 2. – P. 97–112.
7. *Bernik, V.* A divergent Khintchine theorem in the real, complex, and p-adic fields / V. Bernik, N. Budarina, D. Dickinson // Lith. Math. J. – 2008. – Vol. 48, N 2. – P. 158–173.
8. *Берник, В. И.* Распределение действительных алгебраических чисел произвольной степени в коротких интервалах / В. И. Берник, Ф. Гётце // Изв. РАН. Сер. мат. – 2015. – Т. 79, вып. 1. – С. 21–42.
9. *Берник, В. И.* Применение размерности Хаусдорфа в теории диофантовых приближений / В. И. Берник // Acta Arith. – 1983. – Vol. 42, N 3. – P. 219–253.
10. *Спринджук, В. Г.* Метрическая теория диофантовых приближений / В. Г. Спринджук. – М.: Наука, 1977.
11. *Берник, В. И.* Метрическая теорема о совместном приближении нуля значениями целочисленных многочленов / В. И. Берник // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1980. – Т. 44, вып. 1. – С. 24–45.

Поступила в редакцию 20.08.2015

ФІЗІКА

УДК 539.12:530.145

В. А. ПЛЕТЮХОВ

ОБЪЕДИНЕННОЕ ПОЛЕ МАКСВЕЛЛА – КАЛЬБА – РАМОНДА И ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СТРУН

Брестский государственный университет им. А. С. Пушкина, Брест, Беларусь,
e-mail: pletyukhov@yandex.by

Даны тензорная и матричная формулировки релятивистского волнового уравнения, обеспечивающего совместное описание электромагнитного поля и безмассового поля Кальба – Рамонда с нулевой спиральностью. Показано, что данное уравнение является частным случаем системы уравнений Дирака – Кэлера. Этот результат открывает новые возможности применения поля Дирака – Кэлера в теории струн.

Ключевые слова: электромагнитное поле, поле Кальба – Рамонда, нотоф, релятивистские волновые уравнения, струны.

V. A. PLETYUKHOV

UNITED MAXWELL – KALB – RAMOND FIELD AND THE INTERACTION OF STRINGS

Brest State University named after A. S. Pushkin, Brest, Belarus, e-mail: pletyukhov@yandex.by

Tensor and matrix formulations of the relativistic wave equation providing a description both of an electromagnetic field and a massless Kalb – Ramond field with the zero helicity are given. It is shown that this equation is a particular case of the Dirac – Kähler system. It opens new possibilities for applications of the Dirac – Kähler field in the string theory.

Keywords: electromagnetic field, Kalb – Ramond field, relativistic wave equations, strings.

Уравнение Дирака – Кэлера и его безмассовые пределы исследуются давно и с разных позиций (см., напр., [1; 2]). Физическая интерпретация последних существенно зависит от трактовки входящих в них полевых величин.

Рассмотрим, например, безмассовый предел уравнения Дирака – Кэлера вида

$$\partial_{\mu}\Psi_{\mu} = 0, \quad (1)$$

$$\partial_{\mu}\Psi_{[\nu\alpha\beta]} - \partial_{\beta}\Psi_{[\mu\nu\alpha]} + \partial_{\alpha}\Psi_{[\beta\mu\nu]} - \partial_{\nu}\Psi_{[\alpha\beta\mu]} = 0, \quad (2)$$

$$\partial_{\nu}\Psi_{[\mu\nu]} + \partial_{\mu}\Psi_0 + \Psi_{\mu} = 0, \quad (3)$$

$$\partial_{\mu}\Psi_{[\nu\alpha]} + \partial_{\alpha}\Psi_{[\mu\nu]} + \partial_{\nu}\Psi_{[\alpha\mu]} + \partial_{\beta}\Psi_{[\beta\mu\nu\alpha]} + \Psi_{[\mu\nu\alpha]} = 0, \quad (4)$$

$$-\partial_{\mu}\Psi_{\nu} + \partial_{\nu}\Psi_{\mu} + \partial_{\alpha}\Psi_{[\mu\nu\alpha]} = 0, \quad (5)$$

где Ψ_0 – скаляр, Ψ_{μ} – вектор, $\Psi_{[\mu\nu]}$, $\Psi_{[\mu\nu\alpha]}$, $\Psi_{[\mu\nu\alpha\beta]}$ – полностью антисимметричные тензоры второго, третьего и четвертого ранга. Как показано в работе [3], если считать здесь величины Ψ_0 , $\Psi_{[\mu\nu]}$, $\Psi_{[\mu\nu\alpha\beta]}$ потенциалами, а Ψ_{μ} , $\Psi_{[\mu\nu\alpha]}$ – напряженностями, система (1)–(5) дает совместное описание поля Кальба – Рамонда [4] (нотифа Огиевецкого – Полубаринова [5]) и безмассового скалярного поля с удвоенным набором состояний, вырожденных по некоторому дополнительному квантовому числу.

Иная картина получается, если считать функции Ψ_{μ} и $\Psi_{[\mu\nu]}$ потенциалами, а $\Psi_{[\mu\nu\alpha]}$ – напряженностью. Разберем эту ситуацию подробно.

Сначала установим статус скалярной функции ψ_0 при указанной трактовке. Нетрудно видеть, что система (1)–(5) и напряженность $\Psi_{[\mu\nu\alpha]}$ инвариантны относительно преобразований

$$\Psi_\mu \rightarrow \Psi_\mu + \partial_\mu \lambda(x), \quad \psi_0 \rightarrow \psi_0 - \lambda(x), \quad (6)$$

где произвол в выборе функции $\lambda(x)$ ограничен условием

$$\square \lambda(x) = 0. \quad (7)$$

Действуя на уравнение (3) оператором ∂_μ и учитывая (1), найдем, что функция ψ_0 удовлетворяет аналогичному (7) уравнению

$$\square \psi_0 = 0. \quad (8)$$

Следовательно, скалярную функцию ψ_0 в системе (1)–(5) можно рассматривать как калибровочную, т. е., не уменьшая общности, положить $\psi_0 = 0$. При этом из системы (1)–(5) автоматически выпадет уравнение (1), которое становится следствием уравнения (3).

Рассуждая подобным образом, можно придать смысл калибровочной также псевдоскалярной функции $\Psi_{[\mu\nu\alpha\beta]}$. В результате, полагая $\Psi_{[\mu\nu\alpha\beta]} = 0$ и исключая уравнение (2), которое становится следствием уравнения (4), получим систему

$$\partial_\nu \Psi_{[\mu\nu]} + \Psi_\mu = 0, \quad (9)$$

$$\partial_\mu \Psi_{[\nu\alpha]} + \partial_\alpha \Psi_{[\mu\nu]} + \partial_\nu \Psi_{[\alpha\mu]} + \Psi_{[\mu\nu\alpha]} = 0, \quad (10)$$

$$-\partial_\mu \Psi_\nu + \partial_\nu \Psi_\mu + \partial_\alpha \Psi_{[\mu\nu\alpha]} = 0. \quad (11)$$

Уравнение (9) устанавливает связь между потенциалами; (10) является определением напряженности $\Psi_{[\mu\nu\alpha]}$ через тензор-потенциал $\Psi_{[\mu\nu]}$. Вводя обозначение

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu \Psi_\nu - \partial_\nu \Psi_\mu, \quad (12)$$

где $F_{\mu\nu}$ интерпретируется в качестве напряженности «чистого» векторного поля с потенциалом Ψ_μ , уравнение (11) можно переписать в виде

$$-F_{[\mu\nu]} + \partial_\alpha \Psi_{[\mu\nu\alpha]} = 0 \quad (13)$$

и идентифицировать его как уравнение движения в системе (9)–(11).

Важно отметить, что система (9)–(11) не распадается относительно преобразований группы Лоренца.

Анализ физического содержания системы (9)–(11) начнем с рассмотрения ее частных случаев (пределов). Так, если положить $\Psi_\mu = 0$, из (9)–(11) получаем систему

$$\partial_\mu \Psi_{[\nu\alpha]} + \partial_\alpha \Psi_{[\mu\nu]} + \partial_\nu \Psi_{[\alpha\mu]} + \Psi_{[\mu\nu\alpha]} = 0, \quad (14)$$

$$\partial_\alpha \Psi_{[\mu\nu\alpha]} = 0. \quad (15)$$

Уравнение $\partial_\nu \Psi_{[\mu\nu]} = 0$, вытекающее из (9) при $\Psi_\mu = 0$, приобретает статус дополнительного условия, связанного с инвариантностью системы (14), (15) относительно калибровочных преобразований

$$\Psi_{[\mu\nu]} \rightarrow \Psi_{[\mu\nu]} - \partial_\mu \Lambda_\nu + \partial_\nu \Lambda_\mu, \quad (16)$$

и поэтому может не включаться в систему (14), (15) в качестве независимого уравнения.

Система (14), (15) описывает вышеупомянутое поле Кальба – Рамонда [4], которое, в свою очередь, является модификацией предложенного еще в 1966 г. В. И. Огиевецким и И. И. Полубариновым теории нотофа – безмассовой частицы со спиральностью 0, но переносящей во взаимодействиях, как и фотон, спин 1 [5].

В другом частном случае, когда $\Psi_{[\mu\nu]} = 0$, из системы (9)–(11) остается уравнение (11), которое с учетом обозначения (12) принимает вид (13). Применяя к (13) оператор ∂_μ , получим

$$\partial_\nu F_{[\mu\nu]} = 0. \quad (17)$$

Соотношения (12), (17), рассматриваемые как система независимых уравнений, представляют собой хорошо известную десятимерную формулировку уравнений свободного электромагнитного поля.

Таким образом, естественно предположить, что система (9)–(11) описывает некоторое объединенное поле Максвелла – Кальба – Рамонда с возможными значениями спиральности $0, \pm 1$. С точки зрения подхода теории релятивистских волновых уравнений (РВУ) [6] нераспадение системы (9)–(11) по группе Лоренца означает, что здесь речь идет о едином физическом объекте, в том же смысле, например, как мы трактуем электромагнитное поле по отношению к электрической и магнитной компонентам.

С целью строгого и однозначного подтверждения этого предположения рассмотрим эквивалентные системе (9)–(11) уравнения второго порядка

$$\square \Psi_\mu = 0, \quad (18)$$

$$\square \Psi_{[\mu\nu]} = 0, \quad (19)$$

для которых уравнение (9) и вытекающее из него соотношение

$$\partial_\mu \Psi_\mu = 0 \quad (20)$$

играют роль дополнительных условий.

Решения уравнений (18), (19) представим в виде суперпозиции плоских волн:

$$\Psi_\mu(x) = \sum_k N_k \left(C_{\mu k} e^{ikx} + C_{\mu k}^+ e^{-ikx} \right), \quad (21)$$

$$\Psi_{[\mu\nu]}(x) = \sum_k \frac{N_k}{i\omega} \left(C_{[\mu\nu]k} e^{ikx} + C_{[\mu\nu]k}^+ e^{-ikx} \right), \quad (22)$$

где множитель $\frac{1}{i\omega}$ введен в (22) для того, чтобы амплитуды разложений (21), (22) имели одинаковую размерность.

Разложим амплитуды $C_{\mu k}$, $C_{\mu k}^+$, $C_{[\mu\nu]k}$, $C_{[\mu\nu]k}^+$ по неортогональному базису $e_\mu^{(1)}$, $e_\mu^{(2)}$, k_μ , n_μ со свойствами [5]:

$$\begin{aligned} e_\mu^{(i)} e_\mu^{(j)} &= \delta_{ij}, & e_\mu^{(i)} k_\mu &= e_\mu^{(i)} n_\mu = 0, \\ k_\mu^2 &= 0, & n_\mu^2 &= -1, & k_\mu n_\mu &= -\omega. \end{aligned} \quad (23)$$

Будем иметь

$$C_{\mu k} = \sum_{i=1}^2 c_{ki} e_\mu^{(i)} + c_{k3} k_\mu + c_{k4} n_\mu, \quad (24)$$

$$C_{\mu k}^+ = \sum_{i=1}^2 c_{ki}^+ e_\mu^{(i)} + c_{k3}^+ k_\mu + c_{k4}^+ n_\mu, \quad (25)$$

$$C_{[\mu\nu]k} = a_k \left(e_\mu^{(1)} e_\nu^{(2)} - e_\nu^{(1)} e_\mu^{(2)} \right) + \sum_{i=1}^2 b_{ki} \left(e_\mu^{(i)} k_\nu - e_\nu^{(i)} k_\mu \right) + \sum_{i=1}^2 d_{ki} \left(e_\mu^{(i)} n_\nu - e_\nu^{(i)} n_\mu \right) + f_k \left(k_\mu n_\nu - k_\nu n_\mu \right), \quad (26)$$

$$C_{[\mu\nu]k}^+ = a_k^+ \left(e_\mu^{(1)} e_\nu^{(2)} - e_\nu^{(1)} e_\mu^{(2)} \right) + \sum_{i=1}^2 b_{ki}^+ \left(e_\mu^{(i)} k_\nu - e_\nu^{(i)} k_\mu \right) + \sum_{i=1}^2 d_{ki}^+ \left(e_\mu^{(i)} n_\nu - e_\nu^{(i)} n_\mu \right) + f_k^+ \left(k_\mu n_\nu - k_\nu n_\mu \right). \quad (27)$$

Подставляя разложения (21), (22), (24)–(27) в дополнительные условия (9), (20), получим соотношения

$$c_{k4} = c_{k4}^+ = 0, \quad d_{ki} = c_{ki}, \quad d_{ki}^+ = -c_{ki}^+, \quad f_k = c_{k3}, \quad f_k^+ = -c_{k3}^+. \quad (28)$$

Кроме того, уравнения (9), (19) инвариантны относительно калибровочных преобразований (16), где калибровочная вектор-функция $\Lambda_\mu(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\square \Lambda_\mu(x) - \partial_\mu \partial_\nu \Lambda_\nu(x) = 0. \quad (29)$$

Решение уравнения (29) носит характер суперпозиции плоских волн

$$\Lambda_\mu(x) = \sum_k M_k \left(\Lambda_{\mu k} e^{ikx} + \Lambda_{\mu k}^+ e^{-ikx} \right), \quad (30)$$

но при этом в разложениях амплитуд

$$\Lambda_{\mu k} = \sum_{i=1}^2 \lambda_{ki} e_\mu^{(i)} + \lambda_{k3} k_\mu, \quad (31)$$

$$\Lambda_{\mu k}^+ = \sum_{i=1}^2 \lambda_{ki}^+ e_\mu^{(i)} + \lambda_{k3}^+ k_\mu \quad (32)$$

отсутствуют слагаемые с n_μ вследствие наличия члена $\partial_\mu \partial_\nu \Lambda_\nu(x)$ в уравнении (29).

Подстановка разложений (30)–(32) в калибровочные преобразования (16) приводит к соответствующим преобразованиям для амплитуд

$$C_{[\mu\nu]k} \rightarrow C_{[\mu\nu]k} + i \sum_{i=1}^2 \lambda_{ki} \left(e_\mu^{(i)} k_\nu - e_\nu^{(i)} k_\mu \right), \quad (33)$$

$$C_{[\mu\nu]k}^+ \rightarrow C_{[\mu\nu]k}^+ + i \sum_{i=1}^2 \lambda_{ki}^+ \left(e_\mu^{(i)} k_\nu - e_\nu^{(i)} k_\mu \right), \quad (34)$$

которые указывают на несущественный характер слагаемых, содержащих коэффициенты b_{ki}, b_{ki}^+ в выражениях (26), (27). Вследствие этого можно положить

$$b_{ki} = b_{ki}^+ = 0. \quad (35)$$

С учетом равенств (28), (35) разложения (24)–(27) принимают вид

$$C_{\mu k} = \sum_{i=1}^2 c_{ki} e_\mu^{(i)} + c_{k3} k_\mu, \quad (36)$$

$$C_{\mu k}^+ = \sum_{i=1}^2 c_{ki}^+ e_\mu^{(i)} + c_{k3}^+ k_\mu, \quad (37)$$

$$C_{[\mu\nu]k} = a_k \left(e_\mu^{(1)} e_\nu^{(2)} - e_\nu^{(1)} e_\mu^{(2)} \right) + \sum_{i=1}^2 c_{ki} \left(e_\mu^{(i)} n_\nu - e_\nu^{(i)} n_\mu \right) + c_{k3} (k_\mu n_\nu - k_\nu n_\mu), \quad (38)$$

$$C_{[\mu\nu]k}^+ = a_k^+ \left(e_\mu^{(1)} e_\nu^{(2)} - e_\nu^{(1)} e_\mu^{(2)} \right) - \sum_{i=1}^2 c_{ki}^+ \left(e_\mu^{(i)} n_\nu - e_\nu^{(i)} n_\mu \right) - c_{k3}^+ (k_\mu n_\nu - k_\nu n_\mu). \quad (39)$$

Для устранения нефизических компонент, которые все еще содержатся в выражениях (35)–(39), перепишем последние, перейдя в обычный ортонормированный базис:

$$e_\mu^{(\alpha)} = \delta_{\mu\alpha}, \quad e_\mu^{(\alpha)} e_\mu^{(\alpha')} = \delta_{\alpha\alpha'}, \quad e_\mu^{(\alpha)} e_\nu^{(\alpha)} = \delta_{\mu\nu}, \quad (40)$$

первые два орта которого ($\alpha = 1, 2$) совпадают с ортами $e_\mu^{(i)}$ базиса (23) и соответствуют поперечным составляющим поля $\psi_\mu(x)$, третий ($\lambda = 3$) и четвертый ($\lambda = 4$) – продольной и скалярной составляющим этого поля.

В базисе (40) векторы k_μ и n_μ имеют вид

$$k_\mu = (0, 0, \omega, i\omega), \quad n_\mu = (0, 0, 0, i). \quad (41)$$

Для амплитуд (36), (37) получаются выражения

$$C_{\mu k} = \sum_{i=1}^2 c_{ki} e_{\mu}^{(i)} + \tilde{c}_{k3} e_{\mu}^{(3)} + i \tilde{c}_{k3} e_{\mu}^{(4)}, \quad (42)$$

$$C_{\mu k}^+ = \sum_{i=1}^2 c_{ki}^+ e_{\mu}^{(i)} + \tilde{c}_{k3}^+ e_{\mu}^{(3)} + i \tilde{c}_{k3}^+ e_{\mu}^{(4)}, \quad (43)$$

где использованы обозначения

$$\tilde{c}_{k3} = \omega c_{k3}, \quad \tilde{c}_{k3}^+ = \omega c_{k3}^+. \quad (44)$$

Если расписать (42), (43) по компонентам, будем иметь

$$\begin{aligned} C_{1k} &= c_{k1} e_1^{(1)}, \quad C_{2k} = c_{k2} e_2^{(2)}, \quad C_{3k} = \tilde{c}_{k3} e_3^{(3)}, \quad C_{4k} = i \tilde{c}_{k3} e_4^{(4)}, \\ C_{1k}^+ &= c_{k1}^+ e_1^{(1)}, \quad C_{2k}^+ = c_{k2}^+ e_2^{(2)}, \quad C_{3k}^+ = \tilde{c}_{k3}^+ e_3^{(3)}, \quad C_{4k}^+ = i \tilde{c}_{k3}^+ e_4^{(4)}. \end{aligned} \quad (45)$$

Аналогично для амплитуд (38), (39) получаем

$$\begin{aligned} C_{[12]k} &= a_k e_1^{(1)} e_2^{(2)}, \quad C_{[23]k} = C_{[31]k} = 0, \\ C_{[14]k} &= i c_{k1} e_1^{(1)} e_4^{(4)}, \quad C_{[24]k} = i c_{k2} e_2^{(2)} e_4^{(4)}, \quad C_{[34]k} = i \tilde{c}_{k3} e_3^{(3)} e_4^{(4)}, \\ C_{[12]k}^+ &= a_k^+ e_1^{(1)} e_2^{(2)}, \quad C_{[23]k}^+ = C_{[31]k}^+ = 0, \\ C_{[14]k}^+ &= -i c_{k1}^+ e_1^{(1)} e_4^{(4)}, \quad C_{[24]k}^+ = -i c_{k2}^+ e_2^{(2)} e_4^{(4)}, \quad C_{[34]k}^+ = -i \tilde{c}_{k3}^+ e_3^{(3)} e_4^{(4)}. \end{aligned} \quad (46)$$

Найдем выражение для энергии рассматриваемого поля. Лагранжиан, из которого получается система (9)–(11), может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} L &= -\frac{1}{2} \Psi_{[\mu\nu]} (\partial_{\mu} \Psi_{\nu} - \partial_{\nu} \Psi_{\mu}) - \frac{1}{2} \Psi_{\mu}^2 - \frac{1}{6} \Psi_{[\mu\nu\alpha]} (\partial_{\mu} \Psi_{[\nu\alpha]} + \\ &\quad + \partial_{\alpha} \Psi_{[\mu\nu]} + \partial_{\nu} \Psi_{[\alpha\mu]}) - \frac{1}{12} \Psi_{[\mu\nu\alpha]}^2. \end{aligned} \quad (47)$$

Отсюда для плотности энергии имеем выражение

$$\begin{aligned} T_{44} &= -\Psi_{[4\mu]} \partial_4 \Psi_{\mu} + \frac{1}{2} (\partial_4 \Psi_{[\mu\nu]} + \partial_{\nu} \Psi_{[4\mu]} + \partial_{\mu} \Psi_{[\nu 4]}) \partial_4 \Psi_{[\mu\nu]} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \Psi_{[\mu\nu]} (\partial_{\mu} \Psi_{\nu} - \partial_{\nu} \Psi_{\mu}) - \frac{1}{2} \Psi_{\mu} \partial_{\nu} \Psi_{[\mu\nu]} - \frac{1}{12} (\partial_{\mu} \Psi_{[\nu\alpha]} + \partial_{\alpha} \Psi_{[\mu\nu]} + \partial_{\nu} \Psi_{[\alpha\mu]})^2. \end{aligned} \quad (48)$$

С учетом легко проверяемых тождественных равенств

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\partial_4 \Psi_{[\mu\nu]} + \partial_{\nu} \Psi_{[4\mu]} + \partial_{\mu} \Psi_{[\nu 4]}) \partial_4 \Psi_{[\mu\nu]} &= (\partial_4 \Psi_{[12]})^2, \\ \frac{1}{2} \Psi_{[\mu\nu]} (\partial_{\mu} \Psi_{\nu} - \partial_{\nu} \Psi_{\mu}) &= \Psi_{[4\nu]} \partial_4 \Psi_{\nu} + \Psi_{[34]} \partial_3 \Psi_4, \\ \frac{1}{2} \Psi_{\mu} \partial_{\nu} \Psi_{[\mu\nu]} &= \frac{1}{2} (\Psi_{\mu} \partial_4 \Psi_{[\mu 4]} - \Psi_4 \partial_3 \Psi_{[34]}), \\ \frac{1}{12} (\partial_{\mu} \Psi_{[\nu\alpha]} + \partial_{\alpha} \Psi_{[\mu\nu]} + \partial_{\nu} \Psi_{[\alpha\mu]})^2 &= \frac{1}{2} \left[(\partial_4 \Psi_{[12]})^2 + (\partial_3 \Psi_{[12]})^2 + \right. \\ &\quad \left. + (\partial_3 \Psi_{[14]})^2 + (\partial_3 \Psi_{[24]})^2 \right] \end{aligned}$$

формула (48) преобразуется следующим образом:

$$T_{44} = \left(\partial_4 \Psi_{[12]} \right)^2 + \Psi_{[34]} \partial_3 \Psi_4 + \frac{1}{2} \Psi_4 \partial_3 \Psi_{[34]} - \frac{1}{2} \Psi_\mu \partial_4 \Psi_{[\mu\nu]} - \frac{1}{2} \left[\left(\partial_4 \Psi_{[12]} \right)^2 + \left(\partial_3 \Psi_{[12]} \right)^2 + \left(\partial_3 \Psi_{[14]} \right)^2 + \left(\partial_3 \Psi_{[24]} \right)^2 \right]. \quad (49)$$

Подставляя теперь разложения (21), (22) с амплитудами (45), (46) в выражение

$$E = \int T_{44} \partial^3 x$$

для энергии классического поля, получим

$$E = \frac{1}{2} \sum_k \omega \left[\sum_{i=1}^2 \left(c_{ki} c_{ki}^+ + c_{ki}^+ c_{ki} \right) + \tilde{c}_{k3} \tilde{c}_{k3}^+ + \tilde{c}_{k3}^+ \tilde{c}_{k3} + a_k a_k^+ + a_k^+ a_k \right], \quad (50)$$

где учтено, что $N_k = \frac{1}{\sqrt{\omega V}}$, V – нормировочный объем.

Переходя ко вторично квантованному полю, рассматриваем величины Ψ , c_{ki} , c_{ki}^+ , \tilde{c}_{k3} , \tilde{c}_{k3}^+ , a_k , a_k^+ как операторы, удовлетворяющие коммутационным соотношениям Бозе – Эйнштейна. Тогда для оператора энергии квантованного поля получим (с точностью до бесконечной константы, устранимой обычным способом) выражение

$$E = \sum_k \omega \left(\sum_{i=1}^2 \hat{c}_{ki}^+ \hat{c}_{ki} + \hat{c}_{k3}^+ \hat{c}_{k3} + \hat{a}_k^+ \hat{a}_k \right). \quad (51)$$

Соотношение (20) применительно к квантовому полю сформулируем в виде условия [7]

$$\left(\partial_\mu \hat{\Psi}_\mu \right)_+ \Psi_{\text{физ}} = 0, \quad (52)$$

накладываемого на волновую функцию $\Psi_{\text{физ}}$ в пространстве состояний. Индекс «+» здесь означает, что соответствующий оператор содержит только положительно-частотную часть. Поскольку производные $\partial_1 \hat{\Psi}_1$, $\partial_2 \hat{\Psi}_2$ равны нулю, условие (52) принимает вид

$$\left(\partial_3 \hat{\Psi}_3 + \partial_4 \hat{\Psi}_4 \right)_+ \Psi_{\text{физ}} = 0. \quad (53)$$

Отсюда приходим к равенству

$$\sum_k \omega \hat{c}_{k3} \Psi_{\text{физ}} = 0, \quad (54)$$

которое означает, что функция $\Psi_{\text{физ}}$ при всех k должна удовлетворять условию

$$\hat{c}_{k3} \Psi_{\text{физ}} = 0. \quad (55)$$

Поступая далее в соответствии со стандартной процедурой, используемой для устранения продольных и скалярных колебаний при квантовании электромагнитного поля [8], получаем соотношение

$$\left(\Psi_{\text{физ}}, \hat{c}_{k3}^+ \hat{c}_{k3} \Psi_{\text{физ}} \right) = 0, \quad (56)$$

вследствие которого исчезают средние значения оператора энергии, связанные с параметрами c_{k3} , c_{k3}^+ в разложениях (36)–(39).

Таким образом, в вышеприведенных формулах слагаемые, содержащие эти параметры, являются нефизическими и их можно обнулить. Формулы (36)–(39), (50) принимают, следовательно, вид

$$C_{\mu k} = \sum_{i=1}^2 c_{ki} e_\mu^{(i)}, \quad C_{\mu k}^+ = \sum_{i=1}^2 c_{ki}^+ e_\mu^{(i)}, \quad (57)$$

$$C_{[\mu\nu]k} = a_k \left(e_\mu^{(1)} e_\nu^{(2)} - e_\nu^{(1)} e_\mu^{(2)} \right) + \sum_{i=1}^2 c_{ki} \left(e_\mu^{(i)} n_\nu - e_\nu^{(i)} n_\mu \right), \quad (58)$$

$$C_{[\mu\nu]k}^+ = a_k^+ \left(e_\mu^{(1)} e_\nu^{(2)} - e_\nu^{(1)} e_\mu^{(2)} - \sum_{i=1}^2 c_{ki}^+ \left(e_\mu^{(i)} n_\nu - e_\nu^{(i)} n_\mu \right) \right); \quad (59)$$

$$E = \sum_k \omega \left(\sum_{i=1}^2 \hat{c}_{ki}^+ \hat{c}_{ki} + \hat{a}_k^+ \hat{a}_k \right). \quad (60)$$

Выражения (57)–(60) указывают на три физические степени свободы поля. Две из них ассоциируются с поперечными составляющими векторного поля ψ_μ (параметры c_{k1} , c_{k2}), третья относится к тензорной составляющей $\psi_{[12]}$ со спиральностью 0. Следует, однако, подчеркнуть, что это сопоставление носит достаточно условный характер, поскольку наличие второго слагаемого в разложениях (58), (59) означает, что все три указанные составляющие связаны между собой. Другими словами, речь идет о едином физическом объекте – безмассовом поле со спиральностями $0, \pm 1$, переносящем во взаимодействиях спин 1.

Представим систему (9)–(11) в стандартной для теории релятивистских волновых уравнений матричной форме

$$(\Gamma_\mu \partial_\mu + \Gamma_0) \Psi(x) = 0, \quad (61)$$

перепишав ее предварительно следующим образом:

$$\partial_\nu \Psi_{[\mu\nu]} + \Psi_\mu = 0, \quad (62)$$

$$\frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu \Psi_{[\alpha\beta]} + \tilde{\Psi}_\mu = 0, \quad (63)$$

$$-\partial_\mu \Psi_\nu + \partial_\nu \Psi_\mu + \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\alpha \tilde{\Psi}_\beta = 0. \quad (64)$$

Здесь

$$\tilde{\Psi}_\mu = \frac{1}{3!} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \Psi_{[\nu\alpha\beta]} \quad (65)$$

– аксиальный вектор, дуальный тензору $\Psi_{[\nu\alpha\beta]}$; $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ – тензор Леви-Чивита ($\varepsilon_{1234} = -i$).

В тензорном базисе

$$\Psi = (\Psi_\mu, \tilde{\Psi}_\mu, \Psi_{[\mu\nu]}) \quad (66)$$

матрицы Γ_μ , Γ_0 системы (62)–(64), записанной в форме (61), имеют вид

$$\Gamma_\mu = e^{\nu[\mu]} + e^{[\nu\mu]} + \frac{i}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \left(e^{\tilde{\nu}[\alpha\beta]} + e^{[\alpha\beta]\tilde{\nu}} \right), \quad (67)$$

$$\Gamma_0 = e^{\nu\nu} + e^{\tilde{\nu}\tilde{\nu}}. \quad (68)$$

Схема зацеплений неприводимых представлений группы Лоренца РВУ (61) с волновой функцией (66) и матрицами Γ_μ (67), Γ_0 (68) такова:

$$\begin{array}{ccc} & \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ (0, 1) & & (1, 0) \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ & \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)' & \end{array} \quad (69)$$

Представления $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)'$, $[(0,1) \oplus (1,0)]$ сопоставляются вектору Ψ_μ , псевдовектору $\tilde{\Psi}_\mu$ и антисимметричному тензору $\Psi_{[\mu\nu]}$ соответственно.

Для установления спиновых характеристик микрообъекта, описываемого РВУ (61) со схемой зацеплений (69), удобно перейти в так называемый базис Гельфанда – Яглома (канонический по терминологии работы [6]). В этом базисе матрица Γ_4 , играющая основную роль для РВУ (61), будет иметь вид

$$\Gamma_4 = C^0 \oplus (C^1 \otimes I_3), \quad (70)$$

где C^0, C^1 – спиновые блоки, отвечающие спинам 0 и 1 в том смысле, что если собственные значения блока C^s отличны от нуля, то частица обладает спином s .

Если ввести нумерацию неприводимых представлений, входящих в схему (69)

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \sim 1, \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)' \sim 2, \quad (0,1) \sim 3, \quad (1,0) \sim 4,$$

для спиновых блоков C^0, C^1 получаются выражения

$$C^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_{13}^1 & c_{14}^1 \\ 0 & 0 & c_{23}^1 & c_{24}^1 \\ c_{31}^1 & c_{32}^1 & 0 & 0 \\ c_{41}^1 & c_{42}^1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (71)$$

в которых ненулевые элементы c_{ij}^s соответствуют зацепляющимся представлениям τ_i, τ_j (см. (69)).

Налагая на элементы c_{ij}^1 ограничения, вытекающие из требований инвариантности уравнения (61) относительно преобразований полной группы Лоренца и возможности его лагранжевой формулировки, приходим к блоку C^1 :

$$C^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (72)$$

Из вида спиновых блоков C^0, C^1 (71), (72) следует, что рассматриваемое РВУ описывает безмассовый микрообъект, переносящий во взаимодействиях спин 1. Однако, в отличие от фотона, возможные значения его проекции спина (спиральности) равны $0, \pm 1$. При этом ненулевое собственное значение $\lambda = \pm 1$ блока C^1 является двукратно вырожденным. Роль проективной матрицы Γ_0 сводится к исключению «лишних» степеней свободы, связанных с этим вырождением. В конечном счете остаются три степени свободы, соответствующие состояниям со спиральностями $0, \pm 1$. В десятимерной же формулировке уравнений Максвелла матрица Γ_0 «вырезает» состояние со спиральностью 0.

Еще раз подчеркнем, что РВУ (61), (69) с матрицами (67), (68) не распадается в смысле полной группы Лоренца и, следовательно, описывает единый физический объект.

Обсудим вопрос о возможных применениях безмассового поля Максвелла – Кальба – Рамонда. Как известно, в теории струн рассматриваются два типа струн – открытые и замкнутые. Взаимодействие замкнутых струн может осуществляться посредством безмассового поля с тензор-потенциалом $\Psi_{[\mu\nu]}$ [4]. Концы открытых струн являются точечными электрическими зарядами и взаимодействуют посредством электромагнитного поля с вектор-потенциалом Ψ_μ . Следовательно, переносчиком взаимодействия открытых струн в пространстве размерности $d = 4$ должно быть некоторое объединенное поле с потенциалами Ψ_μ и $\Psi_{[\mu\nu]}$.

Претендентом на роль такого поля может служить объединенное поле Максвелла – Кальба – Рамонда, т. е. система (9)–(11), в которую надо ввести источники. В случае открытых струн

имеется два типа источников: векторный j_μ и тензорный $j_{[\mu\nu]}$ токи, создаваемые соответственно полюсами и телом струны (body string). Между ними имеет место очевидная связь

$$j_\nu \sim \partial_\mu j_{[\mu\nu]}. \quad (73)$$

Ток $j_{[\mu\nu]}$ вводится в уравнение движения (11); векторный ток в системе (9)–(11) явно не фигурирует. В результате получаем систему, в которой первые два уравнения совпадают с (9), (10), а уравнение движения имеет вид

$$-\partial_\mu \Psi_\nu + \partial_\nu \Psi_\mu + \partial_\alpha \Psi_{[\mu\nu\alpha]} = j_{[\mu\nu]}. \quad (74)$$

Описание замкнутой струны содержится в системе (9), (10), (74), если положить $\Psi_\mu = 0$. Тогда приходим к системе

$$\partial_\mu \Psi_{[\nu\alpha]} + \partial_\alpha \Psi_{[\mu\nu]} + \partial_\nu \Psi_{[\alpha\mu]} + \Psi_{[\mu\nu\alpha]} = 0, \quad (75)$$

$$\partial_\alpha \Psi_{[\mu\nu\alpha]} = j_{[\mu\nu]}. \quad (76)$$

Уравнения, описывающие взаимодействие полюсов струн, получаются так же, как и в свободном случае, если выбрать $\Psi_{[\mu\nu]} = 0$. При этом будем иметь

$$\begin{aligned} \partial_\nu F_{[\mu\nu]} &= j_\mu, \\ -\partial_\mu \Psi_\nu + \partial_\nu \Psi_\mu + F_{[\mu\nu]} &= 0. \end{aligned}$$

Уравнения второго порядка, эквивалентные системе (9), (10), (74), принимают вид

$$\begin{aligned} \square \Psi_\mu &= -j_\mu, \\ \square \Psi_{[\mu\nu]} &= -j_{[\mu\nu]}. \end{aligned}$$

Есть основания полагать, что объединенное поле Максвелла – Кальба – Рамонда (фотона и нотофа) может найти применение и в иных теоретико-полевых моделях фундаментальных частиц и их взаимодействий.

Список использованной литературы

1. Kähler, E. Der innere differentialkalkul / E. Kähler // Rendiconti di Mat. (Roma). Ser. V. – 1962. – Vol. 21, N 3/4. – P. 425–523.
2. Стражев, В. И. Уравнение Дирака – Кэлера. Классическое поле / В. И. Стражев, И. А. Сатиков, Д. А. Ционенко. – Минск: БГУ, 2007.
3. Плетюхов, В. А. Безмассовые поля в теории Дирака – Кэлера / В. А. Плетюхов, В. И. Стражев, А. К. Момлик // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. прыродазнаўчых навук. – 2009. – № 1. – С. 74–84.
4. Kalb, M. Classical direct interstring action / M. Kalb, P. Ramond // Phys. Rev. – 1974. – Vol. D9, N 8. – P. 2273–2284.
5. Огиевецкий, В. И. Нотоф и его возможные взаимодействия / В. И. Огиевецкий, И. И. Полубаринов // Ядерная физика. – 1966. – Т. 4, вып. 1. – С. 216–223.
6. Гельфанд, И. М. Общие релятивистски-инвариантные уравнения и бесконечномерные представления группы Лоренца / И. М. Гельфанд, А. М. Яглом // Журн. эксперим. и теорет. физики. – 1948. – Т. 18, вып. 8. – С. 703–733.
7. Прохоров, Л. В. Квантование электромагнитного поля / Л. В. Прохоров // Успехи физ. наук. – 1988. – Т. 154, вып. 2. – С. 299–320.
8. Ахиезер, А. И. Квантовая электродинамика / А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий. – М.: Наука, 1969.

Поступила в редакцию 08.07.2015

УДК 535+539.1

Э. АУФРЕЙ¹, О. В. БУГАНОВ², М. В. КОРЖИК³, С. А. ТИХОМИРОВ²,
А. А. ФЕДОРОВ³, А. Д. ШИРОКАНОВ²

**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДВУХФОТОННОГО ПОГЛОЩЕНИЯ
В НЕОРГАНИЧЕСКИХ СЦИНТИЛЛЯЦИОННЫХ МАТЕРИАЛАХ
ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ СУБПИКОСЕКУНДНЫХ ВРЕМЕННЫХ МЕТОК
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ С ИОНИЗИРУЮЩИМ ИЗЛУЧЕНИЕМ**

¹ЦЕРН, Женева, Швейцария, e-mail: etiennette.auffray@cern.ch

²Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь,
e-mail: stik@presidium.bas-net.by

³Институт ядерных проблем Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь,
e-mail: korzhik@bsu.inp.by

Рассмотрены особенности сигнала двухфотонного поглощения в кристалле вольфрамата свинца (PbWO_4) в эксперименте типа «накачка – зондирование». Обнаружены различия в спектральных зависимостях регистрируемого эффекта двухфотонного поглощения при наличии ионизирующего облучения кристалла и без него. Предложен метод использования эффекта для формирования временной метки взаимодействия ионизирующего излучения с сцинтиллятором.

Ключевые слова: двухфотонное поглощение, кристалл вольфрамата свинца, ионизирующее излучение, нестационарная фемтосекундная спектроскопия, сцинтиллятор.

E. AUFFRAY¹, O. V. BUGANOV², M. V. KORJIK³, S. A. TIKHOMIROV², A. A. FEDOROV³, A. D. SHIROKANOV²

**USE OF TWO-PHOTON ABSORPTION IN INORGANIC SCINTILLATOR MATERIALS
FOR FORMING SUB-PICOSECOND TIME STAMPS OF INTERACTION WITH IONIZING RADIATION**

¹CERN, Geneva, Switzerland, e-mail: etiennette.auffray@cern.ch

²B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus,
e-mail: stik@presidium.bas-net.by

³Research Institute for Nuclear Problems of Belarusian State University, Minsk, Belarus,
e-mail: korzhik@bsu.inp.by

The features of the two-photon absorption signal in lead tungstate crystals (PbWO_4) in the “pump – probe” experiment are considered. The differences in the spectral dependences of the recorded two-photon absorption effect in the presence of ionizing radiation of a crystal and without it are discovered. The method of utilizing the effect to generate a time stamp of interaction of ionizing radiation with a scintillator is proposed.

Keywords: two-photon absorption, lead tungstate crystal, ionizing radiation, transient femtosecond spectroscopy, scintillator.

Введение. В настоящее время использование коллайдеров заряженных частиц является магистральной линией в экспериментальной физике высоких энергий. Область столкновения частиц имеет конечный размер, например, до 30 см [1] в Большом адронном коллайдере (БАК) в ЦЕРНе, что соответствует временному окну ~ 1 нс для частиц, движущихся в вакууме с околосветовыми скоростями. В этом случае временная селекция становится ключевым моментом при регистрации редких событий. В коллайдере временная селекция продуктов взаимодействия достигается путем использования детекторов с высоким временным разрешением. Однако среди имеющегося их арсенала, применяемого в физике высоких энергий, подавляющее большинство не обеспечивает временного разрешения лучше, чем 50–70 пс, чего явно недостаточно при

планируемом переходе БАК в режим повышенной светимости после 2020 г. Ограничительным фактором временного разрешения большинства современных детекторов является спонтанный механизм развития отклика детектора на ионизирующее излучение. Отклик детектора, как правило, формируется после термализации носителей, образованных в среде при взаимодействии ионизирующего излучения с материалом детектора. Например, в сцинтилляционных материалах возникновению сцинтилляций предшествует быстрая (порядка 10^{-12} с) термализация носителей. При этом после нее формируется ансамбль возбужденных люминесцентных центров, разгорание свечения которых может достигать долей наносекунды и более [2].

Излучение Черенкова в неорганической среде вследствие ее поляризации при прохождении заряженной частицы возникает за время, меньшее, чем 10^{-12} с. Однако малый выход такого излучения, а также конечное время его сбора из объемных детекторных элементов не позволяют достичь лучшего временного разрешения, чем для сцинтилляционных материалов.

При образовании в кристалле ансамбля свободных носителей возникает ряд явлений, называемых переходными, которые связаны с трансформацией ансамбля горячих носителей в ансамбль термализованных носителей. В работе [3] было предложено использовать переходные явления в диэлектрических прозрачных материалах для формирования временной метки взаимодействия ионизирующего излучения с сцинтиллятором. Также была рассмотрена возможность использования горячей внутризонной люминесценции и поглощения зондирующих ультракоротких импульсов излучения из возбужденных состояний внутри зоны проводимости. Недостатком данных способов формирования временной метки является малый квантовый выход внутризонной люминесценции, а также прямая зависимость от концентрации носителей в переходных электронных состояниях. В частности, эксперименты, выполненные в кристаллах CeF_3 , где возбуждение диэлектрика осуществлялось коротким лазерным импульсом УФ-излучения [4], показали, что эффект становится наблюдаемым при энергии возбуждающего импульса в несколько микроджоулей. Это соответствует мгновенному энерговыделению в единице объема детектора не менее 10–20 ТэВ. Такое энерговыделение может быть достигнуто только на перспективных коллайдерах, например таких как Будущий кольцевой коллайдер (FCC – Future Circular Collider), строительство которого предполагается начать в ЦЕРНе после 2024 г.

Распространение ионизирующего излучения в среде сопровождается упругими явлениями, приводящими практически к мгновенным локальным изменениям состояния атомов в решетке. Это, во-первых, упругая поляризация среды [5], возникающая вследствие ионизации, что вызывает образование дырок во внутренних электронных оболочках атомов и горячих электронов. Дырки и электроны формируют ансамбль диполей, локализованный в треке частицы, поэтому возмущение решетки происходит во всем объеме трека. Ударное смещение узлов решетки, которое возникает при облучении кристаллов интенсивными потоками ионизирующего излучения, также приводит к аналогичным эффектам, однако является пороговым [6].

Появление дырки в электронной оболочке одного из атомов в кристалле влечет за собой неизбежную перестройку локальной области кристалла вследствие восстановления зарядовой компенсации. Поскольку сдвиги атомов для зарядовой компенсации происходят за счет взаимодействия с фононами, перестройка осуществляется за время 10^{-12} – 10^{-14} с, сопоставимое с периодом колебаний решетки. Перестройка локальной области кристалла неизбежно ведет к перестройке распределения плотности электронных состояний в зоне проводимости в кристалле вблизи дырки, что может быть детектировано методами сверхскоростной оптической спектроскопии. В дальнейшем релаксация упругой поляризации может идти по разным каналам, приводящим к рекомбинации носителей, включая релаксацию через канал сцинтилляций либо диэлектрическую релаксацию. Принципиально важным является малое время появления упругой поляризации. Таким образом, упругая поляризация, возникающая при взаимодействии ионизирующего излучения с материалом детектора и сопровождающаяся локальными изменениями электронной структуры, представляется перспективным эффектом для формирования временной метки взаимодействия ионизирующего излучения со сцинтиллятором.

Образцы и метод измерений. Перестройка электронных свойств вследствие явления упругой поляризации, по-видимому, должна наблюдаться во множестве кристаллических соедине-

ний, однако наиболее ярко она может быть выражена в соединениях, где низ зоны проводимости сформирован nd -орбиталями ионов, образующих матрицу. Указанные орбитали, как следует из теории кристаллического поля, наиболее чувствительны к различным искажениям кристаллического поля. Такими материалами являются, например, кристаллы молибдатов и вольфраматов, в которых матрицеобразующая группа MeO_4^{2-} ($Me = W, Mo$) является одновременно центром люминесценции [2]. Неискаженная группа MeO_4^{2-} имеет, как правило, точечную симметрию T_d , поэтому любые искажения решетки вблизи MeO_4^{2-} будут приводить к понижению симметрии и, как следствие, к дополнительному расщеплению d -состояний и изменению электронной плотности вблизи дна зоны проводимости. Это в свою очередь должно отражаться в спектрах межзонного поглощения. Отметим, что прямое наблюдение такой перестройки спектров методом однофотонной спектроскопии маловероятно вследствие больших коэффициентов поглощения в области межзонных переходов, малости ожидаемых наведенных изменений и их кратковременности.

В качестве образца был выбран широко используемый сцинтилляционный кристалл вольфрамата свинца $PbWO_4$ (PWO) [7] толщиной 10 мм. Свойства этого материала хорошо изучены ввиду его массового применения в детекторах ионизирующего излучения [5]. Ширина запрещенной зоны E_g PWO при комнатной температуре составляет 4,33 эВ, поэтому бездефектный кристалл PWO не поглощает в видимом диапазоне спектра.

Эксперименты проводились на автоматизированном фемтосекундном спектрометре по методике «возбуждение – зондирование». Система позволяла выполнять измерения с временным разрешением порядка длительности импульса, которая составляла не более 140 фс. Спектральная чувствительность системы давала возможность зондировать изменения оптической плотности в диапазоне 400–1100 нм. Спектральное распределение суперконтинуума, получаемого при фокусировке части основной гармоники $Al_2O_3:Ti^{3+}$ лазера (790 нм) в кювету с водой и используемого в качестве зондирующего излучения, представляло собой экспоненциально спадающую в обе стороны от центральной длины волны кривую. Выравнивание его по интенсивности осуществлялось с помощью цветных абсорбционных светофильтров. В качестве возбуждающего излучения использовались импульсы второй гармоники с $\lambda_{\text{макс}} = 395$ нм (3,15 эВ).

В зоне временного перекрытия возбуждающих и зондирующих импульсов во всей спектральной области регистрации наблюдался сигнал, имеющий характерный вид наведенного поглощения (рис 1, а), при этом во времени он имел специфическую трапецевидную форму (рис. 1, б). Мы интерпретируем этот сигнал как отражение процесса двухфотонного поглощения с участием одного фотона накачки и одного фотона зонда. Основной вклад в сигнал вносит поглощение фотонов зонда при переходах с возбужденного накачкой виртуального уровня в зону проводимости. Процесс имеет место только при перекрытии импульсов накачки и зонда, и поэтому его кинетика, измеренная в тонком образце, фактически представляет собой корреляционную функцию между

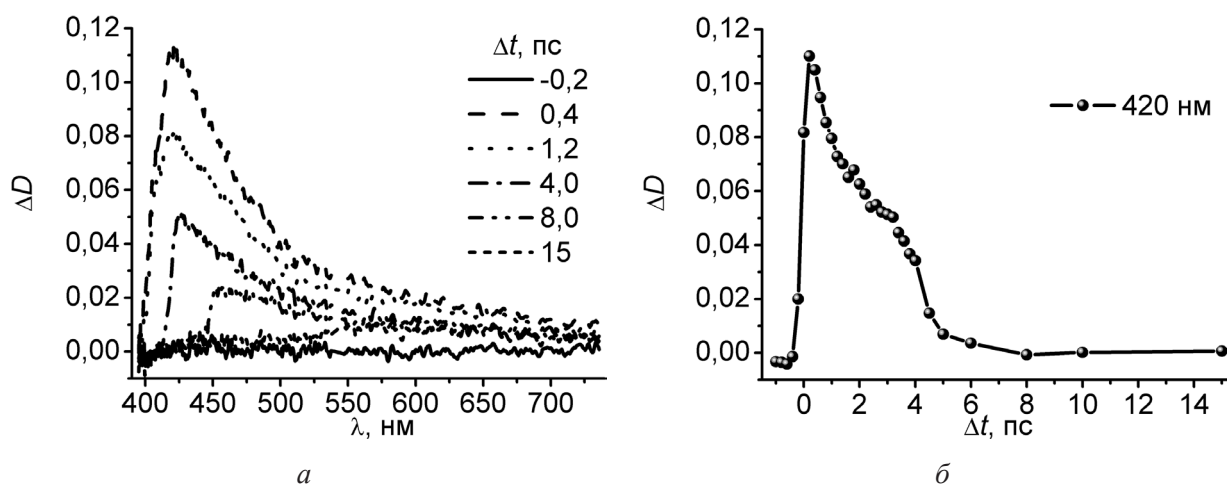


Рис. 1. Измеренные спектр (а) и кинетика (б) двухфотонного поглощения в кристалле вольфрамата свинца при накачке 3,15 эВ

импульсами возбуждения и зондирования [8]. В толстом же образце из-за дисперсии групповой скорости перекрытие импульса накачки и зонда происходит не на одной задержке, а в некотором диапазоне задержек в соответствии с разными местами перекрытия в образце вдоль направления распространения. В результате сигнал формируется из множества корреляционных функций, сдвинутых друг относительно друга во времени. Передний фронт трапеции в нашем случае соответствует перекрытию на передней стенке образца, соответственно задний фронт – перекрытию на задней стенке. При распространении импульсов от передней поверхности образца к задней происходит временное уширение импульсов, ухудшение их пространственного перекрытия и некоторое уменьшение энергии импульса накачки вследствие обычного двухфотонного поглощения образцом. Все эти факторы обуславливают меньшую эффективность процесса двухфотонного поглощения типа «накачка – зонд» на задней поверхности образца по сравнению с передней. В результате формируется наклонная огибающая трапециевидного сигнала. Чем ближе импульсы накачки и зонда находятся друг к другу по спектру, тем меньше разница между их групповыми скоростями и тем ближе между собой по времени передний и задний фронты трапеции, а ее амплитуда выше. С увеличением спектрального интервала фронты расходятся по времени задержки, а максимальная амплитуда сигнала уменьшается вследствие сокращения перекрытия корреляционных функций. Этот фактор обуславливает характерную форму спектра сигнала – с максимумом вблизи длины волны накачки и минимумом на наиболее удаленных длинах волн. Для восстановления истинного спектра межзонных двухфотонных переходов необходимо провести интегрирование кинетики на каждой длине волны по всем временным задержкам.

Следует отметить, что в результате двухфотонных переходов происходит и изменение населенности энергетических уровней среды. Возникает наведенное поглощение на переходах внутри зоны проводимости. Спектрально такое наведенное поглощение также перекрывает всю видимую область (как показали эксперименты по возбуждению третьей гармоникой). Его временная кинетика имеет обычную форму с быстрым фронтом нарастания и мультиэкспоненциальным затуханием. Таким образом, хотя сигналы, обусловленные поглощением с виртуального уровня в запрещенной зоне и изменением оптической плотности среды вследствие заселения электронами зоны проводимости, перекрываются спектрально, их легко различить по кинетике. Результаты экспериментов показывают, что вклад второго эффекта в измеряемую величину в области перекрытия возбуждающих и зондирующих импульсов на порядок меньше первого и при умеренных уровнях возбуждения им можно пренебречь.

Результаты измерений в условиях облучения образцов ионизирующим излучением. Измерения проводились для ориентированных по кристаллографическим осям образцов с контролем положения поляризации накачивающего и зондирующего лазерного излучения относительно осей. Образцы размером 10×10 мм по осям a , b и толщиной 1 мм по оси c изготовлялись из монокристалла PWO с примесью лантана и иттрия (суммарная концентрация 100 ppm) высокого качества. Пучки лазерного излучения распространялись вдоль направления, близкого к оси a под малыми углами к плоскости b , c . Поляризация накачивающего пучка с постоянной длиной волны была либо параллельна, либо перпендикулярна поляризации зондирующего излучения. Поляризация зондирующего излучения была всегда направлена по оси b . Источник ионизирующего излучения ^{57}Co (122 кеВ, 2 mCi) устанавливался на расстоянии 1 см от поверхности кристалла сечением 10×10 мм. Измерения проводились при комнатной температуре с источником и без него. Выбранные размеры кристалла обеспечивали поглощение 90 % энергии гамма-квантов в геометрии, близкой к $\frac{1}{4}$ π.

На рис. 2 и 3 приведены скорректированные на дисперсию групповой скорости в образце результаты измерения спектрального распределения поглощения зондирующего излучения в среде в режиме двухфотонного взаимодействия квантов накачки и зонда при временных задержках в диапазоне 0–0,2 пс и двух ориентациях поляризации накачивающего пучка относительно оси b образца. Полученные данные показывают, что максимальная эффективность двухфотонного поглощения при поляризации накачивающего пучка параллельно оси b соответствует комбинации волны накачки 395 нм (3,15 эВ) с коротковолновой частью излучения суперконтинуума с максимумом вблизи 460 нм (2,7 эВ). Измеренная полоса с максимумом 5,85 эВ хорошо соответству-

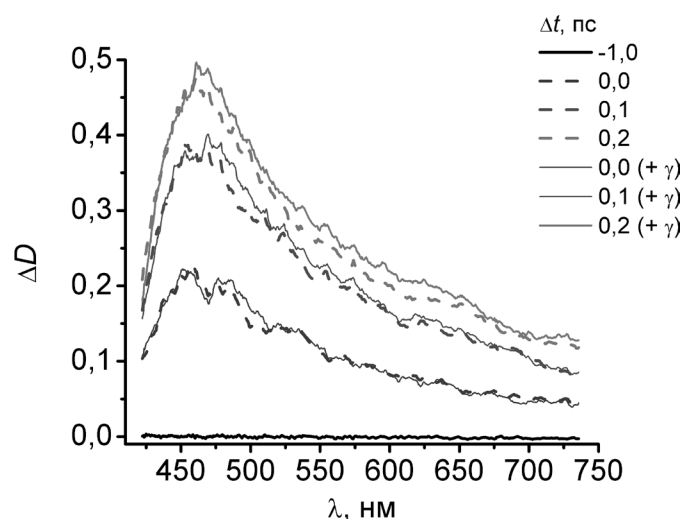


Рис. 2. Скорректированная на дисперсию групповой скорости в образце спектральная зависимость двухфотонного поглощения, измеренная при параллельной оси b поляризации накачивающего пучка без источника (прерывистые линии) и с источником (сплошные линии) гама-излучения. Плотность энергии импульса накачки 500 мкДж/см^2 . Справа указана временная задержка импульса зондирующего пучка

ет второму максимуму в распределении плотности электронных состояний, описанном в [9], и наблюдалась нами в неориентированном кристалле [4]. При перпендикулярной ориентации поляризации возбуждающего излучения к оси b в спектре регистрируется дополнительная интенсивная полоса с максимумом вблизи 635 нм (2 эВ), которая появляется одновременно с первой полосой. Суммарная энергия кванта накачки и кванта зондирующего излучения составляет для этой спектральной области 5,15 эВ и соответствует первому пику распределения плотности электронных состояний [9].

В геометрии измерений, когда основным наблюдаемым пиком является полоса с максимумом вблизи 460 нм, видимых отличий в спектральных зависимостях без и при использовании источника ионизирующего излучения не обнаружено. При применении схемы эксперимента с ориентацией поляризации возбуждающего излучения перпендикулярно оси b образца в условиях его облучения гамма-источником в регистрируемом спектре двухфотонного поглощения фиксируются заметные искажения в области длинноволновой полосы.

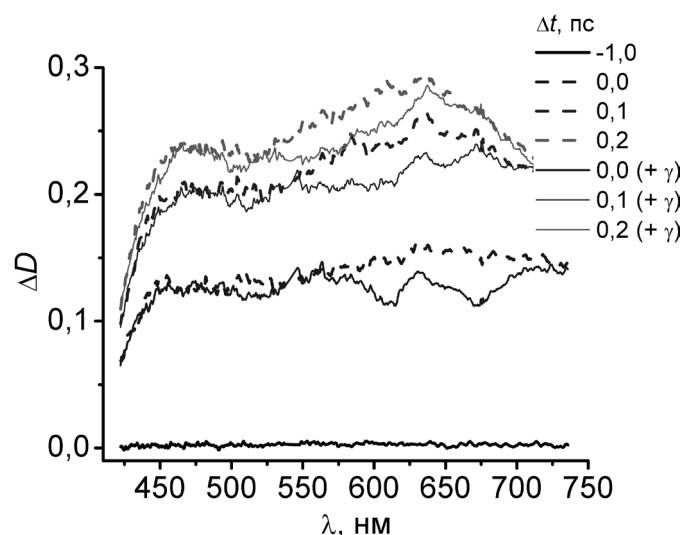


Рис. 3. Скорректированная на дисперсию групповой скорости в образце спектральная зависимость двухфотонного поглощения, измеренная при перпендикулярной оси b поляризации накачивающего пучка без источника (прерывистые линии) и с источником (сплошные линии) гама-излучения. Плотность энергии импульса накачки 500 мкДж/см^2 . Справа указана временная задержка импульса зондирующего пучка

В отсутствие воздействия ионизирующего излучения на образец нелинейное взаимодействие волн накачки и зонда происходит в невозмущенном кристалле, сохраняющем свои симметричные свойства вплоть до уровня структурных полиэдров, поскольку напряженность поля в волнах накачки и зонда существенно меньше напряженности кристаллического поля. При наложении ионизирующего излучения ситуация претерпевает значительные изменения в области треков частиц. Электроны, освобожденные из внутренних оболочек атомов при ионизации, в процессе термализации могут смещаться до захвата на расстояние в несколько десятков микрон, в то время как дырки релаксируют в пределах атомов, где происходила ионизация. Это приводит к избытку положительного заряда в треке и избытку электронов на периферии трека и далее, в глубь вещества. Таким образом, возникают диполи, генерирующие напряженность электрического поля и, как следствие, упругую поляризацию вещества в пределах треков и прилегающих областей кристалла. Диполи формируют низкосимметричную компоненту электрического поля в дополнение к существующему кристаллическому полю. Это приводит к эффектам перераспределения плотности электронных состояний, как уже обсуждалось выше.

Поскольку дно зоны проводимости в кристалле вольфрамата свинца PbWO_4 формируется WO_4^{2-} полиэдрами [9], то основной вклад в перестройку зоны проводимости будут вносить указанные искаженные полиэдры. Сделаем оценку количества искаженных полиэдров в кристалле при облучении источником ионизирующего излучения. В использованной геометрии эксперимента в образце образуется не менее 3×10^{10} пар носителей в секунду. Усредненный трек горячих электронов можно аппроксимировать цилиндром с диаметром 0,2, длиной 40 мкм и объемом $0,4 \times 10^{-12} \text{ см}^3$, при этом суммарный объем треков в образце составит не менее $1,2 \times 10^{-2} \text{ см}^3$ в секунду. Поскольку концентрация WO_4^{2-} полиэдров в кристалле составляет $\sim 1 \times 10^{22} \text{ см}^{-3}$, то количество полиэдров, локализованных в треках, – порядка 1×10^{20} . Учтем, что время существования упругой поляризации ограничено излучательной релаксацией в случае вольфрамата свинца с характерным временем 10 нс. Таким образом, квазиравновесное число искаженных групп, как результат примененного облучения, не превышает 10^{12} . При таком количестве искаженных групп, локализованных в треках, эффект представляется трудно обнаружимым, поэтому следует предположить, что область искажения полиэдров в кристалле вследствие упругой поляризации значительно превышает объем треков и затрагивает межтрековое пространство. Тот факт, что эффект регистрируется при определенной комбинации осей кристалла и поляризации возбуждающего излучения, означает, что искажение полиэдров с понижением симметрии происходит лишь по определенным направлениям их ориентации в кристаллической матрице.

Применение в детектировании ионизирующего излучения. Обнаруженное явление при детектировании ионизирующего излучения может применяться совместно с регистрацией фотонов сцинтилляции. В этом случае двухфотонное поглощение будет использоваться для временной фиксации начала взаимодействия ионизирующего излучения с веществом детектора, а сцинтилляция – для измерения поглощенной энергии. Для кристалла вольфрамата свинца в качестве возбуждающего и зондирующего импульсов достаточно использовать одну длину волны около 480 нм, обеспечивающую суммарную энергию двух квантов 5,2 эВ. При этом эффект двухфотонного поглощения можно будет наблюдать при перекрытии падающих и отраженных на торце детекторного элемента лазерных импульсов.

Технически это может выглядеть следующим образом. В детекторный элемент (в расчетное время прибытия продуктов взаимодействия в коллайдере к детектору) инжектируется короткий цуг (до 100) лазерных импульсов пикосекундной длительности и суммарной длительностью менее 1 нс. При организации отражения от торца кристалла, ближнего к точке столкновения, реализуется двухфотонное поглощение падающей и отраженной обратно волны в коллинеарной геометрии. Факт и время начала взаимодействия в детекторе устанавливается путем сравнения контрольного цуга импульсов с вернувшимся из детекторного элемента. При этом точность временной привязки взаимодействия составит половину интервала между импульсами в цуге.

Очевидно, что обнаруженное влияние ионизации на параметры двухфотонного поглощения в кристалле вольфрамата свинца должно наблюдаться и в других кристаллических и, возможно, аморфных соединениях. Критерием отбора таких материалов может стать относительно высокая

точечная симметрия полиэдров ионов металлов, формирующих дно зоны проводимости, прозрачность материала на длине волны используемого лазерного излучения и высокая плотность электронных состояний *d*-типа в нижней части зоны проводимости. Большой интерес представляют материалы, которые могут изготавливаться в виде световодов. В этом случае может быть применен весь опыт, наработанный по распространению ультракоротких импульсов в световодах.

Список использованной литературы

1. The CERN Large Hadron Collider: Accelerator and Experiments. – Geneva: CERN, 2009. – Vol. 1–2.
2. *Lecoq, P.* Inorganic Scintillators for Detector Systems / P. Lecoq, A. Annenkov, A. Gektin, M. Korzhik. – [S. l.]: Springer, 2006.
3. *Lecoq, P.* Can Transient Phenomena help improving Time Resolution in Scintillators? / P. Lecoq, M. Korzhik, A. Vasiliev // IEEE Trans. Nucl. Sci. – 2014. – Vol. 61. – P. 229–234.
4. Picosecond transient absorption rise time for ultrafast tagging of the interaction of ionizing radiation with scintillating crystals in high energy physics experiments [Electronic resource] / E. Auffray [et al.] // J. Instrum. – 2014. – Vol. 9. – Mode of access: doi:10.1088/1748-0221/9/07/P07017. – Date of access: 04.15.2015.
5. Electrets / ed. G. M. Sessler. – Berlin: Springer-Verlag, 1980.
6. *Barisnikov, V. I.* Femtosecond mechanisms of electronic excitation of crystalline materials / V. I. Barisnikov, T. A. Kolesnikova // Solid State Phys. – 2005. – Vol. 47. – P. 1776–1780.
7. *Annenkov, A.* Lead tungstate scintillation material / A. Annenkov, M. Korzhik, P. Lecoq // Nucl. Instrum. Methods. Phys. Res. A. – 2002. – Vol. 490. – P. 30–50.
8. *Roth, T.* Absorption of free carriers in diamond determined from the visible to the mid-infrared by femtosecond two-photon absorption spectroscopy / T. Roth, R. Laenen // Opt. Commun. – 2001. – Vol. 189. – P. 289–296.
9. *Zhang, Y.* Electronic band structures of the scheelite materials CaMoO_4 , CaWO_4 , PbMoO_4 , and PbWO_4 / Y. Zhang, N. A. W. Holzwarth, R. T. Williams // Phys. Rev. B. – 1998. – Vol. 57. – P. 12738–12750.

Поступила в редакцию 05.06.2015

УДК В344.322

*В. С. БУРАКОВ, А. В. БУЦЕНЬ, Н. В. ТАРАСЕНКО***СПЕКТРОСКОПИЧЕСКАЯ ДИАГНОСТИКА ДВУХИМПУЛЬСНОЙ ЛАЗЕРНО-АБЛЯЦИОННОЙ ПЛАЗМЫ В ЖИДКОСТИ ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОЦЕССА СИНТЕЗА НАНОЧАСТИЦ***Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь,
e-mail: a.butsen@ifanbel.bas-net.by*

Исследуются особенности плазмообразования при двухимпульсной лазерной абляции в жидкости с целью оптимизации процесса синтеза наночастиц. На основе спектроскопической диагностики выяснена пространственная структура и временной диапазон излучения лазерно-индуцированной плазмы, создаваемой под действием сдвоенных лазерных импульсов в жидкости, и определен ее компонентный состав.

Ключевые слова: лазерная абляция в жидкости, эмиссионный спектр, двухимпульсный режим.

*V. S. BURAKOV, A. V. BUTSEN, N. V. TARASENKO***SPECTROSCOPIC DIAGNOSTICS OF DOUBLE-PULSE LASER ABLATION PLASMA IN LIQUID FOR NANOPARTICLE SYNTHESIS OPTIMIZATION***B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus,
e-mail: a.butsen@ifanbel.bas-net.by*

The features of plasma formation in double-pulse laser ablation in liquid have been studied to optimize the process of nanoparticles synthesis. On the basis of spectroscopic plasma diagnostics the spatial structure and the time range of laser-induced plasma emission have been revealed and the composition of its component has been determined.

Keywords: laser ablation in liquid, emission spectrum, double-pulse regime.

Введение. В последнее время активно развиваются методы получения наноразмерных частиц заданного химического состава, морфологии и структуры, что очень важно для их практического применения в микроэлектронике, медицине, биофотонике, гетерогенном катализе и т. д. [1, 2]. Одним из прогрессивных методов является лазерная абляция твердотельных мишеней в жидкости, так как она не требует длительной подготовки и позволяет формировать не только наночастицы собственно мишени, но и частицы, имеющие в своем составе атомные компоненты жидкости (например, оксиды и карбиды металлов, формируемые при абляции в различных растворителях) [3]. Проблематичный процесс сбора наночастиц, образующихся в процессе лазерной абляции в вакууме, при абляции в жидкости решается естественным образом: наночастицы остаются в объеме жидкости, образуя так называемый коллоидный раствор. Дополнительная лазерная обработка таких полученных растворов может обеспечить уменьшение размеров наночастиц, изменение их структуры и фазового состава [4, 5].

Одной из вариаций лазерного метода является двухимпульсная абляция, при которой воздействие на мишень осуществляется не одиночными, а близкими по параметрам сдвоенными лазерными импульсами с временным сдвигом от единиц до нескольких сотен микросекунд. Такой выбор режима абляции способствует неаддитивному увеличению количества частиц и позволяет в определенной степени варьировать их размер.

Фазовый и структурно-компонентный состав частиц зависит от параметров воздействующего лазерного излучения, свойств материала испаряющейся мишени, а также параметров внешней среды.

Целью настоящей работы является оптимизация условий синтеза наноразмерных частиц на основе анализа пространственно-временной эволюции лазерной плазмы, формируемой при использовании сдвоенных лазерных импульсов. В двухимпульсном режиме абляции при помощи второго лазерного импульса возможно определенное сокращение размеров частиц в лазерном факеле в результате нагревания и фрагментации продуктов абляции от первого импульса. В режимах абляции в химически активных жидкостях достижимо повышение реакционной способности продуктов абляции. Это может существенно изменить морфологические характеристики образующихся продуктов: например, привести к образованию тонкой оболочки вокруг наночастицы в результате осаждения на нее продуктов абляции другого элемента, к формированию структур типа металл–полупроводник или легированных полупроводниковых наноструктур. В итоге были выполнены эксперименты по получению металлических (Au, Ag, Cu) наночастиц, а также наночастиц соединений на основе цинка и полупроводниковых материалов.

Описание эксперимента. В качестве источника для абляции применялся ИАГ:Nd³⁺-лазер производства фирмы «LOTIS» (модель S-2131D), работающий на частоте основной гармоники (1064 нм) с длительностью импульсов 10 нс и частотой их повторения 10 Гц. Для модификации наноразмерных частиц использовалось излучение лазера LOTIS LS-2134 (вторая и четвертая гармоники).

Для абляции и исследований плазмы с применением спектроскопических методик была изготовлена кювета объемом 200 мл с тремя боковыми гранями, прозрачными для оптического излучения, одна из которых была выполнена из кварцевого стекла для сбора излучения плазмы в УФ-области спектра. Держатель позволял перемещать мишени в двух взаимно ортогональных направлениях в плоскости, перпендикулярной падающему лазерному лучу. Коллимирующая система состояла из положительной линзы, собирающей излучение после прохождения трехкратного телескопа. Плотность мощности лазерного излучения на поверхности мишени можно было варьировать в диапазоне от $1 \cdot 10^8$ до $5 \cdot 10^9$ Вт/см².

Измерителем ИМО-2Н контролировалась средняя мощность энергии лазерного излучения лазера в частотном режиме. Для регистрации временной эволюции спектров излучения факела использовалась ПЗС-матрица (1024×256 пикселей) со стробируемым электронно-оптическим усилителем яркости (минимальный затвор 10 нс). Имелась возможность проводить фотографирование плазменного факела поочередно через интерференционные фильтры в области длин волн спектральных линий компонент плазмы и фонового излучения факела. Полученные снимки дают качественную характеристику структуры факела, особенности пространственного распределения в нем атомов материала мишени.

Анализ пространственно-временной эволюции лазерной плазмы. Взаимодействие импульсного лазерного излучения с твердотельной мишенью в жидкости приводит к формированию над поверхностью мишени плазменного образования с быстро изменяющимися параметрами; продолжительность излучающей стадии лазерно-индуцированной плазмы невелика (несколько сотен наносекунд). После затухания плазмы формируется полусферический кавитационный пузырь, состоящий из газообразных продуктов абляции и паров окружающей жидкости, который достигает своего максимального размера спустя несколько сотен микросекунд и затем коллапсирует [6].

Основная часть продуктов конденсации диспергируется в жидкости, образуя наноразмерные частицы, параметры которых в конечном итоге определяются термодинамическим состоянием распадающейся плазмы (ее температурой, плотностью атомов и ионов).

Поскольку параметры лазерно-индуцированной плазмы обуславливают характер протекания процессов зарождения и роста наночастиц, то один из способов управления размерами формируемых частиц состоит в изменении компонентного состава лазерной плазмы, достигаемого, в частности, путем изменения плотности энергии воздействующего на мишень излучения.

Для получения информации о размерах и форме лазерного факела использовалась методика регистрации изображений с временным разрешением. Типичный вид изображений светящейся области плазменного факела приведен на рис. 1. Как видно, размеры и время жизни плазмы в жидкости как при одно-, так и при двухимпульсной лазерной абляции в несколько раз меньше

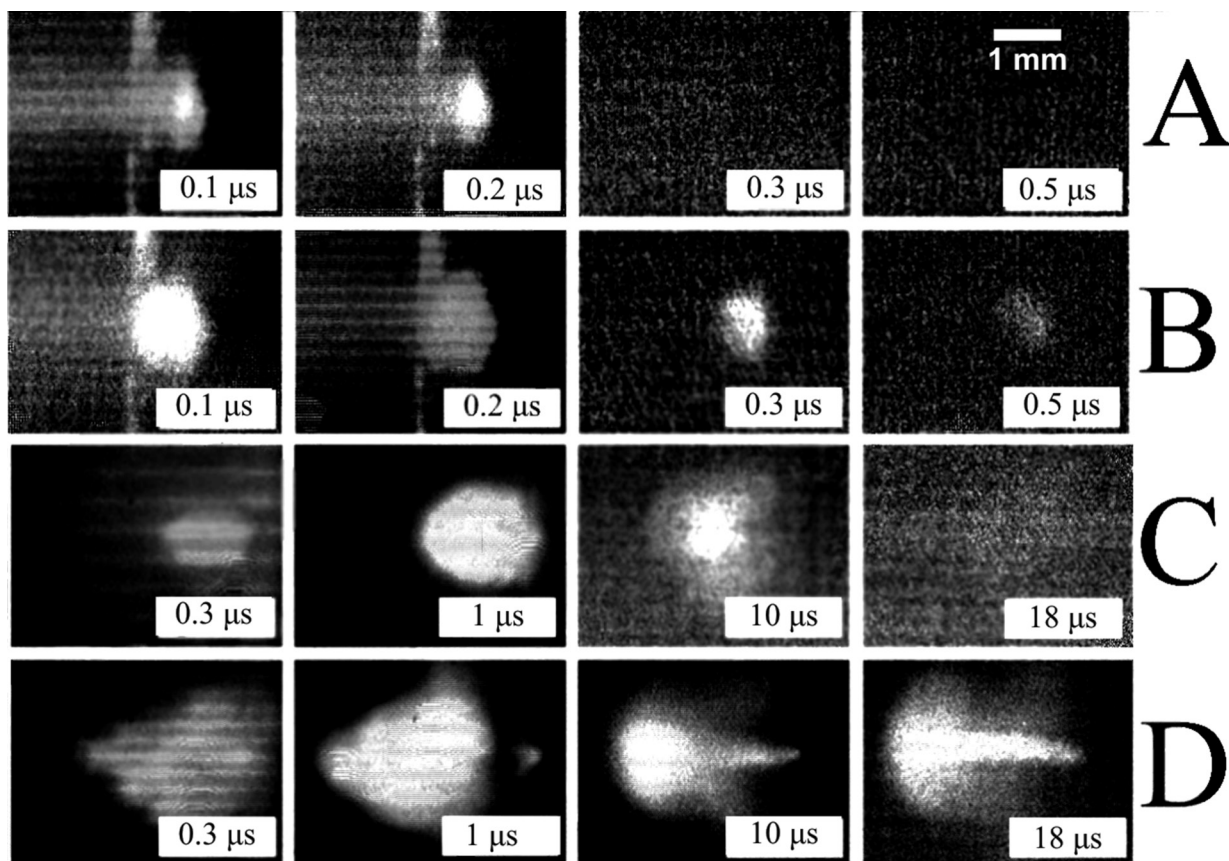


Рис. 1. Изображения плазменного факела, полученные при одно- (А, С) и двухимпульсной (В, D) абляции на воздухе (С, D) и в воде (А, В), при различной временной задержке окна регистрации относительно второго лазерного импульса; для всех изображений время накопления сигнала составляет 100 нс, сдвиг между лазерными импульсами – 10 мкс

по сравнению с аналогичными параметрами плазмы в воздухе. Основные отличия лазерной абляции в жидкости обусловлены ограничением возможности расширения плазменного факела со стороны окружающей жидкости. Это оказывает существенное влияние на термодинамические и кинетические аспекты эволюции факела и на протекание в нем процессов конденсации.

Исходя из полученных изображений факела оценивалась скорость разлета плазмы, формируемой на воздухе и в жидкости. Так, в двухимпульсном режиме при абляции медной мишени на воздухе через 0,5 мкс факел имеет размеры около 4 мм, что соответствует средней скорости разлета плазмы около 8 км/с. В случае абляции этой мишени в воде скорость составляет около 5 км/с.

Спектроскопическая диагностика плазмы при действии сдвоенных лазерных импульсов на мишень в жидкости. В эмиссионных спектрах, получаемых в случае одноимпульсной, а также двухимпульсной абляции, при задержках 0–10 мкс между лазерными импульсами преобладал непрерывный континуум, с увеличением времени задержки в двухимпульсном режиме появлялись отдельные спектральные линии атомов материала мишени. Наблюдение четких эмиссионных линий в спектре излучения плазмы, полученной при использовании двухимпульсного режима абляции по сравнению с одноимпульсным режимом, объясняется тем, что второй лазерный импульс проходит через относительно разреженную среду и поэтому способен эффективнее взаимодействовать с поверхностью и эффективнее нагревать продукты абляции.

Типичный спектр излучения лазерной плазмы мишени из халькопирита (CuFeS_2) в воздухе показан на рис. 2: регистрируются четкие интенсивные линии. В воде линии излучения компонент плазмы уширены, присутствует большой фоновый сигнал (рис. 3).

Увеличение временной задержки между импульсами позволяет по характеру изменения спектра излучения плазмы установить временные рамки эволюции газового пузыря в жидкости. В нашем эксперименте наиболее интенсивный спектр регистрировался при задержках между импуль-

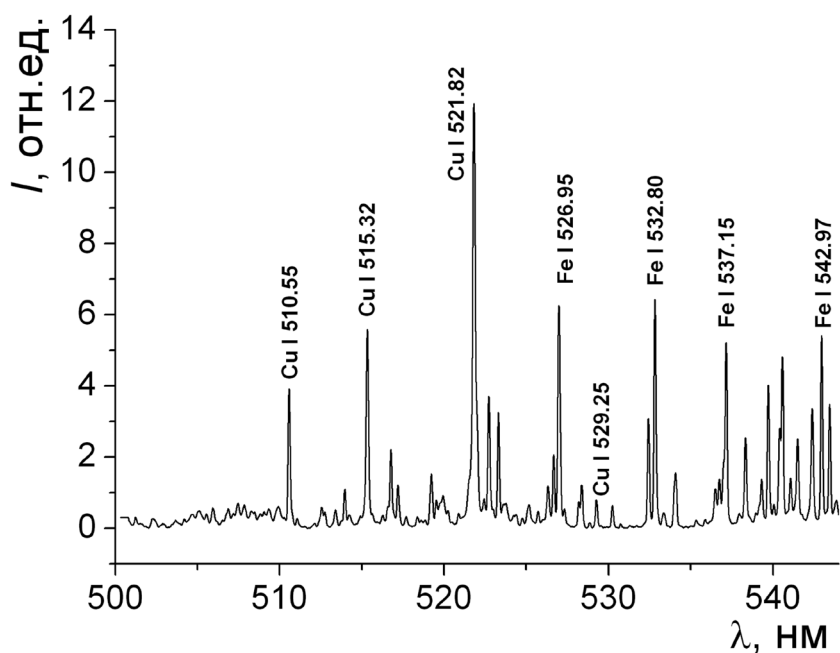


Рис. 2. Фрагмент эмиссионного спектра лазерной плазмы, формируемой при абляции халькопирита в воздухе

сами, превышающих 150 мкс, откуда следует, что время расширения газового пузыря составляет сотни микросекунд. Эти результаты находятся в соответствии с результатами измерений других авторов [7, 8].

По спектрам излучения лазерной плазмы в жидкости в предположении выполнения условий ЛТР из бoльцмановского построения по линиям Cu I 510,5 нм, Cu I 515,3 нм и Cu I 521,8 нм оценена электронная температура плазмы. Полученные значения температуры электронов в плазме при наших экспериментальных условиях в двухимпульсном режиме для различных задержек между импульсами приведены в таблице.

Для определения плотности электронов в плазме адаптирована методика измерений ширины эмиссионных линий в соответствии с теорией штарковского уширения.

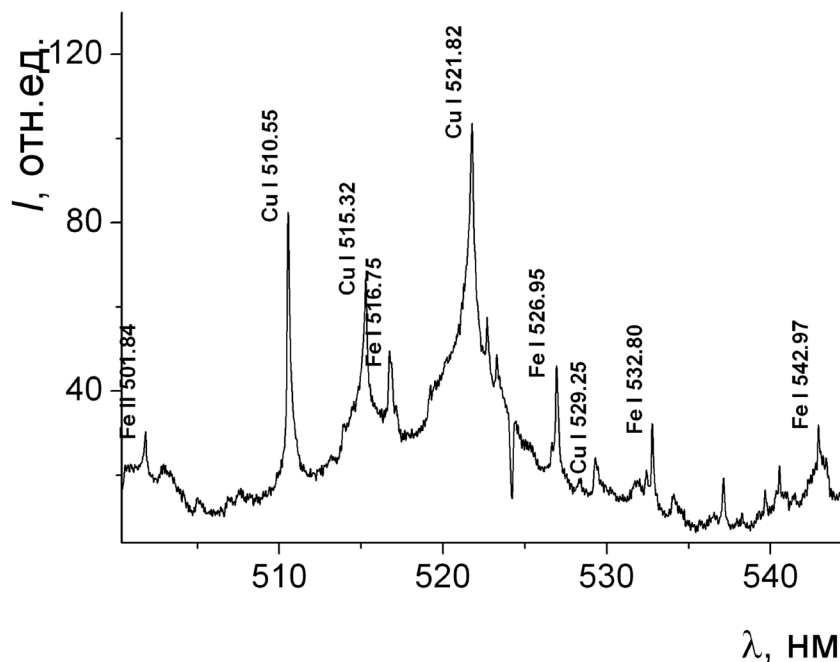


Рис. 3. Фрагмент эмиссионного спектра лазерной плазмы, формируемой при абляции халькопирита в воде

Электронная температура и результаты расчетов электронной плотности лазерной плазмы

Аналитические линии (способ определения N_e)	Задержка между импульсами, мкс					
	40	50	60	75	100	120
$N_e, 10^{17} \text{ см}^{-3}$ (из $\Delta\lambda$ линии Mg I 517,2 нм)	–	1,0	0,85	0,73	0,77	–
$N_e, 10^{17}, \text{ см}^{-3}$ (из $\Delta\lambda_{H\alpha}$)	6,7	5,8	4,4	3,6	2,6	2,5
$T_e, \text{ эВ}$	0,73	0,73	0,72	0,71	0,7	0,7

Экспериментально измеренные контуры спектральных линий достаточно хорошо описываются дисперсионной функцией. В широком интервале значений электронных плотностей и температур ширина атомных линий ($\Delta\lambda$, нм) может быть оценена из следующего выражения:

$$\Delta\lambda = 0,2 \cdot [1 + 1,75 \cdot 10^{-4} \cdot n_e^{1/4} \cdot \alpha \cdot (1 - 0,068 \cdot n_e^{1/6} \cdot T^{-1/2})] \cdot 10^{-16} \cdot w \cdot n_e,$$

где n_e – концентрация электронов; α – параметр уширения, обусловленный взаимодействием с ионами; w – параметр уширения, обусловленный электронными ударами, слабо зависящий от электронной температуры [9, 10].

Значения электронной плотности лазерной плазмы, которая образуется при воздействии двоянных лазерных импульсов на мишени из цинковых сплавов, находящихся в жидкости, для различных задержек между импульсами приведены в таблице. Отметим, что определенные по ширине линии H_{α} значения плотности электронов завышены вследствие самопоглощения и могут служить в качестве ориентировочных. В целом при изменении задержки в сравнительно широком диапазоне (50–120 мкс) температура плазмы в условиях возбуждения атомных спектральных линий более инертна (стабильна), чем концентрация электронов, имеющая в соответствии с уравнением Саха – Больцмана показательную зависимость от температуры.

Комплексность явлений, имеющих место при абляции мишени, образовании и расширении лазерной плазмы в жидкости, требует совокупного применения различных методов экспериментального исследования многокомпонентной лазерной плазмы. Изучение эмиссионных характеристик такой плазмы интересно для понимания особенностей образования возбужденных и ионизированных частиц при эволюции плазмы. Подобные сведения могут использоваться как при лазерном синтезе наночастиц, так и напылении тонких пленок сложного состава при учете влияния стехиометрии на состав и свойства образующихся продуктов.

Необходимость исследования спектрального состава излучения лазерной плазмы и изменений интенсивности излучения при разлете плазменного факела обусловлена также выявлением возможностей установления обратной связи и автоматизации контроля технологических процессов при лазерном синтезе. Для этого необходимо связать интенсивность определенных характеристических для лазерной плазмы спектральных линий с условиями абляции, которые обуславливают стехиометрию получаемых частиц. В настоящее время такие процессы, как правило, не контролируются непосредственно, а лишь через исследование уже готового продукта.

Заключение. В результате выполнения настоящей работы показано, что использование двухимпульсного режима позволяет повысить скорость формирования наночастиц и усилить эмиссионный сигнал атомов и ионов плазмы за счет более эффективной абляции материала мишени. На основе спектроскопической диагностики плазмы, создаваемой при воздействии лазерных импульсов на поверхность твердотельной мишени в жидкости, выяснена пространственная структура и временной диапазон излучения лазерно-индуцированной плазмы. Установлен компонентный состав плазмы, необходимый для оптимизации процесса синтеза наночастиц, так как параметры лазерно-индуцированной плазмы определяют характер протекания процессов зарождения и роста наночастиц при лазерной абляции в жидкости.

Получены новые данные по эмиссионным характеристикам, параметрам и механизмам протекания основных физических процессов в плазме, образуемой при воздействии интенсивных потоков лазерного излучения на многокомпонентную халькогенидную мишень. Обнаружен ряд особенностей развития пространственно-временной эволюции лазерной плазмы, которая формируется при использовании одиночных и двоянных лазерных импульсов, заключающихся в изменении

как динамики, так и интенсивности испускания плазмы. Как показали результаты экспериментов, спектроскопическая диагностика может быть эффективным средством контроля компонентного состава плазмы и оптимизации условий формирования наночастиц требуемого состава.

Список использованной литературы

1. Current state of laser synthesis of metal and alloy nanoparticles as ligand-free reference materials for nano-toxicological assays / C. Rehbock [et al.] // *Beilstein J. Nanotechnol.* – 2014. – N 5. – P. 1523–1541.
2. *Gao, G. Nanostructures and Nanomaterials: Synthesis, Properties and Applications* / G. Gao. – London: Imperial College Press, 2004.
3. *Тарасенко, Н. В. Лазерный синтез и модификация композитных наночастиц в жидкостях* / Н. В. Тарасенко, А. В. Буцень // *Квантовая электроника.* – 2010. – Т. 40, № 11. – С. 986–1003.
4. *Muto, H. Mechanism of laser-induced size reduction of gold nanoparticles as studied by single and double laser pulse excitation* / H. Muto, K. Miyajima, F. Mafuné // *J. Phys. Chem. C.* – 2008. – N 112. – P. 5810–5815.
5. Laser-aided preparation and modification of gadolinium silicide nanoparticles in liquid / N. V. Tarasenko [et al.] // *J. Phys. Chem. C.* – 2012. – Vol. 116. – P. 3897–3902.
6. Cavitation dynamics of laser ablation of bulk and wire-shaped metals in water during nanoparticles production / A. De Giacomo [et al.] // *Phys. Chem. Chem. Phys.* – 2013. – N 15. – P. 3083–3092.
7. Elemental chemical analysis of submerged targets by double-pulse laser-induced breakdown spectroscopy / A. De Giacomo [et al.] // *Anal. Bioanal. Chem.* – 2006. – N 385. – P. 303–311.
8. *Lazic, V. Insights in the laser-induced breakdown spectroscopy signal generation underwater using dual pulse excitation* / V. Lazic, J. J. Laserna, S. Jovicevic // *Spectrochim. Acta, Part B: Atomic Spectroscopy.* – 2013. – Vol. 82. – P. 42–49.
9. *Грим, Г. Уширение спектральных линий в плазме: пер. с англ.* / Г. Грим. – М.: Мир, 1978.
10. *Касабов, Г. А. Спектроскопические таблицы для низкотемпературной плазмы* / Г. А. Касабов, В. В. Елисеев. – М.: Атомиздат, 1973.

Поступила в редакцию 15.05.2015

УДК 533.9.03, 533.9.082.5, 543.422; 537.523/527

В. И. АРХИПЕНКО¹, А. А. КИРИЛЛОВ¹, А. В. ПАВЛОВА¹, Л. В. СИМОНЧИК¹,
Н. В. ДУДЧИК², М. М. КУРАИЦА³, Б. М. ОБРАДОВИЧ³

БАКТЕРИЦИДНЫЕ КОМПОНЕНТЫ В ВОЗДУШНОЙ ПЛАЗМЕННОЙ СТРУЕ ПРИ ПОСТОЯННОМ И ИМПУЛЬСНО-ПЕРИОДИЧЕСКОМ ТОКОВЫХ РЕЖИМАХ

¹Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь,
e-mail: a.kirillov@dragon.bas-net.by

²Республиканский научно-практический центр гигиены, Минск, Беларусь,
e-mail: n_dudchik@tut.by

³Белградский университет, физический факультет, Белград, Сербия,
e-mail: kuki@ff.bg.ac.rs

Получены воздушные плазменные струи атмосферного давления на постоянном, импульсно-периодическом и автоколебательном токовых режимах. Показано, что основным механизмом инактивации бактерий *Staphylococcus aureus* является воздействие химически активных молекул NO, NO₂ и HNO₂. Методом ИК-абсорбционной спектроскопии определены их концентрации. Выявлен оптимальный режим разряда, индуцирующий плазменные струи, наиболее подходящий для получения бактерицидных компонентов.

Ключевые слова: плазменная струя, тлеющий разряд, ИК-абсорбционная спектроскопия, инактивация микроорганизмов, импульсно-периодический режим.

V. I. ARKHIPENKO¹, A. A. KIRILLOV¹, A. V. PAULAVA¹, L. V. SIMONCHIK¹, N. V. DUDCHIK²,
M. M. KURAIČA³, B. M. OBRADOVIĆ³

BACTERICIDAL COMPONENTS IN AN AIR PLASMA JET WITHIN DC AND RIPPLE CURRENT REGIMES

¹B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus,
e-mail: a.kirillov@dragon.bas-net.by

²Republican unitary enterprise Scientific Practical Centre of Hygiene, Minsk, Belarus,
e-mail: n_dudchik@tut.by

³University of Belgrade, Faculty of Physics, Belgrade, Serbia,
e-mail: kuki@ff.bg.ac.rs

Atmospheric pressure air plasma jets within dc, pulsed and self-oscillatory current regimes are realized. It is shown that the main mechanism of inactivation of bacteria *Staphylococcus aureus* is the effect of chemically active molecules of NO, NO₂ and HNO₂. The method of IR absorption spectroscopy is used to investigate chemical active component concentrations. The optimal regime of discharge inducing plasma jets, which is more suitable for production of bactericidal components, is found.

Keywords: plasma jet, glow discharge, IR absorption spectroscopy, inactivation of microorganisms, ripple regime.

Введение. Неравновесная плазма является уникальным инструментом, позволяющим осуществлять химические процессы в объеме или на поверхности без существенного нагрева обрабатываемых объектов. Одним из весьма многообещающих применений является плазменная медицина, включающая в себя биодеконтаминацию, модификацию поверхностей, а также ряд терапевтических плазменных приложений (обеззараживание хронических ран, стимуляция регенерации тканей, лечение ряда кожных заболеваний, селективное разрушение раковых клеток и др.) [1, 2], что требует создания источников холодной плазмы при атмосферном давлении.

К настоящему времени разработаны различные источники неравновесной плазмы атмосферного давления, перспективные для биомедицинских приложений [3–5], среди которых особое место занимают плазменные струи, позволяющие проводить обработку объектов различных форм

и размеров вне замкнутого разрядного объема. Плазменные источники струй отличаются типом газового разряда, конфигурацией электродов и составом рабочего газа. Большинство плазменных струй атмосферного давления в различных конфигурациях поддерживаются переменным либо импульсно-периодическим напряжением с частотами от килогерц до гигагерц в инертных газах, что сопряжено в первую очередь с трудностью генерации разряда в молекулярном газе, либо используется инертный рабочий газ с малыми добавками активных молекулярных газов [6, 7]. Для их питания требуются высоковольтные источники, что накладывает определенные требования по их безопасной эксплуатации. Существующие низкотемпературные плазменные струи молекулярных газов основаны на самопульсирующем искровом разряде либо на микроразряде с полым катодом [8, 9] и имеют существенным недостатком большое содержание в плазменной струе материала электродов, что ограничивает их использование в медицине.

В работе [10] представлены результаты воздействия He/O_2 , Ar/O_2 , воздушной и азотной плазменных струй на основе тлеющего разряда атмосферного давления (ТРАД) на постоянном токе на бактерии *Staphylococcus aureus* и определены концентрации основных бактерицидных компонент. Показано, что наибольшим инактивационным эффектом обладает воздушная струя, вследствие наличия в ней оксида азота, диоксида азота и азотистой кислоты. Используемые в [10] для генерации плазмы тлеющие разряды атмосферного давления [11, 12] обладают рядом преимуществ: возможностью использования как инертных, так и молекулярных рабочих газов; простотой устройства; малой эрозией электродов. В данной работе получены и сопоставлены плазменные струи как на постоянном, так и импульсно-периодическом токовом режиме генерации плазмы в воздухе, и в них определены концентрации бактерицидных компонент.

Экспериментальная установка. Схема электрической цепи генерации плазменной струи и диагностической системы приведена на рис. 1. Разрядное устройство представляет собой цилиндрическую кварцевую разрядную камеру со внутренним диаметром 8 мм, внутри которой соосно расположены закругленный катод (стержень диаметром 6 мм) и плоский анод толщиной 4 мм из нержавеющей стали. Межэлектродный промежуток составляет 0,7 мм. Расход рабочего газа устанавливается равным 5 л/мин. Генерируемая в ТРАД плазма выносится вместе с потоком газа через центральное отверстие в аноде диаметром 1,5 мм в окружающий воздух на расстояние до нескольких сантиметров (видимое свечение плазмы), при этом диаметр струи составляет 2–3 мм.

Газовый разряд генерируется двумя источниками питания U_1 и U_2 , развязка которых осуществляется при помощи диодов D_1 и D_2 . Один из источников U_1 является источником постоянного тока с выходным напряжением до 3 кВ. Данное значение напряжения больше пробойного

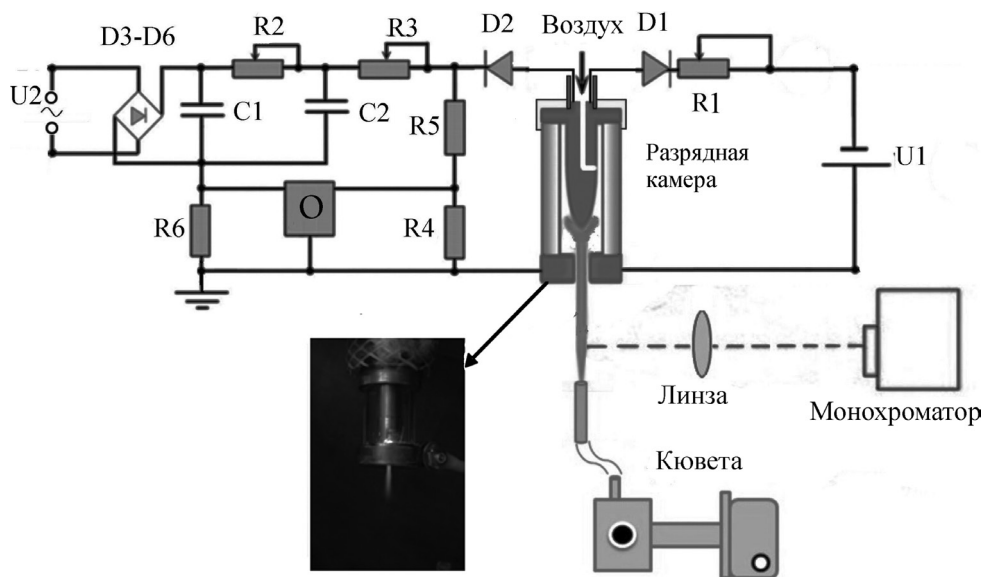


Рис. 1. Схема генерации и регистрации воздушной плазменной струи

напряжения, необходимого для пробоя воздуха при атмосферном давлении в промежутке в 0,7 мм. Задачей этого источника питания является поджигание и продолжительное поддержание микро-разряда в воздушном потоке. Балластное сопротивление R1 выбирается таким образом, чтобы ток разряда находился в области 5–30 мА. Для реализации импульсно-периодического режима используется высоковольтный источник переменного тока U2 с напряжением 1,5–4 кВ с частотой сети или на частоте 400 Гц, который позволяет повышать ток разряда до нескольких сотен миллиампер и менять форму импульса тока (постоянный, пульсирующий, самопульсирующий и т. д.).

Для реализации автоколебательного режима используется RC-контур с переменными емкостями C1 и C2 и сопротивление R2 и R3. Резисторы R4 и R5 используются в качестве делителя напряжения с соотношением 100:1. Резистор R6 применяется для регистрации формы тока разряда. Для регистрации соответствующих форм напряжения и тока используется осциллограф С8-40 (Белвар).

Регистрация оптических спектров излучения плазменных струй осуществлялась с применением сканирующего 0,5-метрового монохроматора высокого разрешения МДД-500×2. В качестве преобразователя интенсивности светового излучения в электрический сигнал использовался фотоэлектронный умножитель ФЭУ-171. Концентрация бактерицидных компонент плазменных струй определялась методом абсорбционной ИК-спектроскопии. Спектры поглощения регистрировались с помощью ИК Фурье-спектрометра Nexus (Thermo-Nicolet) с газовой кюветой 186-0305 (Perkin-Elmer). Регистрация спектров производилась с помощью DTGS-детектора в спектральном диапазоне 600–4000 см⁻¹ с разрешением 2 см⁻¹ после 128 сканов. Оптический путь газовой кюветы составлял 135 см. Забор газа в кювету проводился с помощью трубки диаметром 3,5 мм, которая помещалась на ось струи параллельно газовому потоку. Вычисление спектров поглощения осуществлялось с использованием базы спектральных данных HITRAN [13].

Плазменная обработка микроорганизмов. Бактерицидная эффективность разработанных плазменных струй была исследована на грам-положительных *Staphylococcus aureus*. *Staphylococci* – чрезвычайно широко распространенные представители микрофлоры кожи и слизистых оболочек человека. Они являются причиной многих заболеваний, в том числе поверхностных и глубоких абсцессов, отравлений, инфекций мочевыводящих путей. Наиболее важным патогенным микроорганизмом является *Staphylococcus aureus*, обладающий высокой вирулентностью и способностью приобретать устойчивость к антибиотикам. Используемый в работе штамм *Staphylococcus aureus* ATCC 6538 имеет типичные биохимические характеристики вида, обладает высокой устойчивостью к высушиванию и воздействию других факторов окружающей среды. Посеянные поверхностным способом на недифференцированные плотные питательные среды колонии характеризуются типичной желтоватой окраской, что в условиях модельного эксперимента позволяет выявить количество жизнеспособных клеток целевого микроорганизма.

На поверхность агара, содержащую недифференцированную плотную питательную среду, помещались 100 мкл суспензии с исходной концентрацией *S. aureus* 10⁵–10⁶ КОЕ/мл и распределялись по ней с помощью шпателя. После приготовления образцов центральная зона каждого из четырех секторов 90 мм чашки Петри обрабатывалась плазменной струей ТРАД с различным временем экспозиции. Температура струи в точке воздействия на бактерии контролировалась с помощью термопары, а расстояние между краем анода и поверхностью агара было выбрано 4 см для воздушной струи таким образом, чтобы температура не превышала 45 °С. Определение инактивационной способности плазмы производилось методом счета колоний. Для этого после плазменной обработки пластины агара культивировались в течение 18 ч при температуре 37 °С. Количество выросших макроколоний давало число выживших микроорганизмов на образце.

Результаты обработки *S. aureus* воздушной плазменной струей на постоянном токе 30 мА представлены на рис. 2. Следует отметить, что, несмотря на малый диаметр струи, инактивация происходит по всей площади секторов. При времени экспозиции 2 мин видимая область инактивации располагается в центре обрабатываемого сектора чашки Петри. При 5-минутной экспозиции выживали всего несколько бактерий на периферии сектора, а при 10-минутной плазменной обработке почти во всем секторе происходила полная деконтаминация бактерий.

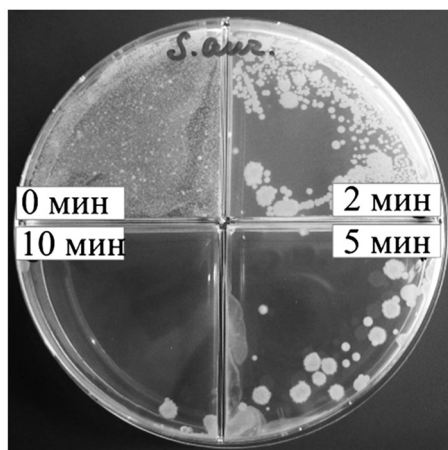


Рис. 2. Результаты инактивации *S. aureus* воздушной плазменной струей

В процессах инактивации микроорганизмов с помощью плазмы важную роль могут играть электрическое поле, заряженные частицы, тепловое воздействие, ультрафиолетовое излучение и нейтральные кислород- и азотсодержащие химически активные частицы (NO , NO_2 , OH и др.) [1]. В нашем случае заведомо отсутствует влияние полей и заряженных частиц. Ограничение на температуру струи в точке воздействия на бактерии 45°C позволяет исключить тепловой механизм. Для выяснения значимости УФ-излучения были проведены эксперименты, в которых между чашками Петри и анодом помещались плоскопараллельные пластины из LiF , CaF_2 и кварцевого стекла. Пластины пропускали УФ-излучение ТРАД в бактерицидном диапазоне 200–315 нм, исходящее из отверстия в аноде и от плазменных струй, но ограждали микроорганизмы от газовых потоков. Одинаковое число выросших колоний микроорганизмов в чашках Петри, не подвергшихся обработке, и в чашках Петри, защищенных пластинами, позволяет сделать вывод о незначительной роли УФ-излучения при инактивации микроорганизмов воздушной плазменной струей. Таким образом, основной вклад в инактивационную способность воздушной плазменной струи, по-видимому, вносят нейтральные химически активные частицы, определение концентрации которых в струе дает возможность прогнозировать ее инактивационный эффект.

Воздушные плазменные струи. Концентрации бактерицидных компонент воздушной плазменной струи на постоянном токе 30 мА на расстоянии 4 см от анода, где располагается чашка Петри, составляют 40, 20 и 10 ppm для, соответственно, оксида азота, диоксида азота и азотистой кислоты [10]. Используемые для биомедицинских приложений плазменные струи должны иметь низкую температуру, которая при фиксированной скорости прокачки рабочего газа определяется мощностью электрического разряда. В рассмотренном выше инактивационном процессе мощность равна 22 Вт. При ее увеличении до 36 Вт в струях наблюдается приблизительно линейный рост концентраций бактерицидных компонент с одновременным повышением температуры. Поэтому в случае снижения температуры в плазменных струях на постоянном токе при удалении от анода, что обусловлено подмешиванием холодного окружающего воздуха, отличие концентраций при заданной температуре для различных мощностей разряда будет незначительным.

В работах [14, 15] отмечается, что переход от режима на постоянном токе к пульсирующему токовому режиму позволяет создать более благоприятные условия для генерации химически активных частиц вследствие повышения эффективности ионизации и уменьшения температуры из-за отсутствия нагревания газа между импульсами. Рассмотрим плазменные струи для различных импульсно-периодических разрядов.

Пульсирующий режим генерации плазменной струи был реализован при подаче переменного напряжения U2 частотой 400 Гц на диодный мост D3–D6 (рис. 3, а). В начале каждого полупериода происходит зажигание тлеющего разряда, при этом напряжение на электродах падает до напряжения, соответствующего силе тока тлеющего разряда при данном значении межэлектродного промежутка. Ток разряда возрастает до величины, определяемой напряжением источника

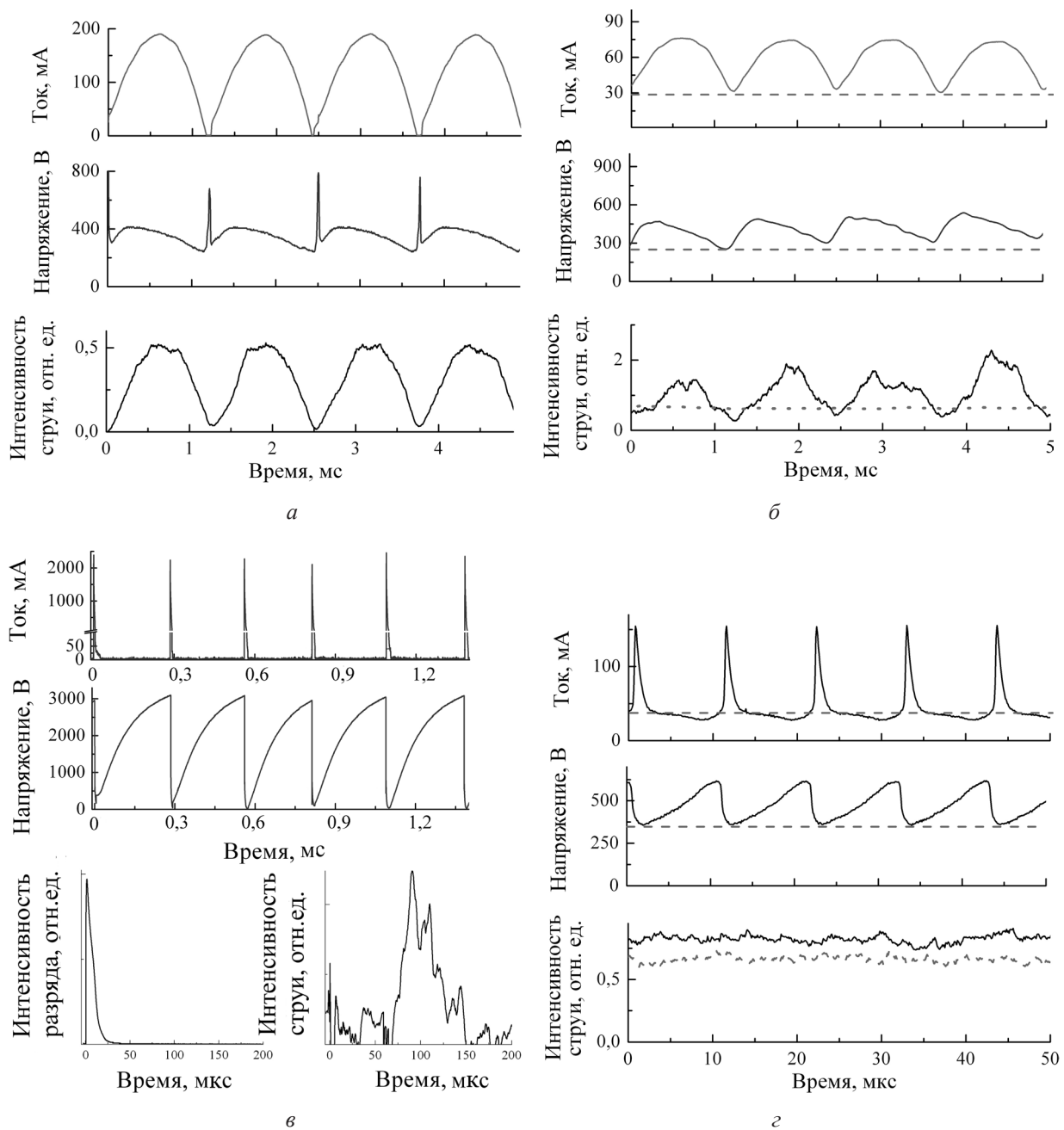


Рис. 3. Формы сигнала разрядного тока, напряжения на электродах и свечения плазменной струи: *а* – импульсно-периодический разряд; *б* – импульсно-периодический разряд совместно с разрядом на постоянном токе; *в* – автоколебательный разряд; *г* – автоколебательный разряд совместно с разрядом на постоянном токе

питания и балластным сопротивлением, т. е. фактически в каждой точке реализуется самостоятельный тлеющий разряд с характеристиками разряда на постоянном токе [11, 12]. Излучение плазменной струи, зарегистрированное вне разрядной камеры, в целом повторяет импульсы тока, однако имеет задержку порядка 100–200 мкс, которая определяется временем прохождения воздуха со скоростью 40–50 м/с между активной областью разряда и точкой наблюдения в струе. Средняя за период мощность, вкладываемая в разряд, равна 40 Вт.

Пробойные пики напряжения могут приводить к эрозии электродов. Для их устранения используем режим питания от двух источников – высоковольтного источника постоянного тока U_1 при силе тока 30 мА и пульсирующее напряжение с частотой 800 Гц (рис. 3, *б*). На осциллограммах видно, что в отличие от пульсирующего разряда пробойные пики напряжения в данном случае отсутствуют. Средняя за период мощность составляет 52 Вт.

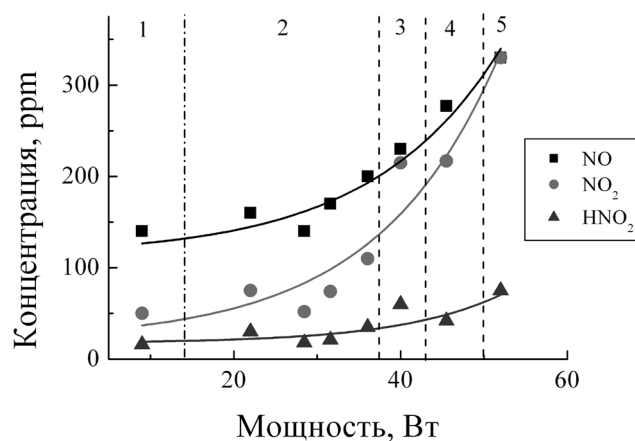


Рис. 4. Зависимость от электрической мощности концентраций бактерицидных компонент воздушных плазменных струй при различных режимах горения разряда: 1 – автоколебательном; 2 – на постоянном токе; 3 – импульсно-периодическом; 4 – автоколебательном, совместно с непрерывным режимом на постоянном токе; 5 – импульсно-периодическом совместно с непрерывным режимом на постоянном токе

Автоколебательный режим (рис. 3, в) реализуется с использованием RC-контура, индуцирующего релаксационные колебания с частотами до 100 кГц. В данном случае практически вся энергия вкладывается в короткие импульсы тока амплитудой в несколько ампер. Длительность импульсов тока составляет 5–10 мкс. Импульс свечения разряда совпадает с импульсом тока, а свечение струи появляется спустя примерно 100 мкс после разрядного импульса, так же как и в случае импульсно-периодического режима. Средняя за период мощность равна 9 Вт.

Автоколебательный режим, наложенный на постоянный ток 30 мА, приведен на рис. 3, г. В отличие от предыдущего, в данном режиме наблюдаются значительно меньшие импульсы тока на фоне тлеющего разряда. Средняя за период мощность составляет 45,5 Вт, 80 % которой приходится на тлеющий разряд на постоянном токе.

Мольные доли бактерицидных компонент плазменных струй на расстоянии 1 см от анода при различных режимах разряда представлены на рис. 4. Прослеживается тенденция роста концентраций бактерицидных компонент с увеличением вкладываемой мощности. Однако, с точки зрения создания холодных плазменных струй, следует оценивать рассмотренные режимы горения разряда, сопоставляя концентрации, отнесенные к единице вкладываемой мощности. Оптимальным по этому критерию является автоколебательный режим. Кроме того, при данном режиме наблюдается максимальное отношение концентраций NO к NO₂, что важно при использовании плазменных струй в медицине, в частности для NO-терапии. Подобный вывод был также сделан в работе [16], где сопоставлялись автоколебательный режим и режим на постоянном токе генерации плазменной струи.

Заключение. Получены холодные воздушные плазменные струи при генерации разряда на постоянном, пульсирующем и импульсно-периодическом токе. Показано, что основным механизмом инактивации бактерий *Staphylococcus aureus* плазменными струями являются нейтральные химически активные частицы NO, NO₂ и HNO₂, концентрации которых возрастают с увеличением электрической мощности. Наиболее эффективным по наработке бактерицидных компонент на единицу вкладываемой мощности является автоколебательный режим, при котором также наблюдается максимальное отношение концентраций NO к NO₂, важное для использования плазменных струй в медицине.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (гранты № Ф14СРБ-001 и № Ф15РМ-032).

Список использованной литературы

1. Fridman, A. Plasma Medicine / A. Fridman, G. Friedman. – New York: Wiley, 2013.
2. Plasma Medicine: Applications of Low-Temperature Gas Plasmas in Medicine and Biology / M. Laroussi [et. al.]. – Cambridge: Cambridge University Press, 2012.

3. Plasma medicine: an introductory review / M. G. Kong [et. al.] // *New J. Phys.* – 2009. – No. 11. – 115012, 35 p.
4. Plasma-Based Pollutant Degradation in Gas Streams: Status, Examples and Outlook / R. Brandenburg [et. al.] // *Contrib. Plasma Phys.* – 2014. – Vol. 54, no. 2. – P. 202–214.
5. Lu, X. On atmospheric-pressure non-equilibrium plasma jets and plasma bullets / X. Lu, M. Laroussi, V. Puech // *Plasma Sources Sci. Technol.* – 2012. – Vol. 21. – 034005, 17 p.
6. Characterization of microwave plasma torch for decontamination / T. Shimizu [et al.] // *Plasma Process Polym.* – 2008. – Vol. 5. – P. 577–582.
7. Escherichia coli deactivation study controlling the atmospheric pressure plasma discharge conditions / Gweon Bomi [et al.] // *Curr. Appl. Phys.* – 2009. – Vol. 9. – P. 625–628.
8. Förster, S. Investigations of an atmospheric pressure plasma jet by optical emission spectroscopy / S. Förster, C. Mohr, W. Viöl // *Surf. Coat. Technol.* – 2005. – No. 200. – P. 827–830.
9. Inactivation of Bacteria in an Aqueous Environment by a Direct-Current, Cold-Atmospheric-Pressure Air Plasma Microjet / F. Liu [et. al.] // *Plasma Process. Polym.* – 2010. – Vol. 7. – P. 231–236.
10. Применение плазменной струи тлеющего разряда атмосферного давления на постоянном токе для инактивации *Staphylococcus aureus* / А. А. Кириллов [и др.] / *Приклад. физика.* – 2013. – № 5. – С. 52–55.
11. DC atmospheric pressure glow microdischarges in the current range from microamps up to amperes / V. I. Arkhipenko [et al.] // *Eur. Phys. J. D.* – 2010. – No. 60. – P. 455–463.
12. Plasma non-equilibrium of the DC normal glow discharges in atmospheric pressure atomic and molecular gases / V. I. Arkhipenko [et. al.] // *Eur. Phys. J. D.* – 2012. – No. 66. – P. 252, 11 p.
13. The HITRAN Database [Electronic resource]. – Mode of access: <http://www.cfa.harvard.edu/HITRAN/>. – Date of access: 03.02.2015.
14. Walsh, J. L. Portable nanosecond pulsed air plasma jet / J. L. Walsh, M. G. Kong // *Appl. Phys. Lett.* – 2011. – No. 99. – 081501.
15. Nanosecond repetitively pulsed discharges in air at atmospheric pressure – the glow regime / D. Z. Pai [et. al.] // *Plasma Sources Sci. Technol.* – 2009. – Vol. 18. – 045030.
16. Direct current plasma jet at atmospheric pressure operating in nitrogen and air / X. L. Deng. [et. al.] // *J. Appl. Phys.* – 2013. – No. 113. – 023305.

Поступила в редакцию 12.03.2015

УДК 537.862

*К. Б. МИКИТЧУК, С. А. МАЛЫШЕВ, А. Л. ЧИЖ***РЕЖИМ ОДНОЧАСТОТНОЙ ГЕНЕРАЦИИ В ОПТОЭЛЕКТРОННОМ ГЕНЕРАТОРЕ СВЧ НА ЛИНИЯХ ЗАДЕРЖКИ С ОПТИЧЕСКИМ УСИЛЕНИЕМ***Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь,
e-mail: mikitchuk@ieee.org*

В данной работе проведено теоретическое исследование квазигармонической генерации в оптоэлектронном генераторе на линиях задержки с оптическим усилением. Рассматриваются особенности применения СВЧ-фазовращателей для обеспечения квазигармонической генерации с низким фазовым шумом и уровнем дискретных составляющих в спектре генерации, а также рассчитано пороговое значение коэффициента усиления контура обратной связи, при котором в оптоэлектронном генераторе на линиях задержки с оптическим усилением наступает режим динамических неустойчивостей генерации. Предложен метод обеспечения установления генерации в оптоэлектронном генераторе на частоте максимального усиления.

Ключевые слова: оптоэлектронный генератор, оптическое усиление, одночастотная генерация, динамические неустойчивости генерации.

*K. B. MIKITCHUK, S. A. MALYSHEV, A. L. CHIZH***SINGLE-FREQUENCY OSCILLATION IN THE ALL-OPTICAL GAIN OPTOELECTRONIC OSCILLATOR BASED ON FIBER-OPTIC DELAY LINE***B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus,
e-mail: mikitchuk@ieee.org*

The theoretical investigation of the single-frequency oscillation in all-optical gain optoelectronic oscillator based on fiber-optic delay lines is performed. It is shown that there is no need in microwave phase shifters within the optoelectronic oscillator loop in order to provide low phase noise and spurious level oscillations. Threshold of the dynamical instabilities in the all-optical gain optoelectronic oscillator is calculated. It is shown that the reproducibility of the oscillation frequency is provided by means of the continuous tuning of the loop gain during the switching-on.

Keywords: optoelectronic oscillator, all-optical gain, single-frequency oscillation, dynamical instabilities of oscillations.

Введение. Автогенераторы сверхвысокой частоты (СВЧ) с низким уровнем фазового шума имеют важное значение для многих коммерческих и военных применений, например беспроводные и оптические системы связи, системы радиолокации и измерительные СВЧ-приборы. Так, радиолокационные системы нуждаются в низком уровне флуктуаций частоты опорных сигналов для отслеживания движущихся объектов, а пределы измерений анализаторов спектра определяются фазовым шумом гетеродина. В целом параметры и характеристики вышеназванных систем улучшаются с уменьшением уровня фазового шума используемых в них генераторов. Автогенераторы СВЧ на основе линий задержки, в частности оптоэлектронные, позволяют получать генерацию квазигармонического СВЧ-сигнала со сверхнизким фазовым шумом, достигающим величины менее 140 дБн/Гц на отстройке 10 кГц от частоты генерации в диапазоне 8–12 ГГц [1]. При этом условиями генерации являются синфазное сложение сигналов на собственной частоте (фазовое условие генерации), а также компенсация активным элементом потерь и нелинейностей контура обратной связи (амплитудное условие генерации).

Данные условия в оптоэлектронном генераторе СВЧ являются необходимыми, но недостаточными для стационарной одночастотной (квазигармонической) генерации. Во-первых, при высоких коэффициентах усиления активного элемента может наступить режим динамических

нестабильностей генерации [2, 3] или многочастотная генерация [4]. Это делает невозможным использование оптоэлектронного генератора в качестве гетеродина в современных системах радиолокации, радиосвязи и измерительной СВЧ-техники. Во-вторых, так как необходимые условия генерации (фазовое и амплитудное) выполняются на дискретном конечном наборе собственных частот в пределах *полосы частот положительного усиления* (т. е. полосы частот, где усиление компенсирует потери и нелинейности в компонентах оптоэлектронного генератора), то в общем случае генерация квазигармонического сигнала может устанавливаться на любой собственной частоте, лежащей в рассматриваемом диапазоне [5]. Это накладывает значительные ограничения на архитектуру систем с фазовой автоподстройкой частоты, так как расстояние между собственными частотами в пределах полосы частот положительного усиления превышает ширину полосы петлевого фильтра системы фазовой автоподстройки частоты [6].

Таким образом, для стационарной генерации квазигармонического сигнала, помимо обеспечения выполнения фазового и амплитудного условий, необходимо дополнительно применять комплекс мер по управлению коэффициентом усиления контура обратной связи. В данной работе исследуются условия установления и поддержания стационарной генерации квазигармонического СВЧ-сигнала в оптоэлектронных генераторах на линиях задержки с оптическим усилением.

Методы моделирования оптоэлектронного генератора. В общем случае автогенератор частоты на линиях задержки для обеспечения стационарной квазигармонической генерации должен содержать активный элемент с низкими собственными фазовыми шумами, охваченный контуром положительной обратной связи, который в свою очередь содержит узкополосный СВЧ-фильтр для частотной селекции собственных частот. В оптоэлектронном генераторе СВЧ на линиях задержки с оптическим усилением в качестве активного элемента используется оптический усилитель на волокне, легированном эрбием, охваченный контуром положительной обратной связи. Для квазигармонической генерации при этом необходимо использование оптоэлектронного контура обратной связи, обеспечивающего выполнение фазового и амплитудного условий генерации для СВЧ-поднесущих в оптическом волокне, иначе для оптической несущей возникает многомодовая лазерная генерация и из-за конкуренции мод сильно возрастает фазовый шум генерируемого СВЧ-сигнала. На рис. 1 приведена структурная схема оптоэлектронного автогенератора СВЧ на линиях задержки с оптическим усилением. Оптоэлектронный генератор включает оптический усилитель на волокне, легированном эрбием, а также контур положительной обратной связи, состоящий из дополнительных корректирующих волоконно-оптических линий задержки,

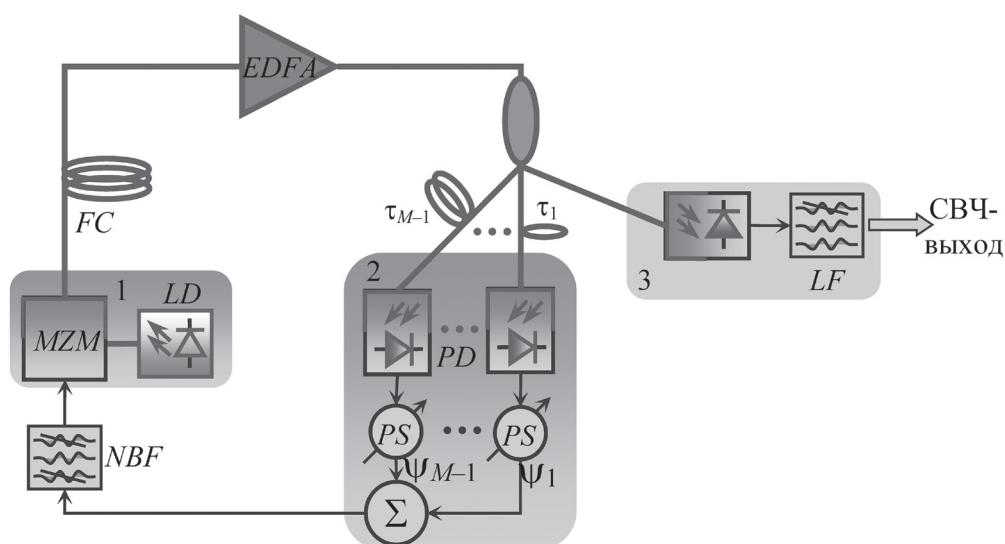


Рис. 1. Структурная схема оптоэлектронного генератора СВЧ на линиях задержки с оптическим усилением: 1 – электрооптический преобразователь; 2 – оптоэлектронный преобразователь; 3 – устройство вывода сигнала генерации; MZM – электрооптический модулятор Маха – Цендера; EDFA – оптический усилитель на волокне, легированном эрбием; $1 \times M$ – волоконно-оптический разветвитель; FC – волоконно-оптическая катушка; LD – лазерный диод; PD – фотодиод; PS – СВЧ-фазовращатель; NBF – узкополосный СВЧ-фильтр; LF – СВЧ-фильтр нижних частот

оптоэлектронного преобразователя, узкополосного СВЧ-фильтра, электрооптического преобразователя и основной волоконно-оптической линии задержки.

Следует отметить, что в общем случае в оптоэлектронном генераторе дополнительная периодическая частотная селективность контура обратной связи вводится посредством того, что модулированный по интенсивности оптический сигнал с помощью волоконно-оптического разветвителя соединяется с дополнительными корректирующими волоконно-оптическими линиями задержки. Оптоэлектронное преобразование осуществляется путем детектирования оптических сигналов с помощью СВЧ-фотодиодов, при этом СВЧ-фазовращатели используются для обеспечения синфазного сложения полученных СВЧ-сигналов в СВЧ-сумматоре на частоте генерации. Электрооптическое преобразование СВЧ-сигнала после узкополосной фильтрации в контуре обратной связи осуществляется путем модуляции по интенсивности излучения лазерного диода с распределенной обратной связью с помощью электрооптического модулятора Маха – Цендера. В рассматриваемом оптоэлектронном генераторе вывод оптического сигнала, модулированного по интенсивности СВЧ-сигналом генерации, реализуется с помощью волоконно-оптического разветвителя на выходе оптического усилителя. После оптоэлектронного преобразования в устройстве вывода СВЧ-сигнал генерации выводится из оптоэлектронного генератора.

Наиболее простой моделью рассматриваемого оптоэлектронного генератора СВЧ является линейная стационарная модель [1]. Однако из-за предположения о стационарности генерации корректное установление условий стационарной генерации и динамических нестабильностей, а также уровня дискретных составляющих в спектре генерации оказывается невозможным, так как взаимодействие сигнала генерации с шумом является нестационарным процессом. Более сложные модели, такие как нелинейная нестационарная модель оптоэлектронного генератора на основе полного интегро-дифференциального уравнения нелинейной динамики [2] или модель эволюции векторов отсчетов комплексных медленноменяющихся амплитуд во временной области [3], позволяют моделировать нелинейное ограничение амплитуды генерации, описывать переходные процессы при включении, а также режим динамических нестабильностей генерации. Данные модели реализованы для оптоэлектронного генератора с электронным усилением без дополнительных корректирующих волоконно-оптических линий задержки. Для учета распределенных шумов, нелинейностей компонентов оптоэлектронного генератора (в частности, оптического усилителя на волокне, легированном эрбием), нестационарности взаимодействия сигнала генерации с шумовыми составляющими в спектре была предложена нелинейная нестационарная модель эволюции одного отсчета комплексной огибающей СВЧ-сигнала в оптоэлектронном генераторе СВЧ с произвольным количеством дополнительных корректирующих волоконно-оптических линий при учете зависимости частоты генерации от времени [7–9]. Эта модель позволяет получать выходные параметры и характеристики генерации в зависимости от конструктивных параметров и режимов работы компонентов оптоэлектронного генератора. Однако из-за сложности анализа многомерных зависимостей динамический режим работы оптоэлектронного генератора принято описывать с помощью коэффициента усиления контура обратной связи в режиме малых сигналов g_V и нормированной амплитуды генерации μ [2, 3]. Коэффициент усиления контура обратной связи в режиме малых сигналов и нормированная амплитуда генерации на входе электрооптического преобразователя записываются в следующем виде [10]:

$$g_V = \left[\frac{\alpha_{mw} \sqrt{\kappa_{mw}}}{\sqrt{M-1}} \sum_{k=1}^{M-1} \alpha_k \kappa_k \right] \frac{\pi R |\sin \varphi_B| S_{PD} \alpha_f a_{MZM} P_{LD} \gamma_{MZM} G_{EDFA}(0)}{2V_\pi}, \quad (1)$$

$$\mu = \pi V_{osc} / V_\pi, \quad (2)$$

где P_{LD} – мощность генерации лазера;

$\gamma_{MZM} = (\eta_{MZM} - 1) / (\eta_{MZM} + 1)$, где η_{MZM} – контрастность модулятора Маха – Цендера;

φ_B – фаза смещения модулятора Маха – Цендера;

V_π – полуволновое напряжение модулятора вблизи частоты генерации в оптоэлектронном генераторе;

S_{PD} – чувствительность СВЧ-фотодиодов вблизи частоты генерации в оптоэлектронном генераторе;

R – сопротивление нагрузки фотодиода;

α_{MZM} – вносимые потери модулятора Маха – Цендера;
 $G_{EDFA}(P_{dc})$ – коэффициент усиления оптического усилителя на волокне, легированном эрбием;
 P_{dc} – постоянная составляющая оптической мощности на входе оптического усилителя;
 α_{mw} – потери в СВЧ-тракте;
 κ_{mw} – коэффициент разветвления направленного СВЧ-ответвителя;
 $(M-1)$ – количество дополнительных корректирующих волоконно-оптических линий задержки;
 α_k и κ_k – вносимые потери и коэффициент разветвления волоконно-оптического ответвителя в k -ю дополнительную волоконно-оптическую линию задержки;
 α_f – потери, вносимые в основную волоконно-оптическую линию задержки;
 V_{osc} – амплитуда СВЧ-сигнала генерации на входе электрооптического преобразователя.

Выражение (1) записано без учета потерь, вносимых узкополосным СВЧ-фильтром в случае, если частота генерации СВЧ-сигнала не совпадает с центральной частотой СВЧ-фильтра, что применительно к реальному оптоэлектронному генератору справедливо для случая генерации на частоте максимального усиления, являющейся собственной частотой оптоэлектронного генератора, для которой коэффициент усиления в режиме малых сигналов наибольший по сравнению с другими собственными частотами [5].

Условия установления генерации на частоте максимального усиления. Генерация квазигармонического СВЧ-сигнала возможна на одной из собственных частот в пределах полосы частот положительного усиления СВЧ, поэтому от включения к включению оптоэлектронного генератора генерация устанавливается на различных собственных частотах. Экспериментально показано, что использование режима включения, при котором коэффициент усиления в контуре положительной обратной связи плавно увеличивается, обеспечивает генерацию на частоте максимального усиления [4].

На рис. 2, а приведен переходной процесс в оптоэлектронном генераторе без дополнительных корректирующих волоконно-оптических линий задержки при использовании данного режима включения, что реализовано с помощью увеличения мощности генерации лазерного диода. Из рисунка видно, что после включения оптоэлектронный генератор последовательно находится в подпороговом состоянии (I), режиме установления генерации (II), а также в режимах квазистационарной (III) и стационарной генерации (IV).

В подпороговом состоянии не существует полосы частот положительного усиления, т. е. генерация невозможна ни на одной из собственных частот, так как не выполняется амплитуд-

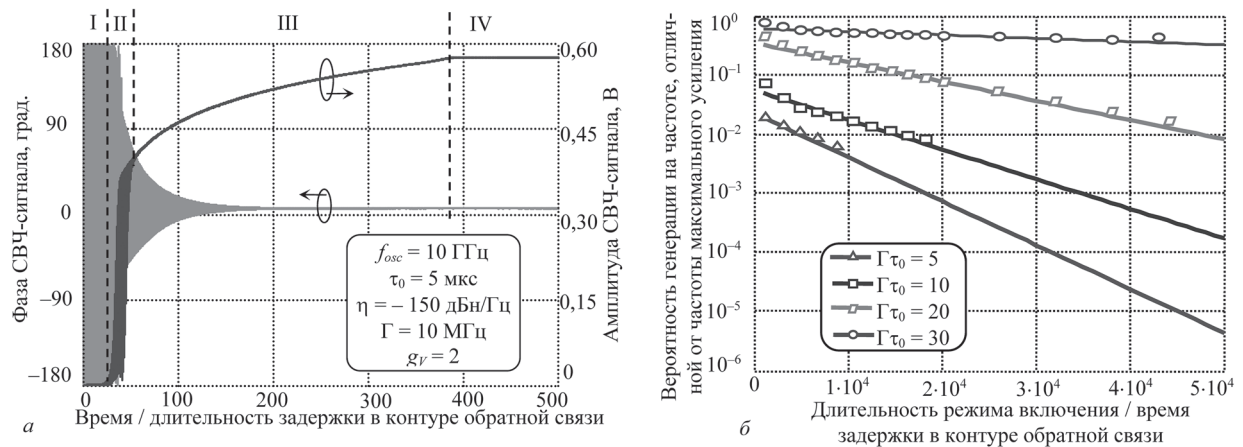


Рис. 2. Переходной процесс в оптоэлектронном генераторе без корректирующих волоконно-оптических линий задержки при использовании режима включения, при котором обеспечивается линейное увеличение коэффициента усиления в контуре обратной связи (а) и вероятность генерации на частоте, отличной от частоты максимального усиления, в зависимости от длительности режима включения (б): f_{osc} – частота генерации; η – уровень собственных шумов выходного сигнала генерации; Γ – ширина полосы пропускания полосового СВЧ-фильтра; τ_0 – длительность задержки в волоконно-оптической катушке; τ_m – длительность задержки в m -й дополнительной корректирующей волоконно-оптической линии задержки; ψ_m – фазовый сдвиг, вносимый СВЧ-фазовращателем на выходе m -й дополнительной корректирующей волоконно-оптической линии задержки; g_V – коэффициент усиления контура обратной связи в режиме малых сигналов

ное условие генерации. Свыше порогового значения коэффициента усиления контура обратной связи положительное усиление возникает в полосе частот, которая может содержать несколько собственных частот оптоэлектронного генератора, т. е. начинается режим установления генерации, в общем случае сопровождающийся конкуренцией сигналов на собственных частотах. В режиме квазистационарной генерации увеличение амплитуды СВЧ-сигнала с течением времени свидетельствует о том, что на данном этапе еще не работает механизм ограничения амплитуды СВЧ-сигнала из-за нелинейностей компонентов оптоэлектронного генератора, в частности нелинейностей модулятора Маха – Цендера и оптического усилителя. Если также учесть, что модулятор Маха – Цендера и оптический усилитель не вносят фазовых искажений в преобразовываемый сигнал, то оптоэлектронный генератор на данном этапе можно считать линейной системой. При этом амплитуда СВЧ-сигнала на собственных частотах определяется случайно инжектированным шумом, а генерация устанавливается на одной из собственных частот, величина СВЧ-сигнала на которой оказалась максимальной. Поэтому для установления генерации на частоте максимального усиления необходимо, чтобы на всем протяжении режима установления генерации не возникало конкуренции собственных частот и в пределах полосы частот положительного усиления оставалась только одна собственная частота. В режиме квазистационарной генерации уровень дискретных составляющих на побочных собственных частотах, где идет паразитная подпороговая генерация, постепенно уменьшается, что приводит к стационарной генерации квазигармонического СВЧ-сигнала, дискретные составляющие в спектре которого значительно подавлены и не приводят к динамическим нестабильностям генерации.

На рис. 2, б приведена зависимость вероятности установления генерации на частоте, отличной от частоты максимального усиления, от длительности режима включения, при котором обеспечивается линейное увеличение коэффициента усиления контура положительной обратной связи оптоэлектронного генератора без дополнительных корректирующих волоконно-оптических линий задержки. Эта зависимость приведена для различных произведений ширины полосы узкополосного СВЧ-фильтра Γ и длительности задержки в волоконно-оптической линии τ_0 , т. е. различных значений количества собственных частот оптоэлектронного генератора в пределах полосы СВЧ-фильтра. Из рисунка видно, что вероятность установления генерации на собственных частотах, отличных от частоты максимального усиления, экспоненциально зависит от длительности режима включения оптоэлектронного генератора. При этом большие значения вероятности установления генерации на частоте, отличной от частоты максимального усиления, соответствуют большим значениям произведения ширины полосы узкополосного СВЧ-фильтра Γ и длительности задержки в волоконно-оптической линии τ_0 . В результате моделирования установлено, что при использовании дополнительных корректирующих волоконно-оптических линий задержки увеличивается частотная селективность контура обратной связи оптоэлектронного генератора, что приводит к снижению вероятности установления генерации на собственных частотах, отличных от частоты максимального усиления, по сравнению с оптоэлектронным генератором без дополнительных корректирующих волоконно-оптических линий задержки.

Особенности фазового условия генерации. В реальных конструкциях оптоэлектронных генераторов для обеспечения совпадения частоты максимального усиления и центральной частоты узкополосного СВЧ-фильтра используются СВЧ-фазовращатели [1]. В общем случае, как показывают результаты моделирования, частота максимального усиления в них может отстоять от центральной частоты СВЧ-фильтра более чем на половину интервала между собственными частотами, а зависимость частоты генерации от сдвига фазы носит кусочно-линейный характер и при перестройке фазовращателя в пределах 360° испытывает скачок, величина которого равна интервалу между ближайшими к центральной частоте СВЧ-фильтра собственными частотами оптоэлектронного генератора.

На рис. 3, а приведена зависимость фазового шума (на отстройке 10 кГц от частоты генерации) и уровня дискретных составляющих в спектре оптоэлектронного генератора от фазового сдвига в контуре обратной связи без дополнительных корректирующих волоконно-оптических линий задержки. Видно, что в случае, если произведение ширины полосы узкополосного СВЧ-фильтра Γ и длительности задержки τ_0 в волоконно-оптической линии превышают 10, фазовый шум

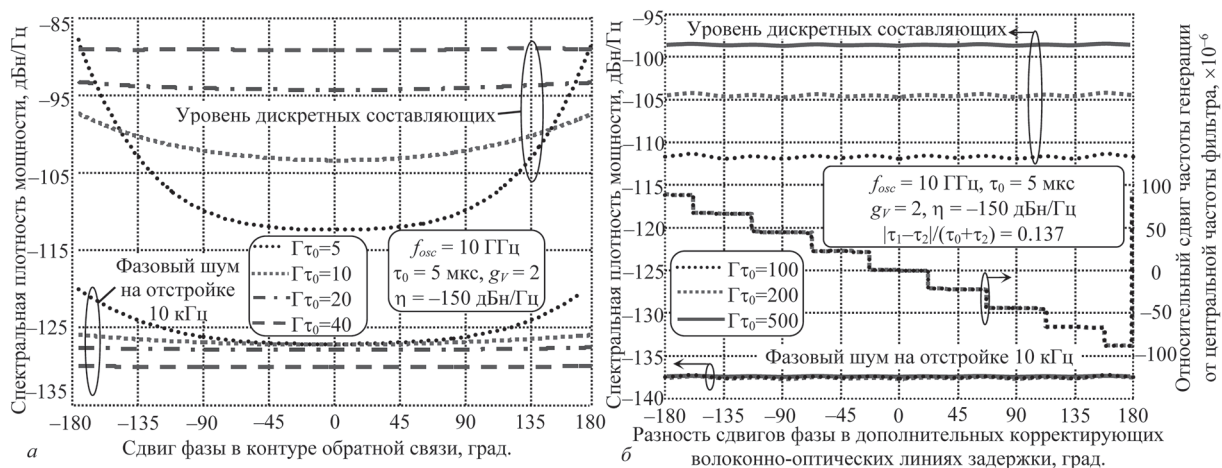


Рис. 3. Зависимость фазового шума на отстройке 10 кГц от частоты генерации, уровня дискретных составляющих в спектре генерации оптоэлектронного генератора, а также сдвига частоты генерации от центральной частоты СВЧ-фильтра от фазового сдвига в контуре обратной связи без дополнительных корректирующих волоконно-оптических линий задержки (а) и разности сдвигов фазы в двух дополнительных корректирующих волоконно-оптических линиях задержки (б)

на отстройке 10 кГц от частоты генерации и уровень дискретных составляющих в спектре генерации изменяются не более чем на 3 дБ во всем диапазоне перестройки СВЧ-фазовращателей.

На рис. 3, б показана зависимость фазового шума (на отстройке 10 кГц от частоты генерации), уровня дискретных составляющих в спектре генерации, а также относительной разности частоты генерации и центральной частоты СВЧ-фильтра от разности фазовых сдвигов, вносимых на выходе двух дополнительных корректирующих волоконно-оптических линий задержки. Для расчетов значение фазового сдвига на выходе двух дополнительных корректирующих волоконно-оптических линий задержки фиксируется таким образом, чтобы обеспечить совпадение частоты генерации с центральной частотой узкополосного СВЧ-фильтра, после чего изменяется значение фазового сдвига в одной из дополнительных волоконно-оптических линий задержки. Из рисунка видно, что зависимость частоты генерации от разности сдвига фаз является кусочно-непрерывной, т. е. при изменении разности фаз между двумя дополнительными корректирующими волоконно-оптическими линиями задержки в оптоэлектронном генераторе происходит перестройка генерации между собственными частотами в пределах одного периода амплитудно-частотной характеристики волоконно-оптической линии задержки вблизи центральной частоты СВЧ-фильтра. Также следует отметить, что в пределах интервала непрерывности наблюдается линейная зависимость частоты генерации от разности фаз, а при перестройке СВЧ-фазовращателя в пределах 360° имеет место скачок между собственными частотами, расположенными в спектре по разные стороны от центральной частоты СВЧ-фильтра. Таким образом, использование оптоэлектронного генератора с несколькими дополнительными корректирующими волоконно-оптическими линиями задержки и СВЧ-фильтром с относительно низкой добротностью позволяет получать генерацию квазигармонического сигнала с низким фазовым шумом и уровнем дискретных составляющих в спектре без использования СВЧ-фазовращателей.

Динамические нестабильности генерации в оптоэлектронном генераторе. Амплитуда комплексной огибающей сигнала генерации в режиме квазигармонической генерации имеет вид случайного процесса во времени, а в случае динамических нестабильностей – квазипериодического импульсного процесса [3]. Следовательно, при стационарной квазигармонической генерации в идеальном случае нормированная автокорреляционная функция амплитуды комплексной огибающей представляет собой функцию Дирака. В случае реальных случайных процессов конечной длительности, получаемых в эксперименте и при моделировании, автокорреляционная функция амплитуды комплексной огибающей представляет собой сумму собственного шума и дискретной импульсной функции. В режиме динамических нестабильностей генерации нормированная автокорреляционная функция амплитуды комплексной огибающей является квазипериодической.

В наихудшем случае, с точки зрения реализации генератора СВЧ, появление динамических нестабильностей зависит только от энергетического баланса в оптоэлектронном генераторе и не ограничивается частотной селективностью СВЧ-фильтра. При этом условия стационарной генерации определяются конструктивными параметрами оптоэлектронного генератора, в частности коэффициентом контура обратной связи в режиме малых сигналов, параметрами оптического усилителя, а также рабочей точкой модулятора Маха – Цендера.

На рис. 4, а приведена нормированная автокорреляционная функция амплитуды комплексной огибающей СВЧ-сигнала в оптоэлектронном генераторе с оптическим усилением без дополнительных корректирующих волоконно-оптических линий задержки для различных значений коэффициента усиления контура обратной связи в режиме малых сигналов при постоянном смещении модулятора Маха – Цендера вблизи точки закрытия ($\varphi_B = 160^\circ$). Из рисунка видно, что для значений коэффициента усиления контура обратной связи в режиме малых сигналов, составляющего 3,2 и менее, нормированная автокорреляционная функция амплитуды комплексной огибающей представляет собой сумму белого шума и дискретной импульсной функции, а генерация в оптоэлектронном генераторе является стационарной квазигармонической. В случае, когда коэффициент усиления волоконно-оптической линии задержки в режиме малых сигналов достигает величины 3,4 и более, нормированная автокорреляционная функция амплитуды комплексной огибающей является квазипериодической, и, следовательно, имеют место динамические нестабильности генерации. Также установлено, что порогом генерации является значение коэффициента усиления контура обратной связи в режиме малых сигналов, равное единице, безотносительно к рабочей точке модулятора Маха – Цендера и количеству дополнительных корректирующих волоконно-оптических линий задержки.

На рис. 4, б приведена зависимость максимальной нормированной амплитуды μ в режиме стационарной квазигармонической генерации от фазы смещения модулятора Маха – Цендера для различных значений контрастности последнего. Из рисунка видно, что для оптоэлектронного генератора с оптическим усилением с модулятором Маха – Цендера, смещенным вблизи квадратурной точки, максимальное значение нормированной амплитуды квазигармонической генерации составляет величину, близкую к 2,4, что соответствует расчетным данным, приведенным в работах [2, 3] для оптоэлектронного генератора с электронным усилением. Максимальное значение нормированной амплитуды квазигармонической генерации слабо изменяется при смещении модулятора Маха – Цендера от квадратурной точки (фаза смещения 90°) к точке закрытия до фазы смещения порядка 120° . При дальнейшем смещении модулятора Маха – Цендера к точке закрытия происходит снижение максимального значения нормированной амплитуды квазигармонической генерации. Следовательно, при создании реального оптоэлектронного генератора

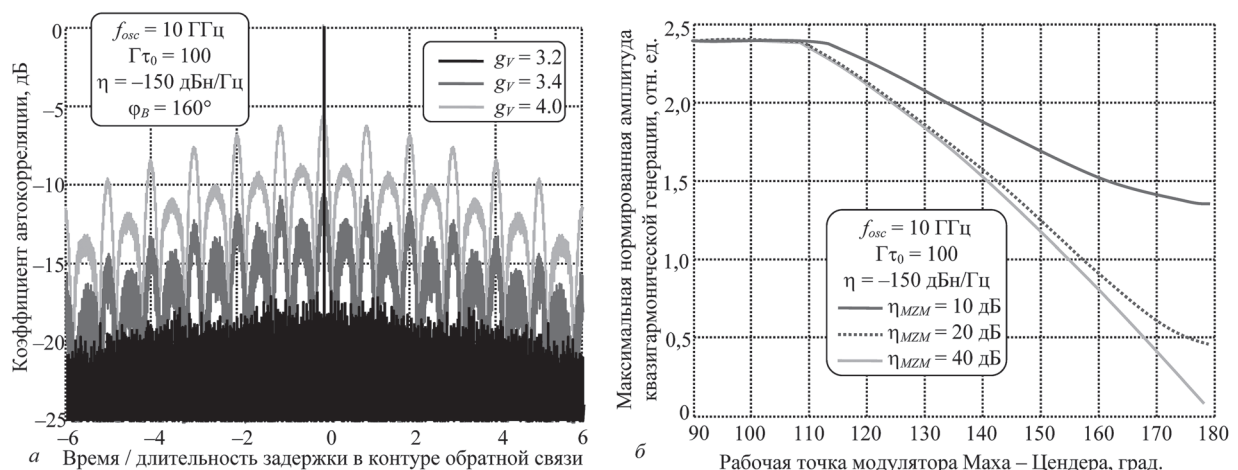


Рис. 4. Выходные характеристики и параметры, характеризующие оптоэлектронный генератор без дополнительных корректирующих волоконно-оптических линий задержки при переходе к режиму динамических нестабильностей генерации: коэффициент автокорреляции амплитуды комплексной огибающей СВЧ-сигнала генерации (а); максимальная нормированная амплитуда квазигармонической генерации в зависимости от конструктивных параметров оптоэлектронного генератора (б)

необходимо выбирать рабочие точки компонентов таким образом, чтобы мощность сигнала генерации не превышала максимального значения, которое определяется из максимальной нормированной амплитуды квазигармонической генерации следующим образом (см. формулы (1) и (2)):

$$P_{\max} = \frac{\kappa_M^2}{\alpha_{mw} \left[\sum_{m=1}^{M-1} \kappa_m \right]^2} \frac{(\mu_{cr} V_{\pi} / \pi)^2}{2R}, \quad (3)$$

где μ_{cr} – максимальная нормированная амплитуды стационарной квазигармонической генерации на входе модулятора Маха – Цендера (см. рис. 4, б).

Следует отметить, что в оптоэлектронных генераторах для обеспечения низкого уровня собственного фазового шума используются модуляторы Маха – Цендера вблизи точки закрытия с фазой смещения в диапазоне от 130° до 165° и коэффициентом контрастности свыше 30 дБ [7–9], поэтому в оптоэлектронном генераторе с оптическим усилением стационарная квазигармоническая генерация устанавливается с амплитудой, не превышающей на входе модулятора Маха – Цендера половины полуволнового напряжения, деленного на π .

Заключение. В данной работе с помощью нелинейной нестационарной модели оптоэлектронного генератора выполнено теоретическое исследование условий установления и поддержания стационарной генерации квазигармонического СВЧ-сигнала в оптоэлектронных генераторах на линиях задержки с оптическим усилением. В результате проведенного моделирования предложен режим включения оптоэлектронного генератора, обеспечивающий установление генерации на частоте максимального усиления. Определено, что использование оптоэлектронного генератора с несколькими дополнительными корректирующими волоконно-оптическими линиями задержки и СВЧ-фильтром с относительно низкой добротностью позволяет получать генерацию квазигармонического сигнала с низким фазовым шумом и уровнем дискретных составляющих в спектре без использования СВЧ-фазовращателей. Показано, что в оптоэлектронном генераторе с оптическим усилением и модулятором Маха – Цендера, смещенным вблизи точки закрытия, существует максимальное значение мощности стационарной квазигармонической генерации, свыше которого наступает режим динамических неустойчивостей и поддержание стационарной генерации квазигармонического сигнала оказывается невозможным.

Список использованной литературы

1. *Oldyniec, M.* RF and microwave oscillator design / M. Oldyniec. – Boston: Artech house, 2002.
2. *Chembo, Y. K.* Nonlinear dynamics and spectral stability of optoelectronic microwave oscillators / Y. K. Chembo, L. Larger, P. Colet // J. Quantum Electronics. – 2008. – Vol. 44, no. 9. – P. 858–866.
3. *Levy, E. C.* Modeling optoelectronic oscillators / E. C. Levy, M. Horowitz, C. R. Menyuk // JOSA B. – 2009. – Vol. 26, N 1. – P. 148–158.
4. *Chembo, Y. K.* Effects of gain and bandwidth on the multimode behavior of optoelectronic microwave oscillators / Y. K. Chembo // Opt. Express. – 2008. – Vol. 16, N 13. – P. 9067–9072.
5. *Banky, T.* Optimum configuration of multiloop optoelectronic oscillators / T. Banky, B. Horvath, T. Berceci // J. Opt. Soc. Am. B (JOSA B). – 2006. – Vol. 23, N 7. – P. 1371–1380.
6. *Кузменков, А. С.* Обзорный анализ современных архитектур синтезаторов частот с ФАПЧ / А. С. Кузменков, А. Е. Поляков, Л. В. Стрыгин // Радиотехника и телекоммуникации. – 2013. – Т. 5, № 3. – С. 121–133.
7. *Микитчук, К. Б.* Численная модель волоконно-оптического оптоэлектронного генератора СВЧ с полностью оптическим усилением / К. Б. Микитчук, С. А. Малышев, А. Л. Чиж // Молодежь в науке – 2013: прил. к журн. «Вес. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук». – 2014. – Ч. 2. – С. 46–51.
8. *Mikitchuk, K.* Numerical nonlinear time-varying model of delay-line optoelectronic oscillator / K. Mikitchuk, A. Chizh, S. Malyshev // Proc. of Intern. conf. on numerical electro-magnetic modelling and optimization for RF, Pavia, May 14–16, 2014. – Pavia, 2014. – P. 1–4.
9. *Микитчук, К. Б.* Обобщенная модель во временной области оптоэлектронного СВЧ-генератора на основе волоконно-оптических линий задержки / К. Б. Микитчук, А. Л. Чиж, С. А. Малышев // Полупроводниковые лазеры и системы на их основе: сб. ст. 9-го Белорус.-Рос. семинара. – Минск: Ин-т физики НАН Беларуси, 2013. – С. 233–236.
10. *Mikitchuk, K.* Analog optical link operating at the gain peak wavelength of an erbium-doped fiber amplifier / K. Mikitchuk, A. Chizh, S. Malyshev // Proc. of 44th European Microwave Conf., Rome, Oct. 5–12, 2014. – Rome, 2014. – P. 679–682.

Поступила в редакцию 10.04.2015

ІНФАРМАТЫКА

УДК 519.714

*Л. Д. ЧЕРЕМИСИНОВА***ПОИСК КРАТЧАЙШЕЙ УСТАНОВОЧНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ СХЕМЫ
С ПАМЯТЬЮ НА D-ТРИГГЕРАХ***Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь,
e-mail: cld@newman.bas-net.by*

Рассматривается задача поиска установочной последовательности наименьшей длины для логической схемы с памятью на D-триггерах. Предлагается метод сведения этой проблемы к задаче булевой выполнимости, которая может быть эффективно решена с помощью SAT-решателей. Метод основан на построении конъюнктивной нормальной формы разрешения комбинационного блока, реализующего функции возбуждения триггеров.

Ключевые слова: тестирование, верификация, логический синтез, автоматизация проектирования.

*L. D. CHEREMISINOVA***SHORTEST SYNCHRONIZING SEQUENCE SEARCH FOR A SEQUENTIAL NETWORK
WITH MEMORY ON D FLIP-FLOPS***United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus,
e-mail: cld@newman.bas-net.by*

The problem under consideration is to find a synchronizing sequence of a minimal size for a logical network having flip-flop primitives of type D as memory elements. A novel method is proposed, which is based on the formulation of the task as the Boolean satisfiability problem solved with any standard SAT-solver. The method is based on forming the conventional conjunctive normal form representation for combinational block, implementing excitation functions of the flip-flops.

Keywords: testing, verification, logic synthesis, design automation.

Введение. Успехи в области микроэлектроники привели к резкому возрастанию сложности проектируемых сверхбольших интегральных схем (СБИС), что значительно усложнило задачу обеспечения правильности их функционирования. По мере усложнения СБИС все более ответственным этапом проектирования становится их диагностирование, обеспечивающее оперативное обнаружение ошибок в устройствах в процессе их работы. Значительная часть времени проектирования цифровой аппаратуры уходит на разработку проверяющих и диагностических тестов.

Традиционный метод анализа цифровой аппаратуры основан на моделировании поведения на последовательности входных воздействий (тестовой последовательности) и сравнении полученных откликов на выходных полюсах устройства с ожидаемыми. Относительно просто выполняется тестирование (и строится тест) для случая комбинационных схем. Наличие элементов памяти у последовательностных схем значительно усложняет их тестирование по сравнению с комбинационными в силу того, что поведение последовательностных схем в значительной степени зависит от их внутреннего состояния (набора состояний элементов памяти), в котором они находятся перед подачей на входы тестовых воздействий.

В промышленности используется множество методов и программно-аппаратных средств автоматизации процесса тестирования, включающих анализ тестируемости устройств, автоматическую

генерацию тестовых наборов (ATPG – automatic test pattern generation), моделирование неисправностей, проектирование тестируемых схем (DFT – design for testability), встроенное самотестирование (BIST – built-in self-test) [1–5]. В настоящее время наиболее перспективным направлением считается развитие методов и средств встроенного самотестирования [1, 3]. Эти методы основаны на использовании встроенных генераторов тестовых последовательностей, получении сигнатуры реакций тестируемой схемы путем сжатия этих последовательностей и сравнении полученной и эталонной сигнатур. Достоинство этого вида тестирования заключается в высокой скорости и сокращении объема сравниваемой информации. Недостатком же является необходимость встраивания дополнительной аппаратуры и возможный пропуск тестовых наборов, на которых проявляется неисправность, за счет их возможного попадания в обратную (исправную) сигнатуру и неполного охвата пространства возможных входных наборов [3, 4]. Это становится проблемой при тестировании устройств, для которых требуется большое покрытие тестами (99 % или выше) [3]. В таких случаях наиболее приемлема технология внешнего тестирования на основе направленной генерации наборов тестовой последовательности.

Перед началом тестирования необходимо провести инициализацию тестируемой последовательностной схемы, заключающуюся в установлении элементов памяти в некоторые известные состояния путем подачи на входы схемы некоторой последовательности воздействий, которая называется установочной [4–6]. Под установочной последовательностью далее понимается последовательность входных воздействий, переводящая схему в некоторое известное определенное состояние (при этом получаемая выходная последовательность может быть любой, так как она зависит от начального состояния схемы).

Обычно задача построения установочных последовательностей рассматривается для случая, когда поведение последовательностной схемы задается в виде дискретного автомата [7, 8]. Обзор существующих методов построения установочных последовательностей для конечных автоматов можно найти в работе [9]. Следует отметить, что поиск кратчайшей установочной последовательности (минимальной длины) представляет собой NP-трудную задачу [10].

В настоящей статье задача построения кратчайшей установочной последовательности рассматривается в более общем виде – для структурного описания последовательностной схемы. Под состоянием схемы понимается набор состояний, в которых находятся ее элементы памяти. Предполагается, что начальное состояние элементов памяти схемы неизвестно. Необходимо найти такую последовательность наборов значений сигналов, подаваемых на входы схемы в следующие друг за другом такты, которая переводит схему в известное состояние и имеет минимальную длину. В работе рассматривается случай, когда схема является синхронной, элементы памяти – D-триггеры, а комбинационные элементы – как простые вентили типа И-НЕ, ИЛИ-НЕ, И, ИЛИ, так и элементы из некоторой библиотеки, реализующие более сложные булевы функции. Следует заметить, что решение этой задачи не всегда существует, но иногда она может быть упрощена: необходимо найти последовательность, устанавливающую один триггер в заданное состояние (0 или 1).

Предлагаемый в данной работе метод основан на сведении задачи поиска установочной последовательности к задаче выполнимости конъюнктивной нормальной формы (КНФ), которая может быть эффективно решена с помощью известных SAT-решателей [11–13], обеспечивающих проверку выполнимости КНФ значительной сложности.

1. Постановка задачи. Последовательностную схему часто представляют в виде двухблочной структуры: блока комбинационной логики и блока триггеров. Первый блок является чисто комбинационной схемой, часть его выходов служит входами блока триггеров. Выходы триггеров, в свою очередь, являются входами комбинационного блока схемы (рис. 1) в следующем такте работы схемы. Таким образом, комбинационный блок имеет два типа входных полюсов: внешние входы последовательностной схемы, значения которых определяются сигналами извне, и внутренние полюсы, значения которых определяются сигналами с выходных полюсов триггеров и задают состояние элементов памяти. Аналогично комбинационный блок имеет и два типа выходных полюсов: внешние выходы последовательностной схемы, значения которых передаются во внешнее окружение последовательностной схемы, и внутренние выходы, значения которых передаются на блок памяти и определяют функции возбуждения триггеров.

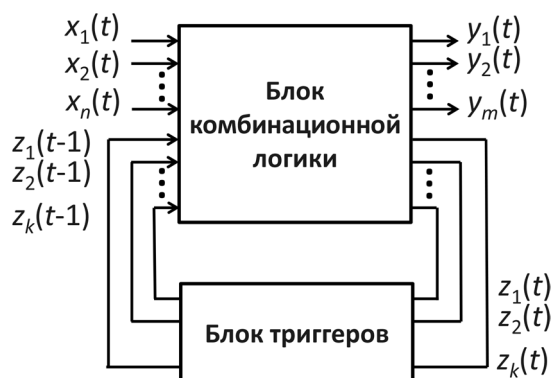


Рис. 1. Структура последовательной схемы

Будем считать далее, что комбинационный блок состоит из элементов, таких как И, ИЛИ, НЕ, И-НЕ, ИЛИ-НЕ, исключающее ИЛИ, либо из более сложных элементов некоторой библиотеки, блок памяти состоит из D-триггеров. Пример такой схемы показан на рис. 2. Задача заключается в инициализации блока памяти, т. е. в поиске установочной последовательности, подача которой на входы схемы гарантированно устанавливает все элементы памяти в известные состояния.

Пусть имеем синхронную схему с n входными полюсами и k D-триггерами. Обозначим через $\mathbf{x}^i = (x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i)$ булев вектор значений входных сигналов, подаваемых на входы схемы в момент времени i . Последовательность входных воздействий $\mathbf{X} = (\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^p)$ называется установочной, если состояние (определяемое состоянием всех триггеров), в которое переходит схема после подачи на ее входы этой последовательности, определяется однозначно вне зависимости от того, в каком состоянии схема была перед началом эксперимента. Число p называется длиной установочной последовательности. Установочная последовательность наименьшей длины называется кратчайшей.

Задача состоит в поиске кратчайшей установочной последовательности для синхронной последовательностной схемы выделенного типа. Следует заметить, что для любой заданной схемы может существовать не одна, а несколько установочных последовательностей (в том числе и кратчайших).

Поведение D-триггера описывается автоматом Мура, который имеет два состояния: обозначаемые через Q и \bar{Q} и соответствующие 1 и 0. Значение сигнала на выходе D-триггера совпадает с состоянием, в котором он находится в соответствующий момент времени. D-триггер выполняет роль элемента задержки сигнала. Если значение функции возбуждения входа триггера в момент времени t равно z , то в следующий момент времени $t+1$ он переходит в состояние z и на его выходе появляется сигнал z . Соответственно поиск установочной последовательности, переводящей D-триггеры в заданные состояния, сводится к поиску входной последовательности, обеспечивающей соответствующие значения функций их возбуждения.

Таким образом, можно ограничиться рассмотрением только комбинационной части схемы, которая ответственна за генерацию функций возбуждения триггеров (рис. 3). Выделенная и рассматриваемая далее схема имеет $n + k$ входов, описываемых переменными $x_1, x_2, \dots, x_n, z_1, z_2, \dots, z_k$

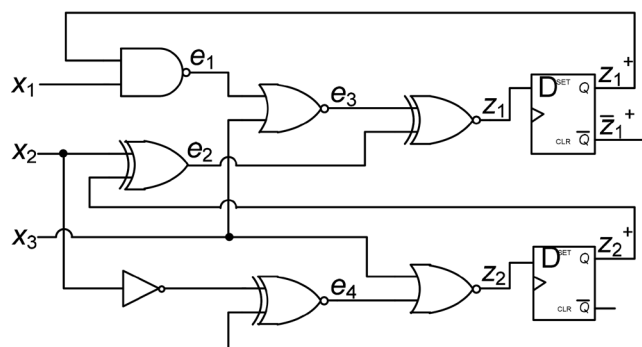


Рис. 2. Пример тестовой последовательностной схемы

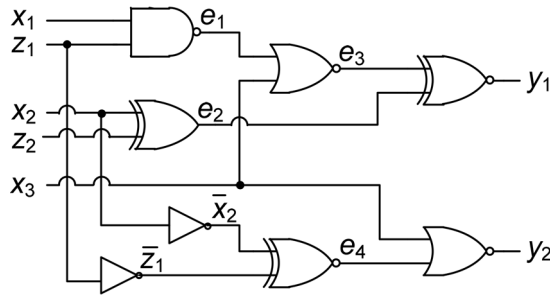


Рис. 3. Комбинационная часть тестовой последовательностной схемы

и соответствующих n входным полюсам схемы и k выходным полюсам триггеров, и k выходов, описываемых переменными y_1, y_2, \dots, y_k и определяющих k функций возбуждения триггеров. Значения выходных переменных y_1, y_2, \dots, y_k рассматриваемой комбинационной схемы будут являться значениями ее входных переменных z_1, z_2, \dots, z_k на следующем такте работы.

2. КНФ разрешения логической схемы. КНФ представляет булеву функцию в виде конъюнкции одного или более дизъюнктов. Каждый дизъюнкт, в свою очередь, является дизъюнкцией одного или более литералов (под литералом понимается булева переменная или ее отрицание). КНФ задает полностью определенную булеву функцию, и каждый из ее дизъюнктов соответствует имплиценте этой функции. Матричное представление КНФ задается троичной матрицей, строки которой соответствуют дизъюнктам, а столбцы – переменным.

Задача проверки выполнимости КНФ заключается в нахождении такого присваивания (может быть частичным) значений ее переменным, которое обращает КНФ в 1. Если такое присваивание удастся найти, то говорят, что КНФ выполнима и полученное присваивание называют выполняющим эту КНФ. Иначе КНФ невыполнима и представляет собой функцию, тождественно равную 0.

Множество равенств типа $x_i = \sigma_i$ (где $\sigma_i \in \{0, 1\}$, $i = \{1, 2, \dots, n\}$) задает присваивание значений компонентам вектора $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Присваивание значений компонентам вектора x может быть полным, если задаются значения всех x_i , или частичным в противном случае. Полное присваивание представляет собой элемент (набор), а частичное – интервал n -мерного булева пространства E^n . Интервал ранга p фиксирует значения p переменных и покрывает 2^{n-p} элементов булева пространства, также его можно представить в виде конъюнкции p литералов.

Структура комбинационной схемы задается направленным ациклическим графом, в котором вершины соответствуют логическим элементам, внешним входам и выходам схемы, а ребра – соединениям элементов и внешних полюсов. Большинство SAT-решателей исходят из представления схемы в виде так называемой КНФ разрешения схемы [14], которая задает все возможные допустимые комбинации сигналов на всех ее $n + l$ полюсах, где n – число входных полюсов схемы, l – число элементов. При построении КНФ разрешения схемы выходные полюсы элементов и сами элементы обозначаются одним и тем же именем. Локальная функция элемента (полюса схемы) y определяет зависимость сигнала на выходе элемента от сигналов на его входах (т. е. задается в терминах локальных входных переменных). Функцией разрешения элемента, реализующего локальную функцию $y = f(z_1, z_2, \dots, z_n)$, называется функция $\varphi(y, f) = y \sim f(z_1, z_2, \dots, z_n)$, задающая все допустимые комбинации сигналов на полюсах этого элемента. Представление функции $\varphi(y, f)$ в форме КНФ дает КНФ разрешения элемента. Ниже приводятся КНФ разрешения некоторых простых элементов:

$$\begin{aligned}
 y = \bar{z} &\rightarrow (z \vee y) (\bar{z} \vee \bar{y}); \\
 y = z_1 \oplus z_2 &\rightarrow (z_1 \vee z_2 \vee \bar{y}) (\bar{z}_1 \vee \bar{z}_2 \vee \bar{y}) (z_1 \vee \bar{z}_2 \vee y) (\bar{z}_1 \vee z_2 \vee y); \\
 y = z_1 z_2 \dots z_n &\rightarrow (z_1 \vee \bar{y}) (z_2 \vee \bar{y}) \dots (z_n \vee \bar{y}) (\bar{z}_1 \vee \bar{z}_2 \vee \dots \vee \bar{z}_n \vee y); \\
 y = \bar{z}_1 \vee \bar{z}_2 \vee \dots \vee \bar{z}_n &\rightarrow (\bar{z}_1 \vee y) (\bar{z}_2 \vee y) \dots (\bar{z}_n \vee y) (z_1 \vee z_2 \vee \dots \vee z_n \vee \bar{y}); \\
 y = \bar{z}_1 \oplus \bar{z}_2 &\rightarrow (z_1 \vee z_2 \vee y) (\bar{z}_1 \vee \bar{z}_2 \vee y) (z_1 \vee \bar{z}_2 \vee \bar{y}) (\bar{z}_1 \vee z_2 \vee \bar{y}); \\
 y = \bar{z}_1 z_2 \dots z_n &\rightarrow (z_1 \vee y) (z_2 \vee y) \dots (z_n \vee y) (\bar{z}_1 \vee \bar{z}_2 \vee \dots \vee \bar{z}_n \vee \bar{y}); \\
 y = \bar{z}_1 \vee \bar{z}_2 \vee \dots \vee \bar{z}_n &\rightarrow (\bar{z}_1 \vee \bar{y}) (\bar{z}_2 \vee \bar{y}) \dots (\bar{z}_n \vee \bar{y}) (z_1 \vee z_2 \vee \dots \vee z_n \vee y).
 \end{aligned}$$

КНФ разрешения всех элементов схемы объединяются операцией конъюнкции в одну КНФ разрешения схемы. Ее размер и сложность данного преобразования линейно зависят от числа логических элементов комбинационной схемы. КНФ разрешения $(z \vee y)$ ($\overline{z \vee y}$) инвертора $y = \overline{z}$ можно опускать, заменяя все вхождения переменной y в КНФ разрешения схемы на \overline{z} . В первом столбце табл. 1 приведена КНФ C^1 разрешения тестовой схемы (см. рис. 3).

Таблица 1. КНФ разрешения комбинационной схемы

№	КНФ C^1												КНФ $C^1_{пр}$ после упрощения C^1											
	z_1^1	z_2^1	x_1^1	x_2^1	x_3^1	e_1^1	e_2^1	e_3^1	e_4^1	y_1^1	y_2^1	z_1^1	z_2^1	x_1^1	x_2^1	x_3^1	e_1^1	e_2^1	e_3^1	e_4^1	y_1^1	y_2^1		
	1												2											
1	-	-	1	-	-	1	-	-	-	-	-	e_1^1	-	-	-	-	-	1	-	-	-	-	-	e_1^1
2	1	-	-	-	-	1	-	-	-	-	-		-	-	0	-	-	-	-	-	-	-	-	
3	0	-	0	-	-	0	-	-	-	-	-		-	-	-	-	-	0	-	0	-	-	-	e_3^1
4	-	1	-	1	-	-	1	-	-	-	-	e_2^1	-	-	-	-	0	-	-	0	-	-	-	
5	-	0	-	0	-	-	1	-	-	-	-		-	-	-	-	1	1	-	1	-	-	-	
6	-	1	-	0	-	-	0	-	-	-	-		-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
7	-	0	-	1	-	-	0	-	-	-	-		-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	
8	-	-	-	-	-	0	-	0	-	-	-	e_3^1	-	-	-	-	1	-	-	-	-	-	-	
9	-	-	-	-	0	-	-	0	-	-	-													
10	-	-	-	-	1	1	-	1	-	-	-													
11	0	-	-	0	-	-	-	-	1	-	-	e_4^1												
12	1	-	-	1	-	-	-	-	1	-	-													
13	0	-	-	1	-	-	-	-	0	-	-													
14	1	-	-	0	-	-	-	-	0	-	-													
15	-	-	-	-	-	-	1	1	-	1	-	y_1^1												
16	-	-	-	-	-	-	0	0	-	1	-													
17	-	-	-	-	-	-	1	0	-	0	-													
18	-	-	-	-	-	-	0	1	-	0	-													
19	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-	0	y_2^1												
20	-	-	-	-	-	-	-	-	0	-	0													
21	-	-	-	-	1	-	-	-	1	-	1													

3. Метод поиска установочной последовательности. Задача булевой выполнимости формулируется относительно двоичных переменных, которые представляют собой ограничения, накладываемые решаемой проблемой. Все присваивания значений переменным, выполняющие КНФ, эквивалентны с точки зрения решения задачи выполнимости. Соответственно в процессе поиска установочной последовательности посредством решения задачи выполнимости КНФ не существует возможности сформулировать эту задачу таким образом, чтобы можно было найти кратчайшую установочную последовательность или сказать, что ее для данной схемы не существует. Можно только сформулировать задачу поиска установочной последовательности некоторой априори заданной длины в виде задачи о выполнимости некоторой КНФ, получить один (или все) набор значений булевых переменных, выполняющий эту КНФ, если КНФ выполнима. Значения входных переменных схемы в выполняющем наборе зададут установочную последовательность. Если КНФ окажется невыполнимой, то установочной последовательности заданной длины не существует.

Таким образом, задача поиска кратчайшей установочной последовательности может быть сформулирована как ряд задач поиска установочных последовательностей возрастающей длины. Процесс заканчивается, когда на некотором шаге будет установлена выполнимость анализируемой КНФ и, соответственно, найдена кратчайшая установочная последовательность. Ясно, что априори должна быть задана и предельная длина искомой последовательности. Далее будет предложен метод, позволяющий сократить вычислительные затраты при поиске кратчайшей установочной

последовательности путем сведения к задаче проверки выполнимости КНФ. Покажем, как построить первую КНФ разрешения C^1 комбинационной части схемы при проверке существования установочной последовательности длины 1, а затем приведем метод итеративной модификации КНФ разрешения C^i для получения КНФ C^{i+1} при необходимости увеличения длины искомой установочной последовательности.

Процесс поиска кратчайшей установочной последовательности начинается с поиска установочной последовательности $X^1 = (x^1)$ длины 1, т. е. последовательности входных воздействий, приводящей к установке триггеров в известное состояние за один такт работы схемы. При построении КНФ разрешения C^1 для комбинационной части схемы предполагается, что аргументы $(x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1)$ соответствуют входным полюсам последовательностной схемы, аргументы $(z_1^1, z_2^1, \dots, z_k^1)$ соответствуют k линиям обратной связи последовательностной схемы (с выходных полюсов триггеров). Предполагается, что значения входных переменных $(z_1^1, z_2^1, \dots, z_k^1)$ комбинационной части схемы перед началом эксперимента по поиску установочной последовательности не определены, т. е.: $z_1^1 = z_2^1 = \dots = z_k^1 = \langle\langle - \rangle\rangle$, так как начальное состояние последовательностной схемы неизвестно.

Если построенная таким образом КНФ разрешения C^1 выполнима, то будет найден выполняющий набор значений всех ее переменных, в частности набор значений переменных $X^1 = (x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1)$, представляющий кратчайшую установочную последовательность (длины 1), и набор значений переменных $Y^1 = (y_1^1, y_2^1, \dots, y_k^1)$, задающий значения выходных функций комбинационного блока или значения функций возбуждения триггеров в ответ на подачу на входы значений из X^1 . Значения функций возбуждения определяют состояние последовательностной схемы в следующий такт ее работы.

Если построенная КНФ разрешения C^1 невыполнима, то длина искомой установочной последовательности увеличивается на 1 и формируется КНФ разрешения C^2 для поиска установочной последовательности $X^2 = (x^1, x^2)$, $Y^2 = (y^1, y^2)$. При этом КНФ C^2 формируется для двухблочной комбинационной схемы (первых два блока на рис. 4). Внутренняя структура обоих блоков – это одна и та же комбинационная часть исходной последовательностной схемы (см. рис. 3). Входными переменными второго блока являются переменные $x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2$, подаваемые на входы последовательностной схемы на втором такте ее работы, и переменные $z_1^2, z_2^2, \dots, z_k^2$, соответствующие линиям обратной связи, их значения совпадают на втором такте со значениями выходных переменных первого блока: $z_1^2 = y_1^1, z_2^2 = y_2^1, \dots, z_k^2 = y_k^1$. Если полученная КНФ разрешения C^2 выполнима, то будет найдена установочная последовательность $X^2 = (x^1, x^2)$ длины 2, выполняющая установку триггеров в известные состояния (определяемые набором $Y^2 = (y^1, y^2)$) за два такта.

Если КНФ C^2 невыполнима, то аналогичным образом производится увеличение числа блоков анализируемой комбинационной схемы (см. рис. 4) и соответственно ищется установочная последовательность $X^3 = (x^1, x^2, x^3)$ длины 3. Процесс увеличения числа блоков комбинационной схемы продолжается до тех пор, пока на некотором шаге не будет найдена установочная последовательность, которая и будет кратчайшей, или число итераций не достигнет наперед заданного предельного числа, и тогда установочная последовательность не будет найдена.

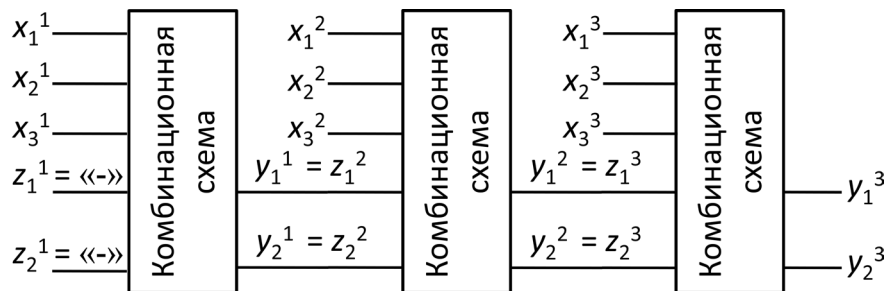


Рис. 4. Увеличение числа блоков комбинационной логики до трех

4. Поиск установочной последовательности посредством сведения к выполнимости КНФ.

Так как переменные $z_1^i, z_2^i, \dots, z_k^i$ КНФ C^i отождествляются с переменными $y_1^{i-1}, y_2^{i-1}, \dots, y_k^{i-1}$, то для упрощения процесса построения $(i+1)$ -й КНФ по i -й (в случае невыполнимости C^i) примем следующий порядок столбцов матричного задания КНФ: $z_1^i, z_2^i, \dots, z_k^i, x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i, e_1^i, e_2^i, \dots, e_l^i, y_1^i, y_2^i, \dots, y_k^i$.

Рассмотрим для примера приведенную выше последовательностную схему (см. рис. 2), для которой найдем кратчайшую установочную последовательность. Согласно изложенному выше методу, построим сначала одноблочную схему (см. рис. 3), приписав всем символам переменных верхний индекс 1. КНФ разрешения C^1 этой схемы определена на 11 аргументах и состоит из 21 дизъюнкта (первый столбец табл. 1).

Перед проверкой выполнимости необходимо заменить определенные значения переменных $z_1^1, z_2^1, \dots, z_k^1$ на неопределенные, так как их значения перед началом эксперимента неизвестны и в выполняющем КНФ наборе им нельзя присвоить определенные значения в отличие от переменных x_1^1, x_2^1, x_3^1 . Замена значений этих переменных упрощает КНФ C^1 : некоторые строки становятся избыточными. Например, три первых дизъюнкта $(x_1^1 \vee e_1^1)(z_1^1 \vee e_1^1)(\bar{z}_1^1 \vee x_1^1 \vee \bar{e}_1^1)$, порождаемых КНФ разрешения элемента e_1^1 , заменяются сначала на три более простых дизъюнкта $(x_1^1 \vee e_1^1)e_1^1(\bar{x}_1^1 \vee \bar{e}_1^1)$, а затем после упрощения – на два: $e_1^1 \bar{x}_1^1$.

Следует заметить, что существуют простейшие элементы, сигналы на выходных полюсах которых имеют неопределенное значение в том случае, если хотя бы один входной сигнал элемента имеет неопределенное значение. Таким элементом является исключающее ИЛИ. Например, четыре дизъюнкта $(z_2^1 \vee x_2^1 \vee e_2^1)(\bar{z}_2^1 \vee \bar{x}_2^1 \vee e_2^1)(z_2^1 \vee \bar{x}_2^1 \vee \bar{e}_1^1)(\bar{z}_2^1 \vee x_2^1 \vee \bar{e}_1^1)$ для КНФ разрешения элемента e_2^1 после удаления переменных z_2^1 заменяются на $(x_2^1 \vee e_2^1)(\bar{x}_2^1 \vee e_2^1)(\bar{x}_2^1 \vee \bar{e}_1^1)(x_2^1 \vee \bar{e}_1^1)$. Эта последняя КНФ невыполнима. Следовательно, можно удалить эти дизъюнкты из КНФ C^1 , распространив неопределенное значение переменной e_2^1 по схеме путем исключения всех вхождений этой переменной в дизъюнкты КНФ C^1 . Это также упростит вид КНФ C^1 . Упрощенное представление $C^1_{пр}$ КНФ разрешения C^1 для одноблочной схемы (см. рис. 3) показано во втором столбце табл. 1.

В нашем случае КНФ $C^1_{пр}$ оказывается невыполнимой. Это означает, что установочной последовательности длины 1 для последовательностной схемы (см. рис. 2) не существует. Если точнее, то в рассматриваемом случае не удалось инициализировать первый D-триггер за один такт, но существует установочная последовательность (в данном случае набор значений входных переменных схемы) длины 1 для второго D-триггера: при $x_3^1 = 1, y_2^1 = 0$. Это следует из того, что КНФ разрешения $C^1_{пр}$ для одноблочной схемы (см. рис. 3), реализующей функцию y_2^1 возбуждения второго триггера, состоит из двух дизъюнктов: $y_2^1 x_3^1$ (как это следует из табл. 1).

Для поиска установочной последовательности длины 2 строим двухблочную схему (рис. 5), состоящую из пары одинаковых последовательно связанных блоков (см. рис. 3), две пары полюсов для которых отождествлены: y_1^1 и z_1^2, y_2^1 и z_2^2 . КНФ разрешения C^2 (первый столбец табл. 2)

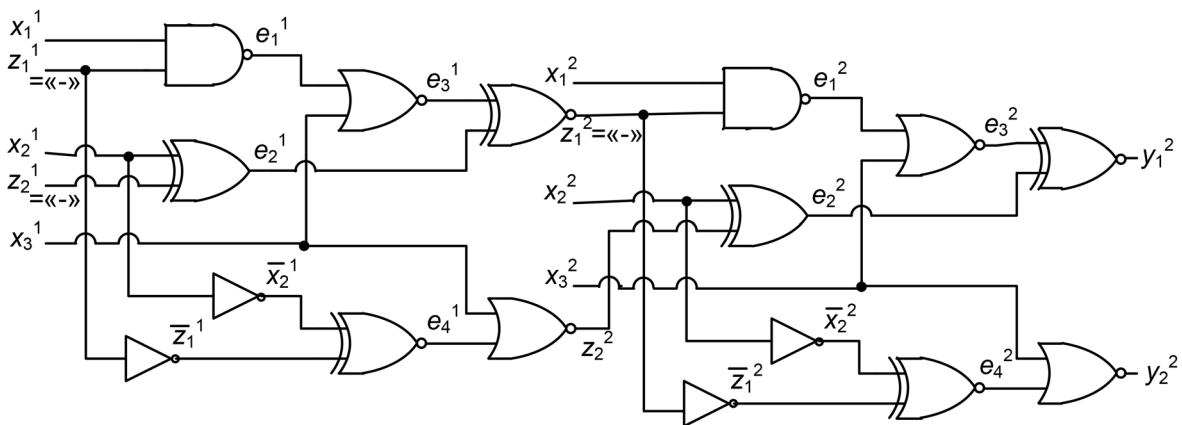


Рис. 5. Двухблочная комбинационная схема для поиска установочной последовательности длины 2 для последовательностной схемы

Для того чтобы инициализировать последовательностную схему (см. рис. 2), необходимо на первом такте подать на ее входы сигналы $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1$ или $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1$, а на втором такте – $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1$. В результате оба D-триггера схемы установятся в состояние 0.

5. Особенности поиска установочной последовательности посредством сведения к выполнимости КНФ. Следует обратить внимание на некоторые особенности поиска установочной последовательности посредством булевой выполнимости. Они обусловлены наличием обратных связей в последовательностной схеме, которые приводят к неопределенности значений тех входных сигналов комбинационной части схемы, которые снимаются с выходов триггеров на следующем такте работы. На первом такте инициализации последовательностной схемы соответствующим переменным не могут быть произвольно присвоены никакие определенные значения, так как их значения определены в процессе предшествующего эксперименту функционирования схемы и неизвестны. Исходя из этого приходится исключать переменные $z_1^1, z_2^1, \dots, z_k^1$ из КНФ разрешения C^1 одноблочной комбинационной схемы. Исключение этих переменных может привести к невыполнимости некоторых фрагментов КНФ C^1 в силу того, что неопределенность значений сигналов на одном или нескольких входных полюсах некоторых элементов может привести к неопределенности сигнала на их выходных полюсах. Характерным примером служит КНФ разрешения элемента типа исключающее ИЛИ. Неопределенность на одном из его входов приводит к появлению неопределенности на его выходе и, соответственно, к невыполнимости КНФ разрешения этого элемента. При построении КНФ разрешения элемента типа исключающее ИЛИ можно сразу не включать его КНФ разрешения в КНФ разрешения C^1 одноблочной комбинационной схемы, перенося неопределенность на выход элемента и присваивая неопределенное значение соответствующей переменной во всех дизъюнктах КНФ C^1 .

Для того чтобы решить означенную проблему в общем случае, можно воспользоваться для анализа выполнимости КНФ разрешения C^i SAT-решателем (например, PicoSAT [11]), который после установления конфликта в процессе анализа на выполнимость выдает путь доказательства, приведший к его выявлению. Получив фрагмент, являющийся причиной невыполнимости КНФ C^i , можно исключить его из КНФ C^i , присвоив неопределенное значение переменной, соответствующей выходному полюсу фрагмента во всех остальных дизъюнктах КНФ.

Заключение. Рассмотрена задача поиска кратчайшей установочной последовательности для синхронной последовательностной схемы с памятью на D-триггерах. Предложен метод сведения этой проблемы к задаче булевой выполнимости КНФ разрешения комбинационной схемы, реализующей функции возбуждения D-триггеров. Метод основан на последовательном увеличении числа однотипных блоков комбинационной схемы, в которой i -й блок соответствует i -у такту работы последовательностной схемы. Процесс увеличения числа блоков комбинационной схемы продолжается до тех пор, пока на некотором шаге не будет получена выполнимая КНФ разрешения, по которой и будет определена кратчайшая установочная последовательность.

Список использованной литературы

1. *Strunz, B.* Design for Testability in Digital Integrated circuits [Electronic resource] / B. Strunz, C. Flanagan, T. Hall; University of Limerick, Ireland. – Mode of access: http://www.cs.colostate.edu/~cs530/digital_testing.pdf. – Date of access: 01.07.2015.
2. Logic BIST: State-of-the-Art and Open Problems [Electronic resource] / N. Li [et al.]. – Mode of access: <http://arxiv.org/pdf/1503.04628.pdf>. – Date of access: 01.07.2015.
3. *Chakrabarty, K.* DFBT: A Design-for-Testability Method Based on Balance Testing [Electronic resource] / K. Chakrabarty, P. Hayes; Department of Electrical Engineering and Computer Science University of Michigan. – Mode of access: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.380.9873&rep=rep1&type=pdf>. – Date of access: 01.07.2015.
4. *Rene, D.* Random testing of digital circuits. Theory and application / D. Rene. – [S. l.]: Marcel Dekker, Inc. 1998.
5. *Crouch, A.* Design-for-Test for Digital IC's and Embedded Core Systems / A. Crouch. – [S. l.]: Prentice Hall, 1999.
6. *Bushnell, M. L.* Essentials of electronic testing for digital, memory and mixed-signal VLSI circuits / M. L. Bushnell, V. D. Agrawal. – [S. l.]: Kluwer Academic Publishers, 2002.
7. *Kohavi, Z.* Switching and Finite Automata Theory / Z. Kohavi. – 2nd ed. – Cambridge [et al.]: Cambridge Univ. Press, 1978.
8. *Gill, A.* Introduction to the Theory of Finite-state Machines / A. Gill. – [S. l.]: McGraw-Hill, 1962.

9. *Lee, D.* Principles and methods of testing finite state machine – a survey / D. Lee, M. Yannakakis // Proc. of the IEEE. – 1996. – Vol. 84 (8). – P. 1090–1123.
10. *Eppstein, D.* Reset sequences for monotonic automata / D. Eppstein // SIAM J. on Computing. – 1990. – Vol. 19, no. 3. – P. 500–510.
11. *Biere, A.* PicoSAT essentials / A. Biere // J. on Satisfiability, Boolean Modeling and Computation. – 2008. – Vol. 4. – P. 75–97.
12. *Mahajan, Y.* Zchaff 2004: an efficient SAT solver / Y. Mahajan, Z. Fu, S. Malik // Theory and Applications of Satisfiability Testing (2004 SAT Solver Competition and QBF Solver Evaluation (Invited Papers)). – Berlin; Heidelberg: Springer, 2005. – P. 360–375.
13. *Goldberg, E.* BerkMin: a fast and robust SAT-solver / E. Goldberg, Y. Novikov // 2002 Design, Automation and Test in Europe Conference and Exposition (DATE 2002), 4–8 March 2002, Paris, France. – [S. l.]: IEEE Computer Society, 2002. – P. 142–149.
14. *Kuehlmann, A.* Combinational and Sequential Equivalence Checking / A. Kuehlmann A., C. A. J. van Eijk. // Logic synthesis and Verification / eds S. Hassoun, T. Sasao, R. K. Brayton. – [S. l.]: Kluwer Academic Publishers, 2002. – P. 343–372.

Поступила в редакцию 25.08.2015