

# ВЕСЦІ

## НАЦЫЯНАЛЬНАЯ АКАДЭМІЯ НАВУК БЕЛАРУСІ

СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК 2015 № 2

# ИЗВЕСТИЯ

## НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ

СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК 2015 № 2

ЗАСНАВАЛЬНІК – НАЦЫЯНАЛЬНАЯ АКАДЭМІЯ НАВУК БЕЛАРУСІ

Часопіс выдаецца са студзеня 1965 г.

Выходзіць чатыры разы ў год

### ЗМЕСТ

#### МАТЭМАТЫКА

Худяков А. П., Янович Л. А. Обобщенные интерполяционные формулы Эрмита – Биркгофа для случая чебышевских систем функций .....	5
Мартынов И. П., Лысюк Е. С. Аналитические свойства решений нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка .....	15
Малюгин В. И., Новопольцев А. Ю. Анализ многомерных статистических моделей с неоднородной структурой в случае скрытой марковской зависимости состояний .....	26
Мисюк В. Р., Пекарский А. А. Сопряженные функции на отрезке и соотношения для их наилучших равномерных полиномиальных приближений .....	37
Беняш-Кривец В. В., Говорушко И. О. Многообразия характеров групп Баумслэга – Солитера .....	41
Баркова Е. А., Забрэйко П. П. Нелокальная теорема о задаче Коши для дифференциальных уравнений дробных порядков в весовых пространствах непрерывных функций .....	48

#### ФІЗІКА

Князев М. А., Блинкова Н. Г. Связь между односолитонными составляющими двухсолитонного решения уравнения Кортевега-де Фриза .....	53
Кисель В. В., Овсюк Е. М., Веко О. В., Редьков В. М. Вклад калибровочных степеней свободы в структуру тензора энергии-импульса безмассового поля со спином 2 .....	58

<b>Павич Т. А., Арабей С. М., Кузнецова Р. Т., Мартынова Е. Г., Аксенова Ю. В., Майер Г. В., Березин М. Б., Соловьев К. Н.</b> Влияние компонентного состава мицеллярного раствора на спектральные свойства и сольubilизацию плюронином производного бордифторид-дипирролилметена .....	64
<b>Пашкевич Г. А., Ропот П. И., Лапчук А. С., Крючин А. А., Прыгун А. В.</b> Подавление спеклов квазиспиральным 2D-дифракционным оптическим элементом на основе бинарной псевдослучайной $M$ -последовательности .....	69
<b>Пилипович В. А., Залесский В. Б., Конойко А. И., Кравченко В. М., Леонова Т. Р.</b> Высокоэффективный амплитудный модулятор неполяризованного излучения с поперечным электрооптическим эффектом .....	77
<b>Каланда Н. А., Ярмолич М. В., Панасевич А. М., Кривченя Д. А.</b> Фазовые превращения при кристаллизации $Sr_2FeMoO_{6-\delta}$ из простых оксидов .....	82
<b>Радюш Ю. В., Олехнович Н. М., Пушкарев А. В.</b> Диэлектрические свойства сегнетоэлектрической керамики системы твердых растворов $(1-x)(NaBi)_{1/2}TiO_3-xBiCoO_3$ .....	86
<b>Мудрый А. В., Живулько В. Д., Гурский А. Л., Якушев М. В., Мартин Р. В., Шафф В. Дж.</b> Радиационные эффекты в тонких гетероэпитаксиальных пленках нитрида индия при электронном облучении .....	90
<b>Гуртовой В. Г., Шелег А. У., Мустафаева С. Н., Керимова Э. М.</b> Диэлектрические характеристики монокристаллов $TlGaS_2$ , допированных $Co$ и $Yb$ .....	98

#### ИНФАРМАТЫКА

<b>Кириенко Н. А., Черемисинов Д. И., Черемисинова Л. Д.</b> Оптимизация многоуровневых представлений логических схем для сокращения площади кристалла СБИС и энергопотребления .....	103
<b>Соболевский П. И., Баханович С. В.</b> Параметризованный тайлинг: определение границ локальных циклов в неполных тайлах.....	112

#### ВУЧОНЫЯ БЕЛАРУСІ

<b>Корзюк Виктор Иванович</b> (К 70-летию со дня рождения) .....	121
<b>Аляхновіч Мікалай Міхайлавіч</b> (Да 80-годдзя з дня нараджэння) .....	123

---

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ 2015 № 2

Серия физико-математических наук

*На русском, белорусском и английском языках*

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь,  
свидетельство о регистрации № 392 от 18.05.2009

---

Комп'ютарная вёрстка *В. Л. Смольскай*

Здадзена ў набор 18.05.2015. Падпісана да друку 10.06.2015. Выход у свет 29.06.2015. Фармат 60×84<sup>1</sup>/<sub>8</sub>. Папера афсетная.

Друк лічбавы. Ум. друк. арк. 14,88. Ул.-выд. арк. 16,4. Тыраж 70 экз. Заказ 96.

Кошт нумару: індывідуальная падпіска – 70 150 руб.; ведамасная падпіска – 169 991 руб.

Выдавец і паліграфічнае выкананне:

Рэспубліканскае ўнітарнае прадпрыемства «Выдавецкі дом «Беларуская навука». Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца, вытворцы, распаўсюджвальніка друкаваных выданняў № 1/18 ад 02.08.2013.

ЛП 02330/455 ад 30.12.2013. Вул. Ф. Скарыны, 40, 220141, г. Мінск.

© Выдавецкі дом «Беларуская навука».

Весці НАН Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук, 2015

# PROCEEDINGS

## OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF BELARUS

---

PHYSIC AND MATHEMATICS SERIES 2015 N 2

---

FOUNDED IS THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF BELARUS

The Journal has been published since January 1965

Issued four times a year

### CONTENTS

#### MATHEMATICS

<b>Hudyakov A. P., Yanovich L. A.</b> Generalized interpolation formulas of Hermite – Birkhoff type for the case of Chebyshev systems of functions .....	5
<b>Martynov I. P., Lysiuk A. S.</b> Analytical properties of the solutions of a fourth-order nonlinear ordinary differential equation .....	15
<b>Malugin V. I., Novopoltsev A. Yu.</b> Analysis of multivariate statistical models with heterogeneous structure in the case of hidden Markov dependence of the states .....	26
<b>Misiuk V. R., Pekarskii A. A.</b> Conjugate functions on a segment and relations for their best uniform polynomial approximations .....	37
<b>Beniash-Kryvets V. V., Govorushko I. O.</b> Character varieties of Baumslag – Solitar groups .....	41
<b>Barkova E. A., Zabreiko P. P.</b> Nonlocal theorems on the Cauchy problem for differential equations of fractional order in weighted spaces of continuous functions .....	48

#### PHYSICS

<b>Knyazev M. A., Blinkova N. G.</b> Relation between one-soliton components of two-soliton solution for the Korteweg-de Vries equation .....	53
<b>Kisel V. V., Ovsyuk E. M., Veko O. V., Red'kov V. M.</b> Contribution of gauge degrees of freedom to the spin 2 field energy-momentum tensor .....	58
<b>Pavich T. A., Arabe S. M., Kuznetsova R. T., Martianova E. G., Aksenova Y. V., Mayer G. V., Berezin M. B., Solovyov K. N.</b> Influence of component proportions of micellar solutions on the spectral properties and solubilization by Pluronic of a borondifluoride dipyrromethene derivative .....	64
<b>Pashkevich G. A., Ropot P. I., Lapchuk A. S., Kryuchin A. A., Prygun A. V.</b> Speckle suppression by a quasi-spiral 2D diffractive optical element based on the binary pseudorandom $M$ -sequence .....	69
<b>Pilipovich V. A., Zalessky V. B., Konoiko A. I., Kravchenko V. M., Leonova T. R.</b> High-performance amplitude modulator of non-polarized radiation with the transverse electrooptical effect .....	77

<b>Kalanda M. A., Yarmolich M. V., Panasevich A. M., Kryuchenia D. A.</b> Phase transformations during crystallization of $S_2FeMoO_{6-\delta}$ from simple oxides .....	82
<b>Radyush Yu. V., Olekhnovich N. M., Pushkarou A. V.</b> Dielectric properties of $(1-x)(NaBi)_{1/2}TiO_3-xBiCoO_3$ perovskite ferroelectric ceramic .....	86
<b>Mudryi A. V., Zhivulko V. D., Gurskii A. L., Yakushev M. V., Martin R. W., Schaff W. J.</b> Radiation effects in thin heteroepitaxial indium nitride films under electron irradiation .....	90
<b>Hurtavy V. G., Sheleg A. U., Mustafaeva S. N., Kerimova E. M.</b> Dielectric properties of Co- and Yb-doped single crystals of $TlGaS_2$ .....	98

#### INFORMATICS

<b>Kirienko N. A., Cheremisinov D. I., Cheremisinova L. D.</b> Optimization of multi-level representations of logic circuits to reduce a VLSI chip area and power consumption .....	103
<b>Sobolevsky P. I., Bakhanovich S. V.</b> Parameterized tiling: the definition of the boundaries of local loops in partial tiles .....	112

#### SCIENTISTS OF BELARUS

<b>Korzyuk Viktor Ivanovich</b> (On the 70 <sup>th</sup> anniversary of his birth) .....	121
<b>Olekhnovich Nikolai Mikhailovich</b> (On the 80 <sup>th</sup> anniversary of his birthday) .....	123

## МАТЭМАТЫКА

УДК 519.65

А. П. ХУДЯКОВ<sup>1</sup>, Л. А. ЯНОВИЧ<sup>2</sup>ОБОБЩЕННЫЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ФОРМУЛЫ ЭРМИТА – БИРКГОФА  
ДЛЯ СЛУЧАЯ ЧЕБЫШЕВСКИХ СИСТЕМ ФУНКЦИЙ<sup>1</sup>Брестский государственный университет им. А. С. Пушкина<sup>2</sup>Институт математики НАН Беларуси

(Поступило в редакцию 24.04.2015)

**Введение.** Отличием обобщенного интерполирования Эрмита – Биркгофа от общепринятого является требование совпадения в узлах не производных интерполируемой функции и интерполяционного многочлена, а некоторых дифференциальных или другого вида операторов. Такого типа формулы построены и исследованы [1, 2] для тригонометрических, двух видов рациональных и экспоненциальных функций. Эти формулы обобщены на случай функций матричного аргумента [3–5]. В данной работе рассмотрена одна из интерполяционных задач Эрмита – Биркгофа типа для чебышевских систем общего вида и дается ее решение. Приводятся некоторые частные случаи.

Пусть задана некоторая чебышевская система функций  $\varphi_k(x) \in C^{n+1}(T)$  ( $k = 0, 1, \dots, n+1$ ),  $x \in T \subseteq \mathbb{R}$ , где  $C^{n+1}(T)$  – пространство непрерывно дифференцируемых  $n+1$  раз на отрезке  $T$  функций. Введем также функции  $g_n(\cdot; \cdot)$ , заданные посредством определителей

$$g_n(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n; x_0, x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_0(x_1) & \dots & \varphi_0(x_n) \\ \varphi_1(x_0) & \varphi_1(x_1) & \dots & \varphi_1(x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_n(x_0) & \varphi_n(x_1) & \dots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix}, \quad (1)$$

где  $x_k \in T$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ).

Очевидно, что при перестановке местами любых двух аргументов-точек  $x_i$  и  $x_j$  ( $i \neq j$ ) или аргументов-функций  $\varphi_l$  и  $\varphi_m$  ( $l \neq m$ ) функция (1) меняет знак на противоположный, а если хотя бы два числовых аргумента и (или) аргумента-функции одинаковы, то  $g_n(\cdot; \cdot) = 0$ . Это следует из свойств определителя.

Введем обозначение  $\tilde{g}_n = g_n(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n; x_0, x_1, \dots, x_n)$  и многочлен

$$L_n(x) = \frac{(-1)^n}{\tilde{g}_n} \sum_{k=0}^n (-1)^k g_n(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n; x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n, x) f(x_k), \quad (2)$$

удовлетворяющий интерполяционным условиям

$$L_n(x_i) = f(x_i) \quad (i = 0, 1, \dots, n), \quad (3)$$

который существует [6] и он единственен.

**Интерполяционные формулы Эрмита – Биркгофа по произвольной чебышевской системе функций.** Пусть  $f(x) \in C^{n+1}(T)$ . Рассмотрим дифференциальный оператор

$$D_{n+1}f(x) = W_n^{-1}(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n; x)W_{n+1}(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n, f; x), \quad (4)$$

где  $W_n(\cdot; x)$  и  $W_{n+1}(\cdot; x)$  – вронскианы для указанных в качестве аргументов систем функций. Очевидно, что функции  $\varphi_k(x)$  являются решениями дифференциального уравнения  $D_{n+1}f(x) = 0$ , т. е.

$$D_{n+1}\varphi_k(x) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (5)$$

Эквивалентное [6] определение оператора (4) имеет вид

$$D_{n+1}f(x) = (D - b_n(x))(D - b_{n-1}(x)) \cdots (D - b_0(x))f(x) = (D - b_n(x))D_n f(x), \quad D = \frac{d}{dx}, \quad (6)$$

где  $b_0(x) = \frac{\varphi'_0(x)}{\varphi_0(x)}$ ,  $b_k(x) = \frac{(D_k \varphi_k(x))'}{D_k \varphi_k(x)}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ).

Методом математической индукции при  $k = 0, 1, \dots, n$  можно показать, что здесь  $b_k(x) \in C^{n-k}(T)$  и  $D_{k+1}f(x) \in C^{n-k}(T)$ .

**Теорема 1.** *Интерполяционный многочлен*

$$\tilde{L}_{n+1}(x) = L_n(x) + \frac{\Omega_{n+1}(x)D_{n+1}(f; x_j)}{D_{n+1}(\varphi_{n+1}; x_j)}, \quad (7)$$

где  $L_n(x)$  определяется формулой (2),

$$\Omega_{n+1}(x) = \frac{1}{\tilde{g}_n} g_{n+1}(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n+1}; x_0, x_1, \dots, x_n, x), \quad D_{n+1}(\varphi_{n+1}; x_j) \neq 0,$$

удовлетворяет интерполяционным условиям

$$\tilde{L}_{n+1}(x_i) = f(x_i) \quad (i = 0, 1, \dots, n); \quad D_{n+1}(\tilde{L}_{n+1}; x_j) = D_{n+1}(f; x_j) \quad (8)$$

и инвариантен относительно многочленов вида

$$P_{n+1}(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \dots + c_{n+1}\varphi_{n+1}(x), \quad (9)$$

где  $c_0, c_1, \dots, c_{n+1}$  – произвольные действительные числа.

**Доказательство.** В силу свойств функции (1) имеем  $g_{n+1}(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n+1}; x_0, x_1, \dots, x_n, x_i) = 0$  при  $i = 0, 1, \dots, n$ , поэтому для этих же точек  $x_i$  имеем  $\Omega_{n+1}(x_i) = 0$ . Учитывая далее (3), получим, что первая часть интерполяционных условий (8) выполняется.

Раскладывая функции  $g_n(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n; x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n, x)$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) и  $g_{n+1}(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n+1}; x_0, x_1, \dots, x_n, x)$  по элементам последнего столбца соответствующих определителей, нетрудно показать, что многочлен  $\tilde{L}_{n+1}(x)$  можно представить в виде

$$\tilde{L}_{n+1}(x) = \frac{D_{n+1}(f; x_j)}{D_{n+1}(\varphi_{n+1}; x_j)}\varphi_{n+1}(x) + \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(x),$$

где  $a_0, a_1, \dots, a_n$  – некоторые действительные числа.

Из (5) в силу линейности оператора  $D_{n+1}f(x)$  будем иметь  $D_{n+1}\tilde{L}_{n+1}(x) = \frac{D_{n+1}(f; x_j)}{D_{n+1}(\varphi_{n+1}; x_j)}D_{n+1}\varphi_{n+1}(x)$ , откуда при  $x = x_j$  следует выполнение последнего равенства в (8).

Докажем инвариантность формулы (7) относительно многочленов вида (9). Полином  $L_n(x)$  можно представить в виде

$$L_n(x) = -\frac{1}{\tilde{g}_n} \begin{vmatrix} \varphi_0(x_0) & \dots & \varphi_0(x_n) & \varphi_0(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \varphi_n(x_0) & \dots & \varphi_n(x_n) & \varphi_n(x) \\ f(x_0) & \dots & f(x_n) & 0 \end{vmatrix}.$$

При  $f(x) = \varphi_k(x)$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) будем иметь

$$L_n(\varphi_k; x) = -\frac{1}{\tilde{g}_n} \begin{vmatrix} \varphi_0(x_0) & \dots & \varphi_0(x_n) & \varphi_0(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \varphi_n(x_0) & \dots & \varphi_n(x_n) & \varphi_n(x) \\ \varphi_k(x_0) & \dots & \varphi_k(x_n) & 0 \end{vmatrix}. \quad (10)$$

Раскладывая правую часть (10) по элементам последнего столбца, получим

$$L_n(\varphi_k; x) = \frac{(-1)^n}{\tilde{g}_n} \sum_{i=0}^n (-1)^i g_n(\varphi_0, \dots, \varphi_{i-1}, \varphi_{i+1}, \dots, \varphi_n, \varphi_k; x_0, x_1, \dots, x_n) \varphi_i(x). \quad (11)$$

При  $i \neq k$  определители в (11) равны нулю, так как в каждом из них есть две одинаковых строки. В определителе при  $i = k$ , переместив последнюю строку таким образом, чтобы она оказалась между строками с номерами  $k$  и  $k+1$ , будем иметь

$$L_n(\varphi_k; x) = \frac{(-1)^{n+k}}{\tilde{g}_n} (-1)^{n-k} g_n(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n; x_0, x_1, \dots, x_n) \varphi_k(x) = \varphi_k(x).$$

И так как  $D_{n+1}\varphi_k(x) \equiv 0$  при  $k = 0, 1, \dots, n$ , получим

$$\tilde{L}_{n+1}(\varphi_k; x) \equiv \varphi_k(x).$$

Если  $f(x) = \varphi_{n+1}(x)$ , то

$$\begin{aligned} \tilde{L}_{n+1}(x) = L_n(x) + \Omega_{n+1}(x) &= -\frac{1}{\tilde{g}_n} \varphi \begin{vmatrix} \varphi_0(x_0) & \dots & \varphi_0(x_n) & \varphi_0(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \varphi_n(x_0) & \dots & \varphi_n(x_n) & \varphi_n(x) \\ \varphi_{n+1}(x_0) & \dots & \varphi_{n+1}(x_n) & 0 \end{vmatrix} + \\ + \frac{1}{\tilde{g}_n} \begin{vmatrix} \varphi_0(x_0) & \dots & \varphi_0(x_n) & \varphi_0(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \varphi_n(x_0) & \dots & \varphi_n(x_n) & \varphi_n(x) \\ \varphi_{n+1}(x_0) & \dots & \varphi_{n+1}(x_n) & \varphi_{n+1}(x) \end{vmatrix} &= \frac{1}{\tilde{g}_n} \begin{vmatrix} \varphi_0(x_0) & \dots & \varphi_0(x_n) & \varphi_0(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \varphi_n(x_0) & \dots & \varphi_n(x_n) & \varphi_n(x) \\ 0 & \dots & 0 & \varphi_{n+1}(x) \end{vmatrix} = \frac{1}{\tilde{g}_n} \varphi_{n+1}(x) \tilde{g}_n = \varphi_{n+1}(x). \end{aligned}$$

В силу линейности оператора (4) и того, что значения функции  $f(x)$  входят в (7) линейно, формула (7) точна для многочленов вида (9). Теорема 1 доказана.

**Представление погрешности интерполирования.** Построим представление погрешности для формулы (7). Введем функцию  $\tilde{\Omega}_{n+2}(x)$ :

$$\tilde{\Omega}_{n+2}(x) = \frac{1}{\tilde{g}_n D_{n+1}(\varphi_{n+1}; x_j)} \begin{vmatrix} \varphi_0(x_0) & \dots & \varphi_0(x_n) & 0 & \varphi_0(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_n(x_0) & \dots & \varphi_n(x_n) & 0 & \varphi_n(x) \\ \varphi_{n+1}(x_0) & \dots & \varphi_{n+1}(x_n) & D_{n+1}(\varphi_{n+1}; x_j) & \varphi_{n+1}(x) \\ \varphi_{n+2}(x_0) & \dots & \varphi_{n+2}(x_n) & D_{n+2}(\varphi_{n+2}; x_j) & \varphi_{n+2}(x) \end{vmatrix}.$$

Нетрудно заметить, что функция  $\tilde{\Omega}_{n+2}(x)$  удовлетворяет условиям

$$\tilde{\Omega}_{n+2}(x_i) = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, n); \quad D_{n+1}(\tilde{\Omega}_{n+2}; x_j) = 0.$$

Дополним систему базисных функций функцией  $\varphi_{n+2}(x)$  и доопределим оператор  $D_{n+2}f(x)$  по формуле (6). Будем предполагать, что  $\varphi_k(x) \in C^{n+2}(T)$ ,  $k = 0, 1, \dots, n+2$ . Тогда  $b_k(x) \in C^{n-k+1}(T)$  и  $D_{k+1}f(x) \in C^{n-k+1}(T)$ .

**Теорема 2.** *Если функция  $f(x)$  дифференцируема  $n+2$  раз в интервале  $T$ , то остаточный член  $R_{n+1}(x)$  формулы (7) имеет вид*

$$R_{n+1}(x) = f(x) - \tilde{L}_{n+1}(x) = \frac{D_{n+2}(f; \xi)}{D_{n+2}(\varphi_{n+2}; \xi)} \tilde{\Omega}_{n+2}(x),$$

где  $\xi \in T$ .

**Доказательство.** Пусть  $x \in T$ ,  $x \neq x_k$  ( $k = \overline{0, n}$ ). Обозначим  $K = \frac{f(x) - \tilde{L}_{n+1}(x)}{\tilde{\Omega}_{n+2}(x)}$  и рассмотрим функцию  $\psi(t) = f(t) - \tilde{L}_{n+1}(t) - K\tilde{\Omega}_{n+2}(t)$ , тогда

$$D_{n+1}\psi(t) = D_{n+1}f(t) - D_{n+1}\tilde{L}_{n+1}(t) - KD_{n+1}\tilde{\Omega}_{n+2}(t).$$

Из приведенных выше рассуждений следует, что  $\psi(t) \in C^{n+2}(T)$ , а  $D_{n+1}\psi(t) \in C^1(T)$ . Так как  $\psi(x_0) = \psi(x_1) = \dots = \psi(x_n) = \psi(x) = 0$ , то по обобщению теоремы Ролля [6] функция  $D_{n+1}\psi(t)$  имеет по крайней мере один нуль  $\eta$  в интервале  $T$ :  $D_{n+1}(\psi; \eta) = 0$ . Нетрудно заметить, что  $D_{n+1}(\tilde{\Omega}_{n+2}; x_j) = 0$ . Учитывая, кроме этого, последнее интерполяционное условие в (8), будем иметь  $D_{n+1}(\psi; x_j) = 0$ .

Функция  $D_{n+1}\psi(t)$  на интервале  $T$  обращается в нуль по крайней мере два раза с учетом кратности. Тогда также по обобщению теоремы Ролля функция  $D_{n+2}\psi(t)$  обращается в нуль по крайней мере один раз:  $D_{n+2}(\psi; \xi) = 0$ . Вычислим  $D_{n+2}\psi(t)$ :

$$D_{n+2}\psi(t) = D_{n+2}f(t) - D_{n+2}\tilde{L}_{n+1}(t) - KD_{n+2}\tilde{\Omega}_{n+2}(t) = D_{n+2}f(t) - KD_{n+2}\varphi_{n+2}(t).$$

Тогда  $D_{n+2}f(\xi) - KD_{n+2}\varphi_{n+2}(\xi) = 0$ , откуда  $K = \frac{D_{n+2}(f; \xi)}{D_{n+2}(\varphi_{n+2}; \xi)}$ . Следовательно

$$f(x) - \tilde{L}_{n+1}(x) = \frac{D_{n+2}(f; \xi)}{D_{n+2}(\varphi_{n+2}; \xi)} \tilde{\Omega}_{n+2}(x),$$

где  $\xi \in T$ . Теорема 2 доказана.

Введем обозначения. Пусть  $M_{n+2} = \max_{x \in T} |D_{n+2}f(x)|$ ,  $B_{n+2} = \min_{x \in T} |D_{n+2}\varphi_{n+2}(x)|$ ,  $C_{n+2} = \max_{x \in T} |\tilde{\Omega}_{n+2}(x)|$ . Справедлива оценка погрешности

$$|f(x) - \tilde{L}_{n+1}(x)| \leq \frac{M_{n+2}}{B_{n+2}} C_{n+2}.$$

Рассмотрим частный случай формулы (7) при  $n = 1$ . Многочлен  $\tilde{L}_2(x)$  в данном случае имеет вид

$$\tilde{L}_2(x) = L_1(x) + \frac{\Omega_2(x)D_2(f; x_j)}{D_2(\varphi_2; x_j)}, \quad (12)$$

где

$$L_1(x) = \frac{(\varphi_0(x)\varphi_1(x_1) - \varphi_0(x_1)\varphi_1(x))f(x_0) - (\varphi_0(x)\varphi_1(x_0) - \varphi_0(x_0)\varphi_1(x))f(x_1)}{\varphi_0(x_0)\varphi_1(x_1) - \varphi_0(x_1)\varphi_1(x_0)},$$

$$\Omega_2(x) = \varphi_2(x) - \frac{(\varphi_0(x)\varphi_1(x_1) - \varphi_0(x_1)\varphi_1(x))\varphi_2(x_0) - (\varphi_0(x)\varphi_1(x_0) - \varphi_0(x_0)\varphi_1(x))\varphi_2(x_1)}{\varphi_0(x_0)\varphi_1(x_1) - \varphi_0(x_1)\varphi_1(x_0)},$$

а дифференциальный оператор  $D_2f(x)$  задается формулой

$$D_2f(x) = \frac{1}{\varphi_0(x)\varphi_1'(x) - \varphi_0'(x)\varphi_1(x)} \begin{vmatrix} \varphi_0(x) & \varphi_1(x) & f(x) \\ \varphi_0'(x) & \varphi_1'(x) & f'(x) \\ \varphi_0''(x) & \varphi_1''(x) & f''(x) \end{vmatrix} =$$

$$= f''(x) - \frac{(\varphi_0(x)\varphi_1''(x) - \varphi_0''(x)\varphi_1(x))f'(x) - (\varphi_0'(x)\varphi_1''(x) - \varphi_0''(x)\varphi_1'(x))f(x)}{\varphi_0(x)\varphi_1'(x) - \varphi_0'(x)\varphi_1(x)}. \quad (13)$$

Нетрудно проверить, что для (12) выполняются интерполяционные условия  $\tilde{L}_2(x_i) = f(x_i)$  ( $i=0,1$ );  $D_2(\tilde{L}_2; x_j) = D_2(f; x_j)$ .

Получим выражение для оператора  $D_2f(x)$ , используя формулу (6)

$$D_2f(x) = (D - b_1(x))(D - b_0(x))f(x) = (D - b_1(x))(f'(x) - b_0(x)f(x)) =$$

$$= f''(x) - (b_0(x) + b_1(x))f'(x) + (b_0(x)b_1(x) - b_0'(x))f(x). \quad (14)$$

Далее, так как

$$b_0(x) = \frac{\varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)}, \quad b_1(x) = \frac{(D_1\varphi_1(x))'}{D_1\varphi_1(x)} = \frac{(\varphi_1'(x) - b_0(x)\varphi_1(x))'}{\varphi_1'(x) - b_0(x)\varphi_1(x)} =$$

$$= \frac{\varphi_1''(x)\varphi_0^2(x) - \varphi_0''(x)\varphi_0(x)\varphi_1(x) + \varphi_0'(x)\varphi_0'(x)\varphi_1(x) - \varphi_0'(x)\varphi_1'(x)\varphi_0(x)}{\varphi_0(x)(\varphi_1'(x)\varphi_0(x) - \varphi_0'(x)\varphi_1(x))},$$

то

$$b_0(x) + b_1(x) = \frac{\varphi_0(x)\varphi_1''(x) - \varphi_0''(x)\varphi_1(x)}{\varphi_0(x)\varphi_1'(x) - \varphi_0'(x)\varphi_1(x)}, \quad (15)$$

$$b_0(x)b_1(x) - b_0'(x) = \frac{\varphi_0'(x)\varphi_1''(x) - \varphi_0''(x)\varphi_1'(x)}{\varphi_0(x)\varphi_1'(x) - \varphi_0'(x)\varphi_1(x)}. \quad (16)$$

Подставляя (15), (16) в (14), получим (13).

**Тригонометрический вариант формулы (7).** Рассмотрим частный случай формулы (7) при  $\varphi_0(x) = 1$ ,  $\varphi_{2k-1}(x) = \sin kx$ ,  $\varphi_{2k}(x) = \cos kx$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . Дифференциальный оператор (4) в этом случае задается равенством

$$D_{2n+1}f(x) = W_{2n}^{-1}(1, \sin x, \cos x, \dots, \sin nx, \cos nx; x)W_{2n+1}(1, \sin x, \cos x, \dots, \sin nx, \cos nx, f(x); x), \quad (17)$$

где  $W_{2n}(\cdot; x)$  и  $W_{2n+1}(\cdot; x)$  – вронскианы для указанных систем функций.

Рассмотрим оператор

$$D_{2n+1}f(x) = (D - n \operatorname{tg}(nx))(D + n \operatorname{tg}(nx)) \cdots (D - \operatorname{tg} x)(D + \operatorname{tg} x)Df(x), \quad D = \frac{d}{dx}, \quad (18)$$

заданный в форме (6). Здесь  $b_0(x) = 0$ ,  $b_{2k-1}(x) = -k \operatorname{tg} kx$ ,  $b_{2k}(x) = k \operatorname{tg} kx$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . Далее так как

$$(D - k \operatorname{tg} kx)(D + k \operatorname{tg} kx)f(x) = f''(x) - k \operatorname{tg} kx f'(x) + (k \operatorname{tg} kx f(x))' - k^2 \operatorname{tg}^2 kx f(x) =$$

$$= f''(x) + k^2 f(x) = (D^2 + k^2)f(x),$$

то (18) можно записать в более простой форме

$$D_{2n+1}f(x) = (D^2 + n^2)(D^2 + (n-1)^2) \cdots (D^2 + 1^2)Df(x), \quad D = \frac{d}{dx}. \quad (19)$$

Оператор (19) является перестановочным, поэтому нетрудно показать, что функции  $1, \sin x, \cos x, \dots, \sin nx, \cos nx$  являются решениями соответствующего дифференциального уравнения

$$D_{2n+1}f(x) = 0. \quad (20)$$

Очевидно, что эту же фундаментальную систему решений имеет уравнение (20), где оператор  $D_{2n+1}f(x)$  определяется формулой (17). Так как оба линейных однородных дифференциальных уравнения имеют общую фундаментальную систему решений, то операторы (17) и (19) тождественны между собой [7, с. 190].

Многочлен  $L_{2n}(x)$  в данном случае принимает вид

$$L_{2n}(x) = H_n(x) = -\frac{1}{\tilde{g}_{2n}} \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \sin x_0 & \cdots & \sin x_{2n} & \sin x \\ \cos x_0 & \cdots & \cos x_{2n} & \cos x \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sin nx_0 & \cdots & \sin nx_{2n} & \sin nx \\ \cos nx_0 & \cdots & \cos nx_{2n} & \cos nx \\ f(x_0) & \cdots & f(x_{2n}) & 0 \end{vmatrix}, \quad (21)$$

где  $\tilde{g}_{2n} = g_{2n}(1, \sin x, \cos x, \dots, \sin nx, \cos nx; x_0, x_1, \dots, x_{2n})$ .

Тригонометрический интерполяционный многочлен

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{\sin \frac{x-x_0}{2} \cdots \sin \frac{x-x_{k-1}}{2} \sin \frac{x-x_{k+1}}{2} \cdots \sin \frac{x-x_{2n}}{2}}{\sin \frac{x_k-x_0}{2} \cdots \sin \frac{x_k-x_{k-1}}{2} \sin \frac{x_k-x_{k+1}}{2} \cdots \sin \frac{x_k-x_{2n}}{2}} f(x_k), \quad (22)$$

совпадает с (21), так как оба многочлена удовлетворяют лагранжевым интерполяционным условиям и имеют степень не выше  $n$  [8, с. 18, 124].

По определению

$$\Omega_{2n+1}(x) = \frac{1}{\tilde{g}_{2n}} g_{2n+1}(1, \sin x, \cos x, \dots, \sin(n+1)x; x_0, x_1, \dots, x_{2n}, x). \quad (23)$$

Тригонометрический многочлен (23) степени не выше  $n+1$  имеет нулями точки  $x_0, x_1, \dots, x_{2n}$ , следовательно, он представим в виде

$$\Omega_{2n}(x) = \left( \alpha \sin \frac{x}{2} + \beta \cos \frac{x}{2} \right) \prod_{k=0}^{2n} \sin \frac{x-x_k}{2}, \quad \alpha^2 + \beta^2 \neq 0. \quad (24)$$

*Л е м м а. Справедливо тригонометрическое тождество*

$$\prod_{k=0}^{2n} \sin \frac{x-x_k}{2} = \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \sin \frac{1}{2}((2n+1)x - (x_0 + x_1 + \dots + x_{2n})) + \tilde{T}_{\frac{2n-1}{2}}(x), \quad (25)$$

где  $\tilde{T}_{\frac{2n-1}{2}}(x)$  – тригонометрический полином полуцелого порядка  $\frac{2n-1}{2}$ .

*Доказательство.* Применим метод математической индукции. При  $n=1$  имеем

$$\begin{aligned} \sin \frac{x-x_0}{2} \sin \frac{x-x_1}{2} \sin \frac{x-x_2}{2} &= \frac{1}{2} \sin \frac{x-x_0}{2} \times \\ &\times \left( \cos \frac{x_2-x_1}{2} - \cos \frac{1}{2}(2x - (x_1 + x_2)) \right) = -\frac{1}{4} \sin \frac{1}{2}(3x - (x_0 + x_1 + x_2)) + T_{\frac{1}{2}}(x). \end{aligned}$$

Предположим, что соотношение (25) верно при  $n=m$  и покажем, что оно справедливо также и при  $n=m+1$

$$\prod_{k=0}^{2m+2} \sin \frac{x-x_k}{2} = \left( \frac{(-1)^m}{2^{2m}} \sin \frac{1}{2}((2m+1)x - (x_0 + x_1 + \dots + x_{2m})) + \tilde{T}_{\frac{2m-1}{2}}(x) \right) \times$$

$$\begin{aligned} & \times \frac{1}{2} \left( \cos \frac{x_{2m+2} - x_{2m+1}}{2} - \cos \frac{1}{2} (2x - (x_{2m+1} + x_{2m+2})) \right) = \\ & = \frac{(-1)^{m+1}}{2^{2m+2}} \left( \sin \frac{1}{2} ((2m+3)x - (x_0 + x_1 + \dots + x_{2m+2})) + \tilde{T}_{\frac{2m+1}{2}}(x) \right). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Определим значения  $\alpha$  и  $\beta$  в (24). Раскладывая (23) по элементам первого столбца можно показать, что  $\Omega_{2n+1}(x)$  имеет вид

$$\Omega_{2n+1}(x) = \sin(n+1)x + \tilde{T}_n(x), \quad (26)$$

где  $\tilde{T}_n(x)$  – некоторый тригонометрический многочлен степени не выше  $n$ . С учетом (24)–(26) будем иметь

$$\begin{aligned} \sin(n+1)x + \tilde{T}_n(x) &= \left( \alpha \sin \frac{x}{2} + \beta \cos \frac{x}{2} \right) \left( \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \sin \frac{1}{2} ((2n+1)x - (x_0 + x_1 + \dots + x_{2n})) + \tilde{T}_{\frac{2n-1}{2}}(x) \right) = \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1}} \left( \left[ \alpha \cos \frac{1}{2} (x_0 + x_1 + \dots + x_{2n}) + \beta \sin \frac{1}{2} (x_0 + x_1 + \dots + x_{2n}) \right] \cos(n+1)x + \right. \\ &\quad \left. + \left[ \alpha \sin \frac{1}{2} (x_0 + x_1 + \dots + x_{2n}) - \beta \cos \frac{1}{2} (x_0 + x_1 + \dots + x_{2n}) \right] \sin(n+1)x \right) + \tilde{T}_n(x). \quad (27) \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при  $\cos(n+1)x$  и  $\sin(n+1)x$  в левой и правой частях последнего равенства, получим систему двух линейных уравнений

$$\begin{cases} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1}} \left[ \alpha \cos \frac{1}{2} (x_0 + x_1 + \dots + x_{2n}) + \beta \sin \frac{1}{2} (x_0 + x_1 + \dots + x_{2n}) \right] = 0, \\ \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1}} \left[ \alpha \sin \frac{1}{2} (x_0 + x_1 + \dots + x_{2n}) - \beta \cos \frac{1}{2} (x_0 + x_1 + \dots + x_{2n}) \right] = 1, \end{cases}$$

решение которой имеет вид

$$\alpha = (-1)^{n+1} 2^{2n+1} \sin \frac{1}{2} (x_0 + x_1 + \dots + x_{2n}), \quad \beta = (-1)^n 2^{2n+1} \cos \frac{1}{2} (x_0 + x_1 + \dots + x_{2n}). \quad (28)$$

Подставляя (28) в (24) и проводя преобразования, получим

$$\Omega_{2n+1}(x) = (-1)^n 2^{2n+1} \cos \frac{1}{2} (x + x_0 + x_1 + \dots + x_{2n}) \prod_{k=0}^{2n} \sin \frac{x - x_k}{2}.$$

Вычислим далее выражение  $D_{2n+1}(\varphi_{2n+1}; x_j)$ :

$$D_{2n+1}\varphi_{2n+1}(x) = (D^2 + n^2)(D^2 + (n-1)^2) \dots (D^2 + 1^2) D \sin(n+1)x.$$

Так как

$$\begin{aligned} D \sin(n+1)x &= (n+1) \cos(n+1)x, \\ (D^2 + k^2) \cos(n+1)x &= -((n+1)^2 - k^2) \cos(n+1)x, \quad k = 1, 2, \dots, n, \end{aligned}$$

то

$$D_{2n+1}(\varphi_{2n+1}; x_j) = D_{2n+1} \sin(n+1)x \Big|_{x=x_j} = (-1)^n (2n+1)! \cos(n+1)x_j. \quad (29)$$

Таким образом, многочлен (7) в данном случае имеет вид

$$\tilde{L}_{2n+1}(x) = T_{n+1}(x) = H_n(x) + \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!} \frac{D_{2n+1}(f; x_j)}{\cos(n+1)x_j} \cos \frac{1}{2}(x + x_0 + x_1 + \dots + x_{2n}) \prod_{k=0}^{2n} \sin \frac{x - x_k}{2}, \quad (30)$$

где  $H_n(x)$  определяется формулой (22). Для него выполняются интерполяционные условия

$$T_{n+1}(x_i) = f(x_i) \quad (i = 0, 1, \dots, 2n); \quad D_{2n+1}(T_{n+1}; x_j) = D_{2n+1}(f; x_j). \quad (31)$$

В [1, 2] построен и исследован аналогичного типа тригонометрический интерполяционный многочлен Эрмита – Биркгофа

$$\bar{T}_{n+1}(x) = H_n(x) + \frac{2^{2n}}{(2n+1)!} \frac{\bar{\Omega}_{n+1}(x)}{\cos \frac{1}{2} \left( (2n+2)x_j - x_0 - \sum_{k=0}^{2n} x_k \right)} D_{2n+1}(f; x_j), \quad (32)$$

где

$$H_n(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2n} \frac{l_n(x)}{\sin \frac{1}{2}(x - x_k) l'_n(x_k)} f(x_k),$$

$$l_n(x) = \sin \frac{1}{2}(x - x_0) \sin \frac{1}{2}(x - x_1) \cdots \sin \frac{1}{2}(x - x_{2n}), \quad \bar{\Omega}_{n+1}(x) = \sin(x - x_0) \prod_{k=1}^{2n} \sin \frac{1}{2}(x - x_k), \quad (33)$$

удовлетворяющий условиям вида (31). Здесь дифференциальный оператор  $D_{2n+1}f(x)$  также определяется формулой (19), а многочлен (33) тождественен (22) [8, с. 18, 125]. В [3] построены матричные аналоги формулы (32). Оба тригонометрических многочлена (30) и (32) имеют степень не выше  $n+1$ , но отличаются слагаемым, содержащим значение дифференциального оператора.

Рассмотрим параметрическое семейство тригонометрических интерполяционных многочленов степени не выше  $n+1$  вида

$$T_{n+1}^{\alpha, \beta}(x) = H_n(x) + \frac{\Omega_{2n+1}^{\alpha, \beta}(x) D_{2n+1}(f; x_j)}{D_{2n+1}(\Omega_{2n}^{\alpha, \beta}; x_j)}, \quad (34)$$

где  $\Omega_{2n+1}^{\alpha, \beta}(x)$  задается соотношением (24), удовлетворяющих интерполяционным условиям (31), частными случаями которого являются формулы (30) и (32). Многочлен (30) получается при значениях  $\alpha$  и  $\beta$ , определенных равенствами (28), а полином (32) при  $\tilde{\alpha} = 2 \sin \frac{x_0}{2}$ ,  $\tilde{\beta} = 2 \cos \frac{x_0}{2}$ .

Действительно, в данном случае  $\Omega_{2n+1}^{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}}(x) = \bar{\Omega}_{n+1}(x)$  имеет вид

$$\Omega_{2n+1}^{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}}(x) = 2 \cos \frac{x - x_0}{2} \prod_{k=0}^{2n} \sin \frac{x - x_k}{2} = \left( 2 \sin \frac{x_0}{2} \sin \frac{x}{2} + 2 \cos \frac{x_0}{2} \cos \frac{x}{2} \right) \prod_{k=0}^{2n} \sin \frac{x - x_k}{2}.$$

Кроме того, используя лемму, можно показать, что

$$\Omega_{2n+1}^{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}}(x) = \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \sin \left( (n+1)x - \frac{1}{2}(2x_0 + x_1 + \dots + x_{2n}) \right) + \hat{T}_n(x), \quad (35)$$

где  $\hat{T}_n(x)$  – тригонометрический многочлен степени не выше  $n$ .

Из (29) и (35) следует, что

$$D_{2n+1} \left( \Omega_{2n+1}^{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}}; x_j \right) = \frac{(-1)^n}{2^{2n}} D_{2n+1} \sin \left( (n+1)x - \frac{1}{2}(2x_0 + x_1 + \dots + x_{2n}) \right) \Big|_{x=x_j} =$$

$$= \frac{(2n+1)!}{2^{2n}} \cos \frac{1}{2} \left( (2n+2)x_j - (2x_0 + x_1 + \dots + x_{2n}) \right). \quad (36)$$

Подставляя (36) в (34), получим формулу (32).

Вычислим значение оператора  $D_{2n+1}(\Omega_{2n+1}^{\alpha,\beta}; x_j)$  в случае произвольно заданных параметров  $\alpha$  и  $\beta$ ,  $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ . Аналогично (29) можно показать, что выполняется тождество

$$D_{2n+1} \cos(n+1)x = (-1)^{n+1} (2n+1)! \sin(n+1)x. \quad (37)$$

Представляя  $\Omega_{2n+1}^{\alpha,\beta}(x)$  в виде правой части (27) и используя соотношения (29), (37), будем иметь

$$D_{2n+1}(\Omega_{2n+1}^{\alpha,\beta}; x_j) = \frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}} \left( \alpha \sin \frac{1}{2}((2n+2)x - (x_0 + x_1 + \dots + x_{2n})) + \beta \cos \frac{1}{2}((2n+2)x - (x_0 + x_1 + \dots + x_{2n})) \right). \quad (38)$$

Подставляя (38) в (34), получим явное выражение для тригонометрического интерполяционного многочлена Эрмита – Биркгофа степени не выше  $n+1$ , удовлетворяющего условиям (31).

**Случай чебышевской экспоненциальной системы функций.** Рассмотрим еще один частный случай формулы (7) при  $\varphi_k(x) = e^{\lambda_k x}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n+1$ ,  $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_{n+1}$ . Тогда дифференциальный оператор  $D_{n+1}f(x)$  примет вид

$$D_{n+1}f(x) = (D - \lambda_n) \cdots (D - \lambda_2)(D - \lambda_1)Df(x), \quad D = \frac{d}{dx}. \quad (39)$$

Так как

$$D_{n+1}\varphi_{n+1}(x) = (D - \lambda_n) \cdots (D - \lambda_2)(D - \lambda_1)De^{\lambda_{n+1}x} = \lambda_{n+1}(\lambda_{n+1} - \lambda_1) \cdots (\lambda_{n+1} - \lambda_n)e^{\lambda_{n+1}x},$$

то соответственно интерполяционный многочлен

$$\tilde{L}_{n+1}(x) = L_n(x) + \frac{e^{-\lambda_{n+1}x_j} \Omega_{n+1}(x) D_{n+1}(f; x_j)}{\lambda_{n+1}(\lambda_{n+1} - \lambda_1) \cdots (\lambda_{n+1} - \lambda_n)}, \quad (40)$$

где

$$L_n(x) = \frac{(-1)^n}{\tilde{g}_n} \sum_{i=0}^n (-1)^i g_n(1, e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_n x}; x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n, x) f(x_i),$$

$$\Omega_n(x) = \frac{1}{\tilde{g}_n} g_{n+1}(1, e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_{n+1} x}; x_0, x_1, \dots, x_n, x),$$

удовлетворяет условиям вида (8), где дифференциальный оператор  $D_{n+1}f(x)$  определяется равенством (39). Такого вида многочлен был построен и исследован в [9, 10] без явного указания выражений для  $L_n(x)$  и  $\Omega_{n+1}(x)$ ; в общем случае он приведен в [1, 2]. Получены частные [3, 5] и общий [4] случаи матричного аналога формулы (40). Интерполяционные многочлены вида (7) по системам двух видов рациональных функций построены и исследованы в [1, 2], их матричные аналоги получены в [4].

**Заключение.** В данной работе получены следующие новые результаты: для функции скалярного аргумента построен интерполяционный многочлен Эрмита – Биркгофа по чебышевской системе общего вида; получены явное представление и оценка погрешности интерполирования; рассмотрены частные случаи для тригонометрических и экспоненциальных систем функций; построено параметрическое семейство тригонометрических интерполяционных многочленов одинаковой степени.

## Литература

1. Худяков А. П. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2010. № 4. С. 29–36.
2. Худяков А. П. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2012. № 1. С. 13–21.
3. Yanovich L. A., Hudjakov A. P. // J. Numer. Appl. Math. 2011. № 2 (105). P. 136–147.

4. Худяков А. П., Янович Л. А. // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2011. Т. 19, № 2. С. 103–114.
5. Янович Л. А., Худяков А. П. // Докл. НАН Беларуси. 2012. Т. 56, № 1. С. 16–22.
6. Хаусхолдер А. С. Основы численного анализа. М., 1956.
7. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. М., 1959.
8. Турецкий А. Х. Теория интерполирования в задачах. Минск, 1968.
9. Худяков А. П. Некоторые задачи теории интерполирования. Saarbrücken, Deutschland, 2014.
10. Makarov V. L., Khlobystov V. V., Yanovich L. A. Methods of Operator Interpolation. Киев, 2010. Т. 83.

*A. P. HUDYAKOV, L. A. YANOVICH*

**GENERALIZED INTERPOLATION FORMULAS OF HERMITE – BIRKHOFF TYPE  
FOR THE CASE OF CHEBYSHEV SYSTEMS OF FUNCTIONS**

**Summary**

The generalized interpolation formula of Hermite – Birkhoff type with respect to the arbitrary Chebyshev system of functions is constructed. Theorem on the satisfaction of the interpolation conditions is proved. A class of polynomials, for which the interpolation formula is exact, is determined. The error estimate of the obtained formula is constructed. The particular cases of the interpolation formula for the systems of trigonometric and exponential functions are considered.

УДК 517.925

И. П. МАРТЫНОВ, Е. С. ЛЫСЮК

**АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОГО ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА**

*Гродненский государственный университет им. Я. Купалы*

*(Поступила в редакцию 06.03.2015)*

**Введение.** Представляет интерес исследование дифференциальных уравнений и систем, имеющих подвижные особые линии. Установлено, что нет уравнений второго порядка с рациональной правой частью, имеющих подвижную особую линию [1]. Простейшим уравнением с подвижной особой линией является уравнение Шази [2] третьего порядка  $y''' = 2yy'' - 3(y')^2$ . Исследованию дифференциальных уравнений и систем третьего и высших порядков с подвижной особой линией посвящены, например, [2–8]. В настоящей работе рассматривается дифференциальное уравнение четвертого порядка с подвижной особой линией.

**Основная часть.** Как в [3, 6], рассмотрим преобразование

$$y(t) = f'(t) \cdot u(z), \quad z = f(t), \tag{1}$$

где  $f$  – дробно-линейная функция от  $t$ . Будем обозначать производные по  $t$  через  $y', y'', y''', y^{(4)}$ ; производные по  $z$  –  $\dot{u}, \ddot{u}, \dddot{u}, u^{(4)}$ .

Заметим, что при преобразовании (1)

$$\begin{aligned} 2yy'' - 3(y')^2 &= (f')^4 (2u\dot{u} - 3(\dot{u})^2), \\ y^2 y''' - 6yy'y'' + 6(y')^3 &= (f')^6 (u^2 \ddot{u} - 6u\dot{u}\ddot{u} + 6\dot{u}^3), \\ y y^{(4)} - 10y'y''' + 10(y'')^2 &= (f')^6 (u \dddot{u} - 10\dot{u}\ddot{u} + 10(\ddot{u})^2). \end{aligned}$$

Следовательно, уравнение

$$y^3 y^{(4)} = 10y^2 y'y''' - 10y^2 (y'')^2 + a(2yy'' - 3(y')^2)^2 + by^2 (y^2 y''' - 6yy'y'' + 6(y')^3) + c y^4 (2yy'' - 3(y')^2) \tag{2}$$

инвариантно при преобразовании (1). Подберем  $a, b, c$  так, чтобы резонансы уравнения (2) были целыми и различными.

Если искать решение уравнения (2) в виде ряда

$$y = \alpha(t - t_0)^{-1} + \dots + h(t - t_0)^{r-1} + \dots,$$

то получим

$$\begin{aligned} c\alpha^2 &= 4 - a, \\ (r^2 - 1)(r^2 - b\alpha r + 8 - 2a) &= 0. \end{aligned}$$

С другой стороны, если положить  $t - t_0 = \varepsilon z$ , где  $\varepsilon$  – параметр, то упрощенное для (2) уравнение имеет вид

$$y^3 y^{(4)} = 10y^2 y'y''' - 10y^2 (y'')^2 + a(2yy'' - 3(y')^2)^2. \tag{3}$$

Полагая

$$y' = 2xy, \quad (4)$$

для  $x$  получим уравнение

$$x''' = 12xx'' - (8a - 26)(x')^2 + 32(1 - a)x^2x' + 16(a - 1)x^4. \quad (5)$$

Согласно [2], для отсутствия у решения уравнения (5) многозначных подвижных особых точек необходимо  $a = 1$ . Тогда

$$\begin{aligned} c\alpha^2 &= 3, \\ (r^2 - 1)(r^2 - b\alpha r + 6) &= 0, \end{aligned}$$

откуда  $b\alpha = \pm 5$ . Поэтому получим  $c = 3$ ,  $b = 5$ . Значит,  $\alpha^2 = 1$ . Тогда уравнение (2) примет вид

$$y^3y^{(4)} = 10y^2y'y''' - 10y^2(y'')^2 + (2yy'' - 3(y')^2)^2 + 5y^2(y^2y''' - 6yy'y'' + 6(y')^3) + 3y^4(2yy'' - 3(y')^2). \quad (6)$$

Уравнение (3) при  $a = 1$  имеет вид

$$y^3y^{(4)} = 10y^2y'y''' - 10y^2(y'')^2 + (2yy'' - 3(y')^2)^2. \quad (7)$$

Если искать решение уравнения (7) в виде ряда

$$y = \alpha(t - t_0)^{-s} + \dots + h_r(t - t_0)^{r-s} + \dots,$$

то получим  $s = 2$ , резонансы  $r = -1, -2, -3, 0$ .

Выполнив замену (4), с учетом (7), для  $x$  получим уравнение

$$x''' = 12xx'' - 18(x')^2. \quad (8)$$

Как известно [2], уравнение Шази (8) имеет подвижную особую линию, которая является прямой или окружностью [9].

В [9] показано, что решение уравнения (8) в виде ряда Дирихле имеет вид

$$x = -\frac{1}{12} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e^{-kt}, \quad (9)$$

где  $\alpha_1$  – произвольное, остальные коэффициенты  $\alpha_k$ ,  $k = 2, 3, 4, \dots$ , определяются по рекуррентной формуле

$$\alpha_k = \frac{6}{k^2(k-1)} \sum_{n=1}^{k-1} (3kn - 5n^2) \alpha_n \alpha_{k-n}, \quad k = 2, 3, 4, \dots,$$

при этом ряд (9) сходится абсолютно в области  $\text{Re}t > \eta$ , где  $\eta$  – абсцисса абсолютной сходимости ряда (9).

Из (4), с учетом (9), можем записать решение уравнения (7)

$$y = C_1 \exp\left(-\frac{1}{6}t - \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k e^{-kt}\right), \quad (10)$$

где  $C_1$  – произвольное,  $\beta_k = \frac{2}{k} \alpha_k$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ , т. е.  $\beta_1$  – произвольное, остальные коэффициенты  $\beta_k$ ,  $k = 2, 3, 4, \dots$ , определяются по рекуррентной формуле

$$\beta_k = \frac{3}{k^3(k-1)} \sum_{n=1}^{k-1} n(k-n)(3kn - 5n^2) \beta_n \beta_{k-n}, \quad k = 2, 3, 4, \dots, \quad (11)$$

при этом ряд (11) сходится абсолютно в области  $\text{Re}t > \eta$ .

С учетом инвариантности уравнения (7) при преобразовании (1), полагая  $f(t) = \frac{h}{t-t_0} - \ln A$ , из (10) получаем общее решение уравнения (7) в области  $\operatorname{Re} \frac{h}{t-t_0} > \eta + \ln |A|$ :

$$y = \frac{C}{(t-t_0)^2} \exp \left( -\frac{1}{6} \cdot \frac{h}{t-t_0} - \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k A^k e^{-\frac{kh}{t-t_0}} \right), \quad (12)$$

где  $C = -C_1 h A^{\frac{1}{6}}$ ,  $h, A, t_0$  – произвольные,  $\beta_1 = 1$ , остальные коэффициенты  $\beta_k, k = 2, 3, 4, \dots$ , определяются по рекуррентной формуле (11).

Таким образом, справедлива

**Т е о р е м а 1.** Рядом (12) в области  $\operatorname{Re} \frac{h}{t-t_0} > \eta + \ln |A|$  дано общее решение уравнения (7).

**З а м е ч а н и е 1.** Общее решение уравнения (8) в области  $|t-t_0| > R$  дается формулой

$$x = -\frac{1}{t-t_0} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_k}{(t-t_0)^{k+1}},$$

где  $h_1$  (или  $t_0$ ),  $h_2, h_3$  – произвольные постоянные, а остальные коэффициенты  $h_k, k = 4, 5, 6, \dots$ , определяются по рекуррентной формуле

$$(k-1)(k-2)(k-3)h_k = 6 \sum_{m=1}^{k-1} (m+1)(3k-5m-1)h_m h_{k-m}, \quad k = 4, 5, 6, \dots$$

Используя (4), можно записать

$$y = \frac{\alpha}{(t-t_0)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k}{(t-t_0)^{k+2}}, \quad (13)$$

где  $\gamma_k$  и  $h_k$  связаны условиями  $\gamma_1 = -2\alpha h_1, k\gamma_k + 2\alpha h_k + 2 \sum_{m=1}^{k-1} h_m \gamma_{k-m} = 0, k = 2, 3, 4, \dots$ . Поэтому ряд Лорана (13) задает общее решение уравнения (7) в области  $|t-t_0| > R$ , при этом  $\alpha, \gamma_1$  (или  $t_0$ ),  $\gamma_2, \gamma_3$  – произвольные постоянные.

С учетом (6) и (4) запишем систему

$$\begin{cases} x''' = 12xx'' - 18x'^2 + 5y(x'' - 6xx' + 4x^3) + 6y^2(x' - x^2), \\ y' = 2xy. \end{cases} \quad (14)$$

Заменой  $(x, y, t; \varepsilon^{-1}x, \varepsilon^{-1}y, \varepsilon t)$ , где  $\varepsilon$  – параметр, (14) преобразуется в систему

$$\begin{cases} x''' = 12xx'' - 18x'^2 + 5\varepsilon y(x'' - 6xx' + 4x^3) + 6\varepsilon^2 y^2(x' - x^2), \\ y' = 2xy, \end{cases} \quad (15)$$

которая при  $\varepsilon = 0$  имеет решение (9), (12). Поэтому по теореме Пуанкаре при достаточно малых  $\varepsilon, \varepsilon \neq 0$ , решения системы (15) можно разложить в ряды

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k x_k, \quad y = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k y_k.$$

Тогда из (15) получим

$$\begin{cases} x_0''' = 12x_0x_0'' - 18x_0'^2, \\ y_0' = 2x_0y_0, \\ \begin{cases} x_n''' = 12x_0x_n'' - 36x_0'x_n' + 12x_0''x_n + F_n, \\ y_n' = 2x_0y_n + G_n, \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (16)$$

где  $F_n$  зависит от тех  $x_k, y_m$ , для которых  $k < n, m < n$ ;  $G_n$  зависит от тех  $x_k, y_m$ , для которых  $k \leq n, m < n$ . Откуда заключаем, что если подвижная особая линия уравнения Шази (16) является окружностью, т. е. если  $x_0$  имеет место внутри или вне некоторого круга  $\Omega$ , то все  $x_i, y_i, i = 0, 1, 2, \dots$ , а значит, и  $x, y$ , также будут иметь место в области, находящейся внутри или вне круга  $\Omega$ .

Если искать решение системы (14) в виде рядов

$$\begin{cases} x = \alpha(t-t_0)^{-s_1} + \dots + h_1(t-t_0)^{r-s_1} + \dots, \\ y = \beta(t-t_0)^{-s_2} + \dots + h_2(t-t_0)^{r-s_2} + \dots, \end{cases}$$

то получим  $\alpha = -\frac{1}{2}, s_1 = s_2 = 1$  и  $\beta = 1, r = -1, 1, 2, 3; \beta = -1, r = -1, -2, -3, 1$ .

Таким образом, подставляя ряды

$$x = -\frac{1}{2}(t-t_0)^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k (t-t_0)^{k-1}, \quad (17)$$

$$y = (t-t_0)^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k (t-t_0)^{k-1} \quad (18)$$

в систему (14), имеем  $t_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$  – произвольные,  $\alpha_1 = \frac{\beta_1}{2}$ , остальные коэффициенты определяются по рекуррентным формулам

$$\alpha_k = \frac{k}{2}\beta_k - \sum_{n=1}^{k-1} \alpha_n \beta_{k-n}, \quad k = 2, 3, 4, \dots, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \beta_k = & \frac{2}{(k+1)(k-1)(k-2)(k-3)} \left( \sum_{n=1}^{k-1} \left( (k^3 - 5k^2 + 5k + 17)\beta_{k-n} - 36\alpha_{k-n} \right) \alpha_n + \frac{3}{2}\beta_n \beta_{k-n} \right) + \\ & + 3 \sum_{n=1}^{k-2} (9\beta_{k-n-1} - 10\alpha_{k-n-1})n\alpha_{n+1} + \sum_{n=1}^{k-3} ((12\alpha_{k-n-2} + 5\beta_{k-n-2})n(n+1)\alpha_{n+2} - 18n(k-n-2)\alpha_{n+1}\alpha_{k-n-1}) + \\ & + 2 \sum_{m=2}^{k-1} \sum_{n=1}^{m-1} ((10\alpha_{k-m} - 21\beta_{k-m})\alpha_{m-n} + 3\beta_{m-n}\beta_{k-m})\alpha_n + 6 \sum_{m=2}^{k-2} \sum_{n=1}^{m-1} (\beta_{m-n}\beta_{k-m-1} - 5\alpha_{m-n}\beta_{k-m-1})n\alpha_{n+1} + \\ & + 2 \sum_{p=3}^{k-1} \sum_{m=2}^{p-1} \sum_{n=1}^{m-1} (10\alpha_{p-m}\beta_{k-p} - 3\beta_{p-m}\beta_{k-p})\alpha_n \alpha_{m-n} \Big), \quad k = 4, 5, 6, \dots \end{aligned} \quad (20)$$

Покажем, что ряды (17), (18) сходятся при  $0 < |t-t_0| < \delta$ .

Если положить

$$x = \tau^{-1} \left( -\frac{1}{2} + u_1 \right), \quad x' = \tau^{-2} \left( \frac{1}{2} + u_2 \right), \quad x'' = \tau^{-3} (-1 + u_3), \quad y = \tau^{-1} (1 + u_4),$$

где  $\tau = t - t_0$ , то из системы (14) для функций  $u_k, k = 1, 2, 3, 4$ , получим систему Брио и Буке

$$\begin{cases} \tau u'_1 = u_1 + u_2, \\ \tau u'_2 = 2u_2 + u_3, \\ \tau u'_3 = -6u_1 + 3u_2 + 2u_3 + 3u_4 + g(u_1, u_2, u_3, u_4), \\ \tau u'_4 = 2u_1 + 2u_1 u_4, \end{cases} \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} g(u_1, u_2, u_3, u_4) = & -36u_1^2 - 18u_2^2 + \frac{3}{2}u_4^2 - 30u_1 u_2 + 12u_1 u_3 + 12u_1 u_4 + 27u_2 u_4 + 5u_3 u_4 + \\ & + 20u_1^3 - 30u_1 u_2 u_4 - 42u_1^2 u_4 + 6u_1 u_4^2 + 6u_2 u_4^2 - 6u_1^2 u_4^2 + 20u_1^3 u_4. \end{aligned}$$

Определяющее уравнение системы (21) имеет вид 
$$\begin{vmatrix} 1-r & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-r & 1 & 0 \\ -6 & 3 & 2-r & 3 \\ 2 & 0 & 0 & -r \end{vmatrix} = 0,$$
 откуда

$(r-1)(r-2)(r-3)(r+1) = 0$ . Видим, что элементарные делители  $r-1$ ,  $r-2$ ,  $r-3$ ,  $r+1$  матрицы системы (21) простые. Значит, решение системы (21) можно представить в виде рядов

$$u_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k (t-t_0)^k, u_2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k (t-t_0)^k, u_3 = \sum_{k=1}^{\infty} d_k (t-t_0)^k, u_4 = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k (t-t_0)^k, \quad (22)$$

которые сходятся при  $|t-t_0| < \delta$  [10, 11]. Подставляя (22) в систему (21), получим  $t_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$  – произвольные,  $\alpha_1 = \frac{\beta_1}{2}$ , остальные коэффициенты  $\alpha_k, k=2, 3, 4, \dots, \beta_k, k=4, 5, 6, \dots$ , определяются по рекуррентным формулам, аналогичным (19), (20) соответственно, и  $c_k = (k-1)\alpha_k, d_k = (k-1)(k-2)\alpha_k, k=1, 2, 3, \dots$ .

Итак, имеет место

**Т е о р е м а 2.** Ряд

$$y = \frac{1}{t-t_0} + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k (t-t_0)^{k-1} \quad (23)$$

представляет общее решение уравнения (6) в области  $0 < |t-t_0| < \delta, \delta > 0$ . Здесь  $t_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$  – произвольные постоянные, а коэффициенты  $\beta_k, k=4, 5, 6, \dots$ , определяются единственным образом по рекуррентным формулам (19), (20).

**З а м е ч а н и е 2.** С учетом инвариантности уравнения (6) при преобразовании (1), полагая  $t-t_0 = a + \frac{h}{z-z_0}$ , где считаем  $|a| + \left| \frac{h}{z-z_0} \right| < \delta_1, |a| < \frac{1}{2}\delta_1, 0 < \delta_1 < \delta$ , из (23) получим

$$y = -\frac{h}{(z-z_0)^2} \left( \frac{1}{a + \frac{h}{z-z_0}} + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \left( a + \frac{h}{z-z_0} \right)^k \right), \quad (24)$$

где  $\alpha_k = \beta_{k+1}, k=0, 1, 2, \dots$ . Поскольку  $0 < \left| a + \frac{h}{z-z_0} \right| \leq |a| + \left| \frac{h}{z-z_0} \right| < \delta_1 < \delta$ , будем иметь  $\frac{|h|}{|z-z_0|} < \delta_1 - |a|$ ,

откуда  $|z-z_0| > \frac{|h|}{\delta_1 - |a|} > 0$ . Значит, разложение (24) имеет место в области  $|z-z_0| > \frac{|h|}{\delta_1 - |a|}$ .

Поскольку  $\frac{h}{a(z-z_0)+h} = 1 - \frac{a}{h}(z-z_0) + \left(\frac{a}{h}\right)^2 (z-z_0)^2 - \dots = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{a}{h}\right)^{k+1} (z-z_0)^{k+1}$ , где  $\left| \frac{a}{h}(z-z_0) \right| < 1$ , то (24) можно записать в виде

$$y = -\frac{1}{(z-z_0)} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{a}{h}\right)^{k+1} (z-z_0)^k - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^k C_k^n \alpha_k a^{k-n} h^{n+1} (z-z_0)^{-n-2},$$

или

$$y = -\frac{1}{(z-z_0)} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{a}{h}\right)^{k+1} (z-z_0)^k - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(k)}(a)}{k!} \cdot \frac{h^{k+1}}{(z-z_0)^{k+2}}, \quad (25)$$

где  $\varphi(a) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k a^k$ ,  $\varphi^{(k)}(a) = \frac{d^k \varphi}{da^k}$ . Таким образом, общее решение уравнения (6), соответствующее резонансам  $r = -1, -2, -3, 1$ , имеет вид (25). При этом разложение (25) имеет место при

$$\frac{|h|}{\delta_1 - |a|} < |z - z_0| < \frac{|h|}{|a|}.$$

Если в рядах (17), (18) положить  $t_0 = C_1$ ,  $\beta_i = \frac{1}{(C_2 - C_1)^i}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , то получим  $\alpha_1 = \frac{1}{2(C_2 - C_1)}$  и из (19), (20)  $\alpha_2 = \frac{1}{2(C_2 - C_1)^2}$ ,  $\beta_4 = \frac{1}{(C_2 - C_1)^4}$ . Предположим, что для всех  $n < k$  верно  $\alpha_n = \frac{1}{2(C_2 - C_1)^n}$ ,  $\beta_n = \frac{1}{(C_2 - C_1)^n}$ . Покажем, что тогда  $\alpha_k = \frac{1}{2(C_2 - C_1)^k}$ ,  $\beta_k = \frac{1}{(C_2 - C_1)^k}$ .

Из (19) имеем

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{k}{2} \beta_k - \sum_{n=1}^{k-1} \alpha_n \beta_{k-n} = \frac{k}{2} \cdot \frac{1}{(C_2 - C_1)^k} - \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{2(C_2 - C_1)^n} \cdot \frac{1}{(C_2 - C_1)^{k-n}} = \\ &= \frac{k}{2} \cdot \frac{1}{(C_2 - C_1)^k} - \frac{k-1}{2} \cdot \frac{1}{(C_2 - C_1)^k} = \frac{1}{2(C_2 - C_1)^k}. \end{aligned}$$

Из (20) получим

$$\begin{aligned} \beta_k &= \frac{2}{(k+1)(k-1)(k-2)(k-3)} \left( \frac{1}{2(C_2 - C_1)^k} \sum_{n=1}^{k-1} (k^3 - 5k^2 + 5k + 2) + \frac{6}{(C_2 - C_1)^k} \sum_{n=1}^{k-2} n + \right. \\ &+ \frac{1}{2(C_2 - C_1)^k} \sum_{n=1}^{k-3} (20n^2 - (9k - 29)n) - \frac{5}{(C_2 - C_1)^k} \sum_{m=2}^{k-1} \sum_{n=1}^{m-1} 1 - \frac{9}{2(C_2 - C_1)^k} \sum_{m=2}^{k-2} \sum_{n=1}^{m-1} n + \\ &\left. + \frac{1}{(C_2 - C_1)^k} \sum_{p=3}^{k-1} \sum_{m=2}^{p-1} \sum_{n=1}^{m-1} 1 \right) = \frac{2}{(k+1)(k-1)(k-2)(k-3)} \cdot \frac{(k+1)(k-1)(k-2)(k-3)}{2(C_2 - C_1)^k} = \frac{1}{(C_2 - C_1)^k}. \end{aligned}$$

На основании метода математической индукции заключаем, что  $\alpha_k = \frac{1}{2(C_2 - C_1)^k}$ ,  $\beta_k = \frac{1}{(C_2 - C_1)^k}$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ . Тогда из (23) при  $|t - C_1| < |C_2 - C_1|$  получим

$$y = \frac{1}{t - C_1} - \frac{1}{t - C_2}, \quad (26)$$

где  $C_1, C_2$  — произвольные постоянные. Подставляя (26) в (6), убеждаемся, что (26) является двухпараметрическим решением уравнения (6).

Справедлива

**Т е о р е м а 3.** Уравнение (6) имеет двухпараметрическое рациональное решение вида (26).

Если искать решение системы (14) в виде рядов Дирихле

$$x = \gamma_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e^{-kt}, \quad y = \gamma_2 + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k e^{-kt},$$

для коэффициентов  $\gamma_1, \gamma_2$  получим следующие наборы значений:  $\left\{-\frac{1}{2}; 0\right\}, \{0; 1\}, \left\{0; -\frac{1}{6}\right\}$ .

В случае  $\gamma_1 = -\frac{1}{2}, \gamma_2 = 0$  имеем ряды

$$x = -\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e^{-kt}, \quad y = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k e^{-kt}, \quad (27)$$

где  $\beta_1$  – произвольное,  $\alpha_1 = -\frac{1}{2}\beta_1$ ,  $\alpha_2 = -\frac{1}{2}\beta_1^2$ ,  $\alpha_3 = -\frac{1}{2}\beta_1^3$ , остальные коэффициенты определяются по рекуррентным формулам

$$\alpha_k = \frac{1}{k^2(k-6)} \left( \frac{5}{2}\beta_k - \sum_{n=1}^{k-1} \left( (30n^2 - 18nk)\alpha_n\alpha_{k-n} + 5(n^2 - 3n + 3)\alpha_n\beta_{k-n} - \frac{3}{2}\beta_n\beta_{k-n} \right) - \sum_{m=2}^{k-1} \sum_{n=1}^{m-1} 6(n-1)(5\alpha_n\alpha_{m-n}\beta_{k-m} - \alpha_n\beta_{m-n}\beta_{k-m}) - \sum_{l=3}^{k-1} \sum_{m=2}^{l-1} \sum_{n=1}^{m-1} (20\alpha_n\alpha_{m-n}\alpha_{l-m}\beta_{k-l} - 6\alpha_n\alpha_{m-n}\beta_{l-m}\beta_{k-l}) \right), k = 4, 5, 6, \dots, \quad (28)$$

$$\beta_k = \frac{2}{1-k} \sum_{n=1}^{k-1} \alpha_n\beta_{k-n}, k = 2, 3, 4, \dots \quad (29)$$

Из (28), (29) имеем  $\alpha_4 = -\frac{1}{2}\beta_1^4$ ,  $\beta_2 = \beta_1^2$ . Предположим, что для всех  $n < k$  верно  $\alpha_n = -\frac{1}{2}\beta_1^n$ ,  $\beta_n = \beta_1^n$ . Покажем, что тогда  $\alpha_k = -\frac{1}{2}\beta_1^k$ ,  $\beta_k = \beta_1^k$ .

Из (28) получим

$$\alpha_k = \frac{1}{k^2(k-6)} \left( \frac{5}{2}\beta_1^k - \beta_1^k \sum_{n=1}^{k-1} \left( 5n^2 - \frac{1}{2}(9k-15)n - 9 \right) - \frac{21}{2}\beta_1^k \sum_{m=2}^{k-1} \sum_{n=1}^{m-1} (n-1) + 4\beta_1^k \sum_{l=3}^{k-1} \sum_{m=2}^{l-1} \sum_{n=1}^{m-1} 1 \right) = \frac{1}{k^2(k-6)} \cdot \beta_1^k \cdot \left( -\frac{k^2(k-6)}{2} \right) = -\frac{1}{2}\beta_1^k.$$

Из (29) имеем

$$\beta_k = \frac{2}{1-k} \sum_{n=1}^{k-1} \left( -\frac{1}{2}\beta_1^n \right) \beta_1^{k-n} = -\frac{1}{1-k} \cdot \beta_1^k \cdot \sum_{n=1}^{k-1} 1 = -\frac{1}{1-k} \cdot \beta_1^k \cdot (k-1) = \beta_1^k.$$

На основании метода математической индукции заключаем, что  $\alpha_k = -\frac{1}{2}\beta_1^k$ ,  $\beta_k = \beta_1^k$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ . Тогда абсцисса абсолютной сходимости рядов (27) [12, с. 115]

$$c = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \ln \sqrt[k]{|\alpha_k|} = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \ln \sqrt[k]{|\beta_k|} = \ln |\beta_1| = \ln |\beta|. \quad (30)$$

Из (27) при  $|t| > \ln |\beta|$  получим

$$x = -\frac{e^t}{2(e^t - \beta)}, y = \frac{\beta}{e^t - \beta}. \quad (31)$$

Подставляя (31) в (14), убеждаемся, что (31) является решением системы (14).

При  $\gamma_1 = 0$ ,  $\gamma_2 = 1$  получаем

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e^{-kt}, y = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k e^{-kt}, \quad (32)$$

где  $\beta_1$  – произвольное,  $\alpha_1 = -\frac{1}{2}\beta_1$ ,  $\alpha_2 = -\frac{1}{2}\beta_1^2$ ,  $\alpha_3 = -\frac{1}{2}\beta_1^3$ , остальные коэффициенты определяются по рекуррентным формулам

$$\alpha_k = \frac{1}{k(k+6)(k-1)} \left( -\sum_{n=1}^{k-1} \left( 6(5n^2 - (3k-5)n - 1)\alpha_n\alpha_{k-n} + (5n^2 - 12n)\alpha_n\beta_{k-n} \right) - \sum_{m=2}^{k-1} \sum_{n=1}^{m-1} (20\alpha_n\alpha_{m-n}\alpha_{k-m} + 6(5n-2)\alpha_n\alpha_{m-n}\beta_{k-m} - 6n\alpha_n\beta_{m-n}\beta_{k-m}) - \right)$$

$$-\sum_{l=3}^{k-1} \sum_{m=2}^{l-1} \sum_{n=1}^{m-1} (20\alpha_n \alpha_{m-n} \alpha_{l-m} \beta_{k-l} - 6\alpha_n \alpha_{m-n} \beta_{l-m} \beta_{k-l}) \Big), k = 4, 5, 6, \dots,$$

$$\beta_k = -\frac{2}{k} \left( \alpha_k + \sum_{n=1}^{k-1} \alpha_n \beta_{k-n} \right), k = 2, 3, 4, \dots$$

Аналогично, как и в случае  $\gamma_1 = -\frac{1}{2}, \gamma_2 = 0$ , используя метод математической индукции, можно показать, что  $\alpha_k = -\frac{1}{2}\beta^k, \beta_k = \beta^k, k = 1, 2, 3, \dots$ , для  $\forall \beta_1 = \beta$ . Абсцисса абсолютной сходимости рядов (32) определяется формулой (30).

Из (32) при  $|t| > \ln|\beta|$  получим

$$x = -\frac{\beta}{2(e^t - \beta)}, y = \frac{e^t}{e^t - \beta}. \quad (33)$$

Подставляя (33) в (14), убеждаемся, что (33) является решением системы (14).

Поскольку уравнение (6) инвариантно при преобразовании (1), полагая  $f(t) = \frac{h}{t-t_0} - \ln A$ , из (31) и (33) получим трехпараметрические решения уравнения (6) соответственно:

$$y = -\frac{hC}{(t-t_0)^2 \left( \exp\left(\frac{h}{t-t_0}\right) - C \right)}, \quad (34)$$

где  $C = \beta A, h, t_0$  – произвольные постоянные,

$$y = -\frac{h \exp\left(\frac{h}{t-t_0}\right)}{(t-t_0)^2 \left( \exp\left(\frac{h}{t-t_0}\right) - \beta \right)}, \quad (35)$$

где  $h, t_0, \beta$  – произвольные постоянные.

**З а м е ч а н и е 3.** Трехпараметрические решения (34), (35) являются частными. Можно показать, что уравнению (6) в области  $|t-t_0| > R$  удовлетворяет ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{(t-t_0)^{k+2}}, \quad (36)$$

где  $\alpha_0, \alpha_2, \alpha_3, t_0$  – произвольные постоянные, коэффициенты  $\alpha_1, \alpha_k, k = 4, 5, 6, \dots$  определяются единственным образом по рекуррентным формулам. Если положить  $\alpha_0 = \frac{Ch}{C-1}, \alpha_2 = \frac{C(C+1)}{2} \left(\frac{h}{C-1}\right)^3,$

$\alpha_3 = \frac{C(C^2+4C+1)}{6} \left(\frac{h}{C-1}\right)^4$ , то ряд (36) совпадает с тем, который получим при разложении (34) в ряд

Лорана по степеням  $(t-t_0)^{-1}$ . Если же  $\alpha_0 = \frac{h}{\beta-1}, \alpha_2 = \frac{\beta(\beta+1)}{2} \left(\frac{h}{\beta-1}\right)^3, \alpha_3 = \frac{\beta(\beta^2+4\beta+1)}{6} \left(\frac{h}{\beta-1}\right)^4,$

то ряд (36) совпадает с рядом, который получим при разложении (35) в ряд Лорана по степеням  $(t-t_0)^{-1}$ .

В случае  $\gamma_1 = 0, \gamma_2 = -\frac{1}{6}$  имеем ряды

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e^{-kt}, \quad (37)$$

$$y = -\frac{1}{6} + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k e^{-kt}, \quad (38)$$

где  $\alpha_1$  – произвольное,  $\alpha_2 = \frac{53}{26}\alpha_1^2$ ,  $\alpha_3 = \frac{5101}{2964}\alpha_1^3$ ,  $\beta_1 = \frac{1}{3}\alpha_1$ , остальные коэффициенты определяются по рекуррентным формулам

$$\alpha_k = \frac{6}{k(6k+1)(k-1)} \left( \sum_{m=1}^{k-1} \left( \left( -12m^2 + 18m(k-m) + 5m + \frac{1}{6} \right) \alpha_m \alpha_{k-m} - (5m^2 + 2m) \alpha_m \beta_{k-m} \right) - \right. \\ \left. - 2 \sum_{p=2}^{k-1} \sum_{m=1}^{p-1} \left( (15m+1) \alpha_m \alpha_{p-m} \beta_{k-p} - \frac{5}{3} \alpha_m \alpha_{p-m} \alpha_{k-p} - 3m \alpha_m \beta_{p-m} \beta_{k-p} \right) + \right. \\ \left. + 2 \sum_{l=3}^{k-1} \sum_{p=2}^{l-1} \sum_{m=1}^{p-1} (3\beta_{l-p} \beta_{k-l} - 10\alpha_{l-p} \beta_{k-l}) \alpha_m \alpha_{p-m} \right), k = 4, 5, 6, \dots, \quad (39)$$

$$\beta_k = \frac{1}{3k} \alpha_k - \frac{2}{k} \sum_{m=1}^{k-1} \alpha_m \beta_{k-m}, k = 2, 3, 4, \dots \quad (40)$$

Покажем, что существуют  $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \ln \sqrt[k]{|\alpha_k|}$ ,  $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \ln \sqrt[k]{|\beta_k|}$ . Обозначим

$$M = \frac{\delta}{66} - \frac{1472}{118} - \frac{2}{11}, \delta = \left( 277451 + 132\sqrt{43957353} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (41)$$

За счет выбора  $\alpha_1$  можем сделать  $|\alpha_1| \leq \zeta$ . Тогда  $|\alpha_2| = \frac{53}{26}\alpha_1^2 \leq \frac{53}{26}\zeta^2 \leq \zeta$ ,  $|\alpha_3| = \frac{5101}{2964}|\alpha_1^3| \leq \frac{5101}{2964}\zeta^3 \leq \zeta$ ,  $|\beta_1| = \frac{1}{3}|\alpha_1| \leq \frac{1}{3}\zeta$ , если  $0 < \zeta \leq M$ . Предположим, что для всех  $m < k$  верно  $|\alpha_m| \leq \zeta$ ,  $|\beta_m| \leq \frac{1}{3}\zeta$ . Покажем, что тогда  $|\alpha_k| \leq \zeta$ ,  $|\beta_k| \leq \frac{1}{3}\zeta$ .

$$|\alpha_k| = \left| \frac{6}{k(6k+1)(k-1)} \left( \sum_{m=1}^{k-1} \left( \left( -12m^2 + 18m(k-m) + 5m + \frac{1}{6} \right) \alpha_m \alpha_{k-m} - (5m^2 + 2m) \alpha_m \beta_{k-m} \right) - \right. \right. \\ \left. - 2 \sum_{p=2}^{k-1} \sum_{m=1}^{p-1} \left( (15m+1) \alpha_m \alpha_{p-m} \beta_{k-p} - \frac{5}{3} \alpha_m \alpha_{p-m} \alpha_{k-p} - 3m \alpha_m \beta_{p-m} \beta_{k-p} \right) + \right. \\ \left. + 2 \sum_{l=3}^{k-1} \sum_{p=2}^{l-1} \sum_{m=1}^{p-1} (3\beta_{l-p} \beta_{k-l} - 10\alpha_{l-p} \beta_{k-l}) \alpha_m \alpha_{p-m} \right) \Big| \leq \\ \leq \frac{6}{k(6k+1)(k-1)} \left( \sum_{m=1}^{k-1} \left( \left( 12m^2 + 18m(k-m) + 5m + \frac{1}{6} \right) |\alpha_m| |\alpha_{k-m}| + (5m^2 + 2m) |\alpha_m| |\beta_{k-m}| \right) + \right. \\ \left. + 2 \sum_{p=2}^{k-1} \sum_{m=1}^{p-1} \left( (15m+1) |\alpha_m| |\alpha_{p-m}| |\beta_{k-p}| + \frac{5}{3} |\alpha_m| |\alpha_{p-m}| |\alpha_{k-p}| + 3m |\alpha_m| |\beta_{p-m}| |\beta_{k-p}| \right) + \right. \\ \left. + 2 \sum_{l=3}^{k-1} \sum_{p=2}^{l-1} \sum_{m=1}^{p-1} (3|\beta_{l-p}| |\beta_{k-l}| + 10|\alpha_{l-p}| |\beta_{k-l}|) |\alpha_m| |\alpha_{p-m}| \right) \leq \frac{6}{k(6k+1)(k-1)} \times \\ \times \left( \left( \frac{11}{9}\zeta^4 + \frac{2}{3}\zeta^3 + \frac{68}{9}\zeta^2 \right) k^3 - \left( \frac{22}{3}\zeta^4 + \frac{5}{3}\zeta^3 + 4\zeta^2 \right) k^2 + \left( \frac{121}{9}\zeta^4 - 3\zeta^3 - \frac{61}{18}\zeta^2 \right) k - \right. \\ \left. - \frac{22}{3}\zeta^4 + \frac{22}{3}\zeta^3 - \frac{1}{6}\zeta^2 \right) \leq \frac{11}{9}\zeta^4 + \frac{2}{3}\zeta^3 + \frac{68}{9}\zeta^2 \leq \zeta, \text{ если } 0 < \zeta \leq M.$$

$$|\beta_k| = \left| \frac{1}{3k} \alpha_k - \frac{2}{k} \sum_{m=1}^{k-1} \alpha_m \beta_{k-m} \right| \leq \frac{1}{3k} |\alpha_k| + \frac{2}{k} \sum_{m=1}^{k-1} |\alpha_m| |\beta_{k-m}| \leq \frac{2}{3}\zeta^2 + \frac{1}{3k} \zeta (1 - 2\zeta^2) \leq \frac{1}{3}\zeta, \text{ если } 0 < \zeta \leq M.$$

На основании метода математической индукции заключаем, что  $|\alpha_k| \leq \zeta$ ,  $|\beta_k| \leq \frac{1}{3}\zeta$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ , если  $\zeta$  подчинено условию  $0 < \zeta \leq M$ , где  $M$  взято из (41).

Используя полученные оценки, можем записать

$$\ln \sqrt[k]{|\alpha_k|} \leq \frac{1}{k} \ln |\zeta|, \quad \ln \sqrt[k]{|\beta_k|} \leq \frac{1}{k} \ln \left| \frac{\zeta}{3} \right|, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

откуда следует, что справедлива

Л е м м а. *Существуют пределы*

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \ln \sqrt[k]{|\alpha_k|} = \sigma_1, \quad \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \ln \sqrt[k]{|\beta_k|} = \sigma_2,$$

где  $\alpha_k, \beta_k, k = 1, 2, 3, \dots$  – коэффициенты рядов (37), (38).

Числа  $\sigma_1, \sigma_2$  являются абсциссами абсолютной сходимости рядов (37), (38) соответственно, поэтому ряды (37), (38) сходятся абсолютно в полуплоскости  $\text{Re } t > \sigma$ , где

$$\sigma = \max \{ \sigma_1, \sigma_2 \}. \quad (42)$$

Поскольку уравнение (6) инвариантно при преобразовании (1), полагая  $f(t) = \frac{h}{t-t_0} - \ln A$ , из (38) получим трехпараметрическое решение уравнения (6)

$$y = \frac{h}{6(t-t_0)^2} - \frac{h}{(t-t_0)^2} \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k A^k e^{-\frac{kh}{t-t_0}}, \quad (43)$$

где  $A, h, t_0$  – произвольные постоянные,  $\beta_1 = \frac{1}{3}$ , остальные коэффициенты  $\beta_k, k = 2, 3, 4, \dots$ , определяются единственным образом по рекуррентным формулам (39), (40), где  $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = \frac{53}{26}, \alpha_3 = \frac{5101}{2964}$ .

З а м е ч а н и е 4. Трехпараметрическое решение (43) является частным. Аналогично, как и в замечании 3, можно указать такие  $\alpha_0, \alpha_2, \alpha_3$ , что ряд (36) совпадет с тем, который получим при разложении (43) в ряд Лорана по степеням  $(t-t_0)^{-1}$ .

Ряд (43) будет абсолютно сходящимся при условии

$$\text{Re} \frac{h}{t-t_0} > \mu, \quad (44)$$

где  $\mu = \sigma + \ln |A|$ ,  $\sigma$  взято из (42).

Из (44) следует  $\frac{\bar{h}}{\bar{t}-\bar{t}_0} + \frac{h}{t-t_0} > 2\mu$ . Так как  $(t-t_0)(\bar{t}-\bar{t}_0) = (|t-t_0|)^2 > 0$  при  $t \neq t_0$ , то  $2\mu(t-t_0)(\bar{t}-\bar{t}_0) < \bar{h}(t-t_0) + h(\bar{t}-\bar{t}_0)$  или

$$2\mu\bar{t} - (2\mu t_0 + h)\bar{t} - (2\mu\bar{t}_0 + \bar{h})t + 2\mu t_0\bar{t}_0 + h\bar{t}_0 + \bar{h}t_0 < 0. \quad (45)$$

Неравенством (45) задана область, границей которой является линия с уравнением

$$2\mu\bar{t} - (2\mu t_0 + h)\bar{t} - (2\mu\bar{t}_0 + \bar{h})t + 2\mu t_0\bar{t}_0 + h\bar{t}_0 + \bar{h}t_0 = 0. \quad (46)$$

Пусть  $\mu \neq 0$ . Тогда  $2\mu \left( (t-t_0)(\bar{t}-\bar{t}_0) - \frac{\bar{h}}{2\mu}(t-t_0) - \frac{h}{2\mu}(\bar{t}-\bar{t}_0) \right) < 0, 2\mu \left( \left( t-t_0 - \frac{h}{2\mu} \right) \left( \bar{t}-\bar{t}_0 - \frac{\bar{h}}{2\mu} \right) - \frac{h\bar{h}}{4\mu^2} \right) < 0,$

т. е.  $2\mu \left( \left| t-t_0 - \frac{h}{2\mu} \right|^2 - \frac{h\bar{h}}{4\mu^2} \right) < 0$ . Если  $\mu > 0$ , то имеем  $\left| t-t_0 - \frac{h}{2\mu} \right|^2 < \frac{h\bar{h}}{4\mu^2}$ , откуда  $\left| t-t_0 - \frac{h}{2\mu} \right| < \frac{|h|}{2\mu}$ .

Таким образом, ряд (43) сходится внутри круга с границей (46), имеющего центр в точке  $t_1 = t_0 + \frac{h}{2\mu}$  и радиус  $R = \frac{|h|}{2\mu}$ . Если  $\mu < 0$ , то получим  $\left|t - t_0 - \frac{h}{2\mu}\right| > \frac{|h|}{2|\mu|}$ . В этом случае ряд (43) сходится вне круга с границей (46), имеющего центр в точке  $t_1 = t_0 + \frac{h}{2\mu}$  и радиус  $R = \frac{|h|}{2|\mu|}$ . Если  $\mu = 0$ , то уравнение (46) задана прямая  $ht + \bar{h}t - \bar{h}t_0 - \bar{h}t_0 = 0$ .

Аналогично, как в [6], можно показать, что (46) является подвижной особой линией для ряда (43) и координаты любой точки, лежащей на подвижной особой линии (46), являются существенно особыми для членов ряда (43).

Таким образом, с учетом леммы, заключаем, что справедлива

**Т е о р е м а 4.** Уравнение (6) имеет трехпараметрические решения (34), (35), (43). При этом ряд (43) сходится в области, ограниченной подвижной особой линией с уравнением (46), и координаты любой точки, лежащей на подвижной особой линии, являются существенно особыми для членов ряда (43).

**Заключение.** В работе для уравнения (6) получены следующие результаты:

- 1) построено общее решение упрощенного для (6) уравнения (7);
- 2) построено общее решение в виде рядов Лорана, сходящихся в областях:

$$\text{а) } 0 < |t - t_0| < \delta, \delta > 0; \quad \text{б) } \frac{|h|}{\delta_1 - |a|} < |t - t_0| < \frac{|h|}{|a|}, |a| < \frac{\delta_1}{2}, \delta_1 < \delta, \delta > 0;$$

3) построены решения в виде рядов Дирихле и трехпараметрические решения в виде рядов по экспонентам от дробно-линейных функций;

4) найдено двухпараметрическое рациональное решение;

5) установлено наличие трехпараметрического решения с подвижной особой линией.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант № Ф14М-148).

## Литература

1. Кондратеня С. Г. // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16, № 11. С. 2095–2098.
2. Shazy J. // Acta Math. 1911. Vol. 4. P. 317–385.
3. Мартынов И. П. // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17, № 2. С. 227–232.
4. Мартынов И. П., Яблонский А. И. // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, № 10. С. 1774–1782.
5. Мартынов И. П., Лысюк Е. С. // Веснік ГрДУ. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2012. № 3 (136). С. 38–44.
6. Ванькова Т. Н., Мартынов И. П. // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45, № 8. С. 1085–1094.
7. Мартынов И. П., Лысюк Е. С. // Веснік ГрДУ. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2013. № 2 (151). С. 44–50.
8. Андреева Т. К., Лысюк Е. С., Мартынов И. П., Пронько В. А. // Веснік ГрДУ. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2014. № 1 (170). С. 34–41.
9. Лысюк Е. С. // Проблемы физики, математики и техники. 2014. № 4 (22). С. 70–77.
10. Horn J. // Mathematik. 1896. Bd. 116, Heft 4.
11. Мартынов И. П. // Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9, № 10. С. 1780–1791.
12. Леонтьев А. Ф. Ряды экспонент. М., 1976.

I. P. MARTYNOV, A. S. LYSIUK

## ANALYTICAL PROPERTIES OF THE SOLUTIONS OF A FOURTH-ORDER NONLINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION

### Summary

Introduction of the present article indicates the object of investigation: the fourth-order differential equation. The purpose of the research is to study the analytic properties of solutions of the equation considered. In the main part of the article the solution is constructed in the form of the Laurent series. The solutions in the form of Dirichlet series and exponential series with respect to fractional-linear functions have been formulated. The issues of the series convergence, which represent the solution of this fourth-order differential equation, have been explored. The existence of three-parameter solutions with a movable singular line has been established. The obtained results can be used in the analytical theory of ordinary differential equations.

УДК 519.237

В. И. МАЛЮГИН, А. Ю. НОВОПОЛЬЦЕВ

## АНАЛИЗ МНОГОМЕРНЫХ СТАТИСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ С НЕОДНОРОДНОЙ СТРУКТУРОЙ В СЛУЧАЕ СКРЫТОЙ МАРКОВСКОЙ ЗАВИСИМОСТИ СОСТОЯНИЙ

Белорусский государственный университет

(Поступила в редакцию 22.05.2015)

**Введение.** Статистические модели с переключением состояний (*Regime Switching Models – RS-Models* [1]) являются удобным инструментом анализа сложных систем с циклической сменой классов состояний, обусловленной внешними воздействиями на систему. Указанные модели получили широкое применение в прикладных исследованиях макроэкономических процессов и финансовых рынков, а также в ряде технических приложений [1, 2]. Проблема анализа циклов на основе данных моделей может рассматриваться в контексте более общей проблемы *структурных сдвигов (structural breaks)* [3, 4], приводящих к скачкообразным изменениям параметров моделей.

Относительно модели смены состояний сложной системы на заданном множестве классов состояний могут делаться различные теоретические предположения. Для описания последовательности зависимых состояний, начиная с работы [5], применяется марковская модель *переключения состояний (Markov Switching – MS)*. В случаях, когда в рамках марковской модели имеет место высокая неопределенность относительно будущего состояния системы либо когда модель зависимости классов состояний не известна, целесообразно использовать предположение о независимости классов состояний, приводящее к моделям с *независимыми переключениями состояний (Independence Switching Models – IS-Models)*, анализу которых посвящены работы [4, 6–9]. В настоящей статье объектом исследования является модель векторной авторегрессии с экзогенными переменными и марковскими переключениями состояний (*vector autoregressive with exogenous variables model with Markov Switching states – MS-VARX*) [1] и ее частные случаи.

### 1. Многомерные модели с переключениями состояний и задачи их анализа

**Авторегрессионная форма модели.** Пусть сложная система в момент времени  $t$  характеризуется случайным вектором наблюдений,  $y_t \in \mathfrak{R}^n$ , определенным на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ , где  $\Omega$  – пространство элементарных объектов ( $\omega \in \Omega$  – элементарный объект);  $\mathfrak{F}$  –  $\sigma$ -алгебра подмножеств из  $\Omega$ ;  $\mathbf{P}$  – вероятностная мера:  $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}\{\omega \in A\}$ ,  $A \in \mathfrak{F}$ .

Пусть  $\{\Omega_0, \dots, \Omega_{L-1}\}$  – разбиение  $\Omega$  на конечное число непустых непересекающихся подмножеств таких, что  $\Omega_l \in \mathfrak{F}$ ,  $\mathbf{P}\{\Omega_l\} = \mathbf{P}\{\omega \in \Omega_l\} > 0$ ,  $\bigcup_{l \in S(L)} \Omega_l = \Omega$ ,  $S(L) = \{0, \dots, L-1\}$ . Подмножества  $\{\Omega_l\}$  будем называть *классами состояний сложной системы*, число которых равно  $L$ .

Предполагается, что случайный вектор наблюдений допускает разбиение  $y_t = (x'_t, z'_t)' \in \mathfrak{R}^n$  (где ' – знак транспонирования,  $n = N + M$ ,  $N \geq 1$ ,  $M \geq 1$ ) на подвекторы эндогенных переменных  $x_t = (x_{ij}) \in \mathfrak{R}^N$ , характеризующих состояние сложной системы, и экзогенных переменных  $z_t = (z_{tk}) \in \mathfrak{Z} \subset \mathfrak{R}^M$ , описывающих внешние воздействия на систему. В качестве базовой модели наблюдений будем использовать модель векторной авторегрессии с неоднородной циклически изменяющейся эндогенно-экзогенной структурой [4]. В общем случае будем полагать, что временной ряд  $y_t = (x'_t, z'_t)'$  описывается моделью *RS-VARX(p)* ( $p \geq 1$ ) вида

$$x_t = \sum_{i=1}^p A_{d(t),i} x_{t-i} + B_{d(t)} z_t + \eta_{d(t),t}, \quad t=1, \dots, T, \quad (1)$$

где  $x_{1-p}, \dots, x_0 \in \mathfrak{R}^N$  – заданные начальные значения;  $\eta_{d(t),t} \in \mathfrak{R}^N$  – определенные на  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$  случайные величины, соответствующие ошибкам наблюдения;  $d(t) \in S(L) = \{0, \dots, L-1\}$  – номер класса состояния.

Относительно модели (2) будем требовать выполнение следующих предположений.

М.1. Матрицы коэффициентов авторегрессии  $\{A_{l,i}\}$  ( $i=1, \dots, p$ ) для каждого класса состояний  $l \in S(L)$  удовлетворяют условию стационарности модели  $VAR(p)$  [4].

М.2. Ошибки наблюдения  $\{\eta_{l,t}\}$  ( $t=1, \dots, T$ ) являются независимыми в совокупности гауссовскими случайными векторами с нулевым вектором математического ожидания и ковариационной матрицей  $\Sigma_l: \mathbf{E}\{\eta_{l,r}\} = 0_N \in \mathfrak{R}^N$ ,  $\mathbf{E}\{\eta_{l,r} \eta'_{l,s}\} = \delta_{r,s} \Sigma_l$  ( $r, s=1, \dots, T, l \in S(L)$ ), где  $\delta_{r,s}$  – символ Кронекера.

М.3. Значения экзогенных переменных  $z_t = (z_{t1}, \dots, z_{tM})' \in \mathbf{Z} \subseteq \mathfrak{R}^M$  являются заданными.

М.4. Модель удовлетворяет условию структурной параметрической неоднородности:  $A_l \neq A_k$  и (или)  $B_l \neq B_k \quad \forall k \neq l, k, l \in S(L)$ .

При выполнении предположений М.1–М.4 модель (1) является кусочно-стационарной (*segmented stationary*) [3]. Будем рассматривать кусочно-стационарные модели с  $L$  переключающимися классами состояний, для которых  $2 \leq L < s+1$ , где  $s \geq 1$  – число структурных изменений, соответствующих смене классов состояний, в неизвестные моменты времени  $1 < \tau_1 < \dots < \tau_s < T$ . Относительно номеров классов состояний  $d(t) \equiv d_t \in S(L)$  ( $t=1, \dots, T$ ) возможны два типа предположений:

d.1.  $d_t$  ( $t=1, \dots, T$ ) – независимые в совокупности случайные величины с распределением вероятностей  $P\{d_t = l\} = \pi_l > 0$  ( $l \in S(L)$ ),  $\sum_{l \in S(L)} \pi_l = 1$ ;

d.2.  $d_t$  ( $t=1, \dots, T$ ) – образуют однородную эргодическую цепь Маркова (ОЦМ) с распределением, которое определяется вектором вероятностей начального состояния  $\pi$  и матрицей вероятностей одношаговых переходов  $P$  соответственно:

$$\pi = (\pi_l), \pi_l = \mathbf{P}\{d_1 = l\} > 0 \quad (l \in S(L)), \quad \sum_{l \in S(L)} \pi_l = 1;$$

$$P = (p_{kl}), p_{kl} = \mathbf{P}\{d_{t+1} = l \mid d_t = k\} \geq 0 \quad (k, l \in S(L)), \quad \sum_{l \in S(L)} p_{kl} = 1, \quad k \in S(L).$$

В случае двух классов состояний ( $L=2$ ) будем использовать следующие предположения относительно параметров ОЦМ:

$$\pi_0 = \pi_1 = 0,5, \quad P = \begin{pmatrix} 1-\omega & \omega \\ \omega & 1-\omega \end{pmatrix} \quad (0 < \omega < 0,5). \quad (2)$$

При условии d.1 модель (1) будем называть моделью *VARX с независимыми случайными переключениями состояний (IS-VARX)*, а в случае d.2 – моделью *VARX с марковскими переключениями состояний (MS-VARX)*.

Модель (1) включает два частных случая, имеющих самостоятельный интерес:

1) модель *многомерной линейной регрессии MLR* при отсутствии лаговых переменных, т. е. при  $p=0$  и  $B_l \neq 0_{N \times M}$  ( $l \in S(L)$ );

2) модель *векторной авторегрессии VAR* без экзогенных переменных, имеющей место при  $B_l = 0_{N \times M}$  ( $l \in S(L)$ ),  $p > 0$ .

В предположениях d.1 или d.2 этим случаям соответствуют модели *IS-MLR*, *IS-VAR* или *MS-MLR*, *MS-VAR*.

**Регрессионная форма модели.** Модель *RS-VARX* общего вида (2) в предположениях М.1–М.4, d.1, d.2 допускает представление в регрессионной форме:

$$x_t = \Pi_{d(t)} u_t + \eta_{d(t),t}, \quad (3)$$

где  $\Pi_{d(t)} = (A_{d(t),1}, \dots, A_{d(t),p}, B_{d(t)})$  – блочная матрица параметров размерности  $N \times (pN + M)$ ;  $u_t = (x'_{t-1}, \dots, x'_{t-p}, z'_t)' \in \mathfrak{R}^{Np+M}$  – составной вектор предопределенных переменных, образованный из лаговых и экзогенных переменных, значения которых известны к моменту времени  $t$  включительно. Регрессионная форма (3) используется далее при описании предлагаемых базовых алгоритмов, которые позволяют также осуществлять анализ частных случаев рассматриваемой модели при соответствующей ее спецификации.

**Задачи анализа.** Структурные изменения могут быть частичными либо полными, т. е. параметры  $\{A_{d(t),i}, B_{d(t)}, \Sigma_{d(t)}\}$  рассматриваемых моделей могут частично либо полностью различаться для различных классов состояний  $d_t \equiv d(t) \in S(L)$ . Истинные значения параметров моделей и моменты структурных изменений не известны. Имеется реализация векторного временного ряда  $y_t \in \mathfrak{R}^n$  ( $t = 1, \dots, T$ ), описываемого моделью *RS-VARX* вида (1) в условиях *d.1* или *d.2*.

Требуется разработать алгоритмы решения следующих задач статистического анализа модели:

1) расщепление смесей распределений наблюдений, описываемых моделью *MS-VARX*, которое предполагает совместное оценивание неизвестных параметров моделей и номеров классов состояний  $d_1, \dots, d_T \in S(L)$  (классификации наблюдений  $y_t$  ( $t = 1, \dots, T$ )), сложной системы для рассматриваемого периода наблюдения;

2) дискриминантный анализ моделей *MS-VARX* с целью классификации вновь поступающих наблюдений  $y_{T+k} = (x'_{T+k}, z'_{T+k})' \in \mathfrak{R}^n$  ( $k = 1, \dots, h$ ,  $h \geq 1$ ).

Очевидно, моменты переключения состояний и номера классов состояний связаны взаимно-однозначным соответствием, поэтому по оцененной последовательности  $d_1, \dots, d_T \in S(L)$  могут быть установлены моменты структурных изменений  $\{\tau_i\}$  ( $i = 1, \dots, s$ ).

Для моделей *IS-VARX* и *IS-MLR*, получаемых из (1) в предположении *d.1*, задачи 1 и 2 решены в [4]. В настоящей статье предлагаются алгоритмы решения задач 1, 2 для модели *MS-VARX* вида (1) в предположении *d.2*, которые обобщают известные постановки задач анализа векторных авторегрессионных моделей [5, 10] по двум аспектам: рассматривается класс моделей *VAR* с экзогенными переменными; помимо расщепления смесей распределений решается задача дискриминантного анализа многомерных моделей статистических зависимостей в случае марковской модели переключения классов состояний. Используется методология исследований, разработанная для моделей *IS-VARX* [4]. В случае задачи 1 предлагаются модификации *EM*-алгоритма (*Expectation-Maximization algorithm*) расщепления смеси распределений многомерных регрессионных наблюдений [7], который применяется к модели *MS-VARX*, представленной в регрессионной форме (3). Данные алгоритмы относятся к семейству алгоритмов Баума – Уэлча (*Baum – Welch algorithms*) расщепления смесей многомерных распределений, управляемых скрытой цепью Маркова (*Hidden Markov Chain*) [10] и различающихся базовыми моделями наблюдений. Вопросы сходимости *EM*-алгоритмов обсуждаются в [7, 9]. Задача 2 решается с помощью подстановочного байесовского решающего правила (БПП) групповой классификации временных рядов, которое оценено по классифицированной обучающей выборке, полученной при решении задачи 1. Данное решающее правило обобщает правило групповой классификации векторных авторегрессионных наблюдений, предложенное в [8], на случай марковской зависимости классов состояний сложной системы.

## 2. Расщепление смесей распределений наблюдений, описываемых моделью *MS-VARX*

**Представления для оценок параметров.** Для модели (1) будем применять регрессионную форму (3). Для исходной выборки многомерных авторегрессионных наблюдений будем использовать обозначение  $(\bar{X}, \bar{U})$ , где  $\bar{X} = (x'_1, \dots, x'_T)' \in \mathfrak{R}^{NT}$  – временной ряд эндогенных переменных, соответствующий временному ряду предопределенных переменных  $\bar{U} = (u'_1, \dots, u'_T)' \in \mathfrak{R}^{NpT} \times \mathfrak{Z}^T \subseteq \mathfrak{R}^{(Np+M)T}$ .

Будем также обозначать:

$\theta_l \in \mathfrak{R}^m$  ( $m = N \times (pN + M) + N(N + 1) / 2$ ) – составной вектор параметров модели *VARX* для класса состояний  $l \in S(L)$  вида (3), образованный из независимых элементов матриц  $\{\Pi_l, \Sigma_l\}$  ( $l \in S(L)$ );

$\phi \in \mathfrak{R}^q$  ( $q = Lm + (L-1)(L+1)$ ) – вектор параметров смеси распределений, включая параметры VARX-моделей  $\{\theta_l\}$  и параметры ОЦМ  $\pi, P$ ;

$D = (d_1, \dots, d_T)' \in S^T(L)$  – вектор состояний сложной системы для рассматриваемого периода наблюдения, где  $\{d_t\}$  – ОЦМ с параметрами  $\pi, P$ .

Если модель (1), (3) удовлетворяет предположениям М.1–М.4, то случайный вектор значений эндогенных переменных  $x_t \in \mathfrak{R}^N$ , соответствующий фиксированным значениям предопределенных переменных  $u_t \in \mathfrak{R}^{Np+M}$  и состоянию  $d_t = l$  ( $l \in S(L)$ ), является условно-гауссовским с плотностью распределения

$$p_X(x; u, \theta_l) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} |\Sigma_l|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x - \Pi_l u)' \Sigma_l^{-1} (x - \Pi_l u)\right\}, \quad x \in \mathfrak{R}^N, \quad u \in \mathfrak{R}^{Np+M} \quad (t=1, \dots, T). \quad (4)$$

С учетом (4) и предположения *d.2* при фиксированном векторе состояний  $D$  функция правдоподобия для вектора параметров модели  $\phi$  по выборке  $(\bar{X}, \bar{U})$  имеет вид

$$L(\phi; \bar{X}, \bar{U}, D) = \pi_{d_1} p_X(x_1; u_1, \theta_{d_1}) \prod_{t=2}^T p_{d_{t-1}, d_t} p_X(x_t; u_t, \theta_{d_t}). \quad (5)$$

Обозначим через  $\Lambda(\phi, \tilde{\phi})$  условное математическое ожидание логарифмической функции правдоподобия  $l(\phi; \bar{X}, \bar{U}, D) = \ln L(\phi; \bar{X}, \bar{U}, D)$  по распределению  $\mathbf{P}\{D | \bar{X}, \bar{U}; \tilde{\phi}\}$  случайного вектора  $D$  для фиксированной выборки  $(\bar{X}, \bar{U})$  и некоторого заданного (начального) значения вектора параметров  $\tilde{\phi}$ . В соответствии с общим подходом [4, 11] искомая оценка вектора параметров  $\phi$  максимизирует функцию  $\Lambda(\phi, \tilde{\phi})$ , которая в условиях рассматриваемой модели наблюдений допускает представление

$$\begin{aligned} \Lambda(\phi, \tilde{\phi}) &= \mathbf{E}_{\tilde{\phi}} \{l(\phi; \bar{X}, \bar{U}, D) | \bar{X}, \bar{U}; \tilde{\phi}\} = \\ &= \sum_{l \in S(L)} \ln \pi_l \tilde{\gamma}_{l,1} + \sum_{t=2}^T \sum_{k \in S(L)} \sum_{l \in S(L)} \tilde{\xi}_{kl,t} \ln p_{kl} + \sum_{t=1}^T \sum_{l \in S(L)} \tilde{\gamma}_{l,t} \ln p_X(x_t; u_t, \tilde{\theta}_l) \equiv \\ &\equiv Q_1(\{\pi_l\}) + Q_2(\{p_{kl}\}) + Q_3(\{\theta_l\}), \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\tilde{\gamma}_{l,t} = \mathbf{P}\{d_t = l | \bar{X}, \bar{U}; \tilde{\phi}\}$  – апостериорная вероятность класса состояния  $l \in S(L)$  в момент  $t$  ( $t=1, \dots, T$ ) для выборки  $(\bar{X}, \bar{U})$  и фиксированного вектора параметров  $\tilde{\phi}$ ;  $\tilde{\xi}_{kl,t} = \mathbf{P}\{d_{t+1} = l | d_t = k; \bar{X}, \bar{U}; \tilde{\phi}\}$  – апостериорная вероятность перехода системы из состояния  $k \in S(L)$  в состояние  $l \in S(L)$  в момент времени  $t$  ( $t=1, \dots, T-1$ ) при тех же условиях.

В силу сложности задачи максимизации самой функции  $\Lambda(\phi, \tilde{\phi})$  на практике применяется эквивалентные представления целевой функции, используемой на этапе максимизации EM-алгоритма, непосредственно зависящие от апостериорных вероятностей классов состояний  $\{\tilde{\gamma}_{l,t}\}, \{\tilde{\xi}_{kl,t}\}$ . Максимизация преобразованной целевой функции приводит к получению представлений для ММП-оценок параметров смеси, зависящих от  $\{\tilde{\gamma}_{l,t}\}, \{\tilde{\xi}_{kl,t}\}$ . В [11] данная проблема решена для смеси многомерных нормальных распределений с марковской моделью зависимости классов, определяемой условием *d.2*. Для рассматриваемого случая формулы для расчета  $\{\tilde{\gamma}_{l,t}\}, \{\tilde{\xi}_{kl,t}\}$  отличаются видом плотности распределений вектора наблюдений  $p_X(x; u, \theta_l)$  и имеют вид

$$\tilde{\gamma}_{l,t} = \frac{\tilde{\alpha}_{l,t} \tilde{\beta}_{l,t}}{\sum_{k \in S(L)} \tilde{\alpha}_{k,t} \tilde{\beta}_{k,t}}, \quad l \in S(L), \quad t=1, \dots, T; \quad (7)$$

$$\tilde{\xi}_{kl,t} = \frac{\tilde{\alpha}_{k,t} \tilde{p}_{kl} p_X(x_{t+1}; u_{t+1}, \tilde{\theta}_l) \tilde{\beta}_{l,t+1}}{\sum_{r \in S(L)} \sum_{s \in S(L)} \tilde{\alpha}_{r,t} \tilde{p}_{rs} p_X(x_{t+1}; u_{t+1}, \tilde{\theta}_s) \tilde{\beta}_{s,t+1}}, \quad k, l \in S(L), \quad t=1, \dots, T-1, \quad (8)$$

где

$$\tilde{\alpha}_{l,1} = \tilde{\pi}_l p_X(x_1; u_1, \tilde{\theta}_l), \tilde{\alpha}_{l,t} = \left( \sum_{k \in S(L)} \tilde{\alpha}_{k,t-1} \tilde{p}_{kl} \right) p_X(x_t; u_t, \tilde{\theta}_l), \quad t = 2, \dots, T; \quad (9)$$

$$\tilde{\beta}_{l,T} \equiv 1, \tilde{\beta}_{l,t} = \sum_{k \in S(L)} \tilde{p}_{lk} p_X(x_{t+1}; u_{t+1}, \tilde{\theta}_k) \tilde{\beta}_{k,t+1}, \quad t = T-1, T-2, \dots, 1. \quad (10)$$

Представления для оценок максимального правдоподобия параметров (вектора  $\phi$  и его составляющих  $\{\theta_l\}$  ( $l \in S(L)$ ),  $\pi, P$ ) модели  $MS-VARX(p)$  вида (3) получаются в соответствии с общим подходом [4, 11] путем максимизации функционала  $\Lambda(\phi, \tilde{\phi})$  вида (6) по неизвестным параметрам с учетом формул (7)–(10) для апостериорных вероятностей  $\{\tilde{\gamma}_{l,t}\}$ ,  $\{\tilde{\xi}_{kl,t}\}$ . Полученные оценки описываются в следующей теореме.

**Т е о р е м а 1.** Если модель  $MS-VARX$  (1), (3) удовлетворяет предположениям М.1–М.4 и d.2, известно  $L$  и наблюдаются  $\{x_t, z_t\}$  ( $t = 1, \dots, T$ ), то получающиеся в результате максимизации функции  $\Lambda(\phi, \tilde{\phi})$  вида (6) оценки параметров смеси распределений по выборке наблюдений  $(\bar{X}, \bar{U})$  для фиксированного значения вектора  $\tilde{\phi}$  допускают представления ( $k, l \in S(L)$ ):

$$\hat{\pi}_l = \tilde{\gamma}_{l,1}, \hat{p}_{kl} = \sum_{t=2}^T \tilde{\xi}_{kl,t} \left( \sum_{t=2}^T \tilde{\gamma}_{k,t-1} \right)^{-1}, \hat{\Pi}_l = \sum_{t=1}^T \tilde{\gamma}_{l,t} x_t u_t' \left( \sum_{t=1}^T \tilde{\gamma}_{l,t} u_t u_t' \right)^{-1}, \quad (11)$$

$$\hat{\Sigma}_l = \sum_{t=1}^T \tilde{\gamma}_{l,t} (x_t - \hat{\Pi}_l z_t)(x_t - \hat{\Pi}_l z_t)' \left( \sum_{t=1}^T \tilde{\gamma}_{l,t} \right)^{-1}, \quad (12)$$

где апостериорные вероятности  $\{\tilde{\gamma}_{l,t}\}$ ,  $\{\tilde{\xi}_{kl,t}\}$  вычисляются по формулам (9), (10).

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Для доказательства теоремы используется традиционная схема [4, 11]. В силу независимости по искомым параметрам слагаемых  $Q_1$ ,  $Q_2$  и  $Q_3$ , образующих представление (6) для функции  $\Lambda(\phi, \tilde{\phi})$ , задачу максимизации этой функции можно разбить на три независимые задачи максимизации функций  $Q_1(\{\pi_l\})$ ,  $Q_2(\{p_{kl}\})$  и  $Q_3(\{\theta_l\})$ , непрерывных по соответствующим параметрам. Для максимизации функций  $Q_1(\{\pi_l\})$ ,  $Q_2(\{p_{kl}\})$  с ограничениями типа равенств используется метод множителей Лагранжа. Функция  $Q_3(\{\theta_l\})$  представляется в виде

$$Q_3(\{\theta_l\}) = \sum_{l \in S(L)} \sum_{t=1}^T \tilde{\gamma}_{l,t} \left( -\frac{N}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln |\Sigma_l| - \frac{1}{2} (x_t - \Pi_l u_t)' \Sigma_l^{-1} (x_t - \Pi_l u_t) \right)$$

с последующей автономной оптимизацией по матрицам  $\{\Pi_l\}$  и  $\{\Sigma_l\}$ . В процессе вычисления применяются известные свойства матричных производных [12]. Теорема 1 доказана.

**С л е д с т в и е 1.** С учетом известной блочной структуры матриц  $\Pi_l = (A_{l,1}, \dots, A_{l,p}, B_l)$  ( $l \in S(L)$ ) по оценкам  $\{\hat{\Pi}_l\}$  однозначно восстанавливаются оценки матриц параметров  $\{\hat{A}_{l,1}, \dots, \hat{A}_{l,p}, \hat{B}_l\}$ .

**Алгоритм EM MS-VARX.** Для совместного оценивания параметров модели и классификации исходной выборки наблюдений, описываемой рассматриваемой моделью  $MS-VARX$ , предлагается итерационный EM-алгоритм (алгоритм EM MS-VARX) из семейства алгоритмов Баума – Уэлча [11].

Каждая итерация алгоритма включает два последовательно выполняемых этапа:

– этап *E* (*Expectation*), предполагающий оценивание апостериорных вероятностей и соответственно условного математического ожидания логарифмической функции правдоподобия при заданных начальных значениях параметров модели; знание апостериорных вероятностей позволяет оценить вектор  $D = (d_t) \in S^T(L)$ ;

– этап *M* (*Maximization*), на котором находятся оценки параметров смеси распределений вида (5) из условия максимума логарифмической функции правдоподобия (6) с учетом ранее полученных значений апостериорных вероятностей классов.

Алгоритм включает следующие этапы (верхний индекс  $k$  в скобках означает номер итерации).

**Задание начальных значений параметров.** Начальные значения вектора параметров смеси распределений  $\phi^{(0)}$  определяются двумя способами: 1) выбором некоторого фиксированного значения,  $\phi^{(0)} \equiv \tilde{\phi}$ ; 2) заданием начального вектора классификации  $D^{(0)} = (d_t^{(0)})(t=1, \dots, T)$  и последующего вычисления значения  $\phi^{(0)} \equiv \tilde{\phi}$  по классифицированной выборке. Дополнительно указываются значения параметров, определяющие условия останова алгоритма: показатель точности вычисления целевой функции  $\varepsilon$  ( $0 < \varepsilon \ll 1$ ) и максимальное количество итераций  $\bar{k}$ .

*Итерация  $k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ).*

**Этап  $E$ .** По формулам (7)–(10) вычисляются апостериорные вероятности  $\{\tilde{\gamma}_{l,t}, \tilde{\xi}_{kl,t}\}$ . При этом полагается  $\tilde{\phi} \equiv \phi^{(k-1)}$ . Для классификации выборки и оценивания вектора классификации  $D^{(k)} = (d_t^{(k)}) \in S^T(L)$  ( $t=1, \dots, T$ ) применяется решающее правило на основе максимума апостериорных вероятностей классов:

$$d_t^{(k)} = \arg \max_{l \in S(L)} \{\gamma_{l,t}^{(k)}\}, \quad t = 1, \dots, T. \quad (13)$$

**Этап  $M$ .** Вычисляются оценки параметров  $\{\Pi_l^{(k)}, \Sigma_l^{(k)}\}$  ( $l \in S(L)$ ),  $\pi^{(k)}$ ,  $P^{(k)}$  по формулам (11), (12) с использованием вероятностей  $\gamma_{l,t}^{(k-1)}$  и  $\xi_{ij,t}^{(k-1)}$ , вычисленных на первом этапе.

**Проверка условий останова алгоритма.** Используются два следующих условия:

1) достижение заданной точности оценивания параметров, характеризуемой двумя условиями [10]  $l_X^{(k)} \geq l_X^{(k-1)}$  и  $(l_X^{(k)} - l_X^{(2)}) < (1 + \varepsilon)(l_X^{(k-1)} - l_X^{(2)})$ , где  $l_X^{(k)} = \ln \mathbf{P}\{\bar{X}, \bar{U} | \phi^{(k)}\} = \ln \left( \sum_{l \in S(L)} \alpha_{l,T}^{(k)} \right) -$  значение логарифмической функции правдоподобия для вектора параметров  $\phi^{(k)}$  по выборке наблюдений, вычисляемое с использованием формул (9);

2) достижение максимально допустимого числа итераций  $k = \bar{k}$ .

Если одно из условий выполняется, то полагается:  $\hat{\phi} = \phi^{(k)}$ ,  $\hat{D} = D^{(k)}$ ,  $\hat{l}_X = l_X^{(k)}$ ,  $\hat{\gamma}_{l,t} = \gamma_{l,t}^{(k)}$  ( $l \in S(L)$ ,  $t = 1, \dots, T$ ), и работа алгоритма завершается, иначе алгоритм переходит к этапу  $E$ .

### 3. Дискриминантный анализ моделей $MS-VARX$

В [8] предложены подстановочные байесовские решающие правила поточечной и групповой классификации многомерных наблюдений, описываемых моделью  $IS-VARX$  с независимыми классами состояний. Для модели  $MS-VARX$  вида (1), (3) предлагается использовать модификацию решающего правила групповой классификации, учитывающую марковскую модель зависимости классов, определяемую условием  $d.2$ . В [13] подобная задача рассматривалась для случая, когда моделью наблюдений является параметрическое семейство распределений, имеющих плотность распределения вероятностей. Было предложено оптимальное в смысле минимума вероятности ошибки классификации решающее правило групповой классификации. Для решения задачи целочисленной оптимизации, возникающей при практической реализации данного решающего правила, использовался метод динамического программирования [14]. В рассматриваемом случае возможно непосредственное применение этого подхода, поскольку наблюдения, описываемые моделью  $MS-VARX$  вида (1), (3), допускают эквивалентное вероятностное описание с помощью смеси параметрических распределений вероятностей вида (4).

Решающее правило классификации выборки многомерных авторегрессионных наблюдений  $(\bar{X}, \bar{U})$ , описываемых моделью  $MS-VARX$ , допускает общее описание:  $\hat{D} = (\hat{d}_t) = D(\bar{X}, \bar{U})$ ,  $\hat{d}_t = \hat{d}_t(\bar{X}, \bar{U}) \in S(L)$ ,  $t = 1, \dots, T$ . Точность решающего правила  $\hat{D} = (\hat{d}_t) = D(\bar{X}, \bar{U})$  в соответствии с общей методологией характеризуется *вероятностью ошибки классификации*  $r$  тестируемой выборки  $(\bar{X}, \bar{U})$ , определяемой как

$$r = r(D(\bar{X}, \bar{U})) = P\{\|\hat{D} - D^0\| \neq 0\}, \quad \|\hat{D} - D\| = \sum_{t=1}^T (1 - \delta_{\hat{d}_t, d_t^0}), \quad (14)$$

где  $D^0 = (d_t^0)$ ,  $\hat{D} = (\hat{d}_t)$  – соответственно истинный вектор состояний и его оценка.

Предположим вначале, что все параметры модели  $MS-VARX$  вида (1), (3), определяемые векторами, известны. Опишем оптимальное в смысле минимума функционала  $r$  решающее правило, называемое *байесовским* [4, 13]. Будем использовать далее логарифмическую функцию правдоподобия, которая для фиксированного вектора  $D$  согласно (5) имеет вид

$$l(\phi; \bar{X}, \bar{U}, D) = \ln(L(\phi; \bar{X}, \bar{U}, D)) = \ln \pi_{d_1} + \sum_{t=2}^T \ln p_{d_{t-1}, d_t} + \sum_{t=1}^T \ln p_X(x_t; u_t, \theta_{d_t}). \quad (15)$$

**Л е м м а 1.** Если модель (1), (3) удовлетворяет предположениям М.1–М.4, d.2 и значения параметров модели  $\phi \in \mathfrak{R}^q$  известны, то решающее правило групповой классификации выборки  $(\bar{X}, \bar{U})$

$$\hat{D} \equiv \hat{D}(\bar{X}, \bar{U}) = \arg \max_{D \in S^T(L)} l(\phi; \bar{X}, \bar{U}, D), \quad (16)$$

основанное на максимизации логарифмической функции правдоподобия, минимизирует вероятность ошибки классификации  $r$  вида (14).

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** В условиях леммы вектор значений эндогенных переменных  $x_t \in \mathfrak{R}^N$ , соответствующий фиксированным значениям предопределенных переменных  $u_t \in \mathfrak{R}^{Np+M}$  и состоянию  $d_t = l (l \in S(L))$ , является условно-гауссовским с плотностью распределения (4). Согласно следствию 2 теоремы 7.8 [13], для произвольного семейства параметрических распределений, имеющих плотность распределения, решающее правило вида (18) обладает минимальной вероятностью ошибки. Лемма 1 доказана.

Для решения задачи (16) целочисленной оптимизации по  $D \in S^T(L)$ , как и в алгоритмах семейства Баума – Уэлча, применяется метод динамического программирования [14]. Использование данного метода требует специальное представление целевой функции  $l(\phi; \bar{X}, \bar{U}, D)$  через так называемые функции Беллмана.

**Л е м м а 2.** В условиях леммы 1 байесовское решающее правило (БПП) классификации выборки наблюдений  $(\bar{X}, \bar{U})$  допускает представление:

$$\hat{D} = \arg \max_{D \in S^T(L)} \sum_{t=1}^{T-1} f_t(d_t, d_{t+1}), \quad (17)$$

$$f_t(k, l) = \delta_{t,1} (\ln \pi_k + \ln p_X(x_1; u_1, \theta_k)) + \ln p_{kl} + \ln p_X(x_{t+1}; u_{t+1}, \theta_l), \quad k, l \in S(L), \quad (18)$$

где  $\delta_{t,1}$  – символ Кронекера,  $t = 1, \dots, T-1$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Формулы (17), (18) получаются в результате эквивалентного преобразования функции  $l(\phi; \bar{X}, \bar{U}, D)$ . Лемма 2 доказана.

**Т е о р е м а 2.** В условиях леммы 1 БПП групповой классификации временного ряда  $\bar{X}_1^T = (x'_1, \dots, x'_T)' \in \mathfrak{R}^{NT}$ , соответствующего временному ряду предопределенных переменных  $\bar{U}_1^T = (u'_1, \dots, u'_T)' \in \mathfrak{R}^{NpT} \times \mathfrak{Z}^T \subseteq \mathfrak{R}^{(Np+M)T}$ , реализуется с помощью процедуры динамического программирования в соответствии со следующими соотношениями:

$$\hat{d}_T = \arg \max_{k \in S(L)} F_T(k), \quad \hat{d}_t = \arg \max_{k \in S(L)} (f_t(k, \hat{d}_{t+1}) + F_t(k)), \quad t = T-1, T-2, \dots, 1, \quad (19)$$

$$F_1(l) \equiv 0, \quad F_{t+1}(l) = \max_{k \in S(L)} (f_t(k, l) + F_t(k)), \quad l \in S(L), \quad t = 1, \dots, T-1, \quad (20)$$

где  $\{F_t(k)\}$  – функции Беллмана, а функции  $\{f_t(k, l)\}$  определяются формулами (18).

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** В соответствии с общей схемой, процедура динамического программирования включает два этапа. На первом этапе рекуррентным образом вычисляются функции Беллмана  $\{F_t(l)\} (l \in S(L), t = 1, \dots, T-1)$ :  $F_{t+1}(l) = \max_{k \in S(L)} (f_t(k, l) + F_t(k))$  в предположении  $F_1(l) \equiv 0$ .

На втором – в обратном порядке по времени наблюдения находятся компоненты искомого вектора  $\hat{D}$ :  $\hat{d}_t = \arg \max_{k \in S(L)} (f_t(k, \hat{d}_{t+1}) + F_t(k)) (t = T-1, T-2, \dots, 1)$ ,  $\hat{d}_T = \arg \max_{k \in S(L)} F_T(k)$ . Теорема 2 доказана.

Если с помощью алгоритма *EM MS-VARX* по выборке  $(\bar{X}, \bar{U})$  вычислены оценки параметров модели  $\{\hat{\theta}_l\}$  ( $l \in S(L)$ ),  $\hat{\pi}$ ,  $\hat{P}$ , то при использовании их в формулах (18) вместо неизвестных истинных значений параметров получается подстановочное БПИ групповой классификации для рассматриваемой модели, которое может применяться для оценивания (прогнозирования) классов состояний сложной системы в будущие моменты времени для заданного горизонта прогнозирования  $h \geq 1$  по новой реализации временных рядов  $(\bar{X}_{T+1}^{T+h}, \bar{U}_{T+1}^{T+h})$ , где  $\bar{X}_{T+1}^{T+h} = (x'_{T+1}, \dots, x'_{T+h})' \in \mathfrak{R}^{Nh}$ ,  $\bar{U}_{T+1}^{T+h} = (u'_{T+1}, \dots, u'_{T+h})' \in \mathfrak{R}^{Nph} \times \mathfrak{Z}^h \subseteq \mathfrak{R}^{(Np+M)h}$ . Таким образом, справедливо следующее следствие из теоремы 2.

**С л е д с т в и е 2.** В условиях теоремы 2 подстановочное БПИ групповой классификации многомерных наблюдений  $(x_\tau, u_\tau)$  ( $\tau = T+1, \dots, T+h$ ), описываемых моделью модели *MS-VARX(p)* вида (1), (3) определяется соотношениями:

$$\hat{d}_{T+h} = \arg \max_{k \in S(L)} F_{T+h}(k), \quad \hat{d}_\tau = \arg \max_{k \in S(L)} (f_\tau(k, \hat{d}_{\tau+1}) + F_\tau(k)), \quad \tau = T+h-1, T+h-2, \dots, T+1, \quad (21)$$

$$F_{T+1}(l) \equiv 0, \quad F_{\tau+1}(l) = \max_{k \in S(L)} (f_\tau(k, l) + F_\tau(k)), \quad l \in S(L), \quad \tau = T+1, \dots, T+h, \quad (22)$$

где  $f_\tau(k, l) = \delta_{\tau, T+1} (\ln \hat{p}_{\hat{d}_T, k} + \ln p_X(x_\tau; u_\tau, \hat{\theta}_k)) + \ln \hat{p}_{kl} + \ln p_X(x_{\tau+1}; u_{\tau+1}, \hat{\theta}_l)$ ,  $\hat{d}_T$  – оценка состояния системы в момент времени  $T$ , полученная при классификации обучающей выборки  $(\bar{X}_1^T, \bar{U}_1^T)$  с помощью алгоритма *EM MS-VARX*.

Будем использовать следующие обозначения для предлагаемых алгоритмов: *BDA MS-VARX* – алгоритм, реализующий байесовское решающее правило групповой классификации (*Bayesian Discriminant Analysis decision rule*) (19), (20); *EDA MS-VARX* – алгоритм, реализующий подстановочное, т. е. оцененное по классифицированной выборке БПИ (*Estimated Discriminant Analysis decision rule*) (21), (22).

#### 4. Результаты компьютерного тестирования алгоритмов оценивания и классификации

Приведем результаты экспериментального тестирования точности предлагаемых алгоритмов классификации. Будем рассматривать важный для практики случай двух классов состояний ( $L = 2$ ) [15]. Предполагается, что для модели *MS-VARX* вида (1) выполняются условия М.1–М.4, а случайная последовательность номеров классов состояний  $d_t \in S(L)$  ( $t = 1, \dots, T$ ) удовлетворяет предположению *d.2*, т. е. описывается ненаблюдаемой однородной цепью Маркова. Тестовые примеры различаются значениями параметров модели наблюдений и предназначены для исследования зависимости точности алгоритмов от различных типов параметров.

**Описание тестовых экспериментов.** Рассматриваются модели *VARX* с циклическими структурными изменениями в матрице регрессионных коэффициентов, обусловленными наличием двух чередующихся классов состояний сложной системы  $\Omega_0, \Omega_1$ . Решаются задачи классификации многомерных авторегрессионных наблюдений  $\{x_t, z_t\}$  ( $t = 1, \dots, T$ ) и прогнозирования классов состояний для новых наблюдений  $\{x_t, z_t\}$  ( $t = T+1, \dots, T+h$ ).

**Тестовые примеры (ТП).** Приведем общие характеристики тестовых моделей.

*Размерность модели:*  $L = 2$ ,  $N = 2$ ,  $M = 3$ ; число оцениваемых параметров равно 29.

*Длина временных рядов* (объем выборки наблюдений)  $T$  варьируется от 100 до 2000.

*Экзогенные переменные.* Вектор экзогенных переменных  $z_t = (z_{ij}) \in \mathfrak{Z} \subseteq \mathfrak{R}^M$  является случайным и имеет равномерное распределение в области  $\mathfrak{Z} = a^M \in \mathfrak{R}^M$ ,  $a = [1, 10]$ ,  $\tilde{z} = \mathbf{E}\{z\} = (5, 5; 5, 5; 5, 5)'$ .

*Ковариационная матрица ошибок и матрицы коэффициентов регрессии:*

$$\Sigma_0 = \Sigma_1 = \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B_1 = B_0 + H;$$

$$\text{В.1. } H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0,5 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{В.2. } H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{В.3. } H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

*Характеристики точности классификации.* Матрица  $H = B_1 - B_0$  в случае  $A_1 = A_0, \Sigma_0 = \Sigma_1 = \Sigma$  определяет степень различия классов состояний, вызванных структурными изменениями в матрице коэффициентов регрессии. Количественной мерой различимости классов является межклассовое расстояние Махаланобиса  $\Delta(\tilde{z})$ , определяемое для среднего значения вектора экзогенных переменных  $\tilde{z} \in \mathfrak{Z} (\Delta(\tilde{z}) \neq 0)$ , а также соответствующая вероятность ошибки БРП [8]:

$$r(\tilde{z}) = \pi_0 r_0(\tilde{z}) + \pi_1 r_1(\tilde{z}), \quad r_l(\tilde{z}) = \Phi\left(-\frac{\Delta(\tilde{z})}{2} - (-1)^l \frac{h}{\Delta(\tilde{z})}\right), \quad h = \ln \frac{\pi_0}{\pi_1} \quad (l \in \{0, 1\}), \quad \Delta(\tilde{z}) = \sqrt{\tilde{z}' H' \Sigma^{-1} H \tilde{z}},$$

где  $\Phi(\cdot)$  – функция распределения стандартного нормального закона.

Для оценивания точности классификации используются  $K = 100$  независимых выборок наблюдений, по результатам анализа которых рассчитывается оценка вероятности ошибки классификации  $\hat{r} = K^{-1} \sum_{i=1}^K \hat{r}_i, \hat{r}_i = 1 - T^{-1} \sum_{t=1}^T \delta_{\hat{d}_t^i, d_t^0}$ , где  $D^0 = (d_t^0)$ ,  $\hat{D}^i = (\hat{d}_t^i)$  – соответственно истинный вектор состояний и его оценка для  $i$ -й выборки.

Используются обозначения:  $\hat{r}_{EM}, \hat{r}_{BDA}$  и  $\hat{r}_{EDA}$  – оценки вероятностей ошибок классификации для алгоритмов *EM MS-VARX*, *BDA MS-VARX* и *EDA MS-VARX* соответственно;  $\hat{r}_{EDA}^h$  – оценка вероятности ошибки классификации (точности прогнозирования класса состояния) для новых наблюдений  $\{x_t\}, \{z_t\} (t = T + 1, \dots, T + h)$  с помощью алгоритма *EDA MS-MLR*.

*Характеристики точности* оценивания параметров модели *MS-VARX*:  $\delta_\theta = \|\hat{\theta} - \theta\|$ ,  $\delta_P = \|\hat{P} - P\|$ , где  $\|\cdot\|$  – евклидова норма матрицы или вектора.

*Управляемые параметры алгоритма EM MS-VARX*: начальный вектор состояний системы  $\tilde{D} = (\tilde{d}_1, \dots, \tilde{d}_T)'$  – начальное значение вектора состояний – реализация дискретного случайного вектора с равномерным распределением на  $S^T(L)$ , одинаковое для всех тестовых примеров; параметр условия сходимости  $\varepsilon = 0,0001$ ; максимальное число итераций  $\bar{k} = 100$ .

**Результаты тестовых экспериментов.** Приведем описание тестовых примеров и полученных результатов экспериментального исследования точности классификации и оценивания параметров для предлагаемых алгоритмов.

*Тестовый пример 1 (ТП 1). Исследование влияния степени выраженности структурных изменений на точность алгоритмов.* Рассматриваются варианты значений В.1–В.3 для матрицы коэффициентов регрессии, которые соответствуют различной степени выраженности структурных изменений в коэффициентах при экзогенных переменных, определяемой межклассовым расстоянием  $\Delta(\tilde{z})$ . Полагается:  $A_1 = A_2 = O_{N \times N}$ ,  $\omega = 0,2$  (см. формулу (2)). Оценки показателей точности алгоритмов представлены в табл. 1.

Таблица 1. Исследование влияния структурных изменений в коэффициентах регрессии

Варианты экспериментов	Статистики					
	$\Delta(\tilde{z})$	$\hat{r}_{BDA}$	$\hat{r}_{EM}$	$\hat{r}_{EDA}^h$	$\delta_\theta$	$\delta_P$
В.1	1,23	0,198	0,294	0,34	0,265	0,28
В.2	2,46	0,097	0,1	0,109	0,191	0,073
В.3	4,919	0,017	0,02	0,018	0,166	0,059

*Тестовый пример 2. Исследование влияния объема выборки на точность алгоритмов.* В условиях ТП 1 (вариант В.2) исследуется зависимость точности алгоритмов от объема исходной выборки  $T$ . Для пяти вариантов значений  $T \in \{100, 200, 500, 1000, 2000\}$  и  $h = 100$  оценки вероятностей ошибок классификации и показатели точности оценивания параметров модели представлены на рис. 1.

*Тестовый пример 3. Исследование влияния степени зависимости классов на точность алгоритма EM MS-VARX.* В условиях тестового примера 2 исследуется точность классификации и оценивания параметров модели в условиях ослабевающей зависимости классов состояний, определяемой

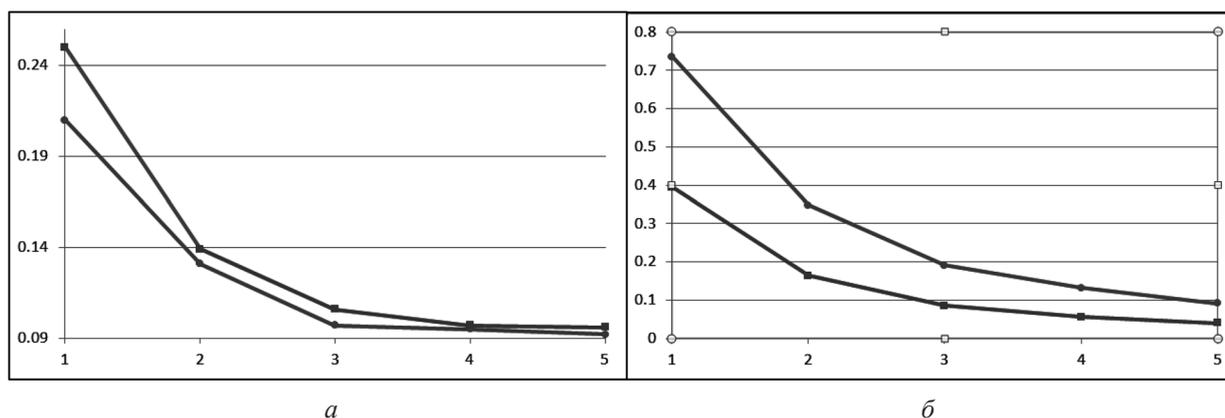


Рис. 1. Зависимость показателей точности алгоритмов от объема выборки  $T$ :

$$a - \bullet - \hat{r}_{EM}, \blacksquare - \hat{r}_{EDA}^h; \quad b - \bullet - \delta_\theta, \blacksquare - \delta_\rho$$

параметром  $\omega$ . Результаты для пяти вариантов  $\omega \in \{0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5\}$  и  $T = 100$  представлены на рис. 2.

*Тестовый пример 4. Исследование влияния структурных изменений в матрицах коэффициентов авторегрессии.* Полагается:  $\omega = 0,2$ , матрицы коэффициентов регрессии определяются вариантом В.3. Используются четыре варианта матриц коэффициентов авторегрессии:

$$\begin{aligned} \text{A.1. } A_1 = A_0 &= \begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}; & \text{A.2. } A_0 = A_1 &= \begin{pmatrix} 0,6 & 0 \\ 0 & 0,6 \end{pmatrix}; \\ \text{A.3. } A_0 = -A_1 &= \begin{pmatrix} 0,6 & 0 \\ 0 & 0,6 \end{pmatrix}; & \text{A.4. } A_0 = -A_1 &= \begin{pmatrix} 0,9 & 0 \\ 0 & 0,9 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Результаты экспериментов представлены в табл. 2.

Таблица 2. Влияние структурных изменений в коэффициентах авторегрессии

$T$	A.1		A.2		A.3		A.4	
	$\hat{r}_{BDA}$	$\hat{r}_{EM}$	$\hat{r}_{BDA}$	$\hat{r}_{EM}$	$\hat{r}_{BDA}$	$\hat{r}_{EM}$	$\hat{r}_{BDA}$	$\hat{r}_{EM}$
100	0,0077	0,0787	0,0077	0,0588	0,0013	0,0015	0,0001	0,0049
200	0,0074	0,0128	0,0074	0,0082	0,0012	0,0013	0,0002	0,0002

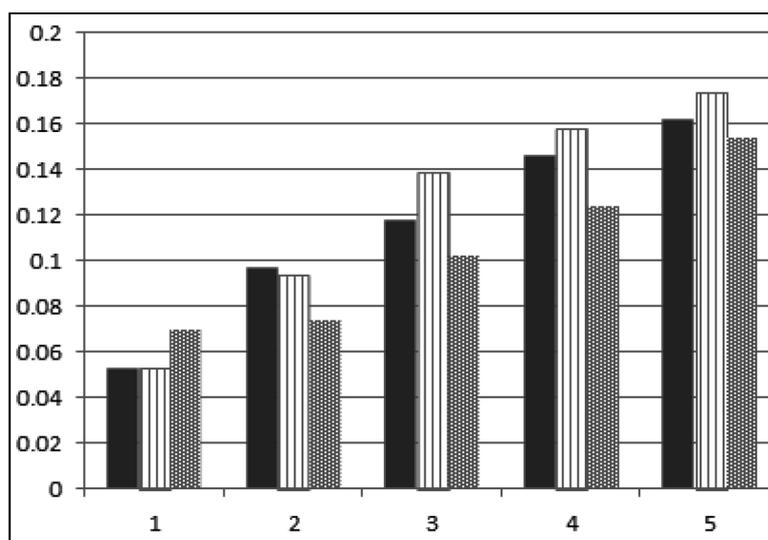


Рис. 2. Влияние степени зависимости классов на точность алгоритма  $EM\ MS-VARX$ :  
 ■ – межклассовое расстояние  $\Delta(\tilde{z})$ ; □ – оценка вероятности ошибки классификации  $\hat{r}_{EM}$ ;  
 ▨ – показатель точности оценивания параметров модели  $\delta_\theta$

**Выводы по результатам тестирования алгоритмов.** На основе тестовых экспериментов можно сделать следующие выводы относительно точности предлагаемых алгоритмов классификации и оценивания параметров: 1) наблюдается ожидаемое повышение точности алгоритмов при увеличении межклассового расстояния и объема наблюдений (см. табл. 1 и рис. 1, 2); 2) при ослаблении зависимости классов наблюдений ( $\omega \rightarrow 0,5$ ) межклассовое расстояние уменьшается и точность классификации для алгоритма *EM MS-VARX* существенно падает (см. рис. 2), что говорит о целесообразности использования алгоритма *IS MS-VARX* [4] для независимых классов состояний; 3) точность классификации зависит от числа параметров, подверженных структурным изменениям и степени выраженности структурных изменений; наличие структурных изменений в матрицах коэффициентов авторегрессии способствует существенному повышению точности классификации (см. табл. 1, 2).

**Закключение.** В статье предлагаются алгоритмы статистического анализа многомерных моделей регрессионного и авторегрессионного типа с неоднородной параметрической структурой, обусловленной существованием различных циклически повторяющихся классов состояний. Предполагается, что смена классов состояний сопровождается скачкообразным изменением параметров модели и происходит под управлением ненаблюдаемой однородной цепи Маркова. Предлагается *EM*-алгоритм совместного оценивания неизвестных параметров модели и состояний системы по исходной выборке наблюдений, а также алгоритм дискриминантного анализа вновь поступающих наблюдений. На основе результатов экспериментального исследования можно сделать общий вывод о работоспособности и приемлемой точности предлагаемых алгоритмов анализа векторных авторегрессионных моделей с неоднородной структурой в рамках используемых модельных предположений. Предлагаемые алгоритмы могут применяться для анализа циклических изменений экономических систем [1, 15].

## Литература

1. Hamilton J. D. // New Palgrave Dictionary of Economics. 2nd Edition. Basingstoke, 2008. P. 1755–1804.
2. Sims C. A., Waggoner D. F., Zha T. // J. of Econometrics. 2008. Vol. 146 (2). P. 255–274.
3. Perron P. // Palgrave handbook of econometrics. Basingstoke, 2006. Vol. 1: Econometric Theory. P. 278–352.
4. Малюгин В. И. Методы анализа многомерных эконометрических моделей с неоднородной структурой. Минск, 2014.
5. Hamilton J. D. // Econometrica. 1989. Vol. 57 (2). P. 357–384.
6. Малюгин В. И., Харин Ю. С. // Автоматика и телемеханика. 1986. № 7. С. 61–69.
7. Малюгин В. И. // Информатика. 2008. № 3 (19). С. 17–28.
8. Малюгин В. И. // Информатика. 2008. № 4 (20). С. 79–88.
9. Малюгин В. И. // Изв. НАН Беларуси. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. 2013. № 3. С. 43–53.
10. Droumaguet M. Markov-Switching Vector Autoregressive Models: Monte Carlo Experiment, Impulse Response Analysis, and Granger-Causal Analysis : thesis of Doctor of Economics. Florence, 2012.
11. Bilmes J. A. A Gentle Tutorial of the EM Algorithm and its Application to Parameter Estimation for Gaussian Mixture and Hidden Markov Models: Technical Report. Berkeley, 1998.
12. Андерсон Т. Введение в многомерный статистический анализ: пер. с англ. М., 1963.
13. Харин Ю. С. Робастность в статистическом распознавании образов. Минск, 1992.
14. Беллман Р. Динамическое программирование. М., 1960.
15. Малюгин В. И. // Проблемы прогнозирования и государственного регулирования социально-экономического развития: материалы Междунар. конф.: в 3 т. Минск, 2014. Т. 1. С. 122–133.

V. I. MALUGIN, A. Yu. NOVOPOLTSEV

## ANALYSIS OF MULTIVARIATE STATISTICAL MODELS WITH HETEROGENEOUS STRUCTURE IN THE CASE OF HIDDEN MARKOV DEPENDENCE OF THE STATES

### Summary

For vector autoregressive model with heterogeneous endogenous-exogenous structure and Markov switching states we propose the EM-algorithm for mixture decomposition, as well as discriminant analysis algorithm for classification of new observations. Accuracy of the algorithms is examined by means of computer simulation experiments.

УДК 517.51

В. Р. МИСЮК<sup>1</sup>, А. А. ПЕКАРСКИЙ<sup>2</sup>СОПРЯЖЕННЫЕ ФУНКЦИИ НА ОТРЕЗКЕ И СООТНОШЕНИЯ  
ДЛЯ ИХ НАИЛУЧШИХ РАВНОМЕРНЫХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ<sup>1</sup>Гродненский государственный университет им. Я. Купалы<sup>2</sup>Белорусский государственный университет

(Поступила в редакцию 10.04.2015)

В теории приближения периодических функций посредством тригонометрических полиномов хорошо известны результаты Н. К. Бари и С. Б. Стечкина (см. [1], а также сформулированную ниже теорему 5) о связи наилучших равномерных приближений самой функции и ее сопряженной. В настоящей статье решена аналогичная задача в случае приближения функций, заданных на отрезке, посредством алгебраических многочленов.

Через  $C(I)$  обозначим банахово пространство функций, непрерывных на отрезке  $I = [-1, 1]$ . При этом норма  $g \in C(I)$  определяется стандартно, т. е.  $\|g\|_{C(I)} = \max_{x \in I} |g(x)|$ .  $\mathcal{P}_n$  – множество алгебраических многочленов степени не выше  $n$  ( $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ ). Для функции  $g \in C(I)$  введем

$$E_n(g) = \inf \left\{ \|f - p_n\|_{C(I)} : p_n \in \mathcal{P}_n \right\}$$

– наилучшее равномерное приближение множеством  $\mathcal{P}_n$ .

Пусть функция  $g(t)$  определена на отрезке  $I$  и интегрируема на нем с весом  $1/\sqrt{1-t^2}$ . Тогда  $\hat{g}$  (функция, сопряженная  $g$ ) определяется следующим образом:

$$\hat{g}(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi} \int_I \frac{g(t)}{t-x} \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad x \in I. \quad (1)$$

Как известно, указанный сингулярный интеграл, понимаемый в смысле главного значения по Коши, существует почти всюду на  $I$ .

Основными результатами настоящей статьи являются теоремы 1 и 2. При этом через  $c, c_1, c_2, \dots$  мы обозначаем абсолютные положительные постоянные;  $c(\dots), c_1(\dots), c_2(\dots), \dots$  – некоторые положительные величины, зависящих лишь от указанных в скобках параметров.

**Т е о р е м а 1.** Пусть функция  $g \in C(I)$  такова, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} E_k(g) < \infty. \quad (2)$$

Тогда  $\hat{g} \in C(I)$  и для любого  $n \in \mathbb{N}$  выполняется неравенство

$$E_n(\hat{g}) \leq \frac{c_1}{n} \sum_{k=0}^n E_k(g) + c_2 \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k} E_k(g).$$

С л е д с т в и е. Пусть  $g \in C(I)$ ,  $\alpha > 0$  и  $E_n(g) = O(n^{-\alpha})$  при  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда  $\hat{g} \in C(I)$  и при  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$  имеет место соотношение

$$E_n(\hat{g}) = \begin{cases} O(1/n^\alpha), & 0 < \alpha < 1; \\ O(\ln n/n), & \alpha = 1; \\ O(1/n), & \alpha > 1. \end{cases}$$

Т е о р е м а 2. Пусть  $g \in C(I)$  и  $s \in \mathbb{N}$ . Если сходится ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} k^{s-1} E_k(g)$ , то функция  $\hat{g}$  непрерывно дифференцируема  $s$  раз на интервале  $(-1, 1)$  и

$$\hat{g}^{(s)}(x) = O\left(1/\left(1-x^2\right)^{s-1/2}\right) \text{ при } x \in (-1, 1). \quad (3)$$

Для обсуждения теорем 1 и 2 отметим равенство

$$\int_I \frac{1}{t-x} \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = 0, \quad x \in (-1, 1), \quad (4)$$

которое несложно найти, используя определение главного значения несобственного интеграла по Коши. Равенство (4) является также частным случаем формулы (47.28) из [2]. Из (1) и (4) находим, что

$$\hat{g}(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi} \int_I \frac{g(t) - g(x)}{t-x} \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad x \in I. \quad (5)$$

Отсюда получаем, что если  $p_n$  – алгебраический многочлен степени  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ , то  $\hat{p}_0(x) = 0$  при  $x \in I$ . Если же  $n \in \mathbb{N}$ , то  $\hat{p}_n(x) = \sqrt{1-x^2} q_{n-1}(x)$  при  $x \in I$ , где  $q_{n-1}$  – алгебраический многочлен степени  $n-1$ . В связи с этим отметим работу [3], в которой изучаются наилучшие равномерные приближения функции  $\hat{g}$  посредством функций вида  $\sqrt{1-x^2} p_n(x)$ , где  $p_n \in \mathcal{P}_n$ .

Если  $g(x) = x$ , то из (5) следует, что  $\hat{g}(x) = \sqrt{1-x^2}$ . В этом случае  $E_0(g) = 1$  и  $E_n(g) = 0$  при  $n \geq 1$ . С другой стороны, из результата С. Н. Бернштейна (см., напр., [1, п. 7.2.1]) о наилучшем приближении функции  $|x|$  на  $I$  находим, что  $E_n(\hat{g}) \sim c/n$  при  $n \rightarrow \infty$ . Этот простой пример показывает следующее. Во-первых, появление переходного показателя  $\alpha = 1$  в теореме 1 связано с существом решаемой задачи и, во-вторых, оценка (3) из теоремы 2 является точной.

Перейдем к доказательству теорем 1 и 2. В теории функций более известна сопряженная функция на торе  $\mathbb{T} = [0, 2\pi)$ , чем на отрезке  $I$ . Именно, сопряженная функция  $\tilde{f}$  для суммируемой на  $\mathbb{T}$  функции  $f$  определяется следующим образом:

$$\tilde{f}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(\tau) \operatorname{ctg} \frac{\theta - \tau}{2} d\tau, \quad \theta \in \mathbb{T}.$$

Здесь, как и в (1), сингулярный интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

В следующей лемме 1 устанавливается связь между сопряженными функциями  $\hat{g}$  и  $\tilde{f}$ . При этом для  $t \in \mathbb{R}$  мы полагаем  $\operatorname{sign} t = 1$  при  $t > 0$ ,  $-1$  при  $t < 0$  и  $0$  при  $t = 0$ .

Л е м м а 1. Пусть функция  $g(t)$  определена на отрезке  $I$ , суммируема на нем с весом  $1/\sqrt{1-t^2}$  и  $f(\theta) = g(\cos \theta)$ ,  $\theta \in \mathbb{T}$ . Тогда почти для всех  $\theta \in \mathbb{T}$  имеет место равенство

$$\hat{g}(\cos \theta) = \tilde{f}(\theta) \cdot \operatorname{sign}(\sin \theta).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о легко осуществить с помощью замены  $x = \cos \theta$  и  $t = \cos \tau$  в формуле (1) для  $\hat{g}(x)$ .

Введем некоторые понятия и сформулируем теоремы 3–5 и лемму 2, необходимые нам для доказательства теоремы 1.

Через  $C(\mathbb{T})$  обозначим банахово пространство непрерывных функций на торе  $\mathbb{T}$ . Для  $f \in C(\mathbb{T})$  вводится стандартная норма, т. е.  $\|f\|_{C(\mathbb{T})} = \max_{t \in \mathbb{T}} |f(t)|$ . Через  $\omega(\delta, f)$ ,  $0 \leq \delta \leq \pi$ , обозначим модуль непрерывности функции  $f$ . Именно,  $\omega(\delta, f) = \sup\{|f(\theta_1) - f(\theta_2)| : \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{T}, |\theta_1 - \theta_2| \leq \delta\}$ . Через  $\mathcal{T}_n$  обозначим множество тригонометрических полиномов степени не выше  $n$  ( $n \in \mathbb{N}_0$ ). Для  $f \in C(\mathbb{T})$  введем  $\mathcal{E}_n(f) = \inf\{\|g - t_n\|_{C(\mathbb{T})} : t_n \in \mathcal{T}_n\}$  – наилучшее приближение множеством  $\mathcal{T}_n$ .

**Т е о р е м а 3** (Д. Джексон, см. [1, п. 5.5.4]). *Если  $f \in C(\mathbb{T})$ , то*

$$\mathcal{E}_n(f) \leq 3\omega\left(\frac{1}{n}, f\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

**Т е о р е м а 4** (С. Б. Стечкин, см. [1, п. 6.1.1]). *Если  $f \in C(\mathbb{T})$ , то*

$$\omega\left(\frac{1}{n}, f\right) \leq \frac{8}{n} \sum_{k=0}^n \mathcal{E}_k(f), \quad n \in \mathbb{N}.$$

**Т е о р е м а 5** (С. Б. Стечкин, см. [1, п. 5.9.2]). *Если  $f \in C(\mathbb{T})$  и сходится ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \mathcal{E}_k(f)$ , то  $\tilde{f} \in C(\mathbb{T})$  и*

$$\mathcal{E}_n(\tilde{f}) \leq c_1 \mathcal{E}_n(f) + c_2 \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k} \mathcal{E}_k(f), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

**Л е м м а 2** [4, гл. 3, § 1]. *Пусть  $g \in C(I)$  и  $f(\theta) = g(\cos \theta)$ ,  $\theta \in \mathbb{T}$ . Тогда  $\mathcal{E}_n(f) = E_n(g)$  для любого  $n \in \mathbb{N}_0$ .*

**Д о к а з а т е л ь с т в о** теоремы 1. Пусть  $g \in C(I)$  и удовлетворяет условию (2). Положим  $f(\theta) = g(\cos \theta)$ ,  $\theta \in \mathbb{T}$ . Используя теорему 5 и лемму 2, получаем

$$\mathcal{E}_k(\tilde{f}) \leq c_1 E_k(g) + c_2 \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{j} E_j(g), \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

На основании теоремы 4 отсюда находим, что при  $n \in \mathbb{N}$

$$\omega\left(\frac{1}{n}, \tilde{f}\right) \leq \frac{c_3}{n} \sum_{k=0}^n E_k(g) + \frac{c_4}{n} \sum_{k=0}^n \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{j} E_j(g).$$

Меняя порядок суммирования в двойной сумме последнего неравенства, убеждаемся, что

$$\omega\left(\frac{1}{n}, \tilde{f}\right) \leq \frac{c_3 + c_4}{n} \sum_{k=0}^n E_k(g) + \frac{c_4}{n} \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{j} E_j(g). \quad (6)$$

Поскольку функция  $f(\theta) = g(\cos \theta)$  четная, то  $\tilde{f}(\theta)$  – нечетная и, значит,  $\lambda(\theta) := \tilde{f}(\theta) \cdot \text{sign}(\sin \theta)$  – четная функция. Используя это, несложно найти, что  $\omega(\delta, \lambda) \leq 2\omega(\delta, \tilde{f})$  при  $0 \leq \delta \leq \pi$ . Поэтому из (6) и теоремы 3 немедленно следует, что

$$\mathcal{E}_n(\lambda) \leq \frac{c_5}{n} \sum_{k=0}^n E_k(g) + c_6 \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k} E_k(g). \quad (7)$$

Ввиду леммы 1 имеем  $\lambda(\theta) = \hat{g}(\cos \theta)$  при  $\theta \in [0, \pi]$  и, согласно лемме 2,  $\mathcal{E}_n(\lambda) = E_n(\hat{g})$ . Поэтому из (7) вытекает утверждение теоремы 1.

Следующая теорема 6 дает неравенство типа Сегё для производных сопряженного алгебраического многочлена. Доказательство теоремы 2 основано на теореме 6, и мы его не излагаем, так как

оно проводится хорошо известным методом С. Н. Бернштейна доказательства обратных теорем теории аппроксимации.

**Т е о р е м а 6.** Пусть  $p_n \in \mathcal{P}_n$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ , и  $s \in \mathbb{N}$ . Тогда для любого  $x \in (-1, 1)$  имеет место неравенство

$$\left| \hat{p}_n^{(s)}(x) \right| \leq c(s) \max \left\{ \frac{n^s}{(1-x^2)^{s/2}}, \frac{n}{(1-x^2)^{s-1/2}} \right\} \cdot \|p_n\|_{C(I)}.$$

Для доказательства теоремы 6 нам понадобятся следующие теорема 7 и лемма 3.

**Т е о р е м а 7** (Г. Сегё, [1, п. 4.8.22]). Пусть  $t_n \in \mathcal{T}_n$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$  и  $k \in \mathbb{N}$ . Тогда

$$\left\| \tilde{t}_n^{(k)} \right\|_{C(\mathbb{T})} \leq n^k \|t_n\|_{C(\mathbb{T})}.$$

**Л е м м а 3** [5, с. 50]. Пусть функция  $y = \omega(x)$  непрерывно дифференцируема  $s$  раз ( $s \in \mathbb{N}$ ) на интервале  $X \subset \mathbb{R}$ , а функция  $z = \varphi(y)$  непрерывно дифференцируема  $s$  раз на некотором интервале, содержащем  $\omega(X)$ . Тогда сложная функция  $x \mapsto (\varphi \circ \omega)(x)$  непрерывно дифференцируема  $s$  раз на  $X$  и имеет место равенство

$$(\varphi \circ \omega)^{(s)} = \sum \frac{s!}{m_1! m_2! \dots m_s!} \cdot (\varphi^{(m_1+m_2+\dots+m_s)} \circ \omega) \cdot \left( \frac{\omega'}{1!} \right)^{m_1} \left( \frac{\omega''}{2!} \right)^{m_2} \dots \left( \frac{\omega^{(s)}}{s!} \right)^{m_s},$$

где суммирование распространяется по всем наборам неотрицательных целых чисел  $m_1, m_2, \dots, m_s$ , удовлетворяющих условию  $1 \cdot m_1 + 2 \cdot m_2 + \dots + s \cdot m_s = s$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о** теоремы 6. Пусть  $p_n \in \mathcal{P}_n$  и  $t_n(\theta) := p_n(\cos \theta)$ ,  $\theta \in \mathbb{T}$ . Тогда, согласно лемме 1,  $\hat{p}_n(x) = \tilde{t}_n(\arccos x)$ ,  $x \in I$ . Поскольку  $\|t_n\|_{C(\mathbb{T})} = \|p_n\|_{C(I)}$ , то, используя теорему 7 и лемму 3, находим

$$\left| \hat{p}_n^{(s)}(x) \right| \leq c_1(s) \left( \sum_{k=1}^s \frac{n^k}{(1-x^2)^{s-k/2}} \right) \cdot \|p_n\|_{C(I)}, \quad x \in (-1, 1).$$

При фиксированном  $x \in (-1, 1)$  слагаемые в скобках монотонны относительно  $k$ , поэтому из последнего неравенства следует теорема 6.

В заключение отметим, что аналоги проблем, рассмотренных в данной работе, в монографии [6] и статье [7], изучаются для равномерных рациональных приближений функций.

Работа выполнена в соответствии с программой ГПНИ «Конвергенция», 2011–2015 гг.

## Литература

1. Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного. М., 1960.
2. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., 1977.
3. Моторный В. П. // Тр. МИ РАН. 2001. Т. 232. С. 268–285.
4. Даугавет И. К. Введение в теорию приближения функций. Л., 1977.
5. Бурбаки Н. Функции действительного переменного. М., 1965.
6. Lorentz G. G., Golitschek M. v., Makovoz Y. Constructive Approximation. Advanced Problems. Berlin, 1996.
7. Пекарский А. А. // Мат. сб. 1987. Т. 133, № 1. С. 86–102.

V. R. MISIUK, A. A. PEKARSKII

## CONJUGATE FUNCTIONS ON A SEGMENT AND RELATIONS FOR THEIR BEST UNIFORM POLYNOMIAL APPROXIMATIONS

### Summary

A relation between the best polynomial approximations of the function assigned on a segment and the function conjugated to it is found. In the periodic case, a similar relation is obtained by S. B. Stechkin. The inequality of G. Szegő type is also proved for the derivatives of an algebraic polynomial.

УДК 512.543.76

*В. В. БЕНЯШ-КРИВЕЦ, И. О. ГОВОРУШКО*

## МНОГООБРАЗИЯ ХАРАКТЕРОВ ГРУПП БАУМСЛАГА – СОЛИТЕРА

*Белорусский государственный университет*

*(Поступила в редакцию 24.04.2015)*

Пусть  $G = \langle g_1, \dots, g_m \rangle$  – конечно порожденная группа и  $K$  – алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики. Тогда любому представлению  $\rho: G \rightarrow GL_n(K)$  можно поставить в соответствие набор элементов

$$(\rho(g_1), \dots, \rho(g_m)) \in GL_n(K)^m.$$

Очевидно, что этот набор удовлетворяет всем определяющим соотношениям группы  $G$ . Поэтому соответствие  $\rho \mapsto (\rho(g_1), \dots, \rho(g_m))$  задает биекцию между множеством  $\text{Hom}(G, GL_n(K))$  и  $K$ -точками некоторого аффинного  $K$ -многообразия  $R_n(G) \subset GL_n(K)^m$ , называемого многообразием  $n$ -мерных представлений группы  $G$ .

Группа  $GL_n(K)$  действует естественным образом (одновременным сопряжением компонент) на  $R_n(G)$ , и ее орбиты находятся во взаимно-однозначном соответствии с классами эквивалентных представлений  $G$ . В общем случае орбиты относительно этого действия не обязательно замкнуты и, следовательно, многообразие орбит (геометрический фактор) не является алгебраическим многообразием. Однако поскольку  $GL_n(K)$  – редуцированная группа, то можно рассмотреть категорный фактор  $R_n(G) / GL_n(K)$  (см. [1]), который мы будем обозначать  $X_n(G)$  и называть многообразием характеров представлений  $G$  в  $GL_n(K)$  (или просто многообразием характеров). Его точки параметризуют замкнутые  $GL_n(K)$ -орбиты, а замкнутость орбиты эквивалентна тому, что соответствующее представление вполне приводимо, и поэтому точки многообразия  $X_n(G)$  находятся в биективном соответствии с классами эквивалентных вполне приводимых  $n$ -мерных представлений группы  $G$ . В дальнейшем через

$$\pi: R_n(G) \rightarrow X_n(G)$$

будем обозначать морфизм факторизации. Введем также в рассмотрение следующие множества:

$$R_n^s(G) = \{\rho \in R_n(G) \mid \rho \text{ неприводимо}\},$$

$$X_n^s(G) = \pi(R_n^s(G)) \subset X_n(G).$$

Множества  $R_n^s(G)$ ,  $X_n^s(G)$  являются открытыми в топологии Зарисского подмножествами  $R_n(G)$ ,  $X_n(G)$  соответственно (см. [2]).

О многообразиях  $R_n(G)$ ,  $X_n(G)$  в общем случае известно очень мало. Детально изучен лишь класс конечных групп и частично – классы нильпотентных и разрешимых групп. Для бесконечных нильпотентных групп  $G$  большая часть известных результатов собрана в книге [2], для разрешимых групп – в статье [3]. В работах [4, 5] получено описание многообразий представлений и соответствующих многообразий характеров фундаментальных групп компактных поверхностей.

В [6] приведено описание многообразий представлений  $R_n(BS(p, q))$  групп Баумслага – Солитера  $BS(p, q)$ . Напомним, что группы Баумслага – Солитера  $BS(p, q)$  имеют копредставление

$$BS(p, q) = \langle a, t \mid ta^p t^{-1} = a^q \rangle,$$

где  $p$  и  $q$  не равны нулю. Эти группы предложены Г. Баумслагом и Д. Солитером в [7] как примеры нехопфовых конечно представленных групп, т. е. групп, которые изоморфны своей собственной факторгруппе. Легко видеть, что  $BS(p, q) \cong BS(-p, -q)$  и  $BS(p, q) \cong BS(q, p)$ . В дальнейшем мы будем рассматривать группы  $BS(p, q)$  такие, что  $p > |q| > 1$  и  $p, q$  – взаимно простые числа.

Цель настоящей работы – дать описание многообразий характеров  $X_n(BS(p, q))$ .

Введем следующие обозначения. Обозначим через  $\Omega(p, q)$  следующее множество матриц:

$$\Omega(p, q) = \{A \in GL_n(K) \mid A^p \text{ и } A^q \text{ сопряжены}\}.$$

Пусть  $A \in \Omega(p, q)$  – фиксированная матрица и пусть  $B_0 \in GL_n(K)$  такая матрица, что  $B_0 A^p B_0^{-1} = A^q$ . Обозначим через  $Z(A)$  централизатор матрицы  $A$  в  $GL_n(K)$  и рассмотрим морфизм

$$f_A : Z(A) \times GL_n(K) \rightarrow GL_n(K) \times GL_n(K), (C, X) \mapsto (XAX^{-1}, XB_0CX^{-1}).$$

Замыкание в топологии Зарисского образа  $\text{Im } f_A$  обозначим  $W(A)$ . В [6] доказано, что каждое многообразие  $W(A)$  является неприводимой компонентой многообразия  $R_n(BS(p, q))$  размерности  $n^2$  и этими компонентами исчерпываются все неприводимые компоненты  $R_n(BS(p, q))$ . Следующая теорема дает описание многообразий характеров  $X_n(BS(p, q))$ .

**Т е о р е м а 1.** 1. Множествами  $X(A) = \pi(W(A))$ , где  $A \in \Omega(p, q)$  – полупростая матрица, исчерпываются все неприводимые компоненты многообразия  $X_n(BS(p, q))$ .

2. Если  $A_1, A_2 \in \Omega(p, q)$  – неподобные полупростые матрицы, то  $X(A_1) \cap X(A_2) = \emptyset$ . Следовательно, при  $K = \mathbb{C}$  многообразия  $X(A)$  являются компонентами связности многообразия  $X_n(BS(p, q))$  в комплексной топологии.

3. Если  $A \in \Omega(p, q)$  – полупростая матрица, то все вполне приводимые представления из  $W(A)$  являются суммой  $k$  неприводимых представлений, где  $k = k(A)$  зависит только от матрицы  $A$  и  $\dim X(A) = k$ .

4. Каждое многообразие  $X(A)$  является рациональным.

Ниже нам понадобится описание неприводимых представлений группы  $BS(p, q)$ , полученное в [8]. Пусть  $d$  – такое натуральное число, что  $d \mid (p^n - q^n)$ , но  $d \nmid (p^i - q^i)$  для всех  $i < n$ ,  $\alpha$  – примитивный корень из единицы степени  $d$ ,  $s$  – произвольное решение сравнения  $sq \equiv p \pmod{d}$ ,  $c \in K^*$ . Тогда пара матриц

$$A = \text{diag}(\alpha, \alpha^s, \alpha^{s^2}, \dots, \alpha^{s^{n-1}}), B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ c & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

определяет неприводимое представление  $\rho_{(n, \alpha, c)} = (A, B) \in R_n(BS(p, q))$ . При этом каждое неприводимое представление, с точностью до эквивалентности, получается таким образом. Легко видеть, что в условиях теоремы все собственные значения матрицы  $A$  попарно различны, т. е.  $A$  является регулярной полупростой. В дальнейшем нам понадобится следующая

**Л е м м а.** Представления  $\rho_{(n, \alpha, c)}$  и  $\rho_{(n, \beta, c_1)}$  эквивалентны тогда и только тогда, когда  $c = c_1$  и  $\beta = \alpha^{s^i}$ ,  $0 \leq i \leq n-1$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть  $\rho_{(n, \alpha, c)} = (A_1, B_1)$  и  $\rho_{(n, \beta, c_1)} = (A_2, B_2)$  эквивалентны. Тогда  $\det B_1 = \det B_2$ , откуда  $c = c_1$ . Далее, из сопряженности матриц  $A_1$  и  $A_2$  следует, что  $\beta = \alpha^{s^i}$ ,

$0 \leq i \leq n-1$ . Наоборот, если  $c = c_1$  и  $\beta = \alpha^s$ , то  $B_1 = B_2$  и  $B_1^i A_1 B_1^{-i} = A_2$ . Значит,  $\rho_{(n,\alpha,c)}$  и  $\rho_{(n,\beta,c_1)}$  эквивалентны. Лемма доказана.

Для фиксированной матрицы  $A \in \Omega(p, q)$  обозначим через  $S(A)$  множество таких матриц  $C \in \Omega(p, q)$ , что спектр  $C$  совпадает со спектром  $A$ . Справедлива

**Т е о р е м а 2.** Пусть  $K = \mathbb{C}$  и  $A \in \Omega(p, q)$ . Тогда множество  $T(A) = \cup_{C \in S(A)} W(C)$  является компонентой связности многообразия  $R_n(BS(p, q))$  в комплексной топологии.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Покажем, что если  $(F, H) \in W(C)$ , то спектры матриц  $F$  и  $C$  совпадают. Пусть  $\sigma_i(X)$  обозначает  $i$ -й коэффициент характеристического полинома матрицы  $X$  и пусть  $\lambda_i = \sigma_i(C)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Тогда для любой точки  $(A_1, B_1) \in \text{Im } f_C$  мы имеем  $\sigma_i(A_1) - \lambda_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ , поскольку матрицы  $C$  и  $A_1$  подобны. Это означает, что регулярная на  $W(C)$  функция  $\sigma_i(X) - \lambda_i$  обращается в нуль на  $\text{Im } f_C$ . Следовательно,  $\sigma_i(X) - \lambda_i$  обращается в нуль на  $W(C)$ . Поэтому  $\sigma_i(F) - \lambda_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Таким образом, характеристические полиномы у  $C$  и  $F$  совпадают, т. е.  $C$  и  $F$  имеют одинаковые спектры.

Пусть  $A'$  – диагональная матрица, собственными значениями которой являются собственные значения матрицы  $A$ . Пусть  $C \in S(A)$ ,  $\rho = (C, D) \in W(C)$ ,  $\mathcal{O}(\rho)$  – орбита представления  $\rho$  и  $H = \overline{\mathcal{O}(\rho)}$ . Известно, что  $\mathcal{O}(\rho) \subset W(C)$ , следовательно,  $H \subset W(C)$ . Далее,  $H$  содержит вполне приводимое представление  $\rho' = (C', D')$  (см. [2, 9]). Переходя при необходимости к эквивалентному представлению, мы без ограничения общности можем считать, что  $C' = \text{diag}(C_1, \dots, C_s)$ ,  $D' = \text{diag}(D_1, \dots, D_s)$ , где  $\rho_i = (C_i, D_i)$  – неприводимое представление. Из (1) получаем, что матрица  $C'$  диагонализуема. Кроме того, спектры  $C'$  и  $C$  совпадают, т. е.  $C' \in S(A)$ . Значит,  $C'$  подобна  $A'$  и поэтому  $\rho' \in W(A')$ . Итак, мы получили, что для произвольной матрицы  $C \in S(A)$  неприводимые компоненты  $W(C)$  и  $W(A')$  имеют непустое пересечение. Из этого следует связность множества  $T(A) = \cup_{C \in S(A)} W(C)$ . Если спектр матрицы  $F \in \Omega(p, q)$  отличен от спектра  $A$ , то из рассуждений выше следует, что  $W(F) \cap T(A) = \emptyset$ . Это и означает, что множество  $T(A)$  является компонентой связности многообразия  $R_n(BS(p, q))$  в комплексной топологии. Теорема 2 доказана.

**С л е д с т в и е 1.** Число компонент связности многообразия  $R_n(BS(p, q))$  в комплексной топологии равно числу классов сопряженности диагональных матриц в  $\Omega(p, q)$ .

**С л е д с т в и е 2.** Если  $A_1, A_2 \in \Omega(p, q)$  полупростые неподобные матрицы, то  $W(A_1) \cap W(A_2) = \emptyset$ .

Напомним, что матрица  $A \in GL_n(K)$  называется регулярной, если в ее жордановой нормальной форме каждому собственному значению соответствует единственный блок Жордана.

**П р е д л о ж е н и е 1.** Пусть  $A \in \Omega(p, q)$  – регулярная полупростая матрица. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Для любой неприводимой компоненты  $W(B)$ , отличной от  $W(A)$ , справедливо  $W(A) \cap W(B) = \emptyset$ , т. е. в случае  $K = \mathbb{C}$  многообразии  $W(A)$  является компонентой связности многообразия  $R_n(BS(p, q))$  в комплексной топологии.

2.  $W(A) = \text{Im } f_A$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** 1. Если  $W(A) \cap W(B) \neq \emptyset$ , то из доказательства теоремы 2 следует, что матрицы  $A$  и  $B$  имеют одинаковый спектр. Так как  $A$  – регулярная полупростая матрица, то  $B$  сопряжена с  $A$  и  $W(A) = W(B)$ .

2. Если  $(A_1, B_1) \in W(A)$ , то, как и выше, получаем, что  $A_1$  подобна  $A$ . Следовательно,  $(A_1, B_1) \in \text{Im } f_A$ . Предложение 1 доказано.

**П р е д л о ж е н и е 2.** Если  $W(A)$  содержит неприводимое представление, то все представления  $\rho \in W(A)$  неприводимы, т. е.  $W(A) \subset R_n^s(BS(p, q))$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть  $\rho = (C, D) \in W(A)$  – неприводимое представление. Тогда  $C$  – регулярная полупростая матрица, спектр которой равен спектру  $A$ . Следовательно, матрицы  $A$  и  $C$  подобны. Поэтому без ограничения общности можем считать, что  $A$  – диагональная матрица вида (1). Тогда, по предложению 1,  $W(A) = \text{Im } f_A$ . Поскольку централизатор  $Z(A)$  состоит из диагональных матриц, то любое представление  $\rho_1 \in \text{Im } f_A$  эквивалентно представлению вида  $\rho_2 = (A, B)$ , где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Сопрягая  $\rho_2$  диагональной матрицей  $\text{diag}(1, a_1, \dots, a_1 \cdots a_{n-1})$ , получим неприводимое представление вида (1). Предложение 2 доказано.

В качестве следствия теоремы 2 и предложения 2 получаем

**С л е д с т в и е 3.** *Многообразие неприводимых представлений  $R_n^S(BS(p, q))$  является открытым и замкнутым подмножеством в  $R_n(BS(p, q))$ .*

Важную роль в доказательстве теоремы 1 играет

**Т е о р е м а 3.** *Если  $A \in \Omega(p, q)$  – полупростая матрица, то множество вполне приводимых представлений плотно в  $W(A)$ . Пусть  $\rho = \rho_{(n_1, \alpha_1, c_1)} + \dots + \rho_{(n_k, \alpha_k, c_k)} \in W(A)$  – вполне приводимое представление, где  $\rho_{(n_i, \alpha_i, c_i)}$  определены в (1). Тогда все вполне приводимые представления из  $W(A)$  с точностью до эквивалентности имеют вид*

$$\rho_{(n_1, \alpha_1, b_1)} + \dots + \rho_{(n_k, \alpha_k, b_k)} \quad (2)$$

для произвольных  $b_1, \dots, b_k \in K^*$ . В частности, каждое вполне приводимое представление из  $W(A)$  является суммой  $k$  неприводимых представлений, где  $k = k(A)$  зависит только от матрицы  $A$ . Если  $A$  – регулярная полупростая матрица, то  $W(A) = \text{Im } f_A$  и все представления из  $W(A)$  вполне приводимы и эквивалентны представлениям вида (2).

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Покажем, что  $W(A)$  содержит хотя бы одно вполне приводимое представление. Действительно, если  $\varphi \in W(A)$  – произвольное представление, то замыкание  $\overline{\varphi}$  орбиты  $\varphi$  содержится в  $W(A)$ . Выше мы уже отмечали, что  $\overline{\varphi}$  содержит вполне приводимое представление  $\rho$ . Пусть  $\rho = \rho_{(n_1, \alpha_1, c_1)} + \dots + \rho_{(n_k, \alpha_k, c_k)}$  и

$$U = \{(x_1 \dots x_k) \in \mathbb{A}^k \mid x_1 \dots x_k \neq 0\}.$$

Рассмотрим морфизм

$$\Psi_\rho : GL_n(K) \times U \rightarrow W(A), \quad (X, b_1, \dots, b_k) \mapsto X(\rho_{(n_1, \alpha_1, b_1)} + \dots + \rho_{(n_k, \alpha_k, b_k)})X^{-1}. \quad (3)$$

Докажем, что  $\Psi_\rho$  – доминантный морфизм. Пусть  $(X, d_1, \dots, d_k) \in \Psi_\rho^{-1}(\Psi_\rho(X_0, b_1, \dots, b_k))$ , где мы предполагаем, что  $b_1, \dots, b_k$  попарно различны. Тогда представления  $\rho_{(n_1, \alpha_1, b_1)} + \dots + \rho_{(n_k, \alpha_k, b_k)}$  и  $\rho_{(n_1, \alpha_1, d_1)} + \dots + \rho_{(n_k, \alpha_k, d_k)}$  эквивалентны. Следовательно, набор  $(d_1, \dots, d_k)$  является перестановкой набора  $(b_1, \dots, b_k)$  и имеется лишь конечное число возможностей для выбора  $d_1, \dots, d_k$ . Зафиксируем набор  $(d_1, \dots, d_k)$ . Тогда имеем равенство

$$X_0^{-1}X(\rho_{(n_1, \alpha_1, d_1)} + \dots + \rho_{(n_k, \alpha_k, d_k)})X^{-1}X_0 = \rho_{(n_1, \alpha_1, b_1)} + \dots + \rho_{(n_k, \alpha_k, b_k)}. \quad (4)$$

Пусть  $Z_0$  – фиксированная матрица такая, что

$$Z_0(\rho_{(n_1, \alpha_1, b_1)} + \dots + \rho_{(n_k, \alpha_k, b_k)})Z_0^{-1} = \rho_{(n_1, \alpha_1, d_1)} + \dots + \rho_{(n_k, \alpha_k, d_k)}.$$

Тогда, сопрягая обе части (4) при помощи  $Z_0$ , получаем, что  $Z_0X_0^{-1}X$  централизует вполне приводимое представление  $\rho_{(n_1, \alpha_1, d_1)} + \dots + \rho_{(n_k, \alpha_k, d_k)}$ . В этом представлении слагаемые  $\rho_{(n_i, \alpha_i, d_i)}$  и  $\rho_{(n_j, \alpha_j, d_j)}$  не эквивалентны при  $i \neq j$  в силу того, что  $d_1, \dots, d_k$  попарно различны. Значит,  $Z_0X_0^{-1}X = \text{diag}(x_1E_{n_1}, \dots, x_kE_{n_k})$  для произвольных  $x_1, \dots, x_k \in K^*$ , откуда

$$X = X_0 Z_0^{-1} \text{diag}(x_1 E_{n_1}, \dots, x_k E_{n_k}).$$

Следовательно,  $\dim \Psi_\rho^{-1}(\Psi_\rho(X_0, b_1, \dots, b_k)) = k$  и по теореме о размерности слоев морфизма имеем

$$\dim \overline{\text{Im}(\Psi_\rho)} = (n^2 + k) - k = n^2 = \dim W(A),$$

что и доказывает доминантность  $\Psi_\rho$ .

Докажем теперь, что все вполне приводимые представления из  $W(A)$  лежат в  $\text{Im}(\Psi_\rho)$ . Пусть  $\delta = \rho_{(m_1, \beta_1, d_1)} + \dots + \rho_{(m_h, \beta_h, d_h)} \in W(A)$ . Определим морфизм  $\Psi_\delta$  аналогично морфизму  $\Psi_\rho$ . Как и выше доказывается, что  $\Psi_\delta$  доминантен. Тогда  $\text{Im}(\Psi_\rho)$  содержит открытое подмножество  $U_1 \subset W(A)$ , а  $\text{Im}(\Psi_\delta)$  – открытое подмножество  $U_2 \subset W(A)$ . Пусть  $\gamma \in U_1 \cap U_2$ . Тогда  $\gamma$  эквивалентно, с одной стороны, представлению вида  $\rho_{(n_1, \alpha_1, a_1)} + \dots + \rho_{(n_k, \alpha_k, a_k)}$ , а с другой – представлению вида  $\rho_{(m_1, \beta_1, c_1)} + \dots + \rho_{(m_h, \beta_h, c_h)}$ . Отсюда немедленно получаем, что  $h = k$  и после подходящей перенумерации слагаемых имеем, что представления  $\rho_{(n_i, \alpha_i, a_i)}$  и  $\rho_{(m_i, \beta_i, c_i)}$  эквивалентны,  $i = 1, \dots, k$ . Следовательно,  $n_i = m_i$  и по лемме  $a_i = c_i$  и  $\beta_i = \alpha_i^{s_j}$  для некоторого  $j$ , где  $s$  определено в (1). Но тогда по лемме представление  $\rho_{(m_i, \beta_i, d_i)}$  эквивалентно представлению  $\rho_{(n_i, \alpha_i, d_i)}$ . Следовательно,  $\delta$  эквивалентно представлению  $\rho_{(n_1, \alpha_1, d_1)} + \dots + \rho_{(n_k, \alpha_k, d_k)} \in \text{Im}(\Psi_\rho)$ , откуда  $\delta \in \text{Im}(\Psi_\rho)$ .

Пусть теперь  $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$  – регулярная диагональная матрица. Тогда  $W(A) = \text{Im} f_A$  по предложению 1. Пусть  $\rho = (A, B) \in W(A)$ . Докажем, что  $\rho$  вполне приводимо. Замыкание  $\overline{\mathcal{O}(\rho)}$  содержит вполне приводимое представление  $\rho' = (A, B')$ , и без ограничения общности можно считать, что  $\rho'$  имеет вид  $\rho' = \rho_{(n_1, \alpha_1, d_1)} + \dots + \rho_{(n_k, \alpha_k, d_k)}$ , где  $\rho_{(n_i, \alpha_i, d_i)} = (A_i, B_i)$  и матрицы  $A_i, B_i$  имеют вид (1). Отсюда получаем, что  $A = \text{diag}(A_1, \dots, A_k)$ ,  $B = \text{diag}(B_1, \dots, B_k)$ . Поскольку

$$B A^p B^{-1} = A^q = B' A^p B'^{-1},$$

то  $B = B' Y$ , где  $Y \in Z(A^p) = Z(A)$ . Так как  $A$  – регулярная полупростая матрица, то  $Y = \text{diag}(Y_1, \dots, Y_k)$  – диагональная матрица. Значит,  $B = \text{diag}(B_1 Y_1, \dots, B_k Y_k)$ . Рассмотрим представления  $\delta_i = (A_i, B_i Y_i)$ . Сопрягая  $\delta_i$  подходящей диагональной матрицей, мы получим представление  $\delta'_i = (A_i, B'_i)$ , имеющее вид (1). Значит,  $\delta_i$  неприводимо и  $\rho = \delta_1 + \dots + \delta_k$  – вполне приводимо, что и требовалось доказать. Теорема 3 доказана.

Морфизм факторизации  $\pi: R_n(G) \rightarrow X_n(G)$  обладает следующими общими свойствами (см. [10, § 3]).

**С в о й с т в о з а м к н у т о с т и.** Если  $Y \subset R_n(G)$  – замкнутое  $GL_n(K)$ -инвариантное подмножество в  $R_n(G)$ , то  $\pi(Y)$  замкнуто в  $X_n(G)$ .

**С в о й с т в о р а з д е л е н и я.** Пусть  $(X_i)_{i \in I}$  – семейство замкнутых  $GL_n(K)$ -инвариантных подмножеств в  $R_n(G)$ , тогда  $\pi(\bigcap_{i \in I} X_i) = \bigcap_{i \in I} \pi(X_i)$ . В частности, образы двух непересекающихся замкнутых  $GL_n(K)$ -инвариантных подмножеств многообразия  $R_n(G)$  не пересекаются.

**Д о к а з а т е л ь с т в о** теоремы 1. Каждый слой  $\pi^{-1}(x)$  содержит вполне приводимое представление. Действительно,  $\pi^{-1}(x)$  является замкнутым и  $GL_n(K)$ -инвариантным множеством. Поэтому если  $\rho \in \pi^{-1}(x)$ , то  $\overline{\mathcal{O}(\rho)} \subset \pi^{-1}(x)$  и  $\overline{\mathcal{O}(\rho)}$  содержит вполне приводимое представление. Далее, если  $\rho = (A, B)$  – вполне приводимое представление, то эквивалентно прямой сумме  $\rho_1 + \dots + \rho_s$  неприводимых представлений  $\rho_i = (A_i, B_i)$  вида (1), где  $A_i$  – полупростая матрица. Следовательно, матрица  $A$  полупроста, поскольку подобна матрице  $\text{diag}(A_1, \dots, A_s)$ . Таким образом,  $\pi(\rho) \in X(A)$  и

$$X_n(BS(p, q)) = \bigcup_{A \in \Omega(p, q)} \pi(W(A)),$$

где объединение берется по полупростым матрицам  $A$ . В силу свойства замкнутости морфизма  $\pi$  множества  $X(A) = \pi(W(A))$  замкнуты. Если  $A_1, A_2 \in \Omega(p, q)$  – не подобные полупростые матрицы,

то по следствию 2  $W(A_1) \cap W(A_2) = \emptyset$ . Тогда по свойству разделения морфизма  $\pi$  имеем  $X(A_1) \cap X(A_2) = \emptyset$ . Таким образом, замкнутые множества  $X(A)$  попарно не пересекаются и их объединением является  $X_n(BS(p, q))$ . Значит, множества  $X(A)$ , где  $A \in \Omega(p, q)$  – полупростая матрица, – это в точности все неприводимые компоненты многообразия характеров  $X_n(BS(p, q))$ . Тем самым мы доказали пункты 1 и 2 теоремы 1.

Докажем пункт 3. Пусть  $\rho = \rho_{(n_1, \alpha_1, b_1)} + \dots + \rho_{(n_k, \alpha_k, b_k)} \in W(A)$ . Рассмотрим представление  $\rho_1 = \rho_{(n_1, \alpha_1, 1)} + \dots + \rho_{(n_k, \alpha_k, 1)} \in W(A)$ . Среди представлений  $\rho_{(n_i, \alpha_i, 1)}$  есть попарно эквивалентные. Сгруппируем их в наборы попарно эквивалентных представлений. Пусть среди них есть  $m_i$  представлений, эквивалентных  $\rho_{(h_i, \beta_i, 1)}$ ,  $i = 1, \dots, r$ , и представления  $\rho_{(h_i, \beta_i, 1)}$  попарно неэквивалентны. По лемме для любых  $x, y \in K^*$  представления  $\rho_{(h_i, \beta_i, x)}$  и  $\rho_{(h_j, \beta_j, y)}$  не эквивалентны. Тогда  $\rho_1$  эквивалентно представлению

$$\rho_2 = m_1 \rho_{(h_1, \beta_1, 1)} + \dots + m_r \rho_{(h_r, \beta_r, 1)}, \quad (5)$$

где  $m_i \rho_{(h_i, \beta_i, 1)}$  обозначает сумму  $m_i$  экземпляров представления  $\rho_{(h_i, \beta_i, 1)}$ . Пусть

$$U = \{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{A}^k \mid x_1 \cdots x_k \neq 0\} \subset \mathbb{A}^k.$$

Рассмотрим морфизм

$$\psi: U \rightarrow X(A), \quad \psi(x_1, \dots, x_k) = \pi(\rho_{(h_1, \beta_1, x_1)} + \rho_{(h_2, \beta_2, x_2)} + \dots + \rho_{(h_k, \beta_k, x_k)}).$$

По теореме 3 каждое вполне приводимое представление  $\delta \in W(A)$  эквивалентно представлению вида  $\rho_{(h_1, \beta_1, x_1)} + \dots + \rho_{(h_k, \beta_k, x_k)}$  для некоторого набора  $(x_1, \dots, x_k) \in U$ . Следовательно,  $\psi$  – сюръективный морфизм. Вычислим слои морфизма  $\psi$ . Пусть  $(y_1, \dots, y_k) \in \psi^{-1}(\psi(x_1, \dots, x_k))$ . Тогда представления  $\rho_{(h_1, \beta_1, x_1)} + \dots + \rho_{(h_k, \beta_k, x_k)}$  и  $\rho_{(h_1, \beta_1, y_1)} + \dots + \rho_{(h_k, \beta_k, y_k)}$  являются вполне приводимыми и имеют равные характеры. Следовательно, они эквивалентны и по лемме набор  $(y_1, \dots, y_k)$  является следующей перестановкой набора  $(x_1, \dots, x_k)$ :

$$(y_{m_1 + \dots + m_{i-1} + 1}, \dots, y_{m_1 + \dots + m_i}) - \text{перестановка } (x_{m_1 + \dots + m_{i-1} + 1}, \dots, x_{m_1 + \dots + m_i}),$$

$i = 1, \dots, r$ . Отсюда немедленно получаем, что каждый слой  $\psi^{-1}(\psi(x_1, \dots, x_k))$  конечен. Значит, по теореме о размерности слоев морфизма  $\dim X(A) = k$ .

Докажем пункт 4. отождествим поле рациональных функций  $K(X(A))$  с подполем  $\psi^*(K(X(A)))$  поля  $K(U) = K(x_1, \dots, x_k)$ , где  $x_1, \dots, x_k$  мы рассматриваем как независимые переменные. Обозначим через  $T = S_{m_1} \times \dots \times S_{m_r}$  прямое произведение симметрических групп  $S_{m_1}, \dots, S_{m_r}$ . Зададим действие группы  $T$  на  $K(x_1, \dots, x_k)$  следующим образом. Группа  $S_{m_j}$  действует перестановками на множестве  $\{x_{m_1 + \dots + m_{j-1} + 1}, \dots, x_{m_1 + \dots + m_j}\}$ , состоящем из  $m_j$  переменных, и оставляет неподвижными остальные переменные. Анализ рассуждения в пункте 3 показывает, что слой  $\psi^{-1}(\psi(x_1, \dots, x_k))$  совпадает с орбитой действия группы  $T$  на набор  $(x_1, \dots, x_k)$ . Поэтому поле  $\psi^*(K(X(A)))$  совпадает с полем инвариантов  $K(x_1, \dots, x_k)^T$ . Из классических результатов о симметрических многочленах следует, что поле  $K(x_1, \dots, x_k)^T$  является чисто трансцендентным расширением поля  $K$ . Это и доказывает рациональность  $X(A)$ . Теорема 1 доказана.

Из теоремы 1 получаем

**С л е д с т в и е 4.** Многообразие характеров неприводимых представлений  $X_n^s(BS(p, q))$  открыто и замкнуто в  $X_n(BS(p, q))$ . При этом каждая неприводимая компонента многообразия  $X_n^s(BS(p, q))$  имеет размерность 1.

**С л е д с т в и е 5.** Размерности  $\dim X(A)$  неприводимых компонент  $X(A)$  многообразия  $X_n(BS(p, q))$  принимают все значения от 1 до  $n$ . В частности,  $\dim X_n(BS(p, q)) = n$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Из описания неприводимых представлений группы  $BS(p, q)$  в [8] следует, что для любого натурального  $k$  существует неприводимое представление группы  $BS(p, q)$

степени  $k$ . Пусть  $s \leq n$  и  $k_1 + \dots + k_s = n$  – произвольное разбиение числа  $n$  и  $\rho_i : BS(p, q) \rightarrow GL_{k_i}(K)$  – неприводимое представление. Далее, пусть  $\rho = \rho_1 + \dots + \rho_s$  – вполне приводимое представление группы  $BS(p, q)$  степени  $n$ . Тогда  $\rho \in W(A)$  для некоторой неприводимой компоненты  $W(A)$  и по теореме 1  $\dim X(A) = s$ . Максимальная размерность  $n$  достигается лишь в том случае, когда  $k_1 = \dots = k_n = 1$  и представление  $\rho$  является прямой суммой одномерных представлений.

### Литература

1. Mumford D., Fogarty J. Geometric invariant theory. Berlin; Heidelberg; New York, 1982.
2. Lubotzky A., Magid A. // Memoirs AMS. 1985. Vol. 58, N 336. P. 1–116.
3. Rudnick Z. // J. Pure and Applied Algebra. 1987. Vol. 45. P. 261–272.
4. Benyash-Krivetz V. V., Rapinchuk A. S., Chernousov V. I. // Israel J. Math. 1996. Vol. 93. P. 29–71.
5. Беняш-Кривец В. В., Черноусов В. И. // Мат. сб. 1997. Т. 188, № 7. С. 47–92.
6. Беняш-Кривец В. В., Говорушко И. О. // Вестн. БГУ, сер. 1. 2014. № 2. С. 43–45.
7. Baumslag G., Solitar D. // Bull. AMS. 1962. Vol. 68, N 3. P. 199–201.
8. McLaury D. // J. Group Theory. 2012. Vol. 15, N 4. P. 543–552.
9. Artin M. // J. Algebra. 1969. Vol. 11. P. 532–563.
10. Крафт Х. Геометрические методы в теории инвариантов. М., 1987.

V. V. BENIASH-KRYVETS, I. O. GOVORUSHKO

### CHARACTER VARIETIES OF BAUMSLAG – SOLITAR GROUPS

### Summary

Character varieties of Baumslag – Solitar groups are investigated. Irreducible components of these varieties are found, their dimensions are calculated, and their rationality is proved.

УДК 517.968.4

Е. А. БАРКОВА<sup>1</sup>, П. П. ЗАБРЕЙКО<sup>2</sup>

**НЕЛОКАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ  
УРАВНЕНИЙ ДРОБНЫХ ПОРЯДКОВ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ  
НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ**

<sup>1</sup>Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники<sup>2</sup>Белорусский государственный университет

(Поступила в редакцию 12.05.2015)

В последние годы существенное развитие получила теория дифференциальных уравнений дробного порядка [1–5]. Такие уравнения возникают в задачах механики и физики, когда учитываются силы, действующие с запаздыванием. В частности, в работе [1] были доказаны локальные теоремы существования и единственности решения задачи Коши. А в статье [2] предложены и нелокальные теоремы для следующей задачи Коши:

$$D^\alpha x(t) = f(t, x), \quad (1)$$

$$x^{(k)}(0) = \xi_k, \quad k = 0, \dots, m-1, \quad (2)$$

где  $D^\alpha$  – дробная производная порядка  $\alpha$  в смысле Капуто (если  $x(t)$  – гладкая функция, то

$$D^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{m-\alpha-1} x^{(m)}(s) ds,$$

где  $\alpha > 0$  и  $m$  – целое, удовлетворяющее условию  $m-1 < \alpha \leq m$ ) в пространстве непрерывных функций. В работе [3] эта задача Коши была исследована в пространствах весовых функций  $C_\gamma[0, T]$  ( $\gamma \in \mathbb{C}$ ), определяемых как пространства функций  $g(t)$ , заданных на  $[0, T]$  таких, что  $t^\gamma g(t) \in [0, T]$ :

$$C_\gamma[0, T] = \left\{ g(t) : \|g\|_{C_\gamma} = \|t^\gamma g(t)\|_C < \infty \right\}, \quad C_0[0, T] = C[0, T]. \quad (3)$$

Было показано, что задача Коши (1)–(2) эквивалентна интегральному уравнению, для анализа которого применялся принцип сжимающих отображений, и доказана локальная теорема о разрешимости задачи Коши. Следует отметить, что в этой работе содержался ряд погрешностей и неясностей. Так, через  $y(x)$  обозначена функция, являющаяся начальным приближением, произвольная функция в условии Липшица из этого пространства и, наконец, искомое решение. Не вполне корректно сформулировано и само условие Липшица на оператор суперпозиции. Все это не позволяет полностью понять утверждение авторов.

В настоящей работе исследуются вопросы разрешимости задачи Коши (1)–(2) с  $0 < \alpha < 1$  в весовых пространствах  $C_\gamma[0, T]$ . При этом устанавливается нелокальная теорема о единственной разрешимости задачи Коши.

1. Для получения основных результатов докажем лемму о компактности интегральных операторов, действующих в пространстве вещественных непрерывных на отрезке функций.

**Л е м м а.** Интегральный оператор  $\omega(t) \rightarrow t^\gamma \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{s^\gamma} \omega(s) ds$ , действующий для всех  $0 < \gamma < \alpha < 1$  в пространстве  $C[0, T]$  вещественных непрерывных на отрезке  $[0, T]$  функций, вполне непрерывен и неотрицателен.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Обозначим

$$Q\omega(t) = \int_0^T q(t, s) \omega(s) ds, \quad q(t, s) = \begin{cases} 0, & s > t \\ t^\gamma \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{s^\gamma}, & s \leq t. \end{cases}$$

Для доказательства леммы достаточно показать, что множество

$$\{Q\omega(t) : |\omega(t)| \leq 1, \quad (0 \leq t \leq T)\}$$

компактно. Это равносильно тому, что функции из него равномерно ограничены и равностепенно непрерывны. Ограниченность функций показана в [6]. Приведем доказательство равностепенной непрерывности. Для этого проверим выполнение следующего условия:

$$\lim_{t''-t' \rightarrow 0} \int_0^T |q(t'', s) - q(t', s)| ds = 0, \quad t'' > t'.$$

Иначе говоря, покажем, что для любого  $\varepsilon > 0$  можно выбрать такое  $\delta > 0$ , что для произвольных  $t', t''$ , для которых  $|t' - t''| < \delta$ , справедлива оценка

$$\int_0^T |q(t'', s) - q(t', s)| ds < \varepsilon. \quad (4)$$

Положим  $\delta_0 = ((\varepsilon^\gamma) / (2B(1-\gamma, \alpha)))^{1/\gamma}$ , и пусть сначала  $t', t'' < \delta_0$ . Тогда

$$\int_0^T |q(t'', s) - q(t', s)| ds \leq \int_0^{t''} |q(t'', s)| ds + \int_0^{t'} |q(t', s)| ds \leq 2B(1-\gamma, \alpha) \delta_0^\gamma < \varepsilon.$$

Далее рассмотрим случай, когда  $0 < t' < t'' < T < \infty$ , но  $t'' \geq \delta_0$ . Покажем, что для любого  $\varepsilon > 0$  можно подобрать  $\delta < \delta_0$  такое, что для всех  $|t' - t''| \leq \delta$  и ( $t'' \geq \delta_0$ ) выполняется неравенство (4). Действительно, для всех  $0 < \gamma < \alpha < 1$  справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \int_0^{t''} |q(t'', s) - q(t', s)| ds &\leq \left| (t')^\gamma \int_0^{t'} \frac{(t'-s)^{\alpha-1} - (t''-s)^{\alpha-1}}{s^\gamma} ds + (t'')^\gamma \int_{t'}^{t''} \frac{(t''-s)^{\alpha-1}}{s^\gamma} ds \right| \leq \\ &\leq T^\gamma \int_0^{t'} \frac{|(t'-s)^{\alpha-1} - (t''-s)^{\alpha-1}|}{s^\gamma} ds + T^\gamma \left| \int_{t'}^{t''} \frac{ds}{s^\gamma (t''-s)^{1-\alpha}} \right| \leq \\ &\leq T^\gamma \left( \int_0^{t'} \frac{(t'-s)^{\alpha-1}}{s^\gamma} ds - \int_0^{t'} \frac{(t''-s)^{\alpha-1}}{s^\gamma} ds + \int_{t'}^{t''} \frac{ds}{s^\gamma (t'')^{1-\alpha} (1-s/t'')^{1-\alpha}} \right). \end{aligned}$$

В первом интеграле сделаем замену  $s = t'\sigma$ , во втором и третьем  $-s = t''\sigma$ . Тогда

$$\begin{aligned} &T^\gamma \left( (t')^{\alpha-\gamma} \int_0^1 \frac{(1-\sigma)^{\alpha-1}}{\sigma^\gamma} d\sigma - (t'')^{\alpha-\gamma} \int_0^{t'/t''} \frac{(1-\sigma)^{\alpha-1}}{\sigma^\gamma} d\sigma + (t'')^{\alpha-\gamma} \int_{t'/t''}^1 \frac{(1-\sigma)^{\alpha-1}}{\sigma^\gamma} d\sigma \right) = \\ &= T^\gamma \left( ((t')^{\alpha-\gamma} - (t'')^{\alpha-\gamma}) \int_0^1 \frac{(1-\sigma)^{\alpha-1}}{\sigma^\gamma} d\sigma + 2(t'')^{\alpha-\gamma} \int_{t'/t''}^1 \frac{(1-\sigma)^{\alpha-1}}{\sigma^\gamma} d\sigma \right) = \\ &= T^\gamma \left( ((t')^{\alpha-\gamma} - (t'')^{\alpha-\gamma}) B(1-\gamma, \alpha) + 2(t'')^{\alpha-\gamma} \int_{t'/t''}^1 \frac{(1-\sigma)^{\alpha-1}}{\sigma^\gamma} d\sigma \right) \leq \end{aligned}$$

$$\leq T^\gamma |t' - t''|^{\alpha-\gamma} B(1-\gamma, \alpha) + 2T^\alpha \int_{t'/t''}^1 \frac{(1-\sigma)^{\alpha-1}}{\sigma^\gamma} d\sigma.$$

Первое слагаемое будет меньше  $\varepsilon/2$ , если выбрать  $\delta < (\varepsilon / (2T^\gamma B(1-\gamma, \alpha)))^{1/(\alpha-\gamma)}$ . В силу абсолютной непрерывности интеграла  $\int_0^1 \frac{(1-\sigma)^{\alpha-1}}{\sigma^\gamma} d\sigma = 0$  существует такое  $\eta > 0$ , что при  $|t'/t'' - 1| < \eta$  справедливо неравенство  $\left| \int_{t'/t''}^1 \frac{(1-\sigma)^{\alpha-1}}{\sigma^\gamma} d\sigma \right| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Так как  $t'' \geq \delta_0$ , то при  $|t' - t''| < \delta$  второе слагаемое также будет меньше  $\varepsilon/2$ , если только  $\delta < \delta_0 \eta$ . Таким образом, при  $|t' - t''| < \delta$  справедливо неравенство (4). Лемма доказана.

**2.** Исследуем теперь задачу Коши (1)–(2), где  $0 < \alpha < 1$  в пространстве  $C_\gamma[0, T]$ . Предположим, что функция  $f(t, x)$  определена на  $[0, T] \times X$  ( $X$  – банахово пространство); для каждого  $x$  функция  $f(t, x)$  – функция одной переменной  $t, f(t, x) \in C_\gamma[0, T]$  (т. е. справедливо  $\|f\|_{C_\gamma} = \|t^\gamma f(t, x)\|_C < \infty$ ) и удовлетворяет условию Липшица по второй переменной

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\|_X \leq k \|x_1 - x_2\|_X, \quad (5)$$

где  $k$  – некоторая константа.

**Т е о р е м а.** Если  $f(t, x)$  для каждого  $x$  принадлежит пространству функций  $C_\gamma[0, T]$  и удовлетворяет условию (5), то задача Коши (1)–(2) имеет в  $C_\gamma[0, T]$  единственное определенное на  $[0, T]$  решение для всех  $\gamma < \alpha$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Рассмотрим нелинейный оператор

$$Ax(t) = \xi_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds. \quad (6)$$

Известно (см. [2, 3]), что неподвижная точка этого оператора и есть решение задачи Коши (1)–(2), определенное на всем отрезке  $[0, T]$ .

Введем замкнутое выпуклое множество

$$B = \{x : \|x(t) - \xi_0\|_{C_\gamma[0, T]} \leq \omega(t)\}$$

и покажем, что оператор  $A$  при подходящем выборе функции  $\omega(t)$  преобразует это множество в себя. Иными словами, покажем, что для подходящего  $\omega(t)$  справедливо неравенство

$$\|Ax(t) - \xi_0\|_{C_\gamma[0, T]} \leq \omega(t). \quad (7)$$

Действительно, в силу условий теоремы можно записать цепочку неравенств

$$\begin{aligned} \|Ax(t) - \xi_0\|_X &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|f(s, x(s))\|_X ds \leq \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (\|f(s, \xi_0)\|_X + \|f(s, x(s)) - f(s, \xi_0)\|_X) ds \leq \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{s^\gamma} (\|f\|_{C_\gamma[0, T]} + k \|x(s) - \xi_0\|_{C_\gamma[0, T]}) ds \leq \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{s^\gamma} \|f\|_{C_\gamma[0, T]} ds + \frac{k}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{s^\gamma} \omega(s) ds. \end{aligned}$$

Отсюда следует оценка

$$\begin{aligned} \|Ax(t) - \xi_0\|_{C_\gamma[0,T]} &\leq \frac{t^\gamma}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{s^\gamma} ds \|f\|_{C_\gamma[0,T]} + \frac{kt^\gamma}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{s^\gamma} \omega(s) ds \leq \\ &\leq \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha)} B(1-\gamma, \alpha) \|f\|_{C_\gamma[0,T]} + \frac{kt^\gamma}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{s^\gamma} \omega(s) ds. \end{aligned}$$

Далее нужно так выбрать функцию  $\omega(t)$ , чтобы для всех  $x(t)$ , для которых выполняется условие  $\|x(t) - \xi_0\|_{C_\gamma[0,T]} \leq \omega(t)$ , было справедливо неравенство

$$\frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha)} B(1-\gamma, \alpha) \|f\|_{C_\gamma[0,T]} + \frac{kt^\gamma}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{s^\gamma} \omega(s) ds \leq \omega(t). \quad (8)$$

Для этого в качестве  $\omega(t)$  достаточно взять решение интегрального уравнения

$$\omega(t) = \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha)} B(1-\gamma, \alpha) \|f\|_{C_\gamma[0,T]} + \frac{kt^\gamma}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{s^\gamma} \omega(s) ds. \quad (9)$$

По лемме интегральный оператор  $\omega(t) \rightarrow \frac{kt^\gamma}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{s^\gamma} \omega(s) ds$ , действующий в пространстве  $C[0, T]$  вещественных непрерывных на отрезке  $[0, T]$  функций, для всех  $0 < \gamma < \alpha < 1$  вполне непрерывен и неотрицателен. Известно (см. [7, 8]), что его спектральный радиус равен нулю. Следовательно, для уравнения (9) существует единственное решение  $\omega(t)$ , т. е. оператор  $A$  преобразует в себя выпуклое замкнутое множество.

Покажем далее, что оператор  $A$  удовлетворяет условию Липшица в некоторой эквивалентной норме с постоянной  $\varkappa < 1$ . Для этого в пространстве  $C_\gamma[0, T]$  вместо нормы  $\|x\|_{C_\gamma[0,T]} \leq \|t^\gamma x(t)\|_X$  введем норму следующим образом:

$$\|x\|_{\tilde{C}_\gamma[0,T]} = \max_{0 \leq t \leq T} \left\| \frac{t^\gamma x(t)}{\omega_1(t)} \right\|_X,$$

где  $\omega_1(t)$  – некоторая положительная функция, которая будет определена ниже.

Для любого  $t$ ,  $0 \leq t \leq T$ , в силу условия (5) справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \|Ax_1(t) - Ax_2(t)\|_X &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s))\|_X ds \leq \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} k \|x_1 - x_2\|_X ds \leq \frac{k}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{s^\gamma} \omega_1(s) \|x_1 - x_2\|_{\tilde{C}[0,T]} ds. \end{aligned}$$

Отсюда следует оценка

$$\|Ax_1(t) - Ax_2(t)\|_{\tilde{C}(X)} \leq \max_{0 \leq t \leq T} \left[ \frac{t^\gamma}{\omega_1(t)} \frac{k}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{s^\gamma} \omega_1(s) ds \right] \|x_1 - x_2\|_{\tilde{C}[0,T]}.$$

Далее, для произвольного положительного числа  $\varkappa < 1$  функцию  $\omega_1(t)$  можно выбрать так, чтобы выполнялось условие

$$\max_{0 \leq t \leq T} \left[ \frac{t^\gamma}{\omega_1(t)} \frac{k}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{s^\gamma} \omega_1(s) ds \right] \leq \varkappa.$$

Для этого достаточно в качестве  $\omega_1(t)$  взять решение линейного интегрального уравнения

$$\omega_1(t) = 1 + \frac{t^\gamma k}{\varkappa \Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{s^\gamma} \omega_1(s) ds. \quad (10)$$

Применяя к последнему уравнению те же рассуждения о разрешимости, как и в случае уравнения (9), приходим к выводу, что для уравнения (10) существует единственное решение  $\omega_1(t)$ . Следовательно, оператор  $A$  удовлетворяет условию Липшица на инвариантном множестве с постоянной  $\varkappa < 1$ :

$$\|Ax_1(t) - Ax_2(t)\|_{\tilde{C}_\gamma[0,T]} \leq \varkappa \|x_1(t) - x_2(t)\|_{\tilde{C}_\gamma[0,T]}.$$

Согласно принципу сжимающих отображений Банаха – Каччиополли, существует, и притом единственная, точка оператора  $A$ . Тем самым теорема доказана.

### Литература

1. *Podlubny I.* // Mathematics in Sciences and Engineering. 1999. Vol. 198. P.
2. *Баркова Е. А., Забрейко П. П.* // Докл. НАН Беларуси. 2010. Т. 46, № 2. С. 1–6.
3. *Килбас А. А., Бонилла Б., Трухилло Х.* // Докл. НАН Беларуси. 2000. Т. 44, № 6. С. 18–22.
4. *Gorenflo R., Mainardi F.* // CISM Courses and Lectures. Viena, 1997. P. 223–276.
5. *Oldham K. B., Spanier J.* The Fractional Calculus. New York, 1994.
6. *Забрейко П. П., Кошелев А. И., Красносельский М. А.* и др. Интегральные уравнения. М., 1968.
7. *Забрейко П. П.* // Успехи мат. наук. 1967. Т. 22, вып. 1 (133). С. 167–168.
8. *Забрейко П. П.* // Литов. мат. сб. 1967. Т. 7, вып. 2. С. 281–287.

*E. A. BARKOVA, P. P. ZABREIKO*

### NONLOCAL THEOREMS ON THE CAUCHY PROBLEM FOR DIFFERENTIAL EQUATIONS OF FRACTIONAL ORDER IN WEIGHTED SPACES OF CONTINUOUS FUNCTIONS

#### Summary

In this article, the theorems of existence of solutions of nonlocal Cauchy problems for differential equations of fractional order in weighted spaces with Caputo derivatives are proved. Sufficient conditions for compactness of integral operators operating in the space of real-valued continuous functions on a segment are also obtained.

## ФІЗІКА

УДК 530.182

М. А. КНЯЗЕВ, Н. Г. БЛИНКОВА

СВЯЗЬ МЕЖДУ ОДНОСОЛИТОННЫМИ СОСТАВЛЯЮЩИМИ  
ДВУХСОЛИТОННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА

Белорусский национальный технический университет

(Поступила в редакцию 30.04.2015)

**Введение.** Уравнение Кортевега-де Фриза (КдФ) относится к числу наиболее хорошо изученных нелинейных уравнений в частных производных. Данное уравнение является интегрируемым, т. е. имеет решение не только в виде одиночного солитона, но и бесконечное количество решений, соответствующих связанным состояниям произвольного числа солитонов и (или) антисолитонов [1]. Каждому такому решению соответствует некоторый закон сохранения.

В настоящее время значительное внимание уделяется проблеме взаимосвязи между решениями уравнения КдФ и решениями уравнения Фридмана в космологии. Возможность такой взаимосвязи обусловлена нелинейным характером указанных уравнений. Эта проблема получила название дуализма гравитация/солитон [2].

Связь между решениями уравнения КдФ и уравнения Риккати широко применяется при изучении космологических моделей. Например, в работе [3] рассмотрены адиабатические солитоны уравнения КдФ в баротропических открытых космологических моделях. При этом для решения уравнения Фридмана [4] используется уравнение Риккати для параметра Хаббла и показана его связь с уравнением КдФ. Аналогичный подход применяется в [5, 6] при исследовании космологической жидкости Дарбу для объяснения космологического эффекта ускорения. При этом метод с применением адиабатических индексов оказывается эффективным, так как космологическое микроволновое излучение имеет характер гауссова и адиабатического [7]. Такой характер микроволнового излучения предсказывается в том числе и в инфляционной модели [8]. В целом же подход с использованием уравнения Риккати для решения нелинейных уравнений в частных производных находит все более широкое применение [9, 10].

В явном виде связь между уравнениями Фридмана и уравнением КдФ изучена в [2] для ряда космологических сценариев: инфляционной модели, циклической Вселенной и т. д. Для инфляционной модели получено выражение для постоянной Хаббла в зависимости от решения обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) третьего порядка для потенциальной функции. Предложенный подход предполагает явное вычисление производной Шварца [11]. В указанной работе было использовано односолитонное решение уравнения КдФ. Представляется интересным изучить, как изменятся полученные результаты, если вместо односолитонного решения использовать двухсолитонное. В настоящей работе рассмотрены математические аспекты указанной проблемы.

**Постановка задачи.** В работе [2] уравнение КдФ рассматривается в виде

$$u_t + \frac{3}{u_0}uu_x + u_{xxx} = 0, \quad (1)$$

где  $u_0$  – некоторая константа,  $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$  и т. п.

При помощи замены зависимой переменной  $u \rightarrow -2u_0u$  это уравнение можно записать в стандартной форме

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0. \quad (2)$$

Односолитонное решение уравнения (2) известно [1]:

$$u(x,t) = -\frac{\lambda^2}{2} \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{\lambda}{2} (x - \lambda^2 t) \right], \quad (3)$$

где  $\lambda$  – постоянная. Если ввести новую независимую переменную  $\varphi = x - \lambda t$ , то уравнение КдФ можно записать в виде ОДУ следующего вида:

$$-\lambda^2 u' + u''' + \frac{3}{u_0} uu' = 0, \quad (4)$$

а его решение в виде  $u = u(\varphi)$ . Здесь посредством штриха обозначена производная по  $\varphi$ . Для тривиального решения  $u = 0$  преобразовании Бэклунда можно записать в виде

$$u = u_0 (\lambda^2 - 4y^2), \quad (5)$$

где  $y = y(\varphi)$  – новая неизвестная функция, являющаяся решением уравнения Риккати вида

$$y' + y^2 - \frac{\lambda^2}{4} = 0. \quad (6)$$

Решение данного уравнения удовлетворяет следующему ОДУ третьего порядка:

$$S[y(\varphi)] = \frac{y'''}{y'} - \frac{3}{2} \left( \frac{y''}{y'} \right)^2 = -\frac{\lambda^2}{2}, \quad (7)$$

левая часть которого представляет собой производную Шварца. Именно свойства этой производной позволили установить аналогию между распространением солитона и динамикой Вселенной в инфляционной модели. В этой связи в качестве первого этапа исследования интересно посмотреть, как изменится уравнение (7), если использовать двухсолитонное решение уравнения КдФ.

**Двухсолитонное решение.** В общем случае двухсолитонное решение уравнение КдФ имеет вид [12]

$$u(x,t) = -2(\lambda_2^2 - \lambda_1^2) \frac{\lambda_2^2 \operatorname{cosech}^2(\gamma_2) + \lambda_1^2 \operatorname{cosech}^2(\gamma_1)}{(\lambda_2 \operatorname{cth}(\gamma_2) - \lambda_1 \operatorname{cth}(\gamma_1))^2}, \quad (8)$$

$$\gamma_1 = \lambda_1 x - 4\lambda_1^3 t + \delta_1, \quad \gamma_2 = \lambda_2 x - 4\lambda_2^3 t + \delta_2, \quad \delta_i = \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{m_i(0)}{2\lambda_i} \left( \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2 + \lambda_1} \right) \right], \quad i = 1, 2,$$

где параметры  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  имеют тот же смысл, что и параметр  $\lambda$  в соотношении (3), а  $m_i(0)$  – нормировочные константы, появляющиеся при решении задачи рассеяния. Решение рассматриваемой нами задачи с использованием соотношения (8) представляется весьма громоздким. Гораздо проще исследовать предельные случаи двухсолитонного решения в моменты времени, значительно отстоящие в прошлое или будущее от момента времени взаимодействия его составляющих. В первом случае соотношение (8) можно представить в виде

$$u(x,t) = -2\lambda_1^2 \operatorname{sech}^2(\gamma_1 - \Delta) - 2\lambda_2^2 \operatorname{sech}^2(\gamma_2 + \Delta), \quad (9)$$

где  $\Delta = \operatorname{arctg}(\lambda_1/\lambda_2)$ , а во втором

$$u(x,t) = -2\lambda_1^2 \operatorname{sech}^2(\gamma_1 + \Delta) - 2\lambda_2^2 \operatorname{sech}^2(\gamma_2 - \Delta). \quad (10)$$

Видно, что солитонные компоненты взаимодействуют упруго и единственным результатом этого является дополнительный сдвиг по фазе. В обоих случаях двухсолитонное решение можно записать в виде

$$u(x,t) = u_1(x - 4\lambda_1^2 t) + u_2(x - 4\lambda_2^2 t). \quad (11)$$

По аналогии с решением в виде одиночного солитона введем две новые независимые переменные  $\varphi_1 = x - 4\lambda_1^2 t$  и  $\varphi_2 = x - 4\lambda_2^2 t$ , причем, поскольку различие между ними состоит только в  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , дифференцирование по этим переменным будем в обоих случаях одинаково обозначать штрихом, учитывая при вычислении производных очевидное отличие в коэффициентах.

**Построение уравнений.** Будем использовать формальное соотношение (11). Анализ фазовых сдвигов может быть проведен на заключительной стадии исследования. Подставим (11) в уравнение (1). В результате получим соотношение

$$-4\lambda_1^2 u_1' - 4\lambda_2^2 u_2' + u_1''' + u_2''' + \frac{3}{u_0} u_1 u_1' + \frac{3}{u_0} u_2 u_2' + \frac{3}{u_0} (u_1 u_2)' = 0. \quad (12)$$

Если потребовать, чтобы выполнялось условие

$$(u_1 u_2)' = 0, \quad (13)$$

то уравнение (12) расщепляется на два не связанных между собой уравнения и для каждой из составляющих решения (11) можно получить результаты, аналогичные результатам, полученным в работе [2] для односолитонного решения. Оценим, какие ограничения при этом накладываются на параметры  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Подставим соотношение (9) в уравнение (13) и, считая время достаточно большим, опустим конкретные значения  $x$ , тогда можно получить соотношение вида

$$\frac{m_1(0)}{m_2(0)} = \frac{\lambda_1(\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_2(\lambda_2 + \lambda_1)},$$

из которого можно сделать заключение о возможном значении одного из параметров  $\lambda_i$ ,  $i=1,2$ , если задан другой.

Рассмотрим случай, когда условие (13) не выполняется. Теперь уравнение (12) можно заменить одной из двух следующих систем уравнений:

$$-4\lambda_1^2 u_1' + u_1''' + \frac{3}{u_0} u_1 u_1' + \frac{3}{u_0} u_1 u_2' = 0, \quad (14)$$

$$-4\lambda_2^2 u_2' + u_2''' + \frac{3}{u_0} u_2 u_2' + \frac{3}{u_0} u_2 u_1' = 0, \quad (15)$$

или

$$-4\lambda_1^2 u_1' + u_1''' + \frac{3}{u_0} u_1 u_1' + \frac{3}{u_0} u_2 u_1' = 0, \quad (16)$$

$$-4\lambda_2^2 u_2' + u_2''' + \frac{3}{u_0} u_2 u_2' + \frac{3}{u_0} u_1 u_2' = 0. \quad (17)$$

В обоих случаях симметрия относительно замены индексов 1 и 2 очевидна.

Введем две новые функции  $y_1$  и  $y_2$  при помощи соотношений

$$u_1 = u_0 (\lambda_1^2 - a_1 y_1^2), \quad (18)$$

$$u_2 = u_0 (\lambda_2^2 - a_2 y_2^2). \quad (19)$$

Подставим соотношения (18) и (19), например, в уравнения (16) и (17). В результате получим систему уравнений, которую можно преобразовать к следующему виду:

$$\frac{(y_1^2)'''}{(y_1^2)'} - 3(y_1^2 + y_2^2) = \lambda_1^2 + 3\lambda_2^2, \quad (20)$$

$$\frac{(y_2^2)'''}{(y_2^2)'} - 3(y_1^2 + y_2^2) = \lambda_2^2 + 3\lambda_1^2. \quad (21)$$

Для предельного случая двухсолитонного решения данную систему обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка можно рассматривать как аналог уравнения (7).

**Преобразование системы уравнений для функций  $y_1$  и  $y_2$  при помощи производной Шварца.** Запишем для каждой из функций  $y_1$  и  $y_2$  уравнение вида (7):

$$\frac{y_1'''}{y_1'} - \frac{3}{2} \left( \frac{y_1''}{y_1'} \right)^2 = -\frac{\lambda_1^2}{2}, \quad (22)$$

$$\frac{y_2'''}{y_2'} - \frac{3}{2} \left( \frac{y_2''}{y_2'} \right)^2 = -\frac{\lambda_2^2}{2}. \quad (23)$$

Это можно сделать, поскольку как для времени, удаленного в прошлое, так и для времени, соответствующего будущему, можно считать, что компоненты двухсолитонного решения практически не взаимодействуют друг с другом и их с хорошей точностью можно рассматривать как односолитонные решения.

Вычтем из уравнения (20) уравнение (21). Если в полученное соотношение подставить явно вычисленные производные от квадратов функций  $y_1$  и  $y_2$ , то можно получить уравнение вида

$$\frac{4}{3} S[y_2] - \frac{1}{3} \cdot \frac{y_2''}{y_2'} - \frac{y_2''}{y_2} = \frac{4}{3} S[y_1] - \frac{1}{3} \cdot \frac{y_1''}{y_1'} - \frac{y_1''}{y_1}. \quad (24)$$

Левая часть уравнения (24) зависит только от функции  $y_2$ , а правая – от функции  $y_1$ . Можно заключить, что левая и правая части этого уравнения равны некоторой константе. Следовательно, соотношение (24) описывает некоторую величину, инвариантную относительно перестановки индексов.

**Уравнение связи между функциями  $y_1$  и  $y_2$ .** Аналитическое решение системы уравнений (20), (21) в общем случае достаточно затруднено. Однако возможен частный случай, когда некоторое упрощение может быть реализовано. Введем следующие обозначения:

$$y_1^2 = m, \quad y_2^2 = n, \quad b_1 = \lambda_1^2 + 3\lambda_2^2, \quad b_2 = \lambda_2^2 + 3\lambda_1^2.$$

В данных обозначениях систему уравнений (22), (23) можно представить в виде

$$m''' - 3m'(m+n) = b_1 m', \quad (25)$$

$$n''' - 3n'(m+n) = b_2 n'. \quad (26)$$

Полученную систему достаточно просто исследовать при условии  $b_1 = b_2 = b$ . Сложим уравнения (25) и (26), тогда, если ввести новую функцию  $z = m + n$ , полученное уравнение можно записать следующим образом:

$$z''' - (3z + b)z' = 0. \quad (27)$$

Нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка вида (27) изучено достаточно хорошо [13]. В общем случае оно имеет вид

$$z''' = f(z)z', \quad (28)$$

а общее решение такого уравнения записывается следующим образом:

$$C_3 \pm x = \int [C_2 z + C_1 + 2 \int F(z) dz]^{-1/2} dz,$$

где  $x$  – независимая переменная,  $C_i$ ,  $i=1,2,3$ , – постоянные интегрирования, а функция  $F(z)$  определяется соотношением

$$F(z) = \int f(z) dz.$$

В нашем случае  $f(z) = 3z + b$ , и общее решение уравнения принимает вид

$$C_3 \pm x = \int [C_2 z + C_1 + bz^2 + z^3]^{-1/2} dz. \quad (29)$$

Достаточно просто интеграл (29) вычисляется при  $C_1 = 1$ ,  $C_2 = b = 3$ , тогда из соотношения (29) получаем

$$C_3 \pm x = \pm \frac{2}{(y_1^2 + y_2^2)^{1/2}}. \quad (30)$$

При указанных выше ограничениях выражение (30) описывает связь между компонентами двухсолитонного решения уравнения КдФ в тех случаях, когда время (по модулю) достаточно велико. Ясно, что в силу этих ограничений данное соотношение носит приближенный характер и дает только качественную картину поведения решения.

### Литература

1. Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. М., 1987.
2. Lidsey J. E. // arXiv: astro-ph/1205.5641 [Electronic resource].
3. Haret C. R. // Mod. Phys. Lett. A. 2002. Vol. 17, N 11. P. 667–670.
4. Faraoni V. // Am. J. Phys. 1999. Vol. 67, N 8. P. 732–734.
5. Rosu H. C. // Mod. Phys. Lett. A. 2000. Vol. 15, N 15. P. 979–990.
6. Rosu H. C. // Mod. Phys. Lett. A. 2001. Vol. 16, N 17. P. 1147–1150.
7. Spergel D. N. et al // Astrophys. J. Suppl. 2003. Vol. 148, N 1. P. 97–118.
8. Khoury J., Seinhart P. J., Turok N. // Phys. Rev. Lett. 2003. Vol. 91, N 16. 161301.
9. Tao Geng, Wen-Rui Shan // Phys. Lett. A. 2007. Vol. 372, N 10. P. 1626–1630.
10. Lou S. Y. // arXiv: nlin/1308.589 [Electronic resource].
11. Hille E. Ordinary Differential Equations in the Complex Domain. New York, 1976.
12. Лэм Дж. Л. Введение в теорию солитонов. М., 1983.
13. Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 2001.

M. A. KNYAZEV, N. G. BLINKOVA

### RELATION BETWEEN ONE-SOLITON COMPONENTS OF TWO-SOLITON SOLUTION FOR THE KORTEWEG-DE VRIES EQUATION

### Summary

The system of third-order nonlinear differential equations for components of two-soliton solution of the Korteweg-de Vries equation at  $t \rightarrow \pm \infty$  is constructed. The equation describing the relation between these components is derived, and a general solution of this equation is obtained for one special case.

УДК 539.12

В. В. КИСЕЛЬ, Е. М. ОВСИЮК, О. В. ВЕКО, В. М. РЕДЬКОВ

**ВКЛАД КАЛИБРОВОЧНЫХ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ В СТРУКТУРУ ТЕНЗОРА ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА БЕЗМАССОВОГО ПОЛЯ СО СПИНОМ 2**<sup>1</sup>Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники<sup>2</sup>Мозырский государственный педагогический университет им. И. П. Шамякина<sup>3</sup>Гимназия г. Калинковичи<sup>4</sup>Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси

(Поступила в редакцию 28.04.2015)

**Введение.** Теория массивного и безмассового полей со спином 2, начиная с работ В. Паули и М. Фирца [1, 2], всегда присутствовала в литературе (см. [3]). Большая часть работ выполнена в рамках формализма волновых уравнений второго порядка. Известно, что много путаницы в рамках такого подхода возникает из-за неоднозначностей в порядке написания производных. Эти неоднозначности отсутствуют, если с самого начала использовать формализм уравнений первого порядка.

По-видимому, первое систематическое исследование теории частицы со спином 2 в рамках теории релятивистских волновых уравнений первого порядка выполнено в работах Ф. И. Федорова и его учеников [4]. Оказалось, что частица со спином 2 требует для своего описания в таком подходе 30-компонентной волновой функции. Ф. И. Федоровым было инициировано развитие еще одной, 50-компонентной теории частицы со спином 2. В литературе специально исследовался вопрос о связях между этими двумя вариантами. Было показано, что 50-компонентное волновое уравнение для заряженной частицы со спином 2 во внешнем электромагнитном поле может быть сведено к виду 30-компонентного уравнения, но с дополнительным членом взаимодействия, интерпретируемым как аномальный магнитный момент.

Известно, что в теории безмассового поля со спином 1 (электромагнитный случай) существует калибровочная симметрия, при этом решения градиентного типа не дают вклада в тензор энергии-импульса. В настоящей работе исследуется более сложная ситуация с вкладом калибровочных степеней свободы в тензор энергии-импульса для поля со спином 2 (гравитона). Известно [1, 2], что для уравнения безмассового поля со спином 2 также существует некоторая калибровочная симметрия, приводящая к тому, что есть подкласс решений (обобщенного) градиентного типа. Однако до настоящего времени вопрос о вкладе этих калибровочных степеней свободы в тензор энергии-импульса поля со спином 2 не исследовался.

**1. Безмассовое поле со спином 1.** Напомним описание ситуации в случае поля со спином 1, с тем чтобы затем обобщить это рассмотрение на случай поля со спином 2. При исследовании обоих случаев (для спина 1 и спина 2) будем пользоваться известными фактами из теории релятивистских волновых уравнений первого порядка [4, 5].

Тензор энергии-импульса векторного поля (применяем матричный формализм Даффина – Кеммера) задается равенством (используем метрику с мнимой единицей)

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \{ \bar{\Psi} \beta_{\mu} (\partial_{\nu} \Psi) - (\partial_{\nu} \bar{\Psi}) \beta_{\mu} \Psi \}, \quad (1)$$

где матрицы Даффина – Кеммера определяются как [4]

$$\beta_{\mu} = e^{\rho, [\rho\mu]} + e^{[\rho\mu], \rho}.$$

Из (1) следует представление тензора энергии-импульса в виде

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \left\{ \bar{\Psi}_{\rho} (\partial_{\nu} \Psi_{[\rho\mu]}) + \bar{\Psi}_{[\rho\mu]} (\partial_{\nu} \Psi_{\rho}) - (\partial_{\nu} \bar{\Psi}_{\rho}) \Psi_{[\rho\mu]} - (\partial_{\nu} \bar{\Psi}_{[\rho\mu]}) \Psi_{\rho} \right\}, \quad (2)$$

где

$$\bar{\Psi}_{\mu} = \Psi_{\mu}, \quad \bar{\Psi}_{[\mu\nu]} = -\Psi_{[\mu\nu]}. \quad (3)$$

С учетом (2) из (3) получаем явное выражение для тензора  $T_{\mu\nu}$ :

$$T_{\mu\nu} = \Psi_{[\rho\mu]} (\partial_{\nu} \Psi_{\rho}) - \Psi_{\rho} (\partial_{\nu} \Psi_{[\rho\mu]}). \quad (4)$$

Согласно калибровочной симметрии, если набор полей  $\Psi_{\rho}, \Psi_{[\mu\nu]}$  является решением уравнений, то решением уравнений будет также и набор полей

$$\Psi'_{\rho} = \Psi_{\rho} + \partial_{\rho} \Lambda, \quad \Psi'_{[\mu\nu]} = \Psi_{[\mu\nu]}, \quad (5)$$

где  $\Lambda(x)$  – произвольная вещественная функция координат. Для тензора энергии-импульса нового решения (5) уравнений получаем представление

$$T'_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + \left\{ \Psi_{[\rho\mu]} (\partial_{\rho} \partial_{\nu} \Lambda) - (\partial_{\rho} \Lambda) (\partial_{\nu} \Psi_{[\rho\mu]}) \right\} \equiv T_{\mu\nu} + \Xi_{\mu\nu}. \quad (6)$$

Добавка  $\Xi_{\mu\nu}$  к тензору (6) может быть представлена как 4-дивергенция:

$$\Xi_{\mu\nu} = \partial_{\rho} \left\{ \Psi_{[\rho\mu]} (\partial_{\nu} \Lambda) - \Lambda (\partial_{\nu} \Psi_{[\rho\mu]}) \right\}. \quad (7)$$

Это означает, что при интегрировании эта добавка дает нулевой вклад.

Проведем аналогичный анализ для безмассового вещественного поля со спином 2.

**2. Безмассовый случай, калибровочная симметрия.** Исходим из системы уравнений первого порядка 30-компонентной теории поля со спином 2 [4, 5].

Массивный случай:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_{\mu} \Phi_{\mu} + M \Phi_0 &= 0, & \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_{\mu} \Phi_0 - \sqrt{\frac{2}{3}} \partial_{\nu} \Phi_{(\mu\nu)} + M \Phi_{\mu} &= 0, \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \left( \partial_{\rho} \Phi_{\sigma} + \partial_{\sigma} \Phi_{\rho} - \frac{1}{2} \delta_{\rho\sigma} \partial_{\nu} \Phi_{\nu} \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \partial_{\mu} \Phi_{\rho[\sigma\mu]} + \partial_{\mu} \Phi_{\sigma[\rho\mu]} \right) + M \Phi_{(\rho\sigma)} &= 0, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \partial_{\beta} \Phi_{(\eta\gamma)} - \partial_{\gamma} \Phi_{(\beta\eta)} + \frac{1}{3} \delta_{\eta\gamma} \partial_{\rho} \Phi_{(\rho\beta)} - \frac{1}{3} \delta_{\eta\beta} \partial_{\rho} \Phi_{(\rho\gamma)} \right) + M \Phi_{\eta[\gamma\beta]} &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Безмассовый случай:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_{\mu} \Phi_{\mu} &= 0, & \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_{\mu} \Phi_0 - \sqrt{\frac{2}{3}} \partial_{\nu} \Phi_{(\mu\nu)} + \Phi_{\mu} &= 0, \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \left( \partial_{\rho} \Phi_{\sigma} + \partial_{\sigma} \Phi_{\rho} - \frac{1}{2} \delta_{\rho\sigma} \partial_{\nu} \Phi_{\nu} \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \partial_{\mu} \Phi_{\rho[\sigma\mu]} + \partial_{\mu} \Phi_{\sigma[\rho\mu]} \right) &= 0, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \partial_{\beta} \Phi_{(\eta\gamma)} - \partial_{\gamma} \Phi_{(\beta\eta)} + \frac{1}{3} \delta_{\eta\gamma} \partial_{\rho} \Phi_{(\rho\beta)} - \frac{1}{3} \delta_{\eta\beta} \partial_{\rho} \Phi_{(\rho\gamma)} \right) + \Phi_{\eta[\gamma\beta]} &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

В безмассовом случае известно существование калибровочной симметрии и соответствующих простейших решений уравнений [4, 5]:

$$\begin{aligned} \Phi_0^{(0)} &= \partial_{\rho} \partial_{\rho} \Lambda, & \Phi_{\mu}^{(0)} &= 0, & \Phi_{\mu[\nu\lambda]}^{(0)} &= 0, \\ \Phi_{(\mu\nu)}^{(0)} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left( 2 \partial_{\mu} \partial_{\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \partial_{\rho} \partial_{\rho} \right) \Lambda, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\Lambda(x)$  – произвольная вещественная функция. Это означает, что если набор функций  $\Phi = (\Phi_0, \Phi_\mu, \Phi_{(\mu\nu)}, \Phi_{\rho[\eta\sigma]})$  является решением системы уравнений (9), то решением является и набор функций  $\Phi' = \Phi + \Phi^{(0)}$ .

**3. Тензор энергии-импульса для поля со спином 2.** Исходим из общего выражения для тензора энергии-импульса

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \{ \bar{\Phi} \Gamma_\mu (\partial_\nu \Phi) - (\partial_\nu \bar{\Phi}) \Gamma_\mu \Phi \}; \quad (11)$$

в данном случае матрицы  $\Gamma_\mu$  задаются с помощью элементов полной матричной алгебры следующим образом:

$$\Gamma_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{0,\mu} + e^{\mu,0}) - \sqrt{\frac{2}{3}} (e^{\rho,(\mu\rho)} - e^{(\mu\rho),\rho}) - \sqrt{2} (e^{(\nu\rho),\nu[\mu\rho]} + e^{\nu[\mu\rho],(\nu\rho)}). \quad (12)$$

Учитывая явный вид матриц из (12), находим представление для тензора  $T_{\mu\nu}$ :

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} = & -\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\Phi}_0 (\partial_\nu \Phi_\mu) + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\Phi}_\mu (\partial_\nu \Phi_0) - \sqrt{\frac{2}{3}} \bar{\Phi}_\rho (\partial_\nu \Phi_{(\mu\rho)}) + \sqrt{\frac{2}{3}} \bar{\Phi}_{(\mu\rho)} (\partial_\nu \Phi_\rho) - \right. \\ & - \sqrt{2} \bar{\Phi}_{(\lambda\rho)} (\partial_\nu \Phi_{\lambda[\mu\rho]}) - \sqrt{2} \bar{\Phi}_{\lambda[\mu\rho]} (\partial_\nu \Phi_{(\lambda\rho)}) - \frac{1}{\sqrt{2}} (\partial_\nu \bar{\Phi}_0) \Phi_\mu - \frac{1}{\sqrt{2}} (\partial_\mu \bar{\Phi}_\nu) \Phi_0 + \\ & \left. + \sqrt{\frac{2}{3}} (\partial_\nu \bar{\Phi}_\rho) \Phi_{(\mu\rho)} - \sqrt{\frac{2}{3}} (\partial_\nu \bar{\Phi}_{(\mu\rho)}) \Phi_\rho + \sqrt{2} (\partial_\nu \bar{\Phi}_{(\lambda\rho)}) \Phi_{\lambda[\mu\rho]} + \sqrt{2} (\partial_\nu \bar{\Phi}_{\lambda[\mu\rho]}) \Phi_{(\lambda\rho)} \right\}. \quad (13) \end{aligned}$$

Потребуется явный вид матрицы инвариантной билинейной формы [4, 5]

$$\begin{aligned} \eta = & -e^{0,0} + (e^{a,a} - e^{4,4}) + (e^{(ab),(ab)} - 2e^{(a4),(a4)} + e^{(44),(44)}) + \\ & + (-e^{a[bc],a[bc]} - 2e^{4[4a],4[4a]} + 2e^{a[4b],a[4b]} + e^{4[ab],4[ab]}). \quad (14) \end{aligned}$$

Учитывая равенство

$$\begin{aligned} \eta \Gamma_4 = & -\frac{1}{\sqrt{2}} (e^{0,4} + e^{4,0}) - \sqrt{\frac{2}{3}} (e^{a,(4a)} + e^{(4a),a}) + \sqrt{\frac{2}{3}} (e^{4,(44)} + e^{(44),4}) - \sqrt{2} (e^{(ab),a[4b]} + e^{a[4b],(ab)}) + \\ & + \sqrt{2} (e^{(a4),4[4a]} + e^{4[4a],(4b)}), \quad (15) \end{aligned}$$

получаем нужное для анализа соотношения (13) тождество

$$(\eta \Gamma_4)^+ = \eta \Gamma_4. \quad (16)$$

С учетом вещественности (незаряженности) безмассового поля со спином 2 (напоминаем, что в пространстве Минковского используется метрика  $ict$ ) находим явный вид компонент функции  $\bar{\Phi}$ :

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_0 = & -\Phi_0^* = -\Phi_0, \quad \bar{\Phi}_\mu = (\Phi_a, -i\Phi_0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (\Phi_a, \Phi_4) = \Phi_\mu, \\ \bar{\Phi}_{(\mu\nu)} = & (\Phi_{(ab)}, (i\Phi_{(a0)})^*, \Phi_{(44)}^*) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \Phi_{(\mu\nu)}, \quad (17) \\ \bar{\Phi}_{\mu[\nu\rho]} = & (\Phi_{a[bc]}, \Phi_{4[4a]}^*, \Phi_{a[4b]}^*, \Phi_{4[ab]}^*) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -\Phi_{\mu[\nu\rho]}. \end{aligned}$$

Учитывая (17), из равенства (13) находим явное выражение для тензора энергии-импульса поля со спином 2:

$$T_{\mu\nu} = - \left\{ -\frac{1}{\sqrt{2}} \Phi_0 (\partial_\mu \Phi_\nu) - \frac{1}{\sqrt{2}} \Phi_\mu (\partial_\nu \Phi_0) - \sqrt{\frac{2}{3}} \Phi_\rho (\partial_\nu \Phi_{(\mu\rho)}) + \sqrt{\frac{2}{3}} \Phi_{(\mu\rho)} (\partial_\nu \Phi_\rho) - \sqrt{2} \Phi_{(\lambda\rho)} (\partial_\nu \Phi_{\lambda[\mu\rho]}) + \sqrt{2} \Phi_{\lambda[\mu\rho]} (\partial_\nu \Phi_{(\lambda\rho)}) \right\}. \quad (18)$$

Теперь выясним, какую добавку к этому тензору энергии-импульса вносит простейшее решение  $\Phi^{(0)}$ , связанное с калибровочными степенями свободы (см. (10)). После необходимых вычислений для соответствующей добавки  $\Xi_{\nu\mu}$  (см. (6)) получаем следующее явное выражение:

$$\Xi_{\nu\mu} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \left\{ [(\partial_\rho \partial_\rho)(\partial_\nu \Phi_\mu) - (\partial_\nu(\partial_\rho \partial_\rho))\Lambda \Phi_\mu] + [(\partial_\nu \partial_\mu \partial_\rho \Lambda) \Phi_\rho - (\partial_\mu \partial_\rho \Lambda)(\partial_\mu \Phi_\rho)] - \sqrt{3} [(\partial_\nu \partial_\lambda \partial_\rho \Lambda) \Phi_{\lambda[\mu\rho]} - (\partial_\lambda \partial_\rho \Lambda)(\partial_\nu \partial_\lambda \Phi_{[\mu\rho]})] \right\}. \quad (19)$$

Преобразуем отдельные слагаемые в (19). Имеем три равенства:

$$(\partial_\rho \partial_\rho)(\partial_\nu \Phi_\mu) - (\partial_\nu(\partial_\rho \partial_\rho))\Lambda \Phi_\mu = \partial_\rho \left\{ (\partial_\rho \Lambda)(\partial_\nu \Phi_\mu) - (\partial_\nu \partial_\rho \Lambda) \Phi_\mu \right\} - (\partial_\rho \Lambda)(\partial_\rho \partial_\nu \Phi_\mu) + (\partial_\nu \partial_\rho \Lambda)(\partial_\rho \Phi_\mu); \quad (20)$$

$$(\partial_\nu \partial_\mu \partial_\rho \Lambda) \Phi_\rho - (\partial_\mu \partial_\rho \Lambda)(\partial_\mu \Phi_\rho) = \partial_\rho \left\{ (\partial_\nu \partial_\mu \Lambda) \Phi_\rho - (\partial_\mu \Lambda)(\partial_\nu \Phi_\rho) \right\} = -(\partial_\nu \partial_\mu \Lambda)(\partial_\rho \Phi_\rho) + (\partial_\mu \Lambda)(\partial_\rho \partial_\nu \Phi_\rho); \quad (21)$$

$$(\partial_\nu \partial_\lambda \partial_\rho \Lambda) \Phi_{\lambda[\mu\rho]} - (\partial_\lambda \partial_\rho \Lambda)(\partial_\nu \partial_\lambda \Phi_{[\mu\rho]}) = \partial_\rho \left\{ (\partial_\nu \partial_\lambda \Lambda) \Phi_{\lambda[\mu\rho]} - (\partial_\lambda \Lambda)(\partial_\nu \Phi_{\lambda[\mu\rho]}) \right\} - (\partial_\nu \partial_\lambda \Lambda)(\partial_\rho \Phi_{\lambda[\mu\rho]}) + (\partial_\lambda \Lambda)(\partial_\rho \partial_\nu \Phi_{\lambda[\mu\rho]}). \quad (22)$$

Учитывая эти тождества, выражение для добавки  $\Xi_{\nu\mu}$  приводим к виду

$$\Xi_{\mu\nu} = D_{\mu\nu} + \Delta_{\mu\nu}, \quad (23)$$

где

$$D_{\mu\nu} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{\partial}{\partial x^\rho} \left\{ [(\partial_\rho \Lambda)(\partial_\nu \Phi_\mu) - (\partial_\nu \partial_\rho \Lambda) \Phi_\mu] + [(\partial_\nu \partial_\mu \Lambda) \Phi_\rho - (\partial_\mu \Lambda)(\partial_\nu \Phi_\rho)] - \sqrt{3} [(\partial_\nu \partial_\lambda \Lambda) \Phi_{\lambda[\mu\rho]} - (\partial_\lambda \Lambda)(\partial_\nu \Phi_{\lambda[\mu\rho]})] \right\}, \quad (24)$$

а

$$\Delta_{\mu\nu} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \left\{ -(\partial_\lambda \Lambda) \partial_\nu [\partial_\lambda \Phi_\mu + \sqrt{3} \partial_\rho \Phi_{\lambda[\mu\rho]}] + (\partial_\nu \partial_\lambda \Lambda) [\partial_\lambda \Phi_\mu + \sqrt{3} \partial_\rho \Phi_{\lambda[\mu\rho]}] \right\}. \quad (25)$$

Правая часть равенства (23) содержит дивергентную часть  $D_{\nu\mu}$  и недивергентную  $\Delta_{\nu\mu}$ .

Покажем, что недивергентная часть обращается в нуль (при учете уравнений движения). Для этого действуем на четвертое уравнение в (9) оператором  $\sqrt{3} \partial_\beta$ :

$$\sqrt{\frac{3}{2}} \left( \partial_\beta \partial_\beta \Phi_{(\eta\gamma)} - \partial_\beta \partial_\gamma \Phi_{(\beta\eta)} + \frac{1}{3} \delta_{\eta\gamma} \partial_\beta \partial_\rho \Phi_{(\rho\beta)} - \frac{1}{3} \delta_{\eta\beta} \partial_\beta \partial_\rho \Phi_{(\rho\gamma)} \right) + \sqrt{3} \partial_\beta \Phi_{\eta[\gamma\beta]} = 0;$$

заменяем индексы  $\gamma \rightarrow \mu$ ,  $\eta \rightarrow \lambda$ , получим

$$\sqrt{\frac{3}{2}} \left( \partial_\beta \partial_\beta \Phi_{(\lambda\mu)} - \partial_\beta \partial_\mu \Phi_{(\beta\lambda)} + \frac{1}{3} \delta_{\lambda\mu} \partial_\beta \partial_\rho \Phi_{(\rho\beta)} - \frac{1}{3} \partial_\lambda \partial_\rho \Phi_{(\rho\mu)} \right) + \sqrt{3} \partial_\beta \Phi_{\lambda[\mu\beta]} = 0. \quad (26)$$

Теперь на второе уравнение в (9) действуем оператором  $\partial_\lambda$ :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\partial_\lambda\partial_\mu\Phi_0 - \sqrt{\frac{2}{3}}\partial_\lambda\partial_\rho\Phi_{(\rho\mu)} + k\partial_\lambda\Phi_\mu = 0,$$

с учетом чего предыдущее уравнение (26) преобразуем к виду

$$k\left(\partial_\lambda\Phi_\mu + \sqrt{3}\partial_\beta\Phi_{\lambda[\mu\beta]}\right) + \left\{\sqrt{\frac{3}{2}}\left(\partial_\rho\partial_\rho\Phi_{(\lambda\mu)} - \partial_\rho\partial_\mu\Phi_{(\rho\lambda)} - \partial_\rho\partial_\lambda\Phi_{(\rho\mu)} + \frac{1}{3}\delta_{\lambda\mu}\partial_\rho\partial_\beta\Phi_{(\rho\beta)}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_\lambda\partial_\mu\Phi_0\right\} = 0. \quad (27)$$

Выражение в фигурных скобках в (27) симметрично по индексам  $\lambda - \mu$ ; следовательно, такой же симметрией обладает и первое слагаемое

$$\partial_\lambda\Phi_\mu + \sqrt{3}\partial_\beta\Phi_{\lambda[\mu\beta]} = \partial_\mu\Phi_\lambda + \sqrt{3}\partial_\beta\Phi_{\mu[\lambda\beta]}. \quad (28)$$

Теперь воспользуемся третьим уравнением системы (9)

$$\partial_\lambda\Phi_\mu + \partial_\mu\Phi_\lambda + \sqrt{3}\partial_\beta\Phi_{\lambda[\mu\beta]} + \sqrt{3}\partial_\beta\Phi_{\mu[\lambda\beta]} = 0,$$

что после перегруппировки дает

$$(\partial_\lambda\Phi_\mu + \sqrt{3}\partial_\beta\Phi_{\lambda[\mu\beta]}) + (\partial_\mu\Phi_\lambda + \sqrt{3}\partial_\beta\Phi_{\mu[\lambda\beta]}) = 0. \quad (29)$$

Очевидно, что с учетом (28) из (29) следует равенство

$$(\partial_\lambda\Phi_\mu + \sqrt{3}\partial_\beta\Phi_{\lambda[\mu\beta]}) = (\partial_\mu\Phi_\lambda + \sqrt{3}\partial_\beta\Phi_{\mu[\lambda\beta]}) = 0. \quad (30)$$

Следовательно, недивергентная добавка (23) обращается в нуль. Другими словами, выполняется равенство

$$T'_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + D_{\mu\nu},$$

где

$$D_{\mu\nu} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{\partial}{\partial x^\rho} \left\{ [(\partial_\rho\Lambda)(\partial_\nu\Phi_\mu) - (\partial_\nu\partial_\rho\Lambda)\Phi_\mu] + [(\partial_\nu\partial_\mu\Lambda)\Phi_\rho - (\partial_\mu\Lambda)(\partial_\nu\Phi_\rho)] - \sqrt{3} [(\partial_\nu\partial_\lambda\Lambda)\Phi_{\lambda[\mu\rho]} - (\partial_\lambda\Lambda)(\partial_\nu\Phi_{\lambda[\mu\rho]})] \right\}. \quad (31)$$

Таким образом, известный результат, что электромагнитные решения типа градиента от произвольной скалярной функции дают нулевой вклад в тензор энергии-импульса, обобщается на случай безмассового поля со спином 2. Показано, что в пространстве Минковского градиентные решения 30-компонентного волнового уравнения для безмассового поля со спином 2 дают вклад в тензор поля в виде 4-дивергенции от тензора третьего ранга (31) и, следовательно, при интегрировании это слагаемое дает нулевой вклад.

Следует отметить, что свойства безмассового поля со спином 2, рассматриваемого на фоне псевдориманового пространства-времени, оказываются существенно более сложными [6]. В частности, в произвольном пространстве-времени общековариантные уравнения для этого поля не обладают калибровочной симметрией и поэтому вопрос об устранении нефизических степеней свободы, вообще говоря, автоматически не решается.

Существования такого свойства калибровочной инвариантности можно добиться в классе пространств с нулевым тензором Риччи  $R_{\alpha\beta}$ , введя дополнительный член взаимодействия с помощью тензора кривизны Римана  $R_{\alpha\beta\rho\sigma}$  [6]. В этой достаточно сложной для анализа ситуации вопрос о вкладе калибровочных степеней свободы в тензор энергии-импульса для поля со спином 2 остается открытым.

Работа выполнена при поддержке Белорусского фонда фундаментальных исследований (грант № Ф13-146).

## Литература

1. Pauli W., Fierz M. // *Helv. Phys. Acta*. 1939. Bd. 12. S. 297–300.
2. Fierz M., Pauli W. // *Proc. R. Soc. London, Ser. A*. 1939. Vol. 173. P. 211–232.
3. De Broglie L. // *C. R. Acad. Sci. Paris*. 1941. Vol. 212. P. 657–659; Pauli W. // *Rev. Mod. Phys.* 1941. Vol. 13. P. 203–232; Гельфанд И. М., Яглом А. М. // *ЖЭТФ*. 1948. Т. 18. С. 703–733; Фрадкин Э. Е. // Там же. 1950. Т. 20, вып. 1. С. 27–38; Файнберг В. Я. // *Тр. ФИАН СССР*. 1955. Т. 6. С. 269–332; Regge T. // *Nuovo Cimento*. 1957. Vol. 5, N 2. P. 325–326; Buchdahl H. A. // *Nuovo Cim.* 1958. Vol. 10. P. 96–103; Buchdahl H. A. // *Ibid.* 1962. Vol. 25. P. 486–496; Velo G., Zwanziger D. // *Phys. Rev.* 1969. Vol. 188, N 5. P. 2218–2222; Velo G. // *Nucl. Phys. B*. 1972. Vol. 43. P. 389–401; Hagen C. R. // *Phys. Rev. D*. 1972. Vol. 6, N 4. P. 984–987; Hagen C. R. // *Ibid.* 1972. Vol. 5, N 2. P. 377–388; Cox W. // *J. Phys. A*. 1982. Vol. 15. P. 253–268; Barut A. O., Xu B. W. // *J. Phys. A*. 1982. Vol. 15, N 4. P. 207–210; Loide R. K. // *Ibid.* 1986. Vol. 19, N 5. P. 827–829; Vasiliev M. A. // *Phys. Lett. B*. 1992. Vol. 285. P. 225–234; Buchbinder I. L., Kryukhtin V. A., Pershin V. D. // *Ibid.* 1999. Vol. 466. P. 216–226; Buchbinder I. L. et al. // *Nucl. Phys. B*. 2000. Vol. 584. P. 615–640.
4. Федоров Ф. И. // *Учен. зап. БГУ. Сер. физ.-мат.* 1951. Вып. 12. С. 156–173; Крылов Б. В., Федоров Ф. И. // *Докл. АН БССР*. 1967. Т. 11, № 8. С. 681–684; Богуш А. А., Крылов Б. В., Федоров Ф. И. // *Весті АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук*. 1968. № 1. С. 74–81; Федоров Ф. И. // *Докл. АН СССР*. 1968. Т. 179, № 4. С. 802–805; Крылов Б. В. // *Весті АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук*. 1972. № 6. С. 82–89; Кисель В. В. // Там же. 1986. № 5. С. 94–99; Федоров Ф. И., Кирилов А. А. // *Acta Phys. Pol.*, В. 1976. Vol. 7, N 3. P. 161–167; Богуш А. А., Кисель В. В. // *Докл. АН БССР*. 1984. Т. 28, № 8. С. 702–705; Богуш А. А., Кисель В. В., Федоров Ф. И. // Там же. 1984. Т. 277, № 2. С. 343–346; Кисель В. В. *Релятивистские волновые уравнения с расширенным набором представлений: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.04.02 / Ин-т физики. Минск, 1984; Богуш А. А., Кисель В. В. // Изв. вузов МВ и ССО СССР. Физика*. 1988. Т. 31, № 3. С. 11–16; Богуш А. А., Кисель В. В. // *Изв. вузов. Физика*. 1984. № 1. С. 23–27; Богуш А. А., Кисель В. В., Федоров Ф. И. // *Докл. АН СССР*. 1984. Т. 277, № 2, С. 343–346.
5. Богуш А. А., Кисель В. В., Токаревская Н. Г., Редьков В. М. // *Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук*. 2003. № 1. С. 62–67; Кисель В. В., Редьков В. М. // *Весті БДПУ ім. Максіма Танка. Сер. 3*. 2010. № 1 (63). С. 3–6; Там же. № 2 (64). С. 8–10; Кисель В. В., Овсюк Е. М., Редьков В. М. // *Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук*. 2011. № 2. С. 18–26; Редьков В. М. *Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца*. Минск, 2009; Ovsyuk E. M., Kisel V. V., Red'kov V. M. *Maxwell Electrodynamics and Boson Fields in Spaces of Constant Curvature*. New York, 2014; Плетюхов В. А., Стражев В. И., Редьков В. М. *Группа Лоренца и теория релятивистских волновых уравнений*. Минск, 2015.
6. Red'kov V. M., Tokarevskaya N. G., Kisel V. V. // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*. 2003. Vol. 6, N 3. P. 772–778.

V. V. KISEL, E. M. OVSIYUK, O. V. VEKO, V. M. RED'KOV

### CONTRIBUTION OF GAUGE DEGREES OF FREEDOM TO THE SPIN 2 FIELD ENERGY-MOMENTUM TENSOR

#### Summary

The known result that electromagnetic solutions in the form of the gradient of an arbitrary scalar function make a zero contribution to the energy-momentum tensor is extended to a massless spin 2 field. Within the theory of 30-component first-order equations, it is shown that in Minkowski's space, the generalized gradient-type solutions for a spin 2 field make a contribution to the energy-momentum tensor in the form of a 4-divergence of a third-rank tensor; its contribution therefore vanishes during integration.

УДК 535.37

Т. А. ПАВИЧ<sup>1</sup>, С. М. АРАБЕЙ<sup>2</sup>, Р. Т. КУЗНЕЦОВА<sup>3</sup>, Е. Г. МАРТЬЯНОВА<sup>3</sup>,  
Ю. В. АКСЕНОВА<sup>3</sup>, Г. В. МАЙЕР<sup>3</sup>, М. Б. БЕРЕЗИН<sup>4</sup>, К. Н. СОЛОВЬЕВ<sup>1</sup>

**ВЛИЯНИЕ КОМПОНЕНТНОГО СОСТАВА МИЦЕЛЛЯРНОГО РАСТВОРА  
НА СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА И СОЛЮБИЛИЗАЦИЮ ПЛЮРОНИКОМ  
ПРОИЗВОДНОГО БОРДИФТОРИД-ДИПИРРОЛИЛМЕТЕНА**

<sup>1</sup>Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси

<sup>2</sup>Белорусский государственный аграрный технический университет

<sup>3</sup>Томский государственный университет, Томск, Россия

<sup>4</sup>Институт химии растворов им Г. А. Крестова РАН, Иваново, Россия

(Поступила в редакцию 12.04.2015)

**Введение.** Для создания окрашенных функциональных материалов, как правило, красители либо предварительно растворяют в основе материала, либо осуществляют их сорастворение в специфических растворителях с последующей окраской материала. В случае слаборастворимых красителей часто используют плуроники (дифильные соединения), поскольку они образуют стабильные супрамолекулярные ассоциаты с красителями, которые затем непосредственно вводят в объем материала. Плуроники способны самособираться в мицеллы различной морфологии и, например, в водной среде имеют гидрофобное ядро, которое служит полостью для солюбилизации (инкапсулирования) слаборастворимых гидрофобных компонентов (красителей), и гидрофильную оболочку, обеспечивающую водную стабильность [1]. Такой подход инкапсулирования является перспективной и наукоемкой технологией, служащей основой для разработки принципиально новых материалов и биомедицинских препаратов. Плуроники уже нашли применение при разработке систем оптоэлектроники для преобразования света в различных участках спектрального диапазона, светочувствительных сред оптической памяти, устройств для обработки и передачи информации, новых люминесцентных и фотохромных полимерных материалов, лекарственных препаратов для фотодинамической терапии, косметических компонентов и др. [2–7].

Одним из таких дифильных соединений является плуроник F-127 (Пл F-127), представляющий собой амфифильный тройной блок-сополимер. Его строение выражается формулой  $\text{HO}(\text{CH}_2\text{CH}_2\text{O})_{100}(\text{CH}_2\text{CH}(\text{CH}_3)\text{O})_{65}(\text{CH}_2\text{CH}_2\text{O})_{100}\text{H}$ , т. е. он состоит из двух симметрично расположенных по краям гидрофильных блоков по 100 мономерных звеньев оксиэтилена, разделенных гидрофобным блоком из 65 звеньев оксипропилена. Различное сродство к воде гидрофобной и гидрофильных частей молекулы придает Пл F-127 в водном растворе свойства поверхностно-активного вещества, т. е. он может быть использован в качестве детергента. Если в растворе есть слабо или плохо растворимые в воде красители (к примеру, плохо растворяющиеся в алкоксисилановой золь-среде), то гидрофобные ядра мицелл Пл F-127 могут служить полостью для инкапсулирования таких красителей и накапливать их в концентрациях, во много раз превышающих растворимость таких веществ в воде. Литературные данные показывают, что плуроники с содержанием гидрофильного блока 50 мас.% и больше обладают более высокой способностью к солюбилизации красителей, чем полимеры, содержащие менее 50 мас.% гидрофильного блока. Для Пл F-127 содержание полиэтиленоксида достигает 70 мас.%, что обосновывает эффективную солюбилизацию водонерастворимых красителей с его использованием.

В настоящей работе спектральным методом выполнены исследования закономерностей взаимодействия тетраметил-дибензил- $\text{BF}_2$ -дипирролилметена  $((\text{CH}_2\text{Ph})_2(\text{CH}_3)_4\text{BODIPY (I)}$ ; структура изображена на рис. 1, *a*) с Пл F-127, т. е. процесса солюбилизации красителя плуроником, в жидких водно-спиртовых растворах, а также коллоидно-химического состояния стабильных супрамолекулярных аддуктов «краситель–плуроник» и других компонентов в образуемой мицеллярной системе. Интерес к данному красителю обусловлен тем, что в этаноле **I** эффективно генерирует излучение с  $\lambda = 551$  нм и КПД 56 % [8], а выполненные спектральные исследования нацелены на создание твердотельных силикатных материалов (объемные матрицы, тонкие пленки), окрашенных **I**, как новых лазерно активных сред.

**Методика эксперимента.** Существует два способа солюбилизации красителей плурониками: 1) растворение красителя в растворителе, смешивающемся с водой, и дальнейшее введение такого раствора в водный раствор плуроника; 2) соразстворение красителя с плуроником в общем легколетучем растворителе, упаривание растворителя и дальнейшее растворение полученных твердофазных аддуктов «краситель–плуроник» в растворителе, который используется на конечной стадии синтеза требуемого материала. Известно, что способ солюбилизации, включающий в себя промежуточное получение твердых аддуктов «краситель–плуроник», позволяет добиться наибольшей степени мономерной формы красителя, что значительно улучшает функциональные свойства создаваемого материала [9].

Начальная серия экспериментов позволила определить соотношение концентраций Пл F-127/**I**, при котором в растворе образуется такое количество мицелл, которого достаточно для полного инкапсулирования молекул **I**. Исследования реализованы на двух сериях растворов, которые приготовлены следующим образом: 20 г Пл F-127 растворены в водно-этанольной смеси как растворителе (97 об.% этанола + 3 об.% дистиллированной воды) и объем такого раствора доведен до 100 мл. Таким образом, получен ~20 мас.% раствор Пл F-127 в водно-этанольной смеси. Далее, путем разбавления 20 мас.% раствора получены растворы Пл F-127 в водно-этанольной смеси с массовой концентрацией 15, 10, 7,5 и 5 %. Параллельно приготовлен насыщенный этанольный раствор **I**. Первая серия растворов (серия *a*) приготовлена путем добавления к растворам с разными концентрациями Пл F-127 и объемами 1 мл каждого по 50 мкл насыщенного этанольного раствора **I**. Вторая серия растворов (серия *б*) – аналогичные растворы с добавкой по 100 мкл насыщенного этанольного раствора **I**. Спектры поглощения растворов двух приготовленных серий были записаны на спектрофотометре Specord UV VIS M-40 с использованием канала сравнения (водно-этанольные растворы Пл F-127 соответствующих концентраций без добавки красителя). На рис. 1, *a* (кривая 1) в качестве примера представлен спектр поглощения **I** в 5 мас.% водно-этанольном растворе Пл F-127, который имеет длинноволновую полосу поглощения при 527 нм.

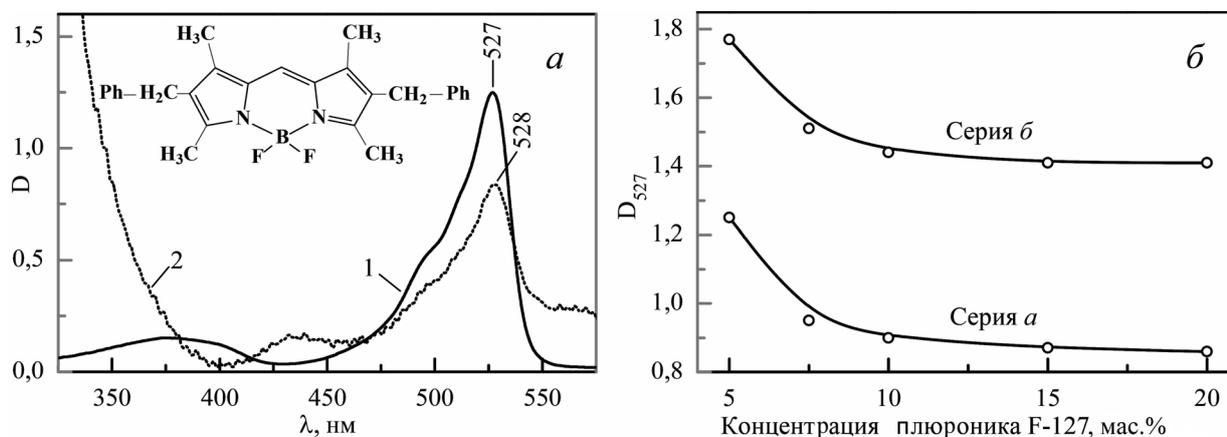


Рис. 1. Спектры поглощения **I** в 5 мас.% водно-этанольном растворе Пл F-127 (кривая 1) и в высушенной твердой фазе (кривая 2) (*a*); зависимость пикового поглощения **I** при 527 нм в водно-этанольных растворах от массовой концентрации Пл F-127 в них (*б*)

**Результаты и их обсуждение.** Анализ спектров поглощения **I** двух серий показывает, что максимум полосы при 527 нм уменьшается с повышением концентрации Пл F-127. При этом для растворов серии *б* эта полоса незначительно уширена по сравнению с аналогичной полосой для растворов серии *а* (например, для спектра серии *а* с массовой концентрацией 5 % Пл F-127 полуширина полосы составляет  $\sim 1100 \text{ см}^{-1}$ , а для серии *б* с такой же концентрацией Пл F-127 –  $\sim 1400 \text{ см}^{-1}$ ). Увеличение концентрации Пл F-127 приводит к сужению указанной полосы. Эти данные свидетельствуют об образовании агрегатов молекул **I** при большой концентрации красителя и малой концентрации Пл F-127 в исходных растворах и их разрушении с увеличением концентрации детергента.

Пиковое поглощение **I** при 527 нм в водно-этанольных растворах с ростом в них концентрации Пл F-127 уменьшается (рис. 1, *б*) для обеих изученных серий растворов; начиная с концентрации  $\sim 10 \text{ мас.}\%$  Пл F-127 оптическая плотность в максимуме полосы поглощения при 527 нм стабилизируется. Полученные данные свидетельствуют о том, что при концентрациях Пл F-127 10 мас.% (и более) имеет место солиubilизация молекул **I**, введенных в раствор, т. е. при таких условиях для их инкапсулирования образуется достаточное количество мицелл.

Для растворения образованных мицелл (аддукта) «**I** – Пл F-127» в других растворителях исходный водно-этанольный раствор был выпарен (в течение 24 ч при температуре меньше  $40 \text{ }^\circ\text{C}$ ) и получен сухой твердофазный аддукт «**I** – Пл F-127», спектр поглощения которого приведен на рис. 1, *а* (кривая 2). При записи спектра поглощения аддукта канал сравнения не использовался, поскольку твердый образец был практически непрозрачным из-за его аморфной (поликристаллической) структуры, приводящей к сильному рассеянию падающего света. Переход образованных аддуктов в твердую фазу практически не влияет на спектральное положение и форму длинноволновой полосы поглощения **I** – наблюдается лишь ее незначительное батохромное смещение (на  $\sim 1 \text{ нм}$ ). Напротив, слабая полоса поглощения в растворе в области 350–400 нм, соответствующая переходам в высоколежащие синглетные состояния красителя, претерпевает существенное длинноволновое смещение в область 420–440 нм. Такое поведение коротковолновой полосы поглощения подтверждает переход аддукта в твердое состояние.

Далее, высушенные твердофазные аддукты «**I** – Пл F-127», полученные из растворов с разными концентрациями Пл F-127 и разными добавками **I**, были растворены в 1 мл водно-этанольной смеси (50:50 об.%). Намечается использование таких растворов для золь-гель синтеза активированных красителями твердотельных материалов на основе тетраэтоксисилана. Спектры поглощения полученных растворов с использованием канала сравнения (чистая водно-этанольная смесь (50:50 об.%) изображены на рис. 2. Кривые на рис. 2, *а* соответствуют растворам высушенных твердых фаз с исходными объемами жидкой фазы 1 мл, содержащими по 100 мкл насыщенного этанольного раствора **I**, рис. 2, *б* – содержащими по 150 мкл насыщенного этанольного раствора **I**. Серия растворов, содержащих по 150 мкл раствора красителя, была использована с целью изуче-

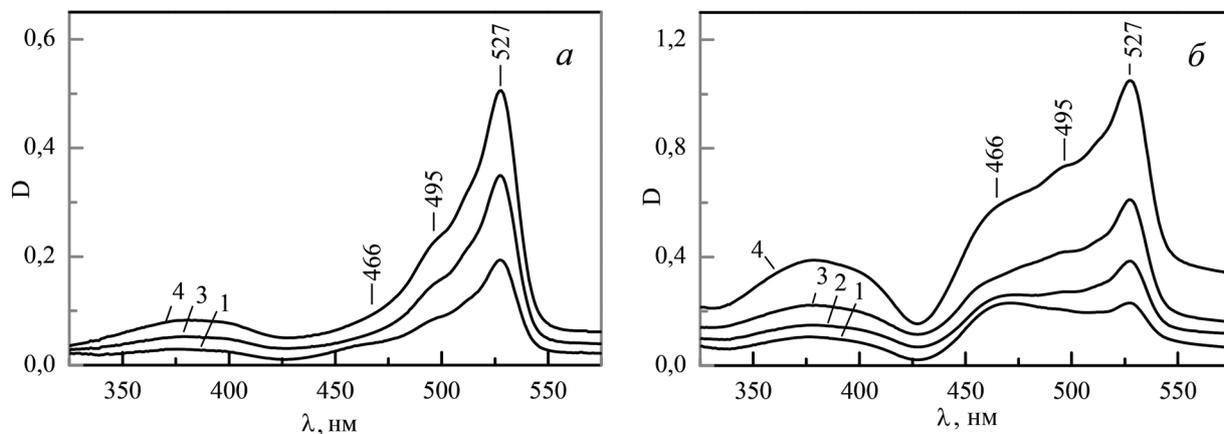


Рис. 2. Спектры поглощения водно-этанольных (50:50 об.%) растворов аддуктов «**I** – Пл F-127», содержащих разные концентрации Пл F-127 (5 (кривые 1), 10 (кривая 2), 15 (кривые 3) и 20 (кривые 4) мас.%) и разные добавки насыщенного этанольного раствора **I** (100 (*а*) и 150 (*б*) мкл)

ния влияния повышения его концентрации на процесс солюбилизации в растворах плуроника. Из спектральных данных следует, что растворы высушенных аддуктов, изначально содержащих по 100 мкл раствора **I** (рис. 2, *a*), имеют спектры мономерной формы **I**. При этом интенсивность длинноволновой полосы поглощения 527 нм возрастает с увеличением концентрации Пл F-127, что антибатно поведению интенсивности аналогичной полосы в спектрах, представленных на рис. 1, *б*. Появление в спектрах поглощения растворов с более высокой концентрацией **I** (рис. 2, *б*) полос при 466 нм и в области 350–400 нм свидетельствует об образовании в растворе ассоциатов молекул красителя. Для этой серии спектров также возрастает интенсивность полосы поглощения при 527 нм с увеличением концентрации Пл F-127. Важно отметить, что относительная доля молекул **I**, соответствующих спектральной форме с полосой поглощения при 466 нм, уменьшается при увеличении концентрации детергента в растворе.

Объяснить наблюдаемые концентрационные эффекты можно влиянием соотношения концентраций красителя и детергента в растворе и изменения компонентного состава растворителя на процесс солюбилизации молекул **I** детергентом Пл F-127, т. е. на формирование мицелл «**I** – Пл F-127». При низкой концентрации Пл F-127 в растворе он существует преимущественно в мономерной форме, не образуя тем самым мицеллы. Поскольку производные бордифторид-дипирролилметена лучше растворяются в этаноле, чем в дистиллированной воде, то для спектров серий *a* и *б*, описанных выше (преобладание этанола в двухкомпонентном растворителе), интенсивность длинноволновой полосы уменьшается с увеличением концентрации Пл F-127 (рис. 1, *б*) вследствие увеличения доли молекул **I**, инкапсулированных детергентом. С увеличением концентрации красителя (серия *б*), часть молекул, находящихся в несолюбилизированном виде (не вошедших в мицеллы), образуют ассоциаты, что является причиной уширения длинноволновой полосы поглощения. Однако, когда соотношение компонент растворителя смещается в сторону увеличения содержания дистиллированной воды (рис. 2), имеет место увеличение интенсивности поглощения при 527 нм водно-спиртового мицеллярного раствора с ростом концентрации Пл F-127 (рис. 2, *a*). Такое поведение можно объяснить преимущественным растворением образованных мицелл Пл F-127 с инкапсулированными молекулами **I** и незначительным растворением «свободных» молекул **I** в этом двухкомпонентном растворителе. Аналогичная ситуация для инкапсулированных молекул **I** имеет место и для серии спектров поглощения более концентрированных растворов (рис. 2, *б*). Появление полосы поглощения ассоциатов **I** в спектрах этой серии при 466 нм обусловлено их лучшей растворимостью в воде, чем мономерных молекул. При этом, как отмечалось выше, доля ассоциированных молекул (по отношению к инкапсулированным) будет уменьшаться с ростом концентрации Пл F-127.

**Заключение.** Таким образом, в работе с использованием метода солюбилизации получены стабильные водно-спиртовые мицеллярные дисперсные системы «**I** – Пл F-127». Спектральным методом показано, что молекулы **I** в мицеллах Пл F-127 сохраняют спектральные свойства мономерной формы (находятся в наибольшей степени дезагрегации). Полученные системы могут быть использованы при синтезе силикатных материалов оптического назначения, окрашенных красителями, солюбилизированными плуроником.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке БРФФИ (договор № Ф14Р-096) и РФФИ (договор № 14-03-90011-Бел\_а).

## Литература

1. Hamley I. W. The Physics of Block Copolymers. Oxford University Press, 1998.
2. Schmolka I. R. // J. Biomed. Mater. Res. 1972. Vol. 6, no. 6. P. 571–582.
3. Gombotz W. R., Pettit D. K. // Bioconjugate Chem. 1995. Vol. 6, no. 4. P. 332–351.
4. Das R. K., Kasoju N., Bora U. // Nanomedicine: Nanotechnology, Biology and Medicine. 2010. Vol. 6, P. 153–160.
5. Liu L., Yong K.-T., Roy I. et al. // Theranostics. 2012. Vol. 2, no. 7. P. 705–713.
6. Foster B, Cosgrove T, Hammouda B. // Langmuir. 2009. Vol. 25, no. 12. P. 6760–6766.
7. Demina T., Grozdova I., Krylova O. et al. // Biochemistry. 2005. Vol. 44, no. 10. P. 4042–4054.
8. Кузнецова П. Т., Аксенова Ю. В., Солодова Т. А. и др. // Оптика и спектроскопия. 2013. Т. 115, № 5. С. 797–806.
9. Аксенова Н. А. Особенности функциональных свойств солюбилизированных плуроником фотоактивных соединений, введенных в полимерные матрицы: автореф. дис. .... канд. хим. наук. М., 2010.

*T. A. PAVICH, S. M. ARABEI, R. T. KUZNETSOVA, E. G. MARTIANOVA, Y. V. AKSENOVA,  
G. V. MAYER, M. B. BEREZIN, K. N. SOLOVYOV*

**INFLUENCE OF COMPONENT PROPORTIONS OF MICELLAR SOLUTIONS  
ON THE SPECTRAL PROPERTIES AND SOLUBILIZATION BY PLURONIC  
OF A BORONDIFLUORIDE DIPYRRROMETHENE DERIVATIVE**

**Summary**

It has been shown by a spectral method that the efficiency of solubilization of a borondifluoride dipyrromethene derivative by Pluronic F-127 in mixed systems depends on the proportions of mass concentrations of the dye and Pluronic in an initial liquid solution. It has been established that the values of the Pluronic F-127 concentration, at which the micelles solubilizing the dye are efficiently formed, exceed 10 % (mass). The analysis of spectral characteristics of the solution of the "dye – Pluronic" adducts has shown that the dye under study exists in the Pluronic micelles in the highest degree of disaggregation manifesting the spectral characteristics of monomeric form.

УДК 535.44

Г. А. ПАШКЕВИЧ<sup>1</sup>, П. И. РОПОТ<sup>2</sup>, А. С. ЛАПЧУК<sup>3</sup>, А. А. КРЮЧИН<sup>3</sup>, А. В. ПРЫГУН<sup>3</sup>**ПОДАВЛЕНИЕ СПЕКЛОВ КВАЗИСПИРАЛЬНЫМ 2D-ДИФРАКЦИОННЫМ  
ОПТИЧЕСКИМ ЭЛЕМЕНТОМ НА ОСНОВЕ БИНАРНОЙ ПСЕВДОСЛУЧАЙНОЙ  
M-ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ**<sup>1</sup>Научно-исследовательский институт прикладной электроники Национального технического университета Украины «Киевский политехнический институт», Киев, Украина<sup>2</sup>Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси<sup>3</sup>Институт проблем регистрации информации НАН Украины, Киев, Украина

(Поступила в редакцию 06.03.2015)

**Введение.** Изображение, созданное при освещении объекта лазерным излучением, модулируется субъективными спеклами, которые возникают вследствие интерференции рассеянного на шероховатой поверхности экрана или освещенного объекта. Развитие методов снижения спекловых шумов является одной из актуальных проблем разработки лазерных проекторов [1–3] и когерентных систем освещения [4]. Амплитуда спекловых шумов вычисляется через контраст спеклов

$$C = \sigma / \bar{I}, \quad (1)$$

где  $\bar{I}$  – среднее значение интенсивности освещения в изображении,  $\sigma$  – стандартное отклонение интенсивности, вызванное спекловыми шумами. Поскольку лазерное излучение может быть изначально частично когерентным (например, в режиме многомодовой генерации), то контраст спеклов (1) не может в полной мере характеризовать эффективность метода уменьшения спекловых шумов. Поэтому часто для эффективности метода подавления шумов используют коэффициент ослабления спеклов, который определяется как отношение контраста спеклов  $C_0$  до применения метода к контрасту  $C$  после применения метода, т. е.

$$k = C_0 / C. \quad (2)$$

Аппаратные методы подавления спекловых шумов базируются в основном на усреднении шумов путем понижения когерентности лазерного излучения, используемого для освещения. Существует несколько подходов для понижения когерентности лазерного излучения. Например, путем уменьшения поляризационной когерентности (деполяризация), понижения пространственной или временной когерентности. Последнее достигается за счет применения мощных лазеров с реализацией многомодового режима генерации.

Одним из наиболее перспективных методов уменьшения спекловых шумов является размещение подвижного диффузора в оптической системе проектора [5]. В настоящей работе экспериментально исследуются возможности метода по уменьшению спекловых шумов подвижным диффузором, который расположен в оптической системе проектора в плоскости, сопряженной с плоскостью экрана. Диффузор может быть нерегулярным или регулярным (т. е. имеющим периодическую или близкую к ней структуру), а также дифракционным оптическим элементом (ДОЭ). Время декорреляции в методе с подвижным ДОЭ сравнимо со средним временным разрешением человеческого глаза. Поскольку структура регулярного ДОЭ является периодической, результат уменьшения спекловых шумов путем усреднения зависит от его размера и точности движения.

Структура регулярного ДОЭ должна быть разработана так, чтобы при его смещении получить усреднение по всем возможным углам падения лучей для данной оптической системы. В работах [6–8] показано, что с помощью простого линейного смещения ДОЭ размерностью 1D на основе кода Баркера можно получить угловую декорреляцию только в одном направлении – вдоль плоскости дифракции. В статье [9] предложен 2D-дифракционный оптический элемент на основе матриц Адамара, что позволило получить угловую декорреляцию лазерного излучения в плоскости. Однако такой подход для получения нужного эффекта требует точного, быстрого и сложного движения ДОЭ. В [10, 11] был разработан метод с применением 2D-дифракционного оптического элемента на основе кода Баркера, который использует всю апертуру объектива для получения максимальной угловой декорреляции излучения. При этом, как показано в [11, 12], чтобы декоррелировать лазерный пучок по всем возможным углам падения, необходимо простое линейное смещение ДОЭ на длину периода кода ( $M$ ) Баркера или  $M$ -последовательности. Здесь же аналитически показано, что угол наклона, который удовлетворяет условию  $\text{tg}(\alpha) = 1/N$ , является оптимальным для уменьшения спекловых шумов. Экспериментальные данные [13], полученные при помещении 2D-дифракционного оптического элемента на основе бинарных псевдослучайных последовательностей внутрь оптической системы лазерного проектора и выполненные для одной длины волны лазерного излучения, частично подтвердили высокую эффективность уменьшения спекловых шумов этим методом.

**Моделирование эффективности подавления спеклов.** Для анализа зависимости эффективности применения метода от параметров структуры и оптической системы был разработан метод и программа расчета такой структуры. Предполагается, что мы имеем идеальную оптическую систему и на экране распределение поля повторяет увеличенное распределение поля на ДОЭ. Известно, что контраст спеклов может быть рассчитан по формуле

$$C_{2D} = \frac{\sqrt{\iiint |A_{2D}(x_1, x_1 + u, y_1, y_1 + v)|^2 \sin^2 \left[ \frac{2\pi}{D} x_1 \right] \sin^2 \left[ \frac{2\pi}{D} (x_1 + u) \right] \sin^2 \left[ \frac{2\pi}{D} y_1 \right] \sin^2 \left[ \frac{2\pi}{D} (y_1 + v) \right] dx_1 du dy_1 dv}}{\left( \iint \sin^2 \left[ \frac{2\pi}{D} x_1 \right] \sin^2 \left[ \frac{2\pi}{D} y_1 \right] A_{2D}(x_1, x_2, y_1, y_2) dx_1 dy_1 \right)^2}, \quad (3)$$

где  $u = x_2 - x_1$  и  $v = y_2 - y_1$ ,  $x_1, x_2, y_1, y_2$  – координаты точек на экране,  $D = \lambda / NA_3$  – разрешающая способность фотокамеры (глаза) на экране,  $NA_3 = D_3 / 2L_3$  – входная числовая апертура фотокамеры,  $\text{sin } c(x) = \sin(x) / x$ .

Автокорреляционная функция поля лазерного луча на экране  $A_{2D}$  определяется по формуле [12]

$$A_{2D}(x_1, x_2, y_1, y_2) = \int_0^L H(x_1 + x, y_1 + x \text{tg}(\alpha)) H^*(x_2 + x, y_2 + x \text{tg}(\alpha)) dx, \quad (4)$$

где  $L$  – длина перемещения изображения ДОЭ на экране вдоль оси  $x$ ,  $H(x)$  – промодулированное дифракционным элементом поле лазерного пучка на экране.

Расчет контраста спеклов по формулам (3) требует расчета пятикратных интегралов с разрывной ступенчатой функцией. Для увеличения быстродействия счета мы аппроксимируем непрерывный последовательный сдвиг ДОЭ на ступенчатое движение, т. е. ДОЭ последовательно перемещают шаг за шагом на один элемент в направлении оси  $X$ , пока величина сдвига  $s$  не будет удовлетворять уравнению  $s \text{tg}(\alpha) = T$ , где  $T$  – наименьший размер ячейки  $M$ -последовательности. Далее, ДОЭ смещается на один элемент в направлении оси  $Y$ , после чего продолжает двигаться по направлению оси  $X$ . Этот процесс продолжается до тех пор, пока длина сдвига вдоль оси  $X$  не достигает значения  $L = NT_0$ , где  $T_0$  – период решетки. При таком типе движения автокорреляционная функция вычисляется путем суммирования по шагам смещения на длину одного элемента ДОЭ и, следовательно, ее значение постоянно на интервале длины этого элемента. Данное приближение было использовано для написания программы и расчета зависимости контраста спеклов от вели-

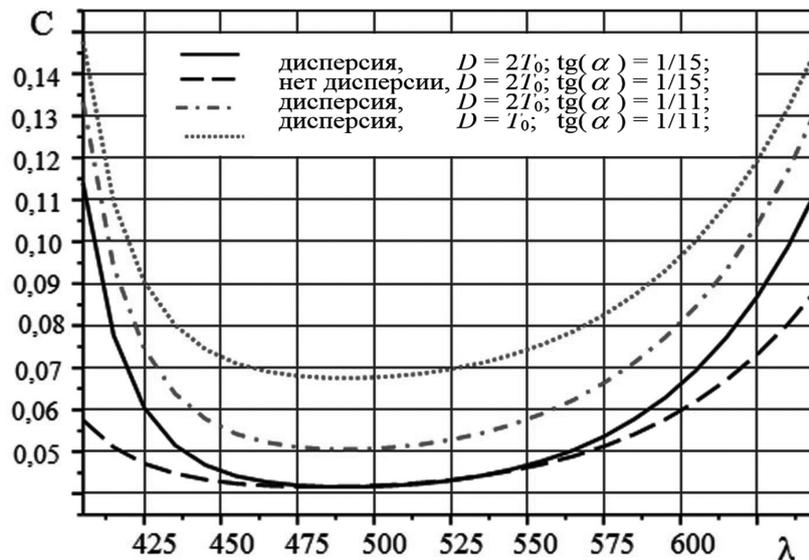


Рис. 1. Зависимость контраста спеклов от длины волны лазерного излучения при смещении ДОЭ на длину  $L$  для оптимальной ДОЭ-структуры при различных углах наклона и разной разрешающей способности глаза:  $T = 5$  мкм;  $N = 15$

чины сдвига ДОЭ, а также угла его наклона как для теоретически рассчитанной оптимальной, так и экспериментально изготовленной структуры. Известно также, что фоторезист имеет существенную дисперсию, и при моделировании нами исследовалось влияние этой дисперсии на эффективность подавления спеклов на краях видимого диапазона длин волн.

Зависимость контраста спеклов от длины волны лазерного излучения при смещении ДОЭ на длину  $L$  для оптимальной ДОЭ-структуры приведена на рис. 1. Численное моделирование проводилось для оптимального угла наклона  $\text{tg}(\alpha) = 1/15$  ( $N = 15$ ) и для несколько большего угла  $\text{tg}(\alpha) = 1/11$ , сравнимого со средним углом наклона для секторальной квазиспиральной структуры при различной разрешающей способности глаза  $D$ . Результаты моделирования (см. рис. 1) подтверждают факт оптимальности угла  $\text{tg}(\alpha) = 1/15$ , а незначительное его увеличение до  $\text{tg}(\alpha) = 1/11$  приводит к повышению контраста спеклов на 25 %. Улучшение разрешения глаза с  $D = 2T_0$  до  $D = T_0$  дополнительно повышает контраст спеклов примерно на 30 %. Видно, что дисперсия значительно ухудшает эффективность подавления контраста спеклов на границах видимого диапазона длин волн. Следовательно, при изготовлении ДОЭ, предназначенного для равномерного подавления спеклов во всем оптическом диапазоне, нужно выбирать подложку и фоторезист с малой дисперсией (например, крон) или материал с аномальной дисперсией.

**Экспериментальные измерения по подавлению спекл-структуры.** Нами исследована возможность эффективного подавления спеклов при освещении лазерным излучением видимого диапазона 2D-дифракционного оптического элемента на основе  $M$ -последовательности. На рис. 2, а приведена оптическая схема для исследования эффективности подавления спекл-структуры изображений с помощью вращающегося 2D-дифракционного оптического элемента на основе  $M$ -последовательности с длиной периода кода  $N = 15$  (цифра – длина элемента в микрометрах). Для эффективного уменьшения спекловых шумов необходимо, чтобы параметры оптической схемы удовлетворяли следующим условиям:

- достаточно большой размер лазерного пучка по сравнению с периодом структуры;
- условие на апертуры  $L_1 \cdot 0,2/L_2 > 15 \cdot D_3/L_3$ , где  $0,2 = \lambda/T$  при усреднении спекл-структуры;
- условие коллимации объективом лазерного излучения после ДОЭ ( $L_1 \cdot 0,2/L_2 + D_1 < D_2$ );
- условие  $2\lambda \cdot L_4/D_3 > 2 \cdot \Delta x$ , где  $\Delta x$  – размер пикселя CCD-камеры;
- условие на скорость вращения ДОЭ ( $R \cdot \omega \cdot t > T_0 \cdot 15 = 1,125$  мм; где  $R$  – меньший радиус ДОЭ;  $\omega$  – частота вращения;  $t$  – экспозиция).

Выбранные геометрические размеры оптической схемы ( $L_1 = 200$  мм,  $D_1 = 14$  мм;  $L_2 = 800$  мм;  $D_2 = 100$  мм;  $L_3 = 650$  мм;  $D_3 = 1,5$  мм;  $L_4 = 50$  мм) обеспечили выполнение первых четырех условий. Для регистрации распределения интенсивности лазерного излучения использовалась

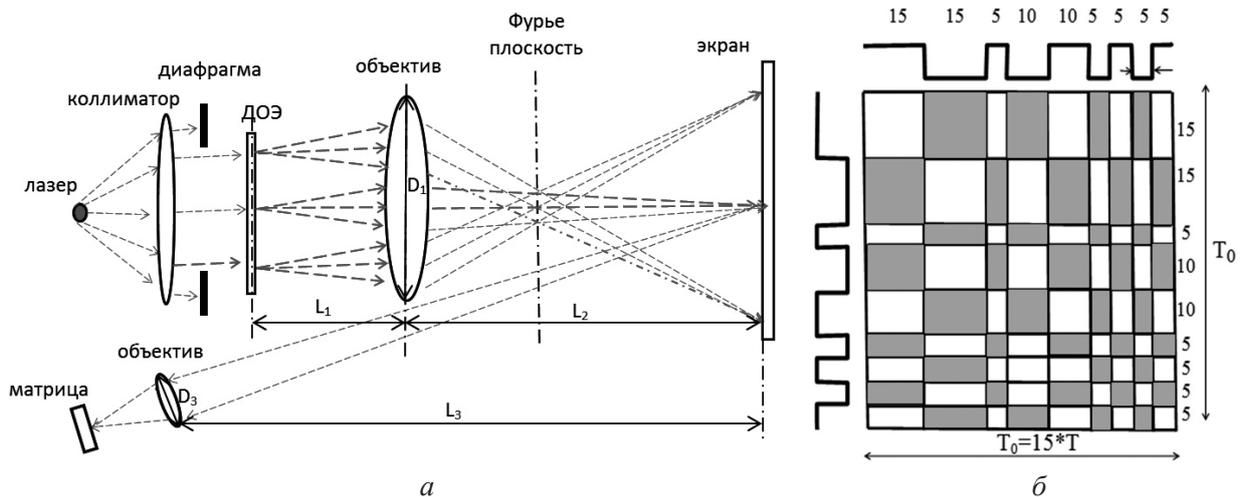


Рис. 2. Оптическая схема для декорреляции излучения с помощью вращающегося 2D-дифракционного оптического элемента на основе  $M$ -последовательности (а) и структура одного периода ДОЭ с длиной периода кода  $N = 15$  и периодом решетки  $T_0 = 75$  мкм (б)

цифровая CCD-камера Col Snap Es с размером пикселя 7 мкм и разрешением 4095 градаций серого. Съемка изображений проводилась при экспозиции 0,04 с (25 кадров в секунду), что соответствует временной разрешающей способности глаза. Для выполнения последнего условия частота вращения ДОЭ варьировалась от 4 до 10 с<sup>-1</sup>.

Структура одного периода исследуемых ДОЭ показана на рис. 2, б, где белые области соответствуют выступам, серые – углублениям, а сверху и слева приведены профили поперечного сечения (ломаные линии) структуры.

Коллимированный лазерный луч проходит через движущийся ДОЭ и оптический модулятор (на схеме не показан, поскольку не влияет на характеристики спеклов) и создает изображение на экране. Движение ДОЭ снижает пространственную когерентность лазерного излучения и таким образом уменьшает спекловые шумы. ДОЭ и его движение подбираются таким образом, чтобы максимально уменьшить спекловые шумы без существенного ослабления интенсивности освещения. 2D-структура ДОЭ, образованная путем перемножения колонки и строки 1D-последовательности, представляет собой две ортогонально ориентированные периодические одномерные структуры с рельефом выступов и углублений. В результате прохождения плоской волны через различные участки такой структуры ее фронт приобретает сдвиг фазы  $\pm\pi$ . Поэтому поле лазерного пучка после ДОЭ с точностью до множителя можно записать как чередование +1 (углубление) и -1 (выступ), образующих псевдослучайную периодическую бинарную последовательность. Было показано, что волновой фронт, прошедший через такую структуру, имеет узкую автокорреляционную функцию. Вследствие этого, при прямолинейном смещении на  $N$  периодов такого ДОЭ за время интегрирования интенсивности, уменьшается пространственная когерентность освещения по полю всего объектива проектора.

Однако, как показывает практика, линейное смещение ДОЭ не всегда удобно и технологично. Для обеспечения вращательного движения дифракционного элемента была изготовлена спиральная структура на диске с постоянным наклоном спирали к радиусу, образованная перемещением одного периода 2D-структуры вдоль спирали при вращении вокруг ее центра. Спиральную структуру с постоянным периодом решетки трудно реализовать из-за уменьшения расстояния между витками спирали при приближении к центру. Поэтому нами была реализована квазиспиральная структура в виде секторов (рис. 3, а), в которые внесена часть прямоугольного 2D-дифракционного оптического элемента на основе  $M$ -последовательности. Угол наклона ее ребер и касательной к окружности в центре сектора был равным  $\text{tg}(\alpha) = 1/N$ . Изготовленный нами дифракционный оптический элемент имел квазиспиральную структуру, нанесенную на кольцевую область с радиусами 1,5 и 3,5 см. В качестве его основы использовалась кварцевая пластинка размером 7,1×7,1 см и толщиной 2,8 мм. Структура создавалась слоем фоторезиста Shipley методом фотолитографии

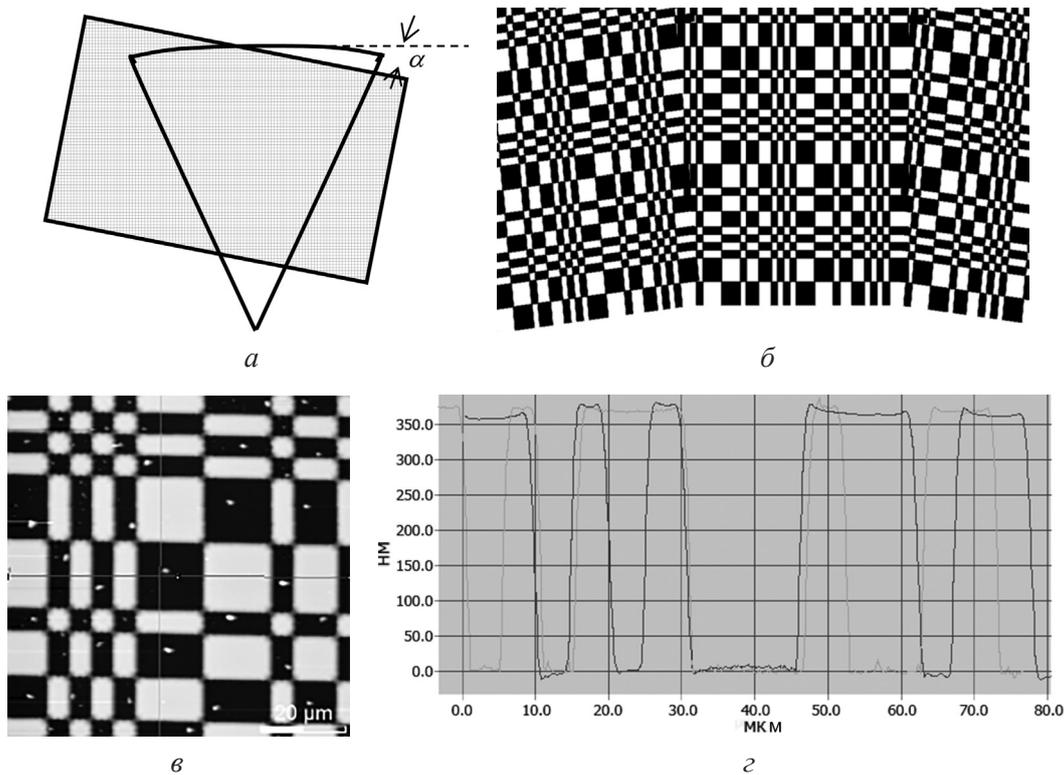


Рис. 3. Квазиспиральный 2D-дифракционный оптический элемент на основе  $M$ -последовательности с длиной кода  $N = 15$ :  $a$  – схема изготовления сектора ДОЭ;  $b$  – часть фотошаблона ДОЭ с характерными «дефектами» изготовления;  $c$  – увеличенный фрагмент структуры ДОЭ;  $d$  – сечение фрагмента структуры, полученное атомным силовым микроскопом

после его засветки через фотошаблон и травление. Фотошаблон изготовлялся методом мультипликации (100 000 мультипликаций), а для устойчивости полученной структуры проводилось за дублирование фоторезиста путем его термической обработки. На рис. 3,  $b$  приведено изображение полученной структуры с помощью силового сканирующего микроскопа, где возле ее внутреннего радиуса наблюдаются разрывы на стыках секторов, а на вставке рисунка, из-за несогласованности концевых участков каждого сектора с соседним, наблюдается нерегулярность структуры. В ней присутствуют нерегулярные включения в углублениях (белые точки на черном фоне; рис. 3,  $c$ ), имеющие пирамидальную форму и высоту, равную высоте невытравленной части. Видно, что площадь этих структур незначительная и они не могут кардинально изменить свойства ДОЭ, связанные с эффективностью подавления спекловых шумов.

На рис. 3,  $d$  показан профиль структуры с высотой  $365 \pm 5$  нм, полученный атомным силовым микроскопом (по сечениям фрагмента ДОЭ, указанным на рис. 3,  $c$ ). Экспериментально полученная зависимость контраста спеклов от длины волны лазерного излучения, при смещении изготовленного нами ДОЭ на длину  $L$ , приведена на рис. 4.

Как видно из графиков на рис. 4, экспериментально изготовленная структура ДОЭ имеет аналогичную оптимальной зависимости контраста от длины волны, угла наклона и разрешающей способности глаза (см. рис. 1).

В таблице приведены результаты по измерению контраста спеклов при рассеянии на ДОЭ синего (405 нм), зеленого (532 нм) и красного (628 нм) излучения при разных скоростях вращения. Мощность используемых лазеров была примерно одинакова и колебалась в пределах 20–25 мВт. При вычислении контраста спеклов выбиралось несколько областей ( $n$  – номер области) освещенного экрана, и для каждой из них отдельно вычислялся контраст. В таблице приняты следующие обозначения:  $C_0$  – контраст спеклов до применения метода подавления;  $C_m$  – контраст после его применения, где нижний индекс обозначает число оборотов ДОЭ в секунду;  $k$  – коэффициент подавления спеклов.

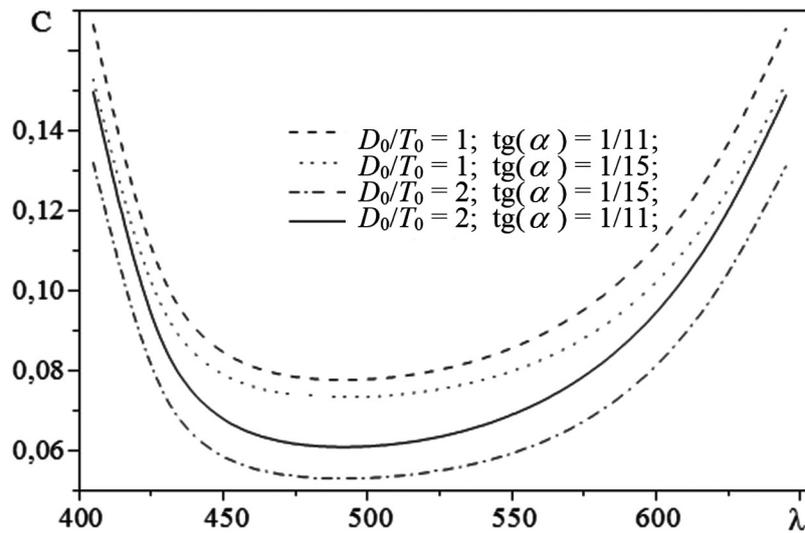


Рис. 4. Зависимость контраста спеклов от длины волны лазерного излучения для экспериментально изготовленного ДОЭ с 2D-структурой при различных углах наклона и разной разрешающей способности глаза с учетом дисперсии фоторезиста:  $T = 5$  мкм;  $N = 15$

**Результаты измерений контраста спеклов на трех длинах волн (628, 532 и 405 нм)**

Контраст $n$	$\lambda$ , нм	$C_0$			$C_4$			$C_8$			$C_{10}$		
		628	532	405	628	532	405	628	532	405	628	532	405
1		0,493	0,591	0,299	0,124	0,053	0,047	0,120	0,049	0,042	0,112	0,048	0,043
2		0,463	0,603	0,282	0,119	0,050	0,043	0,115	0,054	0,051	0,109	0,049	0,038
3		0,516	0,588	0,330	0,123	0,054	0,046	0,119	0,045	0,041	0,116	0,045	0,043
4		0,533	0,579	0,302	0,121	0,058	0,050	0,121	0,047	0,053	0,110	0,053	0,049
5		0,457	0,629	0,329	0,125	0,051	0,058	0,119	0,053	0,045	0,117	0,053	0,053
6		0,432	0,600	0,306	0,120	0,059	0,049	0,119	0,057	0,045	0,111	0,053	0,047
$\bar{C}$		0,482	0,598	0,308	0,122	0,054	0,049	0,119	0,051	0,046	0,113	0,050	0,045
$\Delta C$		0,035	0,016	0,017	0,002	0,004	0,005	0,002	0,004	0,005	0,003	0,003	0,005
$k$		1,00	1,00	1,00	3,95	11,07	6,31	4,06	11,77	6,68	4,29	11,94	6,80

Используемые лазерные источники существенно отличались длиной когерентности. Так, длина когерентности He-Ne-лазера была около полуметра, в то время как для остальных двух лазерных источников с диодной накачкой – несколько сантиметров. Изначально низкий контраст спеклов синего лазера обусловлен, вероятнее всего, работой лазера в многомодовом режиме. Как видно из таблицы, для зеленого и синего излучения лазеров получен уровень контраста спеклов ниже чувствительности глаза человека ( $\approx 5\%$ ), для красного – контраст спеклов после подавления превышает этот уровень в 2 раза.

На рис. 5 приведены распределения интенсивности лазерного освещения в изображении экрана до и после применения метода для красного, зеленого и синего лазеров. Как видим, для синего и зеленого излучения лазерное пятно имеет близкую к плавной функции распределения с незначительной модуляцией спеклами. В то же время на изображении красного лазерного пятна модуляция интенсивности освещения спеклами еще отчетливо видна.

**Заключение.** Показано, что квазиспиральный 2D-дифракционный оптический элемент на основе  $M$ -последовательности с длиной кода 15 позволяет эффективно подавлять спеклы в широком спектре видимого диапазона длин волн до уровня, близкого к чувствительности человеческого глаза. Получено подавление спеклов с коэффициентом подавления более чем в 11, 6 и 4 раза для зеленого, фиолетового и красного излучения лазеров соответственно. На краях границы видимого спектра эффективность подавления спекл-структуры падает примерно в 2 раза. Результаты моделирования показали, что эффект уменьшения подавления спеклов на границе видимого диапазо-

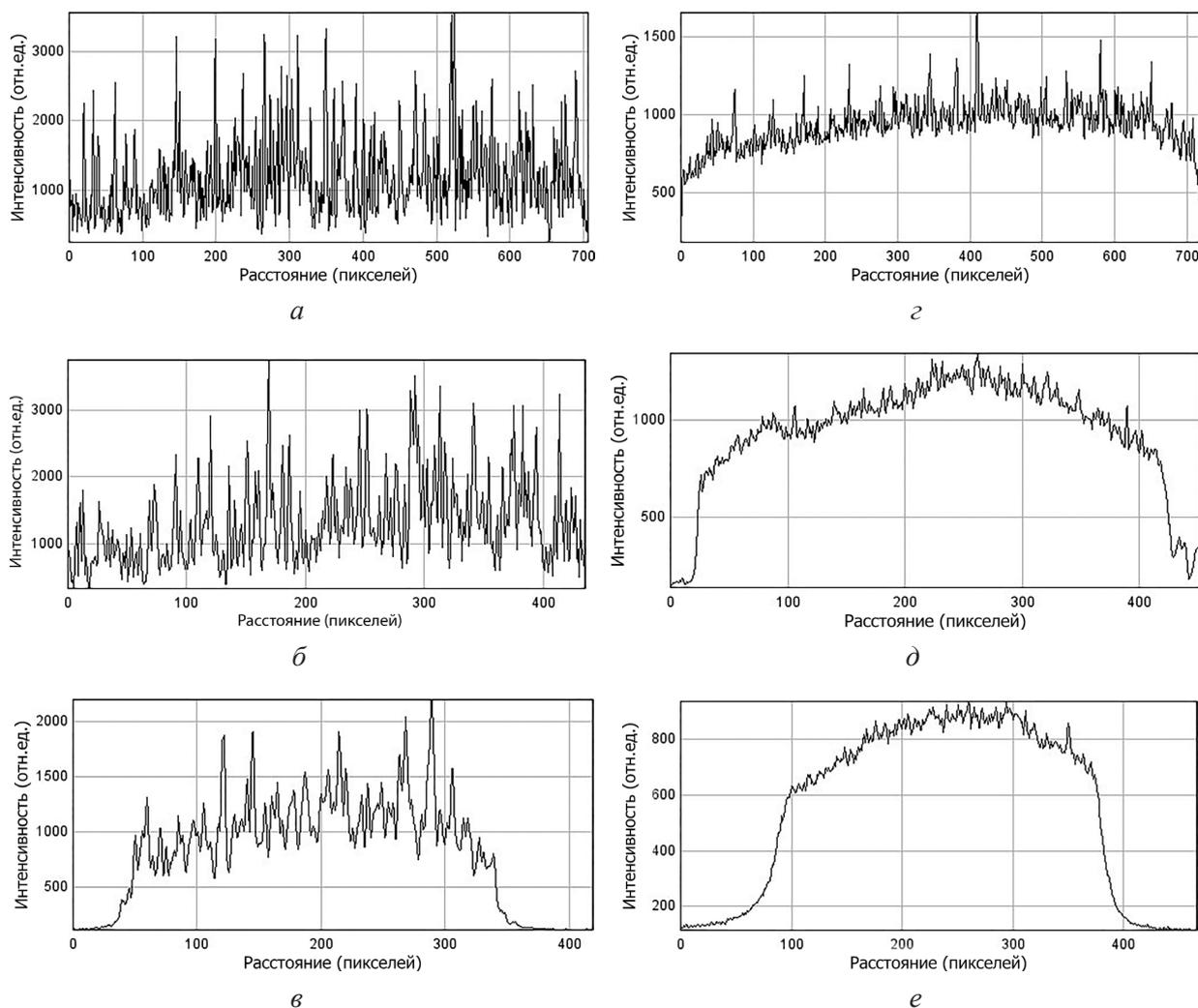


Рис. 5. Распределения интенсивности в изображении лазерного пятна на экране до (а, б, в) и после (г, д, е) применения метода подавления спеклов для красного, зеленого и синего лазерного излучения соответственно

на во многом обусловлен дисперсией материала подложки и фоторезиста ДОО. Для подавления спеклов во всем видимом диапазоне длин волн существует оптимальное значение частоты вращения ДОО. Применение деполаризующих устройств на входе квазиспирального 2D-дифракционного оптического элемента позволит снизить уровень спекловых шумов изображений, проецируемых на большие экраны, до порога чувствительности человеческого глаза во всем диапазоне длин волн видимого спектра.

## Литература

1. Trisnadi J. I., Carlisle C. B., Monteverde V. // Proc. SPIE. 2004. N 5348. P. 52–64.
2. Kowarz M. W., Brazas J. C., Phalen J. G. // IEEE. 15<sup>th</sup> Int. MEMS Conf. Digest. 2002. P. 568–573.
3. Yun S. K. et. al. // Proc. Soc. Inf. Disp. 2006. Vol. 29, N 1. P. 551–555.
4. Tsikos C. J. et. al. 2002, USA Patent 6988660.
5. Kubota S., Goodman J. W. // Appl. Opt. 2010. Vol. 49. P. 4385–4391.
6. Yurlov V. et. al. // Appl. Opt. 2009. Vol. 48. P. 80–90.
7. Yurlov V. et. al. // Appl. Opt. 2008. Vol. 47. P. 179–187.
8. Akram M. N., Kartashov K., Tong Zh. // Opt. Lett. 2010. Vol. 35. P. 444–446.
9. Trisnadi J. I. // Opt. Lett. 2004. Vol. 29. P. 11–13.
10. Lapchuk A. S. et. al. // J. Opt. Soc. Am. A. 2013. Vol. 30, N 1. P. 22–31.
11. Lapchuk A. S. et. al. // J. Opt. Soc. Am. A. 2013. Vol. 30, N 2. P. 227–232.
12. Pashkevich G. A. et. al. // J. Opt. Soc. Am. A. 2013. Vol. 30, N 9. P. 1760–1767.
13. Pashkevich G. A. et. al. // J. Opt. Soc. Am. A. 2013. Vol. 30, N 11. P. 2253–2258.

*G. A. PASHKEVICH, P. I. ROPOT, A. S. LAPCHUK, A. A. KRYUCHIN, A. V. PRYGUN*

**SPECKLE SUPPRESSION BY A QUASI-SPIRAL 2D DIFFRACTIVE OPTICAL ELEMENT  
BASED ON THE BINARY PSEUDORANDOM *M*-SEQUENCE**

**Summary**

The method based on suppressing speckle noise by a rotating quasi-spiral 2D diffractive optical element (DEO) created using binary pseudo-random sequences is presented. The unique DOE structure for the case of *M*-sequence code 15 in length was fabricated. Speckle suppression for green, purple, and red lasers by a factor more than 11.6 and 4, respectively, was obtained. Numerical simulations have shown that strong dispersion of photoresist (DOE structure medium) results in a significant decrease of the efficiency of the method on the borders of the visible range of electromagnetic radiation, and the use of material with anomalous dispersion can significantly improve the parameters of suppression of speckles on the borders of the visible range of wavelengths.

УДК 535.5

В. А. ПИЛИПОВИЧ, В. Б. ЗАЛЕССКИЙ, А. И. КОНОЙКО, В. М. КРАВЧЕНКО, Т. Р. ЛЕОНОВА

**ВЫСОКОЭФФЕКТИВНЫЙ АМПЛИТУДНЫЙ МОДУЛЯТОР НЕПОЛЯРИЗОВАННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ С ПОПЕРЕЧНЫМ ЭЛЕКТРООПТИЧЕСКИМ ЭФФЕКТОМ***Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси**(Поступила в редакцию 03.04.2014)*

В интенсивно разрабатываемых в настоящее время оптоэлектронных системах обработки и передачи информации широко применяются методы амплитудной модуляции излучения [1–4]. С их помощью выполняется преобразование информации из электрической формы в оптическую.

Для осуществления модуляции света наиболее перспективными считаются методы, основанные на применении электрооптического эффекта, так как для них время релаксации оценивается в  $10^{-12}$  с и менее [5]. Эти методы позволяют осуществлять как амплитудную, поляризационную, фазовую, так и частотную модуляцию. Важное место среди амплитудных электрооптических модуляторов занимают модуляторы неполяризованного излучения. Для модуляции излучения ближней ИК-области спектра наиболее перспективными считаются электрооптические модуляторы с поперечным приложением электрического поля, так как в этом случае величина управляющего напряжения существенно ниже, чем модуляторов с продольным приложением электрического поля для данного диапазона электромагнитного спектра. К недостаткам амплитудных электрооптических модуляторов с поперечным приложением управляющего поля можно отнести их невысокую эффективность из-за температурных флуктуаций. Вследствие флуктуации температуры происходит изменение толщины электрооптических кристаллов, что приводит к изменению наводимой разности фаз между распространяющимися в нем ортогонально поляризованными составляющими электрического вектора световой волны, а следовательно, к смещению рабочей точки модулятора на модуляционной характеристике. Это проиллюстрировано на осциллограмме, приведенной на рис. 1, а.

В связи с этим представляет интерес рассмотрение вопроса повышения эффективности электрооптических модуляторов неполяризованного излучения на поперечном электрооптическом эффекте за счет минимизации смещения рабочей точки модулятора путем минимизации влияния продольного температурного градиента в кристаллах. Осциллограмма светового сигнала на выходе такого модулятора (рис. 1, б) соответствует случаю отсутствия смещения рабочей точки модулятора. Этого можно достичь, во-первых, за счет формирования его оптической схемы в виде кольца, во-вторых, за счет помещения ее в диэлектрический корпус, обладающий высокой теплопроводностью.

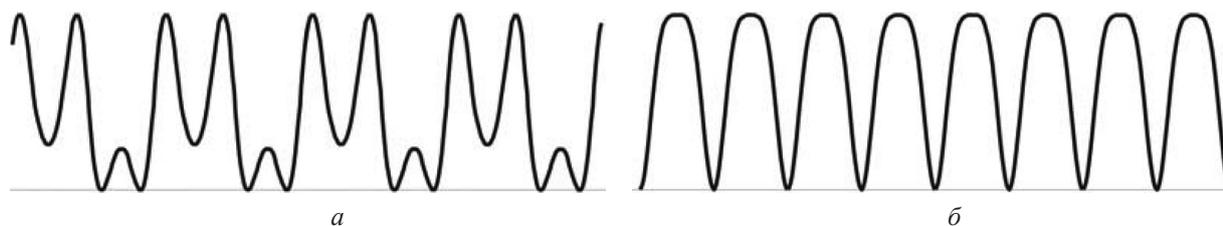


Рис. 1. Осциллограммы оптического отклика электрооптических модуляторов:  
а – в случае наличия смещения рабочей точки; б – в отсутствие смещения

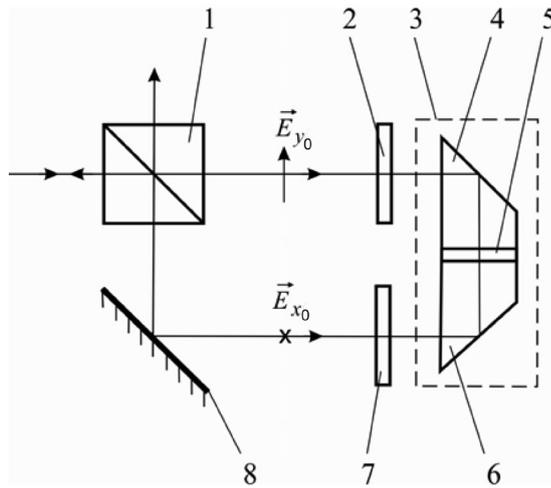


Рис. 2. Функциональная схема амплитудного модулятора неполяризованного излучения с поперечным электрооптическим эффектом

Функциональная схема такого амплитудного модулятора представлена на рис. 2, где 1 – анализатор плоскости поляризации; 2, 7 – первый, второй фазовые элементы  $\lambda/4$ ; 3 – диэлектрический корпус, обладающий высокой теплопроводностью; 4, 6 – первый и второй электрооптические кристаллы; 5 – фазовый элемент  $\lambda/2$ ; 8 – отражатель. Одноименные оси индикатрисы показателей преломления первого и второго фазовых элементов  $\lambda/4$  между собой параллельны и ориентированы под углом  $45^\circ$  к главной плоскости отражателя и анализатора плоскости поляризации светового пучка, а также к осям наведенной анизотропии в первом и втором электрооптических кристаллах, кристаллографические оси которых ориентированы в противоположных направлениях.

Амплитудный модулятор неполяризованного света работает следующим образом. Пусть на вход оптической системы (см. рис. 2) поступает неполяризованный световой пучок. Он разделяется анализатором поляризации на два ортогонально плоско поляризованных световых пучка  $E_{y_0}$  и  $E_{x_0}$ , которые распространяются после анализатора плоскости поляризации навстречу друг другу. Световой пучок, поляризованный в вертикальной плоскости  $E_{y_0}$  (в плоскости рис. 2) падает на первый фазовый элемент  $\lambda/4$ , который обладает осями оптической анизотропии  $x_2, y_2$ , развернутыми на угол  $45^\circ$  относительно главной плоскости анализатора поляризации. В результате двулучепреломления этого светового пучка в первом фазовом элементе  $\lambda/4$  будут распространяться две равные по амплитуде ортогонально поляризованные световые волны:

$$\begin{cases} E_{x_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} E_{y_0} \sin[\omega t - (kr + \varphi)], \\ E_{y_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} E_{y_0} \sin[\omega t - (kr + \varphi)], \end{cases}$$

где  $E_{y_0}$  – амплитуда электрического вектора световой волны, поляризованной в вертикальной плоскости;  $\omega$  – круговая частота падающей световой волны;  $k$  – волновое число падающей световой волны;  $t$  – время;  $r$  – расстояние, пройденное световой волной;  $\varphi$  – постоянная фазовая задержка. При прохождении этих ортогонально поляризованных световых волн через первый фазовый элемент  $\lambda/4$  между ними наводится разность фаз, равная  $\pi/2$ . Поэтому выражение, описывающее ортогонально поляризованные волны после прохождения первого фазового элемента  $\lambda/4$ , будет иметь вид

$$\begin{cases} E'_{x_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} E_{y_0} \sin[\omega t - (kr + \varphi)], \\ E'_{y_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} E_{y_0} \cos[\omega t - (kr + \varphi)]. \end{cases}$$

Оси индикатрисы показателей преломления первого электрооптического кристалла ( $x_4$  и  $y_4$ ) развернуты относительно осей оптической анизотропии первого фазового элемента  $\lambda/4$  на угол  $45^\circ$ . При двулучепреломлении ортогонально поляризованных волн, прошедших первый фазовый элемент  $\lambda/4$ , в нем на первом электрооптическом кристалле формируются две ортогонально поляризованные волны. Они равны по амплитуде и сдвинуты по фазе друг относительно друга на  $\pi/2$ . Описывающие их выражения имеют следующий вид:

$$\begin{cases} E_{x_4} = \frac{\sqrt{2}}{2} E_{y_0} \sin \left[ \omega t - (kr + \varphi) + \frac{\pi}{4} \right], \\ E_{y_4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} E_{y_0} \sin \left[ \omega t - (kr + \varphi) - \frac{\pi}{4} \right]. \end{cases} \quad (1)$$

При прохождении световой волны через первый электрооптический кристалл между ортогонально поляризованными компонентами электрического вектора  $E_{x_4}$  и  $E_{y_4}$  возникает разность фаз, равная  $\delta_1$ , которая может быть определена из следующего выражения:

$$\delta_1 = \frac{2\pi}{\lambda} (n_o - n_e) l + \frac{\pi}{\lambda} (n_o^3 r_{13} - n_e^3 r_{33}) U \frac{l}{d} + (\delta_{\parallel} - \delta_{\perp}), \quad (2)$$

где  $l$  – длина пути, который был пройден светом в первом электрооптическом кристалле;  $d$  – линейная апертура модулятора;  $n_o$ ,  $n_e$  – показатели преломления для обыкновенной и необыкновенной волны;  $r_{13}$ ,  $r_{33}$  – электрооптические коэффициенты кристалла.

Первое слагаемое в выражении (2) соответствует разности фаз, возникающей из-за естественной анизотропии первого электрооптического кристалла, второе – из-за наведенной анизотропии, возникающей при приложении электрического поля, третье – из-за разного изменения фаз  $\delta_{\parallel}$  и  $\delta_{\perp}$  волн, поляризованных, соответственно, параллельно и перпендикулярно плоскости падения при полном внутреннем отражении. Последнюю разность фаз можно определить из выражения

$$(\delta_{\parallel} - \delta_{\perp}) \approx 2 \operatorname{arctg} \left( \frac{\cos \varphi \sqrt{\sin^2 \varphi - n_i^2}}{\sin^2 \varphi} \right),$$

где  $\varphi$  – угол падения при полном внутреннем отражении.

Ортогонально поляризованные волны на выходе первого электрооптического кристалла с учетом (1) и (2) будут иметь вид

$$\begin{cases} E'_{x_4} = \frac{\sqrt{2}}{2} E_{y_0} \sin \left[ \omega t - (kr + \varphi) + \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\delta_1}{2} \right) \right], \\ E'_{y_4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} E_{y_0} \sin \left[ \omega t - (kr + \varphi) - \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\delta_1}{2} \right) \right]. \end{cases}$$

При прохождении этих ортогонально поляризованных волн через фазовый элемент  $\lambda/2$  их плоскости поляризации поворачиваются на угол  $90^\circ$ . Это является следствием того, что его оси оптической анизотропии развернуты относительно осей анизотропии первого электрооптического кристалла на угол  $45^\circ$ .

В результате двулучепреломления ортогонально поляризованных волн на втором электрооптическом кристалле, вследствие того, что его оси оптической анизотропии  $x_6$  и  $y_6$  развернуты относительно осей фазового элемента  $\lambda/2$  на угол  $45^\circ$ , в нем формируются две ортогонально поляризованные волны. Описывающие их выражения имеют следующий вид:

$$\begin{cases} E_{x_6} = -\frac{\sqrt{2}}{2} E_{y_0} \sin \left[ \omega t - (kr + \varphi) - \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\delta_1}{2} \right) \right], \\ E_{y_6} = \frac{\sqrt{2}}{2} E_{y_0} \sin \left[ \omega t - (kr + \varphi) + \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\delta_1}{2} \right) \right]. \end{cases} \quad (3)$$

При прохождении световой волны через второй электрооптический кристалл между ортогонально поляризованными компонентами электрического вектора  $E_{x6}$  и  $E_{y6}$  возникает разность фаз, равная  $\delta_2$ , которая может быть определена из выражения

$$\delta_2 = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)l - \frac{\pi}{\lambda}(n_o^3 r_{13} - n_e^3 r_{33})U \frac{l}{d} + (\delta_{\parallel} - \delta_{\perp}). \quad (4)$$

Знак «минус» перед вторым членом обусловлен тем, что во втором электрооптическом кристалле оптическая ось ориентирована в направлении, противоположном направлению оптической оси первого электрооптического кристалла.

Ортогонально поляризованные волны на выходе второго электрооптического элемента  $b$  с учетом (3) и (4) будут иметь вид

$$\left\{ \begin{array}{l} E'_{x6} = -\frac{\sqrt{2}}{2} E_{y0} \sin \left[ \omega t - (kr + \varphi) - \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\delta_1}{2} - \frac{\delta_2}{2} \right) \right] = \\ = -\frac{\sqrt{2}}{2} E_{y0} \sin \left\{ \omega t - (kr + \varphi) - \left[ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{\lambda} (n_o^3 r_{13} - n_e^3 r_{33}) U \frac{l}{d} \right] \right\}; \\ E'_{y6} = \frac{\sqrt{2}}{2} E_{y0} \sin \left[ \omega t - (kr + \varphi) + \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\delta_1}{2} - \frac{\delta_2}{2} \right) \right] = \\ = \frac{\sqrt{2}}{2} E_{y0} \sin \left\{ \omega t - (kr + \varphi) + \left[ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{\lambda} (n_o^3 r_{13} - n_e^3 r_{33}) U \frac{l}{d} \right] \right\}. \end{array} \right.$$

При двулучепреломлении последних на втором фазовом элементе  $\lambda/4$  в нем формируются две ортогонально поляризованные волны. Это является следствием того, что оси оптической анизотропии  $x_7$  и  $y_7$  второго фазового элемента  $\lambda/4$  развернуты относительно осей анизотропии электрооптических кристаллов модулятора на угол  $45^\circ$ . Они описываются гармоническими функциями следующего вида:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{x7} = E_{y0} \cos \left( \frac{\pi}{4} + \delta \right) \sin [\omega t - (kr + \varphi)], \\ E_{y7} = E_{y0} \sin \left( \frac{\pi}{4} + \delta \right) \cos [\omega t - (kr + \varphi)], \end{array} \right.$$

где

$$\delta = \frac{\pi}{\lambda} (n_o^3 r_{13} - n_e^3 r_{33}) U \frac{l}{d}.$$

При прохождении световой волны через второй фазовый элемент  $\lambda/4$  между ортогонально поляризованными компонентами электрического вектора  $E_{x7}$  и  $E_{y7}$  наводится разность фаз, равная  $\pi/2$ . В результате на выходе второго фазового элемента  $\lambda/4$  происходит синфазное совмещение ортогонально поляризованных волн, которые будут иметь в этом случае вид

$$\left\{ \begin{array}{l} E'_{x7} = E_{y0} \cos \left( \frac{\pi}{4} + \delta \right) \cos [\omega t - (kr + \varphi)], \\ E'_{y7} = E_{y0} \sin \left( \frac{\pi}{4} + \delta \right) \cos [\omega t - (kr + \varphi)]. \end{array} \right. \quad (5)$$

Суперпозиция этих ортогонально поляризованных волн и дает результирующую плоско поляризованную световую волну, угол наклона плоскости поляризации которой к осям оптической анизотропии второго фазового элемента  $\lambda/4$  можно получить из отношения амплитуд ортогонально поляризованных волн на выходе:

$$\frac{E_{y7}}{E_{x7}} = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \delta \right).$$

Поэтому в случае, если на модулятор управляющее напряжение не подается, световой пучок, отразившись от отражателя, выходит из анализатора поляризации в направлении, перпендикулярном направлению падающего на модулятор светового пучка. В том же направлении пойдет и ортогонально поляризованный световой пучок, прошедший затвор в противоположном направлении.

При подаче на электрооптические кристаллы полуволнового управляющего напряжения, величину которого для модулятора с поперечным электрооптическим эффектом можно определить из выражения

$$U = \frac{\lambda}{(n_i^3 r_{13} - n_e^3 r_{33}) l},$$

на выходе второго фазового элемента плоскость поляризации выходящего светового пучка повернется на  $90^\circ$ . Поэтому световой пучок выйдет из модулятора в направлении, противоположном падающему на затвор световому пучку. В том же направлении пойдет ортогонально поляризованный световой пучок, прошедший модулятор в противоположном направлении. Осциллограмма светового сигнала на выходе такого модулятора изображена на рис. 1, б. Она соответствует случаю отсутствия смещения рабочей точки модулятора.

Таким образом, предложен метод высокоэффективной амплитудной модуляции неполяризованного излучения на базе поперечного электрооптического эффекта. Он позволяет минимизировать влияние температурных изменений в электрооптических элементах за счет компактного их размещения в диэлектрическом корпусе, обладающем высокой теплопроводностью. Описан амплитудный электрооптический модулятор с поперечным приложением управляющего поля кристаллов КТР, выполненный по кольцевой схеме.

Предлагаемый электрооптический модулятор с использованием кристаллов КТР работает как с излучением видимого диапазона, так и с излучением ближнего ИК-диапазона до  $\lambda = 1,535$  мкм включительно. При апертуре 2 мм и длине электрооптических элементов 6 мм величина управляющего напряжения составляет порядка 1000 В. Модулятор может работать в световых пучках с угловой апертурой  $\pm 5'$ , причем отношение сигнал/фон будет составлять порядка 50.

## Литература

1. Пилипович В. А., Ставров А. А., Конойко А. И. // Электроника инфо. 2008. № 4. С. 45–48.
2. Бережной А. А. // Опт. журн. 1999. Т. 66, № 7. С. 3–19.
3. Ярив А., Юх П. Оптические волны в кристаллах: пер. с англ. М., 1987.
4. Мустель Е. П., Парыгин В. Н. Методы модуляции и сканирования света. М., 1970. С. 21–130.
5. Петров В. М., Макаревская Е. В. // Кристаллография. 1978. Т. 23. С. 639–640.

*V. A. PILIPOVICH., V. B. ZALESSKY, A. I. KONOIKO, V. M. KRAVCHENKO, T. R. LEONOVA*

## HIGH-PERFORMANCE AMPLITUDE MODULATOR OF NON-POLARIZED RADIATION WITH THE TRANSVERSE ELECTROOPTIC EFFECT

### Summary

This article proposes a method for high-amplitude modulation of non-polarized radiation on the basis of the transverse electrooptic effect. The essence of the method is to minimize the effect of temperature changes in the electro-optical elements due to their parallel location in the insulating housing having high thermal conductivity. An amplitude electro-optic modulator with a cross application of control field KTP crystals made according to the ring scheme is described.

УДК 536.425:538.91

*Н. А. КАЛАНДА, М. В. ЯРМОЛИЧ, А. М. ПАНАСЕВИЧ, Д. А. КРИВЧЕНЯ*

### **ФАЗОВЫЕ ПРЕВРАЩЕНИЯ ПРИ КРИСТАЛЛИЗАЦИИ $\text{Sr}_2\text{FeMoO}_{6-\delta}$ ИЗ ПРОСТЫХ ОКСИДОВ**

*Научно-практический центр НАН Беларуси по материаловедению*

*(Поступила в редакцию 27.03.2015)*

**Введение.** К наиболее перспективным материалам для спинтроники относятся магнитные полупроводники  $\text{Sr}_2\text{FeMoO}_{6-\delta}$  с упорядоченной структурой двойного перовскита. Особый интерес к ним обусловлен их химической стабильностью в восстановительной атмосфере, высокими значениями температуры Кюри ( $T_c = 400\text{--}420$  К) и степени спиновой поляризации электронов проводимости, достигающей  $\sim 100\%$  при достаточно низких значениях магнитных полей  $B < 0,5$  Тл, в условиях обязательного сверхструктурного упорядочения катионов железа и молибдена [1–3]. Анализ полученных ранее данных по изучению физико-химических свойств ферромолибдата стронция свидетельствует о неповторяемости и даже противоречивости результатов магнитных и электрофизических измерений [4, 5]. Это связано с тем, что не принималась во внимание сложность процесса кристаллизации соединения  $\text{Sr}_2\text{FeMoO}_{6-\delta}$ , обусловленная многостадийностью фазовых превращений, низкой кинетикой фазообразования и слабой подвижностью катионов  $\text{Fe}^{3+}$  и  $\text{Mo}^{5+}$  [5, 6]. В этих исследованиях практически отсутствуют строгие корреляции, связывающие функциональные характеристики материала с условиями его получения.

В силу вышесказанного становится очевидным, что получение однофазного соединения  $\text{Sr}_2\text{FeMoO}_{6-\delta}$  с воспроизводимыми физико-химическими свойствами невозможно без основательного анализа фазовых превращений на всех стадиях синтеза. В связи с этим в настоящей работе с использованием рентгеноструктурного, термогравиметрического и дифференциально-термического анализов проведено исследование последовательности фазовых превращений и определен состав промежуточных кристаллических фаз в процессе синтеза  $\text{Sr}_2\text{FeMoO}_{6-\delta}$  из простых оксидов. Кроме того, установлены корреляционные зависимости между скоростью и степенью фазовых превращений в ферромолибдате стронция. Приведенные результаты позволят выявить динамику фазовых превращений, осуществить направленное изменение фазового состава и катионного упорядочения  $\text{Fe}^{3+}/\text{Mo}^{5+}$  и оптимизировать процесс получения ферромолибдата стронция с применением комбинированных режимов термообработки для его использования в электронной промышленности.

**Методика эксперимента.** Для изучения последовательности фазовых превращений в соединениях переменного состава  $\text{Sr}_2\text{FeMoO}_{6-\delta}$  в качестве исходных реагентов брался карбонат стронция ( $\text{SrCO}_3$ ) и оксиды  $\text{Fe}_2\text{O}_3$ ,  $\text{MoO}_3$  высокой чистоты марки «ос.ч.». Перемешивание и помол стехиометрической смеси исходных реагентов проводились в шаровой мельнице «PM 100» Retsch GmbH (Германия) в спирте в течение 1 ч. Полученный порошок прессовался в таблетки диаметром 10 мм и толщиной 4–5 мм.

Дифференциально-термический (ДТА) и термогравиметрический (ТГА) анализы образцов проводились на установке Setaram Labsys TG–DSC16 в интервале температур  $T = (300\text{--}1470)$  К при их нагреве со скоростью  $v = 2$  град/мин в потоке газовой смеси  $5\%\text{H}_2/\text{Ar}$ . Степень превращения ( $\alpha$ ) или доля прореагировавшего вещества, параметры кристаллической решетки, степень сверхструктурного упорядочения изучались с помощью программного обеспечения PowderCell,

FullProf методом Ритвельда на основании данных рентгеновской дифракции, полученных на установке ДРОН-3 в  $\text{CuK}_\alpha$ -излучении при комнатной температуре со скоростью съемки 60 град/ч.

**Результаты и их обсуждение.** На первой стадии эксперимента методами ДТА и ТГА были изучены как тепловые эффекты, так и процессы десорбции газообразных продуктов химических процессов в интервале температур  $T = (300\text{--}1420)$  К в условиях нагрева исходной шихты  $\nu = 2$  град/мин в потоке газовой смеси  $5\%\text{H}_2/\text{Ar}$  на основе реагентов в стехиометрическом соотношении  $2\text{SrCO}_3 + 0,5\text{Fe}_2\text{O}_3 + \text{MoO}_3$ . Эти данные на каждом этапе термообработки соотносились с результатами рентгенофазового анализа, что и позволило проследить динамику фазовых превращений. Так, на основании исследования последовательности фазовых превращений при кристаллизации  $\text{Sr}_2\text{FeMoO}_{6-\delta}$  установлено, что синтез ферромolibдата стронция протекает через ряд последовательно-параллельных реакций [7, 8]. Согласно данным температурных зависимостей дифференциально-термического анализа, установлено наличие трех ярко выраженных экстремумов с эндотермическим эффектом (рис. 1).

Очевидно, что при нагреве до  $T = 750$  К практически не происходит никаких химических процессов в исходной смеси. Первый эндотермический эффект, достигающий минимума при  $T \sim 830$  К и заканчивающийся в области  $T \sim 870$  К обусловлен образованием и последующим ростом соединения  $\text{SrMoO}_4$ , что подтверждается данными РФА.

Одновременно по данным термогравиметрического анализа в области температур  $T = 690\text{--}890$  К имеет место резкое уменьшение массы образца (до  $\Delta m/m_0 \sim 9\%$ ), указывающее на протекание химических процессов с выделением газообразных продуктов реакции (рис. 2). В связи с этим выражение для описания кристаллизации соединения  $\text{SrMoO}_4$  в системе  $\text{SrCO}_3\text{--MoO}_3$ , имеет вид



Второй эндотермический и термогравиметрический эффекты, происходящие в интервале температур  $T = (950\text{--}1100)$  К, сопровождаются поглощением тепла, уменьшением массы с незначительным выделением газообразных продуктов реакций ( $\Delta m/m_0 \sim 2\%$ ) и изменением фазового состава с образованием соединений  $\text{SrFeO}_{3-x}$  и  $\text{Sr}_2\text{FeMoO}_{6-\delta}$  (см. рис. 2).

В связи с этим следует указать, что оксид молибдена в тройной смеси вступает в реакцию несколько быстрее с карбонатом стронция, чем оксид железа. За исключением температуры 970 К, при которой наблюдается практически одновременное появление рентгеновских рефлексов соединений феррита стронция и ферромolibдата стронция. В связи с этим реакция с образованием феррита стронция осуществляется с одновременным поглощением кислорода и выделением

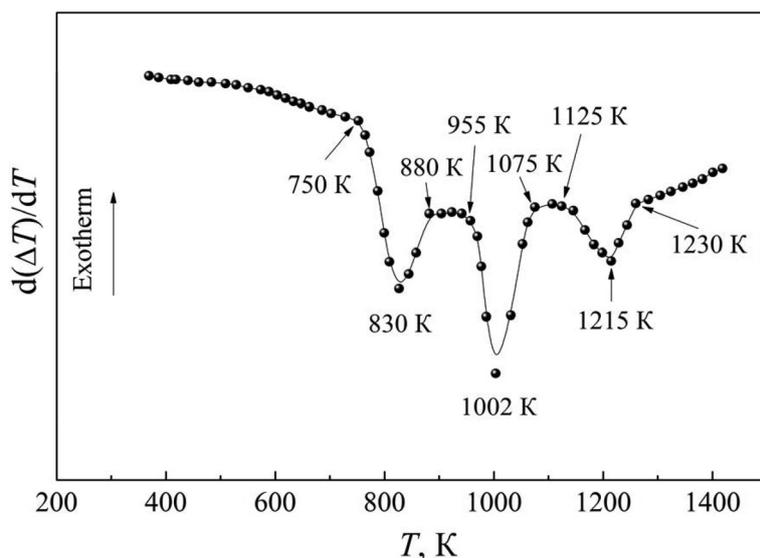


Рис. 1. Температурная зависимость тепловых эффектов в стехиометрической смеси исходных реагентов  $2\text{SrCO}_3 + 0,5\text{Fe}_2\text{O}_3 + \text{MoO}_3$  при скорости нагрева смеси  $\nu = 2$  град/мин в потоке газовой смеси  $5\%\text{H}_2/\text{Ar}$

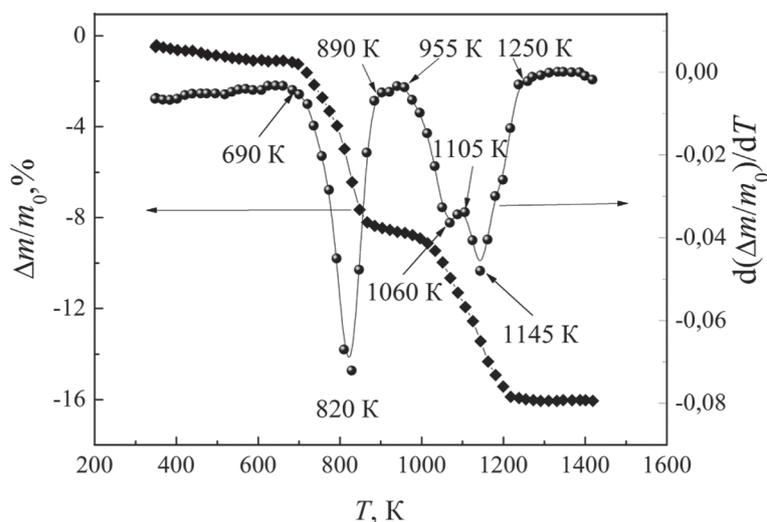
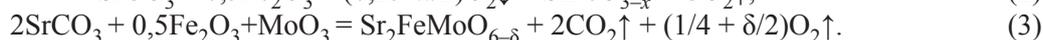


Рис. 2. Температурная зависимость изменения нормированной массы смеси порошка  $2\text{SrCO}_3 + 0,5\text{Fe}_2\text{O}_3 + \text{MoO}_3$  и ее производная отожженного в непрерывном потоке смеси инертных газов  $5\%\text{H}_2/\text{Ar}$  при скорости нагрева смеси  $v = 2$  град/мин

углекислого газа, а образование ферромolibдата стронция реализуется с выделением углекислого газа и кислорода:



В области существования третьих экстремумов дифференциально-термического и термогравиметрического анализов в интервале температур  $T = (1100-1220)$  К идет увеличение количества фазы  $\text{Sr}_2\text{FeMoO}_{6-\delta}$ , первичной основой синтеза которой, наряду с ранее образовавшимся соединением  $\text{SrMoO}_4$ , является стронциевый феррит. Он играет роль активных центров зародышеобразования  $\text{Sr}_2\text{FeMoO}_{6-\delta}$ , на которых реализуется процесс диссоциации. Согласно данным рентгенофазового анализа, в области температуры  $T = 1170$  К дифракционные пики  $\text{SrFeO}_{3-x}$  исчезают, тогда как  $\text{SrMoO}_4$  фиксируются вплоть до температуры  $T = 1370$  К (рис. 3).

Эндотермический эффект обусловлен протеканием химической реакции с выделением кислорода:

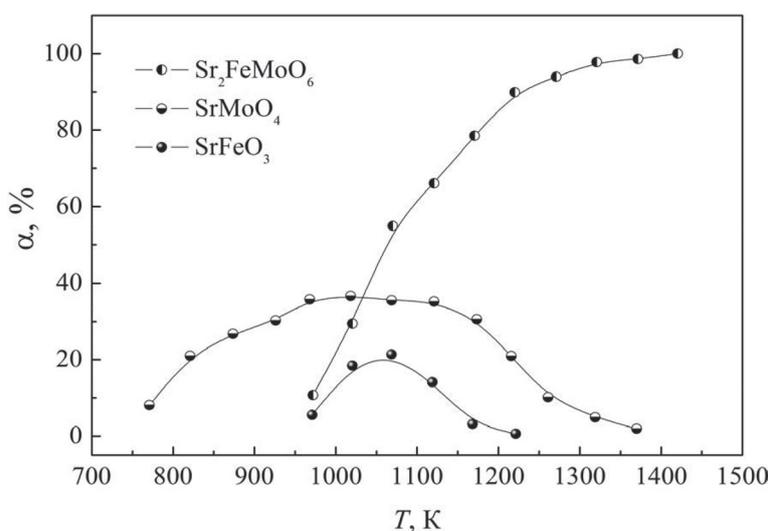
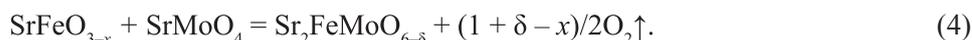


Рис. 3. Температурные зависимости степени превращения фаз  $\text{Sr}_2\text{FeMoO}_{6-\delta}$ ,  $\text{SrFeO}_3$  и  $\text{SrMoO}_4$  в образцах при их нагреве в непрерывном потоке смеси газов  $5\%\text{H}_2/\text{Ar}$  со скоростью  $v = 2$  град/мин

Учитывая, что в высокотемпературной области  $T = (1220-1420)$  К изменение массы образца практически не происходит и степень превращения  $\text{Sr}_2\text{FeMoO}_{6-\delta}$  существенно не изменяется, возникает затруднение дальнейшего протекания реакции для получения однофазного соединения ферромolibдата стронция. Это связано с тем, что гетерогенная реакция из адсорбционно-химического переходит в диффузионный режим. Толщина границы раздела фаз увеличивается, и образовавшийся слой, обладая низкой катионной и анионной подвижностью, перемещается в глубь промежуточной фазы  $\text{SrMoO}_4$ . В результате получить однофазное соединение ферромolibдата стронция удалось при  $T = 1420$  К и скорости нагрева  $v = 2$  град/мин.

**Заключение.** Таким образом, на основании изучения последовательности фазовых превращений при кристаллизации  $\text{Sr}_2\text{FeMoO}_{6-\delta}$  установлено, что синтез ферромolibдата стронция в смеси простых оксидов протекает через ряд последовательно-параллельных стадий. На начальном этапе взаимодействия образующийся ферромolibдат стронция обогащен железом и его состав в ходе реакции изменяется в сторону увеличения содержания молибдена. Оксид молибдена в тройной смеси состава  $2\text{SrCO}_3 + \text{MoO}_3 + 0,5\text{Fe}_2\text{O}_3$  вступает в реакцию несколько быстрее с карбонатом стронция, чем оксид железа. Показано, что в процессе кристаллизации двойного перовскита ферромolibдата стронция в интервале температур  $T = (300-1420)$  К имеет место следующая последовательность фазовых превращений:  $\{\text{Fe}_2\text{O}_3, \text{MoO}_3, \text{SrCO}_3\}$  (300 К)  $\rightarrow$   $\{\text{SrMoO}_4, \text{Fe}_2\text{O}_3, \text{SrCO}_3\}$  (770 К)  $\rightarrow$   $\{\text{SrMoO}_4, \text{SrFeO}_{3-x}$  (следы),  $\text{Sr}_2\text{FeMoO}_{6-\delta}$  (следы) $\}$  (970 К)  $\rightarrow$   $\{\text{SrMoO}_4, \text{Sr}_2\text{FeMoO}_{6-\delta}\}$  (1170 К)  $\rightarrow$   $\{\text{Sr}_2\text{FeMoO}_{6-\delta}\}$  (1420 К).

## Литература

1. *Serrate D., De Teresa J. M., Ibarra M. R.* // J. Phys.: Condens. Matter. 2007. Vol. 19. P. 1–86.
2. *Huang Y., Yamauchi H., Karppinen, M.* // Appl. Phys. Lett. 2005. Vol. 86. P. 0725101–0725103.
3. *Kanchana V., Vaitheeswaran G., Alouani M.* et al. // Phys. Rev. B. 2007. Vol. 75. P. 2204041–22040414.
4. *Kalanda M., Suchanek G., Saad A. M.* et al. // Mater. Sci. Forum. 2010. Vol. 636/637. P. 338–343.
5. *Kalanda N., Demyanov S., Masselink W.* et al. // Cryst. Res. Technol. 2011. Vol. 6, N 5. P. 463–469.
6. *Fang T.-T., Lin J.-C.* // J. Mater. Sci. 2005. Vol. 40. P. 683–686.
7. *Topwal D., Sarma D. D., Kato H.* et al. // Phys. Rev. B. 2006. Vol. 73. P. 0944191–0944195.
8. *Каланда Н. А., Демьянов С. Е., Крупа Н. Н.* и др. // Физика и техника высоких давлений. 2010. Т. 20, № 2. С. 52–62.

*M. A. KALANDA, M. V. YARMOLICH, A. M. PANASEVICH, D. A. KRYUCHENIA*

## PHASE TRANSFORMATIONS DURING CRYSTALLIZATION OF $\text{Sr}_2\text{FeMoO}_{6-\delta}$ FROM SIMPLE OXIDES

### Summary

The sequence of phase transformations during  $\text{Sr}_2\text{FeMoO}_{6-\delta}$  crystallization by the solid phase method was studied for powders synthesized from the stoichiometric mixture of  $\text{SrCO}_3$ ,  $\text{Fe}_2\text{O}_3$ ,  $\text{MoO}_3$  oxides. It is found that the synthesis of a strontium ferromolybdate solid solution proceeds through a series of parallel chemical reactions. It is revealed that at the beginning stage of interaction, the initially formed  $\text{Sr}_2\text{FeMoO}_{6-\delta}$  powder is enriched with iron. During the annealing process, the composition of strontium ferromolybdate changes and the molybdenum content increases upon further heating. It is shown that in the process of crystallization of double perovskite in the temperature range  $T = (300-1420)$  К, there is the following sequence of phase transformations:  $\{\text{Fe}_2\text{O}_3, \text{MoO}_3, \text{SrCO}_3\}$  (300 К)  $\rightarrow$   $\{\text{SrMoO}_4, \text{Fe}_2\text{O}_3, \text{SrCO}_3\}$  (770 К)  $\rightarrow$   $\{\text{SrMoO}_4, \text{SrFeO}_{3-x}$  (traces),  $\text{Sr}_2\text{FeMoO}_{6-\delta}$  (traces) $\}$  (970 К)  $\rightarrow$   $\{\text{SrMoO}_4, \text{Sr}_2\text{FeMoO}_{6-\delta}\}$  (1170 К)  $\rightarrow$   $\{\text{Sr}_2\text{FeMoO}_{6-\delta}\}$  (1420 К).

УДК 537.226.4

Ю. В. РАДЮШ, Н. М. ОЛЕХНОВИЧ, А. В. ПУШКАРЕВ

**ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СЕГНЕТОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ КЕРАМИКИ СИСТЕМЫ ТВЕРДЫХ РАСТВОРОВ  $(1-x)(\text{NaBi})_{1/2}\text{TiO}_3-x\text{BiCoO}_3$** *Научно-практический центр НАН Беларуси по материаловедению**(Поступила в редакцию 09.01.2015)*

**Введение.** В связи с поиском сегнето- и пьезоэлектрических материалов, удовлетворяющих современным экологическим требованиям и характеризующимся высокой температурой Кюри, привлекают внимание висмутсодержащие оксидные системы со структурой перовскита. Такие системы рассматриваются как альтернатива материалам, созданным на основе оксида свинца [1, 2]. Из-за сходства электронной конфигурации катионов  $\text{Bi}^{3+}$  и  $\text{Pb}^{2+}$  в висмутсодержащих перовскитах, как правило, имеет место дипольное упорядочение. В этом направлении развиваются исследования твердых растворов (ТР) на основе  $(\text{NaBi})_{1/2}\text{TiO}_3$  (NBT),  $\text{BiFeO}_3$  (BF) и других висмутсодержащих соединений, обладающих сегнетоэлектрическими свойствами (см., напр., обзор [3], а также [4–8]).

В данной работе приводятся результаты исследования характеристик кристаллической структуры и диэлектрических свойств перовскитной керамики ТР  $(1-x)(\text{NaBi})_{1/2}\text{TiO}_3-x\text{BiCoO}_3$  в области составов  $x \leq 0,2$ . При комнатной температуре  $(\text{NaBi})_{1/2}\text{TiO}_3$  имеет ромбоэдрическую структуру (пр. гр.  $R3c$ ) и характеризуется последовательностью температурных фазовых переходов с изменением характера дипольного упорядочения [9]. Перовскитная фаза  $\text{BiCoO}_3$  получается при высоких давлениях и температурах и по характеру упорядоченных искажений кристаллической решетки является структурным аналогом сегнетоэлектрика  $\text{PbTiO}_3$  [10].

**Методика эксперимента.** Исходными реактивами для синтеза ТР  $(1-x)(\text{NaBi})_{1/2}\text{TiO}_3-x\text{BiCoO}_3$  служили оксиды  $\text{Bi}_2\text{O}_3$ ,  $\text{TiO}_2$ ,  $\text{Co}_2\text{O}_3$  и карбонат  $\text{Na}_2\text{CO}_3$  марки «ос.ч.». Помол смеси исходных реактивов, взятых в заданном соотношении, проводили в шаровой мельнице с добавлением ацетона. Полученная смесь порошков служила исходной шихтой для синтеза, который проводился в три этапа. На первом спрессованные таблетки из исходной шихты подвергали термической обработке в закрытом корундовом тигле в атмосфере паров  $\text{Bi}_2\text{O}_3$  при температурах 1000–1050 К (1–2 ч), при которой происходит химическое взаимодействие реагентов с разложением карбоната натрия. После этого таблетки измельчались и осуществлялся помол в шаровой мельнице с добавлением ацетона. Из полученного порошка прессовались брикеты для второго этапа синтеза, который проводился при 1120–1320 К (1–2 ч) в зависимости от состава. Режим синтеза на третьем этапе выбирался таким же, как и на втором.

Рентгенодифракционные исследования синтезированных ТР проводились на автоматизированном дифрактометре ДРОН-3 в монохроматизированном  $\text{CuK}_\alpha$ -излучении.

Диэлектрическая проницаемость ( $\epsilon'$ ) и тангенс угла диэлектрических потерь ( $\text{tg}\delta$ ) выполнялись с помощью измерителя иммитанса E7-20 на различных частотах в области 25–10<sup>6</sup> Гц в зависимости от температуры в области 100–800 К при скорости изменения 1,5–2,0 К/мин. По измеренным  $\epsilon'$  и  $\text{tg}\delta$  находилась мнимая составляющая диэлектрической проницаемости ( $\epsilon''$ ).

**Результаты и их обсуждение.** Рентгенофазовый анализ показал, что в системе  $(1-x)(\text{NaBi})_{1/2}\text{TiO}_3-x\text{BiCoO}_3$  в области составов  $x \leq 0,2$  образуются ТР со структурой перовскита. Для составов с  $x > 0,2$  на рентгенограммах наряду с линиями, соответствующими перовскитной фазе, выявлялись слабые рефлексы дополнительных фаз.

Ниже приводятся результаты исследований характеристик кристаллической структуры и диэлектрического отклика ТР с  $x \leq 0,2$ .

На основе анализа рентгеновских дифракционных спектров установлено, что кристаллическая решетка ТР указанных составов при комнатной температуре, как и для крайнего соединения  $(\text{NaBi})_{1/2}\text{TiO}_3$ , является ромбоэдрически искаженной (пр. гр.  $R3c$ ). По угловым положениям дифракционных линий определены параметры элементарной ячейки  $a_H$  и  $c_H$  в гексагональной установке и параметр приведенной ячейки  $a_p = (a_H^2 c_H \sin 120^\circ / 6)^{1/3}$ . Как видно из рис. 1,  $a$ , параметры  $a_H$ ,  $c_H$  и  $a_p$  линейно возрастают по мере увеличения содержания  $\text{BiCoO}_3$  в системе. Анализ полученных данных показал, что для исследуемых ТР, как и для соединения  $(\text{NaBi})_{1/2}\text{TiO}_3$ , имеет место антифазный поворот кислородных октаэдров вокруг оси  $c_H$ . Величина угла поворота октаэдров  $\omega$  оценивалась по отношению интегральной интенсивности дифракционной линии 113 к сумме интегральных интенсивностей линий 104 и 110 с использованием соотношения

$$\omega = \omega_C (R/R_C)^{1/2}, \quad (1)$$

где  $R$  – отношение измеренных интегральных интенсивностей указанных линий,  $R_C$  – рассчитанная величина данного отношения при заданном угле  $\omega_C$  поворота октаэдров.

Как видно из рис. 1,  $\omega$ , угол поворота октаэдров для ТР несколько меньше, чем для крайнего соединения  $(\text{NaBi})_{1/2}\text{TiO}_3$  и слабо зависит от состава. По найденным величинам параметров элементарной ячейки и угла поворота октаэдров оценена их степень деформации вдоль оси  $c_H$  [11]:

$$s = \frac{c_H \cos \omega}{a_H \sqrt{6}} - 1. \quad (2)$$

Знак данного параметра соответствует знаку деформации. Установлено, что для исследуемых ТР, как и для крайнего соединения  $(\text{NaBi})_{1/2}\text{TiO}_3$ , октаэдры сжаты вдоль гексагональной оси ( $s < 0$ ). Степень их сжатия слабо зависит от содержания  $\text{BiCoO}_3$  в системе и лежит в пределах 0,5–0,6 %.

Характеризация температурной зависимости действительной ( $\epsilon'$ ) и мнимой ( $\epsilon''$ ) составляющих диэлектрической проницаемости и тангенса угла диэлектрических потерь ( $\text{tg} \delta$ ) керамики ТР

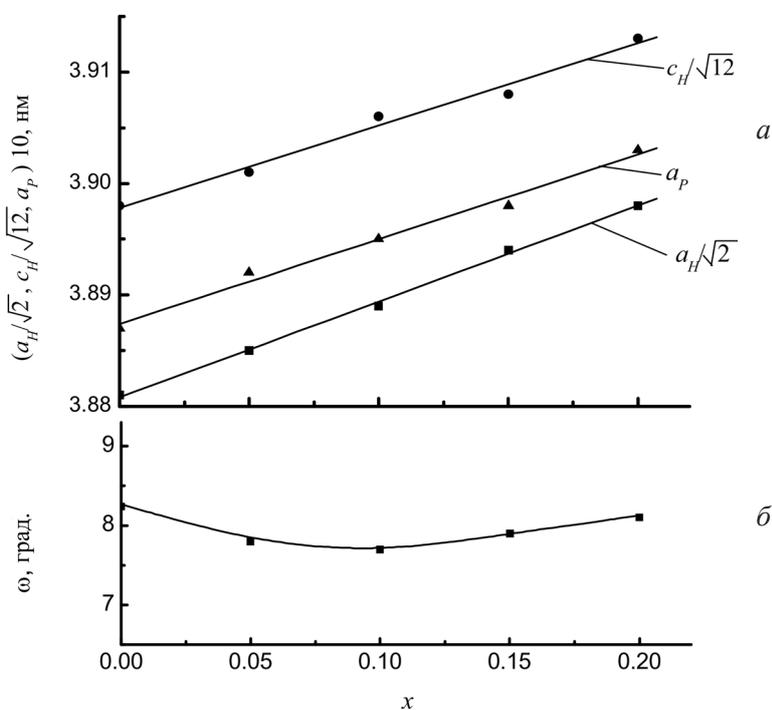


Рис. 1. Концентрационная зависимость параметров элементарной ячейки ( $a_H$ ,  $c_H$ ), параметра приведенной ячейки  $a_p$  (а) и угла поворота октаэдров  $\omega$  для твердого раствора  $(1-x)(\text{NaBi})_{1/2}\text{TiO}_3-x\text{BiCoO}_3$  (б)

$(1-x)(\text{NaBi})_{1/2}\text{TiO}_3-x\text{BiCoO}_3$  проводилась в сравнении с данными зависимостями для крайнего соединения  $(\text{NaBi})_{1/2}\text{TiO}_3$ . На рис. 2 в качестве иллюстрации представлены результаты для ТР с  $x = 0,1$  и для крайнего соединения  $(\text{NaBi})_{1/2}\text{TiO}_3$ . Видно, что для ТР на кривых температурной зависимости  $\epsilon'(T)$  для высоких частот измерительного поля, при которых эффект электропроводности незначителен, как и для крайнего соединения, наблюдается размытый максимум, положение которого ( $T'_m$ ) слабо зависит от частоты измерительного поля и лежит в области 590–620 К. С увеличением содержания  $\text{BiCoO}_3$   $T'_m$  увеличивается, а высота максимума при этом уменьшается. Характер температурной зависимости  $\epsilon'(T)$  на высоких частотах в области  $T > T'_m$  соответствует размытому сегнетоэлектрическому фазовому переходу и, как показал анализ, описывается соотношением [12]:

$$\frac{1}{\epsilon'} - \frac{1}{\epsilon'_m} = \frac{(T - T'_m)^\gamma}{c}, \quad (3)$$

где параметр  $\gamma$ , характеризующий степень размытия фазового перехода, может изменяться в пределах  $1 \leq \gamma \leq 2$ . Найденная величина параметра  $\gamma$  для исследованных ТР лежит в области 1,5–1,7, причем с увеличением  $x$  она возрастает.

Эффект размытия фазового перехода обусловлен тем, что исследуемые ТР представляют собой сложные перовскиты, в октаэдрических и кубооктаэдрических позициях кристаллической решетки которых находится более одного типа катионов разной валентности. Вследствие этого возникают флуктуации состава и хаотические поля, которые и приводят к размытию перехода.

Как известно, соединение  $(\text{NaBi})_{1/2}\text{TiO}_3$  при температурах ниже  $T'_m$  испытывает переход в состояние, характерное для релаксорного сегнетоэлектрика. На кривой  $\epsilon'(T)$  в области 200–550 К выявляется горб с повышенной дисперсией. На температурной зависимости  $\epsilon''(T)$  и  $\text{tg}\delta(T)$  в указанной температурной области наблюдается максимум, который с увеличением частоты измерительного поля смещается в сторону более высоких температур (рис. 2, а).

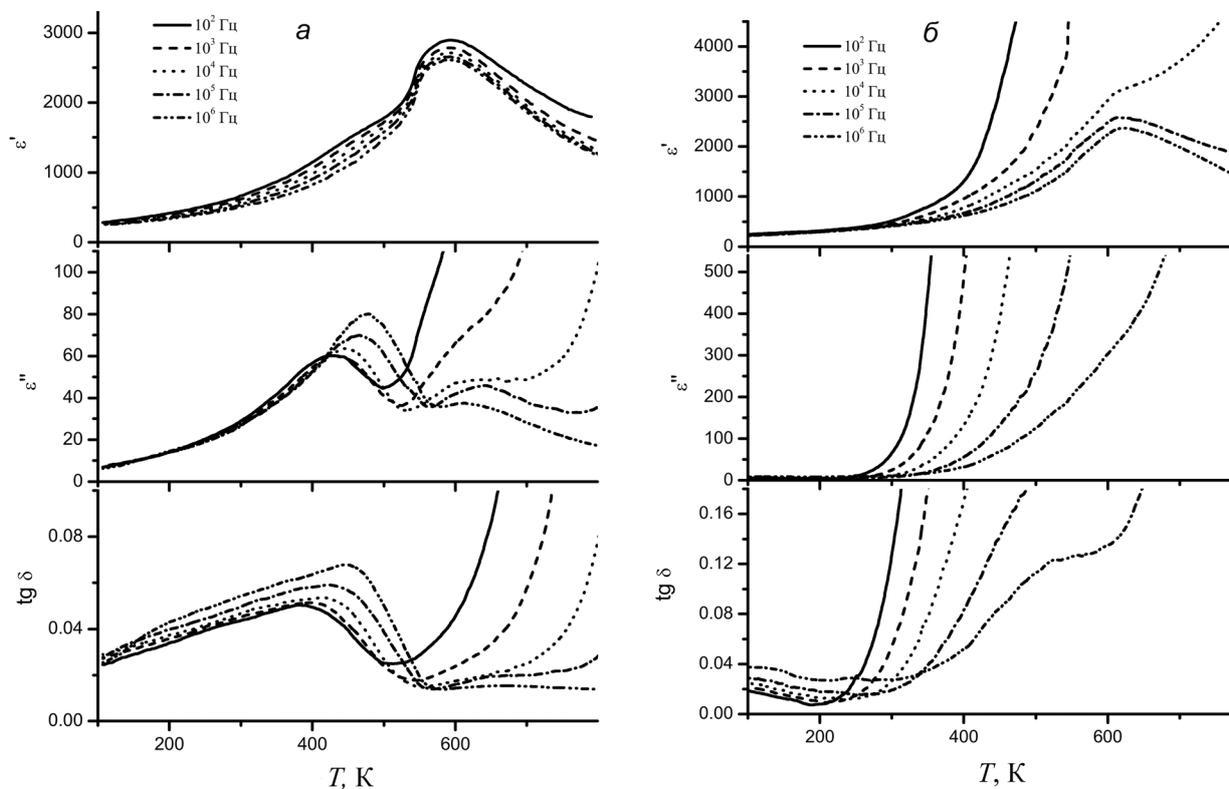


Рис. 2. Температурная зависимость действительной ( $\epsilon'$ ), мнимой ( $\epsilon''$ ) составляющих диэлектрической проницаемости и тангенса угла диэлектрических потерь ( $\text{tg}\delta$ ) для твердого раствора  $(1-x)(\text{NaBi})_{1/2}\text{TiO}_3-x\text{BiCoO}_3$  при  $x = 0$  (а) и  $x = 0,1$  (б)

Результаты исследований показали, что имеющий место для  $(\text{NaBi})_{1/2}\text{TiO}_3$  характер зависимостей  $\epsilon'(T)$ ,  $\epsilon''(T)$  и  $\text{tg}\delta(T)$  в области  $T < T'_m$  для ТР наблюдается только для составов с малым содержанием  $\text{BiCoO}_3$  ( $x \leq 0,05$ ). Особенности, имеющие место на кривых температурной зависимости рассматриваемых характеристик диэлектрического отклика для  $(\text{NaBi})_{1/2}\text{TiO}_3$  в области  $T < T'_m$ , для ТР с  $x > 0,05$  вырождаются. Кривые  $\epsilon'(T)$ ,  $\epsilon''(T)$  и  $\text{tg}\delta(T)$  для таких составов системы при понижении температуры ниже  $T'_m$  плавно понижаются без проявления каких-либо аномалий (рис. 2, б). Данный факт свидетельствует о том, что увеличение содержания  $\text{BiCoO}_3$  выше некоторого предела приводит к вырождению перехода системы ТР в релаксорное состояние.

**Заключение.** Проведенные исследования показывают, что в системе  $(1-x)(\text{NaBi})_{1/2}\text{TiO}_3-x\text{BiCoO}_3$  при  $x \leq 0,2$  образуются твердые растворы на основе  $(\text{NaBi})_{1/2}\text{TiO}_3$  с ромбоэдрически искаженной структурой перовскита. Параметры гексагональной элементарной ячейки линейно возрастают по мере увеличения концентрации  $\text{BiCoO}_3$  в системе. Для ТР данной системы наблюдается размытый сегнетоэлектрический фазовый переход. Температура максимума диэлектрической проницаемости ( $T'_m$ ) лежит в области 590–620 К, слабо увеличиваясь с  $x$ . Переход в релаксорное состояние при  $T < T'_m$ , имеющий место для крайнего соединения  $(\text{NaBi})_{1/2}\text{TiO}_3$ , для ТР при  $x > 0,05$  вырождается.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант № Т14–031).

### Литература

1. Cross L.-E. // Nature. 2004. Vol. 432, N. 7013. P. 24–25.
2. Zhang S., Xia R., Shrout T. R. // J. Electroceram. 2007. Vol. 19. P. 251–257.
3. Isupov V. A. // Ferroelectrics. 2005. Vol. 315. P. 123–147.
4. Marchet P., Boucher E., Dorcet V. et. al. // Ceram. Soc. 2006. Vol. 26, N 14. P. 3037–3041.
5. Takenaka T., Nagata H., Hiruma Y. et. al. // J. Electroceram. 2007. Vol. 19, N 4. P. 259–265.
6. Олехнович Н. М., Мороз И. И., Пушкарёв А. В. и др. // Физика твердого тела. 2008. Т. 50, № 3. С. 490–495.
7. Олехнович Н. М., Радюш Ю. В., Пушкарёв А. В. // Физика твердого тела. 2012. Т. 54, № 11. С. 2100–2105.
8. Олехнович Н. М., Пушкарёв А. В., Радюш Ю. В. Физика твердого тела. 2013. Т. 55, № 10. С. 1950–1955.
9. Jones G. O., Thomas P. A. // Acta Crystallogr., Sect. B. 2002. Vol. 58. P. 168–178.
10. Belik A. A., Jikubo S., Kodama K. et. al. // Chem. Mater. 2006. Vol. 18, N 3. P. 798–803.
11. Thomas N. W. // Acta Crystallogr., Sect. B. 1996. Vol. 52. P. 954–960.
12. Uchino K., Nomura Sh. // Ferroelectrics. 1982. Vol. 44. P. 55–61.

Yu. V. RADYUSH, N. M. OLEKHNOVICH, A. V. PUSHKAROU

### DIELECTRIC PROPERTIES OF $(1-x)(\text{NaBi})_{1/2}\text{TiO}_3-x\text{BiCoO}_3$ PEROVSKITE FERROELECTRIC CERAMIC

#### Summary

The solid solutions with the rhombohedral distorted perovskite structure of the  $(1-x)(\text{NaBi})_{1/2}\text{TiO}_3-x\text{BiCoO}_3$  system ( $x < 0.2$ ) have been prepared by solid state reactions. The unit cell parameters  $a_H$  and  $c_H$  for these perovskites were found to increase linearly with increasing  $x$ . The dielectric properties of the solid solutions undergo a diffuse ferroelectric phase transition at 590–610 K. For compositions with  $x < 0.05$ , the transition to relaxor state at a temperature below 500 K was observed. At  $x > 0.05$  such a transition was not revealed.

УДК 621.315.592

А. В. МУДРЫЙ<sup>1</sup>, В. Д. ЖИВУЛЬКО<sup>1</sup>, А. Л. ГУРСКИЙ<sup>2</sup>, М. В. ЯКУШЕВ<sup>3</sup>,  
Р. В. МАРТИН<sup>3</sup>, В. Дж. ШАФФ<sup>4</sup>

## РАДИАЦИОННЫЕ ЭФФЕКТЫ В ТОНКИХ ГЕТЕРОЭПИТАКСИАЛЬНЫХ ПЛЕНКАХ НИТРИДА ИНДИЯ ПРИ ЭЛЕКТРОННОМ ОБЛУЧЕНИИ

<sup>1</sup>Научно-практический центр НАН Беларуси по материаловедению

<sup>2</sup>Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

<sup>3</sup>Университет Стратклайд, Глазго, Великобритания

<sup>4</sup>Корнельский университет, Итака, США

(Поступила в редакцию 11.02.2015)

**Введение.** В настоящее время нитридные соединения AlN, GaN, InN и твердые растворы на их основе AlGaN, AlInN, InGaN являются одними из наиболее востребованных прямозонных материалов для полупроводниковой оптоэлектроники и фотовольтаики [1–5]. В значительной степени этому способствовало установление нового значения ширины запрещенной зоны InN  $E_g \sim 0,7$  эВ [6] вместо ранее известного и использовавшего в течение 30 лет значения  $E_g \sim 2,0$  эВ [7]. Выращивание твердых растворов AlInN и InGaN на основе прямозонных полупроводниковых соединений AlN, GaN и InN с шириной запрещенной зоны  $E_g \sim 6,2$ ;  $\sim 3,4$  и  $\sim 0,7$  эВ соответственно позволяет полностью перекрывать ультрафиолетовый, видимый и ближний инфракрасный диапазон спектра. При этом появляется возможность создания на основе этих прямозонных полупроводников высокоэффективных светодиодов и лазерных структур для широкой спектральной области от 0,2 до 2,0 мкм [1, 2, 4, 6]. В частности, твердые растворы InGaN являются наиболее перспективными полупроводниковыми материалами для создания синих и зеленых светодиодов, которые предназначены для высокоплотной оптической записи информации и лазеров, способных работать в широком интервале температур [1, 4]. Получение мощных трехцветных светодиодов (синий, зеленый, красный) на основе соединений InGaN будет способствовать созданию лазерных прожекторов с полной цветовой гаммой для видимого спектрального диапазона и высококонтрастного лазерного телевидения. На сегодняшний день уже получены высокояркие светодиоды для голубого и синего диапазонов на основе полупроводниковых соединений InGaN и для красного диапазона на основе соединения AlInGaP [1]. Как известно, для зеленой области спектра освоено производство мощных твердотельных лазеров с диодной накачкой, работающих на длине волны 0,532 мкм, что соответствует второй гармонике генерации неодимового излучения  $\sim 1,064$  мкм (second harmonic generation, SHG технология) [1]. Однако считается, что лазерные полупроводниковые светодиоды на основе соединений InGaN могут иметь преимущества по размерам, весу, стабильности, эффективности и стоимости по сравнению с лазерами, создаваемыми по технологии SHG [1]. Исследования показали, что успех развития технологии получения твердых растворов InGaN, как наиболее перспективных материалов оптоэлектроники, определяющим образом зависит от создания высококачественных соединений InN. В связи с этим существует необходимость дальнейшего более детального изучения физических свойств InN, в том числе и после радиационного облучения, из-за перспективы использования солнечных элементов и оптоэлектронных приборов, созданных на его основе, в условиях воздействия проникающей радиации, например в космосе [1, 8–11]. Полученные к настоящему времени экспериментальные данные об изменении физических свойств InN и структур, созданных на его основе, при радиационном облучении

(электроны, протоны, альфа-частицы и т. д.) немногочисленны и противоречивы, и поэтому необходимы дальнейшие исследования в этом важном практическом направлении.

В настоящей работе приведены новые данные по воздействию высокоэнергетических электронов на гетероэпитаксиальные тонкие пленки InN, приводящему к значительному изменению оптических свойств материала.

**Методика эксперимента.** Исследовались гетероэпитаксиальные пленки InN, осажденные на сапфировые подложки с ориентацией (0001). Пленки выращивались с использованием метода молекулярно-лучевой эпитаксии в Корнельском университете (г. Итака, штат Нью-Йорк, США) по технологии, описанной в [12]. Перед осаждением пленок InN при повышенной температуре и заданном времени выполнялось азотирование сапфировых подложек, приводящее к образованию на них тонкого буферного слоя AlN. В последующем проводилось осаждение тонких буферных слоев GaN. Эксперименты показали, что создание тонких буферных слоев AlN и GaN на сапфировых подложках приводит к значительному улучшению качества пленок InN. Следует отметить, что пленки выращивались без специального легирования, однако имели относительно высокую концентрацию электронов за счет автолегирования собственными дефектами структуры донорного типа. По данным измерения эффекта Холла, пленки InN обладали *n*-типом проводимости, концентрацией электронов  $n_e \sim 3,6 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$  и высокой подвижностью  $\mu_e \sim 2000 \text{ см}^2/\text{Вс}$ . Образцы облучались электронами с энергией  $\sim 6 \text{ МэВ}$  в интервале доз  $10^{15} - 10^{18} \text{ см}^{-2}$  при температуре  $< 30 \text{ }^\circ\text{C}$ .

Спектры оптического пропускания и отражения регистрировались в спектральном диапазоне 0,2–3,0 мкм с использованием двулучевого спектрофотометра Cary-5000 UV-Vis-NIR (фирма «Varian», США), а также с помощью однолучевого дифракционного монохроматора МДР-23У с фокусным расстоянием зеркального объектива  $f \sim 0,6 \text{ м}$ , оснащенного дифракционной решеткой 300 штр/мм. При измерении спектров пропускания и отражения на монохроматоре МДР-23У источником света служила галогеновая вольфрамовая лампа накаливания мощностью 170 Вт. Измерение спектров фотолюминесценции (ФЛ) проводилось при возбуждении неравновесных носителей заряда в тонких пленках InN аргоновым лазером на длине волны  $\lambda \sim 0,488 \text{ мкм}$  с мощностью до 500 мВт (ОАО «Плазма», Россия) или твердотельным лазером с диодной накачкой DPSS серии KLM-532/h-500 на длине волны  $\lambda \sim 0,532 \text{ мкм}$  с мощностью до 500 мВт (ЗАО «Оптроник», Россия). В качестве детекторов оптических сигналов использовалось охлаждаемое до 78 К фотоспротивление на основе PbS (серия P9217) или InGaAs (серия G8373-01) *p-i-n*-фотодиод (фирма «Hamamatsu», Япония). Модуляция светового излучения от лампы или лазера осуществлялась на частоте  $\sim 20 \text{ Гц}$  с использованием механического прерывателя. Два переменных синусоидальных сигнала с детекторов, включая опорный сигнал, обрабатывались низкочастотным узкополосным усилителем и преобразовывались в постоянное напряжение на основе метода синхронного детектирования на фазочувствительном нановольтметре типа Unipan – 232В (Польша). Постоянное напряжение, снимаемое с выхода синхронного детектора, поступало на вход аналого-цифрового вольтметра APPA-207, где преобразовывалось в цифровой код, и посредством протокола RS-232 сигнал поступал на компьютер для автоматической записи оптических спектров. Измерение спектров оптического пропускания и фотолюминесценции при температуре  $\sim 4,2 \text{ К}$  проводилось при непосредственном погружении исследуемых тонких пленок InN в жидкий гелий, находящийся в специальном криостате.

**Экспериментальные результаты и их обсуждение.** На рис. 1 приведены спектры оптического пропускания и отражения, снятые при комнатной температуре необлученной и облученной электронами дозой  $\sim 10^{18} \text{ см}^{-2}$  пленок InN на сапфире соответственно. Как видно, образцы обладают пропусканием на уровне 16–25 % и характеризуются наличием интерференционной структуры за относительно резким краем фундаментального поглощения, соответствующим ближней инфракрасной области спектра  $\sim 2 \text{ мкм}$ . Спектры отражения в области прозрачности тонких пленок нитрида индия также характеризуются отчетливо выраженной интерференционной структурой, амплитуда которой уменьшается при приближении к краю фундаментального поглощения, и за ним коэффициент отражения становится постоянным со значением  $R \sim 0,14$ . Следует отметить, что в области прозрачности пленок InN минимумы отражения и максимумы пропускания так же, как и максимумы отражения и минимумы пропускания, имеют одинаковое спектральное положение

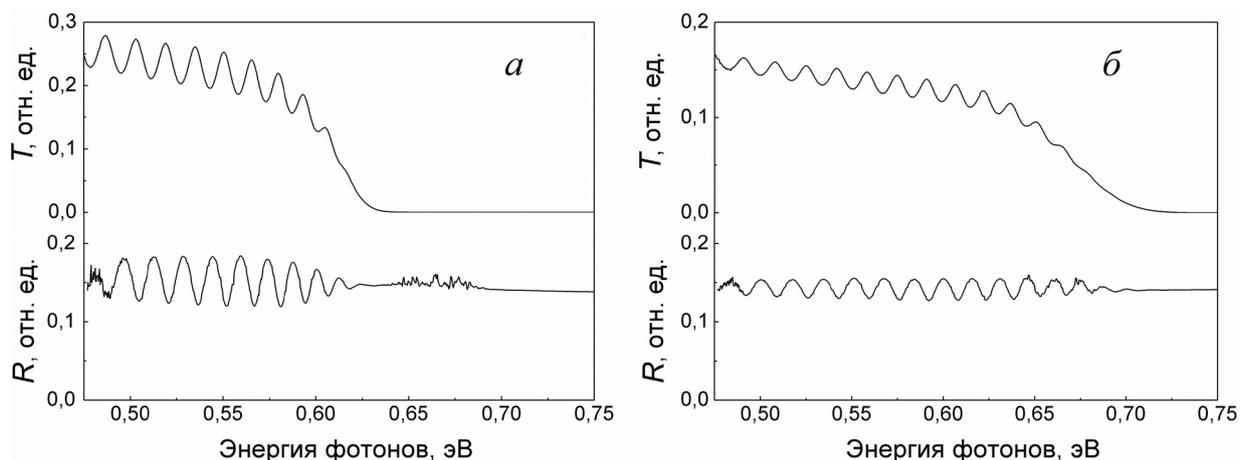


Рис. 1. Спектры пропускания и отражения необлученной (а) и облученной электронами дозой  $10^{18} \text{ см}^{-2}$  (б) пленок InN, снятые при 300 К

для облученного и необлученного образцов нитрида индия (см. рис. 1). Этому факту способствовала регистрация спектров отражения при углах падающего на образцы светового потока, близких к нормальному. Наличие ярко выраженной интерференционной структуры в оптических спектрах пропускания и отражения указывает на высокое оптическое качество и однородность поверхности и границы раздела пленок InN с буферными слоями GaN (AlN), осажденными на сапфировые подложки.

Присутствие в спектральной области меньше 0,5 эВ и в области от 0,63 до 0,68 эВ дополнительных узких линий, регистрируемых при измерении спектров пропускания и отражения, обусловлено поглощением воды, которая содержится в окружающей атмосфере. Особенно отчетливо эти узкие линии видны на спектрах отражения (см. рис. 1). Отметим, что спектры оптического пропускания и отражения регистрировались со спектральным разрешением  $\sim 0,5 \text{ нм}$ . Из сравнительного анализа видно, что облучение пленок InN приводит к значительному смещению края оптического пропускания и интерференционной картины в высокоэнергетическую область. При этом изменяется также спектральная форма края оптического пропускания. В частности, последний для облученной пленки InN становится более пологим в спектральной области 0,65–0,71 эВ по сравнению с более резким краем оптического пропускания в области 0,60–0,63 эВ для необлученной пленки InN.

На рис. 2 представлена зависимость параметра  $(\alpha h\nu)^2$  от энергии фотонов  $h\nu$  для необлученной и облученной пленок InN (кривая 1 и кривая 2 соответственно). Расчет проводился

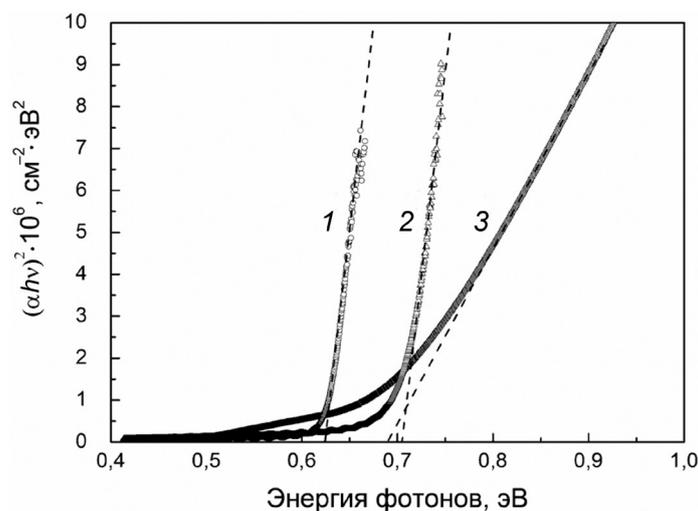


Рис. 2. Спектральная зависимость параметра  $(\alpha h\nu)^2$  от энергии фотонов  $h\nu$  для необлученной (кривая 1) и облученной (кривая 2) пленки InN, а также исходной пленки с концентрацией электронов  $n_e \sim 2,8 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$  (кривая 3)

на основании известной зависимости коэффициента поглощения от величины коэффициентов пропускания и отражения, а также с учетом существования интерференции на границе раздела пленки InN и подложки [13]:

$$\alpha = \frac{1}{d} \ln \frac{\sqrt{(1-R)^4 + 4T^2R^2} + (1-R)^2}{2T}, \quad (1)$$

где  $\alpha$  – коэффициент поглощения,  $R$  – коэффициент отражения,  $T$  – коэффициент пропускания,  $d$  – толщина пленки. Необходимо отметить, что при расчете коэффициента поглощения пленок InN учитывалось поглощение подложки и буферных наноразмерных слоев, сформированных на сапфировой подложке (AlN, GaN). В полупроводниках с прямой энергетической зонной структурой, обладающих разрешенными прямыми переходами электронов из валентной зоны в зону проводимости, спектральная зависимость коэффициента поглощения определяется следующим соотношением [13]:

$$(\alpha h\nu)^2 = A(h\nu - E_g), \quad (2)$$

где  $A$  – постоянная величина,  $E_g$  – ширина запрещенной зоны. Численные значения оптической ширины запрещенной зоны  $E_g$  для пленок InN определялись экстраполяцией линейной части спектральной зависимости параметра  $(\alpha h\nu)^2$  к оси энергии фотонов. Для необлученной и облученной электронами пленок InN оптическая ширина запрещенной зоны при комнатной температуре была  $E_g \sim 0,624$  и  $\sim 0,705$  эВ соответственно. Таким образом, смещение края фундаментального поглощения при облучении пленок InN дозой  $\sim 10^{18}$  см<sup>-2</sup> составило  $\sim 81$  мэВ. Сравнительный анализ спектральной зависимости параметра  $(\alpha h\nu)^2$  для необлученной и облученной пленок InN показывает, что в спектральной области 0,65–0,71 эВ для облученной пленки наблюдается более затянутый «хвост» поглощения. Для необлученной пленки в области энергий 0,60–0,63 эВ он является более резким. Эксперименты показали, что увеличение дозы облучения в диапазоне от  $10^{15}$  до  $10^{18}$  см<sup>-2</sup> приводит к последовательному смещению края фундаментального поглощения в область высоких энергий. При этом с увеличением дозы усиливается проявление более затянутого «хвоста» поглощения в его длинноволновой области при меньших значениях коэффициента поглощения, т. е. величине параметра  $(\alpha h\nu)^2 \cdot 10^6$  см<sup>-2</sup> эВ<sup>-2</sup>  $< 2,5$  (см. рис. 2). Как известно, существование «хвостов» плотности состояний характерно для оптических переходов между параболической областью одной зоны и «хвостом» другой зоны в сильнолегированных неупорядоченных полупроводниках. В этом случае длинноволновый «хвост» фундаментального поглощения описывается экспоненциальным правилом Урбаха [13].

Основываясь на вышеизложенном, можно утверждать, что облучение прямозонного полупроводникового соединения InN высокоэнергетическими электронами  $\sim 6$  МэВ приводит к образованию радиационных дефектов (преимущественно донорного типа) с высокой концентрацией, обеспечивающей при дозе  $\sim 10^{18}$  см<sup>-2</sup> сильный уровень легирования материала и соответствующее высокоэнергетическое смещение края фундаментального поглощения. Поэтому обнаружение смещения края фундаментального поглощения для тонких пленок InN можно связать с проявлением эффекта Бурштейна – Мосса. При введении в пленки InN радиационных дефектов, обуславливающих *n*-тип проводимости, их соответствующие мелкие энергетические уровни образуют «примесную» зону, которая перекрывается с зоной проводимости. В этом случае в запрещенной зоне образуется «хвост» плотности энергетических состояний и уровень Ферми глубоко смещается в зону проводимости, а оптические переходы из валентной зоны происходят на уровни, расположенные вблизи и выше уровня Ферми в соответствии с функцией плотности состояний. Такой тип оптических переходов в пленках InN *n*-типа проводимости определяет оптическую ширину запрещенной зоны  $E_g$  материала (см. рис. 2). С другой стороны известно, что облучение тонких пленок соединения InN может приводить к образованию дефектов акцепторного типа с энергетическими уровнями вблизи потолка валентной зоны [14, 15]. Поэтому образование затянутого «хвоста» в спектрах поглощения (кривая 2, рис. 2) можно также связать с образованием в запрещенной зоне мелких энергетических акцепторных состояний вблизи валентной зоны. В общем, введение дефектов с акцепторными уровнями будет приводить к частичной электрической компенсации

материала и снижению уровня Ферми в зоне проводимости сильнолегированного соединения InN. В дополнение к оптическим данным с использованием эффекта Холла на облученных тонких пленках InN проведены измерения электрических свойств, которые показали, что при комнатной температуре концентрация электронов составляет  $n_e \sim 5 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$  и их подвижность  $\mu_e \sim 900 \text{ см}^2/\text{В}\cdot\text{с}$  при дозе  $\sim 10^{18} \text{ см}^{-2}$ . Электрические измерения подтверждают преимущественное образование в пленках InN радиационных дефектов донорного типа, ответственных за проявление эффекта Бурштейна – Мосса и высокоэнергетическое смещение края фундаментального поглощения (кривая 2, рис. 2).

Для сравнения на рис. 2 приведена расчетная кривая 3 для параметра  $(\alpha hv)^2$  от энергии фотонов, которая характерна для исходных пленок InN, выращенных методом молекулярно-лучевой эпитаксии в Корнельском университете с относительно высокой концентрацией электронов  $n_e \sim 2,8 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$ . Как видно, оптическая ширина запрещенной зоны пленок InN в этом случае составляет  $E_g \sim 0,690 \text{ эВ}$  при комнатной температуре и близка к значению  $E_g \sim 0,705 \text{ эВ}$  облученной пленки InN, однако обращает на себя внимание малая крутизна параметра  $(\alpha hv)^2$ . В этом случае экстраполяционная прямая имеет меньший угол наклона по отношению к оси энергий фотонов по сравнению с экстраполяционной линией к кривым 1 и 2. Как видно на рис. 2 (кривая 3), край фундаментального поглощения является пологим и затянутым до значения энергии, превышающего 0,9 эВ, по сравнению с более резким краем для облученной пленки InN (кривая 2). Можно предположить, что в случае выращивания с сильным уровнем легирования формируемые пленки имеют более высокую степень отклонения состава соединения InN от стехиометрии и характеризуются наличием повышенной концентрации дефектов и внутренних напряжений в тонких пленках. В этом отношении высокоэнергетическое электронное облучение является наиболее перспективным технологическим способом изменения уровня легирования материала за счет введения только точечных дефектов донорного типа без значительного ухудшения качества тонких пленок InN. Как видно на рис. 2 (кривые 1 и 2), крутизна параметра  $(\alpha hv)^2$  для обеих пленок InN (облученной и необлученной) остается практически одинаковой. Следует считать, что при облучении эффект Бурштейна – Мосса проявляется более отчетливо за счет образования точечных дефектов донорного типа без отклонения состава от стехиометрии и образования внутренних напряжений в пленках.

В дополнение к этому измерение оптического пропускания и отражения пленок InN было проведено при температуре жидкого гелия  $\sim 4,2 \text{ К}$ . На основании обработки оптических спектров были определены спектральные зависимости параметра  $(\alpha hv)^2$ . Оптическая ширина запрещенной зоны необлученной и облученной пленок оказалась равной  $E_g \sim 0,676$  и  $\sim 0,759 \text{ эВ}$  при 4,2 К соответственно. Необходимо отметить, что смещение края фундаментального поглощения для исходной пленки InN в интервале температур 4,2–300 К составило  $\sim 52 \text{ мэВ}$ . Это значение температурного смещения ( $\Delta E_g \sim 52 \text{ мэВ}$ ) несколько больше, чем соответствующее значение  $\Delta E_g \sim 47 \text{ мэВ}$ , определенное ранее для соединения InN с такой же концентрацией электронов  $n_e \sim 3,6 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$  [4, 11]. Для облученной пленки InN температурное смещение края фундаментального поглощения в интервале от 4,2 до 300 К, т. е. изменение оптической ширины запрещенной зоны  $E_g$ , составило  $\Delta E_g \sim 54 \text{ мэВ}$ . Это значение оказалось близким к температурному смещению  $\Delta E_g \sim 52 \text{ мэВ}$ , характерному для необлученной пленки InN, и существенно превысило известные значения температурного изменения  $\Delta E_g \sim 30 \text{ мэВ}$  для соединения InN с исходной концентрацией электронов  $n_e \sim 7 \cdot 10^{18} - 1,2 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$  [2, 4]. Полученные данные указывают на более высокое качество электронной структуры облученных пленок InN с концентрацией  $n_e \sim 5 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$  по сравнению с исходными пленками InN, имеющими концентрацию электронов  $\sim 1 \cdot 10^{18} - 1,2 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$ , которая достигается при выращивании пленок методом молекулярно-лучевой эпитаксии [2, 4, 16, 17].

На рис. 3 представлены спектры фотолюминесценции, снятые при температурах 300 и 4,2 К соответственно для необлученной и облученной электронами пленок InN. Как видно на рис. 3, а, кривая 1, спектр необлученной пленки InN, снятый при 300 К, содержит относительно широкую полосу с полушириной  $\Gamma \sim 70 \text{ мэВ}$  и максимумом 0,638 эВ, близким по энергии к оптической ширине запрещенной зоны  $E_g \sim 0,624 \text{ эВ}$  (см. рис. 2). Это означает, что процесс излу-

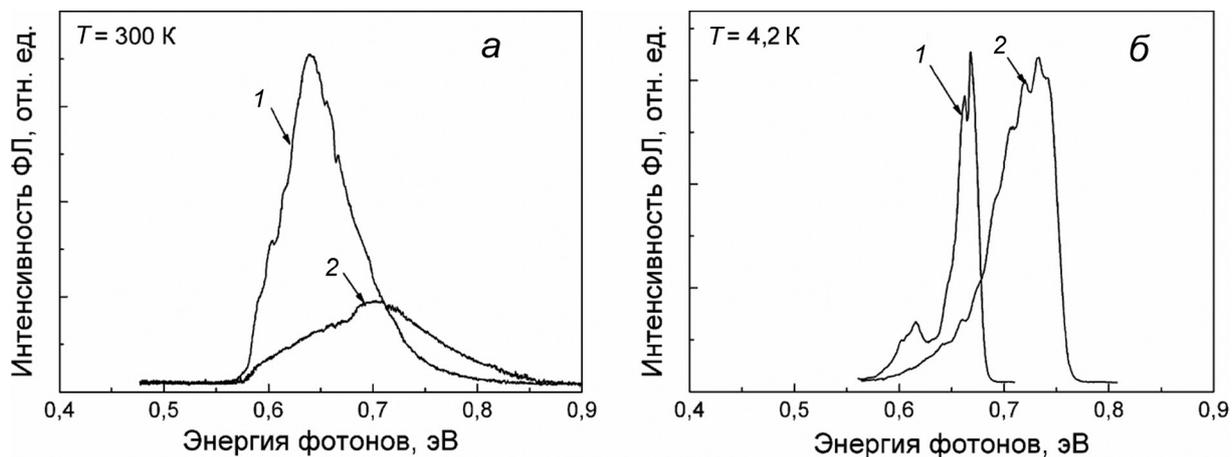


Рис. 3. Спектры фотолюминесценции необлученной (кривая 1) и облученной (кривая 2) пленок InN, снятые при 300 К (а) и 4,2 К (б)

тельной рекомбинации при комнатной температуре в прямозонном соединении InN происходит по механизму зона проводимости–валентная зона, т. е. реализуются оптические переходы зона–зона с участием свободных вырожденных электронов и дырок. Эксперименты показали, что увеличение дозы облучения до  $1 \cdot 10^{16}$ – $3 \cdot 10^{16}$  см<sup>-2</sup> приводит к увеличению интенсивности полосы ближкравой люминесценции, а выше этих доз происходит падение ее интенсивности. Увеличение интенсивности ближкравой люминесценции может быть связано с компенсацией безызлучательных центров рекомбинации, созданных при росте пленок InN, точечными радиационными дефектами, образуемыми при электронном облучении. При этом полуширина полосы ближкравой люминесценции в результате облучения увеличивается с  $\Gamma \sim 70$  мэВ до  $\Gamma \sim 135$  мэВ при 300 К, а максимум полосы смещается с 0,638 до 0,705 эВ, т. е. на 67 мэВ при 300 К (см. рис. 3, а). Таким образом, для необлученной и облученной пленок InN относительное смещение максимумов полос ближкравой люминесценции на 14 мэВ меньше относительного изменения оптической ширины запрещенной зоны  $E_g$ , составляющего 81 мэВ. Этот факт указывает на различное смещение полосы ближкравой люминесценции относительно соответствующего оптического края фундаментального поглощения в зависимости от концентрации электронов в полупроводниковом соединении InN. Можно предположить, что в облученных пленках InN определенный вклад в механизм излучательной рекомбинации вносят оптические переходы вырожденных электронов из зоны проводимости в «хвост» акцепторных энергетических уровней вблизи потолка валентной зоны, индуцированные радиационным воздействием высокоэнергетических электронов. В ряде работ по оптической спектроскопии поглощения и люминесценции соединения InN было показано, что в зависимости от уровня легирования электронами тонких пленок InN, выращенных методом молекулярно-лучевой эпитаксии, наблюдается различное стоксовое смещение полосы люминесценции по отношению к краю фундаментального поглощения [2, 4].

Как видно на рис. 3, б, спектры фотолюминесценции необлученной пленки InN содержат несколько полос с максимумами в области 0,664 и 0,612 эВ при 4,2 К. Наиболее интенсивная полоса ближкравой люминесценции 0,664 эВ с полушириной  $\sim 20$  мэВ при 4,2 К смещена на 12 мэВ относительно края оптического поглощения, составляющего 0,676 эВ при 4,2 К. Это указывает на то, что ближкравая люминесценция обусловлена излучательной рекомбинацией вырожденных электронов с дырками, локализованными на относительно мелких акцепторных уровнях  $\sim 12$  мэВ вблизи потолка валентной зоны. Низкоэнергетическая полоса 0,612 эВ может быть отнесена к оптическим переходам вырожденных электронов на более глубокие акцепторные уровни с энергией ионизации  $\sim 64$  мэВ. Существование акцепторных состояний вблизи экстремума валентной зоны в пленках InN, выращенных методом молекулярно-лучевой эпитаксии, подтверждено ранее по данным люминесценции [4, 17]. Как видно на рис 3, б, облучение электронами приводит к уширению полосы ближкравой люминесценции с 20 до 64 мэВ при 4,2 К и ее высокоэнергетическому смещению до 0,729 эВ. Низкоэнергетическое смещение полосы ближкравой люминесценции

0,729 эВ по отношению к краю фундаментального поглощения составляет  $\sim 30$  мэВ при 4,2 К. Это значение стока смещения близкраевой люминесценции для облученной пленки InN увеличилось по сравнению с значением стока смещения  $\sim 12$  мэВ, зарегистрированного для необлученной пленки. Значительное смещение оптического края фундаментального поглощения  $\sim 83$  мэВ при 4,2 К, уширение полосы близкраевой люминесценции с 20 до 64 мэВ и образование затянутого низкоэнергетического крыла этой полосы в области энергий 0,57–0,69 эВ однозначно свидетельствует об увеличении концентрации электронов в соединении InN при электронном облучении.

Данные настоящей работы по оптической ширине запрещенной зоны и спектральному положению полос фотолюминесценции показывают, что за счет образования точечных радиационных дефектов с донорными уровнями концентрация электронов после облучения пленок InN увеличивается до значения  $\sim 5 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$ , которое хорошо согласуется с известными данными по зависимости оптической ширины запрещенной зоны  $E_g$  тонких пленок InN от концентрации электронов [4, 11, 17].

Как известно, для соединения InN энергия образования ростовых дефектов донорного типа, ответственных за относительно невысокую концентрацию электронов  $n_e \sim 3 \cdot 10^{17} - 5 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$ , значительно меньше, чем энергия образования дефектов акцепторного типа, и поэтому положительно заряженные вакансии азота –  $V_N^{+/3+}$  определяют  $n$ -тип проводимости материала [2, 4]. Поэтому при облучении высокоэнергетическими электронами пленок InN, выращенных методом молекулярно-лучевой эпитаксии, увеличение концентрации электронов обусловлено образованием точечных радиационных дефектов донорного типа – вакансий азота –  $V_N^+$ . При этом электронное облучение индуцирует также образование дефектов акцепторного типа, в частности, вакансий индия  $V_{In}^{3-}$  как компенсирующих центров, которые понижают положение уровня Ферми в материале. Недавно с использованием метода аннигиляции позитронов было установлено, что при облучении пленок InN происходит образование более сложных акцепторных комплексов с участием отрицательно заряженных вакансий  $V_{In}^{3+}$ , которые действуют как рассеивающие центры в сильнолегированном  $n$ -типе проводимости InN [15]. Поэтому можно считать, что основными радиационными дефектами донорного типа в InN являются  $V_N^+$ , а вакансии индия  $V_{In}^{3-}$  и их более сложные комплексы являются акцепторами.

**Заключение.** Высокоэнергетическое ( $\sim 6$  МэВ) электронное облучение пленок InN с достигнутым на сегодняшний день минимальным значением концентрации свободных электронов  $n_e \sim 3,6 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$  и  $E_g \sim 0,624$  эВ при 300 К смещает край фундаментального поглощения до 0,705 эВ при дозе  $\sim 1 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-2}$ . Одновременно с этим происходит высокоэнергетическое смещение полосы близкраевой люминесценции с 0,638 до 0,705 эВ. Эти эффекты обусловлены образованием радиационных дефектов донорного типа, вакансий азота  $V_N^+$  и связаны с проявлением эффекта Бурштейна – Мосса.

Работа выполнена по заданию ГПНИ «КМС-1.06» и ГПНИ «Материалы в технике» (ГБЦ 14-3079).

## Литература

1. Adashi M. // Jap. J. Appl. Phys. 2014. Vol. 53, iss. 10. P. 100207-1–100207-8.
2. Ishitani Y. // Jap. J. Appl. Phys. 2014. Vol. 53, iss. 10. P. 100204-1–100204-17.
3. Fabien C. A. M., Moseley M., Gunning B. et al. // IEEE J. of Photovoltaics. 2014. Vol. 4, iss. 2. P. 601–605.
4. Wu J. // J. Appl. Phys. 2009. Vol. 106, iss. 1. P. 011101-1–011101-28.
5. Bhuiyan A. G., Sugita K., Hashimoto A., Yamamoto A. // IEEE J. of Photovoltaics. 2012. Vol. 2, no. 5. P. 276–293.
6. Davydov V. Yu., Klochikhin A. A., Emtsev V. V. et al. // Phys. Status Solidi B. 2002. Vol. 234, N 3. P. 787–795.
7. Osamura K., Nakajima K., Murakami Y. et al. // Solid State Commun. 1972. Vol. 11, iss. 5. P. 617–621.
8. Reurings F., Rauch C., Tuomisto F. et al. // Phys. Rev. B. 2010. Vol. 82, iss. 15. P. 153202-1–153202-4.
9. Tuomisto F., Pelli A., Yu K. M. et al. // Phys. Rev. B. 2007. Vol. 75, iss. 19. P. 193201-1–193201-4.
10. Jones R. E., Li S. X., Hsu L. et al. // Physica B. 2006. Vol. 376/377. P. 436–439.
11. Walukiewicz W., Ager III J. W., Yu K. M. et al. // J. Phys. D: Appl. Phys. 2006. Vol. 39. P. R83–R99.
12. Lu H., Schaff W. J., Hwang J. et al. // Appl. Phys. Lett. 2001. Vol. 79, N 10. P. 1489–1491.
13. Уханов Ю. И. Оптические свойства полупроводников. М., 1977.
14. Li S. X., Jones R. E., Haller E. E. et al. // Appl. Phys. Lett. 2006. Vol. 88, iss. 15. P. 151101-1–151101-3.

15. Rauch C., Tuomisto F., King P. D. C. et al. // Appl. Phys. Lett. 2012. Vol. 101, iss. 1. P. 011903-1–011903-4.
16. Tangi M., Kuyyalil J., Shivaprasad S. M. // J. Appl. Phys. 2013. Vol. 114, iss. 15. P. 153501-1–153501-6.
17. Klochikhin A. A., Davydov V. Yu., Emtsev V. V. et al. // Phys. Rev. B. 2005. Vol. 71, iss. 19. P. 195207-1–195207-16.

*A. V. MUDRYI, V. D. ZHIVULKO, A. L. GURSKII, M. V. YAKUSHEV, R. W. MARTIN, W. J. SCHAFF*

**RADIATION EFFECTS IN THIN HETEROEPITAXIAL INDIUM NITRIDE FILMS  
UNDER ELECTRON IRRADIATION**

**Summary**

The influence of high energy (6 MeV, fluencies  $10^{15}$ – $10^{18}$  cm<sup>-2</sup>) electron irradiation on the shift of a fundamental absorption edge and on the luminescence properties of thin InN films, which were grown on sapphire substrates by the molecular-beam epitaxy method, has been studied. It is found that electron irradiation increases the electron concentration and optical band gap energy  $E_g$  of InN. The increase in the optical band gap energy  $E_g$  of irradiated thin InN films is caused by the formation of radiation defects of donor type and by a manifestation of the Burshtein – Moss effect.

УДК 534.8

В. Г. ГУРТОВОЙ<sup>1</sup>, А. У. ШЕЛЕГ<sup>1</sup>, С. Н. МУСТАФАЕВА<sup>2</sup>, Э. М. КЕРИМОВА<sup>2</sup>**ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МОНОКРИСТАЛЛОВ TlGaS<sub>2</sub>, ДОПИРОВАННЫХ Co и Yb**<sup>1</sup>Научно-практический центр НАН Беларуси по материаловедению<sup>2</sup>Институт физики НАН Азербайджана, Баку, Азербайджан

(Поступила в редакцию 03.04.2015)

**Введение.** Тройное соединение TlGaS<sub>2</sub> принадлежит к большой группе слоистых кристаллов типа TlA<sup>III</sup>B<sup>VI</sup><sub>2</sub> (A = In, Ga; B = S, Se, Te), обладающих как полупроводниковыми, так и сегнетоэлектрическими свойствами, и кристаллизуется в моноклинную структуру с пр. гр. C<sub>2h</sub><sup>6</sup> (C 2/c) и параметрами элементарной ячейки a = 10,299 Å, b = 10,284 Å, c = 15,175 Å, β = 99,603° [1, 2]. Слоистость кристаллов этой группы приводит к сильной анизотропии их физических свойств. Кроме того, поскольку взаимодействие между слоями в этих кристаллах осуществляется слабыми ванн-дер-ваальсовыми силами, слоистые пакеты могут легко сдвигаться относительно друг друга. Поэтому многие кристаллы этого семейства обладают политипизмом, что приводит к значительному изменению их физических свойств [3, 4]. Для некоторых кристаллов этого семейства характерна последовательность фазовых переходов, обусловленная наличием в них длиннопериодических соизмеримых и несоизмеримых модулированных сверхструктур и их преобразованием с изменением температуры образца [5, 6]. Кристаллы этого семейства представляют не только научный, но и значительный практический интерес, так как они оптически активны, обладают высокой фоточувствительностью в широком спектральном диапазоне и, вследствие этого, перспективны для применения в оптоэлектронике. Следует отметить, что в целом ряде опубликованных работ, посвященных исследованию различных физических свойств кристаллов TlGaS<sub>2</sub> и их зависимости от температуры, на кривых температурных зависимостей этих свойств обнаружены аномалии в виде скачков или пиков, которые свидетельствуют о наличии в них фазовых превращений [7–9]. Однако прямых доказательств существования модулированных структур в кристаллах TlGaS<sub>2</sub> пока нет.

Известно, что путем легирования соединений различными примесями можно существенно изменять их физические характеристики. В [10, 11] приведены результаты исследования влияния примесей элементов Mn и Co на физические свойства кристаллов TlGaS<sub>2</sub>. Показано, что частичное замещение галлия марганцем в TlGaS<sub>2</sub> приводит к возрастанию коэффициента рентгеночувствительности этих кристаллов, а допирование кобальтом увеличивает фоточувствительность и приводит к сдвигу края поглощения в область низких энергий. Также при легировании соединения TlGaS<sub>2</sub> иттербием установлено, что замещение Ga с образованием твердых растворов является энергетически выгодным. Это согласуется с тем, что в структуре кристалла элементы находятся в степенях окисления Tl<sup>+</sup>, Ga<sup>3+</sup>, S<sup>2-</sup> [12].

Цель данной работы – установление закономерностей изменения электропроводности и диэлектрических характеристик кристаллов TlGaS<sub>2</sub>, легированных кобальтом и иттербием, в зависимости от температуры.

**Технология получения образцов и методика эксперимента.** Образцы TlGa<sub>0,999</sub>Yb<sub>0,001</sub>S<sub>2</sub> и TlGa<sub>0,99</sub>Co<sub>0,01</sub>S<sub>2</sub> синтезировали из взятых в стехиометрических соотношениях элементов путем непосредственного их сплавления в вакуумированных до 10<sup>-3</sup> Па кварцевых ампулах при

1000 ± 5 К в течение 5–7 ч. В качестве исходных компонентов использовали особо чистые химические элементы: Tl (Tl00), Ga (Ga 5N), S (ос.ч. 165), Yb и Co (99,99 %). С целью гомогенизации образцов на основе TlGaS<sub>2</sub> их отжигали в вакууме при 750 К в течение 120 ч. Отожженные сплавы охлаждали до комнатной температуры в режиме выключенной печи. Завершенность синтеза и гомогенность полученных образцов, а также их индивидуальность контролировали методами ДТА и РФА.

Качественные кристаллы получали из синтезированных соединений методом направленной кристаллизации. Синтезированные образцы измельчали и помещали в кварцевые ампулы длиной 8–10 см с заостренным концом и внутренним диаметром 1 см. Вакуумированные до давления 10<sup>-3</sup> Па кварцевые ампулы с веществами помещали в двухтемпературную печь для выращивания монокристаллов. В верхней зоне печи поддерживалась температура 1165 ± 10 К (т. е. выше температуры плавления TlGaS<sub>2</sub>), а в нижней зоне – 1110 ± 10 К (ниже температуры плавления TlGaS<sub>2</sub>). Скорость перемещения ампулы в печи равнялась 0,3–0,5 см/ч, а градиент температуры у фронта кристаллизации составлял 25 ± 5 К. Указанная скорость перемещения ампулы в печи оказалась оптимальной для роста зародышей кристаллов.

Проведенная оценка растворимости иттербия (Yb) и кобальта (Co) в решетке TlGaS<sub>2</sub> с учетом известных эффективных ионных радиусов атомов указывает на то, что радиус внедряющегося атома примеси Yb<sup>3+</sup> (0,87 Å) и Co<sup>3+</sup> (0,61 Å) ближе к радиусу Ga<sup>3+</sup> (0,63 Å), чем к радиусу Tl<sup>+</sup> (1,5 Å), т. е. частичное замещение галлия иттербием (кобальтом) в слоистых кристаллах TlGaS<sub>2</sub> соответствует условию образования раствора замещения.

Измерения диэлектрической проницаемости (ε) и электропроводности (σ) проводили методом плоского конденсатора на монокристаллических пластинках толщиной ~ 0,7–1,5 мм вдоль кристаллографического направления [001] с помощью цифрового измерителя E7-20 на частотах измерительного поля 10<sup>3</sup>–10<sup>6</sup> Гц в температурном диапазоне 140–300 К. На образцы наносили омические серебряные контакты и помещали между металлическими прижимными контактами. Держатель с образцом экранировали латунным стаканом, на который через изоляционную прослойку из слюды наматывали нагреватель, питание которого осуществлялось постоянным током от стабилизированного источника. Температура контролировалась при помощи дифференциальной хромель-копелевой термопары и универсального цифрового вольтметра. Для измерений использовали метод непрерывного квазистатического нагревания со скоростью ~ 0,5 К/мин. Точность измерения температуры составляла 0,1–0,2 К. Погрешность измерений диэлектрических характеристик была ~ 0,5 %. Значения диэлектрической проницаемости и удельной электропроводности рассчитывались по формуле, соответствующей плоскопараллельному конденсатору.

**Результаты исследований и их анализ.** Для анализа влияния элементов кобальта и иттербия на электропроводность и диэлектрические характеристики TlGaS<sub>2</sub> были измерены температурные зависимости удельной электропроводности и диэлектрической проницаемости монокристаллов TlGaS<sub>2</sub>, TlGa<sub>0,999</sub>Yb<sub>0,001</sub>S<sub>2</sub> и TlGa<sub>0,99</sub>Co<sub>0,01</sub>S<sub>2</sub>.

На рис. 1 приведены зависимости удельной диэлектрической проницаемости монокристаллов TlGaS<sub>2</sub>, TlGa<sub>0,999</sub>Yb<sub>0,001</sub>S<sub>2</sub> и TlGa<sub>0,99</sub>Co<sub>0,01</sub>S<sub>2</sub> вдоль кристаллографического направления [001] от температуры (а) и частоты (б). Как видно из рис. 1, б, для всех образцов наблюдается значительная дисперсия диэлектрической проницаемости. С ростом частоты измерительного поля значения ε уменьшаются, что обусловлено релаксационными процессами, происходящими в высокочастотной области измерений. С ростом температуры значения ε увеличиваются. Кроме того, легирование кристаллов TlGaS<sub>2</sub> Yb (0,1 %) приводит к уменьшению значений диэлектрической проницаемости на 8 %, а добавление Co (1 %) уменьшает значения ε на 18,4 % (рис. 1, а). Видно, что на кривых ε = f(T) в области температур ~ 170–240 К наблюдается широкий максимум. Следует отметить, что ранее при исследовании теплоемкости [7, 9] и оптических свойств [10, 11] кристаллов TlGaS<sub>2</sub> было установлено, что в области температур 180, 220, 250 и 280 К наблюдаются аномалии соответствующих физических свойств. Возможно, в этой области температур в кристалле TlGaS<sub>2</sub>, как чистом, так и легированном Co и Yb, существует несоизмеримая фаза, и поэтому наблюдается такой характер температурной зависимости диэлектрической проницаемости. Однако для доказательства существования несоизмеримой фазы в кристаллах TlGaS<sub>2</sub> необходимо проводить

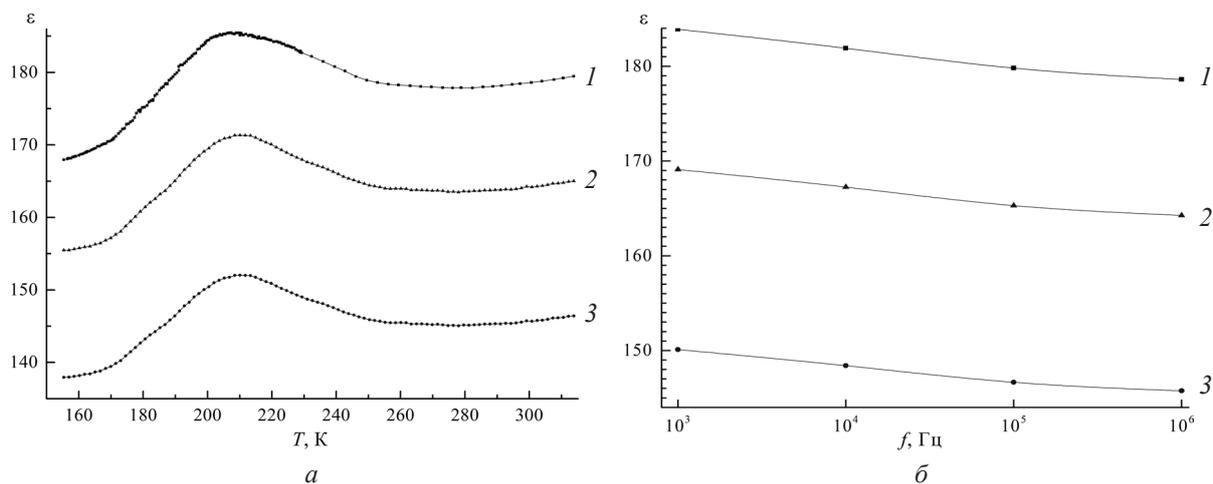


Рис. 1. Диэлектрическая проницаемость монокристаллов  $\text{TiGaS}_2$  (кривая 1),  $\text{TiGa}_{0,999}\text{Yb}_{0,001}\text{S}_2$  (кривая 2) и  $\text{TiGa}_{0,99}\text{Co}_{0,01}\text{S}_2$  (кривая 3): *a* – температурные зависимости на частоте 1 МГц; *б* – частотные зависимости при 300 К

рентгенографические или нейтронографические исследования кристаллической структуры в зависимости от температуры. Отметим, что легирование кристаллов  $\text{TiGaS}_2$  кобальтом и иттербием приводит к небольшому сдвигу аномалии на кривой  $\epsilon = f(T)$  в область бóльших температур.

На рис. 2 показаны зависимости удельной электропроводности монокристаллов  $\text{TiGaS}_2$ ,  $\text{TiGa}_{0,999}\text{Yb}_{0,001}\text{S}_2$  и  $\text{TiGa}_{0,99}\text{Co}_{0,01}\text{S}_2$ , измеренные вдоль кристаллографического направления  $[001]$ , от температуры (*a*) и частоты (*б*). Как видим, значения  $\sigma$  с ростом температуры увеличиваются. Это обусловлено увеличением концентрации свободных носителей зарядов (проявление полупроводниковых свойств) и ростом подвижности доменных границ (проявление сегнетоэлектрических свойств) в результате повышения температуры. Видно, что, как и в случае с диэлектрической проницаемостью, наблюдается дисперсия электропроводности (рис. 2, *б*). С ростом частоты проводимость значительно увеличивается, что обусловлено, как известно, релаксационными процессами, происходящими в высокочастотной области измерений. Легирование кристаллов  $\text{TiGaS}_2$  кобальтом (1 %) и иттербием (0,1 %) приводит к некоторому увеличению электропроводности, при этом не оказывая заметного влияния на характер ее температурной зависимости (рис. 2, *a*).

На температурных зависимостях электропроводности можно выделить несколько участков, отличающихся наклоном. Это связано с преобладанием различных типов электропроводности при разных температурах. Используя закон Аррениуса  $\sigma = \sigma_0 T^{-1} e^{-\frac{E_a}{kT}}$ , где  $k$  – постоянная Больцмана,  $E_a$  – обобщенная энергия активации носителей,  $\sigma_0$  – константа, пропорциональная концентрации и подвижности носителей заряда, были рассчитаны обобщенные энергии активации  $E_a$  на

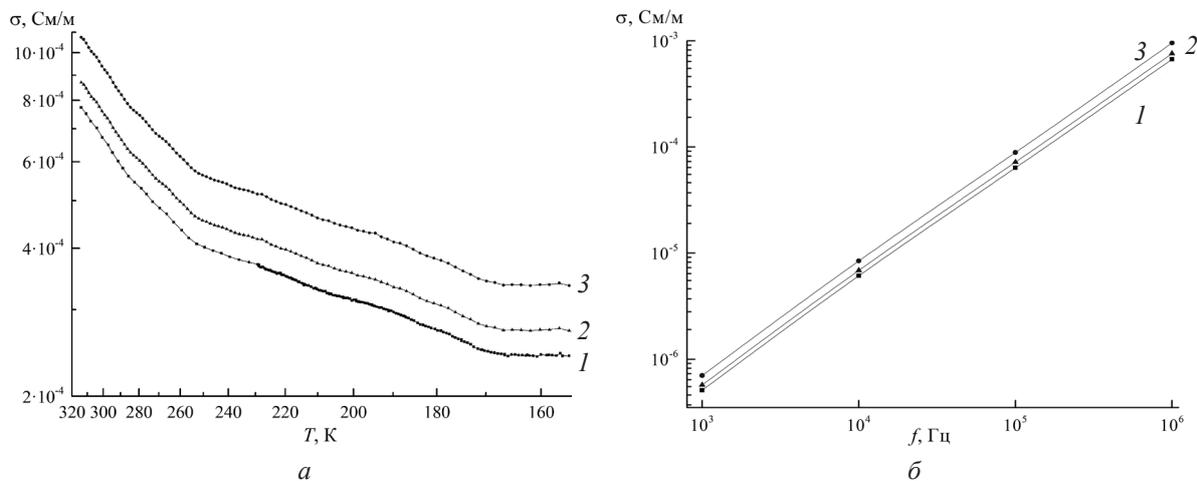


Рис. 2. Удельная электропроводность монокристаллов  $\text{TiGaS}_2$  (кривая 1),  $\text{TiGa}_{0,999}\text{Yb}_{0,001}\text{S}_2$  (кривая 2) и  $\text{TiGa}_{0,99}\text{Co}_{0,01}\text{S}_2$  (кривая 3): *a* – температурные зависимости на частоте 1 МГц; *б* – частотные зависимости при 300 К

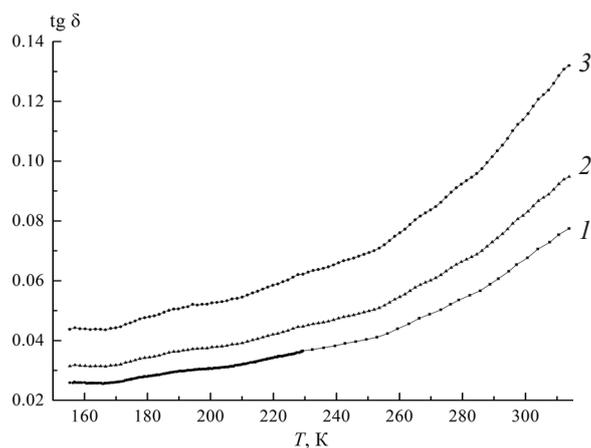


Рис. 3. Температурные зависимости тангенса угла потерь монокристаллов  $\text{TiGaS}_2$  (кривая 1),  $\text{TiGa}_{0,999}\text{Yb}_{0,001}\text{S}_2$  (кривая 2) и  $\text{TiGa}_{0,99}\text{Co}_{0,01}\text{S}_2$  (кривая 3)

этих участках для частоты измерительного поля 1 МГц. Полученные значения энергии активации  $\text{TiGaS}_2$  0,0133; 0,0397 и 0,101 эВ для областей температур меньше 165 К;  $165 < T < 250$  К и больше 250 К соответственно неплохо согласуются с полученными теоретическими расчетами электронной структуры  $\text{TiGaS}_2$  [13]. Следует отметить, что легирование кристаллов  $\text{TiGaS}_2$  небольшим количеством кобальта и иттербия не приводит к заметному изменению энергий активации носителей заряда.

На основании измеренных значений диэлектрической проницаемости  $\epsilon$  и удельной электропроводности  $\sigma$  был рассчитан тангенс угла диэлектрических потерь  $\text{tg } \delta = \frac{\sigma}{2\pi f \epsilon_0 \epsilon}$ , где  $f$  – частота измерительного поля. На рис. 3 представлены температурные зависимости тангенса угла диэлектрических потерь кристаллов  $\text{TiGaS}_2$ ,  $\text{TiGa}_{0,999}\text{Yb}_{0,001}\text{S}_2$  и  $\text{TiGa}_{0,99}\text{Co}_{0,01}\text{S}_2$  для частоты 1 МГц.

Видно, что коэффициент потерь возрастает с ростом температуры. Показано, что допирование кристаллов  $\text{TiGaS}_2$  кобальтом (1 %) и иттербием (0,1 %) приводит к некоторому увеличению тангенса угла потерь.

**Заключение.** Приведены результаты исследования диэлектрической проницаемости, удельной электропроводности и тангенса угла диэлектрических потерь монокристаллов  $\text{TiGaS}_2$ , легированных кобальтом и иттербием, в зависимости от температуры и частоты измерительного поля. Выявлена дисперсия изученных свойств, а именно: с ростом частоты значения диэлектрической проницаемости уменьшаются, а электропроводности – увеличиваются.

Показано, что легирование кристаллов  $\text{TiGaS}_2$  кобальтом и иттербием приводит к уменьшению значений диэлектрической проницаемости и увеличению значений электропроводности.

На кривых температурной зависимости диэлектрической проницаемости исследуемых кристаллов обнаружены аномалии в виде широких максимумов, свидетельствующие о наличии структурных превращений в них в области температур  $\sim 170\text{--}250$  К.

На кривых  $\sigma = f(T)$  кристаллов  $\text{TiGaS}_2$  обнаружены участки с разным наклоном, что свидетельствует о наличии в них нескольких типов проводимости. Рассчитаны значения энергий активации для разных типов проводимости исследуемых кристаллов.

## Литература

1. Delgado G. E., Mora A. J., Pérez F. V. et. al. // *Physica B: Condens. Matter*. 2007. Vol. 391, N 2. P. 385–388.
2. Henkel W., Hochheimer H. D., Carlone C. et. al. // *Phys. Rev. B*. 1982. Vol. 26, N 6. P. 3211–3221.
3. Плющ О. Б., Шелег А. У. // *Кристаллография*. 1999. Т. 44, № 5. С. 873–877.
4. Боровой Н. А., Гололобов Ю. П., Исаенко Г. Л. и др. // *Физика твердого тела*. 2009. Т. 51, № 11. С. 2229–2232.
5. Шелег А. У., Плющ О. Б., Алиев В. А. // *Физика твердого тела*. 1994. Т. 36, № 1. С. 226–230.
6. McMorow D. F., Cowley R. A., Hatton P. D. et. al. // *J. Phys.: Condens. Matter*. 1990. Vol. 2, N 16. P. 3699.
7. Крупников Е. С., Абуталыбов Г. И. // *Физика твердого тела*. 1992. Т. 34, № 9. С. 2964–2966.
8. Мальсагов А. У., Кульбужиев Б. С., Хамхоев Б. М. // *Неорган. материалы*. 1989. Т. 25, № 2. С. 216–220.

9. *Açikgöz M.* // Tur. J. Phys. 2008. Vol. 32. P. 145–150.
10. *Мустафаева С. Н.* // Неорган. материалы. 2009. Т. 45, № 6. С. 659–662.
11. *Karabulut O., Yilmaz K., Boz B.* // Cryst. Res. Technol. 2011. Vol. 46, N 1. P. 79–84.
12. *Kerimova É. M., Mustafaeva S. N., Asadov Y. G.* et. al. // Crystallogr. Rep. 2005. Vol. 50, N 1. P. S122–S123.
13. *Kashida S., Yanadori Y., Otaki Y.* et. al. // Phys. Status Solidi A. 2006. Vol. 203, N 11. P. 2666–2669.

*V. G. HURTAVY, A. U. SHELEG, S. N. MUSTAFAEVA, E. M. KERIMOVA*

## **DIELECTRIC PROPERTIES OF Co- AND Yb-DOPED SINGLE CRYSTALS OF TlGaS<sub>2</sub>**

### **Summary**

Electrical conductivity and dielectric properties of TlGaS<sub>2</sub>, TlGa<sub>0,999</sub>Yb<sub>0,001</sub>S<sub>2</sub> and TlGa<sub>0,99</sub>Co<sub>0,01</sub>S<sub>2</sub> single crystals are investigated in the temperature range 150–320 K at the measuring field frequencies of 10<sup>3</sup>–10<sup>6</sup> Hz. The values of generalized activation energy of charge carriers in these crystals are determined. It is shown that the absolute values of the characteristics studied increase with temperature. The temperature dependences of the dielectric constant of these crystals have revealed the anomalies in the form of wide peaks, indicating the presence of their structural changes at temperatures ~ 170–250 K. The dispersion of the dielectric properties of the single crystals under study is seen: with a frequency growth the dielectric constant values decrease, and electrical conductivity values increase. It is found that the cobalt and ytterbium doping of TlGaS<sub>2</sub> crystals decrease permittivity values and increase electrical conductivity values.

## ІНФАРМАТЫКА

УДК 681.325

*Н. А. КИРИЕНКО, Д. И. ЧЕРЕМИСИНОВ, Л. Д. ЧЕРЕМИСИНОВА*

### **ОПТИМИЗАЦИЯ МНОГОУРОВНЕВЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ЛОГИЧЕСКИХ СХЕМ ДЛЯ СОКРАЩЕНИЯ ПЛОЩАДИ КРИСТАЛЛА СБИС И ЭНЕРГОПОТРЕБЛЕНИЯ**

*Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси*

*(Поступила в редакцию 15.04.2015)*

**Введение.** Успехи в области микроэлектроники позволили размещать на одном кристалле СБИС миллионы транзисторов, работающих на большой синхрочастоте. Однако наряду с огромными возможностями, которые открывают для электронных изделий эти достижения, они также порождают и серьезные проблемы, связанные с рассеянием мощности. Эти вопросы не могут быть проигнорированы, так как требуются все более эффективные изделия для различных сфер применения, способные работать длительное время без подзарядки батареи питания и имеющие наряду с этим низкую стоимость. В последние годы фактор минимизации энергопотребления при проектировании интегральных схем стал играть такую же значимую роль, как площадь и быстродействие. Обычно при проектировании электронных устройств приходится добиваться максимального сокращения площади кристалла при ограниченном потреблении электроэнергии. Снижение энергопотребления проектируемой схемы может обеспечиваться на разных уровнях логического проектирования, при этом чем на более раннем этапе это происходит, тем важнее и результативнее получать на нем более качественные решения. В частности, на логическом уровне (за счет построения удачной логической структуры) можно достичь сокращения энергопотребления на 10–20 % без ущерба для быстродействия и сложности схемы [1].

Большинство современных методов и систем проектирования делят процесс логического синтеза на две независимые стадии [2]: технологически независимую оптимизацию и технологическое отображение. Задачей первой является построение и оптимизация многоуровневой схемы в базисе элементов, не обязательно привязанных к конкретной библиотеке СБИС, – вентилях одного или нескольких типов (обычно И, ИЛИ, НЕ, И-НЕ, ИЛИ-НЕ, И-ИЛИ-НЕ). Результатом выполнения этого этапа является оптимизированная многоуровневая сеть в выбранном базисе вентилях. Цель этапа заключается в построении такого варианта представления схемы, который мог бы служить хорошей отправной точкой для этапа технологического отображения. Существует два основных подхода [2] к выбору базисных элементов при синтезе многоуровневой сети на этапе технологически независимой оптимизации:

– технологически независимый – технологический базис при синтезе никак не учитывается (обычно используется однородный базис 2И-НЕ или 2ИЛИ-НЕ);

– технологически обусловленный – синтез ведется из многовходовых вентилях (с разным числом входов), входящих в состав элементов технологического базиса.

В настоящей работе приводятся результаты сравнительного исследования влияния разных подходов к синтезу многоуровневой сети на площадь и энергопотребление (под которым понимается далее среднее значение рассеиваемой мощности) схемы из элементов КМОП библиотеки. Исследуются два метода построения многоуровневой логической схемы из вентилях, в основе которых лежит выбор технологически независимого или технологически обусловленного базиса

элементов. При этом многоуровневые логические схемы из двух- и многоходовых вентилях, реализующие одну и ту же систему булевых функций, покрываются элементами одной и той же КМОП библиотеки. Показано, что учет особенностей используемой КМОП библиотеки на этапе технологически независимой оптимизации позволяет получить существенный выигрыш в площади и энергопотреблении КМОП-схемы.

### **1. Оценка вариантов оптимизации схемы по прогнозируемому рассеиванию мощности.**

Проблема оценки энергопотребления статических КМОП-схем (по сравнению с динамическими) заключается в том, что компоненты СБИС, выполненные по этой технологии, потребляют подавляющую часть необходимой для их функционирования энергии во время переключения [1, 3, 4]. В типичных КМОП-цепях от 60 до 80 % всей рассеиваемой мощности приходится на ее динамическую составляющую [5], порождаемую нестационарным поведением узлов схемы. Согласно упрощенной модели, энергия рассеивается КМОП-микросхемой всякий раз, когда изменяется сигнал на ее выходе. Отсюда следует, что более активные в переключательном плане КМОП-схемы рассеивают больший объем энергии. Таким образом, рассеивание мощности существенно зависит от переключательной активности элементов схемы, а она, в свою очередь, определяется последовательностью подаваемых входных воздействий на КМОП-схему, т. е. динамикой функционирования.

На логическом уровне, когда схемы еще нет и часто неизвестен даже технологический базис, в котором она будет реализована, рассеивание мощности может быть снижено путем такого преобразования схемы, которое обеспечивает уменьшение ее переключательной активности без изменения функциональности [1, 6]. Для оценки предпочтительности вариантов оптимизации схемы на логическом уровне может быть использовано количественное изменение переключательной активности результирующей схемы при выборе этих вариантов. Такой подход к оценке рассеивания мощности дает возможность сравнивать варианты реализации схемы в процессе ее проектирования, что позволяет уже на логическом уровне проектировать схемы, потенциально имеющие низкое рассеивание мощности.

В основе методов оценки переключательной активности лежит подход, основанный на вероятностных характеристиках входных сигналов и функционально-структурных свойствах исследуемой схемы [7]. Он предполагает задание вероятностей переключения сигналов на входных полюсах схемы, которые отражают частоту смены значений сигналов и используются для вычисления вероятностей переключения сигналов на выходах узлов схемы. В литературе предлагается множество вероятностных методов оценки энергопотребления логических схем [1, 3, 4, 6, 7, 8]. Для оценки вариантов оптимизации схемы достаточным представляется использование простых, сравнительно быстро вычисляемых оценок изменения переключательной активности, в основе которых лежат следующие предположения:

1) изменения на входах схемы распространяются через все ее элементы мгновенно, а значит, все переходы в схеме происходят одновременно;

2) для каждого входного полюса узла имеет место временная независимость, предполагающая, что значение сигнала в любом такте синхронизации не зависит от его значений в предшествующих тактах;

3) входные полюсы узла пространственно независимы, что означает отсутствие корреляции значений сигналов на них (это может быть вызвано, например, наличием разветвлений на выходах элементов или обратных связей).

Различают вероятность появления сигнала 1 (или 0) на некотором полюсе схемы и вероятность смены значения сигнала на этом полюсе. Вероятность появления сигнала 1 на  $i$ -м полюсе схемы называется сигнальной вероятностью  $p_i$  и определяется средней долей тактов, на которых сигнал на  $i$ -м полюсе имеет единичное значение. Вторая вероятность  $p_i^{1 \rightarrow 0}$  (или  $p_i^{0 \rightarrow 1}$ ) есть вероятность смены значения сигнала с 1 на 0 (или с 0 на 1) и определяется средней долей тактов, на которых сигнал на  $i$ -м полюсе меняет свое значение по сравнению со значением в предшествующем такте. При сделанных предположениях значение  $p_i^{1 \rightarrow 0}$  ( $p_i^{0 \rightarrow 1}$ ) равно произведению вероятности появления на  $i$ -м полюсе сигнала 1 (0) в одном такте на вероятность того, что в следующем такте на нем появится 0 (1).

Соответственно переключательная активность полюса  $z_i$  схемы равна  $E(z_i) = p_i^{1 \rightarrow 0} + p_i^{0 \rightarrow 1}$  или (в предположении, что  $0 < p_i < 1$ )

$$E(z_i) = 2 p_i (1 - p_i). \quad (1)$$

Например, если сигнальная вероятность  $p_e$  полюса  $e$  равна 0,2, то переключательная активность этого полюса  $E(e) = 0,32$ ; или, если  $p_e = 0,5$ , то  $E(e) = 0,5$ .

Вероятность  $p_e$  появления сигнала 1 на выходе элемента  $e$  существенно зависит от вероятностных характеристик  $p_i$  сигналов на его входах и от функции, реализуемой этим элементом. Если сигналы на входах элемента не коррелируют в пространстве и времени, то сигнальные вероятности на выходе простых элементов НЕ, И, ИЛИ, И-НЕ, ИЛИ-НЕ с  $n(e)$  входными полюсами подсчитываются, исходя из таблиц истинности реализуемых ими функций:

$$p_e^{\neg} = 1 - p_1; \quad p_e^{\wedge} = \prod_{i=1}^{n(e)} p_i; \quad p_e^{\vee} = 1 - \prod_{i=1}^{n(e)} (1 - p_i); \quad p_e^{\hat{}} = 1 - \prod_{i=1}^{n(e)} p_i; \quad p_e^{\bar{\vee}} = \prod_{i=1}^{n(e)} (1 - p_i). \quad (2)$$

Аналогично могут быть вычислены сигнальные вероятности на выходе более сложных элементов библиотеки. Если заданы сигнальные вероятности входных сигналов схемы, то они могут быть распространены на выходы элементов схемы и через всю схему на ее выходные полюсы. Таким образом, могут быть подсчитаны переключательные активности всех полюсов схемы и соответственно переключательная активность схемы в целом как сумма переключательных активностей всех ее полюсов. Следует заметить, что если даже требование пространственной (и временной) независимости выполняется для входных сигналов схемы, оно может не иметь места для входных сигналов внутренних элементов схемы (как результат наличия разветвлений на выходах элементов и линий обратной связи). В этом случае вычисленные по формулам (1), (2) вероятности имеют погрешность. Однако для сравнительной оценки вариантов оптимизации достаточно, как правило, ограничиться этими простыми оценками, не прибегая к более точным, но гораздо более трудоемко вычисляемым оценкам.

**2. Логический синтез в базисе библиотечных элементов.** Библиотечный базис КМОП СБИС содержит широкий спектр различных логических элементов, среди которых центральное место занимает комбинационная логика: элементы И, ИЛИ, НЕ, И-НЕ, ИЛИ-НЕ на разное число входов. Например, в базисе [9] имеются элементы на 2, 3, 4 (иногда и 6, 8) входа, а также элементы, представляемые древообразными схемами (из вентилях И, ИЛИ) с числом входов не более 4 и числом уровней 2–4. Сложность (цена) библиотечного элемента характеризуется числом транзисторов (или базовых ячеек) его микросхемы. Это число прямо связано с площадью, занимаемой элементом на кристалле.

Синтез комбинационных многоуровневых сетей есть процесс представления системы логических уравнений в базисе элементов технологической библиотеки, каждый из которых имеет свои функциональные и физические характеристики. В большинстве систем проектирования процесс логического синтеза делится на две стадии: технологически независимую оптимизацию и технологическое отображение. Такие многоуровневые подходы к решению сложных проблем характерны для всех систем автоматизации, что обуславливается трудностями одновременного решения этих проблем.

Первая стадия синтеза ориентирована на оптимизацию и декомпозицию логики, а вторая – на реализацию полученного функционального описания в заданном технологическом базисе. Основной подход к решению задачи технологического отображения базируется на покрытии объектной сети подсхемами, реализующими библиотечные элементы. Под покрытием понимается разбиение объектной схемы на подсхемы, реализуемые библиотечными элементами. Существующие в литературе методы покрытия разделяются на функциональные и структурные [2]. Последние обладают большим быстродействием, стали де-факто стандартом при проектировании СБИС с помощью САПР и хорошо подходят для отображения схем в базис элементов КМОП библиотеки. При структурном покрытии задача технологического отображения сводится к оптимизации покрытия ориентированного ациклического графа, задающего исходную объектную сеть, ациклическими

подграфами, задающими структуры библиотечных элементов в том же вентиляльном базисе, что и покрываемая сеть.

Такой подход не предполагает кардинальной перестройки схемы, полученной на этапе технологически независимой оптимизации, а отсюда следует, что качество искомого покрытия существенно зависит от структуры объектной многоуровневой сети. Просчеты, допущенные при ее синтезе, не могут быть компенсированы в полной мере на этапе технологического отображения, поэтому в существующих САПР большое внимание уделяется этапу технологически независимой оптимизации и декомпозиции реализуемого описания в объектную сеть.

В настоящей работе для технологического отображения многоуровневых схем используется программа [10, 11], входящая в состав системы синтеза последовательных схем [12]. Для проведения исследований она была настроена на базис элементов КМОП библиотеки, характеристики которых приведены в табл. 1.

Таблица 1. Элементы КМОП библиотеки

Библиотечные элементы	Число				Схемы элементов
	входных полюсов	входных полюсов всех вентиляей	транзисторов микросхемы	ярусов древообразной структуры	
НЕ	1	1	2	1	
И-НЕ, ИЛИ-НЕ NA, NA3, NA4 NO, NO3, NO4	2, 3, 4	2, 3, 4	4, 6, 8	2	
И, ИЛИ A, A3 O, O3	2, 3	2, 3	6, 8	1	
ЗИ-2ИЛИ-НЕ ЗИЛИ-2И-НЕ NOA3 NAO3	4	5	8	3	
2-2И-2ИЛИ-НЕ 2-2ИЛИ-2И-НЕ NOAA NAOO	4	6	8	3	
2И-3ИЛИ-НЕ 2ИЛИ-3И-НЕ NO3A NA3O	4	5	8	3	
2-2И-3ИЛИ-НЕ 2-2ИЛИ-3И-НЕ NO3AA NA3OO	5	7	10	3	
3И-3ИЛИ-НЕ 3ИЛИ-3И-НЕ NO3A3 NA3O3	5	6	10	3	

**3. Оптимизация многоуровневых логических схем.** Технологически независимая оптимизация, используемая в системах логического проектирования микроэлектронных устройств, включает в себя, как правило, в качестве первого этапа минимизацию функций реализуемых логических описаний в классе дизъюнктивных нормальных форм (ДНФ). Выполнение этого этапа обусловлено тем, что минимизация позволяет сократить исходное задание (иногда довольно существенно). Минимизация функционального описания на этом этапе ведется с учетом фактора сложности (по Квайну) и рассеивания мощности (минимизируется переключательная активность соответствующей двухуровневой схемы). В настоящей работе для минимизации используется программа [13], реализующая модифицированный метод ESPRESSO [14].

Минимизированная система ДНФ, представляемая двухуровневой схемой, декомпозируется далее в объектную многоуровневую сеть из одного или нескольких типов вентилях из множества И, ИЛИ, НЕ, И-НЕ, ИЛИ-НЕ. Синтез многоуровневой логической схемы из вентилях непосредственно следует за минимизацией булевых функций в классе ДНФ и предшествует синтезу логической схемы из библиотечных элементов, выполненных по КМОП-технологии. Цель этапа заключается в том, чтобы построить такой вариант представления схемы из вентилях, который мог бы служить хорошей отправной точкой для этапа технологического отображения в базис библиотечных элементов, при этом в качестве количественных оценок эффективности проектирования используется суммарное число входных полюсов вентилях и суммарная переключательная активность полюсов схемы.

Существуют разные подходы к выбору базовых вентилях при синтезе многоуровневой схемы. Выбор базиса обычно определяется используемыми алгоритмами оптимизации и технологического отображения. Так, в системе MIS [15] базис состоит из 2И-НЕ и НЕ, в системе DAGON [16] – из 2И-НЕ, 3И-НЕ, 4И-НЕ, в методах [17–19] исходная комбинационная или последовательная схемы декомпозируются в схему их двухвходовых элементов.

Использование минимального числа базовых вентилях за счет их простоты (например, 2И-НЕ), как это принято в ряде известных САПР (например, MIS [11, 15], SIS [12], ABC), ведет к повышению гранулярности логической сети, а значит, в общем случае может повысить и качество ее покрытия библиотечными элементами за счет увеличения числа вариантов покрытия. Однако в случае КМОП-базиса это преимущество может приводить к потере эффективности методов структурного покрытия при технологическом отображении.

Для случая КМОП библиотеки более привлекательным представляется выбор технологически обусловленного базиса базовых вентилях [20]. В качестве базовых выбираются вентилях, входящие в состав библиотечных элементов технологического базиса.

Если проанализировать состав КМОП библиотеки (см. табл. 1), то можно заметить, что структуры всех сложных элементов могут быть представлены схемами из чередующихся вентилях И и ИЛИ. Это значит, что простое представление многоместных функций И или ИЛИ в виде композиции двухместных может не дать новых возможностей для покрытия. Поэтому для рассматриваемого технологического базиса целесообразно выбрать в качестве базовых вентилях НЕ, И и ИЛИ с ограниченным числом входов, не большим максимального числа входов вентилях (И-НЕ, ИЛИ-НЕ) этой библиотеки.

Основным используемым во многих САПР методом решения задачи декомпозиции получаемых после минимизации систем ДНФ является алгебраическая декомпозиция [21], в основе которой лежит построение факторизованных форм (или факторизованных ДНФ) путем поиска факторов – общих частей конъюнкций или дизъюнкций ДНФ-системы. Факторизованная форма по сути является алгебраической формой задания многоуровневого представления ДНФ. Специальный термин вводится для обозначения того факта, что заданная система логических уравнений подготовлена для многоуровневой реализации, т. е. удовлетворяет требованиям, накладываемым технологическим базисом, в котором предполагается реализовать описываемое ею устройство управления. Преобразование исходной минимизированной системы ДНФ в факторизованную форму, которой соответствует многоуровневая реализация из вентилях с ограниченным числом входов, разбивается в работе [22] на два этапа:

– совместная нетривиальная факторизация системы ДНФ: выделяются факторы (конъюнкции или ДНФ), которые имеют длину (число литералов) не более максимальных чисел входов  $n_{\max}$  и  $m_{\max}$  вентилях И и ИЛИ, и входят в не менее чем в  $n_{dl}$  выражений (конъюнкции или дизъюнкций);

– построение скобочных выражений ДНФ независимо для каждой из функций системы основано на итеративном вынесении общих литералов конъюнкций заданной ДНФ  $D$  за скобки, т. е. на декомпозиции  $D = k(A) + B$ , где  $D$ ,  $A$  и  $B$  – ДНФ (дизъюнкции некоторого множества конъюнкций), а  $k$  – конъюнкция, состоящая из некоторого множества литералов, общих для всех конъюнкций из  $A$ .

Значения настраиваемых параметров  $n_{\max}$ ,  $m_{\max}$  и  $n_{dl}$  для выполнения совместной нетривиальной факторизации выбираются исходя из параметров того технологического базиса КМОП-элементов, в который будет переводиться полученная И-ИЛИ схема. Значения  $n_{\max}$ ,  $m_{\max}$  целесообразно выбрать такими, чтобы они не были больше числа входных полюсов вентилях И и ИЛИ, образующих структуры библиотечных элементов. Для используемой КМОП библиотеки (см. табл. 1) такими значениями могут быть  $n_{\max} \leq 4$ ,  $m_{\max} \leq 4$ . Значение параметра  $n_{dl}$  задает степень «совместности» выбираемых факторов: минимальное число выражений, в которые должен входить фактор. Рекомендуемое значение  $n_{dl} \geq 2$ . В результате выполнения этапа совместной нетривиальной факторизации получается многоуровневая И-ИЛИ схема (с использованием инверторов), в которой могут оставаться элементы с числом входных полюсов, которое превышает максимум числа входов вентилях, диктуемый технологическим базисом.

В результате выполнения второго этапа (построения скобочных выражений ДНФ) получается многоуровневая И-ИЛИ схема (с использованием инверторов), в которой все элементы имеют число входных полюсов, не превышающее максимума числа входов вентилях, которое диктуется технологическим базисом.

Ключевым вопросом при выполнении обоих этапов является вопрос оценки стоимостного и энергосберегающего качества вариантов выбора фактора и переменной, по которой ведется разложение. Предложенные в работе [22] оценки вариантов имеют целью оптимизацию логической структуры многоуровневой схемы из вентилях, чтобы добиться минимизации ее сложности (по Квайну) и уменьшения интенсивности переключений сигналов на ее полюсах.

**4. Результаты экспериментального исследования.** Проводилось сравнительное исследование влияния на площадь и среднее значение рассеиваемой мощности схемы из элементов КМОП библиотеки двух различных подходов к построению многоуровневой логической схемы из вентилях, в основе которых лежит выбор технологически независимого и технологически обусловленного базиса элементов. Использовались три процедуры построения многоуровневой логической схемы, исходя из двухуровневой И-ИЛИ схемы, которая была получена после минимизации системы булевых функций. Эти процедуры основываются на сочетании следующих преобразований минимизированной системы ДНФ:

1) декомпозиции двухуровневой И-ИЛИ схемы в объектную сеть из двухвходовых вентилях 2И-НЕ;

2) алгебраической декомпозиции в объектную сеть из вентилях И и ИЛИ с ограниченным числом входных полюсов;

3) совместной нетривиальной факторизации системы ДНФ.

Исследования подходов к построению многоуровневой логической схемы из вентилях производились следующим образом.

1. В качестве тестовых примеров использовались системы ДНФ из набора [23] и более сложные системы ДНФ, сгенерированные случайным образом. Сигнальные вероятности входных сигналов принимались равными 0,5, т. е. появление сигнала 0 или 1 на входе считалось равновероятным.

2. Система булевых функций, заданная каждым тестовым примером, подвергалась минимизации в классе ДНФ с помощью модифицированной программы ESPRESSO [13], включенной в программный комплекс проектирования цифровых интегральных КМОП-микросхем с пониженным энергопотреблением [24].

3. Для каждого примера по минимизированной системе ДНФ строились три схемы из элементов КМОП библиотеки (см. табл. 1). Методы их синтеза различались выполнением этапа технологически независимой оптимизации – построением многоуровневой схемы из вентилях, покрытие которой производилось с помощью одной и той же программы [10, 11], входящей в состав системы SIS-синтеза последовательных схем [12]. Программа предварительно была настроена на отечественную КМОП библиотеку (см. табл. 1).

4. Переключательная активность схемы из библиотечных элементов вычислялась как сумма переключательных активностей всех ее полюсов, т. е. переключательных активностей входных полюсов всех элементов плюс переключательные активности выходных полюсов схемы. Сложность схемы оценивалась числом транзисторов, входящих в микросхемы всех ее библиотечных элементов.

5. Первая из исследуемых процедур синтеза многоуровневой схемы из вентилях, покрываемой далее элементами выбранной КМОП библиотеки, состояла в декомпозиции двухуровневой И-ИЛИ схемы, полученной после минимизации системы булевых функций, в объектную сеть из двухвходовых вентилях 2И-НЕ. Декомпозиция производилась с помощью программы [10].

6. Вторая из исследуемых процедур синтеза многоуровневой схемы из вентилях состояла в декомпозиции двухуровневой И-ИЛИ схемы в объектную сеть из многовходовых вентилях И и ИЛИ (с использованием инверторов). Использовалась алгебраическая декомпозиция [22], базирующаяся на построении факторизованных форм. Метод основан на совместной нетривиальной факторизации системы ДНФ и построении скобочных выражений ДНФ каждой из функций. Настраиваемыми параметрами программы (входящей в программный комплекс [24]) являются ограничения на число  $n_{\max}$  и  $m_{\max}$  входных полюсов элементов И и ИЛИ и минимальное число  $n_{dl}$  выражений, для которых формируется фактор на этапе совместной нетривиальной факторизации системы ДНФ. Исследование проводилось для следующих значений указанных параметров:  $n_{\max} = m_{\max} = 4$ ,  $n_{dl} = 2$ . В результате получалась многоуровневая И-ИЛИ (с использованием инверторов) сеть, в которой все элементы имеют число входных полюсов, не превышающее максимума числа входов вентилях, диктуемого технологическим базисом.

7. Третья из исследуемых процедур синтеза многоуровневой схемы из вентилях состояла в декомпозиции двухуровневой И-ИЛИ схемы в объектную сеть из многовходовых вентилях И и ИЛИ, получаемую следующим образом. Сначала производилась совместная нетривиальная факторизация системы ДНФ, использовались те же значения настраиваемых параметров, что и во втором подходе:  $n_{\max} = m_{\max} = 4$ ,  $n_{dl} = 2$ . В результате получалась многоуровневая И-ИЛИ (с использованием инверторов) сеть, в которой могли оставаться элементы с числом входных полюсов, которое превышает максимум числа входов вентилях, диктуемый технологическим базисом. Полученная схема преобразовывалась в объектную сеть из двухвходовых вентилях 2И-НЕ с помощью метода [10], используемого в первом подходе.

Исследования проводились на компьютере с процессором Intel i5-2400@3,1 GHz и оперативной памятью 2,99 ГБ. Результаты экспериментов приведены в табл. 2: в столбце 1 – имена тестовых примеров, в столбце 2 – их характеристики (число входных и выходных переменных, а также элементарных конъюнкций.) Тестовые примеры задаются значениями двух матриц: троичной – для задания элементарных конъюнкций входных переменных, булевой – для задания выходных функций системы ДНФ в виде дизъюнкции элементарных конъюнкций.

Для каждого тестового примера указаны следующие параметры результирующих схем:

- переключательная активность  $p$  схемы;
- сложность  $s$  схемы;
- время  $t$  построения схемы в секундах.

Перед построением многоуровневой логической схемы из вентилях выполняется минимизация системы булевых функций в классе ДНФ, в результате чего получается описание двухуровневой И-ИЛИ схемы, качество которой также оценивается параметрами  $p$ ,  $s$ ,  $t$  (столбцы 3–5).

Для каждого примера строились три варианта схем из элементов КМОП библиотеки, полученных после перевода в технологический базис результатов выполнения процедур 1–3.

Таблица 2. Результаты экспериментального исследования различных подходов к построению многоуровневой логической схемы из вентиляей

Пример	Характеристики схем	Минимизация ESPRESSO			Синтез многоуровневой сети в базисе элементов КМОП библиотеки								
					процедура 1			процедура 2			процедура 3		
		<i>p</i>	<i>s</i>	<i>t</i>	<i>p</i>	<i>s</i>	<i>t</i>	<i>p</i>	<i>s</i>	<i>t</i>	<i>p</i>	<i>s</i>	<i>t</i>
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
br1	12, 8, 34	108	279	<1	141,34	668	3	54,11	386	6	56,3	392	2
br2	12, 8, 35	78,5	212	<1	115,04	526	2	48,29	348	4	52,48	356	1
in0	15, 11, 138	448,5	1118	<1	438,03	1956	2	229,2	1508	5	234,3	1516	3
in2	19, 10, 137	596,5	1469	<1	451,38	2040	4	248,37	1726	5	254,67	1726	3
mlp4	8, 8, 256	396	979	<1	324,68	1418	3	255,79	1406	6	260,92	1400	3
root	8, 5, 256	150	393	<1	155,84	672	3	141,55	692	5	145,02	704	3
tms	8, 16, 30	108,5	471	<1	302,98	1276	3	139,1	916	5	151,54	940	2
z9sym	9, 1, 420	258,00	602	<1	160,31	678	2	136,72	702	5	140,1	680	2
GenP1	20, 4, 50	315,5	739	<1	548,69	2794	3	228,11	1374	7	225,36	1380	2
GenP2	30, 10, 100	768	1733	1	1331,12	6790	3	631,87	4090	5	637,18	4012	3
GenP3	30, 10, 300	2215,5	5052	14	3807,66	19502	4	1545,63	10418	11	1523,53	10120	4
GenP4	30, 8, 400	1798,5	4737	13	4232,16	21060	4	1583,5	9480	11	1603,28	9614	5
GenP5	20, 6, 400	1176,5	3029	15	1822,95	8526	4	945,59	5270	6	960,84	5280	3
GenP6	20, 6, 400	1076,5	2948	15	1961,76	9016	5	945,32	5154	7	964,02	5166	5
GenP7	30, 12, 50	244,5	558	<1	328,99	1632	2	252,52	1376	4	260,45	1408	2
GenP9	30, 12, 400	1908,5	4667	7	3442,93	17268	5	1732,14	10366	10	1743,99	10632	5
GenP10	30, 12, 700	2314,0	5759	17	3238,65	15420	6	1776,18	9736	18	1808,23	9796	7
GenP13	30, 5, 600	2072,0	5492	19	3965,55	18948	8	1577,43	8762	44	1600,83	8848	6
GenP14	30, 5, 500	1710,5	4291	13	2618,67	12546	4	1343,04	7396	9	1365,63	7442	5
GenP15	30, 5, 400	2184,5	5213	7	3820,06	19416	4	1708,22	10628	12	1721,09	10688	6
GenP17	30,10,400	1610,5	4011	9	2785,49	13702	4	1530,39	8776	12	1529,67	8816	5
GenP22	24, 7, 790	2356	6223	19	4010,45	18762	10	1852,17	10588	18	1898,63	10616	5

Результаты эксперимента позволили сделать следующие заключения.

1. Несмотря на то что синтез многоуровневых схем из вентиляей является только одним из этапов синтеза схемы в заданном технологическом базисе, полученный при его выполнении выигрыш по площади и переключательной активности вносит существенный вклад в оценки площади и переключательной активности схемы из элементов КМОП библиотеки.

2. Синтез схем из элементов КМОП библиотеки с использованием второй процедуры существенно выигрывает по обоим параметрам (площади и переключательной активности) у двух остальных. Это говорит о том, что предварительная алгебраическая декомпозиция исходной системы ДНФ позволяет получить выигрыш как по переключательной активности, так и по сложности схемных реализаций, и этот выигрыш становится существенным при увеличении сложности реализуемых систем булевых функций.

3. Синтез схем из элементов КМОП библиотеки с использованием третьей процедуры выигрывает (для большинства примеров) по обоим параметрам у первого подхода, но проигрывает второму. Его отличие от первого подхода состоит в предварительном выполнении совместной нетривиальной факторизации системы ДНФ, которое и обеспечило выигрыш; от второго – в выполнении после совместной нетривиальной факторизации декомпозиции в базисе 2И-НЕ вместо более эффективной процедуры построения скобочных выражений для каждой из ДНФ системы.

В целом величина выигрыша по сложности и переключательной активности сильно зависит от сложности и вида исходного функционального описания и от наперед заданных значений переключательных активностей входных полюсов схемы. В настоящем исследовании взят самый худший случай для выполнения второй процедуры – когда появление сигнала 0 или 1 на всех входах схемы является равновероятным.

**Закключение.** Проведены исследования степени влияния методов выполнения технологически независимой оптимизации многоуровневых логических схем из вентиляей на сложность и энергопотребление схем в технологическом базисе КМОП-схем. Сравнительные исследования показали, что выбор на этапе технологически независимой оптимизации технологически обусловленного базиса вентиляей для построения многоуровневой логической сети, служащей основой для структурного покрытия элементами КМОП библиотеки, приводит к существенному выигрышу в сложности и энергопотреблении результирующих схем.

## Литература

1. Benini L., De Micheli G. // Logic Synthesis and Verification. 2002. P. 197–223.
2. Brayton B. R., Hachtel G. D., Sangiovanni-Vincentelli A. L. // Proc. of the IEEE. 1990. Vol. 78, N 2. P. 264–300.
3. Рабау Ж. М., Чандрасекан А., Николитч Б. Цифровые интегральные схемы. Методология проектирования. М., 2007.
4. Roy K., Prasad S. C. Low Power CMOS VLSI Circuit Design. New York, 2000.
5. Power Compiler. Automatic Power Management within Galaxy™ Implementation Platform: [http://pdf.aminer.org/000/285/870/power\\_compiler\\_a\\_gate\\_level\\_power\\_optimization\\_and\\_synthesis\\_system.pdf](http://pdf.aminer.org/000/285/870/power_compiler_a_gate_level_power_optimization_and_synthesis_system.pdf) [Electronic resource]. Date of access: 01.02.2014.
6. Черемисинова Л. Д. // Информац. технологии. 2010. № 8. С. 27–35.
7. Najm F. N. A. // IEEE Trans. on VLSI. 1994. N 12. P. 446–455.
8. Pedram M. Power // ACM Trans. Design Automation Electronic Systems. 1996. Vol. 1. P. 3–56.
9. Лукошко Г., Коннов Е. // Радиолюбитель. 1997. № 9. С. 39–40.
10. Rudell R. Logic Synthesis for VLSI Design // MemorandumNo. UCB/ERL M89/49, Electronics Research Laboratory, College of Engineering, University of California, Berkeley, CA 94720. 1989.
11. Detjens E. et al. // Proc. IEEE Int. Conf. on CAD (ICCAD). 1987. P. 116–119.
12. Sentovich E. M. et al. SIS: A System for Sequential Circuit Synthesis // University of California, Berkeley, Technical Report No. UCB/ERL M92/41 [Electronic resource]. 1992. Mode of access: <http://www.eecs.berkeley.edu/Pubs/TechRpts/1992/ERL-92-41.pdf>. Date of access: 25.02.2015.
13. Черемисинов Д. И., Черемисинова Л. Д. // Информац. технологии. 2011. № 5. С. 17–23.
14. Brayton R. K., Hachtel G. D., McMullen C., Sangiovanni-Vincentelli A. L. Logic minimization algorithms for VLSI synthesis. Boston, 1984.
15. Brayton R. K., Rudell R., Sangiovanni-Vincentelli A. L. et al. // IEEE Trans. on Computer-Aided Design. 1989. Vol. CAD-6, N 6. P. 1062–1081.
16. Keutzer K. // Proc. 24th ACM/IEEE Design Automation Conf. 1987. P. 341–347.
17. Библио П. Н., Лицкевич В. Г. // Микроэлектроника. 2002. № 1. С. 66–77.
18. Mailhot F., De Micheli G. // IEEE Trans. on Computer-Aided Design of Integr. Circ. and Systems. 1993. Vol. 12, N 5. P. 599–620.
19. Stok L., Tiwari V. // Logic Synthesis and Verification. Boston; Dordrecht; London, 2002. P. 115–140.
20. Черемисинова Л. Д. Синтез и оптимизация комбинационных структур СБИС. Минск, 2007.
21. Черемисинова Л. Д. // Информатика. 2010. № 4. С. 112–122.
22. Черемисинова Л. Д., Кириенко Н. А. // Информац. технологии. 2013. № 3. С. 8–14.
23. Berkeley PLA test set [Electronic resource]. Mode of access: <http://www1.cs.columbia.edu/~cs6861/sis/espresso-examples>. Date of access: 25.02.2015.
24. Библио П. Н., Черемисинова Л. Д., Кардаш С. Н. и др. // Программная инженерия. 2013. № 8. С. 35–41.

N. A. KIRIENKO, D. I. CHEREMISINOV, L. D. CHEREMISINOVA

### OPTIMIZATION OF MULTI-LEVEL REPRESENTATIONS OF LOGIC CIRCUITS TO REDUCE A VLSI CHIP AREA AND POWER CONSUMPTION

#### Summary

The problem of optimization of multi-level representations of logic circuits taking into account two main characteristics of CMOS circuits (area and average dissipated power value) is developed. The results of a comparative study of two approaches to the construction of multi-level logic circuits design on the base of gates are presented. Such multi-level logic circuits are intended to cover a CMOS library with elements.

УДК 519.6

П. И. СОБОЛЕВСКИЙ, С. В. БАХАНОВИЧ

**ПАРАМЕТРИЗОВАННЫЙ ТАЙЛИНГ:  
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРАНИЦ ЛОКАЛЬНЫХ ЦИКЛОВ В НЕПОЛНЫХ ТАЙЛАХ***Институт математики НАН Беларуси**(Поступила в редакцию 27.04.2015)*

**Введение.** При разработке программных продуктов на практике широко используется тайлинг [1–8] как одно из наиболее эффективных средств оптимизации программ. Суть тайлинга состоит в увеличении зернистости алгоритма: множество операций алгоритма разбивается на группы-тайлы, каждый тайл рассматривается как зерно вычислений или макрооперация. Техника тайлинга позволяет существенно повысить эффективность использования многоуровневой памяти компьютера и, кроме этого, помогает оптимизировать операции обмена данными в параллельных приложениях для вычислительных систем с распределенной памятью.

В результате применения тайлинга гнезда циклов программы преобразуются к гнездам циклов, содержащим большее (как правило, двукратное) количество вложенных циклов. Множество циклов можно условно разделить на две группы: глобальные циклы, задающие порядок выполнения операций алгоритма на уровне тайлов, и локальные циклы, описывающие порядок выполнения операций в рамках одного тайла.

При разбиении множества операций на тайлы возникают тайлы различного типа: полные, неполные и пустые. С математической точки зрения тайлы представляются набором граничных условий. Последние напрямую определяют границы локальных циклов, соответствующих тайлу, и могут быть заданы как в обобщенном виде, так и в частном случае для каждого типа тайлов. Полные тайлы имеют более простые граничные условия. Выделение и раздельная программная реализация полных и неполных тайлов позволяет в ряде случаев дополнительно оптимизировать программный код по сравнению с реализацией тайлов в общем виде с обобщенными граничными условиями.

В данной работе исследуются аспекты применения параметризованного тайлинга к алгоритмам, область вычисления которых представима выпуклым многогранником. Предложена структура множества неполных тайлов, построены формулы для определения этого множества. Также получены формулы, определяющие границы изменения локальных циклов в неполных тайлах. Эти формулы позволяют минимизировать время расчета границ локальных циклов при реализации тайлинга в последовательных и параллельных программах.

**Тайлинг.** Тайлинг (tiling) – это преобразование вычислительного алгоритма с целью укрупнения зернистости путем объединения определенного числа мелких операций алгоритма в крупные зерна вычислений – тайлы. При тайлинге укрупнение зернистости осуществляется покрытием области вычислений однотипными  $n$ -мерными параллелепипедами (тайлами) [1–8]. Далее будем предполагать, что область вычислений алгоритма (индексное множество) – это  $n$ -мерный выпуклый многогранник, описание которого в декартовой системе координат в арифметическом пространстве  $Z^n$  имеет вид

$$V = \{J \in Z^n \mid LJ \geq I\} = \{J \in Z^n \mid l_s \cdot J \geq I_s, s = 1, 2, \dots, m\}, \quad (1)$$

где целочисленная матрица  $L = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_m \end{pmatrix} \in Z^{m \times n}$  и целочисленный вектор  $I = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_m \end{pmatrix} \in Z^m$  являются

параметрами, определяющими область вычислений, при этом  $l_s$  – нормальные векторы гиперплоскостей  $l_s \cdot J = I_s$ ,  $s = 1, 2, \dots, m$ , содержащих грани многогранника. Каждой точке области вычислений  $V$  соответствует ограниченный набор операций алгоритма. В данной работе все векторные равенства и неравенства понимаются в обычном смысле («выполняются для каждой координаты»).

Разбиение арифметического пространства  $Z^n$ , а следовательно, и области вычислений  $V$  алгоритма, на тайлы осуществляется нелинейным отображением  $Z^n \xrightarrow{f} Z^n$  [1]:

$$J^{gl} = f(J) = \left[ R^{-1}H(J - J^{\bar{0}}) \right], J \in Z^n. \quad (2)$$

Отображение  $f$  определяется тремя параметрами  $H \in Z^{n \times n}$ ,  $R \in Z^{n \times n}$ ,  $J^{\bar{0}} \in Z^n$  и позволяет идентифицировать тайлы вектором  $J^{gl} \in Z^n$ . При определении этих параметров мы не рассматриваем вопросы корректности тайлинга, возникающие при наличии информационных зависимостей между операциями алгоритма. В рамках настоящей работы предполагается, что параметры тайлинга выбраны уже с учетом его корректности. Кроме того, в данной работе предполагается, что параметры тайлинга  $R$ ,  $H$  и  $J^{\bar{0}}$ , имея определенный геометрический смысл, ограничены следующими условиями.

1.  $H$  – нижняя треугольная матрица с единицами на главной диагонали; составлена построчно из нормальных векторов  $h_1 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $h_k = (h_{k1}, h_{k2}, \dots, h_{kk-1}, 1, 0, \dots, 0) \in Z^n$ ,  $k = 2, 3, \dots, n$ , гиперплоскостей, проходящих через целочисленные точки пространства  $Z^n$ . Векторы  $h_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , определяют параллелепипедальную форму тайла.

2.  $R = \text{diag}(r_1, r_2, \dots, r_n)$  – диагональная матрица, определяющая размеры тайла, где  $r_k$  – количество различных параллельных гиперплоскостей с нормальными векторами  $h_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , которые проходят через все целочисленные точки одного тайла. Обозначим дополнительно  $\bar{R} = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ ,  $\bar{1} = (1, 1, \dots, 1)$ .

3. Точку тайла  $J^{gl}$ , в которой достигается наименьшее значение функции  $HJ$ , будем называть начальной точкой тайла и обозначать  $J^{\bar{0}, gl}$ . В формуле (2) целочисленный вектор  $J^{\bar{0}} \in Z^n$  определяет начальную точку нулевого тайла  $J^{gl} = \bar{0}$ . Если точка  $J^{\bar{0}}$  определена, то начальная точка  $J^{\bar{0}, gl}$  любого тайла  $J^{gl} \in Z^n$  определяется условием  $RJ^{gl} = H(J^{\bar{0}, gl} - J^{\bar{0}})$  и равна  $J^{\bar{0}, gl} = J^{\bar{0}} + H^{-1}RJ^{gl}$ .

Далее будем использовать обозначение  $(X)_k$  для  $k$ -й координаты любого вектора (векторнозначной функции)  $X$ , стоящего в скобках.

Каждый тайл  $J^{gl}$  состоит из  $\prod_{m=1}^n r_m$  целочисленных точек (точек с целочисленными координатами). Обозначим множество этих точек

$$\text{Tile}(J^{gl}) = \left\{ J \in Z^n \mid J^{gl} = \left[ R^{-1}H(J - J^{\bar{0}}) \right] \right\} = \left\{ J \in Z^n \mid \bar{0} \leq H(J - J^{\bar{0}, gl}) \leq \bar{R} - \bar{1} \right\}, \quad (3)$$

а множество точек из области  $V$ , принадлежащих тайлу  $J^{gl} \in Z^n$ , обозначим  $V^{loc}(J^{gl})$ :

$$V^{loc}(J^{gl}) = \text{Tile}(J^{gl}) \cap V = \left\{ J \in Z^n \mid \bar{0} \leq H(J - J^{\bar{0}, gl}) \leq \bar{R} - \bar{1}, J \in V \right\}. \quad (4)$$

Из приведенных определений следует, что множество тайлов, имеющих с областью  $V$  непустое пересечение (множество тайлов, покрывающих область вычислений), которое будем обозначать  $V^{gl}$ , можно представить в виде

$$V^{gl} = \left\{ J^{gl} \in Z^n \mid \text{Tile}(J^{gl}) \cap V \neq \emptyset \right\} = \left\{ J^{gl} \in Z^n \mid J^{gl} = \left\lfloor R^{-1}H(J - J^{\bar{0}}) \right\rfloor, J \in V \right\}. \quad (5)$$

О п р е д е л е н и е [3]. Тайл  $J^{gl}$  будем называть пустым, если  $V^{loc}(J^{gl}) = \emptyset$ , неполным, если  $V^{loc}(J^{gl}) \neq \text{Tile}(J^{gl})$ , и будем называть полным, если  $V^{loc}(J^{gl}) = \text{Tile}(J^{gl})$ .

Применение тайлинга в приложениях требует определения множеств  $V^{gl}, V^{loc}(J^{gl})$  в виде

$$\begin{aligned} V^{gl} &= \left\{ J^{gl} \in Z^n \mid q_k^{gl}(J^{gl}) \leq J_k^{gl} \leq Q_k^{gl}(J^{gl}), k=1,2,\dots,n \right\}, \\ V^{loc}(J^{gl}) &= \left\{ J \in Z^n \mid q_k^{loc}(J, J^{gl}) \leq J_k \leq Q_k^{loc}(J, J^{gl}), k=1,2,\dots,n \right\}, \end{aligned} \quad (6)$$

с явным определением зависимости граничных значений координат точек  $J^{gl} \in V^{gl}$  и граничных значений координат точек  $J \in V^{loc}(J^{gl})$  от параметров тайлинга, а также параметров, определяющих область вычислений, и координат соответствующих точек с меньшими номерами. В общем случае, когда область вычислений имеет вид (1), определения (4) и (5) не содержат явных выражений для этих границ.

Во многих вычислительных алгоритмах область вычислений представляет собой выпуклый многогранник вида (1) с явным определением функций, описывающих зависимость границ изменения координат точек этого многогранника от целочисленного вектора  $I$ , характеризующего грани многогранника, и от значений координат этих точек с меньшими номерами:

$$V = \left\{ J \in Z^n \mid LJ \geq I \right\} = \left\{ J \in Z^n \mid F^-(I, J) \leq J \leq F^+(I, J) \right\}, \quad (7)$$

где целочисленные вектор-функции  $F^\pm(I, J)$  с координатами  $F_k^\pm(I, J) = F_k^\pm(I, J_1, J_2, \dots, J_{k-1})$   $k=1,2,\dots,n$ , удовлетворяют неравенствам  $F_k^-(I, J_1, J_2, \dots, J_{k-1}) \leq F_k^+(I, J_1, J_2, \dots, J_{k-1})$  при всех допустимых значениях параметров  $I \in Z^m, J_i \in Z, i=1,2,\dots,k-1, k=1,2,\dots,n$ . Для таких областей в работе [4] построено множество полных тайлов  $V^{gl,-} \subseteq V^{gl}$ :

$$\begin{aligned} V^{gl,-} &= \left\{ J^{gl} \in Z^n \mid LJ^{\bar{0},gl} \geq I_- \right\} = \left\{ J^{gl} \in Z^n \mid \left\lfloor q^{gl,-}(J^{gl}) \right\rfloor \leq J^{gl} \leq \left\lfloor Q^{gl,-}(J^{gl}) \right\rfloor \right\}, \\ q^{gl,-}(J^{gl}) &= R^{-1} \left( F^-(I_-, J^{\bar{0},gl}) + (H - E)J^{\bar{0},gl} - HJ^{\bar{0}} \right), \quad I_- = I - (LH^{-1})_-(\bar{R} - \bar{I}), \\ Q^{gl,-}(J^{gl}) &= R^{-1} \left( F^+(I_-, J^{\bar{0},gl}) + (H - E)J^{\bar{0},gl} - HJ^{\bar{0}} \right) = \\ &= q^{gl,-}(J^{gl}) + R^{-1} \left( F^+(I_-, J^{\bar{0},gl}) - F^-(I_-, J^{\bar{0},gl}) \right), \end{aligned} \quad (8)$$

в котором полные тайлы представимы в виде

$$\begin{aligned} V^{loc,-}(J^{gl}) &= \left\{ J \in Z^n \mid q^{loc,-}(J, J^{gl}) \leq J \leq Q^{loc,-}(J, J^{gl}) \right\}, \\ q^{loc,-}(J, J^{gl}) &= HJ^{\bar{0},gl} - (H - E)J, \quad Q^{loc,-}(J, J^{gl}) = q^{loc,-}(J, J^{gl}) + \bar{R} - \bar{I}. \end{aligned} \quad (9)$$

В этой же работе построены три аппроксимации множества тайлов  $V^{gl,0} \supseteq V^{gl}, V^{gl,+} \supseteq V^{gl}$  и  $V^{gl,0+} \supseteq V^{gl}$ :

$$\begin{aligned} V^{gl,0} &= \left\{ J^{gl} \in Z^n \mid \left\lfloor q^{gl,0}(J^{gl}) \right\rfloor \leq J^{gl} \leq \left\lfloor Q^{gl,0}(J^{gl}) \right\rfloor \right\}, \\ q^{gl,0}(J^{gl}) &= R^{-1}(m - HJ^{\bar{0}} - \bar{R} + \bar{I}), \quad Q^{gl,0}(J^{gl}) = R^{-1}(M - HJ^{\bar{0}}); \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
V^{gl,+} &= \left\{ J^{gl} \in \mathbf{Z}^n \mid LJ^{\bar{0},gl} \geq I_+, J^{\bar{0},gl} = J^{\bar{0}} + H^{-1}RJ^{gl} \right\} = \\
&= \left\{ J^{gl} \in \mathbf{Z}^n \mid \left[ q^{gl,+}(J^{gl}) \right] \leq J^{gl} \leq \left[ Q^{gl,+}(J^{gl}) \right] \right\},
\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
q^{gl,+}(J^{gl}) &= R^{-1} \left( F^-(I_+, J^{\bar{0},gl}) + (H-E)J^{\bar{0},gl} - HJ^{\bar{0}} \right), \quad I_+ = I - (LH^{-1})_+ (\bar{R} - \bar{1}), \\
Q^{gl,+}(J^{gl}) &= R^{-1} \left( F^+(I_+, J^{\bar{0},gl}) + (H-E)J^{\bar{0},gl} - HJ^{\bar{0}} \right), \\
V^{gl,0+} &= \left\{ J^{gl} \in \mathbf{Z}^n \mid \left[ q^{gl,0+}(J^{gl}) \right] \leq J^{gl} \leq \left[ Q^{gl,0+}(J^{gl}) \right] \right\}, \\
q^{gl,0+}(J^{gl}) &= R^{-1} \left( \max \left( m - HJ^{\bar{0}} - \bar{R} + \bar{1}, F^-(I_+, J^{\bar{0},gl}) + (H-E)J^{\bar{0},gl} - HJ^{\bar{0}} \right) \right), \\
Q^{gl,0+}(J^{gl}) &= R^{-1} \left( \min \left( M - HJ^{\bar{0}}, F^+(I_+, J^{\bar{0},gl}) + (H-E)J^{\bar{0},gl} - HJ^{\bar{0}} \right) \right).
\end{aligned} \tag{12}$$

Для приведенных выше трех аппроксимаций множество точек, принадлежащих тайлу  $J^{gl} \in V^{gl,*}$ , где  $V^{gl,*}$  – любая из аппроксимаций, имеет вид

$$\begin{aligned}
V^{loc,*}(J^{gl}) &= \left\{ J \in \mathbf{Z}^n \mid q^{loc,*}(J, J^{gl}) \leq J \leq Q^{loc,*}(J, J^{gl}) \right\}, \quad J^{gl} \in V^{gl,*}, \\
q^{loc,*}(J, J^{gl}) &= \max \left( F^-(I, J), q^{loc,-}(J, J^{gl}) \right), \quad Q^{loc,*}(J, J^{gl}) = \min \left( F^+(I, J), Q^{loc,-}(J, J^{gl}) \right).
\end{aligned} \tag{13}$$

Каждая из этих аппроксимаций удовлетворяет условиям (6). В работе [4] также определены критерии точности построенных аппроксимаций. Точность аппроксимаций оценивается разностью количества тайлов в аппроксимирующем множестве  $V^{gl,*}$  и множестве  $V^{gl}$ . Чем меньше эта разность, тем точнее аппроксимация. Аппроксимацию  $V^{gl,*} \supseteq V^{gl}$  будем называть точной, если множество  $V^{gl,*}$  не содержит пустых тайлов.

**Определение границ локальных циклов.** При программной реализации тайлов граничные значения локальных циклов могут быть рассчитаны по формулам (13) независимо от типа тайла. Тем не менее расчет границ локальных циклов может быть оптимизирован за счет выделения и отдельной программной реализации полных и неполных тайлов.

С точки зрения оптимизации расчета границ, полные тайлы имеют важную особенность – как следует из формулы (9), граничные значения локальных циклов  $q_k^{loc,-}(J, J^{gl}), Q_k^{loc,-}(J, J^{gl})$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , не зависят от параметров области вычислений и в связи с этим требуют выполнения меньшего количества операций по их расчету. Выделение полных тайлов и использование для расчета их границ формул (9) может существенно уменьшить время реализации этих тайлов, особенно в случае их небольших размеров.

Что касается неполных тайлов, то они также имеют потенциал с точки зрения оптимизации расчета границ локальных циклов. Ниже представлены формулы, описывающие множество неполных тайлов в точных аппроксимациях и его структуру. Также приведены формулы, которые позволяют часть граничных значений локальных циклов неполных тайлов вычислять по формулам типа (9).

Пусть аппроксимация множества тайлов  $V^{gl,*}$  является точной и множество полных тайлов  $V^{gl,-}$  не пусто, при этом для любого набора значений координат  $J_s^{gl}$ ,  $s = 1, 2, \dots, k-1$ , удовлетворяющих условию  $\left[ q_s^{gl,-}(J^{gl}) \right] \leq J_s^{gl} \leq \left[ Q_s^{gl,-}(J^{gl}) \right]$ , имеет место неравенство  $\left[ q_k^{gl,-}(J^{gl}) \right] \leq \left[ Q_k^{gl,-}(J^{gl}) \right]$ .

Множество неполных тайлов  $V^{gl,* \setminus -} = V^{gl,*} \setminus V^{gl,-}$  в точной аппроксимации  $V^{gl,*}$  состоит из тайлов, идентифицированных векторами  $J^{gl} \in V^{gl,*}$ , у которых хотя бы одна координата  $J_k^{gl}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , принимает значения, не принадлежащие целочисленному промежутку  $\left[ \left[ q_k^{gl,-}(J^{gl}) \right], \left[ Q_k^{gl,-}(J^{gl}) \right] \right]$ .

Это означает, что для любого неполного тайла  $J^{gl} \in V^{gl,* \setminus -}$  существует такое значение  $k$ , что

первые  $k-1$  координат вектора  $J^{gl}$  удовлетворяют условию  $\left[ q_s^{gl,-}(J^{gl}) \right] \leq J_s^{gl} \leq \left[ Q_s^{gl,-}(J^{gl}) \right]$ ,  $s=1,2,\dots,k-1$ , а координата  $J_k^{gl}$  удовлетворяет одному из взаимоисключающих неравенств  $\left[ q_k^{gl,*}(J^{gl}) \right] \leq J_k^{gl} \leq \left[ q_k^{gl,-}(J^{gl}) \right] - 1$  или  $\left[ Q_k^{gl,-}(J^{gl}) \right] + 1 \leq J_k^{gl} \leq \left[ Q_k^{gl,*}(J^{gl}) \right]$ . Данный факт позволяет, как показано ниже, фрагментировать и структурировать множество неполных тайлов.

Определим в точной аппроксимации  $V^{gl,*}$  два множества неполных тайлов  $V_{pr}^{gl,*\setminus-}$  и  $V_{ep}^{gl,*\setminus-}$  («пролог» и «эпилог» в терминологии статьи [6]):

$$\begin{aligned} V_{pr}^{gl,*\setminus-} &= \bigcup_{k=1}^n V_{pr,k}^{gl,*\setminus-}, \quad V_{ep}^{gl,*\setminus-} = \bigcup_{k=1}^n V_{ep,k}^{gl,*\setminus-}, \\ V_{pr,k}^{gl,*\setminus-} &= \left\{ J^{gl} \in \mathbf{Z}^n \mid \left[ q_s^{gl,-}(J^{gl}) \right] \leq J_s^{gl} \leq \left[ Q_s^{gl,-}(J^{gl}) \right], \quad s=1,2,\dots,k-1, \right. \\ &\quad \left. \left[ q_k^{gl,*}(J^{gl}) \right] \leq J_k^{gl} \leq \left[ q_k^{gl,-}(J^{gl}) \right] - 1, \left[ q_s^{gl,*}(J^{gl}) \right] \leq J_s^{gl} \leq \left[ Q_s^{gl,*}(J^{gl}) \right], \quad s=k+1,\dots,n \right\}, \\ V_{ep,k}^{gl,*\setminus-} &= \left\{ J^{gl} \in \mathbf{Z}^n \mid \left[ q_s^{gl,-}(J^{gl}) \right] \leq J_s^{gl} \leq \left[ Q_s^{gl,-}(J^{gl}) \right], \quad s=1,2,\dots,k-1, \right. \\ &\quad \left. \left[ Q_k^{gl,-}(J^{gl}) \right] + 1 \leq J_k^{gl} \leq \left[ Q_k^{gl,*}(J^{gl}) \right], \left[ q_s^{gl,*}(J^{gl}) \right] \leq J_s^{gl} \leq \left[ Q_s^{gl,*}(J^{gl}) \right], \quad s=k+1,\dots,n \right\}. \end{aligned}$$

Покажем, что имеет место разбиение множества  $V^{gl,*}$  на непересекающиеся подмножества  $V_{pr,k}^{gl,*\setminus-}$ ,  $V_{ep,k}^{gl,*\setminus-}$  и  $V^{gl,-}$ ,  $k=1,2,\dots,n$ .

Так как множество полных тайлов  $V^{gl,-}$  по предположению не пусто, то в аппроксимации  $V^{gl,*}$  первая координата любого вектора  $J^{gl} \in V^{gl,*}$  принимает значения в одном из трех непересекающихся промежутков: либо  $\left[ q_1^{gl,*}(J^{gl}) \right] \leq J_1^{gl} \leq \left[ q_1^{gl,-}(J^{gl}) \right] - 1$ , либо  $\left[ Q_1^{gl,-}(J^{gl}) \right] + 1 \leq J_1^{gl} \leq \left[ Q_1^{gl,*}(J^{gl}) \right]$ , либо  $\left[ q_1^{gl,-}(J^{gl}) \right] \leq J_1^{gl} \leq \left[ Q_1^{gl,-}(J^{gl}) \right]$ . Этот факт определяет разбиение множества  $V^{gl,*}$  на три непересекающиеся подмножества

$$\begin{aligned} V^{gl,*} &= \left\{ J^{gl} \in \mathbf{Z}^n \mid \left[ q_s^{gl,*}(J^{gl}) \right] \leq J_s^{gl} \leq \left[ Q_s^{gl,*}(J^{gl}) \right], \quad s=1,2,\dots,n \right\} = \\ &= \left\{ J^{gl} \in \mathbf{Z}^n \mid \left[ q_1^{gl,*}(J^{gl}) \right] \leq J_1^{gl} \leq \left[ q_1^{gl,-}(J^{gl}) \right] - 1, \left[ q_s^{gl,*}(J^{gl}) \right] \leq J_s^{gl} \leq \left[ Q_s^{gl,*}(J^{gl}) \right], \quad s=2,\dots,n \right\} \cup \\ &\cup \left\{ J^{gl} \in \mathbf{Z}^n \mid \left[ Q_1^{gl,-}(J^{gl}) \right] + 1 \leq J_1^{gl} \leq \left[ Q_1^{gl,*}(J^{gl}) \right], \left[ q_s^{gl,*}(J^{gl}) \right] \leq J_s^{gl} \leq \left[ Q_s^{gl,*}(J^{gl}) \right], \quad s=2,\dots,n \right\} \cup \\ &\cup \left\{ J^{gl} \in \mathbf{Z}^n \mid \left[ q_1^{gl,-}(J^{gl}) \right] \leq J_1^{gl} \leq \left[ Q_1^{gl,-}(J^{gl}) \right], \left[ q_s^{gl,*}(J^{gl}) \right] \leq J_s^{gl} \leq \left[ Q_s^{gl,*}(J^{gl}) \right], \quad s=2,\dots,n \right\} = \\ &= V_{pr,1}^{gl,*\setminus-} \cup V_{ep,1}^{gl,*\setminus-} \cup \\ &\cup \left\{ J^{gl} \in \mathbf{Z}^n \mid \left[ q_1^{gl,-}(J^{gl}) \right] \leq J_1^{gl} \leq \left[ Q_1^{gl,-}(J^{gl}) \right], \left[ q_s^{gl,*}(J^{gl}) \right] \leq J_s^{gl} \leq \left[ Q_s^{gl,*}(J^{gl}) \right], \quad s=2,\dots,n \right\}. \end{aligned}$$

Применяя аналогичное разбиение к последнему из трех множеств по координате  $J_2^{gl}$ , получим следующее разбиение множества  $V^{gl,*}$  на непересекающиеся множества:

$$\begin{aligned} V^{gl,*} &= V_{pr,1}^{gl,*\setminus-} \cup V_{ep,1}^{gl,*\setminus-} \cup V_{pr,2}^{gl,*\setminus-} \cup V_{ep,2}^{gl,*\setminus-} \cup \left\{ J^{gl} \in \mathbf{Z}^n \mid \left[ q_s^{gl,-}(J^{gl}) \right] \leq J_s^{gl} \leq \left[ Q_s^{gl,-}(J^{gl}) \right], \quad s=1,2, \right. \\ &\quad \left. \left[ q_s^{gl,*}(J^{gl}) \right] \leq J_s^{gl} \leq \left[ Q_s^{gl,*}(J^{gl}) \right], \quad s=3,\dots,n \right\}. \end{aligned}$$

Продолжая процесс фрагментации последовательно по координатам  $J_k^{gl}$ ,  $k=3,4,\dots,n$ , придем к искомому разбиению аппроксимации множества тайлов

$$\begin{aligned} V^{gl,*} &= \bigcup_{k=1}^n \left( V_{pr,k}^{gl,*\setminus-} \cup V_{ep,k}^{gl,*\setminus-} \right) \cup \\ &\cup \left\{ J^{gl} \in \mathbf{Z}^n \mid \left[ q_s^{gl,-}(J^{gl}) \right] \leq J_s^{gl} \leq \left[ Q_s^{gl,-}(J^{gl}) \right], \quad s=1,2,\dots,n \right\} = V_{ep}^{gl,*\setminus-} \cup V_{pr}^{gl,*\setminus-} \cup V^{gl,-}. \end{aligned}$$

Описанный выше процесс разбиения множества  $V^{gl,*}$  фактически определяет структуру множества неполных тайлов и его представление в следующем виде:

$$V^{gl,*\setminus} = \bigcup_{k=1}^n \left( V_{pr,k}^{gl,*\setminus} \cup V_{ep,k}^{gl,*\setminus} \right) = V_{pr}^{gl,*\setminus} \cup V_{ep}^{gl,*\setminus}. \quad (14)$$

Из полученного представления множества  $V^{gl,*\setminus}$  вытекает следующее утверждение о границах неполных тайлов.

**У т в е р ж д е н и е 1.** Пусть область вычислений алгоритма допускает представление (7);  $V^{gl,*}$  – точная аппроксимация множества тайлов  $V^{gl}$ , определяемая одной из формул (10)–(12), с представлением ее тайлов в виде (13);  $V^{gl,-}$  – множество полных тайлов, определяемое формулами (8) и (9). Пусть множество полных тайлов  $V^{gl,-}$  не пусто, при этом для любого набора значений координат  $J_s^{gl}$ ,  $s=1,2,\dots,k-1$ , удовлетворяющих условию  $\left[ q_s^{gl,-}(J^{gl}) \right] \leq J_s^{gl} \leq \left[ Q_s^{gl,-}(J^{gl}) \right]$ , имеет место неравенство  $\left[ q_k^{gl,-}(J^{gl}) \right] \leq \left[ Q_k^{gl,-}(J^{gl}) \right]$ . Тогда множество неполных тайлов представимо в виде (14), а граничные значения локальных циклов в неполных тайлах определяются в явном виде в соответствии с формулами

$$\begin{aligned} V_{pr,k}^{loc,*\setminus}(J^{gl}) &= \left\{ J \in Z^n \mid q_s^{loc,-}(J, J^{gl}) \leq J_s \leq Q_s^{loc,-}(J, J^{gl}), s=1,2,\dots,k-1, \right. \\ &\quad \left. \max\left(F_k^-(I, J), q_k^{loc,-}(J, J^{gl})\right) \leq J_k \leq Q_k^{loc,-}(J, J^{gl}), \right. \\ &\quad \left. \max\left(F_s^-(I, J), q_s^{loc,-}(J, J^{gl})\right) \leq J_s \leq \min\left(F_s^+(I, J), Q_s^{loc,-}(J, J^{gl})\right), s=k+1,\dots,n \right\}, \\ &\quad J^{gl} \in V_{pr,k}^{gl,*\setminus}, k=1,2,\dots,n, \\ V_{ep,k}^{loc,*\setminus}(J^{gl}) &= \left\{ J \in Z^n \mid q_s^{loc,-}(J, J^{gl}) \leq J_s \leq Q_s^{loc,-}(J, J^{gl}), s=1,2,\dots,k-1, \right. \\ &\quad \left. q_k^{loc,-}(J, J^{gl}) \leq J_k \leq \min\left(F_k^+(I, J), Q_k^{loc,-}(J, J^{gl})\right), \right. \\ &\quad \left. \max\left(F_s^-(I, J), q_s^{loc,-}(J, J^{gl})\right) \leq J_s \leq \min\left(F_s^+(I, J), Q_s^{loc,-}(J, J^{gl})\right), s=k+1,\dots,n \right\}, \\ &\quad J^{gl} \in V_{ep,k}^{gl,*\setminus}, k=1,2,\dots,n. \end{aligned}$$

В соответствии с утверждением 1 при вычислении границ неполного тайла  $J^{gl} \in V_{pr,k}^{gl,*\setminus}$  ( $J^{gl} \in V_{ep,k}^{gl,*\setminus}$ ) могут быть использованы не только общие формулы вида (13), но и более простые формулы вида (9), а также их комбинации. Фактически, для расчета границ первых  $k-1$  локальных циклов используются формулы (9), для  $k$ -го цикла применяется комбинация формул (9) и (13), для расчета границ оставшихся циклов используются общие формулы вида (13). Таким образом, применение утверждения 1 при программной реализации тайлов позволяет минимизировать количество операций, требуемых для расчета граничных значений локальных циклов в неполных тайлах.

**З а м е ч а н и е.** Условие точности аппроксимации множества тайлов, используемое в утверждении 1, позволяет оптимизировать расчет границ  $k$ -го локального цикла тайла  $J^{gl} \in V_{pr,k}^{gl,*\setminus}$  ( $J^{gl} \in V_{ep,k}^{gl,*\setminus}$ ). Тем не менее данное условие ограничивает область применимости утверждения. Если для расчета границ  $k$ -го локального цикла использовать общие формулы вида (13), то требование точности аппроксимации в утверждении можно снять.

В контексте рассматриваемой задачи минимизации времени, затрачиваемого на вычисление границ локальных циклов, определенный интерес представляют области вычислений  $V$ , покрываемые только полными тайлами. Одна из таких областей приведена в следующем утверждении. Рассмотрим область вычислений, представимую в виде пересечения двух окаймляющих конусов

$$V = \left\{ J \in Z^n \mid m \leq HJ, GJ \leq M \right\} = \left\{ J \in Z^n \mid m - (H - E)J \leq J \leq M - (G - E)J \right\}, \quad (15)$$

определяемых двумя нижними треугольными матрицами  $H, G \in Z^{n \times n}$  с единицами на главной диагонали, блочная структура которых зависит от целочисленного параметра  $p$ ,  $0 \leq p \leq n-1$ ,

$$H = \begin{pmatrix} H_{\leq p} & 0_{p \times (n-p)} \\ 0_{(n-p) \times p} & H_{> p} \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} G_{\leq p} & 0_{p \times (n-p)} \\ 0_{(n-p) \times p} & G_{> p} \end{pmatrix}, \quad (16)$$

где блоки  $H_{\leq p}, G_{\leq p} \in Z^{p \times p}$ ,  $G_{> p} = H_{> p} \in Z^{(n-p) \times (n-p)}$  – нижние треугольные матрицы с единицами на главной диагонали, удовлетворяющие условию  $m - (H - E)J \leq M - (G - E)J$ ,  $J \in V$ .

**У т в е р ж д е н и е 2.** Пусть область вычислений представима в виде пересечения двух окаймляющих конусов (15), определяемых при фиксированном значении целочисленного параметра  $p$ ,  $0 \leq p \leq n-1$ , блочными матрицами вида (16). Тогда аппроксимирующее множество тайлов  $V^{gl,+}$ , определяемое формулой (11) с параметрами  $H, J^{\bar{0}}, R = \text{diag}(1, 1, \dots, 1, r_{p+1}, r_{p+2}, \dots, r_n)$ , при условии, что параметры тайлинга удовлетворяют условию

$$\left( R^{-1} \left( m - HJ^{\bar{0}} \right) \right)_k, \left( R^{-1} \left( M - HJ^{\bar{0}} + \bar{1} \right) \right)_k \in Z, \quad k = p+1, \dots, n, \quad (17)$$

осуществляет покрытие области вычислений  $V$  полными тайлами.

Доказательство этого утверждения основано на том, что для данной области вычислений имеем

$$\begin{aligned} \left[ q_k^{gl,+} \left( J^{gl} \right) \right] &= \begin{cases} \left( m - HJ^{\bar{0}} \right)_k, & k \leq p, \\ \left( \left[ R^{-1} \left( m - HJ^{\bar{0}} \right) \right] \right)_k, & k > p, \end{cases} \\ \left[ q_k^{gl,-} \left( J^{gl} \right) \right] &= \begin{cases} \left( m - HJ^{\bar{0}} \right)_k, & k \geq p, \\ \left( \left[ R^{-1} \left( m - HJ^{\bar{0}} \right) \right] \right)_k, & k < p, \end{cases} \\ \left[ Q_k^{gl,+} \left( J^{gl} \right) \right] &= \begin{cases} \left( M - GJ^{\bar{0}} - \left( GH^{-1} - E \right) J^{gl} \right)_k, & k \leq p, \\ \left( \left[ R^{-1} \left( M - HJ^{\bar{0}} + \bar{1} \right) \right] \right)_k - 1, & k > p, \end{cases} \\ \left[ Q_k^{gl,-} \left( J^{gl} \right) \right] &= \begin{cases} \left( M - GJ^{\bar{0}} - \left( GH^{-1} - E \right) J^{gl} \right)_k, & k \leq p, \\ \left( \left[ R^{-1} \left( M - HJ^{\bar{0}} + \bar{1} \right) \right] \right)_k - 1, & k > p, \end{cases} \end{aligned}$$

и при выполнении условий целочисленности (17) имеют место равенства  $\left[ q_k^{gl,+} \left( J^{gl} \right) \right] = \left[ q_k^{gl,-} \left( J^{gl} \right) \right]$ ,  $\left[ Q_k^{gl,-} \left( J^{gl} \right) \right] = \left[ Q_k^{gl,+} \left( J^{gl} \right) \right]$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , из которых следует  $V_{pr,k}^{gl,+ \setminus -} = \emptyset$ ,  $V_{ep,k}^{gl,+ \setminus -} = \emptyset$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ .

**П р и м е р.** Рассмотрим основную часть алгоритма численного решения задачи Дирихле многомерного уравнения Пуассона методом верхней релаксации:

```

for  $J_1 = 1$  to  $N_1$  do
  for  $J_2 = 1$  to  $N_2$  do
    .....
    for  $J_n = 1$  to  $N_n$  do
      begin
         $y(J_2, J_3, \dots, J_n) = F(y(J_2 - 1, J_3, \dots, J_n), y(J_2, J_3 - 1, \dots, J_n), \dots, y(J_2, J_3, \dots, J_n - 1),$ 
           $y(J_2, J_3, \dots, J_n), y(J_2 + 1, J_3, \dots, J_n), y(J_2, J_3 + 1, \dots, J_n), \dots, y(J_2, J_3, \dots, J_n + 1))$ 
      end

```

Областью вычислений данного алгоритма является  $n$ -мерный прямоугольный параллелепипед  $V = \{J \in \mathbf{Z}^n \mid 1 \leq J_k \leq N_k, k = 1, 2, \dots, n\}$ , допускающий представление в виде (7), где  $m = 2n$ ,  $F_s^-(I, J) = I_s = 1$ ,  $F_s^+(I, J) = -I_{n+s} = N_s$ ,  $s = 1, \dots, n$ . Множество векторов зависимостей состоит из  $2n - 1$  векторов  $\Phi = \{\varphi_1 = e_1, \varphi_k = e_k, \varphi_{\bar{k}} = e_1 - e_k, k = 2, 3, \dots, n\}$ .

Определим параметры тайлинга  $H \in \mathbf{Z}^{n \times n}$ ,  $R \in \mathbf{Z}^{n \times n}$  и  $J^{\bar{0}} \in \mathbf{Z}^n$ . Матрицу  $H$  составим из следующих нормальных векторов гиперплоскостей:  $h_1 = e_1$ ,  $h_k = e_1 + e_k$ ,  $k = 2, 3, \dots, n$ . При таком выборе матрицы  $H$  имеет место неравенство  $H\varphi \geq \bar{0}$ ,  $\varphi \in \Phi$ , что гарантирует корректность тайлинга. Вычисляя  $m = \min_{J \in V} HJ = (1, 2, \dots, 2)$ ,  $M = \max_{J \in V} HJ = (N_1, N_1 + N_2, \dots, N_1 + N_n)$ , определим начальные точки тайлов  $J^{\bar{0}} = H^{-1}m = \bar{1}$ ,  $J^{\bar{0}, gl} = \bar{1} + H^{-1}RJ^{gl} = (1 + J_1^{gl}, 1 + r_2 J_2^{gl} - J_1^{gl}, \dots, 1 + r_n J_n^{gl} - J_1^{gl})$ . Размеры тайлов будем задавать матрицей  $R = \text{diag}(1, r_2, \dots, r_n)$ ,  $1 \leq r_k \leq r_k^{\max}$ ,  $r_1^{\max} = N_1$ ,  $r_k^{\max} = N_1 + N_k - 1$ ,  $k = 2, 3, \dots, n$ .

Множество полных тайлов  $V^{gl, -}$  в данном примере определяется формулами

$$V^{gl, -} = \left\{ J^{gl} \in \mathbf{Z}^n \mid 0 \leq J_1^{gl} \leq N_1 - 1, \left\lfloor J_1^{gl} / r_k \right\rfloor \leq J_k^{gl} \leq \left\lfloor (J_1^{gl} + N_k) / r_k \right\rfloor - 1, k = 2, 3, \dots, n \right\},$$

$$V^{loc, -}(J^{gl}) = \left\{ J \in \mathbf{Z}^n \mid J_1 = J_1^{gl} + 1, r_k J_k^{gl} + 2 - J_1 \leq J_k \leq r_k (J_k^{gl} + 1) + 1 - J_1, k = 2, \dots, n \right\}, J^{gl} \in V^{gl, -}.$$

Точное аппроксимирующее множество  $V^{gl, +}$  определяется формулами

$$V^{gl, +} = \left\{ J^{gl} \in \mathbf{Z}^n \mid 0 \leq J_1^{gl} \leq N_1 - 1, \left\lfloor J_1^{gl} / r_k \right\rfloor \leq J_k^{gl} \leq \left\lfloor (J_1^{gl} + N_k - 1) / r_k \right\rfloor, k = 2, 3, \dots, n \right\},$$

$$V^{loc, +}(J^{gl}) = \left\{ J \in \mathbf{Z}^n \mid J_1 = J_1^{gl} + 1, \right.$$

$$\left. \max(1, r_k J_k^{gl} + 2 - J_1) \leq J_k \leq \min(N_k, r_k J_k^{gl} + 1 - J_1 + r_k), k = 2, 3, \dots, n \right\}, J^{gl} \in V^{gl, +}.$$

Компоненты  $V_{pr, k}^{gl, * \setminus -}$  и  $V_{ep, k}^{gl, * \setminus -}$  множества неполных тайлов  $V^{gl, + \setminus -}$  имеют вид

$$V_{pr, 1}^{gl, + \setminus -} = \emptyset, \quad V_{ep, 1}^{gl, + \setminus -} = \emptyset,$$

$$V_{pr, k}^{gl, + \setminus -} = \left\{ J^{gl} \in \mathbf{Z}^n \mid 0 \leq J_1^{gl} \leq N_1 - 1, J_1^{gl} / r_k \notin \mathbf{Z}, \right.$$

$$\left. \left\lfloor J_1^{gl} / r_s \right\rfloor \leq J_s^{gl} \leq \left\lfloor (J_1^{gl} + N_s) / r_s \right\rfloor - 1, s = 2, 3, \dots, k - 1, \left\lfloor J_1^{gl} / r_k \right\rfloor = J_k^{gl}, \right.$$

$$\left. \left\lfloor J_1^{gl} / r_s \right\rfloor \leq J_s^{gl} \leq \left\lfloor (J_1^{gl} + N_s - 1) / r_s \right\rfloor, s = k + 1, \dots, n \right\}, k = 2, 3, \dots, n,$$

$$V_{pr, k}^{loc, + \setminus -}(J^{gl}) = \left\{ J \in \mathbf{Z}^n \mid J_1 = J_1^{gl} + 1, \right.$$

$$r_s J_s^{gl} - J_1 + 2 \leq J_s \leq r_s J_s^{gl} - J_1 + 2 + r_s - 1, s = 2, 3, \dots, k - 1,$$

$$\max(1, r_k J_k^{gl} - J_1 + 2) \leq J_k \leq r_k J_k^{gl} - J_1 + 2 + r_k - 1,$$

$$\left. \max(1, r_s J_s^{gl} - J_1 + 2) \leq J_s \leq \min(N_s, r_s J_s^{gl} - J_1 + 2 + r_s - 1), s = k + 1, \dots, n \right\},$$

$$J^{gl} \in V_{pr, k}^{gl, + \setminus -}, k = 2, 3, \dots, n,$$

$$V_{ep, k}^{gl, + \setminus -} = \left\{ J^{gl} \in \mathbf{Z}^n \mid 0 \leq J_1^{gl} \leq N_1 - 1, (J_1^{gl} + N_k) / r_k \notin \mathbf{Z}, \right.$$

$$\left. \left\lfloor J_1^{gl} / r_s \right\rfloor \leq J_s^{gl} \leq \left\lfloor (J_1^{gl} + N_s) / r_s \right\rfloor - 1, s = 2, 3, \dots, k - 1, \left\lfloor (J_1^{gl} + N_k) / r_k \right\rfloor = J_k^{gl}, \right.$$

$$\left. \left\lfloor J_1^{gl} / r_s \right\rfloor \leq J_s^{gl} \leq \left\lfloor (J_1^{gl} + N_s - 1) / r_s \right\rfloor, s = k + 1, \dots, n \right\}, k = 2, 3, \dots, n,$$

$$V_{ep, k}^{loc, + \setminus -}(J^{gl}) = \left\{ J \in \mathbf{Z}^n \mid J_1 = J_1^{gl} + 1, \right.$$

$$\begin{aligned}
r_s J_s^{gl} - J_1 + 2 &\leq J_s \leq r_s J_s^{gl} - J_1 + 1 + r_s, \quad s = 2, 3, \dots, k-1, \\
r_k J_k^{gl} - J_1 + 2 &\leq J_k \leq \min(N_k, r_k J_k^{gl} - J_1 + 1 + r_k), \\
\max(1, r_s J_s^{gl} - J_1 + 2) &\leq J_s \leq \min(N_s, r_s J_s^{gl} - J_1 + 1 + r_s), \quad s = k+1, \dots, n \}, \\
J^{gl} &\in V_{ep,k}^{gl,+ \setminus -}, \quad k = 2, 3, \dots, n.
\end{aligned}$$

Работа выполнена в рамках подпрограммы «Математические методы» Государственной программы научных исследований «Конвергенция».

### Литература

1. *Xue J.* Loop Tiling For Parallelism. Norwell, 2000.
2. *Irigoien F., Triolet R.* // Proc. of the ACM SIGPLAN Symp. on Principles of Programming Languages. San Diego, California, Jan. 1988. [S. 1.], 1988. P. 319–329.
3. *Renganarayanan L., Kim D., Rajopadhye S., Strout M.* // SIGPLAN Conf. on Programming Language Design and Implementation, New York, NY, USA, 2007. [S. 1.], 2007. P. 405–414.
4. *Соболевский П. И., Баханович С. В.* // Докл. НАН Беларуси. 2013. Т. 57, № 1. С. 21–26.
5. *Баханович С. В., Соболевский П. И.* Параметризованный тайлинг: точные аппроксимации и анализ глобальных зависимостей // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2014. Т. 54, № 11. С. 1817–1828.
6. *Hartono A., Baskaran M., Ramanujam J., Sadayappan P.* // 24<sup>th</sup> Intern. Parallel and Distributed Proc. Symp. (2010 IPDPS Conf.), Atlanta, April 2010. [S. 1.], 2010.
7. *Tavarageri S., Hartono A., Baskaran M.* et al. // Proc. 15<sup>th</sup> Workshop on Compilers for Parallel Computers, Vienna, Austria, July 2010. [S. 1.], 2010.
8. *Лиходед Н. А., Соболевский П. И.* // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2012. № 2. С. 107–113.

*P. I. SOBOLEVSKY, S. V. BAKHANOVICH*

### PARAMETERIZED TILING: THE DEFINITION OF THE BOUNDARIES OF LOCAL LOOPS IN PARTIAL TILES

#### Summary

The aspects of parameterized tiling in application to algorithms with index domain represented by a convex polyhedron are investigated. The structure of the set of partial tiles is proposed and the formulas to determine this set are constructed. The formula to define the boundaries of local loops in partial tiles is obtained as well. These formulas enable one to minimize the calculation time of local loop boundaries in the implementation of the tiling in sequential and parallel programs.

**ВУЧОНЫЯ БЕЛАРУСІ****ВИКТОР ИВАНОВИЧ КОРЗЮК****(К 70-летию со дня рождения)**

4 апреля 2015 г. исполнилось 70 лет известному белорусскому математику, академику НАН Беларуси, доктору физико-математических наук, профессору Виктору Ивановичу Корзюку.

Виктор Иванович родился 4 апреля 1945 г. в деревне Петрашунцы Воложинского района Минской области в крестьянской семье. В 1961 г. окончил среднюю школу в деревне Саковщина (в 1978 г. – Щелкановскую семилетнюю школу). В том же году поступил на математический факультет Белорусского государственного университета. Уже в студенческие годы под руководством кандидата физико-математических наук Н. И. Бриша – ученика академика И. Г. Петровского – В. И. Корзюк приступил к научным исследованиям в области теории уравнений с частными производными.

В 1966 г. после окончания математического факультета БГУ Виктор Иванович работал стажером-исследователем на кафедре дифференциальных уравнений. С 1969 г. обучался в аспирантуре, а в 1971 г. защитил кандидатскую диссертацию. В это время началась его плодотворная деятельность на факультете прикладной математики на кафедре уравнений математической физики, начиная с должности ассистента, затем старшего преподавателя, доцента и профессора кафедры математической физики. С 1975 по 1996 г. был заместителем декана и деканом факультета прикладной математики и информатики БГУ. С 1996 по 2001 г. занимал должность проректора по учебной работе. В 1984 г. организовал и возглавил в качестве заведующего кафедру математической физики. Им и при непосредственном его участии были организованы специальный факультет повышения квалификации по прикладной математике и ЭВМ, специальный факультет переподготовки кадров по прикладной математике. Сегодня один из них – «Институт повышения квалификации и переподготовки кадров по дефицитным специальностям и современным технологиям, второй стал основой создания Института непрерывного образования БГУ (27.02.2015 г. присоединен к Институту бизнеса и менеджмента технологий БГУ). Открыты филиалы названных спецфакультетов в Гродненском государственном университете им. Я. Купалы и Брестском техническом университете. Все это способствовало становлению факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета как одного из ведущих факультетов по прикладной математике не только в Беларуси, но и в странах постсоветского пространства.

В настоящее время В. И. Корзюк – профессор кафедры математической кибернетики БГУ. Много сил и внимания Виктор Иванович уделяет работе непосредственно в Национальной академии наук Беларуси. В 2001–2004 гг. являлся заведующим отделом математического моделирования и информационных технологий Института математики НАН Беларуси, в 2005–2015 гг. был заведующим отделом математической физики, а с 2015 г. возглавил отдел прикладной математики данного института.



В. И. Корзюк – крупный специалист в области прикладной математики, дифференциальных уравнений с частными производными, математической физики. Большой вклад Виктор Иванович внес в разработку и развитие метода энергетических неравенств и операторов осреднения, изложенного в его одноименной монографии. На основе предложенного метода решены некоторые недоступные ранее проблемы в теории дифференциальных уравнений с частными производными, исследованы на разрешимость новые задачи и классы дифференциальных уравнений, возникающие при изучении конкретных физических явлений, что стало крупным вкладом в развитие теории постановок корректных по Адамару краевых задач и их разрешимости. Это дало возможность изучить многие новые смешанные задачи для нестационарных уравнений, заданных в нецилиндрических областях. Виктор Иванович предложил новую методику вывода энергетических неравенств для некоторых классов уравнений при доказательстве теорем существования и единственности решений рассматриваемых задач. Используя этот подход, исследовал новые задачи для большого класса дифференциальных уравнений, в частности граничные задачи для гиперболических уравнений второго порядка относительно заданного поля направлений, рассматриваемых в областях достаточно общей конфигурации; аналогичные граничные задачи для некоторых гиперболических уравнений 3-го и 4-го порядков; задачи сопряжения в нецилиндрических областях; задачи типа Дирихле для одного класса уравнений 3-го порядка. Эти результаты позволили дать ответ на вопросы о корректной постановке ряда задач, на решение которых были направлены усилия многих математиков.

Одно из научных направлений, в котором активно работает Виктор Иванович в последнее время, связано с классическими решениями задач для дифференциальных уравнений с частными производными. Им впервые доказано, что наряду с правильно выбранными условиями при постановке задач их классическое решение существует тогда и только тогда, если выполняются соответствующие для каждой задачи условия согласования на заданные функции в угловых точках областей независимых переменных. Полученные результаты имеют практические приложения для численных решений (разностные схемы, метод конечных элементов) конкретных задач, так как эти методы разрабатываются преимущественно на основе классических решений.

Большую исследовательскую работу В. И. Корзюк проводит в области математической физики. Совместно с учениками им изучены многие задачи математической физики, а именно: задачи сопряжения, описывающие колебания после удара; задачи сопряжения, моделирующие диффузию примесей в кремний и совместно-разделенное течение вязко-упругой и вязкой жидкостей в трубе; задачи об автолегировании кремния примесью скрытого слоя и др. Виктор Иванович занимается исследованиями в области микроэлектроники, которые связаны с решением задач ионной имплантации. Под его руководством выполнены проекты по разработке математических алгоритмов и программного обеспечения сервисных модулей для создания оперативных действующих динамических моделей нефтяных залежей, по разработке и созданию новых типов лазеров и светодиодов. Список его научных работ содержит более 300 наименований. Подготовил 9 кандидатов наук, двое из его учеников защитили докторские диссертации.

В. И. Корзюк участвует в работе специализированного совета по защите докторских и кандидатских диссертаций, является членом редколлегии журналов: «Вестні Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі», «Вестник Белорусского государственного университета», «Труды Института математики НАН Беларуси», «Mathematical Modelling and Analysis», «International Journal on Pure and Applied Mathematics, Classical and Celestial Mechanics, Cosmodynamics».

Неоднократно приглашался для чтения лекций и обмена опытом работы в известные учебные заведения Югославии, Кубы, Вьетнама, Алжира, Польши, США, ФРГ, Франции.

За успешную работу В. И. Корзюк награжден Почетной грамотой Верховного Совета БССР (1982 г.), медалью «За трудовую доблесть» (1986 г.), имеет почетное звание «Заслужанный работник адукацыі Рэспублікі Беларусь» (1996 г.), является лауреатом Государственной премии Республики Беларусь (1996 г.).

Сердечно поздравляем Виктора Ивановича с 70-летием и желаем ему новых научных достижений, крепкого здоровья и благополучия.

*Отделение физики, математики и информатики НАН Беларуси,  
Белорусский государственный университет,  
Институт математики НАН Беларуси*

## МІКАЛАЙ МІХАЙЛАВІЧ АЛЯХНОВІЧ

(Да 80-годдзя з дня нараджэння)

Вядомы спецыяліст у вобласці фізікі цвёрдага цела, акадэмік Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі, заслужаны дзеяч навукі Рэспублікі Беларусь, доктар фізіка-матэматычных навук, прафесар – гэта кароткае адлюстраванне творчага шляху Мікалая Міхайлавіча Аляхновіча.

Мікалай Міхайлавіч нарадзіўся на Слонімшчыне ў вёсцы Варонічы Гродзенскай вобласці ў сям’і селяніна. У 1957 г. закончыў фізіка-матэматычны факультэт Беларускага дзяржаўнага ўніверсітэта. Пачаткам яго навуковай дзейнасці можна лічыць 1956 г., калі ён, яшчэ студэнт, стаў супрацоўнікам Фізіка-тэхнічнага інстытута Акадэміі навук Беларусі. З 1959 г. М. М. Аляхновіч спачатку працаваў у Адзеле, а затым у Інстытуце фізікі цвёрдага цела і паўправаднікоў АН Беларусі (цяпер – Навукова-практычны цэнтр НАН Беларусі па матэрыялазнаўстве), дзе прайшоў шлях ад малодшага навуковага супрацоўніка да дырэктара інстытута.

Мікалаю Міхайлавічу заўсёды ўласцівы шырокі спектр навуковых інтарэсаў. У прыватнасці, у навуковым асяроддзі шырокую вядомасць набылі яго працы па праблемах хімічнай сувязі ў крышталях, дыфракцыі рэнтгенаўскіх прамянёў у рэальных крышталях, фазавых пераходаў у цвёрдых целах пры высокіх цісках і тэмпературах, па атрыманні і вывучэнні новых матэрыялаў.

М. М. Аляхновічам на аснове вынікаў даследавання прасторавага размеркавання электроннай шчыльнасці і патэнцыялу ў крышталі паўправаднікоў у 1963 г. была паспяхова абаронена дысертацыя на атрыманне вучонай ступені кандыдата фізіка-матэматычных навук.

У 1967 г. М. М. Аляхновіч пачаў займацца дэфектнасцю рэальных крышталёў. У гэтай сувязі ім былі ўстаноўлены заканамернасці па залежнасці дыфракцыйных характарыстык рэнтгенаўскага выпраменьвання ад дэфектнасці крышталёў. Працы па палярызацыі рэнтгенаўскага выпраменьвання пры дыфракцыі ў рэальных крышталях набылі сусветны прыярытэт. Вучоным развіты рэнтгенаўскі дыфракцыйна-палярызацыйны метады аналізу рэальных крышталёў, выяўлены і вывучаны з’явы двупраменепраламлення і дэпалярызацыі палярызаванага рэнтгенаўскага выпраменьвання пры дыфракцыі ў дыслакацыйных крышталях, што дазволіла развіць метады палярыметрыі ў рэнтгенаўскім дыяпазоне частот. М. М. Аляхновічам упершыню выкананы даследаванні дынамічнага эфекту таўшчынных асцыляцый інтэгральнай інтэнсіўнасці рассеявання рэнтгенаўскіх прамянёў для слаба скажоных монакрышталёў са статычным размеркаваннем дэфектаў.

Навуковыя даследаванні М. М. Аляхновіча прывялі да перагляду вядомых тэарэтычных падыходаў для апісання рассеявання рэнтгенаўскіх прамянёў для такога роду крышталёў. Ім зроблены ацэнкі параметраў дэфектнасці рэальных крышталёў, распрацаваны спосабы прэцызійнага вызначэння структурных фактараў і характарыстык дынамікі крышталічнай рашоткі.

Гэтыя работы сталі асновай для напісання дысертацыі на атрыманне вучонай ступені доктара фізіка-матэматычных навук, якая была абаронена ў 1987 г.



М. М. Аляхновічам распрацаваны падыход для апісання фазавых пераўтварэнняў у крышталях галоідных і аксідных злучэнняў са структурай тыпу пераўскіту на аснове ўліку напружанасці міжатамных сувязей і звязанага з ёй шмат'ямнага патэнцыялу. Вучоным унесены значны ўклад у вырашэнне праблемы, звязанай з атрыманнем новых матэрыялаў і даследаваннем іх фізічных уласцівасцей. Сумесна з вучнямі выкананы цыкл прац па фазавых пераўтварэннях у цвёрдых целах пры высокіх цісках і тэмпературах, высокатэмпературнай звышправоднасці, сегнетаэлектрычнасці, атрыманы шэраг новых метастабільных аксідных пераўскітных фаз, перспектыўных для выкарыстання ў цвёрдацельнай электроніцы.

У 1989 г. М. М. Аляхновіч абраны членам-карэспандэнтам, а ў 1996 г. – акадэмікам Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі, у 1991 г. яму прысвоена званне прафесара, а ў 1999 г. – заслужанага дзеяча навукі Рэспублікі Беларусь.

М. М. Аляхновіч вядзе актыўную навукова-арганізацыйную і педагагічную дзейнасць. У 1968–1989 гг. ён быў загадчыкам лабараторыі, з 1993 па 2004 г. – дырэктарам Інстытута фізікі цвёрдага цела і паўправаднікоў, з 1997 па 2002 г. – акадэмікам-сакратаром Аддзялення фізікі, матэматыкі і інфарматыкі НАН Беларусі. З 2004 г. вучоны з'яўляецца галоўным навуковым супрацоўнікам Навукова-практычнага цэнтра НАН Беларусі па матэрыялазнаўстве. У 1998–2003 гг. Мікалай Міхайлавіч быў галоўным рэдактарам часопіса «Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук», а цяпер ён намеснік галоўнага рэдактара гэтага выдання.

Мікалай Міхайлавіч праводзіць вялікую працу па выхаванні і атэстацыі навуковых кадраў вышэйшай кваліфікацыі. З 1986 г. ён узначальвае філіял кафедры фізікі цвёрдага цела БДУ ў ІФЦЦП НАН Беларусі, чытае спецкурс па фізіцы цвёрдага цела, кіруе навуковымі працамі студэнтаў і аспірантаў. З'яўляецца старшынёй спецыялізаванага савета па абароне доктарскіх дысертацый пры Навукова-практычным цэнтры НАН Беларусі па матэрыялазнаўстве.

Мікалай Міхайлавіч карыстаецца заслужанай павагай і аўтарытэтам як у сваім калектыве, так і сярод калег-навукоўцаў міжнароднага навуковага супольніцтва.

І сёння Мікалай Міхайлавіч Аляхновіч працягвае актыўную навуковую дзейнасць, выконваючы разам з вучнямі даследаванні ў галіне фізікі цвёрдага цела і матэрыялазнаўства.

Шчыра віншуем Мікалая Міхайлавіча з 80-годдзем і ад усёй душы жадаем яму моцнага здароўя, новых творчых поспехаў і ўсяго самага светлага!

*Аддзяленне фізікі, матэматыкі і інфарматыкі НАН Беларусі,  
Беларускі дзяржаўны ўніверсітэт,  
Навукова-практычны цэнтр НАН Беларусі па матэрыялазнаўстве*

**РЭФЕРАТЫ**

УДК 519.65

*Худяков А. П., Янович Л. А.* **Обобщенные интерполяционные формулы Эрмита – Биркгофа для случая чебышевских систем функций** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2015. № 2. С. 5–14.

Построена обобщенная интерполяционная формула Эрмита – Биркгофа по произвольной чебышевской системе функций. Доказана теорема о выполнении интерполяционных условий. Найден класс многочленов, для которых интерполяционная формула точна. Построена оценка погрешности полученной формулы. Рассмотрены частные случаи интерполяционных формул для систем тригонометрических и экспоненциальных функций.

Библиогр. – 10 назв.

УДК 517.925

*Мартынов И. П., Лысюк Е. С.* **Аналитические свойства решений нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2015. № 2. С. 15–25.

Во введении указан объект исследования – дифференциальное уравнение четвертого порядка. Целью работы является изучение аналитических свойств решений рассматриваемого уравнения. В основной части построено решение в виде ряда Лорана. Получено представление решений в виде рядов Дирихле и рядов по экспонентам от дробно-линейных функций. Изучены вопросы сходимости рядов, представляющих решения данного дифференциального уравнения четвертого порядка. Установлено наличие трехпараметрического решения с подвижной особой линией. Полученные результаты могут быть применены в аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Библиогр. – 12 назв.

УДК 519.237

*Малюгин В. И., Новопольцев А. Ю.* **Анализ многомерных статистических моделей с неоднородной структурой в случае скрытой марковской зависимости состояний** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2015. № 2. С. 26–36.

Для моделей векторной авторегрессии с неоднородной эндогенно-экзогенной структурой и марковскими переключениями состояний предлагается EM-алгоритм расщепления смесей распределений авторегрессионных наблюдений, а также алгоритм дискриминантного анализа вновь поступающих наблюдений. Точность алгоритмов исследуется помощью компьютерного моделирования.

Табл. 2. Ил. 2. Библиогр. – 15 назв.

УДК 517.51

*Мисюк В. Р., Пекарский А. А.* **Сопряженные функции на отрезке и соотношения для их наилучших равномерных полиномиальных приближений** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2015. № 2. С. 37–40.

В работе найдено соотношение между наилучшими равномерными полиномиальными приближениями функции, заданной на отрезке, и ее сопряженной, аналогичное соотношение в периодическом случае было получено С. Б. Стечкиным. Также доказано неравенство типа Сегё для производных алгебраического многочлена.

Библиогр. – 7 назв.

УДК 512.543.76

*Беняш-Кривец В. В., Говорушко И. О.* **Многообразия характеров групп Баумслэга – Солитера** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2015. № 2. С. 41–47.

Исследуются многообразия характеров групп Баумслэга – Солитера. Найдены неприводимые компоненты этих многообразий, вычислены их размерности, а также доказана их рациональность.

Библиогр. – 10 назв.

УДК 517.968.4

Баркова Е. А., Забрейко П. П. **Нелокальная теорема о задаче Коши для дифференциальных уравнений дробных порядков в весовых пространствах непрерывных функций** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2015. № 2. С. 48–52.

В работе исследованы дифференциальные уравнения дробных порядков в весовых пространствах с производными Капуто, доказана нелокальная теорема о единственной разрешимости задачи Коши, получены достаточные условия компактности интегральных операторов, действующих в пространстве вещественных непрерывных функций.

Библиогр. – 8 назв.

УДК 530.182

Князев М. А., Блинкова Н. Г. **Связь между односолитонными составляющими двухсолитонного решения уравнения Кортевега-де Фриза** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2015. № 2. С. 53–57.

Построена система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка, описывающая поведение составляющих двухсолитонного решения уравнения Кортевега-де Фриза при  $t \rightarrow \pm \infty$ . Получено нелинейное уравнение связи между этими составляющими и для одного частного случая найдено его общее решение.

Библиогр. – 13 назв.

УДК 539.12

Кисель В. В., Овсюк Е. М., Веко О. В., Редьков В. М. **Вклад калибровочных степеней свободы в структуру тензора энергии-импульса безмассового поля со спином 2** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2015. № 2. С. 58–63.

Известный результат, что электромагнитные решения типа градиента от произвольной скалярной функции дают нулевой вклад в тензор энергии-импульса, обобщается на случай безмассового поля со спином 2. Показано, что в пространстве Минковского градиентные решения 30-компонентного волнового уравнения для безмассового поля со спином 2 дают вклад в тензор поля со спином 2 в виде 4-дивергенции от тензора третьего ранга и, следовательно, при интегрировании это слагаемое дает нулевой вклад.

Библиогр. – 41 назв.

УДК 535.37

Павич Т. А., Арабей С. М., Кузнецова Р. Т., Мартыянова Е. Г., Аксенова Ю. В., Майер Г. В., Березин М. Б., Соловьев К. Н. **Влияние компонентного состава мицеллярного раствора на спектральные свойства и солюбилизацию плюрони-ком производного бордифторид-дипирролилметена** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2015. № 2. С. 64–68.

Спектральным методом показано, что эффективность солюбилизации плюрони-ком F-127 производного бордифторид-дипирролилметена зависит от соотношения в смешанных системах массовых концентраций красителя и плюроника в исходном жидком растворе. Установлено, что характерные значения концентраций плюроника в растворе, при которых образуются мицеллы, солюбилизующие краситель, превышают 10 мас.%. Анализ спектральных характеристик растворов аддуктов «краситель-плюроник» показал, что исследуемый краситель в мицеллах плюроника находится в наибольшей степени дезагрегации, проявляя спектральные характеристики мономерной формы.

Ил. 2. Библиогр. – 9 назв.

УДК 535.44

Пашкевич Г. А., Ропот П. И., Ланчук А. С., Крючин А. А., Прыгун А. В. **Подавление спеклов квазиспиральным 2D-дифракционным оптическим элементом на основе бинарной псевдослучайной M-последовательности** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2015. № 2. С. 69–76.

Предложен метод подавления спеклов на основе вращающегося квазиспирального 2D-дифракционного оптического элемента (ДОЭ), созданного на основе бинарных псевдослучайных последовательностей. Изготовлена уникальная 2D-структура такого ДОЭ для случая M-последовательности с длиной кода 15. Получено подавления спеклов более чем в 11, 6 и 4 раза для зеленого, фиолетового и красного излучения лазеров соответственно. Проведенное численное моделирование показало, что дисперсия фоторезиста, из которого выполнена структура ДОЭ, приводит к значительному ослаблению эффективности метода на границе видимого диапазона и применение материала с аномальной дисперсией может существенно улучшить параметры подавления спеклов на границах видимого диапазона длин волн.

Табл. 1. Ил. 5. Библиогр. – 13 назв.

УДК 535.5

Пилипович В. А., Залеский В. Б., Конойко А. И., Кравченко В. М., Леонова Т. Р. **Высокоэффективный амплитудный модулятор неполяризованного излучения с поперечным электрооптическим эффектом** // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2015. № 2. С. 77–81.

Предлагается метод высокоэффективной амплитудной модуляции неполяризованного излучения на базе поперечного электрооптического эффекта, сущность которого заключается в минимизации влияния температурных изменений в электрооптических элементах за счет их параллельного размещения в диэлектрическом корпусе, обладающем высокой теплопроводностью. Описан амплитудный электрооптический модулятор с поперечным приложением управляющего поля кристаллов КТР, выполненный по кольцевой схеме.

Ил. 2. Библиогр. – 5 назв.

УДК 536.425:538.91

Каланда Н. А., Ярмолич М. В., Панасевич А. М., Кривченя Д. А. **Фазовые превращения при кристаллизации  $\text{Sr}_2\text{FeMoO}_{6-\delta}$  из простых оксидов** // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2015. № 2. С. 82–85.

На основании изучения последовательности фазовых превращений при кристаллизации  $\text{Sr}_2\text{FeMoO}_{6-\delta}$  установлено, что синтез двойного перовскита в смеси простых оксидов протекает через ряд последовательно-параллельных стадий. На начальном этапе взаимодействия образующийся ферромолибдат стронция обогащен железом и его состав в ходе реакции изменяется в сторону увеличения содержания молибдена. Оксид молибдена в тройной смеси состава  $2\text{SrCO}_3 + \text{MoO}_3 + 0,5\text{Fe}_2\text{O}_3$  вступает в реакцию несколько быстрее с карбонатом стронция, чем оксид железа. Показано, что в процессе кристаллизации двойного перовскита ферромолибдата стронция в интервале температур  $T = (300-1420) \text{ K}$  имеет место следующая последовательность фазовых превращений:  $\{\text{Fe}_2\text{O}_3, \text{MoO}_3, \text{SrCO}_3\}$  (300 K)  $\rightarrow \{\text{SrMoO}_4, \text{Fe}_2\text{O}_3, \text{SrCO}_3\}$  (770 K)  $\rightarrow \{\text{SrMoO}_4, \text{SrFeO}_{3-x}$  (следы),  $\text{Sr}_2\text{FeMoO}_{6-\delta}$  (следы) $\}$  (970 K)  $\rightarrow \{\text{SrMoO}_4, \text{Sr}_2\text{FeMoO}_{6-\delta}\}$  (1170 K)  $\rightarrow \{\text{Sr}_2\text{FeMoO}_{6-\delta}\}$  (1420 K).

Ил. 3. Библиогр. – 8 назв.

УДК 537.226.4

Радюш Ю. В., Олехнович Н. М., Пушкарев А. В. **Диэлектрические свойства сегнетоэлектрической керамики системы твердых растворов  $(1-x)(\text{NaBi})_{1/2}\text{TiO}_3-x\text{BiCoO}_3$**  // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2015. № 2. С. 86–89.

Методом твердофазных реакций синтезирована керамика системы  $(1-x)(\text{NaBi})_{1/2}\text{TiO}_3-x\text{BiCoO}_3$ . Установлено, что в данной системе в области составов  $x \leq 0,2$  образуются твердые растворы (ТР) с ромбоэдрической структурой. Определены структурные характеристики ТР данной системы. Показано, что параметры гексагональной элементарной ячейки  $a_H$  и  $c_H$  линейно возрастают с увеличением  $x$ . Приводятся результаты исследования диэлектрических свойств керамики полученных ТР. Установлено, что керамика проявляет свойства сегнетоэлектрика с размытым фазовым переходом. При увеличении содержания  $\text{BiCoO}_3$  в системе ( $x > 0,05$ ) имеющий место для  $(\text{NaBi})_{1/2}\text{TiO}_3$  при  $T < 500 \text{ K}$  переход в релаксорное состояние для ТР вырождается.

Ил. 2. Библиогр. – 12 назв.

УДК 621.315.592

Мудрый А. В., Живулько В. Д., Гурский А. Л., Якушев М. В., Мартин Р. В., Шафф В. Дж. **Радиационные эффекты в тонких гетероэпитаксиальных пленках нитрида индия при электронном облучении** // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2015. № 2. С. 90–97.

Исследовано влияние электронного облучения (6 МэВ, доза  $10^{15}-10^{18} \text{ см}^{-2}$ ) на смещение края фундаментального поглощения и люминесцентные свойства пленок  $\text{InN}$ , выращенных на сапфировых подложках с использованием метода молекулярно-лучевой эпитаксии. Установлено, что облучение приводит к увеличению концентрации электронов и оптической ширины запрещенной зоны  $E_g$  соединения  $\text{InN}$ . Увеличение оптической ширины запрещенной зоны  $E_g$  облученных тонких пленок  $\text{InN}$  обусловлено образованием радиационных дефектов донорного типа и проявления эффекта Бурштейна – Мосса.

Ил. 3. Библиогр. – 17 назв.

УДК 534.8

Гуртовой В. Г., Шелег А. У., Мустафаева С. Н., Керимова Э. М. **Диэлектрические характеристики монокристаллов  $\text{TlGaS}_2$ , легированных Со и Уб** // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2015. № 2. С. 98–102.

Проведены исследования электропроводности и диэлектрических характеристик монокристаллов  $\text{TlGaS}_2$ ,  $\text{TlGa}_{0,999}\text{Yb}_{0,001}\text{S}_2$  и  $\text{TlGa}_{0,99}\text{Co}_{0,01}\text{S}_2$  в интервале температур 150–320 K на частотах измерительного поля  $10^3-10^6 \text{ Гц}$ .

Определены значения обобщенной энергии активации основных носителей заряда в этих кристаллах. Показано, что абсолютные значения изученных характеристик возрастают при увеличении температуры. На кривых температурной зависимости диэлектрической проницаемости исследуемых кристаллов обнаружены аномалии в виде широких максимумов, свидетельствующие о наличии структурных превращений в них в области температур ~ 170–250 К. Выявлена дисперсия диэлектрических свойств исследованных монокристаллов: с ростом частоты значения диэлектрической проницаемости уменьшаются, а удельной электропроводности – увеличиваются. Показано, что легирование кристаллов  $\text{TiGaS}_2$  кобальтом и иттербием приводит к уменьшению значений диэлектрической проницаемости и увеличению значений электропроводности.

Ил. 3. Библиогр. – 13 назв.

УДК 681.325

*Кириенко Н. А., Черемисинов Д. И., Черемисинова Л. Д.* **Оптимизация многоуровневых представлений логических схем для сокращения площади кристалла СБИС и энергопотребления** // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2015. № 2. С. 103–111.

Рассматривается задача оптимизации многоуровневых представлений логических схем с учетом двух основных характеристик КМОП-микросхем при реализации на кристалле СБИС: площади и среднего значения рассеиваемой мощности. Приводятся результаты сравнительного исследования двух подходов к построению многоуровневой логической схемы из вентилях, предназначенной для покрытия элементами КМОП библиотеки.

Табл. 2. Библиогр. – 24 назв.

УДК 519.6

*Соболевский П. И., Баханович С. В.* **Параметризованный тайлинг: определение границ локальных циклов в неполных тайлах** // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2015. № 2. С. 112–120.

Исследованы аспекты применения параметризованного тайлинга к алгоритмам, область вычисления которых представима выпуклым многогранником. Предложена структура множества неполных тайлов, построены формулы для определения этого множества. Также получены формулы, определяющие границы изменения локальных циклов в неполных тайлах. Эти формулы позволяют минимизировать время расчета границ локальных циклов при реализации тайлинга в последовательных и параллельных программах.

Библиогр. – 8 назв.