

ВЕСЦІ НАЦЫЯНАЛЬнай АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСІ

СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК. 2018. Т. 54, № 3

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ

СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК. 2018. Т. 54, № 3

Журнал основан в 1965 г. как «Весці Акадэміі навук БССР. Серыя фізіка-матэматычных навук»,
с 1992 г. – «Весці Акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук»,
с 1998 г. – современное название

Выходит четыре раза в год

Учредитель – Национальная академия наук Беларуси

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь,
свидетельство о регистрации № 392 от 18.05.2009

*Входит в Перечень научных изданий Республики Беларусь
для опубликования результатов диссертационных исследований,
включен в базу данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ)*

Главный редактор

Сергей Яковлевич Килин – Президиум Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

Редакционная коллегия

- Н. М. Олехнович** – Научно-практический центр Национальной академии наук Беларуси по материаловедению, Минск, Беларусь (*заместитель главного редактора*)
В. А. Орлович – Отделение физики, математики и информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь (*заместитель главного редактора*)
Т. Е. Янчук – (*ведущий редактор журнала*)
С. В. Абламейко – Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
С. М. Абрамов – Институт программных систем Российской академии наук, Москва, Россия
В. М. Анищик – Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
А. И. Белоус – Холдинг «ИНТЕГРАЛ», Минск, Беларусь
С. В. Гапоненко – Белорусский республиканский фонд фундаментальных исследований, Минск, Беларусь
А. М. Гончаренко – Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
А. П. Достанко – Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь

- Н. А. Изобов** – Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
Н. С. Казак – Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
В. И. Корзюк – Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
Ф. П. Коршунов – Научно-практический центр Национальной академии наук Беларуси по материаловедению, Минск, Беларусь
Ю. А. Курочкин – Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
Н. А. Поклонский – Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
С. А. Тихомиров – Отделение физики, математики и информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
Л. М. Томильчик – Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
А. В. Тузигов – Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
Ю. С. Харин – Научно-исследовательский институт прикладных проблем математики и информатики Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь
А. Ф. Чернявский – Институт прикладных физических проблем имени А. Н. Севченко Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь
Л. А. Янович – Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
В. И. Янчевский – Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

Редакционный совет

- С. Я. Килин** – Президиум Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
С. В. Абламейко – Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
Ж. И. Алферов – Санкт-Петербургский национальный исследовательский Академический университет Российской академии наук, Санкт-Петербург, Россия
А. Л. Асеев – Президиум Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирск, Россия
Й. Врахтруп – Институт физики (3) Штутгартского университета, Штутгарт, Германия
А. М. Желтиков – Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия
В. В. Козлов – Математический институт имени В. А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия
Г. Лёйхс – Институт физики света имени М. Планка, Эрланген, Германия
Д. С. Могилевцев – Институт физики имени Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
Нгуен Дай Хунг – Институт физики Вьетнамской академии наук и технологий, Ханой, Вьетнам
В. А. Орлович – Отделение физики, математики и информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
А. Цайлингер – Институт квантовой оптики и квантовой информатики Австрийской академии наук, Вена, Австрия

Адрес редакции:

ул. Академическая, 1, к. 119, 220072, г. Минск, Республика Беларусь.

Тел.: + 375 17 284-19-19; e-mail: fmvesti@mail.ru

vestifm.belnauka.by

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ.

Серия физико-математических наук. 2018. Т. 54, № 3.

Выходит на русском, белорусском и английском языках

Редактор *Т. Е. Янчук*

Компьютерная верстка *О. Л. Смольской*

Подписано в печать 07.09.2018. Выход в свет 26.09.2018. Формат 60×84¹/₈. Бумага офсетная.

Печать цифровая. Усл. печ. л. 14,88. Уч.-изд. л. 16,4. Тираж 64 экз. Заказ 180.

Цена: индивидуальная подписка – 10,66 руб., ведомственная подписка – 25,67 руб.

Издатель и полиграфическое исполнение:

Республиканское унитарное предприятие «Издательский дом «Беларуская навука».

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/18 от 02.08.2013. ЛП № 02330/455 от 30.12.2013. Ул. Ф. Скорины, 40, 220141, г. Минск, Республика Беларусь

© РУП «Издательский дом «Беларуская навука»,
Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук, 2018

PROCEEDINGS OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF BELARUS

PHYSICS AND MATHEMATICS SERIES, 2018, vol. 54, no. 3

The Journal was founded in 1956 under the titles “Proceedings of the Academy of Sciences of BSSR. Physics and Mathematics Series”, since 1992 – “Proceedings of the Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series”, since 1998 – it comes under its actual title

Periodicity is 4 issues per annum

Founder is the National Academy of Sciences of Belarus

The journal is registered on May 18, 2009 by the Ministry of Information of the Republic of Belarus in the State Registry of Mass Media, reg. no. 392

*The Journal is included in The List of Journals for Publication
of the Results of Dissertation Research in the Republic of Belarus
and in the database of Russian Science Citation Index (RSCI)*

Editor-in-Chief

Sergei Ya. Kilin – Presidium of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

Editorial Board

Nikolai M. Olekhovich – The Scientific and Practical Materials Research Center of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus (*Associate Editor-in-Chief*)

Valentin A. Orlovich – Department of Physics, Mathematics and Informatics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus (*Associate Editor-in-Chief*)

Tatiana E. Yanchuk (*lead editor*)

Sergey V. Ablameyko – Belarusian State University, Minsk, Belarus

Sergei M. Abramov – Program Systems Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Viktor M. Anishchik – Belarusian State University, Minsk, Belarus

Anatoliy I. Belous – “INTEGRAL” Holding, Minsk, Belarus

Sergey V. Gaponenko – Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research, Minsk, Belarus

Andrei M. Goncharenko – B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

Anatolii P. Dostanko – Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Belarus

Nikolai A. Izobov – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

Nikolai S. Kazak – B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

Viktor I. Korzyuk – Belarusian State University, Minsk, Belarus

Fyodor P. Korshunov – The Scientific and Practical Materials Research Center of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

Yurii A. Kurochkin – B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

Nikolai A. Poklonskii – Belarusian State University, Minsk, Belarus

Sergei A. Tikhomirov – Department of Physics, Mathematics and Informatics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

Lev M. Tomil'chik – B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
Aleksandr V. Tuzikov – United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
Yurii S. Kharin – Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics of the Belarusian State University, Minsk, Belarus
Aleksandr F. Chernyavskii – A. N. Sevchenko Institute of Applied Physical Problems of Belarusian State University, Minsk, Belarus
Leonid A. Yanovich – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
Vyacheslav I. Yanchevskii – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

Editorial Council

Sergei Ya. Kilin – Presidium of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
Sergei V. Ablameyko – Belarusian State University, Minsk, Belarus
Zhores I. Alferov – St Petersburg National Research Academic University of the Russian Academy of Sciences, St. Petersburg, Russia
Aleksandr L. Aseev – Presidium of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia
Jörg Wrachtrup – Institute of Physics (3) of the University of Stuttgart, Stuttgart, Germany
Aleksei M. Zheltikov – Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
Valery V. Kozlov – Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
Gerd Leuchs – Max Planck Institute for the Science of Light, Erlangen, Germany
Dmitrii S. Mogilevcev – B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
Nguyen Dai Hung – Institute of Physics of the Vietnam Academy of Science and Technology, Hanoi, Vietnam
Valentin A. Orlovich – Department of Physics, Mathematics and Informatics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
Anton Zeilinger – Institute for Quantum Optics and Quantum Information of the Austrian Academy of Sciences, Vienna, Austria

Address of the Editorial Office:

*1, Akademicheskaya Str., room 119, 220072, Minsk, Republic of Belarus.
Tel.: +375 17 284-19-19; e-mail: fmvesti@mail.ru*

vestifm.belnauka.by

PROCEEDING OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF BELARUS.

Physics and Mathematics series, 2018, vol. 54, no. 3.

Printed in Russian, Belarusian and English languages

Editor *T. E. Yanchuk*
Computer imposition *V. L. Smolskaya*

It is sent of the press 07.09.2018. Appearance 26.09.2018. Format 60×84¹/₈. Offset paper.
The press digital. Printed pages 14,88. Publisher's signatures 16,4. Circulation 64 copies. Order 180.
Price: individual subscription – 10,66 byn., departmental subscription – 25,67 byn.

Publisher and printing execution:

Republican unitary enterprise "Publishing House "Belaruskaya Navuka".
Certificate on the state registration of the publisher, manufacturer, distributor of printing editions
No. 1/18 dated August 2, 2013. License for the press no. 02330/455 dated December 30, 2013.
Address: F. Scorina Str., 40, 220141, Minsk, Republic of Belarus.

© RUE "Publishing House "Belaruskaya Navuka",
Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series, 2018

ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Игнатенко М. В. Операторные интерполяционные формулы эрмитова типа с узлами произвольной кратности, основанные на тождественных преобразованиях функций	263
Янчевский В. И. Когомологии Тейта специальных норменных модулей, связанных с гензелевыми алгебрами с делением	273
Айрян Э. А., Егоров А. Д., Кулябов Д. С., Малютин В. Б., Севастьянов Л. А. Метод функциональных интегралов для систем стохастических дифференциальных уравнений	279
Забрейко П. П., Кривко-Красько А. В. Обобщение теорем Ролля и Дарбу для функций двух переменных	290

ФИЗИКА

Овсюк Е. М., Голуб А. А., Коральков А. Д. Отражение от космологического барьера в осциллирующей Вселенной де Ситтера частиц Дирака, Майораны и Вейля	300
Иванов А. П. Распределение ИК-излучения от нелокального источника внутри биологической ткани	316
Апанасевич П. А., Горелик В. С., Водчиц А. И., Тимофеева Г. И. Генерация инфракрасного излучения при вынужденном комбинационном рассеянии	326
Савчук Г. К., Летко А. К., Басов Н. А. Условия получения и диэлектрические свойства СВЧ-керамики составов $(1-x)((\text{Mg}_{0,2}\text{Zn}_{0,8})\text{TiO}_3)_x\text{CaTiO}_3$	332
Чумаков А. Н., Мухуров Н. И., Денисюк С. В., Шевченко А. А., Баран Л. В., Райченко Т. Ф., Босак Н. А. Морфологические, оптические и фотолюминесцентные свойства тонких пленок ZnO на подложке Al_2O_3	341
Коршунов Ф. П., Жданович Н. Е., Гуринович В. А. Влияние радиационно-термических дефектов на характеристики p - n - p -структур	353
Романов И. А., Пархоменко И. Н., Власукова Л. А., Комаров Ф. Ф., Ковальчук Н. С., Мильчанин О. В., Моховиков М. А., Мудрый А. В., Живулько В. Д., Хонг-Ланг Лу. Светоизлучающие структуры на основе нестехиометрического нитрида кремния	360
Климович И. М., Комаров Ф. Ф., Шолух М. В., Зайков В. А., Баран Л. В. Влияние элементного состава и температуры осаждения покрытий Ti-AL-C-N на их морфологию и жизнеспособность клеток на таких покрытиях	369

УЧЕНЫЕ БЕЛАРУСИ

Александр Федорович Чернявский (К-80 летию со дня рождения)	379
Вячеслав Иванович Янчевский (К 70-летию со дня рождения)	381

CONTENTS**MATHEMATICS**

Ignatenko M. V. Operator interpolation formulas of Hermite type with arbitrary multiplicity nodes based on identity transformations of functions	263
Yanchevskii V. I. Tate cohomology of special norm modules related to Henselian division algebras	273
Ayryan E. A., Egorov A. D., Kulyabov D. S., Malyutin V. B., Sevastyanov L. A. Functional integrals method for systems of stochastic differential equations	279
Zabreiko P. P., Krivko-Krasko A. V. Extension of the Rolle and Darboux theorems to the functions of two variables	290

PHYSICS

Ovsiyuk E. M., Golub A. A., Koralkov A. D. Dirac, Majorana and Weyl particles in the oscillating de Sitter universe, reflection from the cosmological barrier	300
Ivanov A. P. Distribution of IR radiation from a non-local source inside the biological tissue	316
Apanasevich P. A., Gorelik V. S., Vodchits A. I., Timofeeva G. I. Infrared radiation generation at forced combination scattering	326
Sauchuk G. K., Letko A. K., Basau N. A. Production conditions and dielectric properties of microwave ceramics based on $(1-x)(\text{Mg}_{0.2}\text{Zn}_{0.8})\text{TiO}_3-x\text{CaTiO}_3$ compositions.....	332
Chumakov A. N., Mukhurov N. I., Denisiuk S. V., Shevchenok A. A., Baran L. V., Raichenok T. F., Bosak N. A. Morphological, optical and photoluminescent properties of a thin ZnO film on the Al_2O_3 substrate	341
Korshunov F. P., Zhdanovich N. E., Gurinovich V. A. Influence of radiation-thermal defects on characteristics of $p-n-p$ -structures	353
Romanov I. A., Parkhomenko I. N., Vlasukova L. A., Komarov F. F., Kovalchuk N. S., Milchanin O. V., Makhavikou M. A., Mudryi A. V., Zhivulko V. D., Hong-Liang Lu. Blue and red light-emitting non-stoichiometric silicon nitride-based structures	360
Klimovich I. M., Komarov F. F., Sholukh M. V., Zaikov V. A., Baran L. V. Effect of the elemental composition and the deposition temperature of Ti-Al-C-N coatings on the morphology and viability of cells on such coatings	369

SCIENTISTS OF BELARUS

Aleksandr Fyodorovich Chernyavskii (To the 80th Anniversary)	379
Vyacheslav Ivanovich Yanchevskii (To the 70th Anniversary)	381

ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)

МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

УДК 519.65:62.50
<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-3-263-272>

Поступила в редакцию 17.05.2018
Received 17.05.2018

М. В. Игнатенко

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

**ОПЕРАТОРНЫЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ФОРМУЛЫ ЭРМИТОВА ТИПА
С УЗЛАМИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ КРАТНОСТИ,
ОСНОВАННЫЕ НА ТОЖДЕСТВЕННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ФУНКЦИЙ**

Аннотация. Рассматривается проблема построения и исследования интерполяционных формул эрмитова типа с узлами произвольной кратности для операторов, заданных в пространствах функций одной и двух переменных. Построение операторных интерполяционных многочленов основано на интерполяционных полиномах для скалярных функций относительно произвольной чебышевской системы, а также на тождественных преобразованиях функций. Приведенные операторные формулы содержат интегралы Стильтьеса и дифференциалы Гато интерполируемого оператора и являются инвариантными для специального класса операторных многочленов соответствующих степеней. Для некоторых из полученных операторных полиномов найдено явное представление погрешности интерполирования. Рассмотрены частные случаи формул Эрмита, основанные на интегральных преобразованиях Ганкеля, Абеля, Фурье, а также на синус (косинус) преобразовании Фурье. Применение отдельных интерполяционных формул проиллюстрировано на примерах. Представленные результаты могут быть использованы в теоретических исследованиях как основа построения приближенных методов решения интегральных, дифференциальных и других видов нелинейных операторных уравнений.

Ключевые слова: интерполяционная задача Эрмита, операторный многочлен, операторное интерполирование, дифференциал Гато, интеграл Стильтьеса, погрешность интерполяции

Для цитирования: Игнатенко, М. В. Операторные интерполяционные формулы эрмитова типа с узлами произвольной кратности, основанные на тождественных преобразованиях функций / М. В. Игнатенко // Вест. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2018. – Т. 54, № 3. – С. 263–272. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-3-263-272>

M. V. Ignatenko

Belarusian State University, Minsk, Belarus

**OPERATOR INTERPOLATION FORMULAS OF HERMITE TYPE WITH ARBITRARY MULTIPLICITY
NODES BASED ON IDENTITY TRANSFORMATIONS OF FUNCTIONS**

Abstract. The problem of construction and research of Hermite interpolation formulas with nodes of arbitrary multiplicity for operators given in functional spaces of one and two variables is considered. The construction of operator interpolation polynomials is based both on interpolation polynomials for scalar functions with respect to an arbitrary Chebyshev system and on identity transformations of functions. The reduced operator formulas contain the Stieltjes integrals and the Gateaux differentials of an interpolated operator and are invariant for a special class of operator polynomials of appropriate degree. For some of the obtained operator polynomials, an explicit representation of the interpolation error is found. Particular cases of Hermite formulas based both on the integral transformations of Hankel, Abel, Fourier and on the Fourier sine (cosine) transform are considered. The application of separate interpolation formulas is illustrated by examples. The presented results can be used in theoretical research as the basis for construction of approximate methods for solving integral, differential and other types of nonlinear operator equations.

Keywords: Hermite interpolation problem, operator polynomial, operator interpolation, Gateaux differential, Stieltjes integral, interpolation error

For citation. Ignatenko M. V. Operator interpolation formulas of Hermite type with arbitrary multiplicity nodes based on identity transformations of functions. *Vesti Natsyonal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematichnykh navyk = Proceeding of the National Academy of Sciences of Belarus, Physics and Mathematics Series*, 2018, vol. 54, no 3, pp. 263–272 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-3-263-272>

Введение. Рассмотрим на числовом множестве D чебышевскую систему непрерывно дифференцируемых необходимое число раз функций $\{\varphi_k(s)\}$ и соответствующие многочлены вида

$$P_n(s) = \sum_{k=0}^n a_{nk} \varphi_k(s), \tag{1}$$

где a_{nk} – комплексные или действительные числа ($k = 0, 1, \dots, n; n = 0, 1, 2, \dots$). По определению чебышевской системы функций любой многочлен степени n вида (1) будет иметь на D не более чем n корней с учетом их кратностей.

Положим

$$H_n(f; s) = \sum_{k=0}^m \sum_{v=0}^{\alpha_k-1} H_{vk}^{(m)}(s) f^{(v)}(s_k). \tag{2}$$

Здесь $H_{vk}^{(m)}(s) \equiv H_{v,k}^{(m)}(s)$ – многочлены вида (1), такие, что

$$\frac{d^j}{ds^j} H_{vk}^{(m)}(s_i) = \delta_{ki} \delta_{jv} \quad (0 \leq j \leq \alpha_i - 1; i = 0, 1, \dots, m), \tag{3}$$

где δ_{pq} – символ Кронекера, s_k – различные точки из D и $f(s)$ – дифференцируемая $\alpha_k - 1$ раз в каждой точке s_k функция ($k = 0, 1, \dots, m; n = \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_m - 1$). Интерполяционный многочлен Эрмита (2) всегда существует и единственен для любой системы функций Чебышева $\{\varphi_q(s)\}_{q=0}^n$. Известно, что если $f(s)$ является многочленом вида (1) степени не выше n , то $H_n(f; s)$ тождественно совпадает с ним.

Через $\sigma_m(s) = \sum_{k=0}^m H_{0k}^{(m)}(s)$ обозначим сумму фундаментальных многочленов $H_{0k}^{(m)}(s)$ ($k = 0, 1, \dots, m$) чебышевской системы функций $\{\varphi_q(s)\}_{q=0}^n$, которая является постоянной величиной или некоторой функцией на множестве D .

Формулы Эрмита для операторов, дифференциалы Гато которых содержат произведение направлений. Пусть X и Y – некоторые заданные множества функций, а F – оператор, отображающий X в Y . Рассмотрим операторы $F(x)$, для которых вычисленные v -е дифференциалы Гато $\delta^v F[x; h_1, h_2, \dots, h_v]$ содержат произведение заданных направлений $h_1(s), h_2(s), \dots, h_v(s)$. В частности, если $F(x) = f(t, x(s))$, где $f(t, u)$ – скалярная функция аргументов t и u , то

$$\delta^k F[x; h_1, h_2, \dots, h_k] = \frac{\partial^k}{\partial x^k} f(t, x) h_1 h_2 \dots h_k,$$

где $x = x(s)$ и $h_i = h_i(s)$ ($i = 1, 2, \dots, k$) – элементы множества X . Направления h_1, h_2, \dots, h_k входят здесь как сомножители. Этим свойством обладают операторы Гаммерштейна, Урысона и др. Пусть $\delta^v F[x; h_v]$ – дифференциал v -го порядка, когда первые $v-1$ направления $h_i(s) \equiv 1$, а v -е направление есть функция $h_v(s)$.

Рассмотрим операторы

$$D_m(x) = b(t) + \sum_{i=0}^m \int_a^b b_i(t, s) \varphi_i(x(s)) ds, \tag{4}$$

где $b(t)$ – произвольно заданная функция, а $b_i(t, s)$ – некоторые функции, для которых интегралы, входящие в (4), существуют, и необходимые в дальнейшем преобразования допустимы.

Получим операторные интерполяционные формулы эрмитова типа с узлами произвольной кратности, содержащие интегралы Стилтеса и дифференциалы Гато интерполируемого оператора, на основе фундаментальных многочленов эрмитова интерполирования для скалярных функций.

Т е о р е м а 1. *Оператор*

$$H_n(x) = F(x_0)\sigma_m(x) + \sum_{k=0}^m \sum_{v=1}^{\alpha_k-1} \delta^v F[x_k; H_{vk}^{(m)}(x)] + \sum_{k=1}^m \int_0^1 H_{0k}^{(m)}[x(\tau)] d_\tau F[x_0(\cdot) + \chi(\tau, \cdot)(x_k(\cdot) - x_0(\cdot))], \tag{5}$$

где числовая функция

$$\chi(\tau, t) = \begin{cases} 1, & \tau \geq t; \\ 0, & \tau < t, \end{cases} \quad 0 < \tau < 1; \quad \chi(0, t) \equiv 0, \quad \chi(1, t) \equiv 1, \tag{6}$$

является эрмитовым интерполяционным многочленом относительно узлов $x_k(t) \in X$ кратности α_k ($k = 0, 1, \dots, m; \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_m - 1 = n$) для оператора $F(x)$ и удовлетворяет условиям

$$\delta^v H_n[x_k; h_{k1} h_{k2} \dots h_{kv}] = \delta^v F[x_k; h_{k1} h_{k2} \dots h_{kv}] \quad (0 \leq v \leq \alpha_k - 1; k = 0, 1, \dots, m). \tag{7}$$

Если $\sigma_m(x)$ – постоянная на D величина, а интерполируемый оператор $F(x)$ имеет вид (4), где $[a, b] = [0, 1]$, то $H_n(x) \equiv F(x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условия (7) выполняются в силу справедливости для узлов $x_k = x_k(s)$ ($k = 0, 1, \dots, m$) равенств (3). Проверим точность этой формулы для многочленов $D_m(x)$, заданных по правилу (4), где $[a, b] = [0, 1]$.

Пусть $F(x) = \int_0^1 b_i(t, s) \varphi_i(x(s)) ds$ ($i = 0, 1, \dots, m$). Так как в этом случае

$$\delta^v F[x; h_1 h_2 \dots h_v] = \int_0^1 b_i(t, s) \frac{d^v}{dx^v} \varphi_i(x(s)) h_1(s) h_2(s) \dots h_v(s) ds,$$

то $\delta^v F[x_k; H_{vk}^{(m)}(x)] = \int_0^1 b_i(t, s) \varphi_i^{(v)}(x_k(s)) H_{vk}^{(m)}(x(s)) ds.$

Для таких операторов сумма интегралов в формуле (5) с учетом свойств функции $\chi(\tau, t)$ примет вид

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^m \int_0^1 H_{0k}^{(m)}[x(\tau)] d_\tau F[x_0(\cdot) + \chi(\tau, \cdot)(x_k(\cdot) - x_0(\cdot))] = \\ & = \sum_{k=1}^m \int_0^1 H_{0k}^{(m)}[x(\tau)] d_\tau \left\{ \int_0^\tau b_i(t, s) \varphi_i(x_k(s)) ds + \int_\tau^1 b_i(t, s) \varphi_i(x_0(s)) ds \right\} = \\ & = \sum_{k=1}^m \int_0^1 b_i(t, \tau) H_{0k}^{(m)}[x(\tau)] \{ \varphi_i(x_k(\tau)) - \varphi_i(x_0(\tau)) \} d\tau. \end{aligned}$$

Соответственно правило (5) с учетом условия $\sigma_m(s) = \text{const}$ преобразуется к равенству

$$\begin{aligned} H_n(x) &= \sum_{k=0}^m \sum_{v=0}^{\alpha_k-1} \int_0^1 b_i(t, s) \varphi_i^{(v)}(x_k(s)) H_{vk}^{(m)}(x(s)) ds = \\ &= \int_0^1 b_i(t, s) \sum_{k=0}^m \sum_{v=0}^{\alpha_k-1} H_{vk}^{(m)}(x) \varphi_i^{(v)}(x_k) ds = \int_0^1 b_i(t, s) \varphi_i(x) ds \equiv F(x). \end{aligned}$$

Теорема 1 доказана.

Для погрешности интерполирования $r_n(x) = F(x) - H_n(x)$, где $H_n(x)$ – интерполяционный многочлен (5), имеет место следующее представление:

$$r_n(x) = \sum_{k=0}^{m+1} \sum_{v=1}^{\alpha_k-1} \delta^v F[x_k; H_{vk}^{(m+1)}(x) - H_{vk}^{(m)}(x)] + \\ + \sum_{k=1}^{m+1} \int_0^1 \{H_{0k}^{(m+1)}[x(\tau)] - H_{0k}^{(m)}[x(\tau)]\} d_\tau F[x_0(\cdot) + \chi(\tau, \cdot)(x_k(\cdot) - x_0(\cdot))],$$

где $x_{m+1} = x$, $H_{v,m+1}^{(m)}(x) \equiv 0$ ($0 \leq v \leq \alpha_k - 1$).

Пусть $g(\tau, s; x)$ – линейный на X оператор, удовлетворяющий условию $g(a, s; x) \equiv 0$ и тождественному преобразованию $g(b, s; x) \equiv x(s)$ ($\tau, s \in [a, b]$) функции $x \in X$.

Для такого же класса интерполируемых операторов будет справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 2. Оператор

$$H_n(x) = F(x_0)\sigma_m(x) + \sum_{k=0}^m \sum_{v=1}^{\alpha_k-1} \delta^v F[x_k; H_{vk}^{(m)}(x)] + \\ + \sum_{k=1}^m \int_a^b H_{0k}^{(m)}[x(\tau)] d_\tau F[x_0(\cdot) + g(\chi(\tau, \cdot), \cdot; x_k - x_0)], \quad (8)$$

где

$$\chi(\tau, t) = \begin{cases} b, & \tau \geq t; \\ a, & \tau < t, \end{cases} \quad a < \tau < b; \quad \chi(a, t) \equiv a, \quad \chi(b, t) \equiv b, \quad (9)$$

является интерполяционным для оператора $F(x)$ эрмитовым многочленом относительно узлов $x_k(t) \in X$ кратности α_k ($k = 0, 1, \dots, m; \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_m - 1 = n$), удовлетворяющим условиям (7).

Если $\sigma_m(x)$ – постоянная на D величина, а оператор $F(x) = D_n(x)$, то $H_n(x) \equiv F(x)$.

Доказательство теоремы 2 в значительной мере повторяет рассуждения, приведенные в теореме 1.

Погрешность интерполирования интерполяционным многочленом (8) представима в виде

$$r_n(x) = \sum_{k=0}^{m+1} \sum_{v=1}^{\alpha_k-1} \delta^v F[x_k; H_{vk}^{(m+1)}(x) - H_{vk}^{(m)}(x)] + \\ + \sum_{k=1}^{m+1} \int_0^1 \{H_{0k}^{(m+1)}[x(\tau)] - H_{0k}^{(m)}[x(\tau)]\} d_\tau F[x_0(\cdot) + g(\chi(\tau, \cdot), \cdot; x_k - x_0)],$$

где, как и ранее, $x_{m+1} = x$, $H_{v,m+1}^{(m)}(x) \equiv 0$ ($0 \leq v \leq \alpha_k - 1$).

Формулы эрмита интерполирования для операторов без ограничений на структуру дифференциалов Гато. Интерполяционные формулы (5) и (8), как уже отмечалось, построены для специального класса операторов. Условия (7) для этих формул выполняются для произвольных направлений h_{ij} , хотя сами формулы данные направления не содержат. Приведем формулы, для которых не требуется от интерполируемых операторов указанных ранее ограничений на структуру дифференциалов Гато. Однако эти формулы будут включать некоторые из упомянутых направлений. Причем требуется, чтобы данные направления не обращались в нуль на множестве D .

Т е о р е м а 3. Оператор

$$H_n(x) = F(x_0)\sigma_m(x) + \sum_{k=1}^m \int_0^1 H_{0k}^{(m)}[x(\tau)] d_\tau F[x_0(\cdot) + \chi(\tau, \cdot)(x_k(\cdot) - x_0(\cdot))] + \\ + \sum_{k=0}^m \sum_{v=1}^{\alpha_k-1} \delta^v F[x_k; h_{k1} h_{k2} \dots h_{k(v-1)} \tilde{h}_{kv}(x)], \quad (10)$$

где функция $\chi(\tau, \cdot)$ определена правилом (6), а направления

$$\tilde{h}_{k1}(x) = H_{1k}^{(m)}(x(s)), \tilde{h}_{kv}(x) = h_{k1}^{-1}(s)h_{k2}^{-1}(s)\dots h_{k(v-1)}^{-1}(s)H_{vk}^{(m)}(x(s)) \quad (11)$$

($2 \leq v \leq \alpha_k - 1; k = 0, 1, \dots, m$) является эрмитовым интерполяционным многочленом относительно узлов $x_k(t) \in X$ кратности α_k ($k = 0, 1, \dots, m; \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_m - 1 = n$) для оператора $F(x)$ и удовлетворяет условиям (7). В случае $\sigma_m(x) \equiv \text{const}$ и $[a, b] = [0, 1]$ интерполяционная формула (10) сохраняет свойство инвариантности для операторных многочленов вида (4) степени не выше n .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Дифференцируя v раз по направлениям $h_{k1}, h_{k2}, \dots, h_{kv}$ выражение, стоящее в правой части формулы (10), и учитывая, что

$$\delta^j \tilde{h}_{kv}[x_i; h_{i1}h_{i2}\dots h_{ij}] = \delta_{ki} \delta_{jv} \frac{d^j}{dx^j} H_{vk}^{(m)}(x_i(s))h_{iv}(s) \quad (0 \leq j \leq \alpha_i - 1; i = 0, 1, \dots, m),$$

приходим к (7).

Пусть $F(x) = \int_0^1 b_i(t, s) \varphi_i(x(s)) ds$ ($i = 0, 1, \dots, m$). Тогда

$$\delta^v F[x_k; h_{1k}h_{k2}\dots h_{k(v-1)}] \tilde{h}_{kv}(x) = \int_0^1 b_i(t, s) \frac{d^v}{dx^v} \varphi_i(x_k(s)) H_{vk}^{(m)}(x(s)) ds.$$

На основании этого равенства и того факта, что $\sigma_m(x) \equiv \text{const}$, как и в случае теоремы 1, следует точность интерполяционной формулы (10) для указанных в теореме операторов вида (4) и отрезка $[a, b] = [0, 1]$.

Аналогом теоремы 2 в этом случае будет следующее утверждение.

Т е о р е м а 4. *Операторный многочлен*

$$H_n(x) = F(x_0)\sigma_m(x) + \sum_{k=0}^m \sum_{v=1}^{\alpha_k-1} \delta^v F[x_k; h_{k1}h_{k2}\dots h_{k(v-1)}] \tilde{h}_{kv}(x) + \sum_{k=1}^m \int_a^b H_{0k}^{(m)}[x(\tau)] d_\tau F[x_0(\cdot) + g(\chi(\tau, \cdot), \cdot; x_k - x_0)], \quad (12)$$

где числовая функция $\chi(\tau, \cdot)$ задается формулой (9), а направления $\tilde{h}_{kv}(x)$ ($1 \leq v \leq \alpha_k - 1; k = 0, 1, \dots, m$) – выражениями (11), является для оператора $F(x)$ интерполяционным эрмитовым многочленом относительно узлов $x_k(t) \in X$ кратности α_k ($k = 0, 1, \dots, m; \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_m - 1 = n$), который удовлетворяет условиям (7). Если $\sigma_m(x) \equiv \text{const}$, а $F(x)$ имеет вид $D_n(x)$, тогда $H_n(x) \equiv F(x)$.

Формулы эрмитова интерполирования по одной переменной для операторов, заданных на декартовом произведении двух функциональных пространств. Приведем формулы интерполирования по одной переменной для оператора $F(x, y): X \times X \rightarrow Y$, аналогичные (8) и (12).

Рассмотрим операторы

$$G_m(x, y) = b(t) + \sum_{i=0}^m \int_a^b b_i(t, s) \varphi_i(x(s)) y(s) ds, \quad (13)$$

где $b(t)$ – произвольно заданная функция, а $y(s)$ и $b_i(t, s)$ – некоторые функции, для которых существуют интегралы, входящие в (13).

Т е о р е м а 5. *Оператор*

$$H_n(x, y) = F(x_0, y)\sigma_m(x) + \sum_{k=0}^m \sum_{v=1}^{\alpha_k-1} \delta_x^v F[(x_k, y); H_{vk}^{(m)}(x)] + \sum_{k=1}^m \int_a^b H_{0k}^{(m)}[x(\tau)] d_\tau F[(x_0(\cdot) + g(\chi(\tau, \cdot), \cdot; x_k - x_0), y)],$$

где функция $\chi(\tau, \cdot)$ определена правилом (6), является интерполяционным для оператора $F(x, y)$ по переменной x эрмитовым многочленом относительно узлов $x_k(t) \in X$ кратности α_k ($k = 0, 1, \dots, m; \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_m - 1 = n$) и удовлетворяет условиям

$$\delta_x^\nu H_n[(x_k, y); h_{k1} h_{k2} \dots h_{kv}] = \delta_x^\nu F[(x_k, y); h_{k1} h_{k2} \dots h_{kv}] \quad (0 \leq \nu \leq \alpha_k - 1; k = 0, 1, \dots, m). \quad (14)$$

Если $F(x, y) = G_n(x, y)$ вида (13), то $H_n(x, y) \equiv F(x, y)$.

Теорема 6. Оператор

$$H_n(x, y) = F(x_0, y \sigma_m(x)) + \sum_{k=0}^m \sum_{\nu=1}^{\alpha_k-1} \delta_x^\nu F[(x_k, y); h_{k1} h_{k2} \dots h_{k(\nu-1)} \tilde{h}_{k\nu}(x)] + \sum_{k=1}^m \int_a^b H_{0k}^{(m)}[x(\tau)] d_\tau F[(x_0(\cdot) + g(\chi(\tau, \cdot), \cdot; x_k - x_0), y)],$$

где функция $\chi(\tau, \cdot)$ определена правилом (6), а направления $\tilde{h}_{k\nu}(x)$ ($1 \leq \nu \leq \alpha_k - 1; k = 0, 1, \dots, m$) – формулой (11), является интерполяционным для оператора $F(x, y)$ по переменной x многочленом Эрмита относительно узлов $x_k(t) \in X$ кратности α_k ($k = 0, 1, \dots, m; \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_m - 1 = n$) и удовлетворяет условиям (14). Если $F(x, y)$ совпадает с оператором $G_n(x, y)$ вида (13), то интерполяционный многочлен $H_n(x, y) \equiv F(x, y)$.

Справедливость условий (14), а также доказательство инвариантности этих формул относительно указанных многочленов $G_n(x, y)$ в значительной степени повторяет рассуждения, проведенные при доказательстве теорем 1 и 3.

Частные случаи тождественных преобразований функций. Рассмотрим некоторые интегральные операторы $g(\tau, s; x)$ вида

$$g(\tau, s; x) = \int_a^\tau \rho(s, \theta) \psi(\theta, x) d\theta = \begin{cases} 0, & \tau = a; \\ x(s), & \tau = b, \end{cases}$$

для которых верны приведенные выше теоремы.

1. Пусть $X = X(\mathbb{R}_+)$ – совокупность функций, являющихся преобразованиями Ганкеля и допускающих преобразование этого вида. Учитывая прямое преобразование Ганкеля $\psi(\tau, x) = \int_0^\infty s k(s, \tau) x(s) ds$, где $k(s, \tau) = J_\nu(s\tau)$ – функция Бесселя 1-го рода индекса ν ($\nu = 0, 1, 2, \dots$), $J_\nu(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n (z/2)^{2n+\nu}}{\Gamma(\nu+n+1)n!}$, и обратное преобразование Ганкеля $x(s) = \int_0^\infty \tau k(\tau, s) \psi(\tau, x) d\tau$, запишем тождественный оператор [1, с. 499] вида

$$x(s) = \int_0^\infty \tau k(\tau, s) \int_0^\infty \xi k(\xi, \tau) x(\xi) d\xi d\tau.$$

Очевидно, что интегральное преобразование $g(\tau, s; x)$, построенное по правилу

$$g(\tau, s; x) = \int_0^\tau \theta k(\theta, s) \psi(\theta, x) d\theta, \quad (15)$$

обладает свойствами $g(\infty, s; x) \equiv x(s)$ и $g(0, s; x) \equiv 0$.

Следовательно, если положить $[a, b] = [0, \infty]$, в том числе в выражении (9), то формулы для интерполяционных многочленов Эрмита из теорем 2, 4–6, где $g(\tau, s; x)$ задается равенством (15), остаются верными в пространстве $X = X(\mathbb{R}_+)$.

В частности, если $m=1$, $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$, $\varphi_0(s) = \exp\{\lambda_0 s\}$, $\varphi_1(s) = \exp\{\lambda_1 s\}$, $\lambda_0 < \lambda_1$, то справедлива следующая формула линейной интерполяции лагранжева типа:

$$L_1(x, y) = F(x_0, (l_0(x) + l_1(x))y) + \int_0^\infty l_1[x(\tau)] d_\tau F[x_0(\cdot) + g(\chi(\tau, \cdot), x_1 - x_0)],$$

где

$$l_0(x(s)) \equiv l_0(x) = \frac{\exp\{\lambda_0(x - x_1)\} - \exp\{\lambda_1(x - x_1)\}}{\exp\{\lambda_0(x_0 - x_1)\} - \exp\{\lambda_1(x_0 - x_1)\}},$$

$$l_1(x(s)) \equiv l_1(x) = \frac{\exp\{\lambda_0(x - x_0)\} - \exp\{\lambda_1(x - x_0)\}}{\exp\{\lambda_0(x_1 - x_0)\} - \exp\{\lambda_1(x_1 - x_0)\}}.$$

2. Рассмотрим интегральное уравнение Абеля на отрезке $[a, b]$, которое имеет вид

$$\int_a^\xi \frac{y(s) ds}{(\xi - s)^{1-\alpha}} = x(\xi) \quad (\xi > a, 0 < \alpha < 1). \tag{16}$$

Через $C^1[a, b]$ и $AC[a, b]$ обозначим соответственно пространства непрерывно дифференцируемых и абсолютно непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций.

Если $x(\xi) \in C^1[a, b]$, то уравнение (16) имеет единственное непрерывное решение

$$y(\xi) = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \frac{d}{d\xi} \int_a^\xi \frac{x(s) ds}{(\xi - s)^\alpha}. \tag{17}$$

Известно также [2], что если $x(\xi) \in AC[a, b]$, то уравнение (16) разрешимо в $L_1(a, b)$, и его решение $y(\xi)$ может быть представлено в виде

$$y(\xi) = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \left\{ \frac{x(a)}{(\xi - a)^\alpha} + \int_a^\xi \frac{x'(s) ds}{(\xi - s)^\alpha} \right\}. \tag{18}$$

Тождественный оператор, построенный с помощью (16) и (17) или (16) и (18), имеет вид

$$x(\xi) = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_a^\xi \frac{1}{(\xi - t)^{1-\alpha}} \left\{ \frac{d}{dt} \int_a^t \frac{x(s) ds}{(t - s)^\alpha} \right\} dt$$

или

$$x(\xi) = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_a^\xi \frac{1}{(\xi - t)^{1-\alpha}} \left\{ \frac{x(a)}{(t - a)^\alpha} + \int_a^t \frac{x'(s) ds}{(t - s)^\alpha} \right\} dt$$

в пространстве $C^1[a, b]$ или $AC[a, b]$ соответственно.

Пусть X – одно из этих пространств. Введем обозначения

$$g(\tau, \xi; x) = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_a^\tau \frac{\gamma(\xi, t)}{(\xi - t)^{1-\alpha}} \psi(t, x) dt \quad (\tau, \xi \in [a, b]; 0 < \alpha < 1), \tag{19}$$

где

$$\gamma(\xi, t) = \begin{cases} 1, & \xi \geq t; \\ 0, & \xi < t, \end{cases} \quad \psi(t, x) = \begin{cases} \frac{d}{dt} \int_a^t \frac{x(s) ds}{(t - s)^\alpha}, & x(s) \in C^1[a, b]; \\ \frac{x(a)}{(t - a)^\alpha} + \int_a^t \frac{x'(s) ds}{(t - s)^\alpha}, & x(s) \in AC[a, b]. \end{cases}$$

Справедливость равенства $g(a, \xi; x) = 0$ очевидна. Тождество $g(b, \xi; x) \equiv x(\xi)$, $x \in X$, также имеет место. Действительно,

$$g(b, \xi; x) = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_a^b \frac{\gamma(\xi, t)}{(\xi - t)^{1-\alpha}} \psi(t, x) dt = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_a^\xi \frac{1}{(\xi - t)^{1-\alpha}} \psi(t, x) dt \equiv x(\xi).$$

Формулы для многочленов Эрмита из теорем 2, 4–6, где $g(\tau, s; x)$ задается равенством (19), также остаются верными на рассматриваемых множествах X .

3. Пусть $X = L_2(\mathbb{R})$. Преобразование Фурье произвольной функции $x \in X$ определим [3] следующим образом:

$$y(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta s} x(s) ds, \quad \theta \in \mathbb{R},$$

понимая этот интеграл как предел в среднем по норме в L_2 :

$$y(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N e^{i\theta s} x(s) ds, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Классическая теория Планшереля описывает действие оператора Фурье из $L_2(\mathbb{R})$ в $L_2(\mathbb{R})$, причем обратный оператор имеет вид

$$x(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N e^{-i\theta s} y(s) ds, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Учитывая сказанное, определим преобразование $g(\tau, s; x)$ следующим правилом:

$$g(\tau, s; x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\tau} e^{-is\theta} \psi(\theta, x) d\theta, \quad \psi(\theta, x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta s} x(s) ds. \quad (20)$$

В данном случае формулы Эрмита из теорем 2, 4–6, где $g(\tau, s; x)$ задается равенством (20), а интегрирование в указанных формулах ведется по \mathbb{R} , также остаются справедливыми на множестве $L_2(\mathbb{R})$.

4. Пусть $X = L_2(\mathbb{R}_+)$. Известно [4, с. 154; 5], что косинус- и синус-преобразования Фурье

$$y(\theta) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \begin{Bmatrix} \cos(\theta s) \\ \sin(\theta s) \end{Bmatrix} x(s) ds$$

имеют в этом пространстве формулы обращения аналогичного вида.

Обозначим

$$g(\tau, s; x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\tau} k(s, \theta) \psi(\theta, x) d\theta, \quad (21)$$

где $k(s, \theta) = \begin{Bmatrix} \cos(s\theta) \\ \sin(s\theta) \end{Bmatrix}$, $\psi(\theta, x) = \int_0^{\infty} \begin{Bmatrix} \cos(\theta s) \\ \sin(\theta s) \end{Bmatrix} x(s) ds$.

Формулы из теорем 2, 4–6, где $g(\tau, s; x)$ задается равенством (21), а интегрирование в указанных формулах ведется по \mathbb{R}_+ , остаются справедливыми на рассматриваемом множестве $L_2(\mathbb{R}_+)$.

Пример 1. Пусть $F(x) = \int_0^1 K[t, s, x(s)] ds$ – оператор Урысона, узлы интерполирования $x_\nu(s) \in C[0, 1]$ ($\nu = 0, 1, \dots, m$) и $\varphi_k(s) = s^k$ – алгебраическая система функций ($k = 0, 1, \dots, 4m + 3$), $t \in [c, d]$.

С учетом тождества $\sigma_m(x) = \sum_{k=0}^m H_{0k}(x) \equiv 1$, справедливого для рассматриваемой алгебраической системы функций, интерполяционный многочлен Эрмита (5) относительно узлов четвертой кратности, т. е. $\alpha_\nu = 4; \nu = 0, 1, \dots, m$, примет вид

$$H_{4m+3}(x) = \sum_{k=0}^m \int_0^1 \{K[t, s, x_k(s)]H_{0k}^{(m)}(x(s)) + K'_x[t, s, x_k(s)]H_{1k}^{(m)}(x(s)) + K''_x[t, s, x_k(s)]H_{2k}^{(m)}(x(s)) + K'''_x[t, s, x_k(s)]H_{3k}^{(m)}(x(s))\} ds,$$

где операторы $H_{\nu k}^{(m)}(x(s))$ ($\nu = 0, 1, 2, 3$) задаются равенствами

$$\begin{aligned} H_{0k}^{(m)}(x(s)) &\equiv H_{0k}^{(m)}(x) = l_k^4(x) \left[1 + C_{1k}(x - x_k) + C_{2k}(x - x_k)^2 + C_{3k}(x - x_k)^3 \right], \\ H_{1k}^{(m)}(x(s)) &\equiv H_{1k}^{(m)}(x) = l_k^4(x) \left[(x - x_k) + C_{1k}(x - x_k)^2 + C_{2k}(x - x_k)^3 \right], \\ H_{2k}^{(m)}(x(s)) &\equiv H_{2k}^{(m)}(x) = \frac{l_k^4(x)}{2} \left[(x - x_k)^2 + C_{1k}(x - x_k)^3 \right], \\ H_{3k}^{(m)}(x(s)) &\equiv H_{3k}^{(m)}(x) = \frac{1}{6} l_k^4(x) (x - x_k)^3, \quad C_{1k} = -\frac{2\omega_m''(x_k)}{\omega_m'(x_k)}, \\ C_{2k} &= -\frac{2\omega_m'''(x_k)}{3\omega_m'(x_k)} + \frac{5}{2} \left[\frac{\omega_m''(x_k)}{\omega_m'(x_k)} \right]^2, \quad C_{3k} = -\frac{5}{2} \left[\frac{\omega_m''(x_k)}{\omega_m'(x_k)} \right]^3 + \frac{5\omega_m''(x_k)\omega_m'''(x_k)}{3[\omega_m'(x_k)]^2} - \frac{\omega_m^{(4)}(x_k)}{6\omega_m'(x_k)}, \\ \omega_m(x) &= \prod_{i=0}^m (x - x_i), \quad l_k(x) = \frac{\omega_m(x)}{\omega_m'(x_k)(x - x_k)}, \quad x = x(s), \quad x_k = x_k(s), \quad k = 0, 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Пример 2. Пусть $F(x) = f\left(\int_0^1 K[t, s, x(s)] ds\right)$, узлы интерполирования $x_\nu(s) \in C[0, 1]$ ($\nu = 0, 1, \dots, m$) и $\varphi_k(s) = \cos(ks)$ – четная тригонометрическая система функций ($k = 0, 1, \dots, 2m + 1$), $t \in [c, d]$.

Тогда для интерполяционного многочлена Эрмита относительно узлов второй кратности будет справедлива формула (5), в которой $\alpha_\nu \equiv 2$ ($\nu = 0, 1, \dots, m$), $\sigma_m(x) \equiv 1$, дифференциал Гато вычисляется по правилу

$$\delta F[x, h] = f' \left(\int_0^1 K[t, s, x(s)] ds \right) \int_0^1 K'_x[t, s, x(s)] h(s) ds,$$

а операторы $H_{0k}^{(m)}(x(s))$ и $H_{1k}^{(m)}(x(s))$ имеют вид

$$\begin{aligned} H_{0k}^{(m)}(x(s)) &\equiv H_{0k}^{(m)}(x) = l_k^2(x) \left(1 + \frac{\cos x - \cos x_k}{\sin x_k} \left\{ \frac{S_m''(x_k)}{S_m'(x_k)} - \operatorname{ctg} x_k \right\} \right), \\ H_{1k}^{(m)}(x(s)) &\equiv H_{1k}^{(m)}(x) = l_k^2(x) \frac{\cos x_k - \cos x}{\sin x_k}, \end{aligned}$$

где $S_m(x) = \prod_{k=0}^m (\cos x - \cos x_k)$, $l_k(x) = \frac{S_m(x) \sin x_k}{(\cos x_k - \cos x) S_m'(x_k)}$, $x = x(s)$, $x_k = x_k(s)$, $k = 0, 1, \dots, m$.

В заключение отметим, что результаты, полученные в работе, могут быть использованы в качестве основы для построения приближенных методов решения интегральных, дифференциальных и других видов нелинейных операторных уравнений. Ряд интерполяционных формул другой структуры, представляющих решение задачи Эрмита с узлами произвольной кратности, также основанных на тождественных преобразованиях функций, имеется в работе [6]. Достаточно полная теория операторного интерполирования изложена в монографиях [7, 8].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Ватсон, Г. Н. Теория бесселевых функций: в 2 т. / Г. Н. Ватсон. – М.: Изд-во иностр. лит., 1949. – Т. 1. – 799 с.
2. Samko, S. G. Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications / S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev. – New York [et al.]: Gordon and Breach Science Publishers, 1993. – 1006 p.
3. Титмарш, Е. Введение в теорию интегралов Фурье / Е. Титмарш. – М.; Л.: ГИТТЛ, 1948. – 418 с.
4. Krylov, V. I. A Handbook of Methods of Approximate Fourier Transformation and Inversion of the Laplace Transformation / V. I. Krylov, N. S. Skoblya. – М.: Mir Publ., 1977. – 273 p.
5. Бейтмен, Г. Таблицы интегральных преобразований: в 2 т. / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М.: Наука, 1969. – Т. 1: Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. – 344 с.
6. Янович, Л. А. О взаимосвязи интерполирования операторов и функций / Л. А. Янович, М. В. Игнатенко // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 1998. – Т. 42, № 3. – С. 9–16.
7. Makarov, V. L. Methods of Operator Interpolation / V. L. Makarov, V. V. Khlobystov, L. A. Yanovich // Праці Ін-ту математики НАН України. – Київ, 2010. – Т. 83. – С. 1–517.
8. Янович, Л. А. Основы теории интерполирования функций матричных переменных / Л. А. Янович, М. В. Игнатенко. – Минск: Беларус. навука, 2016. – 281 с.

References

1. Watson G. N. *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*. Cambridge University Press, 1944. 804 p.
2. Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. *Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications*. New York-Philadelphia-London-Paris-Mountreux-Tokyo-Melbourne, Gordon and Breach Science Publishers, 1993. 1006 p.
3. Titmarsh E. *Introduction in the theory of Fourier integrals*. Moscow, Leningrad, State Publishing House of Technical and Theoretical Literature, 1948. 418 p. (in Russian).
4. Krylov V. I., Skoblya N. S. *A Handbook of Methods of Approximate Fourier Transformation and Inversion of the Laplace Transformation*. Moscow, Mir Publ., 1977. 273 p.
5. Bateman G., Erdelyi A. *Tables of integral transforms. Vol. 1: Transformations of Fourier, Laplace, Mellin*. Moscow, Nauka Publ., 1969. 344 p. (in Russian).
6. Yanovich L. A., Ignatenko M. V. About interrelation of interpolation of operators and functions. *Doklady Natsional'noy akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 1998, vol. 42, no 3, pp. 9–16 (in Russian).
7. Makarov V. L., Khlobystov V. V., Yanovich L. A. Methods of Operator Interpolation. *Pratsi institutu matematiki NAN Ukraini* [Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine]. Kiev, 2010, vol. 83, pp. 1–517.
8. Yanovich L. A., Ignatenko M. V. *Bases of the theory of interpolation of functions of matrix variables*. Minsk, Belaruskaya Navuka Publ., 2016. 281 p. (in Russian).

Информация об авторе

Игнатенко Марина Викторовна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: ignatenko mv@bsu.by. <https://orcid.org/0000-0002-8029-1842>

Information about the author

Marina V. Ignatenko – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Associate Professor of Web-Technologies and Computer Simulation Department, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: ignatenkomv@bsu.by. <https://orcid.org/0000-0002-8029-1842>

ISSN 1561-2430 (Print)
 ISSN 2524-2415 (Online)
 УДК 514.142
<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-3-273-278>

Поступила в редакцию 12.04.2018
 Received 12.04.2018

В. И. Янчевский

Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

**КОГОМОЛОГИИ ТЕЙТА СПЕЦИАЛЬНЫХ НОРМЕННЫХ МОДУЛЕЙ,
 СВЯЗАННЫХ С ГЕНЗЕЛЕВЫМИ АЛГЕБРАМИ С ДЕЛЕНИЕМ**

Аннотация. Для центральных алгебр с делением D над гензелевыми полями K с унитарными K/k -инволюциями вычисляются группы когомологий Тейта $\mathbb{Z}/(2)$ -модулей $A = N_{\bar{Z}/\bar{K}}(\text{Nrd}_{\bar{D}}(\bar{D}^*))$, где \bar{K} и \bar{D} – алгебры вычетов соответственно полей K и D , а \bar{Z} – центр алгебры \bar{D} и $N_{\bar{Z}/\bar{K}}$ – отображение нормы из \bar{Z} в \bar{K} . Кроме того, D предполагается слабо разветвленной K -алгеброй и поле \bar{k} принадлежит одному из двух классов полей: класс C_1 -полей, класс вполне мнимых глобальных полей.

Ключевые слова: когомологии Тейта, гензелевы алгебры с делением, вполне мнимое глобальное поле, C_1 -поле, приведенная норма

Для цитирования. Янчевский, В. И. Когомологии Тейта специальных норменных модулей, связанных с гензелевыми алгебрами с делением / В. И. Янчевский // Вест. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2018. – Т. 54, № 3. – С. 273–278. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-3-273-278>

V. I. Yanchevskii

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

TATE COHOMOLOGY OF SPECIAL NORM MODULES RELATED TO HENSELIAN DIVISION ALGEBRAS

Abstract. For central division algebras D over Henselian fields K with unitary K/k -involutions the Tate cohomology groups of $\mathbb{Z}/(2)$ -modules $A = N_{\bar{Z}/\bar{K}}(\text{Nrd}_{\bar{D}}(\bar{D}^*))$, where \bar{K} , \bar{D} are the residue algebras of K and D , respectively, \bar{Z} is the center of \bar{D} , and $N_{\bar{Z}/\bar{K}}$ is the norm map from \bar{Z} to \bar{K} , are computed. Moreover, D is assumed to be tamely ramified K -algebra and a field \bar{k} belongs either to the class of C_1 -fields, or to the class of totally imaginary global fields.

Keywords: Tate cohomology, Henselian division algebras, totally imaginary global field, C_1 -field, reduced norm

For citation. Yanchevskii V. I. Tate cohomology of special norm modules related to Henselian division algebras. *Vesti Natsyional'nai akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, vol. 54, no. 3, pp. 273–278 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-3-273-278>

Пусть k – гензелево относительно дискретного нормирования поле характеристики, не равной 2, K/k – квадратичное расширение и D/K – слабо разветвленная центральная K -алгебра с делением. Предположим также, что D обладает инволюцией τ , ограничение которой на K совпадает с образующей группы Галуа расширения K/k (ниже такие инволюции будем называть K/k -инволюциями). В этой статье мы описываем когомологические свойства специальных $\text{Gal}(\bar{K}/\bar{k})$ -модулей алгебры вычетов \bar{D} алгебры D . Более точно, пусть $\text{Nrd}_{\bar{D}}: \bar{D}^* \rightarrow Z(\bar{D})^*$ – гомоморфизм приведенной нормы мультипликативной группы \bar{D}^* алгебры \bar{D} . Обозначим через \bar{Z} центр алгебры вычетов $Z(\bar{D})$. Ниже мы предполагаем, что расширение \bar{K}/\bar{k} нетривиально и сепарабельно. Рассмотрим следующую группу:

$$A = N_{\bar{Z}/\bar{K}}(\text{Nrd}_{\bar{D}}(\bar{D}^*)),$$

где $N_{\bar{Z}/\bar{K}}$ – отображение обычной нормы для расширения \bar{Z}/\bar{K} . Заметим, что ввиду дискретности нормирования \bar{Z}/\bar{K} является циклическим расширением Галуа. Кроме того, известно, что расширение \bar{Z}/\bar{k} является диэдральным. Для инволюции τ переход к вычетах определяет ее редукцию $\bar{\tau}$, которая является инволюцией алгебры \bar{D} . Тогда A – G -модуль с группой $G = \{\text{id}_{\bar{K}}, \bar{\tau}\}$.

Целью исследования является описание групп когомологий Тейта $\hat{H}^{-1}(G, A)$ в случае важных для приложений полей вычетов \bar{k} . Поскольку группа G циклическая, то для этого описания достаточно описать группы $\hat{H}^{-1}(G, A)$ и $\hat{H}^0(G, A)$. Напомним, что вышеупомянутые группы определяются следующим образом.

Для G -модуля A определено отображение $N : A \rightarrow A$, задаваемое следующим образом: для произвольного элемента $a \in A$

$$N(a) = a a^{\bar{\tau}}.$$

Через ${}_G A$ обозначим $\text{Ker } N$ и пусть $I_G A = \{a^{1-\bar{\tau}} \mid a \in A\}$. Тогда (-1) -я группа когомологий Тейта $\hat{H}^{-1}(G, A)$ определяется как факторгруппа ${}_G A / I_G A$ (см. [1, с. 160, гл. 4, § 6]), а группа $\hat{H}^0(G, A)$ – как факторгруппа $A^G / A^{1+\bar{\tau}}$.

З а м е ч а н и е 1. Группы когомологий аналогичных G -модулей часто встречаются в связи с вычислением приведенных и приведенных унитарных групп Уайтхеда соответствующих алгебр с делением (см. [2–4]). Например, пусть алгебра D такая же, как и выше. Обозначим через $\Sigma'(D, \tau)$ и $\Sigma(D, \tau)$ следующие группы:

$$\Sigma'(D, \tau) = \{d \in D^* \mid \text{Nrd}_D(d) \in k\}, \quad \Sigma(D, \tau) = \{d \in D^* \mid d^\tau = d\}.$$

Приведенной унитарной группой Уайтхеда называется факторгруппа $\Sigma'(D, \tau) / \Sigma(D, \tau)$, которая, в свою очередь, изоморфна группе $(\overline{\Sigma'(D, \tau) \cap U_D}) / (\overline{\Sigma(D, \tau) \cap U_D})$, где U_D – группа единиц кольца нормирования алгебры D . С другой стороны, группа $\overline{\Sigma'(D, \tau) \cap U_D}$ изоморфна группе ${}_G A$.

Основным для нас будет случай, когда гомоморфизм приведенной нормы сюръективен. В этом случае $A = N_{\bar{Z}/\bar{K}}(\bar{Z}^*)$. Кроме того, $\bar{K}^{1-\bar{\tau}} / N_{\bar{Z}/\bar{K}}(\bar{Z}^*)^{1-\bar{\tau}} \cong (\bar{K} / N_{\bar{Z}/\bar{K}}(\bar{Z}^*))^{1-\bar{\tau}}$ и $\bar{K} / N_{\bar{Z}/\bar{K}}(\bar{Z}^*) \cong \text{Br}(\bar{Z} / \bar{K})$, где $\text{Br}(\bar{Z} / \bar{K})$ – подгруппа группы Брауэра $\text{Br}(\bar{K})$, состоящая из элементов, разложимых над полем \bar{Z} . Заметим также, что гомоморфизм $\bar{\tau}$ индуцирует автоморфизм группы Брауэра $\text{Br}(\bar{K})$, ниже обозначаемый тем же символом $\bar{\tau}$. Ввиду $\bar{Z}^{\bar{\tau}} = \bar{Z}$, имеем $\text{Br}(\bar{Z} / \bar{K})^{\bar{\tau}} = \text{Br}(\bar{Z} / \bar{K})$. Для описания группы когомологий Тейта $\hat{H}^{-1}(G, A) = \text{Br}(Z / K)^{1-\bar{\tau}}$ воспользуемся точной последовательностью, приведенной в следующем утверждении.

Т е о р е м а 1. $1 \rightarrow \text{Br}_{\bar{\tau}}(\bar{Z} / \bar{K}) \rightarrow \text{Br}(\bar{Z} / \bar{K}) \rightarrow \text{Br}(\bar{Z} / \bar{K})^{1-\bar{\tau}} \rightarrow 1$, где $\text{Br}_{\bar{\tau}}(\bar{Z} / \bar{K})$ – подгруппа в $\text{Br}(\bar{Z} / \bar{K})$, состоящая из классов алгебр, обладающих \bar{K} / \bar{k} -инволюциями.

Отсюда следует, что $\text{Br}(\bar{Z} / \bar{K})^{1-\bar{\tau}} \cong \text{Br}(\bar{Z} / \bar{K}) / \text{Br}_{\bar{\tau}}(\bar{Z} / \bar{K})$.

Далее рассмотрим случай локального поля \bar{k} . В этом случае нам понадобится понятие диэдрального расширения Галуа полей.

О п р е д е л е н и е 1. Группа G называется обобщенной группой диэдра порядка $2n$, если G является полупрямым произведением группы $T = \{1, \tau\}$ и абелевой группы H порядка n .

О п р е д е л е н и е 2. Расширение Галуа L/K , у которого группа Галуа – обобщенная группа диэдра, называется диэдральным расширением.

Напомним следующее довольно известное описание групп $\text{Br}_\mu(F)$, где F – локальное поле с конечным полем вычетов, μ – нетождественный автоморфизм второго порядка поля F с полем

инвариантов F_μ , $\text{Br}(F)$ – группа Брауэра поля F , а $\text{Br}_\mu(F)$ – ее подгруппа классов алгебр, обладающих F/F_μ -инволюциями.

Предложение. В вышеприведенных обозначениях $\text{Br}_\mu(F) = \{0\}$.

Замечание 2. Для удобства читателя мы приводим здесь новое доказательство этого утверждения.

Доказательство. Предположим, что существует нетривиальная центральная F -алгебра с делением E , обладающая F/F_μ -инволюцией, которую мы будем обозначать той же буквой μ . Тогда в алгебре E существует максимальное μ -инвариантное подполе Z , которое диэдрально над F_μ и неразветвлено над F . Если σ – образующая $\text{Gal}(Z/F)$, то при ограничении инволюции μ на Z будем иметь $\mu \sigma \mu = \sigma^{-1}$. Таким образом, если $\bar{\mu}|_{\bar{F}} \neq \text{id}_{\bar{F}}$, то $\bar{\mu}\bar{\sigma} = \bar{\sigma}^{-1}$. Поскольку \bar{Z}/\bar{F}_μ – циклическое расширение, то $\bar{\mu}$ и $\bar{\sigma}$ – перестановочны, что влечет $\bar{\sigma}^2 = \text{id}_{\bar{Z}}$, поэтому E – алгебра кватернионов над F с инволюцией μ . Тогда известно, что $E = T \otimes_{F_\mu} F$, где T/F – центральная алгебра кватернионов, что приводит к противоречию с нетривиальностью E , поскольку всякое квадратичное расширение F_μ реализуется в качестве максимального подполя F .

Пусть далее F – вполне разветвленное расширение поля F_μ . Тогда $\bar{F} = \bar{F}_\mu$ и расширение \bar{Z}/\bar{F}_μ можно поднять в Z/F_μ до неразветвленного расширения X/F_μ . Тогда $Z = X \otimes_{F_\mu} F$. Нетрудно видеть, что, не умаляя общности, можно считать, что E равняется циклической алгебре $(X \otimes_{F_\mu} F, \pi_F)$, где π_F – простой элемент поля F . Поскольку алгебра E обладает F/F_μ -инволюцией, то ввиду критерия Алберта должно выполняться следующее условие: в поле X существует элемент x такой, что $N_{X/F_\mu}(x) = \pi_F \pi_F^\mu$. Так как расширение X/F_μ неразветвлено, а $\pi_F \pi_F^\mu$ – простой элемент поля F_μ , то сравнение нормирований обеих частей последнего равенства приводит нас к противоречию. Предложение доказано.

Ввиду предложения подгруппа $\text{Br}_\tau(\bar{Z}/\bar{K})$ тривиальна. Таким образом, $\text{Br}(\bar{Z}/\bar{K})^{1-\tau} \cong \text{Br}(\bar{Z}/\bar{K})$, и поскольку \bar{Z}/\bar{K} – циклическое расширение степени n , то $\text{Br}(\bar{Z}/\bar{K})$ изоморфна циклической группе порядка n .

С помощью предыдущего предложения устанавливается справедливость следующего утверждения.

Теорема 2. Пусть D/K – слабо разветвленная центральная K -алгебра с делением, обладающая унитарной K/k -инволюцией τ , и \bar{k} – локальное поле с конечным полем вычетов. Кроме того, пусть $Z(\bar{D})/\bar{K}$ – циклическое расширение степени n . Тогда группа когомологий Тейта $\hat{H}^{-1}(G, A)$ изоморфна циклической группе порядка n .

Доказательство. Ввиду предложения $\text{Br}_\tau(\bar{K}) = \{0\}$, и потому тривиальна ее подгруппа $\text{Br}_\tau(\bar{Z}/\bar{K})$. Стало быть, в силу теоремы 1 $\hat{H}^{-1}(G, A) \cong \text{Br}(Z/K)$. Последняя же группа изоморфна циклической группе порядка n . Теорема доказана.

Вычислим теперь группу $\hat{H}^{-1}(G, A)$ в случае вполне мнимого глобального поля \bar{k} . Обозначим через \bar{K}_v пополнение поля \bar{K} относительно точки v . Из теории алгебр над глобальными полями известно, что для каждой точки v поля \bar{K} существует гомоморфизм inv_v , который $\text{Br}(\bar{K}_v)$ отображает в группу \mathbb{Q}/\mathbb{Z} и приводит к следующей точной последовательности:

$$1 \rightarrow \text{Br}(\bar{K}) \xrightarrow{\prod_v \text{inv}_v} \prod_v \text{Br}(\bar{K}_v) \xrightarrow{\delta} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow 1,$$

где δ – суммирование компонент в $\prod_v \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Для описания групп $\hat{H}^{-1}(G, A)$ мы также воспользуемся теоремой 1. Для этого напомним следующее описание группы $\text{Br}_\tau(\bar{K})$ (см., напр., [5, с. 230]), являющейся подгруппой $\text{Br}(\bar{K})$ и состоящей из алгебр, обладающих \bar{K}/\bar{k} -инволюциями $\bar{\tau}$:

$$\text{Br}_{\bar{\tau}}(\bar{K}) = \left\{ a \in \text{Br}(\bar{K}) \mid \text{inv}_v(a) + \text{inv}_{v\bar{\tau}}(a) = 0 \text{ или, если } v = v\bar{\tau}, \text{ то } \text{inv}_v(a) = 0 \right\}.$$

Пусть M – множество точек K , удовлетворяющих условию $v \neq v\bar{\tau}$. Тогда $M = V \cup V\bar{\tau}$, где $V\bar{\tau} = \{v\bar{\tau} \mid v \in V\}$, $V \cap V\bar{\tau} = \emptyset$. Наконец, напомним следующее описание группы $\text{Br}_{\bar{\tau}}(\bar{Z} / \bar{K})$ (см. [6]):

$$\text{Br}_{\bar{\tau}}(\bar{Z} / \bar{K}) \cong B_{\bar{\tau}},$$

где $B_{\bar{\tau}} = \left\{ b \in \prod_v B_{n_v} \mid n_v = [\bar{Z}^v : \bar{K}_v], B_{n_v} = \left(\frac{1}{n_v} \right) \mathbb{Z} / \mathbb{Z}, b_v + b_{v\bar{\tau}} = 0 \text{ или, если } v = v\bar{\tau}, \text{ то } b_v = 0 \right\}$.

Пусть $B = \{b \in \prod_v \mathbb{Q} / \mathbb{Z} \mid \delta(b) = 0, nb = 0\}$, где δ – суммирование компонент в $\prod_{v \in V} \mathbb{Q} / \mathbb{Z}$. Тогда

Теорема 3. Пусть D/K – слабо разветвленная центральная K -алгебра с делением, обладающая унитарной K/k -инволюцией τ , и \bar{k} – вполне мнимое глобальное поле. Кроме того, $Z(\bar{D}) / \bar{K}$ – циклическое расширение степени n . Тогда группа когомологий Тейта $\hat{H}^{-1}(G, A)$ изоморфна факторгруппе $B / B_{\bar{\tau}}$.

Рассмотрим, наконец, случай, когда \bar{k} – C_1 -поле (в частности, поле функций неприводимой алгебраической кривой над алгебраически замкнутым полем), тогда ввиду [7] группа $\text{Br}(\bar{K})$ тривиальна, и потому, используя последовательность из теоремы 1, заключаем, что справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть D/K – слабо разветвленная центральная K -алгебра с делением, обладающая унитарной K/k -инволюцией τ , и \bar{k} – C_1 -поле. Тогда группа когомологий Тейта $\hat{H}^{-1}(G, A)$ тривиальна.

Обратимся теперь к вычислению групп $\hat{H}^0(G, A)$. В случае локального поля \bar{k} мы будем предполагать, что характеристика поля вычетов поля \bar{k} относительно p -адического нормирования не равна 2. В этом случае имеет место следующая

Теорема 5. Пусть D/K – слабо разветвленная центральная K -алгебра с делением, обладающая унитарной K/k -инволюцией τ , и \bar{k} – локальное поле. Тогда:

(i) \bar{Z} / \bar{K} – неразветвленное расширение, группа $\hat{H}^0(G, A)$ изоморфна прямому произведению двух групп второго порядка;

(ii) \bar{Z} / \bar{K} – вполне разветвленное расширение, группа когомологий Тейта $\hat{H}^0(G, A)$ тривиальна.

Доказательство. Нетрудно видеть, что $\hat{H}^0(G, A) = N_{\bar{Z}/\bar{K}}(Z)_{\bar{\tau}} / N_{\bar{Z}/\bar{K}}(Z)^{1+\bar{\tau}}$. Рассмотрим следующую точную последовательность:

$$1 \rightarrow \left(N_{\bar{Z}/\bar{K}}(\bar{Z}^*) \cap \bar{k}^* \right) / N_{\bar{Z}/\bar{K}}(\bar{Z}^*) \rightarrow \bar{k}^* / N_{\bar{Z}/\bar{K}}(\bar{Z}^*) \rightarrow \bar{k}^* / \left(N_{\bar{Z}/\bar{K}}(\bar{Z}^*) \cap \bar{k}^* \right) \rightarrow 1 \quad (1)$$

и предположим, что группа G коммутативна. Тогда нетрудно видеть, что G является группой экспоненты 2. Из локальной теории полей классов следует, что группа $\bar{k}^* / N_{\bar{Z}/\bar{K}}(\bar{Z}^*)$ является прямым произведением двух групп порядка 2. Для вычисления группы $\hat{H}^0(G, A)$ теперь достаточно вычислить группу $\bar{k}^* / \left(N_{\bar{Z}/\bar{K}}(\bar{Z}^*) \cap \bar{k}^* \right)$. Для ее вычисления рассмотрим два случая:

(i) \bar{Z} / \bar{K} – неразветвленное расширение;

(ii) \bar{Z} / \bar{K} – вполне разветвленное расширение.

На самом деле, не ограничивая общности, можно считать, что поле \bar{Z} имеет вид $\bar{k}(\sqrt{a}) \times \bar{K}$, где $a \in \bar{k}$. В случае (i) $N_{\bar{Z}/\bar{K}}(\bar{Z}^*)$, ввиду неразветвленности \bar{Z} / \bar{K} , описывается как множество элементов поля \bar{K} вида $\langle \pi_{\bar{K}} \rangle U_{\bar{K}}$, где $\pi_{\bar{K}}$ – простой элемент кольца p -адического нормирования

поля \bar{K} , а $U_{\bar{K}}$ – яго група адзінцаў. Заметым, што $\pi_{\bar{K}}$ можа быць выбран як $\sqrt{\pi_{\bar{K}}}$, дзе $\pi_{\bar{K}}$ – простым элементам кольца норміравання поля \bar{K} . Следовательно, $N_{\bar{Z}/\bar{K}}(\bar{Z}^*) = \langle \pi_{\bar{K}} \rangle U_{\bar{K}}$. Таким образом, элемент $z \in N_{\bar{Z}/\bar{K}}(\bar{Z}^*) \cap \bar{K}^*$, если он имеет вид $z = \pi_{\bar{K}}^\alpha u_{\bar{K}}$, где $u_{\bar{K}}$ является единицей в кольце нормирования поля \bar{K} , причем $u_{\bar{K}}$ является нормой элемента из $U_{\bar{K}}$. Последнее всегда выполнено ввиду неразветвленности расширения \bar{Z}/\bar{K} . Таким образом, \bar{K}^* содержится в $N_{\bar{Z}/\bar{K}}(\bar{Z}^*) \cap \bar{K}^*$ и, следовательно, факторгруппа $\bar{K}^* / (N_{\bar{Z}/\bar{K}}(\bar{Z}^*) \cap \bar{K}^*)$ из последовательности (1) тривиальна, что немедленно влечет, ввиду той же последовательности, что группа $\hat{H}^0(G, A)$ является прямым произведением двух групп второго порядка.

Рассмотрим теперь случай (ii). Покажем, что в этом случае $U_{\bar{K}} \subset N_{\bar{Z}/\bar{K}}(\bar{Z}^*)$. Действительно, ввиду предположения о характеристике поля вычетов p -адического нормирования поля \bar{K} имеем $k = k \cup \alpha k$, где символ $\bar{\alpha}$ обозначает вычеты элементов из кольца нормирования \bar{K} относительно p -адического нормирования поля \bar{K} , а α не является квадратом в \bar{K} . Тогда, взяв в качестве $\bar{\alpha}$ прообраз α в \bar{K} , а в качестве α – прообраз $\bar{\alpha}$ в k , получаем, что произвольный элемент $b \in U_{\bar{K}}$ принадлежит на самом деле множеству $(1 + M_{\bar{K}})u^2 \cup (1 + M_{\bar{K}})\bar{\alpha}v^2$, где $u, v \in U_{\bar{K}}$. Поэтому $b \in N_{\bar{Z}/\bar{K}}(\bar{u})(1 + M_{\bar{K}}) \cup N_{\bar{Z}/\bar{K}}(\sqrt{\bar{\alpha}v})(1 + M_{\bar{K}})$, что влечет $U_{\bar{K}} \subset N_{\bar{Z}/\bar{K}}(\bar{Z}^*)$. Поскольку еще подходящий простой элемент кольца нормирования поля \bar{K} содержится в $N_{\bar{Z}/\bar{K}}(\bar{Z}^*)$ (ввиду вполне разветвленности расширения \bar{Z}/\bar{K}), то $\bar{K} \subset N_{\bar{Z}/\bar{K}}(\bar{Z}^*)$. Откуда следует, что группа $\hat{H}^0(G, A)$ тривиальна. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 3. Аналогичные вычисления имеют место также в более общем случае, когда $\bar{K} - C_1$ -поле.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф16-032).

Acknowledgements. This work was supported by the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (Project No. F16-032).

Список использованных источников

1. Янчевский, В. И. Обратная задача приведенной унитарной K -теории / В. И. Янчевский // Мат. заметки. – 1979. – Т. 26, вып. 3. – С. 475–482.
2. Мамфорд, Д. Абелевы многообразия / Д. Мамфорд. – М.: Мир, 1971. – 299 с.
3. Касселс, Дж. Алгебраическая теория чисел / Дж. Касселс, А. Фрöhlich. – М.: Мир, 1969. – 242 с.
4. Серр, Ж.-П. Когомологии Галуа: пер. с фр. / Ж.-П. Серр. – М.: Мир, 1968. – 208 с.
5. Wadsworth, A. R. Unitary SK_1 of Semiramified Graded and Valued Division Algebras / A. R. Wadsworth // Manuscripta Math. – 2012. – Vol. 139. – P. 343–389. <https://doi.org/10.1007/s00229-011-0519-9>
6. Ершов, Ю. Л. Гензелевы нормирования тел и групп SK_1 / Ю. Л. Ершов // Мат. сб. – 1983. – Т. 117 (159), № 1. – С. 60–68.
7. Draxl, P. K. Normen in Diedererweiterungen von Zahlkörpern / P. K. Draxl // Abh. der Braunschweigischen Wissen. Gesellschaft. – 1982. – Vol. 33 – P. 99–116.

References

1. Yanchevskii V. I. A converse problem in reduced unitary K -theory. *Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR*, 1979, vol. 26, no 3, pp. 728–731. <https://doi.org/10.1007/bf01138683>
2. Mumford D. *Abelian Varieties*. Oxford University Press, 1970. 242 p.
3. Cassels J. W. S., Fröhlich A. (ed.). *Algebraic Number Theory*. Thompson book company INC. Washington, D.C., 1967. 366 p.
4. Serre J.-P. *Cohomologie Galoisienne*. Lecture Notes in Mathematics Series. Vol. 5, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1994. <https://doi.org/10.1007/bfb0108761>
5. Wadsworth A. R. Unitary SK_1 of Semiramified Graded and Valued Division Algebras. *Manuscripta Mathematica*, 2012, vol. 139. pp. 343–389. <https://doi.org/10.1007/s00229-011-0519-9>

6. Ershov Yu. L. Henselian valuations of division rings and the group SK_1 . *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1983, vol. 45, no. 1, pp. 63–71. <https://doi.org/10.1070/SM1983v045n01ABEH000992>

7. Draxl P. K. Normen in Diedererweiterungen von Zahlkörpern. *Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft*, 1982, vol. 33, pp. 99–116 (in German).

Информация об авторе

Янчевский Вячеслав Иванович – академик, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий отделом алгебры, Институт математики Национальной академии наук Беларуси, (ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: yanch@im.bas-net.by

Information about the author

Vyacheslav I. Yanchevskii – Member of NAS of Belarus, D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Department of Algebra, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Sorganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: yanch@im.bas-net.by

ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 519.6
<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-3-279-289>

Поступила в редакцию 22.02.2018
Received 22.02.2018

Э. А. Айрян¹, А. Д. Егоров², Д. С. Кулябов^{1,3}, В. Б. Малютин², Л. А. Севастьянов^{1,3}

¹Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Россия

²Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

³Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

МЕТОД ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ДЛЯ СИСТЕМ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Аннотация. Рассматриваются системы стохастических дифференциальных уравнений, для которых риманово многообразие, порожаемое диффузионной матрицей, имеет нулевую кривизну. Предлагается метод вычисления характеристик решения рассматриваемых систем стохастических дифференциальных уравнений, который основывается на представлении функции плотности вероятности перехода через функциональный интеграл. Для вычисления возникающих функциональных интегралов используется разложение действия относительно классической траектории, для которой действие принимает экстремальное значение. Классическая траектория находится как решение многомерного уравнения Эйлера – Лагранжа.

Ключевые слова: системы стохастических дифференциальных уравнений, Onsager–Machlup функционалы, функциональные интегралы

Для цитирования. Метод функциональных интегралов для систем стохастических дифференциальных уравнений / Э. А. Айрян [и др.] // Вест. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2018. – Т. 54, № 3. – С. 279–289. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-3-279-289>

E. A. Ayryan¹, A. D. Egorov², D. S. Kulyabov^{1,3}, V. B. Malyutin², L. A. Sevastyanov^{1,3}

¹Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russia

²Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

³RUDN University, Moscow, Russia

FUNCTIONAL INTEGRALS METHOD FOR SYSTEMS OF STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS

Abstract. Systems of stochastic differential equations, for which the Riemannian manifold generated by a diffusion matrix has zero curvature, are considered in this article. The method for approximate evaluation of characteristics of the solution of the systems of stochastic differential equations is proposed. This method is based on the representation of the probability density function through the functional integral. To compute functional integrals we use the expansion of action with respect to a classical trajectory, for which the action takes an extreme value. The classical trajectory is found as the solution of the multidimensional Euler – Lagrange equation.

Keywords: systems of stochastic differential equations, Onsager – Machlup functionals, functional integrals

For citation. Ayryan E. A., Egorov A. D., Kulyabov D. S., Malyutin V. B., Sevastyanov L. A. Functional integrals method for systems of stochastic differential equations. *Vesti Natsyional'nai akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, vol. 54, no. 3, pp. 279–289 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-3-279-289>

Введение. Стохастические дифференциальные уравнения (СДУ) широко используются в физике, химии, биологии и т. д. [1, 2]. В настоящее время существует большое количество литературных источников, в которых рассматриваются определения, свойства, задачи и применение СДУ [1–3]. Основная задача теории СДУ – найти решение уравнения или характеристики этого решения (функция вероятности перехода, математическое ожидание, моменты высоких порядков). Так как только некоторые специальные типы стохастических дифференциальных уравнений могут быть решены аналитически, на практике применяются численные методы их решения. Наиболее распространенные численные методы основываются на дискретизации временного интервала и численного моделирования решения СДУ в дискретные моменты времени [4–6]. В данной работе предлагается использовать представление функции плотности вероятности перехода (ФПВП) для решения СДУ через функциональный интеграл и методы приближенного

вычисления возникающих функциональных интегралов. Для того чтобы записать ФПВП в виде функционального интеграла, используется техника Onsager – Machlup функционалов [7–12]. Этот подход был рассмотрен в [13] для одномерного случая, в данной работе он применяется для системы стохастических дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} dx_1(t) = \alpha_1(\vec{x}, t)dt + \sum_{j=1}^m g_{1j}(\vec{x}, t)dw_j(t), \\ \dots \\ dx_n(t) = \alpha_n(\vec{x}, t)dt + \sum_{j=1}^m g_{nj}(\vec{x}, t)dw_j(t), \end{cases} \quad (1)$$

с начальным условием $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$.

Систему уравнений (1) можно записать в виде

$$dx^i = \alpha^i(x)dt + g_a^i(x)dw^a,$$

где x – n -мерный вектор состояний системы, w – m -мерный винеровский процесс, $g_{ia} \in R_n \times R_m$. Здесь латинскими индексами из середины алфавита обозначаются величины, относящиеся к векторам состояний (размерность пространства n), а латинскими индексами из начала алфавита обозначаются величины, относящиеся к вектору винеровского процесса (обычно размерность пространства $m \leq n$). Матрица g_{ia} имеет размерность $m \times n$ и связывает пространство векторов состояния и пространство винеровских процессов, а риманово многообразие порождается метрическим тензором $G^{ij} = g_a^i g^{ja}$.

Представление функции плотности вероятности перехода через функциональный интеграл в случае произвольного риманова многообразия, порождаемого метрическим тензором G^{ij} , изучается в [11, 12]. Мы исследуем случай, когда риманово многообразие, порождаемое метрическим тензором G^{ij} , имеет нулевую кривизну, но рассматриваем как представление ФПВП через функциональный интеграл, так и методы приближенного вычисления возникающих функциональных интегралов. В разделе 1 рассматривается представление величин с помощью функционального интеграла, в разделе 2 – метод вычисления возникающих функциональных интегралов. Этот метод основывается на выделении из всех возможных траекторий классической траектории $\vec{y}_{\text{кл}}$, для которой действие S принимает экстремальное значение. Классическая траектория находится как решение многомерного уравнения Эйлера – Лагранжа. Затем для вычисления интеграла используется разложение действия S относительно классической траектории $\vec{y}_{\text{кл}}$. В разделе 3 с помощью предложенного метода вычисляются приближенные значения математического ожидания от некоторых функционалов от решения конкретной системы стохастических дифференциальных уравнений.

1. Представление величин с помощью функционального интеграла. В случае схемы Ито и функций α_j, g_{ij} , не зависящих от времени t , с помощью техники Onsager – Machlup функционалов ФПВП $p(\vec{x}_i, t_{i-1} + \Delta t, \vec{x}_{i-1}, t_{i-1})$ на малом промежутке времени Δt может быть записана в виде [8, 10]

$$p(\vec{x}_i, t_{i-1} + \Delta t, \vec{x}_{i-1}, t_{i-1}) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t} \sqrt{\det G(\vec{x}_{i-1}, t_{i-1})}} \exp\{-S_0(\vec{x}_i, t_{i-1} + \Delta t, \vec{x}_{i-1}, t_{i-1})\}, \quad (2)$$

где

$$G_{ij}(\vec{y}, t) = \sum_{k=1}^m g_{ik}(\vec{y}, t)g_{jk}(\vec{y}, t),$$

$$S_0(\vec{x}_i, t_{i-1} + \Delta t, \vec{x}_{i-1}, t_{i-1}) = \frac{1}{2\Delta t} \sum_{k,j=1}^n G_{kj}^{-1}(\vec{x}_{i-1}, t_{i-1}) [\Delta x_k - A_k(\vec{x}_{i-1}, t_{i-1})\Delta t] [\Delta x_j - A_j(\vec{x}_{i-1}, t_{i-1})\Delta t],$$

$$A_k(\vec{y}, t) = \alpha_k(\vec{y}, t) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m g_{ij}(\vec{y}, t) \frac{\partial}{\partial y_i} g_{kj}(\vec{y}, t).$$

Выражение (2) для ФПВП на малом промежутке времени Δt верно с точностью до слагаемых, имеющих относительно Δt порядок не выше первого.

$G_{ij}(\vec{y}, t)$ можно интерпретировать как метрический тензор риманова многообразия [8] с кривизной, определяемой через символы Кристоффеля. Мы будем рассматривать случай плоского пространства, т. е. пространства с нулевой кривизной.

Используя выражение (2), можно записать ФПВП в виде

$$P(\vec{x}, t, \vec{x}_0, t_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \cdots \int \prod_{i=1}^{N-1} d\vec{x}_i \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}^n \sqrt{\det G(\vec{x}_{i-1}, t)}} \exp \left\{ - \sum_{i=0}^{N-1} S_0(\vec{x}_{i+1}, t_i + \Delta t, \vec{x}_i, t_i) \right\}. \quad (3)$$

В предельном случае формула (3) имеет вид

$$P(\vec{x}, t, \vec{x}_0, t_0) = Z[0] = \int D[\vec{x}] \exp \left\{ - \int_{t_0}^t L_0(\vec{x}(\tau), \dot{\vec{x}}(\tau)) d\tau \right\}, \quad (4)$$

где

$$D[\vec{x}] = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^{N-1} d\vec{x}_i \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}^n \sqrt{\det G(\vec{x}_{i-1}, t_{i-1})}},$$

$$L_0 \left(\vec{x}(\tau), \dot{\vec{x}}(\tau) \right) = \frac{1}{2} \sum_{k,j=1}^n G_{kj}^{-1}(\vec{x}, \tau) \left[\dot{x}_k - A_k(\vec{x}, \tau) \right] \left[\dot{x}_j - A_j(\vec{x}, \tau) \right].$$

Выражение $D[\vec{x}]$ формально расходится и имеет смысл только вместе с экспонентой под знаком интеграла в (4), а строго математически функциональный интеграл в правой части равенства (4) определяется как предел интегралов конечной кратности. Функционал в показателе экспоненты в формуле (4) называется Onsager – Machlup функционалом.

Формулы вида (4) в случае интегрального представления ядра оператора эволюции называются формулами Фейнмана – Каца [14].

В качестве примера рассмотрим систему двух стохастических дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} dx_1(t) = (\alpha_1 x_1 + \gamma_1 \sqrt{x_1 x_2} + \beta_1) dt + \sigma_1 \sqrt{x_1} dw_1(t), \\ dx_2(t) = (\alpha_2 x_2 + \gamma_2 \sqrt{x_1 x_2} + \beta_2) dt + \sigma_2 \sqrt{x_2} dw_2(t). \end{cases} \quad (5)$$

Метрический тензор $G_{ij}(\vec{x}, t)$, соответствующий уравнениям (5), определяется равенствами $G_{12} = G_{21} = 0$, $G_{11} = \sigma_1^2 x_1$, $G_{22} = \sigma_2^2 x_2$.

Символы Кристоффеля определяются равенством

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} G^{\delta\lambda} \left(\frac{\partial G_{\nu\delta}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial G_{\mu\delta}}{\partial x_\nu} - \frac{\partial G_{\nu\mu}}{\partial x_\delta} \right).$$

Компоненты тензора кривизны определяются через символы Кристоффеля по формуле

$$R_{\mu\delta\nu}^\lambda = \partial_\nu \Gamma_{\mu\delta}^\lambda - \partial_\delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \Gamma_{\mu\delta}^\eta \Gamma_{\nu\eta}^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\eta \Gamma_{\delta\eta}^\lambda.$$

Для уравнений (5), при $\lambda = \mu = \nu$, $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} G^{\lambda\lambda} \frac{\partial G_{\lambda\lambda}}{\partial x_\lambda}$. В остальных случаях $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = 0$, поэтому $R_{\mu\delta\nu}^\lambda = 0$.

Таким образом, риманово многообразие, порожаемое метрическим тензором G^{ij} для уравнений (5), имеет нулевую кривизну.

Для уравнений (5) ФПВП $P(\vec{x}, t, \vec{x}_0, t_0)$ определяется формулой (4), где

$$D[\vec{x}] = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^{N-1} d\vec{x}_i \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}^2 \sqrt{\sigma_1^2 x_{1i-1} \sigma_2^2 x_{2i-1}}},$$

$$L_0(\vec{x}(\tau), \dot{\vec{x}}(\tau)) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \frac{1}{\sigma_k^2 x_k} \left[\dot{x}_k - A_k(\vec{x}, \tau) \right]^2, \quad (6)$$

$$A_k(\vec{x}, t) = \left(\alpha_k x_k + \gamma_k \sqrt{x_1 x_2} + \beta_k \right) - \frac{1}{2} g_k(\vec{x}, t) \frac{\partial}{\partial x_k} g_k(\vec{x}, t) = \alpha_k x_k + \gamma_k \sqrt{x_1 x_2} + \beta_k - \frac{1}{4} \sigma_1^2.$$

После замены переменных $y_k = \frac{2\sqrt{x_k}}{\sigma_k}$, $k=1, 2$, получим

$$P(\vec{y}, t, \vec{y}_0, t_0) = \frac{2}{\sigma_1^2 y_1} \frac{2}{\sigma_2^2 y_2} \bar{Z}[0], \quad y_{k0} = \frac{2\sqrt{x_{k0}}}{\sigma_k}, \quad k=1, 2,$$

$$\bar{Z}[0] = \int D[\vec{y}] \exp \left\{ - \int_{t_0}^t L_0(\vec{y}(\tau), \dot{\vec{y}}(\tau)) d\tau \right\}, \quad (7)$$

$$D[\vec{y}] = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^{N-1} d\vec{y}_i \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}^2},$$

$$L_0(\vec{y}(\tau), \dot{\vec{y}}(\tau)) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \left[\dot{y}_k - A_k(\vec{y}, \tau) \right]^2, \quad (8)$$

$$A_k(\vec{y}, t) = \frac{1}{2} \alpha_k y_k + \frac{1}{2} \gamma_k \frac{\sigma_{3-k}}{\sigma_k} y_{3-k} + \frac{4\beta_k - \sigma_k^2}{2\sigma_k^2 y_k}, \quad k=1, 2. \quad (9)$$

2. Вычисление функциональных интегралов. Перейдем к методу вычисления функциональных интегралов вида (4), (7). Функциональный интеграл в формулах (4), (7) – это интеграл по функциям или траекториям, удовлетворяющим некоторым начальным условиям. Выражение $L_0(\vec{y}(\tau), \dot{\vec{y}}(\tau))$ в формуле (7) можно рассматривать как лагранжиан системы, а величину $S = \int_{t_0}^t L_0(\vec{y}(\tau), \dot{\vec{y}}(\tau)) d\tau$ – как действие. Используя принцип наименьшего действия [15], из всех возможных траекторий можно выделить классическую траекторию $\vec{y}_{кл}$, для которой действие S принимает экстремальное значение. Классическая траектория находится как решение уравнения Эйлера – Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_0}{\partial \dot{x}_k} \right) - \frac{\partial L_0}{\partial x_k} = 0, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Далее для вычисления интеграла можно использовать разложение действия S относительно классической траектории $\vec{y}_{кл}$:

$$S[\vec{y}(\tau)] \approx S[\vec{y}_{кл}(\tau)] + \frac{1}{2} \delta^2 S[\vec{y}_{кл}(\tau)].$$

Вариацию второго порядка $\delta^2 S[\bar{y}_{\text{кл}}(\tau)]$ можно записать в виде

$$\delta^2 S[\bar{y}_{\text{кл}}(\tau)] = \int_{t_0}^t \sum_{ij=1}^n \delta y_i \Lambda_{ij} \delta y_j d\tau,$$

где $\bar{y} = \bar{y}_{\text{кл}} + \delta \bar{y}$,

$$\Lambda_{ij} = \left(\frac{\partial^2 L}{\partial y_i \partial y_j} \right)_{\bar{y}_{\text{кл}}} + \left(\frac{\partial^2 L}{\partial y_i \partial \dot{y}_j} \right)_{\bar{y}_{\text{кл}}} \frac{d}{dt} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{y}_i \partial y_j} \right)_{\bar{y}_{\text{кл}}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{y}_i \partial \dot{y}_j} \right)_{\bar{y}_{\text{кл}}} \frac{d}{dt}. \quad (10)$$

После этих преобразований интеграл (7) запишется в виде

$$\bar{Z}[0] = \int D[\bar{x}] \exp \left\{ -S[\bar{y}_{\text{кл}}(\tau)] - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \bar{x} \Lambda \bar{x} d\tau \right\}, \quad (11)$$

где интегрирование выполняется по траекториям $\bar{x} = \delta \bar{y}$, удовлетворяющим условиям $\bar{x}(t_0) = 0, \bar{x}(t) = 0$,

$$D[\bar{x}] = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^{N-1} d\bar{x}_i \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}}.$$

Для вычисления интеграла (11) используем разложение

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j u_j,$$

где функции u_j являются решениями задачи Штурма – Лиувилля, ассоциированной с оператором Λ , т. е.

$$\Lambda u_j = \lambda_j u_j, \quad (12)$$

$$\int_{t_0}^t u_j(\tau) u_i(\tau) d\tau = \delta_{ji},$$

$$u(t_0) = 0, u(t) = 0,$$

λ_j – собственные значения.

По аналогии с работами [9, 13, 15] интеграл (11) запишется в виде

$$\bar{Z}[0] = \exp \left\{ -S[\bar{y}_{\text{кл}}(\tau)] \right\} \int D[\bar{x}] \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_{t_0}^t \bar{x} \Lambda_{\text{free}} \bar{x} d\tau \right\} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_{\text{free},j}^{\frac{1}{2}}}{\lambda_j^{\frac{1}{2}}}, \quad (13)$$

где $\Lambda_{\text{free}} = - \begin{pmatrix} \frac{d^2}{dt^2} & 0 \\ 0 & \frac{d^2}{dt^2} \end{pmatrix}$, $\lambda_{\text{free},j}$ – собственные значения задачи Штурма – Лиувилля, ассоциированной с оператором Λ_{free} , λ_j – собственные значения задачи Штурма – Лиувилля, ассоциированной с оператором Λ . Поэтому

$$\int D[\bar{x}] \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_{t_0}^t \bar{x} \Lambda_{\text{free}} \bar{x} d\tau \right\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \cdots \int \prod_{i=1}^{N-1} \frac{dx_{1i} dx_{2i}}{\sqrt{2\pi\Delta t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}} \exp \left\{ -\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{k=1}^2 \frac{(x_{ki+1} - x_{ki})^2}{2\Delta t} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-t_0)}}. \quad (14)$$

Таким образом, из (13), (14) следует, что

$$\bar{Z}[0] = \exp\{-S[\bar{y}_{\text{кл}}(\tau)]\} \frac{1}{2\pi(t-t_0)} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_{\text{free},j}^{\frac{1}{2}}}{\lambda_j^{\frac{1}{2}}}. \quad (15)$$

Для системы уравнений (5) $L_0\left(\bar{y}(\tau), \vec{y}(\tau)\right)$ определяется равенствами (8), (9). При $4\beta_k = \sigma_k^2$ траектория $\bar{y}_{\text{кл}}$ удовлетворяет уравнениям

$$\begin{aligned} \ddot{y}_{1\text{кл}}(\tau) - \frac{\alpha_1^2}{4} y_{1\text{кл}} - \left(\frac{\gamma_2 \sigma_1}{2\sigma_2}\right)^2 y_{1\text{кл}} - \frac{\gamma_1 \sigma_2}{2\sigma_1} \dot{y}_{2\text{кл}} + \frac{\gamma_2 \sigma_1}{2\sigma_2} \dot{y}_{2\text{кл}} - \frac{\alpha_1 \gamma_1 \sigma_2}{4\sigma_1} y_{2\text{кл}} - \frac{\alpha_2 \gamma_2 \sigma_1}{4\sigma_2} y_{2\text{кл}} &= 0, \\ \ddot{y}_{2\text{кл}}(\tau) - \frac{\alpha_2^2}{4} y_{2\text{кл}} - \left(\frac{\gamma_1 \sigma_2}{2\sigma_1}\right)^2 y_{2\text{кл}} - \frac{\gamma_2 \sigma_1}{2\sigma_2} \dot{y}_{1\text{кл}} + \frac{\gamma_1 \sigma_2}{2\sigma_1} \dot{y}_{1\text{кл}} - \frac{\alpha_1 \gamma_1 \sigma_2}{4\sigma_1} y_{1\text{кл}} - \frac{\alpha_2 \gamma_2 \sigma_1}{4\sigma_2} y_{1\text{кл}} &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Находим приближенные значения функций $y_{1\text{кл}}(\tau)$, $y_{2\text{кл}}(\tau)$, $t_0 \leq \tau \leq t$, решая уравнения (16) с помощью метода сеток для решения нелинейных граничных задач [16]. Для этого выбираем нулевые приближения $\bar{y}_{1\text{кл}}^{(0)} = (y_{1\text{кл}}^{(0)}(\tau_0), \dots, y_{1\text{кл}}^{(0)}(\tau_l))^T$, $\bar{y}_{2\text{кл}}^{(0)} = (y_{2\text{кл}}^{(0)}(\tau_0), \dots, y_{2\text{кл}}^{(0)}(\tau_l))^T$ для функций $y_{1\text{кл}}(\tau)$, $y_{2\text{кл}}(\tau)$. Здесь T – знак транспонирования, $y_{1\text{кл}}^{(0)}(\tau_k) = \frac{y_1 - y_{10}}{t - t_0} \tau_k + \frac{y_{10}t - y_1 t_0}{t - t_0}$, $y_{2\text{кл}}^{(0)}(\tau_k) = \frac{y_2 - y_{20}}{t - t_0} \tau_k + \frac{y_{20}t - y_2 t_0}{t - t_0}$, $\tau_k = t_0 + kh$, $h = \frac{t - t_0}{l}$, $k = 0, 1, \dots, l$, $y_{10} = y_1(t_0)$, $y_1 = y_1(t)$, $y_{20} = y_2(t_0)$, $y_2 = y_2(t)$. Далее, решая системы уравнений

$$\begin{aligned} \bar{\Delta} \bar{y}_{1\text{кл}}^{(i+1)} &= \vec{f}_1(\bar{y}_{1\text{кл}}^{(i)}, \bar{y}_{2\text{кл}}^{(i)}), \\ \bar{\Delta} \bar{y}_{2\text{кл}}^{(i+1)} &= \vec{f}_2(\bar{y}_{1\text{кл}}^{(i)}, \bar{y}_{2\text{кл}}^{(i)}) \end{aligned}$$

по i -му приближению $y_{1\text{кл}}^{(i)}$, $y_{2\text{кл}}^{(i)}$, вычисляем $(i+1)$ -е приближение $y_{1\text{кл}}^{(i+1)}$, $y_{2\text{кл}}^{(i+1)}$:

$$\begin{aligned} \bar{\Delta} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h^{-2} & -2h^{-2} & h^{-2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & h^{-2} & -2h^{-2} & h^{-2} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \vec{f}_1 &= (f_{10}, \dots, f_{1l})^T, \quad f_{10} = y_{10}, \quad f_{1l} = y_1, \\ f_{1j} &= \frac{\alpha_1^2}{4} y_{1\text{кл}}^{(i)}(\tau_j) + \left(\frac{\gamma_2 \sigma_1}{2\sigma_2}\right)^2 y_{1\text{кл}}^{(i)}(\tau_j) + \frac{\gamma_1 \sigma_2}{2\sigma_1} \frac{y_{2\text{кл}}^{(i)}(\tau_j) - y_{2\text{кл}}^{(i)}(\tau_{j-1})}{h} - \\ & - \frac{\gamma_2 \sigma_1}{2\sigma_2} \frac{y_{2\text{кл}}^{(i)}(\tau_j) - y_{2\text{кл}}^{(i)}(\tau_{j-1})}{h} + \frac{\alpha_1 \gamma_1 \sigma_2}{4\sigma_1} y_{2\text{кл}}^{(i)}(\tau_j) + \frac{\alpha_2 \gamma_2 \sigma_1}{4\sigma_2} y_{2\text{кл}}^{(i)}(\tau_j), \quad 1 \leq j \leq l-1, \\ \vec{f}_2 &= (f_{20}, \dots, f_{2l})^T, \quad f_{20} = y_{20}, \quad f_{2l} = y_2, \\ f_{2j} &= \frac{\alpha_2^2}{4} y_{2\text{кл}}^{(i)}(\tau_j) + \left(\frac{\gamma_1 \sigma_2}{2\sigma_1}\right)^2 y_{2\text{кл}}^{(i)}(\tau_j) + \frac{\gamma_2 \sigma_1}{2\sigma_2} \frac{y_{1\text{кл}}^{(i)}(\tau_j) - y_{1\text{кл}}^{(i)}(\tau_{j-1})}{h} - \\ & - \frac{\gamma_1 \sigma_2}{2\sigma_1} \frac{y_{1\text{кл}}^{(i)}(\tau_j) - y_{1\text{кл}}^{(i)}(\tau_{j-1})}{h} + \frac{\alpha_1 \gamma_1 \sigma_2}{4\sigma_1} y_{1\text{кл}}^{(i)}(\tau_j) + \frac{\alpha_2 \gamma_2 \sigma_1}{4\sigma_2} y_{1\text{кл}}^{(i)}(\tau_j), \quad 1 \leq j \leq l-1. \end{aligned}$$

С помощью вычисленных приближенных значений $y_{1к\text{л}}(\tau_0), \dots, y_{1к\text{л}}(\tau_l), y_{2к\text{л}}(\tau_0), \dots, y_{2к\text{л}}(\tau_l)$ вычисляем $S[\bar{y}_{к\text{л}}(\tau)]$:

$$\begin{aligned}
 S[\bar{y}_{к\text{л}}(\tau)] &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \sum_{k=1}^2 \left[\dot{y}_k - \frac{1}{2} \alpha_k y_k - \frac{1}{2} \gamma_k \frac{\sigma_{3-k}}{\sigma_k} y_{3-k} \right]^2 d\tau = \\
 &= \sum_{k=1}^2 \left(\frac{1}{2} \int_{t_0}^t \dot{y}_k^2 d\tau + \int_{t_0}^t \dot{y}_k \left[-\frac{1}{2} \alpha_k y_k + \frac{1}{2} \gamma_k \frac{\sigma_{3-k}}{\sigma_k} y_{3-k} \right] d\tau + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \left[-\frac{1}{2} \alpha_k y_k + \frac{1}{2} \gamma_k \frac{\sigma_{3-k}}{\sigma_k} y_{3-k} \right]^2 d\tau \right) \approx \\
 &\approx \sum_{k=1}^2 \frac{1}{2} \left[\dot{y}_k(t) y_k(t) - \dot{y}_k(t_0) y_k(t_0) - \right. \\
 &- \sum_{j=1}^l y_{к\text{к\text{л}}}(\tau_j) \left\{ \left(\frac{\alpha_k^2}{4} y_{к\text{к\text{л}}}(\tau_j) + \left(\frac{\gamma_{3-k} \sigma_k}{2\sigma_{3-k}} \right)^2 y_{к\text{к\text{л}}}(\tau_j) \right) h + \frac{\gamma_k \sigma_{3-k}}{2\sigma_k} (y_{3-к\text{к\text{л}}}(\tau_j) - y_{3-к\text{к\text{л}}}(\tau_{j-1})) - \right. \\
 &- \left. \frac{\gamma_{3-k} \sigma_k}{2\sigma_{3-k}} (y_{3-к\text{к\text{л}}}(\tau_j) - y_{3-к\text{к\text{л}}}(\tau_{j-1})) + \left(\frac{\alpha_1 \gamma_1 \sigma_2}{4\sigma_1} y_{3-к\text{к\text{л}}}(\tau_j) + \frac{\alpha_2 \gamma_2 \sigma_1}{4\sigma_2} y_{3-к\text{к\text{л}}}(\tau_j) \right) h \right\} + \\
 &+ \sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^l \left[-\frac{1}{2} \alpha_k y_k(\tau_j) - \frac{1}{2} \gamma_k \frac{\sigma_{3-k}}{\sigma_k} y_{3-k}(\tau_j) \right] (y_k(\tau_j) - y_k(\tau_{j-1})) + \\
 &\left. + \sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^l \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} \alpha_k y_k(\tau_j) - \frac{1}{2} \gamma_k \frac{\sigma_{3-k}}{\sigma_k} y_{3-k}(\tau_j) \right]^2 h. \right. \tag{17}
 \end{aligned}$$

Из (10) следует, что для системы уравнений (5) $\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} \end{pmatrix}$, где Λ_{ij} имеют вид

$$\Lambda_{11} = -\frac{d^2}{dt^2} + \left(\frac{\alpha_1}{2} \right)^2 + \left(\frac{\gamma_2 \sigma_1}{2\sigma_2} \right)^2, \quad \Lambda_{22} = -\frac{d^2}{dt^2} + \left(\frac{\gamma_1 \sigma_2}{2\sigma_1} \right)^2 + \left(\frac{\alpha_2}{2} \right)^2, \quad \Lambda_{12} = \Lambda_{21} = \frac{\alpha_1}{2} \frac{\gamma_1 \sigma_2}{2\sigma_1} + \frac{\alpha_2}{2} \frac{\gamma_2 \sigma_1}{2\sigma_2}.$$

При выборе на интервале $-A \leq t \leq A$ сетки с узлами $t_k = -A + kh, \quad h = \frac{2A}{l}, \quad k = 0, 1, \dots, l,$

$$\Lambda_{\text{free}} = - \begin{pmatrix} \frac{d^2}{dt^2} & 0 \\ 0 & \frac{d^2}{dt^2} \end{pmatrix}$$

аппроксимируется матрицей

$$\bar{\Lambda}_{\text{free}} = \begin{pmatrix} \bar{\Lambda}_{11\text{free}} & 0 \\ 0 & \bar{\Lambda}_{22\text{free}} \end{pmatrix},$$

где

$$\bar{\Lambda}_{11\text{free}} = \bar{\Lambda}_{22\text{free}} = \begin{pmatrix} 2h^{-2} & -h^{-2} & 0 & \dots & 0 \\ -h^{-2} & 2h^{-2} & -h^{-2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & -h^{-2} & 2h^{-2} & -h^{-2} \\ 0 & \dots & 0 & -h^{-2} & 2h^{-2} \end{pmatrix}$$

– матрицы размерности $(l-1) \times (l-1)$. Матрицы Λ_{ij} аппроксимируются матрицами $\bar{\Lambda}_{ij}$ размерности $(l-1) \times (l-1)$. $\bar{\Lambda}_{11} = \bar{\Lambda}_{11\text{free}} + \theta_1$, $\bar{\Lambda}_{22} = \bar{\Lambda}_{22\text{free}} + \theta_3$, $\bar{\Lambda}_{12} = \bar{\Lambda}_{21} = \theta_2$, где θ_1 – диагональная матрица с элементами $\left(\frac{\alpha_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_2 \sigma_1}{2\sigma_2}\right)^2$ на диагонали, θ_3 – диагональная матрица с элементами $\left(\frac{\gamma_1 \sigma_2}{2\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{\alpha_2}{2}\right)^2$ на диагонали, θ_2 – диагональная матрица с элементами $\frac{\alpha_1}{2} \frac{\gamma_1 \sigma_2}{2\sigma_1} + \frac{\alpha_2}{2} \frac{\gamma_2 \sigma_1}{2\sigma_2}$ на диагонали. Оператор Λ аппроксимируется матрицей $\bar{\Lambda} = \begin{pmatrix} \bar{\Lambda}_{11} & \bar{\Lambda}_{12} \\ \bar{\Lambda}_{21} & \bar{\Lambda}_{22} \end{pmatrix}$. После введенных обозначений получим

$$\prod_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_{\text{free},j}^{\frac{1}{2}}}{\lambda_j^{\frac{1}{2}}} \approx \frac{\det \bar{\Lambda}_{\text{free}}}{\det \Lambda}. \tag{18}$$

С помощью $S[\bar{y}_{\text{кл}}(\tau)]$, вычисленных по формуле (17), и $\prod_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_{\text{free},j}^{\frac{1}{2}}}{\lambda_j^{\frac{1}{2}}}$, вычисленных по формуле (18), получаем значение для $\bar{Z}[0]$ в формуле (15).

3. Численные результаты. Рассмотрим приближенное вычисление математического ожидания функционала от решения системы уравнений (5) с помощью полученных приближенных значений для $\bar{Z}[0]$ и с учетом нормирующего множителя $\exp\left(-\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{4}(t - t_0)\right)$.

Из (4) получаем, что приближенные значения математического ожидания $E[x_1 - x_2]$ вычисляются по формуле

$$E[x_1 - x_2] = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \dots \int (x_{1N} - x_{2N}) dx_{1N} dx_{2N} D[\vec{x}] \times \\ \times \exp\left\{-\int_{t_0}^t L_0\left(\vec{x}(\tau), \dot{\vec{x}}(\tau)\right) d\tau\right\} \exp\left(-\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{4}(t - t_0)\right),$$

где $L_0\left(\vec{x}(\tau), \dot{\vec{x}}(\tau)\right)$ определяется формулой (6), $D[\vec{x}] = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^{N-1} d\vec{x}_i \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}^2 \sqrt{\sigma_1^2 x_{i-1} \sigma_2^2 x_{2i-1}}}$.

После замены переменных $y_k = \frac{2\sqrt{x_k}}{\sigma_k}$, $k = 1, 2$, получим

$$E[x_1 - x_2] = \int \dots \int \left(\frac{\sigma_1^2 y_{1N}^2}{4} - \frac{\sigma_2^2 y_{2N}^2}{4}\right) \frac{\sigma_1^2 y_{1N}}{2} dy_{1N} \frac{\sigma_2^2 y_{2N}}{2} dy_{2N} \times \\ \times \frac{2}{\sigma_1^2 y_{1N}} \frac{2}{\sigma_2^2 y_{2N}} \bar{Z}[0] \exp\left(-\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{4}(t - t_0)\right) = \exp\left(-\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{4}(t - t_0)\right) \int \left(\frac{\sigma_1^2 y_{1N}^2}{4} - \frac{\sigma_2^2 y_{2N}^2}{4}\right) \bar{Z}[0] dy_{1N} dy_{2N}.$$

Здесь $\bar{Z}[0]$ определяется формулами (7), (15).

Приближенные значения математического ожидания $E[\sqrt{x_k}]$ вычисляются по формуле

$$E[\sqrt{x_k}] = \exp\left(-\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{4}(t - t_0)\right) \int \frac{\sigma_k}{2} y_{kN} \bar{Z}[0] dy_{1N} dy_{2N}.$$

Точное значение математического ожидания $E[x_1 - x_2]$ при $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ вычисляется из уравнений

$$dE[x_1](t) = (aE[x_1] + \gamma E[\sqrt{x_1 x_2}] + \beta_1) dt,$$

$$dE[x_2](t) = (aE[x_2] + \gamma E[\sqrt{x_1 x_2}] + \beta_2) dt,$$

$$E[x_1 - x_2](0) = x_{10} - x_{20}$$

и равно

$$E[x_1 - x_2](t) = \left(x_{10} - x_{20} + \frac{\beta_1 - \beta_2}{\alpha} \right) \exp\{a(t - t_0)\} + \frac{\beta_2 - \beta_1}{\alpha}.$$

Точное значение математического ожидания $E[\sqrt{x_k}]$ при $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ вычисляется из уравнений

$$dE[\sqrt{x_1}](t) = \left(\frac{\alpha}{2} E[\sqrt{x_1}] + \frac{\gamma \sigma_2}{2\sigma_1} E[\sqrt{x_2}] \right) dt,$$

$$dE[\sqrt{x_2}](t) = \left(\frac{\alpha}{2} E[\sqrt{x_2}] + \frac{\gamma \sigma_1}{2\sigma_2} E[\sqrt{x_1}] \right) dt,$$

$$E[\sqrt{x_k}](0) = \sqrt{x_{k0}}$$

и равно

$$E[\sqrt{x_k}] = \exp\left\{ \frac{t - t_0}{2} \alpha \right\} \left(\operatorname{ch}\left\{ \frac{t - t_0}{2} \gamma \right\} \sqrt{x_{k0}} + \frac{\sigma_{3-k}}{\sigma_k} \operatorname{sh}\left\{ \frac{t - t_0}{2} \gamma \right\} \sqrt{x_{3-k0}} \right).$$

Приближенные и точные значения математических ожиданий от некоторых функционалов от решений системы уравнений (5) для конкретных значений коэффициентов и начальных условий приведены в табл. 1, 2. Параметр l – это количество интервалов, на которые разбивается отрезок $[t_0, t]$ при приближенном вычислении $y_{1кл}(\tau)$, $y_{2кл}(\tau)$. Форма функционалов выбрана так, чтобы можно было вычислить точные значения математических ожиданий.

Таблица 1. Приближенные и точные значения математического ожидания при

$$\alpha = 2, \gamma = -2, \sigma_1 = \sigma_2 = 1, \beta_1 = \beta_2 = \frac{1}{4}, t_0 = 0, t = 1, x_{10} = x_{20} = \frac{1}{4}$$

Table 1. Approximate and exact values of the expectations for

$$\alpha = 2, \gamma = -2, \sigma_1 = \sigma_2 = 1, \beta_1 = \beta_2 = \frac{1}{4}, t_0 = 0, t = 1, x_{10} = x_{20} = \frac{1}{4}$$

Значение	$E[\sqrt{x_1}]$	$E[\sqrt{x_2}]$	$E[x_1 - x_2]$
Приближенное $l = 40$	0,4651	0,4651	0,00003
Приближенное $l = 120$	0,4837	0,4837	0,00002
Точное	0,5	0,5	0

Таблица 2. Приближенные и точные значения математического ожидания при

$$\alpha = 2, \gamma = -2, \sigma_1 = 9, \sigma_2 = 10, \beta_1 = \frac{81}{4}, \beta_2 = \frac{100}{4}, t_0 = 0, t = 1, x_{10} = 4, x_{20} = 4$$

Table 2. Approximate and exact values of the expectations for

$$\alpha = 2, \gamma = -2, \sigma_1 = 9, \sigma_2 = 10, \beta_1 = \frac{81}{4}, \beta_2 = \frac{100}{4}, t_0 = 0, t = 1, x_{10} = 4, x_{20} = 4$$

Значение	$E[\sqrt{x_1}]$	$E[\sqrt{x_2}]$	$E[x_1 - x_2]$
Приближенное $l = 40$	6,037	10,72	-11,17
Приближенное $l = 120$	5,962	11,51	-13,53
Точное	5,806	13,19	-15,17

Из результатов, приведенных в табл. 1, 2, видно, что при увеличении параметра l увеличивается точность вычислений.

Заключение. Стохастические дифференциальные уравнения часто используют для описания стохастического поведения систем. В [17, 18] рассматривалась задача конструирования СДУ, стохастический член которых связан со структурой изучаемой системы. При конструировании СДУ использовалась аппроксимация основного кинетического уравнения уравнением Фоккера – Планка, для которого можно записать эквивалентное ему СДУ в форме уравнения Ланжевена.

Представление функции плотности вероятности перехода для решения одномерного стохастического дифференциального уравнения через функциональный интеграл и методы приближенного вычисления такого функционального интеграла рассмотрены в [13]. В данной работе получено представление функции плотности вероятности перехода для решения системы СДУ через функциональный интеграл и методы приближенного вычисления возникающего функционального интеграла. Для представления функции плотности вероятности перехода через функциональный интеграл используется техника Onsager – Machlup функционалов. Для вычисления функционального интеграла применяется разложение действия относительно классической траектории, для которой действие принимает экстремальное значение.

Список использованных источников

1. Gardiner, C. W. *Handbook of Stochastic Methods: For Physics, Chemistry, and the Natural Sciences* / C. W. Gardiner. – 2nd ed. – Springer-Verlag, 1986. – 442 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-02452-2>
2. Van Kampen, N. G. *Stochastic Processes in Physics and Chemistry* / N. G. Van Kampen. – 3rd ed. – Amsterdam, 2007. – 463 p.
3. Гихман, И. И. *Стохастические дифференциальные уравнения* / И. И. Гихман, А. В. Скороход. – Киев: Наук. думка, 1968. – 354 с.
4. Кузнецов, Д. Ф. Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений. 2 / Д. Ф. Кузнецов. – С.-Петербург: Изд-во Политехн. ун-та, 2006. – 764 с.
5. Kloeden, P. E. *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations* / P. E. Kloeden, E. Platen. – Berlin: Springer, 1992. – 636 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-12616-5>
6. Kloeden, P. E. *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations Through Computer Experiments* / P. E. Kloeden, E. Platen, H. Schurz. – Berlin: Springer, 1994. – 309 p.
7. Onsager, L. Fluctuations and irreversible processes / L. Onsager, S. Machlup // *Phys. Rev.* – 1953. Vol. 91, № 6. – P. 1505–1512. <https://doi.org/10.1103/physrev.91.1505>
8. Langouche, F. *Functional Integration and Semiclassical Expansions* / F. Langouche, D. Roekaerts, E. Tirapegui. – Dordrecht: D. Reidel Pub.Co., 1982. – 315 p. <https://doi.org/10.1007/978-94-017-1634-5>
9. Wio, H. S. *Path Integration to Stochastic Process: an Introduction* / Horacio S. Wio. – World Scientific Publishing Company, 2012. – 176 p. <https://doi.org/10.1142/8695>
10. Bennati, E. A path integral approach to derivative security pricing I: formalism and analytical results / E. Bennati, M. Rosa-Clot, S. Taddei // *Int. J. Theor. Appl. Finan.* – 1999. – Vol. 2, № 4. – P. 381–407. <https://doi.org/10.1142/s0219024999000200>
11. Graham, R. Path integral formulation of general diffusion processes / R. Graham // *Z. Phys. B: Condens. Matter and Quanta.* – 1977. – Vol. 26, № 3. – P. 281–290. <https://doi.org/10.1007/bf01312935>
12. Graham, R. Lagrangian for diffusion in curved phase space / R. Graham // *Phys. Rev. Lett.* – 1977. – Vol. 38, № 2. – P. 51–53. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.38.51>
13. Применение функциональных интегралов к стохастическим уравнениям / Э. А. Айрян [и др.] // *Мат. моделирование.* – 2016. – Т. 28, № 11. – С. 113–125.
14. Глимм, Дж. *Математические методы квантовой физики. Подход с использованием функциональных интегралов: пер. с англ.* / Дж. Глимм, А. Джаффе. – М.: Мир, 1984. – 448 с.
15. Feynman, R. P. *Quantum Mechanics and Path Integrals* / R. P. Feynman, A. R. Hibbs. – New York: McGraw-Hill, 1965. – 365 p.
16. Крылов, В. И. *Вычислительные методы высшей математики: в 2 т.* / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный. – Минск: Выш. шк., 1975. – Т. 2. – 584 с.
17. Кулябов, Д. С. Введение согласованного стохастического члена в уравнение модели роста популяций / Д. С. Кулябов, А. В. Демидова // *Вестн. РУДН. Сер. Математика. Информатика. Физика.* – 2012. – № 3. – С. 69–78.
18. Влияние стохастизации на одношаговые модели / А. В. Демидова [и др.] // *Вестн. РУДН. Сер. Математика. Информатика. Физика.* – 2014. – № 1. – С. 71–85.

References

1. Gardiner C. W. *Handbook of Stochastic Methods: For Physics, Chemistry, and the Natural Sciences*. 2nd ed. Springer-Verlag, 1986, 442 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-02452-2>
2. Van Kampen N. G. *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*. 3rd ed. Amsterdam, 2007. 463 p.

3. Gikhman I. I., Skorokhod A. V. *Stochastic Differential Equations*. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1968. 354 p. (in Russian).
4. Kuznetsov D. F. *Numerical Integration of Stochastic Differential Equations*. 2. S.-Peterburg, Polytechnic University Publishing House, 2006. 764 p. (in Russian).
5. Kloeden P. E., Platen E. *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Berlin, Springer, 1992. 636 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-12616-5>
6. Kloeden P. E., Platen E. and Schurz H. *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations Through Computer Experiments*. Berlin, Springer, 1994. 309 p.
7. Onsager L., Machlup S. Fluctuations and Irreversible Processes. *Physical Review*, 1953, vol. 91, no. 6, pp. 1505–1512. <https://doi.org/10.1103/physrev.91.1505>
8. Langouche F., Roekaerts D., Tirapegui E. *Functional Integration and Semiclassical Expansions*. Dordrecht: D. Reidel Pub.Co., 1982. 315 p. <https://doi.org/10.1007/978-94-017-1634-5>
9. Wio H. S. *Application of Path Integration to Stochastic Process: an Introduction*. World Scientific Publishing Company, 2013. 176 p. <https://doi.org/10.1142/8695>
10. Bennati E., Rosa-Clot M., Taddei S. A path integral approach to derivative security pricing I: formalism and analytical results. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 1999, vol. 2, no. 4, pp. 381–407. <https://doi.org/10.1142/s0219024999000200>
11. Graham R. Path integral formulation of general diffusion processes. *Zeitschrift fur Physik B Condensed Matter and Quanta*, 1977, vol. 26, no. 3, pp. 281–290. <https://doi.org/10.1007/bf01312935>
12. Graham R. Lagrangian for diffusion in curved phase space. *Physical Review Letters*, 1977, vol. 38, no. 2, pp. 51–53. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.38.51>
13. Ayryan E. A., Egorov A. D., Kulyabov D. S., Malyutin V. B., Sevastyanov L. A. Application of functional integrals to stochastic equations. *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2017, vol. 9, no. 3, pp. 339–348. <https://doi.org/10.1134/s2070048217030024>
14. Glimm J., Jaffe A. *Quantum Physics. A Functional Integral Point of View*. Berlin, Heidelberg, New York, Springer, 1981. <https://doi.org/10.1007/978-1-4684-0121-9>
15. Feynman R. P., Hibbs A. R. *Quantum Mechanics and Path Integrals*. New York, McGraw-Hill, 1965. 365 p.
16. Krylov V. I., Bobkov V. V., Monastyrnyi P. I. *Numerical Methods of Higher Mathematics. Vol. 2*. Minsk, Vysheishaya Shkola Publ., 1975. 584 p. (in Russian).
17. Kulyabov D. S. and Demidova A. V. Introduction of self-consistent term in stochastic population model equation. *Vestnik RUDN. Seriya Matematika. Informatika. Fizika = RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics*, 2012, no. 3, pp. 69–78 (in Russian).
18. Demidova A. V., Gevorkian M. N., Egorov A. D., Kuliabov D. S., Korolkova A. V., and Sevastianov L. A. Influence of stochastization on one-step models, *Vestnik RUDN. Seriya Matematika. Informatika. Fizika = RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics*, 2014, no. 1, pp. 71–85 (in Russian).

Информация об авторах

Айрян Эдик Арташевич – кандидат физико-математических наук, заведующий сектором, лаборатория информационных технологий, Объединенный институт ядерных исследований (ул. Жолио-Кюри, 6, 141980, г. Дубна, Российская Федерация). E-mail: ayrjan@jinr.ru

Егоров Александр Дмитриевич – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: egorov@im.bas-net.by

Кулябов Дмитрий Сергеевич – доктор физико-математических наук, доцент, кафедра прикладной информатики и теории вероятностей, Российский университет дружбы народов (ул. Миклухо-Маклая, 6, 117198, г. Москва, Российская Федерация). E-mail: kulyabov_ds@rudn.university

Малютин Виктор Борисович – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: malyutin@im.bas-net.by

Севастьянов Леонид Антонович – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра прикладной информатики и теории вероятностей, Российский университет дружбы народов (ул. Миклухо-Маклая, 6, 117198, г. Москва, Российская Федерация). E-mail: sevastianov_la@rudn.university

Information about the authors

Edik A. Ayryan – Ph. D. (Physics and Mathematics), Head of the Sector of the Laboratory of Information Technologies, Joint Institute for Nuclear Research (6, Joliot-Curie Str., 141980, Dubna, Russian Federation). E-mail: ayrjan@jinr.ru

Alexandr D. Egorov – D. Sc. (Physics and Mathematics), Chief Researcher, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: egorov@im.bas-net.by

Dmitry S. Kulyabov – D. Sc. (Physics and Mathematics), Assistant Professor, Department of Applied Probability and Informatics, RUDN University (6, Mikluho-Maklaya Str., 117198, Moscow, Russian Federation). E-mail: kulyabov_ds@rudn.university

Victor B. Malyutin – D. Sc. (Physics and Mathematics), Leading Researcher, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: malyutin@im.bas-net.by

Leonid A. Sevastyanov – D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Department of Applied Probability and Informatics, RUDN University (6, Mikluho-Maklaya Str., 117198, Moscow, Russian Federation). E-mail: sevastianov_la@rudn.university

ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 519.671
<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-3-290-299>

Поступила в редакцию 07.05.2018
Received 07.05.2018

П. П. Забрейко, А. В. Кривко-Красько

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМ РОЛЛЯ И ДАРБУ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Аннотация. Как известно, классические теоремы Ролля и Дарбу для функции одной переменной устанавливают существование критической точки по поведению функции на концах отрезка. Возникает вопрос о возможности переноса теорем Ролля и Дарбу для функций двух переменных. Более точно, определяется ли существование критической точки в $\bar{\Omega}$ по поведению функции f на границе $\partial\Omega$ области Ω . Как было показано А. И. Перовым, такие обобщения можно получить с помощью понятия вращения. В настоящей работе устанавливаются более глубокие связи между теоремами Ролля, Дарбу и вращением векторного поля на границе $\partial\Omega$. Также приводятся некоторые новые формулы для вычисления вращения векторного поля на границе $\partial\Omega$, на основе которых сформулированы утверждения о существовании критических точек.

Ключевые слова: теорема Ролля, теорема Дарбу, функция двух переменных, критическая точка, векторное поле, вращение, относительное вращение, индекс особой точки, экстремум функции

Для цитирования. Забрейко, П. П. Обобщение теорем Ролля и Дарбу для функций двух переменных / П. П. Забрейко, А. В. Кривко-Красько // Вес. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2018. – Т. 54, № 3. – С. 290–299. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-3-290-299>

P. P. Zabreiko, A. V. Krivko-Krasko

Belarusian State University, Minsk, Belarus

EXTENSION OF THE ROLLE AND DARBOUX THEOREMS TO THE FUNCTIONS OF TWO VARIABLES

Abstract. As well known, the classical Rolle and Darboux theorems for a function of one variable establish the existence of a critical point in the behavior of a function at the ends of a closed interval. The question arises of the possibility of extension of the Rolle and Darboux theorems to functions of two variables. More precisely is the existence of a critical point in $\bar{\Omega}$ determined by the behavior of the function f on the boundary of the $\partial\Omega$ domain Ω . As shown by A. I. Perov, such extension can be obtained with the help of the concept of rotation. In this article, we establish deeper relations between the Rolle and Darboux theorems and the rotation of a vector field on the boundary $\partial\Omega$. We also present some new formulas for calculating the rotation of a vector field on the boundary, on the basis of which statements about the existence of critical points are formulated.

Keywords: Rolle theorem, Darboux theorem, function of two variables, critical point, vector field, rotation, relative rotation, singular point index, extremum of the function

For citation. Zabreiko P. P., Krivko-Krasko A. V. Extension of the Rolle and Darboux theorems to the functions of two variables. *Vestsi Natsyional'nei akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, vol. 54, no. 3, pp. 290–299 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-3-290-299>

Введение. В классическом анализе существуют две известные теоремы об обращении в нуль производной функции, заданной на отрезке $[a, b]$. Первая из них, теорема Ролля, утверждает, что производная дифференцируемой функции обращается внутри отрезка $[a, b]$ в нуль, если значения этой функции на концах отрезка совпадают (рис. 1, *a*). Вторая, теорема Дарбу, утверждает, что дифференцируемая функция, производная которой на концах отрезка имеет разные знаки, также имеет внутри отрезка точку, в которой производная обращается в нуль (рис. 1, *b*). При этом в теореме Ролля никакой информации о самой производной не требуется; в теореме Дарбу требуется информация о производной функции на концах отрезка [1].

Важно отметить, что указанные теоремы не вытекают одна из другой. Так, в условиях теоремы Ролля условие теоремы Дарбу, вообще говоря, не выполнено, и наоборот.

В обеих теоремах (теоремы Ролля и Дарбу) существование точки, в которой производная функции обращается в нуль (критической точки), устанавливается по поведению функции на границе отрезка. Возникает естественное желание ответить на вопрос о возможности сохранения такого утверждения для функций нескольких переменных, т. е. определяется ли существование критической точки области Ω по поведению функции $f(x)$ на границе области $\partial\Omega$. В настоящей работе ограничимся случаем функции двух переменных.

Естественно для доказательства существования критической точки использовать вращение векторного поля $f'(x)$. Как известно, если вращение векторного поля $f'(x)$ на границе области $\partial\Omega$ отлично от нуля, то существует критическая точка [3].

Следует отметить, что в зависимости от значения вращения соответствующего векторного поля $f'(x)$ возможны различные случаи выполнения теорем Ролля и Дарбу. Так, на рис. 1 *a, b* представлены различные случаи выполнения теоремы Ролля: когда вращение соответствующего векторного поля отлично от нуля (см. рис. 1, *a*) и равно нулю (векторное поле определяется через $f'(x)$; см. 1, *b*). На рис. 1 *c, d* показаны соответственно различные случаи выполнения теоремы Дарбу: когда вращение соответствующего векторного поля отлично от нуля (см. рис. 1, *c*) и равно нулю (см. рис. 1, *d*).

Перейдем к функциям двух переменных. Рассмотрим в области Ω , ограниченной простой жордановой кривой $\partial\Omega$ (в силу теоремы Жордана, область Ω односвязна), непрерывно дифференцируемую на $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ функцию f .

Наиболее естественным обобщением теоремы Дарбу на функции двух переменных является утверждение, основанное (см. [3, 4]) на понятии вращения $\gamma(f'(x), \Omega)$ векторного поля $f'(x)$ на $\partial\Omega$, – условия теоремы Дарбу означают, что поле $f'(x)$ на границе $\partial\Omega = \{a, b\}$ области $\Omega = (a, b)$

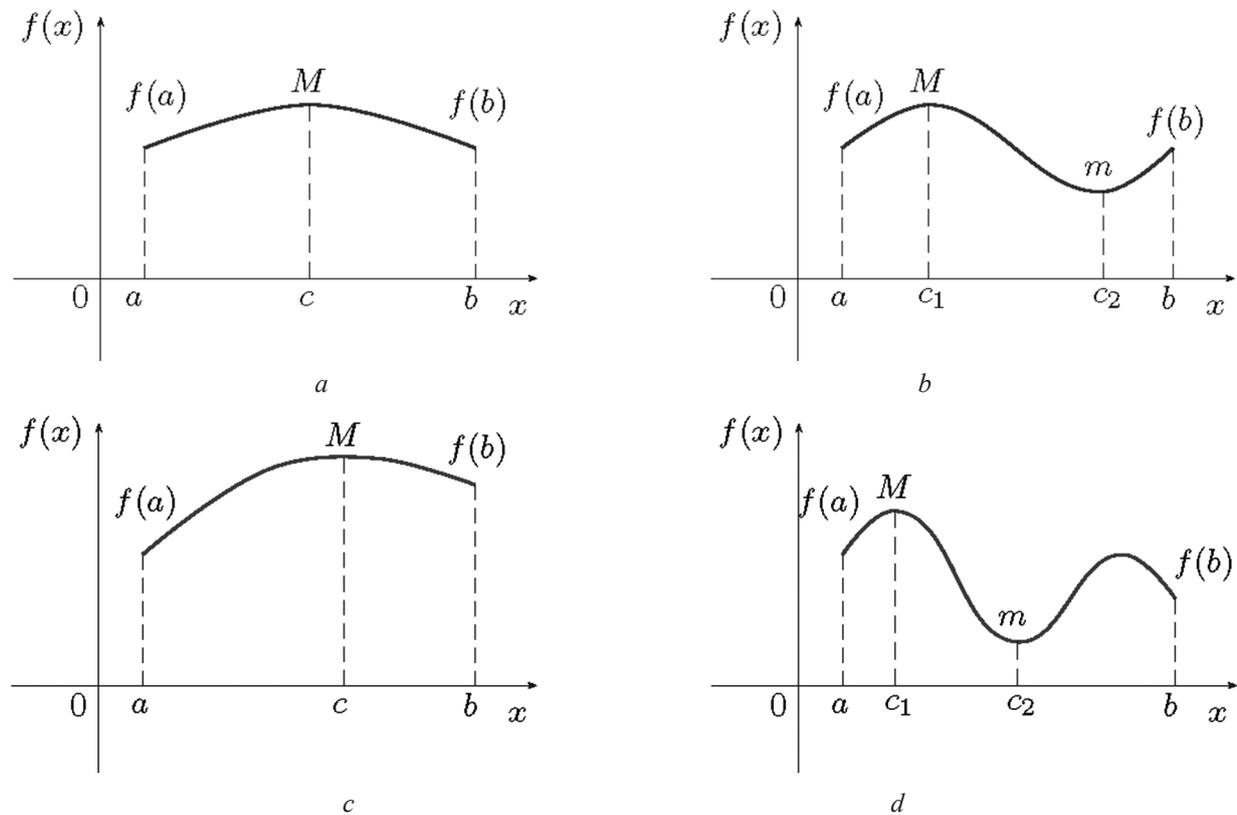


Рис. 1. Различные случаи выполнения теорем Ролля и Дарбу
 Fig. 1. Different cases of fulfillment of the Rolle and Darboux theorems

не обращается в нуль и его вращение $\gamma(f'(x), \Omega)$ отлично от нуля. Однако последнее утверждение верно [3, 4] и для функций от нескольких переменных: *если поле $f'(x)$ на границе $\partial\Omega$ области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ не обращается в нуль и его вращение $\gamma(f'(x), \Omega)$ на границе этой области отлично от нуля, то функция $f: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ имеет в Ω по крайней мере одну критическую точку*. В связи с этим утверждением возникает задача о вычислении вращения $\gamma(f'(x), \Omega)$. Ниже будут приведены некоторые новые формулы вычисления вращения векторных полей на плоскости.

Аналогом предположения в теореме Ролля будет предположение, что функция f является на $\partial\Omega$ постоянной. В таком случае очевидно существование точки x^* такой, что $f'(x^*) = 0$ (доказательство этого утверждения дословно повторяет доказательство теоремы Ролля). Однако такое обобщение теоремы Ролля не слишком интересно – реально оно означает, что $\partial\Omega$ является линией уровня функции f . Можно сформулировать и более сложное утверждение: *если линия уровня функции f касается границы $\partial\Omega$ в одной или нескольких точках и при этом целиком лежит в области Ω , то существует точка x^* такая, что $f'(x^*) = 0$* .

Как показывают приведенные выше примеры, вращение $\gamma(f'(x), \Omega)$ векторного поля $f'(x)$ на границе $\partial\Omega = \{a, b\}$ области $\Omega = (a, b)$ может обращаться в нуль, и по этой причине теория вращения при переходе к функциям многих переменных непосредственно неприменима. Однако в соответствующих построениях можно предполагать, что $f(\Omega) \subset f(\partial\Omega)$ – при невыполнении этого включения функция f в области Ω принимает значения вне $[m_-(f), m_+(f)]$ ($m_-(f) = \min_{x \in \partial\Omega} f(x)$, $m_+(f) = \max_{x \in \partial\Omega} f(x)$) и, значит, имеет по крайней мере одну критическую точку.

Более того, при исследовании критических точек функций многих переменных, как нетрудно видеть, можно даже предполагать, что $m_-(f) < f(x) < m_+(f)$. В этой ситуации для доказательства существования критических точек функции f в области Ω можно также пытаться использовать понятие вращения. На этом пути получена известная теорема Перова [5] о существовании критических точек функций двух переменных. Таким образом, при обобщении теоремы Ролля на функции многих переменных можно использовать вышеупомянутое дополнительное условие.

Оказывается, что *обе теоремы (теоремы Ролля и Дарбу) непосредственно переносятся на двумерный случай*.

Отметим, что если функция $\phi(s)$ имеет только один максимум или один минимум, то $\gamma(f'(x), \Omega)$ может быть равно нулю. На рис. 2, а представлен пример такого графика функции $\phi(s)$. Более

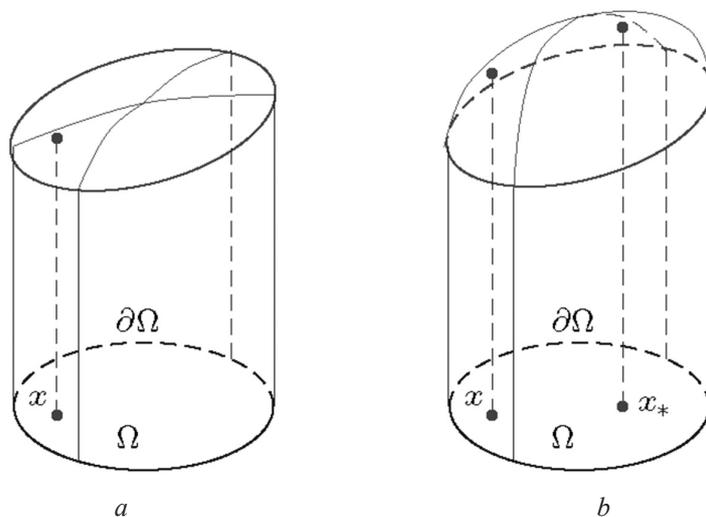


Рис. 2. Критические точки функции $f(x)$
Fig. 2. Critical points of the function $f(x)$

того, в работе [5] показано, что если функция $\varphi(s)$ имеет один максимум и один минимум, то функция f может быть продолжена на Ω так, что не будет иметь в Ω критических точек. Рис. 2, *a*, *b* иллюстрирует, что по функции $\varphi(s)$ в общем случае нельзя сказать, есть ли критические точки у функции f или нет. Так, на рис. 2, *a* представлен случай, когда функция f не имеет критических точек, а на рис. 2, *b* – имеет.

Теорема Дарбу. Пусть $\Phi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$ – произвольное непрерывное векторное поле, не обращающееся в нуль на границе $\partial\Omega$ области Ω . Будем предполагать, что граница $\partial\Omega$ области Ω является простой жордановой кривой (в силу теоремы Жордана, область Ω односвязна).

Опишем одну общую схему вычисления вращения $\gamma(\Phi, \Omega)$ в описанной ситуации (некоторые частные случаи этой схемы приведены в [3]). Пусть h – произвольный ненулевой вектор; положим

$$H(\Phi, \partial\Omega) = \{x \in \partial\Omega : \Phi(x) \uparrow\uparrow h\}.$$

Здесь символ $\uparrow\uparrow$ означает, что векторы $\Phi(x)$ и h одинаково направлены, т. е. $\Phi(x) = \lambda h$ при некотором положительном λ . Множество $H(\Phi, \partial\Omega)$ – замкнутое подмножество множества $\partial\Omega$ (рис. 3).

В силу замкнутости множества $H(\Phi, \partial\Omega)$, дополнение $\partial\Omega \setminus H(\Phi, \partial\Omega)$ к нему в множестве $\partial\Omega$ является объединением конечного или счетного числа интервалов $I_\nu = (a_\nu, b_\nu)$, где $\nu = 1, 2, \dots, n$ или $\nu = 1, 2, \dots$ соответственно. Обозначим это множество интервалов через $\mathcal{H}(\Phi, \Omega)$. При этом можно считать, что при всех $\nu \in \mathcal{H}(\Phi, \Omega)$ переход от точки a_ν к точке b_ν осуществляется в положительном направлении обхода границы $\partial\Omega$ (против часовой стрелки).

Отметим также, что в случае конечного множества $\mathcal{H}(\Phi, \Omega)$ нумерация интервалов $\{I_\nu : \nu \in \mathcal{H}(\Phi, \Omega)\}$ может быть выбрана так, что при возрастании номера ν соответствующий интервал сдвигается на $\partial\Omega$ в положительном направлении; в случае же бесконечного множества $\mathcal{H}(\Phi, \Omega)$ нумераций с подобным свойством обычно не существует.

Пусть I_ν – один из интервалов из $\mathcal{H}(\Phi, \Omega)$. Очевидно, в граничных точках a_ν, b_ν этого интервала векторы $\Phi(a_\nu)$ и $\Phi(b_\nu)$ одинаково направлены с вектором h . Для точек $x \in \partial\Omega$ из интервала I_ν вектор $\Phi(x)$ не совпадает с направлением вектора h . Однако при значениях x из интервала I_ν , близких к a_ν , вектор $\Phi(x)$ направлен почти одинаково с вектором h . При этом эти векторы $\Phi(x)$ будут получаться из вектора $\Phi(a_\nu)$ малым изменением длины и малым поворотом либо в положительном направлении (против часовой стрелки), либо в отрицательном направлении (по часовой стрелке). Аналогично при значениях x из интервала I_ν , близких к b_ν , вектор $\Phi(x)$ будет получаться из вектора $\Phi(b_\nu)$ малым изменением длины и малым поворотом либо в положительном (против часовой стрелки), либо в отрицательном (по часовой стрелке) направлении.

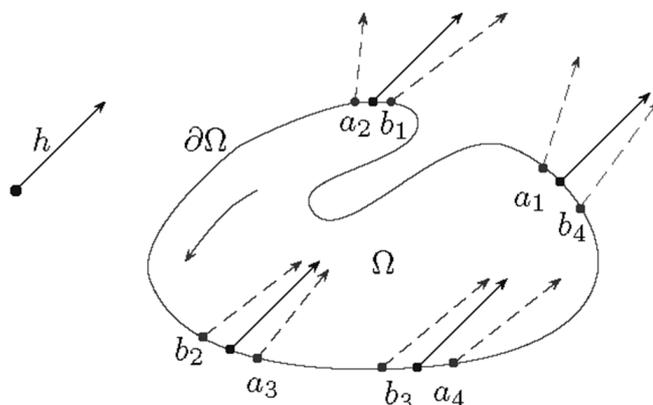


Рис. 3. Элементы множества $H(\Phi, \partial\Omega)$ ($n = 4$)

Fig. 3. Elements of the set $H(\Phi, \partial\Omega)$ ($n = 4$)

Для каждого интервала I_ν из $\mathcal{H}(\Phi, \Omega)$ векторного поля Φ на границе $\partial\Omega$ области Ω определим его h -характеристику $\chi_h(I_\nu)$:

– равную 1, если векторы $\Phi(x)$ вблизи точки a_ν получаются из вектора $\Phi(a_\nu)$ малым поворотом в положительном направлении, а вблизи точки b_ν – из вектора $\Phi(b_\nu)$ малым поворотом в отрицательном направлении;

– равную -1 , если векторы $\Phi(x)$ вблизи точки a_ν получаются из вектора $\Phi(a_\nu)$ малым поворотом в отрицательном направлении, а вблизи точки b_ν – из вектора $\Phi(b_\nu)$ малым поворотом в положительном направлении;

– равную 0, если векторы $\Phi(x)$ вблизи точек a_ν и b_ν получаются малым поворотом из векторов $\Phi(a_\nu)$ и $\Phi(b_\nu)$ соответственно в одном и том же (положительном или отрицательном) направлении.

Непрерывное векторное поле Φ на компактном множестве $\partial\Omega$ равномерно непрерывно. Поэтому существует такое положительное число δ , что для любых двух точек $x', x'' \in \partial\Omega$, расстояние между которыми не превышает δ , угол между векторами $\Phi(x')$ и $\Phi(x'')$ не превышает 30° . Тем самым на любой дуге границы $\partial\Omega$, диаметр которой меньше δ , углы между векторами $\Phi(x')$ и $\Phi(x'')$ в точках x' и x'' этой дуги не превышают 30° . В частности, это верно для каждого интервала $I_\nu \in \mathcal{H}(\Phi, \Omega)$, диаметр которого меньше δ . Но отсюда следует, что h -характеристика $\chi_h(I_\nu)$ равна нулю. Нетрудно видеть, что среди интервалов $I_\nu \in \mathcal{H}(\Phi, \Omega)$ может быть только конечное число интервалов с диаметром больше δ . Тем самым, в случае бесконечного множества $\mathcal{H}(\Phi, \Omega)$ для всех ν , кроме конечного их числа, h -характеристики $\chi_h(I_\nu)$ равны нулю. Таким образом, в описанной ситуации определена сумма $\sum_{\nu \in \mathcal{H}(\Phi, \Omega)} \chi_h(I_\nu)$.

Пусть теперь для интервала I_ν h -характеристика равна 1. Тогда при движении точки $x \in I_\nu$ от точки a_ν к точке b_ν (такое движение осуществляется в положительном направлении) вектор $\Phi(x)$ должен сделать один поворот в положительном направлении. Действительно, в противном случае в близких к точке a_ν точках $x \in I_\nu$ он находится «по левую сторону» от вектора h , а в близких к точке b_ν точках $x \in I_\nu$ – «по правую сторону» от вектора h . Если бы вектор $\Phi(x)$ при движении точки $x \in I_\nu$ от a_ν к b_ν не делал полного оборота против часовой стрелки, то в некоторой точке $x \in I_\nu$ его направление должно было бы совпасть с направлением вектора h , что невозможно. Аналогично, если для I_ν h -характеристика равна -1 , то при движении точки $x \in I_\nu$ от a_ν к b_ν вектор $\Phi(x)$ сделает один оборот по часовой стрелке.

Проведенные рассуждения означают справедливость следующей леммы.

Лемма 1. Пусть $\Phi: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$ – произвольное непрерывное векторное поле, не обращающееся в нуль на границе $\partial\Omega$ области Ω , и h – произвольный ненулевой вектор. Тогда справедливо равенство

$$\gamma(\Phi, \Omega) = \sum_{\nu \in \mathcal{H}(\Phi, \Omega)} \chi_h(I_\nu). \quad (1)$$

Формула (1) является обобщением формулы (1.19) ([3], гл. 1) вычисления вращения $\gamma(\Phi, \Omega)$ векторного поля Φ на границе $\partial\Omega$ области Ω .

Используя лемму 1, можно сформулировать следующий аналог теоремы Дарбу для функций двух переменных.

Теорема 1. Пусть $f: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывно дифференцируемая функция. И пусть для некоторого ненулевого вектора h справедливо неравенство

$$\sum_{\nu \in \mathcal{H}(\Phi, \Omega)} \chi_h(I_\nu) \neq 0. \quad (2)$$

Тогда функция $f(x)$ имеет в $\bar{\Omega}$ по крайней мере одну критическую точку.

Действительно, если $f(x)$ имеет критические точки на $\partial\Omega$, то утверждение тривиально. Если же функция $f(x)$ не имеет на $\partial\Omega$ критических точек, то, в силу леммы 1, $\gamma(f'(x), \Omega) \neq 0$, и поэтому $f(x)$ имеет по крайней мере одну критическую точку в $\bar{\Omega}$.

Приведем описание еще одного способа вычисления вращения $\gamma(\Phi, \Omega)$ векторного поля Φ на границе $\partial\Omega$ области Ω , который не зависит от выбора вектора h . Для такого способа необходимо дополнительно предположить, что граница $\partial\Omega$ – гладкая кривая. Тогда в каждой $x \in \partial\Omega$ существует касательный вектор и вектор внешней нормали n .

Обозначим через $\theta(x)$ угол между вектором $\Phi(x)$ и направлением внешней нормали n в точке $x \in \partial\Omega$. Приращение функции $\theta(x)$ после обхода границы $\partial\Omega$, выраженное в единицах полного оборота, называют *относительным вращением* поля Φ на границе $\partial\Omega$ области Ω [3]. Обозначим относительное вращение через $\tilde{\gamma}(\Phi, \Omega)$.

Вращение $\gamma(\Phi, \Omega)$ связано с относительным вращением $\tilde{\gamma}(\Phi, \Omega)$ поля Φ на границе $\partial\Omega$ области Ω равенством ([3], упр. 4.7, с. 43):

$$\gamma(\Phi, \Omega) = \tilde{\gamma}(\Phi, \Omega) - \gamma_0, \quad (3)$$

где γ_0 – вращение поля внешних нормалей.

Для вычисления относительного вращения $\tilde{\gamma}(\Phi, \Omega)$ проведем рассуждения, которые во многом повторяют вышеприведенные рассуждения для вычисления вращения $\gamma(\Phi, \Omega)$ векторного поля Φ на границе $\partial\Omega$ области Ω по произвольному вектору h .

Положим

$$N(\Phi, \partial\Omega) = \{x \in \partial\Omega : \Phi(x) \uparrow\uparrow n\}.$$

Если поле $\Phi(x)$ не вырождено, то множество $N(\Phi, \partial\Omega)$ является замкнутым и, в свою очередь, дополнение $\partial\Omega \setminus N(\Phi, \partial\Omega)$ является объединением конечного или счетного числа интервалов $J_\sigma = (a_\sigma, b_\sigma)$, где $\sigma = 1, 2, \dots, s$ или $\sigma = 1, 2, \dots$ соответственно. Обозначим это множество интервалов через $\mathcal{N}(\Phi, \Omega)$.

В соответствии с предыдущими рассуждениями для каждого интервала J_σ определим его n -характеристику $\chi_n(J_\sigma)$. При этом n -характеристика $\chi_n(J_\sigma)$ очевидным образом совпадает с числом поворотов вектора $\Phi(x)$ от a_σ к b_σ , в то же время вне интервалов J_σ вектор $\Phi(x)$ не делает ни одного оборота.

В силу (3) и равенства $\gamma_0 = 1$ справедлива следующая

Лемма 2. Пусть $\Phi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$ – произвольное непрерывное векторное поле, не обращающееся в нуль на границе $\partial\Omega$ области Ω , и граница $\partial\Omega$ области Ω – гладкая кривая. Тогда справедливо равенство

$$\gamma(\Phi, \Omega) = \sum_{\sigma \in \mathcal{N}(\Phi, \Omega)} \chi_n(J_\sigma) - 1. \quad (4)$$

Для доказательства леммы необходимо воспользоваться тем фактом, что вращение поля внешних нормалей γ_0 равно 1 [3]. Покажем это. Рассмотрим поле касательных к границе $\partial\Omega$ области Ω . Вращение поля касательных к границе $\partial\Omega$ равно 1. Доказательство этого утверждения можно найти, например, в [3]. Следовательно, вращение поля нормалей к границе $\partial\Omega$ также будет равно 1 (это вытекает из того факта, что поле внешних нормалей можно получить из поля касательных поворотом на постоянный угол $-\frac{\pi}{2}$).

Теорема 2. Пусть $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывно дифференцируемая функция и граница $\partial\Omega$ области Ω – гладкая кривая. И пусть справедливо неравенство

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{N}(\Phi, \Omega)} \chi_n(J_\sigma) \neq 1. \quad (5)$$

Тогда функция $f(x)$ имеет в $\bar{\Omega}$ по крайней мере одну критическую точку.

Теорема Ролля. Будем снова предполагать, что граница $\partial\Omega$ – гладкая кривая, и рассмотрим вопрос о том, определяется ли существование критической точки $\bar{\Omega}$ по поведению функции $f(x)$ на границе $\partial\Omega$ области. Иными словами, возможно ли выяснить, когда вращение $\gamma(\Phi, \Omega)$ определяется графиком функции $f(x)$ на границе $\partial\Omega$ (рис. 4). К сожалению, в общем случае ответить на этот вопрос нельзя.

Один из случаев, когда ответ оказывается положительным, был рассмотрен в [3]; дальнейшие обобщения описаны в работе [5]. Приведем некоторые необходимые определения. Пусть M_- и M_+ – наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на $\bar{\Omega}$ и $M_- \neq M_+$.

Открытая дуга $\widehat{pq} \subset \partial\Omega$ с концами p и q называется *дугой максимумов (минимумов)*, если $f(p) = f(q) = M_+$ ($f(p) = f(q) = M_-$), на самой дуге функция $f(x)$ не принимает значения M_- (M_+) и дуга \widehat{pq} не является частью дуги с описанными выше двумя свойствами. Дуги максимума и минимума могут вырождаться в точку. Легко проверяется, что дуги максимума и минимума существуют, их конечное число и число дуг максимума совпадает с числом дуг минимума; пусть t – это число. Дугу \widehat{pq} максимума (минимума) назовем *регулярной*, если на ней между p и q нет точек ξ локального максимума с $f(\xi) < M_+$ (минимума с $f(\xi) = M_-$).

Открытые дуги, соединяющие соседние дуги максимума и минимума, будем называть *промежуточными*. Промежуточную дугу будем называть *регулярной*, если на ней нет точек локального экстремума.

Дугу максимума, минимума или промежуточную будем называть *квазирегулярной*, если на ней имеется лишь конечное число точек строгого максимума или минимума. Если все дуги (максимума, минимума и промежуточные) являются квазирегулярными, то обозначим через k число дуг, соединяющих соседние точки строгого экстремума, отличных от M_+ и M_- .

В работе [5] установлены следующие утверждения.

1. Если дуги максимума и минимума функции $f(x)$ на $\partial\Omega$ и промежуточные дуги регулярны и если $t \neq 1$, то функция $f(x)$ имеет в Ω по крайней мере одну критическую точку.

2. Если дуги максимума и минимума и промежуточные дуги функции $f(x)$ на $\partial\Omega$ квазирегулярны и $t \neq 1$, причем $k < t - 1$, то функция $f(x)$ имеет в Ω по крайней мере одну критическую точку.

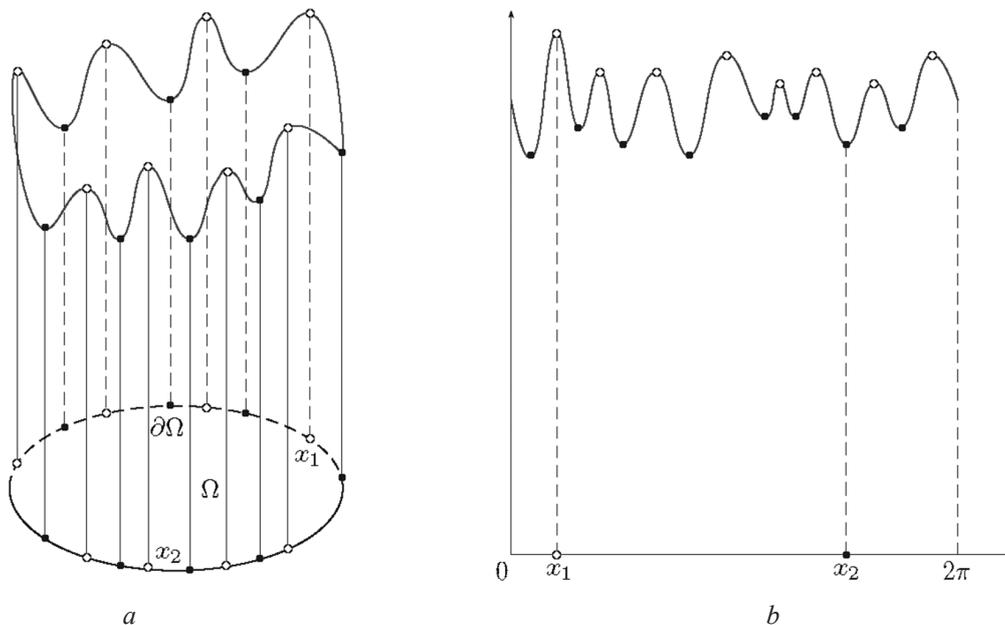


Рис. 4. График функции $f(x)$ на границе $\partial\Omega$
 Fig. 4. Graph of the function $f(x)$ on the boundary $\partial\Omega$

Обе теоремы А. И. Перова, как нетрудно видеть, вытекают из теоремы 2. Более того, из теоремы 2 вытекают некоторые более общие, чем теоремы А. И. Перова, утверждения.

Напомним, что в точках экстремума функции $f(x)$ на $\partial\Omega$ вектор $f'(x)$ направлен по нормали к кривой $\partial\Omega$.

Рассмотрим простейший случай, когда функция $f(x)$ имеет на границе $\partial\Omega$ области Ω конечное число точек экстремума. Разобьем множество точек экстремума функции $f(x)$ на $\partial\Omega$ на два класса: точки, в которых нормаль направлена вне области Ω , и точки, в которых нормаль направлена внутрь области Ω . Точки первого класса будем называть *out-точками экстремума*, а точки второго класса – *in-точками экстремума*. В результате, точки максимума могут быть *out-* и *in-точками максимума* и, аналогично, точки минимума – *out-* и *in-точками минимума* (рис. 5).

Обозначим через $\mathcal{O}(f, \partial\Omega)$ множество *out-точек* экстремума функции f на $\partial\Omega$. В свою очередь, обозначим через $\mathcal{I}(f, \partial\Omega)$ – множество *in-точек* экстремума функции f на $\partial\Omega$.

Проанализируем поведение вектора $f'(x)$ при обходе в положительном направлении (против часовой стрелки) границы $\partial\Omega$ через точки множества $\mathcal{O}(f, \partial\Omega)$. При переходе через *out-точки* минимума (см. рис. 5) направление вектора $f'(x)$ меняется в сторону направления обхода границы $\partial\Omega$. В свою очередь, при переходе через *out-точки* максимума направление вектора $f'(x)$ меняется в противоположную сторону направления обхода границы $\partial\Omega$. Тогда общее количество оборотов вектора $f'(x)$ будет определяться по следующим возможным случаям:

- 1) вектор $f'(x)$ совершает один полный оборот в сторону положительного обхода $\partial\Omega$ между двумя соседними *out-точками* минимума;
- 2) вектор $f'(x)$ совершает один полный оборот в противоположную сторону относительно положительного обхода $\partial\Omega$ между двумя соседними *out-точками* максимума;
- 3) вектор $f'(x)$ не совершает оборотов между подряд идущими *out-точкой* минимума и *out-точкой* максимума и, наоборот, между соседними *out-точкой* максимума и *out-точкой* минимума.

Обозначим через d^+ количество *out-точек* минимума функции $f(x)$ на границе $\partial\Omega$ и d^- – количество *out-точек* максимума функции $f(x)$ на границе $\partial\Omega$.

Теорема 3. Пусть $f: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывно дифференцируемая функция и граница $\partial\Omega$ области Ω – гладкая кривая. И пусть $d^+ - d^- \neq 1$. Тогда функция $f(x)$ имеет в $\bar{\Omega}$ по крайней мере одну критическую точку.

Аналогичные рассуждения можно повторить и для точек множества $\mathcal{I}(f, \partial\Omega)$.

Перейдем теперь к рассмотрению общего случая. В предположении, что $f'(x) \neq 0$ для $x \in \partial\Omega$, множество

$$N(f'(x), \partial\Omega) = \{x \in \partial\Omega : f'(x) \uparrow\uparrow n\}$$

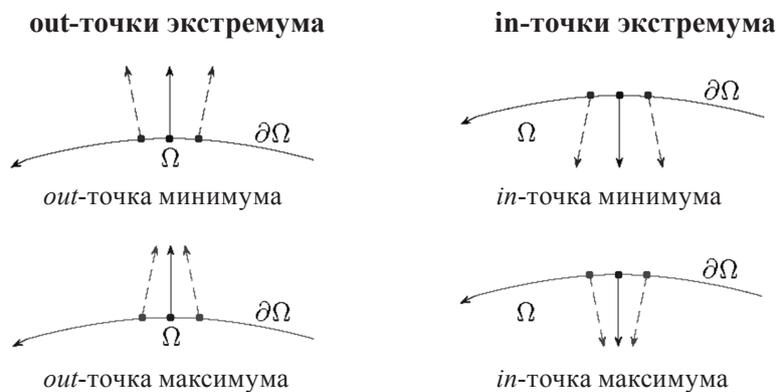


Рис. 5. Точки экстремума функции $f(x)$ на $\partial\Omega$

Fig. 5. Extremum points of the function $f(x)$ on $\partial\Omega$

является замкнутым. Следовательно, дополнение $\partial\Omega \setminus N(f'(x), \partial\Omega)$ является открытым множеством и представимо в виде объединения конечного или счетного числа интервалов $J_\sigma = (a_\sigma, b_\sigma)$, где $a_\sigma, b_\sigma \in N(f'(x), \partial\Omega)$, $\sigma = 1, 2, \dots, \tilde{n}$ или $\sigma = 1, 2, \dots$ соответственно.

Пусть $x_0 \in \partial\Omega$. В силу непрерывной дифференцируемости функции $f(x)$ на границе $\partial\Omega$, существует достаточно малое $\delta > 0$ такое, что для любого $\xi \in \partial\Omega$, удовлетворяющего неравенству $\|x_0 - \xi\| \leq \delta$, направление вектора $f'(\xi)$ «почти» совпадает с направлением вектора $f'(x_0)$. Поэтому, если для интервала $J_\sigma = (a_\sigma, b_\sigma)$ выполнено условие $\|a_\sigma - b_\sigma\| \leq \delta$, то точки a_σ и b_σ не могут быть одновременно *out*-точками экстремума. Значит, количество интервалов $J_\sigma = (a_\sigma, b_\sigma)$, для которых точки a_σ и b_σ являются одновременно *out*-точками экстремума, конечное число, и это число не зависит от числа δ .

Рассмотрим интервал $J_\sigma = (a_\sigma, b_\sigma)$, для которого точки a_σ и b_σ являются *out*-точками экстремума. При этом возможны следующие четыре случая (рис. 6):

1) a_σ и b_σ являются *out*-точками минимума; тогда вектор $f'(x)$ совершает один полный оборот в сторону положительного обхода $\partial\Omega$ между точками a_σ и b_σ (рис. 6, a);

2) a_σ и b_σ являются *out*-точками максимума; тогда вектор $f'(x)$ совершает один полный оборот в противоположную сторону относительно положительного обхода $\partial\Omega$ между точками a_σ и b_σ (рис. 6, b);

3) a_σ – *out*-точка минимума, b_σ – *out*-точка максимума и наоборот. В таких случаях $f'(x)$ не совершает оборотов между точками a_σ и b_σ (рис. 6, c и 6, d).

Таким образом, количество оборотов вектора $f'(x)$ зависит только от количества интервалов $J_\sigma = (a_\sigma, b_\sigma)$, для которых точки a_σ и b_σ являются одновременно *out*-точками минимума или *out*-точками максимума.

Обозначим через p^+ количество интервалов $J_\sigma = (a_\sigma, b_\sigma)$, для которых точки a_σ и b_σ являются *out*-точками минимума. В свою очередь, через p^- – количество интервалов $J_\sigma = (a_\sigma, b_\sigma)$, для которых точки a_σ и b_σ являются *out*-точками максимума.

Теорема 4. Пусть $f: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывно дифференцируемая функция, $f'(x) \neq 0$, граница $\partial\Omega$ области Ω – гладкая кривая. И пусть $p^+ - p^- \neq 1$. Тогда функция $f(x)$ имеет в $\bar{\Omega}$ по крайней мере одну критическую точку.

Отметим, что из теорем 3 и 4 также вытекает равенство

$$d^+ - d^- = p^+ - p^-.$$

Аналогичные рассуждения можно повторить и для *in*-точек экстремума.

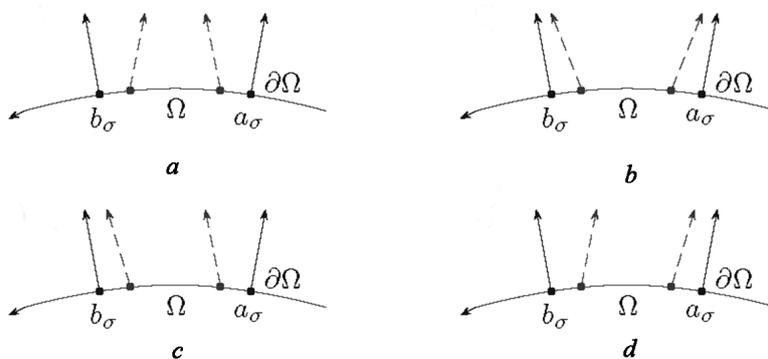


Рис. 6. *Out*-точки экстремума функции $f(x)$ на $\partial\Omega$

Fig. 6. Extremum *out*-points of the function $f(x)$ on $\partial\Omega$

Теорема 4 является обобщением основной теоремы А. И. Перова [5]: в последней дополнительно требовалось, чтобы значения функции $f(x)$ во всех точках *out*-максимума (и во всех точках *in*-минимума) совпадали с наибольшим (наименьшим) значением функции $f(x)$ на $\partial\Omega$.

Список использованных источников

1. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. / Г. М. Фихтенгольц. – М.: Гостехтеоретиздат, 1949. – Т. 1. – 690 с.
2. Красносельский, М. А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений / М. А. Красносельский. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1966. – 332 с.
3. Векторные поля на плоскости / М. А. Красносельский [и др.]. – М.: Физматгиз, 1963. – 245 с.
4. Красносельский, М. А. Геометрические методы нелинейного анализа / М. А. Красносельский, П. П. Забрейко. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1975. – 512 с.
5. Перов, А. И. Об одном обобщении теоремы Ролля / А. И. Перов // Тр. семинара по функцион. анализу. – Воронеж: Воронеж. ун-т, 1958. – Вып. 6. – С. 94–98.

References

1. Fichtengoltz G. M. *Course on Differential and Integral Calculus. Vol. 1.* Moscow, State Publishing House of Theoretical Literature. 690 p. (in Russian).
2. Krasnoselskii M. A. *The operator of translation along the trajectories of differential equations.* Moscow, Science, The Main Edition of Physical and Mathematical Literature, 1966. 332 p. (in Russian).
3. Krasnoselskii M. A., Perov A. I., Povolockii A. I., Zabreiko P. P. *Plane Vector Fields.* Moscow, State Publishing House of Physical and Mathematical Literature, 1963. 245 p. (in Russian).
4. Krasnoselskii M. A., Zabreiko P. P. *Geometric methods of nonlinear analysis.* Moscow, Science, The Main Edition of Physical and Mathematical Literature, 1975. 512 p. (in Russian).
5. Perov A. I. On a generalization of Rolle's theorem. *Trudy seminaro po funktsional'nomu analizu* [Proceedings of the Seminar on Functional Analysis]. Voronezh, Voronezh University, 1958, no. 6, pp. 94–98 (in Russian).

Информация об авторах

Забрейко Петр Петрович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры функционального анализа и аналитической экономики механико-математического факультета, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: zabreiko@mail.ru

Кривко-Красько Алексей Владимирович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры инновационного управления, Институт бизнеса Белорусского государственного университета (ул. Московская, 5, 220007, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: sbmt@mail.ru.

Information about the authors

Petr P. Zabreiko – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor of the Department of Functional Analysis and Analytical Economics of the Faculty of Physics and the Faculty of Mathematics, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: zabreiko@mail.ru

Aleksey V. Krivko-Krasko – Ph. D. (Physics and Mathematics), Assistant Professor, Assistant Professor of the Department of Innovation Management of the School of Business, Belarusian State University (5, Moskovskaya Str., 220007, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: sbmt@mail.ru

ФИЗИКА
PHYSICS

УДК 539.12
<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-3-300-315>

Поступила в редакцию 19.02.2018
Received 19.02.2018

Е. М. Овсюк, А. А. Голуб, А. Д. Коральков

Мозырский государственный педагогический университет им. И. П. Шамякина, Мозырь, Беларусь

**ОТРАЖЕНИЕ ОТ КОСМОЛОГИЧЕСКОГО БАРЬЕРА В ОСЦИЛЛИРУЮЩЕЙ
ВСЕЛЕННОЙ ДЕ СИТТЕРА ЧАСТИЦ ДИРАКА, МАЙОРАНЫ И ВЕЙЛЯ**

Аннотация. Известно, что геометрия пространства Лобачевского действует на поля частиц со спинами 0, 1/2, 1 как распределенное в пространстве идеальное зеркало. Глубина проникновения поля в такую среду растет с увеличением энергии поля. В силу того, что модель Лобачевского входит составным элементом в некоторые космологические модели, отмеченное свойство означает, что в таких моделях необходимо учитывать эффект наличия «космологического зеркала»: оно должно вести к перераспределению плотности частиц в пространстве. Выполненный ранее анализ предполагал статический характер геометрии пространства-времени. В настоящей работе проведено обобщение исследования для полей со спином 1/2 в случае осциллирующей модели Вселенной де Ситтера. Уравнение Дирака решено в нестатических квазидекартовых координатах, при этом используется диагонализация обобщенного оператора спиральности. Волновые функции частицы зависят от временной координаты нетривиальным образом, однако эффект полного отражения от эффективного потенциально барьера сохраняется и в нестатическом пространстве-времени, при этом он не зависит от времени. Аналогичные результаты имеют место для вещественного биспинорного поля Майораны. Для построения решений, описывающих эффект отражения, нужно использовать комбинации решений с противоположными спиральностями. Такие комбинации запрещены для вейлевских фермионов, поэтому эффект отражения отсутствует для вейлевских частиц. Показано, что периодическое обращение в нуль множителя $\cos^2 t = 0$ в осциллирующей метрике пространства-времени де Ситтера не приводит к сингулярному поведению решений уравнения для спинорного поля: около этих особых точек имеем простые асимптотики решений по временной переменной t в виде чистых фазовых множителей.

Ключевые слова: поле со спином 1/2, уравнения Дирака, Майораны, Вейля, осциллирующая Вселенная де Ситтера, эффективный потенциальный барьер, полное отражение частиц

Для цитирования. Овсюк, Е. М. Отражение от космологического барьера в осциллирующей вселенной де Ситтера частиц Дирака, Майораны и Вейля / Е. М. Овсюк, А. А. Голуб, А. Д. Коральков // Вест. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2018. – Т. 54, № 3. – С. 300–315. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-3-300-315>

E. M. Ovsyuk, A. A. Golub, A. D. Koralkov

Mozyr State Pedagogical University named after I. P. Shamyakin, Mozyr, Belarus

**DIRAC, MAJORANA AND WEYL PARTICLES IN THE OSCILLATING DE SITTER UNIVERSE,
REFLECTION FROM THE COSMOLOGICAL BARRIER**

Abstract. It is known that the geometry of the Lobachevsky space acts on the fields of particles with spins 0, 1/2, 1 as an ideal mirror distributed in space. The depth of penetration of the field in such a medium increases with increasing field energy. Since the Lobachevsky model is a constituent element in some cosmological models, this property means that in such models it is necessary to take into account the effect of the presence of a “cosmological mirror”; it must lead to a redistribution of the particle density in space. The earlier analysis assumed the static nature of the space-time geometry. In this article, we generalize the research of the spin 1/2 field in the case of the oscillating model of the de Sitter universe. The Dirac equation is solved in the non-static quasi-Cartesian coordinates. At this, we substantially use the diagonalization of a generalized helicity operator. The wave functions of the particle are nontrivially time-dependent; however the effect of a complete reflection of the particles from an effective potential barrier is preserved. For the real Majorana 4-spinor field, the similar results are valid. For the solutions describing the reflection effect to be constructed, we must use linear combinations of solutions with opposite helicities. Such combinations are forbidden for 2-component Weyl particles, for this reason such particles cannot be reflected by the cosmological barrier.

Keywords: field with spin 1/2, Dirac, Majorana and Weyl equations, oscillating de Sitter universe, effective potential barrier, complete reflection of the particles

For citation. Ovsyuk E. M., Golub A. A., Koralkov A. D. Dirac, Majorana and Weyl particles in the oscillating de Sitter universe, reflection from the cosmological barrier. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, vol. 54, no. 3, pp. 300–315 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-3-300-315>

Введение. В недавних работах [1–7] на основе построения решений уравнений Шредингера, Максвелла и Дирака в квазидекартовых координатах пространства Лобачевского

$$dS^2 = dt^2 - \left[e^{-2z} (dx^2 + dy^2) + dz^2 \right] \quad (1)$$

было показано, что геометрия Лобачевского оказывает на все три поля в некотором смысле одно и то же действие: квазиплоские волны, распространяющиеся в пространстве Лобачевского, в некоторой точке отражаются от эффективного потенциального барьера, создаваемого геометрией пространства, и двигаются в обратную сторону. Другими словами, пространство Лобачевского действует на поля как распределенное в пространстве идеальное зеркало. Глубина проникновения поля в такую среду растет с увеличением энергии частицы, также эта величина зависит от радиуса кривизны пространства Лобачевского. В силу того, что модель Лобачевского входит составным элементом в некоторые космологические модели, отмеченное свойство означает, что в таких моделях необходимо учитывать эффект наличия «космологического зеркала»; оно эффективно должно вести к перераспределению плотности частиц в пространстве.

Выполненный ранее анализ предполагал статический характер геометрии пространства-времени. В настоящей работе проведено обобщение исследований [1–7] для спинорного поля в случае осциллирующей модели де Ситтера (обобщение для более простого случая скалярного поля было сделано в [8]). Анализ может быть обобщен и на случай расширяющейся вселенной де Ситтера, однако это требует отдельного рассмотрения, поскольку предполагает использование комплексных координат в вещественном пространстве-времени (примеры такого рода анализа см. в [9, 10]).

Разделение переменных в уравнении Дирака. Рассмотрим частицу со спином 1/2 в нестатических квазидекартовых координатах (1) пространства анти-де Ситтера

$$dS^2 = dt^2 - \cos^2 t \left[e^{-2z} (dx^2 + dy^2) + dz^2 \right]. \quad (2)$$

Будем исходить из общековариантной формы уравнения Дирака

$$\left[i\gamma^a \left(e_{(a)}^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \sqrt{-g} e_{(a)}^\alpha \right) \right) - M \right] \Psi(x) = 0; \quad (3)$$

используем диагональную тетраду, уравнение (3) принимает вид

$$\left[i\gamma^0 \cos t \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{3}{2} \operatorname{tg} t \right) + i\gamma^1 e^z \frac{\partial}{\partial x} + i\gamma^2 e^z \frac{\partial}{\partial y} + i\gamma^3 \left(\frac{\partial}{\partial z} - 1 \right) - M \cos t \right] \Psi = 0. \quad (4)$$

Выделяя в волновой функции простой множитель $\Psi = (e^z / \cos^{3/2} t) \psi$, приводим уравнение к более простой форме

$$\left(i\gamma^0 \cos t \frac{\partial}{\partial t} + i\gamma^1 e^z \frac{\partial}{\partial x} + i\gamma^2 e^z \frac{\partial}{\partial y} + i\gamma^3 \frac{\partial}{\partial z} - M \cos t \right) \psi = 0. \quad (5)$$

Решения ищем в виде

$$\psi = e^{ik_1 x} e^{ik_2 y} \begin{pmatrix} f_1(t, z) \\ f_2(t, z) \\ f_3(t, z) \\ f_4(t, z) \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Используя матрицы Дирака в спинорном базисе, из (5) находим систему уравнений для четырех функций $f_i(z)$ (пусть $k_1 = a$, $k_2 = b$):

$$\begin{aligned}
 i \operatorname{cost} \frac{\partial}{\partial t} f_3 - M \operatorname{cost} f_1 + e^z (a - ib) f_4 - i \frac{\partial}{\partial z} f_3 &= 0, \\
 i \operatorname{cost} \frac{\partial}{\partial t} f_4 - M \operatorname{cost} f_2 + e^z (a + ib) f_3 + i \frac{\partial}{\partial z} f_4 &= 0, \\
 i \operatorname{cost} \frac{\partial}{\partial t} f_1 - M \operatorname{cost} f_3 - e^z (a - ib) f_2 + i \frac{\partial}{\partial z} f_1 &= 0, \\
 i \operatorname{cost} \frac{\partial}{\partial t} f_2 - M \operatorname{cost} f_4 - e^z (a + ib) f_1 - i \frac{\partial}{\partial z} f_2 &= 0.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Существует коммутирующий с оператором из (5) обобщенный оператор спиральности

$$\Sigma = \frac{1}{2} \left(e^z \gamma^2 \gamma^3 \frac{\partial}{\partial x} + e^z \gamma^3 \gamma^1 \frac{\partial}{\partial y} + \gamma^1 \gamma^2 \frac{\partial}{\partial z} \right). \tag{8}$$

Из уравнения $\Sigma\Psi = p\Psi$ получим

$$\begin{aligned}
 e^z (a - ib) f_2(t, z) &= \left(+i \frac{\partial}{\partial z} + p \right) f_1(t, z), & e^z (a + ib) f_1(t, z) &= \left(-i \frac{\partial}{\partial z} + p \right) f_2(t, z), \\
 e^z (a - ib) f_4(t, z) &= \left(+i \frac{\partial}{\partial z} + p \right) f_3(t, z), & e^z (a + ib) f_3(t, z) &= \left(-i \frac{\partial}{\partial z} + p \right) f_4(t, z).
 \end{aligned} \tag{9}$$

Отметим, что из анализа аналогичной задачи в плоском пространстве и статической метрике Лобачевского известно вырождение собственных значений оператора спиральности по знаку и явный вид собственных значений (индекс 0 служит для отличия от похожих обозначений ниже)

$$p_0 = \pm \sqrt{\varepsilon^2 - M^2}, \quad f_3(z) = \lambda_0 f_1(z), \quad f_4(z) = \lambda_0 f_2(z), \quad \lambda_0 = \frac{\varepsilon - p}{M}. \tag{10}$$

Из уравнений (9) можно получить четыре дифференциальных уравнения для отдельных функций – разбиваем их на пары:

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - \frac{d}{dz} - e^{2z} (a^2 + b^2) + p(i + p) \right) f_1 = 0, \quad \left(\frac{d^2}{dz^2} - \frac{d}{dz} - e^{2z} (a^2 + b^2) - p(i - p) \right) f_2 = 0; \tag{11}$$

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - \frac{d}{dz} - e^{2z} (a^2 + b^2) + p(i + p) \right) f_3 = 0, \quad \left(\frac{d^2}{dz^2} - \frac{d}{dz} - e^{2z} (a^2 + b^2) - p(i - p) \right) f_4 = 0. \tag{12}$$

Отсюда следует, что вместе с решением для каждого собственного значения (+p) будет существовать решение с противоположным по знаку собственным значением (-p); из физических соображений подразумеваем вещественность $\pm p$.

Структура уравнений (9) такова, что пары функций $f_1(t, z) - f_2(t, z)$ и $f_3(t, z) - f_4(t, z)$ должны иметь вполне определенную структуру:

$$f_1(t, z) = F(t) f_1(z), \quad f_2(t, z) = F(t) f_2(z), \quad f_3(t, z) = G(t) f_3(z), \quad f_4(t, z) = G(t) f_4(z); \tag{13}$$

при этом (9) принимает вид двух несвязанных подсистем по переменной z:

$$e^z (a - ib) f_2(z) = \left(+i \frac{d}{dz} + p \right) f_1(z), \quad e^z (a + ib) f_1(z) = \left(-i \frac{d}{dz} + p \right) f_2(z); \tag{14}$$

$$e^z (a - ib) f_4(z) = \left(+i \frac{d}{dz} + p \right) f_3(z), \quad e^z (a + ib) f_3(z) = \left(-i \frac{d}{dz} + p \right) f_4(z). \tag{15}$$

Учтем (14)–(15) в уравнениях (7), получим две подсистемы по двум переменным:

$$f_3(z) \left[i \cos t \frac{\partial}{\partial t} + p \right] G(t) - M \cos t F(t) f_1(z) = 0, \tag{16}$$

$$f_1(z) \left[i \cos t \frac{\partial}{\partial t} - p \right] F(t) - M \cos t G(t) f_3(z) = 0;$$

$$f_4(z) \left[i \cos t \frac{\partial}{\partial t} + p \right] G(t) - M \cos t G(t) f_2(z) = 0, \tag{17}$$

$$f_2(z) f_1(z) \left[i \cos t \frac{\partial}{\partial t} - p \right] F(t) - M \cos t G(t) f_4 = 0.$$

Структура этих уравнений подразумевает следующие ограничения: $f_3(z) = \lambda f_1(z)$, $f_4(z) = \lambda f_2(z)$; с учетом чего находим (одну и ту же) систему уравнений по переменной t :

$$\left(i \cos t \frac{\partial}{\partial t} + p \right) G(t) - \frac{M}{\lambda} \cos t F(t) = 0, \quad \left(i \cos t \frac{\partial}{\partial t} - p \right) F(t) - \lambda M \cos t G(t) = 0. \tag{18}$$

Очевидно, что параметр λ можно внести в обозначение функции $F(t)$: $F(t) / \lambda \rightarrow F(t)$, тогда параметр λ из уравнений (18) исчезает; без ограничения общности в уравнениях (18) можно положить $\lambda = 1$ – это влияет лишь на общий нормировочный множитель при полной биспинорной волновой функции. Понятно также, что функции $F(t)$, $G(t)$ будут зависеть от знака при $\pm p$.

Таким образом, получены системы уравнений по переменным t и z соответственно:

$$\left(i \cos t \frac{\partial}{\partial t} + p \right) G(t) - M \cos t F(t) = 0, \quad \left(i \cos t \frac{\partial}{\partial t} - p \right) F(t) - M \cos t G(t) = 0; \tag{19}$$

$$e^z (a - ib) f_2(z) = \left(+i \frac{d}{dz} + p \right) f_1(z), \quad e^z (a + ib) f_1(z) = \left(-i \frac{d}{dz} + p \right) f_2(z). \tag{20}$$

Решения этих уравнений определяют волновые функции следующего вида:

$$\Psi = e^{ik_1 x} e^{ik_2 y} \begin{vmatrix} F(t) f_1(z) \\ F(t) f_2(z) \\ \lambda G(t) f_1(z) \\ \lambda G(t) f_2(z) \end{vmatrix}. \tag{21}$$

Решение уравнений по переменной t . Из системы (19) получаем уравнения 2-го порядка для функций $F(t)$ и $G(t)$:

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + M^2 + \frac{ip(\sin t - ip)}{\cos^2 t} \right) F = 0, \quad \left(\frac{d^2}{dt^2} + M^2 - \frac{ip(\sin t + ip)}{\cos^2 t} \right) G = 0. \tag{22}$$

Перейдем в уравнениях к переменной $\tau = (1 + \sin t) / 2$:

$$\tau(1 - \tau) \frac{d^2 F}{d\tau^2} + \left(\frac{1}{2} - \tau \right) \frac{dF}{d\tau} + \left(M^2 + \frac{1}{4} \frac{p(p+i)}{1-\tau} + \frac{1}{4} \frac{p(p-i)}{\tau} \right) F = 0; \tag{23}$$

$$\tau(1 - \tau) \frac{d^2 G}{d\tau^2} + \left(\frac{1}{2} - \tau \right) \frac{dG}{d\tau} + \left(M^2 + \frac{1}{4} \frac{p(p-i)}{1-\tau} + \frac{1}{4} \frac{p(p+i)}{\tau} \right) G = 0. \tag{24}$$

Достаточно получить решение одного из уравнений, решение другого получится при формальной замене $p \rightarrow -p$. Отметим, что уравнения и их решения связаны операцией комплексного

сопряжения $G = \text{const } F^*$. Рассмотрим уравнение для функции F . Введем подстановку $F = \tau^A (1 - \tau)^B f(\tau)$. Для функции $f(\tau)$ находим уравнение

$$\tau(1 - \tau) \frac{d^2 f}{d\tau^2} + \left(2A + \frac{1}{2} - (2A + 2B + 1)\tau \right) \frac{df}{d\tau} + \left(M^2 - (A + B)^2 + \frac{1}{4} \frac{2B(2B - 1) + p(p + i)}{1 - \tau} + \frac{1}{4} \frac{2A(2A - 1) + p(p - i)}{\tau} \right) f = 0.$$

При A и B , выбранных согласно

$$A = \frac{1}{2}(ip + 1), -\frac{1}{2}ip, \quad B = \frac{1}{2}(-ip + 1), \frac{1}{2}ip,$$

уравнение упрощается

$$\tau(1 - \tau) \frac{d^2 f}{d\tau^2} + \left(2A + \frac{1}{2} - (2A + 2B + 1)\tau \right) \frac{df}{d\tau} + [M^2 - (A + B)^2] f = 0 \quad (25)$$

и является уравнением гипергеометрического типа с параметрами α, β, γ :

$$\alpha = A + B - M, \quad \beta = A + B + M, \quad \gamma = 2A + \frac{1}{2}.$$

Дальше будем пользоваться следующими представлениями двух независимых решений (см. обозначения в [11]):

$$A = \frac{-ip}{2}, \quad B = \frac{ip}{2}, \quad \alpha = -M, \quad \beta = +M, \quad \gamma = -ip + \frac{1}{2},$$

$$F^{(1)}(\tau) = \tau^A (1 - \tau)^B F(\alpha, \beta, \gamma; \tau) = \tau^A (1 - \tau)^B U_1(\tau); \quad (26)$$

$$A' = \frac{ip + 1}{2}, \quad B' = \frac{-ip + 1}{2}, \quad \alpha' = 1 - M, \quad \beta' = 1 + M, \quad \gamma' = ip + \frac{3}{2},$$

$$F^{(2)}(\tau) = \tau^{A'} (1 - \tau)^{B'} F(\alpha', \beta', \gamma'; \tau) = \tau^{A'} (1 - \tau)^{B'} U_5(\tau), \quad (27)$$

где использованы два решения Куммера [11] для гипергеометрического уравнения:

$$U_1(\tau) = F(a, b, c; \tau) \Rightarrow F^{(1)}(\tau),$$

$$U_5(\tau) = y^{1-c} (1 - y)^{c-a-b} F(1 - a, 1 - b, 2 - c; \tau) \Rightarrow F^{(2)}(\tau). \quad (28)$$

Проводя формальную замену $p \rightarrow -p$, получаем аналогичные решения для функции $G(\tau)$ (напоминаем о симметрии относительно комплексного сопряжения):

$$A_* = \frac{ip}{2}, \quad B_* = \frac{-ip}{2}, \quad \alpha = -M, \quad \beta = +M, \quad \gamma_* = ip + \frac{1}{2},$$

$$G^{(1)} = \tau^{A_*} (1 - \tau)^{B_*} F(\alpha, \beta, \gamma_*; \tau) = \tau^{A_*} (1 - \tau)^{B_*} U_1(\tau); \quad (29)$$

$$A'_* = \frac{-ip + 1}{2}, \quad B'_* = \frac{ip + 1}{2}, \quad \alpha' = 1 - M, \quad \beta' = 1 + M, \quad \gamma'_* = -ip + \frac{3}{2},$$

$$G^{(2)} = \tau^{A'_*} (1 - \tau)^{B'_*} F(\alpha', \beta', \gamma'_*; \tau) = \tau^{A'_*} (1 - \tau)^{B'_*} U_5(\tau). \quad (30)$$

Свяжем эти четыре решения в пары. Рассмотрим сначала решения (26) и (30):

$$F^{(1)}(\tau) = \nu \tau^A (1 - \tau)^B F(\alpha, \beta, \gamma; \tau), \quad A = \frac{-ip}{2}, \quad B = \frac{ip}{2}, \quad \alpha = -M, \quad \beta = +M, \quad \gamma = -ip + \frac{1}{2}, \quad (31)$$

и

$$G^{(2)}(\tau) = v' \tau^{A_*} (1-\tau)^{B_*} F(\alpha', \beta', \gamma_*; \tau) = v' (1-\tau)^{B_*} F(1+\alpha, 1+\beta, 1+\gamma; \tau), \quad (32)$$

$$A_* = \frac{-ip+1}{2}, \quad B_* = \frac{ip+1}{2}, \quad \alpha' = 1-M, \quad \beta' = 1+M, \quad \gamma_* = -ip + \frac{3}{2}.$$

Чтобы вычислить относительный множитель между коэффициентами v и v' , обратимся к дифференциальному соотношению из (18), записанному в переменной $\tau = (1 + \sin t) / 2$:

$$G^{(2)}(\tau) = \frac{1}{M} \left(i \sqrt{\tau(1-\tau)} \frac{d}{d\tau} - \frac{1}{2} \frac{p}{\sqrt{\tau(1-\tau)}} \right) F^{(1)}(\tau); \quad (33)$$

оно принимает вид

$$M \frac{v'}{v} \tau^{\frac{-ip+1}{2}} (1-\tau)^{\frac{ip+1}{2}} F(1+\alpha, 1+\beta, 1+\gamma; \tau) = \left(i \tau^{1/2} (1-\tau)^{1/2} \frac{d}{d\tau} - \frac{p}{2} \tau^{-1/2} (1-\tau)^{-1/2} \right) \tau^{\frac{-ip}{2}} (1-\tau)^{\frac{ip}{2}} F(\alpha, \beta, \gamma; \tau)$$

или

$$M \frac{v'}{v} F(1+\alpha, 1+\beta, 1+\gamma; \tau) = i \frac{d}{d\tau} F(\alpha, \beta, \gamma; \tau).$$

Отсюда находим

$$M \frac{v'}{v} = i \frac{\alpha\beta}{\gamma} \Rightarrow v' = \frac{-iM}{-ip+1/2} v. \quad (34)$$

Теперь рассмотрим решения (27) и (29):

$$F^{(2)} = \mu' \tau^{A'} (1-\tau)^{B'} F(\alpha', \beta', \gamma'; \tau) = \mu' \tau^{A'} (1-\tau)^{B'} F(1+\alpha, 1+\beta, 1+\gamma_*; \tau), \quad (35)$$

$$A' = \frac{ip+1}{2}, \quad B' = \frac{-ip+1}{2}, \quad \alpha' = 1-M, \quad \beta' = 1+M, \quad \gamma' = ip + \frac{3}{2},$$

и

$$G^{(1)} = \mu L_* \tau^{A_*} (1-\tau)^{B_*} F(\alpha, \beta, \gamma_*; \tau), \quad A_* = \frac{ip}{2}, \quad B_* = \frac{-ip}{2}, \quad \alpha = -M, \quad \beta = +M, \quad \gamma_* = ip + \frac{1}{2}. \quad (36)$$

Чтобы вычислить относительный множитель между коэффициентами μ' и μ , обратимся к дифференциальному соотношению из (18), записанному в переменной $\tau = (1 + \sin t) / 2$:

$$F^{(2)}(\tau) = \frac{1}{M} \left(i \sqrt{\tau(1-\tau)} \frac{d}{d\tau} + \frac{1}{2} \frac{p}{\sqrt{\tau(1-\tau)}} \right) G^{(1)}(\tau).$$

Оно принимает вид

$$M \frac{\mu'}{\mu} \tau^{\frac{ip+1}{2}} (1-\tau)^{\frac{-ip+1}{2}} F(1+\alpha, 1+\beta, 1+\gamma_*; \tau) = \left(i \tau^{1/2} (1-\tau)^{1/2} \frac{d}{d\tau} + \frac{p}{2} \tau^{-1/2} (1-\tau)^{-1/2} \right) \tau^{\frac{ip}{2}} (1-\tau)^{\frac{-ip}{2}} F(\alpha, \beta, \gamma_*; \tau)$$

или

$$M \frac{\mu'}{\mu} F(1+\alpha, 1+\beta, 1+\gamma_*; \tau) = i \frac{d}{d\tau} F(\alpha, \beta, \gamma_*; \tau).$$

Отсюда находим

$$M \frac{\mu'}{\mu} = i \frac{\alpha\beta}{\gamma_*} \Rightarrow \mu' = \frac{iM}{ip+1/2} \mu. \quad (37)$$

Анализ решений по переменной t в особых точках. Исследуем поведение решений в особых точках $\cos t = 0$. Точке $t = -\pi/2$ соответствует значение $\tau = 0$, решения ведут себя так:

пара

$$F^{(1)} \sim \tau^A = \left(\frac{1 + \sin t}{2}\right)^{-ip/2}, \quad G^{(2)} \sim \frac{+iM}{1/2 - ip} \tau^{A*} = \frac{-iM}{1/2 - ip} \left(\frac{1 + \sin t}{2}\right)^{1/2 - ip/2}; \quad (38)$$

пара

$$F^{(2)} \sim \frac{+iM}{1/2 + ip} \tau^{A'} = \frac{+iM}{1/2 + ip} \left(\frac{1 + \sin t}{2}\right)^{1/2 + ip/2}, \quad G^{(1)} \sim \tau^{A'*} = \left(\frac{1 + \sin t}{2}\right)^{+ip/2}. \quad (39)$$

Учитывая формулу $t \approx -\pi/2 + 2\Delta$, $\Delta \rightarrow 0$, получим

$$F^{(1)} \sim e^{-ip/2 \ln \Delta}, \quad G^{(2)} \sim \frac{-iM}{1/2 - ip} \sqrt{\Delta} e^{-ip/2 \ln \Delta} \rightarrow 0; \quad (40)$$

$$F^{(2)} \sim \frac{+iM}{1/2 + ip} \sqrt{\Delta} e^{+ip/2 \ln \Delta} \rightarrow 0, \quad G^{(1)} \sim e^{+ip/2 \ln \Delta}. \quad (41)$$

В особой точке $t = +\pi/2$ асимптотическое поведение будет похожим. Это можно установить, разложив использованные решения U_1, U_5 по решениям Куммера [11] от аргумента $(1 - \tau)$:

$$U_2 = F(\alpha, \beta, \alpha + \beta + 1 - c; 1 - \tau),$$

$$U_6 = (1 - \tau)^{\gamma - \alpha - \beta} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma + 1 - \alpha - \beta; 1 - \tau).$$

В точке $\tau \rightarrow 1$ эти формулы дают [11]:

$$U_1 = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)} \cdot 1 + \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha + \beta - \gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} (1 - \tau)^{\gamma - \alpha - \beta},$$

$$U_5 = \frac{\Gamma(2 - \gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(1 - \alpha)\Gamma(1 - \beta)} \cdot 1 + \frac{\Gamma(2 - \gamma)\Gamma(\alpha + \beta - \gamma)}{\Gamma(\alpha + 1 - \gamma)\Gamma(\beta + 1 - \gamma)} (1 - \tau)^{\gamma - \alpha - \beta}.$$

Отсюда с учетом тождества $\gamma - \alpha - \beta = 1/2 - ip$ находим асимптотики для функций $F^{(1)}, F^{(2)}$ из (26), (27):

$$F^{(1)} \sim \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)} (1 - \tau)^{+ip/2}, \quad F^{(2)} \sim \frac{\Gamma(2 - \gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(1 - \alpha)\Gamma(1 - \beta)} (1 - \tau)^{+ip/2}.$$

В окрестности точки $t = +\pi/2$ имеем

$$t = +\frac{\pi}{2} + 2\Delta, \quad (1 - \tau) = \frac{1 - \sin t}{2} = \Delta, \quad (1 - \tau)^{+ip/2} = e^{+ip/2 \ln \Delta}.$$

Построение и анализ дираковских решений. Возвратимся к уравнениям (20) по переменной z :

$$e^z (a - ib) f_2(z) = \left(+i \frac{d}{dz} + p \right) f_1(z), \quad e^z (a + ib) f_1(z) = \left(-i \frac{d}{dz} + p \right) f_2(z), \quad (42)$$

отсюда следуют уравнения второго порядка

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - \frac{d}{dz} - e^{2z} (a^2 + b^2) + p(i + p) \right) f_1 = 0, \quad \left(\frac{d^2}{dz^2} - \frac{d}{dz} - e^{2z} (a^2 + b^2) - p(i - p) \right) f_2 = 0. \quad (43)$$

Прямая интерпретация в терминах барьер – отражение затруднена ввиду того, что уравнения (43) содержат комплексные потенциалы. Перейдем в уравнениях (42) и (43) к переменной $Z = e^z$, $Z \in (0, +\infty)$:

$$\left(\frac{d}{dZ} - \frac{ip}{Z}\right)f_1 + i(a - ib)f_2 = 0, \quad \left(\frac{d}{dZ} + \frac{ip}{Z}\right)f_2 - i(a + ib)f_1 = 0; \quad (44)$$

$$\left(\frac{d^2}{dZ^2} + \frac{p^2 + ip}{Z^2} - a^2 - b^2\right)f_1 = 0, \quad \left(\frac{d^2}{dZ^2} + \frac{p^2 - ip}{Z^2} - a^2 - b^2\right)f_2 = 0. \quad (45)$$

Поскольку структура уравнений предполагает выполнение условия $f_2 = f_1^*$, то можно получить уравнения с вещественными потенциалами комбинированием функций согласно правилам

$$H = cf_1 + c^* f_2, \quad G = cf_1 - c^* f_2; \quad (46)$$

коэффициент c может быть любым, в частности и равным 1. Легко находим

$$\left(\frac{d^2}{dZ^2} + \frac{p^2}{Z^2} - (a^2 + b^2)\right)H + \frac{ip}{Z^2}G = 0, \quad \left(\frac{d^2}{dZ^2} + \frac{p^2}{Z^2} - (a^2 + b^2)\right)G + \frac{ip}{Z^2}H = 0. \quad (47)$$

В координате $z = \ln Z$ уравнения (47) выглядят так (удобно выделить простой множитель согласно формулам $H \Rightarrow e^{z/2}H$, $G \Rightarrow e^{z/2}G$):

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + p^2 - \frac{1}{4} - (a^2 + b^2)e^{2z}\right]H + ipG = 0, \quad \left[\frac{d^2}{dz^2} + p^2 - \frac{1}{4} - (a^2 + b^2)e^{2z}\right]G + ipH = 0. \quad (48)$$

Легко найти точку, после которой функции должны резко спадать до нуля:

$$p^2 - 1/4 = (k_1^2 + k_2^2)e^{2z_0} \Rightarrow z_0 = \ln \sqrt{\frac{p^2 - 1/4}{a^2 + b^2}}. \quad (49)$$

В окрестности точки z_0 уравнения упрощаются:

$$\frac{d^2}{dz^2}H + ipG = 0, \quad \frac{d^2}{dz^2}G + ipH = 0. \quad (50)$$

Их решения могут иметь только экспоненциальный вид: $H = H_0 e^{v(z-z_0)}$, $G = G_0 e^{v(z-z_0)}$; при этом уравнения дают алгебраическую систему с 4 решениями:

$$\begin{vmatrix} v^2 & ip \\ ip & v^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} H_0 \\ G_0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow v = -\frac{1 \pm i}{\sqrt{2}}\sqrt{p}, + \frac{1 \pm i}{\sqrt{2}}\sqrt{p}; \quad (51)$$

две возможности из четырех соответствуют затухающим справа от точки z_0 решениям. Добавим, что в обычных единицах точка z_0 описывается соотношением

$$z_0 = \rho \ln \sqrt{\frac{(E^2 - M^2 c^4) / c^2 \hbar^2 - 1/4 \rho^2}{(K_1^2 + K_2^2)}}; \quad (52)$$

здесь волновые числа K_1, K_2 имеют размерность обратного метра. Отмечаем, что при устремлении к нулю величин K_1, K_2 глубина проникновения поля в область положительных z неограниченно увеличивается – это находится в согласии с явным видом уравнений при $a^2 + b^2 = 0$: в них исчезает эффективный потенциал отталкивания.

Это рассмотрение указывает на то, что нужные решения полного уравнения Дирака, которые можно сопоставить ситуации отражения частиц от барьера, должны строиться комбинированием решений с противоположными значениями спиральности $+p$ и $-p$.

Обратимся к построению точных решений уравнений (45). Следим за уравнением для f_1 . Для функции $f_1(Z)$ используем подстановку $f_1(Z) = Z^A e^{BZ} \bar{f}_1(Z)$, в результате получаем

$$\bar{f}''_1 + \left(\frac{2A}{Z} + 2B\right)\bar{f}'_1 + \frac{2AB}{Z}\bar{f}_1 + \left(\frac{A(A-1)}{Z^2} + \frac{p^2 + ip}{Z^2}\right)\bar{f}_1 + (B^2 - (a^2 + b^2))\bar{f}_1 = 0.$$

Фиксируем A, B : $A = +ip$, $1 - ip$, $B = \pm\sqrt{a^2 + b^2}$; уравнение для \bar{F}_1 упрощается

$$Z\bar{f}''_1 + (2A + 2BZ)\bar{f}'_1 + 2AB\bar{f}_1 = 0.$$

Не теряя в общности, выбираем значения

$$A = +ip, \quad B = -\sqrt{a^2 + b^2}; \quad (53)$$

переход к случаю противоположной спиральности достигается заменой $A \Rightarrow -A$. Перейдя к переменной $y = -2BZ = 2\sqrt{a^2 + b^2}e^z$, получим уравнение

$$y\frac{d^2}{dy^2}\bar{f}_1 + (2A - y)\frac{d}{dy}\bar{f}_1 - A\bar{f}_1 = 0,$$

которое отождествляется с вырожденным гипергеометрическим уравнением

$$\Phi'' + (\gamma - y)\Phi' - \alpha\Phi = 0, \quad \alpha = A = ip, \quad \gamma = 2A = 2ip. \quad (54)$$

В качестве двух линейно независимых решений можно выбрать следующие [11]:

$$\begin{aligned} \bar{f}_1^{(1)}(y) &= \Phi(\alpha, \gamma; y) = \Phi(ip, 2ip; y), \\ \bar{f}_1^{(2)}(y) &= y^{1-\gamma}\Phi(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma; y) = y^{1-2ip}\Phi(1 - ip, 2 - 2ip; y), \end{aligned} \quad (55)$$

что приводит к двум выражениям для полной функции $F_1(Z) = Z^A e^{BZ} \bar{F}_1$:

$$f_1^{(1)} = y^{ip} e^{-y/2} \Phi(ip, 2ip; y), \quad f_1^{(2)} = y^{1-ip} e^{-y/2} \Phi(1 - ip, 2 - 2ip; y). \quad (56)$$

Воспользовавшись отмеченной выше симметрией, можно получить (с точностью до числовых множителей) линейно независимые решения уравнения и для функции F_2 :

$$\dot{a}_2^{(1)} = y^{1+ip} e^{-y/2} \Phi(1 + ip, 2 + 2ip; y), \quad \dot{a}_2^{(2)} = y^{-ip} e^{-y/2} \Phi(-ip, -2ip; y). \quad (57)$$

Вопрос о характере связывания отдельных решений из $\{f_1^{(1)}, f_1^{(2)}; f_2^{(1)}, f_2^{(2)}\}$ в пары (с учетом уравнений первого порядка (42)) и вычислении соответствующих относительных коэффициентов требует специального рассмотрения. Сформулируем ответы, а потом докажем их (в дальнейшем потребуются две возможности, различающиеся знаком при A : $+A, -A$; поэтому следим за обеими):

$$\begin{aligned} \text{I}^+. \quad & f_1^{+(1)} = e^{-y/2} y^A \Phi(A, 2A, y) = f, \\ & f_2^{+(1)} = L e^{-y/2} y^{1+A} \Phi(1 + A, 2 + 2A, y) = g, \\ \text{II}^+. \quad & f_1^{+(2)} = L^* e^{-y/2} y^{1-A} \Phi(1 - A, 2 - 2A, y) = g^*, \\ & f_2^{+(2)} = e^{-y/2} y^{-A} \Phi(-A, -2A, y) = f^*; \end{aligned} \quad (58)$$

$A \Rightarrow -A$

$$\begin{aligned} \text{I}^-. \quad & f_1^{-(1)} = e^{-y/2} y^{-A} \Phi(-A, -2A, y) = f^*, \\ & f_2^{-(1)} = L^* e^{-y/2} y^{1-A} \Phi(1 - A, 2 - 2A, y) = g^*, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi^- . \quad f_1^{-(2)} &= L e^{-y/2} y^{1+A} \Phi(1+A, 2+2A, y) = g, \\ f_2^{-(2)} &= e^{-y/2} y^A \Phi(A, 2A, y) = f. \end{aligned} \quad (59)$$

Вычислим числовой коэффициент L . Функции f_1, f_2 не могут рассматриваться независимо – они связаны уравнениями первого порядка (напоминаем, что $A = ip$)

$$\left(\frac{d}{dy} - \frac{A}{y} \right) f_1 + \frac{e^{i\alpha}}{2} f_2 = 0, \quad \left(\frac{d}{dy} + \frac{A}{y} \right) f_2 + \frac{e^{-i\alpha}}{2} f_1 = 0;$$

используем обозначения

$$e^{i\alpha} = i \frac{a - ib}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad e^{-i\alpha} = -i \frac{a + ib}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Покажем, что этими уравнениями первого порядка связаны следующие две пары функций:
пара

$$f_1^{+(1)} = e^{-y/2} y^A \Phi(A, 2A, y) = f, \quad f_2^{+(1)} = L e^{-y/2} y^{1+A} \Phi(1+A, 2+2A, y) = g;$$

пара

$$f_2^{+(2)} = e^{-y/2} y^{-A} \Phi(-A, -2A, y) = f^*, \quad f_1^{+(2)} = L^* e^{-y/2} y^{1-A} \Phi(1-A, 2-2A, y) = g^*.$$

Достаточно проверить связь решений в первой строке. Подставляем эти функции в первое уравнение:

$$\left(\frac{d}{dy} - \frac{A}{y} \right) e^{-y/2} y^A \Phi(A, 2A, y) + \frac{e^{i\alpha}}{2} L e^{-y/2} y^{1+A} \Phi(1+A, 2+2A, y) = 0,$$

далее получаем

$$-\Phi(A, 2A) + \Phi(A+1, 2A+1) + e^{i\alpha} L y \Phi(1+A, 2+2A) = 0.$$

Легко убедиться (например, исследовав несколько первых коэффициентов рядов) в выполнении равенства

$$-\Phi(A, 2A) + \Phi(A+1, 2A+1) = x \frac{1}{2(2A+1)} \Phi(A+1, 2A+2);$$

следовательно, приходим к равенству

$$\frac{1}{2(2A+1)} + e^{i\alpha} L = 0 \Rightarrow L = -\frac{e^{-i\alpha}}{2(2A+1)} = \frac{i/2}{2A+1} \frac{a+ib}{\sqrt{a^2+b^2}}. \quad (60)$$

Найдем асимптотическое поведение функций $f(z), g(z)$ в области $z \rightarrow -\infty$ (т. е. при $y \rightarrow 0$):

$$f \sim y^A = (2\sqrt{a^2+b^2})^{ip} e^{ipz}, \quad g \sim L(2\sqrt{a^2+b^2})^{1+ip} e^{(1+ip)z} \rightarrow 0. \quad (61)$$

С использованием асимптотической формулы

$$\Phi(\alpha, \gamma, x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} e^x (x)^{\alpha-\gamma}, \quad \text{Re } x \rightarrow +\infty$$

находим поведение решений в области $z \rightarrow +\infty$ ($y \rightarrow +\infty$):

$$f \sim e^{-y/2} y^{ip} \frac{\Gamma(2ip)}{\Gamma(ip)} e^y y^{-ip} \rightarrow \infty, \quad g \sim L e^{-y/2} y^{1-ip} \frac{\Gamma(2ip+2)}{\Gamma(ip+1)} e^y y^{1-ip} \rightarrow \infty. \quad (62)$$

Соотношения (62) указывают на то, что решения на основе f, g не имеют нужного поведения в $z \rightarrow +\infty$, чтобы их можно было связать с ситуацией отражения частицы. Далее будем

рассматривать функцию f_1 как основную и строить для нее решения, а потом находить сопутствующую ей функцию f_2 . Сначала напомним процедуру нахождения нужных решений в статическом случае пространства Лобачевского, после чего обобщим ее на случай нестатического пространства.

Выше использована вполне определенная пара линейно независимых решений вырожденно-го гипергеометрического уравнения (с двумя возможностями для A : $+A, -A$):

$$\begin{aligned} Y^{+(1)} &= \Phi(A, 2A, y), & Y^{+(2)} &= y^{1-2A} \Phi(1-A, 2-2A, y); \\ Y^{-(1)} &= \Phi(-A, -2A, y), & Y^{-(2)} &= y^{1+2A} \Phi(1+A, 2+2A, y). \end{aligned} \quad (63)$$

Ниже для построения решений с нужным асимптотическим поведением потребуется еще одна пара линейно независимых решений [11] (также с двумя возможностями для A : $+A, -A$):

$$\begin{aligned} Y^{+(5)} &= \Psi(A, 2A, y), & Y^{+(7)} &= e^y \Psi(A, 2A, -y); \\ Y^{-(5)} &= \Psi(-A, -2A, y), & Y^{-(7)} &= e^y \Psi(-A, -2A, -y). \end{aligned} \quad (64)$$

Пары решений (63)–(64) связаны линейными соотношениями Куммера [11]:

$$\begin{aligned} Y^{+(5)} &= \frac{\Gamma(1-2A)}{\Gamma(1-A)} Y^{+(1)} + \frac{\Gamma(2A-1)}{\Gamma(A)} Y^{+(2)}, & Y^{+(7)} &= \frac{\Gamma(1-2A)}{\Gamma(1-A)} Y^{+(1)} - \frac{\Gamma(2A-1)}{\Gamma(A)} Y^{+(2)}; \\ Y^{-(5)} &= \frac{\Gamma(1+2A)}{\Gamma(1+A)} Y^{-(1)} + \frac{\Gamma(-2A-1)}{\Gamma(-A)} Y^{-(2)}, & Y^{-(7)} &= \frac{\Gamma(1+2A)}{\Gamma(1+A)} Y^{-(1)} - \frac{\Gamma(-2A-1)}{\Gamma(-A)} Y^{-(2)}, \end{aligned}$$

которые после умножения на $y^A e^{-y/2}$ (и соответственно на $y^{-A} e^{-y/2}$) принимают вид

$$f_1^{+(5)} = \frac{\Gamma(1-2A)}{\Gamma(1-A)} f + \frac{\Gamma(2A-1)}{\Gamma(A)} \frac{1}{L^*} g^*, \quad f_1^{+(7)} = \frac{\Gamma(1-2A)}{\Gamma(1-A)} f - \frac{\Gamma(2A-1)}{\Gamma(A)} \frac{1}{L^*} g^*; \quad (65)$$

$$f_1^{-(5)} = \frac{\Gamma(1+2A)}{\Gamma(1+A)} f^* + \frac{\Gamma(-2A-1)}{\Gamma(-A)} \frac{1}{L} g, \quad f_1^{-(7)} = \frac{\Gamma(1+2A)}{\Gamma(1+A)} f^* - \frac{\Gamma(-2A-1)}{\Gamma(-A)} \frac{1}{L} g. \quad (66)$$

Эти формулы осуществляют линейные разложения новых двух решений для функции F_1 (типов (5) и (7)) по старым двум решениям типов (1) и (2).

Функции $f_1^{\pm(5)}$ и $f_1^{\pm(7)}$ при отрицательных $z \rightarrow -\infty$ ведут себя так:

$$f_1^{+(5)} = \frac{\Gamma(1-2A)}{\Gamma(1-A)} \left(2\sqrt{a^2 + b^2}\right)^{+ip} e^{+ipz}, \quad f_1^{+(7)} = \frac{\Gamma(1-2A)}{\Gamma(1-A)} \left(2\sqrt{a^2 + b^2}\right)^{+ip} e^{+ipz}. \quad (67)$$

В силу очевидной симметрии соответствующие решения в случае противоположной поляризации получаются формальной заменой: $p \Rightarrow -p$, $a = ip \Rightarrow -a$, и для этого типа волн имеем следующие асимптотики при $z \rightarrow -\infty$:

$$f_1^{-(5)} = \frac{\Gamma(1+2A)}{\Gamma(1+A)} \left(2\sqrt{a^2 + b^2}\right)^{-ip} e^{-ipz}, \quad f_1^{-(7)} = \frac{\Gamma(1+2A)}{\Gamma(1+A)} \left(2\sqrt{a^2 + b^2}\right)^{-ip} e^{-ipz}. \quad (68)$$

Найдем поведение решений $f_1^{\pm(5)} z$ в области больших $z \rightarrow +\infty$. Применяя известное [11] асимптотическое соотношение

$$Y_5 = \Psi(A, 2A, y) \sim y^{-A},$$

получим ($y \rightarrow +\infty$ ($z \rightarrow +\infty$))

$$\begin{aligned} f_1^{+(5)} &= y^A e^{-y/2} y^{-A} \sim e^{-y/2} \sim \exp\left(-\sqrt{a^2 + b^2} e^z\right) \rightarrow 0, \\ f_1^{-(5)} &= y^{-A} e^{-y/2} y^{+A} \sim e^{-y/2} \sim \exp\left(-\sqrt{a^2 + b^2} e^z\right) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (69)$$

Аналагічна, прымяня асімптотычнае суадношэнне $Y_7 = e^y \Psi(A, 2A, -y) \sim e^y y^{-A}$, палучым ($y \rightarrow +\infty$ ($z \rightarrow +\infty$))

$$\begin{aligned} f_1^{+(7)} &\sim y^A e^{-y/2} e^y y^{-A} \sim e^{+y/2} \sim \exp\left(+\sqrt{a^2 + b^2} e^z\right) \rightarrow \infty, \\ f_1^{-(7)} &\sim y^{-A} e^{-y/2} e^y y^{+A} \sim e^{+y/2} \sim \exp\left(+\sqrt{a^2 + b^2} e^z\right) \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (70)$$

Найбольшы інтарэс прадстаўляюць рэшэнні тыпа $\pm(5)$ з асімптотыкамі (69), псколькі гэтыя рэшэнні абрашаюцца в нуль пры $z \rightarrow \infty$ і маюць асімптотыкі плоскіх волн пры $z \rightarrow -\infty$. Введзем новыя рэшэнні з дапамогай лінейных камбінацый з $F_1^{+(5)}$ і $F_1^{-(5)}$:

$$H_1 = f_1^{+(5)} + f_1^{-(5)}, \quad H^* = H; \quad G_1 = f_1^{+(5)} - f_1^{-(5)}, \quad G^* = -G. \quad (71)$$

Паведзенне гэтых рэшэнняў пры $z \rightarrow -\infty$ наступнае:

$$H_1(z \rightarrow -\infty) \sim M_+ e^{+ipz} + M_- e^{-ipz}, \quad G_1(z \rightarrow -\infty) \sim M_+ e^{+ipz} - M_- e^{-ipz}, \quad (72)$$

дзе

$$M_+ = \frac{\Gamma(1-2A)}{\Gamma(1-A)} \left(2\sqrt{a^2 + b^2}\right)^{+ip}, \quad M_- = \frac{\Gamma(1+2A)}{\Gamma(1+A)} \left(2\sqrt{a^2 + b^2}\right)^{-ip}, \quad M_- = (M_+)^*.$$

Для гэтых рэшэнняў можна вызначыць каэфіцыент адражэння як квадрат модуля адносіны амплітуд в суперпазіцыі плоскіх волн (следзім адначасова за абедзмі магчымасцямі)

$$H_{\pm}(z) \sim M_- e^{-ipz} \pm M_+ e^{+ipz}, \quad R = \left| \frac{M_-}{M_+} \right|^2 = 1. \quad (73)$$

Выдзеліў рэшэння, адпачаючыя адражэнню частіц, можна востанавіць супутствуючыя ім функцыі. Гэта задача адносна лёгка рэшаецца – не будзем астанаўлівацца на дэталях.

Тепер абабцім такой падход на случай нестатычнаскай метрыкі. Следзім за пераоў кампанентай біспінарнаў волнаў функцыі. Напамнім ураўненне для функцыі $F(t)$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + M^2 + \frac{ip(\sin t - ip)}{\cos^2 t} \right) F = 0, \quad \left(\frac{d^2}{dt^2} + M^2 - \frac{ip(\sin t + ip)}{\cos^2 t} \right) G = 0. \quad (74)$$

Очевидно, что собственным значениям оператора спиральности $(+p)$ и $(-p)$ отвечают комплексно сопряженные функции $F_{-p}(t) = [F_{+p}(t)]^*$. С учетом того, что зависящая от времени функция $F(t)$ таким образом зависит от знака параметра спиральности $\pm p$, решения, описывающие полное отражение частиц от эффективного барьера в нестатическом случае, имеют вид

$$H_{\pm}(t, z) = e^{iax} e^{iby} \cdot \left\{ F_{+p}(t) f_1^{+(5)}(z) \pm F_{-p}(t) f_1^{-(5)}(z) \right\}. \quad (75)$$

Майорановское спинорное поле. Выберем базис Майораны следующим преобразованием спинорного базиса [12]:

$$\begin{aligned} \Psi_M &= A \Psi, \quad \Gamma_M^a = A \gamma^a A^{-1}, \quad A = \frac{1-\gamma^2}{\sqrt{2}}, \quad A^{-1} = \frac{1+\gamma^2}{\sqrt{2}}; \\ \gamma_M^0 &= \gamma^0 \gamma^2, \quad \gamma_M^1 = \gamma^1 \gamma^2, \quad \gamma_M^2 = \gamma^2, \quad \gamma_M^3 = \gamma^3 \gamma^2. \end{aligned} \quad (76)$$

Явный вид матриц Дирака в этом майорановском базисе следующий:

$$\gamma_M^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_M^1 = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}, \quad \gamma_M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_M^3 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}.$$

Отмечаем выполнимость требуемых свойств относительно операции комплексного сопряжения: матрицы Дирака здесь чисто мнимые. Это означает, что в майорановском базисе оператор Дирака является вещественным $(i\gamma^a \partial_a - m)\Psi_M = 0$; следовательно, вещественная и мнимая части комплексной волновой функции Дирака Ψ_M не смешиваются этим оператором:

$$\Psi_M = \text{Re } \Psi + i \text{Im } \Psi = \Psi_+ + \Psi_-, \quad (i\gamma^a \partial_a - m)\Psi_+ = 0, \quad (i\gamma^a \partial_a - m)\Psi_- = 0; \quad (77)$$

т. е. вместо одного уравнения Дирака для комплексной функции получены отдельные уравнения для вещественной и чисто мнимой функций. Причем оба этих уравнения Лоренц-инвариантные. Они описывают (по определению) майорановские фермионы Ψ_+ и Ψ_- с зарядовой четностью соответственно +1 и -1.

Чтобы описать взаимодействие майорановских частиц с гравитационным полем, обратимся к общековариантному уравнению Дирака

$$\left\{ \gamma^\alpha(x) \left[i(\partial_\alpha + \Gamma_\alpha(x)) - eA_\alpha \right] - m \right\} \Psi(x) = 0, \quad \gamma^\alpha(x) = \gamma^a e^\alpha_{(a)}(x), \quad \Gamma_\alpha(x) = \frac{1}{2} \sigma^{ab} e^\beta_{(a)} \nabla_\alpha (e^\alpha_{(b);\beta}). \quad (78)$$

Если предполагать использование майорановского базиса матриц Дирака со свойствами

$$(i\gamma_M^a)^* = +\gamma_M^a, \quad (\sigma_M^{ab})^* = +\sigma_M^{ab}, \quad (i\gamma_M^5)^* = +\gamma_M^5, \quad (79)$$

то при отсутствии электромагнитного поля и наличии только гравитационного волновой оператор в уравнении Дирака будет вещественным (вещественность матриц σ^{ab} приводит к вещественности связности $\Gamma_\alpha(x)$):

$$\left[i\gamma^\alpha(x)(\partial_\alpha + \Gamma_\alpha(x)) - m \right] = \left[i\gamma^\alpha(x)(\partial_\alpha + \Gamma_\alpha(x)) - m \right]. \quad (80)$$

Это означает, что существуют общековариантные волновые уравнения, отдельные для поля Ψ_+ и поля Ψ_- : $\Psi_M = \Psi_+ + i\Psi_-$.

Выделение майорановских компонент. Выведенные уравнения по переменным z и t определяют решения уравнения Дирака, которые имеют вид (21). Разложение квазиплоских дираковских решений в сумму двух майорановских компонент $\Psi = \Psi_+ + \Psi_-$ в спинорном базисе

$$\Psi^c = \gamma^2 \Psi^* = \begin{pmatrix} -\sigma^2 \eta^* \\ \sigma^2 \xi^* \end{pmatrix}, \quad \Psi = \Psi_+ + \Psi_- = \frac{\Psi + \Psi^c}{2} + \frac{\Psi - \Psi^c}{2}$$

выглядит следующим образом:

$$\Psi_+ = \begin{pmatrix} \xi_+ = (\xi - \sigma_2 \eta^*) / 2 \\ \eta_+ = (\eta + \sigma_2 \xi^*) / 2 \end{pmatrix}, \quad \Psi_- = \begin{pmatrix} \xi_- = (\xi + \sigma_2 \eta^*) / 2 \\ \eta_- = (\eta - \sigma_2 \xi^*) / 2 \end{pmatrix}. \quad (81)$$

Введем обозначения для волновых функций в спинорном базисе:

$$\varphi = e^{iax} e^{iby}, \quad \varphi^* = e^{-iax} e^{-iby},$$

$$\xi = \varphi F(t) \begin{pmatrix} f_1(z) \\ f_2(z) \end{pmatrix}, \quad \xi^* = \varphi^* F^*(t) \begin{pmatrix} f_1^*(z) \\ f_2^*(z) \end{pmatrix}, \quad \eta = \varphi G(t) \begin{pmatrix} Kf_1(z) \\ Kf_2(z) \end{pmatrix}, \quad \eta^* = \varphi^* G^*(t) \begin{pmatrix} Kf_1^*(z) \\ Kf_2^*(z) \end{pmatrix}. \quad (82)$$

Далейше получаем (несущественный числовой множитель 1/2 опускаем)

$$\Psi_+ = \begin{pmatrix} \varphi F(t)f_1(z) + i\varphi^* G^*(t)Kf_2^*(z) \\ \varphi F(t)f_2(z) - i\varphi^* G^*(t)Kf_1^*(z) \\ \varphi G(t)Kf_1(z) - i\varphi^* F^*(t)f_2^*(z) \\ \varphi G(t)Kf_2(z) + i\varphi^* F^*(t)f_1^*(z) \end{pmatrix}, \quad \Psi_- = \begin{pmatrix} \varphi F(t)f_1(z) - i\varphi^* G^*(t)Kf_2^*(z) \\ \varphi F(t)f_2(z) + i\varphi^* G^*(t)Kf_1^*(z) \\ \varphi G(t)Kf_1(z) + i\varphi^* F^*(t)f_2^*(z) \\ \varphi G(t)Kf_2(z) - i\varphi^* F^*(t)f_1^*(z) \end{pmatrix}. \quad (83)$$

Это представление майорановских компонент относится к спинорному базису. Структура майорановских решений может быть более понятной после их преобразования к майорановскому базису матриц Дирака с помощью соотношения

$$\Psi_{\pm}^M = \frac{1-\gamma^2}{\sqrt{2}} \Psi_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 0 & i & 1 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Psi_{\pm}. \quad (84)$$

Так получаем (несущественный числовой множитель опускаем)

$$\Psi_+ = \begin{pmatrix} [\varphi F(t)f_1(z) + i\varphi^* G^*(t)Kf_2^*(z)] - i[\varphi G(t)Kf_2(z) + i\varphi^* F^*(t)f_1^*(z)] \\ [\varphi F(t)f_2(z) - i\varphi^* G^*(t)Kf_1^*(z)] + i[\varphi G(t)Kf_1(z) - i\varphi^* F^*(t)f_2^*(z)] \\ i[\varphi F(t)f_1(z) + i\varphi^* G^*(t)Kf_2^*(z)] + [\varphi G(t)Kf_1(z) - i\varphi^* F^*(t)f_2^*(z)] \\ -i[\varphi F(t)f_1(z) + i\varphi^* G^*(t)Kf_2^*(z)] + [\varphi G(t)Kf_2(z) + i\varphi^* F^*(t)f_1^*(z)] \end{pmatrix} = (\Psi_+)^*, \quad (85)$$

$$\Psi_- = \begin{pmatrix} [\varphi F(t)f_1(z) - i\varphi^* G^*(t)Kf_2^*(z)] - i[\varphi G(t)Kf_2(z) - i\varphi^* F^*(t)f_1^*(z)] \\ [\varphi F(t)f_2(z) + i\varphi^* G^*(t)Kf_1^*(z)] + i[\varphi G(t)Kf_1(z) + i\varphi^* F^*(t)f_2^*(z)] \\ i[\varphi F(t)f_2(z) + i\varphi^* G^*(t)Kf_1^*(z)] + [\varphi G(t)Kf_1(z) + i\varphi^* F^*(t)f_2^*(z)] \\ -i[\varphi G(t)Kf_2(z) - i\varphi^* F^*(t)f_1^*(z)] + [\varphi G(t)Kf_2(z) - i\varphi^* F^*(t)f_1^*(z)] \end{pmatrix} = -(\Psi_-)^*. \quad (86)$$

Отмечаем, что компоненты Ψ_+ и Ψ_- имеют требуемое поведение относительно операции комплексного сопряжения. Достаточно получить в явном виде решения уравнения Дирака в нестатических координатах, потом из них можно выделить в явном виде решения, отвечающие двум типам майорановских частиц.

Очевидно, что выделение майорановских компонент никак не может затронуть эффект отражения частиц от эффективного потенциального барьера. В заключение также отметим, что поскольку для построения решений, описывающих эффект отражения, нужно использовать комбинации решений с противоположными спиральностями, то эффект отражения отсутствует для вейлевских безмассовых фермионов, так как состояния с противоположными спиральностями относятся к частице и античастице.

Отметим также следующее обстоятельство. Преобразования, позволяющие выделить из решений уравнения Дирака решения для нейтральных (майорановских) частиц двух типов, а также преобразования, позволяющие выделить из уравнения Дирака более простые уравнения для безмассовых вейлевских частиц (нейтрино и антинейтрино), являются одинаковыми в пространствах Минковского и де Ситтера. Связи между фермионами разного типа сохраняются в любом псевдоримановом пространстве-времени. Это обусловлено тетрадным способом обобщения фермионных уравнений на псевдориманово пространство-время [12].

Благодарности. Авторы признательны В. М. Редькову за полезные советы, критику и помощь в работе.

Acknowledgements. The authors are deeply indebted to V. M. Redkov for his professional advice, criticism and help in the work.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Maxwell equations in Riemannian space-time, geometry effect on material equations in media / V. M. Red'kov [et al.] // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*. – 2009. – Vol. 12, № 3. – P. 232–250.
2. Овсюк, Е. М. О решениях уравнений Максвелла в квазидекартовых координатах в пространстве Лобачевского / Е. М. Овсюк, В. М. Редьков // *Вестн. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук*. – 2009. – № 4. – С. 99–105.
3. Новые задачи квантовой механики и уравнение Гойна / Е. М. Овсюк [и др.] // *Науч.-техн. ведомости СПбГПУ. Сер. физ.-мат. науки*. – 2012. – № 1 (141). – С. 137–145.
4. Овсюк, Е. М. О моделировании потенциального барьера в теории Шредингера геометрией пространства Лобачевского / Е. М. Овсюк, О. В. Веко // *Вестн. Брѣсц. ун-та. Сер. 4, Фізика, матэматыка*. – 2011. – № 2. – С. 30–36.
5. Овсюк, Е. М. Решения типа плоских волн для частицы со спином 1/2 в пространстве Лобачевского / Е. М. Овсюк, О. В. Веко // *Вестн. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук*. – 2012. – № 4. – С. 80–83.
6. Ovsyuk, E. M. On simulating a medium with special reflecting properties by Lobachevsky geometry / E. M. Ovsyuk, O. V. Veko, V. M. Red'kov // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*. – 2013. – Vol. 16, № 4. – P. 331–344.
7. Овсюк, Е. М. О моделировании среды со свойствами идеального зеркала по отношению к свету и частицам со спином 1/2 / Е. М. Овсюк, О. В. Веко, В. М. Редьков. // *Вестн. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук*. – 2015. – № 1. – С. 76–85.
8. Овсюк, Е. М. Скалярное поле в осциллирующей Вселенной де Ситтера и отражение от космологического барьера / Е. М. Овсюк, А. Д. Коральков // *Докл. Нац. акад. наук Беларуси*. – 2017. – Т. 61, № 3. – С. 18–25.
9. Red'kov, V. M. Parabolic coordinates and the hydrogen atom in spaces H3 and S3 / V. M. Red'kov, E. M. Ovsyuk // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*. – 2011. – Vol. 14, № 2. – P. 1–20.
10. Редьков, В. М. Частица в магнитном поле: 2-мерное сферическое пространство Римана и комплексный аналог полуплоскости Пуанкаре / В. М. Редьков, Е. М. Овсюк, А. М. Ишханян // *Докл. Нац. акад. наук Беларуси*. – 2013. – Т. 57, № 1. – С. 55–62.
11. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтмен, А. Эрдеи. – М.: Наука, 1973. – Т. 1: Гипергеометрическая функция, функции Лежандра. – 294 с.
12. Редьков, В. М. Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В. М. Редьков. – Минск: Белорус. наука, 2009. – 496 с.

References

1. Red'kov V. M., Tokarevskaya N. G., Ovsyuk E. M., Spix G. J. Maxwell equations in Riemannian space-time, geometry effect on material equations in media. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, 2009, vol. 12, no 3, pp. 232–250.
2. Ovsyuk E. M., Red'kov V. M. On solutions of the Maxwell equations in quasicartesian coordinates in Lobachevsky space. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2009, no. 4, pp. 99–105 (in Russian).
3. Ovsyuk E. M., Veko O. V., Kisel V. V., Red'kov V. M. New problems in quantum mechanics and the Heun equation. *Nauchno-tekhicheskie vedomosti SPbGPU. Fiziko-matematicheskie nauki = St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics*, 2012, no. 1 (141), pp. 137–145 (in Russian).
4. Ovsyuk E. M., Veko O. V. On modeling a potential barrier in Schrödinger theory by geometry of the Lobachevsky space. *Vesnik Brestskaga universiteta Seryia 4. Fizika, matematyka = Vesnik of Brest University. Series 4. Physics, mathematics*, 2011, no. 2, pp. 30–36 (in Russian).
5. Ovsyuk E. M., Veko O. V. Plane-wave solutions for a particle with spin 1/2 in the Lobachevsky space. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2012, no. 4, pp. 80–83 (in Russian).
6. Ovsyuk E. M., Veko O. V., Red'kov V. M. On simulating a medium with special reflecting properties by Lobachevsky geometry. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, 2013, vol. 16, no. 4, pp 331–344.
7. Ovsyuk E. M., Veko O. V., Red'kov V. M. On simulating a medium with the property of the ideal mirror for the light and spin 1/2 particles. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2015, no. 1, pp. 76–85 (in Russian).
8. Ovsyuk E. M., Koralkov A. D. The scalar field in the oscillating de Sitter universe and reflection from cosmological barrier. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2017, vol. 61, no. 3, pp. 18–25 (in Russian).
9. Red'kov V. M., Ovsyuk E. M. Parabolic coordinates and the hydrogen atom in spaces H3 and S3. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, 2011, vol. 14, no. 2, pp. 1–20.
10. Red'kov V. M., Ovsyuk E. M., Ishkhanyan A. M. Particle in the magnetic field: 2D Riemann spherical space and complex analogue of the Poincare half-plane. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2013, vol. 57, no. 1, pp. 55–62 (in Russian).
11. Bateman H., Erdélyi A. *Higher transcendental functions. Vol. 1. Hypergeometric function, Legendre functions*. Moscow, Nauka Publ., 1973. 294 p. (in Russian).
12. Red'kov V. M. *Field particles in Riemannian space and the Lorentz group*. Minsk, Belorusskaya nauka Publ., 2009. 496 p. (in Russian).

Информация об авторах

Овсюк Елена Михайловна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры физики и математики, Мозырский государственный педагогический университет им. И. П. Шамякина (ул. Студенческая, 28, 247760, г. Мозырь, Гомельская обл., Республика Беларусь). E-mail: e.ovsiyuk@mail.ru

Голуб Александр Алексеевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической физики и прикладной информатики, Мозырский государственный педагогический университет им. И. П. Шамякина (ул. Студенческая, 28, 247760, г. Мозырь, Гомельская обл., Республика Беларусь). E-mail: agolub@tut.by

Коральков Артем Дмитриевич – стажер младшего научного сотрудника, Мозырский государственный педагогический университет им. И. П. Шамякина (ул. Студенческая, 28, 247760, г. Мозырь, Гомельская обл., Республика Беларусь). E-mail: artemkoralkov@gmail.com

Information about the authors

Elena M. Ovsyuk – Ph. D. (Physics and Mathematics), Assistant Professor, Assistant Professor of the Department of Physics and Mathematics, Mozyr State Pedagogical University named after I. P. Shamyakin (28, Studencheskaya Str., 247760, Mozyr, Republic of Belarus). E-mail: e.ovsiyuk@mail.ru

Alexander A. Golub – Ph. D. (Physics and Mathematics), Assistant Professor of the Department of Theoretical Physics and Applied Informatics, Mozyr State Pedagogical University named after I. P. Shamyakin (28, Studencheskaya Str., 247760, Mozyr, Republic of Belarus). E-mail: agolub@tut.by

Artem D. Koralkov – Assistant Junior Researcher, Mozyr State Pedagogical University named after I. P. Shamyakin (28, Studencheskaya Str., 247760, Mozyr, Republic of Belarus). E-mail: artemkoralkov@gmail.com

ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 536.33
<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-3-316-325>

Поступила в редакцию 15.12.2017
Received 15.12.2017

А. П. Иванов

Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ИК-ИЗЛУЧЕНИЯ ОТ НЕЛОКАЛЬНОГО ИСТОЧНИКА ВНУТРИ БИОЛОГИЧЕСКОЙ ТКАНИ

Аннотация. Неинвазивные термографические методы основаны на измерении ИК-излучения, которое исходит от ткани человека и по которому, используя закон Кирхгофа, восстанавливается температура исследуемого участка тела. Недостатком метода является то, что температурное изображение зашумлено тепловым влиянием слоя ткани, находящимся между изучаемым органом внутри среды и тепловизором, и это ухудшает качество рассматриваемого изображения. Используя данные о распределении температуры внутри биологической среды от точечного источника, получено выражение для температуры от источников разных форм. Изучено влияние разных факторов, влияющих на распределение приращения яркости на поверхности среды от источника в виде цилиндра. К ним относятся глубина залегания источника в среде, длина волны излучения, показатель поглощения, параметр теплоотдачи, высота и диаметр цилиндра. Дано сопоставление приращения яркости от источника и естественной яркости поверхности кожи. Показано, насколько яркость источника изменяет общую яркость поверхности в широком спектральном интервале.

Ключевые слова: температура, теплопроводность, яркость, формула Планка, тепловизор, термография, биоткань

Для цитирования. Иванов, А. П. Распределение ИК-излучения от нелокального источника внутри биологической ткани / А. П. Иванов // Вес. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2018. – Т. 54, № 3. – С. 316–325. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-3-316-325>

A. P. Ivanov

B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

DISTRIBUTION OF IR RADIATION FROM A NON-LOCAL SOURCE INSIDE THE BIOLOGICAL TISSUE

Abstract. Non-invasive thermographic methods are based on the measurement of IR radiation from human tissue and, by which using Kirchhoff's law, it restores the temperature of the examined body region. The disadvantage of this method is that the temperature image is noisy due to the thermal influence of the tissue layer between the organ under study inside the medium and the thermal imager. This degrades the quality of the image under consideration. Using the data on the temperature distribution inside the biological medium from a point source, the expression for the temperature from different-shape sources was obtained. The influence of various factors on the brightness increment distribution at the medium surface from a source shaped as a cylinder is studied. These include the source depth in the medium, the radiation wavelength, the absorption index, the heat transfer parameter, the cylinder height and diameter. The brightness increment from the source and the natural brightness of the skin surface are compared. It is shown how the source brightness changes the full brightness of the surface in a wide spectral interval.

Keywords: temperature, thermal conductivity, brightness, Planck's formula, thermal imager, thermography, biological tissue

For citation. Ivanov A. P. Distribution of IR radiation from a non-local source inside the biological tissue. *Vestsi Natsyional'noi akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, vol. 54, no. 3, pp. 316–325 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-3-316-325>

Введение. Термографические методы на основе ИК-изображений в настоящее время активно внедряются в медицинскую практику с целью диспансерных обследований, ранней диагностики заболеваний, при проведении клинических процедур и хирургических операций. Суть методов заключается в снятии тепловых изображений открытой поверхности биоткани пациента и вынесении заключения, например о воспалительной патологии внутренних участков, протекающей

с повышением температуры обследуемого органа, или о дистрофической патологии, когда температура понижена. Само тепловое изображение определяется по излучению, выходящему из среды, с использованием закона Кирхгофа. Несмотря на очевидные достоинства такого подхода, одним из его слабых мест является то, что тепловые изображения снимаются только с поверхности биологических тканей. Изображения зашумлены тепловым влиянием слоя ткани, находящейся между обследуемым органом и тепловизором и, следовательно, лишь косвенно несут информацию о температурном режиме внутренних органов. В связи с этим представляет интерес вопрос, насколько структура излучения, порожденная источником тепла, искажается на поверхности среды. В настоящей работе на основе решения теплофизической задачи с точечным источником тепла [1] рассмотрена задача о поле ИК-излучения в биологической среде, порожденном тепловым источником конечных размеров.

Теплофизические и оптические характеристики среды. Рассматривается кожный покров в виде полубесконечной плоскопараллельной среды. На поверхности параметр теплоотдачи $h = H/k$, см^{-1} ; H , $\text{Вт}/(\text{см}^2\cdot\text{К})$ – поток тепла с единицы поверхности при $T_s - T_a = 1,0$ К, где T_s и T_a – температуры соответственно поверхности ткани и окружающей среды. Поток H включает обмен энергией вследствие излучения, конвекции и испарения. Коэффициент теплопроводности для биоткани $k = 0,004 - 0,006$ $\text{Вт}/(\text{см}\cdot\text{К})$. Типичные значения h изменяются в пределах $0,05 - 0,5$ см^{-1} [2, 3].

При распространении излучения в среде следует учитывать такие ее характеристики, как поглощение и рассеяние. Известно, что кожный покров примерно на 70–90 % состоит из воды. И хотя в ткани кожи есть и другие компоненты, но именно показатель поглощения воды k_w в рассматриваемой спектральной области 2–12 мкм превалирует над остальными хромофорами. Спектр k_w в рассматриваемом интервале длин волн λ приведен в таблице. Ниже для конкретности будем считать, что объемная концентрация воды в коже $C_v = 0,8$, так что показатель поглощения ткани $k = C_v k_w$.

С ростом λ показатель поглощения воды в целом увеличивается, а рассеяния – уменьшается. Поскольку поглощение излучения в рассматриваемой спектральной области во много раз больше рассеяния, последним при исследовании поля излучения будем пренебрегать и полагать, что

Значения показателя поглощения воды и относительной чувствительности одного из приемников в ИК-области спектра (по данным [4])

Water absorption index and the relative sensitivity of one of the IR receivers (according to [4])

λ , мкм	k_w , см^{-1}	S	λ , мкм	k_w , см^{-1}	S
2,0	69,12	0,24	3,7	122,27	–
2,1	26,93	–	3,8	112,44	–
2,2	16,51	–	3,9	122,44	–
2,3	22,4	–	4,0	144,51	0,38
2,4	50,06	–	4,5	374,0	0,31
2,5	90,48	0,20	5,0	312,0	0,29
2,6	153,21	–	5,25	238,0	–
2,65	317,72	–	5,5	265,0	0,39
2,7	884,3	–	5,75	520,0	–
2,75	2696,1	–	6,0	2241,0	0,42
2,8	5161,2	–	6,5	758,0	0,46
2,85	8157,1	–	7,0	574,0	0,68
2,9	11613,0	–	7,5	546,0	0,78
3,0	11394,0	0,25	8,0	539,0	0,87
3,1	7783,1	–	9,0	557,0	0,98
3,15	5385,6	–	9,5	585,0	1,0
3,2	3628,6	–	10,0	638,0	0,73
3,25	2358,6	–	10,5	792,0	0,56
3,3	1401,3	–	11,0	1106,0	0,35
3,4	720,72	–	11,5	1552,0	0,03
3,5	337,5	0,3	12,0	2084,0	0
3,6	179,77	–	–	–	–

распространение теплового излучения в ткани описывается экспоненциальным законом Бугера: $\exp(-kl)$, где l – расстояние между двумя рассматриваемыми точками. Таким образом, с точностью до множителя $1 - r_0$ (r_0 – коэффициент отражения излучения при нормальном падении на границу раздела кожа – воздух) среда является абсолютно черным телом.

Поле температур в биоткани с внутренним источником тепла. Излучение в близкой инфракрасной области спектра формируется естественным нагревом организма и патологическими процессами, протекающими в нем. Будем основываться на известных аналитических решениях уравнения теплопроводности. Положим температуру в среде в цилиндрической системе координат (z, r, φ) , равной

$$T(z, r) = T_s + \Delta T(z, r), \quad (1)$$

где T_s – температура поверхности при отсутствии источников тепла, $\Delta T(z, r)$ – добавка к температуре вследствие различных причин на глубине z и радиусе r . В ходе рассмотрения осесимметричной задачи здесь и далее координата φ не присутствует. При отсутствии источника, по аналогии с [5], полагаем, что добавка к температуре в среде для нормальной работы организма описывается формулой

$$\Delta T_1(z) = hz(T_s - T_a) + T_s. \quad (2)$$

При наличии точечного источника с тепловой мощностью Q , Вт на глубине a , имеющего в цилиндрической системе координаты $z = a, r = 0$, согласно [1] ΔT возрастет на величину

$$\Delta T_p(z, r) = \Delta T_{p1}(z, r) + \Delta T_{p2}(z, r), \quad (3)$$

где

$$\Delta T_{p1}(z, r) = \frac{Q}{4\pi k} \left\{ \left[(z-a)^2 + r^2 \right]^{-1/2} - \left[(z+a)^2 + r^2 \right]^{-1/2} \right\}, \quad (4)$$

$$\Delta T_{p2}(z, r) = \frac{Q}{2\pi k} \int_0^\infty \frac{\exp[-p(a+z)] p J_0(pr)}{p+h} dp, \quad (5)$$

J_0 – функция Бесселя нулевого порядка, r, z – координаты точки наблюдения.

Таким образом, при точечном источнике температура в любой точке биологической среды есть

$$T_p(z, r) = T_s + \Delta T_1(z) + \Delta T_p(z, r). \quad (6)$$

Естественно, что точечный источник практически нельзя реализовать. Однако данные по температуре, полученные с ним, можно использовать для расчета температуры от источников разных форм. Любой источник можно рассматривать как совокупность элементарных точечных источников тепла. В линейной оптической системе изображение такого объекта (на языке температур) может быть получено суперпозицией изображений отдельных точечных источников, характеризующихся функцией (6). В теории видения эта функция называется функцией размытия (рассеяния) точки. Выделим в источнике произвольной формы и объема V в цилиндрической системе координат бесконечно малый элементарный объем $dV = r^* dr^* dz^* d\varphi$, имеющий координаты r^*, z^*, φ . Положим, что он создает в пространстве распределение температуры, описываемое формулой (3).

По отношению к этому элементарному объему в (3) заменим a на z^* , r на $l = \sqrt{(r - r^* \cos \varphi)^2 + (r^* \sin \varphi)^2}$ (поскольку система инвариантная), а Q – на произведение объемной плотности тепловой мощности рассматриваемого источника q на элементарный объем dV . Тогда приращения температуры, отнесенные к элементарному объему, будут

$$D = D_1 + D_2. \quad (7)$$

Здесь

$$D_1 = \frac{q}{4\pi k} \left\{ \left[(z - z^*)^2 + l^2 \right]^{-1/2} - \left[(z + z^*)^2 + l^2 \right]^{-1/2} \right\}, \quad D_2 = \frac{q}{2\pi k} \int_0^\infty \frac{\exp[-p(z^* + z)] p J_0(pl)}{p+h} dp. \quad (8)$$

Очевидно, приращение температуры от всего объема источника будет

$$\Delta T = \int_V Ddv. \tag{9}$$

Для выполнения операции (9) необходимо задать уравнение поверхности рассматриваемого источника и в трехмерном интеграле подставить соответствующие пределы. Можно рассмотреть источник не в виде объема, а поверхности или линии. Тогда нужно выделить бесконечно малую площадку или отрезок линии и положить, что они создают температуру, как точка (см. (3)). Для получения конечного результата необходимо провести операцию интегрирования по всей рассматриваемой поверхности или линии. Остановимся на модели формы патологического участка с повышенной температурой в виде цилиндра, ось которого перпендикулярна поверхности биологической ткани. Для цилиндра диаметром d и высотой z_0 приращение температуры будет

$$\Delta T_c = 2 \int_0^{0,5d} r^* \left\{ \int_{a-0,5z_0}^{a+0,5z_0} \left[\int_0^\pi Dd\varphi \right] dz^* \right\} dr^*. \tag{10}$$

При малых z_0 или d выражение (10) обращается соответственно в

$$\Delta T_c^z = 2z_0 \int_0^{0,5d} r^* \left[\int_0^\pi Dd\varphi \right] dr^*, \tag{11}$$

$$\Delta T_c^d = d \int_{a-0,5z_0}^{a+0,5z_0} \left[\int_0^\pi Dd\varphi \right] dz^*. \tag{12}$$

По аналогии с точечным источником температура в любой точке биологической среды с цилиндрическим источником есть

$$T_c(z, r) = T_s + \Delta T_1(z) + \Delta T_c(z, r). \tag{13}$$

В дальнейшем будем везде полагать q постоянным в любой точке источника.

Яркость излучения в биоткани с цилиндрическим источником тепла. Спектральная плотность яркости монохроматического излучения, испускаемого поверхностью ткани по нормали к ней при пространственном распределении температуры $T(z, r)$ в цилиндрической системе координат $\{r, \varphi, z\}$, равна

$$B(\lambda, r) = \frac{(1-r_0)}{\pi} \int_0^\infty kE(z, r, \lambda, T) \exp(-kz) dz. \tag{14}$$

Здесь в рассматриваемом спектральном интервале 2–12 мкм в приближении низкой температуры человеческого организма

$$E(z, r, \lambda, T) = M(\lambda) \exp(-N(\lambda)/T) \tag{15}$$

– спектральная плотность светимости поверхности (формула Планка) в точке (z, r) , где $M(\lambda) = 3,75 \cdot 10^3 \lambda^{-5}$, эрг · мкм⁻³ · с⁻¹, $N(\lambda) = 1,44 \cdot 10^4 \lambda^{-1}$, длина волны λ в мкм, температура $T(z, r)$ описывается формулой (13). Предполагается, что выходящее излучение диффузное. Можно получить более наглядное и упрощенное выражение, чем (14). Добавим и вычтем в (1) $\Delta T_c(0, r)$, которое представляет собой приращение температуры поверхности среды вследствие наличия цилиндрического источника. Тогда (1) примет вид

$$T(z, r) = T_s^* + \Delta T(z, r)^*, \tag{16}$$

где $T_s^* = T_s + \Delta T_c(0, r)$ – температура поверхности при наличии в среде источника тепла, $\Delta T(z, r)^* = \Delta T_1(z) + \Delta T_c(z, r) - \Delta T_c(0, r)$. Если $T_s^* \gg \Delta T(z, r)^*$, то разлагаем функцию Планка в ряд Тейлора при $T = T_s^*$, и она равна

$$E(T) = E(T_s^*) \left(1 + N \Delta T^* / T_s^{*2} \right). \tag{17}$$

Для наглядности в (17) многие аргументы, от которых зависит светимость, не указаны. В этом случае формула (14) обратится в

$$B(T) = B(T_s^*)^* \left[1 + (N / T_s^{*2}) \int_0^{\infty} k \Delta T^* \exp(-kz) dz \right]. \quad (18)$$

Здесь $B(T_s^*)^* = \frac{(1-r_0)}{\pi} E(T_s^*)$ – спектральная плотность яркости поверхности по формуле Планка в предположении постоянной температуры тела, с температурой T_s^* .

При отсутствии источника фоновая спектральная плотность яркости $B_0(\lambda)$, рассчитанная по (14), не будет зависеть от r . Если говорить о приращении спектральной плотности яркости поверхности, то

$$\Delta B(\lambda, r) = B(\lambda, r) - B_0(\lambda). \quad (19)$$

Как показывают расчеты, в реальных условиях можно считать $\Delta B(\lambda, r)$ пропорциональным q . Если глубина погружения источника в среду много больше его размеров, то приращение яркости от него пропорционально Q . В дальнейшем для упрощения чтения в большинстве случаев спектральную плотность яркости или светимости будем заменять словом «яркость» или «светимость».

Приемники ИК-излучения. Чувствительных приемников в рассматриваемой спектральной области нет. Для увеличения отношения сигнал/шум, как правило, используются приемники, регистрирующие излучение в широком спектральном интервале [6]. Для конкретности рассмотрим детектор на основе $\text{Cd}_{1-x}\text{Hg}_x\text{Te}$ [7]. Его спектральная чувствительность S в относительных единицах представлена в таблице. Видно, что приемник чувствителен в области 2–11 мкм с максимумом в зоне 9,5 мкм. Регистрируемый от кожи электрический сигнал при наличии источника, с точностью до постоянного множителя (характеризующего абсолютную чувствительность), равен

$$\beta(r) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} B(\lambda, r) S(\lambda) d\lambda. \quad (20)$$

Здесь указан интервал длин волн $\lambda_2 - \lambda_1$, в котором чувствителен приемник; $B(\lambda, r)$ описывается формулой (14). Можно записать аналогичное выражение для сигнала без источника β_0 . Приращение сигнала $\Delta\beta(r) = \beta(r) - \beta_0$.

Интересно выяснить, в каком спектральном интервале сосредоточена основная часть регистрируемой приемником мощности излучения от кожного покрова. Была проведена оценка. Рассматривался случай ткани без источника тепла. Определялся сигнал в области максимальной чувствительности приемника. Затем расширялся спектральный интервал измеряемой области до размера, в котором сосредоточено 90 % величины максимального сигнала. Оказалось, что такой спектральный интервал находится между длинами волн 6,52–11,5 мкм.

Полученный материал позволяет быстро проводить численные расчеты на персональном компьютере и анализировать закономерности распределения энергетических полей излучения в биоткани. Несмотря на то что ИК-приемники регистрируют излучение в достаточно широком спектральном интервале, анализ в основном будем осуществлять с монохроматической яркостью, которая, с одной стороны, служит основой для понимания формирования интегральной яркости, а с другой, надо полагать, со временем появятся и чувствительные монохроматические приемники. Проиллюстрируем влияние разных факторов на яркость поверхности ткани.

Спектральное распределение яркости на поверхности кожи. Оценим, насколько яркость источника изменяет общую яркость поверхности в точке $r = 0$ в широком спектральном интервале. Это видно из рис. 1, *a*, на котором сплошная линия характеризует обычную яркость тела, а пунктирные – яркость при наличии источника при разных a и h . Рис. 1, *b* дает более детальную картину приращения яркости в полулогарифмическом масштабе. Начиная с $\lambda > 4$ мкм наблюдается прямолинейное нарастание B , однако рост ΔB постепенно замедляется. Это свидетельствует о том, что с увеличением длины волны доля приращения яркости монотонно уменьша-

ется. Действительно, в данном случае в спектральном интервале 2–9 мкм, когда источник находится на поверхности, при $h = 0,05 \text{ см}^{-1}$, отношение $\Delta B(\lambda)/B_0(\lambda)$ изменяется от 2,34 до 0,35. Когда $h = 0,8 \text{ см}^{-1}$, интервал отношения есть 1,33–0,23. Если источник располагается на большой глубине, то указанный интервал равен 0,26–0,057 и 0,11–0,025. Видно, с уменьшением λ , a , h величина $\Delta B(\lambda)/B_0(\lambda)$ растет от малых значений до десятков процентов.

Закономерности функций $\Delta B(\lambda)$ при разных условиях подобны между собой. Следует напомнить, что $\Delta B(\lambda)$ пропорционально q .

Влияние глубины залегания источника на распределение приращения яркости на поверхности. Естественно, что по мере погружения источника в среду пятно излучения на поверхности расширяется. Оно определяется только свечением, создаваемым источником. Поэтому в дальнейшем будем анализировать лишь приращение яркости, которое на практике определяется как разность яркостей в точках $r = 0$ и при большом r , где не сказывается присутствие источника. Рис. 2 иллюстрирует нормированное распределение приращения яркости на поверхности на примере цилиндра малых размеров при определенных свойствах среды. В данном случае цилиндр ведет себя как точечный источник и наблюдаемое распределение является функцией замытия изображения – основой для расчета изображения от источника любой формы. Видно, что уже на глубине 0,5 см источник на поверхности формирует достаточно размытую картину. Это свидетельствует об ограничениях термографических неинвазивных методик наблюдения.

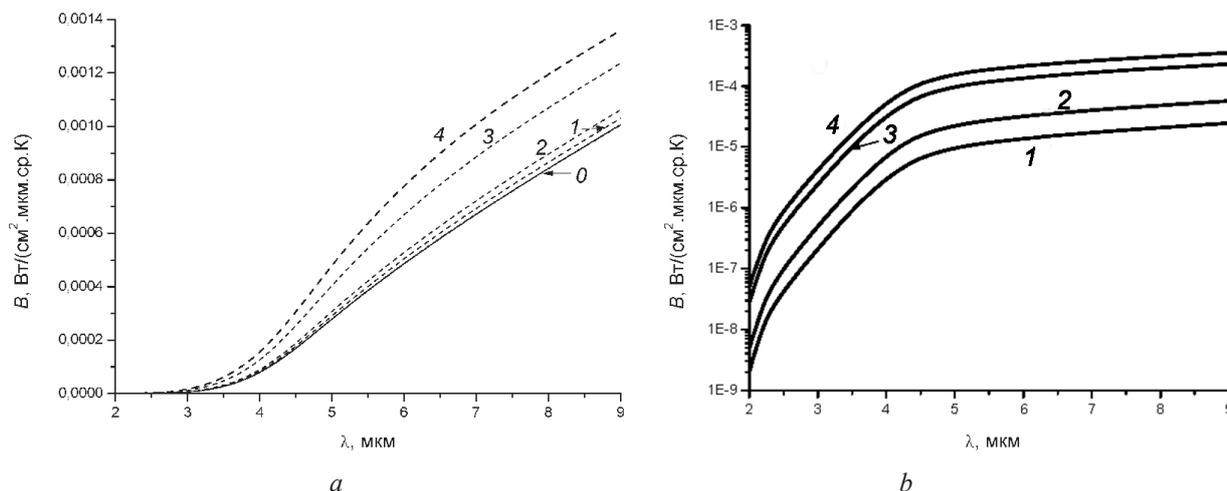


Рис. 1. Спектральное распределение яркости на поверхности кожи при $q = 1 \text{ Вт/см}^3$, $r = 0$, $d = 1 \text{ см}$, $z_0 = 0,2 \text{ см}$: a – полная яркость; b – приращение яркости от источника. Цифры у кривых соответствуют разным значениям a в см и h в см^{-1} : 1 – 1,5 и 0,8; 2 – 1,5 и 0,05; 3 – 0,1 и 0,8; 4 – 0,1 и 0,05; 0 – источник отсутствует

Fig. 1. Spectral distribution of brightness on the skin surface at $q = 1 \text{ W/cm}^3$, $r = 0$, $d = 1 \text{ cm}$, $z_0 = 0.2 \text{ cm}$: a – full brightness; b – increment of brightness from the source. The curves in this figure correspond to different values of a (cm) and h (cm^{-1}): 1 – 1.5 and 0.8; 2 – 1.5 and 0.05; 3 – 0.1 and 0.8; 4 – 0.1 and 0.05; 0 – no source

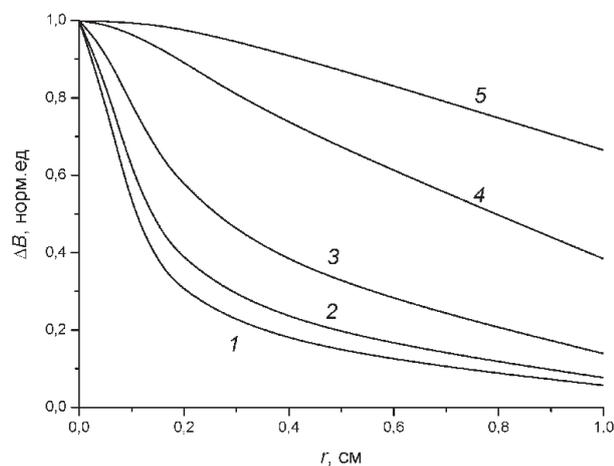


Рис. 2. Влияние a на распределение приращения яркости на поверхности кожи при $q = 1 \text{ Вт/см}^3$, $\lambda = 2,2 \text{ мкм}$, $d = 0,1 \text{ см}$, $z_0 = 0,1 \text{ см}$, $h = 0,05 \text{ см}^{-1}$. Цифры у кривых соответствуют разным значениям a в см: 1 – 0,05; 2 – 0,1; 3 – 0,2; 4 – 0,5; 5 – 1,0

Fig. 2. Effect of a on the brightness distribution increment on the skin surface at $q = 1 \text{ W/cm}^3$, $\lambda = 2.2 \text{ }\mu\text{m}$, $d = 0.1 \text{ cm}$, $z_0 = 0.1 \text{ cm}$, $h = 0.05 \text{ cm}^{-1}$. Here, the curves correspond to different values of a [cm]: 1 – 0.05; 2 – 0.1; 3 – 0.2; 4 – 0.5; 5 – 1.0

Влияние показателя поглощения на распределение приращения яркости на поверхности.

Согласно таблице, k сильно меняется по длинам волн. Это, как показывает рис. 3, *a*, приводит к трансформации нормированного распределения на поверхности. При этом если источник тепла находится на поверхности или на большой глубине, то влияние поглощения небольшое. Однако на средних глубинах, чем больше k , тем шире распределение излучения на поверхности. Несколько странные возрастающие значения k ткани были использованы нами, поскольку они соответствуют конкретным λ : 2,2; 2,1; 2,4; 5,0 мкм. Характерно, что влияние самой длины волны не существенно. То есть если при разных λ показатель поглощения одинаков (что наблюдается в действительности), то и нормированное приращение неизменное. Принципиально другая картина наблюдается при рассмотрении абсолютной величины $\Delta B(\lambda)$ на рис. 3, *b*, когда $r = 0$. Данные представлены при разных a . Рост ΔB на несколько порядков при изменении λ от 2 до 9 мкм в основном определяется величиной λ . Поглощение несущественно сказывается на величине приращения яркости. Относительный рост ΔB замедляется с увеличением λ . Относительное падение приращения с углублением источника приблизительно одинаковое при разных длинах волн. Здесь уместно остановиться на полихромном приемнике. Расчет показывает, что для него нормализованное распределение приращения сигнала с поверхности описывается кривыми, близкими к кривым 4 на рис. 3. Если абсолютные значения электрических сигналов при $\lambda = 2$ мкм приравнять приращениям яркости, то такие сигналы при разных a лягут на соответствующие кривые рис. 3, *b*. Это понятно, ибо при максимуме чувствительности приемника при $\lambda = 9,5$ мкм показатель поглощения $k = 585$ см⁻¹, когда поглощение не сильно влияет на нормированное распределение приращения яркости (сигнала).

Влияние параметра теплоотдачи на распределение приращения яркости на поверхности. Как и в предыдущих двух случаях, рассмотрим источник малых размеров и проанализируем влияние h на ΔB . На рис. 4, *a* построены нормированные значения ΔB как функции r при разных параметрах теплоотдачи. Видно, что при росте теплоотдачи в окружающее пространство распределение яркости сужается, но незначительно. Абсолютные значения ΔB при этом (рис. 4, *b*) в рассматриваемом, достаточно большом, интервале уменьшаются приблизительно на 20%. Далее исследуем влияние размеров источника тепла на распределение ΔB .

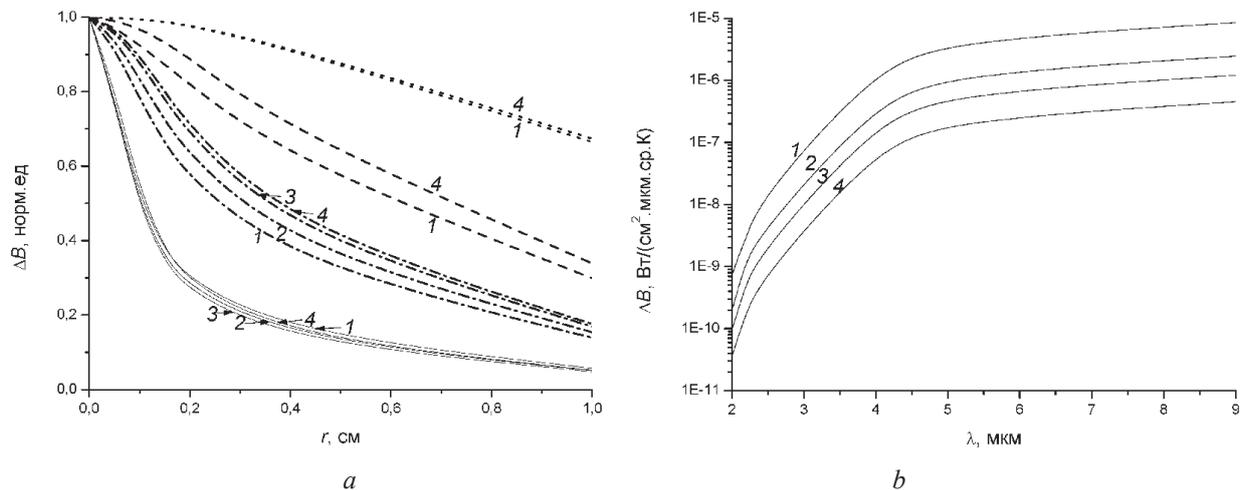


Рис. 3. Влияние показателя поглощения k (или λ) на распределение приращения яркости на поверхности кожи при $q = 1,0$ Вт/см³, $\lambda = 2,2$ мкм, $d = 0,1$ см, $z_0 = 0,1$ см, $h = 0,05$ см⁻¹: *a* – нормированные значения ΔB , сплошные линии соответствуют в см значению $a = 0,05$, пунктирные – 0,2, прерывистые – 0,4, точечные – 1,0 (цифры у кривых соответствуют разным значениям k в см⁻¹: 1 – 13,21; 2 – 21,52; 3 – 40,05; 4 – 240); *b* – абсолютные значения ΔB при $r = 0$ (цифры у кривых соответствуют разным значениям a в см: 1 – 0,05; 2 – 0,2; 3 – 0,4; 4 – 1,0)

Fig. 3. Brightness increment distribution on the skin surface vs. absorption index k (or λ) at $q = 1.0$ W/cm³, $\lambda = 2.2$ μ m, $d = 0.1$ cm, $z_0 = 0.1$ cm, $h = 0.05$ cm⁻¹. In (a) the normalized values of ΔB , the solid lines correspond to $a = 0.05$ cm, the dotted lines – 0.2, the dashed lines – 0.4, the dotted lines – 1.0. The curves correspond to different value of k (cm⁻¹): 1 – 13.21; 2 – 21.52; 3 – 40.05; 4 – 240. Absolute values of ΔB at $r = 0$ (b). Here, the curves correspond to different values of a (cm): 1 – 0.05; 2 – 0.2; 3 – 0.4; 4 – 1.0

Влияние высоты цилиндра на распределение приращения яркости на поверхности.

До сих пор рассматривались случаи, когда размер источника был постоянным, имел определенное q , а следовательно, и тепловую мощность Q . Однако при варьировании размеров источника Q может не изменяться пропорционально его объему, а оставаться постоянным. Поэтому далее имеет смысл проводить одновременное исследование при постоянном q и Q . На рис. 5, *a* построено поверхностное распределение нормированной яркости при разных величинах анализируемого параметра (в данном случае z_0), а на рис. 5, *b* – абсолютная яркость при $r = 0$ как функция этого параметра. Поскольку в одной ситуации рассматривалось $q = 1 \text{ Вт/см}^3$, то в другой (для возможности сравнения) бралось $Q = qv$, где v – минимальный объем цилиндра (рис. 5), имеющий $d = 0,2 \text{ см}$, $z_0 = 0,1 \text{ см}$ и $q = 1 \text{ Вт/см}^3$. Источник такого объема ведет себя как точечный.

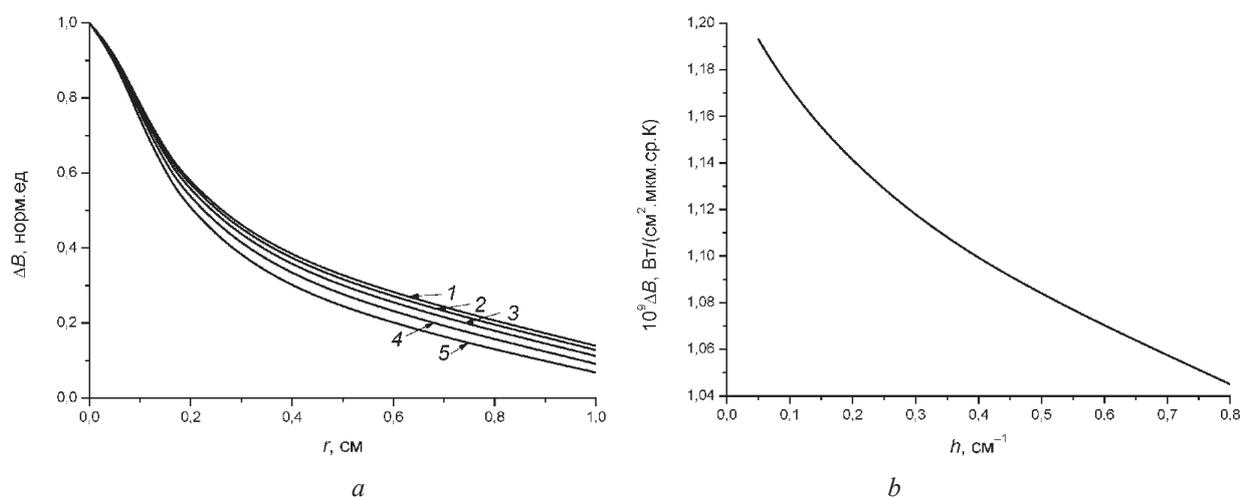


Рис. 4. Влияние параметра теплоотдачи h на распределение приращения яркости на поверхности кожи при $q = 1 \text{ Вт/см}^3$, $\lambda = 2,2 \text{ мкм}$, $d = 0,1 \text{ см}$, $z_0 = 0,1 \text{ см}$, $a = 0,2 \text{ см}$. Цифры у кривых соответствуют разным значениям h в см^{-1} : 1 – 0,05; 2 – 0,1; 3 – 0,2; 4 – 0,4; 5 – 0,8 (*a* – нормированные значения ΔB ; *b* – абсолютные при $r = 0$)

Fig. 4. Influence of the heat transfer parameter h on the brightness increment distribution on the skin surface at $q = 1 \text{ W/cm}^3$, $\lambda = 2.2 \text{ }\mu\text{m}$, $d = 0.1 \text{ cm}$, $z_0 = 0.1 \text{ cm}$, $h = 0.2 \text{ cm}^{-1}$. The curves in this figure correspond to different values of h (cm^{-1}): 1 – 0.05; 2 – 0.1; 3 – 0.2; 4 – 0.4; 5 – 0.8. Normalized values of ΔB (*a*); absolute values of ΔB at $r = 0$ (*b*)

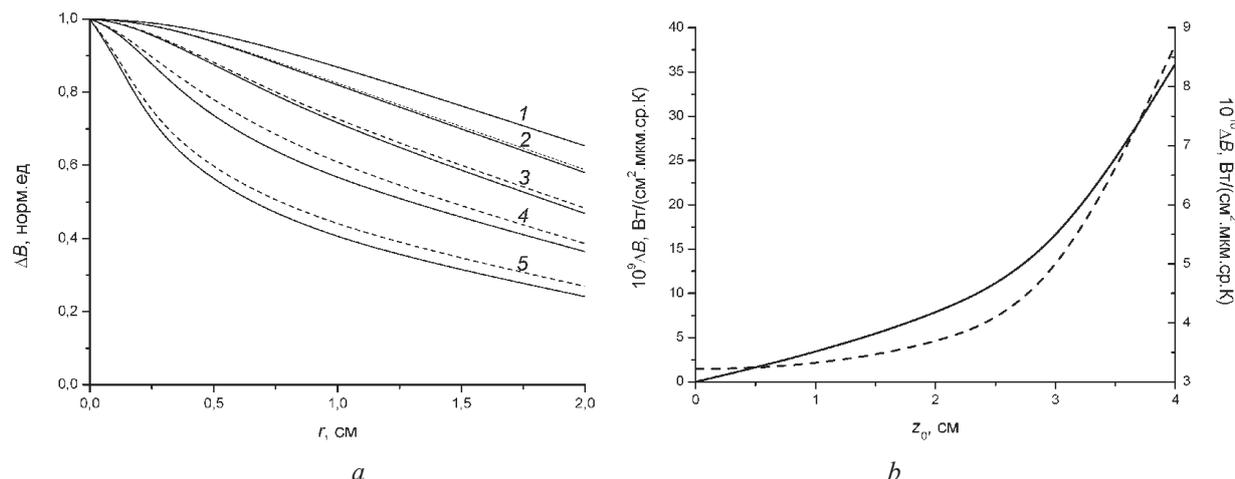


Рис. 5. Влияние высоты цилиндра z_0 на распределение приращения яркости на поверхности кожи при $\lambda = 2,2 \text{ мкм}$, $h = 0,05 \text{ см}^{-1}$, $a = 2,0 \text{ см}$, $d = 0,2 \text{ см}$. Цифры у кривых соответствуют разным значениям z_0 в см: 1 – 0,1; 2 – 2,0; 3 – 3,0; 4 – 3,5; 5 – 4,0. Сплошные линии соответствуют $q = 1 \text{ Вт/см}^3$, прерывистые – $Q = 3,142 \cdot 10^{-3}$ (*a* – нормированные значения ΔB ; *b* – абсолютные при $r = 0$)

Fig. 5. Influence the cylinder height z_0 on the brightness increment distribution on the skin surface at $\lambda = 2.2 \text{ }\mu\text{m}$, $h = 0.05 \text{ cm}^{-1}$, $a = 2.0 \text{ cm}$, $d = 0.2 \text{ cm}$. Different values of z_0 (cm) correspond to the values: 1 – 0.1; 2 – 2.0; 3 – 3.0; 4 – 3.5; 5 – 4.0. The solid lines correspond to $q = 1 \text{ W/cm}^3$, the dashed lines – $Q = 3.142 \cdot 10^{-3}$. The normalized values of ΔB (*a*), the absolute values of ΔB at $r = 0$ (*b*)

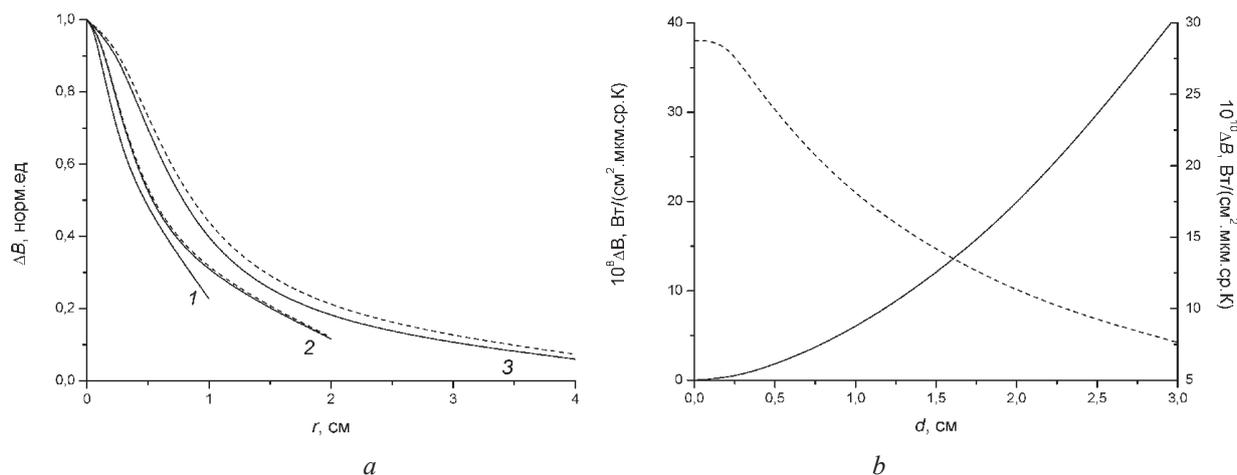


Рис. 6. Влияние диаметра d на распределение приращения яркости на поверхности кожи при $\lambda = 2,2$ мкм, $h = 0,05$ см⁻¹, $a = 0,3$ см, $z_0 = 0,1$ см. Цифры у кривых соответствуют разным значениям d в см: 1 – 0,2; 2 – 0,4; 3 – 1,0.

Сплошные линии соответствуют $q = 1$ Вт/см³, прерывистые – $Q = 3,142 \cdot 10^{-3}$
 (a – нормированные значения ΔB , b – абсолютные при $r = 0$)

Fig. 6. Effect of the diameter d on the brightness increment distribution on the skin surface at $\lambda = 2.2$ μm , $h = 0.05$ cm⁻¹, $a = 0.3$ cm, $z_0 = 0.1$ cm. The figures at the curves correspond to different values of d (cm): 1 is 0.2; 2 is 0.4; 3 is 1.0.

The solid lines correspond to $q = 1$ W/cm³, the dashed curves correspond to $Q = 3.142 \cdot 10^{-3}$
 (a – normalized values of ΔB , b – absolute values of ΔB at $r = 0$)

Из рис. 5, a видно, что по мере увеличения высоты цилиндра поверхностное распределение яркости «заостряется». Это связано с тем, что к поверхности среды приближается торцевая часть цилиндра, несущая, вследствие сильного поглощения, основную часть излучения. При каждом z_0 кривая для постоянного q всегда несколько выше, чем для постоянного Q , если источник практически неточечный. Указанные различия увеличиваются при росте z_0 . На рис. 5, b шкала ординат, с точностью до множителя, при постоянном q – левая, при постоянном Q – правая. В целом происходит рост ΔB с увеличением высоты цилиндра. Естественно, что, если Q постоянно, то кривая для него при малых z_0 будет выше, чем для постоянного q . Когда z_0 велико, то наблюдается обратная картина.

Влияние диаметра цилиндра на распределение приращения яркости на поверхности.

Рассмотрим ситуацию, когда у источника постоянное z_0 , а диаметр изменяется (рис. 6). На рис. 6, a видно, как расширяется распределение приращения яркости источника с увеличением его диаметра. При $d = 0,2$ см источник ведет себя как точечный, поэтому распределение яркости описывается одной кривой. С увеличением d кривая, соответствующая постоянному q , располагается несколько ниже, чем кривая, соответствующая постоянному Q . На рис. 6, b шкала ординат, с точностью до множителя, при постоянном q – левая, при постоянном Q – правая. Таким образом, можно видеть естественный рост ΔB при постоянном q и его падение при постоянном Q .

Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность В. В. Баруну за участие в разработке программы расчетов и обсуждение результатов.

Acknowledgements. The author is very grateful to V. V. Barun for participation in developing computation programs and in discussing the obtained results.

Список использованных источников

1. Draper, J. W. The calculation of skin temperature distribution in thermography / J. W. Draper, J. W. Boag // Phys. Med. Biol. – 1971. – Vol. 16, № 2. – P. 201–211. <https://doi.org/10.1088/0031-9155/16/2/301>
2. Gustafsson, S. E. Analytical calculation of the skin temperature distribution due to subcutaneous heat production in a spherical heat source (relevant to thermography) / S. E. Gustafsson, S. K. Nilsson, L. M. Torell // Phys. Med. Biol. – 1975. – Vol. 20, № 2. – P. 219–224. <https://doi.org/10.1088/0031-9155/20/2/003>
3. Barun, V. V. Thermal action of a short light pulse on biological tissues / V. V. Barun, A. P. Ivanov // Int. J. Heat Mass Transfer. – 2003. – Vol. 46, № 17. – P. 3243–3254. [https://doi.org/10.1016/s0017-9310\(03\)00124-8](https://doi.org/10.1016/s0017-9310(03)00124-8)
4. Hale, G. M. Optical constants of water in the 200 nm to 200 μm wavelength region / G. M. Hale, M. R. Querry // Appl. Opt. – 1973. – Vol. 12, № 3, pp. 555–563. <https://doi.org/10.1364/ao.12.000555>
5. Карслоу, Г. Теплопроводность твердых тел: пер. с англ / Г. Карслоу, Д. Егер. – М.: Наука, 1964. – 488 с.

6. Госсорг, Ж. Инфракрасная термография. Основы, техника, применение: пер. с фр. / Ж. Госсорг. – М.: Мир, 1988. – 416 с.
7. Фоторезисторы с кодом Грея из гетероэпитаксиальных структур $Cd_xHg_{1-x}Te$ на спектральный диапазон 2–11 мкм с термоэлектрическим охлаждением / А. В. Филатов [и др.] // Успехи прикладной физики. – 2015. – Т. 3, № 2. – С. 190–195.

References

1. Draper J. W., Boag J. W. The calculation of skin temperature distribution in thermography. *Physics in Medicine and Biology*, 1971, vol. 16, no. 2, pp. 201–211. <https://doi.org/10.1088/0031-9155/16/2/301>
2. Gustafsson S. E., Nilsson S. K., Torell L. M. Analytical calculation of the skin temperature distribution due to subcutaneous heat production in a spherical heat source (relevant to thermography). *Physics in Medicine and Biology*, 1975, vol. 20, no. 2, pp. 219–224. <https://doi.org/10.1088/0031-9155/20/2/003>
3. Barun V. V., Ivanov A. P. Thermal action of a short light pulse on biological tissues. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2003, vol. 46, no. 17, pp. 3243–3254. [https://doi.org/10.1016/s0017-9310\(03\)00124-8](https://doi.org/10.1016/s0017-9310(03)00124-8)
4. Hale G. M., Querry M. R. Optical constants of water in the 200 nm to 200 um wavelength region. *Applied Optics*, 1973, vol. 12, no. 3, pp. 555–563. <https://doi.org/10.1364/ao.12.000555>
5. Carslaw H. S., Jaeger J. C. *Conduction of Heat in Solids*. 2nd ed. Oxford, Clarendon Press, 1959. 510 p.
6. Gaussorgues G. La Thermographie Infrarouge. Principes-TechnologieApplications. 4 Ed. Paris, Lavoisier, 1999. 586 p. (Russ. Ed.: Gossorg Zh. *Infrakrasnaya termografiya. Osnovy, tekhnika, primenenie* [Gossorg J. Infrared thermography. Fundamentals, techniques, application]. Moscow, Mir Publ., 1988. 452 p.). (in France).
7. Filatov A. V., Karpov V. V., Susov E. V., Griбанov A. A., Kuznetsov N. S., Petrenko V. I. Photoresistors with a Gray code from heteroepitaxial structures $Cd_xHg_{1-x}Te$ on the 2–11 μm spectral range with thermoelectric cooling. *Uspekhi prikladnoi fiziki = Advances in Applied Physics*, 2015, vol. 3, no. 2, pp. 190–195 (in Russian).

Информация об авторе

Иванов Аркадий Петрович – член-корреспондент, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси (пр. Независимости, 68-2, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: ivanovap@dragon.bas-net.by

Information about the author

Arkady P. Ivanov – Corresponding Member, D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Senior Researcher, B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (68-2, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: ivanovap@dragon.bas-net.by

ISSN 1561-2430 (Print)
 ISSN 2524-2415 (Online)
 УДК 535.42
<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-3-326-331>

Поступила в редакцию 26.03.2018
 Received 26.03.2018

П. А. Апанасевич¹, В. С. Горелик², А. И. Водчиц¹, Г. И. Тимофеева¹

¹Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

²Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия

ГЕНЕРАЦИЯ ИНФРАКРАСНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ПРИ ВЫНУЖДЕННОМ КОМБИНАЦИОННОМ РАССЕЙАНИИ

Аннотация. Получены уравнения, описывающие генерацию средневолнового и длинноволнового инфракрасного (ИК) излучения при вынужденном комбинационном рассеянии (ВКР) в ситуации, когда частота первой или второй стоковых компонент меньше частоты колебания, возбуждаемого процессом ВКР. Показано, что такая генерация происходит вследствие двухфотонного испускания и четырехфотонного параметрического испускания. Во многих случаях полученные уравнения позволяют сравнительно просто оценить эффективность такой генерации ИК-излучения.

Ключевые слова: вынужденное комбинационное рассеяние, двухфотонное испускание, четырехфотонное параметрическое испускание, генерация инфракрасного излучения

Для цитирования. Генерация инфракрасного излучения при вынужденном комбинационном рассеянии / П. А. Апанасевич [и др.] // Вест. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2018. – Т. 54, № 3. – С. 326–331. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-3-326-331>

P. A. Apanasevich¹, V. S. Gorelik², A. I. Vodchits¹, G. I. Timofeeva¹

¹B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

²P. N. Lebedev Physical Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

INFRARED RADIATION GENERATION AT FORCED COMBINATION SCATTERING

Abstract. Equations describing the generation of medium-wave and long-wave infrared radiation in SRS are obtained in the situation when the frequency of the first or second Stokes components is smaller than the vibration frequency excited by the SRS process. It is shown that such generation occurs due to two-photon emission and four-photon parametric emission. In many cases, these equations make it possible to relatively simple estimate the efficiency of such generation of IR radiation.

Keywords: stimulated Raman scattering, two-photon emission, four-photon parametric emission, generation of infrared radiation

For citation. Apanasevich P. A., Gorelik V. S., Vodchits A. I., Timofeeva G. I. Infrared radiation generation at forced combination scattering. *Vesti Natsyional'noi akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, vol. 54, no. 3, pp. 326–331 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-3-326-331>

Введение. Комбинационное рассеяние, как известно, представляет собой двухфотонный процесс, приводящий к возбуждению колебательного уровня среды, отстоящего от основного на частоту $\omega_{21} = \omega_p - \omega_s$, где ω_p и ω_s – частоты накачки и стоковой компоненты. В распаде этого возбуждения наряду с неоптическими переходами неизбежно участвуют двухфотонные переходы с испусканием фотонов, сумма частот которых равна частоте ω_{21} возбуждаемого колебания. При отсутствии в среде излучения на частотах, меньших частоты рассматриваемого колебания, и однофотонных переходов с частотами, меньшими частоты ω_{21} , эти двухфотонные переходы возникают в результате мало интенсивного спонтанного испускания обоих фотонов, частоты и направления распространения которых ничем не фиксированы; фиксирована только сумма частот пар фотонов. Если же в среде присутствует излучение, частота которого меньше частоты рассматриваемого колебания, то наряду со спонтанно-спонтанными возможны и интенсивные вынужденно-спонтанные и вынужденно-вынужденные двухфотонные переходы. Такая ситуация неизбежно возникает при вынужденном комбинационном рассеянии (ВКР), если частота

одной из стоксовых компонент ω_s меньше частоты колебательного перехода ω_{21} . Настоящая статья посвящена получению соотношений, позволяющих оценить интенсивность возникающего при этом инфракрасного излучения на частоте $\omega_i = \omega_{21} - \omega_s$. Это, как правило, должно быть средне- и длинноволновое инфракрасное (ИК) излучение.

В случае, когда в среде ниже уровня, возбуждаемого процессом комбинационного рассеяния, имеются уровни, на которые разрешены однофотонные переходы, также возможно сравнительно интенсивное испускание ИК-излучения на частотах этих однофотонных переходов [1–4]. Как показано в [5], в этом случае наряду с однофотонными переходами существенное влияние на испускание ИК-излучения может оказывать и резонансное двухфотонное испускание. В данной статье предположено, что однофотонные и соответствующие им резонансные двухфотонные переходы отсутствуют.

Частота первой стоксовой компоненты меньше частоты колебательного перехода. Эта ситуация реализуется в случае, когда частота накачки ω_p удовлетворяет условию $\omega_p < 2\omega_{21}$. Формальная схема взаимодействия излучения с колебательным центром среды в этом случае изображена рис. 1. Здесь накачка ω_p , стоксова компонента ω_s и инфракрасная волна ω_i образуют с колебательным центром нелинейной среды два связанных двухфотонных перехода: $\omega_p - \omega_s = \omega_{21}$ и $\omega_s + \omega_i = \omega_{21}$. Если компоненты излучения представляют собой плоские волны, распространяющиеся вдоль оси z , т. е. поле излучения имеет вид

$$E = \sum_n E_n e^{-i(\omega_n t - k_n z)} + \text{к.с.}, \tag{1}$$

то их взаимодействие в нелинейной среде очень часто в рассматриваемой ситуации можно описать следующей системой уравнений [6–8]:

$$\frac{1}{u_p} \frac{\partial E_p}{\partial t} + \frac{\partial E_p}{\partial z} = -\frac{2\pi i \omega_p}{c n_p} N \beta_{12}^{ps} E_s \rho_{21} - \alpha_p E_p, \tag{2}$$

$$\frac{1}{u_s} \frac{\partial E_s}{\partial t} + \frac{\partial E_s}{\partial z} = -\frac{2\pi i \omega_s}{c n_s} N \left(\beta_{21}^{ps} E_p \rho_{21}^* + \beta_{12}^{si} E_i^* e^{i\Delta k z} \rho_{21} \right) - \alpha_p E_p, \tag{3}$$

$$\frac{1}{u_i} \frac{\partial E_i}{\partial t} + \frac{\partial E_i}{\partial z} = -\frac{2\pi i \omega_i}{c n_i} N \beta_{12}^{si} E_s^* e^{i\Delta k z} \rho_{21} - \alpha_p E_p. \tag{4}$$

Здесь E_n, k_n, u_n, n_n и α_p – амплитуды, волновые числа, групповые скорости, показатели преломления и коэффициенты потерь накачки ($n = p$), стоксовой компоненты ($n = s$) и инфракрасной волны ($n = i$); β_{21}^{ps} и β_{21}^{si} – тензоры комбинационного рассеяния $\omega_p - \omega_s \approx \omega_{21}$ и двухфотонного перехода $\omega_s + \omega_i \approx \omega_{21}$; N – плотность рассеивающих центров; ρ_{21} – амплитуда колебательного перехода,

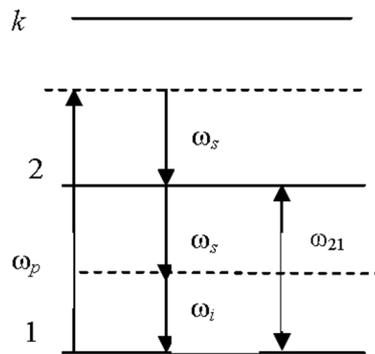


Рис. 1. Схема взаимодействия, когда частота первой стоксовой компоненты ω_s меньше частоты ω_{21} колебания, возбуждаемого вынужденным комбинационным рассеянием

Fig. 1. Interaction scheme when the frequency of the first Stokes component ω_s is smaller than the vibration frequency ω_{21} excited by forced combination scattering

индуцированная вынужденным комбинационным рассеянием и двухфотонным испусканием. Ее зависимость от амплитуд излучения определяется уравнениями

$$\frac{d\rho_{21}}{dt} = -\frac{1}{ih} \left(\beta_{21}^{ps} E_p E_s^* + \beta_{21}^{si} E_s E_i e^{-i\Delta kz} \right) q - \left[i(\omega_{21} - \omega_p + \omega_s) + \gamma \right] \rho_{21}, \quad (5)$$

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{4}{ih} \operatorname{Im} \left[\left(\beta_{12}^{ps} E_p^* E_s + \beta_{12}^{si} E_s^* E_i^* e^{-i\Delta kz} \right) \rho_{21} \right] - \frac{1}{T} (q - q_0), \quad (6)$$

где $q = \rho_{11} - \rho_{22}$ – разность заселенностей уровней 1 и 2; q_0 – равновесная (определяемая температурой) разность заселенностей; $\Delta kz = (2k_s + k_i - k_p)z$ – фазовая расстройка взаимодействующих волн; T – время установления равновесного распределения колебательных центров по уровням; γ – спектральная ширина колебательного перехода; h – постоянная Планка. При выводе уравнений (2)–(6) предположено, что амплитуды E_n по сравнению с $\exp(ik_n z - i\omega_n t)$ зависят от времени и координат слабо, и учтено, что $\omega_s + \omega_i = \omega_p - \omega_s$.

В квазистационарном приближении, т. е. при условии, что изменением амплитуд полей на времени поперечной релаксации $1/\gamma$ можно пренебречь, и в уравнении (5) положить $d\rho_{21}/dt \ll \gamma \rho_{21}$, уравнения (2)–(4) и (6) при $|\omega_{21} - \omega_p + \omega_s| \ll \gamma$ и $|\omega_{21} - \omega_i - \omega_s| \ll \gamma$ приводятся к виду

$$\frac{1}{u_p} \frac{\partial E_p}{\partial t} + \frac{\partial E_p}{\partial z} = -\frac{2\pi\omega_p}{cn_p h \gamma} N \left(\left| \beta_{21}^{ps} \right|^2 |E_s|^2 E_p + \beta_{12}^{ps} \beta_{21}^{si} E_s^2 E_i e^{-i\Delta kz} \right) q - \alpha_p E_p, \quad (7)$$

$$\frac{1}{u_s} \frac{\partial E_s}{\partial t} + \frac{\partial E_s}{\partial z} = \frac{2\pi\omega_s}{cn_s h \gamma} N \left(\left| \beta_{21}^{ps} \right|^2 |E_p|^2 E_s + 2\beta_{21}^{ps} \beta_{12}^{si} E_p E_s^* E_i^* e^{i\Delta kz} + \left| \beta_{21}^{si} \right|^2 |E_i|^2 E_s \right) q - \alpha_s E_s, \quad (8)$$

$$\frac{1}{u_i} \frac{\partial E_i}{\partial t} + \frac{\partial E_i}{\partial z} = \frac{2\pi\omega_i}{cn_i h \gamma} N \left(\left| \beta_{21}^{si} \right|^2 |E_s|^2 E_i + \beta_{21}^{ps} \beta_{12}^{si} E_p (E_s^*)^2 e^{i\Delta kz} \right) q - \alpha_i E_i, \quad (9)$$

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{4}{h^2 \gamma} \operatorname{Im} \left[\left| \beta_{21}^{ps} \right|^2 |E_p|^2 |E_s|^2 + \left| \beta_{21}^{si} \right|^2 |E_s|^2 |E_i|^2 \right] q - \frac{1}{T} (q - q_0). \quad (10)$$

Уравнения (7)–(9) описывают действие на амплитуды взаимодействующих волн процессов вынужденного комбинационного рассеяния, вынужденного двухфотонного испускания и четырехфотонного параметрического взаимодействия (ЧФПВ) (вторые слагаемые в правой части этих уравнений). Как следует из (10), на заселенности уровней ЧФПВ влияния не оказывает.

При решении конкретных задач уравнения (7)–(9) должны быть дополнены соответствующими начальными и граничными условиями. В частности, если к среде извне подводится только накачка, то в качестве начального значения E_s в первом слагаемом уравнения (8) следует взять амплитуду спонтанного комбинационного рассеяния, возбуждаемого накачкой.

Из теории двухфотонных переходов следует, что тензоры комбинационного рассеяния β_{21}^{ps} и двухфотонного испускания β_{21}^{si} представляют собой суммы слагаемых типа $d_{1k}^n d_{k2}^m / (\omega_{k1,2} \pm \omega_n)$, где d_{1k}^n и d_{k2}^m – проекции дипольных моментов однофотонных переходов между уровнями 1 и 2 и промежуточным уровнем k на амплитуды взаимодействующих волн n и m , $\omega_{k1,2}$ – частоты этих переходов. Среди слагаемых, образующих тензор β_{21}^{ps} , имеются слагаемые с $\omega_{k1,k2} - \omega_p$, а образующих тензор β_{21}^{si} – слагаемые с $\omega_{k1,k2} - \omega_i$. А так как $\omega_p \gg \omega_i$, то следует полагать, что $\beta_{21}^{ps} > \beta_{21}^{si}$. В условиях реального эксперимента очень часто можно считать, что $|E_i| \ll |E_p|$. Учитывая эти особенности, в правой части уравнений (7)–(10) часто можно опустить слагаемые, содержащие E_i , и в результате получить более простую систему уравнений:

$$\frac{1}{u_p} \frac{\partial E_p}{\partial t} + \frac{\partial E_p}{\partial z} = -(\omega_p n_s / \omega_s n_p) G q |E_s|^2 E_p - \alpha_p E_p, \quad (11)$$

$$\frac{1}{u_s} \frac{\partial E_s}{\partial t} + \frac{\partial E_s}{\partial z} = Gq |E_p|^2 E_s - \alpha_s E_s, \quad (12)$$

$$\frac{1}{u_i} \frac{\partial E_i}{\partial t} + \frac{\partial E_i}{\partial z} = \frac{2\pi\omega_i}{cn_i h\gamma} N \beta_{21}^{ps} \beta_{12}^{si} q E_p (E_s^*)^2 e^{-i\Delta k z} - \alpha_i E_i, \quad (13)$$

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{4}{h^2\gamma} \text{Im} \left[|\beta_{21}^{ps}|^2 |E_p|^2 |E_s|^2 \right] q - \frac{1}{T} (q - q_0), \quad (14)$$

$$G = 2\pi\omega_s N |\beta_{21}^{ps}|^2 / cn_s h\gamma = gc n_s / 2\pi, \quad (15)$$

где g – коэффициент ВКР усиления излучения на частоте ω_s при накачке на частоте ω_p . Для многих сред это уже измеренная величина. Пользуясь равенством (15), в этих случаях приближено можно оценить и тензоры β_{21}^{ps} и β_{21}^{si} .

Из уравнения (13) следует, что в рассматриваемом приближении инфракрасная волна E_i образуется из волн накачки и стоксовой компоненты только вследствие четырехфотонного параметрического процесса. Ее определение сводится к определению накачки E_p и первой стоксовой компоненты E_s путем решения уравнений (11), (12) и (14) при заданных начальных и граничных условиях и решению уравнения (13) при подстановке в него найденных E_p и E_s . При этом особое внимание должно быть обращено на фазовое согласование взаимодействующих волн. Для эффективной генерации инфракрасной волны E_i необходимо обеспечить выполнение условия $\Delta k = 2k_s + k_i - k_p = 0$.

На рис. 2 приведены зависимости интенсивностей $I_m = cn_m |E_m|^2 / 2\pi$ взаимодействующих волн от z в случае, когда извне на среду падают излучения накачки и стоксовой компоненты (усилительный вариант). Кривые рассчитаны по уравнениям (11)–(13) при предположениях: $\partial E_m / \partial t \ll u_m \partial E_m / \partial z$, $|\beta_{12}^{si}| = 0,7 |\beta_{12}^{ps}|$, $q = q_0$, $\omega_i = 0,2\omega_s$, $n_i = n_s = n_p = 1,5$, $g = 6 \cdot 10^{-8}$ см/Вт,

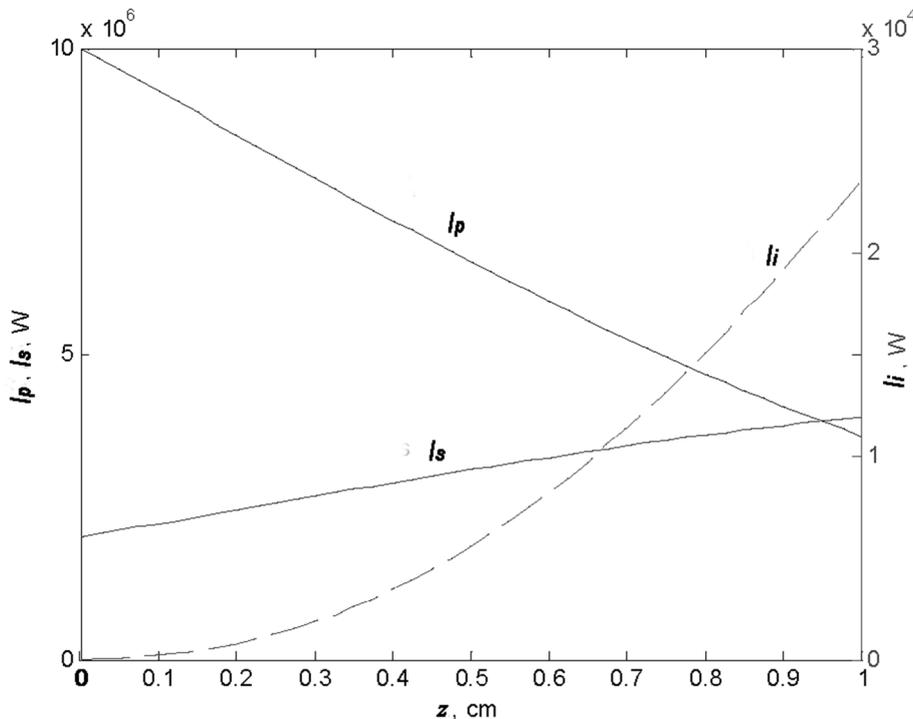


Рис. 2. Интенсивность I_i генерируемого ИК-излучения при облучении нелинейной среды излучением накачки I_p и стоксовой компоненты I_s ; условия оговорены в тексте

Fig. 2. Intensity I_i of generated IR radiation at irradiation of a nonlinear medium by pumping radiation I_p and the Stokes component I_s ; conditions are given in the text

а следовательно, $G = 430 \text{ см}^2/\text{Дж}$. Интенсивности накачки и стоксовой компоненты на входе в нелинейную среду положены равными $I_p(0) = 1 \cdot 10^7 \text{ Вт}$ и $I_s(0) = 2 \cdot 10^6 \text{ Вт}$ соответственно. При этих простейших условиях интенсивность генерируемого ИК-излучения на пути в 1 см оказалась равной $I_i = 2,4 \cdot 10^4 \text{ Вт}$, т. е. составила 1,2 % от стоксовой компоненты на входе в среду.

Частота второй стоксовой компоненты меньше частоты колебательного перехода. Как уже отмечалось, для реализации рассмотренного случая необходимо для накачки использовать лазер, генерирующий излучение с частотой $\omega_p < 2\omega_{21}$, т. е. излучение с длиной волны $\lambda_p > 1/2\nu_{21}$, где ν_{21} – частота колебательного перехода в обратных сантиметрах. Например, при использовании в качестве нелинейной среды гидроксида лития (LiOH), частота ВКР активного колебания которого равна $\nu_{21} = 3670 \text{ см}^{-1}$ и считается одной из наиболее высоких, длина волны λ_p излучения накачки должна быть больше $1/2\nu_{21} = 1,36 \text{ мкм}$. В микронной области спектра наиболее мощными и совершенными являются неодимовые лазеры, генерирующие излучение с $\lambda = 1,064 \text{ мкм}$. Такие лазеры широко используются в системах ВКР преобразования частоты. При этом очень часто наряду с первой стоксовой компонентой возбуждается вторая и стоксовы компоненты более высокого порядка. Учитывая это, рассмотрим случай, когда частота второй стоксовой компоненты ω_2 меньше частоты колебательного перехода, возбуждаемого ВКР, т. е. когда накачка удовлетворяет условию $2\omega_{21} < \omega_p < 3\omega_{21}$ (т. е. когда $1/2\nu_{21} > \lambda_p > 1/3\nu_{21}$). Это условие выполняется, в частности, при вынужденном комбинационном рассеянии излучения неодимового лазера в LiOH и в воде, где имеется КР активное колебание с частотой $\nu_{21} = 3421 \text{ см}^{-1}$. Соответственно в LiOH должно генерироваться ИК-излучение с длиной волны $\lambda_i = 6,3 \text{ мкм}$, а в воде – с $\lambda_i = 11,5 \text{ мкм}$.

В квазистационарном приближении процесс генерации излучения частоты ω_i в случае, когда частота второй стоксовой компоненты меньше частоты колебательного перехода, возбуждаемого процессом ВКР, т. е. при выполнении условия $\omega_p < 3\omega_{21}$, описывается системой уравнений

$$\frac{1}{u_p} \frac{\partial E_p}{\partial t} + \frac{\partial E_p}{\partial z} = -\frac{2\pi\omega_p}{cn_p h\gamma} N \left| \beta_{21}^{p1} \right|^2 q \left| E_1 \right|^2 E_p, \quad (16)$$

$$\frac{1}{u_1} \frac{\partial E_1}{\partial t} + \frac{\partial E_1}{\partial z} = \frac{2\pi\omega_1 N}{cn_1 h\gamma} \left(\left| \beta_{21}^{p1} \right|^2 \left| E_p \right|^2 - \left| \beta_{21}^{12} \right|^2 \left| E_2 \right|^2 \right) q E_1, \quad (17)$$

$$\frac{1}{u_2} \frac{\partial E_2}{\partial t} + \frac{\partial E_2}{\partial z} = \frac{2\pi\omega_2 N}{cn_2 h\gamma} \left| \beta_{21}^{12} \right|^2 \left| E_1 \right|^2 q E_2, \quad (18)$$

$$\frac{1}{u_i} \frac{\partial E_i}{\partial t} + \frac{\partial E_i}{\partial z} = \frac{2\pi\omega_i}{cn_i h\gamma} N \left[\beta_{12}^{p1} \beta_{21}^{2i} q E_p E_1^* E_2^* e^{i\Delta k_a z} + \beta_{21}^{12} \beta_{12}^{2i} q E_1 (E_2^*)^2 e^{i\Delta k_b z} \right], \quad (19)$$

где E_1 и E_2 – амплитуды первой и второй стоксовых компонент, $\Delta k_a = k_p - k_1 - k_2 - k_i$ и $\Delta k_b = k_1 - 2k_2 - k_i$. Здесь для обозначения параметров первой и второй стоксовых компонент использованы индексы 1 и 2.

Из уравнения (19) следует, что генерация ИК-излучения в этом случае происходит вследствие двух существенно разных четырехфотонных параметрических процессов. В условиях реального эксперимента процесс с участием накачки играет определяющую роль.

Заключение. Получены уравнения, описывающие генерацию инфракрасного излучения при вынужденном комбинационном рассеянии в ситуации, когда частота первой или второй стоксовых компонент меньше частоты колебания, возбуждаемого процессом ВКР. В условиях реального эксперимента такая генерация, что следует из уравнений (13) и (19), имеет вид четырехфотонного параметрического испускания. Приведенные уравнения позволяют во многих случаях оптимизировать эффективность такой генерации ИК-излучения.

Благодарности. Работа выполнена в рамках совместного проекта при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф16Р-063) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-52-00026).

Acknowledgements. The work was sponsored within the framework of the Joint Project by the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (Project No. Ф16Р-063) and by the Russian Foundation for Basic Research (Project No. 16-52-00026).

Список использованных источников

1. О возможности наблюдения индуцированного инфракрасного излучения при комбинационном рассеянии света / В. С. Горелик [и др.] // Письма в ЖЭТФ. – 1966. – Т. 4, Вып. 2. – С. 52–54.
2. Горелик, В. С. Вынужденное инфракрасное излучение при возбуждении конденсированных молекулярных диэлектриков гигантскими импульсами лазера на рубине / В. С. Горелик, А. Д. Кудрявцева, Н. В. Чернега. – М., 2005. – 18 с. – (Препринт / Физ. ин-т им. П. Н. Лебедева РАН, № 15).
3. Infrared emission of single-crystal calcite under broadband short-wavelength excitation / V. S. Gorelik [et al.] // *Inorg. Mater.* – 2006. – Vol. 42, № 11. – P. 1251–1254. <https://doi.org/10.1134/s0020168506110136>
4. Gorelik, V. S. Stimulated infrared emission under excitation of condensed molecular dielectrics with giant pulses of a ruby laser / V. S. Gorelik, A. D. Kudryavtseva, N. V. Chernega // *J. Russian Laser Research.* – 2006. – Vol. 27, № 2. – P. 81–91. <https://doi.org/10.1007/s10946-006-0004-1>
5. Апанасевич, П. А. Резонансные двухфотонные переходы / П. А. Апанасевич, Г. И. Тимофеева // *Журн. приклад. спектроскопии.* – 2018. – Т. 85, № 2. – С. 231–235.
6. Апанасевич, П. А. Основы теории взаимодействия света с веществом / П. А. Апанасевич. – Минск: Наука и техника, 1977. – 496 с.
7. Шен, И. Р. Принципы нелинейной оптики / И. Р. Шен; пер. с англ. И. Л. Шумая; под ред. С. А. Ахманова, Р. В. Хохлова. – М.: Наука, 1989. – 557 с.
8. Boyd, R. W. *Nonlinear Optics* / R. W. Boyd. – San Diego: Academic Press, 2003. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-121682-5.X5000-7>

References

1. Gorelik V. S., Zubov V. A., Sushchinskii M. M., Chirkov V. A. On the possibility of observing induced infrared radiation in Raman scattering of light. *Pis'ma v ZhETF = JETP Letters*, 1966, vol. 4, pp. 52–54 (in Russian).
2. Gorelik V. S., Kudryavtseva A. D., Chernega N. V. *Stimulated infrared emission under excitation of condensed molecular dielectrics with giant pulses of a ruby laser. Preprint No. 15 of the P. N. Lebedev Physical Institute of RAS.* Moscow, 2005. 18 p. (in Russian).
3. Gorelik, V. S., Gagarinov A. G., Degtyareva O. V., Savranskii V. V., Terpugov E. L. Infrared emission of single-crystal calcite under broadband short-wavelength excitation. *Inorganic Materials*, 2006, vol. 42, no. 11, pp. 1251–1254. <https://doi.org/10.1134/s0020168506110136>
4. Gorelik V. S., Kudryavtseva A. D., Chernega N. V. Stimulated infrared emission under excitation of condensed molecular dielectrics with giant pulses of a ruby laser. *Journal of Russian Laser Research*, 2006, vol. 27, no. 2, pp. 81–91. <https://doi.org/10.1007/s10946-006-0004-1>
5. Apanasevich P. A., Timofeeva G. I. Resonant Two-Photon Transitions. *Journal of Applied Spectroscopy*, 2018, vol. 85, no. 2, pp. 231–235. <https://doi.org/10.1007/s10812-018-0640-6>
6. Apanasevich P. A. *The Principles of Light-Matter Interaction Theory.* Minsk, Nauka i Tekhnika Publ, 1977. 496 p. (in Russian).
7. Shen Y. R. *The Principles of Nonlinear Optics.* New York, J. Wiley, 1984. 563 p.
8. Boyd R. W. *Nonlinear Optics.* San Diego, Academic Press, 2003. 576 p. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-121682-5.X5000-7>

Информация об авторах

Апанасевич Павел Андреевич – академик, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси (пр. Независимости, 68-2, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: p.apanasevich@ifanbel.bas-net.by

Горелик Владимир Семенович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией, Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН (Ленинский пр., 53, 119991, г. Москва, Российская Федерация). E-mail: gorelik@sci.lebedev.ru

Водчиц Александр Иванович – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси (пр. Независимости, 68-2, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: a.vodchits@dragon.bas-net.by

Тимофеева Галина Ивановна – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси (пр. Независимости, 68-2, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: g.timofeeva@dragon.bas-net.by

Information about the authors

Pavel A. Apanasevich – Academician, Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Chief Researcher, B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (68-2, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: p.apanasevich@ifanbel.bas-net.by

Vladimir S. Gorelik – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Laboratory, P. N. Lebedev Physical Institute of the Russian Academy of Sciences (53, Leningrad Ave., 119991, Moscow, Russian Federation). E-mail: gorelik@sci.lebedev.ru

Aleksandr I. Vodchits – Ph. D. (Physics and Mathematics), Leading Researcher, B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (68-2, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: a.vodchits@dragon.bas-net.by

Galina I. Timofeeva – Ph. D. (Physics and Mathematics), Senior Researcher, B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (68-2, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: g.timofeeva@dragon.bas-net.by

ISSN 1561-2430 (Print)

ISSN 2524-2415 (Online)

УДК 538.956:621.382

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-3-332-340>

Поступила в редакцию 05.06.2018

Received 05.06.2018

Г. К. Савчук¹, А. К. Летко², Н. А. Басов²¹Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь²Научно-практический центр Национальной академии наук Беларуси по материаловедению, Минск, БеларусьУСЛОВИЯ ПОЛУЧЕНИЯ И ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СВЧ-КЕРАМИКИ
СОСТАВОВ $(1-x)(\text{Mg}_{0,2}\text{Zn}_{0,8})\text{TiO}_3-x\text{CaTiO}_3$

Аннотация. Представлены результаты исследований температурной и частотной зависимостей диэлектрических характеристик СВЧ-керамики составов $(1-x)(\text{Mg}_{0,2}\text{Zn}_{0,8})\text{TiO}_3-x\text{CaTiO}_3$ ($(1-x)(\text{MZT})-x\text{CT}$) ($0,1 \leq x < 0,6$), синтезированной из смеси оксидов (первый способ) и из смеси предварительно полученных твердого раствора $(\text{Mg}_{0,2}\text{Zn}_{0,8})\text{TiO}_3$ и соединения CaTiO_3 (второй способ), а также керамик данных составов, допированных на стадии спекания 1–2 % олова и вольфрама. Показано, что синтезированная керамика представляет собой композит, состоящий из смеси фаз, образующихся на основе твердых растворов $(\text{Zn}, \text{Mg})_2\text{TiO}_4$, $(\text{Zn}, \text{Mg})\text{TiO}_3$ и соединения CaTiO_3 , соотношение которых в керамике зависит от состава исходной шихты и условий синтеза. Установлено, что диэлектрическая проницаемость (ϵ) керамики, синтезированной из смеси оксидов, увеличивается с увеличением содержания CaTiO_3 в системе $(1-x)(\text{Mg}_{0,2}\text{Zn}_{0,8})\text{TiO}_3-x\text{CaTiO}_3$. Данная керамика характеризуется малыми значениями температурного коэффициента диэлектрической проницаемости (TK_ϵ) и тангенса угла диэлектрических потерь ($\text{tg}\delta$) в области температур 20–200 °С. Для керамики, синтезированной по второму способу, высокая температурная стабильность TK_ϵ и малое значение $\text{tg}\delta$ наблюдаются в области температур 20–150 °С. Допирование керамик оксидами олова и вольфрама приводит к увеличению ϵ и снижению диэлектрических потерь.

Ключевые слова: СВЧ-керамика, диэлектрические свойства, температурные зависимости диэлектрической проницаемости, частотные зависимости диэлектрической проницаемости

Для цитирования. Савчук, Г. К. Условия получения и диэлектрические свойства СВЧ-керамики составов $(1-x)(\text{Mg}_{0,2}\text{Zn}_{0,8})\text{TiO}_3-x\text{CaTiO}_3$ / Г. К. Савчук, А. К. Летко, Н. А. Басов // Вест. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2018. – Т. 54, № 3. – С. 332–340. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-3-332-340>

G. K. Sauchuk¹, A. K. Letko², N. A. Basau²¹Belarusian National Technical University, Minsk, Belarus²Scientific and Practical Materials Research Center of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, BelarusPRODUCTION CONDITIONS AND DIELECTRIC PROPERTIES OF MICROWAVE CERAMICS
BASED ON $(1-x)(\text{Mg}_{0,2}\text{Zn}_{0,8})\text{TiO}_3-x\text{CaTiO}_3$ COMPOSITIONS

Abstract. The results of investigation of the temperature and frequency dependences of the dielectric characteristics of microwave ceramics of $(1-x)(\text{Mg}_{0,2}\text{Zn}_{0,8})\text{TiO}_3-x\text{CaTiO}_3$ ($(1-x)(\text{MZT})-x\text{CT}$) ($0,1 \leq x < 0,6$) compositions synthesized from a mixture of oxides (the first method) and from a mixture of a pre-prepared solid solution of $(\text{Mg}_{0,2}\text{Zn}_{0,8})\text{TiO}_3$ and a CaTiO_3 compounds (the second method), as well as ceramics of these compositions doped at the stage of sintering 1–2 % tin and tungsten are presented. It is shown that the synthesized ceramics is a composite consisting of a mixture of phases formed on the basis of solid solutions of $(\text{Zn}, \text{Mg})_2\text{TiO}_4$, $(\text{Zn}, \text{Mg})\text{TiO}_3$ and the CaTiO_3 compounds, the ratio of which in ceramics depends on the composition of the initial mixture and the synthesis conditions. It is established that the dielectric constant (ϵ) of ceramics synthesized from a mixture of oxides increases with increasing CaTiO_3 content in the $(1-x)(\text{Mg}_{0,2}\text{Zn}_{0,8})\text{TiO}_3-x\text{CaTiO}_3$ system. This ceramics is characterized by small values of the temperature coefficient of dielectric constant (TK_ϵ) and the dielectric loss tangent ($\text{tan}\delta$) in the temperature range of 20–200 °C. For ceramics synthesized according to the second method, the high temperature stability of TK_ϵ and the small value of $\text{tan}\delta$ are observed in the temperature range of 20–150 °C. Doping ceramics with tin and tungsten oxides leads to an increase in ϵ and a decrease in dielectric losses.

Keywords: microwave ceramics, dielectric properties, temperature dependences of dielectric constant, frequency dependences of dielectric constant

For citation. Sauchuk G. K., Letko A. K., Basau N. A. Production conditions and dielectric properties of microwave ceramics based on $(1-x)(\text{Mg}_{0,2}\text{Zn}_{0,8})\text{TiO}_3-x\text{CaTiO}_3$ compositions. *Vestsi Natsyional'nei akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, vol. 54, no. 3, pp. 332–340 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-3-332-340>

Введение. СВЧ-электроника является в настоящее время важной составляющей развития всей электронной индустрии. Возможности новых микроэлектронных СВЧ-технологий и тесно связанных с ними цифровых микроэлектронных технологий позволяют развиваться телекоммуникационной индустрии, производству контрольно-измерительного и аналитического оборудования и т. д. [1].

Конденсаторы – это один из самых массовых компонентов современной электронной техники, и в настоящее время в связи с быстрым развитием микроэлектроники потребность в них непрерывно растет [1], поэтому разработка новых конденсаторных материалов остается одной из актуальных задач.

Высокочастотные (с частотой до сотен мегагерц и более) конденсаторы предназначаются для использования в резонансных контурах и цепях, где требуются малые потери и высокая стабильность электроемкости. Они необходимы в системах мобильной и волоконно-оптической связи, беспроводных технологиях, СВЧ-системах локальной передачи данных, досмотровых комплексах безопасности, различных радарх и т. д.

Малые потери и высокая стабильность ϵ в СВЧ-конденсаторах – это параметры, которые в основном зависят от характеристик используемого для их изготовления керамического диэлектрического материала. Вклад диэлектрических потерь в общие потери конденсатора является доминирующим на частотах порядка 1 МГц, поэтому именно на этих частотах определяются значения тангенса угла диэлектрических потерь ($\text{tg}\delta$) керамик.

Общими требованиями, которые предъявляются для керамических СВЧ-материалов, являются широкий диапазон значений диэлектрической проницаемости (ϵ) с близким к нулю температурным коэффициентом диэлектрической проницаемости (TK_ϵ) и малые диэлектрические потери, приводящие к высоким значениям добротности ($Q \sim 1/\text{tg}\delta$). Материалы для СВЧ-конденсаторов наряду с перечисленными требованиями должны обладать высокой стабильностью диэлектрических свойств в рабочих диапазонах температур и частот.

Известно [2–4], что в качестве основных компонентов для получения керамических СВЧ-диэлектриков используются соединения с упругой поляризацией (электронной и ионной). К таким соединениям относятся титаносодержащие соединения: TiO_2 , CaTiO_3 , SrTiO_3 , MgTiO_3 .

В настоящее время хорошо изучены керамические материалы на основе твердых растворов системы $\text{MgTiO}_3\text{--CaTiO}_3$, которые относятся к термостабильным материалам с низкими диэлектрическими потерями и значениями диэлектрической проницаемости от 17 до 25 [2–5]. Конденсаторные керамические материалы на основе механических смесей $\text{Mg}_2\text{TiO}_4\text{--CaTiO}_3$ при содержании 10 и 15 % CaTiO_3 имеют значения ϵ 20 и 25 соответственно, и $\text{tg}\delta \sim 2 \cdot 10^{-4}$ [6]. К термостабильным СВЧ-материалам относятся также керамики на основе системы ZnO--TiO_2 [3, 7].

Недостатком всех перечисленные выше керамических СВЧ-материалов являются низкие значения относительной диэлектрической проницаемости (<40), в то время как для конденсаторов СВЧ-диапазона ϵ должна быть >40 .

Целью данной работы являлось определение условий получения керамических СВЧ-материалов на основе системы $(1-x)(\text{Mg}_{0,2}\text{Zn}_{0,8})\text{TiO}_3\text{--}x\text{CaTiO}_3$ и исследование их диэлектрических свойств.

Экспериментальная часть. Разработка конденсаторных материалов основывалась на том, что матрицу составов должно составлять соединение или твердый раствор с низкими диэлектрическими потерями. В качестве матрицы для составов СВЧ-керамики был выбран твердый раствор $(\text{Mg}_{0,2}\text{Zn}_{0,8})\text{TiO}_3$, в который вводилась комплексная добавка, включающая титанат кальция, оксид олова и оксид вольфрама. Получение СВЧ-керамик осуществлялось двумя способами.

В первом способе синтез керамики $(1-x)((\text{Mg}_{0,2}\text{Zn}_{0,8})\text{--TiO}_2)\text{--}x\text{CaTiO}_3$ осуществлялся из оксидов магния MgO и цинка ZnO , диоксида титана TiO_2 и аксалата кальция CaCO_3 . Процесс синтеза порошков системы $(1-x)\text{MZT--}x\text{CT}$ производился на воздухе при температурах 950–1000 °С в течение 2–6 ч. Спекались керамики при 1200–1290 °С, продолжительность спекания составляла 2–6 ч. Введение микродобавок олова и вольфрама сверх стехиометрии в количестве 1–2 % осуществлялось перед стадией спекания, после чего спекание производилось при 1250–1310 °С.

Второй способ получения материалов системы $(1-x)((\text{Mg}_{0,2}\text{Zn}_{0,8})\text{--TiO}_2)\text{--}x\text{CaTiO}_3$ заключался в следующем: сначала производился синтез соединения CaTiO_3 и твердого раствора $(\text{Mg}_{0,2}\text{Zn}_{0,8})\text{TiO}_3$, затем полученные смеси спекались при температурах 1180–1290 °С в течение 2–4 ч.

Фазовый состав, как синтезированных порошков системы $(1-x)((\text{Mg}_{0,2}\text{Zn}_{0,8})-\text{TiO}_2)-x\text{CaTiO}_3$, так и полученных после спекания керамик, контролировался с помощью рентгенофазового анализа. Микроанализ полученных керамических образцов проводился микроанализатором Röntec Edwin. Исследование морфологии поверхности и определение размеров зерен фаз получаемых материалов осуществлялись методом сканирующей электронной микроскопии (СЭМ) на растровом микроскопе марки LEO. Температурные измерения диэлектрических параметров образцов производились по стандартной методике [7] с помощью моста E7-8. Измерения диэлектрической проницаемости и тангенса угла диэлектрических потерь в зависимости от частоты осуществлялись при комнатной температуре на анализаторе импеданса Agilent E4991A.

Результаты и их обсуждение. Согласно фазовой диаграмме системы $\text{ZnO}-\text{TiO}_2$ [3, 7] соединение ZnTiO_3 , синтезированное при соотношении исходных компонент 1:1 при температуре $700\text{ }^\circ\text{C}$, является нестабильным и при $945\text{ }^\circ\text{C}$ разлагается на соединение Zn_2TiO_4 и диоксид титана TiO_2 .

Введение в систему $\text{Zn}-\text{Ti}-\text{O}$ ионов магния в качестве дефектов замещения приводит к стабильности указанного соединения и при температуре $950\text{ }^\circ\text{C}$ образцы состава $(\text{Zn}_{0,8}\text{Mg}_{0,2})\text{O}-\text{TiO}_2$ после синтеза содержат три фазы: $45\%(\text{Zn, Mg})_2\text{TiO}_4$, $45\%(\text{Zn, Mg})\text{TiO}_3$ и $10\%\text{TiO}_2$.

При получении составов системы $(1-x)\text{MZT}-x\text{CT}$ первым способом после синтеза образцы являются неоднородными. После спекания в керамиках многофазность (рис. 1) сохраняется. Получаемые соотношения фаз при оптимальных температурах спекания представлены в табл. 1.

Таблица 1. Фазовый состав керамик системы $(1-x)\text{MZT}-x\text{CT}$, полученных первым способом, при оптимальных температурах спекания

Table 1. Ceramics phase composition of the $(1-x)\text{MZT}-x\text{CT}$ system obtained from the oxide method at optimum sintering temperatures

На основе фаз	Состав			
	0,6MZT–0,4CT	0,7MZT–0,3CT	0,8MZ–0,2CT	0,9MZT–0,1CT
$(\text{Zn, Mg})_2\text{TiO}_4$	67,8 %	72 %	82 %	88,2 %
$(\text{Zn, Mg})\text{TiO}_3$	3,3 %	6 %	6 %	6,3 %
CaTiO_3	28,9 %	22 %	12 %	5,5 %

В табл. 2 приведены значения ε и $\text{tg}\delta$ для керамических образцов системы $(1-x)((\text{Mg}_{0,2}\text{Zn}_{0,8})-\text{TiO}_2)-x\text{CaTiO}_3$, полученных при различных температурах спекания.

При увеличении содержания титаната кальция CaTiO_3 в системе $(1-x)(\text{MZT})-x\text{CT}$ температура спекания керамик возрастает (см. табл. 2). Оптимальные температуры спекания керамических

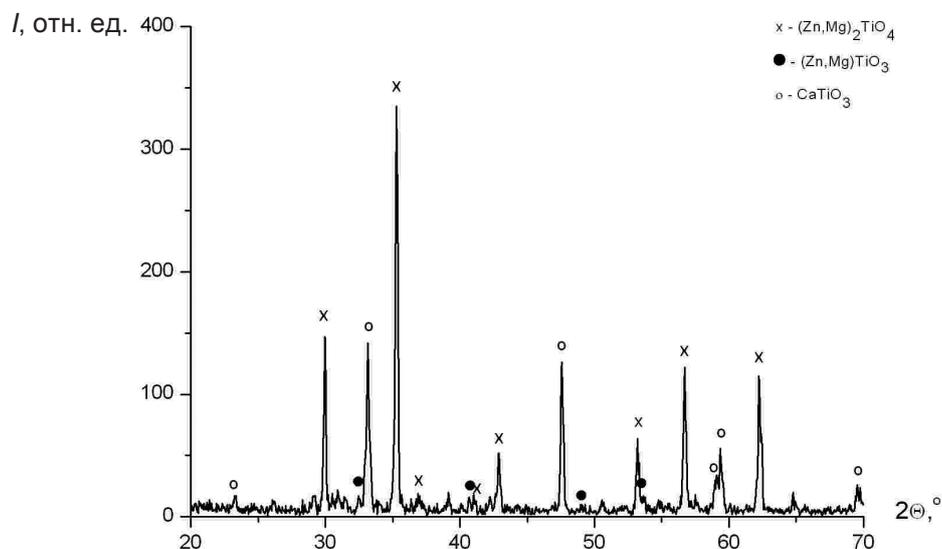


Рис. 1. Вид рентгенограмм для образцов состава 0,6MZT–0,4CT, полученных из оксидов, после спекания

Fig. 1. X-ray pattern for samples of the 0.6MZT–0.4CT composition obtained from oxides after sintering

образцов, полученных первым способом, составляют 1200 и 1220 °С при $x = 0,1$ и $0,2$ соответственно; при значениях $x \geq 0,3$, $T_{\text{спек}} \geq 1270$ °С.

Таблица 2. Значения диэлектрических параметров керамик (1-x)MZT-xCT на частоте 1 МГц в зависимости от состава и температуры спекания

Table 2. Dielectric parameters of (1-x)MZT-xCT ceramics at a frequency of 1 MHz depending on the composition and the sintering temperature

$T_{\text{спек}}, \text{ }^\circ\text{C}$	Состав							
	0,6MZT-0,4CT		0,7MZT-0,3CT		0,8MZT-0,2CT		0,9MZT-0,1CT	
	ϵ	$\text{tg}\delta$	ϵ	$\text{tg}\delta$	ϵ	$\text{tg}\delta$	ϵ	$\text{tg}\delta$
1180	–	–	–	–	25,2	0,009	19,2	0,0095
1200	–	–	–	–	28,1	0,0083	22,0	0,0096
1220	–	–	–	–	29,2	0,0077	23,2	0,0099
1250	29,2	0,0081	33,7	0,0065	33,4	0,0081	25,1	0,0110
1270	36,0	0,0067	36,5	0,0072	–	–	–	–
1290	40,6	0,0073	42,3	0,0062	–	–	–	–

Анализ микроструктуры керамик, полученных первым способом, свидетельствует о том, что более крупные зерна (до 10–12 мкм) имеют образцы состава 0,6MZT-0,4CT (рис. 2). Более крупные зерна способствуют развитию доменной структуры и ослаблению механических напряжений, препятствующих доменной поляризации, что привело к увеличению диэлектрической проницаемости керамик. Для образцов состава 0,6MZT-0,4CT относительная диэлектрическая проницаемость составляет ~40 (см. табл. 2), в то время как для образцов 0,8MZT-0,2CT ее значения – около 29. Из рис. 3, а видно, что керамические материалы состава (1-x)(MZT)-xCT, независимо от количества титаната кальция в них, сохраняют термостабильность ϵ в интервале температур 20–200 °С.

Таким образом, проведенные исследования показали, что изменение содержания титаната кальция в системе на основе титаната цинка-магния при первом способе получения способствует увеличению плотности и росту зерен керамических образцов, при этом диэлектрическая проницаемость с ростом содержания CaTiO_3 изменяется от 19 до 42. Керамические образцы имеют наиболее низкие диэлектрические потери и наиболее высокие значения ϵ при $x = 0,4$. Температурный коэффициент диэлектрической проницаемости при этом составляет $+44 \cdot 10^{-6} \text{ } 1/^\circ\text{C}$.

Керамики системы (1-x)(MZT)-xCT, полученные вторым способом, после спекания содержат две фазы: $(\text{Mg}_{0,2}\text{Zn}_{0,8})\text{TiO}_4$ и CaTiO_3 (рис. 4).

В зависимости от концентрации CaTiO_3 в образцах значения ϵ (при $T = 20$ °С на частоте 1 МГц) изменяются от 35 до 85 (табл. 3). Однако для образцов, полученных вторым способом, характерен

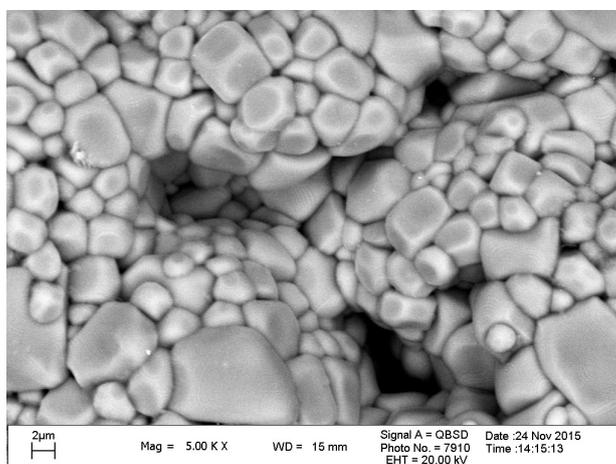


Рис. 2. Микроструктура керамик, полученных первым способом, для образцов состава 0,6MZT-0,4CT
 Fig. 2. Microstructure of ceramics obtained by the first method for samples of the 0.6MZT-0.4CT composition

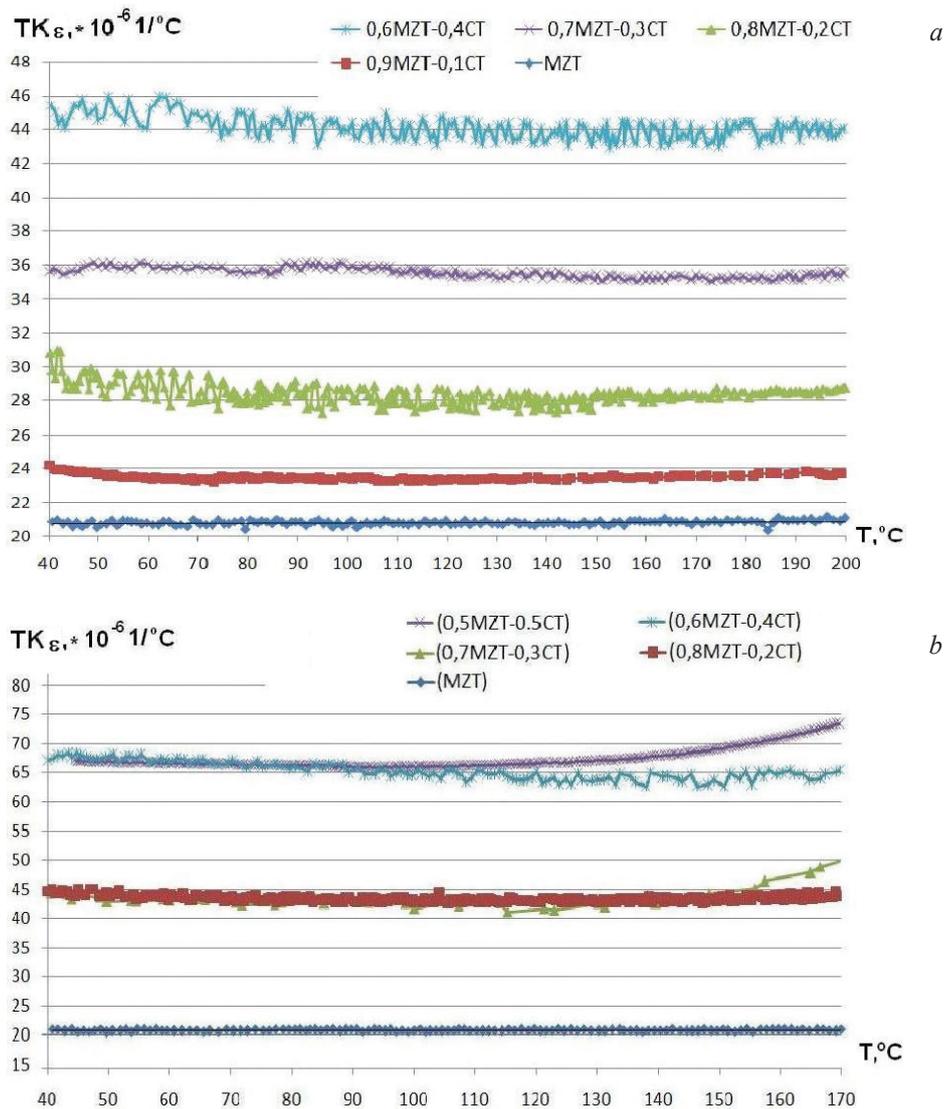


Рис. 3. Температурные зависимости ТК ϵ керамик, полученных первым (а) и вторым (б) способом

Fig. 3. Temperature dependences of ТК ϵ ceramics obtained:
 a – according to the first method; b – according to the second method

более узкий диапазон (20–150 °С) температурной стабильности ТК ϵ (см. рис. 3, б) и диэлектрической проницаемости (рис. 5, а).

Низкие значения tg δ ~ 0,48 %, значение диэлектрической проницаемости ~67 и высокую температурную стабильность ТК ϵ (+65·10⁻⁶ 1/ °С) в интервале 20–150 °С при втором способе получения имеют керамики состава 0,6MZT–0,4CT (см. табл. 3, рис. 5).

Таблица 3. Диэлектрические параметры керамик (1–x)(MZT)–xCT, измеренные при комнатной температуре на частоте 1МГц, в зависимости от температур спекания

Table 3. Dielectric parameters of (1–x)(MZT)–xCT ceramics measured at room temperature at a frequency of 1 MHz depending on sintering temperatures

T _{спек.} , °С	Состав							
	0,8MZT-0,2CT		0,7MZT-0,3CT		0,6MZT-0,4CT		0,5MZT-0,5CT	
	ϵ	tg δ						
1200	35,60	0,006	45,20	0,006	58,61	0,0046	75,77	0,0045
1220	37,58	0,008	50,46	0,0056	63,80	0,0047	81,40	0,004
1250	40,87	0,0075	53,47	0,0062	67,74	0,0046	85,53	0,003
1270	42,75	0,0077	55,48	0,0056	67,34	0,0048	80,62	0,0055

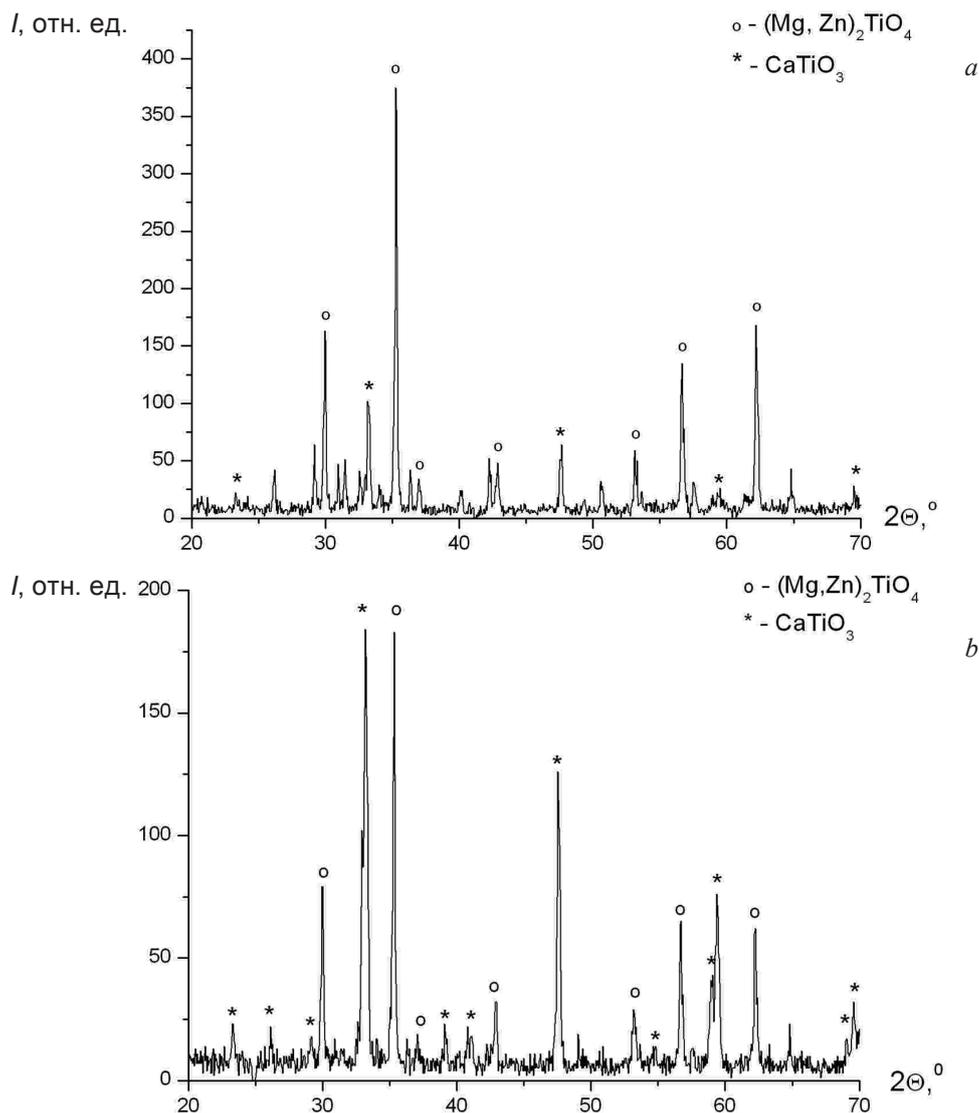


Рис. 4. Вид рентгенограмм керамик состава $(1-x)(\text{Mg}_{0,2}\text{Zn}_{0,8})\text{TiO}_3-x\text{CaTiO}_3$, полученных вторым способом, в зависимости от концентрации CaTiO_3 : $a - x = 0,2$; $b - x = 0,5$

Fig. 4. X-ray diffraction patterns of ceramics of the $(1-x)(\text{Mg}_{0,2}\text{Zn}_{0,8})\text{TiO}_3-x\text{CaTiO}_3$ composition obtained by the second method depending on the CaTiO_3 concentration: $a - x = 0.2$; $b - x = 0.5$

Для увеличения диэлектрической проницаемости и снижения диэлектрических потерь в образцах системы $(1-x)(\text{MZT})-x\text{CT}$, получаемых при использовании первого способа, на стадии спекания в синтезированные составы были введены в качестве дефектов замещения ионы олова Sn^{+4} и в качестве дефектов внедрения ионы вольфрама W^{+2} . Ионы олова увеличивают дипольный момент кристаллической решетки, что приводит к росту диэлектрической проницаемости, а ионы вольфрама оказывают влияние на характер процесса спекания, что ведет к уменьшению диэлектрических потерь в керамических образцах. Керамики модифицированных составов 0,75MZ–0,25CT и 0,68MZ–0,32CT имеют более высокие значения диэлектрических характеристик (табл. 4).

Результаты исследований частотных зависимостей диэлектрических параметров полученных керамик [8, 9] свидетельствуют о дисперсии диэлектрической проницаемости во всем изучаемом диапазоне частот (см. табл. 4). Дисперсия диэлектрической проницаемости указывает на наличие в керамиках нескольких физических механизмов поляризации, связанных с существованием нескольких фаз с различным временем релаксации. Наблюдаемое в интервале частот (1 кГц – 200 МГц) монотонное уменьшение диэлектрической проницаемости свидетельствует о релаксационной дисперсии [9].

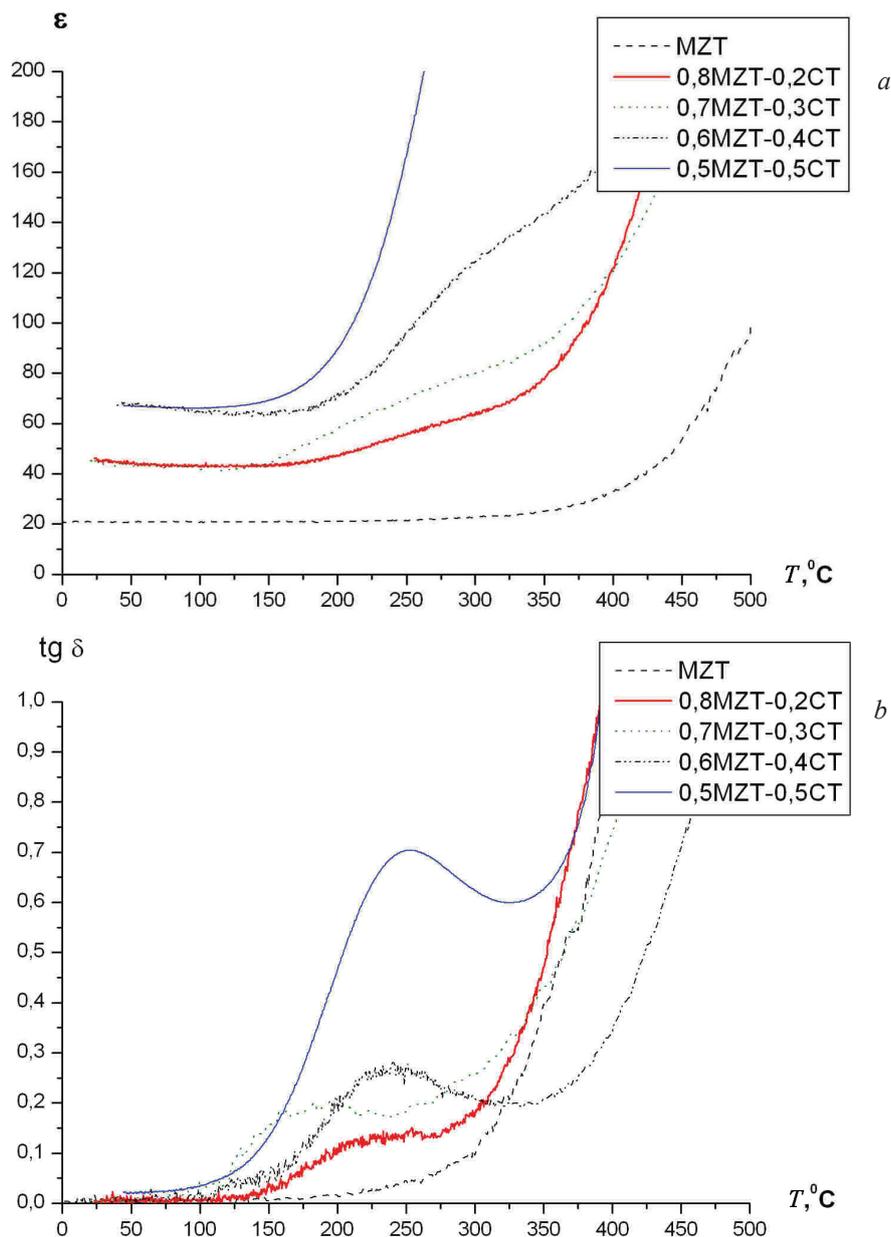


Рис. 5. Температурные зависимости ϵ (a) и $\text{tg } \delta$ (b) керамик системы $(1-x)(\text{MZT})-x\text{CT}$, полученных вторым способом, на частоте 1 кГц

Fig. 5. Temperature dependences of ϵ (a) and $\text{tg } \delta$ (b) of $(1-x)(\text{MZT})-x\text{CT}$ ceramics obtained by the second method at a frequency of 1 kHz

В диапазоне частот (200 МГц – 2 ГГц) значения диэлектрической проницаемости монотонно увеличиваются на 3–9 единиц, что указывает на резонансный характер дисперсии в данном частотном интервале.

Заключение. В результате проведенных исследований получен ряд высокочастотных конденсаторных материалов с широким диапазоном диэлектрических свойств. Установлено, что керамики, составы которых синтезированы из оксидов, могут быть использованы для изготовления на их основе СВЧ-устройств с более широким диапазоном рабочих температур, чем материалы, получаемые спеканием предварительно синтезированных фаз. Показано, что для рабочего диапазона температур меньше 150 °С могут применяться керамики состава 0,6MZT–0,4CT, получаемые вторым способом. Получено, что для керамических материалов на основе составов 0,75MZT–0,25CT и 0,68MZT–0,32CT, модифицированных ионами олова и вольфрама, в диапазоне частот от 1 кГц до 2 ГГц характерна дисперсия диэлектрической проницаемости.

Таблица 4. Частотные зависимости диэлектрических параметров керамик модифицированной системы (1-x)MZT-xCT в зависимости от состава при оптимальных температурах спекания [8]

Table 4. Frequency dependences of dielectric parameters of ceramics of the modified (1-x)MZT-xCT system as a function of composition at optimal sintering temperatures [8]

Состав	Частота												TK _ε ·10 ⁻⁶ , 1/°C
	1 кГц		1 МГц		200 МГц		600 МГц		1 ГГц		2 ГГц		
	ε	tgδ	ε	tgδ	ε	tgδ	ε	tgδ	ε	tgδ	ε	tgδ	
0,68MZT-0,32CT	50,65	0,001	49,04	0,0057	30,7	0,0003	31,2	0,0008	32,4	0,0002	34,8	0,0008	-355
+2%SnO ₂	47,06	0,001	45,58	0,0062	29,9	0,0005	30,5	0,0003	31,8	0,0003	35,6	0,0008	-198
+2%WO ₃	54,52	0,0021	52,74	0,0058	30,6	0,0002	31,3	0,0003	32,9	0,0004	40,2	0,0008	-324
+1%SnO ₂ +1%WO ₃	54,11	0,0048	52,19	0,0056	29,5	0,0003	30,1	0,0003	31,5	0,0003	36,5	0,0008	-326
+2%SnO ₂ +2%WO ₃	52,16	0,0002	50,60	0,0057	34,8	0,0003	35,5	0,0006	37,2	0,0002	42,7	0,0009	-205
0,75MZT-0,25CT	42,10	0,0017	40,56	0,0068	24,5	0,0003	25,0	0,0003	25,9	0,0004	28,5	0,0008	-160
+2%SnO ₂	45,71	0,0028	43,77	0,0065	27,7	0,0002	28,2	0,0003	29,3	0,0006	32,8	0,0001	-110
+2%WO ₃	45,35	0,0024	43,71	0,0066	28,5	0,0002	29,1	0,0005	30,3	0,0004	33,3	0,0008	-136
+1%SnO ₂ +1%WO ₃	46,11	0,0005	45,07	0,0065	27,3	0,0003	27,8	0,0003	28,7	0,0004	32	0,0008	-99
+2%SnO ₂ +2%WO ₃	44,06	0,0004	42,22	0,0068	29,2	0,0008	29,6	0,0006	30,7	0,0003	33,5	0,0003	16

Благодарности. Исследования проводились в рамках программы ГПНИ «Физическое материаловедение, новые материалы и технологии», подпрограмма «Материаловедение и технологии материалов», (Маттех).

Acknowledgments. The present work was performed within of the State Research Program “Physical Materials Science, New Materials and Technologies”, the subprogram “Materials Science and Materials Technologies”, (Mattech”).

Список использованных источников

1. Мальцев, П. П. СВЧ-технологии – основа электроники будущего. Тенденции и рынки / П. П. Мальцев, И. В. Шахнович // Электроника: Наука, Технология, Бизнес. – 2015. – № 8. – С. 72–82.
2. New complex ceramic materials for microwave resonators / P. Petkov [et al.] // J. Optoelectronics and Advances Materials. – 2003. – Vol. 5, № 2. – P. 521–524.
3. Савчук, Г. К. Диэлектрические свойства керамических материалов на основе титанатов цинка / Г. К. Савчук, А. К. Летко, А. А. Климза // Вест. Нац. Акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2011. – № 4. – С. 108–111.
4. Функциональная керамика / П. М. Плетнев [и др.]. – М.: Наука, 2004. – 348 с.
5. Kell, R. C. High-Permittivity Temperature-Stable Ceramic Dielectrics with Low Microwave Loss / R. C. Kell, A. C. Greenham, G. C. E Olds // J. Am. Ceram. Soc. – 1973. – Vol. 56, № 7. – P. 352–357. <https://doi.org/10.1111/j.1151-2916.1973.tb12684.x>
6. Раскин, А. Технология материалов микро-, опто- и нанотехнологии / А. Раскин, В. Прокофьев. – М.: Бином, 2010. – 164 с.
7. Акимов, А. И. Керамические материалы (диэлектрические, пьезоэлектрические, сверхпроводящие): условия получения, структура, свойства / А. И. Акимов, Г. К. Савчук. – Минск: Изд. центр БГУ, 2012. – 256 с.
8. Летко, А. К. Условия получения и частотные зависимости диэлектрических свойств СВЧ конденсаторной керамики / А. К. Летко, Г. К. Савчук // Новые материалы и технологии: порошковая металлургия, композиционные материалы, защитные покрытия, сварка: материалы 13-й Междунар. конф. – Минск: Беларус. навука, 2018. – С. 232–236.
9. Пасынков, В. В. Материалы электронной техники / В. В. Пасынков, В. С. Сорокин. – М.: Высш. шк., 1989. – 368 с.

References

1. Mal'tsev P. P., Shakhnovich I. V. Microwave technology is the basis of future electronics. Trends and Markets. *Elektronika: Nauka, Tekhnologiya, Biznes = Electronics: Science, Technology, Business*, 2015, no. 8, pp. 72–82 (in Russian).
2. Petkov P., Iliev I., Petkova T., Vassilev V. New complex ceramic materials for microwave resonators. *Journal of Optoelectronics and Advances Materials*, 2003, vol. 5, no. 2, pp. 521–524.
3. Savchuk G. K., Letko A. K., Klimza A. A. Dielectric properties of ceramic materials based on zinc titanates. *Vestsi Natsyional'nai akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2011, no 4, pp. 108–111 (in Russian).
4. Pletnev P. M., Rogov I. I., Vereshchagin V. I., Surzhikov A. P., Fedorov V. E. *Functional Ceramics*. Moscow, Nauka Publ., 2004. 348 p. (in Russian).
5. Kell R. C., Greenham A. C. and Olds G. C. E. High-Permittivity Temperature-Stable Ceramic Dielectrics with Low Microwave Loss. *Journal of the American Ceramic Society*, 1973, vol. 56, no. 7, pp. 352–354. <https://doi.org/10.1111/j.1151-2916.1973.tb12684.x>
6. Raskin A., Prokof'ev V. *Technology of micro-, opto- and nanotechnology materials*. Moscow, Binom Publ., 2010. 164 p. (in Russian).

7. Akimov A. I., Savchuk G. K. *Ceramic materials (dielectric, piezoelectric, superconducting): conditions of production, structure, properties*. Minsk, Publishing Center of the Belarusian State University, 2012. 256 p. (in Russian).

8. Letko A. K., Savchuk G. K. Conditions of receiving and frequency dependencies of dielectric properties of microwave condenser ceramics. *Novye materialy i tekhnologii: poroshkovaya metallurgiya, kompozitsionnye materialy, zashchitnye pokrytiya, svarka: materialy 13-i Mezhdunarodnoi konferentsii, Minsk, 16–18 maya 2018 g.* [New materials and technologies: powder metallurgy, composite materials, protective coatings, welding, Minsk, 2018]. Minsk, Belaruskaya Navuka Publ., 2018, pp. 232–236 (in Russian).

9. Pasyнков V. V., Sorokin V. C. *Materials of electronic engineering*. Moscow, Vysshaya Shkola Publ., 1989. 368 p. (in Russian).

Информация об авторах

Савчук Галина Казимировна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Физика», Белорусский национальный технический университет (пр. Независимости, 65, 220013, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: galya159@rambler.ru

Летко Анжелика Константиновна – научный сотрудник лаборатории «Электронная керамика», Научно-практический центр Национальной академии наук Беларуси по материаловедению (ул. П. Бровки, 19, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: letko@physics.by

Басов Никита Александрович – научный сотрудник лаборатории «Электронная керамика», Научно-практический центр Национальной академии наук Беларуси по материаловедению (ул. П. Бровки, 19, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: elkerm16@gmail.com

Information about the authors

Galina K. Sauchuk – Ph. D. (Physics and Mathematics), Assistant Professor of the Department of “Physics”, Belarusian National Technical University (65, Nezavisimosti Ave., 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: galya159@rambler.ru

Anzhelika K. Letko – Researcher of the Laboratory of Electronical Ceramics, Scientific and Practical Materials Research Center of the National Academy of Sciences of Belarus (19, P. Brovka Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: letko@physics.by

Nikita A. Basau – Researcher of the Laboratory of Electronical Ceramics, Scientific and Practical Materials Research Center of the National Academy of Sciences of Belarus (19, P. Brovka Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: elkerm16@gmail.com

ISSN 1561-2430 (Print)

ISSN 2524-2415 (Online)

УДК 621.373.826:533.9:537.9

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-3-341-352>

Поступила в редакцию 10.04.2018

Received 10.04.2018

А. Н. Чумаков¹, Н. И. Мухуров², С. В. Денисюк², А. А. Шевченко³,
Л. В. Баран⁴, Т. Ф. Райченко¹, Н. А. Босак¹

¹Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь

²ГНПО «Оптика, оптоэлектроника и лазерная техника», Минск, Беларусь

³Белорусский государственный аграрный технический университет, Минск, Беларусь

⁴Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

МОРФОЛОГИЧЕСКИЕ, ОПТИЧЕСКИЕ И ФОТОЛЮМИНЕСЦЕНТНЫЕ СВОЙСТВА ТОНКИХ ПЛЕНОК ZnO НА ПОДЛОЖКЕ Al₂O₃

Аннотация. Тонкие прозрачные проводящие пленки оксида цинка представляют интерес для применения в различных областях науки и техники, в том числе в антиобледенительных системах стекол в самолетах, в покрытиях, уменьшающих статический электрический заряд на панелях измерительных приборов, в электрических контактах к жидким кристаллам, электрохромных и электролюминесцентных индикаторах для дисплеев, разработках высокоэффективных солнечных элементов. Тонкие пленки оксида цинка на подложках из анодного оксида алюминия сформированы на пористой стороне и на барьерном слое γ -оксида алюминия при высокочастотном импульсно-периодическом лазерном осаждении в вакууме. Методом атомно-силовой микроскопии изучены морфологии полученных пленок и отмечены их различия в зависимости от стороны подложки. Экспериментально исследованы оптические свойства пленок в ближней ИК-области, а также особенности их фотолюминесцентных характеристик. Конструкции подложка Al₂O₃ – пленка ZnO в качестве чувствительного слоя могут быть применены для разработки сенсоров и tandemных солнечных элементов.

Ключевые слова: высокочастотное импульсное лазерное осаждение, тонкие пленки, атомно-силовая микроскопия, оптические и морфологические свойства, фотолюминесцентные характеристики

Для цитирования. Морфологические, оптические и фотолюминесцентные свойства тонких пленок ZnO на подложке Al₂O₃ / А. Н. Чумаков [и др.] // Вест. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2018. – Т. 54, № 3. – С. 341–352. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-3-341-352>

A. N. Chumakov¹, N. I. Mukhurov², S. V. Denisiuk², A. A. Shevchenok³, L. V. Baran⁴, T. F. Raichenok¹, N. A. Bosak¹

¹B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

²SSPA “Optics, Optoelectronics and Laser Technology”, Minsk, Belarus

³Belarusian State Agrarian Technical University, Minsk, Belarus

⁴Belarusian State University, Minsk, Belarus

MORPHOLOGICAL, OPTICAL AND PHOTOLUMINESCENT PROPERTIES OF A THIN ZnO FILM ON THE Al₂O₃ SUBSTRATE

Abstract. Thin transparent conductive zinc oxide films are of interest for application in various fields of science and technology, including anti-icing systems for glasses in aircrafts, in coatings that reduce static electric charge on instrument panels, in electrical contacts to liquid crystals, electrochromic and electroluminescent indicators for displays, development of high-efficiency solar cells. Thin zinc oxide films on anodic aluminium oxide substrates are formed on the porous side and on the barrier layer of γ -aluminium oxide under high-frequency pulsed-periodic laser deposition in vacuum. The morphology of the obtained films was studied by atomic-force microscopy and their differences were noted, depending on the side of the substrate. The optical properties of films in the near-IR region, as well as the features of their photoluminescence characteristics were studied experimentally. The substrates Al₂O₃–ZnO film as a sensitive layer can be used to design sensors and tandem solar cells.

Keywords: high-frequency pulsed laser deposition, thin films, atomic force microscopy, optical and morphological properties, photoluminescence characteristics

For citation. Chumakov A. N., Mukhurov N. I., Denisiuk S. V., Shevchenok A. A., Baran L. V., Raichenok T. F., Bosak N. A. Morphological, optical and photoluminescent properties of a thin ZnO film on the Al₂O₃ substrate. *Vesti Natsyianal' nai akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, vol. 54, no. 3, pp. 341–352 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-3-341-352>

Введение. Тонкие прозрачные проводящие оксидные пленки успешно применяются в различных областях науки и техники [1–3]. В частности, они используются в нагревательных элементах в антиобледенительных системах стекол в самолетах, покрытиях, уменьшающих статический электрический заряд на панелях измерительных приборов, электрических контактах к жидким кристаллам, электрохромных и электролюминесцентных индикаторах для дисплеев и т. п. В последние годы исследования пленок такого типа связаны также с возможностью изготовления на их основе высокоэффективных солнечных элементов [4].

Оксид цинка – широкозонный полупроводник, обладающий уникальными электрофизическими и оптическими свойствами [5–10]. Прозрачные проводящие пленки оксида цинка, относящиеся к группе прозрачных проводящих оксидов (англ. transparent conducting oxide – TCO), сочетают в себе относительно высокие значения оптического пропускания и электропроводности и представляют большой интерес для создания различных оптоэлектронных приборов и устройств [11–15]. В качестве материала оксид цинка может быть использован в оптоэлектронных преобразователях как люминесцентный материал в виде прозрачных электродов, чувствительных слоев газовых и биологических сенсоров, катализаторов, детекторов рентгеновского и гамма-излучений [16–18]. Оксид цинка характеризуется высокой чувствительностью электрофизических свойств поверхности к изменению состояния окружающей среды, при этом проявляет стабильность на воздухе, в водных и органических средах. В последнее время в связи с развитием нанотехнологий наблюдается повышенный интерес к нанокристаллам оксида цинка разной размерности: квазиодномерным нитевидным кристаллам, тонким и толстым пленкам оксида цинка [19–22]. На их основе созданы миниатюрные оптоэлектронные преобразователи, химические и физические сенсоры. Недопированный ZnO является полупроводником *n*-типа проводимости, но однозначно причина *n*-типа проводимости и природа донорных дефектов (вакансии кислорода, междоузельные атомы цинка, водород) не установлена. В чистом виде оксид цинка практически не используется, поскольку является высокорезистивным материалом. Низкая проводимость недопированного оксида цинка затрудняет его применение в качестве прозрачных электродов и химических сенсоров, приводит к необходимости понижения сопротивления функционального материала. Повышение проводимости достигается введением в оксид цинка донорных примесей. Одним из способов увеличения проводимости оксида цинка является его допирование трехвалентными катионами, например элементами 13 группы [22–24].

Для получения таких пленок используется вакуумное осаждение: термическое, электронно-лучевое, ионно-плазменное, магнетронное, импульсно-лазерное, химическое парофазное [25–29]. У каждого из перечисленных методов имеются как достоинства, так и недостатки. Импульсное лазерное осаждение тонких пленок оксидов имеет определенные преимущества [30–33]. В работе приводятся результаты исследования морфологии, спектров пропускания и фотолюминесценции пленок ZnO, сформированных на подложках пористого анодного оксида алюминия высокочастотным импульсно-периодическим лазерным осаждением.

Методика получения и исследования подложек и тонких пленок. Нанопористые пленки анодного оксида алюминия (АОА), получаемые электрохимическим окислением алюминия в кислотных электролитах, могут быть использованы в различных оптических устройствах, таких как тонкопленочные лазеры, светофильтры, световоды, оптические диски, интерференционные и поляризационные элементы, светоизлучающие структуры, плоские активные устройства отображения информации, сенсоры и детекторы, в том числе оптические биосенсоры, и т. д. [34–39]. Пленки АОА имеют регулярную периодическую структуру нанопор, расположенных перпендикулярно поверхности подложки. При этом диаметр пор и расстояние между ними можно регулировать в широких пределах (от единиц до сотен нанометров) посредством выбора технологического процесса [40].

Экспериментальная лазерная установка с регулируемой частотой повторения лазерных импульсов от 5 до 50 кГц содержала источник лазерного излучения, оптическую систему транспортировки лазерного излучения к распыляемой мишени, вакуумную камеру и измерительно-диагностический модуль. В качестве источника излучения в установке использован лазер на неодимовом стекле ($\lambda = 1,06$ мкм). Для получения многоимпульсного режима генерации лазера

с высокой частотой повторения импульсов внутри резонатора вблизи глухого зеркала установлен пассивный оптический затвор из радиационно-облученного кристаллического фторида лития LiF с F_2^- -центрами окраски. Частота повторения лазерных импульсов изменялась за счет варьирования уровня накачки лазера и оптической плотности затвора; длительность лазерных импульсов на полувысоте составляла ~ 85 нс. Вакуумная система установки обеспечивала проведение экспериментов при пониженном давлении до 2,7 Па. При многоимпульсном высокочастотном лазерном воздействии на поверхность распыляемой мишени реализовывался режим эффективного эрозионного плазмообразования [31, 32]. Осаждение макроскопически однородных тонких пленок достигалось при плотности мощности лазерного излучения $q = 20$ МВт/см² и частоте повторения импульсов $f \sim 20\text{--}30$ кГц.

Пропускание оптического излучения тонкими пленками в ближнем инфракрасном (ИК) диапазоне спектра измерялось на спектрофотометре Carry 500 Scan. УВИ-спектрофотометр Carry 500 Scan представляет многоцелевую, автоматизированную систему, обеспечивающую измерение, обработку выходной информации и ее регистрацию. Принцип действия УВИ-спектрофотометра основан на измерении отношения двух световых потоков, прошедших через канал сравнения и канал в кюветном отделении. Оптическая система прибора является двухлучевой и состоит из монохроматора с голограммной вогнутой дифракционной решеткой. В качестве фотоприемников в УВИ-спектрофотометрах установлены фотоумножители и фотодиоды. Управление процессом измерения в спектрофотометрах осуществляется от внутреннего контроллера и внешнего компьютера с помощью специального программного обеспечения, работающего в системе WINDOWS. Программный комплекс – это всеобъемлющий пакет программ, предназначенных для наиболее полного использования всех возможностей приборов. Программным образом осуществляется настройка прибора, оптимизация его параметров, управление его работой, обработка выходной информации, печать результатов и их запоминание. Во всех частях программы, в которых требуется какой-либо ввод, в память заложено необходимое установочное значение, принимаемое программой по умолчанию и соответствующее стандартным методикам.

Топография поверхности образцов исследовалась с помощью сканирующего зондового микроскопа Solver P47-Pro (компания «НТ-МДТ», Россия) в полуконтактном режиме. Спектры фотолюминесценции (СФЛ) регистрировались на автоматизированном спектрофлуориметре CM 2203 (компания «SOLAR», Беларусь).

Полученные результаты и их обсуждение. Пропускание подложки γ -оксида алюминия и осажденных пленок оксида цинка на подложке γ -оксида алюминия со стороны барьерного слоя (образец № 1) представлены на рис. 1, *a*. Спектры пропускания подложки γ -оксида алюминия и осажденных пленок оксида цинка на подложке γ -оксида алюминия со стороны пористой поверхности (образец № 2), показанные на рис. 1, *b*, регистрировались в УФ-, видимом и ближнем ИК-диапазонах спектра.

Пропускание подложки оксида алюминия со стороны барьерного слоя резко нарастает до 600 нм, затем замедляется и достигает 90 % в области длин волн свыше 1100 нм, в то время как пропускание для пленки оксида цинка на подложке γ -оксида алюминия со стороны барьерного слоя плавно растет, причем в обоих случаях в области длин волн свыше 1100 нм заметны осцилляции пропускания с характерным периодом 30 нм.

Пропускание подложки оксида алюминия со стороны пористой поверхности резко нарастает до 600 нм, затем замедляется и достигает 90 % в области длин волн свыше 1200 нм, в то время как пропускание для пленки оксида цинка на подложке γ -оксида алюминия со стороны пористой поверхности заметно растет, причем в обоих случаях в области длин волн свыше 1200 нм фиксируются осцилляции пропускания.

Из условия интерференционных максимумов интенсивности можно оценить толщину нанесенной пленки оксида цинка d :

$$2dn = m\lambda. \quad (1)$$

С учетом первого порядка интерференции $m = 1$, длины волны $\lambda = 2,5$ мкм и показателя преломления оксида цинка $n = 2,02$, получаем оценку максимальной толщины $d \leq 0,6$ мкм нанесенной пленки оксида цинка.

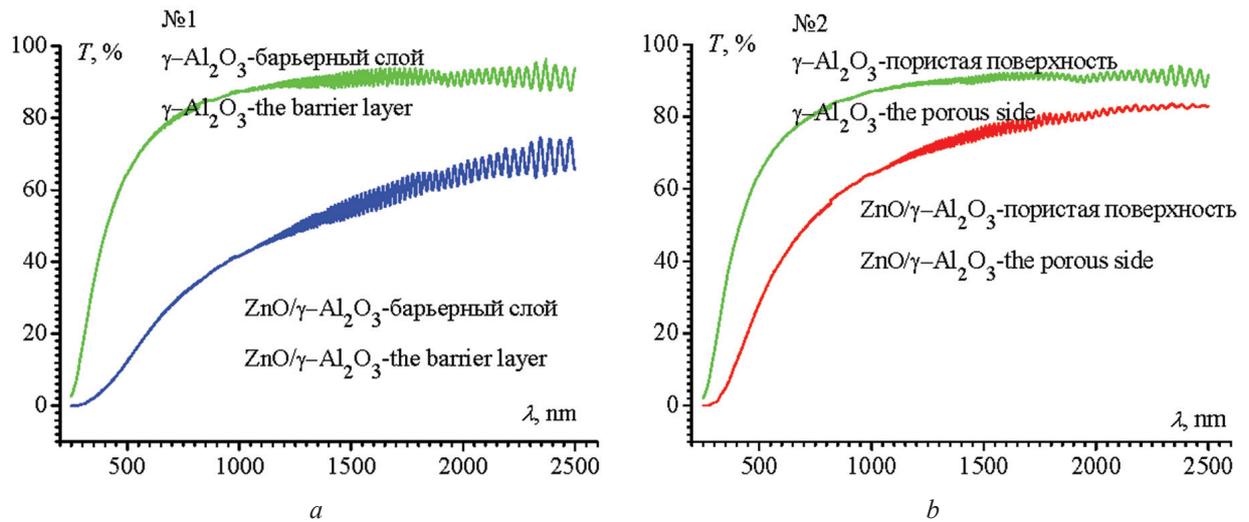


Рис. 1. Спектры пропускания подложки γ-оксида алюминия и пленки оксида цинка на подложке γ-оксида алюминия со стороны барьерного слоя (a; образец № 1) и спектры пропускания подложки γ-оксида алюминия и пленки оксида цинка на подложке γ-оксида алюминия со стороны пористой поверхности (b; образец № 2)

Fig. 1. Transmission spectra of the γ-alumina substrate and the zinc oxide film on the γ-alumina substrate on the side of the barrier layer (a; sample No. 1) and the transmission spectra of the γ-alumina substrate and the zinc oxide film on the γ-alumina substrate on the porous side surface (b; sample No. 2)

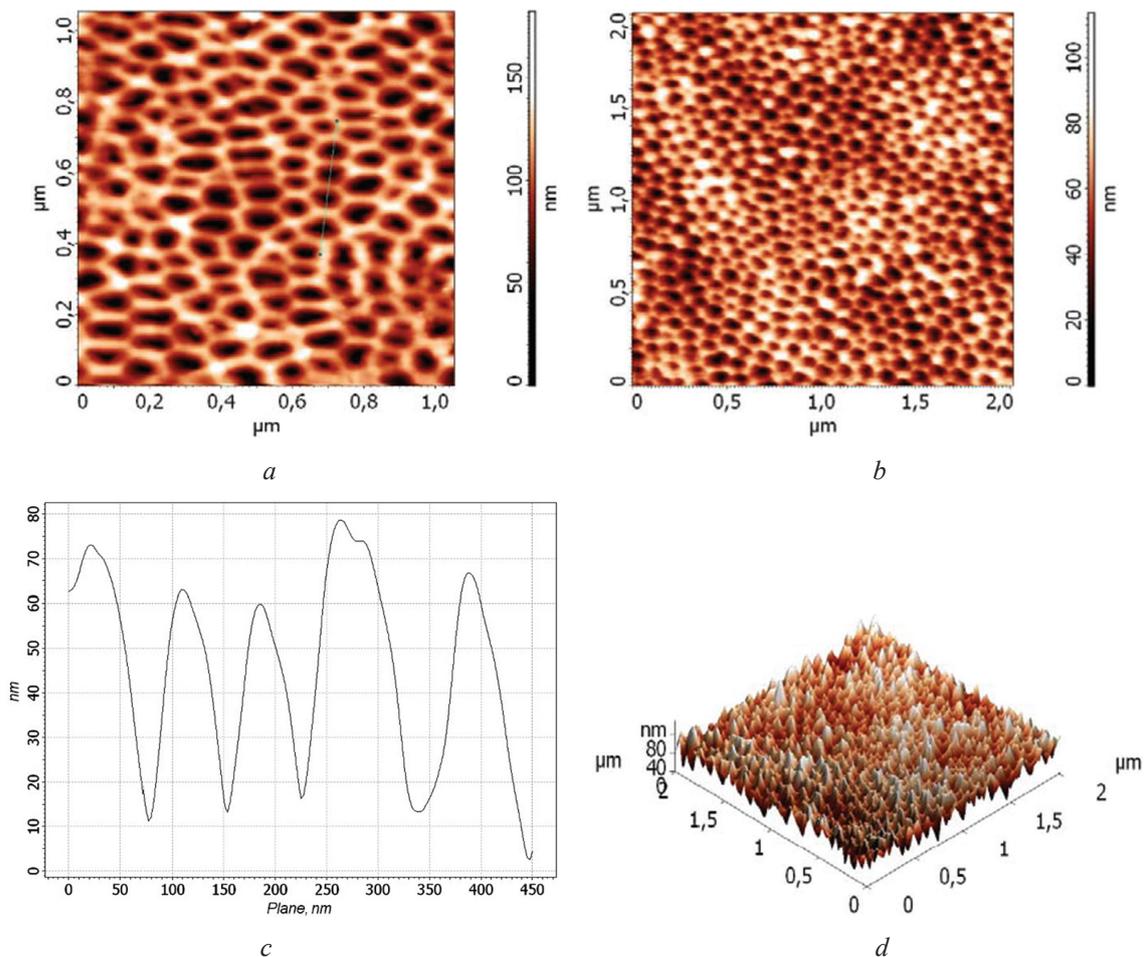


Рис. 2. Топография поверхности исходной подложки γ-оксида алюминия (образец № 0) со стороны барьерного слоя (a, b, d) и профиль сечения вдоль выделенной линии (c)

Fig. 2. Topography of the surface of the initial substrate γ-aluminum oxide (sample No. 0) on the side of the barrier layer (a, b, d) and the section profile along the dedicated line (c)

Структура паверхні исходнай падложкі γ -оксида алюминия (образец № 1, барьерный слой) изучалась методом атомно-силовой микроскопии по изображениям, полученным при сканировании поля размером 1×1 мкм² и 2×2 мкм² (рис. 2) в различных точках образца. Установлено, что подложки обладают упорядоченной пористой структурой с однородным распределением пор по размерам. Так, анализ профиля сечения вдоль выделенной линии показал, что средний диаметр пор составляет 50 ± 5 нм (рис. 2, с).

При конденсации оксида цинка на подложке γ -оксида алюминия (образец № 1, барьерный слой) формируется пленка с плотноупакованной упорядоченной структурой. На рис. 3 показано АСМ-изображение пленки с размером исследуемого поля 2×2 мкм². По профилю сечения, пример которого приведен на рис. 3, с, выявлено, что средний латеральный размер частиц составляет 75 нм (это значение соответствует периоду пористой структуры подложки), т. е. центрами кристаллизации ZnO выступают участки между порами.

На рис. 4 представлена топография полученных тонких пленок оксида цинка на подложке γ -оксида алюминия (образец № 2, пористая поверхность) с размером исследуемого поля 2×2 мкм². Методом атомно-силовой микроскопии по профилю сечения вдоль выделенной линии установлено, что латеральный размер частиц составляет 50–110 нм.

Определение основных характеристик шероховатости поверхности полученных тонких пленок оксида цинка проводилось по АСМ-изображениям с размером области сканирования 5×5 мкм², снятым в пяти разных точках образца. Установлено, что при осаждении пленок на подложке γ -оксида алюминия (образец № 1, барьерный слой) средняя высота неровностей составляет 51,3 нм, при этом среднеарифметическая шероховатость равна 9,0 нм (рис. 5). При осаждении пленок на подложке γ -оксида алюминия (образец № 2, пористая поверхность) средняя высота неровностей составляет 49,9 нм, при этом среднеарифметическая шероховатость равна 9,6 нм (рис. 6).

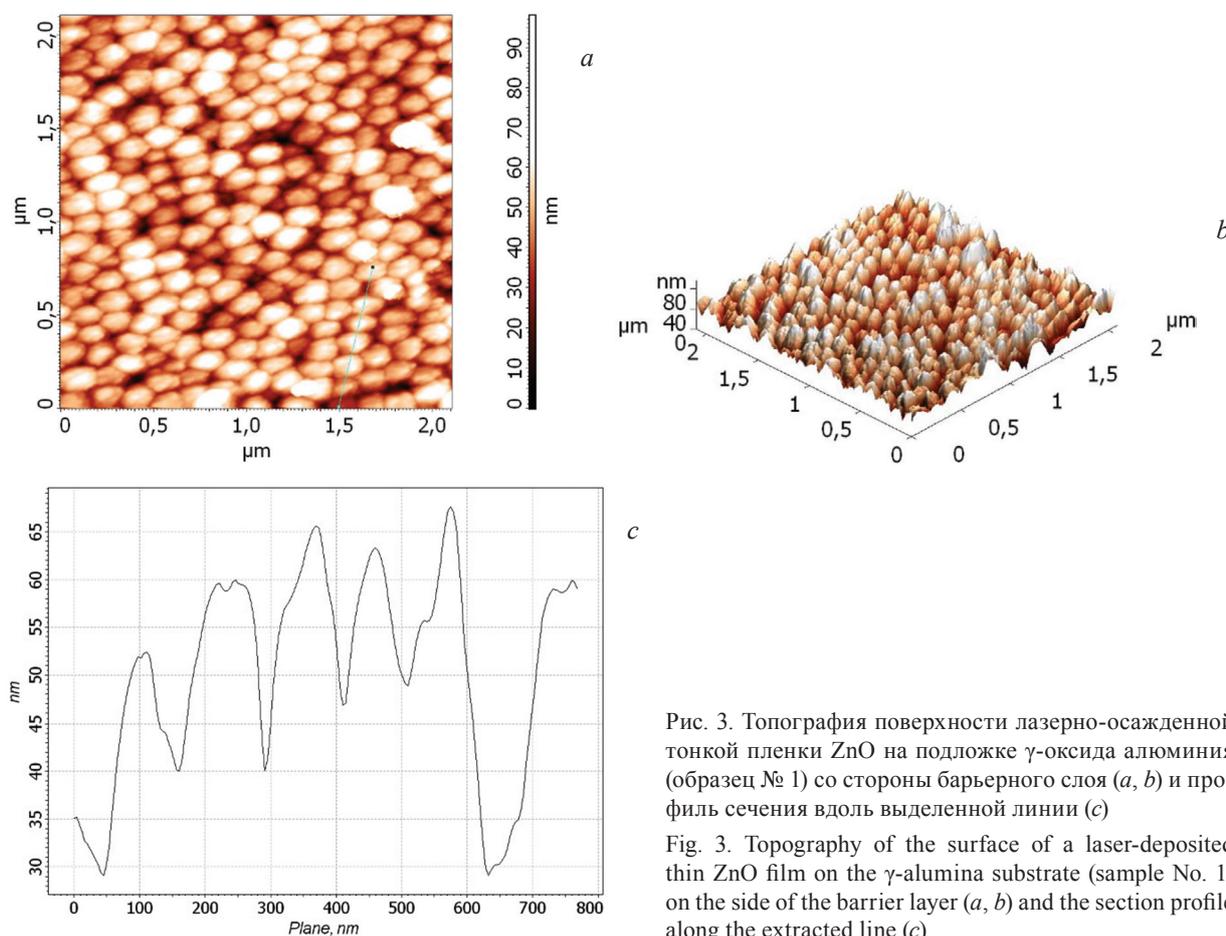


Рис. 3. Топография поверхности лазерно-осажденной тонкой пленки ZnO на подложке γ -оксида алюминия (образец № 1) со стороны барьерного слоя (a, b) и профиль сечения вдоль выделенной линии (c)

Fig. 3. Topography of the surface of a laser-deposited thin ZnO film on the γ -alumina substrate (sample No. 1) on the side of the barrier layer (a, b) and the section profile along the extracted line (c)

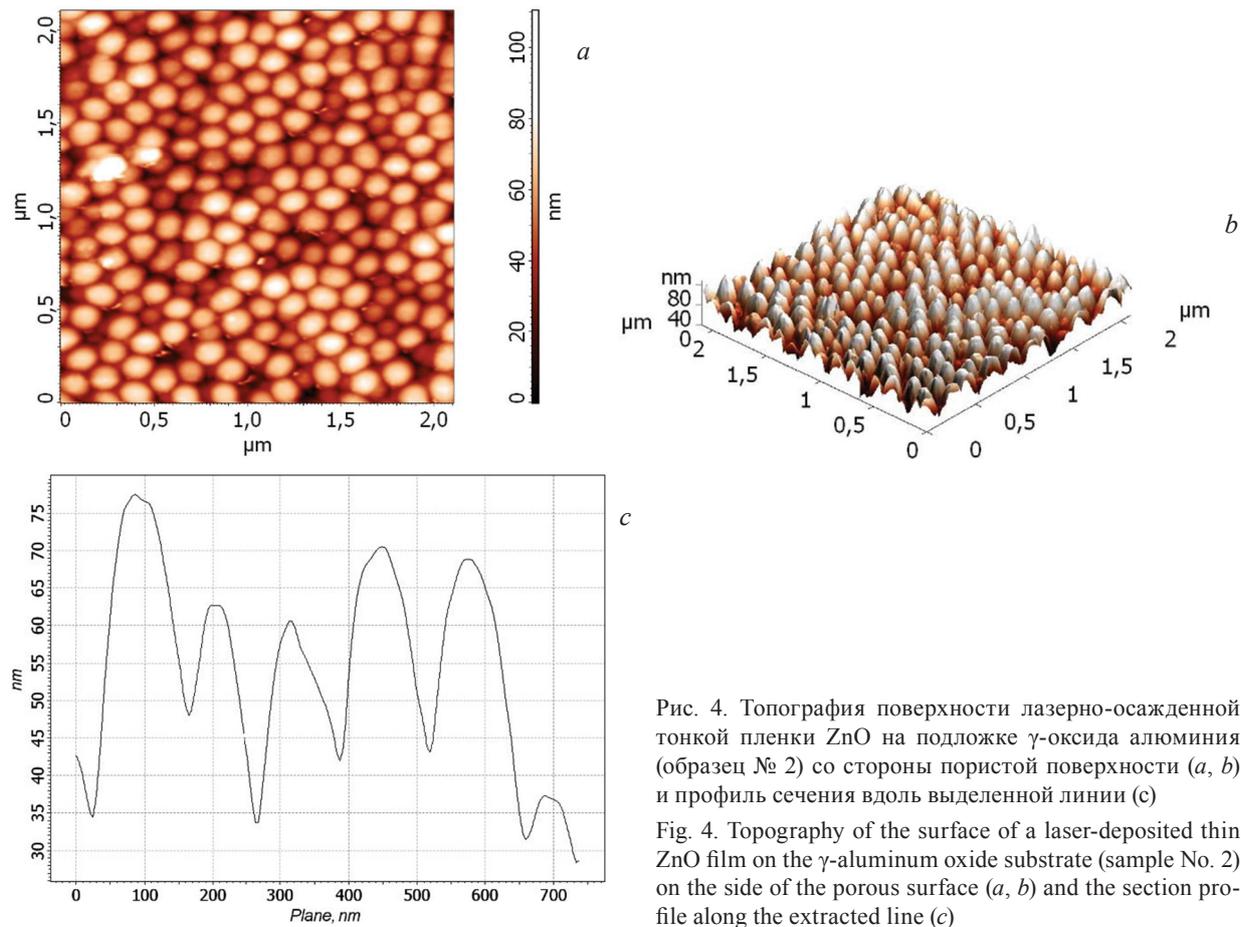


Рис. 4. Топография поверхности лазерно-осажденной тонкой пленки ZnO на подложке γ -оксида алюминия (образец № 2) со стороны пористой поверхности (a, b) и профиль сечения вдоль выделенной линии (c)
 Fig. 4. Topography of the surface of a laser-deposited thin ZnO film on the γ -aluminum oxide substrate (sample No. 2) on the side of the porous surface (a, b) and the section profile along the extracted line (c)

Спектры фотолуминесценции (СФЛ) пленок оксида цинка высокой чистоты, полученные при длинах волн возбуждающего излучения $\lambda_1 = 255$, $\lambda_2 = 270$, $\lambda_3 = 280$, $\lambda_4 = 340$ и $\lambda_5 = 380$ нм (рис. 7), характеризуются полосой, максимум которой сдвигается незначительно в области ~ 400 нм при изменении длины волны возбуждения с 255 до 340 нм и полосой в области 480 нм.

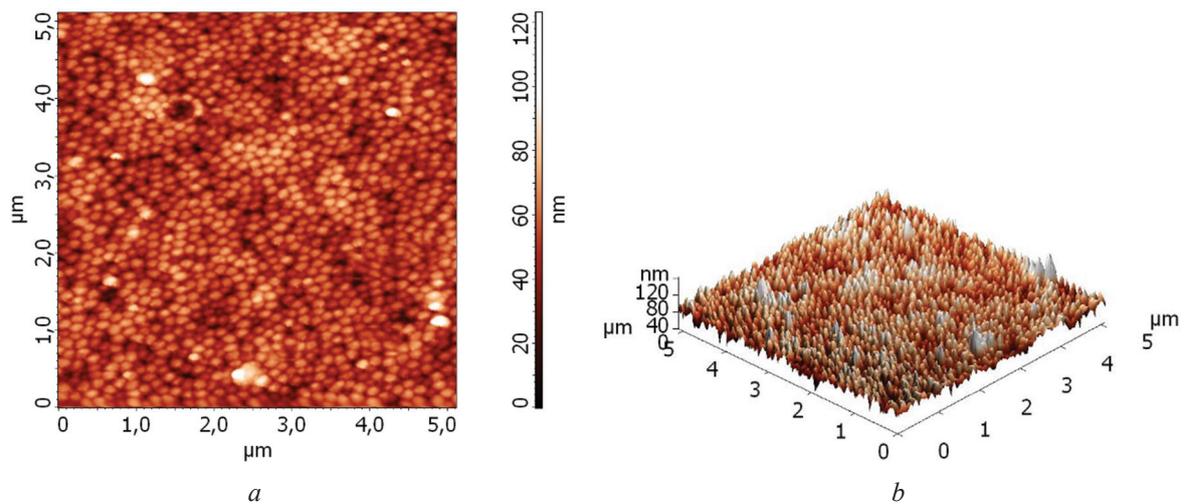


Рис. 5. Топография поверхности лазерно-осажденной тонкой пленки ZnO на подложке γ -оксида алюминия (образец № 1) со стороны барьерного слоя
 Fig. 5. Topography of the surface of a laser-deposited thin ZnO film on the γ -alumina substrate (sample No. 1) on the side of the barrier layer

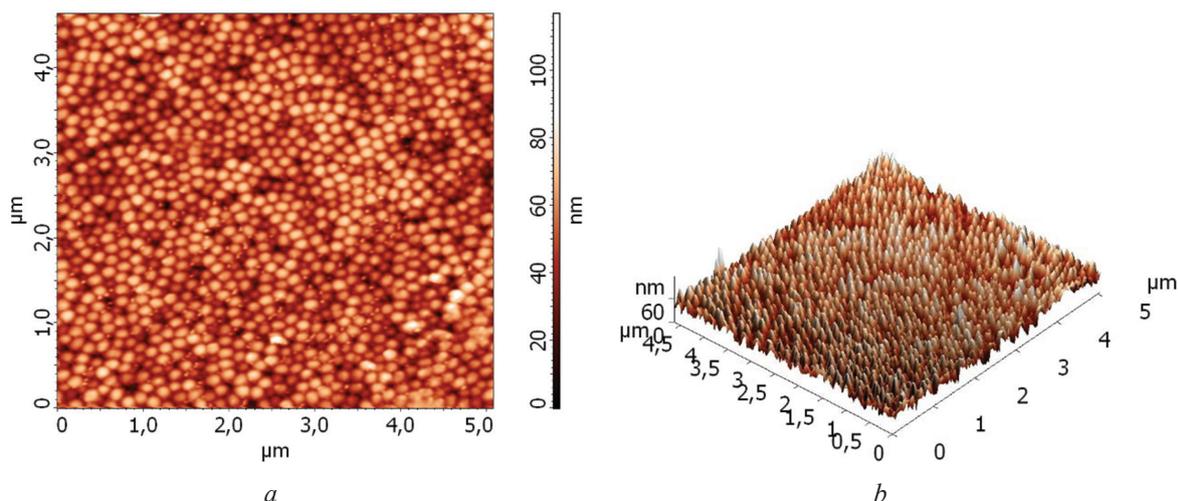


Рис. 6. Топография поверхности лазерно-осажденной тонкой пленки ZnO на подложке γ -оксида алюминия (образец № 2) со стороны пористой поверхности

Fig. 6. Topography of the surface of a laser-deposited thin ZnO film on the γ -alumina substrate (sample No. 2) on the side of the porous surface

Соотношение интенсивностей в максимумах этих полос зависит от длины волны возбуждения. Это связано с наличием двух люминесцирующих хромофоров оксида алюминия и оксида цинка. На рис. 8 представлены спектры фотолюминесценции подложки № 0 и образца № 1 с пленкой, полученные при возбуждении на длине волны 290 нм. Видно, что максимумы интенсивности для образца № 1 смещаются в красную область в сравнении с максимумами для образца № 0.

Нами были изучены спектры возбуждения люминесценции исходных и исследуемых образцов при регистрации свечения в области 400 и 530 нм. Спектры возбуждения люминесценции напыленных образцов, как видно из рис. 9, также смещаются в красную область. Причем наибольшее различие в спектрах проявляется при регистрации в области 530 нм (см. рис. 9, *b*), что свидетельствует о максимальном вкладе свечения оксида цинка в длинноволновой области спектра люминесценции изученных образцов. Свечение напыленных образцов № 1 и № 2, полученное при возбуждении на длине волны 380 нм, практически совпадает по спектру (рис. 10). Идентичными по спектру являются и спектры возбуждения люминесценции образцов № 1 и № 2 (рис. 11). Однако необходимо отметить при этом более высокую интенсивность люминесценции пленки

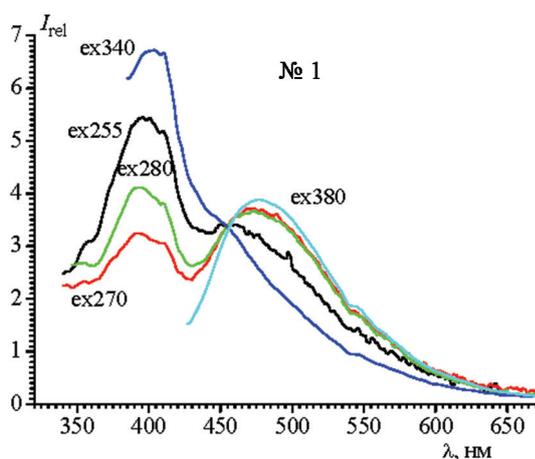


Рис. 7. Спектры фотолюминесценции пленок ZnO образца № 1, полученные при возбуждении на длинах волн 255, 270, 280, 340 и 380 нм

Fig. 7. Photoluminescence spectra ZnO films of sample No. 1, obtained by excitation at wavelengths of 255, 270, 280, 340 and 380 nm

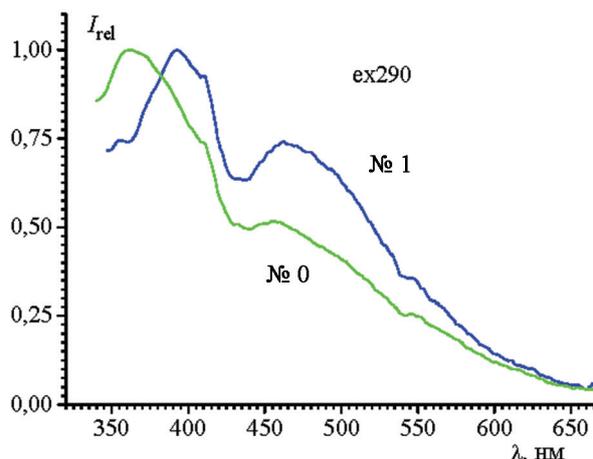


Рис. 8. Спектры фотолюминесценции образцов № 0 и № 1, полученные при возбуждении на длине волны 290 нм

Fig. 8. Photoluminescence spectra of samples No. 0 and No. 1 obtained by excitation at a wavelength of 290 nm

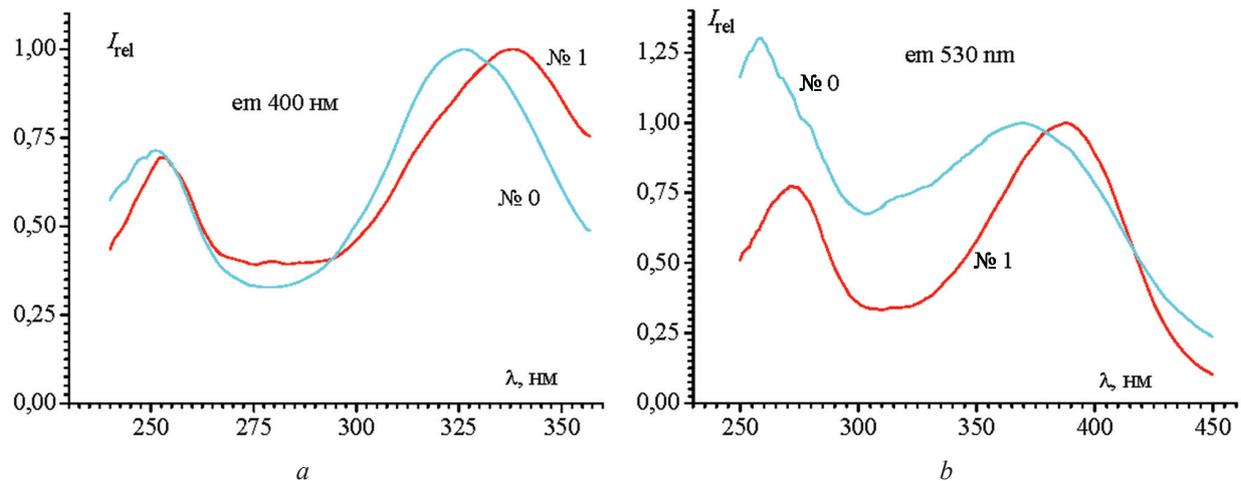


Рис. 9. Спектры возбуждения фотолюминесценции образца № 0 и образца № 1, полученные при регистрации на длинах волн: 400 (а) и 530 (b) нм

Fig. 9. Photoluminescence excitation spectra of sample No.0 and sample No. 1 obtained by recording at wavelengths 400 (a) and 530 (b) nm

оксида цинка, нанесенной на подложку пористого оксида алюминия, по сравнению с подложкой оксида алюминия барьерного слоя.

Заключение. Методом импульсного высокочастотного лазерного осаждения керамических мишеней в вакууме получены тонкие пленки ZnO на подложке γ - Al_2O_3 со стороны барьерного слоя и со стороны пористой поверхности. Представлены результаты исследований спектров пропускания и спектров фотолюминесценции пленок оксида цинка на подложке оксида алюминия. Установлено, что максимальное пропускание в видимой и ближней ИК-области спектра обеспечивается образцами с пленкой ZnO со стороны пористой поверхности подложки из оксида алюминия. Выяснено, что максимумы в спектрах возбуждения фотолюминесценции напыленных образцов смещаются в красную область. При этом более интенсивно люминесцирует пленка ZnO со стороны пористой поверхности подложки из оксида алюминия. Конструкции подложка Al_2O_3 – пленка ZnO в качестве чувствительного слоя могут быть применены для разработки сенсоров и tandemных солнечных элементов.

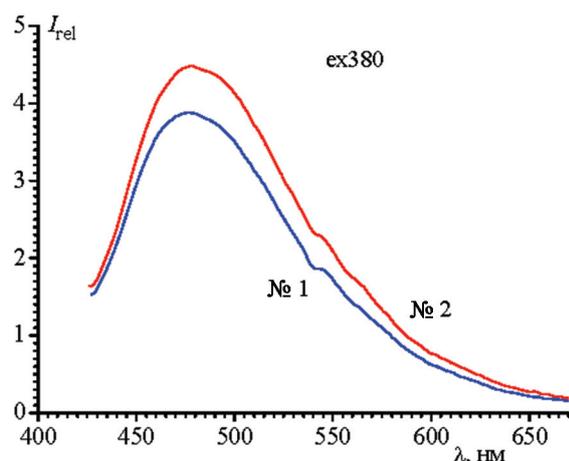


Рис. 10. Спектры фотолюминесценции пленки ZnO на образцах № 1 и № 2, полученные при возбуждении на длине волны 380 нм

Fig. 10. Photoluminescence spectra ZnO films of samples No. 1 and No. 2 obtained by excitation at a wavelength of 380 nm

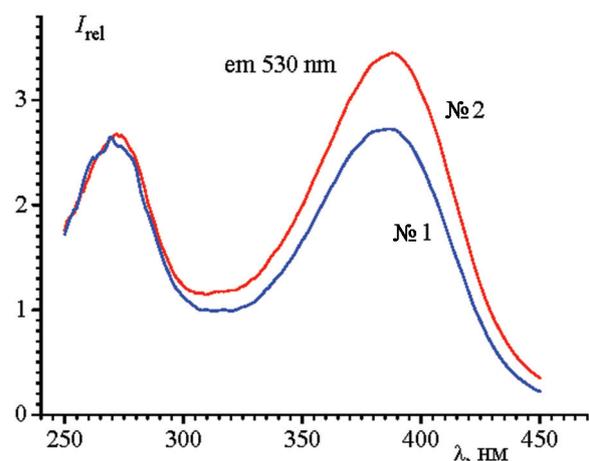


Рис. 11. Спектры возбуждения фотолюминесценции пленки оксида цинка на подложках для образцов № 1 и № 2, полученные при регистрации на длине волны 530 нм

Fig. 11. Photoluminescence excitation spectra of a zinc oxide film on substrates for samples No. 1 and No. 2 obtained by recording at a wavelength of 530 nm

Благодарности. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф17-108, Т17М-059).

Acknowledgements. This work was partially sponsored by the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (Project No. F17-108, T17M-059).

Список использованных источников

1. Yu, X. Metal oxides for optoelectronic applications / X. Yu, T. J. Marks, A. Facchetti // *Nat. Mater.* – 2016. – Vol. 15, № 4. – P. 383–396. <https://doi.org/10.1038/nmat4599>
2. Stadler, A. Transparent Conducting Oxides – An Up-To-Date Overview / A. Stadler // *Materials.* – 2012. – Vol. 5, № 12. – P. 661–683. <https://doi.org/10.3390/ma5040661>
3. Wager, J. F. Transparent electronics / J. F. Wagner, D. A. Keszler, R. E. Presley. – Springer Science + Business Media, LLC, 2008. – 217 p. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-72342-6>
4. Thin film solar cells: fabrication, characterization, and application / eds. J. Poortmans and V. Arkhipov. – John Wiley and Sons Inc, 2006. – 504 p. <https://doi.org/10.1002/0470091282>
5. Wöll, C. The chemistry and physics of zinc oxide surfaces / C. Wöll // *Prog. Surf. Sci.* – 2007. – Vol. 82, № 2/3. – P. 55–120. <https://doi.org/10.1016/j.progsurf.2006.12.002>
6. Janotti, A. Fundamentals of zinc oxide as a Semiconductor / A. Janotti, C. Van de Walle // *Rep. Prog. Phys.* – 2009. – Vol. 72, № 12. – P. 126501 (29 p). <https://doi.org/10.1088/0034-4885/72/12/126501>
7. A comprehensive review of ZnO materials and devices / Ü. Özgür [et al.] // *J. Appl. Phys.* – 2005. – Vol. 98, № 4. – P. 041301–041494. <https://doi.org/10.1063/1.1992666>
8. Ellmer, K. ZnO and Its Applications / K. Ellmer, A. Klein // *Transparent Conductive Zinc Oxide. Basics and Applications in Thin Film Solar Cells.* – Berlin: Springer-Verlag, 2008. – P. 1–33. https://doi.org/10.1007/978-3-540-73612-7_1
9. Djurišić, A. B. Review ZnO nanostructures for optoelectronics: Material properties and device applications / A. B. Djurišić, A. M. C. Ng, X. Y. Chen // *Prog. Quant. Electron.* – 2010. – Vol. 34, № 4. – P. 191–259. <https://doi.org/10.1016/j.pquantelec.2010.04.001>
10. Evolution of ZnO microstructures from hexagonal disk to prismoid, prism and pyramid and their crystal facet-dependent gas sensing properties / Nan Qin [et. al.] // *CrystEngComm.* – 2014. – Vol. 16, № 30. – P. 7062–7073. <https://doi.org/10.1039/c4ce00637b>
11. Electrical conductivity and optical properties of ZnO nanostructured thin film / M. Caglar [et. al.] // *Appl. Surf. Sci.* – 2009. – Vol. 255, № 8. – P. 4491–4496. <https://doi.org/10.1016/j.apsusc.2008.11.055>
12. Фізика высокаправяючых празрачных матэрыялаў на аснове шыроказоннага оксідна цынка / Г. В. Лашкарев [и др.] // *Фізика нізкіх тэмператур.* – 2017. – Т. 43, № 4. – С. 643–648.
13. Синтез и характеристика наноструктурированных слоев оксидна цынка для сенсорики / Л. К. Крастева [и др.] // *Фізика і тэхніка палупроводнікаў.* – 2013. – Т. 47, № 4. – С. 564–569.
14. Наноструктурираваныя матэрыялы на аснове оксідна цынка для гетэроструктурных сонечных элементаў / А. А. Бобков [и др.] // *Фізика і тэхніка палупроводнікаў.* – 2015. – Т. 49, № 10. – С. 1402–1406.
15. Синтез наноструктур на основе оксидна цынка для создания гетероструктурных фотовольтаических элементов / Н. А. Лашкова [и др.] // *Фізика і тэхніка палупроводнікаў.* – 2016. – Т. 50, № 9. – С. 1276–1282.
16. Crystallinity, Stoichiometry, and Luminescence of High Quality ZnO Nanoclusters / D. Tainoff [et al.] // *J. Phys. Chem. C.* – 2008. – Vol. 112, № 33. – P. 12623–12627. <https://doi.org/10.1021/jp8006156>
17. Ellmer, K. Transparent Conductive Zinc Oxide and Its Derivatives / K. Ellmer // *Handbook of transparent conductors / eds.: D. S. Ginley, H. Hosono, D. C. Paine.* – New York: Springer, 2010. – P. 193–263. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-1638-9_7
18. Лянгузов, Н. В. Синтез наноструктур на основе оксидна цынка и их физические свойства: дис. ... канд. физ.-мат. наук / Н. В. Лянгузов. – Ростов н/Д, 2014. – 105 л.
19. Кашкул, И. Н. К. Технология и свойства пленок оксидна цынка для тонкопленочных солнечных модулей: дис. ... канд. техн. наук / И. Н. К. Кашкул. – СПб., 2017. – 117 л.
20. Наноструктурираваныя матэрыялы на аснове оксидна цынка для гетэроструктурных сонечных элементаў / А. А. Бобков [и др.] // *Фізика і тэхніка палупроводнікаў.* – 2015. – Т. 49, вып. 10. – С. 1402–1406.
21. Крастева, Л. К. Синтез и характеристика наноструктурированных слоев оксидна цынка для сенсорики / Л. К. Крастева [и др.] // *Фізика і тэхніка палупроводнікаў.* – 2013. – Т. 47, вып. 4. – С. 564–569.
22. Воробьева, Н. А. Нанокристаллический ZnO(M) (M = Ga, In) для газовых сенсоров и прозрачных электродов: дис. ... канд. хим. наук / Н. А. Воробьева. – М., 2015. – 180 л.
23. The effect of indium doping on structural, electrical conductivity, photoconductivity and density of states properties of ZnO films / C. E. Venouis [et al.] // *J. Alloys Compd.* – 2010. – Vol. 490, № 1/2. – P. 62–67. doi.org/10.1016/j.jallcom.2009.10.098
24. Проводимость нанокристаллического ZnO(Ga) / Н. А. Воробьева [и др.] // *Фізика і тэхніка палупроводнікаў.* – 2013. – Т. 47, вып. 5. – С. 637–641.
25. Работкин, С. В. Нанесение прозрачных проводящих покрытий на основе оксидна цынка методом магнетронного распыления: дис. ... канд. техн. наук / С. В. Работкин. – Томск, 2009. – 146 с.
26. Зима, В. Н. Структура и морфология пленок оксидна цынка, полученных реактивным магнетронным напылением / В. Н. Зима, А. Г. Козлов, Т. Н. Танская // *Вестн. Ом. ун-та.* – 2013. – № 2. – С. 75–79.
27. Перспективы импульсного электроосаждения иерархических наноструктур оксидна цынка / Н. П. Ключко [и др.] // *Фізика і тэхніка палупроводнікаў.* – 2013. – Т. 47, вып. 8. – С. 1129–1136.

28. Получение прозрачных проводящих нанокристаллических пленок оксида цинка методом импульсного лазерного осаждения / Д. Е. Вакулов [и др.] // *Фундамент. исслед.* – 2012. – № 11 (ч. 2). – С. 373–376.
29. Семикина, Т. В. Диодные структуры и электрические свойства пленок ZnO, полученных методом атомного послойного осаждения / Т. В. Семикина // *Оптоэлектроника и полупроводниковая техника.* – 2016. – Вып. 51. – С. 150–157.
30. Чумаков, А. Н. Плазмообразование при высокочастотном импульсно-периодическом лазерном воздействии на металлы в воздухе при пониженном и атмосферном давлении / А. Н. Чумаков, В. Б. Авраменко, Н. А. Босак // *Журн. прикладной спектроскопии.* – 2012. – Т. 79, № 2. – С. 279–287.
31. Структура и оптические свойства углеродных пленок, полученных при многоимпульсном лазерном осаждении / А. Н. Чумаков [и др.] // *Журн. прикладной спектроскопии.* – 2012. – Т. 79, № 4. – С. 681–685.
32. Оптические свойства лазерно-осаждаемых тонких пленок оксида цинка / А. Н. Чумаков [и др.] // *Электроника-инфо.* – 2016. – № 2. – С. 32–37.
33. Чумаков, А. Н. Приповерхностное плазмообразование в воздухе при двухимпульсном лазерном воздействии на двух длинах волн / А. Н. Чумаков, Н. А. Босак, А. В. Панина // *Журн. прикладной спектроскопии.* – 2017. – Т. 84, № 4. – С. 595–602.
34. Photoluminescent properties of nanoporous anodic alumina doped with manganese ions / I. V. Gasenkova [et. al.] // *J. Lumin.* – 2017. – Vol. 185. – P. 298–305. <https://doi.org/10.1016/j.jlumin.2017.01.030>
35. Оптические характеристики пористого оксида алюминия, модифицированного оксидом хрома / И. В. Гасенкова [и др.] // Пористые проницаемые материалы: технологии и изделия на их основе: материалы 6-го Междунар. симп., 19–20 окт. 2017 г., Минск, Беларусь. – Минск, 2017. – С. 298–304.
36. Ахроматические фазовые пластинки с переменной разностью фаз на основе нанопористого оксида алюминия / В. А. Длугунович [и др.] // *Наноструктурные материалы-2016: Беларусь – Россия – Украина (Нано-2016): материалы V Междунар. науч. конф., 22–25 нояб. 2016 г., Минск, Беларусь.* – Минск, 2016. – С. 472–475.
37. Пороговые детекторы ионизирующих и ультрафиолетовых излучений на основе наноструктурированных подложек из анодного оксида алюминия / М. В. Ясин [и др.]; под ред. Н. И. Мухурова. – Минск: Бестпринт, 2016. – 178 с.
38. Gasenkova, I. V. Photoluminescence properties of anodic alumina / I. V. Gasenkova, N. I. Mukhurov, S. P. Zhvavyi // *Photoluminescence: Applications, Types and Efficacy* / eds: Merle A. Case and Bradford C. Stout. – Publishers, Inc. 2012. – P. 195–225. – (Series: Physics Research and Technology Nova Science).
39. Gasenkova, I. V. Photoluminescence properties of anodic alumina for application in optical sensors using SERS / I. V. Gasenkova, N. I. Mukhurov, S. P. Zhvavyi // *Optical Sensors 2011; and Photonic Crystal Fibers V: Proc. SPIE.* – [S. I.], 2011. – Vol. 8073. – P. 807328 (10 p). <https://doi.org/10.1117/12.886464>
40. Mukhurov, N. I. Ordered Growth of Anodic Aluminum Oxide in Galvanostatic and Galvanostatic-Potentiostatic Mode / N. I. Mukhurov, I. V. Gasenkova, I. M. Andruhovich // *J. Mater. Sci. Nanotechnol.* – 2014. – Vol. 1, iss. 1. – P. 1–6. <https://doi.org/10.15744/2348-9812.1.s110>

References

1. Yu X., Marks T. J., Facchetti A. Metal oxides for optoelectronic applications. *Nature Materials*, 2016, vol. 15, no. 4, pp. 383–396. <https://doi.org/10.1038/nmat4599>
2. Stadler A. Transparent Conducting Oxides – An Up-To-Date Overview. *Materials*, 2012, vol. 5, no. 12, pp. 661–683. <https://doi.org/10.3390/ma5040661>
3. Wager J. F., Keszler D. A., Presley R. E. *Transparent Electronics*. Springer Science + Business Media, LLC., 2008. 217 p. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-72342-6>
4. Poortmans J., Arkhipov V. (eds.) *Thin film solar cells: fabrication, characterization, and application*. John Wiley and Sons Inc., 2006. 504 p. <https://doi.org/10.1002/0470091282>
5. Wöll C. The chemistry and physics of zinc oxide surfaces. *Progress in Surface Science*, 2007, vol. 82, no. 2–3, pp. 55–120. <https://doi.org/10.1016/j.progsurf.2006.12.002>
6. Janotti A., Van de Walle C. Fundamentals of zinc oxide as a Semiconductor. *Reports on Progress in Physics*, 2009, vol. 72, no. 12, pp. 126501 (29 p). <https://doi.org/10.1088/0034-4885/72/12/126501>
7. Özgür Ü., Alivov Ya. I., Liu C., Teke A., Reshchikov M. A., Doğan S., Avrutin V., Cho S.-J., Morkoç H. A comprehensive review of ZnO materials and devices. *Journal of Applied Physics*, 2005, vol. 98, no. 4, pp. 041301–041494. <https://doi.org/10.1063/1.1992666>
8. Ellmer K., Klein A. ZnO and Its Applications. *Transparent Conductive Zinc Oxide. Basics and Applications in Thin Film Solar Cells, Springer Series in Materials Science*. Berlin: Springer-Verlag, 2008, vol. 104, pp. 1–33. https://doi.org/10.1007/978-3-540-73612-7_1
9. Djurišić A. B., Ng A. M. C., Chen X. Y. Review ZnO nanostructures for optoelectronics: Material properties and device applications. *Progress in Quantum Electronics*, 2010, vol. 34, no. 4, pp. 191–259. <https://doi.org/10.1016/j.pquantelec.2010.04.001>
10. Nan Qin, Qun Xiang, Hongbin Zhao, Jincang Zhang, Jiaqiang Xu. Evolution of ZnO microstructures from hexagonal disk to prismoid, prism and pyramid and their crystal facet-dependent gas sensing properties. *CrystEngComm*, 2014, vol. 16, no. 30, pp. 7062–7073. <https://doi.org/10.1039/c4ce00637b>
11. Caglar M., Ilican S., Caglar Y., Yakuphanoglu F. Electrical conductivity and optical properties of ZnO nanostructured thin film. *Applied Surface Science*, 2009, vol. 255, no. 8, pp. 4491–4496. <https://doi.org/10.1016/j.apsusc.2008.11.055>
12. Lashkarev G. V., Karpyna V. A., Ovsianikova L. I., Kartuzov V. V., Dranchuk M. V., Godlewski M., Pietruszka R., Khomyak V. V., Petrosyan L. I. Physics of high-conductivity transparent materials on the basis of wide-gap zinc oxide. *Low Temperature Physics*, 2017, vol. 43, no. 4, pp. 515–519. <https://doi.org/10.1063/1.4984077>

13. Krasteva L. K., Dimitrov D. T., Papazova K. I., Nikolaev N. K., Peshkova T. V., Moshnikov V. A., Gracheva I. E., Karpova S. S., Kaneva N. V. Synthesis and characterization of nanostructured zinc oxide layers for sensors application. *Semiconductors*, 2013, vol. 47, no. 4, pp. 586–591. <https://doi.org/10.1134/s1063782613040155>
14. Bobkov A. A., Maximov A. I., Moshnikov V. A., Somov P. A., Terukov E. I. Zinc-oxide-based nanostructured materials for heterostructure solar cells. *Semiconductors*, 2015, vol. 49, no. 10, pp. 1402–1406. <https://doi.org/10.1134/s1063782615100048>
15. Lashkova N. A., Maximov A. I., Ryabko A. A., Bobkov A. A., Moshnikov V. A., Terukov E. I. Synthesis of ZnO-based nanostructures for heterostructure photovoltaic cells / N. A. Lashkova and others. *Semiconductors*, 2016, vol. 50, no. 9, pp. 1254–260. <https://doi.org/10.1134/s106378261609013x>
16. Tainoff D., Masenelli B., Boisron O., Guiraud G., Mélinon P. Crystallinity, Stoichiometry, and Luminescence of High Quality ZnO Nanoclusters. *The Journal of Physical Chemistry C*, 2008, vol. 112, no. 33, pp. 12623–12627. <https://doi.org/10.1021/jp8006156>
17. Ellmer K. Transparent Conductive Zinc Oxide and Its Derivatives. Ginley D. S., Hosono H., Paine D. C. (eds.) *Handbook of transparent conductors*. New York: Springer, 2010, pp. 193–263. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-1638-9_7
18. Lianguzov N. V. *Synthesis of nanostructures based on zinc oxide and their physical properties*. Rostov-on-Don, 2014. 105 p. (in Russian).
19. Kashkul I. N. K. *Technology and properties of zinc oxide films for thin-film solar modules*. Saint Petersburg, 2017. 117 p. (in Russian).
20. Bobkov A. A., Maksimov A. I., Moshnikov V. A., Somov P. A., Terukov E. I. Zinc-oxide-based nanostructured materials for heterostructure solar cells. *Semiconductors*, 2015, vol. 49, no. 10, pp. 1357–1360. <https://doi.org/10.1134/s1063782615100048>
21. Krasteva L. K., Dimitrov D. Tz., Papazova K. I., Nikolaev N. K., Peshkova T. V., Moshnikov V. A., Gracheva I. E., Karpova S. S., Kaneva N. V. Synthesis and characterization of nanostructured zinc oxide layers for sensor applications. *Semiconductors*, 2013, vol. 47, no. 4, pp. 564–569. <https://doi.org/10.1134/s1063782613040155>
22. Vorobyeva N. A. *Nanocrystalline ZnO (M) (M = Ga, In) for gas sensors and transparent electrodes*. Moscow, 2015. 180 p. (in Russian).
23. Benouis C. E., Benhaliliba M., Sanchez Juarez A., Aida M. S., Chami F., Yakuphanoglu F. The effect of indium doping on structural, electrical conductivity, photoconductivity and density of states properties of ZnO films. *Journal of Alloys and Compounds*, 2010, vol. 490, no. 1–2, pp. 62–67. doi.org/10.1016/j.jallcom.2009.10.098
24. Vorobyeva N. A., Romyantseva M. N., Forsh P. A., Gaskov A. M. Conductivity of nanocrystalline ZnO (Ga). *Semiconductors*, 2013, vol. 47, no. 5, pp. 650–654. <https://doi.org/10.1134/s1063782613050242>
25. Rabotkin S. V. *Application of transparent conductive coatings based on zinc oxide by the method of magnetron sputtering*. Tomsk, 2009. 146 p. (in Russian).
26. Zima V. N., Kozlov A. G., Tanskaya T. N., Blinov V. I., Lobov I. A. Structure and morphology of zinc oxide films, obtained by reactive magnetron sputtering. *Vestnik Omskogo Universiteta = Herald of Omsk University*, 2013, no. 2, pp. 75–79 (in Russian).
27. Klochko N. P., Myagchenko Y. O., Melnychuk E. E., Kopach V. R., Klepikova E. S., Lyubov V. N., Khrypunov G. S., Kopach A. V. Prospects for the pulsed electrodeposition of zinc-oxide hierarchical nanostructures. *Semiconductors*, 2013, vol. 47, no. 8, pp. 1123–1129. <https://doi.org/10.1134/s1063782613080101>
28. Vakulov D. E., Vakulov Z. E., Zamburg E. G. et al. Production of transparent conducting nanocrystalline zinc oxide films by pulsed laser deposition. *Fundamental'nye issledovaniya = Fundamental research*, 2012, no. 11 (part 2), pp. 373–376 (in Russian).
29. Semikina T. V. Diode structures and electrical properties of ZnO films obtained by the atomic layer-by-layer deposition method. *Optoelektronika i poluprovodnikovaya tekhnika = Optoelectronics and Semiconductor Technique*, 2016, iss. 51, pp. 150–157 (in Russian).
30. Chumakov A. N., Avramenko V. B., Bosak N. A. Plasma formation in high-frequency pulsed-periodic laser action on metals in air at reduced and atmospheric pressure. *Journal of Applied Spectroscopy*, 2012, vol. 79, no. 2, pp. 261–268. doi.org/10.1007/s10812-012-9593-3
31. Chumakov A. N., Petrov S. A., Bosak N. A., Shcherbakova Ye. N. Structure and optical properties of carbon films obtained by multipulse laser deposition. *Journal of Applied Spectroscopy*, 2012, vol. 79, no. 4, pp. 664–669. <https://doi.org/10.1007/s10812-012-9655-6>
32. Chumakov A. N., Gulai A. V., Shevchenko A. A. et al. Optical properties of laser-deposited thin films of zinc oxide. *Elektronika-info [Electronics-info]*, 2016, no. 2, pp. 32–37 (in Russian).
33. Chumakov A. N., Bosak N. A., Panina A. V. Near-surface plasma formation in air with two-pulse laser action at two wavelengths. *Journal of Applied Spectroscopy*, 2017, vol. 84, no. 4, pp. 620–626. <https://doi.org/10.1007/s10812-017-0519-y>
34. Gasenkova I. V., Mukhurov N. I., Zhvavyi S. P., Kolesnik E. E., Stupak A. P. Photoluminescent properties of nanoporous anodic alumina doped with manganese ions. *Journal of Luminescence*, 2017, vol. 185, pp. 298–305. <https://doi.org/10.1016/j.jlumin.2017.01.030>
35. Gasenkova I. V., Mukhurov N. I., Zhvavyi S. P. et al. Optical characteristics of porous alumina modified with chromium oxide. *Poristye pronitsaemye materialy: tekhnologii i izdeliya na ikh osnove: materialy 6-go Mezhdunar. simp., 19–20 okt. 2017 g., Minsk, Belarus' [Materials of the 6th International Scientific Symposium "Porous permeable materials: technologies and products based on them, October 19–20, 2017, Minsk, Belarus]*. Minsk, 2017, pp. 298–304. (in Russian).
36. Dlugunovich V. A., Zhumar A. Yu., Mukhurov N. I., Gasenkova I. V. Achromatic phase plates with variable phase difference based on nanoporous alumina. *Nanostrukturnye materialy-2016: Belarus' – Rossiya – Ukraina (Nano-2016): materialy V Mezhdunar. nauch. konf., 22–25 noyab. 2016 g., Minsk, Belarus' [Materials V International scientific conference*

“Nanostructural materials-2016: Belarus – Russia – Ukraine (Nano-2016)”, November 22–25, 2016, Minsk, Belarus]. Minsk, 2016, pp. 472–475. (in Russian).

37. Yasin M. V., Mukhurov N. I., Gasenkova I. V., Lynkov L. M. *Threshold detectors of ionizing and ultraviolet radiation based on nanostructured substrates of anodic aluminum oxide*. Minsk, Bestprint Publ., 2016. 178 p. (in Russian).

38. Gasenkova I. V., Mukhurov N. I., Zhvavyi S. P. Photoluminescence properties of anodic alumina. Merle A. Case, Bradford C. Stout (eds.) *Photoluminescence: Applications, Types and Efficacy. Series: Physics Research and Technology Nova Science*. Publishers, Inc., 2012, pp.195–225.

39. Gasenkova I. V., Mukhurov N. I., Zhvavyi S. P. Photoluminescence properties of anodic alumina for application in optical sensors using SERS. *Optical Sensors 2011; and Photonic Crystal Fibers V: Proc. SPIE*, 2011, vol. 8073, pp. 807328 (10 p.) <https://doi.org/10.1117/12.886464>

40. Mukhurov N. I., Gasenkova I. V., Andruhovich I. M. Ordered Growth of Anodic Aluminum Oxide in Galvanostatic and Galvanostatic-Potentiostatic Mode. *Journal of Materials Science and Nanotechnology*, 2014, vol. 1, issue 1, pp. 1–6. <https://doi.org/10.15744/2348-9812.1.s110>

Информация об авторах

Чумаков Александр Никитич – доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией радиационной плазмодинамики, Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси (пр. Независимости, 68-2, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: chumakov@dragon.bas-net.by

Мухуров Николай Иванович – доктор технических наук, профессор, заведующий лабораторией микро- и наносенсорики, ГНПО «Оптика, оптоэлектроника и лазерная техника» Национальной академии наук Беларуси (пр. Независимости, 68-1, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: n.mukhurov@ifanbel.bas-net.by

Денисюк Сергей Валентинович – научный сотрудник лаборатории микро- и наносенсорики, ГНПО «Оптика, оптоэлектроника и лазерная техника» Национальной академии наук Беларуси (пр. Независимости, 68-1, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: s.denicuk@oelt.basnet.by

Шевченко Александр Аркадьевич – кандидат технических наук, доцент, Белорусский государственный аграрный технический университет (пр. Независимости, 99, 220023, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: alexshev56@mail.ru

Баран Людмила Владимировна – кандидат физико-математических наук, заведующая сектором, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: brlv@mail.ru

Райченко Тамара Фроловна – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории физики инфракрасных лучей, Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси (пр. Независимости, 68-2, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: raitf@ifanbel.bas-net.by

Босак Николай Александрович – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории радиационной плазмодинамики, Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси (пр. Независимости, 68-2, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: n.bosak@ifanbel.bas-net.by

Information about the authors

Aleksandr N. Chumakov – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Head of the Laboratory of the Radiation Plasma Dynamics, B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (68-2, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: chumakov@dragon.bas-net.by

Nikolai I. Mukhurov – Dr. Sc. (Engineering), Professor, Head of the Laboratory of the Micro- and Nanosensorics, SSPA “Optics, Optoelectronics and Laser Technology” of the National Academy of Sciences of Belarus (68-1, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: n.mukhurov@ifanbel.bas-net.by

Sergei V. Denisiuk – Researcher of the Laboratory of the Micro- and Nanosensorics, SSPA “Optics, Optoelectronics and Laser Technology” of the National Academy of Sciences of Belarus (68-1, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: s.denicuk@oelt.basnet.by

Aleksandr A. Shevchenok – Ph. D. (Engineering), Assistant Professor, Belarusian State Agrarian Technical University (99, Nezavisimosti Ave., 220023, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: alexshev56@mail.ru

Liudmila V. Baran – Ph. D. (Physics and Mathematics), Sector Head, Belarusian State University, (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: brlv@mail.ru

Tamara F. Raichenok – Ph. D. (Physics and Mathematics), Leading Researcher of the Laboratory of Physics of Infrared Rays, B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (68-2, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: raitf@ifanbel.bas-net.by

Nikolai A. Bosak – Ph. D. (Physics and Mathematics), Leading Researcher of the Laboratory of the Radiative Plasma Dynamics, B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus (68-2, Nezavisimosti Ave., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: n.bosak@ifanbel.bas-net.by

ISSN 1561-2430 (Print)
 ISSN 2524-2415 (Online)
 УДК 621.315.592
<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-3-353-359>

Поступила в редакцию 07.06.2018
 Received 07.06.2018

Ф. П. Коршунов, Н. Е. Жданович, В. А. Гуринович

*Научно-практический центр Национальной академии наук Беларуси по материаловедению,
 Минск, Беларусь*

ВЛИЯНИЕ РАДИАЦИОННО-ТЕРМИЧЕСКИХ ДЕФЕКТОВ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ *p-n-p-n*-СТРУКТУР

Аннотация. Приводятся результаты исследования влияния радиационных дефектов (РД) и термостабильных (до 873 К) радиационно-термических дефектов (РТД), введенных электронным облучением с энергией 4 МэВ и термообработкой, на статические и динамические характеристики кремниевых *p-n-p-n*-структур. Получены зависимости тока включения и тока выключения от времени жизни неосновных носителей заряда (ННЗ) при высоком уровне инжекции в широкой *n*-базе структур с РД и РТД и аналогичные зависимости времени жизни ННЗ при высоком уровне инжекции от времени жизни при низком уровне инжекции. На измеренных *DLTS*-спектрах структур идентифицированы следующие уровни дефектов: $E_C - 0,18$ эВ принадлежит комплексу вакансия-кислород $V-O$ (А-центр), $E_V + 0,36$ эВ – комплексу углерод внедрения – кислород внедрения C_iO_i и $E_C - 0,25$ эВ и $E_C - 0,41$ эВ – комплексу дивакансия V_2 в двукратно и однократно отрицательно заряженных состояниях соответственно, а уровни $E_C - 0,39$ эВ и $E_V + 0,30$ эВ предположительно дефектам V_3O и C_iO_{2i} . Рекомбинационным уровнем, определяющим скорость переключения структур с РД, является уровень $E_C - 0,18$ эВ, а у структур с РТД – уровень $E_V + 0,39$ эВ. Показано, что токи включения и выключения больше у структур с радиационно-термическими, чем с радиационными дефектами, что увеличивает стойкость тиристорных структур с РТД к различным помехам и эффекту dU/dt . Полученные температурные зависимости тока управления и напряжения управления *p-n-p-n*-структур в диапазоне температур 77–320 К показывают возможность их использования в схемах в сочетании с высокотемпературными сверхпроводниками.

Ключевые слова: радиационный дефект, радиационно-термический дефект, быстрые электроны, время жизни неосновных носителей заряда, тиристор

Для цитирования. Коршунов, Ф. П. Влияние радиационно-термических дефектов на характеристики *p-n-p-n*-структур / Ф. П. Коршунов, Н. Е. Жданович, В. А. Гуринович. // Вест. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2018. – Т. 54, № 3. – С. 353–359. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-3-353-359>

F. P. Korshunov, N. E. Zhdanovich, V. A. Gurinovich

Scientific and Practical Materials Research Center of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

INFLUENCE OF RADIATION-THERMAL DEFECTS ON CHARACTERISTICS OF *p-n-p-n*-STRUCTURES

Abstract. The article presents the results of study of the effect of radiation defects (RD) and thermally stable (up to 873 K) radiation-thermal defects (RTD), created by electron irradiation with an energy of 4 MeV and heat treatment on the static and dynamic characteristics of silicon thyristor *p-n-p-n* structures. The dependences of turn-on and turn-off current on the lifetime of minority charge carriers at a high injection level (in the range of 1.0–10 mks) are obtained in a thick *n*-base of structures with RD and RTD defects and the same dependences of the minority charge carriers lifetime at a low injection level. *DLTS*-spectra of the investigated structures and temperature dependences of control current and control voltage in the temperature range of 77–320 K are presented as well.

Keywords: radiation defect, radiation-thermal defect, fast electrons, lifetime of minority charge carriers, thyristor

For citation. Korshunov F. P., Zhdanovich N. E., Gurinovich V. A. Influence of radiation-thermal defects on characteristics of *p-n-p-n*-structures. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, vol. 54, no. 3, pp. 353–359 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-3-353-359>

Введение. Кремниевые *p-n-p-n*-структуры являются основой коммутационных приборов – тиристоров. Важными характеристиками таких структур выступают как статические – токи включения, выключения, ток управления, напряжение переключения и остаточное напряжение, так и динамические – время включения и выключения. Обычно для увеличения их быстродействия

в структуры методом диффузии при высокой температуре вводят рекомбинационные центры, как правило, примеси золота или платины [1]. Но исследования [2–4] показали, что в качестве рекомбинационных центров для этих целей можно также использовать радиационные дефекты, введенные в приборные структуры путем облучения быстрыми электронами, гамма-лучами и другими проникающими излучениями.

Обычно структуры облучают определенными дозами проникающих излучений, а затем проводят их отжиг при температурах до 473 К для устранения нетермостабильных радиационных дефектов. После этого структуры заделывают в корпуса и получают готовые приборы. Но в ряде случаев возникает необходимость создания в приборных структурах дефектов, термостабильность которых превышает термостабильность радиационных дефектов, используемых в традиционной радиационной технологии (< 573 К). Особенно это необходимо для мощных тиристорных и других полупроводниковых приборов, радиационные дефекты в которых могут отжигаться за счет разогрева большими токами.

В настоящей работе приводятся результаты исследований характеристик переключения одной партии структур, облученных сравнительно небольшими дозами электронов, а также другой партии структур, облученных более высокими дозами и затем подвергнутых высокотемпературной обработке. В первых образцах образуются только радиационные дефекты (РД), а во вторых за счет перестройки их структуры – более термостабильные радиационно-термические дефекты (РТД).

Методика эксперимента. В качестве объектов использовались *p-n-p-n*-структуры, изготовленные по стандартной диффузионной технологии на основе кремния КЭФ-32 с удельным сопротивлением $32 \text{ Ом} \cdot \text{см}$. Облучение образцов двух партий проводилось на линейном ускорителе ЭЛУ-4 при комнатных температурах. Одна партия образцов облучалась электронами с энергией 4 МэВ в диапазоне флюенсов $1 \cdot 10^{13} \div 2 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-2}$. Таким образом был получен набор структур с различными концентрациями РД.

Другая партия образцов, облученных быстрыми электронами той же энергии, но большими флюенсами ($5 \cdot 10^{15} \div 2 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-2}$), впоследствии отжигалась при температуре 773 К в течение 30 мин. Такой способ радиационно-термической обработки позволил вводить в кремниевые структуры более термостабильные дефекты (РТД) [3], чем дефекты, вводимые при традиционной радиационной технологии (РД). Так был получен еще один набор структур с различными концентрациями РТД. Измерения характеристик переключения исследуемых структур осуществлялись в широком диапазоне температур, вплоть до температуры жидкого азота (77 К). Подобные исследования структур с радиационными и радиационно-термическими дефектами ранее не проводились.

Результаты и их обсуждение. Исследуемые *p-n-p-n*-структуры имели до радиационной и радиационно-термической обработки следующие характеристики при комнатной температуре: остаточное падение напряжения $U_T = 1,2 \text{ В}$ во включенном состоянии при токе 2 А, обратное напряжение $U_R = 400 \text{ В}$, ток управления $I_G = 5 \text{ мА}$. При облучении измерялись статические и динамические характеристики. Так, остаточное падение напряжения с ростом флюенса возрастало, скорость переключения увеличивалась. При флюенсах быстрых электронов свыше $5 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-2}$ структуры деградировали и не переключались.

На рис. 1 представлены зависимости тока включения $I_{\text{вкл}}$ и тока выключения $I_{\text{выкл}}$ исследуемых структур от значения времени жизни неосновных носителей заряда (ННЗ), измеренного при высоком уровне инжекции (τ_{pB}) в толстой *n*-базе структур при радиационной и радиационно-термической обработках (кривые 1, 2, 3 и 4 соответственно). Ток выключения – это минимальный ток, при котором структура еще удерживается в открытом состоянии.

Время жизни неосновных носителей заряда уменьшалось по мере увеличения дозы электронного облучения от 10 до 1 мкс. (Быстродействие тиристорных структур увеличивалось пропорционально уменьшению времени жизни ННЗ.) Как видно из рис. 1, в случае введения радиационно-термических дефектов наблюдается более сильная зависимость токов включения и выключения по сравнению с введением вторичных радиационных дефектов при одинаковом по величине уменьшении времени жизни ННЗ (увеличении быстродействия).

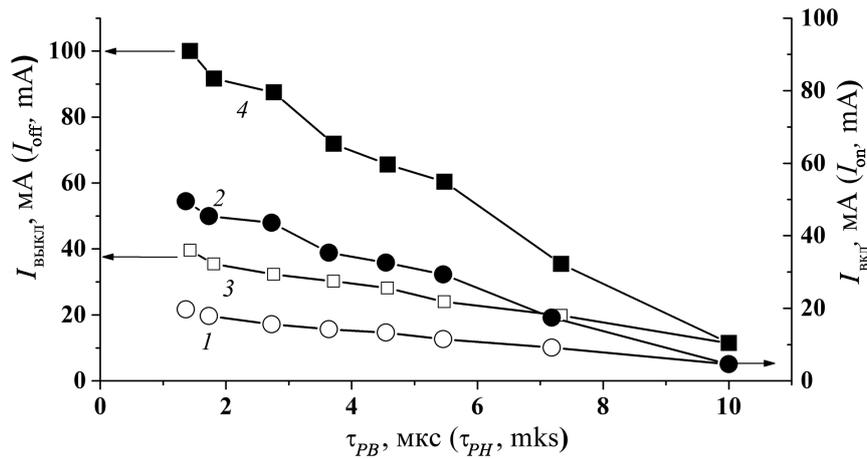


Рис. 1. Зависимость тока включения $I_{\text{вкл}}$ (кривые 1 и 2) и выключения $I_{\text{выкл}}$ (кривые 3 и 4) p - n - p -структур от времени жизни ННЗ τ_{PB} (время жизни измерялось при высоком уровне инжекции): 1, 3 – РД; 2, 4 – РТД

Fig. 1. Dependences of turn-on current I_{on} (curves 1 and 2) and turn-off current I_{off} (curves 3 and 4) of p - n - p -structures on the lifetime of minority charge carriers (MCC) at a high injection level (τ_{PH}): 1, 3 – RD; 2, 4 – RTD

На рис. 2 приведена зависимость соотношения времени жизни для случая РД к времени жизни для случая РТД, измеренных при относительно низком уровне инжекции (τ_{PHRD}/τ_{PHRTD}) от значения времени жизни при высоком уровне инжекции τ_{PB} . Прямой ток через структуру I_F при измерении времени жизни при низком уровне инжекции устанавливался на уровне, незначительно выше тока выключения (см. рис. 1, кривые 1, 2) и был в 10–100 раз ниже тока при измерении времени жизни при высоком уровне инжекции (1 А – максимальный ток установки для измерений τ_p). Как видно из кривой зависимости (τ_{PHRD}/τ_{PHRTD}) от τ_{PB} в случае РТД время жизни ННЗ при низком уровне инжекции уменьшается быстрее, чем в случае РД, и при максимальной концентрации дефектов (минимальных значениях времени жизни ННЗ при высоком уровне инжекции) различие достигает 30 %. Именно этим, по-видимому, частично объясняется различие в ходе зависимостей, приведенных на рис. 1. На характеристики переключения также должно влиять время жизни при низком уровне инжекции в узкой p -базе структур, однако получить такие зависимости для p -базы не удалось, поскольку она зашунтирована технологически на стадии изготовления сопротивлением 50 Ом в целях увеличения токов включения и выключения.

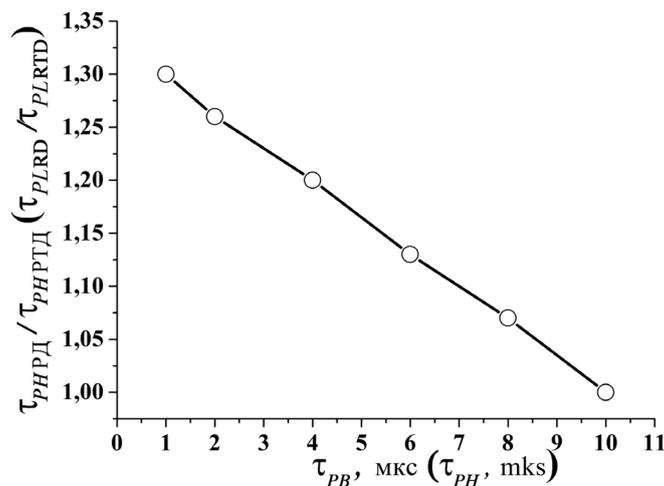


Рис. 2. Зависимость отношения значений времен жизни ННЗ при низком уровне инжекции структур с РД и РТД τ_{PHRD}/τ_{PHRTD} от значения времени жизни ННЗ при высоком уровне инжекции τ_{PB}

Fig. 2. Dependence of the ratio of the MCC lifetimes at a low injection level in structures with RD and RTD τ_{PLRD}/τ_{PLRTD} on the MCC lifetime at a high injection level τ_{PH}

На рис. 3 приведены *DLTS*-спектры исследуемых структур. Для наглядности все значения в спектрах структуры с РД умножены на 4. Таким образом, необходимо учитывать, что на самом деле концентрация РД примерно в 4 раза ниже, чем показано на спектрах.

Параметры глубоких уровней, наблюдаемые на *DLTS*-спектрах, определялись из зависимостей Аррениуса [5]. На спектрах облученных образцов в верхней и нижней половине запрещенной зоны были определены следующие энергетические уровни дефектов и рассчитаны значения энергии активации E_C и E_V и сечения захвата электронов σ_n и дырок σ_p .

На спектре 1. $E1$: $E_C - 0,18$ эВ, $\sigma_n = 1,86 \cdot 10^{-14}$ см²; $E2$: $E_C - 0,25$ эВ, $\sigma_n = 4,73 \cdot 10^{-15}$ см²; $E3$: $E_C - 0,27$ эВ, $\sigma_n = 2,11 \cdot 10^{-17}$ см²; $E4$: $E_C - 0,41$ эВ, $\sigma_n = 8,2 \cdot 10^{-16}$ см².

На спектре 2. $H1$: $E_V + 0,36$ эВ, $\sigma_p = 2,5 \cdot 10^{-15}$ см².

На спектре 3. E_T1 : $E_C - 0,39$ эВ, $\sigma_n = 5,7 \cdot 10^{-16}$ см².

На спектре 4. H_T1 : $E = E_V + 0,30$ эВ $\sigma_p = 3,1 \cdot 10^{-17}$ см².

Сопоставление полученных результатов с литературными данными [6, 7] свидетельствует о том, что уровень $E1$ принадлежит комплексу вакансии – кислород $V-O$ (А-центр), уровень $H1$ – комплексу углерод внедрения – кислород внедрения C_iO_i и $E2, E4$ – комплексу дивакансия V_2 в двукратно и однократно отрицательно заряженных состояниях соответственно. Что касается уровней E_T1, H_T1 , то можно предположить, основываясь на известных литературных данных, что это уровни V_3O [8] и C_iO_{2i} [9].

Исходя из полученных данных, можно сделать выводы, что в структурах с радиационными дефектами идет рекомбинация через доминирующий энергетический уровень $E_C - 0,18$ эВ, а у структур с РТД – через более глубокий доминирующий энергетический уровень $E_C - 0,39$ эВ. Известно также [10], что в случае высокого уровня инжекции эффективность рекомбинации определяется сечением захвата основных носителей заряда на уровень дефекта, а в случае низкого уровня инжекции существенное значение имеет глубина залегания уровня.

Поскольку в случае РТД рекомбинация идет через более глубокий уровень, то это, очевидно, и приводит к наблюдаемому усилению зависимости $I_{\text{выкл}}$ и $I_{\text{вкл}}$ от τ_{PH} (рис. 1, кривые 2, 4). Эта особенность поведения токов включения и выключения в случае РТД может быть использована для увеличения стойкости к эффекту dU/dt запираемых тиристоров, поскольку специфика работы последних не позволяет использовать для этой цели шунтирование перехода p -база – n -эмиттер.

На рис. 4 представлены температурные зависимости тока управления $I_{\text{упр}}$ и напряжения управления $U_{\text{упр}}$ в диапазоне температур 77–320 К для p - n - p -структур, содержащих РД и РТД (кривые 1, 3 и 2, 4 соответственно). Аналогичные зависимости были получены для времени

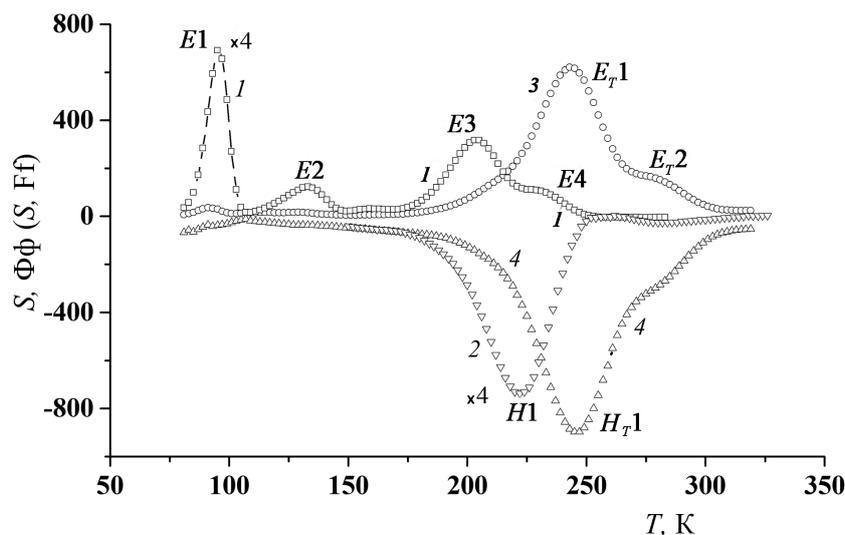


Рис. 3. *DLTS*-спектры исследуемых структур: 1, 2 – $\Phi = 1 \cdot 10^{14}$ см⁻², $E = 4$ МэВ, $T_{\text{отж}} = 293$ К, $e = 191,4$ с⁻¹; 3, 4 – $\Phi = 1 \cdot 10^{16}$ см⁻², $E = 4$ МэВ, $T_{\text{отж}} = 773$ К, $t_{\text{отж}} = 30$ мин, $e = 191,4$ с⁻¹

Fig. 3. *DLTS*-spectra of the investigated structures: 1, 2 – $F = 1 \cdot 10^{14}$ см⁻², $E = 4$ MeV, $T_{\text{ann}} = 293$ K, $e = 191.4$ s⁻¹; 3, 4 – $F = 1 \cdot 10^{16}$ см⁻², $E = 4$ MeV, $T_{\text{ann}} = 773$ K, $t_{\text{ann}} = 30$ min, $e = 191.4$ s⁻¹

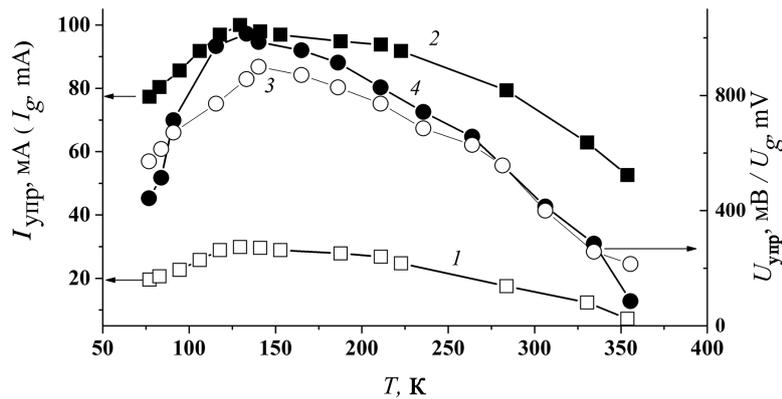


Рис. 4. Температурные зависимости тока ($I_{упр}$) и напряжения ($U_{упр}$) управления $p-n-p-n$ -структур, содержащих РД (1, 3) и РТД (2, 4) при одинаковом значении времени жизни ННЗ, измеренном при комнатной температуре

Fig. 4. Temperature dependences of control current (I_g) and control voltage (U_g) of $p-n-p-n$ -structures with RD (1, 3) and RTD (2, 4) at the same MCC lifetime measured at room temperature

включения и времени жизни неосновных носителей заряда (измеренном при низком уровне инжекции) в исследуемых структурах. Как видно, на температурных зависимостях наблюдается максимум, расположенный в области температур 150 К. Такой немонотонный ход зависимостей связан, по-видимому, с влиянием эффекта прилипания, обусловленного «вымораживанием» основных носителей заряда на уровни легирующей примеси в p - и n -областях $p-n-p-n$ -структур. Прилипание носителей приводит к тому, что с понижением температуры увеличивается значение времени жизни неосновных носителей заряда при низком уровне инжекции. Так, в [11] приведены следующие выражения, на основании которых можно оценить изменения времени жизни ННЗ в области низких температур. Рассматривается случай для времени жизни неравновесных электронов. В случае дырок выражение имеет тот же вид. Электрон может либо находиться в зоне проводимости, либо захватываться на уровень донорной примеси. Время релаксации между электронами в зоне проводимости и электронами на энергетическом уровне донорной примеси выражается следующим образом:

$$\tau_{\text{relax}} = 1 / \nu \cdot \exp \frac{-E_d}{kT} = (g_D / N_C S V_C) \exp \frac{E_d}{kT},$$

где E_d – энергия ионизации донора; ν – частота переходов с уровня в зону; S – сечение захвата на донорный уровень ($1 \cdot 10^{-14}$ см²), g_D – фактор вырождения донорного уровня (для кремния равен 2), V_C – средняя тепловая скорость для электронов. Время релаксации уровня для $E_d = 0,044$ эВ (уровень легирующей примеси фосфора) при 77 К равно 2,5 пс. Поэтому для кремниевых приборов, работающих вблизи температур 77 К, можно считать, что зона проводимости и донорный уровень находятся в квазиравновесном состоянии, т. е. отношение концентрации инжектированных электронов n_T к концентрации электронов в зоне проводимости n_c будет иметь следующий вид:

$$\frac{n_T}{n_c} = \frac{n_c + n_d}{n_c} = \frac{N_C + N_d g_D \exp(E_d / kT)}{N_C},$$

где n_d и n_c – концентрации электронов на донорных уровнях и в зоне проводимости, N_d – концентрация легирующей примеси, N_C – плотность состояний в зоне проводимости для фосфора $E_d = 0,044$ эВ, и тогда $\exp(E_d / kT) = 5$ при комнатной температуре и 800 при температуре 77 К. Расчеты показывают, что при $N_d = 1 \cdot 10^{15}$ см⁻³ (уровень легирования n -базы структур равен $5 \cdot 10^{14}$ см⁻³; уровень легирования p -базы структур равен $1 \cdot 10^{16}$ см⁻³) время жизни равновесных носителей заряда при 77 К увеличивается на 50 % по сравнению с тем, если бы не было прилипания носителей заряда на уровень легирующей примеси. Это увеличение приводит к росту тока управления и напряжения управления, а также времени включения $p-n-p-n$ -структур.

Отсутствие существенных различий в ходе температурных зависимостей тока управления и напряжения управления в структурах, содержащих РД и РТД, свидетельствует о том, что при низких температурах существенную роль играют параметры уровня прилипания, а не рекомбинации. Вместе с тем у структур, содержащих РТД, существенно возрастает величина токов включения и выключения, а также тока управления и напряжения управления при одинаковых значениях времени жизни ННЗ со структурами, содержащими РД.

Заключение. Таким образом, получены зависимости, характеризующие коммутационные свойства $p-n-p-n$ -структур с радиационными и радиационно-термическими дефектами от времени жизни неосновных носителей заряда в толстой n -базе. Показано, что токи включения и выключения больше у структур с РТД, чем у структур с РД, что увеличивает стойкость тиристорных структур с РТД к различным помехам и эффекту dU/dt . Полученные температурные зависимости переключения $p-n-p-n$ -структур в широком температурном интервале вплоть до температур жидкого азота (77 К) показывают возможность их использования в схемах в сочетании с высокотемпературными сверхпроводниками. Рекомбинационным уровнем, определяющим скорость переключения структур с РД, является уровень $E_C = 0,18$ эВ, а у структур с РТД – уровень $E_C = 0,39$ эВ.

Список использованных источников

1. Коршунов, Ф. П. Воздействие радиации на интегральные микросхемы / Ф. П. Коршунов, Ю. В. Богатырев, В. А. Вавилов. – Минск: Наука и техника, 1986. – 254 с.
2. Коршунов, Ф. П. Исследование термостабильных радиационных дефектов (до 800 °С) в $p-n$ -структурах на ядерно-легированном кремнии / Ф. П. Коршунов, Н. Е. Жданович // Актуальные проблемы физики твердого тела ФТТ-2016: сб. докл. Междунар. науч. конф., 22–25 нояб. 2016. – Минск, 2016. – Т. 2. – С. 66–68.
3. Влияние отжига на перестройку центров рекомбинации в облученных кремниевых структурах / Ф. П. Коршунов [и др.] // Докл. АН БССР. – 1988. – Т. 32, № 9. – С. 781–783.
4. Исследование радиационно-термических дефектов и их влияние на параметры кремниевых диффузионных $p-n$ -структур / Ф. П. Коршунов [и др.] // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 1998. – № 3. – С. 64–68.
5. Берман, Л. С. Емкостная спектроскопия глубоких центров в полупроводниках / Л. С. Берман, А. А. Лебедев. – Л.: Наука, 1981. – 176 с.
6. Вавилов, В. С. Дефекты в кремнии и на его поверхности / В. С. Вавилов, В. Ф. Киселев, Б. Н. Мукашев. – М.: Наука, 1990. – 216 с.
7. Claeys, C. Radiation Effects in Advanced Semiconductor Materials and Devices / C. Claeys, E. Simoen. – Berlin: Springer, 2002. – 404 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-04974-7>
8. Structure and electronic properties of trivacancy and trivacancy-oxygen complexes in silicon / V. P. Markevich [at al.] // Phys. Status Solidi A. – 2011. – Vol. 208, iss. 3. – P. 568–571. <https://doi.org/10.1002/pssa.201000265>
9. Радиационно-индуцированные центры с высокой термической стабильностью в кремнии p -типа / С. Б. Ластовский [и др.] // Перспективные материалы. – 2013. – № 9. – С. 19–23.
10. Евсеев, Ю. А. Силовые полупроводниковые приборы / Ю. А. Евсеев, П. Г. Дерменжи. – М.: Энергоиздат, 1981. – 72 с.
11. Jason, C. S. Woo. Optimization of silicon bipolar transistors for high current gain at low temperatures / C. S. Woo Jason, James D. Plummer // IEEE Trans. Electron. Devices. – 1988. – Vol. 35, № 8. – P. 1311–1321. <https://doi.org/10.1109/16.2553>

References

1. Korshunov F. P., Bogatyrev Yu. V., Vavilov A. V. *Radiation Effects in Integrated Circuits*. Minsk, Nauka i Tehnika Publ., 1986. 254 p. (in Russian).
2. Korshunov F. P., Zdanovich N. E. Study of the thermostable radiation defects (up to 800°C) in $p-n$ -structures on nuclear-doped silicon. *Aktual'nye problemy fiziki tverdogo tela FTT-2016, sbornik dokladov Mezhdunarodnoi nauchnoi konferentsii, 22–25 noyab. 2016. T. 2* [Solid State Physics Topical Issues (SSP-2016). Conference Book of International Scientific Conference. November 22–25, 2016. Vol. 2]. Minsk, 2016, pp. 66–68 (in Russian).
3. Korshunov F. P., Marchenko I. G., Zdanovich N. E., Troschinskii V. T. Impact of annealing on recombination centers transformation in irradiated silicon structures. *Doklady AN BSSR = Proceedings of the Academy of Sciences of BSSR*, 1988, vol. 32, no. 9, pp. 781–783 (in Russian).
4. Korshunov F. P., Zdanovich N. E., Marchenko I. G., Troschinskii V. T. Investigation of radiation-thermal defects and their influence on the characteristics of silicon diffused $p-n$ -structures. *Vestsi Natsyianal'най akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 1998, no. 3, pp. 64–68 (in Russian).

5. Berman L. S., Lebedev A. A. *Capacity spectroscopy of deep centers in semiconductors*. Leningrad, Nauka Publ., 1981. 176 p. (in Russian).
6. Vavilov V. S., Kiselev V. F., Mukashev B. N. *Defects in silicon and on its surface*. Moscow, Nauka Publ., 1990. 216 p. (in Russian).
7. Claeys C., Simoen E. *Radiation Effects in Advanced Semiconductor Materials and Devices*. Berlin, Springer, 2002. 404 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-04974-7>
8. Markevich V. P., Peaker A. R., Hamilton B., Lastovskii S. B., Murin L. I., Coutinho J., Torres V. J. B., Dobaczewski L., Svensson B. G. Structure and electronic properties of trivacancy and trivacancy-oxygen complexes in silicon. *Physical Status Solidi A*, 2011, vol. 208, no. 3, pp. 568–571. <https://doi.org/10.1002/pssa.201000265>
9. Lastovskii S. B., Murin L. I., Markevich V. P., Korshunov F. P., Medvedeva I. F. Radiation-induced centers with high thermal stability in p-type silicon. *Perspektivnye materialy*, 2013, no. 9, pp. 19–23 (in Russian).
10. Evseev Yu. A., Dermenji P. G. *Semiconductor power devices*. Moscow, Energoizdat Publ., 1981. 72 p. (in Russian).
11. Jason C. S. Woo, Plummer James D. Optimization of silicon bipolar transistors for high current gain at low temperatures. *IEEE Transactions on Electron Devices*, 1988, vol. 35, no. 8, pp. 1311–1321. <https://doi.org/10.1109/16.2553>

Информация об авторах

Жданович Николай Евгеньевич – научный сотрудник лаборатории «Радиационные воздействия», Научно-практический центр Национальной академии наук Беларуси по материаловедению (ул. П. Бровки, 19, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: jdan@ifftp.bas-net.by

Гуринович Валентина Артемовна – научный сотрудник лаборатории «Радиационные воздействия», Научно-практический центр Национальной академии наук Беларуси по материаловедению (ул. П. Бровки, 19, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: gurinovich@ifftp.bas-net.by

Коршунов Федор Павлович – член-корреспондент, доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник, лаборатория «Радиационные воздействия», Научно-практический центр Национальной академии наук Беларуси по материаловедению (ул. П. Бровки, 19, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: korshun@ifftp.bas-net.by

Information about the authors

Nikolai E. Zhdanovich – Researcher of the Laboratory of the Radiation Effects, Scientific and Practical Materials Research Center of the National Academy of Sciences of Belarus (19, P. Brovka Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: jdan@ifftp.bas-net.by

Valentina A. Gurinovich – Researcher of the Laboratory of the Radiation Effects, Scientific and Practical Materials Research Center of the National Academy of Sciences of Belarus (19, P. Brovka Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: gurinovich@ifftp.bas-net.by

Fedor P. Korshunov – Corresponding Member, Dr. Sc. (Engineering), Professor, Chief Researcher of the Laboratory of the Radiation Effects, Scientific and Practical Materials Research Center of the National Academy of Sciences of Belarus (19, P. Brovka Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: korshun@ifftp.bas-net.by

ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
UDC 621.383:539.1.43

<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-3-360-368>

Received 11.05.2018

Поступила в редакцию 11.05.2018

**I. A. Romanov¹, I. N. Parkhomenko¹, L. A. Vlasukova¹, F. F. Komarov²,
N. S. Kovalchuk³, O. V. Milchanin², M. A. Makhavikou², A. V. Mudryi⁴,
V. D. Zhivulko⁴, Hong-Liang Lu⁵**

¹Belarusian State University, Minsk, Belarus

²A. N. Sevchenko Institute of Applied Physical Problems of the Belarusian State University, Minsk, Belarus

³Joint Stock Company "Integral" Minsk, Belarus

⁴Scientific and Practical Materials Research Center of the National Academy of Sciences of Belarus,
Minsk, Belarus

⁵State Key Laboratory of ASIC and System, School of Microelectronics, Fudan University, Shanghai, China

BLUE AND RED LIGHT-EMITTING NON-STOICHIOMETRIC SILICON NITRIDE-BASED STRUCTURES

Abstract. The two triple-layered $\text{SiO}_2/\text{SiN}_x/\text{SiO}_2$ structures with Si-rich and N-rich silicon nitride active layer were fabricated on *p*-type Si-substrates by chemical vapour deposition. The SiN_x layer of different composition ($x = 0.9$ and $x = 1.4$) was obtained by changing the ratio of the $\text{SiH}_2\text{Cl}_2/\text{NH}_3$ flow rates during deposition of a silicon nitride active layer (8/1 and 1/8, respectively). The spectroscopic ellipsometry and photoluminescence (PL) measurements showed that the refractive index, the absorbance and luminescence properties depend on a chemical composition of silicon nitride layers. The structures with Si-rich and N-rich SiN_x active layers emit in the red (1.9 eV) and blue (2.6 eV) spectral ranges, respectively. The PL intensities of different structures are comparable. The rapid thermal annealing results in the intensity decrease and in the PL spectra narrowing in the case of $\text{SiN}_{1.4}$ active layer, whereas the increase in the emission intensity and the PL spectra broadening are observed in the case of the annealed sample with a $\text{SiN}_{0.9}$ active layer. The PL origin and the effect of annealing treatment have been discussed, taking into account the band tail mechanism of radiative recombination. Multilayered $(\text{SiO}_2/\text{SiN}_x)_n/\text{Si}$ structures are of practical interest for creation of effective light sources on the basis of current Si technology.

Keywords: non-stoichiometric silicon nitride, photoluminescence, spectral ellipsometry, absorption edge, rapid thermal annealing

For citation. Romanov I. A., Parkhomenko I. N., Vlasukova L. A., Komarov F. F., Kovalchuk N. S., Milchanin O. V., Makhavikou M. A., Mudryi A. V., Zhivulko V. D., Hong-Liang Lu. Blue and red light-emitting non-stoichiometric silicon nitride-based structures. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, vol. 54, no. 2, pp. 360–368. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-3-360-368>

**И. А. Романов¹, И. Н. Пархоменко¹, Л. А. Власукова¹, Ф. Ф. Комаров², Н. С. Ковальчук³,
О. В. Мильчанин², М. А. Моховиков², А. В. Мудрый⁴, В. Д. Живулько⁴, Хонг-Ланг Лу⁵**

¹Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

²Институт прикладных физических проблем им. А. Н. Севченко Белорусского государственного университета,
Минск, Беларусь

³ОАО «Интеграл», Минск, Беларусь

⁴Научно-практический центр Национальной академии наук Беларуси по материаловедению, Минск, Беларусь

⁵Школа микрорелектроники Фуданского университета, Шанхай, Китай

СВЕТОИЗЛУЧАЮЩИЕ СТРУКТУРЫ НА ОСНОВЕ НЕСТЕХИОМЕТРИЧЕСКОГО НИТРИДА КРЕМНИЯ

Аннотация. Методом химического газофазного осаждения на кремниевых подложках *p*-типа изготовлены две трехслойные структуры $\text{SiO}_2/\text{SiN}_x/\text{SiO}_2$ с нестехиометрическими пленками нитрида кремния, обогащенными кремнием ($x = 0,9$) или азотом ($x = 1,4$), в качестве активных слоев. Активные слои SiN_x нестехиометрического состава ($x = 0,9$ и $x = 1,4$) получены при различном соотношении реагирующих газов ($\text{SiH}_2\text{Cl}_2/\text{NH}_3$) в процессе осаждения (8/1 и 1/8 соответственно). Методами спектральной эллипсометрии и фотолюминесценции показано, что показатель преломления, поглощение и люминесцентные свойства зависят от стехиометрического состава нитрида кремния. Структуры с активными слоями нитрида с избытком кремния и азота излучают в красной (1,9 эВ) и синей (2,6 эВ) областях спектра соответственно, причем интенсивность свечения сравнима для двух образцов. Быстрая термическая обработка приводит к уменьшению интенсивности и сужению спектра фотолюминесценции образца с активным

слоем $\text{SiN}_{1.4}$, тогда как для образца с активным слоем $\text{SiN}_{0.9}$ наблюдается возрастание интенсивности люминесценции с уширением спектра в коротковолновую область после отжига. Природа видимого свечения и влияние термообработки объясняются с учетом существования протяженной зоны хвостовых состояний.

Структуры с чередующимися слоями оксида и нитрида кремния представляют практический интерес для создания эффективных источников света на базе кремниевой технологии.

Ключевые слова: нестехиометрический нитрид кремния, фотолюминесценция, спектральная эллипсометрия, край поглощения, быстрый термический отжиг

Для цитирования. Светоизлучающие структуры на основе нестехиометрического нитрида кремния / И. А. Романов [и др.] // Вест. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2018. – Т. 54, № 3. – С. 360–368. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-3-360-368>

Introduction. At present, covering the full range of visible spectrum light-emitting diodes based on III-nitride semiconductors (GaN, InN, AlN, InGaN) have high efficiency, long lifetimes and commercially availability. But, there is still a problem of designing of light source compatible with the existing Si technology to develop the full optical link in integrated circuits instead of conventional metallic interconnections. A logical solution to the problem of Si-based light source absent is a development of LEDs based on silicon nitride (SiN_x). Indeed, amorphous silicon nitride is one of the most important dielectrics in the current planar silicon technology. It is widely used in the integrated circuit production as gate dielectric films in transistors, passivation and charge storage layers in nonvolatile memory. Recently, the light-emitting properties of amorphous silicon nitride films have been attracting researcher's interest. However, the researcher's efforts are mainly concentrated on non-stoichiometric Si-rich $\text{SiN}_{x < 1.3}$ films. Such films are used as a matrix for the light-emitting Si nanocrystal formation during deposition or annealing [1–2]. Afterwards, it was demonstrated that the origin of emission from SiN_x films should not be unambiguously assigned to the emission of Si nanoclusters synthesized in the silicon nitride matrix. Silicon nitride exhibits intrinsic light-emitting properties via presence of deep defect levels and continues band tail states in band gap [3–5]. Besides, the optical properties of SiN_x films can be controlled by the variation of chemical composition. There are many previous studies that demonstrated the changing band gap, refractive index and absorption coefficient with variation of atomic ratio N/Si ($x = 0\text{--}1.7$) of the non-stoichiometric SiN_x films [3, 6–15]. Mainly, these works were devoted to the hydrogen containing films deposited by plasma-enhanced or photo-chemical vapor deposition (CVD), radio-frequency glow discharge at temperatures < 500 °C. The similar studies of the low-hydrogen silicon nitride films deposited by radio frequency magnetron sputtering or low pressure CVD (LPCVD) techniques as well as studies devoted to SiN_x photoluminescence (PL) have been discussed only for Si-rich films ($x < 1.3$) [3, 7–11, 16–21]. In this work, we studied optical properties of the structures with Si-rich and N-rich light-emitting SiN_x layer deposited by LPCVD. It was demonstrated that the N-rich ($\text{SiN}_{x > 1.3}$) silicon nitride can also be as an effective active layer in multilayered $\text{SiO}_2/\text{SiN}_x/\text{SiO}_2$ structures.

Experimental. Two triple-layered $\text{SiO}_2/\text{SiN}_x/\text{SiO}_2$ structures were fabricated on the commercial Cz-Si-substrates (*p*-type) by CVD techniques (Fig. 1). Before the deposition, silicon substrates were cleaned in an oxidizing bath. Stoichiometric silicon dioxide was deposited by plasma-enhanced chemical vapour deposition (PECVD) as a buffer and capping layer using a gaseous mixture of silane SiH_4 (250 sccm) and nitrous oxide (N_2O) (1166 sccm) as precursors at 350 °C. The pressure in the chamber was kept constant at 52 Pa. Non-stoichiometric silicon nitride (SiN_x) was deposited on the buffer SiO_2 layer by LPCVD at 830 °C as an interlayer. The total flow rate of reagent gas ($\text{SiH}_2\text{Cl}_2 + \text{NH}_3$) and pressure were maintained at 135 sccm and 40 Pa, respectively. By changing a ratio of reagent gases flow rates ($R = \text{SiH}_2\text{Cl}_2/\text{NH}_3$) in the reactor chamber, two structures differed by stoichiometric composition of active layer ($x = [\text{N}]/[\text{Si}]$, where $[\text{N}]$ and $[\text{Si}]$ are the nitrogen and silicon atomic concentrations) were deposited. The partial flow ratio (R) of reagent gases was chosen as 8/1 and 1/8.

The atomic ratio (x) of as-deposited SiN_x films was determined by Rutherford backscattering spectrometry using 1.5 MeV He^+ ions from the HVE AN-2500 accelerator. The compositions of active SiN_x layer were $\text{SiN}_{0.9}$ (Si-rich) and $\text{SiN}_{1.4}$ (N-rich) for the films deposited at chosen R (8/1 and 1/8, respectively). Hereafter, the samples $\text{SiO}_2/\text{SiN}_{0.9}/\text{SiO}_2$ and $\text{SiO}_2/\text{SiN}_{1.4}/\text{SiO}_2$ are labeled as SRN and NRN ones. The 1×1 cm² samples were cut out from the structures and undergone rapid thermal annealing (RTA) at 1200 °C for 3 min using the setup 'JetFirst-100'. The thicknesses of layers in the fabricated structures

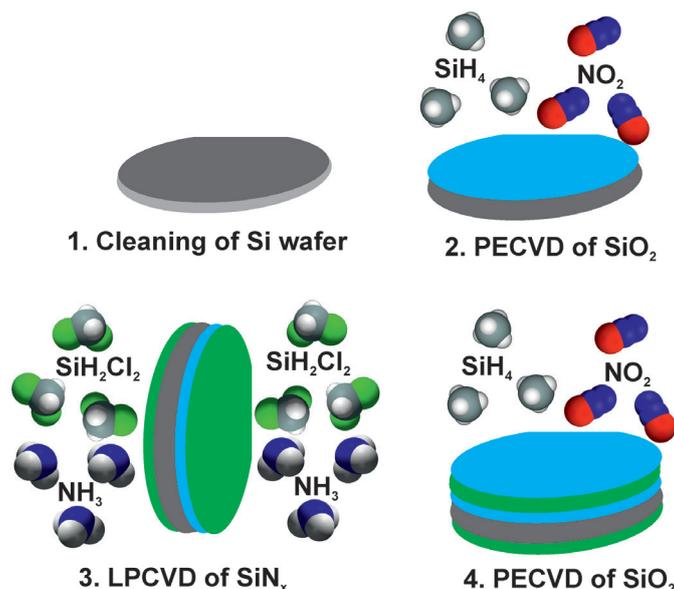


Fig. 1. Steps of CVD deposition of triple-layered SiO₂/SiN_x/SiO₂ on Si wafer

were investigated by scanning electron microscopy (SEM) using the Hitachi S-4800 microscope. Spectroscopic ellipsometry measurements of the refraction index (n) and the extinction coefficient (k) in the range of 200–1000 nm were performed using the spectroscopic ellipsometer HORIBA UVISEL 2. Photoluminescence (PL) spectra were recorded at room temperature in the spectral range of 350–800 nm with a He-Cd laser (325 nm) as excitation source using a home-made setup.

Results and discussion. Fig. 2 shows the SEM images of deposited films. Unfortunately, the interface between SiN_x and SiO_x layers were not revealed due to low contrast. As a result, SEM gave information only on a total thickness of the fabricated structures. The total thickness of triple-layered structure was equal to 126 nm and 212 nm for the SRN and NRN samples, respectively. However, the features of used deposition techniques (PECVD and LPCVD) could help to determine the depth of SiN_x layer. Namely, during PECVD process the film is deposited only on one side of the wafer while during the LPCVD process film is deposited on both sides of wafer due to vertical design of the used furnace.

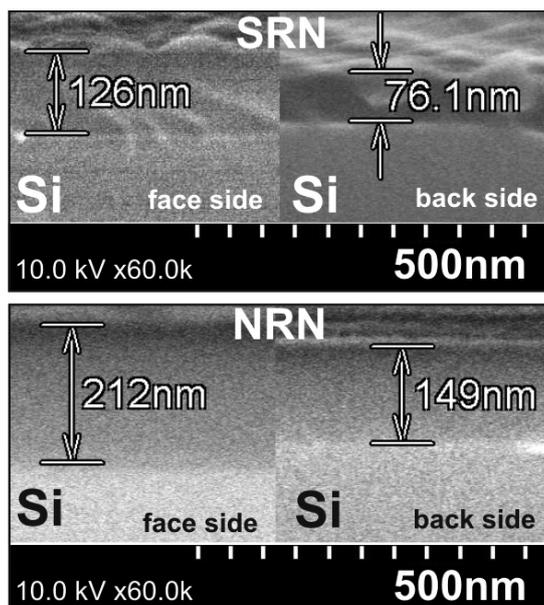


Fig. 2. SEM images of the SRN and NRN samples. The triple-layered SiO₂/SiN_x/SiO₂ structure was deposited on the face side of the Si substrate. Simultaneously, the SiN_x layer of appropriate thickness was deposited on the back side of the Si substrate

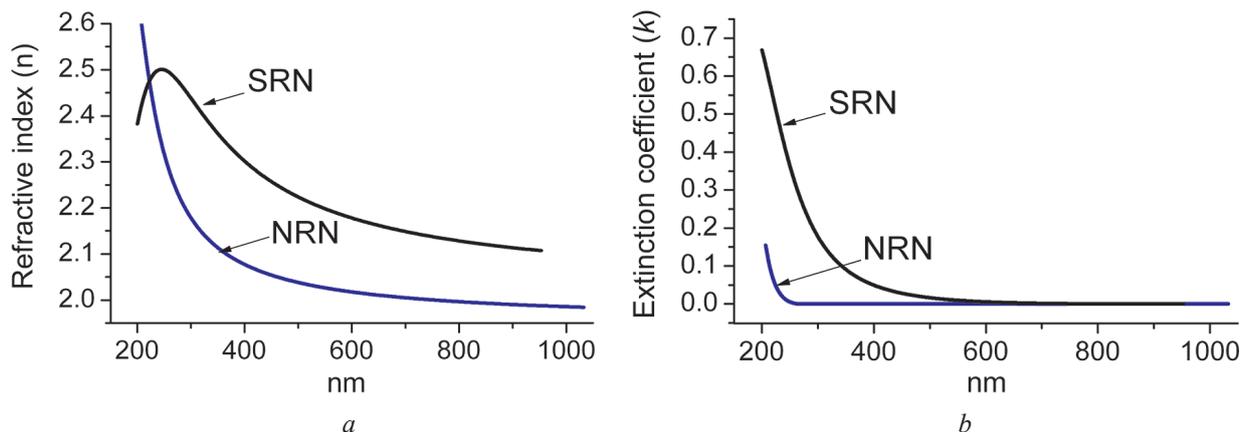


Fig. 3. Dispersion of the refractive index $n(\lambda)$ (a) and the extinction coefficient $k(\lambda)$ (b) of the as-deposited SRN and NRN structures

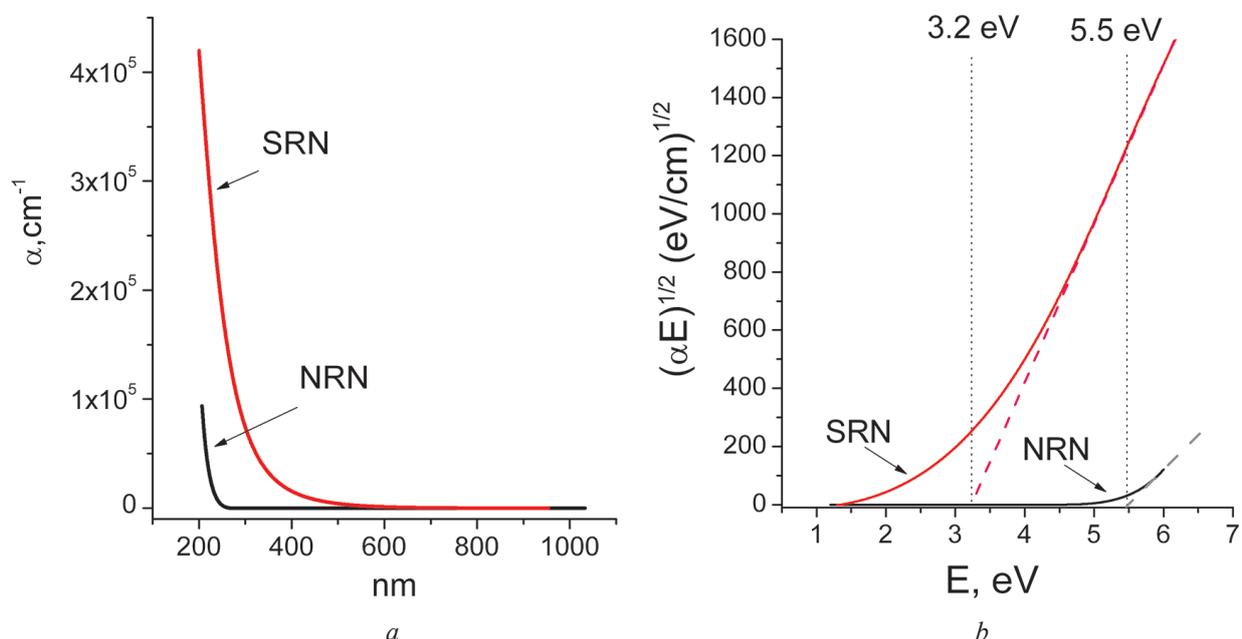


Fig. 4. Absorption coefficient spectra (a) and Tauc's plots of the SRN and NRN samples (b)

So, the single silicon nitride film of the same thickness as in the triple structure was deposited in the back side of Si wafer. Thus, the SEM images of wafer back side shows that the thickness of active SiN_x layer is equal to 76 nm and 149 nm for the SRN and NRN samples, respectively.

Fig. 3 shows the variation of optical constants such as the real part of the refraction index $n(\lambda)$ and the extinction coefficient $k(\lambda)$ of the SRN and NRN structures. As can be seen from Fig. 3, the optical properties of deposited structures depend on active layer composition. For the SRN structure, the refractive index has higher values in the visible spectral range. A similar trend of n increase with the increasing N/Si atomic ratio of SiN_x films has been shown in literature [13, 22–24]. It should be noted the anomalous behavior of n for the SRN structure in the range of (200–300 nm). It is typical for silicon nitride films with large excess of Si [22, 24]. The both obtained structures show the extinction coefficient amplitude increase to become nearby lower wavelengths (UV spectral range). The extinction coefficient k is quasi null for the wavelength higher than 610 nm and 250 nm for the SRN and NRN, respectively.

Fig. 4 shows the corresponding absorption coefficient α calculated from the extinction coefficient ($\alpha = 4\pi k/\lambda$).

It is evident the absorption edge blue shift with increasing x parameter. It indicates an optical band gap widening with increase of N/Si ratio. Assuming parabolic bands, the absorption edge could be determined using the well-known Tauc's equation:

$$(\alpha E)^{1/2} = B(E - E_g),$$

where E , E_g and B are the photon energy, indirect optical gap and the Tauc constant (slope), respectively. E_g calculated by the straight line extrapolation in the linear region of Tauc's plots with the energy axis are equal to 3.2 eV and 5.5 eV for SRN and NRN structures, respectively. These values are differed with the $E_g = 5$ eV of stoichiometric Si_3N_4 deposited by LPCVD [25].

E_g reduction with the decreasing N/Si ratio was reported for Si-rich films elsewhere [12, 15, 26] and explained via the progressive replacement of Si–N bonds by Si–Si bonds. The nonstoichiometric silicon nitride film is composed of a random network of Si–N and Si–Si bonds. In the case of Si-rich alloys, the band edges are formed by the Si–Si states. In the N-rich alloys, the replacement of Si–Si bonds by stronger Si–N bonds causes the band gap increase with the increasing stoichiometric parameter x .

Tauc slope B could provide information about the degree of spreading tails of valence and conduction bands [23]. The value of B determined from the Tauc's plots is equal to $540 (\text{eV}\cdot\text{cm})^{-1/2}$ and $245 (\text{eV}\cdot\text{cm})^{-1/2}$ for SRN and NRN structures, respectively. It is known that the width of band tail states can depend on static disorder due to structural randomness. In some papers [20, 27–28], band-tail states in the non-stoichiometric SiN_x films are attributed to a long-range disorder due to spatial fluctuations of the elemental composition. The dependence of B on stoichiometric parameter is not linear. In Ref [23], Si-rich and stoichiometric nitride films ($x = 0.34\text{--}1.34$) were studied. According to [23] the minimal value of B is equal to $130 (\text{eV}\cdot\text{cm})^{-1/2}$ for $x = 1.34$. The change of B for a wider range of x ($x = 0\text{--}1.6$) was discussed in [26, 29]. In this case, a minimum in the Tauc slope ($250 (\text{eV}\cdot\text{cm})^{-1/2}$) is at around $x = 1.0$. According to [14] the B decreases linearly with the increasing x from 0 to 1.5 and increases abruptly for the $x > 1.5$. The magnitude of B is inversely proportional to energy ranges occupied by tail states. In the case of investigated SRN and NRN structures, it can be concluded that both ones exhibit band tail states. However, NRN structure exhibits a more significant tailing.

Fig. 5 shows the room-temperature PL spectra of the as-deposited SRN and NRN samples. The position and full width at half maximum (FWHM) of the PL bands depend on the composition of active layer. The PL bands maxima are located in red range at ~ 1.9 eV (650 nm) for the SRN sample and in blue range ~ 2.6 eV (470 nm) for the NRN sample. PL bands are broader for the NRN films (FWHM is equal

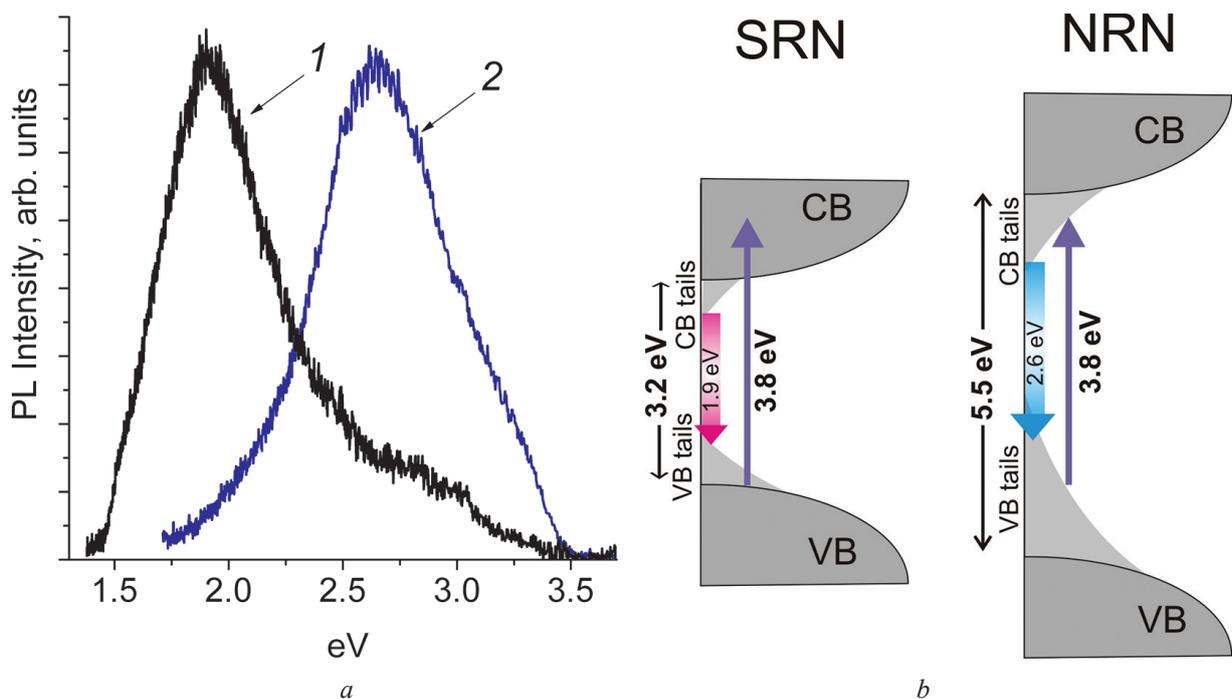


Fig. 5. PL spectra of the as-deposited SRN (1) and NRN (2) structures (intensity normalized to thickness) (a) and schematic energy band possible optical transitions for the both structures, assuming band tail states (b)

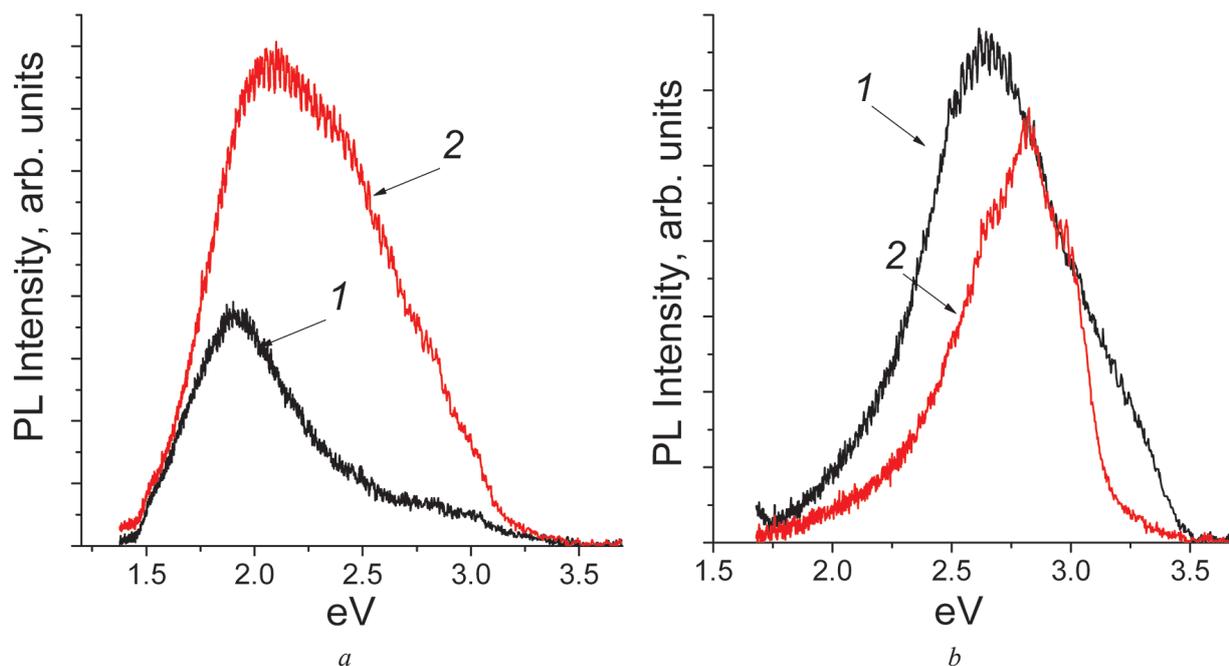


Fig. 6. PL spectra of the as-deposited (1) and annealed (2) SRN (a) and NRN (b) samples

to ~ 0.7 eV) than for the SRN (FWHM is equal to ~ 0.6 eV). It should be noted that an additional weak emission in blue spectral range is registered for the SRN structure.

Fig. 6 shows the effect of RTA on light-emitting properties of the structures. In the case of the structure with Si-rich silicon nitride as active layer (SRN sample), the annealing results in increase of PL intensity with the broadening to short wavelength range. On the contrary, the annealing of the structure with N-rich silicon nitride as active layer (NRN sample) leads to a negative effect on PL intensity. Besides, the PL spectra of NRN sample become narrower after annealing. It should be noted that blue shift of PL maximum after annealing is observed for both SRN and NRN samples.

The energy positions of the PL bands (1.9 and 2.8 eV) are quite far away from the band edges E_g calculated from the ellipsometry data (3.2 and 5.5 eV for SRN and NRN structures, respectively). This suggests that PL arises from radiative recombination via band tail and/or defect states. The blue shift of PL maximum as well as PL spectrum broadening with x increasing for SiN_x alloys are typical features of the emission via radiative recombination of within localized states at the band tail [20, 30]. Indeed, the shift of PL band to blue spectral range for the NRN sample in comparison with SRN one is caused by larger E_g . It was shown that the NRN structure possesses band tails broader than those observed for the SRN structure. It results in fact that PL spectra of NRN structures is broader in comparison with SRN ones.

Surprisingly, the intensity of PL spectra of the as-deposited SRN and NRN structures are comparable. Taking into account the band-tail origin of PL, there are two factors which influence negatively PL intensity of the samples. For NRN structures, the sub-gap excitation (E_{exc} (3.8 eV) $<$ E_g (5.5 eV)) is realized (Fig. 5, b). In this case, the absorption occurs only into the band tail-states, and weak absorption results in weak emission [3]. For SRN structures, the above-gap excitation (E_{exc} (3.8 eV) $>$ E_g (3.2 eV)) is realized (Fig. 5, b). In this case, all photons are absorbed, but photoexcited carriers thermalize toward the demarcation energy that result in increasing probability of non-radiative recombination [3]. It should be noted that an additional blue weak band in PL spectrum of SRN samples can be originated from the band-to band recombination without thermalization process involving band tail states. Thus, despite the same mechanism of luminescence for both structures the measured emission intensities are caused by different reasons. Besides, in the case of triple-layered structures $\text{SiO}_2/\text{SiN}_x/\text{SiO}_2$, the interference effects can also influence their emission intensities [31]. But, discussion of this effect is beyond the scope of our study.

The blue shifts of PL maxima observed for both structures after annealing can be explained by the widening band gap due to the band tail shrinking. In turn, elimination of band tail states is caused by “smoothing” out structural inhomogeneity after annealing. Indeed, band-tail states in the non-stoichiometric SiN_x films as well as in amorphous SiO_x films should be related to short-range disorder due to a spatial fluctuation of the elemental composition [32–33]. In the case of PECVD silicon nitride films characterized with high concentration of Si–H bonds, annealing at some regimes can cause an increase of Si dangling bonds via hydrogen effusion which results in increase of localized tail states. However, in the case of LPCVD silicon nitride films (the ones deposited at high temperature), additional annealing can result only in reduction of native defect and dangling bond density as well as degree of structural disorder. Therefore, decrease of band tail spread and band gap increase are expected after annealing in our experiment. It could explain a blue shift of PL maxima. Besides, in the case of SRN, it should increase the absorption of excited photons (E_{exc} approaches to E_g) and, as a result, the PL intensity should increase, too. In the case of NRN structure, the opening band gap should result in reduction of absorption and constriction of band tail energy range involved in the recombination process. As a consequence, the emission and PL spectra should become weaker and narrower, respectively. It is in agreement with the annealing effect on luminescence observed for the SRN and NRN samples.

Conclusions. Two triple-layered structures $\text{SiO}_2/\text{SiN}_{0.9}/\text{SiO}_2$ and $\text{SiO}_2/\text{SiN}_{1.4}/\text{SiO}_2$ prepared by CVD method emit under the excitation by laser light (3.8 eV) in blue (2.8 eV) and red (1.9 eV) spectral ranges, respectively. The spectral ellipsometry investigation reveals the larger band edge of active nitride layer in the case of $\text{SiO}_2/\text{SiN}_{1.4}/\text{SiO}_2$ (5.5 eV) in comparison with $\text{SiO}_2/\text{SiN}_{0.9}/\text{SiO}_2$ (3.2 eV). Based on the calculated Tauc slope, it can be concluded that an energy range occupied by band tail states for the N-rich active nitride layer is larger in comparison with that for the Si-rich active layer. The correlation between features of energy-band structure and light-emitting properties suggests that the origin of luminescence can be mainly attributed to the band-tail recombination. Annealing has different effects on emission of the structures with Si-rich and N-rich active layers. The PL spectra become more intensive and wider for the $\text{SiO}_2/\text{SiN}_{0.9}/\text{SiO}_2$ structure after annealing. On the other side, annealing results in the degradation of emission intensity and contraction of PL spectra of the $\text{SiO}_2/\text{SiN}_{1.4}/\text{SiO}_2$ structure. This effect is also explained by the band tail mechanism of radiative recombination.

Acknowledgments. This research was partially sponsored by the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (Grants No. F17KIG-007) and by the National Key R&D Program of China (No. 2016YFE0110700).

References

- Rodríguez-Gómez A., Moreno-Rios M., García-García R., Pérez-Martínez A.L., Reyes-Gasga J. Role of the substrate on the growth of silicon quantum dots embedded in silicon nitride thin films. *Materials Chemistry and Physics*, 2018, vol. 208, pp. 61–67. <https://doi.org/10.1016/j.matchemphys.2018.01.032>
- Shuleiko D. V., Zaboltnov S. V., Zhigunov D. M., Zelenina A. A., Kamenskih I. A., Kashkarov P. K., Photoluminescence of Amorphous and Crystalline Silicon Nanoclusters in Silicon Nitride and Oxide Superlattices. *Semiconductors*, 2017, vol. 51, no. 2, pp. 196–202. <https://doi.org/10.1134/S1063782617020208>
- Kistner J., Chen X., Wenig Y., Strunk H. P., Schubert M. B., Werner J. H. Photoluminescence from silicon nitride – no quantum effect. *Journal of Applied Physics*, 2011, vol. 110, no. 2, p. 023520 (5 p.). <https://doi.org/10.1063/1.3607975>
- Hiller D., Zelenina A., Gutsch S., Dyakov S. A., Lopez-Vidrier L., Estrade S., Peiro F., Garrido B., Valenta J., Korinek M., Trojanek F., Maly P., Schnabel M., Weiss C., Janz S., Zacharias M. Absence of quantum confinement effects in the photoluminescence of Si_3N_4 -embedded Si nanocrystals. *Journal of Applied Physics*, 2014, vol. 115, no. 20, p. 204301 (9 p.). <https://doi.org/10.1063/1.4878699>
- Parkhomenko I., Vlasukova L., Komarov F., Milchanin O., Makhavikou M., Mudryi A., Zhivulko V., Žuk J., Kopyciński P., Murzalinov D. Origin of visible photoluminescence from Si-rich and N-rich silicon nitride films. *Thin Solid Films*, 2017, vol. 626, pp.70–75. <https://doi.org/10.1016/j.tsf.2017.02.027>
- Kanicki J., Warren W. L. Defects in amorphous hydrogenated silicon nitride films. *Journal of Non-Crystalline Solids*, 1993, vol. 164-166, pp. 1055–1060. [https://doi.org/10.1016/0022-3093\(93\)91180-B](https://doi.org/10.1016/0022-3093(93)91180-B)
- Singh S. P., Srivastava P. Recent progress in the understanding of Si-nanostructures formation in $a\text{-SiN}_x\text{:H}$ thin film for Si-based optoelectronic devices. *Solid State Phenomena*, 2011, vol. 171, pp. 1–17. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/SSP.171.1>
- Torchynska T. V., Casas Espinola J. L., Vergara Hernandez E., Khomenkova L., Delachat F., Slaoui A. Effect of the stoichiometry of Si-rich silicon nitride thin films on their photoluminescence and structural properties. *Thin Solid Films*, 2015, vol. 581, pp. 65–69. <https://doi.org/10.1016/j.tsf.2014.11.070>

9. Mercaldo L. V., Esposito E. M., Veneri P. D., Rezgui B., Sibai A., Bremond G. Photoluminescence properties of partially phase separated silicon nitride films. *Journal of Applied Physics*, 2011, vol. 109, no. 9, p. 093512 (5 p.). <https://doi.org/10.1063/1.3575172>
10. Wang M., Xie M., Ferraioli L., Yuan Z., Li D., Yang D., Pavese L. Light emission properties and mechanism of low-temperature prepared amorphous SiN_x films. I. Room-temperature band tail states photoluminescence. *Journal of Applied Physics*, 2008, vol. 104, no. 8, p. 083504 (4 p.). <https://doi.org/10.1063/1.2996292>
11. Xie M., Li D., Wang F., Yang D. Luminescence properties of silicon-rich silicon nitride films and light emitting devices. *ECS Transactions*, 2011, vol. 35, no. 18, pp. 3–19. <https://doi.org/10.1149/1.3647900>
12. Koutsourelis M., Michalas L., Gantis A., Papaioannou G. A study of deposition conditions on charging properties of PECVD silicon nitride films for MEMS capacitive switches. *Microelectronics Reliability*, 2014, vol. 54, no. 9–10, pp. 2159–2163. <https://doi.org/10.1016/j.microrel.2014.08.002>
13. Necas D., Perina V., Franta D., Ohlidal I., Zemek J. Optical characterization of non-stoichiometric silicon nitride films. *Physical Status Solidi C*, 2008, vol. 5, no. 5, pp. 1320–1323. <https://doi.org/10.1002/pssc.200777767>
14. Maeda K., Umezumi I. Atomic micro structure and electronic properties of $a\text{-SiN}_x\text{:H}$ deposited by radio frequency glow discharge. *Journal of Applied Physics*, 1991, vol. 70, no. 5, pp. 2745–2754. <https://doi.org/10.1063/1.350352>
15. Banerji N., Serra J., Chiussi S., Leo A. B., Pe Árez-Amor M. Photo-induced deposition and characterization of variable bandgap $a\text{-SiN}_x\text{:H}$ alloy films. *Applied Surface Science*, 2000, vol. 168, no. 1–4, pp. 52–56. [https://doi.org/10.1016/S0169-4332\(00\)00583-3](https://doi.org/10.1016/S0169-4332(00)00583-3)
16. Debieu O., Nalini R. P., Cardin J., Portier X., Perriere J., Gourbilleau F. Structural and optical characterization of pure Si-rich nitride thin films. *Nanoscale Research Letters*, 2013, vol. 8, no. 1, p. 31. <https://doi.org/10.1186/1556-276X-8-31>
17. Wang M., Li D., Yuan Z., Yang D., Quen D. Photoluminescence of Si-rich silicon nitride defect-related states and silicon nanoclusters. *Applied Physics Letters*, 2007, vol. 90, no. 13, p. 131903 (3 p.). <https://doi.org/10.1063/1.2717014>
18. Wang X., Liu Y., Chen D., Dong L., Chen C. Photoluminescence of Si-rich SiN_x films deposited by LPCVD under different conditions. *International Journal of Modern Physics B*, 2007, vol. 21, no. 26, pp. 4583–4592. <https://doi.org/10.1142/S0217979207037995>
19. Volodin V. A., Bugaev K. O., Gutakovskiy A. K., Fedina L. I., Neklyudova M. A., Latyshev A. V., Misiuk A. Evolution of silicon nanoclusters and hydrogen in $\text{SiN}_x\text{:H}$ films: Influence of high hydrostatic pressure under annealing. *Thin Solid Films*, 2012, vol. 520, no. 19, pp. 6207–6214. <https://doi.org/10.1016/j.tsf.2012.05.019>
20. Jackson W. A., Searly T. M., Austin I. G., Gibson R. A. Photoluminescence excitation studies of $a\text{-SiN}_x\text{:H}$ alloys. *Journal of Non-Crystalline Solids*, 1986, vol. 77–78, pp. 909–912. [https://doi.org/10.1016/0022-3093\(85\)90808-7](https://doi.org/10.1016/0022-3093(85)90808-7)
21. Mohammed S., Nimmo M. T., Malko A. V., Hinkle C. L. Chemical bonding and defect states of LPCVD grown silicon-rich Si_3N_4 for quantum dot applications. *Journal of Vacuum Science & Technology A: Vacuum, Surfaces, and Films*, 2014, vol. 32, no. 2, p. 021507 (7 p.). <https://doi.org/10.1116/1.4861338>
22. Krüchel C. J., Fülöp A., Ye Z., Andrekson P. A., Torres-Company V. Optical bandgap engineering in nonlinear silicon nitride waveguides. *Optics Express*, 2017, vol. 25, no. 13, pp. 15370–15380. <https://doi.org/10.1364/OE.25.015370>
23. Charifi H., Slaoui A., Stoquert J. P., Chaib H., Hannour A. Opto-structural properties of silicon nitride thin films deposited by ECR-PECVD. *World Journal of Condensed Matter Physics*, 2016, vol. 6, no. 1, pp. 7–16. <https://doi.org/10.4236/wjcmp.2016.61002>
24. Smietana M., Bock W. J., Szmidt J. Evolution of optical properties with deposition time of silicon nitride and diamond-like carbon films deposited by radio-frequency plasma-enhanced chemical vapor deposition method. *Thin Solid Films*, 2011, vol. 519, no. 19, pp. 6339–6343. <https://doi.org/10.1016/j.tsf.2011.04.032>
25. Joshi B. C., Eranna G., Runthala D. P., Dixit B. B., Wadhawan O. P., Vyas P. D. LPCVD and PECVD silicon nitride for microelectronics technology. *Indian Journal of Engineering and Materials Sciences*, 2000, vol. 7, pp. 303–309. URL <http://hdl.handle.net/123456789/24418>
26. Robertson J. Defects and hydrogen in amorphous silicon nitride. *Philosophical Magazine B*, 1994, vol. 69, no. 2, pp. 307–326. <https://doi.org/10.1080/01418639408240111>
27. Goirgis F., Vinegoni C., Pavese L. Optical absorption and photoluminescence properties of $a\text{-Si}_{1-x}\text{N}_x\text{:H}$ films deposited by plasma-enhanced CVD. *Physical Review B*, 2000, vol. 61, no. 7, pp. 4693–4698. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.61.4693>
28. Austin I. G., Jackson W. A., Searle T. M., Bhat P. K., Gibson R. A. Photoluminescence properties of $a\text{-SiN}_x\text{:H}$ alloys. *Philosophical Magazine B*, 1985, vol. 52, no. 3, pp. 271–288. <https://doi.org/10.1080/13642818508240600>
29. Hasegawa S., Matuura M., Kurata Y. Amorphous $\text{SiN}_x\text{:H}$ dielectrics with low density of defects, *Applied Physics Letters*, 1986, vol. 49, no. 19, pp. 1272–1274. <https://doi.org/10.1063/1.97383>
30. Kato H., Kashio N., Ohki Y., Seol K. S., Noma T. Band-tail photoluminescence in hydrogenated amorphous silicon oxynitride and silicon nitride films. *Journal of Applied Physics*, 2003, vol. 93, no. 1, pp. 239–244. <https://doi.org/10.1063/1.1529292>
31. Dyakov S. A., Zhigunov D. M., Hartel A., Zacharias M., Perova T. S., Timoshenko V. Yu. Enhancement of photoluminescence signal from ultrathin layers with silicon nanocrystals. *Applied Physics Letters*, 2012, vol. 100, no. 6, p. 061908 (4 p.). <https://doi.org/10.1063/1.3682537>
32. Gritsenko V. A. Atomic structure of the amorphous nonstoichiometric silicon oxides and nitrides. *Physics-Uspekhi*, 2008, vol. 51, no. 7, pp. 699–708. <https://doi.org/10.3367/UFNr.0178.200807c.0727>
33. Gritsenko V. A., Novikov Yu. N., Chin A. Short-range order and charge transport in SiO_x : experiment and numerical simulation. *Technical Physics Letters*, 2018, vol. 44, no. 6, pp. 541–544. <https://doi.org/10.1134/S1063785018060196>

Information about the authors

Ivan A. Romanov – Postgraduate Student of the Department of Physical Electronics and Nanotechnology, Junior Researcher in the Materials and Device Structures at the Micro- and Nanoelectronics Laboratory, Belarusian State University (1, Kurchatov Str., 220108, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: romivan@bsu.by

Irina N. Parkhomenko – Ph. D. (Physics and Mathematics), Senior Researcher in the Materials and Device Structures at the Micro- and Nanoelectronics Laboratory, Belarusian State University (5, Kurchatov Str., 220108, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: parhomir@yandex.by

Liudmila A. Vlasukova – Ph. D. (Physics and Mathematics), Head of the Materials and Device Structures at the Micro- and Nanoelectronics Laboratory, Belarusian State University (5, Kurchatov Str., 220108, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: vlasukova@bsu.by

Natalia S. Kovalchuk – Ph. D. (Engineering), Deputy Chief Engineer, Joint Stock Company “Integral” (121 A, Kazinets Str., 220108, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: 7033696@mail.ru

Fadei F. Komarov – Corresponding Member, Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Elionics Laboratory, A. N. Sevchenko Institute of Applied Physical Problems of the Belarusian State University (7, Kurchatov Str., 220108, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: komarofv@bsu.by

Oleg V. Milchanin – Senior Researcher of the Elionics Laboratory, A. N. Sevchenko Institute of Applied Physical Problems of the Belarusian State University (7, Kurchatov Str., 220108, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: milchanin@tut.by

Maxim A. Makhavikou – Junior Researcher of the Elionics Laboratory, A. N. Sevchenko Institute of Applied Physical Problems of the Belarusian State University (7, Kurchatov Str., 220108, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: m.mohovikov@gmail.com

Alexander V. Mudryi – Ph. D. (Physics and Mathematics), Chief Researcher, Scientific and Practical Materials Research Center of the National Academy of Sciences of Belarus (19, Brovka Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: mudryi@ifttp.bas-net.by.

Vadim D. Zhivulko – Junior Researcher, Scientific and Practical Materials Research Center of the National Academy of Sciences of Belarus (19, Brovka Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: vad.zhiv@gmail.com.

Hong-Liang Lu – Ph. D. (Physics), Associate Professor, Department of Microelectronics at the Fudan University (220, Handan Rd., 200433, Shanghai, China). E-mail: honglianglu@fudan.edu.cn

Информация об авторах

Романов Иван Александрович – аспирант факультета радиофизики и компьютерных технологий Белорусского государственного университета, младший научный сотрудник НИЛ «Материалов и приборных структур микро- и нанoeлектроники», Белорусский государственный университет (ул. Курчатова, 1, 220108, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: romivan@bsu.by

Пархоменко Ирина Николаевна – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник НИЛ «Материалов и приборных структур микро- и нанoeлектроники», Белорусский государственный университет (ул. Курчатова, 5, 220108, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: parhomir@yandex.by

Власукова Людмила Александровна – кандидат физико-математических наук, заведующий НИЛ «Материалов и приборных структур микро- и нанoeлектроники», Белорусский государственный университет (ул. Курчатова, 5, 220108, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: vlasukova@bsu.by

Ковальчук Наталья Станиславовна – кандидат технических наук, заместитель главного инженера ОАО «Интеграл» (ул. Казинца, 121 А, 220108, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: 7033696@mail.ru

Комаров Фадеев Фадеевич – член-корреспондент, доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией элионики, Институт прикладных физических проблем им. А. Н. Севченко Белорусского государственного университета (ул. Курчатова, 7, 220108, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: komarofv@bsu.by

Мильчанин Олег Владимирович – старший научный сотрудник лаборатории элионики, Институт прикладных физических проблем им. А. Н. Севченко Белорусского государственного университета (ул. Курчатова, 7, 220108, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: milchanin@tut.by

Моховиков Максим Александрович – младший научный сотрудник лаборатории элионики, Институт прикладных физических проблем им. А. Н. Севченко Белорусского государственного университета (ул. Курчатова, 7, 220108, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: m.mohovikov@gmail.com

Мудрый Александр Викторович – кандидат физико-математических наук, главный научный сотрудник, Научно-практический центр Национальной академии наук Беларуси по материаловедению (ул. П. Бровки, 19, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: mudryi@ifttp.bas-net.by

Живулько Вадим Дмитриевич – младший научный сотрудник, Научно-практический центр Национальной академии наук Беларуси по материаловедению (ул. П. Бровки, 19, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: vad.zhiv@gmail.com

Хонг-Лянгу Лу – доктор философии (физика), доцент, Школа микроэлектроники Фуданского университета (220, Handan Rd., 200433, Shanghai, China). E-mail: honglianglu@fudan.edu.cn

ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 539.216.2
<https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-3-369-378>

Поступила в редакцию 26.06.2018
Received 26.06.2018

И. М. Климович¹, Ф. Ф. Комаров^{1,2}, М. В. Шолух¹, В. А. Зайков¹, Л. В. Баран¹

¹Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
²Институт прикладных физических проблем им. А. Н. Севченко
Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь

ВЛИЯНИЕ ЭЛЕМЕНТНОГО СОСТАВА И ТЕМПЕРАТУРЫ ОСАЖДЕНИЯ ПОКРЫТИЙ Ti-Al-C-N НА ИХ МОРФОЛОГИЮ И ЖИЗНЕСПОСОБНОСТЬ КЛЕТОК НА ТАКИХ ПОКРЫТИЯХ

Аннотация. Наноструктурные покрытия Ti-Al-C-N формировались методом реактивного магнетронного осаждения из мозаичных мишеней с различным соотношением Al/Ti при температурах подложки 220, 340 и 440 °С. Методами атомно-силовой и растровой электронной микроскопии обнаружено, что варьирование элементного состава приводит к изменению морфологии покрытий Ti-Al-C-N: при соотношении Al/Ti ~ 0,39 пленки имеют столбчатую зернистую структуру без видимых дефектов и низкую шероховатость S_q (3,30–5,86 нм); при Al/Ti ~ 0,96 пленки показали столбчатую пористую структуру и более высокую шероховатость S_q (8,83–11,07 нм); при Al/Ti ~ 1,71 имели мелкозернистую структуру и наименьшие значения шероховатости S_q (0,48–1,74 нм). Нагрев подложки от 220 до 440 °С не оказывал значительного влияния на элементный состав Ti-Al-C-N пленок, однако воздействовал на скорость осаждения, шероховатость поверхности и микроструктуру покрытий. По результатам МТТ-теста прямой зависимости между жизнеспособностью фибробластов, шероховатостью покрытий и их элементным составом не обнаружено, однако жизнеспособность клеток и их способность к пролиферации при контакте с поверхностью покрытий Ti-Al-C-N сохранялась.

Ключевые слова: наноструктурные покрытия, Ti-Al-C-N, морфология, МТТ-тест

Для цитирования. Влияние элементного состава и температуры осаждения покрытий Ti-Al-C-N на их морфологию и жизнеспособность клеток на таких покрытиях / И. М. Климович [и др.] // Вест. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2018. – Т. 54, № 3. – С. 369–378. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-3-369-378>

I. M. Klimovich¹, F. F. Komarov^{1,2}, M. V. Sholukh¹, V. A. Zaikov¹, L. V. Baran¹

¹Belarusian State University, Minsk, Belarus
²A. N. Sevchenko Institute of Applied Physical Problems of the Belarusian State University, Minsk, Belarus

EFFECT OF THE ELEMENTAL COMPOSITION AND THE DEPOSITION TEMPERATURE OF Ti-Al-C-N COATINGS ON THE MORPHOLOGY AND VIABILITY OF CELLS ON SUCH COATINGS

Abstract. Nanostructural Ti-Al-C-N coatings were produced by reactive magnetron sputtering at substrate temperatures of 220, 340 and 440 °C using mosaic targets with different Al/Ti ratios. Using atomic-force and scanning electron microscopy, it was found that the variation of the elemental composition leads to a change in the morphology of Ti-Al-C-N coatings: at an Al/Ti ratio of 0.39, the films have a mixed columnar-granular structure with no visible defects and a low roughness (3.30–5.86 nm); at an Al/Ti ratio of ~ 0.96, the films show a porous columnar structure with a higher roughness (8.83–11.07 nm) and for an Al/Ti ratio of ~ 1.71, the films have a fine-grained structure and the smallest roughness values (0.48–1.74 nm). Substrate heating from 220 to 440 °C did not significantly affect the elemental composition of Ti-Al-C-N films, but it affected the deposition rate, surface roughness, and the microstructure of the coatings. MTT-test results showed no relationship between the fibroblasts viability, the coating roughness and the coating elemental composition. However, the cells viability and their ability to proliferate on the Ti-Al-C-N coatings surface were preserved.

Keywords: nanostructural coatings, Ti-Al-C-N, morphology, MTT-test

For citation. Klimovich I. M., Komarov F. F., Sholukh M. V., Zaikov V. A., Baran L. V. Effect of the elemental composition and the deposition temperature of Ti-Al-C-N coatings on the morphology and viability of cells on such coatings. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2018, vol. 54, no. 3, pp. 369–378. <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-3-369-378>

Введение. Нанесение покрытий считается одним из наиболее эффективных способов улучшения поверхностных свойств материалов [1]. Области практического применения наноструктурных покрытий весьма разнообразны – они используются как антифрикционные, коррозионно-

стойкие, термостойкие, сверхтвердые, селективно поглощающие или отражающие, декоративные и другие покрытия. В области медицины наноструктурные пленки находят применение в качестве покрытий для имплантатов [2, 3].

К медицинским материалам предъявляют особые требования. Они должны сохранять свои функциональные свойства в течение всего периода эксплуатации и не должны быть канцерогенными или провоцировать развитие инфекций, вызывать воспалительные реакции и оказывать токсическое и аллергическое действие на организм. Материал для имплантатов необходимо выбирать, принимая во внимание длительность пребывания инородного тела в организме, а также окружающую среду (кожа, слизистая оболочка, кровь и т. д.). Обязательные и рекомендуемые испытания материалов на биосовместимость проводят с учетом условий эксплуатации имплантатов в соответствии с международным сертификатом ISO 10993 [4].

Нанесение на поверхность имплантатов наноструктурных покрытий на основе титана – один из перспективных вариантов улучшения их биосовместимости и функциональности [2, 5, 6]. Преимуществами пленок на основе титана перед стандартными материалами для имплантатов являются повышенные механические характеристики, длительная стабильность свойств в условиях коррозионной среды, а также хорошая биологическая совместимость с клетками соединительной ткани.

Материалы и методы исследований. Подготовка подложек и осаждение покрытий. Перед напылением покрытий производилась ионная очистка поверхности подложек с помощью ионного источника «Радикал». Ионная очистка позволяет удалить с поверхности адсорбированный слой и частично распылить подложку, что существенно улучшает адгезию осаждаемого покрытия к материалу подложки. Режим работы ионного источника задавался следующими параметрами: давление аргона $P = 6,0 \cdot 10^{-2}$ Па; ток разряда $I = 20$ мА; напряжение разряда $U = 2,4$ кВ; время очистки $t = 5$ мин. Выбор параметров разряда и времени очистки обусловлен стабильным горением разряда и высокой скоростью очистки.

При осаждении покрытий применялись газы: аргон Ar, азот N_2 и ацетилен C_2H_2 . Для контроля за расходом азота использовалась зависимость характеристик спектра оптического излучения разряда от содержания азота в вакуумной камере. Количество углерода в составе покрытий контролировалось соотношением парциальных давлений реактивных газов N_2/C_2H_2 , которое задавалось в пропорции 1/1.

В настоящей работе применялся одноканальный алгоритм контроля расхода газов, который сводится к регистрации и поддержанию на заданном уровне интенсивности одного спектрального элемента. В качестве параметра контроля была выбрана линия титана TiI 506,5 нм.

Используемая система управления расходами газов позволяет поддерживать постоянное соотношение потоков распыленных атомов металла мишени и потока реактивного газа на подложку при постоянных рабочем давлении и параметрах на источнике питания. Такой способ управления и контроля процессом реактивного магнетронного осаждения дает возможность стационарно поддерживать его неравновесное состояние, обеспечить равномерность распределения элементов по глубине и повысить воспроизводимость формирования покрытий по составу и толщине [7, 8].

Распыление проводили с использованием мозаичных мишеней, показанных на рис. 1. Основами мишеней являлся титан марки BT1-00 (ГОСТ 19807-91) диаметром 110 мм. Цилиндрические вставки были сделаны из алюминиевого сплава АК1.0, изготовленного в соответствии с ТУ ВУ 100185302.098-2015, и расположены по среднему диаметру зоны эрозии (66 мм). Алюминиевый сплав АК1.0 содержит примеси Si ($1,0 \pm 0,1$ %), Cu (<0,005 %), Ti (<0,005 %), Mg (<0,005 %), Mn (<0,005 %), Fe (<0,005 %) и Na (<0,005 %).

Для осаждения покрытий Ti-Al-C-N были выбраны следующие режимы реактивного магнетронного нанесения: давление $P = 7,0 \cdot 10^{-2}$ Па; горение магнетронного разряда в режиме DC (Direct Current); напряжение на источнике питания $U = 370-470$ В (в зависимости от состава мишени); ток разряда $I = 1,5$ А; потенциал смещения на подложке $U_{см} = -90$ В. Для определения влияния температуры подложки T на структуру и свойства покрытий выбиралось три значения T :

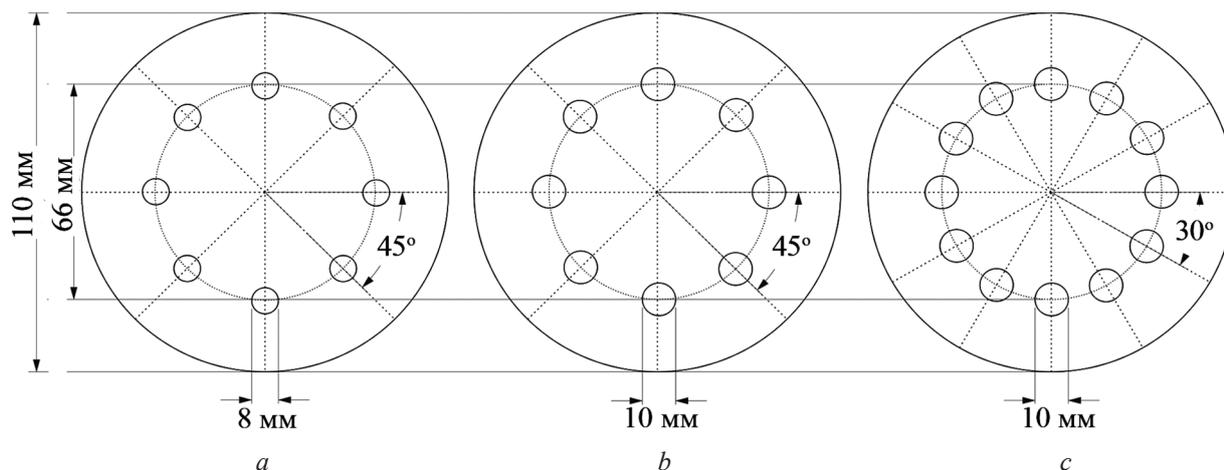


Рис. 1. Мозаичные мишени, используемые при осаждении покрытий Ti-Al-C-N: мишень № 1 с низким содержанием Al (a), мишень № 2 (b) и мишень № 3 с высоким содержанием Al (c)

Fig. 1. Mosaic targets used in deposition of Ti-Al-C-N films: target No. 1 with a low aluminum content (a), target No. 2 (b) and target No. 3 with a high aluminum content (c)

220, 340 и 440 °С. Время напыления Ti-Al-C-N покрытий равнялось 20 мин. Подслои TiAl и TiAlN осаждали для улучшения адгезии пленок к подложке в течение 1 мин каждый.

Исследование структуры и морфологии покрытий. Морфологию и микроструктуру исследуемых покрытий на кремниевых подложках изучали методом растровой электронной микроскопии (РЭМ) с помощью электронного микроскопа Hitachi S-4800 (Япония). Микроскоп оснащен датчиком рентгеновского излучения (энергодисперсионным спектрометром), который позволяет определять элементный состав исследуемых покрытий методом энергодисперсионной рентгеновской спектроскопии (ЭДРС). Толщину покрытий измеряли с помощью РЭМ на сколах образцов.

Морфологию поверхности пленок Ti-Al-C-N на кремниевых подложках исследовали методом атомно-силовой микроскопии (АСМ) с помощью микроскопа Solver P47 Pro (Россия) в полуконтактном режиме. Перед проведением исследований АСМ проводили очистку поверхности покрытий от масел и органических загрязнений путем их кипячения в диметилформамиде в течение 5 мин. Рельеф поверхности характеризовали величинами среднеарифметического отклонения S_a и среднеквадратичным параметром шероховатости S_q , которые рассчитывали из площади $5 \times 5 \text{ мкм}^2$ на каждом образце.

Исследование приживаемости фибробластов. Адгезия фибробластов к поверхности имплантата на ранних стадиях роста и размножения является решающим фактором для выживания клеток *in vitro* [9]. Для определения эффективности протекания процессов биосовместимости клеток с поверхностью имплантатов, как правило, используют МТТ-тест, позволяющий оценить пролиферацию клеток (распространение и размножение) и уровень их метаболической активности [10].

В связи с этим жизнеспособность клеток на покрытиях Ti-Al-C-N оценивали *in vitro* с помощью МТТ-теста. Стандартный МТТ-тест основан на цветной реакции, происходящей только в живых метаболически активных клетках, митохондрии которых восстанавливают тетразолиновую соль МТТ (3-(4,5-диметилтиазол-2-ил)-2,5-дифенил-тетразолиум бромид) желтого цвета в темно-синий формазан, нерастворимый в воде, но растворимый в диметилсульфоксиде и других органических растворителях [10].

Расщепление МТТ в метаболически активных клетках подчиняется закону Михаэлиса по кинетике первого порядка – светопоглощение прямо пропорционально зависит от количества метаболизирующих клеток в пробе.

Для проведения теста подготавливали подложки из пластин титана и покрытий Ti-Al-C-N на кремнии в виде плоских квадратов размерами $4,5 \times 4,5 \text{ мм}^2$. Для набора статистических данных в эксперименте использовалось 4 образца каждого покрытия Ti-Al-C-N.

Пленки на подложках из монокристаллического кремния выбирали с целью избежать влияния шероховатости подложки на прикрепляемость клеток. Титановые подложки использовали для сравнения покрытий со стандартным материалом имплантатов.

Каждый образец помещали в лунку стерильного 24-луночного планшета, после чего туда высевалось по 0,5 мл клеточной суспензии с концентрацией 40 000 клеток/мл. В эксперименте были использованы клетки фибробластов. Их инкубировали в течение 20 ч в стандартных условиях культивирования: температура 37 °С, атмосфера с содержанием 5 % CO₂, питательная среда DMEM (Dulbeccos Modified Eagle Medium) с добавлением 10 % эмбриональной телячьей сыворотки.

Затем образцы с прикрепленными на них клетками переносили в лунки 96-луночного стерильного планшета, в которые предварительно было внесено по 120 мкл питательной среды с добавлением раствора соли МТТ до конечной концентрации 0,5 мкг/мл. Планшет помещался в инкубатор для дальнейшего культивирования еще на 4 ч, в течение которых осуществлялось поглощение живыми клетками соли МТТ и ее превращение в формазан.

Далее из каждой лунки полностью отбирали культуральную среду, а в лунки с образцами вносили диметилсульфоксид, растворяющий клеточные мембраны и кристаллы формазана. Планшет выдерживали в темноте 15 мин до полного растворения формазана.

Оптическую плотность раствора для каждого образца покрытий Ti-Al-C-N измеряли при длине волны 492 нм на планшетном фотометре Multiscan Ascent фирмы Thermo Lab Systems (Финляндия).

Жизнеспособность клеток на покрытиях J_k оценивали относительно титановой подложки без покрытия по формуле

$$J_k = (OP_э - OP_{ок}) / (OP_T - OP_{ок}), \quad (1)$$

где $OP_э$ – оптическая плотность в пробах с экспериментальными образцами, $OP_{ок}$ – оптическая плотность раствора в лунках без клеток (отрицательный контроль), OP_T – оптическая плотность в контрольных пробах с титаном.

Результаты и их обсуждение. В таблице представлены толщины, параметры шероховатости поверхностей (S_a и S_q), элементные составы и соотношения между элементами Al/Ti и (Al+Ti)/(C+N) для покрытий Ti-Al-C-N, сформированных при различных температурах подложки с использованием мишеней № 1, № 2 и № 3 (см. рис. 1). При этом следует учитывать, что точность определения атомной концентрации методом ЭДРС выше для более тяжелых элементов с большим атомным номером, поэтому концентрация металлов Al и Ti была определена с большей точностью, чем концентрация C и N [11].

Толщина h , средняя S_a и среднеквадратичная S_q шероховатости поверхностей, элементный состав и соотношение между атомными концентрациями элементов Al/Ti и (Al + Ti)/(C + N) покрытий Ti-Al-C-N

The thickness h , the average S_a and the root-mean-square surface roughness S_q , the elemental composition and the ratio of the atomic concentrations Al/Ti and (Al + Ti)/(C + N) of Ti-Al-C-N coatings

№ образца	$T, ^\circ\text{C}$	$h, \text{мкм}$	$S_a, \text{нм}$	$S_q, \text{нм}$	Элементный состав, ат.%						Al/Ti	(Al+Ti)/(C+N)
					Ti	Al	C	N	O	Ar, Si, Cu и др.		
<i>Мишень № 1</i>												
1.1	220	1,87	1,04	3,30	47,39	17,94	10,42	18,56	4,02	1,67	0,38	2,25
1.2	340	1,25	2,40	5,86	44,43	16,55	7,31	22,62	4,38	4,71	0,37	2,04
1.3	440	1,11	2,15	4,35	34,33	14,84	14,67	27,11	2,85	6,20	0,43	1,18
<i>Мишень № 2</i>												
2.1	220	1,16	8,88	11,07	19,72	19,10	18,28	30,25	6,41	6,24	0,97	0,80
2.2	340	1,00	7,01	8,83	20,00	19,30	17,39	30,30	6,07	6,94	0,97	0,82
2.3	440	1,00	8,55	10,67	20,20	18,78	20,95	26,13	6,68	7,26	0,93	0,83
<i>Мишень № 3</i>												
3.1	220	1,42	1,38	1,74	19,40	32,23	12,78	26,62	2,62	6,35	1,66	1,31
3.2	340	1,53	0,31	0,55	20,54	35,76	10,31	27,58	2,48	3,33	1,74	1,49
3.3	440	1,59	0,22	0,48	18,82	32,80	12,64	29,24	2,38	4,12	1,74	1,23

В составе пленок Ti-Al-C-N присутствуют Mg, Si, Cu, Mn и Fe – примесные элементы алюминиевого сплава АК1.0, который использовался в качестве алюминиевых вставок в мишенях. В состав всех сформированных покрытий входит кислород, который может негативно влиять на микроструктуру и механические характеристики покрытий [12]. Также во всех исследуемых образцах пленок зафиксировано наличие Ag, что может быть связано с имплантацией ионов аргона в растущую пленку [13].

Соотношение между концентрациями элементов Al/Ti для пленок, сформированных с использованием разных мишеней, отличается и составляет в среднем ~0,39 для покрытий, изготовленных из мишени № 1, ~0,96 для покрытий, полученных из мишени № 2, и ~1,71 для пленок, сформированных из мишени № 3. Соотношение между металлическими и неметаллическими компонентами в покрытиях (Al+Ti)/(C+N) также изменялось в зависимости от используемой мишени.

Заметного влияния нагрева подложки во время осаждения от $T = 220$ °C до $T = 440$ °C на элементный состав пленок Ti-Al-C-N не обнаружено. Следует отметить, что в литературе вопрос о влиянии температуры подложки на элементный состав покрытий Ti-Al-C-N, формируемых методом магнетронного осаждения, не рассматривался. На более простых системах Ti-Al-N зависимости состава от температуры подложки при магнетронном распылении не наблюдалось [14].

Толщина, а следовательно, и скорость осаждения покрытий отличалась при использовании разных мишеней и с повышением температуры нагрева подложек. С ростом T от 220 до 440 °C при формировании пленок из мишеней № 1 и № 2 наблюдается уменьшение скорости роста пленки от 85 до 51 нм/мин и от 53 до 46 нм/мин соответственно. При использовании мишени № 3 с наибольшим содержанием Al с увеличением нагрева подложки от 220 до 440 °C происходит повышение скорости осаждения с 64 до 72 нм/мин. Изменение скорости роста пленки при реактивном магнетронном распылении часто связывают с «отравлением» мишени либо с изменением парциального давления реактивного газа [15].

На рис. 2, *a* изображены результаты АСМ-исследований для пленок Ti-Al-C-N, сформированных из различных мишеней при варьировании температуры нагрева подложки. Результаты РЭМ сколов покрытий Ti-Al-C-N представлены на рис. 2, *b*.

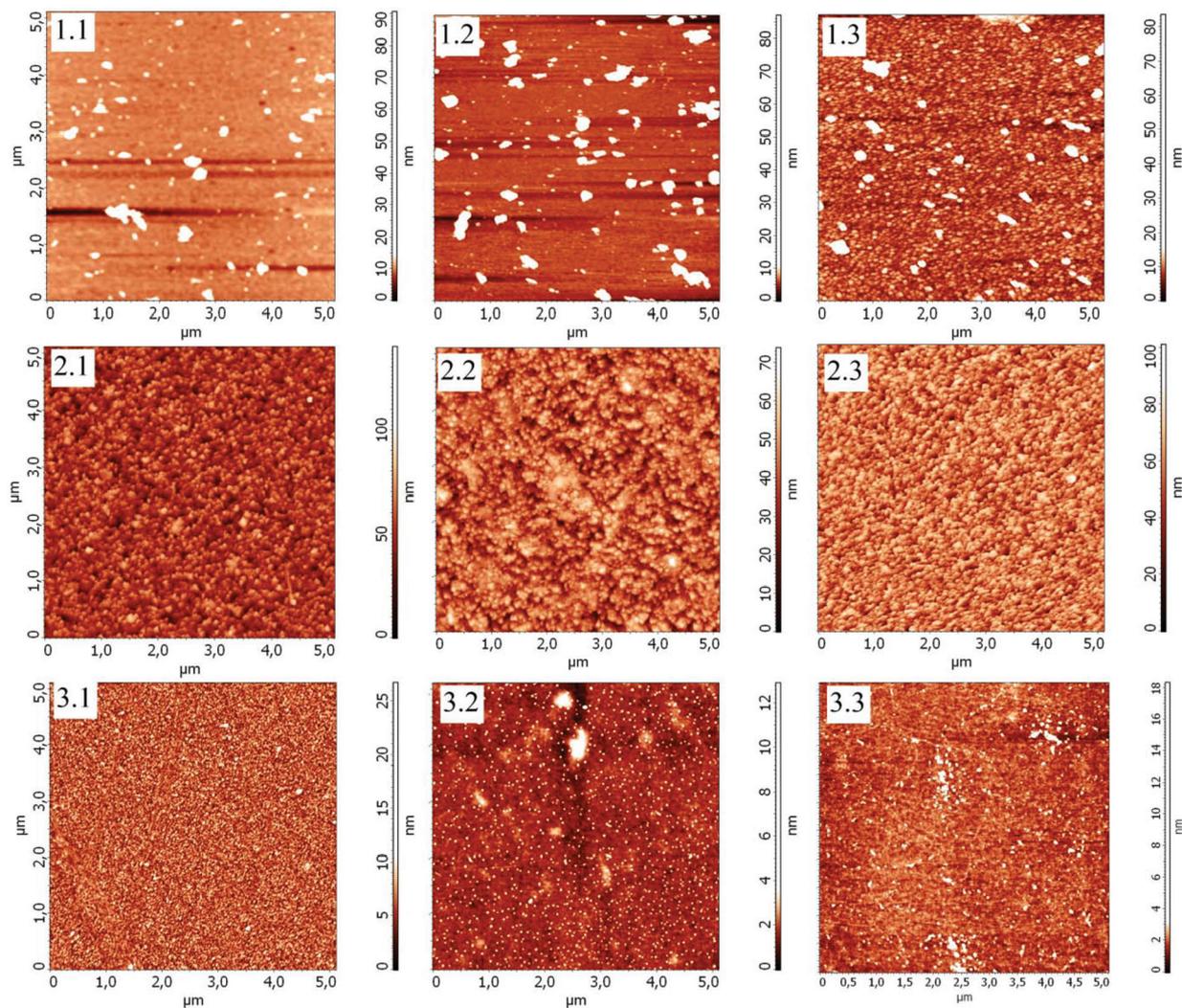
Изучение топографии поверхности образцов покрытий (см. рис. 2, *a*, таблицу), сформированных из мишеней с разным соотношением Al/Ti, показало, что наименьшие значения шероховатостей S_a (0,22–1,38 нм) и S_q (0,48–1,74 нм) соответствуют пленкам, изготовленным из мишени № 3 с наибольшей концентрацией алюминия в составе. Наибольшие значения S_a (7,01–8,88 нм) и S_q (8,83–11,07 нм) относились к пленкам, сформированным из мишени № 2. Заметной корреляции между температурой нагрева подложек во время осаждения и шероховатостью образцов покрытий 1.1–1.3 и 2.1–2.3 не наблюдалось. Для образцов 3.1–3.3 можно отметить снижение шероховатости S_a от 1,38 до 0,22 нм и S_q от 1,74 до 0,48 нм при повышении температуры нагрева подложки от 220 до 440 °C.

На сколах образцов 1.1, 1.2, 3.1 и 3.2 (рис. 2, *b*) видны следы излома покрытий. Тип структуры для покрытий Ti-Al-C-N различного элементного состава отличается: для образцов 1.1–1.3 с наименьшей концентрацией алюминия в составе характерен смешанный зернисто-столбчатый тип микроструктуры, для образцов 2.1–2.3 – столбчатый и для 3.1–3.3 с наибольшей концентрацией алюминия – мелкозернистый.

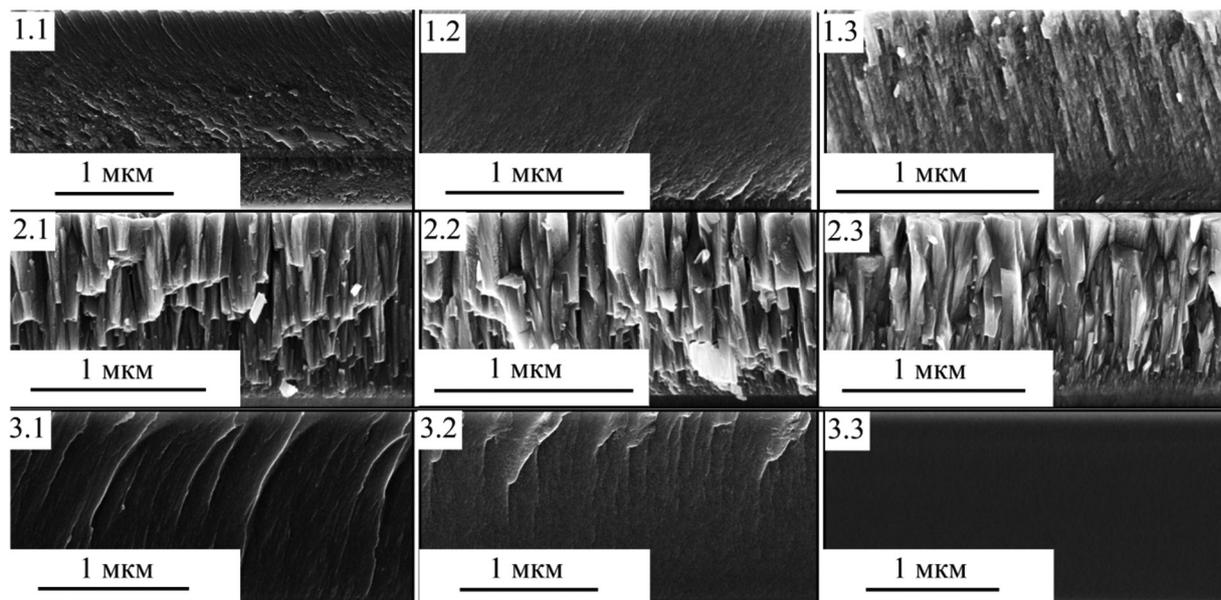
Пленки 1.1–1.3 и 3.1–3.3 являются сплошными, без видимых трещин и пустот между элементами структуры. На образцах покрытий 2.1–2.3 между столбцами можно наблюдать пустоты – это означает низкую плотность и плохое качество сформированных покрытий.

Температура подложки, как и элементный состав, оказывает существенное влияние на развитие микроструктуры Ti-Al-C-N покрытий. Известно, например, что рост T способствует повышению уровня напряжений в пленках [16], тем самым улучшая их механические характеристики.

Результаты МТТ-теста на покрытиях Ti-Al-C-N приведены на рис. 3. В качестве контроля за 100 % принималась жизнеспособность фибробластов на подложках из титана – материала, наиболее часто используемого в качестве имплантатов в медицинской практике [17].



a



b

Рис. 2. Морфология поверхности (*a*) и микроструктура (*b*) покрытий Ti-Al-C-N
 Fig. 2. Surface morphology (*a*) and microstructure (*b*) of Ti-Al-C-N coatings

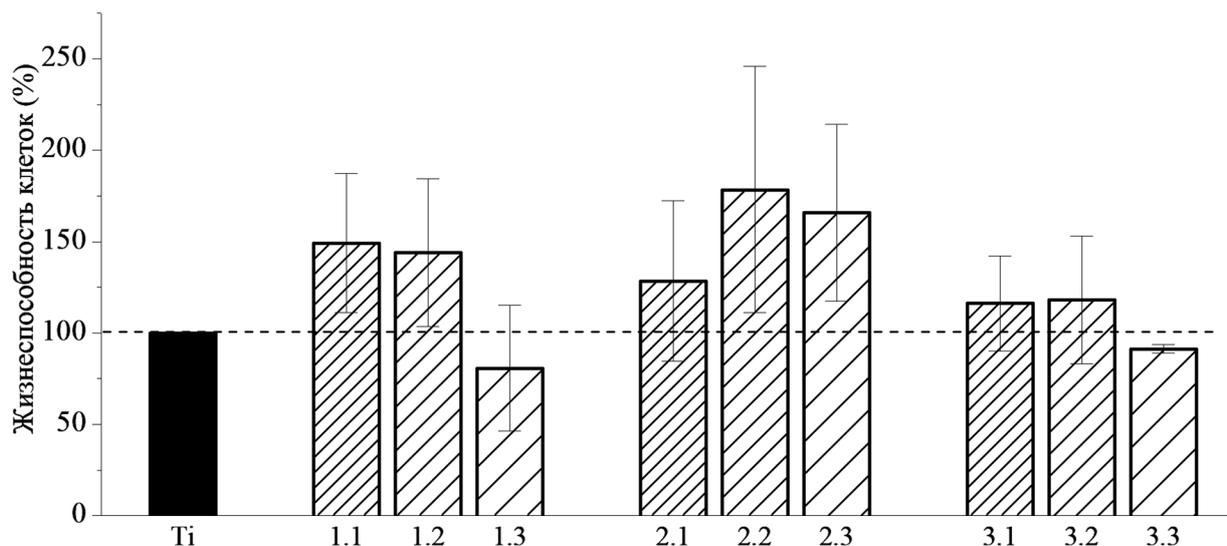


Рис. 3. Жизнеспособность клеток, определенная МТТ-тестом на титановых подложках и покрытиях Ti-Al-C-N
 Fig. 3. Cell viability determined by MTT-test on titanium substrates and Ti-Al-C-N coatings

Анализ результатов проводился в соответствии с общепринятыми методами статистической обработки [18]. Уровень достоверности составляет $\geq 95\%$. Значения стандартного отклонения для каждого набора образцов указаны на гистограммах.

Жизнеспособность фибробластов на всех исследуемых образцах покрытий Ti-Al-C-N находилась в диапазоне 81–178 % относительно Ti. Для всех образцов покрытий, за исключением 1.3 и 3.3, следует отметить тенденцию к улучшению прикрепляемости и выживаемости клеток. По способности покрываться клетками (фибробластами) образцы покрытий можно расположить в следующем порядке: 2.2 > 2.3 > 1.1 > 1.2 > 2.1 > 3.2 > 3.1 > 3.3 > 1.3.

Считается, что клеточная адгезия и пролиферация существенно зависят от особенностей поверхности имплантата [19]. Так, в статье [20] обсуждается влияние топографии поверхности никель-титановых подложек на распространение и размножение клеток. Показано, что скорость пролиферации и плотность клеток достигает больших значений на более гладких поверхностях, при этом значения шероховатости исследуемых подложек находились в диапазоне 0,5–7,5 мкм.

В работе [21] подтверждается предположение о негативном влиянии увеличения среднеквадратичной шероховатости на жизнеспособность фибробластов, но уже в более мелких масштабах – 2–30 нм. Однако стоит учитывать, что эти исследования проводились на подложках различного химического состава, и на результаты МТТ-теста оказывала влияние не только шероховатость поверхности, но и ее физико-химические свойства – смачиваемость и свободная поверхностная энергия.

Физиологические реакции напрямую зависят от морфологии поверхности имплантата и ее химического состава. В частности сообщается [22], что для хорошей остеоинтеграции поверхность имплантата должна обладать высокой смачиваемостью, а для улучшения гемосовместимости рельеф поверхности должен быть структурирован.

В нашем случае не удалось выявить взаимосвязи между шероховатостью покрытий Ti-Al-C-N (см. таблицу) и жизнеспособностью фибробластов. Данный факт может быть связан с небольшой разницей в средних значениях шероховатости (0,48–11,07 нм), а также с небольшим инкубационным периодом клеток (20 ч). Прямой зависимости между жизнеспособностью фибробластов и элементным составом покрытий также не обнаружено. Однако полученные результаты свидетельствуют как минимум о сохранении жизнеспособности (отсутствии гибели) клеток и их способности к дальнейшему распространению и размножению при контакте с поверхностью покрытий Ti-Al-C-N, при этом образцы 2.2 и 2.3 показали рост жизнеспособности клеток более чем на 65 % относительно титана.

Заклучение. По результатам проведенных исследований можно заключить, что нагрев подложки от 220 до 440 °С при осаждении покрытий Ti-Al-C-N методом реактивного магнетронного осаждения не оказывает значительного влияния на их элементный состав, но влияет на скорость осаждения, шероховатость поверхности и микроструктуру покрытий.

Варьирование элементного состава с помощью использования мишеней с различным соотношением Al/Ti приводит к изменению структуры покрытий Ti-Al-C-N: пленки с низким содержанием Al и соотношением концентрации элементов в составе Al/Ti ~ 0,39 (образцы 1.1–1.3) имеют столбчато-зернистую структуру без пор и видимых дефектов и низкую среднеквадратичную шероховатость S_q (3,30–5,86 нм); образцы покрытий 2.1–2.3 с соотношением Al/Ti ~ 0,96 обладают ярко выраженной столбчатой пористой структурой и наиболее высокой шероховатостью S_q (8,83–11,07 нм); пленки с повышенным содержанием Al и соотношением Al/Ti ~ 1,71 (образцы 3.1–3.3) характеризуются мелкозернистой (близкой к рентгеноаморфной) структурой и наименьшими значениями шероховатости S_q (0,48–1,74 нм).

По результатам проведенного МТТ-теста можно заключить, что пленки Ti-Al-C-N являются перспективными для использования в качестве покрытий для медицинских инструментов, имплантатов и других изделий, контактирующих с биологическими тканями. Прямой зависимости между жизнеспособностью фибробластов, шероховатостью поверхности покрытий и их элементным составом не обнаружено.

Список использованных источников

1. Наноматериалы, нанопокрyтия, нанотехнологии / Н. А. Азаренков [и др.]. – Харьков: ХНУ им. В. Н. Каразина, 2009. – 209 с.
2. A comparative study of titanium nitride (TiN), titanium oxy nitride (TiON) and titanium aluminum nitride (TiAlN), as surface coatings for bio implants / B. Subramanian [et al.] // Surf. Coat. Technol. – 2011. – Vol. 205, № 21/22. – P. 5014–5020. <https://doi.org/10.1016/j.surfcoat.2011.05.004>
3. Yi, P. Multilayered TiAlN films on Ti6Al4V alloy for biomedical applications by closed field unbalanced magnetron sputter ion plating process / P. Yi, L. Peng, J. Huang // Mater. Sci. Eng. C. – 2016. – Vol. 59. – P. 669–676. <https://doi.org/10.1016/j.msec.2015.10.071>
4. Use of International Standard ISO 10993-1, Biological Evaluation of Medical Devices. Part 1: Evaluation and Testing within a Risk Management Process / Administration Food and Drug. – 2016. – 65 p.
5. Evaluation of Plasma Ion Beam Sputtered TiN/TiAlN Multilayers on Steel for Bio Implant Applications / S. Balasubramanian [et al.] // Trans. JWRI. – 2011. – Vol. 40, № 2. – P. 55–58.
6. Subramanian, B. Microstructural, mechanical and electrochemical corrosion properties of sputtered titanium – aluminum – nitride films for bio-implants / B. Subramanian, R. Ananthakumar, M. Jayachandran // Vacuum. – 2010. – Vol. 85, № 5. – P. 601–609. <https://doi.org/10.1016/j.vacuum.2010.08.019>
7. Система контроля расхода газов для применения в технологии реактивного магнетронного распыления / И. М. Климович [и др.] // Приборы и методы измерений. – 2015. – Т. 6, № 2. – С. 139–147.
8. Бурмаков, А. П. Система управления газовым напуском для магнетронных технологий нанесения пленочных покрытий / А. П. Бурмаков, В. Н. Кулешов, А. В. Столярков // Информационные системы и технологии: материалы Междунар. конгресса по информатике. – Минск: БГУ, 2016. – С. 771–776.
9. The effect of surface chemistry and nanotopography of titanium nitride (TiN) films on primary hippocampal neurones / L. A. Cyster [et al.] // Biomaterials. – 2004. – Vol. 25, № 1. – P. 97–107. [https://doi.org/10.1016/S0142-9612\(03\)00480-0](https://doi.org/10.1016/S0142-9612(03)00480-0)
10. Nikš, M. Towards an optimized MTT assay / M. Nikš, M. Otto // J. Immunol. Methods. – 1990. – Vol. 130, № 1. – P. 149–151. [https://doi.org/10.1016/0022-1759\(90\)90309-j](https://doi.org/10.1016/0022-1759(90)90309-j)
11. TiAlN coatings deposited by triode magnetron sputtering varying the bias voltage / D. M. Devia [et al.] // Appl. Surf. Sci. – 2011. – Vol. 257, № 14. – P. 6181–6185. <https://doi.org/10.1016/j.apsusc.2011.02.027>
12. Influence of oxygen impurities on growth morphology, structure and mechanical properties of Ti–Al–N thin films / H. Riedl [et al.] // Thin Solid Films. – 2016. – Vol. 603. – P. 39–49. <https://doi.org/10.1016/j.tsf.2016.01.039>
13. Microstructural evolution during film growth / I. Petrov [et al.] // J. Vac. Sci. Technol. A Vacuum, Surfaces, Film. – 2003. – Vol. 21, № 5. – P. S117–S128. <https://doi.org/10.1116/1.1601610>
14. Wuhner, R. A study on the microstructure and property development of dc magnetron cosputtered ternary titanium aluminium nitride coatings Part III effect of substrate bias voltage and temperature / R. Wuhner, W. Y. Yeung // J. Mater. Sci. – 2002. – Vol. 37, № 10. – P. 1993–2004. <https://doi.org/10.1023/A:1015299115086>
15. Effect of ion bombardment on properties of hard reactively sputtered Ti(Fe)N_x films / J. Musil [et al.] // Surf. Coat. Technol. – 2004. – Vol. 177/178. – P. 289–298. <https://doi.org/10.1016/j.surfcoat.2003.09.007>
16. Musil, J. Physical and mechanical properties of hard nanocomposite films prepared by reactive magnetron sputtering / J. Musil // Nanostructured Coatings. – Springer, 2006. – P. 407–463. https://doi.org/10.1007/0-387-48756-5_10

17. Сурменова, М. А. Закономерности формирования, структурные особенности и свойства покрытий на основе фосфатов кальция, полученных ВЧ-магнетронным осаждением: дис. ... канд. физ.-мат. наук / М. А. Сурменова. – Томск, 2012. – 158 с.
18. Ашмарин, И. П. Быстрые методы статистической обработки и планирование экспериментов / И. П. Ашмарин, Н. Н. Васильев, В. А. Амвросов; ред. В. М. Николаева. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1975. – 76 с.
19. Relationship between surface properties (roughness, wettability) of titanium and titanium alloys and cell behaviour / L. Ponsonnet [et al.] // *Mater. Sci. Eng. C*. – 2003. – Vol. 23, № 4. – P. 551–560. [https://doi.org/10.1016/S0928-4931\(03\)00033-X](https://doi.org/10.1016/S0928-4931(03)00033-X)
20. Effect of surface topography and chemistry on adhesion, orientation and growth of fibroblasts on nickel – titanium substrates / L. Ponsonnet [et al.] // *Mater. Sci. Eng. C*. – 2002. – Vol. 21, № 1/2. – P. 157–165. [https://doi.org/10.1016/S0928-4931\(02\)00097-8](https://doi.org/10.1016/S0928-4931(02)00097-8)
21. Relationship between surface properties (roughness, wettability and morphology) of titanium and dental implant removal torque / C. N. Elias [et al.] // *J. Mech. Behav. Biomed. Mater.* – 2008. – Vol. 1, № 3. – P. 234–242. <https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2007.12.002>
22. Синтез биосовместимых поверхностей методами нанотехнологии / А. П. Алехин [и др.] // *Рос. нанотехнологии*. – 2010. – Т. 9, № 10. – С. 128–136.

References

1. Azarenkov N. A., Beresnev V. M., Pogrebnyak A. D., Malikov L. V., Turbin P. V. *Nanomaterials, nanocoatings, nanotechnologies*. Kharkov, V. N. Karazin Kharkiv National University, 2009. 209 p. (in Russian).
2. Subramanian B., Muraleedharan C. V., Ananthakumar R., Jayachandran M. A comparative study of titanium nitride (TiN), titanium oxy nitride (TiON) and titanium aluminum nitride (TiAlN), as surface coatings for bio implants. *Surface and Coatings Technology*, 2011, vol. 205, no. 21–22, pp. 5014–5020. <https://doi.org/10.1016/j.surfcoat.2011.05.004>
3. Yi P., Peng L., Huang J. Multilayered TiAlN films on Ti6Al4V alloy for biomedical applications by closed field unbalanced magnetron sputter ion plating process. *Materials Science and Engineering C*, 2016, vol. 59, pp. 669–676. <https://doi.org/10.1016/j.msec.2015.10.071>
4. Administration Food and Drug. *Use of International Standard ISO 10993-1, Biological Evaluation of Medical Devices. Part 1: Evaluation and Testing within a Risk Management Process*. 2016. 65 p.
5. Balasubramanian S., Guruswamy B., Takahashi M., Nishikawa H., Kobayashi A. Evaluation of Plasma Ion Beam Sputtered TiN/TiAlN Multilayers on Steel for Bio Implant Applications. *Transactions JWRI*, 2011, vol. 40, no. 2, pp. 55–58.
6. Subramanian B., Ananthakumar R., Jayachandran M. Microstructural, mechanical and electrochemical corrosion properties of sputtered titanium – aluminum – nitride films for bio-implants. *Vacuum*, 2010, vol. 85, no. 5, pp. 601–609. <https://doi.org/10.1016/j.vacuum.2010.08.019>
7. Klimovich I. M., Kuleshov V. N., Zaikov V. A., Burmakov A. P., Komarov F. F., Ludchik O. R. Gas flow control system in reactive magnetron sputtering technology. *Pribory i metody izmerenii = Devices and methods of measurements*, 2015, vol. 6, no. 2, pp. 139–147 (in Russian).
8. Burmakov A. P., Kuleshov V. N., Stoliarov A. V. Gas puffing control system for magnetron technologies of film coatings deposition. *Mezhdunarodnyi kongress po informatike: informatsionnye sistemy i tekhnologii = International Congress on Computer Science: Information Systems and Technologies*. Minsk, Belarusian State University, 2016, pp. 771–776 (in Russian).
9. Cyster L. A., Parker K. G., Parker T. L., Grant D. M. The effect of surface chemistry and nanotopography of titanium nitride (TiN) films on primary hippocampal neurones. *Biomaterials*, 2004, vol. 25, no. 1, pp. 97–107. [https://doi.org/10.1016/S0142-9612\(03\)00480-0](https://doi.org/10.1016/S0142-9612(03)00480-0)
10. Nikš M., Otto M. Towards an optimized MTT assay. *Journal of Immunological Methods*, 1990, vol. 130, no. 1, pp. 149–151. [https://doi.org/10.1016/0022-1759\(90\)90309-j](https://doi.org/10.1016/0022-1759(90)90309-j)
11. Devia D. M., Restrepo-Parra E., Arango P. J., Tschiptschin A. P., Velez J. M. TiAlN coatings deposited by triode magnetron sputtering varying the bias voltage. *Applied Surface Science*, 2011, vol. 257, no. 14, pp. 6181–6185. <https://doi.org/10.1016/j.apsusc.2011.02.027>
12. Riedl H., Koller C. M., Munnik F., Hutter H., Mendez Martin F., Rachbauer R., Kolozsvári S., Bartosik M., Mayrhofer P. H. Influence of oxygen impurities on growth morphology, structure and mechanical properties of Ti–Al–N thin films. *Thin Solid Films*, 2016, vol. 603, pp. 39–49. <https://doi.org/10.1016/j.tsf.2016.01.039>
13. Petrov I., Barna P. B., Hultman L., Greene J. E. Microstructural evolution during film growth. *Journal of Vacuum Science & Technology A: Vacuum, Surfaces, and Films*, 2003, vol. 21, no. 5, pp. S117–S128. <https://doi.org/10.1116/1.1601610>
14. Wuhler R., Yeung W. Y. A study on the microstructure and property development of dc magnetron cosputtered ternary titanium aluminium nitride coatings Part III effect of substrate bias voltage and temperature. *Journal of Materials Science*, 2002, vol. 37, no. 10, pp. 1993–2004. <https://doi.org/10.1023/A:1015299115086>
15. Musil J., Poláková H., Šuna J., Vlček J. Effect of ion bombardment on properties of hard reactively sputtered Ti(Fe)N_x films. *Surface and Coatings Technology*, 2004, vol. 177–178, pp. 289–298. <https://doi.org/10.1016/j.surfcoat.2003.09.007>
16. Musil J. Physical and mechanical properties of hard nanocomposite films prepared by reactive magnetron sputtering. *Nanostructured Coatings*. Springer, 2006, pp. 407–463. https://doi.org/10.1007/0-387-48756-5_10
17. Surmeneva M. A. *Regularities of formation, structural features and properties of coatings based on calcium phosphates obtained by HF magnetron deposition*. Tomsk, 2012. 158 p. (in Russian).

18. Ashmarin I. P., Vasil'ev N. N., Amyrosov V. A. *Fast methods of statistical processing and experiment planning*. Leningrad, Publishing House of the Leningrad State University, 1975. 76 p. (in Russian).

19. Ponsonnet L., Reybier K., Jaffrezic N., Comte V., Lagneau C., Lissac M., Martelet C. Relationship between surface properties (roughness, wettability) of titanium and titanium alloys and cell behaviour. *Materials Science and Engineering C*, 2003, vol. 23, no. 4, pp. 551–560. [https://doi.org/10.1016/S0928-4931\(03\)00033-X](https://doi.org/10.1016/S0928-4931(03)00033-X)

20. Ponsonnet L., Comte V., Othmane A., Lagneau C., Charbonnier M., Lissac M., Jaffrezic N. Effect of surface topography and chemistry on adhesion, orientation and growth of fibroblasts on nickel – titanium substrates. *Materials Science and Engineering C*, 2002, vol. 21, no. 1–2, pp. 157–165. [https://doi.org/10.1016/S0928-4931\(02\)00097-8](https://doi.org/10.1016/S0928-4931(02)00097-8)

21. Elias C. N., Oshida Y., Lima J. H. C., Muller C. A. Relationship between surface properties (roughness, wettability and morphology) of titanium and dental implant removal torque. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, 2008, vol. 1, no. 3, pp. 234–242. <https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2007.12.002>

22. Alekhin A. P., Boleiko G. M., Gudkova S. A., Markeev A. M., Sigarev A. A., Toknova V. F., Kirilenko A. G., Lapshin R. V., Kozlov E. N., Tetukhin D. V. Synthesis of biocompatible surfaces by nanotechnology methods. *Rossiiskie nanotekhnologii = Russian nanotechnologies*, 2010, vol. 9, no. 10, pp. 128–136 (in Russian).

Информация об авторах

Климович Ирина Михайловна – аспирант, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: imklimovich@gmail.com

Комаров Фадей Фадеевич – член-корреспондент, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией, Институт прикладных физических проблем им. А. Н. Севченко Белорусского государственного университета (ул. Курчатова 7, 220045, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: komarovf@bsu.by

Шолух Михаил Васильевич – кандидат биологических наук, заведующий лабораторией, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: msholukh@mail.ru

Зайков Валерий Александрович – старший научный сотрудник, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: valery48@tut.by

Баран Людмила Владимировна – кандидат физико-математических наук, заведующий сектором обслуживания научных исследований, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: brlv@mail.ru

Information about the authors

Iryna M. Klimovich – Postgraduate Student, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: imklimovich@gmail.com

Fadei F. Komarov – Corresponding Member, D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Laboratory, A. N. Sevchenko Institute of Applied Physical Problems of the Belarusian State University (7, Kurchatov Str., 220045, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: komarovf@bsu.by

Mikhail V. Sholukh – Ph. D. (Biology), Head of the Laboratory, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: msholukh@mail.ru

Valery A. Zaikov – Senior Researcher, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: valery48@tut.by

Ludmila V. Baran – Ph. D. (Physics and Mathematics), Head of the Research Services Sector, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: brlv@mail.ru

ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)

УЧЕНЫЕ БЕЛАРУСИ
SCIENTISTS OF BELARUS

АЛЕКСАНДР ФЕДОРОВИЧ ЧЕРНЯВСКИЙ

(К 80-летию со дня рождения)

14 сентября 2018 г. исполнилось 80 лет со дня рождения известного белорусского ученого, академика Национальной академии наук Беларуси, доктора технических наук, профессора, признанного специалиста в области информатики, разработки теории, аппаратных и программных средств обеспечения физического эксперимента, автоматизированной обработки информации – Александра Федоровича Чернявского.

Александр Федорович родился в г. Рязани в семье служащих. В 1955 г. с серебряной медалью окончил в г. Ульяновске среднюю школу. В 1955 г. поступил на факультет автоматики и телемеханики Рязанского радиотехнического института, который окончил с отличием в 1960 г. С 1960 по 1962 г. работал инженером в г. Коломне Московской области. В 1962 г. поступил в аспирантуру Белорусского государственного университета, которую закончил в 1965 г. защитой диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности «Радиофизика». В 1971 г. защитил докторскую диссертацию по специальности «Информационно-измерительные системы».

С 1964 по 1971 г. А. Ф. Чернявский работал старшим инженером, главным инженером, старшим научным сотрудником, заведующим сектором Белорусского государственного университета, с 1971 по 1979 г. – заведующим лабораторией, затем заведующим отделом средств автоматизации научных исследований НИИ прикладных физических проблем им. А. Н. Севченко БГУ. В 1979–2009 гг. Александр Федорович – директор, а с 2010 г. – заведующий отделом этого института. В 1997–2002 гг. – член Президиума НАН Беларуси.

Александр Федоровичу принадлежит ведущая роль в создании белорусской научной школы по разработке радиофизических методов и информационно-измерительных средств различного назначения. Основные направления научных исследований: развитие теории параметрического оценивания случайных последовательностей быстропеременных сигнальных потоков на фоне высокоинтенсивных шумовых потоков в физическом эксперименте; разработка позиционно-модулярных методов и устройств параллельно-конвейерной обработки информации, автоматизированных информационно-аналитических систем управления технологическими процессами и производственными объектами. Ученым разработаны принципы структурного построения измерительных преобразователей и цифровых устройств модулярной экспресс-обработки данных и соответствующая микроэлектронная элементная база. Развита теория преобразования позиционного кода в минимально-избыточный модулярный код и компьютерно-алгоритмические средства выполнения модульных операций для многомашинной и мультипроцессорной технологии модулярной обработки информации, позволяющие осуществлять быстрые и высокоточные вычисления при цифровой обработке сигналов. Разработаны методы, алгоритмы и программное обеспечение, предназначенные для использования в интеллектуальных системах анализа



эмпирических данных, традиционных и автономных адаптивных системах управления, идентификации и технической диагностики.

А. Ф. Чернявский внес большой вклад в разработку теории, аппаратных и программных средств обеспечения экспериментальных исследований в ядерной физике, акустике, физике плазмы, лазерной физике, дистанционной фотометрии, физике взаимодействия мощного электромагнитного излучения с различными средами и материалами. Важные научные результаты получены при создании автоматизированных информационно-обучающих систем для образования и производства, а также информационно-аналитических систем для органов государственного управления.

Научная деятельность Александра Федоровича неразрывно связана с педагогической работой. С 1973 по 1979 г. на общественных началах он заведовал кафедрой электронных математических машин БГУ, а в 1986–2015 гг. руководил кафедрой интеллектуальных систем Белгосуниверситета. Им подготовлено более 50 кандидатов наук, из которых 12 защитили докторские диссертации. Опубликовано более 320 научных работ, в том числе 12 монографий, получено 77 авторских свидетельств на изобретения.

В 1979 г. ученому присвоено звание «Заслуженный деятель науки и техники Белорусской ССР». За создание и внедрение в учебный процесс автоматизированных информационно-обучающих систем на базе ЭВМ в 1984 г. ему присуждена премия Совета Министров СССР. За разработку и внедрение в практику оптико-физических исследований статистических методов временного анализа быстропеременных потоков светового излучения А. Ф. Чернявский удостоен Государственной премии БССР (1986), за разработку и внедрение в народное хозяйство систем измерения позиционно-модулярного типа – Государственной премии СССР (1991). В 1987 г. Александр Федорович избран членом-корреспондентом, в 1994 г. – действительным членом НАН Беларуси.

А. Ф. Чернявский и в настоящее время выполняет большую научно-организационную и общественную работу. Является членом редколлегий журналов «Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук», «Информатика», «Журнал Белорусского государственного университета», членом специализированного совета по защите диссертаций.

Глубокие творческие идеи, энергия ученого и высокие моральные качества позволили А. Ф. Чернявскому снискать авторитет чуткого и доброжелательного человека, мудрого и корректного руководителя. Мы искренне поздравляем Александра Федоровича с юбилеем, желаем ему доброго здоровья, благополучия и осуществления всех творческих замыслов.

*Отделение физики, математики и информатики НАН Беларуси,
Институт прикладных физических проблем им. А. Н. Севченко БГУ,
Белорусское физическое общество*

ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)

ВЯЧЕСЛАВ ИВАНОВИЧ ЯНЧЕВСКИЙ

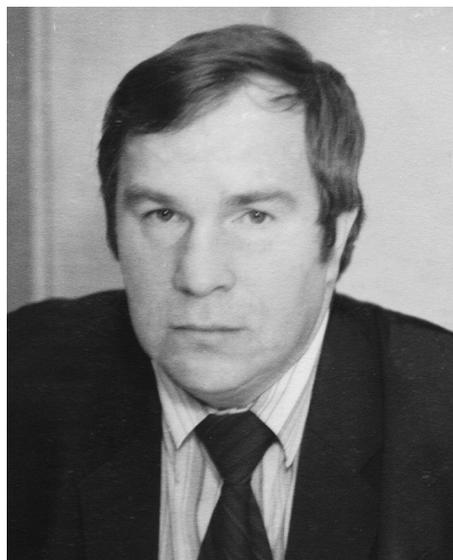
(К 70-летию со дня рождения)

9 июля 2018 г. исполнилось 70 лет со дня рождения академика Национальной академии наук Беларуси, доктора физико-математических наук, профессора Вячеслава Ивановича Янчевского – известного ученого в области алгебры и алгебраической геометрии.

Вячеслав Иванович родился в г. Минске. Еще в школьные годы серьезно заинтересовался математикой, поэтому из СШ № 27 перешел в специализированную школу № 50 с физико-математическим уклоном, а в 1964 г. поступил в школу-интернат № 18 физико-математического профиля при Московском университете (ныне – Специализированный учебно-научный центр (факультет) – школа-интернат имени А. Н. Колмогорова Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова), которую закончил в 1966 г.

В 1966 г. В. И. Янчевский поступил на математический факультет Белорусского государственного университета, который окончил с отличием в 1971 г. Еще в студенческие годы под руководством академика В. П. Платонова начал активную научную работу. После досрочного окончания аспирантуры и защиты кандидатской диссертации по теме «Строение классических групп над конечномерными телами» с 1974 г. работает в Институте математики НАН Беларуси, где прошел путь от младшего научного сотрудника до заведующего отделом алгебры (с 1993 г.). В 1980 г. защитил докторскую диссертацию «Приведенная унитарная К-теория». В 1990 г. Вячеславу Ивановичу присвоено ученое звание профессора. В 2009 г. он избран членом-корреспондентом, а в 2014 г. – действительным членом НАН Беларуси.

Основные области научных интересов В. И. Янчевского: теория анизотропных алгебраических групп, алгебраическая геометрия маломерных многообразий, теория групп Брауэра полей и алгебраических многообразий, алгебраическая К-теория, теория конечномерных алгебр. Работы ученого внесли существенный вклад в развитие этих направлений: им построены приведенная унитарная и спинорная К-теории; в последнее время получен ряд глубоких и во многом неожиданных результатов, которые привели к решению двух старых известных проблем алгебраической геометрии. Совместно с А. Уодсвортом (Калифорнийский университет в Беркли, США) В. И. Янчевским было закончено построение приведенной унитарной К-теории изотропных эрмитовых форм градуированных алгебр с делением, что завершило многолетние исследования ряда известных специалистов из Германии, США, Великобритании и России. С помощью алгебро-геометрических методов совместно с У. Реманном (Билефельдский университет, ФРГ) и С. В. Тихоновым им была решена проблема вложимости произвольных алгебр Адзумайи в циклические с сохранением их индексов и экспонент, в течение 40 лет не поддававшаяся решению. Недавно В. И. Янчевский установил циклическость центральных простых алгебр над полем функций проективной плоскости с ветвлением в кониках, кубиках и квадраках и доказал существование расширений скаляров, являющихся полями функций некоторых многообразий Севери – Брауэра, над которыми алгебры имеют предписанные свойства (являются скрещенными произведениями с заданной группой Галуа, сохраняют индексы, имеют заданные экспоненты). В последнее время исследования ученого связаны с построением приведенной унитарной К-теории анизотропных эрмитовых форм над гензелевыми алгебрами с делением.



Вячеслав Иванович – автор более 200 научных работ, среди которых статьи в ведущих математических журналах – «Доклады Академии наук» (Москва), «Известия Российской академии наук. Серия математическая», «Записки научных семинаров ПОМИ», «Journal of Algebra», «Communications in Algebra», «Manuscripta Mathematica», «Proceedings of the American Mathematical Society», «Transactions of the American Mathematical Society», «Bulletin of the Belgian Mathematical Society», «Algebra and Discrete Mathematics» и др. В. И. Янчевский активно участвует в международном научном сотрудничестве – он был белорусским координатором ряда международных проектов Еврокомиссии, ИНТАС и БРФФИ, неоднократно приглашался для проведения исследований в научных центрах Германии, Бельгии, Израиля, Швейцарии, выступал с докладами на многих представительных международных математических форумах, в том числе на международных конгрессах математиков (Мадрид, 2006; Хайдарабад, 2010; Сеул, 2014) и европейских математических конгрессах (Будапешт, 1996; Краков, 2012).

В последнее время быстро возрастает значение алгебры (и в особенности алгебраической геометрии) для решения проблем защиты информации, что вызвано использованием все более сложных алгебраических объектов в современных и перспективных криптографических системах. Под руководством В. И. Янчевского был успешно выполнен ряд прикладных НИР по защите информации в рамках государственных программ «Гранит» и «Гранит-2».

Вячеслав Иванович много сил уделяет подготовке кадров. Более 15 лет он возглавлял кафедру геометрии, топологии и методики преподавания математики БГУ, в настоящее время является научным руководителем этой кафедры и членом Ученого совета механико-математического факультета БГУ. Разработал программы и прочел ряд оригинальных специальных курсов по различным разделам алгебры и алгебраической геометрии; является автором двух основополагающих учебных пособий – «Введение в математику» (2003, совместно с С. Г. Кононовым и Р. И. Тышкевич) и «Основы аффинной геометрии» (2009, совместно с С. Г. Кононовым, А. В. Прокочуком и Т. В. Тихоновой).

В. И. Янчевский подготовил 12 кандидатов наук. Ведет большую научно-организационную работу: много лет руководит специализированным советом по защитах диссертаций при Институте математики НАН Беларуси, является членом Научного совета Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований, членом редколлегий журналов «Труды Института математики», «Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук» и «Algebra and Discrete Mathematics», членом Редакционно-издательской комиссии НАН Беларуси и секции технических и физико-математических наук комиссии по премиям НАН Беларуси.

Вячеслав Иванович – лауреат премии НАН Беларуси (2008) за цикл работ «Алгебраические многообразия: структурные свойства и модулярные представления алгебраических групп», награжден нагрудным знаком «Отличник образования Беларуси», ему присвоено почетное звание «Заслуженный работник Белорусского государственного университета».

В. И. Янчевский пользуется уважением не только в коллективе Института математики, но и во многих научных центрах разных стран мира, где ведутся исследования по алгебре. Глубокие творческие идеи, высокий профессионализм, принципиальность и такт обеспечили ему авторитет талантливого ученого и педагога, чуткого и доброжелательного человека. Сердечно поздравляем Вячеслава Ивановича с юбилеем, желаем крепкого здоровья, новых прекрасных теорем и гипотез, талантливых и увлеченных учеников и удачи во всех начинаниях.

*Отделение физики, математики и информатики НАН Беларуси,
Институт математики НАН Беларуси,
Белорусское математическое общество*

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Редакция журнала «Весті Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук» просит авторов руководствоваться приведенными ниже правилами.

I. Статьи о результатах работ, проведенных в научных учреждениях, должны иметь разрешение на опубликование (сопроводительное письмо ректората или дирекции соответствующего института либо выписку из протокола заседания ученого совета, отдела или кафедры, а также акт экспертизы).

II. Статья предоставляется в редакцию в двух экземплярах на белорусском, русском или английском языках; шрифт – Times New Roman, кегль – 11 (в том числе в формулах); межстрочный интервал – 1,5. Занумерованные формулы выносятся в отдельную строку. Формулировки утверждений (теорем, лемм, предложений и следствий) должны быть выполнены курсивом. В тексте не допускаются рукописные вставки и вклейки. Статья должна быть подписана всеми авторами.

III. Статья должна иметь следующую структуру:

1. Индекс по Универсальной десятичной классификации (УДК);
инициалы и фамилии авторов;

полное наименование учреждений, где работают авторы, с указанием города и страны, название статьи.

2. Аннотация (авторское резюме) объемом 150–250 слов должна кратко представлять результаты работы и быть понятной, в том числе и в отрыве от основного текста статьи; должна быть информативной, хорошо структурированной (один из вариантов написания аннотации – краткое повторение структуры статьи, включающее введение, цели и задачи, методы, результаты, заключение или выводы).

3. Ключевые слова – набор слов, отражающих содержание текста в терминах объекта, научной отрасли и методов исследования; рекомендуемое количество ключевых слов 5–10.

4. Затем метатекстовые данные (все то, что предшествует основному тексту статьи) приводятся на английском языке, причем аннотация должна быть оригинальной (т. е. не являться дословным переводом русскоязычной аннотации). Если статья англоязычная – вышеуказанные данные приводятся на русском (белорусском) языке.

5. Основной текст статьи не должен превышать 16 с. (т. е. около 40 тыс. знаков); в этот объем также входят таблицы и рисунки (до 7–8). Изложенный материал должен быть четко структурированным: введение, цели и задачи, методы, результаты, заключение (выводы). В русско- и белорусскоязычных статьях рекомендуется делать подрисовочные подписи и надписи на самих иллюстрациях на двух языках – русском (белорусском) и английском.

6. Список использованной литературы (не более 40 ссылок) оформляется в соответствии с требованиями Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь (ГОСТ 7.1-2003). Цитируемая литература приводится общим списком по мере упоминания, ссылки в тексте даются порядковым номером в квадратных скобках (напр., [1]); ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

7. Затем приводится список цитированных источников в *романском алфавите* (латиница) («References») со следующей структурой: авторы, название статьи (после русскоязычного названия в квадратных скобках дается его перевод на английский язык), название источника (после русскоязычного источника в квадратных скобках дается перевод его названия на английский язык), выходные данные с обозначениями на английском языке.

IV. Для подготовки метаданных (так называемый информационный лист) на отдельной странице следует указать на русском и английском языках для каждого автора: фамилию, имя и отчество (полностью), ученую степень, звание, должность, место работы с указанием адреса, контактную информацию (e-mail, ORCID, телефоны).

V. Электронный вариант статьи предоставляется на диске, флешке или присылается по электронной почте в редакцию журнала – fmvesti@mail.ru, загружается на сайт журнала (vestifm.belnauka.by). Текст должен быть набран в Word под Windows, формулы – в редакторе MathType. Собственным редактором формул версий Microsoft Office 2007 и выше пользоваться нельзя, так как в редакционно-издательском процессе он не поддерживается. Вставку символов выполнять через меню «Вставка/Символ». Выключку вверх и вниз (C^2 , C) выполнять через меню «Формат/Шрифт/Верхний индекс», «Формат/Шрифт/Нижний индекс». Латинские⁴ буквы необходимо набирать курсивом, греческие – прямо (для набора греческих символов следует пользоваться гарнитурой Symbol). Обозначения математических функций (lim, sup, ln, sin, Re, Im и т. п.), символы химических элементов (N, Cl) также набираются прямым шрифтом.

VI. Черно-белые и цветные рисунки вставляются в текст статьи (Word), а также даются в виде отдельных файлов в формате tif (600 точек на дюйм). Желательно также предоставлять их в формате оригинала (Corel, диаграммы в Excel, Origin Pro и т. д.), т. е. в той программе, в которой они выполнены. Текст на рисунках набирается основной гарнитурой, причем начертание символов (греческое, латинское) должно соответствовать их начертанию в тексте. Размер кегля соизмерим с размером рисунка (желательно 8 пунктов). На обороте рисунков (если они даются отдельно) указываются фамилии авторов, название статьи. Фотографии предоставляются в виде файлов (tif, jpg, png, eps) и в распечатанном виде.

VII. Поступившая в редакцию статья направляется на рецензию, затем визируется членом редколлегии. Основным критерием целесообразности публикации является новизна и информативность статьи. Если по рекомендации рецензента статья возвращается автору на доработку, то переработанная рукопись вновь рассматривается редколлегией. Статьи не по профилю журнала возвращаются авторам после заключения редколлегии.

Материалы для публикации следует направлять по адресу:

*ул. Академическая, 1, к. 119, редакция журнала
«Весці НАН Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук»,
220072, г. Минск, Рэспубліка Беларусь;
тел. для справок: +375 17 369 76 52 (среда); +375 17 284 19 19 (четверг, пятница),
либо по электронной почте: fmvesti@mail.ru. либо через онлайн-форму на сайте.*